

# שיטות רגרסיה



$$\{\sqrt{x}\}^2$$



## תוכן העניינים

1	מבוא לקורס	1
7	ניתוח שונות חד כיוונית	7
16	ניתוח שונות דו כיוונית	16
42	אומדי הריבועים הפחותים	42
56	מודלים לא ליניאריים	56
60	רגרסיה מרובה ומולטיקוליניאריות	60
66	מבחן t	66
73	מבחן F ו R בריבוע	73
83	שינוי יחידות מדידה	83
85	מבחן 1 ללא פלטים	85
89	מבחן 2 ללא פלטים	89

# שיטות רגרסיה

פרק 1 - מבוא לקורס

תוכן העניינים

1. כללי..... 1

## מבוא לקורס:

### רקע:

#### הגדרות וסימונים:

**משתנה אמפירי** – תוצאותיו ידועות מראש (למשל: רמת הכנסה, גיל, מס' שנות לימוד במדגם מסוים).

**משתנה מקרי** – תוצאותיו לא ידועות מראש (כגון תוצאה בהטלת קובייה או בהטלת מטבע). באקונומטריקה נעסוק בעיקר במשתנים מקריים.

שני סוגי המשתנים יסומנו באות לועזית עם אינדקס (למשל:  $X_t$  או  $Y_t$ ).  
**קבוע** – מקבל ערך אחד בלבד (מסומן באות לועזית ללא אינדקס – למשל  $a$  או  $b$ ).  
 לכל משתנה מקרי  $X_t$  יש **תוחלת** המייצגת את מרכז ההתפלגות ( $\mu_x$  או  $E(X)$ ).  
**השונות** – מייצגת את מידת הפיזור של ההתפלגות ( $\sigma_x^2$  או  $V(X)$ ).

**סטית התקן** – היא השורש של השונות ( $\sigma_x$ ).

**שונות משותפת (covariance)** – מדד להתפלגות המשותפת של שני משתנים מקריים ומייצגת את הכיוון של הקשר ביניהם ( $\text{Cov}(X, Y)$ ):

$X, Y \Leftrightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0$  בלתי מתואמים.

$\text{Cov}(X, Y) > 0$  מתאם חיובי בין המשתנים.

$\text{Cov}(X, Y) < 0$  מתאם שלילי בין המשתנים.

$X, Y \Leftarrow$  בלתי תלויים  $X, Y$  בלתי מתואמים.

**מקדם המתאם של פירסון** – מדד לכיוון ולעוצמת הקשר הליניארי בין שני

$$\text{משתנים: } \eta_{xy} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

$$-1 \leq \eta \leq 1$$

$\eta = 1$  מתאם ליניארי חיובי מלא בין שני המשתנים.

$\eta = -1$  מתאם ליניארי שלילי מלא בין שני המשתנים.

$\eta = 0$  לא קיים מתאם ליניארי בין שני המשתנים.

## אמידה:

פרמטר – ערך המשתנה הנחקר המתאר את כל האוכלוסייה.  
סטטיסטי/אומד – ערך המשתנה הנחקר המתאר את המדגם.

מדגם	אוכלוסייה
$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$	$E(X) = \mu$
$S_X^2 = \frac{S_{XX}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}$	$V(X) = \sigma^2 = E(X - E(X))^2$
$\frac{S_{XY}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{n}$	$\text{cov}(X, Y) = E(X - E(X))(Y - E(Y))$
$r_{XY} = \frac{S_{XY}}{\sqrt{S_{XX}} \sqrt{S_{YY}}}$	$\eta_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)} \sqrt{V(Y)}}$

## נוסחאות וחוקים בסטטיסטיקה:

יהיו  $X$  ו- $Y$  משתנים מקריים, ו- $a, b$  קבועים:

חוקי הסיגמה:

$$1. \sum_{t=1}^T X_t = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_T$$

$$2. \sum_{t=1}^T a = Ta \quad \text{סכום של קבוע:}$$

$$3. \sum_{t=1}^T aX_t = a \sum_{t=1}^T X_t \quad \text{סכום של קבוע כפול משתנה = לקבוע כפול הסכום:}$$

$$4. \sum_{t=1}^T (X_t \pm Y_t) = \sum_{t=1}^T X_t \pm \sum_{t=1}^T Y_t \quad \text{סכום של סכום/הפרש = לסכום/הפרש הסכומים:}$$

$$5. \sum_{t=1}^T X_t^2 \neq \left( \sum_{t=1}^T X_t \right)^2 \quad \text{יש לשים לב כי:}$$

$$\sum_{t=1}^T X_t Y_t \neq \sum_{t=1}^T X_t \sum_{t=1}^T Y_t$$

הגדרות ופיתוחים:

1. סכום הסטיות מהממוצע = 0 :  $\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X}) = 0$
2. סכום הסטיות הריבועיות מהממוצע (מונה השונות):  

$$S_{XX} = \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2 = \sum_{t=1}^T X_t^2 - T\bar{X}^2 = \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})X_t$$
3. מונה של השונות המשותפת:  

$$S_{XY} = \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y}) = \sum_{t=1}^T X_t Y_t - T\bar{X}\bar{Y} = \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})Y_t = \sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y})X_t$$

חוקי התוחלת:

1. תוחלת של קבוע = קבוע :  $E(a) = a$
2. תוחלת של סכום/הפרש = לסכום/הפרש התוחלות:  

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$$

$$E(\sum (X_i)) = \sum E(X_i)$$
3. תוחלת של כפל/חילוק  $\neq$  לכפל/חילוק התוחלות:  

$$E(X \cdot Y) \neq E(X) \cdot E(Y)$$

$$E\left(\frac{X}{Y}\right) \neq \frac{E(X)}{E(Y)}$$

$$E(X^2) \neq [E(X)]^2$$
4. השפעת טרנספורמציה ליניארית על התוחלת:  

$$E\left(a/\frac{1}{a}X \pm b\right) = a/\frac{1}{a} \cdot E(X) \pm b$$

חוקי השונות:

1. עבור  $X$  ו- $Y$  בלתי תלויים/בלתי מתואמים מתקיים:  
שונות של סכום/הפרש = סכום השונות:  

$$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$$

$$V(\sum (X_i)) = \sum V(X_i)$$
2. עבור  $X$  ו- $Y$  תלויים/מתואמים מתקיים:  
שונות של סכום/הפרש  $\neq$  סכום השונות:  

$$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y) \pm 2 \cdot Cov(X, Y)$$

$$V(a) = 0$$

3. שונות של קבוע = 0 :  $V(a \pm x) = V(X)$

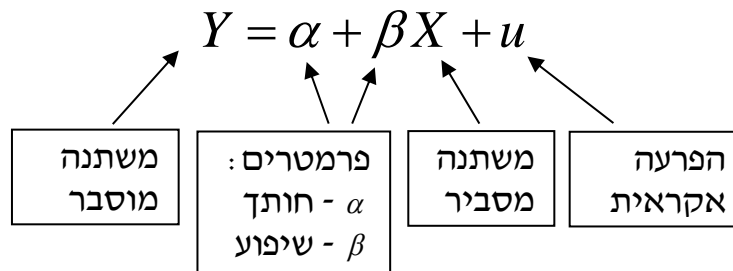
4. השפעת טרנספורמציה ליניארית על השונות :  $V(aX + b) = a^2V(X)$

- חוקי התוחלת והשונות מתייחסים למשתנים אמפיריים כאל קבועים (יוצאים מחוץ לתוחלת או לשונות).  
חוקי הסכימה מתייחסים למשתנים אמפיריים כמשתנים הנשארים בתוך הסיגמא (רק הקבועים ייצאו מחוץ לסיגמא).

#### חוקי השונות המשותפת :

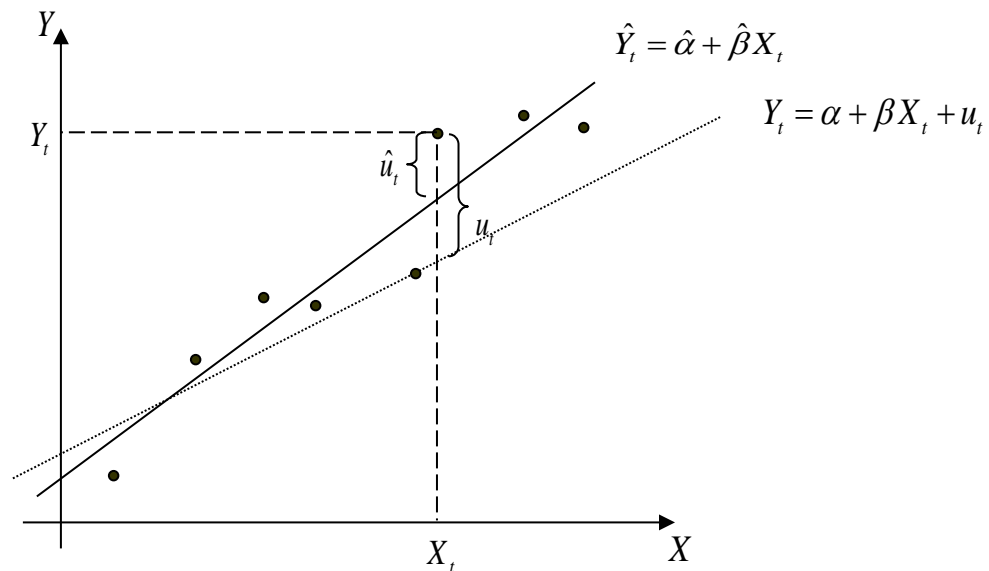
1. שונות משותפת בין משתנה לקבוע = 0 :  $\text{cov}(X, a) = 0$ .
2. שונות משותפת של משתנים המוכפלים בקבוע :  $\text{cov}(aX, bY) = ab \cdot \text{cov}(X, Y)$ .
3. שונות משותפת של משתנה עם עצמו = שונות המשתנה :  $\text{cov}(X, X) = V(X)$   
 $\text{cov}(Y, Y) = V(Y)$

#### המודל האקונומטרי :



1. במודל :  $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ ,  $\alpha$  ו- $\beta$  הם מספרים קבועים אך לא ידועים. אנו יכולים להעריך אותם ולקבל אומדים (תהליך קבלת האומדנים נקרא אמידה).
2.  $\hat{\alpha}$  הוא האומד ל- $\alpha$  ו- $\hat{\beta}$  הוא האומד ל- $\beta$ .
3. אומדי ריבועים פחותים (אר"פ) הם אומדים שחושבו בשיטת הריבועים הפחותים. מסומנים בד"כ ע"י 'כובעי' -  $\hat{\beta}$ .  
אומדים אחרים מסומנים בד"כ ע"י 'תלתלי' -  $\tilde{\beta}$ .

4. בעוד  $\alpha$  ו- $\beta$  הם קבועים,  $\hat{\alpha}$  ו- $\hat{\beta}$  הם משתנים מקריים כיוון שבכל מדגם מתקבלים  $\hat{\alpha}$  ו- $\hat{\beta}$  אחרים.
5. את  $\alpha$  ו- $\beta$  ו- $u_t$  לא ניתן לדעת (אלא רק לאמוד מנתוני המדגם) – הקו האמיתי באוכי לא ידוע.
6. אפשר לדעת את  $\hat{u}_t$ , שהיא הסטיה מקו הרגרסיה במדגם:
- עבור  $X_t$ , הערך הצפוי של המשתנה המוסבר ( $\hat{Y}_t$ ) המתקבל לפי הרגרסיה הוא:  $\hat{Y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_t$ .
- הסטיה של התצפית ( $Y_t$ ) מהערך הצפוי לפי הרגרסיה ( $\hat{Y}_t$ ) היא:  $\hat{u}_t = Y_t - \hat{Y}_t$ .



— קו הרגרסיה הנאמד (במדגם)  
 ..... קו הרגרסיה האמיתי באוכלוסייה)  
 • תצפית בודדת

## שאלות:

(1) הבא נוכיח את הזהויות הבאות:

$$\text{א. } \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2 = \sum_{t=1}^T X_t^2 - T\bar{X}^2$$

$$\text{ב. } \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2 = \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})X_t$$

$$\text{ג. } \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X}) = 0$$

$$\text{ד. } \sum \frac{(X_t - \bar{X})^2}{\sum (X_t - \bar{X})X_t} = 1$$

$$\text{ה. } \sum (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i)(x_i - \bar{x}) = \hat{\beta}(x_i - \bar{x})^2$$

$$\text{ו. } \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y}) = \sum_{t=1}^T X_t Y_t - T\bar{X}\bar{Y}$$

$$\text{ז. } \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y}) = \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})Y_t$$

(2) בטא באמצעות:  $\text{cov}(x, y)$ ,  $\text{var}(x)$ ,  $\text{var}(y)$  והקבועים  $a$  ו- $b$  את הביטויים

הבאים:

$$\text{א. } \text{Var}(ax)$$

$$\text{ב. } \text{Var}(x+y)$$

$$\text{ג. } \text{Var}(ax+b)$$

$$\text{ד. } \text{Cov}(x, ay)$$

$$\text{ה. } \text{Cov}(x+a, y+b)$$

$$\text{ו. } \text{מקדם המתאם בין } x \text{ ל- } y$$

## תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) א.  $a^2 \text{var}(x)$  ב.  $\text{var}(x) + \text{var}(y) + 2\text{cov}(x, y)$  ג.  $a^2 \text{var}(x)$  ד.  $a \text{cov}(x, y)$ 

$$\text{ה. } \text{cov}(x, y) \quad \text{ו. } r = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{\text{var}(x)} \cdot \sqrt{\text{var}(y)}}$$

# שיטות רגרסיה

פרק 2 - ניתוח שונות חד כיוונית

תוכן העניינים

1. כללי ..... 7

## ניתוח שונות חד כיוונית

### רקע תיאורטי

ניתוח שונות (חד כיוונית) הוא מבחן להשוואת תוחלות  $(\mu_1, \dots, \mu_k)$  של  $k$  אוכלוסיות שונות. לכן, בנייתוח שונות, השערות המחקר הן:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k \quad (\text{התוחלות של כל האוכלוסיות שוות})$$

$$H_1: \quad \text{אחרת} \quad (\text{לפחות שתיים מהתוחלות שונות})$$

### ההנחות הדרושות לביצוע התהליך:

(2) בכל אוכלוסייה מתוך  $k$  האוכלוסיות ההתפלגות נורמלית.

(3) כל האוכלוסיות הן עם אותה שונות  $\sigma^2$ .

(4) המדגמים בלתי תלויים זה בזה.

ישנו משתנה המבדיל בין הקבוצות השונות, הוא המשתנה הבלתי תלוי הנקרא גורם (factor). משתנה זה הוא קטגוריאלי עם  $k$  רמות (levels). כדי לבצע את התהליך יש לבצע מדגם מכל אוכלוסייה: נסמן ב- $n_i$  את גודל המדגם בקבוצה  $i$ .

$$n = \sum_{i=1}^k n_i \quad \text{- מספר התצפיות סך הכול (בכל המדגמים).}$$

$\bar{X}_1$  - ממוצע המדגם הראשון,  $\dots, \bar{X}_k$  - ממוצע המדגם ה- $k$ .  
 $\bar{X}$  - ממוצע כללי (של כל המדגמים).

$$SS_B = \sum_{i=1}^k n_i [\bar{X}_i - \bar{X}]^2 \quad \text{סכום ריבועים בין הקבוצות:}$$

$$SS_W = \sum_{i=1}^k n_i [n_i - 1] \cdot \hat{S}_i^2 \quad \text{סכום ריבועים בתוך הקבוצות:}$$

$$SS_T = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_j} [X_{ij} - \bar{X}]^2 \quad \text{סכום ריבועים כללי:}$$

$$SST = SSB + SSW$$

יש למלא את טבלת ניתוח השונות הבאה:

מקור השונות	סכום הריבועים SS	דרגות חופש $df$	ממוצע הריבועים MS	F
B - בין הקבוצות	SSB	$k - 1$	$\frac{SSB}{k - 1}$	$\frac{MSB}{MSW}$
W - בתוך הקבוצות	SSW	$n - k$	$\frac{SSW}{n - k}$	
T - סה"כ	SST	$n - 1$		

$$F = \frac{\frac{SSB}{k-1}}{\frac{SSW}{n-k}} \sim F(k-1, n-k)$$

אזור דחיית  $H_0$ :  $1 - \alpha : F > F_{(k-1, n-k)}$

**שאלות**

- (1) מחקר מעוניין להשוות בין שלוש תרופות לשיכוך כאבים במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין התרופות מבחינת הזמן בדקות שלוקח עד שהתרופה משפיעה. לצורך הבדיקה נלקחו 15 אנשים שסובלים מכאבי ראש. אנשים אלה חולקו באקראי לשלוש קבוצה 1 קיבלה "אקמול" קבוצה 2 קיבלה "אופטלגין" קבוצה 3 קיבלה "נורופן". כל אדם במחקר מסר את מספר הדקות עד שהתרופה השפיעה עליו.
- א. מהו המשתנה התלוי ומהו המשתנה הבלתי תלוי במחקר?
  - ב. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים כאן? רשמו את ההשערות.
  - ג. מה הן ההנחות הדרושות כדי לבצע את המבחן הסטטיסטי שהצעת בסעיף הקודם?

- (2) בעיר מסוימת שלושה בתי ספר תיכון. ראש העיר התעניין לבדוק האם קיים הבדל בהצלחה של בתי הספר במקצוע מתמטיקה. לצורך כך הוא דגם מספר תלמידים שנבחנו במבחן הבגרות במתמטיקה ברמה של 3 יחידות בעירו ובדק עבור כל תלמיד מה ציון הבגרות שלו במתמטיקה. להלן הציונים שהתקבלו:

"הס"	"רבין"	"המתמיד"
85	98	78
83	62	65
74	55	70
85	80	90
75		56

- א. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים? רשמו את ההשערות ואת ההנחות של המבחן.
- ב. מהו גודל המדגם? מהו המשתנה הבלתי תלוי (factor) כמה רמות יש לו?
- ג. חשבו את הממוצע ואת סטיית התקן של הציונים בכל אחד מהמדגמים.
- ד. מלאו את טבלת ANOVA.
- ה. רשמו את כלל ההכרעה למבחן שהוצע בסעיף א ברמת מובהקות של 5%.
- ו. האם קיים הבדל בין בתי הספר בעיר מבחינת רמת הצלחת התלמידים במקצוע המתמטיקה? ענה על סמך הסעיפים הקודמים.

- (3) מעוניינים לבדוק האם יש הבדל בהשפעה של שיטות טפול שונות על לחץ הדם הסיסטולי (SBP) באוכלוסייה של קשישים. נבדקו 4 שיטות שונות. בטבלה המצורפת מרוכזים ממצאי המחקר.

השיטה	A	B	C	D
גודל המדגם	12	14	8	12
הממוצע	178	172	180	182
סטיית התקן	4	8	5	3

- א. רשמו את השערות המחקר וההנחות הדרושות כדי לבצע את המבחן המתאים.
- ב. מה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 5%?
- ג. האם יש צורך לבצע השוואות מרובות?

- 4) שלושה אופים נתבקשו להכין עוגת שוקולד. לכל אופה בדקו את משך זמן ההכנה בדקות. כל אופה נדרש לאפות בכל יום 4 עוגות. האם קיים הבדל בין האופים מבחינת תוחלת זמני ההכנה של העוגות? בדקו ברמת מובהקות של 5%.

האופה	ניר	מוזס	שלום
סכום הזמנים	206	212	182
סכום ריבועי הזמנים	10644	11250	8982

- 5) להלן טבלת ניתוח שונות חד כיוונית. במחקר בחנו 4 סוגי סוללות. רצו לבדוק האם לסוג הסוללה השפעה על תוחלת אורך החיים שלה. הפעילו את כל הסוללות על אותו מכשיר ובדקו את אורך החיים של כל סוללה בשעות. מה המסקנה ברמת מובהקות של 10%? רשמו את ההשערות וההנחות הדרושות.

### ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	10.317	3	3.439	1.361	.279
Within Groups	60.648	24	2.527		
Total	70.964	27			

- 6) להלן טבלת ANOVA בטבלה הושמטו חלקים. השלימו את החלקים בטבלה שהושמטו ומסומנים באותיות.

### ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	357.450	ב	ג	ה	.000
Within Groups	א	17	ד		
Total	522.950	19			

7) חברת תרופות לקחה 15 אנשים ברמת בריאות דומה. החברה חילקה את האנשים ל שלוש קבוצות שוות בגודלן. לכל קבוצה ניתנה אותה תרופה במינון שונה (dosage). המינונים שניתנו הם: 10 מ"ג, 20 מ"ג ו-30 מ"ג. לאחר שעה מזמן לקיחת התרופה נבדק קצב פעימות הלב של כל אדם (pulse). הנתונים הוזנו לתוכנה סטטיסטית והתקבלו התוצאות הבאות:

ANOVA						pulse			
pulse						Tukey HSD <sup>a</sup>			
	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	dosage	N	Subset for alpha = 0.05	
								1	2
Between Groups	414.400	2	207.200	19.733	.000	30.00	5	71.0000	
Within Groups	126.000	12	10.500			20.00	5		80.2000
Total	540.400	14				10.00	5		83.4000
						Sig.		1.000	.299

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.  
a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 5.000.

### Post Hoc Tests

#### Multiple Comparisons

(I) dosage		(J) dosage	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
						Lower Bound	Upper Bound
10.00		20.00	3.20000	2.04939	.299	-2.2675	8.6675
		30.00	12.40000*	2.04939	.000	6.9325	17.8675
20.00		10.00	-3.20000	2.04939	.299	-8.6675	2.2675
		30.00	9.20000*	2.04939	.002	3.7325	14.6675
30.00		10.00	-12.40000*	2.04939	.000	-17.8675	-6.9325
		20.00	-9.20000*	2.04939	.002	-14.6675	-3.7325

\*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

- א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין המינונים השונים מבחינת תוחלת הדופק של האנשים? רשמו את ההשערות וההנחות הדרושות לצורך פתרון.
- ב. הסבירו ללא חישוב כיצד הייתה משתנה התשובה לסעיף הקודם אם הינו מעלים את הדופק של כל התצפיות במחקר ב-2.
- ג. האם יש צורך במחקר בהשוואת מרובות. נמקו!
- ד. לטבלת ANOVA צורפו טבלאות של השוואות מרובות בשיטה הנקראת "טוקי". ברמת בטחון של 95% מה הם הממצאים לפי שיטה זו?

