גלים ואופטיקה 20248

תוכן העניינים

גלים ואופטיקה 20248

פרק 1 - אנליזת פורייה

תוכן העניינים

אנליזת פורייה

טורי פורייה

רקע

$$f\left(x\right)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)+B_n\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)\right]$$

כאשר L הוא המחזור של הפונקציה (אפשרי גם שהמחזור של הפונקציה יהיה קטן מ L אבל לא גדול ממנו).

הפונקציה צריכה להיות מחזורית ובמרחב L_2.

$$A_0=\frac{2}{L}\int_0^L f\left(x\right)dx$$

$$A_n=\frac{2}{L}\int_0^L f\left(x\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx$$

$$B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f\left(x\right)\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx$$

מכפלה פנימית

$$\int_0^L f\left(x\right)g\left(x\right)dx$$

פונקציות אורתוגונליות

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)dx=0$$

$$\int_0^L \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi mx}{L}\right)dx=\frac{L}{2}\delta_{nm}$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi mx}{L}\right)dx=\frac{L}{2}\delta_{nm}$$

אפשר לתאר באמצעות אותן נוסחאות של טור פורייה גם קטע מתוך פונקציה שאינה מחזורית או פונקציה המוגבלת לתחום מסוים. צריך לזכור שהטור מתאר רק את הקטע המסוים ובשאר המרחב הוא מתאר שכפול של הקטע ולא את הפונקציה המקורית.

טור סינוסים וקוסינוסים לתיאור פונקציה בקטע סופי

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

$$B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)dx$$

$$f(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

$$A_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)dx$$

טור אקספוננטים:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{i\frac{2\pi n}{L}x}$$

$$C_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx$$

$$C_n=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}dx$$

הקשר בין המקדמים בטור אקספוננטים לטור סינוסים וקוסינוסים:

$B_n=i(C_n-C_{-n})$	$A_n=C_n+C_{-n}$
$C_{-n}=\frac{1}{2}(B_n+iA_n)$	$C_n=\frac{1}{2}(B_n-iA_n)$

$$\frac{A_0}{2}=C_0$$

תופעת גיבס:

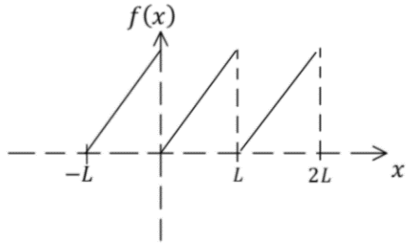
- קרוב לנקודת האי רציפות של הפונקציה המקורית. נראה תנודתיות בפונקציה המתוארת על ידי הטור. תנודתיות זו הולכת וקטנה ככל שמספר האיברים בטור גדל והיא נעלמת לגמרי עבור אינסוף איברים.
- בנקודת אי הרציפות אנחנו נראה סטייה של 0.9% מערך הקפיצה בפונקציה, סטייה זו היא קבועה ואינה קטנה ככל שמגדילים את מספר האיברים (החל ממספר איברים מסוים)

שאלות

1) דוגמה - פונקציית מסור

מצאו את טור פורייה עבור פונקציית מסור:

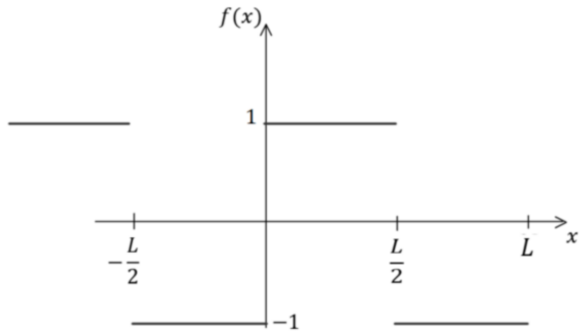
$f(x) = Ax$ כאשר $0 \le x < L$ ובעלת מחזור L . A קבוע נתון.



2) דוגמה - פונקציית סימן

מצאו את המקדמים של טור פורייה של הפונקציה $f(x)$ השווה לפונקציית סימן $sign(x)$, בתחום $-\frac{L}{2} \le x \le \frac{L}{2}$ ובעלת מחזור L. ציירו באמצעות מחשב את המקרה של $N = 1$, $N = 3$, $N = 10$ ו- $N = 50$ עבור $L = 1$

$$sign(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



3) תרגיל - פונקציית משולש

נתונה פונקציית משולש

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ L - x, & \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases}$$

המוגדרת בתחום $0 \le x \le L$

א. כתבו את הפונקציה כטור פורייה של קוסינוסים וסינוסים.

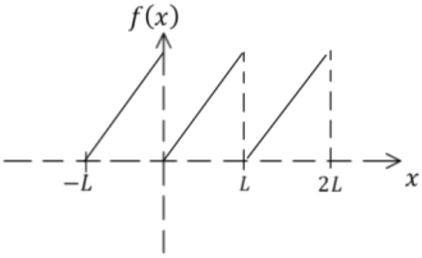
ב. כתבו את הפונקציה כטור סינוסים.

ג. כתבו את הפונקציה כטור קוסינוסים.

ד. הראו כי התוצאה של סעיף ג' מתלכדת עם התוצאה של סעיף א' והסבירו מדוע.

4) תרגיל - פונקציית מסור עם אקספוננטים

א. מצאו את טור אקספוננטים עבור פונקצית המסור מהדוגמה בתחילת הפרק: $f(x) = Ax$ כאשר $0 \leq x < L$ ובעלת מחזור L. A קבוע נתון.



ב. מצאו את המקדמים של טור סינוסים וקוסינוסים באמצעות המקדמים שמצאתם בסעיף א' והראו שהתשובה זהה לתשובה שקיבלנו בדוגמה של תחילת בפרק.

5) תרגיל - פונקציה לינארית בתחומים שונים

מצאו את טור פורייה של הפונקציה $f(x) = x$ בתחומים הבאים:

א. $[0,2\pi]$

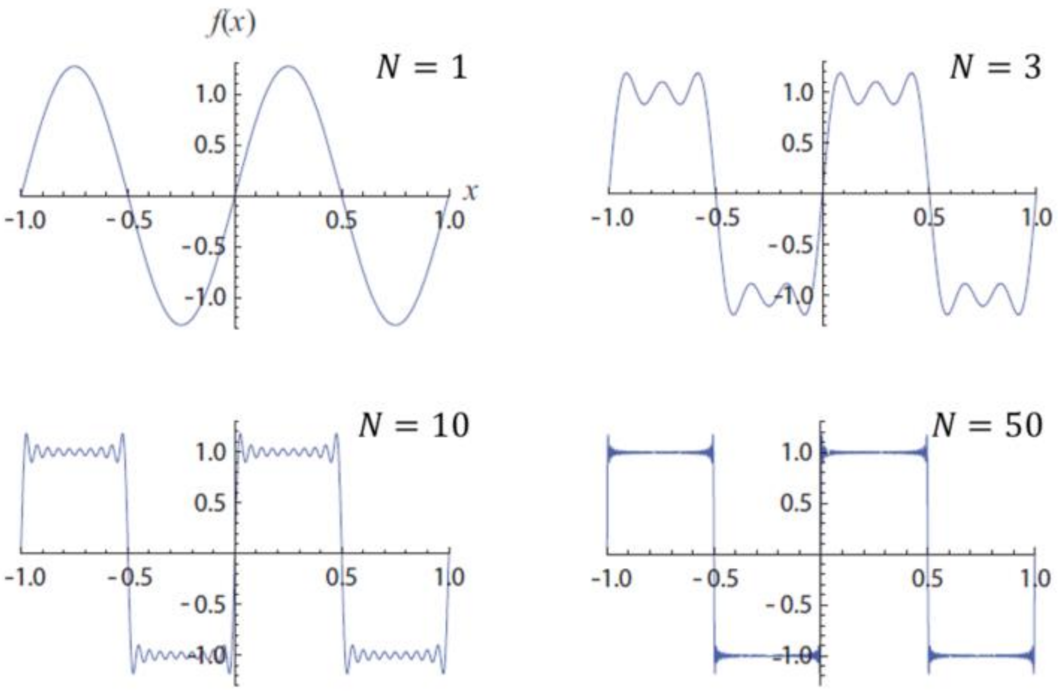
ב. $[-\pi,\pi]$

ג. $[0,4\pi]$

תשובות סופיות

1) $f(x)=\frac{AL}{2}+\sum_{n=n}^{\infty}-\frac{AL}{\pi n}\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)$

2) $A_n=0$ לכל n ; $B_n=\begin{cases}\frac{4}{\pi n} & n \text{ odd}\\ 0 & n \text{ even}\end{cases}$.



3) א. $f(x)=\frac{L}{4}-\sum_{n=1,\text{ odd}}^{\infty}\frac{2L}{\pi^2 n^2}\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)$

ב. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4L}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$

ג. $f(x)=\frac{L}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L}{\pi^2 n^2}\left(2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-1-(-1)^n\right)\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$

ד. כי שכפול הפונקציה על מחזור L נותן פונקציה זוגית.

4) א. $f(x)=\frac{AL}{2}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{iLA}{2\pi n}e^{i\frac{2\pi n}{L}x}$

ב. $A_0=AL,\ A_n=0,\ B_n=-\frac{LA}{\pi n}$

5) א. $f(x)=\pi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin(nx)$

ב. $f(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^n\sin(nx)$

ג. $f(x)=2\pi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n}\sin\left(\frac{n}{2}x\right)$

התמרת (טרנספורם) פורייה

רקע

התמרת (טרנספורם) פורייה

$$F(k) = FT[f(x)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-ikx}\,\mathrm{d}x$$

התמרה הפוכה

$$f(\mathrm{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k)\mathrm{e}^{ikx}\,\mathrm{d}x$$

תכונות :

1. ליניאריות : $\mathrm{FT}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha\mathrm{FT}[f(x)] + \beta\mathrm{FT}[g(x)]$

אם $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx \neq \infty$ אז $f(x) \in G$

- אם $f(x) \in G$ אז $F(k)$ רציפה
- אם $f(x) \in G$ אז $\lim_{k\to\pm\infty} F(k) = 0$ רימן, - לבג
- אם $f(x)$ זוגית אז $F(k) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos(kx)\,dx$
- אם $f(x)$ אי-זוגית אז $F(k) = -\frac{i}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\sin(kx)\,dx$
- אם $f(x)$ ממשית אז $\overline{F(k)} = F(-k)$

התמרות של פונקציות מיוחדות :

גאוסיאן

$$FT\left[A\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\right] = \frac{A\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{4\alpha}}}{2\sqrt{\pi\alpha}}$$

אקספוננט

$$FT\left[Ae^{-\alpha|x|}\right]=\frac{\alpha A}{\pi(\alpha^2+k^2)}$$

לורנציאן

$$FT\left[\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}\right]=\frac{1}{2}e^{-\alpha|k|}$$

פונקציית דלתא

$$FT[\delta(x)]=\frac{1}{2\pi}$$

קבוע

$$FT[1]=\delta(k)$$

<u>נוסחת הכפל באקספוננט , קוסינוס או סינוס (מודולציה) :</u>

$$FT\left[f(x)e^{iCx}\right]=F(k-C)$$

$$FT[f(x)\cos(Cx)]=\frac{F(k-C)+F(k+C)}{2}$$

$$FT[f(x)\sin(Cx)]=\frac{F(k-C)-F(k+C)}{2i}$$

<u>נוסחת הכיווץ והזזה :</u>

$$FT[f(ax+b)]=\frac{1}{|a|}e^{i\frac{kb}{a}}F\left(\frac{k}{a}\right)$$

<u>נוסחת הנגזרת :</u>

אם $f(x),f'(x)\in G$ ו - $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$ אז:

$$FT\left[f'(x)\right]=ikF(k)$$

<u>נוסחת המומנט :</u>

אם $xf(x)\in G$ אז $F(k)$ גזירה ברציפות ו - $FT[xf(x)]=i\frac{d}{dk}F(k)$

שאלות

1) דוגמה - אקספוננט עם פונקציית טטה

חשבון את התמרת פורייה של הפונקציה:

$f(x) = Ae^{-ax}\theta(x)$

כאשר $\theta(x)$ היא פונקציית Heaviside המוגדרת לפי: $\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$

2) דוגמה - פונקציית חלון

חשבון את התמרת פורייה של פונקציית חלון המוגדרת לפי:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

3) דוגמה - חלון מורחב

חשבון את התמרת פורייה של פונקציית חלון מורחב המוגדרת לפי:

$f(x) = \begin{cases} 1, & -r \leq x \leq r \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$, כאשר $r > 0$.

4) תרגיל - נגזרת של לורנציאן

השתמשו בנוסחת הנגזרת ומצאו את התמרת פוריה של הפונקציה

$f(x) = \frac{x}{(x^2+\alpha^2)^2}$.

5) תרגיל - חלון כפול איקס

השתמשו בנוסחת המומנט וחשבו את התמרת פורייה של הפונקציה:

$f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$.

6) תרגיל - גאוסיאן כפול איקס בריבוע

מצאו את התמרת פורייה של הפונקציה $f(x) = x^2 e^{-\alpha x^2}$.

7) תרגיל - משוואה עם נגזרת ראשונה

פתרו את המשוואה הבאה $\frac{d}{dt}q(t) + bq(t) = f_0 e^{-at}\theta(t)$.

כלומר מצאו את $q(t)$ באופן מפורש עבור $a, b > 0$.

