

מתמטיקה שימושית 1

פרק 48 - אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

תוכן העניינים

1. מבוא מתמטי לפרק.
2. אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות.
3.

מבוא מתמטי לפרק

שאלות

1) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית :

א. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq 0\}$

2) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית :

א. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

3) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית :

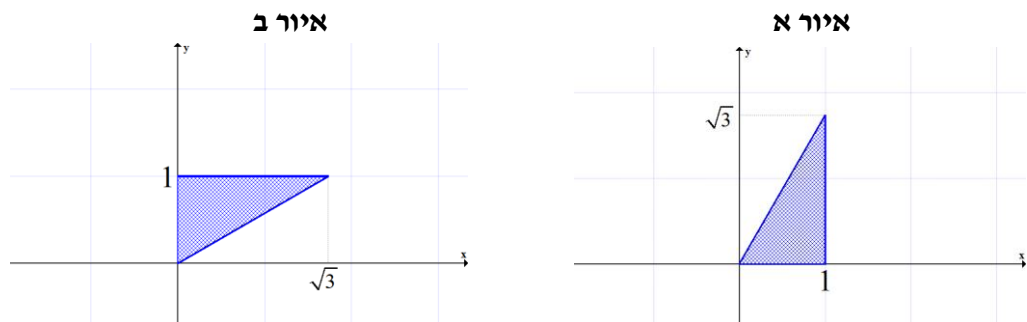
א. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq 2x\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\}$

4) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית : $S = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{7}x + \frac{25}{7} \leq y \leq \sqrt{25-x^2} \right\}$.

5) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית : $S = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{\sqrt{3}}x \leq y \leq \sqrt{8x-x^2} \right\}$.

6) להלן שני איורים, ובכל איור תחום. כתבו כל אחד מהתחומים בהצגה פולרית ותארו במילים כל אחד מהתחומים.



תשובות סופיות

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0.5\pi \leq \theta \leq 1.5\pi \end{cases} \text{ .ג} \quad \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \text{ .ב} \quad \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \text{ .א (1)}$$

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ -0.5\pi \leq \theta \leq 0.5\pi \end{cases} \text{ .ג} \quad \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 0.5\pi \end{cases} \text{ .ב} \quad \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \text{ .א (2)}$$

or

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 1.5\pi \leq \theta \leq 2.5\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \text{ .ד}$$

$$0 \leq r \leq 2, 0.25\pi \leq \theta \leq 1.25\pi \text{ .ב} \quad \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0.25\pi \leq \theta \leq \arctan 2 \end{cases} \text{ .א (3)}$$

$$\frac{25}{7 \sin \theta - \cos \theta} \leq r \leq 5 \quad \arctan \frac{4}{3} \leq \theta \leq \arctan \left(-\frac{3}{4} \right) + \pi \text{ (4)}$$

$$0 \leq r \leq 8 \cos \theta, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ (5)}$$

$$0 \leq r \leq \frac{1}{\sin \theta} \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ .ב} \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \theta} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \text{ .א (6)}$$

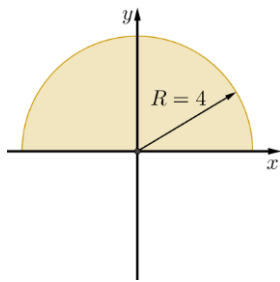
אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

שאלות

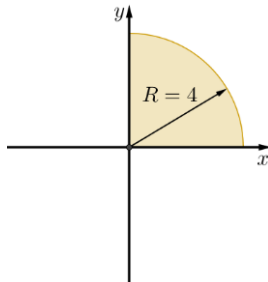
1) חשבו $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dA$, כאשר D התחום המתואר בשרטוט.

* בסעיף ט אל תחשבו את האינטגרל המתקבל לאחר המעבר לקואורדינטות קוטביות.

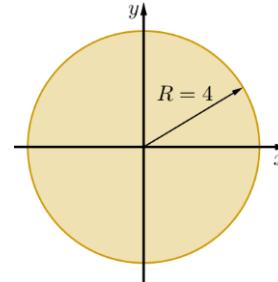
ג.



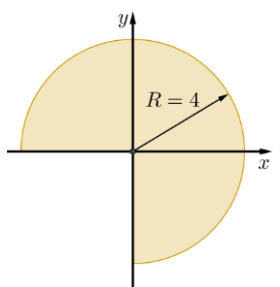
ב.



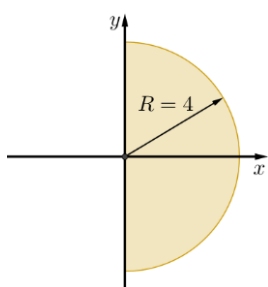
א.



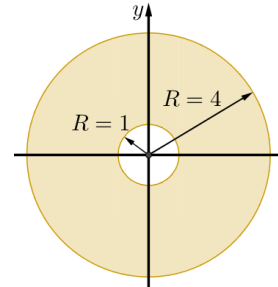
ו.



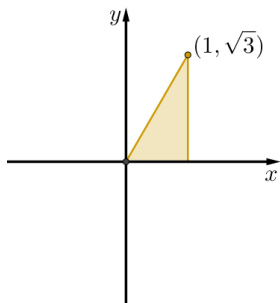
ה.