- 8) בעיר מסוימת רצו לבדוק האם קיים הבדל ברמה של התלמידים בין בתי הספר השונים בעיר. ביצעו מדגם מכל בית ספר ונתנו מבחן זהה לכל הנדגמים. לאחר מכן ריכזו את הנתונים בתוכנה סטטיסטית והפעילו ניתוח שונות. מצורפים הפלטים שהתקבלו. ענו על הסעיפים הבאים:
- כמה בתי ספר יש בעיר?
  - כמה תלמידים השתתפו בסך הכול במחקר?
  - האם קיים הבדל בין בתי הספר בעיר מבחינה רמת הציונים? בדקו ברמת מובהקות של 1%
  - בביטחון של 95% אילו בתי ספר שונים זה מזה ברמת התלמידים? נמקו והסבירו.

### Oneway

#### ANOVA

grade

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	7799.600	4	1949.900	13.586	.000
Within Groups	2870.400	20	143.520		
Total	10670.000	24			

**Post Hoc Tests**

**Multiple Comparisons**

grade

Scheffe

(I) school	(J) school	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Lower Bound	Upper Bound
1.00	2.00	5.40000	7.57681	.971	-20.2543	31.0543
	3.00	36.80000*	7.57681	.003	11.1457	62.4543
	4.00	36.40000*	7.57681	.003	10.7457	62.0543
	5.00	-2.60000	7.57681	.998	-28.2543	23.0543
2.00	1.00	-5.40000	7.57681	.971	-31.0543	20.2543
	3.00	31.40000*	7.57681	.011	5.7457	57.0543
	4.00	31.00000*	7.57681	.013	5.3457	56.6543
	5.00	-8.00000	7.57681	.888	-33.6543	17.6543
3.00	1.00	-36.80000*	7.57681	.003	-62.4543	-11.1457
	2.00	-31.40000*	7.57681	.011	-57.0543	-5.7457
	4.00	-.40000	7.57681	1.000	-26.0543	25.2543
	5.00	-39.40000*	7.57681	.001	-65.0543	-13.7457
4.00	1.00	-36.40000*	7.57681	.003	-62.0543	-10.7457
	2.00	-31.00000*	7.57681	.013	-56.6543	-5.3457
	3.00	.40000	7.57681	1.000	-25.2543	26.0543
	5.00	-39.00000*	7.57681	.001	-64.6543	-13.3457
5.00	1.00	2.60000	7.57681	.998	-23.0543	28.2543
	2.00	8.00000	7.57681	.888	-17.6543	33.6543
	3.00	39.40000*	7.57681	.001	13.7457	65.0543
	4.00	39.00000*	7.57681	.001	13.3457	64.6543

\*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

**Homogeneous Subsets**

grade

Scheffe<sup>a</sup>

school	N	Subset for alpha = 0.05	
		1	2
3.00	5	45.0000	
4.00	5	45.4000	
2.00	5		76.4000
1.00	5		81.8000
5.00	5		84.4000
Sig.		1.000	.888

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.

a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 5.000.

**תשובות סופיות**

(1) א. משתנה בלתי תלוי : סוג התרופה. ב. ניתוח שונות חד כיווני

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$H_1 : otherwise$$

משתנה תלוי : הזמן עד להשפעת התרופה בדקות.

ג. 1. מדגמים בלתי תלויים.

2. שווין שונויות.

3. משתנים מתפלגים נורמלית.

(2) א. המבחן לניתוח שונות חד כיוונית.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$H_1 : otherwise$$

הנחות :

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. משתנים מתפלגים נורמלית.

3. שווין שונויות.

ב. גודל המדגם : 14. משתנה ב"ת : בית הספר, בעל 3 רמות.

ג.  $\bar{X} = 71.8, \hat{S} = 12.93$  ,  $\bar{X} = 73.75, \hat{S} = 19.29$  ,  $\bar{X} = 80.4, \hat{S} = 5.46$  .

ד. להלן טבלה :

F	MS	df	SS	מקור השונות
	100.3	2	200.6	B
	173.2	11	1904.75	W
0.58		13	2105.35	סה"כ

ה.  $F > 3.98$  .

ו. נקבל את  $H_0$  .

(3) א.  $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$  . ב. נדחה את  $H_0$  . ג. כן.

$$H_1 : otherwise$$

הנחות :

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. שווין שונויות.

3. משתנים מתפלגים נורמלית.

4) נקבל את  $H_0$  : נכריע שאין הבדל מובהק בין האופים מבחינת תוחלת זמן הכנה.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 \quad (5)$$

$$H_1 : otherwise$$

הנחות :

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. שוויון שונות.

3. משתנים מתפלגים נורמלית.

נקבל את  $H_0$  : לסוג סוללה אין השפעה של תוחלת החיים ברמת ביטחון של 10%.

6) להלן טבלה :

### ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	357.450	2 ב	178.725 ג	18.36 ה	.000
Within Groups	165.5 א	17	9.735 ד		
Total	522.950	19			

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \quad (7)$$

$$H_1 : otherwise$$

הנחות :

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. משתנים מתפלגים נורמלית.

3. שוויון שונות.

נדחה את  $H_0$  : ברמת ביטחון של 5% קיים הבדל במינונים השונים מבחינת תוחלת הדופק.

$$\text{ב. ראה וידאו. ג. כן. ד. } \mu_{20} = \mu_{10} > \mu_{30} .$$

$$5 \text{ א. ב. } 25 \quad (8)$$

ג. נדחה את  $H_0$  : יש לפחות שני בתי ספר בעיר עם תוחלת רמת ציונים שונה.

$$\text{ד. } (\mu_3 = \mu_4) < (\mu_1 = \mu_2 = \mu_3) .$$

# שיטות רגרסיה

פרק 3 - ניתוח שונות דו כיווני

תוכן העניינים

- 16 ..... 1. אפקטים פשוטים, עיקריים ואינטראקציה
- 28 ..... 2. תהליך ניתוח שונות דו כיווני

## אפקטים פשוטים, עיקריים ואינטראקציה

### רקע

בניתוח שונות דו-כיווני אנו דנים במשתנה כמותי תלוי יחיד ובשני משתנים בלתי תלויים (גורמים) המחולקים כל אחד למספר רמות. מטרת המחקר היא לבדוק שלוש השערות שונות:

לגורם  $a$  אין השפעה על המשתנה התלוי:  $H_0$

אחרת:  $H_1$

לגורם  $b$  אין השפעה על המשתנה התלוי:  $H_0$

אחרת:  $H_1$

אין אינטראקציה בין שני הגורמים:  $H_0$

אחרת:  $H_1$

נרצה להבין מה בדיוק כל השערה בודקת לגבי האוכלוסייה הנחקרת.

**אפקט עיקרי:** אם יש שתי קטגוריות (רמות) לפחות של גורם מסוים שהתוחלות שלהן שונות, נאמר שלגורם זה יש השפעה על המשתנה התלוי. השפעה זאת נקראת "אפקט עיקרי". למשל, אם יימצאו לפחות שתי תרופות נוגדות דיכאון שונות שמביאות לתוחלות שונות במצב הנפשי, נגיד שלסוג התרופה יש השפעה על המצב הנפשי, כלומר יש אפקט עיקרי. כמות האפקטים העיקריים שאפשר למצוא היא כמות הגורמים במחקר.

**אפקט אינטראקציה:** מצב שבו גורם אחד משפיע על המשתנה התלוי באופן שונה בקטגוריות שונות של הגורם השני. למשל, תרופה נוגדת דיכאון אחת מביאה את הגברים למצב רוח טוב יותר מאשר את הנשים לעומת תרופה אחרת שמביאה דווקא את הנשים למצב רוח טוב יותר מאשר את הגברים. אפקט האינטראקציה הוא יחיד, כלומר נאמר אם יש או אין אינטראקציה. כמו כן הוא אפקט סימטרי: אם קיימת אינטראקציה בין מגדר לסוג התרופה, יש גם אינטראקציה בין סוג התרופה למגדר.

**אפקט פשוט:** אפקט פשוט מתייחס להשפעת גורם אחד על המשתנה התלוי בתוך קטגוריה מסוימת של הגורם השני. למשל, נרצה לבדוק רק בקטגוריה של הגברים האם קיים הבדל בין התרופות נוגדות הדיכאון. אם נמצא הבדלים כאלה נאמר שיש

אפקט פשוט של סוג התרופה בקרב אוכלוסיית הגברים. כמות האפקטים הפשוטים שאפשר למצוא היא סכום מספר הקטגוריות (רמות) של כל גורם. למשל, אם יש שלושה סוגי תרופות ושתי אפשרויות למגדר, בסך הכול נוכל לבדוק 5 אפקטים פשוטים.

### דוגמה

נבדקו שלושה סוגי דיאטות על אנשים בעלי משקל עודף. כעבור שלושה חודשים בדקו כמה קילוגרמים הפחית כל מטופל ממשקלו באותה התקופה. נניח שאנו יודעים את תוחלת הפחתת המשקל של כל דיאטה בחלוקה למגדרים.

נתאר כמה מצבים אפשריים לגבי האוכלוסייה הנחקרת וננתח כל מצב מבחינת ההשפעה של כל גורם על תוחלת המשתנה התלוי ומבחינת אפקט האינטראקציה.

שימו לב שהמצבים שנתאר להלן מתייחסים לתוחלות האמיתיות. בניתוח שונות אין לנו נתוני אמת, אלא רק נתוני מדגם, ונרצה לבדוק האם האפקטים שהתקבלו במדגם הם מובהקים, כנדרש בכל תהליך של הסקה סטטיסטית.

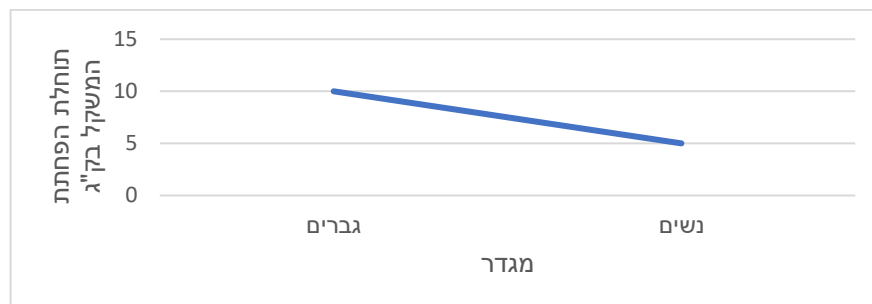
אם התוצאות שלנו יהיו ממוצעי מדגם ולא תוחלות, נוכל לבדוק אם קיימים אפקטים במדגם, אך אין זה אומר שקיימים אפקטים באוכלוסייה, כלומר לא נוכל לדעת אם האפקטים במדגם הם מובהקים. כדי לבדוק אם האפקטים הם מובהקים נצטרך לעשות את מבחן ניתוח השונות.

### מצב א:

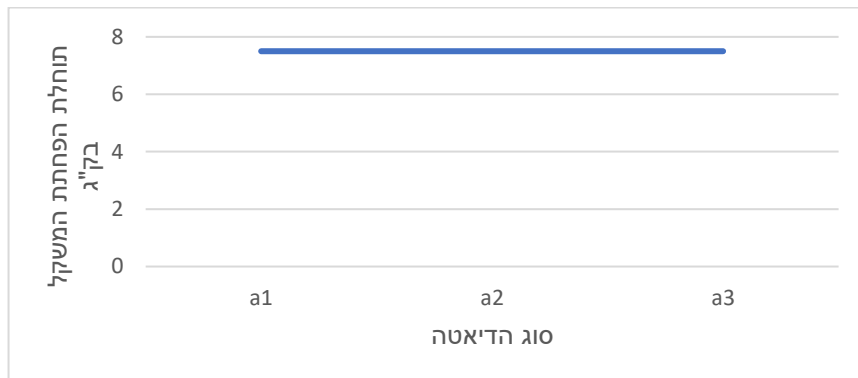
הטבלה הבאה מתארת את תוחלת הפחתת המשקל בק"ג לכל קבוצה:

נשים	גברים	
5	10	$a_1$
5	10	$a_2$
5	10	$a_3$

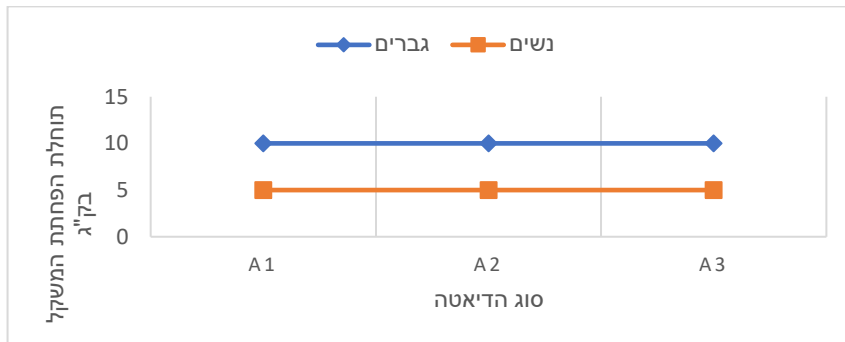
### תיאור גרפי לבדיקת אפקט למגדר



תיאור גרפי לבדיקת אפקט לסוג הדיאטה



גרף אפקטים פשוטים



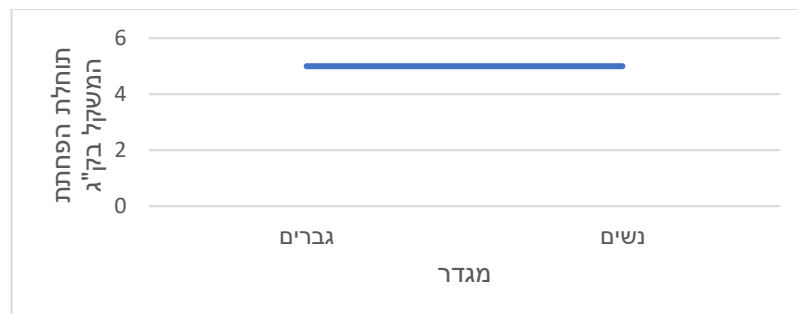
ניתוח המצב: למגדר יש אפקט, לסוג הדיאטה אין אפקט, אין אפקט אינטראקציה. הערה: אם הקווים הנוצרים בגרף האפקטים הפשוטים מקבילים או מתלכדים, אנו אומרים שאין אפקט אינטראקציה.

**מצב ב**

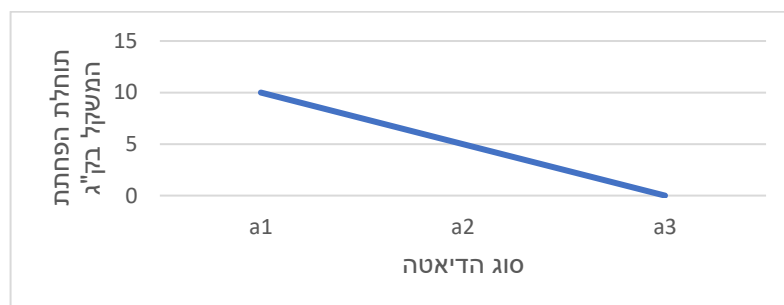
הטבלה הבאה מתארת את תוחלת הפחתת המשקל בק"ג לכל קבוצה:

נשים	גברים	
10	10	$a_1$
5	5	$a_2$
0	0	$a_3$

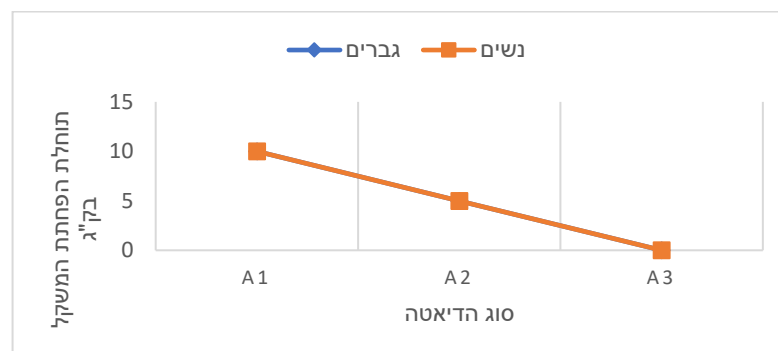
תיאור גרפי לבדיקת אפקט למגדר



תיאור גרפי לבדיקת אפקט לסוג הדיאטה



גרף אפקטים פשוטים



ניתוח המצב: למגדר אין אפקט, לסוג הדיאטה יש אפקט, אין אפקט אינטראקציה.

**מצב ג**

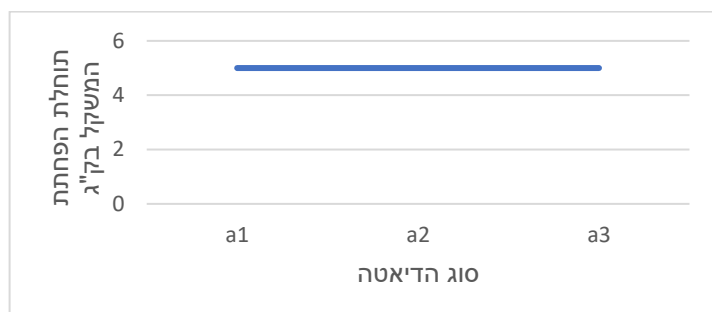
הטבלה הבאה מתארת את תוחלת הפחתת המשקל בק"ג לכל קבוצה:

נשים	גברים	
0	10	$a_1$
5	5	$a_2$
10	0	$a_3$

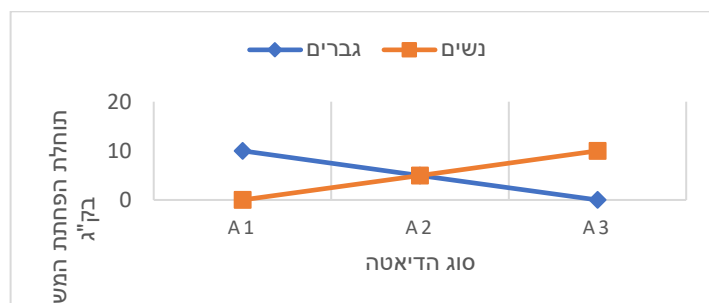
**תיאור גרפי לבדיקת אפקט למגדר**



**תיאור גרפי לבדיקת אפקט לסוג הדיאטה**



**גרף אפקטים פשוטים**



ניתוח המצב: למגדר אין אפקט, לסוג הדיאטה אין אפקט, יש אפקט אינטראקציה.

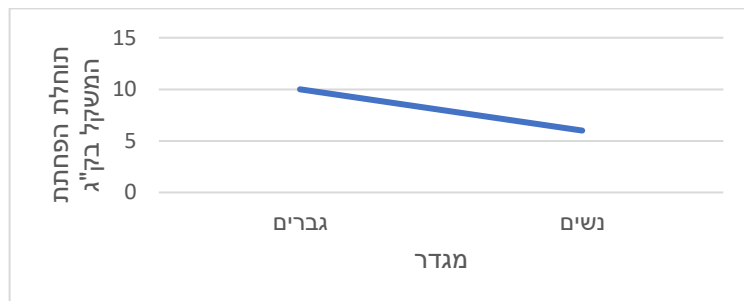
אינטראקציה דיסאורדינלית (נקראת גם "אינטראקציה מהותית"): אפשר לזהות מצב של אינטראקציה כזו באמצעות גרף של אפקטים פשוטים, כאשר נוצרים קווים נחתכים שאחד מהם עולה והאחר יורד. המשמעות היא שגורם אחד משפיע על המשתנה התלוי ברמה מסוימת של הגורם השני באופן הפוך משהוא משפיע על המשתנה התלוי ברמה אחרת של הגורם השני. במצב זה אין להתייחס לאפקטים עיקריים. יש להתייחס רק לאפקטים הפשוטים.

**מצבה**

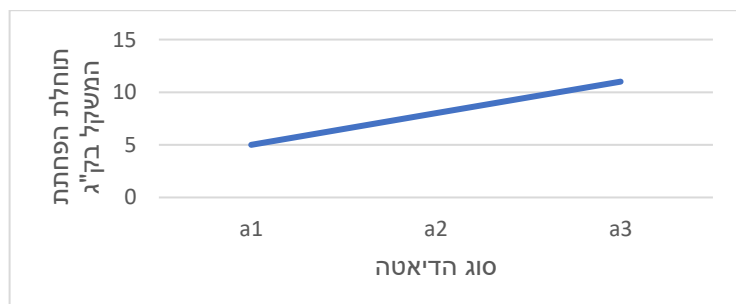
הטבלה הבאה מתארת את תוחלת הפחתת המשקל בק"ג לכל קבוצה:

נשים	גברים	
5	5	$a_1$
6	10	$a_2$
7	15	$a_3$

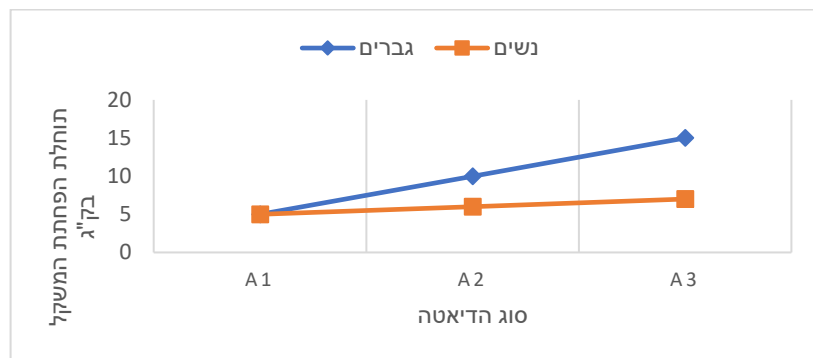
**תיאור גרפי לבדיקת אפקט למגדר**



**תיאור גרפי לבדיקת אפקט לסוג הדיאטה**



גרף אפקטים פשוטים



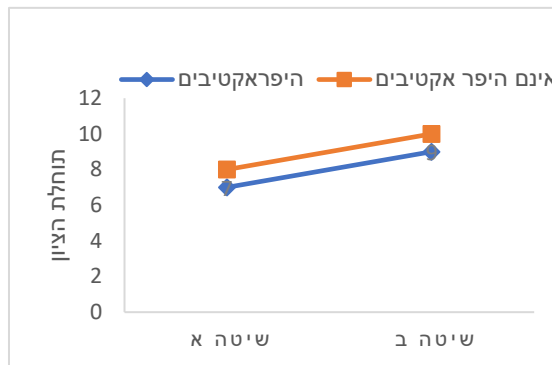
ניתוח המצב: למגדר יש אפקט, לסוג הדיאטה יש אפקט, יש אפקט אינטראקציה.