רמז: מצאו את הפירוק לשברים חלקיים לפי הדרך הבאה

$$\frac{1}{(x+b)(x+a)} = \frac{A}{x+b} + \frac{B}{x+a}$$

תשובות סופיות

1) $\dfrac{A}{2\pi(a+ik)}$

2) $\dfrac{1}{\pi}\sin c(k)$

3) $\dfrac{\sin(rk)}{\pi k}$

4) $\dfrac{-ik}{4\alpha}e^{-\alpha(k)}$

5) $\dfrac{i}{\pi}\left(\dfrac{k\cos k-1\cdot\sin k}{k^2}\right)$

6) $\dfrac{e^{-\frac{k^2}{4\alpha}}}{4\sqrt{\pi\alpha^3}}\left(1-\dfrac{k^2}{2\alpha}\right)$

7) $q(t)=\dfrac{1}{b-a}f_0\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)\theta(t)+Ce^{-bt}$

גלים ואופטיקה 20248

פרק 2 - מבוא לגלים

תוכן העניינים

הרצאות ותרגילים – מערכת של שתי מסות

שאלות

1) מסה מחוברת למסה שמחוברת לתקרה

מסה m מחוברת לתקרה באמצעות קפיץ אנכי בעל קבוע 2k . מסה m נוספת מחוברת למסה הראשונה באמצעות קפיץ אנכי נוסף בעל קבוע k . המסות זזות רק בציר האנכי.

א. הסבירו מדוע ניתן להתעלם מכוח הכובד בבעיה זאת, כאשר אנו באים למצוא את התדירויות העצמיות ואת אופני התנודה.

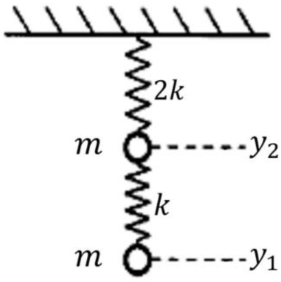
ב. כתבו את מערכת המשוואות בצורה מטריציונית ומצאו את התדירויות העצמיות.

ג. מצאו את אופני התנודה, ותארו אותם.

ד. בזמן $t=0$ נותנים מכה קטנה למסה התחתונה, כך שהיא מקבלת מהירות התחלתית v_0.

מצאו את תנועת המסות כתלות זמן.

רמז: במקרה זה יהיה יותר פשוט לפרוש את תנאֵי ההתחלה כאשר הפתרון רשום באמצעות סכום של סינוסים וקוסינוסים.



תשובות סופיות

1) א. כוח הכובד הוא כוח קבוע. כוחות קבועים מתבטלים על ידי תוספת קבועה של מתיחה לקפיץ. לכן, כוחות קבועים משנים רק את נקודת שיווי המשקל ואינם משפיעים על התדירויות או על אופני התנודה.

ב. $w_{1,2}=\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}\,w_0,\quad w_{3,4}=\pm\sqrt{2-\sqrt{2}}\,w_0$

ג. $v_1=\begin{pmatrix}1\\-2.41\end{pmatrix},\quad v_2=\begin{pmatrix}1\\0.41\end{pmatrix}$

ד.
$$\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.63\\-1.52\end{pmatrix}\cdot\frac{v_0}{w_0}\sin\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\,w_0t\right)+\begin{pmatrix}0.9\\0.37\end{pmatrix}\cdot\frac{v_0}{w_0}\sin\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\,t\right)$$
$$w_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

גלים ואופטיקה 20248

פרק 3 - גלים רוחביים במיתר

תוכן העניינים

גלים רוחביים במיתר

משוואת הגלים במיתר

משוואת הגלים היא $\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$, כאשר

T – המתיחות במיתר

ρ – צפיפות המסה ליחידת אורך

ψ – פונקציית הגל, מתארת את התנועה הרוחבית של כל חתיכה במיתר.

מהירות הגל היא $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$.

פתרון המשוואה:

$$\psi(x,t) = A\cos(kx-\omega t) + B\sin(kx-\omega t) + C\cos(kx+\omega t) + D\sin(kx+\omega t)$$

יחס הדיספרסיה: $\omega = v \cdot k$.

אפשרויות נוספות לפתרון (על ידי שימוש בזהויות טריגונומטריות)

$$\psi(x,t) = A_1\cos(kx-\omega t+\phi_1) + A_2\cos(kx-\omega t+\phi_2) =$$
$$B_1\cos k\,x\cos\omega\,t + B_2\cos k\,x\sin\omega\,t + B_3\sin k\,x\cos\omega\,t + B_4\sin k\,x\sin\omega\,t =$$
$$C_1\cos k\,x\cos(\omega t+\phi_1) + C_2\sin k\,x\cos(\omega t+\phi_2)$$

שתי האפשרויות האחרונות עדיפות לגלים עומדים.

פתרון במספרים מרוכבים(הערה בלבד)

$$\psi(x,t) = A_1e^{i(kx+\omega t)} + A_2e^{i(kx-\omega t)} + A_3e^{-i(kx+\omega t)} + A_4e^{-i(kx-\omega t)}$$

אם הפונקציה ממשית, אז $A_3 = A_1^*$ ו-$A_4 = A_2^*$, והפתרון מתכנס לחלק הממשי של

$$\psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)} + Be^{-i(kx+\omega t)}$$

שאלות

1) **תרגיל – סטודנטית מודדת את כוח הכובד**
סטודנטית רוצה למדוד את תאוצת כוח הכבידה (g) המקומי, הסטודנטית תולה חוט אנכי ומחברת אליו משקולת בעלת מסה $M = 2\text{kg}$.
נתון שלחבל יש מסה של $m = 5\text{gr}$ (ניתן להניח התפלגות אחידה) ואורך של $l = 1.2m$. הסטודנטית שולחת מספר פולסים לאורך החבל ומודדת שהזמן הממוצע שלוקח לפולס להגיע מקצה לקצה הוא $t = 17.5\text{ms}$ (מילי שניות).
חשבו את g (ניתן להזניח את משקל החוט ולהשתמש רק במשקל המשקולת, כאשר מחשבים את המתיחות בו).

2) **תרגיל - גל קוסינוס מעורר במיתר**
צפיפות המסה הקווית במיתר היא $1.2 \times 10^{-4}\,\frac{\text{kg}}{m}$, במיתר מעורר גל מהצורה: $\psi(x,t) = 0.005\,cos(3x - 90t)$.
חשבו את מהירות הגלים במיתר, את המתיחות ואת המהירות המקסימלית בכיוון רוחבי של נקודה כלשהיא במיתר. הניחו יחידות סטנדרטיות.

3) **תרגיל - גל סינוס מתקדם במיתר**
נתון גל סינוס המתקדם במיתר.
א. כתבו פונקציה שתתאר גל סינוס הנע על מיתר בכיוון החיובי של ציר ה-x, בעל זמן מחזור של 5 שניות, מהירות של 20 מטר לשנייה ואמפליטודה של 6 מילימטר.
ב. רשמו ביטוי לתאוצה של כל אלמנט מסה במיתר.
ג. איפה נמצאים אלמנטי המסה במיתר בעלי התאוצה הגדולה ביותר (בערך מוחלט) בזמן $t = 3sec$?
ד. עבור אילו זמנים התאוצה של אלמנט המסה בנקודה $x = 2\text{cm}$ היא הנמוכה ביותר (בערך מוחלט)?
ה. מקטינים את התדירות f של הגל, תארו כיצד ישתנו מהירות אלמנט מסה במיתר, מהירות הגל ואורך הגל?

4) תרגיל – פונקציה ריבועית

נתונה פונקציה $y(x,t) = 32x^2 + 128t^2$. הניחו יחידות סטנדרטיות.

א. הראו שפונקציה זו היא פתרון של משוואת הגלים במיתר.
הדרכה: נסו לרשום את הפונקציה כצירוף של פונקציות, אשר כל אחת מהן מתארת גל במיתר.

ב. מהי מהירות הגלים במיתר זה.

ג. נתון שצפיפות המסה ליחידת אורל של המיתר היא $0.03\,\frac{\mathrm{kg}}{m}$ חשבו את מתיחותו.

ד. האם הפונקציה $\sqrt{32x^2 + 128t^2}$ היא גם פתרון של משוואת הגלים?

5) תרגיל – מיתר בתווך צמיג *

מיתר בעל מתיחות T וצפיפות ρ נמצא בתוך תווך צמיג, כך שכוח החיכוך שפועל על אלמנט אורך dx, הוא $F = -bdx\frac{\partial\Psi}{\partial t}$ כאשר b פרמטר נתון.

א. מצאו משוואה המתארת תנודות קטנות של המיתר (משוואת הגלים).

ב. מצאו את אופני התנודה של המערכת, כלומר פתרונות בהם בכל נקודה x תהיה אותה תלות זמנית. הניחו ריסון חלש.
הדרכה: הציבו פתרון מופרד משתנים $\Psi(x,t) = X(x)f(t)$ וזהו כי המשוואה עבור $f(t)$ היא משוואה של מתנד הרמוני מרוסן, מהו Γ במקרה הזה?

ג. נתון שבזמן $t = 0$ צורת המיתר היא $\Psi(x,t=0) = a\cos(k_0x)$ ושהמהירות ההתחלתית היא אפס. מצאו את צורת המיתר בזמן $t > 0$.

תשובות סופיות

1) $9.8\frac{m}{s}$

2) $30\frac{m}{s};0.102N;0.45\frac{m}{s}$

3) א. $y(x,t)=0.006_m\sin\left(\frac{\pi}{50}x-\frac{2\pi}{5}t\right)$ ב. $a(x,t)=0.00096\pi^2\sin\left(\frac{\pi}{50}x-\frac{2\pi}{5}t\right)$

ג. $x=85_m+50n$, כאשר n מספר שלם בין מינוס אינסוף לאינסוף.

ד. $t=0.001_s-2.5_sn$

ה. מהירות אלמנט מסה במיתר קטנה, מהירות הגל לא משתנה ואורך הגל גדל.

4) א. $y(x,t)=(4x+8t)^2+(4x-8t)^2$ ב. $2\frac{m}{s}$ ג. $0.12N$ ד. לא.

5) א. $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{b}{T}\frac{\partial\psi}{2t}+\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$

ב. $\psi(x,t)=[A\cos(kx)+B\sin(kx)]e^{-\frac{\Gamma}{2}t}[\cos(\omega t)\,2C\sin(\omega t)]$, כאשר $\Gamma=\frac{b}{\rho}$.

ג. $\psi(x,t)=a\cos(k_0x)\,e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left[\cos(\omega t)\frac{\Gamma}{2\omega}\sin(\omega t)\right]$, כאשר $\omega=\sqrt{\frac{k_0^2T}{\rho}-\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$.

גלים ואופטיקה 20248

פרק 4 - חבורת גלים ונפיצה (דיספרסיה)

תוכן העניינים

יחס נפיצה כללי ומהירות החבורה

רקע

ייצוג פונקציית הגל באמצעות פורייה: $\psi(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}A(k)e^{i(kx-\omega(k)t)}dx$

כאשר: $A(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,0)e^{-ikx}dx$

מהירות הפאזה: $v_\varphi(k)=\frac{\omega}{k}$

מהירות החבורה: $v_g(k)=\frac{\partial\omega}{\partial k}$

שאלות

1) מיתר מתכתי

יחס הנפיצה שמתאר תנודות של מיתר מתכתי ממשי הקשור בשני קצוותיו נתון ע״י: $\omega^2=\left(\frac{T}{\rho}\right)k^2\left(1+\varepsilon L^2k^2\right)$

כאשר T המתיחות, ρ צפיפות המסה ליחידת אורך, $\varepsilon<<1$ פרמטר חסר יחידות המייצג את קשיחות המיתר ו- L אורך המיתר.

א. חשבו את מהירות הפאזה ומהירות החבורה.

ב. הסבירו מדוע מספרי הגל ואורכי הגל זהים לאלו המתקבלים אם המיתר היה אידיאלי.

ג. רשמו את התדירויות העצמיות כתלות ב- n ושאר הנתונים בבעיה.

ד. הראו שבגבול $n\to\infty$ התדירויות פרופורציוניות ל- n^2 והשוו למיתר אידיאלי.

ה. נגדיר את התחום האידיאלי של מיתר על פי $\varepsilon L^2k^2<<1$. כמה אופני תנודה נמצאים בתחום האידיאלי במיתר שבו $L=1.2m$ ו- $\varepsilon=2\cdot10^{-5}$.

2) הוכחת נוסחה נוספת למהירות החבורה

הראו שניתן לרשום את מהירות החבורה בתור: $v_g\left(k\right)=k\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial k}+v_\varphi$.

3) חילוץ משוואה מתוך יחס נפיצה

גלים אלקטרו מגנטיים בפלסמה מקיימים את יחס הדיספרסיה הבא:
$\omega^2=\omega_p^2+c^2k^2$, כאשר ω_p ו- c קבועים.

א. רשמו את משוואת הגלים המתאימה ליחס הדיספרסיה הנ"ל.

ב. מצאו את מהירות הפאזה ומהירות החבורה ובדקו מה קורה בגבול של: $ck>>\omega_p$.

תשובות סופיות

1) א. $v_\varphi=\sqrt{\left(\dfrac{T}{\rho}\right)\left(1+\varepsilon L^2k^2\right)}$, $v_g=\dfrac{1}{2\omega}\left(\dfrac{T}{\rho}\left(2k+4\varepsilon L^2k^3\right)\right)$

ב. מספרי הגל ואורכי הגל מגיעים מתנאי השפה ואינם מושפעים מיחס הנפיצה.

ג. $f_n=\dfrac{1}{2\pi}\left(\left(\dfrac{T}{\rho}\right)\dfrac{\pi^2n^2}{L^2}\left(1+\varepsilon\pi^2n^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}$

ד. הוכחה בסרטון.

ה. $n\approx 7$

2) הוכחה בסרטון.

3) א. $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-\omega_\rho^2\psi+c^2\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$

ב. $v_\varphi=\sqrt{\dfrac{\omega_\rho^2}{k^2}+c^2}$, $v_g=\dfrac{c^2k}{\omega}$, בגבול $ch>>\omega_\rho$ $\quad v_g\chi v_\rho\chi c$

התרחבות בזמן של פולס

רקע

הרוחב כתלות בזמן של פונקציית גאוסיאן: $\sigma^2(t)=\dfrac{\sigma^4+4\beta^2t^2}{\sigma^2}$,

כאשר σ היא הרוחב ההתחלתי ו- $\beta=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\Big|_{k_0}$.

