חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1

פרק 23 - אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים טריגונומטריים - מבוא ..... (ללא ספר)

2. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי זהויות 1

3. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבות פשוטות 3

4. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבה כללית 4

5. הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים 5

6. חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות 8

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי זהויות

זכרו כי:

$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$
$\int \tan x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + c$	$\int \tan(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\ln\lvert\cos(ax+b)\rvert + c$
$\int \cot x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + c$	$\int \cot(ax+b)dx = \frac{1}{a}\ln\lvert\sin(ax+b)\rvert + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b)+c$

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int\left(\sin 2x - 4\cos\frac{x}{3}\right)dx$

2) $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$

3) $\int \frac{dx}{\sin^2 10x}$

4) $\int\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)dx$

5) $\int\left(\cos^4 x - \sin^4 x\right)dx$

6) $\int\left(\sin x + \cos x\right)^2 dx$

7) $\int \sin x\cos x\cos 2x dx$

8) $\int \tan^2 x dx$

9) $\int \frac{dx}{\left(\sin x\cos x\right)^2}$

10) $\int \sin 7x\cos 5x dx$

11) $\int\left(\cos x\cos 2x + \sin x\sin 2x\right)dx$

12) $\int\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)dx$

13) $\int \cos^2 x dx$

14) $\int \sin^2 4x dx$

15) $\int \cos^3 x dx$

16) $\int \sin^3 4x dx$

17) $\int \cos^4 x dx$

18) $\int \sin^4 4x dx$

19) $\int \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}dx$

20) $\int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x}dx$

21) $\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1}dx$

22) $\int \frac{\sin^3 x}{1-\cos x}dx$

23) $\int \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2\frac{x}{2}}dx$

24) $\int \sin^2 x\cos^4 x dx$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $-\frac{1}{2}\cos 2x-12\sin\frac{x}{3}+c$

2) $\frac{1}{4}\tan 4x+c$

3) $-10\cot 10x+c$

4) $\frac{1}{2}\sin 2x+c$

5) $\frac{1}{2}\sin 2x+c$

6) $x-\frac{1}{2}\cos 2x+c$

7) $-\frac{1}{16}\cos 4x+c$

8) $\tan x-x+c$

9) $\tan x-\cot x+c$

10) $\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{12}\cos 12x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+c$

11) $\sin x+c$

12) $\frac{3}{4}x+\frac{1}{16}\sin 4x+c$

13) $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+c$

14) $\frac{x}{2}-\frac{\sin 8x}{16}+c$

15) $\frac{3}{4}\sin x+\frac{1}{12}\sin 3x+c$

16) $-\frac{3}{16}\cos 4x+\frac{1}{48}\cos 12x+c$

17) $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$

18) $\frac{3}{8}x-\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{128}\sin 16x+c$

19) $-\cot x-x+c$

20) $2\sin x+c$

21) $\ln|\cos x|+c$

22) $-\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x+c$

23) $3x+\frac{1}{2}\sin 2x-2\sin x+c$

24) $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x-\frac{1}{24}\sin 6x\right)+c$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבות פשוטות

זכרו כי:

$$\int f(\sin x)\cdot\cos x dx = \left|\begin{matrix}\sin x = t\\ (x=\arcsin t)\end{matrix}\right| = \int f(t)\,dt$$

$$\int f(\cos x)\cdot\sin x dx = \left|\begin{matrix}\cos x = t\\ (x=\arccos t)\end{matrix}\right| = \int f(t)(-dt)$$

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int(\sin^2 x+\sin x+2)\cos x dx$

2) $\int(\cos^3 x+\cos x-2)\sin x dx$

3) $\int\cos^3 x dx$

4) $\int\sin^3 2x dx$

5) $\int\sin^4 x\cos^5 x dx$

6) $\int\sin^5 x\cos^4 x dx$

7) $\int\cos^5 x dx$

8) $\int\tan^5 x dx$

9) $\int\frac{1}{\cos x}dx$

10) $\int\frac{dx}{\sin x}$

11) $\int\sin 2x\cdot e^{\cos x}dx$

12) $\int\frac{2\sin x}{\cos 2x+4\cos x+7}dx$

תשובות סופיות

1) $\frac{\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^2 x}{2}+2\sin x+c$

