

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב

פרק 20 - אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

תוכן העניינים

1. מבוא מתמטי לפרק.....1
2. אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות.....3

מבוא מתמטי לפרק

שאלות

1) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית :

א. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq 0\}$

2) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית :

א. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$

ד. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

3) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית :

א. $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq 2x\}$

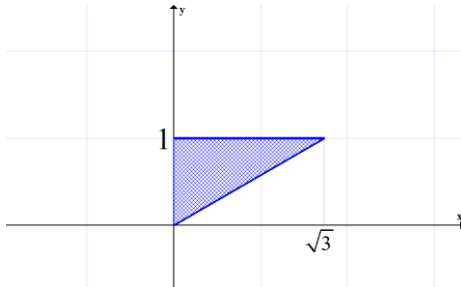
ב. $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\}$

4) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית : $S = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{7}x + \frac{25}{7} \leq y \leq \sqrt{25-x^2} \right\}$

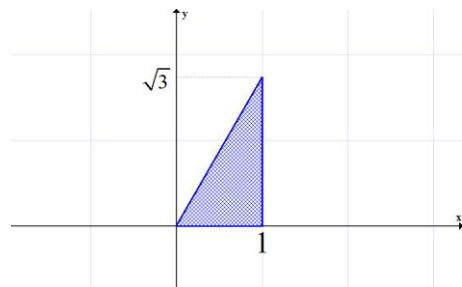
5) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית : $S = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{\sqrt{3}}x \leq y \leq \sqrt{8x-x^2} \right\}$

6) להלן שני איורים, ובכל איור תחום. כתבו כל אחד מהתחומים בהצגה פולרית ותארו במילים כל אחד מהתחומים.

איור ב



איור א



תשובות סופיות

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0.5\pi \leq \theta \leq 1.5\pi \end{cases} \text{ .ג} \quad \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \text{ .ב} \quad \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \text{ .א (1)}$$

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ -0.5\pi \leq \theta \leq 0.5\pi \end{cases} \text{ .ג} \quad \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 0.5\pi \end{cases} \text{ .ב} \quad \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \text{ .א (2)}$$

or

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 1.5\pi \leq \theta \leq 2.5\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \text{ .ד}$$

$$0 \leq r \leq 2, 0.25\pi \leq \theta \leq 1.25\pi \text{ .ב} \quad \begin{cases} 1 \leq r \leq 2 \\ 0.25\pi \leq \theta \leq \arctan 2 \end{cases} \text{ .א (3)}$$

$$\frac{25}{7 \sin \theta - \cos \theta} \leq r \leq 5 \quad \arctan \frac{4}{3} \leq \theta \leq \arctan \left(-\frac{3}{4} \right) + \pi \text{ (4)}$$

$$0 \leq r \leq 8 \cos \theta, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ (5)}$$

$$0 \leq r \leq \frac{1}{\sin \theta} \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ .ב} \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \theta} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \text{ .א (6)}$$

אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

שאלות

1) חשבו $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dA$, כאשר D התחום המתואר בשרטוט.

* בסעיף ט אל תחשבו את האינטגרל המתקבל לאחר המעבר לקואורדינטות קוטביות.

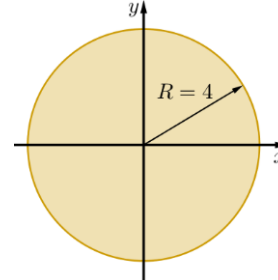
ג.



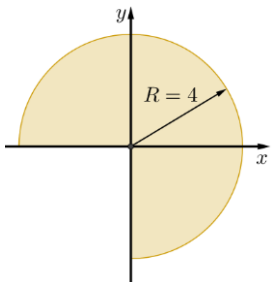
ב.



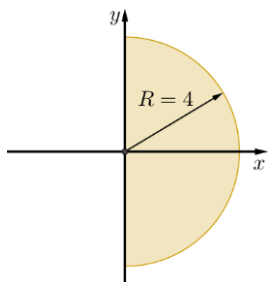
א.



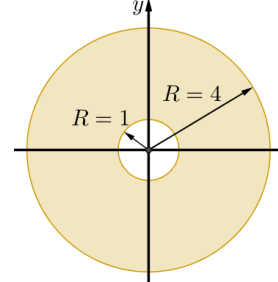
ו.



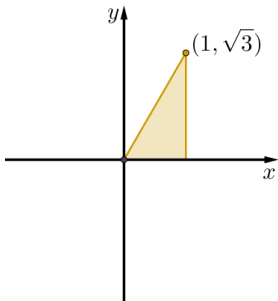
ה.



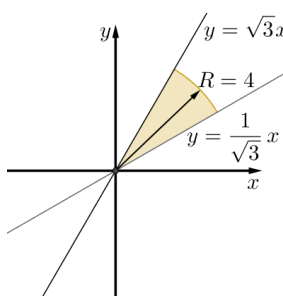
ד.



