# חדוא א

## פרק 19 - אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות

### תוכן העניינים


1. אינטגרלים טריגונומטריים - מבוא ..... (ללא ספר)
2. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי זהויות ..... 1
3. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבות פשוטות ..... 3
4. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבה כללית ..... 4
5. הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים ..... 5
6. חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות ..... 8

# אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי זהויות

זכרו כי:

| | |
|---|---|
| $\int \cos x dx = \sin x + c$ | $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$ |
| $\int \sin x dx = -\cos x + c$ | $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$ |
| $\int \tan x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + c$ | $\int \tan(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\ln\lvert\cos(ax+b)\rvert + c$ |
| $\int \cot x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + c$ | $\int \cot(ax+b)dx = \frac{1}{a}\ln\lvert\sin(ax+b)\rvert + c$ |
| $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c$ | $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+c$ |
| $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + c$ | $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b)+c$ |

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

**1)** $\int\left(\sin 2x - 4\cos\frac{x}{3}\right)dx$

**2)** $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$

**3)** $\int \frac{dx}{\sin^2 10x}$

**4)** $\int\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)dx$

**5)** $\int\left(\cos^4 x - \sin^4 x\right)dx$

**6)** $\int\left(\sin x + \cos x\right)^2 dx$

**7)** $\int \sin x\cos x\cos 2x dx$

**8)** $\int \tan^2 x dx$

**9)** $\int \frac{dx}{\left(\sin x\cos x\right)^2}$

**10)** $\int \sin 7x\cos 5x dx$

**11)** $\int\left(\cos x\cos 2x + \sin x\sin 2x\right)dx$

**12)** $\int\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)dx$

**13)** $\int \cos^2 x dx$

**14)** $\int \sin^2 4x dx$

**15)** $\int \cos^3 x dx$

**16)** $\int \sin^3 4x dx$

**17)** $\int \cos^4 x dx$

**18)** $\int \sin^4 4x dx$

**19)** $\int \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}dx$

**20)** $\int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x}dx$

**21)** $\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1}dx$

**22)** $\int \frac{\sin^3 x}{1-\cos x}dx$

**23)** $\int \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2\frac{x}{2}}dx$

**24)** $\int \sin^2 x\cos^4 x dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $-\frac{1}{2}\cos 2x-12\sin\frac{x}{3}+c$

**2)** $\frac{1}{4}\tan 4x+c$

**3)** $-10\cot 10x+c$

**4)** $\frac{1}{2}\sin 2x+c$

**5)** $\frac{1}{2}\sin 2x+c$

**6)** $x-\frac{1}{2}\cos 2x+c$

**7)** $-\frac{1}{16}\cos 4x+c$

**8)** $\tan x-x+c$

**9)** $\tan x-\cot x+c$

**10)** $\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{12}\cos 12x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+c$

**11)** $\sin x+c$

**12)** $\frac{3}{4}x+\frac{1}{16}\sin 4x+c$

**13)** $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+c$

**14)** $\frac{x}{2}-\frac{\sin 8x}{16}+c$

**15)** $\frac{3}{4}\sin x+\frac{1}{12}\sin 3x+c$

**16)** $-\frac{3}{16}\cos 4x+\frac{1}{48}\cos 12x+c$

**17)** $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$

**18)** $\frac{3}{8}x-\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{128}\sin 16x+c$

**19)** $-\cot x-x+c$

**20)** $2\sin x+c$

**21)** $\ln\left|\cos x\right|+c$

**22)** $-\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x+c$

**23)** $3x+\frac{1}{2}\sin 2x-2\sin x+c$

**24)** $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x-\frac{1}{24}\sin 6x\right)+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבות פשוטות

זכרו כי:

$$\int f(\sin x)\cdot\cos x dx = \left|\begin{matrix}\sin x = t \\ (x = \arcsin t)\end{matrix}\right| = \int f(t)\,dt$$

$$\int f(\cos x)\cdot\sin x dx = \left|\begin{matrix}\cos x = t \\ (x = \arccos t)\end{matrix}\right| = \int f(t)(-dt)$$

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int\left(\sin^2 x+\sin x+2\right)\cos x dx$

2) $\int\left(\cos^3 x+\cos x-2\right)\sin x dx$

3) $\int\cos^3 x dx$

4) $\int\sin^3 2x dx$

5) $\int\sin^4 x\cos^5 x dx$

6) $\int\sin^5 x\cos^4 x dx$

7) $\int\cos^5 x dx$

8) $\int\tan^5 x dx$

9) $\int\frac{1}{\cos x}dx$

10) $\int\frac{dx}{\sin x}$

11) $\int\sin 2x\cdot e^{\cos x}dx$

12) $\int\frac{2\sin x}{\cos 2x+4\cos x+7}dx$

## תשובות סופיות

1) $\frac{\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^2 x}{2}+2\sin x+c$

