

# מבוא ללוגיקה ותורת הקבוצות

פרק 8 - אינדוקציה מתמטית

תוכן העניינים

1. שאלות העוסקות בתכונות התחלקות..... 1
2. סדרות..... 4
3. עצרת..... 6
4. שאלות שבהן האיבר הכללי מורכב ממספר מחוברים..... 7
5. שאלות העוסקות באינדוקציות עם איברים משתנים..... 8
6. שאלות העוסקות בהוכחת באי-שוויונים באינדוקציה..... 9
7. שאלות כוללות ומסכמות..... 11
8. מושג הסכימה וקתיבה מקוצרת של אינדוקציות..... 13

## שאלות העוסקות בתכונות התחלקות:

**סיכום כללי:**

**מבנה כללי של רישום הוכחה באינדוקציה:**

**בדיקה:**

בדיקה נכונות האינדוקציה עבור  $n=1$  (ולעיתים כדאי לבדוק גם עבור  $n=2,3$ ).

**הנחת האינדוקציה:**

נניח כי עבור  $n=k$  (טבעי כלשהו) כי טענת האינדוקציה נכונה.

**הוכחת האינדוקציה:**

נוכיח כי עבור  $n=k+1$  טענת האינדוקציה מתקיימת.

**סיכום:**

לסיכום, הראנו כי הטענה נכונה עבור  $n=1$  והראנו כי נכונות הטענה עבור  $n=k$  גוררת את נכונותה עבור  $n=k+1$ , לפיכך, על פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל  $n$  טבעי.

## שאלות:

- (1) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $8^n - 3^n$  מתחלק ב-5 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.
- (2) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $11^n - 4^n$  מתחלק ב-7 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.
- (3) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $8 \cdot 7^n + 4^{n+2}$  מתחלק ב-24 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.
- (4) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $5 \cdot 3^{2n} - 5^{n+1}$  מתחלק ב-20 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.
- (5)  $a_n$  הוא האיבר במקום ה- $n$  בסדרה החשבונית:  $1, 3, 5, 7, \dots$  הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $2^{a_n} + 4$  מתחלק ב-12 ללא שארית לכל  $n$  טבעי הגדול מ-1.
- (6) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $n^2 + n$  מתחלק ב-2 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.
- (7) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $n^3 + 5n$  מתחלק ב-6 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.
- (8) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $3^n - 2n - 1$  מתחלק ב-4 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.
- (9) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $9(9^n - 1) - 40n$  מתחלק ב-32 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.
- (10) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $7^n + 5^n - 2^n(2^n + 1)$  מתחלק ב-6 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.

**(11)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $7^n + 2^{2n}$  מתחלק ב-11 ללא שארית לכל  $n$  טבעי אי זוגי.

**(12)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $a^n - b^n$  מתחלק ב- $(a+b)$  ללא שארית לכל  $n$  טבעי זוגי.

**(13)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $7^{n+2} + 1$  מותיר שארית 2 בחלוקתו ב-3 לכל  $n$  טבעי.

**תשובות סופיות:**

שאלות הוכחה.

## סדרות:

### סיכום כללי:

#### תזכורת:

- סדרה היא אוסף מספרים:  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , כאשר  $n$  הוא מיקום האיבר בסדרה ו- $a_n$  הוא ערך האיבר העומד במקום ה- $n$  בסדרה.

○ סדרה כללית – סדרה שבה כל איבר מוגדר לפי מקומו בסדרה.

○ סכום  $n$  האיברים הראשונים בסדרה יסומן ב- $S_n$

והוא מקיים:  $S_n = a_1 + \dots + a_n$ .

- סדרה חשבונית – סדרת מספרים שבה ההפרש בין כל שני איברים סמוכים הוא גודל קבוע. נוסחת האיבר הכללי היא:  $a_n = a_1 + d(n-1)$  כאשר  $d$  הפרש הסדרה.

○ סכום  $n$  האיברים הראשונים הוא:  $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n}{2}[2a_1 + d(n-1)]$ .

- סדרה הנדסית – סדרת מספרים שבה המנה בין כל שני איברים סמוכים היא גודל קבוע. נוסחת האיבר הכללי היא:  $a_n = a_1 q^{n-1}$  כאשר  $q$  היא מנת הסדרה.

○ סכום  $n$  האיברים הראשונים הוא:  $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ .

## שאלות:

14) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי

$$1+2+3+4+\dots+n = \frac{n}{2}(n+1) \quad \text{מתקיים:}$$

15) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי

$$4+7+10+13+\dots+(3n+1) = \frac{n}{2}(3n+5) \quad \text{מתקיים:}$$

16) נתונה סדרה שבה:  $a_n = n(n+2)$

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:  $S_n = \frac{n}{6}(n+1)(2n+7)$

17) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$$

18) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$\frac{6}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{6}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{6}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}$$

19) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 9 + \dots + n \cdot 3^{n-1} = \frac{1}{4} [3^n (2n-1) + 1]$$

## תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

## עצרת:

### סיכום כללי:

#### תזכורת – מושג העצרת:

עצרת מוגדרת להיות מכפלת האיברים עד לערך הנקוב:  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ .  
 מגדירים:  $0! = 1$  ותמיד מתקיימים השוויונות:  $n! = n \cdot (n-1)!$ ,  $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$ .

### שאלות:

(20) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

(21) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$\frac{1 \cdot 2!}{2} + \frac{2 \cdot 3!}{4} + \frac{3 \cdot 4!}{8} + \dots + \frac{n(n+1)!}{2^n} = \frac{(n+2)!}{2^n} - 2$$

(22) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$p! + \frac{(p+1)!}{1!} + \frac{(p+2)!}{2!} + \dots + \frac{(p+n-1)!}{(n-1)!} = \frac{(p+n)!}{(n-1)!(p+1)}$$

(23) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) \dots \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{n!}$$

(24) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$\frac{5}{1 \cdot 4} - \frac{11}{4 \cdot 7} + \frac{17}{7 \cdot 10} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} (6n-1)}{(3n-2)(3n+1)} = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$$

### תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

## שאלות שבהן האיבר הכללי מורכב ממספר מחוברים:

### שאלות:

(25) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$1+2+3+4+\dots+2n=n(2n+1)$$

(26) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\dots+(2n)^2=\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$$

(27) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\dots+3n\cdot 2^{3n-1}=(3n-1)2^{3n}+1$$

### תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

## שאלות העוסקות באינדוקציות עם איברים משתנים:

### שאלות:

(28) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + \dots + (3n) = 2n(2n+1)$$

(29) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$(n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{n}{6}(2n+1)(7n+1)$$

(30) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) \left(1 - \frac{1}{n+3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$$

(31) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$(n+1)(n+2) \cdot \dots \cdot (2n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$$

(32) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

### תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

## שאלות העוסקות בהוכחת באי-שוויונים באינדוקציה:

### שאלות:

(33) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי הגדול מ-1 מתקיים:

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{n}{n+1}$$

(34) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

(35) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי הגדול מ-2 מתקיים:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}$$

(36) נתונה סדרה שבה:  $a_n = n^n$ . נגדיר:  $T_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n$ .

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:  $T_n \leq n^{\frac{n}{2}(n+1)}$ .

(37) נתון אי-השוויון:  $2^n > n^2$ . מצא את ה- $n$  המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי החל מה- $n$  שמצאת.

(38) נתון אי-השוויון:  $4^n > 5n^2 + 1$ . מצא את ה- $n$  המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי החל מה- $n$  שמצאת.

(39) נתון אי-השוויון:  $n^3 - n < 5^{n-1}$ . מצא את ה- $n$  המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי החל מה- $n$  שמצאת.

(40) נתון אי-השוויון:  $3^n + 4^n + 5^n < 6^n$ . מצא את ה- $n$  המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי החל מה- $n$  שמצאת.

**(41)** נתון אי-השוויון :  $n^n \geq n!$  . הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי.

**(42)** נתון אי-השוויון :  $a^n + b^n < (a+b)^n$  ,  $(a, b > 0)$  . הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי הגדול מ-1.

**תשובות סופיות:**

שאלות הוכחה.

## שאלות כוללות ומסכמות:

### שאלות:

$$(43) \text{ נתון השוויון: } 4+7+10+13+\dots = \frac{n}{2}(3n+5)$$

- א. מצא את האיבר במקום ה- $n$ .  
 ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי.  
 ג. חשב את הסכום:  $37+40+43+\dots+85$ .

$$(44) \text{ נתון השוויון: } \frac{2}{3} + \frac{6}{9} + \frac{10}{27} + \dots = 2 - \frac{2n+2}{3^n}$$

- (45) נתון השוויון:  $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots = \frac{n}{4n+1}$   
 א. מצא את האיבר במקום ה- $n$ .  
 ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי.

$$\text{ג. חשב את הסכום: } \frac{1}{25 \cdot 29} + \frac{1}{29 \cdot 33} + \frac{1}{33 \cdot 37} + \dots + \frac{1}{89 \cdot 93}$$

$$(46) \text{ נתון השוויון: } (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{n}{6}(2n+1)(7n+1)$$

- א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי.  
 ב. חשב באמצעות סעיף א' את הסכום:  $26^2 + 27^2 + 28^2 + \dots + 48^2$ .

$$(47) \text{ נתון השוויון: } 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$$

- א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי.  
 ב. הבע באמצעות  $n$  את הסכום:  $4^2 + 6^2 + 8^2 + \dots + (4n)^2$ .