שאלות

1) פולס בסיבים אופטיים

נתבונן על הדיספרסיה בסיבים אופטיים. משדרים פולס גאוסיאני בעל אורך זמני τ_0 לסיב באורך l.

מהירות החבורה בסיב היא: $v_g(k)$.

א. ההרחבה הזמנית של הפולס מוגדרת לפי: $\Delta\tau=\sqrt{\tau^2-\tau_0^2}$.

מצאו נוסחה להרחבה הזמנית כתלות בפרמטרים: l, v_g, τ_0 ו- β השווה ל- $\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial k^2}$.

הדרכה: השתמשו בנוסחה של ההרחבה המרחבית: $\sigma^2(t)=\dfrac{\sigma^4+4\beta^2t^2}{\sigma^2}$

ועברו לרוחב הזמני על ידי חלוקה במהירות החבורה.

ב. נתון שמהירות הפאזה עבור סיב ספציפי סביב אורך גל: $\lambda_0=1.55\mu m$

היא: $v_\varphi(k)\approx\dfrac{c}{n}\left(1+\dfrac{k}{q}\right)$ כאשר c היא מהירות האור, n הוא מקדם השבירה של הסיב ו- q פרמטר נוסף.

מהו משך רוחב הפולס שניתן לשדר כך שההרחבה שלו תהיה בגודל הרוחב המקורי, כלומר: $\Delta\tau=\tau_0$

ג. חשבו את $\Delta\tau$ כאשר:

$n=1.47$, $q=4.35\cdot10^9\cdot\dfrac{1}{m}$, $\lambda_0=1.55\mu m$, $l=75km$ $c=3\cdot10^8\dfrac{m}{\sec}$.

מהי המגבלה על קצב השידור המירבי אם הדיספרסיה היא הגורם המגביל?

2) יחס מדומה בגאוסיאן

בתווך כלשהו מתקיים יחס הנפיצה הבא: $\omega(k)=\alpha k-i\beta k^2$ כאשר α ו- β קבועים חיוביים נתונים.

א. מצאו את מהירות הפאזה ומהירות החבורה כתלות ב- k.

ב. רשמו ביטוי אינטגרלי כללי ל- $\psi(x,t)$ עבור פולס שנע בכיוון החיובי בהינתן: $\psi(x,0)=f(x)$.

ג. מצאו את: $\psi(x,t)$ עבור פונקציית גאוסיאן: $\psi(x,0)=Ae^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}$.

ד. מהו רוחבו ומרכזו של הגאוסיאן כתלות בזמן?

3) רוחב חבילה לאחר מרחק 3 סיגמה

גלים אלקטרו מגנטיים בפלסמה מקיימים את יחס הדיספרסיה הבא: $\omega^2=\omega_p^2+c^2k^2$, כאשר ω_p ו- c קבועים.

מעוררים בפלסמה חבילת גלים גאוסיאנית ברוחב σ ותדירות מרכזית $\omega_0>\omega_p$.

מצאו את רוחב החבילה לאחר שהתקדמה מרחק 3σ.

תשובות סופיות

1) א. $\Delta\tau=\dfrac{2\beta l}{\tau_0 v_g^3}$ ב. $\tau_0=\sqrt{\dfrac{2n^2 l}{c^2 q\left(1+\dfrac{4\pi}{q\lambda_0}\right)^3}}$ ג. $2.87\cdot10^{11}\sec$

2) א. $v_\varphi(k)=\alpha-i\beta k$, $v_g(k)=\alpha-2i\beta k$

ב. $\psi(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(k)e^{i\left(kx-\left(\alpha k-i\beta k^2\right)t\right)}dk$, $F(k)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ikx}dx$

ג. $\psi(x,t)=\dfrac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+2\beta t}}Ae^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\alpha t)^2}{\sigma^2+2\beta t}}$

ד. $\sigma=\sqrt{\sigma^2+2\beta t}$, $\mu=\alpha t$

3) $\dfrac{qc^2\omega_p^4}{\omega_0^4\left(\omega_0^2-\omega_p^2\right)}+\sigma^2$

גלים דועכים ותדירויות סף

רקע

במקרים מסוימים יחס הנפיצה יכול לייצר מספר גל מורכב עבור תדירויות מסוימות. במקרים אלו נקבל גל דועך בתווך. קבוע הדעיכה הוא החלק המדומה של מספר הגל.

שאלות

1) גל דועך בפלסמה

גלים אלקרו מגנטיים בפלסמה מקיימים את יחס הדיספרסיה הבא: $\omega^2=\omega_p^2+c^2k^2$, כאשר ω_p ו- c קבועים, מעוררים גל בתדירות: $\omega_0=\frac{1}{2}\omega_p$.

רשמו ביטוי לפונקציית הגל, מהו קבוע הדעיכה?

תשובות סופיות

1) $\psi(x,t)=Ae^{-\frac{\sqrt{3}\omega_p}{2c}x}e^{-i\frac{1}{2}\omega_p t}$, קבוע הדעיכה הוא: $\frac{\sqrt{3}\omega_p}{2c}$.

מקרים מיוחדים

רקע

מכניקת הקוונטים:

פונקציית גל מתארת הסתברות למצוא חלקיק במיקום מסוים.

משוואת שרדינגר: $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{2x^2}$

התנע של חלקיק: $\rho=\hbar k$

גלי מים:

יחס הדיספרסיה הכללי עבור גלים בנוזל

$$\omega^2=\left[gk+\frac{\sigma}{\rho}k^3\right]\tan h(kH)$$

σ – קבוע מתח הפנים, כוח ליחידת אורך או אנרגיה ליחידת שטח

H - עומק הנוזל

g - תאוצת הכובד

ρ - צפיפות המסה ליחידת נפח

עבור גלים קצרים (גלי מתח פנים): $\lambda\ll\lambda_c\sim 2cm$

$$\omega=\sqrt{\frac{\sigma k^3}{\rho}}$$

עבור גלים ארוכים (גלי כבידה) אבל קצרים מעומק המים (או הנוזל): $H>>\lambda>>\lambda_c$.

$$\omega=\sqrt{gk}$$

עבור גלים ארוכים וגדולים מעומק המים (או הנוזל): $\lambda>>H>>\lambda_c$.

$$\omega=\sqrt{gH}k$$

שאלות

1) קירובים במים עמוקים

יחס הנפיצה של גלים על השפה של נוזל לא צמיג נתון בקירוב

ע״י: $\omega^2=\left[gk+\frac{\sigma}{\rho}k^3\right]\tanh(kH)$ כאשר g היא תאוצת הכובד, H גובה הנוזל, σ מתח הפנים ו- ρ צפיפות הנוזל.

במקרים בהם המים עמוקים ביחס לאורך הגל אז: $\tanh(kH)\approx 1$ ויחס הנפיצה ניתן בקירוב ע״י: $\omega^2=gk+\frac{\sigma}{\rho}k^3$.

א. הראו באופן כללי שבנקודת הקיצון של מהירות הפאזה מתקבל שמהירות החבורה שווה למהירות הפאזה.

ב. מהו אורך הגל λ_c במקרה הנתון שבו מהירות הפאזה שווה למהירות החבורה? ומהן המהירויות באורך גל זה?

ג. הראו כי עבור גלי כבידה שבהן $\lambda>>\lambda_c$ מתקבל: $v_g=\frac{1}{2}v_\varphi$.

ד. הראו כי עבור גלי מתח פנים שבהם $\lambda<<\lambda_c$ מתקבל: $v_g=\frac{3}{2}v_\varphi$.

2) צונמי ליד טונגה

בינואר 2022 התפוצץ הר געש תת ימי כ-65 ק״מ מאיי טונגה שבאוקיינוס השקט. קוטר הר הגעש הוא כ-10 ק״מ והוא יצר גל באורך של כ-20 ק״מ. כמה זמן ייקח לגל להגיע לאיים? וכמה זמן ייקח לגל להגיע לחופי קליפורניה שנמצאים בערך 8,500 ק״מ מנקודת היווצרות הגל?
הניחו כי עומק האוקיינוס הוא כ-4 ק״מ.

תשובות סופיות

1) א. הוכחה בסרטון. ב. $\lambda_c=2\pi\sqrt{\frac{\sigma}{g\rho}}$, $v_g(\lambda_c)=\sqrt{2}\left(\frac{g\sigma}{\rho}\right)$

ג. הוכחה בסרטון. ד. הוכחה בסרטון.

2) כ-70 שניות לטונגה וכ-26 שעות לקליפורניה.

תרגילים נוספים

שאלות

1) גלי רוחב בשרשרת מסות בדידה

נתונה מערכת של שרשרת מסות זהות m המחוברות בקפיצים זהים בעלי קבוע k_0. המסות נמצאות במרחקים זהים אחת מהשנייה ומרחקים אלו גדולים בהרבה מהאורך הרפוי של הקפיץ ומתנודות המסות.
מצאו את משוואת הגלים עבור גלי רוחב, כלומר תנודות המסות הן בכיוון מאונך לקפיצים, ומצאו את יחס הדיספרסיה.

2) מודל לגביש עם שכנים רחוקים

נתונה שרשרת חד ממדית של אטומים זהים בעלי מסה m.
בשיווי משקל המרחק בין זוג אטומים הוא l.
נתון שכל אטום מחובר לשני שכניו הקרובים ביותר באמצעות קפיצים זהים בעלי קבוע קפיץ k_0 ולשני שכניו הבאים בתור באמצעות קפיצים בעלי קבוע קפיץ k_1.

א. מצאו את יחס הנפיצה של תווך זה.

ב. מהי מהירות החבורה כתלות ב- k (מספר הגל)?

3) החזרה והעברה בתווך עם נפיצה

מיתר בעל יחס נפיצה: $\omega = ck$ משתרע מ- $x=-\infty$ עד $x=0$.
ב- $x=0$ המיתר מחובר למיתר אחר המשתרע עד $x=\infty$ ובו מתקיימת משוואת הגלים הבאה: $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi=0$
(זוהי משוואת קליין גורדון לחלקיק קוונטי יחסותי).

א. מצאו את יחס הנפיצה במיתר הימני.

ב. גל הרמוני בתדירות ω ואמפליטודה A מתקדם מ- $-\infty$ למיתר הימני.
מצאו את הביטויים עבור הגל המוחזר ועבור הגל העובר במקרים הבאים:

i. $\omega > \frac{mc^2}{\hbar}$

ii. $\omega < \frac{mc^2}{\hbar}$

ג. חשבו את מקדמי ההחזרה וההעברה של ההספק: $R_p=\left\langle \frac{P_r}{P_i} \right\rangle$

ו- $T_p=\left\langle \frac{P_t}{P_i} \right\rangle$ בשני המקרים שבסעיף הקודם.

רמז: העזרו בשימור אנרגיה.

תשובות סופיות

1) $k\left(4_{n+1}-24_n+4_{n-1}\right)=m\ddot{\psi}_n \quad , \quad \omega(k)=2\omega_0\sin\left(\frac{kl}{2}\right)$

2) א. $\omega^2(k)=4\omega_1^2\sin^2(kl)+4\omega_0^2\sin^2\left(\frac{kl}{2}\right) \quad , \quad \omega_1^2=\frac{k_1}{m} \quad , \quad \omega_0^2=\frac{k_0}{m}$

ב. $\frac{1}{\omega}\left(2\omega_1^2 l\cdot\sin(2kl)+\omega_0^2 l\sin(kl)\right)$

3) א. $\omega_s^2=\frac{m^2c^4}{\hbar^2} \quad , \quad \omega^2=c^2k^2+\omega_s^2$

ב. i. $$\psi_t(x,t)=\frac{2}{1+\sqrt{1-\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2}}Ae^{-i\left(\frac{\sqrt{\omega^2-\omega_s^2}}{c}x-\omega t\right)} \quad , \quad \psi_r(x,t)=\frac{1-\sqrt{1-\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2}}{1+\sqrt{1-\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2}}Ae^{-i\frac{\omega}{c}(x+ct)}$$

ii. $$\psi_t(x,t)=\frac{2A}{1+i\sqrt{\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2-1}}e^{-\frac{\sqrt{\omega_s^2-\omega^2}}{c}x}e^{-i\omega t} \quad , \quad \psi_r(x,t)=\frac{1-i\sqrt{\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2-1}}{1+i\sqrt{\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2-1}}Ae^{-i\frac{\omega}{c}(x+ct)}$$

ג. i. $$T_p=1-\left(\frac{1-\sqrt{1-\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2}}{1+\sqrt{1-\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2}}\right)^2 \quad , \quad R_p=\left(\frac{1-\sqrt{1-\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2}}{1+\sqrt{1-\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2}}\right)^2$$

ii. $T_p=0 \quad , \quad R_p=1$

גלים ואופטיקה 20248

פרק 5 - גלים דו מימדיים ומנחה גלים

תוכן העניינים

גלים דו מימדיים

רקע

משוואת הגלים:

$$\frac{T}{\rho}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

T - מתיחות ליחידת אורך.
ρ - צפיפות מסה ליחידת שטח.

פתרון:

$$z(x,y,t)=Ae^{\mathrm{i}(k_x x+k_y y-\omega t)}$$
$$\vec{k}=(k_x,k_y)$$

כיוון וקטור הגל $\vec{k}$ הוא כיוון התקדמות הגל וחזיתות הגל הן במאונך אליו.