2) $\frac{-\cos^4 x}{4}-\frac{\cos^2 x}{2}+2\cos x+c$

3) $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+c$

4) $-\frac{1}{2}\left(\cos 2x-\frac{\cos^3 2x}{3}\right)+c$

5) $\frac{1}{5}\sin 5x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x+c$

6) $-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{2}{7}\cos^7 x-\frac{1}{9}\cos^9 x+c$

7) $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{\sin^5 x}{5}+c$

8) $\frac{1}{4\cos^4 x}+\frac{1}{\cos^2 x}-\ln|\cos x|+c$

9) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+c$

10) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+c$

11) $-2e^{\cos x}(\cos x-1)+c$

12) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\cos x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבה כללית

זכרו כי:

$$\int f(\sin x,\cos x)\,dx=\left|\begin{array}{c}t=\tan\frac{x}{2}\\(x=2\arctan t)\end{array}\right|=\int f\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

**1)** $\int\frac{dx}{1+\sin x}$

**2)** $\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

**3)** $\int\frac{\cos x}{2-\cos x}\,dx$

## תשובות סופיות

**1)** $-\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}+c$

**2)** $\ln\left|1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|+c$

**3)** $-x+2\left(\frac{2}{3\sqrt{\frac{1}{3}}}\arctan\left(\frac{\tan(x/2)}{\sqrt{\frac{1}{3}}}\right)\right)+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים

$$\int f\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)dx=\left|\begin{matrix}x=a\sin t\\(t=\arcsin\frac{x}{a})\end{matrix}\right|=\int f\left(a\cos t\right)\cdot\left(a\cos t dt\right)$$

$$\int f\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)dx=\left|\begin{matrix}x=a\tan t\\(t=\arctan\frac{x}{a})\end{matrix}\right|=\int f\left(\frac{a}{\cos t}\right)\cdot\left(\frac{a}{\cos^2 t}dt\right)$$

$$\int f\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)dx=\left|\begin{matrix}x=\frac{a}{\cos t}\\(t=\arccos\frac{a}{x})\end{matrix}\right|=\int f\left(a\tan t\right)\cdot\left(\frac{-a\sin t}{\cos^2 t}dt\right)$$

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

**1)** $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

**2)** $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx$

**3)** $\int\sqrt{4x^2-1}dx$

הערה: כדי לפתור את השאלה צריך לדעת "אינטגרלים של פונקציות רציונליות".

**4)** $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

**5)** $\int\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$

**6)** $\int\sqrt{x^2+2x-3}dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**7)** $\int \sqrt{-6x-x^2}\,dx$

**8)** $\int \frac{dx}{\left(4+x^2\right)^2}$

**9)** $\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+5\right)^{3/2}}$

**10)** $\int \sqrt{x^2+1}dx$

**11)** $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $-\frac{1}{4}\cot\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)+c$

**2)** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1-\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}\right|+c$

**3)** $\frac{1}{8}\left[\ln\left|1-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right|+\frac{1}{1-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}-\ln\left|1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right|-\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}\right]+c$

**4)** $\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right)+c$

**5)** $2\left\{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(2\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\right)\right\}+c$

**6)** $\ln\left|1-\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}\right|+\frac{1}{1-\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}}-\ln\left|1+\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}\right|-\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}}+c$

**7)** $\frac{9}{2}\left\{\arcsin\frac{x+3}{3}+\frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{x+3}{3}\right)\right\}+c$

**8)** $\frac{1}{16}\left\{\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(2\arctan\frac{x}{2}\right)\right\}+c$

**9)** $\frac{1}{4}\sin\left(\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)+c$

**10)** $\left\{\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{1+x^2}+x\right|+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}\right\}$

**11)** $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c$

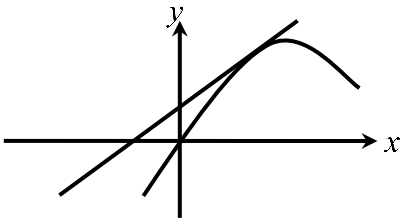

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות

## שאלות

**1)** נתונה הפונקציה $f(x)=x+2\sin x$.

בתחום שבין ראשית הצירים לנקודת המקסימום הראשונה מימינה העבירו לפונקציה משיק ששיפועו 1.

