פיזיקה מודרנית

פרק 10 - אופרטור העלאה והורדה (סולם) באוסילטור הרמוני

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגילים 1

אופרטור העלאה והורדה באוסילטור הרמוני:

סיכום כללי:

אופרטור ההורדה (או השמדה):

$$\hat{a}=\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\hat{x}+\frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)$$

אופרטור ההעלאה (או יצירה):

$$\hat{a}\dagger=\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\hat{x}-\frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)$$

$$\hat{H}=\hbar\omega\left(\hat{a}\dagger\hat{a}+\frac{1}{2}\right)=\hbar\omega\left(\hat{a}\hat{a}\dagger-\frac{1}{2}\right)$$

$$\left[\hat{a},\hat{a}\dagger\right]=1$$

$$\hat{a}\left|\psi_n\right\rangle=\sqrt{n}\left|\psi_{n-1}\right\rangle$$
$$\hat{a}\dagger\left|\psi_n\right\rangle=\sqrt{n+1}\left|\psi_{n+1}\right\rangle$$

$$E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\qquad n=0,1,2,...$$

$$\psi_0\left(x\right)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$\psi_n=\frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\hat{a}\dagger\right)^n\psi_0$$

$$\psi_n\left(x\right)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}H_n\left[\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}x\right]$$

$$H_0\left(y\right)=1$$
$$H_1\left(y\right)=2y$$
$$H_2\left(y\right)=-2\left(1-2y^2\right)$$
$$H_3\left(y\right)=-12\left(y-\frac{2}{3}y^3\right)$$

שאלות:

1) יחס החילוף של a עם H

מצאו את:

א. $\left[\hat{a},\hat{H}\right]$

ב. $\left[\hat{a}\dagger,\hat{H}\right]$

2) חישוב עם האופרטורים

נתון אוסילטור הרמוני עם תדירות ω.

א. הראו באופן מפורש את פעולת האופרטור $\hat{a}$ על המצבים ϕ_0 ו-ϕ_1

(כאשר ϕ_n הם המצבים העצמיים של ההמילטוניאן).

מכינים חלקיק במצב: $|\psi\rangle = A\left[|\phi_1\rangle+\sqrt{2}|\phi_2\rangle+|\phi_3\rangle\right]$

ב. מצאו את הקבוע A.

ג. מהי התוחלת והשונות של האנרגיה ב-$t=0$?

ד. מהי פונקציית הגל כתלות בזמן?

ה. מהו ערך התוחלת של המיקום כתלות בזמן?

תשובות סופיות:

1) א. $\hbar\omega\hat{a}$ ב. $-\hbar\omega\hat{a}^{\dagger}$

2) א. הוכחה. ב. $\frac{1}{2}$ ג. $\Delta E=\frac{1}{\sqrt{2}}\hbar\omega \quad \langle E\rangle=\frac{5}{2}\hbar\omega$

ד. $|\psi(t)\rangle=\frac{1}{2}\left[e^{-i\frac{3}{2}\omega t}|\phi_1\rangle+\sqrt{2}e^{-i\frac{5}{2}\omega t}|\phi_2\rangle+e^{-i\frac{7}{2}\omega t}|\phi_3\rangle\right]$

ה. $\langle x(t)\rangle=\frac{1}{2}\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)\left[2+\sqrt{6}\right]\cos\left(\frac{1}{2}\omega t\right)$