(48) נתונים השוויונים הבאים:

$$\text{א. } 3n + (3n+1) + (3n+2) + \dots + 4n = \frac{7}{3}(n^2 + 3n - 1)$$

$$\text{ב. } 3n + (3n+1) + (3n+2) + \dots + 4n = n^2 + 11n - 5$$

$$\text{ג. } 3n + (3n+1) + (3n+2) + \dots + 4n = \frac{7n}{2}(n+1)$$

קבע איזה מהשוויונים נכון לכל  $n$  טבעי, והוכח אותו באינדוקציה.

$$(49) \text{ נתון השוויון: } n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + \dots + (3n) = an(2n+b)$$

- א. נתון כי השוויון נכון עבור  $n=1$  ו- $n=2$ . מצא את ערכי  $a$  ו- $b$ .  
 ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי.

$$(50) \text{ נתון אי-השוויון: } \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}$$

- א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי הגדול מ-2.  
 ב. הוכח באמצעות סעיף א' כי מתקיים:  $\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{18} > \frac{1}{2}$

$$(51) \text{ נתון אי-השוויון: } n^2 < 2^n$$

- א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי הגדול מ-4.  
 ב. הוכח באמצעות סעיף א' כי מתקיים:  $5^2 \cdot 6^2 \cdot 7^2 \cdot 8^2 \cdot \dots \cdot 20^2 < 2^{200}$

$$(52) \text{ הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הסכום: } 9 + 27 + 81 + \dots + 3^{3n+1}$$

מתחלק ב-117 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.

$$(53) \text{ ענה על הסעיפים הבאים:}$$

- א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $n^3 + 5n$  מתחלק ב-6 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.  
 ב. נתון כי  $a+b$  מתחלק ב-6 ללא שארית.  
 הוכח כי  $a^3 + b^3$  מתחלק ב-6 ללא שארית.

$$(54) \text{ ענה על הסעיפים הבאים:}$$

- א. הוכח את הטענה: אם ל- $n$  טבעי מסוים  $3^n + 5^n$  מתחלק ב-16 ללא שארית אז גם  $3^{n+2} + 5^{n+2}$  מתחלק ב-16 ללא שארית.  
 ב. האם מהטענה בסעיף א' נובע כי  $3^n + 5^n$  מתחלק ב-16 ללא שארית עבור כל  $n$  טבעי אי-זוגי?  
 ג. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $3^n + 5^n$  מתחלק ב-8 ללא שארית לכל  $n$  טבעי אי-זוגי.

### תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

## מושג הסכימה וכתובה מקוצרת של אינדוקציות:

### סיכום כללי:

סימון הסכימה (קרי: סיגמה) מוגדר באופן הבא:  $\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

מקור הסימון נובע מהמילה Sum ומשמעו הוא סכימה של איברים המתחילים

בערך המצוין בתחתית הסימון  $\left(\sum_{k=1}^n\right)$  עד לערך המצוין בחלקו העליון  $\left(\sum_{k=1}^n\right)$ .

### דוגמאות:

$$\bullet \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$\bullet \sum_{k=3}^{12} k^2 = 3^2 + 4^2 + \dots + 12^2$$

$$\bullet \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{4n+1}$$

### שאלות:

$$(1) \text{ הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

$$(2) \text{ הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$(3) \text{ הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{n}{4n+1}$$

$$(4) \text{ הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n 2^k = 2(2^n - 1)$$

$$(5) \quad \text{הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n \frac{3}{4^{k-1}} = 4 - \frac{1}{4^{n-1}}$$

$$(6) \quad \text{הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^{3n} k = 1 \frac{1}{2} n(3n+1)$$

$$(7) \quad \text{הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^{3n} (4k-1) = 3n(6n+1)$$

$$(8) \quad \text{הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n (n+k) = \frac{n}{2}(3n+1)$$

$$(9) \quad \text{הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n 3^{n+k} = \frac{3^{n+1}(3^n-1)}{2}$$

**תשובות סופיות:**

שאלות הוכחה.