ד.



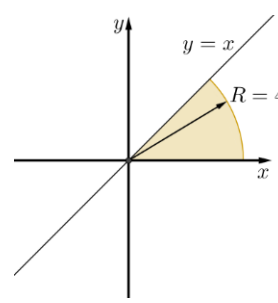
ט.



ח.



ז.



חשבו את האינטגרלים בשאלות 2-17, תוך מעבר לקואורדינטות קוטביות:

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy dx \quad (3)$$

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy dx \quad (2)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (5)$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (4)$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (7)$$

$$\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy dx \quad (6)$$

$$\int_0^2 \int_0^x y dy dx \quad (9)$$

$$\int_0^6 \int_0^y x dx dy \quad (8)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^0 \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2} dx dy \quad (11)$$

$$\int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}} dy dx \quad (10)$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dy dx \quad (13)$$

$$\int_0^{\ln 2} \int_0^{\sqrt{\ln^2 2 - y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy \quad (12)$$

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^0 xy^2 dx dy \quad (15)$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2} dy dx \quad (14)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2} dy dx \quad (17)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1) dx dy \quad (16)$$

בשאלות 18-20 חשבו את נפח הגוף המתואר:

(18) הגוף הכלוא בין פני הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ לבין הגליל $x^2 + y^2 = 1$.

(19) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2 + y^2 = 2y$, בין החרוט $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ מלמעלה לבין המישור xy מלמטה.

(20) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2 + y^2 = x$, בין הפרבולואיד $z = 1 - x^2 - y^2$ מלמעלה לבין מישור xy מלמטה.

(21) חשבו את שטח התחום החסום על ידי $x^2 + y^2 = 2x$, $y = 0$, $y = x\sqrt{3}$.

תשובות סופיות

- (1) א. $\frac{128\pi}{3}$ ב. $\frac{32\pi}{3}$ ג. $\frac{64\pi}{3}$ ד. 42π ה. $\frac{64\pi}{3}$
- ו. 32π ז. $\frac{16\pi}{3}$ ח. $\frac{32\pi}{9}$ ט. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} r^2 dr d\theta$
- (2) א. $\frac{\pi}{2}$ ב. π ג. $\frac{\pi}{8}$ ד. $\frac{\pi}{2}$ ה. $\frac{\pi}{2}$
- (3) א. πa^2 ב. 2π ג. $\frac{4}{3}$ ד. 36 ה. $\frac{4}{3}$
- (4) א. $\pi \ln \frac{e}{2}$ ב. $\pi(4-\pi)$ ג. $\frac{\pi}{2} \ln \frac{4}{e}$ ד. $\frac{\pi(e-1)}{4e}$ ה. $\frac{\pi}{2}$
- (5) א. $\frac{\pi}{2} + 1$ ב. $-\frac{4}{5}$ ג. $\pi \ln \frac{4}{e}$ ד. π ה. $\frac{\pi}{2}$
- (6) א. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$ ב. $\frac{32}{9}$ ג. $\frac{5\pi}{32}$ ד. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ה. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$
- (7) א. $\frac{32}{9}$ ב. $\frac{5\pi}{32}$ ג. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ד. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$ ה. $\frac{32}{9}$
- (8) א. $\frac{5\pi}{32}$ ב. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ג. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$ ד. $\frac{32}{9}$ ה. $\frac{5\pi}{32}$
- (9) א. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ב. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$ ג. $\frac{32}{9}$ ד. $\frac{5\pi}{32}$ ה. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$
- (10) א. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$ ב. $\frac{32}{9}$ ג. $\frac{5\pi}{32}$ ד. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ה. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$
- (11) א. $\frac{32}{9}$ ב. $\frac{5\pi}{32}$ ג. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ד. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$ ה. $\frac{32}{9}$
- (12) א. $\frac{5\pi}{32}$ ב. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ג. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$ ד. $\frac{32}{9}$ ה. $\frac{5\pi}{32}$
- (13) א. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ב. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$ ג. $\frac{32}{9}$ ד. $\frac{5\pi}{32}$ ה. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$
- (14) א. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$ ב. $\frac{32}{9}$ ג. $\frac{5\pi}{32}$ ד. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ה. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$
- (15) א. $\frac{32}{9}$ ב. $\frac{5\pi}{32}$ ג. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ד. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$ ה. $\frac{32}{9}$
- (16) א. $\frac{5\pi}{32}$ ב. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ג. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$ ד. $\frac{32}{9}$ ה. $\frac{5\pi}{32}$
- (17) א. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ב. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$ ג. $\frac{32}{9}$ ד. $\frac{5\pi}{32}$ ה. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$
- (18) א. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$ ב. $\frac{32}{9}$ ג. $\frac{5\pi}{32}$ ד. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ה. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$
- (19) א. $\frac{32}{9}$ ב. $\frac{5\pi}{32}$ ג. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ד. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$ ה. $\frac{32}{9}$
- (20) א. $\frac{5\pi}{32}$ ב. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ג. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$ ד. $\frac{32}{9}$ ה. $\frac{5\pi}{32}$
- (21) א. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ב. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$ ג. $\frac{32}{9}$ ד. $\frac{5\pi}{32}$ ה. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$