# מתמטיקה לכלכלנים ב

## פרק 19 - אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

### תוכן העניינים

1. מבוא מתמטי לפרק ..... 1
2. אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות ..... 3

# מבוא מתמטי לפרק

## שאלות

**1)** שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,0\le y\le\sqrt{4-x^2}\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\sqrt{4-y^2}\le x\le 0\right\}$

**2)** שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0,y\ge 0\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0\right\}$

ד. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ y\ge 0\right\}$

**3)** שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\le y\le 2x\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,\ y\ge x\right\}$

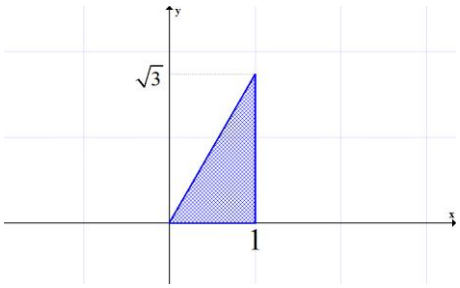
**4)** הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{7}x+\frac{25}{7}\le y\le\sqrt{25-x^2}\right\}$.

**5)** הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{\sqrt{3}}x\le y\le\sqrt{8x-x^2}\right\}$.

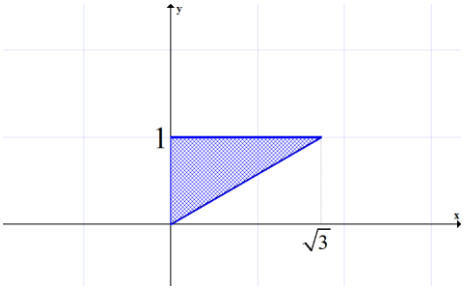

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**6)** להלן שני איורים, ובכל איור תחום.
כתבו כל אחד מהתחומים בהצגה פולרית ותארו במילים כל אחד מהתחומים.

**איור א**




**איור ב**




## תשובות סופיות

**1)** א. $\begin{cases}0\le r\le 2\\0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$ ב. $\begin{cases}0\le r\le 2\\0\le\theta\le \pi\end{cases}$ ג. $\begin{cases}0\le r\le 2\\0.5\pi\le\theta\le 1.5\pi\end{cases}$

**2)** א. $\begin{cases}1\le r\le 2\\0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$ ב. $\begin{cases}1\le r\le 2\\0\le\theta\le 0.5\pi\end{cases}$ ג. $\begin{cases}1\le r\le 2\\-0.5\pi\le\theta\le 0.5\pi\end{cases}$ *or* $\begin{cases}1\le r\le 2\\1.5\pi\le\theta\le 2.5\pi\end{cases}$

ד. $\begin{cases}1\le r\le 2\\0\le\theta\le \pi\end{cases}$

**3)** א. $\begin{matrix}1\le r\le 2\\0.25\pi\le\theta\le\arctan 2\end{matrix}$ ב. $0\le r\le 2,\ 0.25\pi\le\theta\le 1.25\pi$

**4)** $\dfrac{25}{7\sin\theta-\cos\theta}\le r\le 5$
$\arctan\dfrac{4}{3}\le\theta\le\arctan\left(-\dfrac{3}{4}\right)+\pi$

**5)** $0\le r\le 8\cos\theta,\ \dfrac{\pi}{6}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

**6)** א. $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{3}\quad 0\le r\le\dfrac{1}{\cos\theta}$ ב. $\dfrac{\pi}{6}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\quad 0\le r\le\dfrac{1}{\sin\theta}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

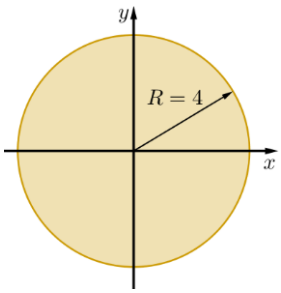
# אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

## שאלות

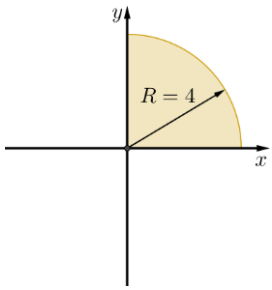
**1)** חשבו $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dA$, כאשר $D$ התחום המתואר בשרטוט.

* בסעיף ט אל תחשבו את האינטגרל המתקבל לאחר המעבר לקואורדינטות קוטביות.

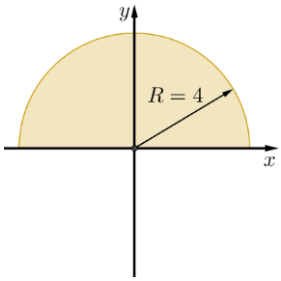
א.



