חדוא 2 ב

פרק 31 - אינטגרלים התלויים בפרמטר (גזירה ואינטגרציה תחת סימן האינטגרל)

תוכן העניינים

1. גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי) 1
2. אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי) 3
3. אינטגרל לא אמיתי התלוי בפרמטר 4
4. גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי) 6
5. אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי) 8

גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי)

שאלות

1) חשבו את האינטגרל $\int_0^1 \frac{x^4 - x}{\ln x} dx$.

2) חשבו את האינטגרל $\int_0^1 \frac{x^m - x^n}{\ln x} dx$ $(m,n>0)$.

3) חשבו את האינטגרל $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$.

4) חשבו את האינטגרל $\int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) dx$.

5) הוכיחו כי $\int_0^{\pi} \ln(1+\alpha\cos x) dx = \pi \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}\right)$, עבור $|\alpha|<1$.

6) חשבו $\int_0^{\pi} \ln\left(1-2\alpha\cos x+\alpha^2\right) dx$, עבור $\alpha \neq \pm 1$.

7) חשבו את האינטגרל $\int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2} dx$.

8) חשבו את האינטגרל $\int_0^1 x^p (\ln x)^m dx$ $(p>0,\ m\in\mathbb{N})$.

9) חשבו את האינטגרל $\int_0^{\pi} \frac{1}{(2-\cos x)^2} dx$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\ln 2.5$

2) $\ln\left(\frac{m+1}{n+1}\right)$

3) $\frac{\pi}{8}\ln 2$

4) 2π

5) שאלת הוכחה.

6) $\int_0^{\pi}\ln\left(1-2\alpha\cos x+\alpha^2\right)dx=\begin{cases}0 & |\alpha|<1\\ 2\pi\ln|\alpha| & |\alpha|>1\end{cases}$

7) $\frac{\pi+2}{8}$

8) $\frac{(-1)^m m!}{(p+1)^{(m+1)}}$

9) $\frac{2\pi}{\sqrt{27}}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל אמיתי)

שאלות

1) חשבו את האינטגרל $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx$, עבור $b > a > 0$.

2) חשבו את האינטגרל $\int_0^\pi \ln\frac{b-\cos x}{a-\cos x}dx$, עבור $b,a > 1$.

3) הוכיחו כי $\int_0^{2\pi}\left[(b-\sin x)^2-(a-\sin x)^2\right]dx = 2\pi(b^2-a^2)$, לכל a ו- b.

הערה: פתרו בשתי דרכים, גם על ידי אינטגרציה תחת סימן האינטגרל וגם על ידי חישוב ישיר.

4) בהינתן הנוסחה $\int_0^{2\pi}\frac{1}{\alpha+\sin x}dx = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$, עבור $\alpha > 1$,

הוכיחו כי $\int_0^{2\pi}\ln\left(\frac{5+3\sin x}{5+4\sin x}\right)dx = 2\pi\ln\left(\frac{9}{8}\right)$.

תשובות סופיות

1) $\ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$

2) $\pi\ln\left(\frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)$

3) שאלת הוכחה.

4) שאלת הוכחה

כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינטגרל לא אמיתי התלוי בפרמטר

הערה חשובה

נושא זה הוא הרקע התיאורטי הנדרש להצדקת הגזירה והאינטגרציה תחת סימן האינטגרל עבור אינטגרלים לא אמיתיים, נושאים שיילמדו בהמשך.

בחלק מהמוסדות מסתפקים רק בצד הטכני החישובי ולא נכנסים לנושא זה כלל.

בררו עם מתרגלות\ו\ו\ו מרצה הקורס האם נושא זה נדרש או לא.

במידה ולא, דלגו היישר לנושאים הבאים.

בהצלחה!

שאלות

1) נתון האינטגרל $\phi(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos(kx)\,dx$, כאשר k ממשי.

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה עבור $0<a\le\alpha$.