אינטראקציה אורדינלית (נקראת גם "אינטראקציה לא מהותית"): אפשר לזהות מצב של אינטראקציה כזו כאשר בגרף האפקטים הפשוטים נוצרים קווים נחתכים עם אותו הכיוון (כולם עולים או כולם יורדים אבל לא באותו השיפוע). המשמעות היא שבמעבר של גורם אחד מרמה אחת לרמה אחרת שלו הוא משפיע על המשתנה התלוי באותו אופן בכל רמה של המשתנה האחר אבל עם גודל אפקט שונה.

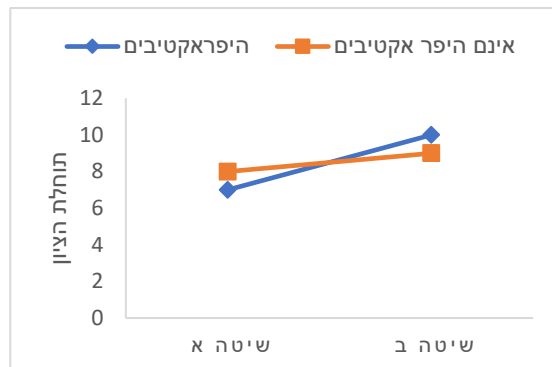
**שאלות**

1) בגני החובה יש שתי שיטות הוראה. שיטות אלו נוסו על ילדים היפראקטיביים וילדים שאינם היפראקטיביים. בתרשימים הבאים מיוצגים גרפים שמתארים את תוחלת הציון במבחן אוצר המילים שניתן לילדים בסוף השנה. בכל אחד מהמקרים יש לקבוע האם קיימת אינטראקציה בין שני הגורמים. אם קיימת אינטראקציה, יש לקבוע האם היא אינטראקציה אורדינלית או דיסאורדינלית.

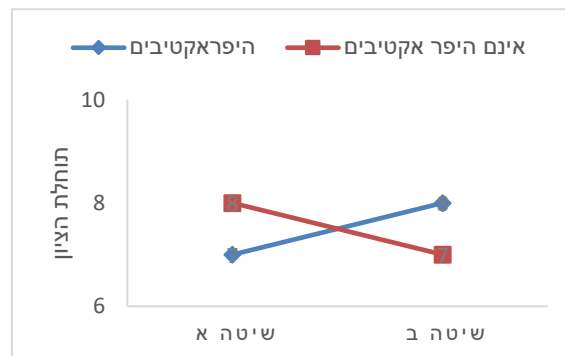
א.

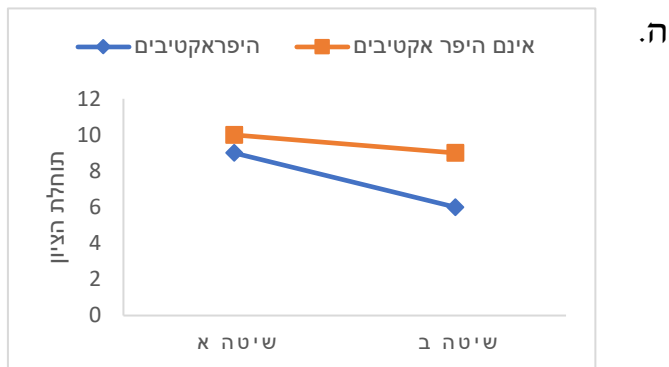
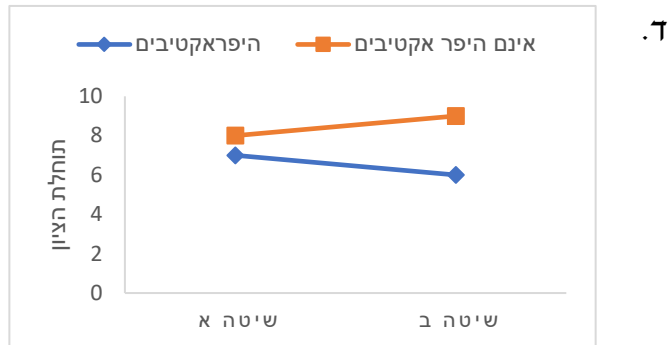


ב.



ג.





2) משרד האוצר פרסם נתונים על המחיר הממוצע של דירות גן ודירות גג של 4 חדרים ב-3 ערים בארץ. מחיר הדירות נמדד במיליוני שקלים. להלן התוצאות שהתקבלו:

דירות גג	דירות גן	
3	4	הרצליה
1	2	אשדוד
2	3	חולון

- א. מהו המשתנה התלוי ומה הם המשתנים הבלתי תלויים?
- ב. האם קיים אפקט לעיר? היעזרו בגרף מתאים.
- ג. האם קיים אפקט לסוג הדירה? היעזרו בגרף מתאים.
- ד. האם קיימת אינטראקציה בין הגורמים? אם כן, מהו סוג האינטראקציה? היעזרו בגרף מתאים.
- ה. האם יש אפקט פשוט לעיר עבור דירות גן?
- ו. האם יש אפקט פשוט לעיר עבור דירות גג?
- ז. האם יש אפקט פשוט לסוג הדירה בהרצליה?
- ח. האם יש אפקט פשוט לסוג הדירה באשדוד?
- ט. האם יש אפקט פשוט לסוג הדירה בחולון?

3) משרד החינוך פרסם נתונים על תוחלת הציונים בבחינת הבגרות באנגלית לפי עיר וסוג בית הספר (עיוני או מקצועי). להלן התוצאות שהתקבלו:

מקצועי	עיוני	
70	85	רעננה
75	75	תל אביב
85	70	פתח תקווה

- א. תארו את הנתונים באמצעות גרף אפקטים פשוטים.  
 ב. האם קיימת אינטראקציה בין הגורמים? אם כן, מה סוג האינטראקציה?  
 ג. באילו ערים קיים אפקט פשוט לסוג בית הספר?

4) משרד התחבורה פרסם נתונים על תוחלת מספר עבירות התנועה לבעלי רישיון נהיגה לפי עיר ולפי מגדר. להלן התוצאות שהתקבלו:

אישה	גבר	
1	2	חיפה
1	2	אשקלון
1	2	רמת גן

- א. האם קיים אפקט עיקרי לעיר?  
 ב. האם קיים אפקט עיקרי למגדר?  
 ג. האם יש אפקט פשוט לעיר אצל הגברים?  
 ד. האם קיימת אינטראקציה בין הגורמים? אם כן, מהו סוג האינטראקציה?

5) המשרד לאיכות הסביבה פרסם נתונים על תוחלת רמת זיהום האוויר בערים שונות בארץ בחורף ובקיץ. להלן התוצאות שהתקבלו:

חורף	קיץ	
20	20	חיפה
10	10	ירושלים
15	15	באר שבע

- א. האם קיים אפקט עיקרי לעיר?  
 ב. האם קיים אפקט עיקרי לעונה?  
 ג. האם קיימת עיר שבה יש אפקט פשוט לעונה?  
 ד. האם קיימת אינטראקציה בין הגורמים? אם כן, מה סוג האינטראקציה?

6) המשרד לאיכות הסביבה פרסם נתונים על תוחלת רמת זיהום האוויר בערים שונות בארץ בחורף ובקיץ. להלן התוצאות שהתקבלו:

חורף	קיץ	
10	10	רמת גן
10	10	גבעתיים
10	10	בת ים

האם קיים אפקט עיקרי לגורם כלשהו? האם קיימת אינטראקציה?

**בשאלות הבאות יש לבחור את התשובה הנכונה ביותר:**

7) במחקר נדגמו 5 אנשים מכל אחת מ-4 הקבוצות הבאות: 1. מתעמלים באופן קבוע ושומרים על תזונה בריאה; 2. מתעמלים באופן קבוע ולא שומרים על תזונה בריאה; 3. לא מתעמלים באופן קבוע ושומרים על תזונה בריאה; 4. לא מתעמלים באופן קבוע ולא שומרים על תזונה בריאה. להלן טבלה המסכמת את ממוצע הטריגליצרידים בדם (מ"ג לדציליטר) שנמצא בכל מדגם:

לא תזונה בריאה	תזונה בריאה	
100	90	מתעמלים
160	100	לא מתעמלים

- קיים אפקט עיקרי מובהק לגורם ההתעמלות.
- קיים אפקט עיקרי מובהק לגורם התזונה.
- קיים אפקט אינטראקציה מובהק בין שני הגורמים במחקר.
- אי אפשר לדעת אם קיים אפקט מובהק כלשהו על סמך תוצאות המדגם בלבד ללא ביצוע מבחן מתאים וללא קביעת רמת המובהקות של המחקר.

8) במחקר בדקו 3 טיפולים שונים לחולי פסוריאזיס. המחקר השווה גם בין גברים לנשים ובדק את זמן התגובה לטיפול. מסקנת המחקר הייתה שאצל גברים נמצאו הבדלים מובהקים בין הטיפולים השונים מבחינת תוחלת זמן התגובה. לאיזה סוג אפקט המסקנה מתייחסת?

- אפקט אינטראקציה.
- אפקט עיקרי של גורם המין.
- אפקט עיקרי של גורם סוג הטיפול.
- אפקט פשוט.

- 9) במחקר בדקו 3 טיפולים שונים לחולי פסוריאזיס. המחקר השווה גם בין גברים לנשים ובדק את זמן התגובה לטיפול. במדגם היה ממוצע זמן התגובה של הגברים שונה מממוצע זמן התגובה של הנשים.
- א. אפשר להגיד שבמדגם קיים אפקט עיקרי, אך אי אפשר לדעת אם האפקט העיקרי מובהק.
- ב. אפשר להגיד שבמדגם קיימת אינטראקציה, אך אי אפשר לדעת אם האינטראקציה מובהקת.
- ג. אפשר להגיד שקיים אפקט עיקרי מובהק.
- ד. אפשר להגיד שקיימת אינטראקציה מובהקת.
- 10) במחקר בדקו 3 טיפולים שונים לחולי פסוריאזיס. המחקר השווה גם בין גברים לנשים ובדק את זמן התגובה לטיפול. אחת המסקנות של המחקר הייתה שהטיפול השונים משפיעים במידה משמעותית יותר על זמן התגובה של הגברים מאשר על זה של הנשים, אם כי באותו האופן.
- א. המסקנה היא שאין אינטראקציה בין הגורמים במחקר.
- ב. המסקנה היא שיש אינטראקציה אורדינלית בין הגורמים במחקר.
- ג. המסקנה היא שיש אינטראקציה דיסאורדינלית בין הגורמים במחקר.
- ד. המסקנה היא שיש אפקט עיקרי של המגדר.

### תשובות סופיות

- 1) א. אין אינטראקציה.  
 ג. אינטראקציה דיסאורדנלית.  
 ה. אינטראקציה אורדינלית.
- 2) א. המשתנים הבי"ת: העיר, סוג הדירה. המשתנה התלוי: מחיר.  
 ב. קיים.  
 ד. לא קיים.  
 ו. קיים.  
 ח. קיים.
- 3) א. עיין בסרטון הוידאו.  
 ג. רעננה ופתח תקווה.
- 4) א. לא.  
 ג. לא.
- 5) א. כן.  
 ג. לא.
- 6) לא, לא.
- 7) ד
- 8) ד
- 9) א
- 10) ב

## תהליך ניתוח שונות דו כיווני – הליך מבחן

### רקע

כפי שכבר ציינו, ניתוח שונות דו-כיווני נעשה כאשר יש שני גורמים מחקרניים ומשתנה כמותי תלוי אחד. מטרת המחקר היא לבדוק האם הגורמים משפיעים על המשתנה התלוי. מערך מחקר זה נקרא "מערך מחקר פקטוריאלי", כיוון שאנו בונים את המחקר לפי גורמים. מערך דו-גורמי יסומן כמערך מסוג  $A \times B$ , כאשר  $A$  מייצג את מספר הרמות של גורם  $a$ , ו- $B$  מייצג את מספר הרמות של גורם  $b$ . במערך מחקרי תלת-גורמי נסמן את סוג המערך  $A \times B \times C$ , וכך הלאה.

### דוגמה

נבדקו שלושה סוגי דיאטות על אנשים בעלי משקל עודף. נבחרו 18 מטופלים בעלי משקל עודף, 9 מהם גברים ו-9 נשים. המטופלים חולקו כך שבכל דיאטה השתתפו 3 גברים ו-3 נשים. כעבור שלושה חודשים מתחילת הדיאטה נשקלו כלל המטופלים ונבדק המשקל בק"ג שהם הפחיתו. הטבלה הבאה מסכמת את המשקל שכל מטופל במדגם הפחית כעבור שלושה חודשים.

סוג הדיאטה \ מין	$b_1$	$b_2$	$b_3$	סה"כ
נשים	8	6	4	54
	4	8	6	
	0	10	8	
גברים	6	0	9	72
	10	2	12	
	14	4	15	
סה"כ	42	30	54	126

מטרת המחקר היא לבדוק האם יש השפעה של סוג הדיאטה, המין והשילוב ביניהם על ההפחתה במשקל.

- באיזה סוג מערך מחקרי מדובר?
- מהו המבחן הסטטיסטי המתאים לבדיקת ההשערות?
- מה הן השערות המחקר?

בדומה לניתוח שונות חד-כיווני גם התהליך של ניתוח שונות דו-כיווני דורש הנחות. ההנחות הן:

1.  $A \times B$  הקבוצות שנוצרות בלתי תלויות זו בזו.
2. בכל  $A \times B$  האוכלוסיות המשתנה התלוי מתפלג נורמלית.
3. בכל  $A \times B$  האוכלוסיות אותה שונות,  $\sigma^2$ .

הערה: ניתוח שונות הוא מבחן רובסטי, כלומר יש לו רגישות נמוכה להנחות. התיאוריה הסטטיסטית שפותחה התבססה על ההנחות האלה, אבל הלכה למעשה השיטה תעבוד טוב גם אם ההנחות הללו לא יתקיימו במדויק במלואן. זו הסיבה שהשיטה הזו נפוצה כל כך בעולם הסטטיסטיקה.

בהמשך לדוגמה

רשמו את כל ההנחות הדרושות לביצוע ניתוח השונות.

**הליך המבחן**

בניית טבלת ממוצעים

נבנה טבלת ממוצעים לכל רמה ולכל תא :

$\bar{X}_i$  – ממוצע המדגם ברמה  $i$  של גורם  $a$

$\bar{X}_j$  – ממוצע המדגם ברמה  $j$  של גורם  $b$

$\bar{X}_{ij}$  – ממוצע המדגם בתא  $ij$

**בהמשך לדוגמה**

- מלאו את טבלת הממוצעים הבאה :

סוג הדיאטה \ מין	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\bar{X}_i$
נשים				
גברים				
$\bar{X}_j$				

- שרטטו גרפים מתאימים לבדיקת אפקטים עיקריים ולבדיקת אינטראקציה במדגם. האם אפשר להגיד שיש אפקט מובהק?

**בניית טבלת ריבועי הפרשים מהממוצעים**

נמלא את הטבלה הבאה. בתוך תא  $ij$  נחשב:  $(\bar{X}_{ij} - \bar{X}_i - \bar{X}_j + \bar{X})^2$

**בהמשך לדוגמה**

- מלאו את טבלת הפרשי הממוצעים:

<div style="text-align: center;">                 סוג הדיאטה             </div>				
	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$(\bar{X}_i - \bar{X})^2$
מין				
נשים				
גברים				
$(\bar{X}_j - \bar{X})^2$				

**חישוב סכום ריבועי הסטיות מהממוצע**

מתוך טבלת ריבועי הסטיות מהממוצע נחשב את סכום ריבועי הסטיות מהממוצע הבאים :

הסימון  $SS$  הוא ראשי התיבות של "sum of squares" (סכום הריבועים).

סכום ריבועי הסטיות מהממוצע של גורם  $a$  :  $SS_a = m \cdot B \sum_{i=1}^A (\bar{X}_{.i} - \bar{X})^2$

סכום ריבועי הסטיות מהממוצע של גורם  $b$  :  $SS_b = m \cdot A \sum_{j=1}^B (\bar{X}_{.j} - \bar{X})^2$

סכום ריבועי הסטיות של האינטראקציה :  $SS_{ab} = m \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^B (\bar{X}_{ij} - \bar{X}_{.i} - \bar{X}_{.j} + \bar{X})^2$

סכום ריבועי השגיאות (סכום ריבועי הסטיות של התצפיות בתא מהממוצע בתא) :

$$SS_W = \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^B \sum_{k=1}^m (X_{ijk} - \bar{X}_{ij})^2 = (m-1) \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^B S_{ij}^2$$

סכום ריבועי הסטיות של כלל התצפיות מהממוצע הכללי :

$$SS_T = \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^B \sum_{k=1}^m (X_{ijk} - \bar{X})^2 = (n-1) \cdot S^2$$

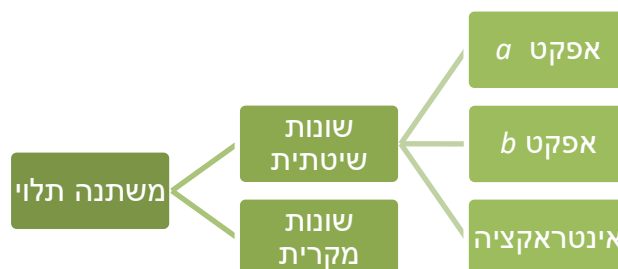
הקשר המתמטי בין סכום הריבועים הללו הוא :

$$SS_T = SS_a + SS_b + SS_{ab} + SS_W$$

לכן אין אנו צריכים לחשב את כל חמשת המרכיבים הללו.

החלק הזה של הנוסחה מתייחס לשונות השיטתית :  $SS_a + SS_b + SS_{ab}$ . השונות השיטתית היא שונות שמקורה בגורמים עצמים.

החלק הזה של הנוסחה מתייחס לשונות המקרית :  $SS_W$ . השונות המקרית היא שונות שנקראת גם "שונות טעויות" או "שונות בתוך הקבוצות". זוהי שונות בין התצפיות שאינה נובעת מהגורמים הנחקרים. האות  $W$  מייצגת את המילה "Within", כלומר שונות בתוך התאים.



בהמשך לדוגמה

- חשבו את ריבועי הסטיות הבאים :

$$SS_a =$$

$$SS_b =$$

$$SS_{ab} =$$

$$SS_T =$$

$$SS_w =$$

**חישוב ממוצע ריבועי הסטיות וסטטיסטי המבחן**

MS הוא הסימון של ממוצע ריבועי הסטיות (Mean Square) שמהווה אומד לשונות של כל גורם. החישוב ייעשה על ידי חלוקת ה-SS המתאים בדרגות החופש המתאימות. לאחר מכן נחשב שלושה סטטיסטי מבחן, בהתאם לשלוש ההשערות הנבדקות.

נרכז את כלל החישובים הללו בטבלה הנקראת טבלת ניתוח שונות, ANOVA (Analysis of Variance).

מקור השונות Source of Variation	דרגות החופש Degrees of Freedom	סכום ריבועי הסטיות מהממוצע Sum of Squares	ממוצע ריבוע הסטייה Mean Square	F
<i>a</i>	$A - 1$	$SS_a$	$MS_a$	$F_a = MS_a / MS_w$
<i>b</i>	$B - 1$	$SS_b$	$MS_b$	$F_b = MS_b / MS_w$
<i>ab</i>	$(A - 1)(B - 1)$	$SS_{ab}$	$MS_{ab}$	$F_{ab} = MS_{ab} / MS_w$
Within	$AB(m - 1)$	$SS_w$	$MS_w$	
Total	$n - 1 = ABm - 1$	$SS_T$		

בהמשך לדוגמה : מלאו את טבלת ניתוח השונות

מקור השונות Source of Variation	דרגות החופש Degrees of Freedom	סכום ריבועי הסטיות מהממוצע Sum of Squares	ממוצע ריבוע הסטייה Mean Square	F
a				
b				
ab				
Within				
Total				

**כללי ההכרעה לבדיקת ההשערות**

הסטטיסטי  $F_a$  מייצג את היחס בין השונות המדגמית של גורם  $a$  ובין השונות המקרית. לכן ככל שהערכים שלו גבוהים יותר, נרצה להגיד שלגורם  $a$  יש השפעה גדולה יותר על המשתנה התלוי.  $F_a$  יקבל ערכים גבוהים אם השונות המדגמית של גורם A תגדל או אם השונות המדגמית המקרית תקטן. הסטטיסטי מתפלג התפלגות F, ואזור הדחייה שלו יהיה בצד ימין.

- כלל ההכרעה לבדיקת המובהקות של גורם  $a$  :

דחה את השערת  $H_0$  ברמת מובהקות של  $\alpha$  אם

$$F_a > F_{1-\alpha}(df_a, df_w)$$

לפי אותו עיקרון שאר כללי ההכרעה יהיו :

- כלל ההכרעה לבדיקת המובהקות של גורם  $b$  :

דחה את השערת  $H_0$  ברמת מובהקות של  $\alpha$  אם

$$F_b > F_{1-\alpha}(df_b, df_w)$$

- כלל ההכרעה לבדיקת המובהקות של האינטראקציה :

דחה את השערת  $H_0$  ברמת מובהקות של  $\alpha$  אם

$$F_{ab} > F_{1-\alpha}(df_{ab}, df_w)$$

### בהמשך לדוגמה

רשמו את כל כללי ההכרעה המתאימים והסיקו מסקנות מתאימות ברמת מובהקות של 5%.

### הערות

1. אם מכריעים שקיימת אינטראקציה מובהקת, יש לבדוק האם היא אורדינלית או דיסאורדינלית. אם האינטראקציה דיסאורדינלית, יש לבדוק האם האפקטים העיקריים נמצאו מובהקים. אם לפחות אחד מהם נמצא מובהק נאמר שהוא אינו משמעותי כיוון שהוא נובע מהאינטראקציה בין הגורמים ולא מהגורם עצמו.
2. אם אחד מהאפקטים נמצא מובהק, אין זה אומר אילו רמות שונות זו מזו בתוחלת. למשל, אם נמצא הבדל מובהק בין סוגי הטיפולים, לא נוכל לדעת לפי זה איזה טיפול שונה מאחר באופן מובהק. לכן יש להמשיך בתהליך של השוואות מרובות כדי להסיק ממה נובע השוני.

### בהמשך לדוגמה

האם יש סיבה לבצע השוואות מרובות במחקר?

**שאלות**

1) מחקר שיווקי בדק את השפעת גובה המדף בסופרמרקט והשפעת החומר שממנו עשוי הבקבוק (זכוכית או פלסטיק) על היקף המכירות של משקאות קלים. נבדקו שני סופרמרקטים. בכל סופרמרקט נבחן כל צירוף אפשרי של גובה המדף וחומר הבקבוק, ועבור כל צירוף כזה נבדק מספר בקבוקי המשקה הקל שנמכרו באותו סופרמרקט ביום מסוים. הנה התוצאות שהתקבלו:

פלסטיק	זכוכית	סוג בקבוק
		גובה המדף
59	23	נמוך
63	32	
88	47	בינוני
90	55	
51	40	גבוה
56	48	

בצעו ניתוח שונות דו-כיווני על נתוני מחקר זה ברמת מובהקות של 5%. סכמו את המסקנות מתוך ניתוח השונות שביצעתם. מה הן ההנחות הדרושות לביצוע המבחן?

