תיאוריית הקוונטים ב מספר הקורס 141421

תוכן העניינים

1. המודל הקוונטי לאטום המימן ספין והטבלה המחזורית......1
2. הרחבה על תנז מסילתי ספין ותנז כולל......13
3. תורת ההפרעות הבלתי תלויה בזמן......23
4. תרגילים ברמת מבחן......26

תיאוריית הקוונטים ב מספר הקורס 141421

פרק 1 - המודל הקוונטי לאטום המימן ספין והטבלה המחזורית

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגולים 1

פתרון עבור אטום המימן ותנע זוויתי קוונטי:

סיכום כללי:

משוואת שרדינגר לפוטנציאל התלוי רק ב-r:

משוואה ל-$\theta(\theta)$:

$$\frac{1}{\theta(\theta)}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\theta(\theta)}{\partial\theta}\right)+l(l+1)\sin^2\theta=m^2$$

משוואה ל-$\phi(\varphi)$:

$$\frac{\partial^2\phi(\varphi)}{\partial\varphi^2}=-m^2\phi(\varphi)$$

פתרון לחלק הזוויתי:

$$Y_l^m(\theta,\varphi)=\theta(\theta)\phi(\varphi)=\varepsilon\sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}}P_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{im\varphi}$$

$$\varepsilon=\begin{cases}(-1)^m & \mathrm{m}>0\\ 1 & \mathrm{m}\geq 0\end{cases}$$

$l\geq 0$ ו- $|m|\leq l$ שלם.

$$P_l^m(x)\equiv(1-x^2)^{|m|/2}\left(\frac{d}{dx}\right)^{|m|}P_l(x)$$

$$P_l(x)\equiv\frac{1}{2^l l!}\left(\frac{d}{dx}\right)^l(x^2-1)^l$$

$$Y_0^0=\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\qquad Y_2^{\pm2}=\left(\frac{15}{32\pi}\right)^{\frac{1}{2}}sin^2\theta\, e^{\pm2i\phi}$$

$$Y_1^0=\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\theta\qquad Y_3^0=\left(\frac{7}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}}(5\,cos^3\theta-3\,cos\,\theta)$$

$$Y_1^{\pm1}=\mp\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\theta e^{\pm i\phi}\qquad Y_3^{\pm1}$$

$$=\mp\left(\frac{21}{64\pi}\right)^{\frac{1}{2}}sin\,\theta\,(5\,cos^2\theta-1)e^{\pm i\phi}$$

$$Y_2^0=\left(\frac{5}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}}(3\cos^2\theta-1)\qquad Y_3^{\pm2}=\left(\frac{105}{32\pi}\right)^{\frac{1}{2}}sin^2\theta\,cos\,\theta\,e^{\pm2i\phi}$$

$$Y_2^{\pm 1} = \mp\left(\frac{15}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} sin\,\theta\, cos\,\theta\, e^{\pm i\phi} \qquad Y_3^{\pm 3} = \mp\left(\frac{35}{64\pi}\right)^{\frac{1}{2}} sin^3\,\theta\, e^{\pm 3i\phi}$$

$$P_1^1 = sin\,\theta \qquad P_3^3 = 15\, sin\,\theta\,(1 - cos^2\theta)$$
$$P_1^0 = cos\,\theta \qquad P_3^2 = 15\, sin^2\theta\, cos\,\theta$$
$$P_2^2 = 3\, sin^2\theta \qquad P_3^1 = \frac{3}{2} sin\,\theta\,(5\, cos^2\theta - 1)$$
$$P_2^1 = 3\, sin\,\theta\, cos\,\theta \qquad P_3^0 = \frac{1}{2}(5\, cos^3\theta - 3\, cos\,\theta)$$
$$P_2^0 = \frac{1}{2}(3\, cos^2\theta - 1)$$

אורתוגונליות :

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}[Y_l^m(\theta,\varphi)]^*\left[Y_{l'}^{m'}(\theta,\varphi)\right]\sin\theta\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

המשוואה לחלק הרדיאלי :

$$\frac{1}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2}(V(r) - E) = l(l+1)$$
$$R(r) = \frac{u(r)}{r}$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2u(r)}{\mathrm{d}r^2} + \left[V(r) + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\right]u(r) = Eu(r)$$

פתרון עבור אטום המימן :

מתוך פתרון המשוואה תנאי שמקוונטט את האנרגיה :

$$E_n = -\frac{mk^2\mathrm{e}^4}{2\hbar^2}\cdot\frac{1}{n^2} = \frac{E_1}{n^2}$$
$$E_1 = -\frac{mk^2\mathrm{e}^4}{2\hbar^2} = -13.6\ \mathrm{eV}$$
$$n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

הפתרון לפונקציה תלוי בקבועים n ו-l :

$$R_{nl}(r) = \sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3\frac{(n-l-1)!}{2n[(n-l)!]^3}}\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{na}}\left(\frac{2r}{na}\right)^l L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na}\right)$$

רדיוס בוהר:

$$a = \frac{\hbar^2}{kme^2} = 0.529 \cdot 10^{-10} m$$

$$L_{q-p}^{p}(x) \equiv (-1)^p \left(\frac{d}{dx}\right)^p L_q(x)$$
$$L_q(x) \equiv e^x \left(\frac{d}{dx}\right)^q (e^{-x} x^q)$$

$$R_{10} = 2a^{-\frac{3}{2}} exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$
$$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{2}\frac{r}{a}\right) exp\left(-\frac{r}{2a}\right)$$
$$R_{21} = \frac{1}{\sqrt{24}} a^{-\frac{3}{2}} \frac{r}{a} exp\left(-\frac{r}{2a}\right)$$
$$R_{30} = \frac{2}{\sqrt{27}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{2}{3}\frac{r}{a} + \frac{2}{27}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right) exp\left(-\frac{r}{3a}\right)$$
$$R_{31} = \frac{8}{27\sqrt{6}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{6}\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right) exp\left(-\frac{r}{3a}\right)$$
$$R_{32} = \frac{4}{81\sqrt{30}} a^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{r}{a}\right) exp\left(-\frac{r}{3a}\right)$$
$$R_{40} = \frac{1}{4} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{3}{4}\frac{r}{a} + \frac{1}{8}\left(\frac{r}{a}\right)^2 - \frac{1}{192}\left(\frac{r}{a}\right)^3\right) exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$
$$R_{41} = \frac{\sqrt{5}}{16\sqrt{3}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{4}\frac{r}{a} + \frac{1}{80}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \frac{r}{a} exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$
$$R_{42} = \frac{1}{64\sqrt{5}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{12}\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^2 exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$
$$R_{43} = \frac{1}{768\sqrt{35}} a^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{r}{a}\right)^3 exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$

פתרון כללי:

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\varphi) = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta,\varphi)$$
$$n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$$

l שלם ומקיים: $0 \le l \le n-1$

m שלם ומקיים: $-l \le m \le l$

אורתוגונליות:

$$\int \psi^*_{nlm}\psi_{n'l'm'}\, r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\phi = \delta_{nn'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

פונקציית ההסתברות הרדיאלית (צפיפות ההסתברות למצא את האלקטרון במרחק r מהגרעין):

$$P_{nl}(r) = |R_{nl}|^2 r^2$$

תנע זוויתי:

התנע הזוויתי הוא: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = (L_x, L_y, L_z)$

נגדיר אופרטורים: $\widehat{L^2}, \widehat{L_z}, \widehat{L_x}, \widehat{L_y}$

$$\widehat{L^2} Y_l^m = l(l+1)\hbar^2 Y_l^m$$

$$|L| = \sqrt{l(l+1)}\hbar$$

גודל התנ"ז יכול להיות גם אפס וזה בניגוד למודל של בוהר.

