

# שיטות סטטיסטיות ב



$$\{\sqrt{x}\}^2$$



## תוכן העניינים

1	סטטיסטיקה תיאורית-הקדמה
4	סטטיסטיקה תיאורית- הצגה של נתונים
15	סטטיסטיקה תיאורית-גבולות מדומים ואמיתיים
17	סטטיסטיקה תיאורית- סכימה
21	סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום מרכזי
30	סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - הטווח, השונות וסטיית התקן
33	סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - טווח בין רבעוני
35	סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - ממוצע סטיות מוחלטות מהחציון
37	סטטיסטיקה תיאורית-מדדי מיקום יחסי-ציון תקן
39	סטטיסטיקה תיאורית-מדדי מיקום יחסי-אחוזונים במחלקות
42	סטטיסטיקה תיאורית-אחוזונים בטבלה בדידה
44	סטטיסטיקה תיאורית - טרנספורמציה לינארית
47	סטטיסטיקה תיאורית - שאלות מסכמות
54	הסקה סטטיסטית - הקדמה
57	התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי
69	מושגי יסוד באמידה
74	רווח סמך לתוחלת (ממוצע)
84	רווח סמך לפרופורציה
90	רווח סמך לשונות וסטיית תקן
95	שאלות מסכמות על רווחי סמך
97	מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים
103	בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)
119	בדיקת השערות על פרופורציה

# תוכן העניינים

126	.....	24. בדיקת השערות על שוניות
-----	-------	----------------------------

# שיטות סטטיסטיות ב

פרק 1 - סטטיסטיקה תיאורית-הקדמה

תוכן העניינים

1. כללי..... 1

## סטטיסטיקה תיאורית – הקדמה:

### רקע:

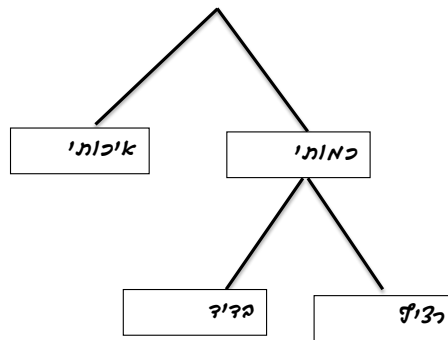
בסטטיסטיקה תיאורית אנו חוקרים קבוצה מסוימת, שיכולה להיות קבוצת ילדים בגן, קבוצת מניות בתיק, כלל התושבים בעיר מסוימת וכו'. בין ישות לישות בקבוצה ישנם גורמים היכולים לקבל מספר ערכים. גורמים אלה נקראים משתנים. למשל, בין מניה למניה בתיק משתנה התשואה היומית של המניה, הוותק של המניה, תחום המניה וכדומה. בסטטיסטיקה תיאורית אנחנו נתבונן בקבוצה מסוימת ובתוך הקבוצה הזו נאסוף נתונים לגבי משתנה מסוים ונלמד להציג את הנתונים ולנתח אותם מכל מיני אספקטים.

### דוגמה:

בתיק מניות 10 מניות. מנהל התיק פרסם את התשואה של כל מניה בשנת 2011.

- 1) מי הקבוצה הנחקרת?
- 2) מה גודל הקבוצה?
- 3) מה המשתנה הנחקר?

### סוגי משתנים:



### משתנה איכותי

משתנה שלערכיו אין משמעות של יותר או פחות, אין עניין כמותי לערכים המתקבלים. כמו: מקום מגורים של אדם (רעננה, תל אביב, אשדוד...), מין האדם (זכר, נקבה) ומצב משפחתי (רווק, נשוי, גרוש, אלמן).

### משתנה כמותי

משתנה שערכיו הם מספרים, להם יש משמעות כמותית כמו: גובה אדם בס"מ, ציון בבחינה וכדומה.

את המשתנה הכמותי נסווג לשני סוגים:

1. משתנה בדיד – משתנה שערכיו מתקבלים מתוך סידרה של ערכים אפשריים. כמו: מספר ילדים למשפחה (1,2,3...). וציון בבחינה (מ-0 ועד 100 בקפיצות של 1).
2. משתנה רציף – משתנה שערכיו מתקבלים מתוך אינסוף ערכים בתחום מסוים. הערכים מתקבלים ברצף וללא קפיצות של ערכים. כמו: גובה בס"מ – אם למשל, הגובה הנמוך ביותר הוא 150 ועד 190 ס"מ בקבוצה הגבהים הם ברצף. גם בין 160 ל-161 ס"מ יש רצף אינסופי של ערכים אפשריים לגובה (160.33 ס"מ הוא גם גובה אפשרי), משקל בק"ג, מהירות בקמ"ש וכולי.

## שאלות:

- (1) סווגו את המשתנים הבאים לפי: איכותי / כמותי בדיד / כמותי רציף:
- מספר הדירות בבניין.
  - גיל אדם בשנים.
  - אחוז האבטלה בעיר.
  - מקצוע לימוד מועדף.

- (2) להלן התפלגות מספר האיחורים לעבודה בחודש של העובדים בחברת "סטאר":

מספר האיחורים	מספר העובדים
0	17
1	23
2	85
3	50
4	25

בחברה 200 עובדים.

- מהו המשתנה הנחקר כאן?
  - האם מדובר במשתנה איכותי או כמותי?
  - אם הוא כמותי האם הוא בדיד או רציף?
- (3) להלן רשימה של משתנים כמותיים, ציינו ליד כל אחד אם הוא רציף או בדיד:
- שכר עובד ב-ש.
  - ציון בחינת בגרות.
  - תוצאה בהטלת קובייה.
  - מהירות ריצה בתחרות.
  - שיעור התמיכה בממשלה.

## תשובות סופיות:

- א. כמותי בדיד.      ב. כמותי רציף.      ג. כמותי רציף.      ד. איכותי.
- א. מספר איחורים.      ב. כמותי בדיד.
- א. רציף.      ב. בדיד.      ג. בדיד.      ד. רציף.      ה. רציף.

# שיטות סטטיסטיות ב

פרק 2 - סטטיסטיקה תיאורית- הצגה של נתונים

תוכן העניינים

1. כללי ..... 4

## סטטיסטיקה תיאורית – הצגה של נתונים:

### רקע:

דרכים להצגת נתונים שנאספו:

### רשימה של תצפיות:

התצפית היא הערך שנצפה עבור ישות מסוימת בקבוצה. רושמים את התצפיות שהתקבלו כרשומה, יעיל שיש מספר מועט של תצפיות. ההצגה הזו רלבנטית לכל סוגי המשתנים. למשל, להלן מספר החדרים בבניין בן 5 דירות: 4, 5, 3, 4, 3.

### טבלת שכיחויות בדידה:

שם המשתנה- $X$	שכיחות – $f(x)$	שכיחות יחסית באחוזים
$X_1$	$f_1$	$\frac{f_1}{N} \cdot 100$
$X_2$	$f_2$	$\frac{f_2}{N} \cdot 100$
$X_3$	$f_3$	$\frac{f_3}{N} \cdot 100$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$X_k$	$f_k$	$\frac{f_x}{N} \cdot 100$
<b>סה"כ</b>	$N = \sum_{i=1}^k f_i$	100%

רושמים את התצפיות בטבלה שבה עמודה אחת מבטאת את ערכי המשתנה והשנייה את השכיחות. יעיל עבור משתנה איכותי וכמותי בדיד וכשיש מספר רב של תצפיות. לא יעיל למשתנה כמותי רציף.

**דוגמה:**

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת:

$\frac{f_i}{n}$	$F_i$	מספר התלמידים – השכיחות $f$	הציון $X$
$0.08=2/25$	2	2	5
$0.16=4/25$	6	4	6
$0.32=8/25$	14	8	7
$0.2=5/25$	19	5	8
$0.16=4/25$	23	4	9
$0.08=2/25$	25	2	10

שכיחות מצטברת – צבירה של השכיחויות.

השכיחויות  $F_i$  – השכיחות המצטברת נותנת כמה תצפיות קטנות או שוות לערך.

שכיחות יחסית (פרופורציה) – השכיחות מחולקת לכמות התצפיות הכללי:

$$\frac{f_i}{n} - \text{איזה חלק מהתצפיות בקבוצה שוות לערך.}$$

**טבלת שכיחויות במחלקות:**

משתמשים שהמשתנה כמותי רציף או כאשר יש מספר ערכים רב במשתנה הבדיד וטבלת שכיחויות תהיה ארוכה מידי.

**דוגמה:**

נתנו לקבוצת ילדים לבצע משימה, בדקו את התפלגות זמן הביצוע, בדקות. להלן ההתפלגות שהתקבלה:

מספר הילדים	זמן בדקות
20	0.5-3.5
18	3.5-9.5
14	9.5-19.5
8	19.5-29.5

### דיאגרמת עוגה:

זהו התיאור הגרפי של משתנה איכותי. בדיאגרמת עוגה כל ערך במשתנה מקבל "נתח", שהוא פרופורציונלי לשכיחות היחסית של ערך המשתנה בנתונים.

### התפלגות המצב המשפחתי



### דיאגרמת מקלות:

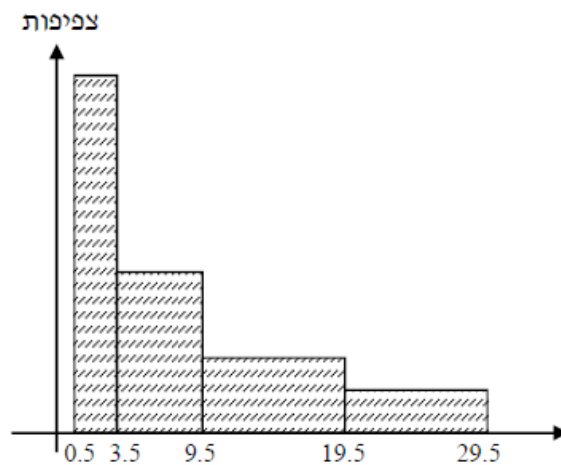
הציר האופקי הוא הציר של המשתנה והציר האנכי של השכיחות, כך שהגובה של המקל מעיד על השכיחות. רלבנטי למשתנה כמותי בדיד. לא נהוג להשתמש בתיאור למשתנה איכותי וכמו כן לא למשתנה כמותי רציף, וכן בסולמות מדידה עבור משתנה מסולם סדר.



### היסטוגרמה:

היסטוגרמה היא הדרך הגרפית כדי לתאר טבלת שכיחויות במחלקות, והיא רלוונטית למשתנה כמותי רציף. בהיסטוגרמה הציר האופקי הוא הציר של המשתנה והציר האנכי הוא הציר של הצפיפות. הצפיפות מחושבת בכל מחלקה על ידי חלוקת השכיחות ברוחב של כל המחלקה, והיא נותנת את מספר התצפיות הממוצע בכל מחלקה ליחידה. אם המחלקות הן שוות ברוחב, ניתן לשרטט את ההיסטוגרמה לפי השכיחות ואין צורך בצפיפות.

צפיפות	מצטברת	שכיחות	אמצע	רוחב	X
6.6667	20	20	2	3	0.5 - 3.5
3	38	18	6.5	6	3.5 - 9.5
1.4	52	14	14.5	10	9.5 - 19.5
0.8	60	8	24.5	10	19.5 - 29.5



### פוליגון – מצולעון:

אם נחבר את אמצע קצה כל מלבן בקווים ישרים. נותן מראה חזותי לצורה של התפלגות המשתנה.

### צורות התפלגות נפוצות:

#### התפלגות סימטרית פעמונית

רוב התצפיות במרכז, וככל שנתרחק מהמרכז יהיו פחות תצפיות באופן סימטרי. לדוגמה, ציוני IQ.



ישנן התפלגויות סימטריות שאינן פעמוניות, כגון:

#### התפלגות אסימטרית ימנית (חיובית)

רוב התצפיות מקבלות ערכים נמוכים ויש מיעוט הולך וקטן של תצפיות שמקבלות ערכים גבוהים קיצוניים. לדוגמה, שכר במשק.

#### התפלגות א-סימטרית ימנית או חיובית



#### התפלגות אסימטרית שמאלית (שלילית)

רוב התצפיות מקבלות ערכים גבוהים ויש מיעוט הולך וקטן של תצפיות שמקבלות ערכים נמוכים קיצוניים. לדוגמה, אורך חיים.

#### התפלגות א-סימטרית שמאלית או שלילית



## שאלות:

- 1) בסקר צפייה בטלוויזיה התקבלו התוצאות הבאות: 25 צפו בערוץ הראשון, 25 צפו בערוץ 10, 75 צפו בערוץ השני, 50 צפו באחד מערוצי הכבלים ו-25 לא צפו בטלוויזיה בזמן הסקר.
- א. רשמו את טבלת השכיחות ואת השכיחות היחסית.
- ב. תארו את הנתונים באופן גרפי.

- 2) להלן נתונים על התפלגות המקצוע המועדף של תלמידי שכבה ו' בבית הספר "מעוף":

המקצוע	מספר התלמידים
מתמטיקה	44
תנ"ך	20
אנגלית	12
היסטוריה	26

- א. מהו המשתנה הנחקר?
- ב. מהי פרופורציית התלמידים שמעדיפים תנ"ך?

- 3) להלן התפלגות ההשכלה במקום עבודה מסוים:

השכלה	מספר העובדים
נמוכה	60
תיכונית	120
אקדמאית	20

- א. מהו המשתנה הנחקר?  
מאיזה סולם הוא?
- ב. תארו את הנתונים באופן גרפי.

- 4) להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:
- 6, 5, 8, 7, 6, 7, 6, 8, 7, 8, 5, 4, 6, 10, 9, 8, 6, 7.
- א. מהו המשתנה? האם הוא בדיד או רציף?
- ב. תארו את הרשימה בטבלת שכיחויות.
- ג. הוסיפו שכיחויות יחסיות לטבלה.
- ד. תארו את הנתונים באופן גרפי.

5) להלן היסטוגרמה המתארת את התפלגות הגבהים בס"מ של קבוצה מסוימת:



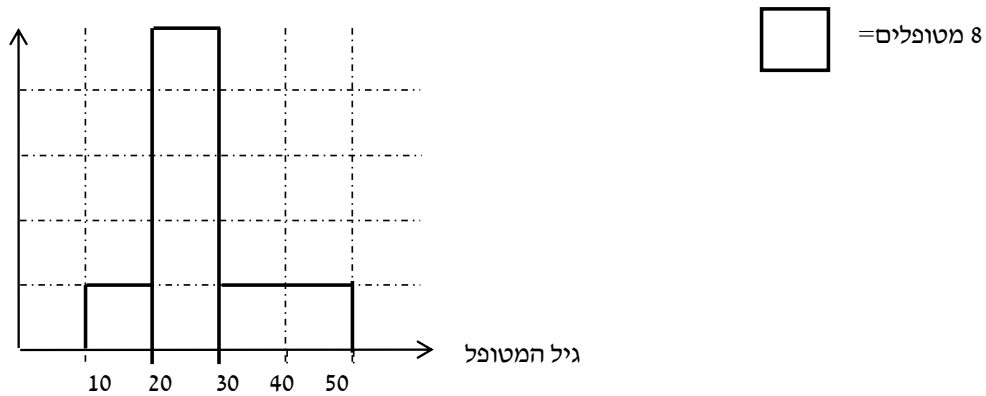
- מהו המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?
- תארו את הנתונים בטבלת שכיחויות במחלקות.
- הוסיפו שכיחות יחסית לטבלה.
- הוסיפו את הצפיפות של כל מחלקה לטבלה.
- מהי צורת ההתפלגות של הגבהים?

6) להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג:

מספר מקרים	משקל
10	40-45
20	45-50
30	50-60
20	60-65
10	65-70

- תארו את ההתפלגות באופן גרפי.
- מה ניתן להגיד על צורת ההתפלגות?

7) להלן גיל המטופלים של ד"ר שוורץ בשנים :  
 קנה מידה :



- א. מה המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?  
 ב. מהי הקבוצה הנחקרת?  
 ג. תרגמו את ההסיטוגרמה לטבלת שכיחות.  
 ד. מהי הפרופורציה של המטופלים של ד"ר שוורץ בגילאים 20-30?

### תשובות סופיות:

ב. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.

1) א. להלן טבלה:

%	$\frac{f(x)}{n}$	$f(x)$	$x$
12.5%	$\frac{25}{200}$	25	ערוץ 1
12.5%	$\frac{25}{200}$	25	ערוץ 10
37.5%	$\frac{75}{200}$	75	ערוץ 2
25%	$\frac{50}{200}$	50	כבלים
12.5%	$\frac{25}{200}$	25	לא צפו
100%	1	200	סה"כ

ב. 19.6%.

2) א. מקצוע מועדף.

ב. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.

3) א. משתנה נחקר: השכלה, סוג: סדר.

4) א. המשתנה : ציון, משתנה בדיד.  
ד. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.

ב+ג. להלן טבלה :

%	$\frac{f(x)}{n}$	$f(x)$	$x$
5%	$\frac{1}{20}$	1	4
10%	$\frac{2}{20}$	2	5
30%	$\frac{6}{20}$	6	6
20%	$\frac{4}{20}$	4	7
20%	$\frac{4}{20}$	4	8
10%	$\frac{2}{20}$	2	9
5%	$\frac{1}{20}$	1	10
100%	20	20	סה"כ

5) א. גובה בס"מ, רציף.

ב+ג+ד. להלן טבלה : ה. אסימטרית.

$d$	%	$\frac{f(x)}{n}$	$f(x)$	$x$
1	5%	$\frac{5}{100}$	5	155-160
2	10%	$\frac{10}{100}$	10	160-165
3	15%	$\frac{15}{100}$	15	165-170
4	40%	$\frac{40}{100}$	40	170-180
3	30%	$\frac{30}{100}$	30	180-190

- 6) א. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.  
 ב. סימטרית.
- 7) א. המשתנה: גיל בשנים, משתנה רציף.  
 ב. המטופלים של ד"ר שוורץ.  
 ד. להלן טבלה:  
 ה. 62.5%.

$f(x)$	$x$
8	10-20
40	20-30
16	30-50

# שיטות סטטיסטיות ב

פרק 3 - סטטיסטיקה תיאורית-גבולות מדומים ואמיתיים

תוכן העניינים

1. כללי ..... 15

## סטטיסטיקה תיאורית – גבולות מדומים וגבולות אמיתיים:

### רקע:

עבור משתנה רציף נהוג לתאר את הנתונים בטבלת שכיחויות במחלקות. הנתונים שנאספים הם ברמת דיוק מסוימת. לדוגמה: משקל של בני אדם ומשקל של יהלומים ישקלו ברמת דיוק שונה.

### גבולות מדומים:

כאשר גבול עליון של מחלקה אחת שונה מגבול תחתון של המחלקה הבאה אז הגבולות הם גבולות מדומים. כשהגבולות מדומים, ההפרש בין גבול תחתון של מחלקה לבין גבול עליון של המחלקה הקודמת יהיה רמת הדיוק.

**רמת הדיוק חייבת להיות קבועה** - אין אפשרות שחלק מהאנשים נדייק ברמה אחת ואת השאר ברמה אחרת. בגלל שהמשתנה הוא משתנה רציף, כשננתח את הנתונים נעבור מגבולות מדומים לגבולות אמיתיים. אם הנתונים יינתנו בגבולות מדומים נהפוך אותם תמיד לגבולות אמיתיים.

כיצד עוברים מגבולות מדומים לגבולות אמיתיים?

לוקחים את רמת הדיוק ומחלקים אותה ב-2, ואת התוצאה המתקבלת מוסיפים לגבולות העליונים ומפחיתים מהגבולות התחתונים. אם יתנו נתונים בגבולות מדומים אנחנו מוכרחים לעבור לגבולות אמיתיים על מנת להמשיך ולנתח, אך אם הנתונים כבר יינתנו בגבולות אמיתיים נשאיר אותם כמו שהם.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

להלן התפלגות הגבהים בס"מ של תלמידי כיתה ח': יש להעביר את הנתונים לגבולות אמיתיים.

$f(x)$	$X$
20	130-139
25	140-149
30	150-159
20	160-169
10	170-189

## שאלות:

- (1) להלן התפלגות של משתנה בהצגה של מחלקות. יש להעביר את הנתונים לגבולות אמיתיים:

$f(x)$	$X$
542	500-590
32	600-690
154	700-790
254	800-890

- (2) להלן התפלגות המשקלים בק"ג של קבוצת אנשים מסוימת. יש לרשום את הנתונים בגבולות אמיתיים:

מספר אנשים	משקל בק"ג
18	60-64
24	65-69
52	70-79
19	80-89

## תשובות סופיות:

- (1) להלן טבלה:

$f(x)$	$x$
542	495-595
32	595-695
154	695-795
254	795-895

- (2) להלן טבלה:

$f(x)$	$x$
18	59.5-64.5
24	64.5-69.5
52	69.5-79.5
19	79.5-89.5

# שיטות סטטיסטיות ב

פרק 4 - סטטיסטיקה תיאורית- סכימה

תוכן העניינים

17 ..... 1. כללי

## סטטיסטיקה תיאורית – סכימה:

רקע:

בסטטיסטיקה ישנה צורת רישום מקובלת לסכום של תצפיות:  $\sum_{i=1}^n X_i$ .

נסביר את צורת הרישום על ידי הדוגמה הבאה:

$i$	$X_i$
1	5
2	0
3	1
4	3
5	2

(הסבר מלא מופיע בסרטונים באתר).