2) במחקר בתחום החקלאות נדגמו 8 חלקות אדמה : 4 חלקות בנגב ו-4 בעמק יזרעאל. בכל חלקה ההשקיה הייתה או באמצעות ממטרות או באמצעות טפטפות. בדקו את יבול העגבניות (בטונה לדונם) בכל חלקה. להלן התוצאות שהתקבלו :

מספר חלקה	מיקום החלקה	שיטת השקיה	יבול העגבניות
1	נגב	ממטרות	12
2	נגב	ממטרות	10
3	נגב	טפטפות	15
4	נגב	טפטפות	17
5	עמק יזרעאל	ממטרות	12
6	עמק יזרעאל	ממטרות	14
7	עמק יזרעאל	טפטפות	17
8	עמק יזרעאל	טפטפות	19

א. רשמו את כלל המשתנים במחקר וציינו לגבי כל אחד מהם האם הוא משתנה תלוי או בלתי תלוי.

ב. הציגו את נתוני המחקר באמצעות גרפים מתאימים. האם נראה שבמדגם יש אפקט עיקרי לכל גורם? האם יש אינטראקציה בין הגורמים במדגם? האם האפקטים מובהקים?

ג. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם האפקט העיקרי של כל גורם הוא מובהק והאם האינטראקציה היא מובהקת. מה הן ההנחות הדרושות?

3) חברה לייצור מוצרי שיער פיתחה נוסחה חדשנית לצבע לשיער שאינו דורש תוספת חמצן בעת תהליך הצביעה. החברה השוותה את צבע השיער החדש לצבע השיער הרגיל מבחינת כושר הכיסוי וזאת על שלושה סוגי שיער: בהיר, כהה ושיבה. ציון רמת הכיסוי הוא משתנה שמתפלג נורמלית עם שונות קבועה לכל סוג שיער ולכל סוג צבע. לכל קבוצה של סוג צבע וסוג שיער נדגמו 4 צביעות שנוסו על אנשים שונים, וניתן ציון מספרי על רמת הכיסוי. להלן סיכום תוצאות המדגם שהתקבלו:

שונות	ממוצע	הקבוצה
40	62	צבע רגיל על שיער בהיר
44	51	צבע רגיל על שיער כהה
42	45	צבע רגיל על שיער שיבה
46	60	צבע חדש על שיער בהיר
40	54	צבע חדש על שיער כהה
42	44	צבע חדש על שיער שיבה

בצעו ניתוח שונות דו-כיווני על הנתונים ברמת מובהקות של 5%. סכמו את כל המסקנות המתקבלות.

4) בוצע ניתוח שונות על נתונים. במערך המחקרי לגורם  $a$  יש 4 רמות ולגורם  $b$  יש 3 רמות. נערכו 3 תצפיות לכל אחת מ-12 הקבוצות שנוצרו. להלן טבלת ניתוח שונות דו-גורמי שבוצע:

מקור השונות	$df$	SS	MS	F
$a$	?	318	?	?
$b$	?	?	?	?
אינטראקציה	?	190	?	?
W	?	156	?	
T	?	674		

א. מלאו את כל התאים בטבלה המסומנים בסימני שאלה.

ב. בצעו את הבדיקות הבאות ברמת מובהקות של 5%:

- i. האם האינטראקציה מובהקת?
- ii. האם גורם  $a$  משפיע על המשתנה התלוי הנחקר?
- iii. האם לגורם  $b$  יש לפחות שתי רמות עם תוחלות שונות?

5) במחקר בדקו האם ארץ מוצא ומגדר של אדם משפיעים על שנות ההשכלה שלו. הנתונים סוכמו בטבלת ניתוח שונות:

מקור השונות	df	SS	MS	F
ארץ מוצא	4	34		
מגדר			2	
אינטראקציה		18	4.5	
W	10	12		
T				

- א. כמה ארצות מוצא נבדקו במחקר זה?
- ב. מהו גודל המדגם הכולל במחקר זה?
- ג. חשבו את ערכי F הסטטיסטי עבור ארץ המוצא, המגדר והאינטראקציה.
- ד. מה הם האפקטים המובהקים במחקר זה ברמת מובהקות של 5%?

6) בטבלה הבאה מסוכמים הממוצעים של מערך מחקרי דו-גורמי עם משתנה כמותי תלוי:

	$b_1$	$b_2$	$b_3$
$a_1$	8	14	11
$a_2$	6	13	16

מספר התצפיות בכל תא הוא 5.  
הטבלה הבאה היא טבלה מסכמת של ניתוח השונות על סמך נתוני מחקר זה:

מקור השונות	df	SS	MS	F
$a$				
$b$		281.7		
$ab$		71.7		
W		190.1		
T				

- א. מלאו את טבלת ניתוח השונות.
- ב. הסיקו מסקנות ברמת מובהקות של 5%.
- ג. שרטטו גרף אינטראקציות והסבירו את משמעות הממצאים.

### תשובות סופיות

- 1) עיין בסרטון הוידאו.
- 2) א. משתנים ב"ת: מיקום החלקה, שיטת השקיה. משתנה תלוי: יבול בטונה לדונם.  
ב. עיין בסרטון הוידאו.  
ג. עיין בסרטון הוידאו.
- 3) עיין בסרטון הוידאו.
- 4) א. עיין בסרטון הוידאו. ב. i. כן. ii. כן. iii. לא.
- 5) א. 4. ב. 20. ג. עיין בסרטון הוידאו.
- 6) א. עיין בסרטון הוידאו. ב. עיין בסרטון הוידאו. ג. עיין בסרטון הוידאו.

# שיטות רגרסיה

פרק 4 - אומדי הריבועים הפחותים

תוכן העניינים

1. כללי ..... 42

## אומדי הריבועים הפחותים:

**רקע:**

Ordinary Least Squares (OLS) – שיטת האמידה של  $\alpha$  ושל  $\beta$  לקבלת אומדים  $\hat{\alpha}$  ו- $\hat{\beta}$  שיביאו למינימום את סכום ריבועי טעויות האמידה:

$$\min_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \sum \hat{u}_t^2 = \min_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \sum (y_t - \hat{y}_t)^2 = \min_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \sum \left[ y_t - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_t) \right]^2 = ?$$

מתוך גזירת הפונקציה הזו מתקבלים האומדים  $\hat{\alpha}$  ו- $\hat{\beta}$ .

מודל רק עם חותך $Y_t = \alpha + u_t$	מודל ללא חותך $Y_t = \beta X_t + u_t$	מודל עם חותך ושיפוע $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$	
$\hat{\alpha} = \bar{Y}$	$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^T X_t Y_t}{\sum_{t=1}^T X_t^2}$	$\hat{\beta} = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2}$ $= \frac{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})Y_t}{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2}$ $\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X}$	חישוב האומדים
$E(\hat{\alpha}) = \alpha$	$E(\hat{\beta}) = \beta$	$E(\hat{\beta}) = \beta$ $E(\hat{\alpha}) = \alpha$	תוחלת האומדים
$V(\hat{\alpha}) = \frac{\sigma_u^2}{T}$	$V(\hat{\beta}) = \frac{\sigma_u^2}{\sum_{i=1}^T X_i^2}$	$V(\hat{\beta}) = \frac{\sigma_u^2}{S_{XX}}$ $V(\hat{\alpha}) = \sigma_u^2 \left( \frac{1}{T} + \frac{\bar{X}^2}{S_{XX}} \right)$	שונות האומדים

"המשוואות הנורמליות" מתקבלות בתהליך הגזירה של פונקציית הריבועים הפחותים וחייבות להתקיים על מנת שהפונקציה תתקיים  $(\sum \hat{u}_t^2 = \min)$ :

עבור המודל הקלאסי (עם חותך):

$$\sum \hat{u}_t = 0 \quad \text{א. גזירה של } \alpha$$

$$\sum \hat{u}_t \cdot x_t = 0 \quad \text{ב. גזירה של } \beta$$

עבור מודל ללא חותך:

$$\sum \hat{u}_t \cdot x_t = 0 \quad \text{בגזירת } \beta \text{ בלבד.}$$

מן המשוואות הנורמליות נובעות:

1. התכונות הגיאומטריות:

$$\text{א. } \sum \hat{u}_i = 0$$

$$\text{ב. } \sum x_i \hat{u}_i = 0$$

- ברגרסיה ללא שיפוע מתקיימת רק התכונה הגיאומטרית הראשונה. ברגרסיה ללא חותך מתקיימת רק התכונה הגיאומטרית השנייה.

2. התכונות האלגבריות:

$$\text{א. } \text{cov}(x_i, \hat{u}_i) = 0$$

$$\text{ב. } \text{cov}(\hat{y}_i, \hat{u}_i) = 0$$

$$\text{ג. } \bar{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \bar{x} = \bar{\hat{y}}$$

- התכונות האלגבריות תקפות עבור קו הרגרסיה הקלאסי (עם חותך ושיפוע) במדגם בלבד.

**ההנחות הקלאסיות של מודל הרגרסיה:**

1. קיים קשר ליניארי בין המשתנה המוסבר למשתנה המסביר.

$$2. X \text{ איננו קבוע: } S_{XX} = \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2 \neq 0$$

3. תוחלת ההפרעה האקראית היא אפס לכל תצפית:  $E(u_t) = 0$  לכל  $t$ .

4.  $X_t$  אינם משתנים מקריים  $\Leftrightarrow$  ניתן להוציא אותם מחוץ לתוחלת ולשונוות  $\Leftrightarrow$

$$\text{cov}(X_t, u_t) = 0$$

5. הומוסקדסטיות: שונות ההפרעה האקראית קבועה לכל תצפית:

$$V(u_t) = \sigma_u^2 \text{ לכל } t.$$

6.  $u_t$  ב"ת:  $\text{cov}(u_t, u_s) = 0$  לכל  $t \neq s$ .

7. ההפרעות האקראיות מתפלגות נורמלית:  $u_t \approx N$ .

### תכונות האומדים:

אומדי הריבועים הפחותים הם לינאריים, חסרי הטיות, יעילים ועקיבים.

1. לינאריות:

ארי"פ ניתנים להצגה כטרנספורמציה לינארית של  $Y_t$ .

כדי ש- $\hat{\beta}$  למשל, יהיה אומד לינארי צריך להתקיים:  $\hat{\beta} = \sum W_t \cdot Y_t$ .

כאשר  $W_t$  היא קומבינציה של ערכי  $X$  בדרך כלל. למשל:  $\hat{\beta} = \frac{\sum X_t \cdot Y_t}{\sum X_t^2}$ .

כדי להביא את האומד לצורה:  $\tilde{\beta} = \sum w_t \cdot y_t$  נעזר בשוויון:  $\frac{\sum 0}{\sum 0} = \sum \frac{0}{\sum 0}$ .

אומד זה ניתן להצגה בצורה הבאה:

$$\hat{\beta} = \sum \frac{X_t}{\sum X_t^2} Y_t = \sum W_t \cdot Y_t$$

$$W_t = \frac{X_t}{\sum X_t^2}$$

לפיכך מדובר באומד לינארי.

• שימו לב כי:

$W_t$  אסור שיכלול את  $Y_t$ .

$Y_t$  אסור שיהיה במכנה או בשורש/חזקה (אלא אם כן במודל הנתון הוא מצוי בשורש/חזקה).

2. חוסר הטייה :

אומד  $\hat{\theta}$  מסוים יהווה אח"ה לפרמטר  $\theta$  אותו הוא אומד באוכלוסייה אם מתקיים:  $E(\hat{\theta}) = \theta$ .

כיצד יודעים אם אומד הוא חסר הטייה?

1. בשלב הראשון יש לבצע עבודת הכנה – מבטאים את האומד באמצעות הפרמטר האמיתי – מציבים במקום ה- $Y_t$  את המודל ומפתחים אלגברית.

• יש לזכור כי:

$$y_t = \alpha + \beta x_t + u_t$$

מהווים משתנים מקריים  $\Leftrightarrow$  נשארים בתוך התוחלת, השונות וה- $\sum$ .

$x_t$  איננו משתנה מקרי (על פי הנחה מס' 4)  $\Leftrightarrow$  יוצא מחוץ לתוחלת ולשונות אך נשאר בתוך ה- $\sum$  ו- $\frac{\alpha}{\beta}$  קבועים  $\Leftrightarrow$  יוצאים מחוץ לתוחלת, לשונות ול- $\sum$ .

2. בשלב השני מפעילים תוחלת על האומד המפותח ואם התוחלת שווה לפרמטר האמיתי אז האומד חסר הטייה.

• חוסר הטייה מחייב את התקיימותן של הנחות (3)  $E(u_t) = 0$  לכל  $t$  ו- (4)  $\text{cov}(X_t, u_t) = 0$ .

3. יעילות :

יעילות פירושה השונות הקטנה ביותר. ככל שהשונות של האומד קטנה יותר, כך יש הסתברות גבוהה יותר שהוא יהיה קרוב לפרמטר האמיתי באוכלוסייה אותו הוא אומד.

$\hat{\theta}_1$  יקרא אומד יעיל יותר מ- $\hat{\theta}_2$  אם מתקיים שהשונות שלו קטנה יותר:  $V(\hat{\theta}_1) < V(\hat{\theta}_2)$ .

משפט גאוס מרקוב – אר"פ הם בעלי השונות הנמוכה ביותר בקבוצה שלהם (קבוצת האומדים הלינאריים חסרי ההטייה), והם נקראים: B.L.U.E. (Best Linear Unbiased Estimation).

כיצד מחשבים שונות של אומד?

חייבות להתקיים הנחות (4)  $\text{cov}(X_t, u_t) = 0$ , (5)  $V(u_t) = \sigma_u^2$  לכל  $t$

ו-(6)  $\text{cov}(u_t, u_s) = 0$  לכל  $t \neq s$ . אם הן מתקיימות, מחשבים את השונות של האיברים המכילים את  $u_t$  מהפיתוח הקודם (לפי כללי הסיגמא והשונות).

4. עקיבות:

ככל שהמדגם יגדל כן יתקרב האומד לערך האמיתי של הפרמטר. אם נגדיל את המדגם לאינסוף תצפיות ונחשב את האומד, הוא יהיה שווה

$$\left( \hat{\theta} \rightarrow \theta \right) \\ \left( T \rightarrow \infty \right)$$

לפרמטר האמיתי באוכלוסייה:

תנאי הכרחי לעקיבות:

האומד חייב להיות פונקציה של גודל המדגם. במילים אחרות, האומד צריך להיות מושפע מגודל המדגם. ברגע שהאומד עונה על תנאי זה הוא יהיה עקיב. אומד המחושב במדגם סופי בהגדרה לא יוכל להיות עקיב לפרמטר באוכלוסייה.

### סיכום: השלבים להוכחת התכונות:

1. הוכחת ליניאריות.

2. הכנת האומד  $\Leftarrow$  להציב במקום  $Y_t$  את המודל האמיתי.

במודל עם חותך:  $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ .

במודל ללא חותך:  $Y_t = \beta X_t + u_t$ .

3. פיתוח האלגברה.

4. חישוב תוחלת, שונות, עקיבות.

- ליניאריות מהווה תנאי הכרחי לחוסר הטיה.
- ליניאריות וחוסר הטיה מהוות תנאי הכרחי לבחינת היעילות של האומד לפי משפט גאוס-מרקוב.
- עקיבות איננה תלויה בתכונות האחרות, אלא רק בהיותו של האומד פונקציה של גודל המדגם (לא מחושב על מדגם סופי). כך שאומד לא חייב להיות ליניארי או חסר הטיה כדי להיות עקיב.
- העקיבות משפיעה על היעילות של האומד. עבור אומדים התלויים בגודל המדגם: ככל שגודל המדגם גדול יותר כך שונות האומד קטנה והאומד יהיה יעיל יותר לפרמטר באוכלוסייה.

## שאלות:

## גזירת ארפ:

- (1) כלכלן החליט לאמוד את המודל:  $y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$ .
- א. נסחו את בעיית ה-OLS.
- ב. מצאו את תנאי סדר ראשון של בעיית ה-OLS (המשוואות הנורמאליות).
- ג. מצאו נוסחה לקבלת האומדים:  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ .
- ד. הוכיחו כי קו הרגרסיה עובר דרך נקודת הממוצעים  $(\bar{X}, \bar{Y})$ .
- ה. בהנחה והיינו בוחרים אומד אחר ל- $\beta$  שאינו אומד הריבועים הפחותים, מה היה יחס הביטויים:  $\sum e_i$  ו- $\sum e_i^2$  של אומד זה ביחס לאומד הריבועים הפחותים?

- (2) כלכלן החליט לאמוד את המודל:  $y_i = \beta x_i + u_i$ .
- א. נסחו את בעיית ה-OLS.
- ב. מצאו את תנאי סדר ראשון של בעיית ה-OLS.
- ג. מצאו נוסחה לקבלת  $\hat{\beta}$ .
- ד. הוכיחו כי קו הרגרסיה אינו עובר דרך נקודת הממוצעים  $(\bar{X}, \bar{Y})$ .
- ה. מהו התנאי שבו אומד הריבועים הפחותים שמצאתם בסעיף ג' יהיה זהה לנוסחה של אומד הריבועים הפחותים שנמצא בשאלה הקודמת (במודל עם חותך)?

- (3) חוקר רצה לחקור האם ציוני IQ משפיעים על הציון באקונומטריקה ולכן אסף תצפיות מ-5 סטודנטים:

SCORE	IQ	$e_i$
80	100	1
75	110	-1
80	110	1
90	103	2
85	102	-3

איזה מבין המודלים הבאים נאמד?

א.  $\hat{score}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \cdot IQ_i$

ב.  $\hat{score}_i = \hat{\beta} \cdot IQ_i$

ג.  $\hat{score}_i = \hat{\alpha}$

ד.  $\hat{score}_i = \bar{y}$

- (4) נבדק הקשר שבין שכר לשעה שעובד מסוים מרוויח אצל מעסיק מסוים ( $X$ ) לבין כמות העובדים שמועסקים אצל אותו מעסיק ( $Y$ ) (הניחו שכר שווה בין העובדים אצל אותו המעסיק). לשם כך נדגמו 10 מעסיקים באופן מקרי ונתקבלו התוצאות הבאות:

$$\bar{x} = 35$$

$$\bar{y} = 5.8$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 19,100$$

$$\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 440$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 2858.85$$

מהי תחזית כמות העובדים המועסקים אצל מעסיק מסוים המשתכרים 25 ₪ לשעה?

- (5) כלכלן החליט לאמוד את המודל:  $y_i = \alpha + u_i$ .  
 א. נסחו את בעיית ה-OLS.  
 ב. מצאו את תנאי סדר ראשון של בעיית ה-OLS.  
 ג. מצאו נוסחה לקבלת  $\hat{\alpha}$ .
- (6) חוקר רצה לבדוק את המודל:  $y_i = \hat{\beta}x_i + u_i$  כאשר המשתנה התלוי הוא הציון במקרו והב"ת הוא ציוני IQ. לשם כך אסף תצפיות של 5 סטודנטים:

SCORE	IQ	ציון חזוי	$e_i$
80	100		
90	110		
95	110		
92			5
	102		3

מאמידת הרגרסיה התקבל כי:  $\hat{\beta} = 0.85$ . השלם את התאים הריקים בטבלה.

## הנחות המודל:

(7) שכר של עובדים מנובא על ידי השכלתם במודל הבא:  $w_i = \alpha + \beta \cdot s_i + u_i$ .

א. כתבו את ההנחות הקלאסיות במונחי המשתנים של המודל הנתון והסבירו אותן.

ב. התייחסו לכל אחת מהטענות הבאות וקבעו האם היא: הנחה קלאסית / משוואה נורמאלית (או תוצאה הנובעת ממשוואה נורמאלית) / אף אחד מהשניים:

$$\text{cov}(s_i, u_i) = 0 \quad \text{i.}$$

$$E(u_i) = 0 \quad \text{ii.}$$

$$\text{cov}(u_i, u_j) = 0 \quad \text{iii.}$$

$$\bar{e} = 0 \quad \text{iv.}$$

$$\bar{w} = \bar{\hat{w}} \quad \text{v.}$$

$$\sum u_i = 0 \quad \text{vi.}$$

$$V(u_i) = \sigma_i \quad \text{vii.}$$

$$S_s^2 \neq 0 \quad \text{viii.}$$

$$\text{cov}(s, e) = 0 \quad \text{ix.}$$

$$\text{cov}(\hat{y}_i, e) = 0 \quad \text{x.}$$

(8) חוקר מעוניין לאמוד את ההשפעה של נוכחות בתרגולים על הציון בקורס אקונומטריקה. לשם כך אמד את המשוואה:  $\text{score} = \alpha + \beta \text{attendance} + u$ . הועלתה הטענה כי מודל זה אינו מקיים את הנחה מס' 4 של אי תלות בין המשתנה הב"ת לטעויות ( $\text{cov}(x_i, u_i) = 0$ ). חווה דעתך על טענה זו.

## ליניאריות:

$$(9) \quad \hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X}) Y_t}{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2} \quad \text{האם האומדן הוא ליניארי?}$$

$$(10) \quad \tilde{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^T Y_t^3 \sum_{t=1}^T X_t (Z_t + Y_t)}{\sum_{t=1}^T X_t^2} \quad \text{האם האומדן הוא ליניארי?}$$

11) כלכלן החליט לאמוד את המודל:  $y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$ . מי מהאומדים הבאים הוא ליניארי ומהן המשקולות:

א.  $\tilde{\beta} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$

ב.  $\tilde{\beta} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$

ג.  $\tilde{\beta} = \sum \left( \frac{y_i}{x_i} \right)^2$

ד.  $\tilde{\beta} = \sum \frac{Y_i}{n}$

ה.  $\tilde{\beta} = \sum \frac{X_t}{Y_i}$

ו.  $\tilde{\beta} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$

ז.  $\tilde{\beta} = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}$

חוסר הטיה:

12) נתון האומד הבא:  $\tilde{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^T X_t Y_t}{\sum_{t=1}^T X_t^2}$

האם האומד הנ"ל הוא חסר הטיה?

- א. בדוק במודל עם חותך.  
ב. בדוק במודל ללא חותך.

13) נתון המודל הבא:  $y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$ . נתון בנוסף כי האומד ל- $\beta$  הינו ליניארי וחוסר הטיה.