את הכיוון נתאר באמצעות הגודל של L_z, משם אפשר למצא את $\cos\theta = \frac{L_z}{|L|}$

$$\hat{L}_z Y_l^m = m\hbar Y_l^m$$

גם הכיוון של וקטור התנע הזוויתי מקוונטט!

רמות אנרגיה ניוון וספקטרום הפליטה:

צפיפות המצבים: $g(n) = 2n^2$ (ה-2 מגיע מהספין).

כללי מעבר (Selection Rules):

1. $n_i > n_f$
2. $\Delta l = l_f - l_i = \pm 1$
3. $\Delta m = m_f - m_i = 0, \pm 1$

שאלות:

1) הסתברות להיות רחוק מרדיוס בוהר

א. חשבו את ההסתברות של אלקטרון במצב היסוד באטום מימן, להימצא במרחק שגדול מרדיוס בוהר מהגרעין.

ב. מצאו את הרדיוס הממוצע בו נמצא האלקטרון במצב היסוד.

2) כוח ממוצע

פונקציית הגל של המצב: $n=2\ ,l=1\ ,m=0$ היא: $\psi_{210}=\frac{\mathrm{r}\cdot cos\theta}{\sqrt{32\pi a^5}}\mathrm{e}^{-\frac{r}{2a}}$.

מצאו את גודל הכוח החשמלי הממוצע שפועל על האלקטרון.

נוסחאות עזר:

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x}\,dx=\frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

$$\int_0^\pi \boldsymbol{cos}^2\,\theta\,\boldsymbol{sin}\,\theta\,d\theta=\frac{2}{3}$$

$$\int_0^\pi sin^5\quad\theta d\theta=\frac{16}{15}$$

3) הראו כי התנז לא בכיוון Z

הראו שהתנע הזוויתי המסלולי של האלקטרון באטום המימן לא יכול להיות מקביל לציר Z.

4) גז מעורר

נתון גז של אטומי מימן שבכל אחד מהם האלקטרון נמצא ברמה התחלתית $(n=4,l=3)$.

נתון שאין אינטראקציה בין האטומים, טמפרטורת הגז נשארת קבועה כל הזמן ולא קיים שדה מגנטי חיצוני.

כמה קווי פליטה שונים (אורכי גל שונים) נראה בספקטרום הפליטה של הגז (ספקטרום הפליטה מתקבל כאשר האלקטרונים יורדים לרמות נמוכות יותר)?

רשמו את מצבי האנרגיה הנמוכים ביותר שבהם יכולים להימצא האלקטרונים לאחר זמן רב (השתמשו במספרים הקוונטים (n,l) כדי לאפיין את מצבי האנרגיה).

5) צבר אטומי מימן במצב 2 בשטרן גרלך

צבר אטומי מימן נמצא במצב $n=2$ (ועם תנע זוויתי כלשהו).

בכל סעיפי השאלה יש להתחשב גם בספין.

א. כמה כתמים יהיו על המסך עבור הצבר בניסוי שטרן גרלך?

ב. ציינו איזה מצב קוונטי גרם לכל כתם על המסך.

אורך המגנט בניסוי הוא L והמרחק מסוף המגנט ועד המסך הוא $10L$.
השדה המגנטי הוא $B(z)=B_0\frac{z}{L}$ ומהירות האטומים היא v.

ג. מה יהיה המרחק בין שני הכתמים הנוצרים מהמצבים בהם האלקטרון נמצא ברמה $2s$?

ד. כמה רמות אנרגיה שונות קיימות לצבר (תחת שדה מגנטי)?
כמה אורכי גל שונים יכולים להיפלט מהצבר?

תשובות סופיות:

1) א. 0.677 ב. $1.5a$

2) $\frac{ke^2}{12a^3}$

3) הוכחה.

4) 5 קווים, $1s$ ו-$2s$.

5) א. ישנם 5 אופציות שונות למומנט המגנטי ולכן נקבל 5 כתמים.
ב. הכתם הכי נמוך שייך ל-$m+2ms=2$ וככל שהערך יורד הכתם יהיה יותר גבוה.
ג. $21\frac{\mu_B B_0 L}{mv^2}$
ד. לצבר 5 רמות אנרגיה שונות עבור הערכים השונים של המומנט המגנטי.
7 אורכי גל שונים.

מומנט מגנטי מסילתי ואפקט זימן הנורמאלי:

סיכום כללי:

מומנט כוח על דיפול מגנטי:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

אנרגיה פוטנציאלית של דיפול מגנטי בשדה מגנטי:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

כוח על דיפול מגנטי בשדה מגנטי לא אחיד:

$$\vec{F} = (\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$$

מומנט דיפול מגנטי כתוצאה מתנועת האלקטרון סביב הגרעין:

$$\vec{\mu} = \frac{-\mu_B}{\hbar}\vec{L}$$

גודל קבוע שנקרא המגנטון של בוהר:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 5.788 \cdot 10^{-5}\, {}^{eV}\!/_{T}$$

האנרגיה הפוטנציאל כתוצאה האינטראקציה של המומנט המגנטי המסילתי עם שדה מגנטי חיצוני:

$$U = \frac{\mu_B}{\hbar}\vec{L} \cdot \vec{B} = \mu_B B m$$

כאשר m הוא המספר הקוונטי של Lz.

תוספת לשינוי באנרגיה כתוצאה ממעבר בין הרמות בעקבות אפקט זימן:

$$\Delta E_z = \mu_B B \Delta m$$
$$\Delta m = \pm 1{,}0$$

התוספת בעקבות אפקט זימן גורמת לכל קו ספקטרלי להתפצל לשלושה קווים.

שאלות:

1) פוטון נפלט מאטום מימן בשדה מגנטי

אלקטרון נמצא ברמת האנרגיה $3p$ של אטום מימן. האטום נמצא באזור בו יש שדה מגנטי אחיד $B = 4 \cdot 10^3[T]$. מצאו את אורך הגל הקצר ביותר שיכול

להתקבל ממעבר של האלקטרון לרמה כלשהיא (הניחו שהאלקטרון אינו עולה רמות לפני הפליטה).

2) **פליטה מאטום בורון ורוחב פס**

גז של אטומי בורון נמצא באזור בו קיים שדה מגנטי חיצוני אחיד B.

בכל אחד מהאטומים מעוררים את האלקטרון שנמצא ברמה $2p$ לרמה $3s$ ומודדים את ספקטרום הקרינה האלקטרומגנטית שמתקבל בחזרה של האלקטרון לרמה המקורית.

א. כמה קווים יתקבלו בספקטרום? הניחו שרמת האנרגיה זהות לאלו של אטום המימן.

ב. מצאו את הערך של B עבורו נוכל להבחין כי הפיצול אכן נבע מהשדה המגנטי החיצוני אם נתון שזמן החיים של הרמה המעוררת הוא 2ns.

תשובות סופיות:

1) 100nm.

2) א. 3 קווים. ב. $B > 9mT$

ספין ניסוי ושטרן גרלך:

סיכום כללי:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

$\vec{L}$ תנ"ז מסילתי, נובע מהתנועה הסיבובית של החלקיק.