2) $\frac{-\cos^4 x}{4}-\frac{\cos^2 x}{2}+2\cos x+c$

3) $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+c$

4) $-\frac{1}{2}\left(\cos 2x-\frac{\cos^3 2x}{3}\right)+c$

5) $\frac{1}{5}\sin 5x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x+c$

6) $-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{2}{7}\cos^7 x-\frac{1}{9}\cos^9 x+c$

7) $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{\sin^5 x}{5}+c$

8) $\frac{1}{4\cos^4 x}+\frac{1}{\cos^2 x}-\ln|\cos x|+c$

9) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+c$

10) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+c$

11) $-2e^{\cos x}(\cos x-1)+c$

12) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\cos x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבה כללית

זכרו כי:

$$\int f(\sin x,\cos x)\,dx = \left| \begin{array}{c} t=\tan\frac{x}{2} \\ (x=2\arctan t) \end{array} \right| = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$

2) $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

3) $\int \frac{\cos x}{2-\cos x}\,dx$

תשובות סופיות

1) $-\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}+c$

2) $\ln\left|1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|+c$

3) $-x+2\left(\frac{2}{3\sqrt{1/3}}\arctan\left(\frac{\tan(x/2)}{\sqrt{1/3}}\right)\right)+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים

$$\int f\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)dx = \left| \begin{matrix} x = a\sin t \\ (t = \arcsin\frac{x}{a}) \end{matrix} \right| = \int f\left(a\cos t\right)\cdot\left(a\cos t dt\right)$$

$$\int f\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)dx = \left| \begin{matrix} x = a\tan t \\ (t = \arctan\frac{x}{a}) \end{matrix} \right| = \int f\left(\frac{a}{\cos t}\right)\cdot\left(\frac{a}{\cos^2 t}dt\right)$$

$$\int f\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)dx = \left| \begin{matrix} x = \frac{a}{\cos t} \\ (t = \arccos\frac{a}{x}) \end{matrix} \right| = \int f\left(a\tan t\right)\cdot\left(\frac{-a\sin t}{\cos^2 t}dt\right)$$

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

2) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx$

3) $\int \sqrt{4x^2-1}dx$

הערה: כדי לפתור את השאלה צריך לדעת "אינטגרלים של פונקציות רציונליות".

4) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

5) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$

6) $\int \sqrt{x^2+2x-3}dx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) $\int \sqrt{-6x-x^2}\,dx$

8) $\int \frac{dx}{\left(4+x^2\right)^2}$

9) $\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+5\right)^{3/2}}$

10) $\int \sqrt{x^2+1}\,dx$

11) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $-\frac{1}{4}\cot\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)+c$

2) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1-\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}\right|+c$

3) $\frac{1}{8}\left[\ln\left|1-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right|+\frac{1}{1-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}-\ln\left|1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right|-\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}\right]+c$

4) $\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right)+c$

5) $2\left\{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(2\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\right)\right\}+c$

6) $\ln\left|1-\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}\right|+\frac{1}{1-\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}}-\ln\left|1+\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}\right|-\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}}+c$

7) $\frac{9}{2}\left\{\arcsin\frac{x+3}{3}+\frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{x+3}{3}\right)\right\}+c$

8) $\frac{1}{16}\left\{\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(2\arctan\frac{x}{2}\right)\right\}+c$

9) $\frac{1}{4}\sin\left(\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)+c$

10) $\left\{\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{1+x^2}+x\right|+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}\right\}$

11) $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c$

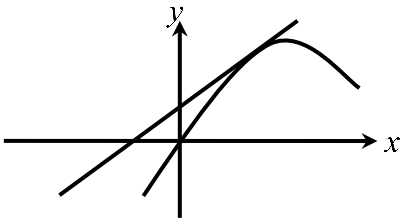
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x)=x+2\sin x$.

בתחום שבין ראשית הצירים לנקודת המקסימום הראשונה מימינה העבירו לפונקציה משיק ששיפועו 1.

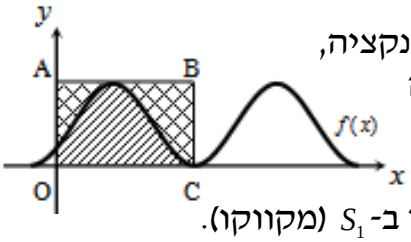


א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x , ברביע הראשון והשני.

2) באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\frac{\sin 2x+1}{2}$,

בתחום $-0.25\pi \le x \le 1.75\pi$.



נעביר משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה, ונעלה אנך לציר ה- x מנקודת החיתוך הראשונה של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון, המסומנת ב-C, כך שנוצר המלבן ABCO.

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים יסומן ב- S_1 (מקווקו).

השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה- y יסומן ב- S_2 .

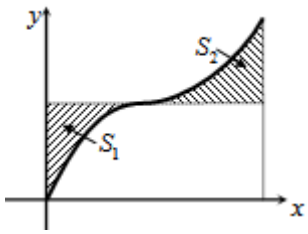
א. מצאו את משוואת הצלע AB של המלבן.

ב. חשבו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.

3) באיור שלהלן נתונה הפונקציה $y=\sin x+x$, בתחום $0\le x\le 2\pi$.

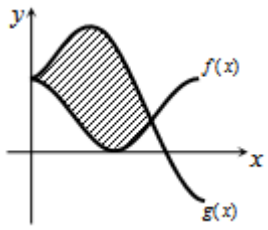
א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות בתחום הנתון? הוכיחו זאת.

ב. נוריד אנך מגרף הפונקציה לציר ה- x בנקודה שבה $x=2\pi$, ונעביר ישר המקביל לציר ה- x מהנקודה שמאפסת את הנגזרת.
הראו כי השטחים המסומנים בשרטוט, S_1 ו- S_2 , שווים.



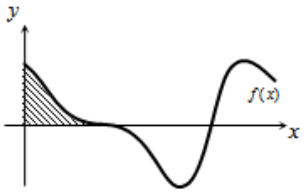
כתב ופתר – גיא סלומון ©

4) באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות
$f(x)=\cos^2 x$ ו- $g(x)=\sin^2 x+\cos x$, בתחום $0\le x\le \pi$.



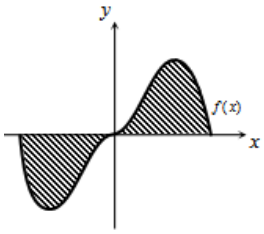
א. מצאו את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.
ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים.
השתמשו בזהות $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

5) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=-\cos 2x-\sin x$.



א. מצאו את שיעורי ה- x של הנקודות המקיימות
$f'(x)=0$, בתחום $0<x<2\pi$.
ידוע כי הנקודה המקיימת $f'(x)=0$, אשר אינה קיצון,
נמצאת על ציר ה- x .
ב. מצאו את הפונקציה $f(x)$.
ג. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה בתחום הנתון.
חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.

6) נתונה הפונקציה $y=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x$.



א. הוכיחו כי נגזרת הפונקציה היא $y'=x^2\sin x$.
באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x)=x^2\sin x$,
בתחום $-\pi\le x\le \pi$.
ב. הראו כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.
ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x בתחום הנתון.

7) נתונה הפונקציה $f(x)=a\cos x+b\sin x$, כאשר a,b פרמטרים.
הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{4}$,
והיא חיובית בתחום $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.
גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה בתחום $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ הוא $2\sqrt{2}-2$.
מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b .

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $y = x + 2$ ב. π יח"ש.

1) א. $y = 1$ ב. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 2}{3\pi - 2} = 1.538$

2) א. אין נקודת קיצון, הנקודה (π, π) היא נקודת פיתול.

ב. $S = 0.5\pi^2 - 2 = 2.934$

3) א. $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{1}{4}\right)$, $(0,1)$ ב. $S = 1.5\frac{\sqrt{3}}{2} = 1.299$

4) א. $x = \frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$ ב. $f(x) = -\frac{1}{2}\sin 2x + \cos x$ ג. $\frac{1}{2}$ יח"ש.

5) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. $S = 2(\pi^2 - 4) \approx 11.74$.

6) $b = -2$, $a = 2$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

נספח – זהויות בטריגו

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\\ \cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\\ \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\\ 1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)\\ \cos^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\big(\sin(a+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)\\ \sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\big(\cos(a-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)\\ \cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\big(\cos(a+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big)\end{cases}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©