איזה מן הטענות מתקיימת בהכרח:

א.  $\sum w_i x_i = 1$

ב.  $\sum w_i x_i = 0$

ג.  $\sum w_i = 0$

## יעילות ועקיבות:

$$(14) \quad \tilde{\beta} = \frac{y_9 - y_5 + y_2}{x_9 - x_5 + x_2} : \beta \quad \text{כלכלן הציע את האומד הבא עבור } \beta$$

- א. בדוק האם האומד חסר הטיה עבור המודל הקלאסי.  
 ב. האם תשתנה תשובתך אם מדובר באומד ללא חותך?  
 ג. חשב את שונות האומד עבור מודל ללא חותך.

## תרגול ממבחנים:

(15) נתון המודל:  $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ ,  $T = 100$ , כאשר מתקיימות כל ההנחות הקלאסיות.

$$\tilde{\beta} = \frac{\sum_{t=51}^{100} Y_t - \sum_{t=1}^{50} Y_t}{\sum_{t=51}^{100} X_t - \sum_{t=1}^{50} X_t} : \text{נתון האומד}$$

- א. האומד  $\tilde{\beta}$  הינו אומד חסר הטיה ל- $\beta$ .  
 ב. האומד  $\tilde{\beta}$  הינו אומד עקיב ל- $\beta$ .  
 ג. האומד  $\tilde{\beta}$  הינו אומד לינארי ל- $\beta$ .  
 ד. האומד  $\tilde{\beta}$  הינו אומד יעיל ל- $\beta$ .  
 ה. השונות האמיתית של  $\tilde{\beta}$  היא?
- נכון / לא נכון
- נכון / לא נכון
- נכון / לא נכון
- נכון / לא נכון

(16) נתון המודל:  $Y_t = \beta X_t + u_t$ , כאשר כל ההנחות הקלאסיות מתקיימות. (יש לשים לב המודל ללא חותך).

$$\tilde{\beta} = \frac{\sum Y_t}{\sum X_t} : \text{נתון האומד}$$

- א. האומד  $\tilde{\beta}$  הינו אומד מוטה ל- $\beta$ .  
 ב. על סמך משפט גאוס-מרקוב ניתן להסיק כי  $\tilde{\beta}$  איננו אומד יעיל יותר מאומד הריבועים הפחותים.  
 ג. מהי השונות האמיתית של  $\tilde{\beta}$ ?
- נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת
- נכון / לא נכון / לא ניתן לדעת

17 נתון המודל:  $Y_t = \beta X_t + u_t$ , כאשר כל ההנחות הקלאסיות מתקיימות. (יש לשים לב המודל ללא חותך).

$$\tilde{\beta} = \frac{\sum X_t Y_t}{\sum (X_t - \bar{X})^2}$$

א. מהי התוחלת של  $\tilde{\beta}$ ?

ב.  $E(\tilde{\beta}) < \beta$ . נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

ג. על סמך משפט גאוס-מרקוב ניתן להסיק כי אומד הריבועים הפחותים

הינו אומד יעיל יותר מ- $\tilde{\beta}$ . נכון / לא נכון / לא ניתן לדעת

ד. מהי השונות האמיתית של האומד:  $\frac{\sum X_t Y_t}{\sum X_t^2}$ ?

18 בכל השאלות ההנחות הקלאסיות מתקיימות.

האומדים הם אר"פ, והמודל הוא:  $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ .

א.  $E(Y_t) = E(\hat{Y}_t)$ . נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

ב.  $\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X}) \bar{Y} \neq 0$ . נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

ג. אמידת המודל בשיטת הריבועים הפחותים תיתן את

התוצאה:  $\sum_{t=1}^T u_t = 0$ . נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

ד. אם נתון ש- $r_{XY} = 0.57$ , אזי  $\hat{\beta}$ :

i. הוא בהכרח שלילי.

ii. הוא בהכרח חיובי.

iii. הוא בהכרח שווה לאפס.

iv. לא ניתן לקבוע את סימנו על סמך הנתונים הקיימים.

ה. סמן את הטענה הנכונה בהכרח:

i.  $\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{Y}) \hat{u}_t = 0$

ii.  $S_{XX} = \sum_{t=1}^T X_t^2 - (T\bar{X})^2$

iii.  $\sum_{t=1}^T X_t u_t = 0$

iv. אף אחת מהטענות הנ"ל אינה נכונה בהכרח.

- ו. אומדי הריבועים הפחותים אינם חסרי הטיה, אם נתון שהשונות של  $u_t$  אינה קבועה.  
נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת
- ז. אומד חסר הטיה הוא אינו בהכרח גם אומד עקיב.  
נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } \min_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \sum [y_t - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_t)]^2 \quad \text{ב. } \hat{\alpha} \Leftarrow \sum_{i=1}^n \hat{u}_i = 0, \hat{\beta} \Leftarrow \sum_{i=1}^n \hat{u}_i x_i = 0$$

$$\text{ג. } \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} = \hat{\alpha}, \quad \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \hat{\beta} \quad \text{ד. הוכחה.} \quad \text{ה. ראה סרטון.}$$

$$(2) \quad \text{א. } \min_{\hat{\beta}} \sum [y_t - (\hat{\beta}x_t)]^2 \quad \text{ב. } \hat{\beta} \Leftarrow \sum_{i=1}^n \hat{u}_i x_i = 0$$

$$\text{ג. } \hat{\beta} = \frac{\sum y_i x_i}{\sum x_i^2} \quad \text{ד. הוכחה.} \quad \text{ה. ראה סרטון.}$$

(3) א'

(4)  $\hat{y}_i = 4.59$

$$(5) \quad \text{א. } \min_{\hat{\alpha}} \sum [y_t - (\hat{\alpha})]^2 \quad \text{ב. } \sum_{i=1}^n \hat{u}_i = 0 \quad \text{ג. } \hat{\alpha} = \bar{y}$$

(6)

SCORE	IQ	ציון חזוי	$e_i$
80	100	85	-5
90	110	93.5	-3.5
95	110	93.5	1.5
92	114	97	5
89.7	102	86.7	3

(7) א. ראה סרטון.

ב.i. הנחה, לא בהכרח מתקיים.

ii. הנחה, לא בהכרח מתקיים.

iii. הנחה, לא בהכרח מתקיים.

iv. נגזר מהמשוואה, מתקיים בהכרח.

v. נגזר מהמשוואה, מתקיים בהכרח.

vi. אף אחד מהשניים.

vii. אף אחד מהשניים.

viii. הנחה, לא בהכרח מתקיים.

ix. נגזר מהמשוואה, מתקיים בהכרח.

x. נגזר מהמשוואה, מתקיים בהכרח.

(8) ראה סרטון.

(9) כן.

(10) לא.

$$(11) \quad \text{א. ליניארי, } W_i = \frac{x_i}{\sum x_i^2} \quad \text{ב. ליניארי, } W_i = \frac{(x_i - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\text{ג. לא ליניארי.} \quad \text{ד. ליניארי, } W_i = \frac{1}{n}$$

$$\text{ה. לא ליניארי.} \quad \text{ו. ליניארי, } W_i = \frac{x_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\text{ז. ליניארי, } W_i = \frac{1}{\sum x_i}$$

$$(12) \quad \text{א. לא.} \quad \text{ב. כן.}$$

$$(13) \quad \text{א' ו-ג'.$$

$$(14) \quad \text{א. מוטה.} \quad \text{ב. חסר הטיה.} \quad \text{ג. } \sigma_u^2 \frac{1}{(x_9 - x_5 + x_2)^2}$$

$$(15) \quad \text{א. נכון.} \quad \text{ב. לא נכון.} \quad \text{ג. נכון.} \quad \text{ד. לא נכון.}$$

$$\text{ה. } V(\tilde{\beta}) = \frac{100\sigma_u^2}{\left(\sum_{t=51}^{100} X_t - \sum_{t=1}^{50} X_t\right)^2}$$

$$(16) \quad \text{א. לא נכון.} \quad \text{ב. נכון.} \quad \text{ג. } V(\tilde{\beta}) = \frac{T\sigma_u^2}{(\sum X_t)^2}$$

$$(17) \quad \text{א. } E(\tilde{\beta}) = \frac{\beta \sum X_t^2}{\sum (X_t - \bar{X})^2} \quad \text{ב. לא נכון.} \quad \text{ג. לא נכון.}$$

$$\text{ד. } \frac{\sigma_u^2}{\sum X_t^2}$$

$$(18) \quad \text{א. נכון.} \quad \text{ב. לא נכון.} \quad \text{ג. לא נכון.} \quad \text{ד. ii.}$$

$$\text{ה. i.} \quad \text{ו. לא נכון.} \quad \text{ז. נכון.}$$

# שיטות רגרסיה

פרק 5 - מודלים לא ליניאריים

תוכן העניינים

56 ..... 1. כללי

## מודלים לא ליניאריים:

רקע:

הגמישות $\left(\frac{\partial Y}{\partial X} \cdot \frac{X}{Y}\right)$ בכמה % ישתנה $Y$ אם נגדיל את $X$ ב-1%?	השינוי השולי $\left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)$ בכמה ישתנה $Y$ אם נגדיל את $X$ ביחידה?	משמעות ה- $\beta$	המודל
$\frac{\beta X}{Y}$	$\beta$	השינוי השולי אם נגדיל את $X$ ביחידה $Y$ ישתנה ב- $\beta$ יחידות	ליניארי: $Y = \alpha + \beta X + u$
$\beta X$	$\beta Y$	שיעור השינוי השולי אם נגדיל את $X$ ביחידה $Y$ ישתנה ב- $100 \cdot \beta\%$	חצי לוגריתמי: $\ln Y = \alpha + \beta X + u$ $(Y = e^{\alpha + \beta X + u})$
$\beta$	$\frac{\beta Y}{X}$	הגמישות אם נגדיל את $X$ ב-1% $Y$ ישתנה ב- $\beta\%$	לוגריתמי כפול: $\ln Y = \alpha + \beta \ln X + u$ $(Y = e^\alpha \cdot X^\beta \cdot e^u)$
$\frac{\beta}{Y}$	$\frac{\beta}{X}$	אין משמעות כלכלית אם נגדיל את $X$ ב-1% $Y$ ישתנה ב- $\beta$	לוג ליניארי: $Y = \alpha + \beta \ln X + u$ $(e^y = e^\alpha \cdot X^\beta \cdot e^u)$

- המשתנה שיש בו  $LN$  השינוי בו יהיה באחוזים.

תזכורת של חוקי לוגים:

$$LN(e^x) = X$$

$$LN(X^Y) = Y \cdot LN(X)$$

$$LN(X \cdot Y) = LN(X) + LN(Y)$$

$$LN\left(\frac{X}{Y}\right) = LN(X) - LN(Y)$$

## שאלות:

(1) על מנת לאמד את התשואה להשכלה בישראל בשנים 1948-1990 נאמדו המודלים הבאים:

$$. MWAGE_t = 139.547 + 118.628 \cdot SCL_t \quad .1$$

$$. MWAGE_t = -1445.08 + 1239.60 \cdot LN(SCL)_t \quad .2$$

$$. LN(MWAGE)_t = 5.244 + 0.778 \cdot LN(SCL)_t \quad .3$$

$$. LN(MWAGE)_t = 6.292 + 0.070 \cdot SCL_t \quad .4$$

א. הסבירו את המשמעות של  $\beta$  בכל אחד מהמודלים.

ב. חשבו את הגמישות בנקודת הממוצעים: (12.311, 1600.01) עבור כל אחד מהמודלים.

(2) נתונים תוצאות האמידה של המודלים הבאים:

$$. \hat{Y} = e^{4.5} \cdot X^{0.05} \quad .1$$

$$. \hat{Y} = e^{4.5+0.05X} \quad .2$$

$$. \hat{Y} = 4.5 + \frac{0.05}{X} \quad .3$$

$$. \hat{Y} = \frac{1}{1 + e^{4.5+0.05X}} \quad .4$$

א. כתבו את המודלים בצורה ליניארית בעזרת טרנספורמציה מתאימה.

ב. עבור כל אחד מהמודלים ערכו תחזית נקודתית עבור  $X = 6$ .

(3) נתונים המודלים הבאים עבור התוצר במשק:

$$. Q_i = AK_i^{\beta_1} e^{u_i} \quad .1$$

$$. Q_i = Ae^{\beta_1 L_i + u_i} \quad .2$$

$$. Q_i = A + K_i^{\beta_1} + e^{u_i} \quad .3$$

$$. Q_i = A + \frac{\beta_1}{L_i} + u_i \quad .4$$

$$. Q_i = A + \beta_1 \sqrt{K_i} + u_i \quad .5$$

$$. Q_i = e^{A + \beta_1 K_i + u_i} \quad .6$$

$$. Q_i = A \left( \frac{K_i}{2} + 7 \right)^{\beta_1} e^{u_i} \quad .7$$

$$. Q_i = A + \beta_1 L_i + u_i \quad .8$$

$$. Q_i = A + \beta_1 \left( \frac{K_i}{L_i} \right) + u_i \quad .9$$

כאשר:

$Q$  - הוצאות צריכה על מוצר מסוים על ידי פרט מסוים.

$A$  - הוצאות צריכה על המוצר בהינתן רמת הכנסה אפסית.

$K$  - הכנסת הפרט.

$L$  - שנות לימוד.

- א. מי מהמודלים הבאים ניתן לאמידה בשיטת OLS?
- ב. מי מבין המודלים שלא ניתנים לאמידה בשיטת OLS ניתן להביא למודל ליניארי בפרמטרים ועל כן לאמוד את הפרמטרים שלו?
- ג. עבור כל אחד מהמודלים קבעו מיהו המשתנה המוסבר ומיהו המסביר במשוואת הרגרסיה הליניארית.
- ד. עקומת אנג'ל מתארת את גמישות הצריכה של הפרט מוצר מסוים ביחס להכנסתו. איזה מהמודלים מתאים כדי לתאר את עקומת אנג'ל?

$$(4) \quad \text{נתון המודל הבא: } Q_i = \frac{A}{K_i^{\beta_1}} e^{u_i}$$

- א. האם ניתן לאמוד את המודל בשיטת OLS?
- ב. מה המשוואה שצריך לאמוד על מנת לקבל את הפרמטרים למודל זה (כלומר כיצד הופכים את המודל לליניארי בפרמטרים)?
- ג. נאמד המודל הבא:  $\ln(Q_i) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(K_i) + u_i$ , והתקבלו התוצאות הבאות:  $\hat{\alpha}_0 = 3$ ,  $\hat{\alpha}_1 = 0.8$ .
- מהם האומדנים עבור  $A$ ,  $\beta_1$ ?

- (5) נתון כי הקשר באוכלוסייה בין  $X$  ל- $Y$  נתון על ידי המודל הבא:  $\ln Y = \alpha + \beta \ln X + u$ . נתון גם כי עבור המודל הנ"ל כל ההנחות הקלאסיות מתקיימות.

$$\tilde{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^T (\ln X_t - \ln \bar{X}) \ln Y_t}{\sum_{t=1}^T (\ln X_t - \ln \bar{X})^2} : \beta \text{ עבור } \beta$$

- א. האם האומדן ליניארי?
- ב. האם האומדן חסר הטיה?
- ג. האם האומדן *blue*?
- ד. מהי שונותו?

## תשובות סופיות:

(1) א.1. השינוי השולי. ב.2. אין משמעות כלכלית. ג.3. גמישות. ד.4. שיעור השינוי השולי.

א.1. 0.912 ב.2. 0.77 ג.3. 0.778 ד.4. 0.861

(2) א.1.  $\hat{\ln}(Y) = 4.5 + 0.05 \cdot \ln(X)$  ב.2.  $\hat{\ln}(Y) = 4.5 + 0.05X$

ג.3. אין צורך. ד.4.  $\ln\left(\frac{1-\hat{Y}}{\hat{Y}}\right) = 4.5 + 0.05X$

א.1. 98.45 ב.2. 121.51 ג.3. 4.50833 ד.4. 0.00816

(3) א. מודלים: 4, 5, 8 ו-9.

ב. מודלים: 1, 2, 6 ו-7.

ג.1. מסביר:  $\ln(K_i)$ , מוסבר:  $\ln(Q_i)$  ב.2. מסביר:  $L_i$ , מוסבר:  $\ln(Q_i)$

ג.3. אינו ליניארי. ד.4. מסביר:  $\frac{1}{L_i}$ , מוסבר:  $Q_i$

ה.5. מסביר:  $\sqrt{K_i}$ , מוסבר:  $Q_i$  ז.6. מסביר:  $K_i$ , מוסבר:  $\ln(Q_i)$

ז.7. מסביר:  $K_i = \frac{K_i}{2} + 7$ , מוסבר:  $\ln(Q_i)$  ח.8. מסביר:  $L_i$ , מוסבר:  $Q_i$

ט.9. מסביר:  $\frac{K_i}{L_i}$ , מוסבר:  $Q_i$

ד. מודלים: 1 ו-7.

(4) א. לא. ב.  $\ln(Q_i) = \ln(A) - \beta_1 \ln(K_i) + u_i$

ג.  $\beta_1 = -0.8$ ,  $A = 20$

(5) א. כן. ב. כן. ג. כן. ד.  $V(\hat{\beta}) = \frac{\sigma_u^2}{SS \ln x}$

# שיטות רגרסיה

פרק 6 - רגרסיה מרובה ומולטיקוליניאריות

תוכן העניינים

1. כללי ..... 60

## הגרסיה מרובה ומולטיקולינאריות:

רקע:

מודל הרגרסיה המרובה:

$$Y_i = \alpha + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \dots + \beta_j X_{ji} + U_i$$

כאשר:

$$Y_i = \text{משתנה תלוי.}$$

$$X_{1i} \dots X_{ji} = \text{משתנים ב"ת.}$$

$$U_i = \text{טעות מקרית המקיימת את כל ההנחות הקלאסיות.}$$

$$\alpha = \text{חותך אחד שמשמעותו: הציון המנובא כאשר כל המשתנים הב"ת} = 0.$$

$$\beta_1 \dots \beta_j = \text{מקדמי השיפוע. (מס' הבטות = למספר המשתנים הב"ת במודל).}$$

משמעות מקדם השיפוע  $\beta_j$ : ההשפעה הייחודית של המשתנה הב"ת המסוים לניבוי

המשתנה התלוי, בניכוי השפעתם של כל יתר המשתנים הב"ת האחרים המצויים

במשוואת הרגרסיה.

אמידת מודל הרגרסיה המרובה:

1. שיטת הריבועים הפחותים:

$$\text{Min} \sum e_i^2 = \text{Min} \sum (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \hat{\beta}_3 X_{3i} - \dots - \hat{\beta}_j X_{ji})^2$$

מפתרון פונקציית הריבועים הפחותים נקבל את אומדי הרגרסיה:  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}_1 \dots \hat{\beta}_j$ .

2. המשוואות הנורמאליות:

$$\sum_{i=1}^n e_i = 0 \text{ בגלל שיש חותך.}$$

$$\sum_{i=1}^n e_i X_{1i} = 0 \text{ בגלל שיש את } X_{1i}.$$

$$\sum_{i=1}^n e_i X_{2i} = 0 \text{ בגלל שיש את } X_{2i}.$$

$$\text{עד } \sum_{i=1}^n e_i X_{ji} = 0 \text{ בגלל שיש את } X_{ji}.$$

דוגמא :

מקרה פרטי, מודל עם שני משתנים מסבירים :

$$.Y_i = \alpha + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + u_i$$

הנוסחאות הנורמאליות הן :

$$\sum_{i=1}^n e_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n e_i X_{1i} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n e_i X_{2i} = 0$$

מפתרון מערכת המשוואות נקבל את הנוסחאות הבאות לחישוב האומדים :

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{(r_{y1} - r_{y2} * r_{12})}{1 - r_{12}^2} \cdot \frac{\hat{s}_y}{\hat{s}_{x1}}$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{(r_{y2} - r_{y1} * r_{12})}{1 - r_{12}^2} \cdot \frac{\hat{s}_y}{\hat{s}_{x2}}$$

הערה :

ניתן לראות כי אם לא קיים מתאם בין המשתנים הבי"ת :  $r_{12} = 0$ ,

שיפועי הרגרסיה המרובה זהים לשיפועי הרגרסיה הפשוטה :

$$\hat{\beta}_1 = r_{y1} \cdot \frac{\hat{s}_y}{\hat{s}_{x1}} = \frac{\text{cov}(y, x_1)}{\text{var}(x_1)}$$

$$\hat{\beta}_2 = r_{y2} \cdot \frac{\hat{s}_y}{\hat{s}_{x2}} = \frac{\text{cov}(y, x_2)}{\text{var}(x_2)}$$

**מולטיקוליניאריות:**

מולטיקוליניאריות מתייחסת למתאם בין המשתנים המסבירים במודל.

מולטיקוליניאריות מלאה:

מתאם מלא בין המשתנים המסבירים במודל.

הדבר קורה כאשר משתנה מסביר אחד הוא קומבינציה ליניארית מלאה של

המשתנה המסביר השני:  $x_1 = a + bx_2$  (הוא קומבינציה ליניארית מלאה של  $x_2$ )

מכאן ש:  $r_{12} = 1$ .

- שימו לב כי מדובר בטרנספורמציה ליניארית ולא בטרנספורמציה אחרת (למשל  $x_1 = x_2^2$ ), אז בהכרח  $r_{12} \neq 1$ .
- מולטיקוליניאריות מלאה יכולה להיווצר גם כאשר קבוצה של משתנים מסבירים מהווה קומבינציה ליניארית מלאה של אחד המשתנים המסבירים:  $x_1 + x_2 = a + bx_3$ .

במצב של מולטיקוליניאריות מלאה אין כל השפעה של המשתנה האחד מעבר לשני ולא ניתן לאמוד את המודל שכן אר"פ אינם מוגדרים. פתרון: הורדת אחד המשתנים ואמידת המשוואה מחדש בלעדיו.

מולטיקוליניאריות חלקית:

כאשר יש מתאם גבוה מאוד (אך לא מושלם) בין 2 משתנים מסבירים במודל או בין

$$\begin{aligned} x_1 &= a + bx_2 + u_i \\ x_1 + x_2 &= a + bx_3 + u_i \end{aligned}$$

קבוצה של משתנים מסבירים:

מכיוון שיש מתאם גבוה בין המשתנים הב"ת לא נוכל לבדוד באופן מלא את ההשפעה המדויקת של כל אחד מהם על ציוני המשתנה התלוי. כל אחד מהמשתנים הב"ת "יגזול" מן ההשפעה הייחודית שיש למשתנה הב"ת השני על המשתנה התלוי, כך שבסופו של דבר, למרות שהמודל עם שני המשתנים הב"ת יהיה מובהק, התרומה הייחודית של כל משתנה ב"ת לניבוי התלוי לא תהיה מובהקת.