## שאלות:

- 1) בבניין 5 דירות. לכל דירה רשמו את מספר החדרים שיש בדירה ( $X$ ), ומספר הנפשות החיות בדירה ( $Y$ ). חשבו:

$Y$	$X$	מספר דירה
1	2	1
1	3	2
2	2	3
3	4	4
2	3	5

א.  $\sum_{i=1}^3 X_i$

ב.  $\sum_{i=1}^5 Y_i$

ג.  $\sum_{i=1}^4 X_i$

ד.  $\left(\sum_{i=1}^4 X_i\right)^2$

ה.  $\sum X_i$

ו.  $\sum X_i Y_i$

ז.  $\sum(X_i) \sum(Y_i)$

- (2) נתון לוח ערכי המשתנים  $X_i$  ו- $Y_i$ , כאשר:  $i = 1, 2, \dots, 6$ , ונתונים הקבועים:  
 $a = 2$ ,  $b = 5$ . חשבו את הנוסחאות הבאות:

$i$	1	2	3	4	5	6
$X_i$	3	2	4	-2	1	4
$Y_i$	2	0	0	1	-5	2

$$\text{א. } \sum_{i=1}^4 y_i$$

$$\text{ב. } \sum_{i=1}^6 a$$

$$\text{ג. } \sum_{i=1}^6 x_i y_i$$

$$\text{ד. } \sum_{i=1}^6 (x_i + y_i)$$

$$\text{ה. } \sum_{i=1}^6 x_i + a$$

- (3) קבעו לכל זהות האם היא נכונה:

$$\text{א. } \sum_{i=1}^n bX_i = b \cdot \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\text{ב. } \sum_{i=1}^n a = a \cdot n$$

$$\text{ג. } \left( \sum_{i=1}^n X_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

$$(4) \text{ נתון: } \sum_{i=1}^{10} X_i = 80, \quad \sum_{i=1}^{10} X_i^2 = 1640$$

$$\text{חשבו: } \sum_{i=1}^{10} (X_i - 4)^2$$

**תשובות סופיות:**

- |              |         |           |              |
|--------------|---------|-----------|--------------|
| ד. 121.      | ג. 11.  | ב. 9.     | א. 7. (1     |
|              | ז. 126. | ו. 27.    | ה. 14.       |
|              | ג. 7.   | ב. 12.    | א. 3. (2     |
|              |         | ה. 14.    | ד. 12.       |
| ג. לא נכונה. |         | ב. נכונה. | א. נכונה. (3 |
|              |         |           | .1160 (4     |

# שיטות סטטיסטיות ב

פרק 5 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום מרכזי

תוכן העניינים

1. כללי ..... 21

## סטטיסטיקה תיאורית – מדדי מיקום מרכזי:

**רקע:**

המטרה במדדי המיקום המרכזי היא למדוד את מרכז ההתפלגות של התצפיות.

**השכיח – Mode:**

השכיח הוא הערך הנפוץ ביותר בהתפלגות.

**ברשימה**

הערך החוזר על עצמו הכי הרבה פעמים: 7, 9, 4, 8, 4, 10, 6.

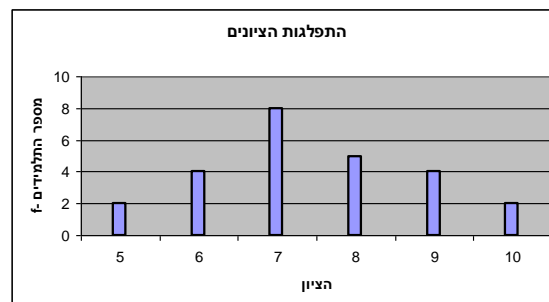
**בטבלת שכיחויות בדידה**

הערך שהשכיחות שלו היא הגבוהה ביותר.

$f(x)$	# תוכניות החיסכון
100	0
75	1
25	2
25	3
25	4

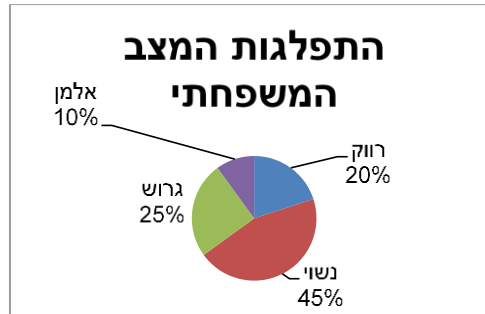
**בדיאגרמת מקלות**

שיעור ה-  $X$  של המקל הגבוה ביותר.



### בעוגה

הערך של הפלח הגדול ביותר.



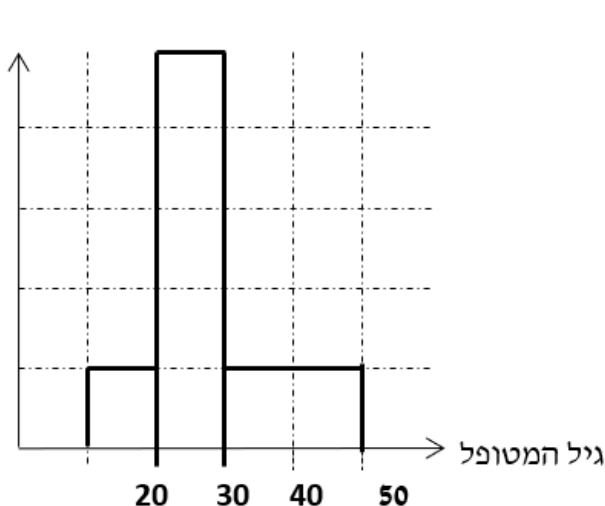
### בטבלת שכיחויות במחלקות

אמצע המחלקה עם הצפיפות הגבוהה ביותר.  
לדוגמה, התפלגות הציונים בכיתה :

$f(x)$	$X$
20	0-60
10	60-70
18	70-80
15	80-90
15	90-100

### בהיסטוגרמה

שיעור ה- $X$  של אמצע המחלקה הגבוהה ביותר.  
לדוגמה, גיל המטופלים של ד"ר שוורץ בשנים :



= 8

### כללי

יתכן שלהתפלגות יותר משכיח אחד.  
 השכיח הוא מדד הרלבנטי לכל סוגי המשתנים.

### אמצע תחום (טווח) – Midrange:

הממוצע בין התצפית הגבוהה ביותר לתצפית הנמוכה ביותר:

$$MR = \frac{X_{\min} + X_{\max}}{2}$$

### החציון – Median:

החציון הוא ערך שמחצית מהתצפיות קטנות או שוות לו ומחצית מהתצפיות גדולות או שוות לו.

### ברשימה

נסדר את התצפיות בסדר עולה.

אם יש מספר אי זוגי של איברים, מקומו של החציון יהיה התצפית שמיקומה:  $\frac{n+1}{2}$ .

אם יש מספר זוגי של איברים – החציון הוא ממוצע של האיבר ה- $\frac{n}{2}$ ,

והאיבר ה- $\frac{n}{2} + 1$ , כלומר שיש מספר אי-זוגי של תצפיות החציון יהיה:  $md = X_{\frac{n+1}{2}}$ ,

וכשיש מספר זוגי של תצפיות החציון יהיה:  $md = \frac{X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}}{2}$ .

### בטבלת שכיחויות בדידה

נעשה תהליך דומה אך נעזר בשכיחות המצטברת.

### דיאגרמת מקלות

נמיר לטבלת שכיחויות בדידה במטרה למצוא את החציון.

### בטבלת שכיחויות במחלקות

שלב א: נמצא את המחלקה החציונית שמיקומה יהיה  $\frac{n}{2}$ .

שלב ב: נציב בנוסחה הבאה:  $Md = L_0 + \frac{\frac{n}{2} - F(x_{m-1})}{f(x_m)} \cdot (L_1 - L_0)$

$F(x_{m-1})$  - שכיחות מצטברת של מחלקה אחת לפני המחלקה החציונית.  
 $f(x_m)$  - השכיחות של המחלקה החציונית.

$L_0$  - גבול התחתון של המחלקה.

$L_1$  - גבול העליון של המחלקה.

### היסטוגרמה

החציון הוא הערך על ציר ה- $X$  שמחלק את ההיסטוגרמה לשני חלקים שווים בשטח.

### כללי

החציון אינו רלבנטי למשתנה מסולם שמי ולא רלבנטי למשתנה איכותי.

### הממוצע – Average :

הממוצע הוא מרכז הכובד של ההתפלגות.

### ברשימה

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

### בטבלת שכיחויות

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot f}{n}$$

## במחלקות

נשתמש באותה נוסחה רק נתייחס לאמצע המחלקה בתור ה-  $X$ .  
הממוצע הזה יהיה ממוצע מקורב.

## כללי

הממוצע רלבנטי רק למשתנה כמותי.

## מדדי המיקום המרכזי בהתפלגויות המיוחדות:

בהתפלגות סימטרית פעמונית כל מדדי המרכז שווים זה לזה:

### התפלגות סימטרית



בהתפלגות סימטרית השכיח לא חייב להיות במרכז:

### התפלגות U



התפלגות  
א-סימטרית  
שמאלית או  
שלילית



התפלגות א-סימטרית  
ימנית או חיובית



## שאלות:

- (1) להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:  
 6, 5, 8, 7, 6, 6, 7, 8, 7, 6, 5, 4, 6, 10, 9, 8, 6, 7.  
 חשבו את החציון, השכיח, והממוצע של הציונים.
- (2) בדקו את מספר החדרים לדירה בבניין בן 5 דירות והתקבל ממוצע 3.8.  
 לגבי 4 דירות נמצא מספר חדרים: 5, 4, 3, 4.  
 א. כמה חדרים יש בדירה החמישית?  
 ב. מהו השכיח ומהו החציון?
- (3) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה שנספרו עבור כל משפחה בישוב מסוים:

מספר משפחות	מספר מקלטים
22	0
28	1
18	2
22	3
10	4

- א. חשבו את הממוצע, החציון והשכיח של ההתפלגות.  
 ב. הסבירו ללא חישוב כיצד כל מדד שחישבת בסעיף א' היה משתנה אם חלק מהמשפחות (לא כולן) שלא היה להם עד היום טלוויזיה היו רוכשים מקלט אחד.

- (4) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן":

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

- א. כמה משפחות יש בישוב?  
 ב. מה אחוז המשפחות בישוב עם לכל היותר 2 מכוניות?  
 ג. חשבו את הממוצע, החציון והשכיח.  
 הקפידו להסביר לגבי כל סעיף מה משמעות התוצאה שקיבלתם!



5) מורה לימד 2 כיתות, הוא תיאר באותה מערכת צירים את התפלגות הציונים בכל כיתה. בחרו בתשובה הנכונה:

- בכיתה 1 השכיח גבוה יותר מכיתה 2.
- בכיתה 2 השכיח גבוה יותר מכיתה 1.
- בשתי הכיתות אותו שכיח.
- לא ניתן לדעת באיזו כיתה השכיח גדול יותר.

6) ביישוב מסוים בדקו לכל משפחה את מספר הטלוויזיות שיש לה בבית. ביישוב גרות 200 משפחות. בממוצע יש למשפחה 1.5 טלוויזיות.

מספר טלוויזיות	מספר משפחות
0	28
1	62
2	
3	

- השלימו את הטבלה.
- מהו השכיח, אמצע טווח והחציון.
- חלק מהמשפחות להן הייתה טלוויזיה אחת בדיוק הוציאו את הטלוויזיה מביתם. כיצד כל מדד ישתנה (יגדל, יקטן או לא ישתנה). הסבירו ללא חישוב.

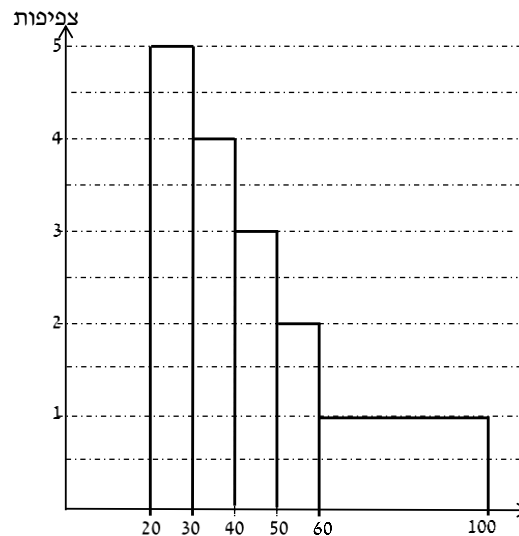
7) להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג. מה הממוצע והחציון של ההתפלגות?

משקל	מספר מקרים
40-45	10
45-50	20
50-60	30
60-65	20
65-70	10

8) להלן התפלגות הגבהים בס"מ בקבוצה מסוימת. חשבו את הממוצע, החציון והשכיח של הגבהים בקבוצה זו.

גובה בס"מ	שכיחות
150-160	30
160-170	40
170-175	60
175-180	70
180-190	40

9) בפקולטה מסוימת בדקו לסטודנטים העובדים בה את השכר לשעת עבודה. להלן התוצאות:



- מצאו את השכיח בהתפלגות.
- מצאו את החציון בהתפלגות.
- הסבירו ללא חישוב האם הממוצע גדול/קטן/שווה לחציון.
- הסתבר שיש להוציא מספר תלמידים במחלקה בין 20-30 שקלים. כיצד הדבר ישפיע על הממוצע, החציון והשכיח? הסבירו ללא חישוב.

### תשובות סופיות:

- (1) חציון: 7, שכיח: 6, ממוצע: 6.9.
- (2) א. 3. ב. שכיח: 3.4, חציון: 4.
- (3) א. ממוצע: 1.7, חציון: 1.5, שכיח: 1. ב. הממוצע יגדל ויתר המדדים לא ישתנו.
- (4) א. 630. ב. 34.13%. ג. שכיח וחציון: 3, ממוצע: 2.952.
- (5) ב'.
- (6) א. להלן טבלה: ב. חציון: 2, שכיח: 2, אמצע טווח: 1.5.

מספר משפחות	מספר טלויזיות
28	0
62	1
92	2
18	3

ג. שכיח: לא ישתנה, אמצע הטווח: לא ישתנה, חציון: לא ישתנה, ממוצע: יקטן.

- (7) חציון וממוצע: 55.
- (8) ממוצע: 172.6, חציון: 174.17, שכיח: 177.5.
- (9) א. 25. ב. 40. ג. גדול מהחציון. ד. שכיח: לא ישתנה, חציון: יגדל, ממוצע: יגדל.

## שיטות סטטיסטיות ב

פרק 6 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - הטווח, השונות וסטיית התקן

תוכן העניינים

1. כללי ..... 30

## סטטיסטיקה תיאורית – מדדי פיזור – הטווח, השונות וסטיית התקן:

### רקע:

**המטרה:** למדוד את הפיזור של הנתונים, כלומר כמה הם רחוקים זה מזה ושונים זה מזה.

**הטווח / תחום (RANGE):**

ההפרש בין התצפית הגבוהה ביותר לנמוכה ביותר:  $R = X_{\max} - X_{\min}$ .

### שונות וסטיית תקן:

שונות היא ממוצע ריבועי של הסטיות מהממוצע וסטיית התקן היא שורש של השונות.

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

עבור סדרת נתונים:

### דוגמאות:

(1) נחשב את השונות של סדרת המספרים הבאה: 5, 4, 9.

$$S_x^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{n} = \frac{\sum x^2 \cdot f}{n} - \bar{x}^2$$

עבור טבלת שכיחויות:

(2) להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת בה ממוצע הציונים הוא 7.44.

הציון $X$	השכיחות $F$	$x^2 \cdot F$
5	2	50
6	4	144
7	8	392
8	5	320
9	4	324
10	2	200
<b>סה"כ</b>		<b>1430</b>

$$S_x^2 = \frac{\sum x^2 f(x)}{n} - \bar{x}^2 = \frac{1430}{25} - 7.44^2 = 1.8464$$

$$S = \sqrt{S_x^2} = \sqrt{1.8464} = 1.3588$$

כשיש מחלקות נעזר באמצע המחלקה כדי לחשב את השונות.

## שאלות:

1) להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:  
6, 5, 8, 7, 6, 8, 7, 6, 5, 8, 4, 6, 10, 9, 8, 6, 7.  
חשבו את השונות, סטיית התקן והטווח של הציונים.

2) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן":

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

א. חשבו סטיית התקן.

ב. חשבו את הטווח של הנתונים.

הקפידו להסביר לגבי כל סעיף מה משמעות התוצאה שקיבלתם.

3) בחברה העוסקת בטלמרקטינג בדקו עבור כל עובד את מספר שנות הוותק שלו. התקבל שממוצע שנות הוותק הוא 4 שנים וסטיית התקן היא שנתיים.

א. האם הממוצע יגדל/יקטן/לא ישתנה וסטיית התקן תגדל/תקטן/לא תשנה כאשר יתווספו שני עובדים עם וותק של 4 שנים להתפלגות?

ב. האם הממוצע יגדל/יקטן/לא ישתנה וסטיית התקן תגדל/תקטן/לא תשנה כאשר יתווספו שני עובדים אשר אחד עם וותק של 0 שנים והשני עם וותק של 8 שנים להתפלגות?

4) נתונה רשימה של 5 תצפיות, אך רק עבור 4 מהן נרשמו הסטיות שלהן מהממוצע: 2, 3, 2, -1. חשבו את השונות של חמש התצפיות.

5) בשכונה בדקו בכל דירה את מספר החדרים לדירה. בשכונה 200 דירות.

מספר חדרים	פרופורציה
1	0.1
2	0.2
3	0.4
4	0.15
5	

א. מה הממוצע של מספר החדרים לשכונה בדירה?

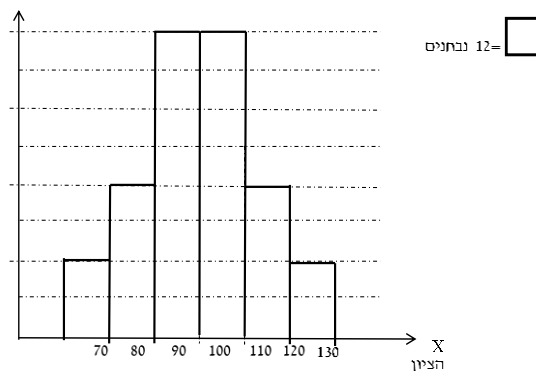
ב. חשבו את סטיית התקן של מספר החדרים לדירה.

ג. חלק מבעלי הדירות בנות 2 החדרים הפכו את דירתם לדירת חדר. כיצד הדבר ישפיע (יקטין, יגדל, לא ישנה) על כל מדד שחישבתם בסעיפים הקודמים.

6) להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג: מהי סטיית התקן של התפלגות המשקל?

משקל	מספר מקרים
40-45	10
45-50	20
50-60	30
60-65	20
65-70	10

7) להלן התפלגות הציונים במבחן אינטליגנציה:



- א. מה הממוצע ומה החציון של ההתפלגות?  
 ב. חשבו את סטיית התקן של הציונים.  
 ג. מסתבר שיש להוסיף 20 תצפיות לכל אחת משתי המחלקות 90-100 ו-100-110. כיצד הדבר ישתנה את כל אחד מהמדדים של הסעיפים הקודמים?

### תשובות סופיות:

- 1) שונות: 2.19, סטיית תקן: 1.48, טווח: 6.  
 2) א. סטיית תקן: 1.106. ב. טווח: 4.  
 3) א. ממוצע לא ישתנה, סטיית התקן תקטן.  
 ב. ממוצע לא ישתנה, סטיית התקן תגדל.  
 4) 10.8  
 5) א. 3.05. ב. 1.16. ג. ממוצע: יקטן, סטיית התקן: תגדל.  
 6) 7.73  
 7) א. 100. ב. 12.96. ג. ממוצע: לא ישתנה, סטיית תקן: תקטן.

# שיטות סטטיסטיות ב

פרק 7 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - טווח בין רבעוני

תוכן העניינים

1. כללי ..... 33

## סטטיסטיקה תיאורית – מדדי פיזור – טווח בין רבעוני:

רקע:

הטווח הבין-רבעוני נותן את הטווח בין הרבעונים בו נמצאים 50% מהתצפיות המרכזיות.

שלבם במציאת טווח בין-רבעוני במחלקות:

$F$	$f$ מספר עובדים (שכחות)	רוחב $L_1 - L_0$	מספר שנות ותק
56	56	4	0.5 – 4.5
106	50	5	4.5 – 9.5
154	48	2	9.5 – 11.5
190	36	3	11.5 – 14.5
200	10	5	14.5 – 19.5

שלב א:

נמצא את הרבעון התחתון (אחוזון 25) והרבעון העליון (האחוזון ה-75).

מיקום הרבעון התחתון יהיה:  $\frac{n}{4}$ . מיקום הרבעון העליון יהיה:  $\frac{3n}{4}$ .

נוסחאות הרבעונים יהיו:

$$Q_1 = L_0 + \frac{\frac{n}{4} - F(x_{m-1})}{f(x_m)} \cdot (L_1 - L_0)$$

$$Q_3 = L_0 + \frac{\frac{3n}{4} - F(x_{m-1})}{f(x_m)} \cdot (L_1 - L_0)$$

נציב:

$$Q_1 = 0.5 + \frac{\frac{200}{4} - 0}{56} \cdot 4 = 4.07 \text{ שניות}$$

$$Q_3 = 9.5 + \frac{\frac{3 \cdot 200}{4} - 106}{48} \cdot 2 = 11.33 \text{ שניות}$$

שלב ב:

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 11.33 - 4.07 = 7.26 \text{ שניות}$$

נחסר את הרבעונים:

## שאלות:

(1) להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג:

מספר מקרים	משקל
10	40-45
20	45-50
30	50-60
20	60-65
10	65-70

מצאו את הטווח הבין-רבעוני.

