# מתמטיקה בדידה (דיסקרטית)

## פרק 16 - אינדוקציה מתמטית

### תוכן העניינים


1. שאלות העוסקות בתכונות התחלקות ..... 1
2. סדרות ..... 4
3. עצרת ..... 6
4. שאלות שבהן האיבר הכללי מורכב ממספר מחוברים ..... 7
5. שאלות העוסקות באינדוקציות עם איברים משתנים ..... 8
6. שאלות העוסקות בהוכחת באי-שוויונים באינדוקציה ..... 9
7. שאלות כוללות ומסכמות ..... 11
8. מושג הסכימה וכתיבה מקוצרת של אינדוקציות ..... 13

# שאלות העוסקות בתכונות התחלקות:

## סיכום כללי:

**מבנה כללי של רישום הוכחה באינדוקציה:**

**בדיקה:**

בדיקה נכונות האינדוקציה עבור $n=1$ (ולעיתים כדאי לבדוק גם עבור $n=2,3$).

**הנחת האינדוקציה:**

נניח כי עבור $n=k$ ($k$ טבעי כלשהו) כי טענת האינדוקציה נכונה.

**הוכחת האינדוקציה:**

נוכיח כי עבור $n=k+1$ טענת האינדוקציה מתקיימת.

**סיכום:**

לסיכום, הראנו כי הטענה נכונה עבור $n=1$ והראנו כי נכונות הטענה עבור $n=k$ גוררת את נכונותה עבור $n=k+1$, לפיכך, על פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל $n$ טבעי.

## שאלות:

**1)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $8^n-3^n$ מתחלק ב-5 ללא שארית לכל $n$ טבעי.

**2)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $11^n-4^n$ מתחלק ב-7 ללא שארית לכל $n$ טבעי.

**3)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $8\cdot 7^n+4^{n+2}$ מתחלק ב-24 ללא שארית לכל $n$ טבעי.

**4)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $5\cdot 3^{2n}-5^{n+1}$ מתחלק ב-20 ללא שארית לכל $n$ טבעי.

**5)** $a_n$ הוא האיבר במקום ה-$n$ בסדרה החשבונית: $1,3,5,7,\ldots$ הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $2^{a_n}+4$ מתחלק ב-12 ללא שארית לכל $n$ טבעי הגדול מ-1.

**6)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $n^2+n$ מתחלק ב-2 ללא שארית לכל $n$ טבעי.

**7)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $n^3+5n$ מתחלק ב-6 ללא שארית לכל $n$ טבעי.

**8)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $3^n-2n-1$ מתחלק ב-4 ללא שארית לכל $n$ טבעי.

**9)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $9\left(9^n-1\right)-40n$ מתחלק ב-32 ללא שארית לכל $n$ טבעי.

**10)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^n+5^n-2^n\left(2^n+1\right)$ מתחלק ב-6 ללא שארית לכל $n$ טבעי.

**11)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^n+2^{2n}$ מתחלק ב-11 ללא שארית לכל $n$ טבעי אי זוגי.

**12)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $a^n-b^n$ מתחלק ב-$(a+b)$ ללא שארית לכל $n$ טבעי זוגי.

**13)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^{n+2}+1$ מותיר שארית 2 בחלוקתו ב- 3 לכל $n$ טבעי.

## תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

# סדרות:

## סיכום כללי:

**תזכורת:**

- סדרה היא אוסף מספרים: $a_1, a_2, ...., a_n$, כאשר $n$ הוא מיקום האיבר בסדרה ו- $a_n$ הוא ערך האיבר העומד במקום ה- $n$-י בסדרה.
  - סדרה כללית – סדרה שבה כל איבר מוגדר לפי מקומו בסדרה.
  - סכום $n$ האיברים הראשונים בסדרה יסומן ב- $S_n$ והוא מקיים: $S_n = a_1 + ... + a_n$.

- סדרה חשבונית – סדרת מספרים שבה ההפרש בין כל שני איברים סמוכים הוא גודל קבוע. נוסחת האיבר הכללי היא: $a_n = a_1 + d(n-1)$ כאשר $d$ הפרש הסדרה.
  - סכום $n$ האיברים הראשונים הוא: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n}{2}\left[2a_1 + d(n-1)\right]$.

- סדרה הנדסית – סדרת מספרים שבה המנה בין כל שני איברים סמוכים היא גודל קבוע. נוסחת האיבר הכללי היא: $a_n = a_1 q^{n-1}$ כאשר $q$ היא מנת הסדרה.
  - סכום $n$ האיברים הראשונים הוא: $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$.