## שאלות:

## רגרסיה מרובה:

(1) כלכלן החליט לאמוד מודל ליניארי עם שלושה משתנים מסבירים:  $x_1, x_2, x_3$ .

$$y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + u_i$$

- א. מהי בעיית ה-OLS שעליו לפתור?  
 ב. מצאו את תנאי סדר ראשון של הבעיה.

(2) כלכלן החליט לבחון מה משפיע על שער הדולר בישראל. לכן אסף מדגם בין ארבע תצפיות חודשיות. להלן טבלה מסכמת:

טעות ( $e^i$ )	Y דולר	X <sub>1</sub> שער הריבית	X <sub>2</sub> השקעות זרים בישראל (במיליוני דולרים)	חודש
-5	3.2	3	100	אוגוסט
6	3.6	3.5	95	ספטמבר
0	3.8	3.5	90	אוקטובר
-2	3.5	3	100	נובמבר

מהו המודל אשר אותו אמד הכלכלן?

(3) הניחו כי הקשר באוכלוסייה בין  $X$  ל- $Y$  נתון ע"י המשוואה הבאה:  $Y_i = 2 + \beta_1 X_{1i} + 5X_{2i} + u_i$  וכל ההנחות הקלאסיות מתקיימות.

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{\sum X_{1i} ((Y_i - 8X_{2i} - 2) - (\bar{y} - 8\bar{X}_2 - 2))}{\sum X_{1i}^2} \quad \text{נתון האומד:}$$

- א. חשבו את תוחלת האומד.  
 ב. חשבו את שונות האומד.  
 ג. מהו היחס בין שונות האומד הנ"ל, לבין שונות אומד הריבועים הפחותים?

(4) הניחו כי הקשר באוכלוסייה בין  $X$  ל- $Y$  נתון ע"י המשוואה

$$y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + 8x_{2i} + u_i$$

הבאה:  $\sum x_{1i} = 0$ . כל ההנחות הקלאסיות מתקיימות וכן:

$$b_1 = \frac{\sum (x_{1i} - \bar{x})(y_i - 8x_{2i} - (\overline{y - 8x_2}))}{\sum (x_{1i} - \bar{x})^2}$$

א. האם האומדן חסר הטיה?

ב. מהי שונות האומדן?

### מולטיקוליניאריות:

(5) נתון המודל:  $Y_i = \alpha + \beta_1 \cdot X_{1i} + \beta_2 \cdot X_{2i} + U_i$

חוו דעתכם על הטענות הבאות (כל סעיף עומד בפני עצמו):

א. בהנחה כי מתקיים:  $X_{1i} - 2X_{2i} = 1$ ,

לא ניתן לאמוד את המודל בשיטת

הריבועים הפחותים.

נכון/לא נכון/ לא ניתן לדעת.

ב. בהנחה כי מתקיים:  $x_{1i} = x_{2i}^2$ ,

לא ניתן לאמוד את המודל בשיטת

הריבועים הפחותים.

נכון/לא נכון/ לא ניתן לדעת.

ג. הוכיחו תשובותיכם לסעיפים ב' ו-ג'.

ד. בהנחה כי מתקיים:  $r_{12} = 0.98$ ,

i. לא ניתן לאמוד את המודל

בשיטת הריבועים הפחותים.

נכון/לא נכון/ לא ניתן לדעת.

ii. איזו בעיה עלולה להיווצר

במודל ומהן השלכותיה.

(6) כלכלן אמד את המודל:  $y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + u_i$

בשל החשש ממולטיקוליניאריות בחן הכלכלן את המתאם בין כל זוג של

משתנים מסבירים וקיבל:  $r_{x_1, x_2} = 0.9$ ,  $r_{x_1, x_3} = 0.99$ ,  $r_{x_3, x_2} = 0.5$ .

לכן הסיק כי אין בעיה של מולטיקוליניאריות מושלמת במודל.

האם הוא צודק?

(7) כלכלן אמד את המודל הבא:  $\ln(Q_i) = \alpha + \beta_1 \ln(K_i) + \beta_2 \ln(K_i^2) + \beta_3 L_i^{0.5} + u_i$

האם קיימת בעיה של מולטיקוליניאריות במודל?

(8) להלן מודל של שכר  $W_i$ , כפונקציה של שנות לימוד  $S_i$  ושל גיל  $A_i$ :

$$.1 \quad W_i = \alpha + \beta_1 \cdot S_i + \beta_2 \cdot A_i + u_i$$

בנוסף למשתנים במשוואה, החליט החוקר להוסיף גם את משתנה הוותק:  $EXP_i$ . מכיוון שלא היו בידו נתונים על הוותק, החליט החוקר להעריכו עבור כל עובד על ידי הגיל של העובד פחות 24 שנים (מתוך ההנחה שהחיים המקצועיים מתחילים בגיל זה לערך).

להלן משוואה מס' 2:

$$.2 \quad W_i = \alpha + \beta_1 \cdot S_i + \beta_2 \cdot A_i + \beta_3 \cdot EXP_i + w_i$$

חווה דעתך על המשוואה השנייה.

### תשובות סופיות:

$$.1 \quad \text{א.} \quad \min \sum (y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}_1 x_{1i} - \hat{\beta}_2 x_{2i} - \hat{\beta}_3 x_{3i})^2$$

$$.2 \quad \text{ב.} \quad \sum_{i=1}^n e_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n e_i X_{1i} = 0, \quad \sum_{i=1}^n e_i X_{2i} = 0, \quad \sum_{i=1}^n e_i X_{3i} = 0$$

$$.3 \quad \text{ג.} \quad y_i = \beta_1 x_{1i} + u_i$$

$$.4 \quad \text{א.} \quad \text{לא ניתן לחשב.} \quad \text{ב.} \quad \text{ג.} \quad \text{לא ניתן לדעת.} \quad \text{ד.} \quad \text{לא נכון.} \quad \text{ה.} \quad \text{לא נכון.}$$

$$.5 \quad \text{א.} \quad \text{כן.} \quad \text{ב.} \quad \text{כן.} \quad \text{ג.} \quad \text{כן.} \quad \text{ד.} \quad \text{כן.} \quad \text{ה.} \quad \text{כן.}$$

$$.6 \quad \text{א.} \quad \text{נכון.} \quad \text{ב.} \quad \text{לא נכון.} \quad \text{ג.} \quad \text{הוכחה.} \quad \text{ד.} \quad \text{לא נכון.}$$

.ii מולטיקולינאריות חלקית.

.6 הכלכלן לא יכול להיות בטוח.

.7 כן.

.8 ראו סרטון.

# שיטות רגרסיה

פרק 7 - מבחן t

תוכן העניינים

1. כללי ..... 66

## מבחן t:

## רקע:

המבחן הסטטיסטי למובהקות מקדמי הרגרסיה.

מסקנה	כלל הכרעה לדחיית $H_0$	סטטיסטי המבחן	השערות	ניסוח	המבחן הסטטיסטי
יש/אין עדות לכך שהמשתנה הב"ת מובהק באוכי	שימוש בטבלת : T $ t_{\beta=0}  > t_{(n-K, \frac{\alpha}{2})}$ מספר = K** מקדמים (כולל חותך)	$t_{\beta=0} = \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{S_{\hat{\beta}}}$	$H_0 : \beta = 0$ $H_1 : \beta \neq 0$	האם משתנה מסביר מסוים רלוונטי למודל / משפיע על התלוי?	מובהקות השיפוע
יש/אין עדות לכך שהשיפוע חיובי/שלילי לי באוכי	שימוש בטבלת : T $t_{\beta=0} > t_{(n-K, \alpha)}$ $t_{\beta=0} < -t_{(n-K, \alpha)}$		$H_0 : \beta = 0$ $H_1 : \beta > / < 0$	האם מקדם השיפוע חיובי/שלילי באוכי?	מבחן חד צדדי לשיפוע
יש/אין עדות לכך שהשיפוע = ל-2 באוכי.	שימוש בטבלת t	$t_{\beta=2} = \frac{\hat{\beta} - 2}{S_{\hat{\beta}}}$	$H_0 : \beta = 2$ $H_1 : \beta \neq 2$	האם מקדם השיפוע = לערך מסוים (למשל ל-2)?	השיפוע = ערך מסוים באוכי
יש/אין עדות לכך שקו הרגרסיה עובר דרך ראשית הצירים	נדחה את $H_0$ : אם שימוש בטבלת : T $ t_{\alpha=0}  > t_{(n-K, \frac{\alpha}{2})}$	$t_{\alpha=0} = \frac{\hat{\alpha} - \alpha_0}{S_{\hat{\alpha}}}$	$H_0 : \alpha = 0$ $H_1 : \alpha \neq 0$	האם קו הרגרסיה יוצא מראשית הצירים?	מבחן למובהקות החותך **ניתן לבצע גם מבחן חד צדדי ושהחותך = לערך מסוים באוכי

$$P\left(\hat{\beta} - t_{\left(n-K, \frac{\alpha}{2}\right)} \cdot S_{\hat{\beta}} \leq \beta \leq \hat{\beta} + t_{\left(n-K, \frac{\alpha}{2}\right)} \cdot S_{\hat{\beta}}\right) = 1 - \alpha \quad \text{רבי"ס ל-}\beta$$

$$P\left(\hat{\alpha} - t_{\left(n-K, \frac{\alpha}{2}\right)} \cdot S_{\hat{\alpha}} \leq \alpha \leq \hat{\alpha} + t_{\left(n-K, \frac{\alpha}{2}\right)} \cdot S_{\hat{\alpha}}\right) = 1 - \alpha \quad \text{רבי"ס ל-}\alpha$$

- ניתן לבדוק השערות באמצעות הרבי"ס.  
צריך לבדוק האם הרבי"ס מכיל את הערך המבוקש לפי השערת האפס.  
אם כן – נקבל את  $H_0$  ואם לא – נדחה אותה.

### תחזית:

המטרה של קו הרגרסיה הוא ביצוע תחזיות:  
תחזית נקודתית מחושבת על פי קו הרגרסיה שאמדנו.  
נציב במקום ה-  $X$  ים ערכים נתונים ונקבל למה שווה ה-  $Y$  המנובא.

אמידת התחזית באוכלוסייה עבור ערך מסוים של  $X$  (ברגרסיה פשוטה):

$$\hat{Y} \pm t_{\left(n-2, \frac{\alpha}{2}\right)} S_u \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_f - \bar{X})^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2}}$$

$$S_u^2 = MSE = \frac{SSE}{n-2} \quad \sum (X_i - \bar{X})^2 = S_{xx} = (n-1)S_x^2$$

רישום הרבי"ס:  $p(\text{---} \leq Y \leq \text{---}) = 1 - \alpha$

התחזית מדויקת יותר (שונות התחזית קטנה יותר) כאשר:

1.  $n$  (גודל המדגם) גדול יותר.
2. שונות המשתנה המסביר  $X$  גדולה יותר.
3.  $X_f$  קרוב יותר ל-  $\bar{X}$ .
4. האומד לשונות הטעויות –  $S_u$ , קטן יותר.

מבחן t מורכב (בחינת קשרים ליניאריים בין הפרמטרים):

משמש לבדיקת השערות העוסקות בקשרים בין הפרמטרים.

כמו למשל:  $H_0: \alpha = 5\beta$  או  $H_0: \beta_1 = 2 \cdot \beta_2$ .

במקרים אלו נרשום את השערות האפס כך:  $H_0: \alpha - 5\beta = 0$  ו-  $H_0: \beta_1 - 2 \cdot \beta_2 = 0$

ונחשב את סטטיסטי המבחן t:  $t_{\hat{\alpha}-5\hat{\beta}} = \frac{(\hat{\alpha}-5\hat{\beta})-0}{S_{\hat{\alpha}-5\hat{\beta}}}$  או  $t_{\hat{\beta}_1-2\hat{\beta}_2} = \frac{(\hat{\beta}_1-2\hat{\beta}_2)-0}{S_{\hat{\beta}_1-2\hat{\beta}_2}}$

כאשר את טעות התקן של המבחן מחשבים תוך שימוש בנוסחאות:

$$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y) \pm 2 \operatorname{cov}(X, Y)$$

$$V(aX) = a^2 V(X)$$

$$\operatorname{cov}(aX, bY) = a \cdot b \cdot \operatorname{cov}(X, Y)$$

ואחר כך מוציאים לשונות שורש כדי לקבל את סטית התקן.

לשם כך יש לקבל נתונים על השונות המשותפות של הפרמטרים (cov).

## שאלות:

## מובהקות מקדמי הרגרסיה:

(1) חוקר רצה לבחון את השפעת ההכנסה ( $INCOME$ ) על גובה המס ( $TAX$ ) (במיליארדי \$) שגובה מדינה במערב לפי המודל:  $TAX_i = \alpha + \beta \cdot INCOME_i + u_i$ .

לשם כך אסף נתונים מ-51 מדינות. להלן התוצאות:

$$TAX_i = -0.086912 + 0.152232 \cdot INCOME_i$$

$$(0.01622) \quad (0.08953)$$

סטיות התקן של האומדים נתונות בסוגריים.

א. מהי המשמעות הכלכלית של  $\beta$  ושל  $\alpha$ ?

ב. האם ההכנסה משפיעה על גודל המס? בדקו ברמת מובהקות של 5%.

ג. בדקו את ההשערה כי כאשר ההכנסה אפסית, גודל המס שונה מ-0 באוכלוסייה.

ד. בדקו את ההשערה כי ככל שההכנסה עולה כך עולה גם המס ברמת מובהקות של 5% וברמת מובהקות של 1%.

ה. בנו רווח-סמך לשיפוע הרגרסיה ברמת ביטחון של 95%.

ו. בדקו את ההשערה שתוספת של מיליארד \$ להכנסה תגדיל את המס ב-0.2 מיליארד \$, ברמת מובהקות של 0.05.

(2) חוקר רצה לבדוק את השפעת הותק בעבודה ( $EXP$ ) על השכר ( $SALARY$ ) לפי

המודל:  $\ln(SALARY_i) = \alpha + \beta \cdot EXP_i + u_i$ . הוא אסף 403 תצפיות, ואמד את

הפרמטרים. להלן תוצאות האמידה:

$$\ln(SALARY)_i = 7.334 - 0.0087 \cdot EXP_i$$

$$(0.0026) \quad (0.068)$$

א. האם קיים קשר חיובי מובהק בין ותק ללוג השכר?

ב. בדוק את ההשערה כי שיעור התשואה בשכר לשנת ותק קטנה מ: -0.9.

ג. מהי תחזית השכר עבור אדם בעל 10 שנות ותק?

(3) נאמד המודל:  $Y_i = \alpha + \beta_1 X_i + \beta_2 Z_i + \beta_3 W_i + \beta_4 S_i + u_i$  והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\hat{y}_i = 5.06 + 0.97x_i + 3z_i - 5.02w_i + 8.97s_i$$

$$(0.29) \quad (0.7) \quad (0.08) \quad (0.42) \quad (0.456)$$

א. האם משתנה  $W$  רלוונטי למודל? בדקו ברמת מובהקות של 0.01.

ב. בנו רווח בר סמך להשפעת  $X$  על  $Y$ .

## תחזית:

- (4) נתונה משוואת הרגרסיה הבאה:  $\hat{y}_i = 13 + 8x_{1i} + 7x_{2i} + 2x_{3i} + 9x_{4i}$ .  
 כאשר  $y_i$  הינו סה"כ הוצאות משק בית  $i$  לחינוך לשבוע,  $x_{ji}$  הינו גילו של הילד  $j$ .  
 מה יהיה סה"כ הוצאות משק הבית אם גיל הילד הראשון הוא 2 שנים, של השני 4.5 שנים, השלישי הוא בן 5 ואילו הרביעי בן 8?

- (5) במדגם של 30 דירות המושכרות לסטודנטים ברדיוס של עד 2 ק"מ מסביב למכללה נחקר הקשר בין שכר דירה למספר הסטודנטים הגרים בדירה.

$$\hat{Y}_i = 686.207 + 233.52 \cdot X_i$$

נתון בנוסף כי:

$$S_x^2 = 1.313^2$$

$$S_u^2 = 414.055^2$$

$$\bar{x} = 3$$

- א. חשבו אומדן נקודתי לשכר הדירה אותו ישלמו סטודנטים החולקים את הדירה עם שותף אחד בלבד.  
 ב. אמוד את שכר הדירה שישלמו סטודנטים החולקים את הדירה עם שותף אחד בלבד, ברמת בטחון של 95%.

## t מורכב:

- (6) נתון המודל:  $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$  שלצורך אמידתו נאספו 240 תצפיות ונתקבל ש:

$$\hat{Y}_i = 5.25 + 0.96X_i$$

$$(0.12) \quad (0.25)$$

נתון בנוסף כי:  $\text{cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = -0.003$

יש לבדוק את ההשערה:  $H_0: \alpha = 5\beta$

- (7) על מנת לאמוד את פונקציית התצרוכת נאספו נתונים על 42 משקי בית

בשנת 2007 ונאמדה המשוואה הבאה:  $C_i = \alpha + \beta_1 \cdot W_i + \beta_2 \cdot P_i + u_i$

להלן תוצאות האמידה של המשוואה הנ"ל:

$$C_i = -107.226 + 0.743W_i + 0.561P_i$$

$$(0.4) \quad (0.0678)$$

נתון גם ש:  $\text{cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = -0.009$

יש לבדוק את ההשערה שהנטייה השולית לצרוך (נש"צ) מתוך ההכנסה זהה לנטייה השולית לצרוך מתוך ההון.

## תרגול מסכם:

(8) כלכלן בנה עבור מכבי ת"א מודל החוזה את השכר שיש לשלם לשחקן כדורסל

$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + u_i : \text{ לחוזה של שנה}$$

כאשר:

$Y$ : שכר השחקן באלפי \$.

$X_1$ : מס' נקודות שקולע השחקן בממוצע למשחק.

$X_2$ : מס' האסיסטים שיש לשחקן בממוצע למשחק.

$X_3$ : מס' הדקות שיושב שחקן על הספסל בממוצע למשחק.

הכלכלן דגם 34 משחקים וקיבל את התוצאות הבאות:

$$\hat{Y}_i = 120 + 18X_{1i} + 8X_{2i} - 22X_{3i}$$

$$(2.2) \quad (3) \quad (4.4) \quad (-5)$$

\*\*הערכים שבסוגריים הם ערכי t.

$$\text{התקבל בנוסף כי: } \text{cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = 4, \text{cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_3) = -3, \text{cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = -6$$

א. תנו פירוש למקדמי הרגרסיה.

ב. איזה מהמשתנים הב"ת רלוונטי למודל?

ג. בנו רב"ס למשתנים המובהקים.

ד. מייקל ג'ורדן הצטרף למכבי והוא דורש 2 מיליון \$ לעונה.

ידוע כי מייקל קולע 45 נקודות בממוצע למשחק, מוסר 15 אסיסטים בממוצע למשחק ויושב 5 דקות בממוצע על הספסל. כמה צריך לשלם לו?

ה. לטענת שמעון מזרחי מס' הנקודות הממוצע שקולע שחקן למשחק צריך

להשפיע פי 4 ממספר האסיסטים הממוצע שלו. האם הוא צודק?

(9) כלכלן אמד את המודל הבא:  $\ln(Q_i) = \alpha + \beta_1 \ln(K_i) + u_i$  שמתאר את הקשר

שבין צריכת מוצר מסוים להכנסת הפרט (עקומת אנג'ל):

$K$  - הכנסה חודשית באלפי שקלים.

$Q$  - צריכה שנתית באלפי שקלים.

לשם כך אסף 60 נתונים והריץ רגרסיה.

$$\text{התוצאות אשר קיבל הן: } \hat{\alpha} = 4, \hat{\beta} = -2, t_{\hat{\alpha}} = 3, t_{\hat{\beta}} = -7, \text{cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = -0.05$$

$$S_K = 1.5, S_Q = 0.05,$$

נקודת הממוצעים הינה: (6.7, 0.4).

א. הכלכלן ביקש לבדוק את ההשערה כי הגמישות במודל יחידתית ושווה ל-1.

ב. בדקו את ההשערה כי מקדם החיתוך של קו הרגרסיה הוא כפול ממקדם השיפוע.

ג. חיים משתכר בממוצע לחודש 10,000 ₪, כמה ישקיע בצריכת המוצר בשנה?

ד. בנו רב"ס לתחזית הצריכה של חיים באוכלוסייה.

## תשובות סופיות:

- (1) א. ראה סרטון. ב. כן. ג. אין עדות לכך. ד. יש עדות לכך.  
ה.  $P(0.12 \leq \beta \leq 0.184) = 0.95$ . ו. ניתן לדחות את השערת האפס.
- (2) א. לא. ב. אין עדות לכך. ג.  $\hat{Y} = 1404$ .
- (3) א. כן. ב.  $P(0.13 \leq \beta \leq 1.81) = 0.95$ .
- (4) 142.5 ש"ח לשבוע.
- (5) א. 1153.247. ב.  $P(282.94 \leq Y_{x=2} \leq 2023.55) = 0.95$ .
- (6) אין עדות לכך.
- (7) אין עדות לכך.
- (8) א. ראה סרטון. ב. כל שלושת המשתנים.
- ג.  $P(6 \leq \beta_1 \leq 30) = 0.95$ ,  $P(4.364 \leq \beta_2 \leq 11.636) = 0.95$ ,  $P(-30.8 \leq \beta_3 \leq -13.2) = 0.95$ .
- ד. 940 אלף \$. ה. כן.
- (9) א. אין עדות לכך. ב. יש עדות לכך. ג. 545 ש"ח.  
ד.  $P(-6.205 \leq Q_i \leq 7.295) = 0.95$ .