2) נתון האינטגרל $\phi(\alpha)=\int_0^\infty \frac{1}{\left(x^2+\alpha\right)^n}dx$, כאשר n טבעי.

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה עבור $\alpha\ge 1$.

3) הוכיחו שהאינטגרל $\phi(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$ מתכנס במידה שווה עבור $\alpha\ge 0$.

4) נתון האינטגרל $\phi(\alpha)=\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\alpha^2(1+x^2)}{2}}}{1+x^2}dx$.

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל α.

5) נתון האינטגרל $\phi(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx$ עבור $\alpha\ge k>0$.

א. חשבו את האינטגרל והוכיחו שהאינטגרל תלוי בפרמטר.

ב. הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל α המקיים $\alpha\ge k>0$.

6) נתון האינטגרל $\phi(\alpha)=\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x}dx$.

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל n טבעי ולכל α המקיים $\alpha \ge k > 0$.

7) נתון כי $\phi(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2/2}dx$, כאשר $\alpha \ge k > 0$.

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה.

8) נתון האינטגרל $\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha^2(1+x^2)/2}dx$.

הוכיחו שהאינטגרל מתכנס במידה שווה לכל $\alpha \ge k > 0$.

תשובות סופיות

השאלות בנושא זה הן שאלות הוכחה – לפתרונות מלאים כנסו לאתר GooL.co.il

גזירה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי)

שאלות

1) חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty x^n e^{-x}dx$.

2) הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}\frac{\pi}{2}.$$

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/2}dx$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$.

4) חשבו את האינטגרל:

א. $\int_{-\infty}^\infty x^n e^{-x^2/2}dx$, כאשר $n\in\mathbb{N}$.

ב. $\int_0^\infty x^{10}e^{-x^2}dx$

ג. $\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x}dx$

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx$ $(\alpha>0)$.

ב. בעזרת סעיף א' חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$.

(אין צורך לנמק מתמטית את החישוב)

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $n!$

2) שאלת הוכחה.

3) א. $\sqrt{2\pi}$ ב. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

4) א. אם n אי-זוגי אז 0, ואם n זוגי אז $1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot (n-1)\cdot\sqrt{2\pi}$.

ב. $\frac{945}{64}\sqrt{\pi}$ ג. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

5) א. $-\arctan\alpha+\frac{\pi}{2}$ ב. $\frac{\pi}{2}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינטגרציה תחת סימן האינטגרל (אינטגרל לא אמיתי)

שאלות

1) חשבו את $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$, עבור $b>a\ge k>0$.

2) חשבו את $\int_0^\infty \frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}dx$, עבור $b>a\ge k>0$.

3) חשבו את $\int_0^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx$.

4) הוכיחו כי עבור $b>a>0$ ו- $r\in\mathbb{R}$, מתקיים $\int_0^\infty \cos rx\frac{a^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+r^2}{a^2+r^2}$.

5) הוכיחו:

א. $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin rx}{x}dx=\arctan\frac{r}{\alpha}$ $(\alpha,r>0)$

ב. $\int_0^\infty\left[e^{-\alpha x}\frac{1-\cos rx}{x^2}\right]dx=\arctan\frac{r}{a}-\frac{a}{2}\ln\left(1+\frac{r^2}{a^2}\right)$ $(\alpha,r>0)$

ג. $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{1-\cos x}{x^2}dx=\arctan\frac{1}{\alpha}-\frac{\alpha}{2}\ln\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)$ $(\alpha>0)$

6) הוכיחו:

א. $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}$

ב. $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x}dx$.

8) חשבו את $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$.

תשובות סופיות

1) $\ln\frac{b}{a}$

2) $\frac{\pi}{2}(b-a)$

3) π

4) שאלת הוכחה.

5) שאלת הוכחה.

6) שאלת הוכחה.

7) א. שאלת הוכחה. ב. $\frac{\pi}{4}$

8) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©