$\vec{S}$ תנ"ז כתוצאה מהספין.

$$S = \sqrt{s(s+1)}\hbar$$

S גדולה - גודל התנ"ז מהספין.

s קטנה - הספין של החלקיק, עבור אלקטרון $s = \frac{1}{2}$.

עבור חלקיקים אחרים ערכי הספין הן כפולות שלמות של חצי $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$

חלקיקים שהספין שלהם חצי שלם $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ וכו' נקראים **פרמיונים** וחלקיקים שהספין שלהם שלם 0,1,2, נקראים **בוזונים.**

$$S_z = m_s \hbar$$

$-s < m_s < s$ בקפיצות של 1

עבור אלקטרון $m_s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

מומנט מגנטי מהספין $\vec{\mu}_s = -g \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{s}$

פקטור g או gyromagnetic ratio

עבור אלקטרון $g = 2.0023 \ldots \approx 2$

שאלות:

1) תוחלת של S

נתונה פונקציית הגל הבאה:

$$\frac{1}{\sqrt{4}}\Psi_{2,1,-1,\frac{1}{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}\Psi_{2,1,1,\frac{1}{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_{2,1,1,-\frac{1}{2}}$$

א. הראו שהפונקציה מנורמלת (בהנחה ש- $\Psi_{\mathrm{n,l,m},m_s}$ הן אורטונורמליות).
ב. מצאו את $\langle\hat{L}_z\rangle$.
ג. מצאו את $\langle\hat{S}_z\rangle$.
ד. מצאו את ΔS_z.

2) שטרן גרלך עם תנז מסילתי

מה היה קורה בניסוי שטרן-גרלך אם לאלקטרון בקרן שפוגעת היה $l=1$?

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. $\frac{\hbar}{2}$ ג. 0 ד. $\frac{\hbar}{2}$

2) הקרן תתפצל לחמש קרניים ונראה חמש נקודות על המסך.

אטומים מורכבים והטבלה המחזורית:

סיכום כללי:

כל אלקטרון מאכלס מצב מסוים המאופיין על ידי המספרים הקוונטים: $n,\ l,\ m_l,\ \ m_s$.

בגלל האינטראקציה של האלקטרונים עם עצמם האנרגיות תלויות ב-n וגם ב-l.

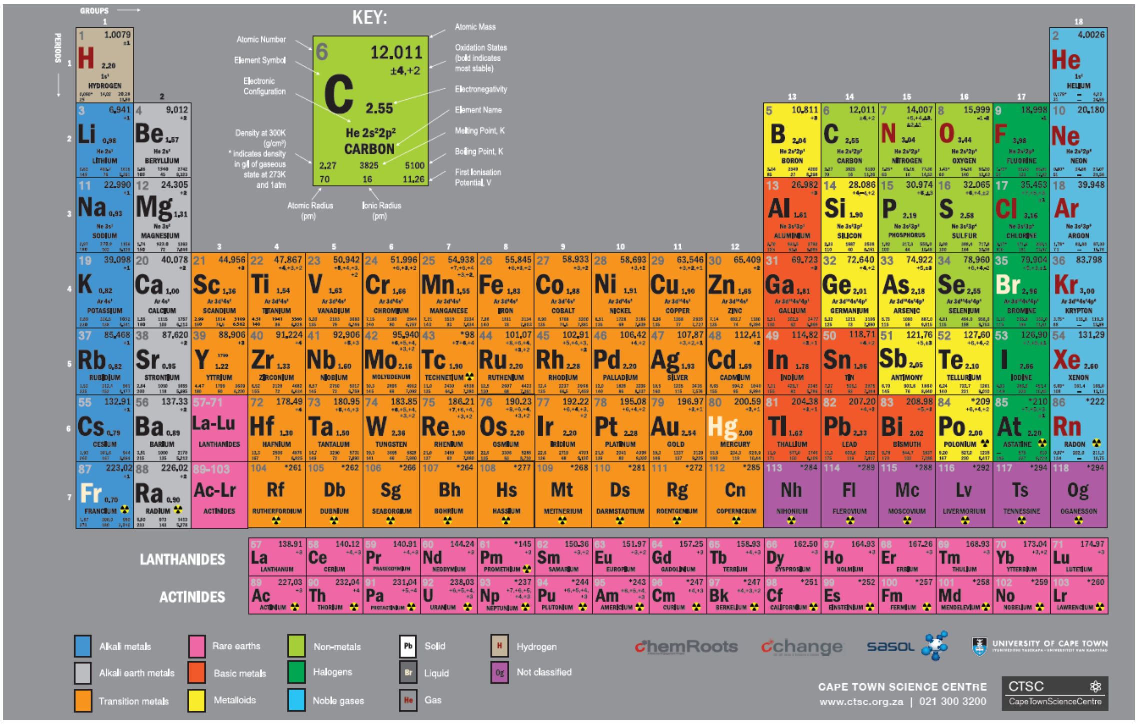
עיקרון האיסור של פאולי Wolfgang Pauli (1900-1958):

שני אלקטרונים באטום לא יכולים לאכלס את אותו המצב הקוונטי.

כלומר לא יכולים להיות שני אלקטרונים שיש להם בדיוק אותם מספרים קוונטים: $n,\ l,\ m_l,\ \ m_s$.

ככל ש-l גדל (יש יותר תנ"ז מסילתי) האנרגיה גדלה.

הטבלה המחזורית:



שאלות:

1) טיטניום
כמה אלקטרונים יש ליסוד טיטניום: $\mathrm{Ti}\ (Z = 22)$ ברמה הרביעית?
הניחו שהוא במצב היסוד.

2) אטום ראשון ברמה החמישית
מהו המספר האטומי של האטום "הראשון" ברמה החמישית?

3) קונפיגורציה של ברזל
רשמו את קונפיגורציית האלקטרונים של אטום הברזל: Fe Z=26
במצב היסוד. רשמו את הכתיב המלא והמקוצר.

4) קונפיגורציות הגיוניות
אלו מהקוניפגורציות הבאות הן הגיוניות ואלו לא? (עבור אטומים ברמת היסוד)
א. $1s^2 2s^2 2p^6 3s^3$
ב. $1s^2 2s^2 2p^6 2d^2$
ג. $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5 4s^2$
ד. $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^5 4s^2$

תשובות סופיות:

1) שני אלקטרונים.
2) 37.
3) $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^6 4s^2$, $3d^2 4s^2$.
4) א. לא. ב. לא. ג. לא. ד. כן.