(2) להלן היסטוגרמה המתארת את התפלגות הגבהים בס"מ של קבוצה מסוימת:



מצאו את הטווח הבין-רבעוני.

## תשובות סופיות:

(1) 13.75 ק"ג.

(2) 13.33 ק"ג.

## שיטות סטטיסטיות ב

פרק 8 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - ממוצע סטיות מוחלטות  
מהחציון

תוכן העניינים

1. כללי ..... 35

## סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - ממוצע סטיות מוחלטות מהחציון:

### רקע:

מדד זה הוא מדד לפיזור בנוסף למדדים שנלמדו בפרקים הקודמים כמו סטיית התקן. המדד בודק את הפיזור הממוצע סביב החציון. הרעיון הוא למצוא בכמה התצפיות סוטות בערכן המוחלט מהחציון, בממוצע. כדי לחשב את המדד יש לחשב קודם כל את החציון.

אם מדובר ברשימה של תצפיות, הנוסחה לחישוב המדד:

$$MAD = \frac{\sum_i |X_i - Md|}{n}$$

אם מדובר בטבלת שכיחויות, הנוסחה לחישוב המדד:

$$MAD = \frac{\sum |X_i - Md| \cdot f(X)}{n}$$

כאשר מדובר על טבלת שכיחויות במחלקות ניקח בתור  $X$  את אמצע המחלקה.

### דוגמה (הפתרון בהקלטה):

נתונה רשימת המספרים הבאה: 2, 8, 7, 6, 3.  
מה ממוצע הסטיות המוחלטות מהחציון?

## שאלות:

- (1) נתונה רשימת המספרים הבאה: 3, 5, 6, 9, 12, 8. מה ממוצע הסטיות המוחלטות מהחציון?
- (2) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלויזיה שנספרו עבור כל משפחה בישוב מסוים:

מספר משפחות	מספר מקלטים
22	0
28	1
18	2
22	3
10	4

- א. חשבו את החציון.
- ב. חשב את ממוצע הסטיות המוחלטות מהחציון.
- ג. הסבירו ללא חישוב כיצד כל מדד שחושב היה משתנה, אם 5 משפחות שהיה להם מקלט יחיד היו מוכרים אותו.

## תשובות סופיות:

- (1) 2.5
- (2) א. 1.5      ב. 1.14      ג. חציון לא ישתנה, ממוצע סטיות מוחלטות מהחציון יגדל.

# שיטות סטטיסטיות ב

פרק 9 - סטטיסטיקה תיאורית-מדדי מיקום יחסי-ציון תקן

תוכן העניינים

1. כללי ..... 37

## סטטיסטיקה תיאורית – מדדי מיקום יחסי – ציון תקן:

### רקע:

המטרה למדוד איך תצפית ממוקמת ביחס לשאר התצפיות בהתפלגות.

### ציון תקן:

הנוסחה לציון תקן של תצפית היא:  $Z = \frac{X - \bar{X}}{S}$ .

- ציון התקן נותן כמה סטיות תקן סוטה התצפית מהממוצע. כלומר, ציון התקן מעיד על כמה סטיות תקן התצפית מעל או מתחת לממוצע:
- ציון תקן חיובי אומר שהתצפית מעל הממוצע.
  - ציון תקן שלילי אומר שהתצפית מתחת לממוצע.
  - ציון תקן אפס אומר שהתצפית בדיוק בממוצע.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

במקום עבודה מסוים, ממוצע המשכורות הוא 8 אלף ₪, עם סטית תקן של אלפיים ₪. באותו מקום עבודה ההשכלה הממוצעת של העובדים הנה 14 שנים, עם סטית תקן של 1.5 שנים. ערן מרוויח במקום עבודה זה 11 אלף ₪ והשכלתו 16 שנים. מה ערן יותר, באופן יחסי, משכיל או משתכר?

## שאלות:

- 1) תלמידי כיתה ח' ניגשו למבחן בלשון ולמבחן במתמטיקה. להלן התוצאות שהתקבלו:

המקצוע	ממוצע	סטיית תקן
לשון	74	12
מתמטיקה	80	16

עודד קיבל: 68 בלשון ו-70 במתמטיקה.

- א. באיזה מקצוע עודד טוב יותר באופן יחסי לשכבה שלו?  
 ב. איזה ציון עודד צריך לקבל במתמטיקה כדי שיהיה שקול לציונו בלשון?

- 2) במפעל לייצור מצברים לרכב בדקו במשך 40 ימים את התפוקה היומית (מספר מצברים במאות) ואת מספר הפועלים שעבדו באותו היום. להלן טבלה המסכמת את המידע שנאסף על שני המשתנים:

מספר פועלים	תפוקה	ממוצע
15	48	
2	10	סטיית תקן

- באחד הימים מתוך כלל הימים שנבדקו התפוקה הייתה 50 מאות מצברים ובאותו היום עבדו 13 פועלים.  
 מה יותר חריג באותו היום, יחסית לשאר הימים שנבדקו: נתוני התפוקה או כמות הפועלים?  
 א. התפוקה.  
 ב. כמות הפועלים.  
 ג. חריגים באותה מידה.  
 ד. חסרים נתונים כדי לדעת זאת.

- 3) הגובה הממוצע של המתגייסים לצבא הוא 175 סנטימטר עם סטיית תקן של 10 סנטימטר. המשקל הממוצע הוא 66 ק"ג עם סטיית תקן של 8 ק"ג. ערך התגייס כשגובהו 180 ס"מ ומשקלו 59 ק"ג.  
 א. במה ערך חריג יותר ביחס לשאר המתגייסים, גובהו או משקלו?  
 ב. כמה ערך אמור לשקול כדי שמשקלו יהיה שקול לגובהו?

## תשובות סופיות:

- 1) א. לשון. ב. 72.  
 2) ב'.  
 3) א. משקל. ב. 70.

## שיטות סטטיסטיות ב

פרק 10 - סטטיסטיקה תיאורית-מדדי מיקום יחסי-אחוזונים במחלקות

תוכן העניינים

1. כללי ..... 39

## סטטיסטיקה תיאורית – מדדי מיקום יחסי – אחוזונים במחלקות:

### רקע:

האחוזון (המאון) ה- $p$  הוא הערך בנתונים המחלק את הנתונים בצורה כזאת שעד אליו יש  $p\%$  מהנתונים. מסמנים את האחוזון ה- $p$  ב- $X_p$ . למשל, המאון ה-25 הוא האחוזון ה-25 או הרבעון התחתון: ערך שרבע מהתצפיות קטנות ממנו והשאר גבוהות ממנו. מסומן:  $X_{0.25}$ .

### מציאת מאון במחלקות:

שלב א: נמצא את המחלקה הרלבנטית שמיקומה יהיה:  $\frac{np}{100}$ .

שלב ב: נציב בנוסחה הבאה:  $x_p = L_0 + \frac{\frac{n \cdot p}{100} - F(x_{m-1})}{f(x_m)} \cdot (L_1 - L_0)$ , את המשתנים:

$F(x_{m-1})$  - שכיחות מצטברת של מחלקה אחת לפני המחלקה הרלבנטית.

$f(x_m)$  - השכיחות של המחלקה הרלבנטית.

$L_0$  - גבול התחתון של המחלקה.

$L_1$  - גבול העליון של המחלקה.

אם נרצה לחלץ את אחוז התצפיות שמתחת לערך מסוים נשתמש בנוסחה

$$P_x = \left[ \frac{(x - L_0)}{(L_1 - L_0)} \cdot f(x_m) + F(x_{m-1}) \right] \cdot \frac{100}{n}$$

הבאה:

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

להלן התפלגות השכר של עובדים בחברה מסוימת:

שכר ב-₪	
4000-6000	140
6000-10000	128
10000-15000	60
15000-20000	54
20000-40000	18

א. מצאו את המאון ה-40.

ב. מהו אחוז העובדים שמשתכרים מתחת ל-5,000 ₪?

## שאלות:

(1) להלן התפלגות השכר (באלפי שקלים) בחברה:

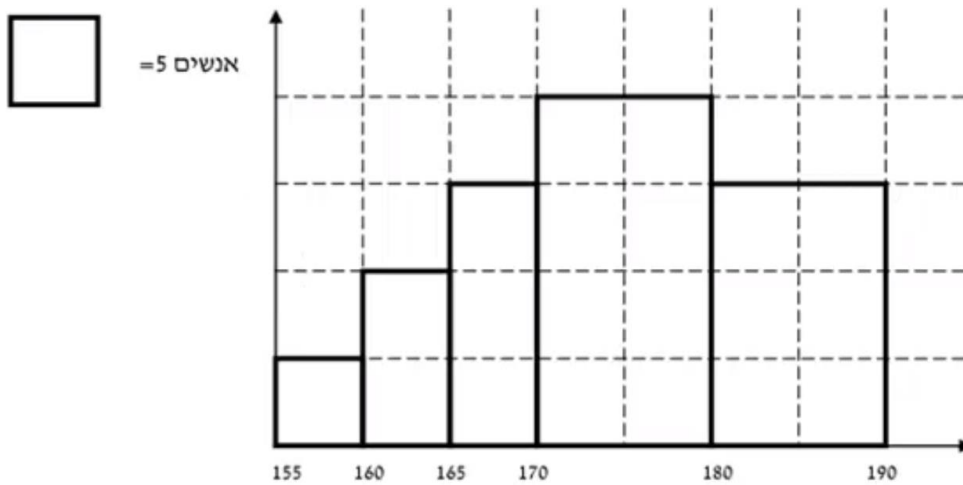
שכחות מצטברת	שכר - $X$
48	6-10
100	10-15
120	15-20
132	20-30
136	30-60

- א. חשבו את המאון ה-60.  
 ב. מהו העשירון העליון?  
 ג. 20% מהמשכורות הגבוהות ביותר הן משכורות של הבכירים, מהי המשכורת המינימאלית לבכיר?  
 ד. מה אחוז האנשים שמשכרם מתחת ל-7,000 ₪?  
 ה. איזה אחוז מהעובדים משכרם מעל ל-25,000 ₪?  
 ו. איזה אחוז מהעובדים משכרם בין 7,000 ₪ ל-25,000 ₪?

(2) למבחן ניגשו 400 נבחנים. נתון שהעשירון התחתון הוא הציון 60. הרבעון העליון הוא הציון 80. כמו כן ההתפלגות של הציונים היא סימטרית. מלאו את השכיחויות החסרות.

ציון - $X$	$f(x)$
50-60	
60-70	
70-80	
80-90	
90-100	

3) להלן היסטוגרמה המתארת את התפלגות הגבהים בס"מ של קבוצה מסוימת:



חשבו:

- העשירון התחתון.
- האחוזון ה-30.
- הגובה ש-20% מהתצפית גדולות ממנו.
- את אחוז התצפיות מתחת לגובה 158 ס"מ.
- את אחוז התצפיות מעל לגובה 185 ס"מ.
- את אחוז התצפיות בין גובה 170 ס"מ ל-185 ס"מ.

תשובות סופיות:

- 13.23
    - 22
    - 17.2
    - 8.82%
    - 7.36%
  - 83.82%
- להלן טבלה:

ציון- $X$	$f(x)$
50-60	40
60-70	60
70-80	200
80-90	60
90-100	40

- 162.5
  - 170
  - 183.33
  - 3%
  - 15%
- 55%

# שיטות סטטיסטיות ב

פרק 11 - סטטיסטיקה תיאורית-אחוזונים בטבלה בדידה

תוכן העניינים

1. כללי ..... 42

## סטטיסטיקה תיאורית – מדדי מיקום יחסי – אחוזונים בטבלה בדידה:

### רקע:

האחוזון (המאון) ה- $p$  הוא הערך בנתונים המחלק את הנתונים בצורה כזאת, שעד אליו (כולל) יש  $p\%$  מהנתונים. מסמנים את האחוזון ה- $p$  ב- $X_p$ .

### חישוב האחוזון מתוך נתונים בטבלת שכיחויות בדידה:

האחוזון הוא הערך שבו בפעם הראשונה השכיחות היחסית המצטברת (באחוזים) גדולה או שווה ל- $p\%$ .

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

בסניף בנק 250 לקוחות. ספרו לכל לקוח את מספר תוכניות החיסכון שלו:

שכיחות יחסית מצטברת	שכיחות מצטברת	$F(x)$	# תוכניות החיסכון
		100	0
		75	1
		25	2
		25	3
		25	4

א. מצאו את האחוזון ה-25.

ב. מצאו את הערך ש-20% מהמקרים מעליו.

## שאלות:

(1) להלן התפלגות של משתנה כלשהו:

$F(x)$	$X$
10	0
40	1
30	2
15	3
5	4

מצאו להתפלגות את:

- א. האחוזון ה-60.
- ב. המאון ה-40.
- ג. העשירון העליון.
- ד. הטווח בין הרבעונים.

(2) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן":

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

חשבו את:

- א. העשירון התחתון.
- ב. האחוזון ה-30.
- ג. הערך ש-20% מהתצפית גדולות ממנו.
- ד. רבעון עליון.

## תשובות סופיות:

- (1) א. 2      ב. 1      ג. 3      ד. 1
- (2) א. 1      ב. 2      ג. 4      ד. 4

# שיטות סטטיסטיות ב

פרק 12 - סטטיסטיקה תיאורית - טרנספורמציה לינארית

תוכן העניינים

44 ..... 1. כללי

## סטטיסטיקה תיאורית – טרנספורמציה לינארית:

### רקע:

מצב שבו מבצעים שינוי מסוג הוספה (או החסרה) של קבוע, והכפלה (או חילוק) של קבוע, לכל התצפיות:  $y = a \cdot x + b$ . כך יושפעו המדדים השונים:

$$MR_y = a \cdot MR + b$$

$$MO_y = a \cdot MO + b$$

$$\bar{y} = a \cdot \bar{x} + b$$

$$Md_y = a \cdot Md_x + b$$

**מדדי המרכז:**

$$R_y = |a| R_x$$

$$S_y = |a| S_x$$

$$S_y^2 = a^2 S_x^2$$

**מדדי הפיזור:**

$$Y_p = a \cdot X_p + b$$

$$Z_y = \frac{a}{|a|} Z_x$$

**מדדי המיקום היחסי:**

### שלבי העבודה:

1. נזהה שמדובר בטרנספורמציה לינארית (שינוי קבוע לכל התצפיות).
2. נרשום את כלל הטרנספורמציה לפי נתוני השאלה.
3. נפשט את הכלל ונזהה את ערכי  $a$  ו- $b$ .
4. נציב בנוסחאות שלעיל בהתאם למדדים שנשאלים.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

השכר הממוצע של עובדים הינו 9000 ₪ וטווח 6000 ₪. חשבו את המדדים הללו לאחר שהעלו את כל המשכורות ב-10% ואחר כך קנסו אותם ב-100 ₪.

## שאלות:

- (1) עבור סדרת נתונים התקבל:  $\bar{x} = 80, S = 15, MO = 70$ .  
הוחלט להכפיל את כל התצפיות ב-4 ולהחסיר מהתוצאה 5.  
חשבו את המדדים הללו לאחר השינוי.
- (2) בחברה מסוימת השכר הממוצע הוא 40 ₪ לשעה עם סטיית תקן של 5 ₪ לשעה.  
הוחלט להעלות את כל המשכורות ב-10%, אך זה לא סיפק את העובדים ולכן הם קיבלו לאחר מכן תוספת של 2 ₪ לשעה.  
מה הממוצע ומהי השונות של השכר לשעה לאחר כל השינויים.
- (3) במבחן מסוים הציון החציוני היה 73, טווח הציונים היה 40 נקודות והעשירון העליון היה הציון 87. כיוון שהציונים בבחינה היו נמוכים, המורה החליט לתת פקטור של 4 נק' לכל התלמידים.  
חשבו את המדדים לאחר הפקטור.
- (4) דגמו מקו ייצור 50 קופסאות של גפרורים. בדקו בכל קופסא בה יש 40 גפרורים את כמות הגפרורים הפגומים. התקבל שבממוצע יש 3 גפרורים פגומים בקופסא, עם סטיית תקן של 1.5 גפרורים.  
מה יהיה הממוצע ומה תהיה סטיית התקן של מספר התקינים בקופסא?
- (5) חברת בזק הציעה את ההצעה הבאה: שלושים שקלים דמי מנוי חודשיים קבועים וכן 10 אגורות לכל דקה של שיחה יוצאת. אדם בדק במשך שנה את דקות השיחות היוצאות שלו, וקיבל שבממוצע חודשי יש לו 600 דקות שיחות יוצאות עם שונות של 2500 דקות רבועות, כמו כן בחודש ינואר ציון התקן היה 2.  
חשבו את המדדים הללו עבור חשבון הטלפון החודשי של אותו אדם בשקלים אם היה משתמש בחבילה המוצעת לו על ידי בזק.
- (6) הוכיחו שאם כל התצפיות בהתפלגות עברו טרנספורמציה לינארית:  $Y_i = a \cdot X_i + b$ , אזי הממוצע והשונות של כלל התצפיות לאחר הטרנספורמציה יהיו בהתאמה:  
$$\bar{y} = a \cdot \bar{x} + b, S_y^2 = a^2 S_x^2$$

**תשובות סופיות:**

- (1) ממוצע: 315, סטיית תקן: 60, שכיח: 275.
- (2) ממוצע: 46, שונות: 30.25.
- (3) טווח: 40, חציון: 77, עשירון עליון: 91.
- (4) ממוצע: 37, סטיית תקן: 1.5.
- (5) ממוצע: 90, שונות: 25, ציון תקן: 2.
- (6)  $a^2 \cdot S_x^2$

# שיטות סטטיסטיות ב

פרק 13 - סטטיסטיקה תיאורית - שאלות מסכמות

תוכן העניינים

1. כללי ..... 47

## סטטיסטיקה תיאורית – שאלות מסכמות:

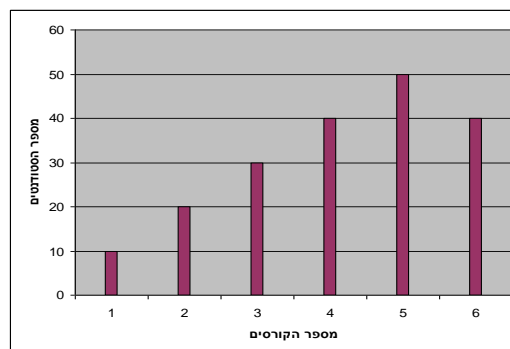
### שאלות:

1) בדקו עבור 5 תלמידים את המשקל שלהם:

מספר תלמיד	משקל בק"ג
1	58
2	62
3	48
4	34
5	58

- מהו המשתנה הנחקר? בדיד או רציף?
- מה המשקל החציוני, הממוצע והשכיח?
- מה הטווח וסטיית התקן של המשקל?
- לאותם תלמידים חישובו גם את הגובה בס"מ וקיבלו גובה ממוצע של 168 וסטיית תקן 6. במה תלמיד מספר 3, שגובהו 162, יותר חריג – במשקל או בגובה?
- הוסיפו עוד תלמיד השוקל 52 ק"ג בדיוק. הסבירו ללא חישוב כיצד הדבר ישפיע על הממוצע וסטיית התקן (יגדילו, יקטין או לא ישנה).

2) בפקולטה להנדסה אספה המזכירות נתונים לגבי מס' הקורסים שכל סטודנט סיים בשנה הראשונה ללימודיו בשנת 2008. להלן התוצאות שהתקבלו:



- מה המשתנה הנחקר? בדיד או רציף?
- מהי צורת ההתפלגות?
- תארו את הנתונים בטבלת שכיחויות.
- חשבו את השכיח, החציון והטווח.

3) להלן התפלגות הציונים בבחינה בלשון שנעשתה עבור תלמידי כיתות ד'.

במחקר השתתפו 150 תלמידים. ממוצע הציונים שהתקבל:  $\bar{X} = 7\frac{1}{15}$ .

מספר התלמידים	ציון
12	4
16	5
	6
38	7
	8
14	9
10	10

- השלימו את השכיחויות החסרות בטבלה.
- חשבו את הציון החציוני, השכיח.
- חשב שונות וסטיית תקן להתפלגות הציונים.

4) חברה סלולארית דגמה 200 אנשים. עבור כל אדם נבדקה מידת שביעות הרצון של הלקוח מהחברה (1 - שביעות רצון נמוכה ו-5 - שביעות רצון גבוהה). להלן ההתפלגות שהתקבלה:

מספר האנשים	שביעות רצון
40	1
60	2
50	3
30	4
20	5

- מה אחוז האנשים עם רמת שביעות רצון נמוכה?
- מה המשתנה הנחקר ומאיזה סוג הוא?
- מהי הדרך הגרפית המתאימה ביותר לתיאור הנתונים?
  - היסטוגרמה.
  - דיאגרמת מקלות.
  - דיאגרמת עוגה.
- חשבו את המדדים הבאים:
  - טווח.
  - שכיח.
  - חציון.

5) להלן התפלגות מספר שעות העבודה לשבוע של העובדים (כ-200) בחברת "סטאר":

מספר שעות עבודה	שכיחות יחסית (פרופורציה)	שכיחות
10-20	15%	
20-30	20%	
30-40	30%	
40-50	20%	
50-60		

- א. השלימו את הטבלה.
- ב. חשבו את החציון, השכיח והממוצע של התפלגות מס' שעות העבודה בחברה.
- ג. מה סטיית התקן של מספר שעות העבודה?
- ד. מה העשירון העליון של ההתפלגות?
- ה. איזה אחוז מהעובדים עובדים מעל 45 שעות בשבוע?
- ו. מה ציון התקן של רינה, שעובדת 30 שעות בשבוע?
- ז. כיצד ישתנה החציון, הממוצע וסטיית התקן אם מספר שעות העבודה המינימאלי אינו 10 אלא 15? הסבירו.