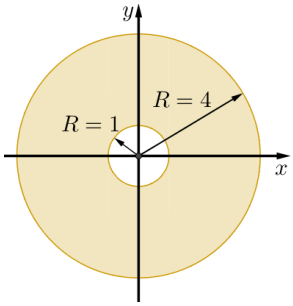

ב.



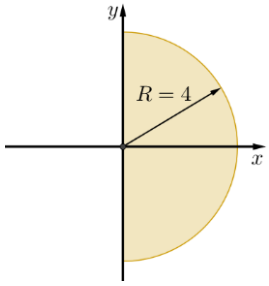

ג.



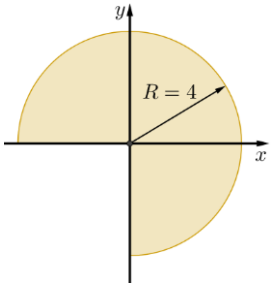

ד.



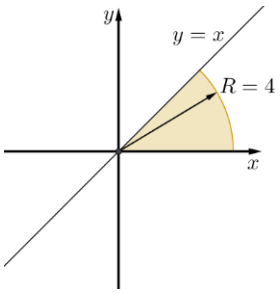

ה.



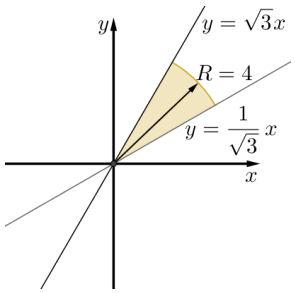

ו.



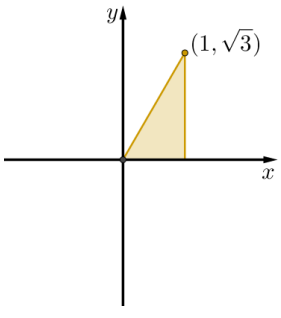

ז.




ח.




ט.



חשבו את האינטגרלים בשאלות **2-17**, תוך מעבר לקואורדינטות קוטביות:

**2)** $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dydx$

**3)** $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dydx$

**4)** $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2)dxdy$

**5)** $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2)dxdy$

**6)** $\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dydx$

**7)** $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} (x^2+y^2)dxdy$

**8)** $\int_{0}^{6}\int_{0}^{y} xdxdy$

**9)** $\int_{0}^{2}\int_{0}^{x} ydydx$

**10)** $\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}dydx$

**11)** $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}dxdy$

**12)** $\int_{0}^{\ln 2}\int_{0}^{\sqrt{\ln^2 2-y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$

**13)** $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}dydx$

**14)** $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2}dydx$

**15)** $\int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{0} xy^2dxdy$

**16)** $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1)dxdy$

**17)** $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}dydx$

בשאלות **18-20** חשבו את **נפח הגוף** המתואר:

**18)** הגוף הכלוא בין פני הכדור $x^2+y^2+z^2=9$ לבין הגליל $x^2+y^2=1$.

**19)** הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=2y$, בין החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ מלמעלה לבין המישור $xy$ מלמטה.

**20)** הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=x$, בין הפרבולואיד $z=1-x^2-y^2$ מלמעלה לבין מישור $xy$ מלמטה.

**21)** חשבו את **שטח התחום** החסום על ידי $x^2+y^2=2x$, $y=0$, $y=x\sqrt{3}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) א. $\frac{128\pi}{3}$ ב. $\frac{32\pi}{3}$ ג. $\frac{64\pi}{3}$ ד. $42\pi$ ה. $\frac{64\pi}{3}$
ו. $32\pi$ ז. $\frac{16\pi}{3}$ ח. $\frac{32\pi}{9}$ ט. $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} r^2 dr d\theta$

2) $\frac{\pi}{2}$ 3) $\pi$ 4) $\frac{\pi}{8}$ 5) $\frac{\pi}{2}$

6) $\pi a^2$ 7) $2\pi$ 8) 36 9) $\frac{4}{3}$

10) $\pi \ln\frac{e}{2}$ 11) $\pi(4-\pi)$ 12) $\frac{\pi}{2}\ln\frac{4}{e}$ 13) $\frac{\pi(e-1)}{4e}$

14) $\frac{\pi}{2}+1$ 15) $-\frac{4}{5}$ 16) $\pi \ln\frac{4}{e}$ 17) $\pi$

18) $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$

19) $\frac{32}{9}$

20) $\frac{5\pi}{32}$

21) $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}$