## שאלות:

**14)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $1+2+3+4+...+n=\frac{n}{2}(n+1)$.

**15)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $4+7+10+13+...+(3n+1)=\frac{n}{2}(3n+5)$.

**16)** נתונה סדרה שבה: $a_n=n(n+2)$.

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $S_n=\frac{n}{6}(n+1)(2n+7)$.

**17)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:
$$\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}.$$

**18)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:
$$\frac{6}{1\cdot3\cdot5}+\frac{6}{3\cdot5\cdot7}+\cdots+\frac{6}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{2n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}.$$

**19)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:
$$1\cdot1+2\cdot3+3\cdot9+...+n\cdot3^{n-1}=\frac{1}{4}\left[3^n(2n-1)+1\right].$$

## תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

# עצרת:

## סיכום כללי:

**תזכורת – מושג העצרת:**

עצרת מוגדרת להיות מכפלת האיברים עד לערך הנקוב: $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$.

מגדירים: $0!=1$ ותמיד מתקיימים השוויונות: $n!=n\cdot(n-1)!$ , $(n+1)!=n!\cdot(n+1)$.

## שאלות:

**20)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+...+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

**21)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$\frac{1\cdot 2!}{2}+\frac{2\cdot 3!}{4}+\frac{3\cdot 4!}{8}+...+\frac{n(n+1)!}{2^n}=\frac{(n+2)!}{2^n}-2$$

**22)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$p!+\frac{(p+1)!}{1!}+\frac{(p+2)!}{2!}+...+\frac{(p+n-1)!}{(n-1)!}=\frac{(p+n)!}{(n-1)!(p+1)}$$

**23)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)...\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{n!}$$

**24)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$\frac{5}{1\cdot 4}-\frac{11}{4\cdot 7}+\frac{17}{7\cdot 10}-...+\frac{(-1)^{n-1}(6n-1)}{(3n-2)(3n+1)}=1+\frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$$

## תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

## שאלות שבהן האיבר הכללי מורכב ממספר מחוברים:

### שאלות:

**25)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$1+2+3+4+...+2n=n(2n+1)$$

**26)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$$

**27)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+...+3n\cdot 2^{3n-1}=(3n-1)2^{3n}+1$$

### תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

## שאלות העוסקות באינדוקציות עם איברים משתנים:

### שאלות:

**28)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+...+(3n)=2n(2n+1)$$

**29)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+...+(2n)^2=\frac{n}{6}(2n+1)(7n+1)$$

**30)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\left(1-\frac{1}{n+3}\right)...\left(1-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}$$

**31)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n)=2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$$

**32)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

### תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

## שאלות העוסקות בהוכחת באי-שוויונים באינדוקציה:

### שאלות:

**33)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי הגדול מ-1 מתקיים:

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{n}{n+1}$$

**34)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\le 2-\frac{1}{n}$$

**35)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי הגדול מ-2 מתקיים:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{3}{5}$$

**36)** נתונה סדרה שבה: $a_n=n^n$. נגדיר: $T_n=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n$.

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $T_n\le n^{\frac{n}{2}(n+1)}$.

**37)** נתון אי-השוויון: $2^n>n^2$. מצא את ה-$n$ המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי החל מה-$n$ שמצאת.

**38)** נתון אי-השוויון: $4^n>5n^2+1$. מצא את ה-$n$ המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי החל מה-$n$ שמצאת.

**39)** נתון אי-השוויון: $n^3-n<5^{n-1}$. מצא את ה-$n$ המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי החל מה-$n$ שמצאת.

**40)** נתון אי-השוויון: $3^n+4^n+5^n<6^n$. מצא את ה-$n$ המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי החל מה-$n$ שמצאת.

**41)** נתון אי-השוויון: $n^n \geq n!$. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי.

**42)** נתון אי-השוויון: $a^n + b^n < (a+b)^n$ , $(a,b>0)$.

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי הגדול מ-1.

## תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

## שאלות כוללות ומסכמות:

### שאלות:

**43)** נתון השוויון: $4+7+10+13+...=\frac{n}{2}(3n+5)$.

א. מצא את האיבר במקום ה-$n$.

ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי.

ג. חשב את הסכום: $37+40+43+...+85$.

**44)** נתון השוויון: $\frac{2}{3}+\frac{6}{9}+\frac{10}{27}+...=2-\frac{2n+2}{3^n}$. מצא את האיבר במקום ה-$n$.

**45)** נתון השוויון: $\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\cdots=\frac{n}{4n+1}$.

א. מצא את האיבר במקום ה-$n$.

ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי.

ג. חשב את הסכום: $\frac{1}{25\cdot29}+\frac{1}{29\cdot33}+\frac{1}{33\cdot37}+\cdots+\frac{1}{89\cdot93}$.

**46)** נתון השוויון: $(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+...+(2n)^2=\frac{n}{6}(2n+1)(7n+1)$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי.

ב. חשב באמצעות סעיף א' את הסכום: $26^2+27^2+28^2+...+48^2$.

**47)** נתון השוויון: $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי.

ב. הבע באמצעות $n$ את הסכום: $4^2+6^2+8^2+\cdots+(4n)^2$.

**48)** נתונים השוויונים הבאים:

א. $3n+(3n+1)+(3n+2)+\cdots+4n=\frac{7}{3}(n^2+3n-1)$.

ב. $3n+(3n+1)+(3n+2)+\cdots+4n=n^2+11n-5$.

ג. $3n+(3n+1)+(3n+2)+\cdots+4n=\frac{7n}{2}(n+1)$.

קבע איזה מהשוויונים נכון לכל $n$ טבעי, והוכח אותו באינדוקציה.

**49)** נתון השוויון: $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+...+(3n)=an(2n+b)$.

א. נתון כי השוויון נכון עבור $n=1$ ו- $n=2$. מצא את ערכי $a$ ו- $b$.

ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי.

**50)** נתון אי-השוויון: $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{3}{5}$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי הגדול מ-2.

ב. הוכח באמצעות סעיף א' כי מתקיים: $\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\cdots+\frac{1}{18}>\frac{1}{2}$.

**51)** נתון אי-השוויון: $n^2<2^n$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל $n$ טבעי הגדול מ-4.

ב. הוכח באמצעות סעיף א' כי מתקיים: $5^2\cdot 6^2\cdot 7^2\cdot 8^2\cdot\ldots\cdot 20^2<2^{200}$.

**52)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הסכום $9+27+81+\cdots+3^{3n+1}$ מתחלק ב-117 ללא שארית לכל $n$ טבעי.

**53)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $n^3+5n$ מתחלק ב-6 ללא שארית לכל $n$ טבעי.

ב. נתון כי $a+b$ מתחלק ב-6 ללא שארית.
הוכח כי $a^3+b^3$ מתחלק ב-6 ללא שארית.

**54)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח את הטענה: אם ל-$n$ טבעי מסוים $3^n+5^n$ מתחלק ב-16 ללא שארית אז גם $3^{n+2}+5^{n+2}$ מתחלק ב-16 ללא שארית.

ב. האם מהטענה בסעיף א' נובע כי $3^n+5^n$ מתחלק ב-16 ללא שארית עבור כל $n$ טבעי אי-זוגי?

ג. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $3^n+5^n$ מתחלק ב-8 ללא שארית לכל $n$ טבעי אי-זוגי.

## תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

# מושג הסכימה וכתיבה מקוצרת של אינדוקציות:

## סיכום כללי:

סימון הסכימה (קרי: סיגמה) מוגדר באופן הבא: $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

מקור הסימון נובע מהמילה Sum ומשמעו הוא סכימה של איברים המתחילים בערך המצוין בתחתית הסימון $\left(\sum_{\boxed{k=1}}^{n}\right)$ עד לערך המצוין בחלקו העליון $\left(\sum_{k=1}^{\boxed{n}}\right)$.

### דוגמאות:

- $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+...+n$.
- $\sum_{k=3}^{12} k^2 = 3^2+4^2+...+12^2$.
- $\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{5}+\frac{1}{9}+....+\frac{1}{4n+1}$.

## שאלות:

**1)** הוכח באינדוקציה כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$.

**2)** הוכח באינדוקציה כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

**3)** הוכח באינדוקציה כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{n}{4n+1}$.

**4)** הוכח באינדוקציה כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2(2^n-1)$.

**5)** הוכח באינדוקציה כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{4^{k-1}}=4-\frac{1}{4^{n-1}}$.

**6)** הוכח באינדוקציה כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{3n}k=1\frac{1}{2}n(3n+1)$.

**7)** הוכח באינדוקציה כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{3n}(4k-1)=3n(6n+1)$.

**8)** הוכח באינדוקציה כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n}(n+k)=\frac{n}{2}(3n+1)$.

**9)** הוכח באינדוקציה כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n}3^{n+k}=\frac{3^{n+1}(3^n-1)}{2}$.

## תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.