6) חברה סלולארית דגמה 200 אנשים. עבור כל אדם נבדק מס' המסרונים ששלח במשך חודש. להלן ההתפלגות שהתקבלה:

מספר המסרונים	מספר האנשים
0-50	40
50-100	60
100-150	50
150-250	30
250-ומעלה	20

- א. מה אחוז האנשים ששלחו פחות מ-80 מסרונים בחודש?
- ב. מה אחוז האנשים ששלחו בין 50 ל-120 מסרונים?
- ג. הוחלט להעניק מתנה עבור  $\frac{1}{4}$  מהלקוחות שמשלמים במספר הרב ביותר של מסרונים בחודש. החל מאיזה כמות של מסרונים תחולק המתנה?
- ד. ציינו איזה מדד ניתן לחשב ואיזה לא ניתן. אם ניתן, חשבו:
- ממוצע.
  - שכיח.
  - חציון.
  - שונות.

7) נתנו לקבוצת ילדים לבצע משימה מסוימת ובדקו את התפלגות זמן ביצוע המשימה בדקות. להלן ההתפלגות שהתקבלה:

מספר הילדים	זמן בדקות
20	0.5-3.5
18	3.5-9.5
14	9.5-19.5
8	19.5-29.5

- שרטטו היסטוגרמה לתיאור התפלגות זמן ביצוע המשימה.
- מתוך ההיסטוגרמה שבנית בסעיף א', מהי צורת ההתפלגות?
- חשבו את השכיח והחציון של ההתפלגות.
- הסבירו, ללא חישוב, האם הזמן הממוצע לביצוע המשימה, קטן או גדול או שווה ביחס לשכיח ולחציון.

8) התפלגות ציוני מבחן אינטליגנציה היא סימטרית. נתון שהעשירון העליון הוא 130, הרבעון התחתון הוא 90, ושלמבחן נגשו 500 מועמדים.

מספר הנבחנים	הציון
	50-70
	70-90
	90-100
	100-110
	110-130
	130-150

- השלימו את הטבלה.
- מהו הממוצע והחציון של ההתפלגות?
- מהו הציון ש-40% מהתלמידים קיבלו מעליו? באיזה אחוזון מדובר?
- הוחלט להעלות את כל הציונים ב-10 נקודות. כיצד הדבר ישפיע על הממוצע וסטיית התקן של הציונים?

- 9) להלן מספר טענות, עבור כל טענה ציינו אם היא נכונה או לא נכונה ונמקו.
- א. בסדרה שבה כל התצפיות שוות זו לזו השונות הינה 0.
  - ב. ציון התקן של החציון תמיד יהיה 0.
  - ג. ציון התקן של האחוזון ה-70 בהתפלגות אסימטרית ימנית (חיובית) תמיד יהיה חיובי.
  - ד. אם נוסיף תצפיות לסדרה של תצפיות, הדבר בהכרח יגדיל את הממוצע של הסדרה.
  - ה. בסדרה החציון הינו 80. הוספו שתי תצפיות אחת 79 ואחת 100 לכן החציון יגדל.
  - ו. אם נוסיף את הערך 4 לכל התצפיות אז סטיית התקן לא תשתנה.
  - ז. אם נחלק את כל התצפיות בהתפלגות ב-2 אז השונות תקטן פי 2.
  - ח. אם נגדיל את ממוצע המשכורות של עובדים בחברה אז גם השונות תגדל.

**תשובות סופיות:**

- (1) א. המשתנה הנחקר: משקל תלמיד בק"ג, משתנה כמותי רציף.  
 ב.  $\bar{X} = 52$ ,  $Md = X_{\frac{n+1}{2}} = X_3 = 58$ , שכיח: 58.  
 ג.  $R = 28$ ,  $S = 10.12$ .  
 ד. הוא חריג יותר בגובה כי שם ציון התקן בערך מוחלט יותר גבוה.  
 ה. הממוצע לא ישתנה אך סטיית התקן תקטן.
- (2) א. מספר הקורסים, בדיד. ב. התפלגות אסימטרית שמאלית.  
 ג. להלן טבלה: ד. שכיח: 5, טווח: 5.

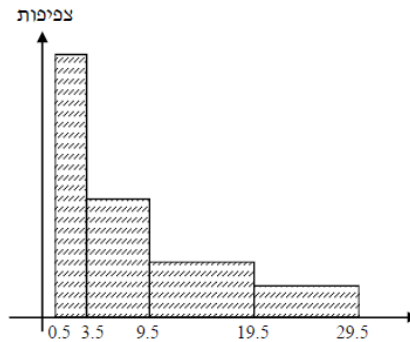
$f(x)$	$x$
10	1
20	2
30	3
40	4
50	5
40	6
190	סה"כ

- (3) א. 20 תלמידים קיבלו ציון 6 ו-40 תלמידים קיבלו ציון 8.  
 ב. חציון: 7, שכיח: 8. ג. שונות: 2.533, סטיית תקן: 1.592.
- (4) א. 20%. ב. שביעות רצון (סדר).  
 ג. ii. ד. טווח: 4, שכיח: 2, חציון: 2.
- (5) א. להלן טבלה: ב. חציון: 35, שכיח: 35, ממוצע: 35.

מספר שעות עבודה	שכיחות יחסית (פרופורציה)	שכיחות
10-20	15%	30
20-30	20%	40
30-40	30%	60
40-50	20%	40
50-60	15%	30

- ג. סטיית תקן: 12.65. ד. 53.333.  
 ה. 25%. ו. -0.395.  
 ז. חציון לא ישתנה, ממוצע יגדל, סטיית תקן תקטן.
- (6) א. 38%. ב. 40%. ג. 150. ד. חציון: 100.

7) א. שרטוט: ב. ההתפלגות היא א-סימטרית ימנית.



ג. שכיח: 2, חציון: 6.83.

ד. בהתפלגות א-סימטרית ימנית מתקיים:  $Mo < Md < \bar{X} < MR$ .

8) א. ראו טבלה:

מספר הנבחים	ציון
50	50-70
75	70-90
125	90-100
125	100-110
75	110-130
50	130-150

ב. 100. ג. 104.

ד. הממוצע יעלה ב-10 נקודות, אך סטיית התקן לא תשתנה.

9) א. נכון. ב. לא נכון. ג. לא נכון. ד. לא נכון. ה. לא נכון.  
ו. נכון. ז. לא נכון. ח. לא נכון.

# שיטות סטטיסטיות ב

פרק 14 - הסקה סטטיסטית - הקדמה

תוכן העניינים

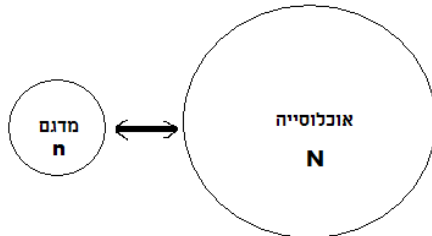
1. כללי ..... 54

## הסקה סטטיסטית – הקדמה:

### רקע:

#### אוכלוסייה:

קבוצה שאליה מפנים שאלה מחקרית. למשל, חברת תרופות שמעוניינת לפתח תרופה למחלת הסוכרת מתעניינת באוכלוסיית חולי הסוכרת בעולם.



#### מדגם:

חלק מתוך האוכלוסייה. למשל, אם נדגום באקראי 10 אנשים מתוך חולי הסוכרת אז זהו מדגם מתוך אוכלוסיית חולי הסוכרת.

במקרים רבים אין אפשרות לחקור את כל האוכלוסייה כיוון שאין גישה לכולה, היא גדולה מידי, או מוגבלים בזמן ובאמצעים טכניים ולכן מבצעים מדגם במטרה לבצע הסקה סטטיסטית מהמדגם לאוכלוסייה. הדגימה בקורס תהיה דגימה מקרית - הכוונה לדגימה שבה לכל תצפית באוכלוסייה יש את אותו סיכוי להיכלל במדגם.

#### סטטיסטי:

גודל המחושב על המדגם.

#### פרמטר:

גודל המתאר את האוכלוסייה.

### הסימונים לפרמטר וסטטיסטי הם שונים:

פרמטר (אוכלוסייה)	סטטיסטי (מדגם)	ממוצע
$\mu$	$\bar{X}$	
$P$	$\hat{p}$	פרופורציה (שכיחות יחסית)

פרמטר הוא גודל קבוע גם אם אנו לא יודעים אותו סטטיסטי הוא משתנה ממדגם למדגם ולכן יש לו התפלגות הנקראת התפלגות הדגימה.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

25% מאזרחי המדינה תומכים בהצעת החוק של חבר כנסת מסוים. הוחלט לדגום 200 אזרחים ומתוכם לבדוק מהו אחוז התומכים בהצעת החוק.

א. מי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מה הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

ה. מהו הסטטיסטי שמתכננים להוציא מהמדגם?

ו. האם הפרמטר או הסטטיסטי הוא משתנה מקרי?

## שאלות:

- (1) מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.
- מי האוכלוסייה?
  - מה המשתנה?
  - מהם הפרמטרים?
  - מהו גודל המדגם?
- (2) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה בישוב "העוגן". נגדיר את  $X$  להיות מספר המקלטים של משפחה אקראית. מתכננים לדגום מאוכלוסייה זו 4 משפחות ולהתבונן בממוצע מספר מקלטי הטלוויזיה במדגם.
- מיהי האוכלוסייה ומהו המשתנה הנחקר?
  - מהו הסטטיסטי שיילקח מהמדגם ומה סימונו?

מספר מקלטים	מספר המשפחות
0	50
1	250
2	350
3	300
4	50
	סך הכול $N = 1000$

- (3) נתון כי 20% מהשכירים במדינה הם אקדמאיים. נבחרו באקראי 10 שכירים באותה אוכלוסייה ומתכננים לפרסם את מספר האקדמאיים שנדגמו.
- מיהי האוכלוסייה?
  - מה המשתנה באוכלוסייה?
  - מהם הפרמטרים?
  - מהו הסטטיסטי?

## תשובות סופיות:

- (1) א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון. ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15. ד. 2.
- (2) א. האוכלוסייה: 1000 משפחות בישוב העוגן, המשתנה הנחקר: מס' מקלטים. ב.  $\bar{X}$  = ממוצע מדגם.
- (3) א. השכירים במדינה. ב. השכלה: אקדמאי, לא אקדמאי. ג. שיעור ההצלחות באוכלוסייה: 0.2. ג. מס' האקדמאים במדגם.

## שיטות סטטיסטיות ב

פרק 15 - התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי

תוכן העניינים

1. התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי ..... 57
2. התפלגות פרופורציית ההצלחות במדגם ..... 65

## התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי:

### רקע:

בפרק זה נדון בהתפלגות של ממוצע המדגם:  $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ .

מכיוון שממדגם למדגם אנו יכולים לקבל ממוצע מדגם שונה, אזי ממוצע המדגם הוא משתנה מקרי ויש לו התפלגות.

גדלים המתארים התפלגות כלשהי או אוכלוסייה כלשהי נקראים פרמטרים.

להלן רשימה של פרמטרים החשובים לפרק זה:

ממוצע האוכלוסייה נסמן ב- $\mu$  (נקרא גם תוחלת).

שונות אוכלוסייה נסמן ב- $\sigma^2$ .

סטיית תקן של אוכלוסייה:  $\sigma$ .

### תכונות התפלגות:

ממוצע כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לממוצע האוכלוסייה:  $E(\bar{x}) = \mu_x = \mu$ .

שונות כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לשונות האוכלוסייה מחולק ב- $n$ .

תכונה זו נכונה רק במדגם מקרי:  $V(\bar{x}) = \sigma_x^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ .

יש יחס הפוך בין גודל המדגם לבין שונות ממוצעי המדגם.

אם נוציא שורש לשונות נקבל סטיית תקן של ממוצע המדגם שנקראת גם

טעות תקן:  $\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ .

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

השכר הממוצע במשק הינו 9000 ₪ עם סטיית תקן של 4000. דגמו באקראי 25 עובדים.

א. מיהי אוכלוסיית המחקר? מהו המשתנה הנחקר?

ב. מהם הפרמטרים של האוכלוסייה?

ג. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?

**דגימה מהתפלגות נורמאלית:**

אם נדגום מתוך אוכלוסייה שהמשתנה בה מתפלג נורמאלית עם ממוצע  $\mu$  ושוונות  $\sigma^2$ .

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

ממוצע המדגם גם יתפלג נורמאלית:

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם. מה ההסתברות שבמדגם של 4 תינוקות אקראיים בעת הולדתם המשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-3.5 ק"ג?

**משפט הגבול המרכזי:**

אם אוכלוסייה מתפלגת כלשהו עם ממוצע  $\mu$  ושוונות  $\sigma^2$  אזי עבור מדגם מספיק

$$\bar{x} \rightsquigarrow N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad (n \geq 30)$$

ממוצע המדגם מתפלג בקירוב נורמאלי:

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם וסטיית תקן של 4 גרם. דגמו מקו הייצור 36 חפיסות שוקולד אקראיות. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד שנדגמו יהיה מתחת ל-102 גרם?

**שאלות:**

- (1) מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.
- מיהי האוכלוסייה?
  - מה המשתנה?
  - מהם הפרמטרים?
  - מהו גודל המדגם?
  - מהו תוחלת ממוצע המדגם?
  - מהי טעות התקן?

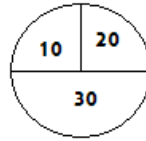
- (2) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה בישוב מסוים:

מספר משפחות	מספר מקלטים
500	0
2500	1
3500	2
3000	3
500	4
סך הכול $N = 10000$	

- בנו את פונקציית ההסתברות של  $X$ .
  - חשבו את התוחלת, השונות וסטיית התקן של  $X$ .
  - אם נדגום 4 משפחות מהישוב עם החזרה מה תהיה התוחלת, מהי השונות ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?
- (3) אם נטיל קובייה פעמיים ונתבונן בממוצע התוצאות שיתקבלו, מה תהיה התוחלת ומה תהיה סטיית התקן של ממוצע זה?
- (4) משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.
- מה ההסתברות שתינוק אקראי בעת הלידה ישקול פחות מ-3800 גרם? נתון כי ביום מסוים נולדו 4 תינוקות.
  - מה ההסתברות שהמשקל הממוצע שלהם יעלה על 4 ק"ג?
  - מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-2.5 ק"ג?
  - מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה רחוק מהתוחלת בלא יותר מ-50 גרם?
  - הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם היה מדובר על יותר מ-4 תינוקות?

- (5) הגובה של המתגייסים לצה"ל מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 175 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ. ביום מסוים התגייסו 16 חיילים.
- מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה לפחות 190 ס"מ?
  - מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה בדיוק 180 ס"מ?
  - מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יסטה מתוחלת הגבהים בפחות מ-5 ס"מ?
  - מהו הגובה שבהסתברות של 90% הגובה הממוצע של המדגם יהיה נמוך ממנו?
- (6) הזמן הממוצע שלוקח לאדם להגיע לעבודתו 30 דקות עם שונות של 16 דקות רבועות. האדם נוסע לעבודה במשך שבוע 5 פעמים.
- לצורך הפתרון הניחו שזמן הנסיעה לעבודה מתפלג נורמאלית.
- מה ההסתברות שבמשך שבוע משך הנסיעה הממוצע יהיה מעל 33 דקות?
  - מהו הזמן שבהסתברות של 90% ממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה גבוה ממנו?
  - מה ההסתברות שממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה מרוחק מ-30 דקות בלפחות 2 דקות?
  - כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם האדם היה נוסע לעבודה 6 פעמים בשבוע?
- (7) נפח היין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 סמ"ק וסטיית תקן של 10 סמ"ק.
- בארגו 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגו יהיה בדיוק 755 סמ"ק?
  - בארגו 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגו יהיה יותר מ-755 סמ"ק?
  - בארגו 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגו יהיה לפחות 755 סמ"ק?
  - בקבוקי היין שבארגו נמזגים לקערה עם קיבולת של שלושה ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהקערה?
- (8) משתנה מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 80 וסטיית תקן 4.
- מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה כאשר גודל המדגם הוא 9?
  - מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה שגודל המדגם הוא 16?
  - הסבר את ההבדל בתשובות של שני הסעיפים.

9) בקזינו ישנה רולטה. על הרולטה רשומים המס' הבאים כמוראה בשרטוט:



- אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה.
- בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד.
  - מה התוחלת ומה השונות של סכום הזכייה?
  - אם האדם ישחק את המשחק 5 פעמים מה התוחלת ומה השונות של ממוצע סכום הזכייה בחמשת המשחקים?
  - אם האדם משחק את המשחק 50 פעם מה ההסתברות שבסה"כ יזכה ב-1050 ₪ ומעלה?

10) לפי הערכות הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה השכר הממוצע במשק הוא 8000 ₪ עם סטיית תקן של 3000 ₪. מה ההסתברות שבמדגם מקרי של 100 עובדים השכר הממוצע יהיה יותר מ-8500 ₪?

11) קובייה הוטלה 50 פעמים. מה ההסתברות שהממוצע של התוצאות יהיה לפחות 3.72?

- 12) אורך צינור שמפעל מייצר הינו עם ממוצע של 70 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ.
- נלקחו באקראי 100 מוטות, מה ההסתברות שממוצע אורך המוטות יהיה בין 68 ל-78 ס"מ?
  - יש לחבר 2 בניינים באמצעות מוטות. המרחק בין שני הבניינים הינו 7200 ס"מ. מה ההסתברות ש-100 המוטות יספיקו למלאכה?
  - מה צריך להיות גודל המדגם המינימאלי, כדי שבהסתברות של 5% ממוצע המדגם יהיה קטן מ-69 ס"מ. היעזרו במשפט הגבול המרכזי.

13) נתון משתנה מקרי בדיד בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

2	4	6	8	$X$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$P(X)$

מתוך התפלגות זו נלקח מדגם מקרי בגודל 50. מה הסיכוי שממוצע המדגם יהיה קטן מ-5?

14 נתון ש- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . דגמו 5 תצפיות מאותה התפלגות והתבוננו במוצע

המדגם  $\bar{X}$ . לכן:  $P(\bar{X} > \mu)$  יהיה (בחרו בתשובה הנכונה):

- א. 0.
- ב. 0.5.
- ג. 1.
- ד. לא ניתן לדעת.

15 נתון ש- $X$  מתפלג כלשהו עם תוחלת  $\mu$  ושונויות  $\sigma^2$ .

החליטו לבצע מדגם בגודל 200 מתוך ההפלגות הנתונה לפי משפט הגבול המרכזי מתקיים (בחרו בתשובה הנכונה):

א.  $X \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$ .

ב.  $\mu \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$ .

ג.  $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

ד.  $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$ .

16 נתון ש- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . אם נדגום  $n$  תצפיות מתוך ההתפלגות ונגדיר:  $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ ,

אזי (בחרו בתשובה הנכונה):

א.  $\mu$  ו- $\bar{X}$  יהיו משתנים מקריים.

ב.  $\mu$  יהיה משתנה מקרי ו- $\bar{X}$  קבוע.

ג.  $\bar{X}$  יהיה משתנה מקרי ו- $\mu$  קבוע.

ד.  $\mu$  ו- $\bar{X}$  יהיו קבועים.

17 משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם. החפיסות נארזות

בקרטון המכיל 36 חפיסות שוקולד אקראיות. ההסתברות שהמשקל הממוצע

של חפיסות השוקולד בקרטון יהיה מעל 99 גרם הוא 0.9932.

א. מהי סטיית התקן של משקל חפיסת שוקולד בודדת?

ב. מה הסיכוי שמתוך 4 קרטונים בדיוק קרטון אחד יהיה עם משקל ממוצע

לחפיסה הנמוך מ-100 גרם?

**18** משתנה מקרי כלשהו מתפלג עם סטיית תקן של 20.  
מה הסיכוי שאם נדגום 100 תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות אזי ממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בפחות מ-2?

## תשובות סופיות:

- (1) א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון.  
 ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15.  
 ד. 2.  
 ה. 78.  
 ו. 10.6.

(2) א. להלן טבלה:

4	3	2	1	0	$X$
0.05	0.3	0.35	0.25	0.05	$P(X)$

ב.  $\sigma = 0.973$ ,  $\sigma^2 = 0.9475$ ,  $\mu = 2.05$

ג.  $\sigma(\bar{X}) = 0.486$ ,  $\sigma_{\bar{x}}^2 = 0.2369$ ,  $\mu_{\bar{x}} = 2.05$ .