תיאוריית הקוונטים ב מספר הקורס 141421

פרק 2 - הרחבה על תנז מסילתי ספין ותנז כולל

תוכן העניינים

1. תנז מסילתי והספין 13
2. המילטוניאן פריק 18
3. נקיפת לרמור 19
4. חיבור תנז 20
5. אינטראקציית ספין מסלול 22

תנ"ז מסילתי והספין:

סיכום כללי:

יחסי החילוף של התנ"ז המסילתי:

$$\left[\hat{L}_x,\hat{L}_y\right]=i\hbar\hat{L}_z$$
$$\left[\hat{L}_y,\hat{L}_z\right]=i\hbar\hat{L}_x$$
$$\left[\hat{L}_z,\hat{L}_x\right]=i\hbar\hat{L}_y$$
$$\left[\hat{L}^2,\hat{L}_z\right]=\left[\hat{L}^2,\hat{L}_y\right]=\left[\hat{L}^2,\hat{L}_x\right]=0$$

התנ"ז בקואורדינטות כדוריות:

$$\hat{L}_z=\left(-i\hbar\right)\frac{\partial}{\partial\varphi}$$
$$\hat{L}_x=-i\hbar\left(-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}-\cos\varphi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$
$$\hat{L}_y=-i\hbar\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}-\sin\varphi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$
$$\hat{L}^2=-\hbar^2\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$$

הפונקציות העצמיות של $\hat{L}_z$ ו- $\hat{L}^2$ הן הספריות ההרמוניות: $Y_l^m\left(\theta,\varphi\right)$.

$$Y_l^m\left(\theta,\varphi\right)=\theta\left(\theta\right)\phi\left(\varphi\right)=\varepsilon\sqrt{\frac{\left(2l+1\right)\left(l-|m|\right)!}{4\pi\left(l+|m|\right)!}}P_l^m\left(\cos\theta\right)e^{im\varphi}$$

$$\varepsilon=\begin{cases}\left(-1\right)^m & m>0\\ 1 & m\geq 0\end{cases}\qquad -l\leq m\leq l$$

m,l שלמים

$$\hat{L}_z Y_l^m = \hbar m Y_l^m$$
$$\hat{L}^2 Y_l^m = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m$$
$$\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$$
$$\hat{L}_+\hat{L}_- = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hbar\hat{L}_z$$
$$\hat{L}_-\hat{L}_+ = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 - \hbar\hat{L}_z$$
$$\left[\hat{L}_+, \hat{L}_-\right] = 2\hbar\hat{L}_z$$
$$\left[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm\right] = \pm\hbar\hat{L}_\pm$$
$$\left[\hat{L}^2, \hat{L}_\pm\right] = 0$$

מטריצות התנ״ז עבור $l=1$:

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\hat{L}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$$
$$\hat{L}^2 = \hbar^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ספין :

התנ״ז של הספין מקיים את אותם יחסי חילוף כמו התנ״ז המסילתי :

$$\left[\hat{S}_x, \hat{S}_y\right] = i\hbar\hat{S}_z$$
$$\left[\hat{S}_y, \hat{S}_z\right] = i\hbar\hat{S}_x$$
$$\left[\hat{S}_z, \hat{S}_x\right] = i\hbar\hat{S}_y$$

$$\hat{S}_z f = \hbar m_s f$$
$$\hat{S}^2 f = \hbar^2 S(S+1) f$$
$$-S \le m_s \le S$$

קפיצות של 1

S, m_s יכולים להיות חצי שלמים.

S תלוי רק בסוג החלקיק.

פרמיונים – ספין חצי שלם.

בוזונים – ספין שלם.

ספין חצי:

מצבים אורתונורמאלים:

$$S=\frac{1}{2} \qquad m_s=\pm\frac{1}{2}$$

$$|x_+\rangle=\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\equiv|\uparrow\rangle$$

$$|x_-\rangle=\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\equiv|\downarrow\rangle$$

$$\hat{S}_z=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_x=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_y=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$$

$$\hat{S}^2=\frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_\pm=\hat{S}_x\pm i\hat{S}_y$$

$$\hat{S}_\pm|s,m_s\rangle=\hbar\sqrt{s(s+1)-m_s(m_s\pm1)}\,|s,m_s\pm1\rangle$$

פונקציית מצב כללית של הספין:

$$|x\rangle=\alpha|x_+\rangle+\beta|x_-\rangle$$

שאלות:

1) אלקטרון במצב אפ נמדד באיקס

מודדים את ערך הספין בכיוון z של אלקטרון ומקבלים כי האלקטרון במצב up.
מייד לאחר מכן מודדים את הספין שלו בכיוון x.

א. מצאו את הע"ע והו"ע של $\hat{S}_x$.

ב. מהי ההסתברות לקבל $\frac{\hbar}{2}$ ומהי ההסתברות לקבל $-\frac{\hbar}{2}$ במדידת $\hat{S}_x$?

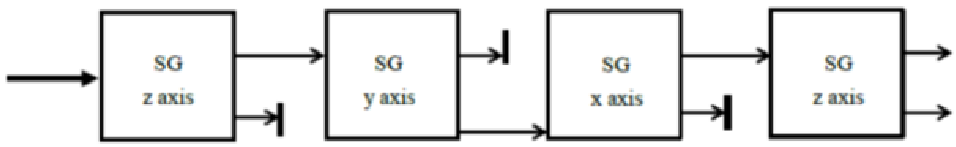
ג. חשבו את התוחלת במדידת $\hat{S}_x$.

במדידת $\hat{S}_x$ התקבלה התוצאה $\frac{\hbar}{2}$. מיד לאחר מכן מדדו שוב את $\hat{S}_z$.

ד. מה ההסתברות למדידת $-\frac{\hbar}{2}$ במדידת ה- $\hat{S}_z$?

2) קרן אלק דרך מכונות שטרן-גרלך

מעבירים קרן של אלקטרונים דרך הסדרה הבאה של מכונות (ניסויי)
שטרן-גרלך (הקרן נעה משמאל לימין).



נתון שבכל מכונות (ניסויי) שטרן-גרלך האלקטרונים עם היטל הספין החיובי על הציר שמצוין על המכונה נמצאים בקרן העליונה שיוצאת מהמכונה והאלקטרונים עם היטל הספין השלילי על הציר שמצוין על המכונה נמצאים בקרן התחתונה שיוצאת מהמכונה.

בהינתן שמצב האלקטרונים בקרן המקורית הוא: $|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|\downarrow\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|\uparrow\rangle$

בבסיס $\hat{S}_z$.

מצאו את אחוז האלקטרונים מהקרן המקורית שנמצאים בקרן התחתונה שיוצאת ממכונת שטרן-גרלך האחרונה (הימנית ביותר) בסדרה.

תשובות סופיות:

1) א. $\lambda_1 = \frac{\hbar}{2} \qquad v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

$\lambda_2 = -\frac{\hbar}{2} \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$

ב. $p\left(\frac{\hbar}{2}\right) = p\left(-\frac{\hbar}{2}\right) = \frac{1}{2}$ ג. 0 ד. $\frac{1}{2}$

2) א. $\frac{1}{12}$

המילטוניאן פריק:

סיכום כללי:

המילטוניאן פריק הוא המילטוניאן מהצורה הבאה:

$$\hat{H}\left(\hat{X},\hat{P},\hat{S}\right)=\hat{H}_0\left(\hat{X},\hat{P}\right)+\hat{H}_S\left(\hat{S}\right)$$

במקרה של המילטוניאן פריק ניתן לפתור את משוואת שרידינגר לספין ולמרחב בנפרד.

נקיפת לרמור:

סיכום כללי:

ערך התוחלת של S עבור ספין חצי בשדה מגנטי עושה נקיפה (פרסציה) מסביב לשדה בתדירות: $\omega=\gamma B_0$ ובזווית α ביחס לשדה כאשר: $\gamma = g\dfrac{-e}{2m_e}$.

g הוא היחס הג'ירו מגנטי.

α נקבעת מתנאי התחלה.