אורך הגל:

$$\lambda=\frac{2\pi}{|\vec{k}|}$$

יחס הנפיצה:

$$\omega^2=\frac{T}{\rho}(k_x^2+k_y^2)=v^2\cdot|\vec{k}|^2$$

$$v=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

תנאי שפה מלבנים עבור שפה קשורה:

$$z(x,y,t)=\sum_{m,n}A_{m,n}\sin\left(\frac{\pi n}{L_x}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{L_y}y\right)\cos(\omega_{m,n}t+\varphi_{m,n})$$

שאלות

1) תנאי התחלה משולשים בתוף ריבועי

נתון תוף ריבועי כך ש: $0 \le x, y \le L$. התוף קשור בקצוותיו ובעל מתיחות ליח' אורך T וצפיפות ρ. מותחים את מרכז התוף במרכזו ומשחררים ממנוחה כך שבזמן: $t = 0$ נוצרת בו הצורה:

$$z(x,y,0) = Af(x)f(y)$$

$$f(q) = \begin{cases} q & , \ 0 \le q \le \frac{L}{2} \\ L - q & , \ \frac{L}{2} \le q \le L \end{cases}$$

א. מצאו את מקדמי הפרישה ורשמו את הצורה הכללית של פונקציית הגל.

ב. מצאו את פונקציית הגל אם ראשית הצירים הייתה במרכז התוף ולא בפינה רמז: אין צורך לפתור מחדש.

ג. נניח כי כל מקדם פרישה הקטן מ- $\frac{A_{11}}{100}$ הוא זניח. כמה מקדמי פרישה משמעותיים קיימים (ללא מקדמים המאפסים את הפונקציה).

2) תוף ריבועי לא איזוטרופי

נתון תוף ריבועי בגודל $L_x L_y$, התפוס בקצותיו. התוף אינו איזוטרופי, המתיחות בציר x היא T_x והמתיחות בציר y היא T_y.

א. רשמו את משוואת הגלים עבור התוף.

ב. מהו יחס הנפיצה?

ג. מהם אופני התנודה?

תשובות סופיות

1) א. $$z(x,y,t)=\sum_{m,n} A_{m,n}\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{L}y\right)\cos\left(w_{m,n}t\right)$$

$$A_{m,n}=\frac{16L^2}{\pi^2 m^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi m}{2}\right)$$

$$w_{m,n}=\frac{T}{\rho}\cdot\frac{\pi^2}{L^2}\left(n^2+m^2\right)$$

ב. $$z(x,y,t)=\sum_{m,n} A_{m,n}\sin\left(\frac{\pi n}{L}\left(x+\frac{L}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{\pi m}{L}\left(y+\frac{L}{2}\right)\right)\cos\left(w_{m,n}t\right)$$

ג. 10

2) א. $$\frac{T_x}{\rho}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{T_y}{\rho}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

ב. $$w^2=\frac{T_x}{\rho}k_x^2+\frac{T_y}{\rho}k_y^2$$

ג. $$z(x,y,t)=\sum_{m,n} A_{m,n}\sin\left(\frac{\pi n}{L_x}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{L_y}y\right)\cos\left(w_{m,n}t+\varphi_{m,n}\right)$$

מנחה גלים

רקע

הפתרון עבור רצועה מלבנית ארוכה ברוחב L עם התאפסות הפונקציה בשפה:

$$z(x,y,t)=A\sin\left(\frac{\pi n}{L}y\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_x x-\omega t)}$$

$$v_\varphi=\frac{\omega}{k_x}$$

$$v_g=\frac{k_x v^2}{\omega}$$

$$v_g\cdot v_\varphi=v^2$$

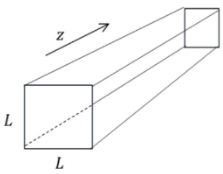
חסם תחתון:

$$\omega>\frac{\pi n}{L}$$

שאלות

1) מוליך גלים תלת מימדי

נסתכל על מוליך גלים תלת מימדי הבנוי מתיבה מאוד ארוכה בעלת שטח חתך ריבועי עם צלע L. שטח החתך הוא במישור xy והמוליך הוא לאורך ציר z.
משוואת הגלים במקרה התלת מימדי היא:



$$v^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

הניחו שבשפות התיבה פונקציית הגל מתאפסת.

א. מצאו פתרון כללי למשוואה, $\psi(x,y,z,t)$ הניחו כי גל המתקדם בכיוון z החיובי.

ב. הציבו את תנאי השפה ומצאו את אופני התנודה האפשריים ויחס הנפיצה.

ג. מהי תדירות הקטעון (תדירות החסם התחתון הנמוך ביותר)?

ד. כיצד ישתנו תשובותיכם לסעיף ב' אם התנאי בשפת התיבה היה שהנגזרת של הפונקציה מתאפסת ולא הפונקציה עצמה?

תשובות סופיות

1) א. $\psi\left(x,y,z,t\right)=\left(Ae^{ik_x x}+Be^{-ik_x x}\right)\left(Ce^{ik_y y}+Dc^{-ik_y y}\right)e^{i\left(k_z z-wt\right)}$

ב. $\psi_{m,n}\left(x,y,z,t\right)=A_{m,n}\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{L}y\right)e^{i\left(k_z z-wt\right)}$

$$w^2=v^2\left(\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2+\left(\frac{\pi m}{L}\right)^2+k_z^2\right)$$

ג. $w_{m,n}=\frac{v\pi}{L}\sqrt{2}$

ד. $\psi_{m,n}\left(x,y,z,t\right)=A_{m,n}\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\cos\left(\frac{\pi m}{L}y\right)e^{i\left(k_z z-wt\right)}$

גלים ואופטיקה 20248

פרק 6 - אופטיקה

תוכן העניינים

מבוא לאופטיקה:

רקע:

חוק סנל: $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$

נוסחת העדשות: $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{f}$

הגדלה קווית: $m=\frac{H_i}{H_O}=\frac{|v|}{|u|}$

עוצמת העדשה: $C=\frac{1}{f}$

שאלות:

1) תרגול אור במרחב

מציבים מקור אור נקודתי מול מסך במרחק 4m מהמסך.
במרחק 1m ממקור האור מציבים מחסום בגובה 1.5m.

א. שרטט את הבעיה בקנה מידה לבחירתך.
ב. מצא את גודלו של הצל על הקיר:
   i. בעזרת שרטוט.
   ii. בעזרת חישוב.
ג. היכן היה צריך למקם המחסום, כדי שגודל הצל יהיה 2.5m?
ד. מוסיפים מקור אור זהה (בניסוי המקורי), במרחק של 1m מתחת למקור הראשון.
מצא, בעזרת שרטוט, את אזורי האור והצל השונים שמתקבלים.

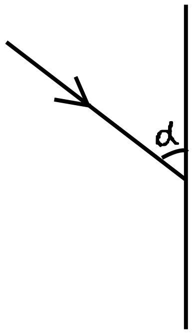
2) תרגול אור במרחב 2

מהירות האור בריק היא: $C=3\cdot10^8\frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

א. היעזר בדף הנוסחאות, ומצא תוך כמה זמן מגיעה קרן אור שמוחזרת מהירח – אל כדור הארץ.
ב. מצא תוך כמה זמן מגיעה קרן היוצאת מהשמש אל כדור הארץ.
ג. אם אני מדליק פנס עכשיו, וחבר נמצא במרחק 3m ממני, תוך כמה זמן יגיע אליו האור מהפנס, מרגע שהדלקתי אותו?
ד. שנת אור מוגדרת כמרחק שאור עובר בשנה.
מצאו מהי שנת אור בעזרת הגדרה זו.

GOOL
בשביל התירגול

3) החזרה תרגיל 1



נתון מקור אור הפולט אור ומולו מוצבת מראה.

הזווית α בשרטוט שווה $76°$.

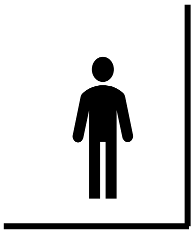
א. מה זווית ההחזרה של הקרן המשורטטת בתרשים?

ב. מצא, בעזרת שתי קרניים נוספות לבחירתך,
את מיקום הדמות המדומה של העצם הנ"ל.

ג. מצא את שדה הראייה של העצם הנ"ל.

ד. מכסים בבד סגול את החצי העליון של המראה.
האם עדיין תיווצר דמות של העצם?

4) החזרה תרגיל 2



נתון התרשים הבא, בו נער בגובה $1.7m$ עומד לפני מראה.

א. שרטט קרן אור היוצאת מידו הימנית של הנער,
פוגעת במראה וחוזרת לעיניו (הקרן מייצגת את
הקרן/ הקרניים, שבזכותן הנער רואה את ידו במראה).

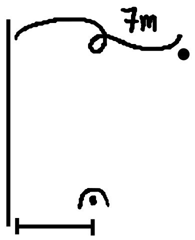
ב. שרטט (הכי מדויק שאפשר), את דמות הנער במראה.

ג. מציבים מאחורי המראה מסך סגול.
האם עדיין יראה הנער את דמותו?

ד. מה הגובה המינימאלי של המראה שיש להציב, כדי שדמות הנער תתקבל במלואה?

ה. מרחיקים את המראה למרחק כפול מגוף הנער.כיצד תשתנה תשובתך לסעיף ד'?

5) החזרה תרגיל 3



מציבים מטבע מול מראה, במרחק $7m$ ממנה, כמתואר בתרשים.
אדם שנמצא במורד התרשים רואה את המטבע בזווית $30°$,
ביחס לקו המקביל למראה, ואת דמותו של המטבע בזווית $50°$.
חשב את מרחקו של האדם מהמראה.

6) תרגיל חוק סנל 1

קרן לייזר מתקדמת במים $(h_{water} = 1.33)$, ופוגעת במשטח זכוכית $(h_{glass} = 1.5)$.

חלק מהקרן נשבר לזכוכית וחלק מוחזר.

הזווית בין פני המים והקרן הפוגעת היא $60°$.

א. חשבו את זווית השבירה.

ב. שרטטו את המקרה הנ"ל.

7) תרגול חוק סנל 2

תלמיד שלח קרני אור בזוויות שונות מאוויר לעבר חומר שקוף בעל מקדם שבירה לא ידוע, ומדד את זוויות הפגיעה והשבירה המתאימה לה לזוויות פגיעה שונות. תוצאות המדידות בטבלה שלפניך :

θ_1	θ_2
0	0
10	7.33
20	14.57
30	21.57
40	28.21
50	34.28
60	39.55
70	43.71
80	46.40

א. האם גרף $\theta_2(\theta_1)$ מצופה שיצא ליניארי?
ב. הגדר משתנים עבורם כן תצפה לקבל גרף ליניארי.
ג. שרטט גרף ליניארי זה.
ד. מצא, בעזרת הגרף, את מקדם השבירה של החומר השקוף הלא ידוע.

8) החזרה גמורה תרגיל 1

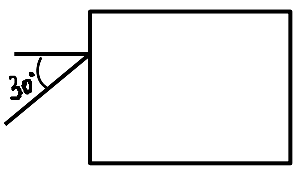
קרן אור מתקדמת בזכוכית $(n = 1.5)$, ופוגעת בגבול בין זכוכית זו ובין מים $(n = 1.33)$, בזוויות :

א. $\theta_1 = 0°$
ב. $\theta_7 = 30°$
ג. $\theta_2 = 70°$

שרטט את המשך מהלך הקרן, לאחר הפגיעה, בכל אחד משלושת המקרים.

9) החזרה גמורה תרגיל 2

נתון מלבן מפרספקס $n = 1.5$, כמתואר בתרשים. קרן אור, המגיעה משמאל, פוגעת בפרספקס בזווית פגיעה של $30°$. השלם את מהלך הקרן בתוך הפרספקס.



10) עדשה מרכזת - תרגיל 1

נתונה עדשה מרכזת בעלת מוקד $f = 8\text{cm}$.

נתון עצם, בגובה $H_0 = 4\text{cm}$ המונח במרחק 12cm מהעדשה.

א. מצא בעזרת שרטוט את :

i. מיקום הדמות הנוצרת.

ii. גובה הדמות.
iii. ההגדלה הקווית.
ב. מצא בעזרת חישובים את:
i. מיקום הדמות.
ii. גובה הדמות.
ג. מצא מה אופי הדמות.
ד. שרטט שתי קרניים היוצאות ממרכז העצם, פוגעות בעדשה וממשיכות לצדה השני.

11) עדשה מרכזת - תרגיל 2

לעדשה מרכזת מרחק מוקד של 11cm.
מציבים עצם, שגובהו 5cm, במרחק 4cm מעדשה זו.
א. מצא בעזרת שרטוט את:
i. מרחק הדמות מהעדשה.
ii. גובה הדמות.
iii. ההגדלה הקווית.
ב. מצא בעזרת חישוב מספרי את:
i. מרחק הדמות מהעדשה.
ii. גובה הדמות.
השווה תשובותיך לסעיף ב, עם אלה של סעיף א.
ג. מניחים מסך במיקום הדמות.
האם ניתן לראות את הדמות על המסך?
ד. מניחים וילון שחור על המחצית העליונה של העדשה (מכסים אותה).
האם ניתן לראות את הדמות?
ה. מסירים ווילון זה. ומניחים אותו בין העצם ודמותו.
האם עכשיו ניתן לראות את דמות העצם?

12) עדשה מפזרת – תרגיל 1

נתונה עדשה שעוצמתה $C = 10D$.
לפני העדשה, במרחק $u = 8\text{cm}$, מניחים עצם שגובהו $H_0 = 4\text{cm}$.
א. מצא בעזרת חישוב את:
i. מיקום הדמות.
ii. גובהה.
iii. אופי הדמות.
ב. מצא בעזרת שרטוט את:
i. מיקום הדמות.
ii. גובהה.
ג. מהיכן ניתן לראות את הקצה העליון של דמות העצם (שדה ראייה)?

13) בגרות 2017 שאלה 6

רמי ישב ליד בריכה ריקה. בתחתית הבריכה הונח מטבע, אבל ממקום מושבו של רמי לא היה אפשר לראות את המטבע כשהבריכה ריקה.
התחילו למלא את הבריכה במים, וברגע מסוים ראה רמי את המטבע (רמי והמטבע לא זזו). מקדם השבירה של המים הוא: $n = 1.33$.