# שיטות רגרסיה

פרק 8 - מבחן F ו R בריבוע

תוכן העניינים

73 ..... 1. כללי

## מבחן F ו-R בריבוע:

רקע:

מדד  $R^2$  לטיב הרגרסיה:

מדד לפרופורציית השונות המוסברת:

$$R^2 = \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{ESS}{TSS}$$

מתבסס על הנוסחה לפירוק השונות של קו הרגרסיה:

$$TSS = RSS + ESS$$

$$\sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum e_i^2$$

תכונות  $R^2$ :

- נע בין 0 ל-1:  $0 \leq R^2 \leq 1$ .  
 כאשר  $R^2 = 1$  ההתאמה מושלמת ואין שום טעויות בניבוי במודל ואילו  
 כאשר  $R^2 = 0$  הכל טעות ואין שום הסבר במודל.
  - אר"פ מביא למקסימום את  $R^2$ .
  - לא ניתן להשוות במדד בין מודלים שבהם אין את אותו משתנה מוסבר.
  - בהוספת משתנים מסבירים נוספים למודל,  $R^2$  יכול רק לעלות או להישאר  
 ללא שינוי. זהו למעשה החיסרון הגדול של המדד.  
 כדי להתגבר על חיסרון זה קיים מדד נוסף והוא  $R_{adj}^2$  ( $R^2$  מתוקן):
- $$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n-1}{n-k}$$
- $K =$  מס' הפרמטרים במודל (כולל החותך).
  - המדד המתוקן לוקח בחשבון את מספר המשתנים הבי"ת שיש במודל ויכול  
 לרדת בהוספת משתנים למודל לכן מתקיים תמיד ש:  $\bar{R}^2 < R^2$ .
  - המדד המתוקן  $\bar{R}^2$  עדיף על המדד  $R^2$  בכדי לבחון האם כדאי לנו להוסיף  
 משתנים בי"ת למודל.

זהויות שכדאי לדעת לגבי  $R^2$  :

במודל רגרסיה פשוטה:  $y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$  מתקיים:

$$. R^2 = r_{yx}^2 \quad .1$$

$$. r_{yx} = \hat{\beta} \frac{S_x}{S_y} \quad .2$$

$$. R^2 = \hat{\beta}^2 \frac{S_x^2}{S_y^2} \quad .3$$

.4 במודלים:  $y_i = \alpha_1 + \beta_1 x_i + u_i$  מתקיים:  
 $x_i = \alpha_2 + \beta_2 y_i + \varepsilon_i$

i. הם בעלי אותו  $R^2$ .

$$. R^2 = \beta_1 \cdot \beta_2 \quad .ii$$

שימו לב:

.1 במודל ללא שיפוע:  $y_i = \alpha + u_i$ , ה- $R^2$  שווה ל-0 כי אין מקדם הסבר לרגרסיה.

.2 במודל ללא חותך:  $y_i = \beta x_i + u_i$  אין משמעות ל- $R^2$  כיוון שלא מתקיימת

המשוואה הנורמלית הראשונה:  $\sum \hat{u}_i = 0$  ולכן גם  $\bar{\hat{y}} \neq \bar{y}$  ולכן גם לא

מתקיים:  $SST = SSR + SSE$ .

## מבחן F:

משמש לבדיקת:

.1 הגבלות שונות המתקיימות במודל (מבחן WALD).

.2 מובהקות מודל הרגרסיה כולו.

**מבחן WALS:**

לבדיקת השערת אפס שיש בה מספר שוויונים (במבחן  $t$  היה רק שוויון אחד בהשערת האפס).

1. אומדים את המודל המקורי – הלא-מוגבל (Unrestricted) ומקבלים את סכום ריבועי הסטיות של הטעויות  $(\sum e_{iUR}^2)$ .

2. מגדירים את כל השוויונים של השערת האפס.

3. מציבים את השוויונים של השערת האפס במודל המקורי לקבלת המודל המוגבל (Restricted).

4. אומדים את המודל המוגבל ומקבלים את סכום ריבועי הסטיות של הטעויות  $(\sum e_{iR}^2)$ .

$$5. \text{ חישוב הסטטיסטי: } \frac{(\sum e_{UR}^2 - \sum e_R^2) / m}{\sum e_R^2 / (n-k)} \sim F_{(m, n-k, 1-\alpha)}$$

(כש-  $m$  מספר המגבלות ו-  $k$  מס' הפרמטרים במודל הלא מוגבל).

• כאשר לשתי הרגרסיות (המוגבלת והלא מוגבלת) אותו משתנה מוסבר ניתן

$$\frac{(\frac{R_2^2}{2} - \frac{R_1^2}{2}) / m}{(1 - R_2^2) / (n-k)} \sim F_{(m, n-k, 1-\alpha)} : \text{ להשתמש גם בנוסחה הבאה:}$$

$$F_{stat} > F_{(m, n-k, 1-\alpha)} : H_0$$

אם דוחים את  $H_0$  המסקנה היא שהמודל המקורי (הלא-מוגבל) הוא הרלוונטי ולהיפך.

**מבחן F למובהקות המודל:**

משמש לבדיקה האם מודל הרגרסיה שלנו לניבוי משתנה תלוי מסוים על ידי המשתנים הב"ת, מובהק באוכלוסייה.

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$$

השערות:

$$H_1 : \text{OTHERWISE}$$

U: המודל הלא מוגבל יהיה:  $Y_t = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + u_t$

R: המודל המוגבל יהיה:  $Y_t = \alpha + u_t$

$$F = \frac{\frac{R_U^2 - R_R^2}{1 - R_U^2}}{\frac{m}{n - k}} = \frac{\frac{R_U^2}{1 - R_U^2}}{\frac{k - 1}{n - k}} : m = k - 1 \text{ ו- } R_z^2 = 0$$

מאחר ו- $R_z^2 = 0$  ו- $m = k - 1$

הערה:

בדיקת מובהקות המודל ברגרסיה מרובה ניתנת לביצוע רק על ידי מבחן F מאחר ויש יותר ממגבלה אחת בהשערת האפס.

לעומת זאת בדיקת מובהקות המודל ברגרסיה חד משתנית ניתנת לביצוע גם על

ידי מבחן t שכן יש רק מגבלה אחת בהשערת האפס:  $F = t^2$ .

### לסיכום:

1. מתי נשתמש במבחן t ומתי במבחן F?

- רק t: השערות חד צדדיות (סימן אי שוויון בהשערות).
  - t או F (כאשר:  $F = t^2$ ): מגבלה אחת (שוויון אחד בלבד) בהשערת האפס.
  - רק F: כאשר יש כמה מגבלות (שוויונים) בהשערת האפס.
2. מצב של סתירה בין מבחן F למבחני t:
- כאשר המודל מובהק אולם אף אחד מהשיפועים לא יוצא מובהק – בעיה של מולטיקוליניאריות חלקית במודל (מתאמים גבוהים בין המשתנים הב"ת).

## שאלות:

## R בריבוע:

(1) דרגו את המודלים הבאים (לפי קריטריון  $R^2$ ):

1.  $y_i = \alpha + \beta x_{1i} + u_i$  .  $R^2 = 0.15$

2.  $y_i = \alpha + u_i$

3.  $y_i = \beta x_{1i} + u_i$

4.  $y_i = \alpha + \beta x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i$

5.  $y_i = \alpha + \beta_2 x_{2i} + u_i$  .  $R^2 = 0.20$

(2) על סמך מדגם של 100 תצפיות נאמדו המודלים הבאים:

1.  $\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \hat{\beta}_2 x_{2i} + \hat{\beta}_3 x_{3i}$

2.  $\hat{y}_i = \hat{\delta}_0 + \hat{\delta}_1 x_{1i} + \hat{\delta}_2 x_{2i}$  .  $R^2 = 0.70$

3.  $\hat{y}_i = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_2 x_{2i}$  .  $R^2 = 0.65$

א. שלושה חוקרים העלו טענה לגבי מקדם  $R^2$  של משוואה מס' (1):1. אי אפשר לדעת מהנתונים המובאים לעיל אם  $R^2$  של משוואה (1) הוא גדול או קטן מ-0.70.2. אי אפשר לדעת מהנתונים המובאים לעיל אם  $R^2$  של משוואה (1) הוא גדול או קטן מ-0.65.3. ניתן לצפות כי  $R^2$  של משוואה (1) יהיה גדול מ-0.70.

בהתייחס לטענות החוקרים ניתן לומר:

i. רק הטענה של חוקר 1 נכונה.

ii. רק הטענה של חוקר 2 נכונה.

iii. רק הטענה של חוקר 3 נכונה.

iv. כל הטענות שגויות.

ב. חוו דעתכם על הטענות הבאות המתייחסות ל- $\bar{R}^2$ :i. ניתן לצפות ש- $\bar{R}^2$  של משוואה (1)

יהיה גדול מ-0.7. נכון/לא נכון/ לא ניתן לדעת

ii. ניתן לצפות כי  $\bar{R}^2$  של משוואה (2)

יהיה קטן מ-0.7. נכון/לא נכון/ לא ניתן לדעת

iii. ניתן לצפות כי  $\bar{R}^2$  של משוואה (3)

יהיה קטן מ-0.7. נכון/לא נכון/לא ניתן לדעת

(3) על סמך מדגם של 80 משפחות המונות כל אחת 4 ילדים, נאמדו המשוואות הבאות:

$$. R^2 = 0.77 \quad \hat{y}_i = 5 + 2x_{1i} + 2x_{2i} \quad .1$$

$$. R^2 = 0.62 \quad \hat{y}_i = 24 + 0.8x_{1i} \quad .2$$

$$. R^2 = 0.25 \quad \hat{y}_i = 14 + 0.7x_{2i} \quad .3$$

$$. R^2 = 0.30 \quad \hat{y}_i = 4 + 0.5w_i \quad .4$$

$$. R^2 = 0.45 \quad \hat{\ln}(y)_i = 7 + 0.9x_{1i} + 0.6x_{2i} \quad .5$$

$$. \hat{\ln}(y)_i = 11 + 0.7x_{1i} + 0.9x_{2i} + 0.6x_{3i} \quad .6$$

$$. \hat{y}_i = 13 + 8x_{1i} + 7x_{2i} + 2x_{3i} + 9x_{4i} \quad .7$$

כאשר  $y_i$  הינו סה"כ הוצאות משק בית  $i$ ,  $x_{ji}$  הינו גילו של הילד  $j$ , ונתון

$$. w_i = 2x_{3i} + x_{1i} - x_{2i} \quad . \text{כי}$$

דרגו את הרגרסיות לפי קריטריון  $R^2$  (הימני עדיף על השמאלי).

(4) נתונות שתי המשוואות הבאות:  $y_i = 58 + b_1x_i + e_{1i}$  ו-  $x_i = a_2 - 0.2y_i + e_{2i}$ ,

כאשר:  $\bar{y} = \bar{x} = 40$ . למה שווה מקדם המתאם של פירסון בין  $X$  ל-  $Y$ ?

א. 0.09

ב. 0.69

ג. 0.3

ד. 0.72

ה. אף תשובה לא נכונה.

(5) נתון מודל רגרסיה:  $y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$ .

הוכיחו כי:  $SST = SSR + SSE$ .

## מבחן F:

(6) נאמד המודל:  $Y_t = \alpha + \beta_x X_t + \beta_z Z_t + \beta_w W_t + \beta_s S_t + u_t$  והתקבל

כי:  $\sum e^2 = 620.1683$  וכי:  $R^2 = 0.99$ .

הועלתה ההשערה כי ההשפעה על  $Y$  של משתנה  $S$  היא פי 3 מזו של משתנה  $Z$ , וכן כי החותך הוא 5.

א. מהי השערת האפס?

ב. מהו המודל המוגבל שאותו צריך לאמוד?

מאמידת המודל המוגבל התקבל כי:  $\sum e^2 = 623.99$  וכי:  $R^2 = 0.99$ .

ג. חשב את הסטטיסטי של W.L.D.

ד. כמה דרגות חופש יש במונה וכמה במכנה?

ה. האם דוחים או מקבלים את השערת האפס?

(7) במדגם של 82 תצפיות התקבל:  $y_i = 12 + 3x_{1i} + 4x_{2i} + e_i$   $R^2 = 0.73$ .

א. בחנו את ההשערה כי:  $H_0: \beta_2 = 0$

$H_1: \beta_2 \neq 0$

כאשר נתון כי לאחר אמידת המודל המוגבל התקבל כי:  $R^2 = 0.6$ .

ב. חשבו את  $S_{\hat{\beta}_2}$ .

(8) על מנת לאמוד את פונקציית התצרוכת נאספו נתונים על 42 משקי בית

בשנת 2007 ונאמדה המשוואה הבאה:  $C_i = \alpha + \beta_1 \cdot W_i + \beta_2 \cdot P_i + u_i$ .

מתוצאות האמידה של המשוואה הנ"ל התקבל כי:  $\sum e^2 = 52968$ .

על מנת לבדוק את ההשערה שהנטייה השולית לצרוך (נש"צ) מתוך

ההכנסה זהה לנטייה השולית לצרוך מתוך ההון נאמדה גם המשוואה

הבאה:  $C_i = \alpha + \beta_1 \cdot Y_i + u_i$  כאשר:  $Y_i = \text{סה"כ ההכנסה של משק בית } t (W_i + P_i)$ .

התקבל:  $\sum e^2 = 54156$ .

א. בדקו את ההשערה.

ב. חשבו את סטטיסטי t לבדיקת ההשערה.

## מבחן F למובהקות המודל:

(9) נתון המודל:  $y = A \frac{x_{1i}^{\beta_1}}{x_{3i}^{\beta_3}} e^{\beta_2 x_2} e^{u_i}$

באמידת מדגם של 58 נבדקים התקבל:  $R^2 = 0.56$ .

האם המודל מובהק?

## תרגול מסכם:

10) נאמדו חמשת המודלים הבאים על 70 תצפיות:

$$1. I_i = 12 + 0.13 \cdot \exp_i + 0.08 \cdot scl_i + 2 \cdot workh_i + u_i \quad ESS = 130$$

$$2. I_i = 11 + 0.1 \cdot scl + 0.1 \cdot workh_i + u_i \quad ESS = 150$$

$$3. I_i = 9 + 0.22 \cdot scl + u_i \quad ESS = 151$$

$$4. I_i = 15 + 0.15 \cdot workh_i + u_i \quad ESS = 152$$

$$5. I_i = 25 + u_i \quad ESS = 200$$

המשתנה המוסבר הוא הכנסה מעבודה (I) והמשתנים המסבירים שבחנו הם מספר שנות הלימוד (scl), מספר שעות עבודה (workh) וותק בעבודה (exp) הערה: הניחו כי ערך F הקריטי הוא 4.

א. האם לשעות עבודה (workh) ישנה השפעה מובהקת על ההכנסה במשוואה 2?

ב. האם לשנות לימוד ישנה השפעה מובהקת על ההכנסה במשוואה 2?

ג. האם רגרסיה 2 מובהקת? (בחנו האם יש הסבר במודל 2), כיצד זה מסתדר עם תשובתכם ל-א' ו-ב'.

ד. האם השפעת הוותק יכול להיות 0.15?

ה. כלכלן נוסף הציע להריץ את המודל:

$$I_i + \exp_i = 2 - 3(scl_i - workh_i) + u_i, \quad ESS = 145$$

איזו השערה ניתן לבחון באמצעות מודל זה?

כמה דרגות חופש יש לסטטיסטי שנקבל? בחנו אותה.

11) על סמך מדגם של 40 תצפיות נאמדו המשוואות הבאות:

$$1. R^2 = 0.76 \quad y_i = 2 + 3X_{1i} + 4X_{2i} + e_i$$

$$2. R^2 = 0.60 \quad y_i = 3 + 5D_i + e_i$$

$$3. D_i = 0.2X_{1i} + X_{2i}$$

כאשר Y הינו הציון בתואר ראשון,  $X_1$  ציוני הבגרות ו- $X_2$  ציוני הפסיכומטרי.

א. בדקו את ההשערה כי ציוני הבגרות וציוני הפסיכומטרי ביחד לא משפיעים על ציוני תואר ראשון.

ב. בדקו את ההשערה כי רגרסיה 2 מובהקת.

ג. איזה השערה ניתן לבדוק באמצעות רגרסיה 1 ו-2?

**12** על סמך מדגם של 80 משפחות המונות כל אחת 4 ילדים, נאמדו המשוואות הבאות:

$$. R^2 = 0.6 \quad \hat{y}_i = 5 + 2X_{1i} + 2X_{2i} \quad .1$$

$$. R^2 = 0.45 \quad \hat{y}_i = 11 + 0.9x_{2i} + 0.6x_{3i} \quad .2$$

$$. R^2 = 0.78 \quad \hat{y}_i = 13 + 8x_{1i} + 7x_{2i} + 2x_{3i} \quad .3$$

כאשר  $y_i$  הינו סה"כ הוצאות משק בית  $i$ ,  $x_{ji}$  הינו גילו של הילד  $j$ .  
חשבו את האומדן לסטיית התקן של המקדם  $X_3$  ברגרסיה 3.

**13** נתון המודל:  $y_i = AX_{1i}^{\beta_1} e^{\beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i}} e^{u_i}$

- מהי המשוואה לאמידת המקדמים של המודל?
- מה המודל המוגבל עבור ההשערה:  $\beta_1 = 2\beta_3$ ;  $\beta_2 = 3\beta_3$ .
- מהן דרגות החופש במונה ובמכנה?
- רשמו את הנוסחה לחישוב סטטיסטי המבחן.

**14** המודל הבא מתאר את פונקציית הייצור של מוצר  $P$ :

$$\ln(P_i) = \alpha + \beta_S \ln(S_i) + \beta_J \ln(J_i) + \varepsilon_i$$

כאשר  $S$  ו- $J$  הן שתי התשומות בייצור ( $S$  = תשומת ההון ו- $J$  = תשומת העבודה).  
מהו המודל המוגבל המתאים לבדיקת ההשערה כי פונקציית הייצור מקיימת תק"ל (תשואה קבועה לגודל)?

## תשובות סופיות:

- (1)  $4 > 5 > 1 = 3 > 2$
- (2) א. iii. ב. לא ניתן לדעת. ii. נכון. iii. נכון.
- (3) 3, 4, 2, 1, 7 ובאופן נפרד: 5, 6.
- (4) ג.
- (5) הוכחה.
- (6) א.  $H_0: \alpha = 5, \beta_s = 3\beta_z$ . ב.  $Y_t - 5 = \beta_x X_t + \beta_z (Z_t + 3S_t) + \beta_w W_t + u_t$ .
- ג.  $F = 0.6145$ . ד. מונה: 2, מכנה: 199. ה. מקבלים.
- (7) א. יש עדות לכך. ב.  $S_{\hat{\beta}_2} = 0.645$ .
- (8) א. אין עדות לכך. ב.  $t = 0.934$ .
- (9) יש עדות לכך.
- (10) א. אין עדות לכך. ב. אין עדות לכך. ג. יש עדות לכך. ד. כן. ה.  $H_0; \beta_{exp} = -1; \beta_{work} = -\beta_{scl}$ .
- (11) א. יש עדות לכך. ב. יש עדות לכך. ג.  $\beta_1 = 0.2\beta_2$ .
- (12)  $S.E = 0.25$ .
- (13) א.  $\ln(y_i) = \ln(A) + \beta_1 \ln(X_{1i}) + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$ . ב.  $\ln(y_i) = \ln(A) + \beta_3 (\ln(X_{1i}) + 3X_{2i} + X_{3i}) + u_i$ . ג. מונה:  $m = 2$ , מכנה:  $n - k = n - 4$ .
- $$F = \frac{\frac{R_U^2 - R_R^2}{m}}{\frac{1 - R_U^2}{n - k}} \quad \text{ד.}$$
- (14)  $\ln\left(\frac{P_i}{S_i}\right) = \alpha + \beta_J \ln\left(\frac{J_i}{S_i}\right) + \varepsilon_i$

# שיטות רגרסיה

פרק 9 - שינוי יחידות מדידה

תוכן העניינים

83 ..... 1. כללי

## שינוי יחידות מדידה:

## רקע:

טרנספורמציה ליניארית: הוספה/החסרה של קבוע ו/או הכפלה/חילוק של קבוע של אחד או שני המשתנים (התלוי והבי"ת).

- טרנספורמציה ליניארית של המשתנים לא תשפיע על:  $R^2$ ,  $F$ ,  $t_{\hat{\beta}}$  ו-  $PF$ .

השינויים מסוכמים בטבלה הבאה:

$S_{\hat{\alpha}}$	$S_{\hat{\beta}}$	$\hat{\alpha}'$	$\hat{\beta}'$	
$s_{\hat{\alpha}'} \neq s_{\hat{\alpha}}$	$s_{\hat{\beta}'} = s_{\hat{\beta}}$	$\hat{\alpha}' = \hat{\alpha} - \hat{\beta}d$	$\hat{\beta}' = \hat{\beta}$	<b>הוספת קבוע ל- <math>X</math>:</b> $Y = \alpha' + \beta'(X + d) + v$
$s_{\hat{\alpha}'} = s_{\hat{\alpha}}$	$s_{\hat{\beta}'} = s_{\hat{\beta}}$	$\hat{\alpha}' = \hat{\alpha} + d$	$\hat{\beta}' = \hat{\beta}$	<b>הוספת קבוע ל- <math>Y</math>:</b> $Y + d = \alpha' + \beta'X + v$
$s_{\hat{\alpha}'} = s_{\hat{\alpha}}$	$s_{\hat{\beta}'} = \frac{s_{\hat{\beta}}}{d}$	$\hat{\alpha}' = \hat{\alpha}$	$\hat{\beta}' = \frac{\hat{\beta}}{d}$	<b>הכפלת <math>X</math> פי קבוע:</b> $Y = \alpha' + \beta'(dX) + v$
$s_{\hat{\alpha}'} = ds_{\hat{\alpha}}$	$s_{\hat{\beta}'} = ds_{\hat{\beta}}$	$\hat{\alpha}' = d\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}' = d\hat{\beta}$	<b>הכפלת <math>Y</math> פי קבוע:</b> $dY = \alpha' + \beta'X + v$

- תמיד  $t_{(\hat{\beta}'=0)} = t_{(\hat{\beta}=0)}$ .
- רק בהכפלות  $t_{(\hat{\alpha}'=0)} = t_{(\hat{\alpha}=0)}$ .

## שאלות:

1) חוקר ביקש לאמוד את הקשר בין שכר ב-ש (MWAGE) לבין שנות לימוד (SCL) באמצעות 2 מודלים שונים.

להלן תוצאות האמידה:

$$א. MWAGE_t = 139.54 + 118.62 \cdot SCL_t$$

$$ב. MWAGE_t = -1445.08 + 1239.60 \cdot LN(SCL)_t$$

חשבו מחדש את מקדמי הרגרסיה וסטטיסטי המבחן  $F$  בכל אחד מהמודלים כתוצאה:

1. התברר כי נעשה טעות בחישוב מספר שנות הלימוד, ויש צורך להוסיף 20% למשתנה המקורי.

2. התברר כי הקשר בין שכר לשנות לימוד הוא ריבועי ולכן יש צורך להעלות את המשתנה המקורי של מספר שנות הלימוד בריבוע.