פונקציית הגל תהיה:

$$x(t)=\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{\frac{\gamma B_0}{2}t},\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{-\frac{\gamma B_0}{2}t}\right)$$

חיבור תנ"ז:

סיכום כללי:

חיבור שני ספינים:

$$|S_1 - S_2| \le S < S_1 + S_2$$

S הוא של כל המערכת והוא לא קבוע בניגוד לחלקיק בודד:

$$-S \le m_S \le S$$

עבור שני חלקיקים עם ספין חצי:

טריפלט -

$$|S, m_S\rangle$$
$$|1,1\rangle \to |\uparrow\uparrow\rangle$$
$$|1,0\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$
$$|1,-1\rangle \to |\downarrow\downarrow\rangle$$

סינגלט -

$$|0,0\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

תנ"ז כולל:

$$\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$$

אותם יחסי חילוף כמו של התנ"ז המסילתי והספין:

$$\hat{J}_z f = \hbar m_j f$$
$$\hat{J}^2 f = \hbar^2 j(j+1) f$$
$$m_j = m_l + m_s$$
$$|l - S| \le j \le l + S$$

שאלות:

1) חישוב מפורש של S

חשבו מפורשות את S עבור מצבי הטריפלט ומצב הסינגלט.

רמז: $\hat{\vec{S}}_1 \cdot \hat{\vec{S}}_2 = \hat{S}_{1x} \cdot \hat{S}_{2x} + \hat{S}_{1y} \cdot \hat{S}_{2y} + \hat{S}_{1z} \cdot \hat{S}_{2z}$ והשתמשו במטריצות של $\hat{S}_i$ כדי לחשב את הפעולות על המצבים העצמיים של $\hat{S}_z$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

אינטראקציית ספין מסלול:

סיכום כללי:

$$U=-\vec{\mu}\cdot\vec{B}=\frac{e^2\cdot\vec{S}\cdot\vec{L}}{8\pi\varepsilon_0 m_e^2c^2r^3}$$

$$\vec{B}=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e}{m_ec^2r^3}\vec{L}$$

ע״ע של $\hat{\vec{S}}\cdot\hat{\vec{L}}$:

$$\frac{1}{2}\hbar^2\left(j\left(j+1\right)-S\left(S+1\right)-l\left(l+1\right)\right)$$

תיאוריית הקוונטים ב מספר הקורס 141421

פרק 3 - תורת ההפרעות הבלתי תלויה בזמן

תוכן העניינים

1. תורת ההפרעות בלתי תלויה בזמן ובלתי מנוונת 23

תורת ההפרעות הבלתי תלויה בזמן ובלתי מנוונת:

רקע:

עבור המילטוניאן מהצורה: $H = H_0 + H'$, כאשר $H' << H_0$.
$E_n^{(0)}$ ו- $\psi_n^{(0)}$ הם סדר אפס בחישוב האנרגיות ופונקציות הגל והן האנרגיות ופונקציות הגל של H_0, ההמילטוניאן ללא ההפרעה.

תיקון סדר ראשון לאנרגיה:

$$E_n^{(1)} = \left\langle \psi_n^{(0)} \middle| H' \middle| \psi_n^{(0)} \right\rangle$$

תיקון סדר ראשון לפונקציית הגל (ללא ניוון באנרגיה):

$$\psi_n^{(1)} = \sum_{m \neq n} \frac{\left\langle \psi_m^{(0)} \middle| H' \middle| \psi_n^{(0)} \right\rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \psi_m^{(0)}$$

תיקון סדר שני לאנרגיה:

$$E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{\left| \left\langle \psi_m^{(0)} \middle| H' \middle| \psi_n^{(0)} \right\rangle \right|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}$$

שאלות:

1) דוגמה – תוספת מדרגה לבור פוטנציאל

הפונקציות העצמיות של בור אינסופי מ-0 עד l הן:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$$

מצאו את התיקון הראשון לאנרגיות בבור עבור הפרעה מהצורה הבאה:

א. תוספת קבועה V_0.

ב. תוספת קבועה רק לחצי מהבור: $V(x) = \begin{cases} V_0 & , \quad 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & , \quad \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$.

2) הפרעה שלא באלכסון ראשי

ההמילוטוניאן $\hat{H}$ של מערכת קוונטית בעלת שלושה מצבים נתון על ידי המטריצה הבאה:

$$\hat{H}=\begin{pmatrix} E_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_0 \end{pmatrix}$$

כאשר E_0 מייצג קבוע חיובי ידוע בעל יחידות של אנרגיה.

נסמן ב- ϕ_3, ϕ_2, ϕ_1 את הווקטורים העצמיים של ההמילטוניאן (המצבים העצמיים של ההמילטוניאן), עם ערכים עצמיים: E_3, E_2, E_1, בהתאמה.

א. עבור המקרה שבו המערכת הקוונטית נמצאת במצב שמתואר על ידי פונקציית הגל הבאה: $\psi=\frac{3i}{4}\phi_1+\frac{2}{4}\phi_2+\frac{\sqrt{3}i}{4}\phi_3$.
חשבו את ההסתברות שבמדידה של אנרגיית המערכת, נקבל שאנרגיית המערכת שווה ל- E_1.

ב. מצאו את הערכים העצמיים: E_3, E_2, E_1, ואת הווקטורים העצמיים (המצבים העצמיים): ϕ_3, ϕ_2, ϕ_1, של ההמילטוניאן.

מוסיפים הפרעה קבועה וחלשה $\hat{V}$ (שפועלת במידה שווה על כל אחד ממצבי האנרגיה של ההמילטוניאן הלא מופרע) שמתוארת על ידי המטריצה:

$$\hat{V}=\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

כאשר ε מייצג קבוע בעל יחידות של אנרגיה שיכול להיות מספר ממשי חיובי או שלילי.

ג. רשמו את התנאי שהקבוע ε חייב לקיים בכדי שנוכל להשתמש בתורת ההפרעות למציאת התיקונים למצבי האנרגיה של המערכת הקוונטית.

ד. מצאו את התיקון מסדר ראשון לאנרגיית של הרמה המעוררת הראשונה.

ה. מצאו את התיקון מסדר ראשון לפונקציית הגל של הרמה המעוררת הראשונה. כלומר, מצאו את התיקון מסדר ראשון לווקטור העצמי שמתאים לאנרגיית רמת היסוד.

3) אוסילטור הרמוני עם הפרעה

הניחו אוסילטור הרמוני המתואר על ידי הפוטנציאל הבא:

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\left(\omega_0+\delta\omega\right)^2 x^2$$

כאשר, $\left(\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right)<<1$.

א. מצאו את האנרגיות החדשות באופן מדויק (טריוויאלי במקרה זה) ורשמו את האנרגיות כטור חזקות של $\left(\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right)$.

ב. מצאו את התיקון מסדר ראשון וסדר שני באנרגיה לפי תורת ההפרעות. השוו את התוצאה לסעיף א׳.

רמז: אין צורך להשתמש באינטגרלים בבעיה זו.

תשובות סופיות:

1) א. $E_n^{(1)}=V_0$ ב. $E_n^{(1)}=\frac{V_0}{2}$

2) א. $P\left(E_1\right)=\frac{q}{16}$ ב. $(1,0,0)\to E_0\ ,\ (0,1,0)\to 0\ ,\ (0,0,1)\to -E_0\ ,$

ג. $|\varepsilon|<<E_0$ ד. $E_2^{(1)}=0$ ה. $\psi_2^{(1)}=\frac{\varepsilon}{E_0}\left(-\phi_1+\phi_3\right)$

3) א. $E_n^{'}=\hbar\left(\omega_0+\delta\omega\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)=\hbar\omega_0\left(n+\frac{1}{2}\right)+\hbar\omega_0\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right)$

ב. $E_n^{(1)}=\hbar\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega_0\left(\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right)+\frac{\hbar\omega_0}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right)^2$

ג. $E_n^{(2)}=-\frac{1}{2}\hbar\omega_0\left(n+\frac{1}{2}\right)\left[\left(\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right)^2+\left(\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right)^4\right]$

אם סוכמים את סך התיקון לסדר שני $\left(\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right)^2$ אז הוא מתאפס.