(3)  $\sigma(\bar{X}) = 1.21$ ,  $\mu_{\bar{x}} = 3.5$

- (4) א. 0.8413      ב. 0.0013      ג. 0.      ד. 0.1974.
- (5) א. 0      ב. 0      ג. 0.9544      ד. 0.178.205
- (6) א. 0.0465      ב. 27.71      ג. 0.2628      ד. התשובה הייתה קטנה.
- (7) א. 0      ב. 0.1587      ג. 0.1587      ד. 0.5.
- (8) א. 0.5468      ב. 0.6826
- (9) א. להלן טבלה:

30	20	10	$X$
0.5	0.25	0.25	$P(X)$

- א. התוחלת: 22.5, השונות: 68.75.
- ב. התוחלת: 22.5, השונות: 13.75.
- ד. 0.8997
- (10) 0.0475
- (11) 0.1814
- (12) א. 0.9772      ב. 0.0228      ג. 0.271
- (13) 0.5
- (14) ב'
- (15) ד'
- (16) ג'
- (17) א. 2.429      ב. 0.25
- (18) 0.6826

## התפלגות פרופורציית ההצלחות במדגם:

### רקע:

בפרק זה נדון בהתפלגות הדגימה של פרופורציית המדגם.  
 $Y$  - מספר ההצלחות במדגם (למשל, מספר המובטלים במדגם).

$$\hat{p} = \frac{Y}{n} - \text{פרופורציית ההצלחות במדגם.}$$

למשל, שיעור המובטלים במדגם -  $n = 200$  :

מספר המובטלים :  $Y = 20$  .

$$\hat{p} = \frac{20}{200} = 0.1 : \text{פרופורציית המובטלים במדגם}$$

נסמן ב- $p$  את שיעור ההצלחה באוכלוסייה וב- $q$  את שיעור הכישלונות באוכלוסייה.  
 נבצע מדגם מקרי (הנחה שהתצפיות בלתי תלויות זו בזו) ונתבונן בהתפלגות של פרופורציית המדגם.

### התוחלת, השונות וסטיית התקן של פרופורציית המדגם:

$$E(\hat{p}) = p, \quad V(\hat{p}) = \frac{pq}{n}$$

משפט הגבול המרכזי עבור הפרופורציה המדגמית:

$$\text{אם: } np \geq 5 \text{ \& } nq \geq 5, \text{ אזי: } \hat{p} \sim N\left(p, \frac{pq}{n}\right) \cdot Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

### הערות:

- התנאים לקרוב הנורמאלי הם נזילים, כלומר משתנים ממרצה אחד לשני.  
 התנאי שהצגתי כאן הוא הפופולרי ביותר:
  1.  $n \cdot p \geq 5$
  2.  $n \cdot (1 - p) \geq 5$
- ישנם מרצים שנותנים את התנאי המחמיר הבא:
  1.  $n \cdot p \geq 10$
  2.  $n \cdot (1 - p) \geq 10$
- וישנם מרצים המשתמשים בתנאי:  $(n \geq 30)$  .
- תאלצו לבדוק מהו התנאי שנתנו לכם בכיתה כדי לעבור לנורמלית.

- כיוון שפרופורציה אינה חייבת להיות מספר שלם בהכרח לא נהוג לבצע כאן תיקון רציפות.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

לפי נתוני משרד החינוך בעיר ירושלים ל-60% מתלמידי התיכון זכאים לתעודת בגרות. נדגמו 200 תלמידי תיכון.

- א. מה ההסתברות שהשכיחות היחסית ( $\hat{p}$ ) של הזכאים לבגרות במדגם תעלה על 60%?
- ב. מה ההסתברות שפרופורציית הזכאים לבגרות במדגם תעלה על 70%?

## שאלות:

- (1) במדינה מסוימת 10% מכלל האוכלוסייה הינם מובטלים. נדגמו באקראי 140 אנשים מהמדינה.
- מה התוחלת ומהי השונות של פרופורציות המובטלים שנדגמו?
  - מה ההסתברות שבמדגם לפחות 10% יהיו מובטלים?
  - מה ההסתברות שלכל היותר 9% מהמדגם יהיו מובטלים?
- (2) נניח כי 30% מהאוכלוסייה תומכים בהצעת חוק מסוימת. אם נדגום מהאוכלוסייה 200 איש. חשבו את ההסתברויות הבאות:
- לפחות 35% יתמכו בהצעת החוק במדגם.
  - לכל היות 25% יתמכו בהצעת החוק במדגם.
  - יותר מ-27% יתמכו בהצעת החוק במדגם.
- (3) לפי נתוני משרד התקשורת 40% מהאוכלוסייה מחזיקים בטלפון נייד מסוג "סמארטפון". נדגמו 400 אנשים מהאוכלוסייה.
- מה ההסתברות שבמדגם לכל היותר ל-40% יש סמארטפון?
  - מה ההסתברות שבמדגם לרוב יש סמארטפון?
  - מה ההסתברות שפרופורציית בעלי הסמארטפון במדגם תסטה מהפרופורציה באוכלוסייה בלא יותר מ-4%?
  - כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם הינו מגדילים את גודל המדגם?
- (4) נתון כי 80% מבתי האב מחוברים לאינטרנט. נדגמו 400 בתי אב אקראיים.
- מה ההסתברות שלפחות 340 מהם מחוברים לאינטרנט?
  - מה ההסתברות שפרופורציית המחוברים לאינטרנט במדגם תסטה מהפרופורציה האמיתית ביותר מ-4%?
  - כמה בתי אב יש לדגום כדי שהסטייה בין הפרופורציה המדגמית לפרופורציה האמיתית לא תעלה על 3% בהסתברות של 90%?
  - מהו העשירון התחתון של התפלגות פרופורציית המדגם?
- (5) נתון שציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית עם תוחלת 500 וסטיית תקן 100. ב"מועדון ה-700" נכללים נבחנים שמקבלים ציון מעל 700 בפסיכומטרי. מה הסיכוי שבמועד בו נבחנו 2000 נבחנים אקראיים יהיו לפחות 3% המשתייכים למועדון?

6 נתון ש- $X \sim B(n, p)$ , ונגדיר את המשתנה הבא:  $\hat{P} = \frac{X}{n}$ .

א. הוכיחו ש:  $E(\hat{P}) = p$ ,  $V(\hat{P}) = \frac{p(1-p)}{n}$ .

ב. מה  $p$  המביא את  $V(\hat{P})$  להיות במקסימום?

### תשובות סופיות:

- (1) א. התוחלת: 0.1, השונות: 0.00064. ב. 0.5. ג. 0.3446.
- (2) א. 0.0618. ב. 0.0618. ג. 0.8238.
- (3) א. 0.5. ב. 0. ג. 0.8968. ד. גדלה.
- (4) א. 0.0062. ב. 0.0456. ג. 0.481. ד. 0.77436.
- (5) 0.0154.
- (6) א. שאלת הוכחה. ב. 0.5.

# שיטות סטטיסטיות ב

פרק 16 - מושגי יסוד באמידה

תוכן העניינים

1. כללי..... 69

## מושגי יסוד באמידה:

### רקע:

כזכור מהמפגש הקודם, פרמטר הוא גודל המתאר את האוכלוסייה או התפלגות מסוימת. כמו ממוצע הגבהים בקרב מתגייסים לצה"ל -  $\mu$ . כמו פרופורציית התומכים בממשלה בקרב אזרחי המדינה -  $p$ . בדרך כלל הפרמטרים הם גדלים שאינם ידועים באמת, ולכן מבצעים מדגמים במטרה לאמוד אותם. אין אפשרות לחשב אותם הניסיון הוא בלהעריך כמה הם שווים ככל שניתן.

- נסמן באופן כללי פרמטר באות  $\theta$  ואומד ב- $\hat{\theta}$ . הוא סטטיסטי המחושב על המדגם ובאמצעותו נאמוד את  $\theta$ .
- שגיאת אמידה:  $|\hat{\theta} - \theta|$  - ההפרש בין האומד לאמת (הפרמטר).

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

בכנסת ה-19 קיבלה מפלגת העבודה 15 מנדטים. בערוץ 10 ברגע סגירת הקלפיות העריכו את מספר המנדטים של המפלגה להיות 17 מנדטים וזאת על סמך תוצאות מדגם של הערוץ.

- מה הפרמטר בדוגמה זו?
  - מהי טעות האמידה של ערוץ 10?
- $E(\hat{\theta}) = \theta$  יהיה אומד חסר הטיה ל- $\theta$  אם התוחלת של  $\hat{\theta}$  תהיה שווה ל- $\theta$ .
  - טעות התקן של אומד היא סטיית התקן שלו, כלומר:  $\sigma(\hat{\theta}) = S.E$

**פרמטרים מרכזיים והאומדים שלהם:**

**ממוצע האוכלוסייה  $\mu$ :**

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} : \text{האומד הנקודתי שלו יהיה: ממוצע המדגם}$$

$$E(\bar{x}) = \mu \text{ , לכן } \bar{x} \text{ הינו אומר חסר הטיה ל-} \mu . \text{ כמו כן, טעות תקן: } \sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = SE$$

**פרופורציה באוכלוסייה  $p$ :**

$$\hat{p} = \frac{y}{n} : \text{האומד הנקודתי שלו יהיה: פרופורציה במדגם}$$

$$E(\hat{p}) = p \text{ , לכן } \hat{p} \text{ הינו אומר חסר הטיה ל-} p . \text{ כמו כן טעות התקן: } \sigma(\hat{p}) = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$$

**שונות האוכלוסייה  $\sigma^2$ :**

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} : \text{האומד הנקודתי שלו יהיה}$$

$$E(S^2) = \sigma^2 \text{ ולכן } S^2 \text{ הינו אומד חסר הטיה ל-} \sigma^2 : S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$$

**הערה:** אומד הוא הנוסחה הכללית לאמידת הפרמטר ואומדן הוא הערך הספציפי שהתקבל במדגם מסוים.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

נדגמו 10 משפחות בתל אביב ונבדק עבור כל משפחה מספר הילדים שלה.  
להלן התוצאות שהתקבלו: 2, 1, 3, 2, 1, 4, 5, 2, 1, 3.  
אמדו באמצעות אומדים חסרי הטיה את הפרמטרים הבאים:

1. ממוצע מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
2. שונות מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
3. פרופורציית המשפחות בנות שני ילדים.

## שאלות:

- (1) מתוך 500 טירונים, נמצאו 120 בעלי שברי הליכה. נתון שהסיכוי שטירון יהיה עם שבר הליכה הוא 0.25.
- מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?
  - מהי טעות התקן של האומדן כשהמדגם בגודל 500?
  - מהו האומדן לפרמטר?
  - מהי טעות האמידה?
- (2) לפי נתוני היצרן, מקרר צורך בממוצע 2400 וואט לשעה עם סטיית תקן של 500 וואט לשעה.
- במדגם של 25 מקררים של היצרן התקבל ממוצע של 2342 וואט לשעה.
- מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?
  - מהי טעות התקן של האומדן?
  - מהו האומדן לפרמטר?
  - מהי טעות האמידה?
- (3) נדגמו עשרה מתגייסים לצה"ל. גובהם נמדד בס"מ. להלן התוצאות שהתקבלו: 168, 184, 192, 171, 180, 177, 187, 168, 177 ו-175.
- מצאו אומדן חסר הטיה לגובה הממוצע של מתגייסי צה"ל.
  - מצאו אומדן חסר הטיה לשונות הגבהים של מתגייסי צה"ל.
  - מצאו אומדן חסר הטיה לפרופורציות המתגייסים בגובה של לפחות 180 ס"מ.
- (4) נדגמו 20 שכירים באקראי. עבור כל שכיר נמדד השכר באלפי שקלים.
- להלן התוצאות שהתקבלו:  $\sum_{i=1}^{20} X_i = 162$ ,  $\sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 1502.2$ .
- אמדו את השכר הממוצע של השכירים במשק.
  - אמדו את סטיית התקן של שכר השכירים במשק.
- (5) במטרה לאמוד את ממוצע האוכלוסייה, דגמו תצפיות בלתי תלויות מהאוכלוסייה וחישבו את הממוצע שלהם. מהי טעות התקן?
- סטיית התקן של האוכלוסייה.
  - סטיית התקן של ממוצע האוכלוסייה.
  - סטיית התקן של המדגם.
  - סטיית התקן של ממוצע המדגם.

6) משקל הממוצע של אוכלוסייה מסוימת הוא 75 ק"ג עם שונות של 25. אם יבחרו כל המדגמים האפשריים בגודל 10 מאוכלוסייה זו סטיית התקן של ממוצעי המדגמים תהייה:

- א. 3.
- ב. 2.5.
- ג. 1.581.
- ד. אין מספיק נתונים לדעת.

7) במדגם מקרי, מתי סכום ריבועי הסטיות מהממוצע,  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ , מחולק ב- $n-1$ ?

- א. כאשר  $n$  קטן.
- ב. כאשר תצפיות המדגם אינן בלתי תלויות.
- ג. כאשר האוכלוסייה אינה מתפלגת נורמאלית.
- ד. כאשר מעוניינים באומדן חסר הטיה לשונות האוכלוסייה ממנה הוצא המדגם.
- ה. כאשר מעוניינים לחשב את שונות התפלגות הדגימה של ממוצע המדגם.

8)  $X_1, X_2, \dots, X_{16}$  מדגם מקרי מתוך אוכלוסייה בעלת ממוצע  $\mu$  לא ידוע ושונות:  $\sigma^2 = 64$ . טעות התקן של האומדן ל- $\mu$  היא:

- א. 16.
- ב. 8.
- ג. 4.
- ד. 2.

9) מהו אומדן חסר הטיה?

- א. אומדן שערכו שווה לממוצע התפלגות הדגימה שלו.
- ב. אומדן שערכו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.
- ג. אומדן שממוצע התפלגות הדגימה שלו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.
- ד. אומדן שהסיכוי שערכו יהיה גבוה מערך הפרמטר באוכלוסייה שווה לסיכוי שיהיה נמוך ממנו.

### תשובות סופיות:

- (1) א. 0.25    ב. 0.019    ג. 0.24    ד. 0.01
- (2) א. אוכלוסייה: מקררים של יצרן, תוחלת: 2400, סטיית תקן: 500.  
 ב. 100    ג. 2342    ד. 58
- (3) א. 177.9    ב. 64.1    ג. 0.4
- (4) א. 8.1    ב. 3.16
- (5) ד'
- (6) ג'
- (7) ד'
- (8) ד'
- (9) ג'

## שיטות סטטיסטיות ב

פרק 17 - רווח סמך לתוחלת (ממוצע)

תוכן העניינים

- 74 ..... 1. רווח סמך כששונות האוכלוסיה ידועה
- 79 ..... 2. קביעת גודל מדגם
- 81 ..... 3. רווח סמך כששונות האוכלוסיה לא ידועה

## רווח סמך כששונות האוכלוסייה ידועה:

### רקע:

ממוצע המדגם הוא אומדן לממוצע האוכלוסייה, אך לא באמת ניתן להבין ממנו על גודלו של ממוצע האוכלוסייה. ההסתברות שממוצע המדגם יהיה בדיוק כמו הממוצע האמתי הוא אפסי.

מה שנהוג לעשות כדי לאמוד את ממוצע האוכלוסייה, זה לבנות רווח סמך.

נבנה מרווח בטחון שהסיכוי שהפרמטר  $\mu$  ייכלל בתוכו הוא:  $1-\alpha$ .

$1-\alpha$ : נקרא רמת בטחון או רמת סמך. כך ש:  $P(A \leq \mu \leq B) = 1-\alpha$ .

A - גבול התחתון של רווח הסמך.

B - הגבול העליון של רווח הסמך.

$L = B - A$  - אורך רווח הסמך.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

חוקר דגם 25 חיילים שנבחנו במבחן הפסיכומטרי. הוא בנה רווח סמך לממוצע הציונים במבחן הפסיכומטרי בקרב אוכלוסיית החיילים וקיבל בין 510 ל-590. רווח הסמך נבנה ברמת סמך של 95%.

1. מהי אוכלוסיית המחקר?

2. מה המשתנה באוכלוסייה?

3. מה הפרמטר שהחוקר רצה לאמוד?

4. מהו רווח הסמך?

5. מה אורך רווח הסמך?

6. מהי רמת הביטחון של רווח הסמך?

בפרק זה נרצה לבנות רווח סמך לתוחלת ( $\mu$ ) במקרה ש- $\sigma^2$  (שונות האוכלוסייה) ידועה.

פרמטר אותו נרצה לאמוד:  $\mu$ .

אומד נקודתי:  $\bar{x}$ .

תנאים לבניית רווח הסמך:  $X \sim N$  או  $n \geq 30$ .

$\sigma^2$  (שונות האוכלוסייה) ידועה.

נוסחה לרווח הסמך:  $\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

על פי נתוני היצרן אורך חיי סוללה מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 1 שעה. מעוניינים לאמוד את תוחלת חיי סוללה. נדגמו באקראי 4 סוללות, אורך החיים הממוצע שהתקבל הוא 13.5 שעות. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת אורך חיי סוללה.

שגיאת האמידה המקסימלית:  $\varepsilon = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\varepsilon$  - נותן את שגיאת האמידה המקסימלית, דבר שנקרא גם טעות סטטיסטית, טעות דגימה.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

בהמשך לשאלה עם הסוללות. מה ניתן להגיד בביטחון של 95% על שגיאת האמידה?

קשרים מתמטיים ברווח הסמך:

• אורך רווח הסמך הוא פעמיים שגיאת האמידה המקסימלית:  $L = 2\varepsilon$ .

• ממוצע המדגם נופל תמיד באמצע רווח הסמך:  $\bar{X} = \frac{A+B}{2}$ .

• ככל שמספר התצפיות ( $n$ ) גבוה יותר, כך יש יותר אינפורמציה ולכן האומד יותר מדויק, ולכן נקבל רווח סמך יותר קצר.

• ככל שרמת הביטחון ( $1-\alpha$ ) גבוהה יותר, כך:  $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  יותר גבוה, ורווח הסמך יותר ארוך.

## שאלות:

- 1) חוקר התעניין לאמוד את השכר הממוצע במשק. על סמך מדגם הוא קבע שבביטחון של 95% כי השכר הממוצע במשק נע בין 9200 ל-9800 ₪.
- מי האוכלוסייה במחקר?
  - מה המשתנה הנחקר?
  - מה הפרמטר שאותו רוצים לאמוד?
  - מה רווח הסמך לפרמטר?
  - מהי רמת הסמך לפרמטר?
  - מה אורך רווח הסמך?
  - מה הסיכוי שטעות הדגימה תעלה על 300 ₪?
- 2) מעוניינים לאמוד את התפוקה היומית הממוצעת של מפעל מסוים ברמת סמך של 95%. במדגם אקראי של 100 ימים התקבלה תפוקה ממוצעת 4950 מוצרים ביום. לצורך פתרון הנח שסטיית התקן האמתית ידועה ושווה 150 מוצרים ביום. בנו את רווח הסמך.
- 3) מעוניינים לאמוד את ממוצע אורך החיים של מכשיר. מנתוני היצרן ידוע שאורך החיים מתפלג נורמאלי עם סטיית תקן של 20 שעות. נדגמו 25 מכשירים ונמצא כי ממוצע אורך החיים שלהם היה 230 שעות.
- בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.
  - בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.
  - הסבירו כיצד ומדוע השתנה רווח הסמך.
- 4) דגמו 200 עובדים מהמשק הישראלי. השכר הממוצע שלהם היה 9700 ₪. נניח שסטיית התקן של השכר במשק היא 3000 ₪.
- בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת השכר במשק.
  - מה ניתן לומר בביטחון של 95% על הסטייה המרבית בין ממוצע המדגם לתוחלת השכר?
  - מה היה צריך להיות גודל המדגם אם הינו רוצים להקטין את רווח הסמך ב-50%?
  - אם היינו מגדילים את גודל המדגם ובונים רווח סמך באותה רמת סמך האם היה ניתן לטעון בביטחון רב יותר שרווח הסמך מכיל את הפרמטר?

- (5) בנו רווח סמך לממוצע הציונים של מבחן אינטליגנציה. ידוע שסטיית התקן היא 15 והמדגם מתבסס על 100 תצפיות. רווח הסמך שהתקבל הוא (105,99). שחזרו את:
- ממוצע המדגם.
  - שגיאת האמידה המקסימאלית.
  - רמת הסמך.
- (6) זמן החלמה מאנגינה מתפלג עם סטיית תקן של יומיים. חברת תרופות מעוניינת לחקור אנטיביוטיקה חדשה שהיא פיתחה. במחקר השתתפו 60 אנשים שחלו באנגינה וקיבלו את האנטיביוטיקה החדשה. בממוצע הם החלימו לאחר 4 ימים.
- בנו רווח סמך לתוחלת זמן ההחלמה תחת האנטיביוטיקה החדשה ברמת סמך של 90%.
  - מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היה תקציב להגדלת גודל המדגם פי 4? הסבירו.
  - מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת סמך גדולה יותר? הסבירו.
- (7) חוקר בנה רווח סמך לממוצע וקיבל את רווח הסמך הבא:  $82 < \mu < 92$ . נתון שסטיית התקן בהתפלגות שווה ל-10 ושהמדגם מתבסס על 16 תצפיות. התפלגות המשתנה היא נורמאלית.
- מהו ממוצע המדגם?
  - מהי רמת הסמך של רווח הסמך שנבנה?
  - מה הסיכוי ששגיאת האמידה באמידת ממוצע האוכלוסייה תעלה על 5%?
- (8) חוקר בנה רווח סמך לתוחלת כאשר השונות בהתפלגות ידועה ברמת סמך של 95%. אם החוקר כעת יבנה על סמך אותם נתונים רווח סמך ברמת סמך קטנה מ-95%, איזה מהמשפטים הבאים לא יהיה נכון.
- אורך רווח הסמך החדש יהיה קטן יותר.
  - גודל המדגם יהיה כעת קטן יותר.
  - המרחק בין ממוצע המדגם לקצות רווח הסמך יהיו קטנים יותר ברווח הסמך החדש.
  - רמת הביטחון לבנות רווח הסמך החדש תהיה קטנה יותר.

(9) חוקר בנה רווח סמך ל- $\mu$  וקיבל:  $48 < \mu < 54$ . מה נכון בהכרח:

א.  $\mu = 51$ .

ב.  $\bar{X} = 6$ .

ג.  $\bar{X} = 51$ .

ד. אורך רווח הסמך הינו 3.

