

בעיות נבחרות באלגברה

פרק 2 - אינדוקציה מתמטית

תוכן העניינים

1. שאלות העוסקות בתכונות התחלקות..... 1
2. סדרות..... 4
3. עצרת..... 6
4. אינדוקציות עם רקורסיה..... 7
5. שאלות שבהן האיבר הכללי מורכב ממספר מחוברים..... 8
6. שאלות העוסקות באינדוקציות עם איברים משתנים..... 9
7. שאלות העוסקות בהוכחת באי-שוויונים באינדוקציה..... 10
8. שאלות כוללות ומסכמות..... 12
9. מושג הסכימה וכתובה מקוצרת של אינדוקציות..... 14

שאלות העוסקות בתכונות התחלקות:

סיכום כללי:

מבנה כללי של רישום הוכחה באינדוקציה:

בדיקה:

בדיקה נכונות האינדוקציה עבור $n=1$ (ולעיתים כדאי לבדוק גם עבור $n=2,3$).

הנחת האינדוקציה:

נניח כי עבור $n=k$ (טבעי כלשהו) כי טענת האינדוקציה נכונה.

הוכחת האינדוקציה:

נוכיח כי עבור $n=k+1$ טענת האינדוקציה מתקיימת.

סיכום:

לסיכום, הראנו כי הטענה נכונה עבור $n=1$ והראנו כי נכונות הטענה עבור $n=k$ גוררת את נכונותה עבור $n=k+1$, לפיכך, על פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

שאלות:

- (1) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $8^n - 3^n$ מתחלק ב-5 ללא שארית לכל n טבעי.
- (2) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $11^n - 4^n$ מתחלק ב-7 ללא שארית לכל n טבעי.
- (3) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $8 \cdot 7^n + 4^{n+2}$ מתחלק ב-24 ללא שארית לכל n טבעי.
- (4) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $5 \cdot 3^{2n} - 5^{n+1}$ מתחלק ב-20 ללא שארית לכל n טבעי.
- (5) a_n הוא האיבר במקום ה- n בסדרה החשבונית: $1, 3, 5, 7, \dots$ הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $2^{a_n} + 4$ מתחלק ב-12 ללא שארית לכל n טבעי הגדול מ-1.
- (6) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $n^2 + n$ מתחלק ב-2 ללא שארית לכל n טבעי.
- (7) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $n^3 + 5n$ מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.
- (8) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $3^n - 2n - 1$ מתחלק ב-4 ללא שארית לכל n טבעי.
- (9) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $9(9^n - 1) - 40n$ מתחלק ב-32 ללא שארית לכל n טבעי.
- (10) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^n + 5^n - 2^n(2^n + 1)$ מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.

(11) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^n + 2^{2n}$ מתחלק ב-11 ללא שארית לכל n טבעי אי זוגי.

(12) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $a^n - b^n$ מתחלק ב- $(a+b)$ ללא שארית לכל n טבעי זוגי.

(13) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^{n+2} + 1$ מותיר שארית 2 בחלוקתו ב-3 לכל n טבעי.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

סדרות:

סיכום כללי:

תזכורת:

- סדרה היא אוסף מספרים: a_1, a_2, \dots, a_n , כאשר n הוא מיקום האיבר בסדרה ו- a_n הוא ערך האיבר העומד במקום ה- n בסדרה.

○ סדרה כללית – סדרה שבה כל איבר מוגדר לפי מקומו בסדרה.

○ סכום n האיברים הראשונים בסדרה יסומן ב- S_n

והוא מקיים: $S_n = a_1 + \dots + a_n$.

- סדרה חשבונית – סדרת מספרים שבה ההפרש בין כל שני איברים סמוכים הוא גודל קבוע. נוסחת האיבר הכללי היא: $a_n = a_1 + d(n-1)$ כאשר d הפרש הסדרה.

○ סכום n האיברים הראשונים הוא: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n}{2}[2a_1 + d(n-1)]$.

- סדרה הנדסית – סדרת מספרים שבה המנה בין כל שני איברים סמוכים היא גודל קבוע. נוסחת האיבר הכללי היא: $a_n = a_1 q^{n-1}$ כאשר q היא מנת הסדרה.