תיאוריית הקוונטים ב מספר הקורס 141421

פרק 4 - תרגילים ברמת מבחן

תוכן העניינים

1. שאלות חזרה קצרות בנושאים ספציפיים 26

2. תרגילים בתורת הקוונטים 28

שאלות חזרה קצרות בנושאים ספציפיים

שאלות

1) המודל הקוונטי לאטום המימן 1

האם לפי המודל הקוונטי לאטום המימן מרחק האלקטרון מהגרעין במצב היסוד חייב להיות שווה לרדיוס בוהר?

2) המודל הקוונטי לאטום המימן 2

האם המודל של בוהר נותן את הערך המדויק של התנ״ז באטום המימן?

3) המודל הקוונטי לאטום המימן 3

גז של אטומי מימן נמצא ברמה $4d$ $(n=4,\ l=2)$.

כמה קווי פליטה נוכל לראות מהגז? ספרו את כל קווי הפליטה האפשריים עד שהאטומים מגיעים לרמת היסוד.

4) המודל הקוונטי לאטום המימן 4

אטום מימן נמצא במצב $n=3,\ l=1$. האם הזווית בין התנ״ז של האלקטרון לשדה המגנטי חיצוני יכולה להיות 135 מעלות?

5) המודל הקוונטי לאטום המימן 5

מערכת מסוימת נמצאת במצב הקוונטי $\psi(\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{21}}\left(4Y_4^2-Y_4^3+2Y_3^3\right)$, כאשר

Y_l^m הן הספריות ההרמוניות.

מה ההסתברות שבמדידת גודלו של התנז יתקבל הערך $\sqrt{20}\hbar$?

6) אפקט זימן 1

מהו גודלו של השדה המגנטי הקבוע הדרוש על מנת שעבור אטום מימן הרמה $(n=5,\ l=4, m=3)$ תתלכד עם הרמה $(n=6,\ l=2, m=-1)$? התעלמו מספין האלקטרון.

7) אפקט זימן 2

כמה קווים ספקטרלים שונים ניתן לראות בעקבות מעברים באפקט זימן הנורמאלי?

8) אפקט זימן 3

אטום דמוי מימן מורכב מאלקטרון אחד וגרעין בעל מסה $3m_p$ ומטען $5e$.

שמים את האטום באזור עם שדה מגנטי חיצוני אחיד שגודלו $2\cdot 10^4 T$.

מצאו את אורך הגל הקצר ביותר שיוכל להתקבל מהמעבר של האלקטרון מהמצב $2p$ לרמת היסוד.

תשובות סופיות

1) לא
2) לא
3) 5 מעברים.
4) הזווית אפשרית.
5) $\frac{17}{21}$
6) 718 T
7) 3 קווים.
8) 48.4 אנגסטרום.

תרגילים בתורת הקוונטים:

שאלות:

1) תרגיל - בור סופי

חלקיק בעל מסה m משוחרר ברגע $t=0$ בתוך בור פוטנציאל סופי בגובה V_0.

כלומר פוטנציאל מהצורה: $V(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le l\\ V_0 & \text{אחרת}\end{cases}$

פונקציית הגל ב $t=0$ היא

$$\psi(x,t=0)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) & 0\le x\le l\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

א. מהו ערך התוחלת (ערך תצפית/ממוצע) של אנרגיית החלקיק ב $t=0$?
ב. האם ערך התוחלת של האנרגיה ישתנה בזמן? נמקו.
ג. האם פונקציית הגל של החלקיק היא פונקציה עצמית של ההמילטוניאן?
ד. האם פונקציית הגל תשתנה כתלות בזמן? אם כן הסבירו איכותית כיצד ניתן לחשב את פונקציית הגל כתלות בזמן. אם לא הסבירו את שיקולכם.
ה. מהו התנאי על נתוני הבעיה המתאר מצב קשור (כלומר מצב שבו החלקיק לא יכול להגיע לאינסוף)?

2) תרגיל - חלקיק בחלק שמאלי של בור אינסופי

חלקיק נמצא בתוך בור פוטנציאל אינסופי ברוחב l. מצב החלקיק ב $t=0$ הוא $\psi(x)=\alpha\phi_1(x)+\beta\phi_2(x)$ כאשר $\phi_1(x)$ ו- $\phi_2(x)$ הן המצבים העצמיים של רמת היסוד והרמה הראשונה בבור.

α ו- β קבועים נתונים.

א. מהי ההסתברות שהחלקיק נמצא בחצי השמאלי של הבור ב $t=0$?
ב. מצאו את ההסתברות שהחלקיק נמצא בחלק השמאלי כתלות בזמן?
ג. אילו ערכים יכולים להתקבל במדידת האנרגיה של החלקיק? מהו הערך הממוצע של האנרגיה ב $t=0$?
ד. חזרו על סעיף ג' עבור $t>0$.

3) תרגיל - בור חצי אינסופי

חלקיק בעל מסה m נמצא תחת פוטנציאל של בור חצי אינסופי, כלומר:

$$V(x)=\begin{cases}\infty & x\geq 0\\ 0 & -l\leq x<0\\ V_0 & x<-l\end{cases}$$

יש לבטא את התשובות באמצעות הנתונים בשאלה וקבועי הטבע.

עבור חלקיק המגיע משמאל לבור עם אנרגיה $E>V_0$

א. מהו הסיכוי להחזרה של החלקיק מהבור? מה היחס בין מספר הגל של החלקיק מחוץ לבור ובתוך הבור?

ב. מהי פונקציית הגל של החלקיק? (מצאו את הקבועים של הפונקציה כביטוי של הקבוע של פונקציית התנועה משמאל)

עבור חלקיק עם אנרגיה $E<V_0$

ג. מהן האנרגיות המותרות במערכת? ניתן להשאיר משוואה סתומה עם האנרגיה כנעלם יחיד.

4) מציאת פוטנציאל בהינתן פונקציית גל

נתון ההמילטוניאן של מערכת חד מימדית מהצורה: $H=\frac{P^2}{2m}+V(x)$

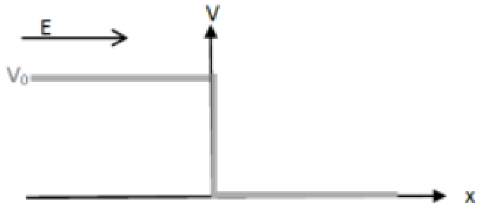
נתון כי אנרגית רמת הייסוד היא אפס ופונקציית הגל של רמת הייסוד היא: $\psi_0(x)=\frac{A}{\sin h(x)}$

כאשר A קבוע נרמול. מצאו את $V(x)$.

5) פיזור ממדרגה הפוכה

אלומת חלקיקים בעל מסה m ואנרגיה E מגיעה משמאל ופוגשת מדרגת פוטנציאל "הפוכה":

$$E>V_0 \qquad V=\begin{cases}V_0>0 & x<0\\ 0 & x>0\end{cases}$$



א. רשמו את משוואת שרדינגר בכל המרחב ופתרו אותה.
ציירו סכמתית את פונקציית הגל בכל המרחב.

