

# אנליזה מתקדמת

פרק 30 - אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

תוכן העניינים

1. מבוא מתמטי לפרק.....1
2. אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות.....3

## מבוא מתמטי לפרק

### שאלות

1) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq 0\}$

2) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

ג.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$

ד.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$

3) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א.  $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq 2x\}$

ב.  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\}$

4) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית:  $S = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{7}x + \frac{25}{7} \leq y \leq \sqrt{25-x^2} \right\}$ .

5) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית:  $S = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{\sqrt{3}}x \leq y \leq \sqrt{8x-x^2} \right\}$ .

6) להלן שני איורים, ובכל איור תחום. כתבו כל אחד מהתחומים בהצגה פולרית ותארו במילים כל אחד מהתחומים.

איור ב



איור א



### תשובות סופיות

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array} \right. & \text{ב.} & \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{array} \right. & \text{ג.} & \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 2 \\ 0.5\pi \leq \theta \leq 1.5\pi \end{array} \right. \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array} \right. & \text{ב.} & \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 0.5\pi \end{array} \right. & \text{ג.} & \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq r \leq 2 \\ -0.5\pi \leq \theta \leq 0.5\pi \end{array} \right. \\ \text{or} & & & & & \\ & & & & & \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq r \leq 2 \\ 1.5\pi \leq \theta \leq 2.5\pi \end{array} \right. \end{array} \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{array} \right. \quad \text{ד.}$$

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq r \leq 2 \\ 0.25\pi \leq \theta \leq \arctan 2 \end{array} \right. \\ \text{ב.} & 0 \leq r \leq 2, \quad 0.25\pi \leq \theta \leq 1.25\pi \end{array} \quad (3)$$

$$\begin{array}{l} \frac{25}{7 \sin \theta - \cos \theta} \leq r \leq 5 \\ \arctan \frac{4}{3} \leq \theta \leq \arctan \left( -\frac{3}{4} \right) + \pi \end{array} \quad (4)$$

$$0 \leq r \leq 8 \cos \theta, \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (5)$$

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \theta} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \\ \text{ב.} & 0 \leq r \leq \frac{1}{\sin \theta} \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \quad (6)$$

## אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

### שאלות

1) חשבו  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dA$ , כאשר  $D$  התחום המתואר בשרטוט.

\* בסעיף ט אל תחשבו את האינטגרל המתקבל לאחר המעבר לקואורדינטות קוטביות.

א.



ב.



ג.



ד.



ה.



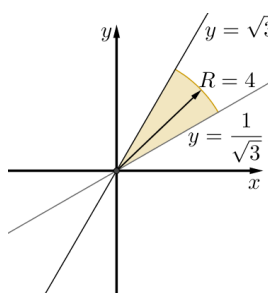
ו.



ז.



ח.



ט.



חשבו את האינטגרלים בשאלות 2-17, תוך מעבר לקואורדינטות קוטביות:

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy dx \quad (3)$$

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy dx \quad (2)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (5)$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (4)$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad (7)$$

$$\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy dx \quad (6)$$

$$\int_0^2 \int_0^x y dy dx \quad (9)$$

$$\int_0^6 \int_0^y x dx dy \quad (8)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^0 \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2} dx dy \quad (11)$$

$$\int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}} dy dx \quad (10)$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dy dx \quad (13)$$

$$\int_0^{\ln 2} \int_0^{\sqrt{\ln^2 2 - y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy \quad (12)$$

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^0 xy^2 dx dy \quad (15)$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2} dy dx \quad (14)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2} dy dx \quad (17)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1) dx dy \quad (16)$$

בשאלות 18-20 חשבו את נפח הגוף המתואר:

(18) הגוף הכלוא בין פני הכדור  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  לבין הגליל  $x^2 + y^2 = 1$ .

(19) הגוף הכלוא בתוך הגליל  $x^2 + y^2 = 2y$ , בין החרוט  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  מלמעלה לבין המישור  $xy$  מלמטה.

(20) הגוף הכלוא בתוך הגליל  $x^2 + y^2 = x$ , בין הפרבולואיד  $z = 1 - x^2 - y^2$  מלמעלה לבין מישור  $xy$  מלמטה.

(21) חשבו את שטח התחום החסום על ידי  $x^2 + y^2 = 2x$ ,  $y = 0$ ,  $y = x\sqrt{3}$ .

## תשובות סופיות

- (1) א.  $\frac{128\pi}{3}$  ב.  $\frac{32\pi}{3}$  ג.  $\frac{64\pi}{3}$  ד.  $42\pi$  ה.  $\frac{64\pi}{3}$
- ו.  $32\pi$  ז.  $\frac{16\pi}{3}$  ח.  $\frac{32\pi}{9}$  ט.  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} r^2 dr d\theta$
- (2) א.  $\frac{\pi}{2}$  ב.  $\pi$  ג.  $\frac{\pi}{8}$  ד.  $\frac{\pi}{2}$  ה.  $\frac{\pi}{2}$
- (3)  $\pi a^2$  (4)  $2\pi$  (5)  $\frac{4}{3}$  (6)  $\frac{4}{3}$
- (7)  $\pi \ln \frac{e}{2}$  (8)  $\pi(4-\pi)$  (9)  $\frac{\pi}{2} \ln \frac{4}{e}$  (10)  $\frac{\pi(e-1)}{4e}$
- (11)  $\frac{\pi}{2} + 1$  (12)  $-\frac{4}{5}$  (13)  $\pi \ln \frac{4}{e}$  (14)  $\pi$
- (15)  $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$  (16)  $\frac{32}{9}$  (17)  $\frac{5\pi}{32}$  (18)  $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$
- (19)  $\frac{32}{9}$  (20)  $\frac{5\pi}{32}$  (21)  $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$