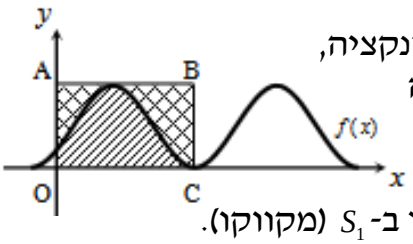



א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה-$x$, ברביע הראשון והשני.

**2)** באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\frac{\sin 2x+1}{2}$,

בתחום $-0.25\pi \le x \le 1.75\pi$.




נעביר משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה, ונעלה אנך לציר ה-$x$ מנקודת החיתוך הראשונה של גרף הפונקציה עם ציר ה-$x$ בתחום הנתון, המסומנת ב-C, כך שנוצר המלבן ABCO.

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים יסומן ב-$S_1$ (מקווקו).

השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה-$y$ יסומן ב-$S_2$.

א. מצאו את משוואת הצלע AB של המלבן.

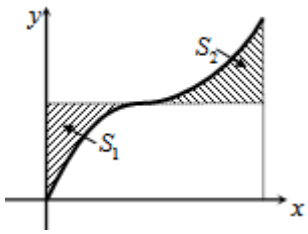
ב. חשבו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.

**3)** באיור שלהלן נתונה הפונקציה $y=\sin x+x$, בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות בתחום הנתון? הוכיחו זאת.

ב. נוריד אנך מגרף הפונקציה לציר ה-$x$ בנקודה שבה $x=2\pi$, ונעביר ישר המקביל לציר ה-$x$ מהנקודה שמאפסת את הנגזרת.

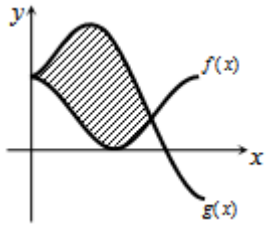
הראו כי השטחים המסומנים בשרטוט, $S_1$ ו-$S_2$, שווים.





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**4)** באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)=\cos^2 x$ ו- $g(x)=\sin^2 x+\cos x$ , בתחום $0\le x\le \pi$.

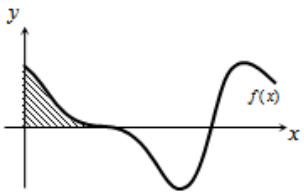



א. מצאו את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים.

השתמשו בזהות $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

**5)** הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=-\cos 2x-\sin x$.



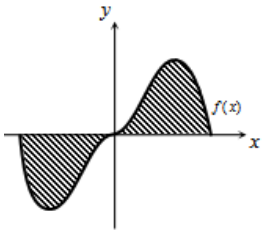

א. מצאו את שיעורי ה- $x$ של הנקודות המקיימות $f'(x)=0$ , בתחום $0<x<2\pi$.

ידוע כי הנקודה המקיימת $f'(x)=0$ , אשר אינה קיצון, נמצאת על ציר ה- $x$.

ב. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

ג. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה בתחום הנתון.
חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.

**6)** נתונה הפונקציה $y=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x$.




א. הוכיחו כי נגזרת הפונקציה היא $y'=x^2\sin x$.

באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x)=x^2\sin x$ , בתחום $-\pi\le x\le \pi$.

ב. הראו כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$ בתחום הנתון.

**7)** נתונה הפונקציה $f(x)=a\cos x+b\sin x$ , כאשר $a,b$ פרמטרים.

הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$ בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{4}$,

והיא חיובית בתחום $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה בתחום $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ הוא $2\sqrt{2}-2$.

מצאו את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. $y=x+2$ ב. $\pi$ יח"ש.

**1)** א. $y=1$ ב. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi+2}{3\pi-2}=1.538$

**2)** א. אין נקודת קיצון, הנקודה $(\pi,\pi)$ היא נקודת פיתול.

ב. $S=0.5\pi^2-2=2.934$

**3)** א. $(0,1)$ , $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{1}{4}\right)$ ב. $S=1.5\frac{\sqrt{3}}{2}=1.299$

**4)** א. $x=\frac{\pi}{2}$ , $\frac{7\pi}{6}$ , $\frac{11\pi}{6}$ ב. $f(x)=-\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x$ ג. $\frac{1}{2}$ יח"ש.

**5)** א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. $S=2\left(\pi^2-4\right)\approx 11.74$.

**6)** $a=2$ , $b=-2$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# נספח – זהויות בטריגו

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\\ \cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\\ \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\\ 1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)\\ \cos^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\big(\sin(a+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)\\ \sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\big(\cos(a-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)\\ \cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\big(\cos(a+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big)\end{cases}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©