(10) איזה מהגורמים הבאים אינו משפיע על גודלו של רווח בר סמך, כאשר שונות האוכלוסייה ידועה (בחרו בתשובה הנכונה):

א. רמת הביטחון.

ב. סטיית התקן באוכלוסייה.

ג. מספר המשתתפים.

ד. סטיית התקן במדגם.

### תשובות סופיות:

(1) א. העובדים במשק. ב. שכר ב-ש. ג.  $\mu$ . ד.  $9200 < \mu < 9800$ .

ה. 0.95. ו. 600. ז. 0.05.

(2)  $4920.6 < \mu < 4979.4$

(3) א.  $223.42 < \mu < 236.58$ . ב.  $222.16 < \mu < 237.84$ .

ג. ראה סרטון.

(4) א.  $10,116 < \mu < 9284$ . ב. הסטיה המירבית בין  $\bar{x}$  ל- $\mu$  היא 416 שם בבטחון של 95%.

ג. 800. ד. לא.

(5) א. 102. ב. 3. ג. 0.9544.

(6) א.  $4.42 < \mu < 83.5$ . ב. יקטן פי 2. ג. גדל.

(7) א. 87. ב. 5. ג. 0.9544.

(8) ב'.

(9) ג'.

(10) ד'.

## קביעת גודל מדגם:

### רקע:

אם מעוניינים לאמוד את ממוצע האוכלוסייה כאשר סטיית התקן של האוכלוסייה ידועה:  $\sigma$  ברמת סמך של  $1-\alpha$  ושגיאת אמידה שלא תעלה על  $\varepsilon$  מסוים, נציב

$$.n \geq \left( \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\varepsilon} \right)^2$$

בנוסחה הבאה:

כדי להציב בנוסחה צריך שהמשתנה הנחקר יתפלג נורמלית או שהמדגם ייצא בגודל של לפחות 30 תצפיות.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

חברת תעופה מעוניינת לאמוד את תוחלת משקל המטען של נוסע. נניח שמשקל מטען של נוסע מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 2 ק"ג. כמה נוסעים יש לדגום אם מעוניינים שבביטחון של 98% הסטייה המרבית בין ממוצע המדגם לממוצע האמתי לא יעלה על 0.5 ק"ג? (תשובה: 87).

## שאלות:

- (1) משתנה מקרי מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן ידועה 12. מה צריך להיות גודל המדגם כדי לבנות רווח סמך ברמת סמך של 98% שאורכו לא יעלה על 2?
- (2) מעוניינים לאמוד את הדופק הממוצע של מתגייסים לצבא. מעוניינים שבביטחון של 95% שגיאת האמידה המרבית תהיה 0.5. נניח שהדופק מתפלג נורמאלית על סטיית תקן של 3 פעימות לדקה.  
 א. כמה מתגייסים יש לדגום?  
 ב. אם ניקח מדגם הגדול פי 4 מהמדגם של סעיף א ונאמוד את הממוצע באותה רמת סמך כיצד הדבר ישפיע על שגיאת האמידה?
- (3) יהי  $X$  משתנה מקרי עם ממוצע  $\mu$  וסטיית תקן  $\sigma$ . חוקר רוצה לבנות רווח בר סמך ל- $\mu$  ברמת ביטחון של 0.95, כך שהאורך של הרווח יהיה  $0.5\sigma$ . מהו גודל המדגם הנדרש?

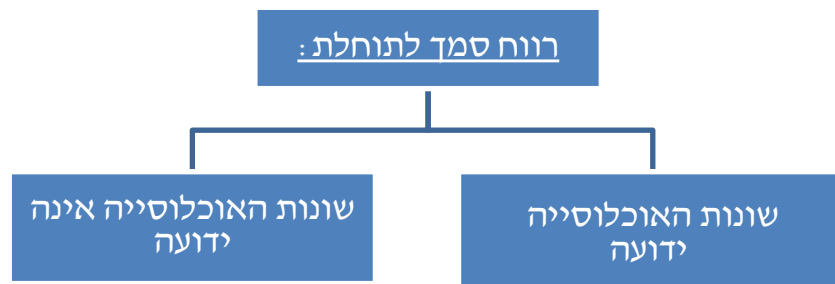
## תשובות סופיות:

- (1) .780  
 (2) א. 139. ב. הדבר יקטין את  $\varepsilon$  פי 2.  
 (3)  $n = 62$ .

## רווח סמך כששונות האוכלוסייה לא ידועה:

רקע:

בבואנו לבנות רווח סמך לתוחלת אנו צריכים להתמקד בשני המצבים הבאים:

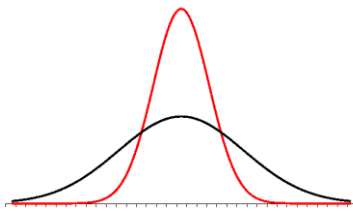


בפרק זה נעסוק במקרה ששונות האוכלוסייה  $(\sigma^2)$  אינה ידועה לנו.

מקרה יותר פרקטי.

**התנאי:**  $X \sim N$  או שהמדגם גדול.

**רווח סמך:**  $\bar{X} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$



$$\text{האומד לשונות: } S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$

**התפלגות T:**

הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה

להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים.

התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש. דרגות החופש הן:  $df = n-1$ .

ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה.

כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

הזמן שלוקח לפתור שאלה מסוימת בחשבון מתפלג אצל תלמידי כיתות ח' נורמאלית.

במטרה לאמוד את תוחלת זמן הפתרון נדגמו 4 תלמידים בכיתה ח'. להלן התוצאות

שהתקבלו בדקות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3.

בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לממוצע זמן הפתרון לשאלה בקרב תלמידי כיתה ח'.

## שאלות:

- (1) מחקר מעוניין לדעת כיצד תרופה מסוימת משפיעה על קצב פעימות הלב. ל-5 אנשים שנטלו את התרופה מדדו את הדופק והתקבל מספר פעימות לדקה: 84, 88, 84, 79, 89. הערה: לצורך פתרון הנח שקצב פעימות הלב מתפלג נורמאלית בקירוב.
- א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת הדופק של נוטלי התרופה הנ"ל.  
 ב. נתון שהדופק הממוצע ללא לקיחת התרופה הינו 70. לאור זאת, האם בביטחון של 95% התרופה משפיעה על הדופק?  
 ג. בהמשך לסעיף א', אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת ביטחון של 99%, כיצד הדבר היה משפיע על רווח הסמך?
- (2) במדגם שנעשה על 25 מתגייסים לצבא האמריקאי התקבל כי גובה ממוצע של חייל הינו 178 ס"מ עם סטיית תקן:  $S = 13$  ס"מ. בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לתוחלת גובה המתגייסים לצבא האמריקאי. מה יש להניח לצורך פתרון?
- (3) אדם מעוניין לאמוד את זמן הנסיעה הממוצע שלו לעבודה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שזמן הנסיעה בהם בדקות הוא: 30, 40, 32, 34, 27. א. ברמת ביטחון של 95% אמוד את זמן הנסיעה הממוצע. מהי ההנחה הדרושה לצורך פתרון?  
 ב. איך גודל רווח הסמך היה משתנה אם היו דוגמים עוד ימים?
- (4) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמאלית. נדגמו 25 מבחנים והתקבל ממוצע ציונים 102 וסטיית תקן מדגמית 13. א. בנו רווח סמך לממוצע הציונים באוכלוסייה ברמת ביטחון של 95%.  
 ב. חזרו על סעיף א' אם סטיית התקן הינה סטיית התקן האמתית של כלל הנבחנים.  
 ג. הסבירו את ההבדלים בין שני הסעיפים הנ"ל.
- (5) נשקלו 60 תינוקות אשר נולדו בשבוע ה-40 של ההיריון. המשקל נמדד בקילוגרמים. להלן התוצאות שהתקבלו:  $\sum_{i=1}^{60} X_i = 195$ ,  $\sum_{i=1}^{60} X_i^2 = 643.19$ . בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת משקל תינוק ביום היוולדו.

- (6) נדגמו 120 אנשים אקראיים מעל גיל 50. עבור כל אדם נבדק מספר שנות השכלתו. להלן התוצאות שהתקבלו:  $\bar{x} = 13.8$ ,  $S = 2$ . בנו רווח סמך ברמת סמך של 96% לממוצע ההשכלה של אזרחים מעל גיל 50.
- (7) שני סטטיסטיקאים בנו רווח בר-סמך לאותו פרמטר  $\mu$ . לכל אחד מהסטטיסטיקאים מדגם אחר, אך באותו גודל 10. שניהם קבעו אותה רמת סמך. סטטיסטיקאי א': הניח  $\sigma = 20$ . סטטיסטיקאי ב': חישב לפי המדגם וקיבל  $S = 20$ . למי משני הסטטיסטיקאים יהיה רווח סמך ארוך יותר?  
 א. סטטיסטיקאי א'.  
 ב. סטטיסטיקאי ב'.  
 ג. אותו אורך רווח סמך לשני הסטטיסטיקאים.  
 ד. תלוי בתוצאות המדגם של כל סטטיסטיקאי.
- (8) נתון ש:  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  ביצעו מדגם בגודל 16 וקיבלו סטיית תקן מדגמית 10. אורך רווח הסמך שהתקבל הוא: 8.765. מהי רמת הביטחון של רווח הסמך?

### תשובות סופיות:

- (1) א.  $79.88 < \mu < 89.72$       ב. כן.      ג. הוא היה גדל.
- (2) ראה בסרטון.
- (3) א. צריך להניח שהמשתנה מתפלג נורמלית.      ב. לא ניתן לדעת.
- (4) א.  $96.63 < \mu < 107.37$       ב.  $96.90 < \mu < 107.10$       ג. ראה בסרטון.
- (5)  $3.149 < \mu < 3.351$
- (6)  $13.42 < \mu < 14.18$
- (7) ב'.
- (8) 90%

## שיטות סטטיסטיות ב

פרק 18 - רווח סמך לפרופורציה

תוכן העניינים

84	1. קביעת גודל מדגם
87	2. רווח הסמך לפרופורציה

## קביעת גודל מדגם:

### רקע:

בפרק זה נדון איך קובעים גודל מדגם שבאים לאמוד פרופורציה באוכלוסייה מסוימת: החוקר קובע מראש את רמת הסמך הרצויה:  $1-\alpha$ . החוקר קובע מראש את הטעות הסטטיסטית המרבית שבה הוא מעוניין:  $\varepsilon$  (או את אורך רווח הסמך).

$L = 2\varepsilon$  - אורך רווח הסמך.

$\varepsilon$  - טעות אמידה מרבית: המרחק המקסימאלי (הסטייה) בין הפרמטר ( $p$ ) לאומד ( $\hat{p}$ ).

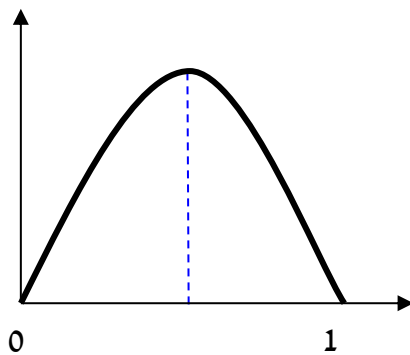
$$\varepsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

ויתעניין לדעת מהו גודל המדגם הרצוי לשם כך.

$$n \geq \left( \frac{2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{L} \right)^2 \quad \text{נקבל ש:}$$

הבעיה שאין לנו יודעים את  $\hat{p}$ .

נתבונן בביטוי:  $\hat{p}(1-\hat{p})$ .



כיוון שאין לנו ידע מוקדם על  $\hat{p}$  נציב את המקרה השמרני ביותר שממקסם את הביטוי עבור:  $\hat{p} = 0.5$ .

$$n \geq \left( \frac{2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{0.5 \cdot 0.5}}{L} \right) \Rightarrow n \geq \left( \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{L} \right)$$

אך אם תהיה לנו אינפורמציה מוקדמת על הפרופורציה נציב את הערך הקרוב ביותר ל-0.5 האפשרי.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

מעוניינים לאמוד את שיעור האבטלה במשק. האמידה צריכה להתבצע ברמת סמך של 90% ועם שגיאת אמידה שלא תעלה על 4%.

א. מהו גודל המדגם המינימאלי שיש לקחת?

ב. חזור לסעיף א' אם ידוע שהאבטלה לא אמורה לעלות על 20%.

## שאלות:

- (1) הממשלה אומדת מדי חודש את אחוז התמיכה בה. מהו גודל המדגם אשר יש לקחת אם דורשים שהאומדן לא יסטה מהאחוז האמתי באוכלוסייה ביותר מ-3%, וזאת בביטחון של 95%?
- (2) משרד התקשורת מעוניין לדעת מה שיעור בתי האב עם אינטרנט.  
 א. כמה בתי אב יש לדגום אם מעוניינים שבביטחון של 90% אורך רווח הסמך לא יעלה על 8%?  
 ב. חזרו על סעיף א' אם ידעו שלפני חמש שנים ל-80% מבתי האב היה אינטרנט וכיום יש להניח שיש ליותר אינטרנט.
- (3) ערוץ טלוויזיה מעוניין לאמוד את הרייטינג של הערוץ בפריים טיים. המטרה שבביטחון של 95% הסטייה המרבית בין האומד לרייטינג האמתי לא תעלה על 4%.  
 א. כמה מכשירי PEOPLE METER יש להתקין לצורך האמידה?  
 ב. לפי הערכה מוקדמת הרייטינג של הערוץ לא יכול לעלות על 20%. בהנחה ומכשיר כזה עולה 500 ₪ ליחידה מה החיסכון הכספי מאינפורמציה זאת?
- (4) ענו על הסעיפים הבאים:  
 א. כמה אזרחים יש לדגום כדי לאמוד את אחוז התמיכה בממשלה עם אורך רווח הסמך שלא עולה על 9% ברמת סמך של 90%?  
 ב. בהנחה ובוצע מדגם שאת גודלו חיבתם בסעיף א והתקבל שאחוז התמיכה בממשלה במדגם הנו 42%. בנו רווח סמך לאחוז התמיכה בממשלה ברמת סמך של 95%.  
 ג. על סמך סעיף ב', האם תקבלו את הטענה שמיעוט האוכלוסייה תומך הממשלה?
- (5) משרד הבריאות מתכנן לבצע מדגם שמטרתו לבדוק את הסיכוי לחלות בשפעת עם לקיחת חיסון נגד שפעת. הוא מעוניין שבסיכוי של 98% טעות האמידה לא תעלה על 3%.  
 א. כמה מחוסנים יש לדגום?  
 ב. משרד הבריאות ביצע את המדגם שאת גודלו חיבתם בסעיף הקודם וקיבל ש-15% מבין אלה שקיבלו חיסון נגד שפעת בכל זאת חלו במשך החורף בשפעת. בנו ברמת סמך של 98% את הסיכוי לחלות בחורף בשפעת עם לקיחת חיסון נגד שפעת.  
 ג. בהמשך לסעיף הקודם. מהי טעות האמידה המרבית בביטחון של 98%? מדוע הוא קטן מ-3%?

### תשובות סופיות:

- (1) .1068
- (2) א. .423 ב. .271
- (3) א. .601 ב. 108,000 ₪.
- (4) א. .335 ב.  $0.367 < p < 0.473$ .
- ג. בביטחון של 0.95 ניתן להגיד שמיעוט באוכלוסייה תומך בממשלה.
- (5) א. .1509 ב.  $0.15 \pm 0.02$  ג. ראה סרטון.

## רווח הסמך לפרופורציה:

### רקע:

המטרה היא לאמוד את  $P$  – פרופורציה באוכלוסייה.

### האומד הנקודתי:

$$\hat{p} = \frac{y}{n} \quad (Y - \text{מספר ההצלחות שבמדגם}).$$

$$\text{רווח הסמך ל- } p : \hat{p} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

### תנאי לבניית רווח הסמך:

מדגם של לפחות 30 תצפיות (לעיתים נותנים תנאי של מספר הצלחות ומספר כשלונות לפחות 5 או לפחות 10).

$$\text{האומד לטעות התקן: } \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$\text{מתקיים ש: } \hat{p} = \frac{A+B}{2}, \quad L = 2\varepsilon$$

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

במטרה לאמוד את אחוז המובטלים במשק נדגמו 200 אזרחים, מתוכם התקבל ש-24 היו מובטלים.

א. בנו רווח סמך לאחוז המובטלים באוכלוסייה ברמת סמך של 95%.

ב. מהו האומד לטעות התקן?

## שאלות:

- (1) נדגמו 200 דירות בעיר חיפה. 48 מתוכן נמצאו כבעלות ממ"ד.  
 א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאחוז הדירות בחיפה עם ממ"ד.  
 ב. על סמך סעיף א' מה ניתן לומר על שגיאת האמידה המקסימאלית?  
 ג. בהנחה ובחיפה 80 אלף דירות, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% למספר הדירות בחיפה עם ממ"ד בפועל.
- (2) במדגם של 300 אנשי היי-טק התקבל ש-180 מהם אקדמאים.  
 א. בנו רווח סמך לפרופורציית אקדמאים ברמת סמך של 95% (בקרב אנשי הייטק).  
 ב. כיצד רווח הסמך של סעיף א' היה משתנה אם היינו מקטינים את רמת הסמך?  
 ג. כיצד רווח הסמך היה משתנה אם היינו מגדילים את גודל המדגם?
- (3) במדגם של 400 נהגים התקבל רווח סמך לפרופורציית הנהגים החדשים:  
 $0.08 < p < 0.18$   
 א. כמה נהגים במדגם היו נהגים חדשים?  
 ב. מהי רמת הסמך של רווח הסמך שנבנה?
- (4) במסגרת מערכת הבחירות בארה"ב נשאלו 840 אנשים עבור איזה מועמד יצביעו. 510 אנשים ענו כי יצביעו בעד ברק אובמה. בסקר פורסם שתתכן סטייה של  $\pm 3\%$  מתוצאות האמת. באיזו רמת ביטחון הסקר השתמש?
- (5) במדגם של 300 נשים בגילאי 40-35 נמצא ש-140 היו נשואות, 80 היו גרושות, 60 רווקות והיתר אלמנות.  
 א. מצאו רווח סמך ברמה של 90% לאחוז הגרושות באוכלוסייה הנחקרת.  
 ב. מצאו רווח סמך ברמה של 99% לסיכוי שבאוכלוסייה הנחקרת תמצא אישה לא נשואה?
- (6) ביצעו מדגם באוכלוסייה. שיעור ההצלחות במדגם היה 10% ורווח הסמך ניבנה ברמת סמך של 95%. אורכו הינו 8.3156%. מהו גודל המדגם שנלקח?

**תשובות סופיות:**

- (1) א.  $.18.1\% < p < 29.9\%$   
 ב. בביטחון של 95% שגיאת האמידה היא לכל היותר 0.059.  
 ג.  $.14,480 < \mu < 23,920$
- (2) א.  $0.545 \leq p \leq 0.655$   
 ב. האורך שלו היה קטן.  
 ג. לא ניתן לדעת.
- (3) א. 0.52  
 ב. 0.997
- (4) 0.925
- (5) א.  $.30.9\% > p > 22.5\%$   
 ב.  $.60.72\% > p > 45.91\%$
- (6) 0.200

## שיטות סטטיסטיות ב

פרק 19 - רווח סמך לשונות וסטיית תקן

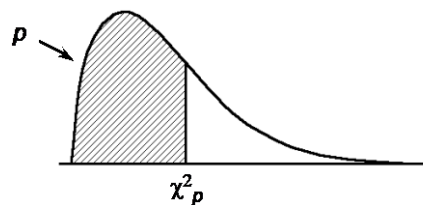
תוכן העניינים

1. רווח סמך לשונות וסטיית תקן.....90

## רווח סמך לשונות וסטיית תקן:

### רקע:

בפרק זה נדון על בניית רווח סמך לשונות האוכלוסייה. התנאי לבניית רווח הסמך: המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית, למרות שנהוג לא לדרוש את התנאי הזה אם המדגם מספיק גדול. רווח הסמך יתבסס על התפלגות הנקראת חי בריבוע. התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס ותלויה בדרגות חופש. דרגות החופש במקרה זה יהיו:  $n-1$ .



$$\text{רווח הסמך לשונות: } \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}}$$

$$\text{כאשר: } S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1}$$

אם נרצה לבנות רווח סמך לסטיית תקן אז נוציא שורש לרווח סמך לשונות.

### דוגמה:

זמן התגובה מתפלג נורמלית. במטרה לאמוד את שונות זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3. בנו רווח סמך, ברמת סמך של 95%, לשונות זמן התגובה באוכלוסייה.

פתרון:

פרמטר:  $\sigma^2$ .

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) = \text{זמן תגובה (בשניות)}$$

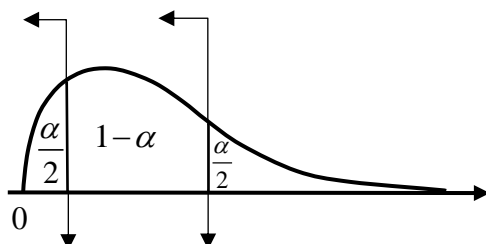
תוצאות מדגם:  $n = 4$ .

$$\bar{X} = \frac{4.7+5.2+4.6+5.3}{4} = 4.95$$

$$d.f = n-1 = 4-1 = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} \quad \text{נציב:}$$

$$S^2 = \frac{4.7^2 + 5.2^2 + \dots - 4 \cdot 4.95^2}{4-1} = 0.123$$



$$X^2_{0.025} = 0.216 \quad X^2_{0.975} = 9.35$$

$$1 - \alpha = 0.95$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

(טבלת התפלגות חי-בריבוע מופיעה בעמוד האחרון).