○ סכום n האיברים הראשונים הוא: $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

שאלות:

14) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי

$$1+2+3+4+\dots+n = \frac{n}{2}(n+1) \quad \text{מתקיים:}$$

15) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי

$$4+7+10+13+\dots+(3n+1) = \frac{n}{2}(3n+5) \quad \text{מתקיים:}$$

16) נתונה סדרה שבה: $a_n = n(n+2)$

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $S_n = \frac{n}{6}(n+1)(2n+7)$

17) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$$

18) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{6}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{6}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{6}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}$$

19) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 9 + \dots + n \cdot 3^{n-1} = \frac{1}{4} [3^n (2n-1) + 1]$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

עצרת:

סיכום כללי:

תזכורת – מושג העצרת:

עצרת מוגדרת להיות מכפלת האיברים עד לערך הנקוב: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.
 מגדירים: $0! = 1$ ותמיד מתקיימים השוויונות: $n! = n \cdot (n-1)!$, $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$.

שאלות:

(20) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

(21) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1 \cdot 2!}{2} + \frac{2 \cdot 3!}{4} + \frac{3 \cdot 4!}{8} + \dots + \frac{n(n+1)!}{2^n} = \frac{(n+2)!}{2^n} - 2$$

(22) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$p! + \frac{(p+1)!}{1!} + \frac{(p+2)!}{2!} + \dots + \frac{(p+n-1)!}{(n-1)!} = \frac{(p+n)!}{(n-1)!(p+1)}$$

(23) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) \dots \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{n!}$$

(24) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{5}{1 \cdot 4} - \frac{11}{4 \cdot 7} + \frac{17}{7 \cdot 10} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} (6n-1)}{(3n-2)(3n+1)} = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

אינדוקציות עם רקורסיה

שאלות

(1) נתון כי $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$.

הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים:

א. $a_n \leq 2$

ב. $a_n \leq a_{n+1}$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו מהי סדרה רקורסיבית.

(2) הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי,

אם $a_1 = -1$, $a_2 = 0$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$,

אז $a_n = n^2 - 2n$.

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו מהי סדרה רקורסיבית.

(3) הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי,

אם $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}$,

אז $a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^n - \frac{1}{2}(-1)^n$.

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו מהי סדרה רקורסיבית.

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר GooL.co.il

שאלות שבהן האיבר הכללי מורכב ממספר מחוברים:

שאלות:

(25) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1+2+3+4+\dots+2n=n(2n+1)$$

(26) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\dots+(2n)^2=\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$$

(27) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\dots+3n\cdot 2^{3n-1}=(3n-1)2^{3n}+1$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות העוסקות באינדוקציות עם איברים משתנים:

שאלות:

(28) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + \dots + (3n) = 2n(2n+1)$$

(29) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$(n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{n}{6}(2n+1)(7n+1)$$

(30) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) \left(1 - \frac{1}{n+3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$$

(31) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$(n+1)(n+2) \cdot \dots \cdot (2n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$$

(32) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות העוסקות בהוכחת באי-שוויונים באינדוקציה:

שאלות:

(33) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי הגדול מ-1 מתקיים:

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{n}{n+1}$$

(34) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

(35) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי הגדול מ-2 מתקיים:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}$$

(36) נתונה סדרה שבה: $a_n = n^n$. נגדיר: $T_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n$.

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $T_n \leq n^{\frac{n}{2}(n+1)}$.

(37) נתון אי-השוויון: $2^n > n^2$. מצא את ה- n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה- n שמצאת.

(38) נתון אי-השוויון: $4^n > 5n^2 + 1$. מצא את ה- n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה- n שמצאת.

(39) נתון אי-השוויון: $n^3 - n < 5^{n-1}$. מצא את ה- n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה- n שמצאת.

(40) נתון אי-השוויון: $3^n + 4^n + 5^n < 6^n$. מצא את ה- n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה- n שמצאת.

(41) נתון אי-השוויון: $n^n \geq n!$. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי.

(42) נתון אי-השוויון: $a^n + b^n < (a+b)^n$, $(a, b > 0)$. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי הגדול מ-1.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות כוללות ומסכמות:

שאלות:

$$(43) \text{ נתון השוויון: } 4+7+10+13+\dots = \frac{n}{2}(3n+5)$$

- א. מצא את האיבר במקום ה- n .
 ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.
 ג. חשב את הסכום: $37+40+43+\dots+85$.

$$(44) \text{ נתון השוויון: } \frac{2}{3} + \frac{6}{9} + \frac{10}{27} + \dots = 2 - \frac{2n+2}{3^n}$$