2) בהמשך לנתוני השאלה לדוגמא מהפרק החמישי:

החוקר טען כי יש לבדוק את הקשר בין שכר לוותק ע"י שימוש בשכר נטו (NET) ולא בשכר ברוטו (SALARY). (קיים שיעור מס קבוע של 20%).

$$\ln(NET_t) = \alpha' + \beta' \cdot EXP_t + v_t$$

מה יהיו ערכי האומדים, סטיות התקן שלהם וטיב ההתאמה באמידת מודל זה?

## תשובות סופיות:

1) א.  $\hat{\alpha}' = \alpha = 139.59$ ,  $\hat{\beta}' = 98.85$ , סטטיסטי  $F$  לא משתנה.

ב.  $\hat{\alpha}' = -1671$ ,  $\hat{\beta}' = 1239.6$ , סטטיסטי  $F$  לא משתנה.

2. לא ניתן לדעת.

2)  $\hat{\beta}' = \hat{\beta} = -0.00874$ ,  $\hat{\alpha}' = 7.11161$ ,  $S_{\hat{\beta}'} = S_{\hat{\beta}} = 0.0026235$ ,  $S_{\hat{\alpha}'} = S_{\hat{\alpha}} = 0.0688935$

$$R^2 = 0.0269$$

# שיטות רגרסיה

פרק 10 - מבחן 1 ללא פלטים

תוכן העניינים

85 ..... 1. כללי

## מבחן 1 ללא פלטים:

## שאלות:

לשם חישובים הנח כי ערך  $t$  הינו 2 וערך  $F$  הינו 4.

(1) הנח כי הקשר באוכי' בין  $X$  ל- $Y$  נתון על ידי המשוואה הבאה:  $Y_t = \beta \cdot X_t + U_t$ , כאשר כל ההנחות הקלאסיות מתקיימות.

$$\text{נתון האומד: } \tilde{\beta} = \frac{\sum Y_t}{S_{XX}}$$

- א. האם האומד ליניארי?  
 ב. האם האומד חסר הטיה?  
 ג. אומד זה יעיל פחות מאומד הריבועים הפחותים.  
 ד. האם אומד זה הוא blue?  
 ה. אומד  $\tilde{\beta}$  מוגדר רק כאשר  $S_X^2 \neq 0$ . נכון/ לא נכון/ אי אפשר לדעת  
 ו. חשבו את השונות של  $\tilde{\beta}$  עבור מודל שבו  $\alpha \neq 0$ .  
 ז. שונות האומד (שחושבה בסעיף הקודם) הינה גדולה משונות המודל הנתון. נכון/ לא נכון/ אי אפשר לדעת

(2) על סמך מדגם של 60 משפחות שלכל אחת 3 ילדים נאמדו המשוואות הבאות:

$$1. \quad R^2 = 0.85 \quad y_i = 15 + 0.7x_{1i} + 0.35x_{2i} + 0.20x_{3i}$$

$$2. \quad R^2 = 0.25 \quad y_i = 2 + 0.1z_i$$

$$3. \quad z_i = x_{1i} - x_{2i} + 2x_{3i}$$

כאשר  $y_i$  הינן הוצאות משק הבית על חינוך הילדים ואילו  $x_{ji}$  הינו גילו של הילד  $j$ .

א. ההשערה שניתן לבדוק באמצעות המשוואות הנתונות הינה:

$$i. \quad HO: \beta_1 = \beta_2; \beta_1 = 2\beta_3$$

$$ii. \quad HO: \beta_1 = -\beta_2 = 2\beta_3$$

$$iii. \quad HO: \beta_2 = -\beta_1; \beta_3 = 2\beta_1$$

iv. לא ניתן לדעת.

ב. סטטיסטי המבחן שניתן לבדוק באמצעות המשוואות הנתונות שווה בקירוב ל:

$$i. \quad .56$$

$$ii. \quad .57$$

$$iii. \quad .112$$

$$iv. \quad .74.66$$

(3) כלכלן הציע את המודלים הבאים :

1.  $y_i = \beta_1 \ln(x_i) + \beta_2 \ln(0.5x_i) + u_i$

2.  $y_i = \beta_1 \ln(x_i) + \beta_2 \ln(x_i^{0.5}) + u_i$

האם ניתן לאמוד את המודלים בשיטת OLS?

א. אין בעיה לאמוד את שני המודלים.

ב. לא ניתן לאמוד את המודל הראשון בלבד.

ג. לא ניתן לאמוד את המודל השני בלבד.

ד. לא ניתן לאמוד את שני המודלים.

(4) כלכלן אמד את המודל הבא :  $y_i = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(x_i) + u_i$ ,

וקיבל את האומדנים :  $\hat{\alpha}_0 = 10$  ו-  $\hat{\alpha}_1 = 6$ .

על אותו המדגם אמד חברו את המודל הבא :  $y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln(x_i^2) + u_i$ .

מכאן ש :

א.  $\hat{\beta}_0 = 5$  ו-  $\hat{\beta}_1 = 3$ .

ב.  $\hat{\beta}_0 = 10$  ו-  $\hat{\beta}_1 = 3$ .

ג.  $\hat{\beta}_0 = 5$  ו-  $\hat{\beta}_1 = 6$ .

ד. כל התשובות שגויות.

(5) על סמך מדגם של 95 תצפיות נאמד המודל הבא :

$$y_i = 2 + 0.5x_{1i} + 0.3x_{2i} \quad R^2 = 0.73$$

(1) (2)

הערכים שבסוגריים הם סטיות התקן של המקדמים.

א. בדוק האם המודל מובהק.

ב. בדוק האם מקדמי השיפוע מובהקים.

ג. מה תוכל להסיק מסעיפים א ו-ב?

(6) על סמך מדגם של 52 תצפיות נאמדו המשוואות הבאות :

1.  $y_i = 4 + 0.1x_{1i} + 0.8x_{2i} \quad R^2 = 0.84$

2.  $y_i = 2 + 0.8x_{1i} \quad R^2 = 0.7$

3.  $y_i = 7 + 0.23x_{2i} \quad R^2 = 0.25$

4.  $y_i = 3 + 0.23z_i \quad R^2 = 0.55$

כאשר  $x_{1i}$  ו-  $x_{2i}$  הם השכלת הבעל והאישה בהתאמה במשפחה  $i$  ו-  $y_i$  הכנסת

משק בית  $i$ . כמו כן נתון כי :  $z_i = x_{1i} + 2.2x_{2i}$ .

- א. בדוק את ההשערה כי להשכלה אין השפעה על הכנסות המשפחה.  
 ב. איזה השערה ניתן לבדוק תוך שימוש במשוואות (1) ו-(4)? בדוק אותה.  
 ג. חשב את סטית התקן של המקדם  $x_{1i}$  ברגרסיה (1).

(7) חוקר מעוניין לאמוד את המודל:  $y_i = \alpha + u_i$ .

- א. חשב את נוסחת אומד הריבועים הפחותים ל- $\alpha$  על ידי פתרון בעיית המינימיזציה של סכום ריבועי הסטיות.  
 ב. חשב את נוסחת שונותו של האומד.

(8) על סמך מדגם של 45 תצפיות נאמדו המודלים הבאים:

1.  $R^2 = 0.75 \quad y_i = 5.4 + 1.2x_{2i} + 4.4x_{3i} + u_i$
2.  $R^2 = 0.65 \quad y_i = 6.3 + 5.8x_{3i} + u_i$
3.  $R^2 = 0.70 \quad y_i = 5.7 + 1.2x_{2i} + u_i$
4.  $R^2 = 0.56 \quad y_i = 3.9 + 3.4\ln(x_{2i}) + u_i$
5.  $\ln(y_i) = 2.4 + 1.8x_{2i} + 2.7x_{3i}^2 + 4.2x_{4i}^2 + u_i$
6.  $y_i = 1.3 + 3.1x_{2i} + 0.5x_{3i} + 4.8x_{4i}^2 + 1.5x_{5i}^2 + u_i$

- א. דרג את הרגרסיות על פי מדד ההסבר (מהנמוך לגבוה).  
 ב. בדוק את ההשערות של משתנים  $X_2$  ו- $X_3$  ביחד אין השפעה על  $Y$  במודל (1).  
 ג. בדוק בהסתמך על מודל (2) האם המשתנה  $X_2$  מובהק ברגרסיה (1).  
 ד. ברגרסיה (1) נתונים כעת אומדי הטעויות הסטנדרטיות (סטיות התקן) של מקדמי  $X_2$  ו- $X_3$  0.5 ו-2.5 בהתאמה. בדוק עבור כל אחד מהמקדמים הנ"ל האם מובהק ומה אפשר ללמוד מרגרסיה (1).  
 ה. איזו השערה ניתן לבדוק תוך שימוש במשוואות (6) ו-(3)?

## תשובות סופיות:

- (1) א. לינארי. ב. מוטה. ג. אי אפשר לדעת. ד. לא.
- ה. נכון. ו.  $V(\tilde{\beta}) = \frac{n\sigma^2}{S_{xx}^2}$ . ז. לא נכון.
- (2) א. iii. ב. iii.
- (3) ד'.
- (4) ב'.
- (5) א. מובהק. ב. לא מובהקים. ג. קיימת בעיה מולטיקולינאריות חלקית.
- (6) א. מובהק. ב.  $\beta_2 = 2.2\beta_1$ . ג.  $S.E = 0.00743$ .
- (7) ראה סרטון.
- (8) א.  $6 > 1 > 3 > 2 > 4$ . ב. יש עדות לכך. ג. יש עדות לכך. ד.  $X_2$  מובהק,  $X_3$  אינו מובהק. ה.  $H_0: \beta_2 = \beta_4 = \beta_5 = 0$ .

# שיטות רגרסיה

פרק 11 - מבחן 2 ללא פלטים

תוכן העניינים

89 ..... 1. כללי

## מבחן 2 ללא פלטים:

### שאלות:

אם לא נאמר אחרת בנתוני השאלה, התבסס על ההנחות הבאות:

1. ערך t קריטי הוא 2.

2. ערך F קריטי הוא 4.

(1) הנח כי הקשר באוכלוסייה בין X לבין Y נתון ע"י המשוואה הבאה:  $\sqrt{y_i} = \beta \ln(x_i) + u_i$ . נתון גם כי עבור המודל הנ"ל כל ההנחות הקלאסיות מתקיימות.

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{y_i} \ln(x_i)}{\sum_{i=1}^n \ln(x_i)^2} : \beta \text{ עבור } \beta$$

א. מהי הטענה הנכונה:

- i. האומד חסר הטיה ובעל שונות מינימאלית.
- ii. האומד מוטה.
- iii. האומד לא ליניארי.
- iv. האומד מוטה אך יש לו שונות נמוכה מאומד OLS.
- v. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

ב. שונות האומד הוא:

$$i. \frac{\sigma^2}{\sum [\ln(x_i)]^2}$$

$$ii. \sigma^2 \sum \left( \frac{\sqrt{y_i}}{\ln(x_i)} \right)^2$$

$$iii. \frac{\sigma^2}{\sum \ln(x_i)}$$

- iv. לא ניתן לחשב את האומד שכן הוא לא ליניארי.
- v. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

ג. מה בהכרח מתקיים עבור אומדן זה:

$$\sum_{i=1}^n \left[ \frac{\ln(x_i)}{\sum_{i=1}^n [\ln(x_i)]^2} \times \ln(x_i) \right] = 1 \quad .i$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\ln(x_i)}{\sum_{i=1}^n [\ln(x_i)]^2} = 0 \quad .ii$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sum_{i=1}^n \ln(x_i)^2} = 1 \quad .iii$$

$$\sum_{i=1}^n \left[ \frac{\ln(x_i)}{\sum_{i=1}^n \ln(x_i)^2} \times \ln(x_i) \right] = 0 \quad .iv$$

v. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

(2) נתונים שני מודלים:

$$\ln(y_i) = \alpha + \beta_1 \ln(x_i) + \beta_2 \ln(x_i^2) + u_i \quad .1$$

$$y_i = \alpha + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + u_i \quad .2$$

להלן שלוש טענות:

1. במודל 1 יש מולטיקוליניאריות מושלמת ולכן הוא לא ניתן לאמידה בשיטת OLS.

2. במודל 2 יש מולטיקוליניאריות מושלמת ולכן הוא לא ניתן לאמידה בשיטת OLS.

3. במודל 1 יש מולטיקוליניאריות חלקית ולכן הוא ניתן לאמידה בשיטת OLS.

א. רק טענה 1 נכונה.

ב. רק טענה 2 נכונה.

ג. רק טענות 2 ו-3 נכונות.

ד. רק טענה 3 נכונה.

ה. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

(3) אסף הוא כלכלן צעיר שמתעניין מאוד בביתר ירושלים. לאור אכזבות חוזרות ונשנות להבאת שחקנים טובים. החליט אסף לפנות למאמן הקבוצה ולהסביר לו את הפרמטרים החשובים לשחקן כדורגל.

אסף הריץ את הרגרסיה הבאה:  $\hat{y}_i = \alpha + \beta_1 \cdot x_{1i} + \beta_2 \cdot x_{2i} + \beta_3 \cdot x_{3i}$  על סמך 500

תצפיות וקיבל את התוצאות הבאות:

$$\hat{y}_i = 10 + 2 \cdot x_{1i} + 1.5 \cdot x_{2i} + 2.5 \cdot x_{3i}$$

$$S_u^2 = 10, S_{\hat{\alpha}} = 3, S_{\hat{\beta}_1} = 0.5, S_{\hat{\beta}_2} = 0.75, S_{\hat{\beta}_3} = 1$$

$$\text{cov}(\beta_3, \beta_2) = -3, \text{cov}(\beta_1, \beta_3) = 1, \text{cov}(\beta_1, \beta_2) = -0.6$$

כאשר :

$y$  - טיב השחקן (על סמך דירוג הפרשנים).

$x_{1i}$  - מהירות השחקן.

$x_{2i}$  - קשיחות השחקן.

$x_{3i}$  - הרמה הטכנית של השחקן.

א. מהו רווח בר סמך ל- $\beta_1$  והאם היא מובהקת?

i.  $[1,3]$ , לכן ה- $\beta_1$  מובהקת.

ii.  $[1.5, 2.5]$ , לכן ה- $\beta_1$  מובהקת.

iii.  $[1,3]$ , לכן ה- $\beta_1$  לא מובהקת.

iv.  $[1.5, 2.5]$ , לכן ה- $\beta_1$  לא מובהקת.

v. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

ב. המאמן טוען כי השפעת הרמה הטכנית על טיב השחקן היא כפולה מזו של הקשיחות. T סטטיסטי לבחינת ההשערה הוא (מעוגל ובערך מוחלט) :

i. 0.128

ii. 1.255

iii. 0.125

iv. 0.156

v. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

(4) על סמך מדגם של 50 תצפיות נאמדו המשוואות הבאות :

$$1. \hat{Y}_i = 2 + 4X_{1i} + 2X_{2i}^2 - 4X_{3i} \quad R^2 = 0.70$$

$$2. \hat{Y}_i = 4 + 5X_{1i} - 2X_{3i} \quad R^2 = 0.65$$

$$3. \hat{X}_{2i} = 3 + 5.2Y_i \quad R^2 = 0.40$$

$$4. \hat{Y}_i = 5 + 2X_{1i} - 1.2X_{2i}$$

מה ניתן לדעת על  $R^2$  ברגרסיה (4)?

א.  $R^2 > 0.4$

ב. לא ניתן לדעת.

ג.  $R^2 > 0.65$

ד.  $R^2 < 0.7$

ה. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

- (5) על סמך מדגם בגודל 30 תצפיות אמדו יצחק וטל את המודל הבא:  $Y_i = \beta \cdot X_i + u_i$  והתקבל:  $\hat{Y}_i = 3X_i$   $R^2 = 0.75$ .
- כעת הגיע מנדי (כלכלן חדש) והציע את המודל הבא:  $Y_i = \alpha + \beta \cdot X_i^2 + u_i$ . מה ניתן להסיק על  $R^2$  של המודל החדש על סמך  $R^2$  של המודל המקורי?
- א. לא ניתן להסיק על  $R^2$  של המודל החדש על סמך  $R^2$  של המודל המקורי.  
 ב.  $R^2 > 0.75$   
 ג.  $R^2 = 0.75$   
 ד.  $R^2 < 0.75$   
 ה. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

- (6) ערן החליט לבדוק את אהבת הסטודנטים לאקונומטריקה א'. לכן הריץ רגרסיה בה בדק השפעת שעות הלימוד של הסטודנט על הציון בבחינה. ערן החליט לאמוד את המודל הבא:  $y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$ . לשם כך ערן אסף 51 תצפיות והריץ רגרסיה. התוצאות אשר קיבל הן:  $\hat{\alpha} = 1$ ,  $\hat{\beta} = 5$ .
- מספר סטודנטים קטני אמונה, טענו כי ההשפעה של שעת לימוד על הציון צריכה להיות 3 (ולא יותר). הם בדקו זאת ע"י בחינת T סטטיסטי וקיבלו  $T = 1$ . כמו כן ידוע כי השונות של X היא 10. מכאן סכום הטעויות בריבוע הינו:
- א. 98,000  
 ב. 49,000  
 ג. 24,500  
 ד. אין מספיק נתונים כדי לפתור את השאלה.  
 ה. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

- (7) נתון המודל הבא:  $y_i = \beta_1 \cdot x_{1i} + \beta_2 \cdot x_{2i} + u_i$  במודל זה בהכרח מתקיים:
- א.  $\sum (x_{1i} + x_{2i})e_i = 0$   
 ב.  $\sum (1 + x_{1i} + x_{2i})e_i = 0$   
 ג.  $\sum (1 + x_{1i})e_i = 0$   
 ד.  $\sum e_i = 0$   
 ה. כל התשובות האחרות לא נכונות.

8 נתון המודל:  $Y_i = \alpha X_{1i}^{\beta_1} X_{2i}^{\beta_2} X_{3i}^{\beta_3} e^{\beta_4 X_{4i}^3} X_{5i} e^{u_i}$  שהורץ על המדגם בן 45 תצפיות. מהי המשוואה לאמידת המקדמים של המודל?

א.  $\ln\left(\frac{y_i}{x_5}\right) = \alpha + \beta_1 \ln(x_{1i}) + \beta_2 \ln(x_{2i}) + \beta_3 \ln(x_{3i}) + \beta_4 X_{4i}^3 + u_i$

ב.  $\ln\left(\frac{y_i}{K^5}\right) = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + 3x_{4i} + u_i$

ג.  $\ln(y_i) - \ln(x_{5i}) = \alpha + \beta_1 \ln(x_{1i}) + \beta_2 \ln(x_{2i}) + \beta_3 x_{3i} + \beta_4 x_{4i} + u_i$

ד.  $\ln\left(\frac{y_i}{x_5}\right) = \alpha + \beta_1 \ln(x_{1i}) + \beta_2 \ln(x_{2i}) + \beta_3 \ln(x_{3i}) + \beta_4 \ln(X_{4i}^3) + u_i$

ה. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

9 נתון המודל:  $Y_i = \alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + u_i$

א. מהו המודל המוגבל עבור ההשערה:  $\beta_1 = \beta_2 + 1, \beta_3 = 2$ ?

i.  $Y_i - x_{1i} - 2x_{3i} = \alpha + \beta(x_{1i} + x_{2i}) + u_i$

ii.  $Y_i - x_{1i} + 2x_{3i} = \alpha + \beta(x_{1i} + x_{2i}) + u_i$

iii.  $Y_i - 2x_{3i} = \alpha + \beta(x_{1i} + x_{2i} + 1) + u_i$

iv.  $Y_i + 2x_{3i} = \alpha + \beta(x_{1i} + x_{2i} + 1) + u_i$

v. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

ב. מהו סטטיסטי המבחן?

i. רק מבחן  $\frac{(\sum e_y^2 - \sum e^2) / m}{\sum e_y^2 / (n-k)}$

ii. רק מבחן  $\frac{R^2 / (k-1)}{(1-R^2) / (n-k)}$

iii. רק מבחן  $\frac{(R_y^2 - R^2) / m}{(1-R_y^2) / (n-k)}$

iv. מבחנים  $\frac{(\sum e_y^2 - \sum e^2) / m}{\sum e_y^2 / (n-k)}$  או  $\frac{(R_y^2 - R^2) / m}{(1-R_y^2) / (n-k)}$

v. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

10) על סמך מדגם של 50 תצפיות נאמדו המשוואות הבאות:

$$1. \hat{Y}_i = 3 + 45X_{1i} + 5X_{2i}, \quad R^2 = 0.65$$

$$2. \hat{Y}_i = 5.2X_{1i}, \quad R^2 = 0.30$$

$$3. \hat{Y}_i = 4.5 + 5.9X_{1i}, \quad R^2 = 0.40$$

בדוק את ההשערה שהשפעת המשתנה  $X_2$  מובהקת ברגרסיה (1), ומהו סטיית התקן של  $\beta_2$ .

- א. מובהקת. וסטיית התקן של  $\beta_2$  היא 0.86 (בקירוב).  
 ב. אינה מובהקת. וסטיית התקן של  $\beta_2$  היא 0.72 (בקירוב).  
 ג. אינה מובהקת. וסטיית התקן של  $\beta_2$  היא 0.86 (בקירוב).  
 ד. מובהקת. וסטיית התקן של  $\beta_2$  היא 0.72 (בקירוב).  
 ה. כל התשובות האחרות אינן נכונות.

11) על סמך מדגם של 50 תצפיות נאמדו המשוואות הבאות:

$$1. \hat{Y}_i = 3 + 3X_{1i} + 5X_{2i} + 2X_{3i}$$

$$2. \hat{Y}_i = 9.3 + 0.6W_i$$

$$W_i = X_{1i} - 2X_{2i} + X_{3i} \quad \text{כי:}$$

איזו השערה ניתן לבדוק תוך שימוש במשוואות (1) ו-(2)?

- א. ברגרסיה (1)  $\beta_1 = \beta_3 = -0.5\beta_2$ .  
 ב. ברגרסיה (1)  $\beta_1 = \beta_3 = 0.5\beta_2$ .  
 ג. ברגרסיה (1)  $\beta_1 = \beta_3 = 2\beta_2$ .  
 ד. ברגרסיה (1)  $\beta_1 = \beta_3 = \beta_2$ .  
 ה. כל התשובות האחרות לא נכונות.

**תשובות סופיות:**

- |       |        |           |
|-------|--------|-----------|
| ג. i. | ב. ii. | א. i. (1) |
|       |        | א. (2)    |
|       | ב. i.  | א. i. (3) |
|       |        | א. (4)    |
|       |        | א. (5)    |
|       |        | א. (6)    |
|       |        | א. (7)    |
|       |        | א. (8)    |
|       | ב. i.  | א. i. (9) |
|       |        | א. (10)   |
|       |        | א. (11)   |