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \quad \text{נציב:}$$

$$\frac{(4-1) \cdot 0.123}{9.35} < \sigma^2 < \frac{(4-1) \cdot 0.123}{0.216}$$

$$0.039 < \sigma^2 < 1.708$$

## שאלות:

(1) חמישה מטופלים קבלו תרופה מסוימת. בדקו לכל מטופל את זמני התגובה שלו. להלן הזמנים שהתקבלו בדקות: 18, 17, 21, 26, 28. בהנחה וזמני התגובה מתפלגים נורמאלית, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה.

(2) נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי יולי-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפ' במעלות צלזיוס בת"א. במדגם התקבל טמפ' ממוצעת 30.8 וסטיית תקן מדגמית 1.1. בהנחה והטמפ' מתפלגת נורמאלית:  
 א. בנו רווח סמך לתוחלת הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.  
 ב. בנו רווח סמך לסטיית התקן של הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

(3) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 5. נבחנו 20 נבחנים ישראלים במבחן ה-IQ.

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 2080, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 218,220$$

להלן התוצאות שהתקבלו:

נניח שגם בישראל הציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. מצאו אומדנים לממוצע הציונים בישראל ולשונות הציונים בישראל באמצעות אומדנים חסרי הטיה.  
 ב. אמדו ברמת ביטחון של 95% את תוחלת הציונים של נבחנים בישראל.  
 ג. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הציונים של נבחנים ישראלים.  
 ד. על סמך הסעיפים הקודמים, האם בישראל ממוצע הציונים וסטיית התקן של הציונים שונה מבארה"ב? הסבירו.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750, \quad \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

נתון ש:

- א. בנו רווח סמך ל- $\mu$  ברמת סמך של 95%.  
 ב. בנו רווח סמך ל- $\sigma^2$  ברמת סמך של 95%.

### תשובות סופיות:

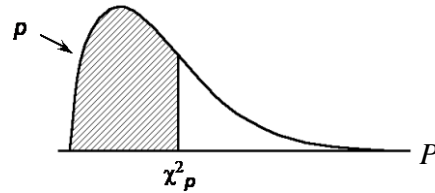
$$(1) \quad .8.4 < \sigma^2 < 194.2$$

$$(2) \quad \text{א. } .30.285 < \mu < 31.315 \quad \text{ב. } .0.836 < \sigma < 1.606$$

$$(3) \quad \text{א. ממוצע: } 104, \text{ שונות: } 100. \quad \text{ב. } .99.32 \leq \mu \leq 108.68 \quad \text{ג. } .7.94 < \sigma < 13.7$$

ד. בביטחון של 95% ממוצע הציונים איננו שונה, ובביטחון של 90% סטיית התקן שונה.

$$(4) \quad \text{א. } .68.75 < \mu < 82.15 \quad \text{ב. } .47.4 < \sigma^2 < 333.3$$

נספח - טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה  $\chi^2_p$  :


df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.005157	0.005982	0.006393	0.0158	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

## שיטות סטטיסטיות ב

פרק 20 - שאלות מסכמות על רווחי סמך

תוכן העניינים

1. שאלות מסכמות על רווחי סמך ..... 95

## שאלות מסכמות על רווחי סמך:

### שאלות:

- (1) מהירות הגלישה באינטרנט במקום מסוים מתפלגת נורמאלית. בדקו את מהירות הגלישה ב-30 זמנים אקראיים. מהירות הגלישה נמדדה ב-Mbps. מהירות מתחת ל-10Mbps מוגדרת על ידי החברה כנמוכה. התוצאות שהתקבלו במדגם: ממוצע היה 87 עם סטיית תקן 17 ו-12 פעמים המהירות הייתה נמוכה. בנו רווחי סמך ברמת סמך של 95% לפרמטרים הבאים:
- תוחלת מהירות הגלישה.
  - סטיית תקן של מהירות הגלישה.
  - הסיכוי שמהירות הגלישה תהיה נמוכה.
- (2) 200 אנשים נשאלו כמה פעמים ביום הם שותים כוס קפה. להלן התפלגות התשובות:

5	4	3	2	1	0	מספר פעמים
10	20	22	28	34	86	מספר אנשים

- תנו רווח סמך לממוצע מספר כוסות הקפה שאנשים נוהגים לשתות ביום.  $\alpha = 0.05$ .
  - אדם השותה לפחות 4 כוסות קפה ביום נקרא "מכור לקפה". בנו רווח סמך לאחוז "המכורים לקפה".  $\alpha = 0.1$ .
- (3) חוקר בנה רווח סמך לאחוז האנשים שהתקררו לפחות פעם אחת בשנה. רווח הסמך שהתקבל הוא:  $81 < p < 91$ . רווח הסמך הני"ל התבסס על מדגם של 500 איש.
- כמה אנשים במדגם טענו שכלל לא התקררו השנה?
  - באיזו רמת סמך נבנה רווח הסמך?
  - בנו רווח סמך לאחוז האנשים שהתקררו לפחות פעם אחת השנה ברמת סמך של 96% על סמך תוצאות המדגם.

- (4) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם תוחלת 100. במדגם של 20 ישראלים שנבחנו במבחן ה-IQ התקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = 2040, \quad \sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 210740$$

- א. אמדו ברמת ביטחון של 90% את ממוצע ציוני בחינת ה-IQ בישראל – מהי ההנחה הדרושה לפתרון?  
 ב. על סמך רווח הסמך של סעיף א' האם תקבלו את הטענה שבישראל ממוצע הציונים שונה מארה"ב?  
 ג. מה היה קורה לרווח הסמך אם היינו מגדילים את רמת הסמך שלו?

- (6) הגובה של מתגייסים לצה"ל מתפלג נורמלית במדגם של 25 מתגייסים.

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 2832 \text{ cm}^2, \quad \bar{x} = 176.2 \text{ cm}$$

- א. אמדו את הגובה הממוצע של המתגייסים ברמת סמך של 98%.  
 ב. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הגובה של מתגייסים של צה"ל.

### תשובות סופיות:

- |                                |                                  |                              |
|--------------------------------|----------------------------------|------------------------------|
| א. $80.65 \leq \mu \leq 93.35$ | ב. $13.5 < \sigma < 22.9$        | ג. $0.225 \leq p \leq 0.575$ |
| א. $1.21 \leq \mu \leq 1.65$   | ב. $10.85\% \leq p \leq 19.15\%$ |                              |
| א. 70                          | ב. 0.9988                        | ג. $83\% < p < 89\%$         |
| א. $97.4 \leq \mu \leq 106.6$  | ב. לא                            | ג. יגדל                      |
| א. $170.8 \leq \mu \leq 181.6$ | ב. $8.8 \leq \sigma \leq 14.3$   |                              |

# שיטות סטטיסטיות ב

פרק 21 - מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים

תוכן העניינים

97	.....	1. הקדמה
101	.....	2. סוגי טעויות

## הקדמה:

### רקע:

תהליך של בדיקת השערות הוא תהליך מאד נפוץ בעולם הסטטיסטיקה. בבדיקת השערות על פרמטרים נעבוד לפי השלבים הבאים:

**שלב א:** נוהה את הפרמטר הנחקר.

**שלב ב:** נרשום את השערות המחקר.

השערת האפס המסומנות ב- $H_0$ .

בדרך כלל השערת האפס מסמלת את אשר היה מקובל עד עכשיו, את השגרה, הנורמה.

השערה אלטרנטיבית (השערת המחקר) המסומנת ב- $H_1$ .

ההשערה האלטרנטיבית מסמלת את החדשנות בעצם ההשערה האלטרנטיבית מדברת על הסיבה שהמחקר נעשה היא שאלת המחקר.

**שלב ג:** נבדוק האם התנאים לביצוע התהליך מתקיימים ונניח הנחות במידת הצורך.

**שלב ד:** נרשום את כלל ההכרעה. בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שנקרא כלל הכרעה. הכלל יוצר אזורי שנקראים:

1. **אזור דחייה:**

דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.

2. **אזור קבלה:**

קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה. כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי. אזור הדחייה מוכתב על ידי סיכון שלוקח החוקר מראש

שנקרא רמת מובהקות ומסומן ב- $\alpha$ .

**שלב ה:** בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולחשב את הסטטיסטי המתאים ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה.

**שלב ו:** להסיק מסקנה בהתאם לתוצאות המדגם.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום לידתם בישראל 3300 גרם. משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון. להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$$n = 20, \bar{X} = 3120, S = 280$$

- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
- ב. מה המשתנה הנחקר?
- ג. מה הפרמטר הנחקר?
- ד. מהן השערות המחקר?

## שאלות:

בשאלות הבאות, ענו על הסעיפים הבאים:

- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
- ב. מה המשתנה הנחקר?
- ג. מה הפרמטר הנחקר?
- ד. מהן השערות המחקר?

- (1) ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות. מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים. ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5.
- (2) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25.
- (3) במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה למשפטים היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. מחקר מעוניין לבדוק האם השנה מקשים על הקבלה לפקולטה למשפטים.
- (4) בחודש ינואר השנה פורסם שאחוז האבטלה במשק הוא 8% במדגם עכשווי התקבל שמתוך 200 אנשים 6.5% מובטלים. רוצים לבדוק ברמת מובהקות של 5% האם כיום אחוז האבטלה הוא כמו בתחילת השנה.

### תשובות סופיות:

- (1) א. נבחנים בבגרות באנגלית.  
 ב. ציון.  
 ג. ממוצע הציונים בשיטת לימוד חדשה.  
 ד.  $H_0: \mu = 72$   
 $H_1: \mu > 72$
- (2) א. משקאות בבקבוק של חברה מסוימת.  
 ב. נפח משקה בסמ"ק.  
 ג. ממוצע נפח המשקה בבקבוק.  
 ד.  $H_0: \mu = 500$   
 $H_1: \mu < 500$
- (3) א. מועמדים לפקולטה למשפטים.  
 ב. משתנה דיכוטומי (התקבל, לא התקבל).  
 ג. אחוז הקבלה.  
 ד.  $H_0: p = 0.25$   
 $H_1: p < 0.25$
- (4) א. אזרחים בוגרים במשק.  
 ב. משתנה דיכוטומי (מובטל, עובד).  
 ג. אחוז האבטלה כיום.  
 ד.  $H_0: p = 0.08$   
 $H_1: p \neq 0.08$

## סוגי טעויות:

### רקע:

בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שניקרא כלל הכרעה.  
 הכלל יוצר אזורים שנקראים:

1. אזור דחייה – דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.
2. אזור קבלה – קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה.

כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי.  
 בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה וכך להגיע למסקנה – המסקנה היא בעירבון מוגבל כיוון שהיא תלויה בכלל ההכרעה ובתוצאות המדגם. אם נשנה את כלל ההכרעה אז אנחנו יכולים לקבל מסקנה אחרת. אם נבצע מדגם חדש אז אנחנו עלולים לקבל תוצאה אחרת. לכן יתכנו טעויות במסקנות שלנו:

		הכרעה	
		$H_0$	$H_1$
מציאות	$H_0$	אין טעות	טעות מסוג 1
	$H_1$	טעות מסוג 2	אין טעות

### הגדרת הטעויות:

טעות מסוג ראשון: להכריע לדחות את  $H_0$  למרות שבמציאות  $H_0$  נכונה.

טעות מסוג שני: להכריע לקבל את  $H_0$  למרות שבמציאות  $H_1$  נכונה.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

אדם חשוד בביצוע עבירה ונתבע בבית המשפט.  
 אילו סוגי טעויות אפשריות בהכרעת הדין?

## שאלות:

- (1) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25. בסופו של דבר הוחלט להכריע לטובת חברת המשקאות.
- א. רשמו את השערות המחקר.  
 ב. מה מסקנת המחקר?  
 ג. איזו סוג טעות יתכן וביצעו במחקר?
- (2) במחקר על פרמטר מסוים הוחלט בסופו של דבר לדחות את השערת האפס.
- א. האם ניתן לדעת אם בוצע טעות במחקר?  
 ב. מה סוג הטעות האפשרית?
- (3) לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. ישנה טענה שכיום ממוצע מספר הילדים במשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות. במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה. על סמך תוצאות המדגם נקבע שלא ניתן לקבוע שבאופן מובהק תוחלת מספר הילדים למשפחה קטנה כיום.
- א. מהי אוכלוסיית המחקר?  
 ב. מה המשתנה הנחקר?  
 ג. מה הפרמטר הנחקר?  
 ד. מה השערות המחקר?  
 ה. מה מסקנת המחקר?  
 ו. מהי סוג הטעות האפשרית במחקר?

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $H_0: \mu = 500$   
 ב. לא דחינו את  $H_0$ .  
 ג. טעות מסוג שני.
- (2) א. לא ניתן לדעת.  
 ב. טעות מסוג ראשון.  
 (3) א. משפחות כיום.  
 ב. מס' הילדים.  
 ג. תוחלת מספר הילדים למשפחה כיום.  
 ה. לא לדחות את  $H_0$ . ו. טעות מסוג שני.
- ד.  $H_0: \mu = 2.3$   
 $H_1: \mu < 2.3$

## שיטות סטטיסטיות ב

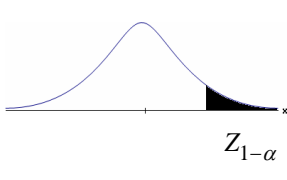
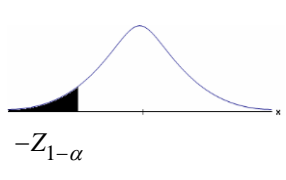
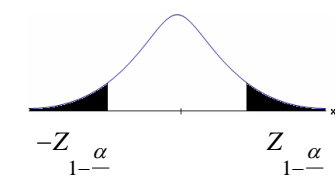
פרק 22 - בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)

תוכן העניינים

- 103 ..... 1. בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסיה ידועה
- 107 ..... 2. סיכוי לטעויות ועוצמה (ששונות האוכלוסיה ידועה)
- 113 ..... 3. בדיקת השערות על תוחלת ( ממוצע) כששונות האוכלוסיה לא ידועה
- 117 ..... 4. הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)

## בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסייה ידועה:

רקע:

$H_0: \mu \leq \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu \geq \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:
1. $\sigma$ ידועה 2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול			תנאים:
$Z_{\bar{x}} > Z_{1-\alpha}$	$Z_{\bar{x}} < -Z_{1-\alpha}$	$Z_{\bar{x}} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\bar{x}} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	כלל ההכרעה: אזור הדחייה של $H_0$ :
			
דוחים את $H_0$ ■	דוחים את $H_0$ ■	דוחים את $H_0$ ■	

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

סטטיסטי המבחן:

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	נדחה $H_0$ אם מתקיים:
--	--	--	-----------------------

**דוגמה:**

יבול העגבניות מתפלג נורמלית עם תוחלת של 10 טון לדונם וסטיית תקן של 2.5 טון לדונם בעונה. משערים ששיטת זיבול חדשה תעלה את תוחלת היבול לעונה מבלי לשנות את סטיית התקן. נדגמו 4 חלקות שזובלו בשיטה החדשה. היבול הממוצע שהתקבל היה 12.5 טון לדונם. בדקו את ההשערה ברמת מובהקות של 1%.

**פיתרון:**

אוכלוסייה: עגבניות.

המשתנה:  $X =$  יבול העגבניות בטון לעונה.

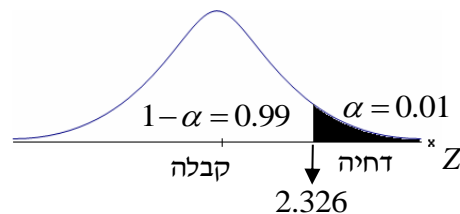
הפרמטר:  $\mu =$  תוחלת היבול בשיטת הזיבול החדשה.

השערות:  
 $H_0: \mu = 10$   
 $H_1: \mu > 10$

**תנאים:**

1.  $X \sim N$

2.  $\sigma = 2.5$

**כלל הכרעה:**

נדחה את  $H_0$  אם  $Z_{\bar{x}} > 2.326$

תוצאות:  $n = 4$ ,  $\bar{x} = 12.5$

סטטיסטי המבחן:  $Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

נציב:  $Z_{\bar{x}} = \frac{1.25 - 10}{\frac{2.5}{\sqrt{4}}} = 2 < 2.326$

**מסקנה:**

לא נדחה  $H_0$  (נקבל  $H_0$ ).

ברמת מובהקות של 1% לא נוכל לקבל את הטענה ששיטת הזיבול החדשה מעלה את תוחלת היבול של העגבניות.

## שאלות:

- (1) ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות. מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים. ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5. בהנחה שגם בשיטתו סטיית התקן תהיה 15 מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
- (2) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 ס"מ<sup>3</sup> וסטיית תקן 20 ס"מ<sup>3</sup>. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 ס"מ<sup>3</sup> במדגם בגודל 25. א. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 2.5%? ב. האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה עבור רמת מובהקות הגבוהה מ-5%?
- (3) מהנדס האיכות מעוניין לבדוק אם מכונה מכיילת (מאופסת). המכונה כוונה לחתוך מוטות באורך 50 ס"מ. לפי נתוני היצרן סטיית התקן בחיתוך המוטות היא 0.5 ס"מ. במדגם של 50 מוטות התקבל ממוצע אורך המוט 50.93 ס"מ. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
- (4) המשקל הממוצע של הספורטאים בתחום ספורט מסוים הוא 90 ק"ג, עם סטיית תקן 8 ק"ג. לפי דעת מומחים בתחום יש צורך בהורדת המשקל ובשימוש בדיאטה מסוימת שצריכה להביא להורדת המשקל. לשם בדיקת יעילות הדיאטה נלקח מדגם מקרי של 50 ספורטאים ובתום שנה של שימוש בדיאטה התברר שהמשקל הממוצע במדגם זה היה 84 ק"ג. יש לבדוק בר"מ של 10%, האם הדיאטה גורמת להורדת המשקל.
- (5) לפי מפרט נתון, על עובי בורג להיות 4 מ"מ עם סטיית תקן של 0.2 מ"מ. במדגם של 25 ברגים העובי הממוצע היה 4.07 מ"מ. קבעו ברמת מובהקות 0.05, האם עובי הברגים מתאים למפרט. הניחו כי עובי של בורג מתפלג נורמלית וסטיית התקן של עובי בורג היא אכן 0.2 מ"מ.
- (6) במחקר נמצא שתוצאה היא מובהקת ברמת מובהקות של 5% מה תמיד נכון? בחרו בתשובה הנכונה.
- א. הגדלת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.  
 ב. הגדלת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.  
 ג. הקטנת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.  
 ד. הקטנת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.

(7) חוקר ערך מבחן דו צדדי ברמת מובהקות של  $\alpha$  והחליט לדחות את השערת האפס.

אם החוקר היה עורך מבחן צדדי ברמת מובהקות של  $\frac{\alpha}{2}$  אזי בהכרח:

- א. השערת האפס הייתה נדחית.
- ב. השערת האפס הייתה לא נדחית.
- ג. לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו במקרה זה.

(8) שני סטטיסטיקאים בדקו השערות:  $H_0: \mu = \mu_0$  כנגד  $H_1: \mu > \mu_0$ ,

עבור שונות ידועה ובאותה רמת מובהקות.

שני החוקרים קבלו אותו ממוצע במדגם אך לחוקר א' היה מדגם בגודל 100 ולחוקר ב' מדגם בגודל 200.

- א. אם חוקר א' החליט לדחות את  $H_0$ , מה יחליט חוקר ב'? נמקו.
- ב. אם חוקר א' יחליט לא לדחות את  $H_0$ , מה יחליט חוקר ב'? נמקו.

### תשובות סופיות:

- (1) נקבל  $H_0$ , בר"מ של 5% לא נקבל את הטענה של המורה ששיטת הלימוד שלו מעלה את ממוצע הציונים.
- (2) א. נדחה  $H_0$ , בר"מ של 2.5% נקבל את תלונת אגודת הצרכנים בדבר הפחתת נפח המשקה בבקבוק.  
ב. הגדלנו את רמת המובהקות לכן אנחנו נשארים בדחייה של  $H_0$  והמסקנה לא תשתנה.
- (3) נדחה  $H_0$ , בר"מ של 5% נקבע שהמכונה לא מאופסת.
- (4) נדחה  $H_0$ , בר"מ של 0.1 נקבל את הטענה שהדיאטה יעילה ומפחיתה את המשקל הממוצע.
- (5) נקבל  $H_0$ , בר"מ של 0.05 נכריע שתוחלת עובי הבורג מתים למפרט.
- (6) א'.
- (7) ג'.
- (8) א. לדחות. ב. לא ניתן לדעת.