ב. מצאו את מקדם ההחזרה והראו כי ניתן לבטא אותו בעזרת:

$$R=\left(\frac{1-\sqrt{1-\frac{V_0}{E}}}{1+\sqrt{1-\frac{V_0}{E}}}\right)^2$$

ג. נויטרון בעל אנרגיה קינטית 4MeV פוגע בגרעין מסוים.
נתון כי ההסתברות של הנויטרון להירתע ולא לחדור כלל לתוך הגרעין היא 0.25.
בהנחה כי המצב המתואר בסעיפים הקודמים הוא קרוב טוב לבעיה זו, מהי האנרגיה הפוטנציאלית בבעיה?

6) ניוון באוסילטור דו מימדי

ההמילטוניאן של אוסילטור הרמוני דו מימדי נתון לפי :

$$H=\frac{P_x^2+P_y^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega_1^2X^2+\frac{1}{2}m\omega_2^2Y^2$$

כאשר $\omega_1\neq\omega_2$ נתון כי לרמת הייסוד אנרגיה E_0 ולרמה המעוררת הראשונה אנרגיה $\frac{5}{3}E_0$. מהו הניוון של הרמה המעוררת השניה?

7) מדידת ספין ב zxz

פונקציית הגל של חלקיק עם ספין חצי נתונה בבסיס S_z לפי :

$$\sqrt{\frac{3}{5}}|1/2>+\sqrt{\frac{2}{5}}|-1/2>$$

מודדים את רכיב ה z של הספין ואחרכ את רכיב ה x ואחר״כ שוב את רכיב ה z של הספין. מה ההסתברות לקבל $\frac{1}{2}\hbar$ במדידה האחרונה?

8) שלושה מצבים עם שלוש אנרגיות

נתון חלקיק בעל ספין 1 . ידוע שלאנרגיה של החלקיק שלושה מצבים שונים בלבד E_0 , E_1 ו- E_2 . ידוע גם כי אם החלקיק במצב ספין <1| אז ההסתברות למדוד אנרגיה E_0 היא $\frac{1}{2}$ וההסתברות למדוד את האנרגיה E_1 היא $\frac{1}{2}$. עוד ידוע שאם החלקיק במצב ספין <0| אז ההסתברות למדידת כל אחד מערכי האנרגיה שווה. מהן ההסתברויות למדידת כל אחד מערכי האנרגיה אם החלקיק במצב ספין <1-|?

9) המילטוניאן AA דגר

נתון ההמילטוניאן :

$$H=\frac{1}{2m}\left(iP-\hbar f(X)\right)\left(-iP-\hbar f(X)\right)$$

כאשר $f(x)$ פונקציה ממשית.

א. רישמו את ההמילטוניאן בצורה $H=\frac{1}{2m}AA^{\dagger}$, הראו כי הוא הרמיטי וכי האנרגיות העצמיות הן אי שליליות.

ב. נתון כי $f(x)=Cx^{2n-1}$ עבור $n\geq 1$ שלם ו - C חיובי. מהי פונקצית הגל של האנרגיה אפס (עד כדי קבוע נרמול)?

10) אופרטור העלאה והורדה להמילטוניאן

נתונים שני אופרטורים המקיימים:

$$[H_0,A]=cA \text{ ו} [H_0,B]=-cB$$

א. הראו כי אם $|\psi_n>$ היא פונקציה עצמית של H_0 אז גם $A|\psi_n>$ ו- $B|\psi_n>$ הן פונקציות עצמיות של H_0 .

ב. נתון כי אנרגיית רמת היסוד היא E_0 וש $B|\psi_n>=0$ רק עבור רמת היסוד וגם ש $A|\psi_n>\neq 0$. אילו ערכי אנרגיה ניתן למדוד?

ג. נתון כי AB הרמיטי. עבור ההמילטוניאן:

$$H=H_0+\alpha AB$$

כאשר $\alpha>0$ הוא קבוע נתון. אילו אנרגיות של H יהיו שונות מאלו של H_0 ?

ד. נתון כי $A|\psi_n>$ ו- $B|\psi_n>$ מנורמלים. מהו הערך המוחלט של השינוי ברמות האנרגיה של הסעיף הקודם?

11) המילטוניאן עם אופרטור סיבובי כללי

נתונים האופרטורים A_1 , A_2 ו- A_3 המקיימים את יחסי החילוף הבאים $\left[A_i,A_j\right]=i\varepsilon_{ijk}A_k$ כאשר ε_{ijk} הוא סימן לוי-צ'יוויטה.

נתון ההמילטוניאן $H=\alpha A_3^2+\beta(A_1^2+A_2^2)$ כאשר α ו- β הם מספרים ממשיים.

א. מהן רמות האנרגיה של המערכת?

מוסיפים להמילטוניאן תיקון מהצורה $H'=\lambda(A_1^2-A_2^2)$.

ב. מה התיקון מסדר ראשון לכל אחת מרמות האנרגיה?

12) בור עם מדרגה באמצע

חלקיק בעל מסה m נמצא תחת השפעת הפוטנציאל הבא:

$$V(x)=\begin{cases}\infty & x<0\\ 0 & 0\leq x\leq L\\ V_0 & L\leq x\leq 2L\\ 0 & 2L\leq x\leq 3L\\ \infty & x>3L\end{cases}$$

מצב החלקיק ב- $t=0$ הוא:

$$\psi(x,t=0)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) & 2L<x<3L\\ 0 & else\end{cases}$$

א. חשבו את ערך התצפית של אופרטור האנרגיה כתלות בזמן $<H(t)>$.
נמדוד מספר מערכות זהות למערכת המתוארת למעלה במקביל.
האם בכל המערכות נמדוד את אותה אנרגיה? הסבירו.

ב. מהו ערך התצפית של אופרטור המקום ברגע $t=0$? האם ערך תצפית זה ישתנה בזמן? הסבירו.

ג. כתבו את פונקציית הגל ב- $t=0$ כסופרפוזיציה של שני מצבים עצמיים של אופרטור התנע. מהו ערך התצפית של אופרטור התנע ב- $t=0$?

ד. כעת התייחסו לפוטנציאל V_0 כאל הפרעה קטנה.
מהי רמת האנרגיה המעוררת הראשונה במערכת בפיתוח עד לסדר ראשון בתורת ההפרעות?
מהו התנאי על הפוטנציאל V_0 כך שניתן להשתמש בתורת ההפרעות?

13) סופרפוזיציה 3 ו-4 באוסילטור הרמוני

חלקיק נמצא תחת פוטנציאל של אוסילטור הרמוני קוונטי.
מצב החלקיק נתון לפי פונקציית הגל הבאה:

$$\psi(x)=c_1\phi_3(x)+c_2\phi_4(x)$$

כאשר c_1 ו- c_2 הם קבועים ממשיים ו- ϕ_3, ϕ_4 הן הפונקציות העצמיות של ההמילטוניאן של אוסילטור הרמוני חד מימדי עבור $n=3,4$ בהתאמה.
נתון כי ההסתברות של החלקיק להיות במצב ϕ_4 גדולה פי 2 מההסתברות שלו להיות במצב ϕ_3.

א. חשבו את המקדמים c_1 ו- c_2.

ב. מה ערכי האנרגיה האפשריים של החלקיק?
מהו ערך התצפית של האנרגיה?

ג. מהי האנרגיה הפוטנציאלית ומהי האנרגיה הקינטית של החלקיק?

ד. על החלקיק בוצעה מדידה ונמצא כי האנרגיה שלו היא: $\frac{9\hbar\omega}{2}$,
לאחר זמן מה בוצעה מדידה נוספת, מהן התוצאות האפשריות למדידה זו?

הסבירו כיצד התשובה מסתדרת עם עיקרון אי הודאות באנרגיה ובזמן $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$.