- (45) נתון השוויון: $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots = \frac{n}{4n+1}$
 א. מצא את האיבר במקום ה- n .
 ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

$$\text{ג. חשב את הסכום: } \frac{1}{25 \cdot 29} + \frac{1}{29 \cdot 33} + \frac{1}{33 \cdot 37} + \dots + \frac{1}{89 \cdot 93}$$

$$(46) \text{ נתון השוויון: } (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{n}{6}(2n+1)(7n+1)$$

- א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.
 ב. חשב באמצעות סעיף א' את הסכום: $26^2 + 27^2 + 28^2 + \dots + 48^2$.

$$(47) \text{ נתון השוויון: } 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$$

- א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.
 ב. הבע באמצעות n את הסכום: $4^2 + 6^2 + 8^2 + \dots + (4n)^2$.

(48) נתונים השוויונים הבאים:

$$\text{א. } 3n + (3n+1) + (3n+2) + \dots + 4n = \frac{7}{3}(n^2 + 3n - 1)$$

$$\text{ב. } 3n + (3n+1) + (3n+2) + \dots + 4n = n^2 + 11n - 5$$

$$\text{ג. } 3n + (3n+1) + (3n+2) + \dots + 4n = \frac{7n}{2}(n+1)$$

קבע איזה מהשוויונים נכון לכל n טבעי, והוכח אותו באינדוקציה.

$$(49) \text{ נתון השוויון: } n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + \dots + (3n) = an(2n+b)$$

- א. נתון כי השוויון נכון עבור $n=1$ ו- $n=2$. מצא את ערכי a ו- b .
 ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

$$(50) \text{ נתון אי-השוויון: } \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}$$

- א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי הגדול מ-2.
 ב. הוכח באמצעות סעיף א' כי מתקיים: $\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{18} > \frac{1}{2}$

$$(51) \text{ נתון אי-השוויון: } n^2 < 2^n$$

- א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי הגדול מ-4.
 ב. הוכח באמצעות סעיף א' כי מתקיים: $5^2 \cdot 6^2 \cdot 7^2 \cdot 8^2 \cdot \dots \cdot 20^2 < 2^{200}$

$$(52) \text{ הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הסכום: } 9 + 27 + 81 + \dots + 3^{3n+1}$$

מתחלק ב-117 ללא שארית לכל n טבעי.

(53) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $n^3 + 5n$ מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.
 ב. נתון כי $a+b$ מתחלק ב-6 ללא שארית.
 הוכח כי $a^3 + b^3$ מתחלק ב-6 ללא שארית.

(54) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. הוכח את הטענה: אם ל- n טבעי מסוים $3^n + 5^n$ מתחלק ב-16 ללא שארית אז גם $3^{n+2} + 5^{n+2}$ מתחלק ב-16 ללא שארית.
 ב. האם מהטענה בסעיף א' נובע כי $3^n + 5^n$ מתחלק ב-16 ללא שארית עבור כל n טבעי אי-זוגי?
 ג. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $3^n + 5^n$ מתחלק ב-8 ללא שארית לכל n טבעי אי-זוגי.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

מושג הסכימה וכתובה מקוצרת של אינדוקציות:

סיכום כללי:

סימון הסכימה (קרי: סיגמה) מוגדר באופן הבא: $\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

מקור הסימון נובע מהמילה Sum ומשמעו הוא סכימה של איברים המתחילים

בערך המצוין בתחתית הסימון $\left(\sum_{k=1}^n \right)$ עד לערך המצוין בחלקו העליון $\left(\sum_{k=1}^n \right)$.

דוגמאות:

$$\bullet \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$\bullet \sum_{k=3}^{12} k^2 = 3^2 + 4^2 + \dots + 12^2$$

$$\bullet \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{4n+1}$$

שאלות:

$$(1) \text{ הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

$$(2) \text{ הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$(3) \text{ הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{n}{4n+1}$$

$$(4) \text{ הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n 2^k = 2(2^n - 1)$$

$$(5) \quad \text{הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n \frac{3}{4^{k-1}} = 4 - \frac{1}{4^{n-1}}$$

$$(6) \quad \text{הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^{3n} k = 1 \frac{1}{2} n(3n+1)$$

$$(7) \quad \text{הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^{3n} (4k-1) = 3n(6n+1)$$

$$(8) \quad \text{הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n (n+k) = \frac{n}{2}(3n+1)$$

$$(9) \quad \text{הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n 3^{n+k} = \frac{3^{n+1}(3^n-1)}{2}$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.