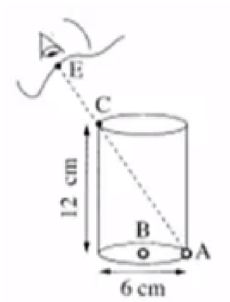
א. הגדר את תופעת השבירה של האור, וציין את סיבתה.
ב. הסבר מדוע ראה רמי את המטבע רק לאחר שהבריכה התמלאה חלקית במים. לווה את תשובתך בסרטוט מהלך קרניים.

נתון: קרן היוצאת מן המטבע ומגיעה לעין של רמי עוברת בתוך המים מרחק $d = 0.61\text{m}$.
זווית השבירה של קרן זו היא: $\beta = 13.6°$.

ג. חשב את עומק המים.

14) בגרות 2016 שאלה 7

בתרשים שלפניך מוצב כלי ריק שצורתו גליל. גובה הכלי 12cm וקוטרו 6cm.
בתחתית הכלי מונחים שני חרוזים קטנים מאוד: חרוז A צמוד לדופן הכלי וחרוז B במרכז התחתית של הכלי.

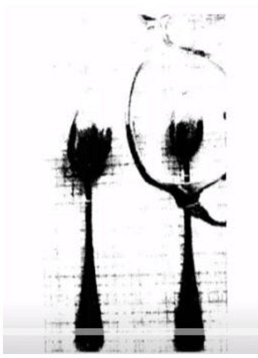


תלמיד הביט אל תוך הכלי בכיוון EC (הנקודה C נמצאת על שפת הכלי).
כאשר הכלי היה ריק התלמיד ראה את חרוז A בלבד. מילאו את הכלי עד שפתו בנוזל שקוף. התלמיד הסתכל באותו כיוון וראה את חרוז B בלבד.

א. העתק את תרשים הכלי והעין למחברתך בלי הקו המקווקו.
הוסף לתרשים שבמחברתך קרן אור שמגיעה מחרוז B, עוברת בתוך הנוזל אל נקודה C ומגיעה לעין התלמיד.
סמן בתרשים שבמחברתך את זווית הפגיעה (α) ואת זווית השבירה (β) במעבר של קרן האור מהנוזל לאוויר.
ב. חשב את מקדם השבירה של הנוזל.
ג. קבע אם חרוז B נראה לתלמיד בעומק האמיתי שהוא היה בו, גבוה יותר או נמוך יותר. נמק את קביעתך באמצעות סרטוט תרשים נוסף של הכלי ומהלך הקרניים.

15) בגרות 2016 שאלה 6

תלמידה רצתה לבדוק את סוג העדשות במשקפיים של דודתה.
לשם כך הניחה התלמידה שתי כפיות זהות על השולחן, והניחה עדשה של המשקפיים מעל אחת הכפיות.
בתרשים שלפניך נראה תצלום הכפיות והמשקפיים שצילמה התלמידה.



א. בכל אחת מן האפשרויות i-iii שלפניך, קבע מהו המאפיין הנכון של דמות הכפית הנראית מבעד לעדשה:

i. ישרה או הפוכה.

ii. ממשית או מדומה.

iii. מוגדלת או מוקטנת.

ב. האם העדשה מרכזת או מפזרת? נמק את תשובתך.

ג. מצא את דמות הכפית באמצעות סרטוט מדויק של מהלך שלוש קרניים.

נתון: רוחק מוקד העדשה: $|f| = 12\text{cm}$, מרחק העצם מהעדשה 6cm, גובה העצם 3cm.

בסרטוט השתמש בקנה מידה של 1 משבצת=1 ס"מ.

ד. חשב באמצעות נוסחאות את גובה הדמות ואת מרחקה מהעדשה.
האם תוצאות החישוב מתאימות לאותם ערכים שהתקבלו בסרטוט?

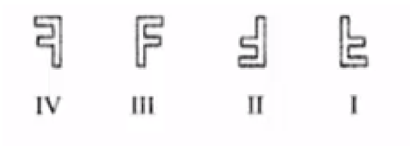
16) בגרות 2015 שאלה 7

ילד הלובש חולצה שעליה מודפסת האות F עומד מול מראה מישורית התלויה על קיר (ראה איור).

א. מהי התופעה הפיזיקאלית שגורמת להשתקפות הילד רק במראה ולא בקיר?

ב. המרחק של הילד מן המראה היה 1 מטר, והוא החל להתקרב אליה במהירות קבועה: $v = 0.5\frac{m}{sec}$.
חשב בתוך כמה זמן יהיה המרחק בין הילד ובין דמותו 0.5 מטר.

ג. לפניך ארבע צורות IV-I של האות F. העתק למחברתך את המספר של צורת הדמות של האות F, כפי שהילד שמסתכל במראה רואה אותה.



17) בגרות 2014 שאלה 6

יאיר ישב במכונית ורצה לעיין במפה שבידיו (זה היה לפני עידן ה-G.P.S).
בחוץ שרר חושך, ולכן יאיר הדליק נורה בתוך המכונית.

א. כדי שיראה היטב את המפה, האם על יאיר לכוון את אלומת האור מן הנורה לעבר עיניו או לעבר המפה? נמק.

לאחר שיאיר הדליק את הנורה הוא התבונן בשמשת החלון של מכוניתו. הוא לא ראה את הסביבה שבחוץ, אלא את דמותו המשתקפת בשמשת החלון.

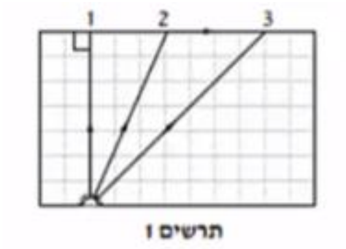
ב. הסבר באמצעות תרשים כיצד נוצרת הדמות המשתקפת בשמשת החלון.

יאיר מאס בפקקי התנועה שבכבישים, והחליט לנסוע ברכבת. בתוך קרון הרכבת דלק אור, ומחוץ לרכבת שרר חושך. יאיר הבחין בשתי דמויות שלו המשתקפות בחלון הרכבת. חלון הרכבת מורכב משני לוחות זכוכית מקבילים וביניהם מרווח שבו שכבת אוויר.
אפשר להזניח את העובי של לוחות הזכוכית.

ג. מדוע ברכבת הבחין יאיר בשתי דמויות, ולא בדמות אחת, כפי שראה במכוניתו? פרט את תשובתך.

ד. באותם תנאי תאורה הכניסו נייר שחור למרווח שבין שני לוחות הזכוכית. הנייר אוטם את כל המרווח. כמה דמויות השתקפו בחלון? נמק.

18) בגרות 2014 שאלה 7

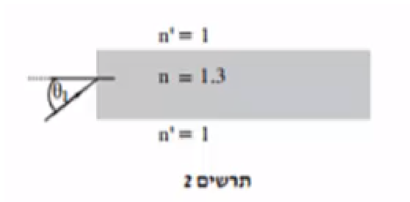


מקור אור נקודתי נמצא בתוך מנסרה מלבנית (תיבה) העשויה מחומר שקוף. המנסרה נמצאת באוויר.
בתרשים 1 מוצג חתך של המנסרה המקביל לשתיים מדופנות המנסרה, וכן מוצג בו מהלכן של שלוש קרניים, 1, 2, 3, שמקורן במקור האור.

זווית השבירה של קרן 2 היא 90° בקירוב.

א. העתק את תרשים 1 למחברתך, והשלם בו במדויק את המשך המהלך של קרן 1 ושל קרן 3. הסבר את שיקוליך.

ב. על פי התרשים, חשב את הזווית הגבולית (קריטית) למעבר אור מן החומר השקוף לאוויר.

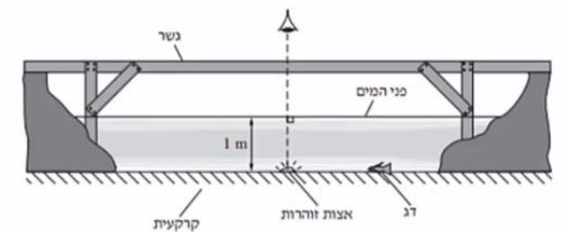


אפשר להעביר מידע למרחקים גדולים באמצעות סיבים אופטיים שאור מתפשט דרכם כמעט בלי הפסדי אנרגיה. בתרשים 2 מתואר חתך של סיב אופטי העשוי מחומר שקוף שמקדם השבירה שלו: $n = 1.3$, וקרן אור נכנסת לתוכו מן האוויר בזווית פגיעה θ_1.

ג. כאשר האור נכנס לסיב מהצד (כמתואר בתרשים 2), זווית הפגיעה θ_1 צריכה להיות קטנה מ- 57° כדי למנוע דליפת (יציאת) אור מהסיב לאוויר. הסבר מדוע. בתשובתך היעזר בתרשים.

19) בגרות 2013 תרגיל 1

בגן חיות יש בריכה ובה דגים ויצורי מים מיוחדים. מושבה של אצות זוהרות (פולטות אור) נחה על קרקעית הבריכה, בעומק של 1 מטר. מקדם השבירה של מי הבריכה ביחס לאוויר הוא: $n = 1.33$. מעל הבריכה נמתח גשר שממנו המבקרים יכולים לצפות בבריכה (ראה תרשים). התייחס למושבת האצות כאל מקור אור נקודתי.



א. האור שנפלט ממושבת האצות לעבר פני המים עובר לאוויר דרך משטח מעגלי של פני המים. הסבר מדוע. היעזר בתרשים מתאים.

ב. חשב את הרדיוס של המשטח המעגלי שהאור עובר דרכו לאוויר.

ג. אדם הניצב על הגשר בדיוק מעל מושבת האצות רואה אותה בעומק קטן יותר מהעומק האמיתי שהיא נמצאת בו. הסבר מדוע.

ד. דג השוחה על קרקעית הבריכה, בעומק 1 מטר, רואה את השתקפות האצות באמצעות קרני אור המוחזרות מפני המים.
חשב את המרחק (האופקי) המינימלי בין הדג לבין מושבת האצות, שהוא יכול לראות בו את השתקפות האצות באמצעות קרני אור המוחזרות בהחזרה מלאה.

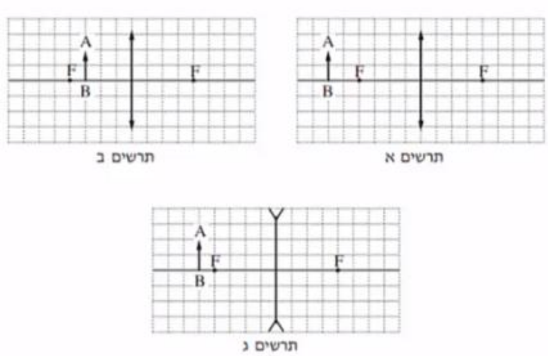
ה. כאשר הדג בעומק של 1 מטר, אבל המרחק בינו לבין מושבת האצות קטן יותר מהמרחק שחיבת בסעיף ד׳, הוא עדיין רואה את השתקפות האצות בפני המים. הסבר מדוע.

20) בגרות 2013 שאלה 6

אדם המרכיב משקפיים עם עדשות מרכזות זהות רואה בעזרתם את הדמות המדומה של עצם.

א. הסבר את המושגים ״דמות ממשית״ ו״דמות מדומה״, בהסברך תוכל להיעזר בתרשימים.

ב. בתרשימים א׳-ג׳ שלפניך החץ AB מייצג את העצם.
קבע איזה תרשים מתאים לתיאור שבפתיח. נמק את קביעתך.



ג. עוצמת העדשה היא 2 דיופטריות. מהו רוחק המוקד של העדשה?

ד. המרחק בין הדמות לעדשה הוא 60cm . חשב את המרחק בין העצם לעדשה.

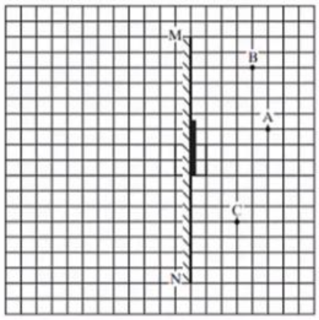
21) בגרות 2012 שאלה 1

עצם ניצב לפני משטח מישורי.

א. מה צריך להתקיים כדי שתיווצר דמות של העצם על ידי המשטח?

ב. כאשר נוצרת דמות של העצם על ידי המשטח, איזה תנאי חייב להתקיים כדי שצופה המתבונן במשטח יראה בו את הדמות של העצם?

באיור שלפניך מתואר חתך של מראה מישורית MN המכוסה במרכזה בכיסוי בד אטום. בנקודה A נמצא עצם נקודתי.
בכל אחת מהנקודות B ו-C נמצא צופה (צופה B, צופה C). הנקודות A, B, C נמצאות על אותו מישור.



העתק למחברתך את התרשים כך שכל משבצת בתרשים תיוצג בתרשים תיוצג על ידי משבצת במחברתך.

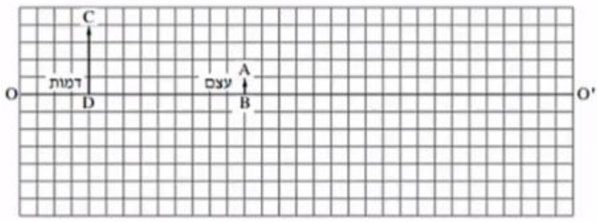
ג. האם צופה B וצופה C רואים את הדמות A באותו מקום? הסבר.

ד. צלע של משבצת אחת מייצגת מרחק של 20 ס"מ במציאות. חשב את המרחק של הצופה הנמצא בנקודה C מהדמות של העצם A.

ה. צופה C מביט אל עבר המראה, אך אינו רואה בה את דמות העין של צופה B. האם צופה B המביט אל עבר המראה רואה בה את דמות העין של צופה C? הסבר.