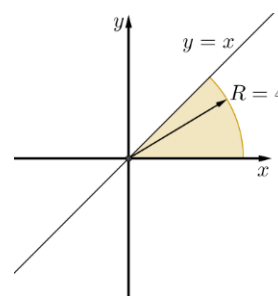
ט.



ח.



ז.



חשבו את האינטגרלים בשאלות 2-17, תוך מעבר לקואורדינטות קוטביות:

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy dx \quad (3)$$

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy dx \quad (2)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (5)$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (4)$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (7)$$

$$\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy dx \quad (6)$$

$$\int_0^2 \int_0^x y dy dx \quad (9)$$

$$\int_0^6 \int_0^y x dx dy \quad (8)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^0 \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2} dx dy \quad (11)$$

$$\int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}} dy dx \quad (10)$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dy dx \quad (13)$$

$$\int_0^{\ln 2} \int_0^{\sqrt{\ln^2 2 - y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy \quad (12)$$

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^0 xy^2 dx dy \quad (15)$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2} dy dx \quad (14)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2} dy dx \quad (17)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1) dx dy \quad (16)$$

בשאלות 18-20 חשבו את נפח הגוף המתואר:

(18) הגוף הכלוא בין פני הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ לבין הגליל $x^2 + y^2 = 1$.

(19) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2 + y^2 = 2y$, בין החרוט $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ מלמעלה לבין המישור xy מלמטה.

(20) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2 + y^2 = x$, בין הפרבולואיד $z = 1 - x^2 - y^2$ מלמעלה לבין מישור xy מלמטה.

(21) חשבו את שטח התחום החסום על ידי $x^2 + y^2 = 2x$, $y = 0$, $y = x\sqrt{3}$.

תשובות סופיות

- (1) א. $\frac{128\pi}{3}$ ב. $\frac{32\pi}{3}$ ג. $\frac{64\pi}{3}$ ד. 42π ה. $\frac{64\pi}{3}$
- ו. 32π ז. $\frac{16\pi}{3}$ ח. $\frac{32\pi}{9}$ ט. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} r^2 dr d\theta$
- (2) א. $\frac{\pi}{2}$ ב. π ג. $\frac{\pi}{8}$ ד. $\frac{\pi}{2}$ ה. $\frac{\pi}{2}$
- (3) א. πa^2 ב. 2π ג. $\frac{4}{3}$ ד. 36 ה. $\frac{4}{3}$
- (4) א. $\pi \ln \frac{e}{2}$ ב. $\pi(4-\pi)$ ג. $\frac{\pi}{2} \ln \frac{4}{e}$ ד. $\frac{\pi(e-1)}{4e}$ ה. $\frac{\pi}{2}$
- (5) א. $\frac{\pi}{2} + 1$ ב. $-\frac{4}{5}$ ג. $\pi \ln \frac{4}{e}$ ד. π ה. $\frac{\pi}{2}$
- (6) א. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$ ב. $\frac{32}{9}$ ג. $\frac{5\pi}{32}$ ד. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ה. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$
- (7) א. $\frac{32}{9}$ ב. $\frac{5\pi}{32}$ ג. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ד. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$ ה. $\frac{32}{9}$
- (8) א. $\frac{5\pi}{32}$ ב. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ג. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$ ד. $\frac{32}{9}$ ה. $\frac{5\pi}{32}$
- (9) א. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ב. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$ ג. $\frac{32}{9}$ ד. $\frac{5\pi}{32}$ ה. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$
- (10) א. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$ ב. $\frac{32}{9}$ ג. $\frac{5\pi}{32}$ ד. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ה. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$
- (11) א. $\frac{32}{9}$ ב. $\frac{5\pi}{32}$ ג. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ד. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$ ה. $\frac{32}{9}$
- (12) א. $\frac{5\pi}{32}$ ב. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ג. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$ ד. $\frac{32}{9}$ ה. $\frac{5\pi}{32}$
- (13) א. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ב. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$ ג. $\frac{32}{9}$ ד. $\frac{5\pi}{32}$ ה. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$
- (14) א. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$ ב. $\frac{32}{9}$ ג. $\frac{5\pi}{32}$ ד. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ה. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$
- (15) א. $\frac{32}{9}$ ב. $\frac{5\pi}{32}$ ג. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ד. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$ ה. $\frac{32}{9}$
- (16) א. $\frac{5\pi}{32}$ ב. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ג. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$ ד. $\frac{32}{9}$ ה. $\frac{5\pi}{32}$
- (17) א. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ב. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$ ג. $\frac{32}{9}$ ד. $\frac{5\pi}{32}$ ה. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$
- (18) א. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$ ב. $\frac{32}{9}$ ג. $\frac{5\pi}{32}$ ד. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ה. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$
- (19) א. $\frac{32}{9}$ ב. $\frac{5\pi}{32}$ ג. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ד. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$ ה. $\frac{32}{9}$
- (20) א. $\frac{5\pi}{32}$ ב. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ג. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$ ד. $\frac{32}{9}$ ה. $\frac{5\pi}{32}$
- (21) א. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ב. $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$ ג. $\frac{32}{9}$ ד. $\frac{5\pi}{32}$ ה. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$