ה. כעת נתון כי החלקיק נמצא ברמת היסוד ומסיפים להמילטוניאן הפרעה קטנה מהצורה: $H' = A_3 x^3 + A_4 x^4$.
חשבו את התיקון הראשון לאנרגיית רמת הייסוד של החלקיק.
העזרו ב:

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\left(\hat{a} + \hat{a}^{\dagger}\right) \qquad \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

$$\phi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{-(\alpha x)^2}{2}} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$\hat{a}\left|\psi_n\right\rangle = \sqrt{n}\left|\psi_{n-1}\right\rangle \qquad \hat{a}^{\dagger}\left|\psi_n\right\rangle = \sqrt{n+1}\left|\psi_{n+1}\right\rangle$$

14) ניתוח רמה באטום המימן

פוטון באורך גל של: $6562.79 \cdot 10^{-10} m$ נפלט מאטום מימן.

א. מצאו מאיזו לאיזו רמה נפלט הפוטון וחשבו את רדיוס מסלול האלקטרון, על פי מודל בוהר, אחרי הפליטה.

ב. על פי מודל שרדינגר ובהנחה שהתנע הזוויתי המסלולי הוא אפס, רשמו את פונקציית הגל המלאה של האלקטרון אחרי הפליטה. (העזרו בנוסחאות).

ג. חשבו מהו המרחק המסתבר ביותר שבו ניתן למצא את האלקטרון.
יש להגיע למשוואה עם r^3, אין צורך לפתור אותה.

ד. חשבו מהו ערך התצפית של מרחק האלקטרון מהגרעין $\langle r \rangle$ ברמה זו?

$$\int_0^{\infty} x^n e^{\frac{-x}{a}} dx = a^{n+1} \cdot n!$$

ה. הסבירו את ההבדל בין סעיף ג' ל-ד'.

ו. כעת נניח שהאטום נמצא תחת שדה חשמלי חלש E_0 בכיוון z,
חשבו את התיקון מסדר ראשון לרמת האנרגיה של האלקטרון.
ההמילטוניאן של השדה הוא: $H' = eE_0 z$, כאשר e הוא מטען האלקטרון.

15) הפרעה באטום המימן

נתון המילטוניאן של אטום המימן עם הפרעה.

$$H=\frac{P^2}{2m}+\frac{ke^2}{r}+\lambda\frac{\delta(r)}{r^2}$$

אילו רמות אנרגיה יקבלו תיקון השונה מאפס בסדר ראשון של λ?

תשובות סופיות:

1)

א. $$\frac{\hbar^2\pi^2}{2m\ell^2}$$

ב. לא ישתנה , לפי משפט ארנפסט

ג. הפונקציה אינה פונקציה עצמית כי היא לא מקיימת את התנאי של רציפות הנגזרת בשפה

ד. מכיוון שפונקציית הגל אינה פונקציה עצמית של ההמילטוניאן היא תשתנה עם הזמן, בשביל למצא את ההתפתחות בזמן יש למצא את הפונקציות העצמיות ולרשום את פונקציית הגל בקומבינציה לינארית של הפונקציות העצמיות. משם לפתח כל פונקציה עצמית בזמן.

ה.

$$\frac{\hbar^2\pi^2}{2m\ell^2} < V_0$$

2)

תשובות

3)

תשובות

א) מכיוון שהפוטנציאל אינסוף בראשית החלקיק מחויב לחזור, ולכן R=1

$$\boxed{\frac{k_2}{k_1}=\sqrt{1-\frac{V}{E}}}$$

ב)

$$B=A\,\frac{ik_2\sin(k_2l)+k_1\cos(k_2l)}{ik_2\sin(k_2l)-k_1\cos(k_2l)}\,e^{-2ik_1l}$$

$$C=\frac{Ak_2e^{ik_1l}}{k_1\cos(k_2l)-ik_2\sin(k_2l)}$$

$$D=-C$$

ג)

$$\boxed{\sqrt{\frac{E}{V_0-E}}=-\tan\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}l\right)}$$

4) $V(x)=\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1+\cosh^2(x)}{\sinh^2(x)}\right]$

5) א.

$x<0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+V\psi=E\psi$$

$$\psi_2(x)=Ae^{ik_2x}+Be^{ik_2x}$$

$$k_2=\frac{2m(E-V_0)}{\hbar}$$

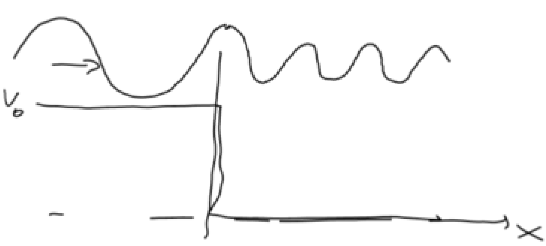
$x>0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=E\psi$$

$$\psi_R(x)=Ce^{ik_Rx}$$

$$k_R=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$k_R=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$



ב. הוכחה.

ג. $V_0\approx 32\text{MeV}$

6) 2

7) 0.5

8)

9) א. הוכחה בסרטון

ב. $\psi_0(x) = \alpha e^{-\frac{c}{2n}x^{2n}}$

10) א. הוכחה בסרטון

ב. $E_n = E_0 + nc$

ג. כל האנרגיות מלבד E_0

ד. α

11) א. $E_{lm} = \alpha m^2 + \beta(l(l+1) - m^2)$

ב. 0

12) א. $< H(t) >= \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$, החישוב נותן רק ערך ממוצע של הרבה מדידות של מערכות זהות, יש אינסוף ערכים אפשריים של אנרגיה שניתן לקבל במדידה ספציפית.

ב. $< x(t=0) >= 2L$, ישתנה בזמן כי הוא לא מתחלף עם ההמילטוניאן.

ג. $< p(t=0) >= 0 \ , \ \psi(x,t=0) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\frac{\pi}{L}x} - e^{-i\frac{\pi}{L}x}\right)\sqrt{\frac{2}{L}}$

ד. $V_0 << \frac{\hbar^2}{mL^2} \ , \ E'_2 = \frac{2\pi^2\hbar^2}{9mL^2} + \frac{V_0}{3}\left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right)$

13) א. $c_2 = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \ , \ c_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ ב. $< E >= \frac{25}{6}\hbar\omega \ , \ E_4 = \frac{9}{2}\hbar\omega \ , \ E_3 = \frac{7}{2}\hbar\omega$

ג. $< U >=< E_k >= \frac{25}{12}\hbar\omega$ ד. $E = \frac{9}{2}\hbar\omega$ ה. $\frac{A_4}{4\alpha^4}$

14) א. $r = 2.1\cdot10^{-10}m \ , \ n = 3 \rightarrow n = 2$

ב. $\psi(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{2\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}}\left(2 - \frac{r}{a}\right)e^{-\frac{r}{2a}}\frac{l}{\sqrt{4^{\frac{1}{11}}}}$

ג. $-r^3 + 8r^2a - 16ra^2 + 8a^3 = 0$ ד. $6a$

ה. אם נעשה מספר רב של מדידות על מערכות זהות אז הכי הרבה אלקטרונים יצאו לפי התוצאה של הערך המסתבר ביותר. הערך הממוצע של כל המדידות

תהיה התוצאה בסעיף ד' והן לא יהיו זהות.

ו. $E_2^{(1)} = 0$

15) האנרגיות של $l = 0$ יקבלו תיקון שונה מאפס בסדר ראשון