22) בגרות 2011 שאלה 1

בתרשים שלפניך הקטע OO' מסמן ציר אופטי של עדשה דקה (העדשה אינה מוצגת בתרשים). הקטע AB מסמן עצם, והקטע CD מסמן את הדמות של העצם הנוצרת בעזרת העדשה. הצלע של כל משבצת בתרשים – 1 ס"מ.



א. מדוע הדמות המתוארת בתרשים יכולה להיווצר רק בעזרת עדשה מרכזת?

העתק למחברתך את התרשים כך שכל משבצת בתרשים תיוצג על ידי משבצת במחברתך. השתמש בתרשים שסרטטת כדי לענות על סעיפים ב'-ג'.

ב. מצא, בעזרת סרטוט של מהלך קרני האור, את מיקום העדשה, והוסף אותה לתרשים.

ג. מצא את רוחק המוקד של העדשה בשתי דרכים:

i. סרטוט של מהלך קרני האור.

ii. חישוב.

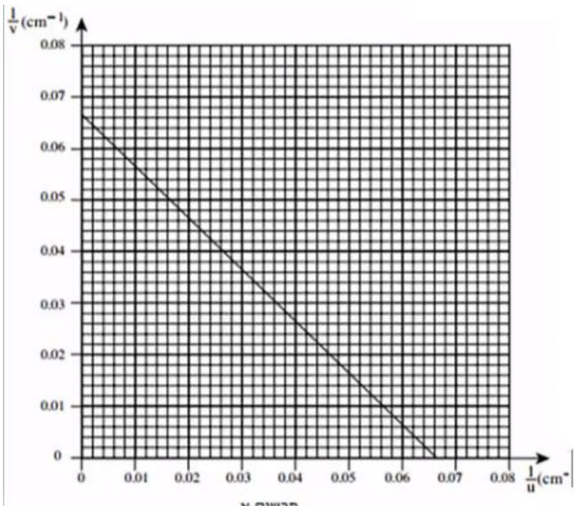
ד. כשהמרחק בין העצם לעדשה גדול מערך מסוים u_1, נוצרת דמות הפוכה ביחס לעצם. קבע מהו u_1.

ה. כשהמרחק בין העצם לעדשה שווה לערך מסוים u_2, הגדול מ-u_1, נוצרת דמות באותו גובה של הדמות CD שבתרשים. מצא את u_2.

23) בגרות 2009 שאלה 1

ברק הציב מקור אור במרחקים שונים מעדשה דו-קמורה דקה. בכל פעם הוא מדד את המרחק של מקור האור מן העדשה (u), ואת המרחק של המסך שעליו התקבלה דמות חדה של מקור האור מן העדשה (v). לאחר מכן הוא חישב את ערכי $\frac{1}{u}$ ו- $\frac{1}{v}$, ועל פי ערכים אלה סרטט גרף של $\frac{1}{v}$ (ביחידות cm^{-1}) כפונקציה של $\frac{1}{u}$ (ביחידות cm^{-1}).

הגרף מוצג בתרשים א'.



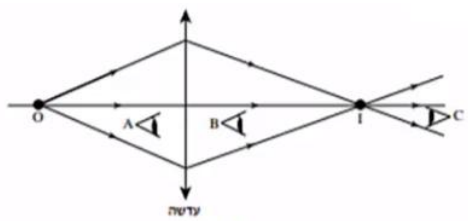
תרשים א

א. הסבר מדוע הגרף שהתקבל הוא קו ישר.

ב. מצא בעזרת הגרף את רוחק המוקד של העדשה. פרט את חישוביך.

ג. כאשר הציב ברק את מקור האור במרחק 10 ס"מ מן העדשה, הוא לא הצליח למקם את המסך כך שתתקבל עליו דמות חדה של מקור האור. הסבר מדוע.

ד. בתרשים ב' שלפניך מתואר עצם נקודתי O ודמותו I, הנוצרת על ידי עדשה מרכזת דקה.



תרשים ב

האם אפשר לראות את הדמות I גם ללא מסך?

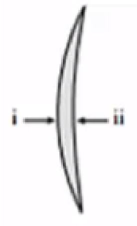
אם כן – באיזו מהנקודות A, B או C צריכה להימצא העין (על פי כיווני ההסתכלות שלה המתוארים בתרשים) כדי לראות את הדמות I?

אם לא – היעזר בתרשים ב', והסבר מדוע אי-אפשר לראות את הדמות ללא מסך.

ה. בתרשים ג' שלפניך מתואר חתך של עדשה קמורה-קעורה דקה עשויה מזכוכית. מטילים על העדשה פעמיים אלומת אור מקבילה ואופקית, המתפשטת באוויר:

במקרה i אלומת האור פוגעת תחילה במשטח הקמור.

במקרה ii אלומת האור פוגעת תחילה במשטח הקעור.



תרשים ג

העתק למחברתך את המספר של המשפט הנכון מבין המשפטים i-iv שלפניך:

i. העדשה מרכזת את האור בשני המקרים.

ii. העדשה מרכזת את האור במקרה i ומפזרת אותו במקרה ii.

iii. העדשה מפזרת את האור במקרה i ומרכזת אותו במקרה ii.

iv. העדשה מפזרת את האור בשני המקרים.

24) בגרות 2007 שאלה 2

על ספסל אופטי המונח על שולחן, מציבים מקור אור שצורתו מלבן (מלבן מלא).
עדשה מרכזת שרוחק המוקד שלה הוא: $f = 30\text{cm}$, ומסך.
מקור האור, העדשה והמסך מקבילים זה לזה.
שתיים מהצלעות של מקור האור המלבני מאונכות לשולחן. הדמות של מקור האור מתקבלת על המסך, וגובהה גדול פי 2 מהגובה של מקור האור.

א. חשב את המרחק של מקור האור מן העדשה.

ב. פי כמה גדול שטח הדמות מהשטח של מקור האור? נמק.

ג. מציבים את מקור האור במרחק 160cm מן המסך.
באיזה מרחק ממקור האור יש להציב את העדשה, כדי שתתקבל על המסך דמות חדה שלו? אם יש יותר מאפשרות אחת, כתוב את כולן.

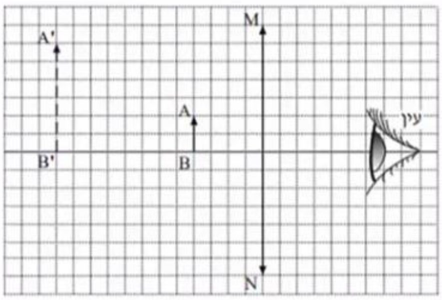
האיור שלפניך הוא העתק של תצלום שבו מראה מישורית המונחת על לוח עץ, ופנס. הפנס פולט אלומת אור הפוגעת בלוח העץ ובמראה שעליו. מלבד הפנס אין מקורות אור נוספים.

ד. מדוע המראה שבתצלום נראית חשוכה, ואילו החלק של לוח העץ שבו פוגעת אלומת האור נראה מואר?

25) בגרות 2004 שאלה 1

בתרשים א' מוצגת מערכת, ובה עדשה מרכזת, MN, הציר האופטי שלה, בול דואר,AB, הדמות של הבול, 'A'B , הנוצרת על ידי העדשה, ועין הצופה המתבונן בבול.

אורך הצלע של כל משבצת בתרשים מייצג מרחק של 5 ס"מ במציאות.



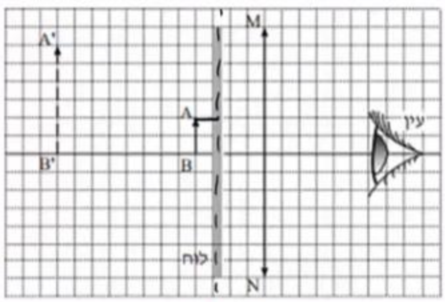
תרשים א

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את אורך מוקד העדשה.

ii. חשב את עוצמת העדשה. הצג את תשובתך בדיופטר.

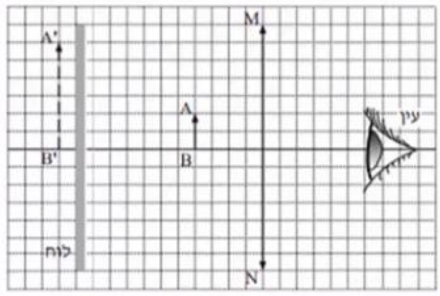
באותה מערכת מציבים לוח אטום לאור לפני הבול, בין הבול לעדשה (ראה תרשים ב').



תרשים ב

ב. האם במצב זה יוכל הצופה לראות את הבול? נמק.

את הלוח האטום לאור מעבירים אל מאחורי הבול, כמוצג בתרשים ג'.



תרשים ג

ג. האם במצב זה יוכל הצופה לראות את הבול? נמק.

ד. מסלקים את הלוח האטום. הבול, העדשה והעין נשארים במקומם. הצופה מתבונן בבול דרך העדשה (ראה תרשים א'), ואחר כך הוא מסלק את העדשה ומתבונן בבול.
באיזה משני המצבים (עם העדשה או בלי העדשה) הבול נראה לצופה גדול יותר? הסבר את תשובתך במונחים של זוויות ראייה.

ה. העתק למחברתך את תרשים א'. (כל משבצת בתרשים תהיה משבצת במחברת).
סרטט קרן, המופצת מראש הבול (A), עוברת בעדשה, וחודרת למרכז האישון של עין הצופה.
תאר כיצד קבעת את מהלך הקרן שסרטטת.

תשובות סופיות:

1) א. ראה סרטון. ב. i. 6m ii. 6m ג. 2.4m
ד. ראה סרטון.

2) א. $t = 1.28\sec$ ב. $t \cong 8\frac{1}{3}\min$ ג. $t = 10^{-9}$ ד. $9.47 \cdot 10^{15}\text{m}$

3) ראה סרטון.

4) א. ראה סרטון. ב. ראה סרטון. ג. כן. ד. 0.85m
ה. ללא שינוי.

5) 2.43m

6) א. $26.3°$ ב. ראה סרטון.

7) א. לא. ב. $\sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \sin\theta_1$ ג. ראה סרטון.
ד. 1.353.

8) ראה סרטון.

9) ראה סרטון.

10) א. ראה סרטון. ב. i. $V = 24\text{cm}$ ii. $H_i = 8\text{cm}$
ג. הפוכה, מוגדלת, ממשית. ד. ראה סרטון.

11) א. ראה סרטון. ב. i. $V \approx 6.5\text{cm}$ ii. $H_i \approx 7.95\text{cm}$
ג. לא. ד. כן. ה. כן.

12) א. i. $V = -4.4\text{cm}$ ii. $H_i = 2.2\text{cm}$ iii. מדומה, מוקטנת, ישרה.
ב. ראה סרטון. ג. ראה סרטון.

13) א. ראה סרטון. ב. ראה סרטון. ג. $h = 0.6\text{m}$.

14) א. ראה סרטון. ב. 1.85. ג. נמוך יותר.

15) א. i. ישרה. ii. מדומה. iii. מוקטנת. ב. מפזרת.
ג. ראה סרטון. ד. $H_i = 2\text{cm}$, $V = \Theta 4\text{cm}$, כן.

16) א. החזרה מסודרת, מתקבלת דמות במפגש הקרניים המוחזרות.
ב. 1.5sec. ג. IV.

17) א. לעבר המפה. ב. ראה סרטון. ג. כל משטח מתפקד כמראה עצמאית.
ד. דמות 1.

18) א. ראה סרטון. ב. $\theta_c = 23.2°$ ג. ראה סרטון.

19) א. ראה סרטון. ב. $r = 1.14\text{m}$ ג. ראה סרטון.
ד. $x = 2.28\text{m}$. ה. ראה סרטון.

20) א. דמות ממשית – מתקבלת במפגש המשכי הקרניים הממשיות.
דמות מדומה – מתקבלת בנקודת מפגש המשכי הקרניים המדומות.
ב. תרשים ב'. ג. 50cm. ד. $u = 27.3\text{cm}$

21) א. 1. קרניים שיצאו מהסוף, 2. ההחזרה מהמשטח תהיה מסודרת.
ב. הצופה יימצא בשדה בראייה של הדמות. ג. כן. ד. $2m$
ה. לא.

22) א. הדמות לא יכולה להיווצר בעדשה מפזרת. ב. ראה סרטון.
ג. $4cm$. ד. $u > f$ ה. $u_2 = 8cm$.

23) א. ראה סרטון. ב. $15.1cm$ ג. ראה סרטון.
ד. כן. ה. i.

24) א. $u = 45cm$. ב. פי 4. ג. $u_1 = 120cm$, $u_2 = 40cm$.
ד. ראה סרטון.

25) א. i. $f = 30cm$ ii. $C = 3.33D$. ב. לא. ג. כן.
ד. ראה סרטון. ה. ראה סרטון.

גלים ואופטיקה 20248

פרק 7 - התאבכות בגלים דו ותלת מימדיים

תוכן העניינים

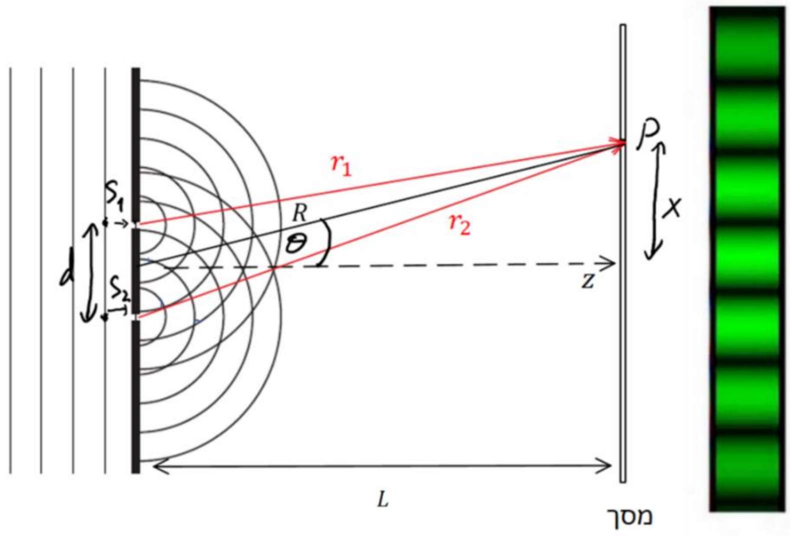
התאבכות בשני סדקים

רקע

עיקרון הוייגנס - ניתן להתייחס לכל נקודה בחזית הגל כמקור נקודתי של גל חדש.

אמפליטודה בגלים גליליים - $A \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$, גלים כדוריים - $A \propto \frac{1}{r}$.

ניסוי שני הסדקים:



קירוב השדה הרחוק far field limit $L \gg d$:

1. $A_1 \approx A_2 \leftarrow \Delta r << r$

2. $\Delta r = d \sin\theta \leftarrow r_1 \parallel r_2$

העוצמה היחסית:

$$\frac{I(\theta)}{I(0)} = \cos^2\left(\frac{k\,\mathrm{d}\sin\theta}{2}\right)$$

קירוב זוויות קטנות:

$$\sin\theta \approx \tan\theta \approx \frac{x}{L}$$

בגלל התלות של האמפליטודה במרחק, צריך להכפיל את התוצאה לעוצמה בקוסינוס טטה עבור גלים גליליים ובקוסינוס בריבוע עבור גלים כדוריים.
התוספת הזו קשורה למבנה של המסך והיא לא תופיע במסך עגול.
בדר"כ מניחים קירוב זוויות קטנות ואז היא זניחה.

שאלות

1) חישוב מרחק בין כתמים ואורך גל

קרן לייזר עוברת דרך שני סדקים. מרכזו של כתם האור הראשון (לצד כתם האור המרכזי), התקבל בזווית של 8 מעלות.

א. באיזו זווית יופיע כתם האור השני?

ב. מהו אורך הגל של הלייזר אם המרחק בין הסדרים הוא: $d = 2.4\mu m$?

2) תחנת רדיו

תחנת שידור משדרת אותות רדיו בתדר $1200Hz$ באמצעות שתי אנטנות הנמצאות במרחק של $300m$ זו מזו. אם נמקם מקלט במרחק רב משתי האנטנות, באילו כיוונים תתקבל העוצמה הגבוהה ביותר ובאילו הנמוכה ביותר? רשמו את הכיוונים ביחס **לישר המחבר בין שתי האנטנות.**

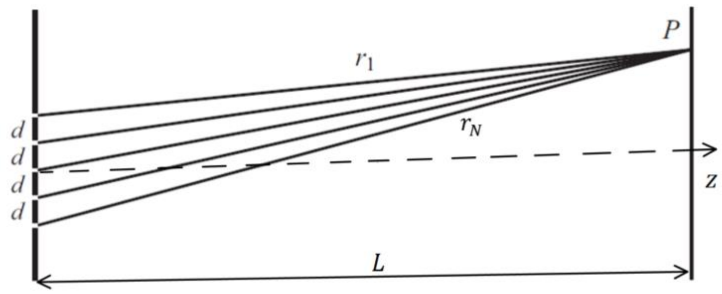
תשובות סופיות

1) א. $16°$ ב. $0.33\mu m$

2) $\cos\alpha_{\max n} = 9.5\cdot10^{-4}n$, $\cos\alpha_{\min n} = 9.5\cdot10^{-4}\left(n+\frac{1}{2}\right)$

התאבכות ב N סדקים

רקע



קירוב השדה הרחוק:

$A_1 \approx A_2 \approx A_3 \approx A_4 \leftarrow \Delta r << r$

$\Delta r = d\sin\theta \leftarrow r_1 \| r_2 \| r_3 \| r_4$

$$\frac{I_{tot}(\alpha)}{I_{tot}(0)} \approx \left(\frac{\sin\left(\frac{N\alpha}{2}\right)}{N\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2$$

$\alpha = kd\sin\theta$

פיק גדול - כשהמכנה מתאפס:

$$\alpha_n = 2\pi n$$

נקודות התאפסות - כשהמונה מתאפס והמכנה לא.

$\alpha_n = \frac{2\pi n}{N}$ ו- $n \neq mN$.

פיק קטן - נגזרת שווה לאפס ומכנה לא מתאפס. עבור $N \gg 1$:

$$\alpha_n = \frac{2\pi}{N}\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

מספר הפיקים באחד הצדדים (ללא הפיק המרכזי) הוא: $\frac{kd}{2\pi}$ (לעגל למטה).

מספר הפיקים (הגדולים) הכולל שווה למספר הפיקים באחד הצדדים כפול 2 ועוד 1.

שאלות

1) פריזמה מתקליטור

בתמונה רואים תקליטור העשוי מחריצים מעגליים בגודל של מיקרון בערך.
האור שפוגע בתקליטור מוחזר למצלמה ומקבלים פריזמה של צבעים.
הסבירו את התופעה (ללא חישוב) וציינו אלו פרמטרים משפיעים עליה.

2) סטייה בזווית פגיעה

הראו שבמקרה שהקרן הפוגעת היא בזווית θ_0 ביחס לאנך עם קיר הסדקים אז תתקבל אותה תבנית התאבכות מוזזת בזווית θ_0. הניחו קירוב זוויות קטנות.

3) 3 מינימות ראשונות

אור מונוכרומטי מלייזר ארגון בעל אורך גל של: $\lambda = 488nm$ עובר דרך סריג בעל 6,000 חריצים בצפיפות של 40,000 חריצים לס"מ ופוגע במסך.
מהן הזוויות של שלושת נקודות המינימום הראשונות (בכיוון החיובי).
הניחו שהחריצים נקודתיים.

4) מרחק בין צבעים

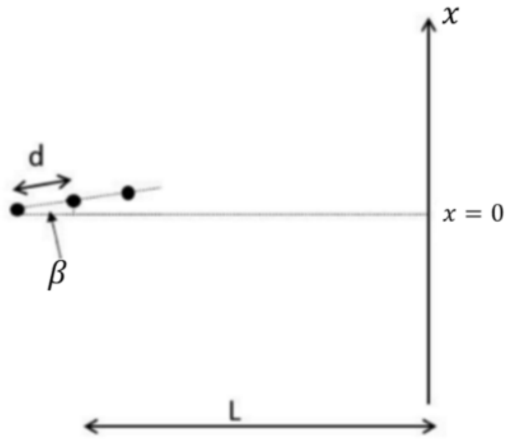
מקרינים אור לבן על סריג בעל 5,000 סדקים לס"מ.

א. תארו מה נראה על המסך מול הסריג.

ב. חשבו את המרחק בין כתם האור האדום השני לכתם האור הכחול השני אם המסך נמצא במרחק 1.5 מטר מהסריג ואורכי הגל של האור האדום והכחול הם $632nm$ ו-$420nm$ בהתאמה.

5) שלושה מקורות קוהרנטיים באוריינטציה שונה

המערכת המתוארת בסרטוט מכילה שלושה מקורות קוהרנטיים במרחק d אחד מהשני הנמצאים בזווית β ביחס לאנך למסך. המרחק למסך הוא L.



מצאו את העוצמה היחסית כתלות ב- x בהנחה כי β זווית קטנה וכי $\theta > \beta$.

תשובות סופיות

1) החריצים בתקליטור יוצרים תבנית התאבכות התלויה באורך הגל, זווית הפגיעה של המקור, בזווית התקליטור ובמיקום הצופה. בכל אזור בתקליטור נוצרת התאבכות בונה עבור אורך גל אחר ולכן רואים את הצבעים השונים בכל אזור. שינוי של הפרמטרים הנ״ל יביא לשינוי התבנית.

2) ראו סרטון.

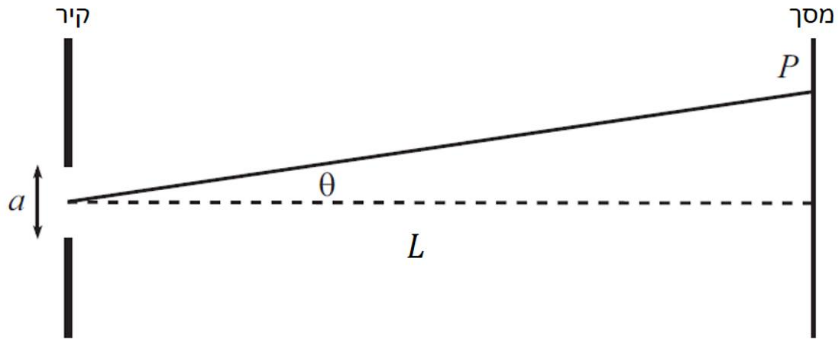
3)
$\theta_1 \approx 0.0186°$
$\theta_2 \approx 0.0373°$
$\theta_3 \approx 0.0560°$

4) א. נקבל תבנית התאבכות של N סדקים שכתם האור המרכזי שלה לבן ובמקום כל כתם אחר נקבל קשת של צבעים כי מיקום הפיק הגדול שאינו במרכז גדל עם אורך הגל.
ב. 70 ס״מ.

5) $$\alpha = kd\frac{L}{\sqrt{L^2+x^2}}\left[1+\beta\frac{x}{L}\right]\ ,\ \frac{I(\alpha)}{I(0)} = \left(\frac{\sin\left(\frac{3}{2}\alpha\right)}{3\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2$$

עקיפה

רקע



קירוב השדה הרחוק $L \gg a$:

$$\frac{I(\beta)}{I(0)} = \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\beta\right)}{\frac{1}{2}\beta} \right)^2$$

$$\beta = ka\sin\theta$$

נקי׳ התאפסות : $\beta_n = 2\pi n$

- אם $\lambda > a$ אז רוחב הפיק המרכזי גדול מאינסוף ולא יהיו נקי׳ התאפסות וזה אומר שהסדק מתנהג כמו מקור אור נקודתי.
- אם $a \gg \lambda$ אז מקבלים עוצמה קבועה ברוחב הסדק, מתאים למקרה הקלאסי בו מניחים שהאור נע בקווים ישרים.

מקסימום מקומי - נגזרת מתאפסת :

$$\beta_n \approx 2\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

הקשר לפורייה

רקע

האמפליטודה הכוללת על המסך כתלות בזווית:

$$A_{tot}(\theta) = 2\pi FT[B(x)](k')$$

$$k' = k \sin\theta$$

כאשר $B(x)$ היא האמפליטודה ליחידת אורך בסדק.

שאלות

1) לאן נעלם שימור האנרגיה?

א. הראו כי בסדק רחב: $I(0) \propto a^2$ כאשר a הוא רוחב הסדק.
רמז: שימו לב שהאמפליטודה בחלק מהנוסחאות תלויה ברוחב הסדק.

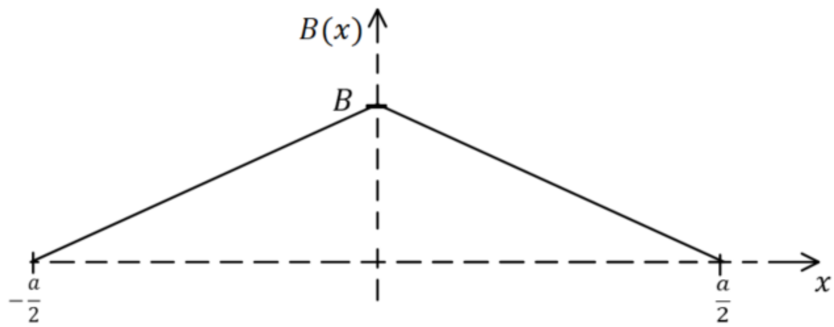
ב. העוצמה היא אנרגיה ליחידת שטח ליחידת זמן. אם נרחיב את רוחב הסדק פי 2 אז $I(0)$ תגדל פי 4. הרחבת הפתח פי 2 מכניסה פי 2 אור ופי 2 אנרגיה איך יתכן שהעוצמה על המסך גדלה פי 4?
לאן נעלם שימור האנרגיה?

2) שינוי בעוצמה כתלות בשינוי הפתח

נניח שיש לנו סדק ברוחב a ואנחנו מסתכלים על העוצמה הממוצעת בנקודה הנמצאת במרחק כלשהו, לא קטן, מהפיק המרכזי אבל עדיין בתחום הזוויות הקטנות.
מה יקרה לעוצמה הממוצעת (ממוצעת בתחום קטן) אם נגדיל את רוחב הפתח?
שימו לב שמצד אחד כשמגדילים את רוחב הפתח אז יותר אור נכנס והעוצמה גדלה אבל מצד שני העקומה מתכווצת והעוצמה בנקודה מסויימת קטנה.
השאלה היא איזה אפקט יותר חזק?

3) אמפליטודה בצורת משולש

נתון סדק ברוחב a דרכו עובר גל בעל חזית (פאזה) אחידה אך בעל אמפליטודה לא אחידה. האמפליטודה ליחידת אורך כתלות ב- x כאשר: $x = 0$ זה מרכז הסדק היא:



מצאו את תבנית ההתאבכות $\left(\frac{I(\theta)}{I(0)}\right)$ המתקבלת על מסך הנמצא במרחק רב מהסדק.

תשובות סופיות

1) א. הוכחה בסרטון.
ב. אם מגדילים את רוחב הסדק אז העוצמה באפס גדלה אבל התבנית מתכווצת והעוצמה קטנה בזוויות אחרות. האנרגיה שווה לאינטגרל על העוצמה לאורך כל המסך והערך של האנרגיה הכוללת יגדל רק פי 2 ולא פי 4.

2) העוצמה לא תשתנה.

3) $\frac{I(\theta)}{I_{\max}} = \sin c^4\left(\frac{1}{4}ka\sin\theta\right)$

התאבכות ועקיפה ביחד

רקע

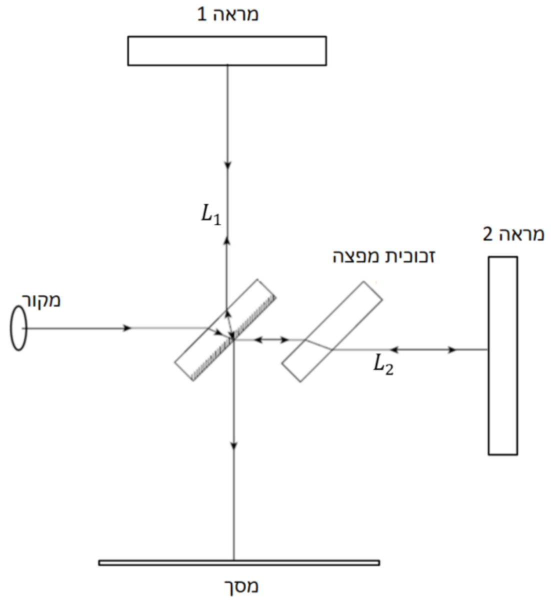
$$\frac{I(\theta)}{I(0)}=\left(\sin c\left(\frac{ka\sin\theta}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{Nkd\sin\theta}{2}\right)}{N\sin\left(\frac{kd\sin\theta}{2}\right)}\right)^2$$

כאשר a הוא רוחב כל סדק, d המרחק בין שני סדקים ו- N מספר הסדקים.

אינטרפרומטריה

רקע

האינטרפרומטר של מייקלסון:



$$\delta = 2(L_2 - L_1)$$

$$\Delta\varphi = k\delta + \pi$$

התאבכות בונה:

$$\delta = \lambda\left(m + \frac{1}{2}\right)$$

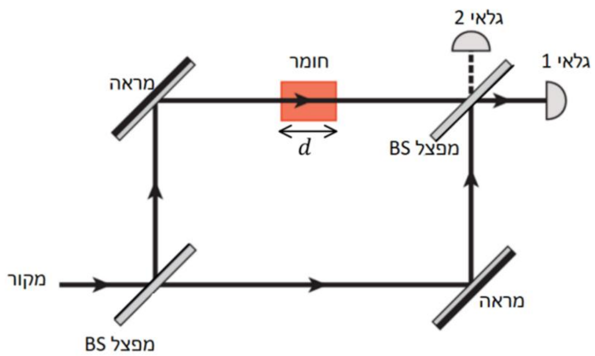
התאבכות הורסת:

$$\delta = \lambda \mathrm{m}$$

עוצמה:

$$\frac{I}{I_{max}} = \cos^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi\delta}{\lambda}\right)$$

אינטרפרומטר מאך-זנדר:



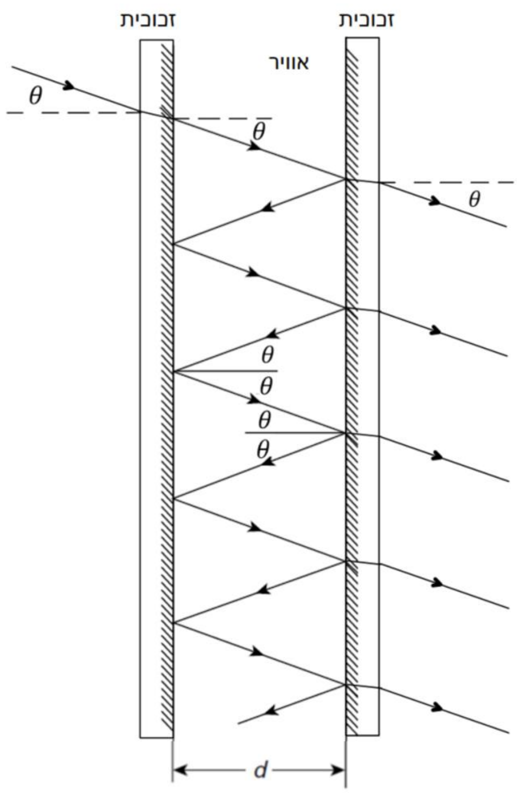
$$\delta = \mathrm{d}(n-1)$$

גלאי 1: $\Delta\varphi = k\delta$

גלאי 2: $\Delta\varphi = k\delta + \pi$

עוצמה: $\frac{I}{I_{max}} = \cos^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$

אינטרפרומטר פברי-פרו:



$$\frac{I}{I_{max}} = \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}$$

$$\Delta\varphi = k\delta = k2d\cos\theta$$

$$R = r^2 = \left(\frac{A_r}{A_i}\right)^2$$

$$\Delta\varphi_{\frac{1}{2}} \approx \frac{1-R}{\sqrt{R}}$$

שאלות

1) ללא פלטה מפצה

נתון אינטרפרומטר מייקלסון עם מפצל (50:50) העשוי מזכוכית בעובי t ומקדם שבירה n_2. זווית המפצל היא 45 מעלות, ציפוי הכסף נמצא בדופן האחורית של הזכוכית (כמו במקרה הרגיל) ובמערכת **אין פלטה מפצה**.

א. מהו הפרש הדרכים האופטיות בין הקרניים?
ומהו הפרש הפאזה עבור אורך גל נתון?
ניתן להניח ששינוי הזווית עקב מעברי התווך במפצל זניח מבחינת אורך הדרך וכי L_1, L_2 גם נתונים.

ב. הניחו שניתן למדוד את העוצמה על המסך.
הראו כי:

$$\lambda = \frac{2\pi\left(L_2 - L_1 - \sqrt{2}t(1-n_2)\right)}{\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{I}{I_{max}}}\right)}$$

ג. כעת הניחו שהופכים את המפצל כך שציפוי הכסף (ופיצול הקרניים) יהיה בדופן הקדמית של הזכוכית.
מה יהיה כעת הפרש הפאזה?

2) גלאי 2

נתון אינטרפרומטר של מאך-זנדר כפי שנראה בסרטון ההסבר.

א. חשבו את הדרך האופטית והפאזה של כל קרן המגיעה לגלאי 2.

ב. חשבו את העוצמה בגלאי 2 והראו כי מתקיים שימור אנרגיה (ביחיד עם העוצמה בגלאי 1).

3) מפצל לא סימטרי

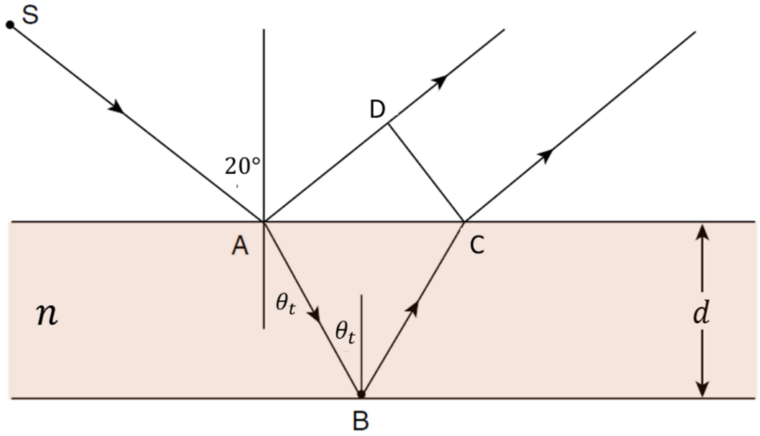
נניח כי המפצל באינטרפרומטר מאך זנדר הוא מפצל לא סימטרי כך שמקדם ההעברה שלו ($\left|\frac{A_t}{A_{in}}\right|$) הוא t ומקדם ההחזרה ($\left|\frac{A_r}{A_{in}}\right|$) הוא r.

א. רשמו את האמפליטודות של כל אחד מהמסלולים האפשריים ביחס לאמפליטודת הכניסה.

ב. * רשמו מטריצה כללית המתארת את המפצל. כולל תוספת הפאזה אך ללא התוספת של הדרכים האופטיות.

4) חישוב עובי קרום דק

גל מישורי לבן פוגע בקרום דק בזווית 20 מעלות. בצפייה של הגל המוחזר רואים אור אדום ($\lambda = 640nm$). מקדם השבירה של הקרום הוא $n = 1.3$.
מהו עובי הקרום? הניחו התאבכות בסדר ראשון.



5) טווחים של מספר גל

נתון אינטרפרומטר של פברי-פרו שבו $R = 0.95$ ו- $d = 0.2mm$ וזווית הפגיעה קטנה מאוד.

א. מה הם אורכי הגל λ_m בהם מתקבלים הפיקים?
מהם הערכים k_m המתאימים?
מה המרחק בין הפיקים במונחי k, כלומר מהו Δk בין שני פיקים?

ב. מהו רוחב הפונקציה (FWHM) כתלות ב- k?
ומהו הרוחב כתלות בתדר?

ג. נתונה דוגמית שערך הרזוננס שלה הוא בטווח של:
$k_r \in [10^3 cm^{-1}, 1.15 \cdot 10^3 cm^{-1}]$.
מהו N עבורו ערך הרזוננס נמצא בטווח של: $k_r \in [k_N, k_{N+1}]$?

ד. בשביל לסרוק את k אנחנו צריכים לשנות את d.
בכמה צריך לשנות את d בשביל לסרוק את הטווח של: $k_r \in [k_N, k_{N+1}]$?

תשובות סופיות

1) א. $\delta = 2\left(L_2 - L_1 - \sqrt{2}t\left(1-n_2\right)\right)$ ב. הוכחה. ג. $\Delta\varphi = 2k\left(L_2 - L_1\right)$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta + \pi$$

2) א. מסלול 3: החזרה במפצל 1 והחזרה במפצל 2 (כניסה לגלאי 2).

דרך אופטית - $L_1 + d\left(n-1\right) + 2c$

$$\varphi_3 = k\left(L_1 + d\left(n-1\right) + 2c\right) + \pi$$

כאשר c הוא הדרך האופטית במפצל.

מסלול 4: העברה במפצל 1 והעברה במפצל 2 (כניסה לגלאי 2).

דרך אופטית - $L_2 + 2c$

$$\varphi_4 = k\left(L_2 + 2c\right)$$

ב. $\frac{I}{I_{\max}} = \sin^2\left(\frac{k\delta}{2}\right)$

$$\delta = L_1 - L_2 + d\left(n-1\right)$$

3) א. $|A_1| = trE_0, |A_2| = rtE_0, |A_3| = r^2E_0, |A_4| = t^2E_0,$ ב. $\begin{pmatrix} t & -r \\ r & t \end{pmatrix}$

4) $128mm$

5) א. $\Delta k = \frac{\pi}{d}$, $k_m = \frac{\pi m}{d}$, $\lambda_m = \frac{2d}{m}$

ב. $\text{FWHM}_{[F]} = 2.44\cdot 10^{10HZ}$, $\text{FWHM}_{[K]} = 512\cdot\frac{1}{m}$

ג. $N = 6$

ד. $\Delta d = 28\mu m$

תרגילים נוספים

שאלות

1) שני סדקים ברוחב לא זניח

נתונים שני סדקים בעלי רוחב a (שאינו זניח) במרחק d אחד מהשני ובמרחק L מהמסך. הניחו קירוב שדה רחוק וזוויות קטנות.

א. כתבו את הנוסחה המתארת את העוצמה כתלות במרחק ממרכז המסך ביחס לעוצמה המקסימלית. ציינו איזה חלק מהעוצמה הוא פונקציית המעטפת וממה הוא נובע, ואיזה חלק הוא הפונקציה הפנימית (פונקציית המודולציה) וממה הוא נובע.

ב. מהו רוחב פונקציית המעטפת (FWHM) אם נתון שרוחב פונקציית $\sin c^2(\mathrm{x})$ הוא $2.8rad$?

ג. כמה מחזורים של הפונקציה הפנימית נכנסים ברוחב פונקציית המעטפת?

ד. על מנת שנוכל להבחין בהתאבכות של שני הסדקים צריך שיהיו לפחות שני פיקים של הפונקציה הפנימית בתוך הרוחב של פונקציית המעטפת, אחרת נראה רק את פונקציית המעטפת.
מה התנאי על a ו- d כך שנוכל להבחין בהתאבכות הסדקים.

2) שני סדקים עם קיטובים שונים

בניסוי שני הסדקים מסוים הקיטוב של השדה היוצא מכל סדק שונה ונתון לפי: $\vec{E}_1=E_0\hat{x}$ ו- $\vec{E}_2=E_0(\cos\varphi\,\hat{x}+\sin\varphi\,\hat{y})$.
הניחו שהמרחק בין הסדקים הוא d והמרחק למסך הוא L וש- $L\gg d$.

א. מה תהיה האמפליטודה של כל אחד מן השדות בפגיעה במרכז המסך? הניחו שהגלים גליליים.

ב. מצאו את השדה השקול והעוצמה במרכז המסך כתלות ב φ.
הסבירו את התוצאות המתקבלות עבור: $\varphi=0$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$ ו- $\varphi=\pi$.

תשובות סופיות

1) א. $\frac{I(x)}{I(0)}=\sin c^2\left(\frac{kax}{2L}\right)\cos^2\left(\frac{kd}{2L}x\right)$

פונקציית המעטפת היא ה- $\sin c$ בריבוע והיא נובעת מרוחב הסדקים.
הפונקציה הפנימית היא הקוסינוס בריבוע והיא נובעת מההתאבכות בין הסדקים.

ב. $5.6\frac{L}{ka}$ ג. $0.89\frac{d}{a}$ ד. $d\approx 2.24a$

2) א. $A_1=A_2=\frac{E_0}{\sqrt{L}}$

ב. $E_{tot}=\left((1+\cos\varphi)\hat{x}+\sin\varphi\hat{y}\right)$, $I\alpha\frac{E_0^{\,2}}{L}4\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

ב- $\varphi=0$ התאבכות מלאה כי השדות באותו קיטוב

ב- $\varphi=\frac{\pi}{2}$ השדות מאונכים אין התאבכות, העוצמה הכוללת היא סכום העוצמות.

ב- $\varphi=\pi$ השדות בפאזה הפוכה, התאבכות הורסת, עוצמה אפס.