## סיכוי לטעויות ועוצמה (ששונות האוכלוסייה ידועה):

רקע:

		הכרעה	
		$H_0$	$H_1$
מציאות	$H_0$	אין טעות	טעות מסוג 1
	$H_1$	טעות מסוג 2	אין טעות

הגדרת הסתברויות:

הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 (רמת מובהקות):

$$\alpha = P(H_0 \text{ לדחות את } H_0 \mid H_0 \text{ נכונה}) = P_{H_0}(H_0)$$

הסיכוי לבצע טעות מסוג 2:

$$\beta = P(H_0 \text{ לקבל את } H_0 \mid H_1 \text{ נכונה}) = P_{H_1}(H_0)$$

רמת בטחון:

$$(\alpha - 1) = P(H_0 \text{ לקבל את } H_0 \mid H_0 \text{ נכונה}) = P_{H_0}(H_0)$$

עוצמה:

$$(\beta - 1) = \pi = P(H_0 \text{ לדחות את } H_1 \mid H_1 \text{ נכונה}) = P_{H_1}(H_0)$$

**התהליך לחישוב סיכוי לטעות מסוג שני:**

השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$
תנאים:	1. $\sigma$ ידועה 2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של $H_0$ :	$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + Z_{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - Z_{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
חישוב $\beta$ :	$P_{\mu_1} \left( \bar{X} < \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$	$P_{\mu_1} \left( \bar{X} > \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$	$P_{\mu_1} \left( \mu_0 - Z_{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \mu_0 + Z_{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$

**התפלגות ממוצע המדגם:**  $\bar{X} \sim N \left( \mu, \frac{\sigma^2}{n} \right)$

**התקנון:**  $Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

**דוגמה:**

בתחילת השנה חשבון הטלפון הסלולארי הממוצע לאדם היה 200 ש"ח עם סטיית תקן של 80 ש"ח לחודש. בעקבות כניסתן של חברות טלפון סלולארית חדשות מעוניינים לבדוק האם כיום ממוצע חשבון הטלפון הסלולארי פחת. לצורך בדיקה דגמו באקראי 36 אנשים וחשבון הטלפון הסלולארי שלהם היה 150 ש"ח בממוצע לחודש.

- רשמו את השערות המחקר ובנו כלל הכרעה במונחי חשבון ממוצע מדגמי ברמת מובהקות של 5%.
- מה מסקנתכם? איזה סוג טעות אפשרית במסקנה?
- נניח שבמציאות כיום החשבון הממוצע הוא 160 ש"ח. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני?
- אם נקטין את רמת המובהקות מסעיף א', כיצד הדבר ישפיע על התשובה מסעיף ג'?

## פתרון:

א. אוכלוסייה: משלמי חשבון טלפון סלולאר כיום.

המשתנה:  $X =$  חשבון הטלפון החודשי בשקלים.

הפרמטר:  $\mu$ .

השערות:  
 $H_0: \mu = 200$   
 $H_1: \mu < 200$

תנאים:

1.  $\mu = 200$ .

2.  $n = 36$ .

$$\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad K = \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\alpha = 0.05$$

$$Z_{1-\alpha} = Z_{0.95} = 1.645$$

$$\text{נציב: שקלים } K = 200 - 1.645 \cdot \frac{80}{\sqrt{36}} = 178.07$$

כלל ההכרעה: דחה את  $H_0$  אם שקלים  $\bar{X} < 178.07$ .

ב. ברמת מובהקות של 5% נכריע שאכן ממוצע חשבון הטלפון הסלולרי פחת מתחילת השנה.

ג. השערות:  
 $H_0: \mu_0 = 200$   
 $H_1: \mu < 200$

כלל ההכרעה: נדחה את  $H_0$  אם  $\bar{X} < 178.07$ .

$$H_1: \bar{X} \sim N\left(160, \frac{80^2}{36}\right)$$

$$Z = \frac{178.07 - 160}{\frac{80}{\sqrt{36}}} = 1.36$$

$$\beta = P_{H_1}(\text{לקבל את } H_0) = P_{H_1}(\bar{X} > 178.07) = 1 - \phi(1.36) = 1 - 0.9131 = 0.0869$$

ד. הקטנת  $\alpha$  מגדילה את  $\beta$ .

## שאלות:

$$(1) \text{ נתון ש: } X \sim N(\mu, \sigma^2 = 1)$$

- להלן השערות של חוקר לגבי הפרמטר  $\mu$ :  $H_0: \mu = 5$ ,  $H_1: \mu = 7$ . מעוניינים ליצור כלל הכרעה המתבסס על הסמך תצפית בודדת כך שרמת המובהקות תהיה 5%.
- א. עבור אילו ערכים של  $X$  שידגם נדחית השערת  $H_0$ ?
- ב. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני?
- ג. אם במדגם התקבל ש- $X = 6.9$  מה תהיה המסקנה ומה הטעות האפשרית?

- (2) לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. מעוניינים לבדוק אם כיום ממוצע מספר הילדים למשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות. במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה.
- א. רשמו כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קריטי ברמת מובהקות של 5%.
- ב. בהמשך לסעיף א' מה תהיה המסקנה ומהי הטעות האפשרית במסקנה?
- ג. אם באמת ממוצע מספר הילדים במשפחה פחת לכדי 2.1 מהי העצמה של הכלל מסעיף א'?

- (3) להלן נתונים על תהליך של בדיקת השערות על תוחלת:

$$H_0: \mu = 200, H_1: \mu \neq 200, \sigma = 30, n = 225$$

- א. רשמו כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קריטי וברמת מובהקות של 10%.
- ב. בהמשך לסעיף א', מהי העצמה אם התוחלת שווה ל-195?
- ג. הסבירו, ללא חישוב, איך העצמה תשתנה אם רמת המובהקות תהיה 5%?

- (4) מפעל לייצור צינורות מייצר צינור שקוטרו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 50 מ"מ וסטית תקן של 6 מ"מ. במחלקת ביקורת האיכות דוגמים בכל יום 81 צינורות ומוודדים את קוטרים, בכדי לבדוק, בעזרת מבחן סטטיסטי, האם מכונת הייצור מכוילת כנדרש או שקוטר הצינורות קטן מהדרוש.
- א. רשמו את ההשערות ואת כלל ההכרעה ברמת מובהקות של 5%.
- ב. אם ביום כלשהו מכונת הייצור התקלקלה והיא מייצרת את הצינורות בקוטר שתוחלתו 48 מ"מ בלבד (סטית התקן לא השתנתה), מה ההסתברות שהתקלה לא תתגלה בביקורת האיכות? כיצד נקראת הסתברות זו?
- ג. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף ב' תשתנה אם רמת המובהקות תגדל.
- ד. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף ב' תשתנה אם התוחלת האמיתית היא 47 ולא 48 מ"מ.

- 5) להלן השערות של מחקר:  $H_0: \mu = 50$ ,  $H_1: \mu = 58$ . מעוניינים לדגום 100 תצפיות. ידוע שסטיית התקן של ההתפלגות הינה 20.
- א. בנו כלל הכרעה שהסיכוי לטעות מסוג שני בו הוא 10%. מהי רמת המובהקות?
- ב. כיצד הייתה משתנה רמת המובהקות אם (כל סעיף בפני עצמו)?
- i. סטיית התקן הייתה יותר גדולה.
- ii. הסיכוי לטעות מסוג שני גדול יותר.

השאלות שלהלן הן שאלות רב-ברירה, בחרו בתשובה הנכונה ביותר:

- 6) אם חוקר החליט להגדיל את רמת המובהקות במחקר שלו אזי:
- א. הסיכוי לטעות מסוג ראשון גדל.
- ב. העוצמה של המבחן גדלה.
- ג. הסיכוי לטעות מסוג שני גדל.
- ד. תשובות א' ו-ב' נכונות.

- 7) חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן:
- א. השערת האפס נכונה.
- ב. השערת האפס נדחתה.
- ג. השערת האפס לא נדחתה.
- ד. אף אחת מהתשובות לא נכונה בהכרח.

- 8) מה המצב הרצוי לחוקר המבצע בדיקת השערה:

$1 - \beta$	$\alpha$
גדולה	א. גדולה
קטנה	ב. גדולה
גדולה	ג. קטנה
קטנה	ד. קטנה

- 9) נערך שינוי בכלל ההחלטה של בדיקת השערה מסוימת ובעקבותיו אזור דחיית  $H_0$  קטן. כל שאר הגורמים נשארו ללא שינוי. כתוצאה מכך:
- א. הן  $\alpha$ , והן  $1 - \beta$ , יקטנו.
- ב.  $\alpha$  יישאר ללא שינוי ואילו  $1 - \beta$  יגדל.
- ג.  $\alpha$  יגדל ואילו  $1 - \beta$  יקטן.
- ד. הן  $\alpha$  והן  $1 - \beta$  יגדלו.

**10** ידוע כי לחץ דם תקין באוכלוסייה הוא 120. רופא מניח שלחץ הדם בקרב עיתונאים גבוה יותר מהממוצע באוכלוסייה. הוא לקח מדגם של 60 עיתונאים וקיבל ממוצע 137. על סמך המדגם, הוא בודק טענתו ברמת מובהקות 0.02 ומסיק שלחץ הדם בקרב העיתונאים אינו גבוה יותר. מה הטעות האפשרית שהרופא עושה?

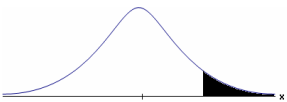

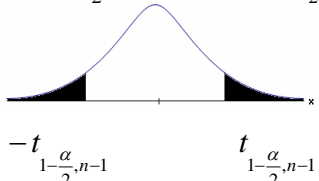
- א. טעות מסוג ראשון.
- ב. טעות מסוג שני.
- ג. טעות מסוג שלישי.
- ד. אין טעות במסקנתו.

### תשובות סופיות:

- 1) א. מעל 6.645. ב. 0.3594.  
ג. דחינו את  $H_0$ , תתכן טעות מסוג ראשון.
- 2) א. נדחה  $H_0$  אם  $\bar{X} < 2.24$ . ב. נדחה  $H_0$  ג. 1.
- 3) א. נדחה  $H_0$  אם  $\bar{X} > 203.29$  או  $\bar{X} < 196.71$ . ב. 0.8051. ג. תקטן.
- 4) א. נדחה  $H_0$  אם  $\bar{X} < 48.9$ . ב. 0.0885. ג. תקטן. ד. תקטן.
- 5) א. 0.0033. ב. i. רמת המובהקות הייתה קטנה.  
ii. רמת המובהקות הייתה גדלה.
- 6) ד'
- 7) ג'
- 8) ג'
- 9) א'
- 10) ב'

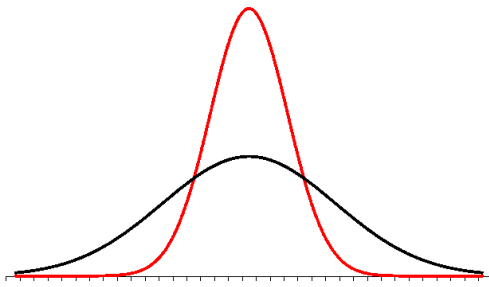
## בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסייה לא ידועה:

רקע:

$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:
1. $\sigma$ אינה ידועה 2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול			תנאים:
$t_{\bar{x}} > t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $t_{1-\alpha, n-1}$ - דוחים את $H_0$	$t_{\bar{x}} < -t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $-t_{1-\alpha, n-1}$ - דוחים את $H_0$	$t_{\bar{x}} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$ או $t_{\bar{x}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$  $-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ - דוחים את $H_0$	כלל ההכרעה: אזור הדחייה של $H_0$ :
$\bar{X} > \mu_0 + t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} < \mu_0 - t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$	חלופה לכלל הכרעה: נדחה $H_0$ אם מתקיים:

$$t_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$



### התפלגות T:

הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים. התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש.

דרגות החופש הן:  $df = n - 1$ .

ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה. כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

מפעל קיבל הזמנה לייצור משטחים בעובי של 0.1 ס"מ. כדי לבדוק האם המפעל עומד בדרישה נדגמו 10 משטחים ונמצא שהעובי הממוצע הוא 0.104 עם אומדן לסטיית תקן 0.002 ס"מ.

א. מהן השערות המחקר?

ב. מה ההנחה הדרושה לצורך פתרון?

ג. בדוק ברמת מובהקות של 5%.

## שאלות:

(1) משך זמן ההחלמה בלקיחת אנטיביוטיקה מסוימת הוא 120 שעות בממוצע עם סטיית תקן לא ידועה. מעוניינים לבדוק האם אנטיביוטיקה אחרת מקטינה את משך זמן ההחלמה. במדגם של 5 חולים שלקחו את האנטיביוטיקה האחרת התקבלו זמני ההחלמה הבאים: 90, 95, 100, 80, 125 שעות. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%. מהי ההנחה הדרושה לצורך הפתרון?

(2) משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום היוולדם בישראל 3300 גר'. משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה ששנים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון. להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$$n = 20$$

$$\bar{x} = 3120$$

$$S = 280$$

מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5% מה יש להניח לצורך פתרון?

(3) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמלית. בארה"ב ממוצע הציונים הוא 100. במדגם שנעשה על 23 נבחנים ישראלים, התקבל ממוצע ציונים 104.5 וסטיית התקן המדגמית 16. האם בישראל ממוצע הציונים שונה מארה"ב? הסיקו ברמת מובהקות של 5%.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750$$

$$\sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

נתון שההתפלגות היא נורמלית.

בדוק ברמת מובהקות של 5% האם התוחלת של ההתפלגות שונה מ-80.

- (5) ליאור ורוני העלו את אותן השערות על ממוצע האוכלוסייה. כמו כן הם התבססו על אותן תוצאות של מדגם. ליאור השתמש בטבלה של התפלגות  $Z$ . רוני השתמשה בטבלה של התפלגות  $t$ . מה נוכל לומר בנוגע להחלטת המחקר שלהם? בחר בתשובה הנכונה.
- אם ליאור ידחה את השערת האפס אז גם בהכרח רוני.
  - אם רוני תדחה את השערת האפס אז גם בהכרח ליאור.
  - שני החוקרים בהכרח יגיעו לאותה מסקנה.
  - לא ניתן לדעת על היחס בין דחיית השערת האפס של שני החוקרים.

- (6) נתון ש:  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  כמו כן נתונות ההשערות הבאות:  $H_0: \mu = \mu_0$  ,  $H_1: \mu < \mu_0$
- חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות.  $\sigma^2$  לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5% לאחר מכן כדי לחזק את קביעתו הוא דגם עוד 5 תצפיות ושקלל את תוצאות אלה גם למדגם כך שכלל עכשיו 15 תצפיות. בחר בתשובה הנכונה:
- כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.
  - כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.
  - כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

### תשובות סופיות:

- (1) נדחה  $H_0$ .
- (2) נדחה  $H_0$ .
- (3) נקבל  $H_0$ .
- (4) נקבל  $H_0$ .
- (5) ב'.
- (6) ג'.

## הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על תוחלת (ממוצע):

### רקע:

ניתן לבצע בדיקת השערות דו צדדית ברמת מובהקות  $\alpha$  על  $\mu$  :

$$H_0 : \mu = \mu_0 , H_1 : \mu \neq \mu_0$$

על ידי בניית רווח סמך ברמת סמך של  $1-\alpha$  ל- $\mu$  :

אם  $\mu_0$  נופל ברווח  $\leftarrow$  נקבל את  $H_0$  .

אם  $\mu_0$  לא נופל ברווח  $\leftarrow$  נדחה את  $H_0$  .

### דוגמה:

חוקר ביצע בדיקת השערות לתוחלת. להלן השערותיו :

$$H_0 : \mu = 80 , H_1 : \mu \neq 80 , \alpha = 5\%$$

החוקר בנה רווח סמך ברמה של 90% וקיבל:  $79 < \mu < 84$  .

האם אפשר לדעת מה מסקנתו, ואם כן מהי?

### פתרון (פתרון מלא בהקלטה):

רווח הסמך ברמת סמך של 90% מכיל "80".

ברמת סמך של 95% רווח הסמך יגדל ויכיל "80".

לכן, ברמת מובהקות של 5% נקבל  $H_0$  .

## שאלות:

- (1) חוקר רצה לבדוק את ההשערות הבאות:  $H_0: \mu = 90$ ,  $H_1: \mu \neq 90$ . החוקר בנה רווח סמך לתוחלת ברמת סמך של 95% וקיבל את רווח הסמך הבא: (87, 97). אם החוקר מעוניין לבצע בדיקת השערות ברמת מובהקות של 1% האם ניתן להגיע למסקנה ע"ס רווח הסמך? נמקו.
- (2) חוקר מעוניין לבדוק השפעת דיאטה חדשה על רמת הסוכר בדם. ידוע כי מספר מיליגרם הסוכר בסמ"ק דם הוא משתנה מקרי שמתפלג נורמלית עם סטיית תקן 10.4 מ"ג. נלקח מדגם של 60 נבדקים שניזונו מדיאטה זו. נמצא כי ממוצע מספר המיליגרם סוכר היה 115.5 מ"ג לסמ"ק.
- א. בנה רווח סמך ברמת סמך 95% לתוחלת רמת הסוכר בדם אצל הניזונים מדיאטה זו.
- ב. ידוע שתוחלת רמת הסוכר בדם באוכלוסיה היא 90 מ"ג לסמ"ק. האם לדעתך ניתן להסיק על סמך תוצאת סעיף א שהדיאטה משפיעה על רמת הסוכר בדם? הסבירו.
- (3) יצרן אנטיביוטיקה רושם על גבי התרופות שכמות הפנצילין היא 200 מ"ג לקפסולה. משרד הבריאות ביצע מדגם של 8 קפסולות אקראיות מקו הייצור ומצא שבממוצע יש 196 מ"ג פנצילין לקפסולה עם סטיית תקן מדגמית של 5 מ"ג. בהנחה וכמות הפנצילין בקפסולה מתפלגת נורמלית.
- א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לממוצע כמות הפנצילין לקפסולה המיוצרת על ידי יצרן האנטיביוטיקה.
- ב. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם יש אמת באינפורמציה המסופקת על ידי היצרן.

## תשובות סופיות:

- (1) נקבל השערת.
- (2) א.  $112.87 \leq \mu \leq 118.13$ .
- ב. נכריע שהדיאטה משפיעה על תוחלת רמת הסוכר בדם.
- (3) א.  $191.8 \leq \mu \leq 200.2$ . ב. נכריע שיש אמת בפרסום.

# שיטות סטטיסטיות ב

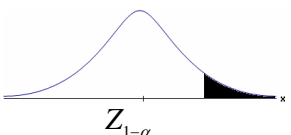
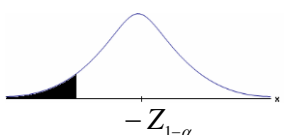
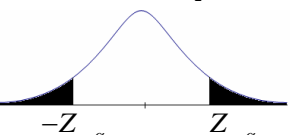
פרק 23 - בדיקת השערות על פרופורציה

תוכן העניינים

119	.....	1. התהליך
122	.....	2. סיכוי לטעויות ועוצמה

## התהליך:

רקע:

$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p > p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p < p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p \neq p_0$	<b>השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:</b>
$np_0 \geq 5 \text{ \& } n(1-p_0) \geq 5$			<b>תנאים:</b>
$Z_{\hat{p}} > Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ <b>דוחים את <math>H_0</math></b>	$Z_{\hat{p}} < -Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ <b>דוחים את <math>H_0</math></b>	או $Z_{\hat{p}} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{\hat{p}} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ <b>דוחים את <math>H_0</math></b>	<b>כלל הכרעה: אזור הדחייה של <math>H_0</math></b>

$$Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \quad \text{סטטיסטי המבחן:}$$

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

כלל הכרעה – אזור הדחייה של $H_0$ :		
$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} < p_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ $\hat{p} < p_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בחודש ינואר השנה פורסם שאחוז האבטלה במשק הוא 8% במדגם עכשווי התקבל שמתוך 200 אנשים 6.5% מובטלים. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם כיום אחוז האבטלה הוא כמו בתחילת השנה.

## שאלות:

- (1) במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה מסוימת היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. ברמת מובהקות של 5% האם השנה הקשו על תנאי הקבלה?
- (2) במדגם של 300 אזרחים 57% מתנגדים להצעת חוק מסוימת. לאור נתונים אלה האם רוב האזרחים מתנגדים להצעת החוק? בדקו ברמת מובהקות של 10%.
- (3) הטילו מטבע 50 פעמים וקיבלו 28 פעמים עץ. האם המטבע הוגן ברמת מובהקות של 5%?
- (4) קפיטריה במכללה מסוימת מעריכה כי אחוז הסטודנטים שקונים קפה בקפיטריה הינו 20%. נערך סקר אשר כלל 200 סטודנטים. התברר כי 33 מהם רוכשים קפה בקפיטריה. מטרת הסקר הייתה לבדוק את אמיתות הערכה של הקפיטריה.
- א. רשמו את ההשערות.  
 ב. בדקו את ההשערות ברמת מובהקות של 10%.  
 ג. מה תהיה המסקנה אם נקטין את רמת המובהקות?
- (5) חבר כנסת רוצה להעביר חוק. לצורך כך הוא דוגם 400 אזרחים במטרה לבדוק האם רוב האזרחים תומכים בחוק. במדגם התקבל ש-276 אזרחים תומכים בחוק.
- א. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?  
 ב. האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה אם רמת המובהקות תהיה גדולה יותר? הסבירו.
- (6) שני חוקרים בדקו את ההשערות הבאות:  $H_0: p = p_0$ ,  $H_1: p > p_0$ . חוקר א' השתמש ברמת מובהקות  $\alpha_1$  וחוקר ב' ברמת מובהקות  $\alpha_2$  החוקר הראשון דחה את  $H_0$  ואילו החוקר השני קיבל את  $H_0$ . שניהם התבססו על אותם תוצאות של מדגם. בחר בתשובה הנכונה:
- א.  $\alpha_1 = \alpha_2$ .  
 ב.  $\alpha_1 > \alpha_2$ .  
 ג.  $\alpha_1 < \alpha_2$ .  
 ד. המצב המתואר לא אפשרי.

### תשובות סופיות:

- (1) נדחה  $H_0$ .
- (2) נדחה  $H_0$ .
- (3) נקבל  $H_0$ .
- (4) א.  $H_0: p = 0.2$   
 ב.  $H_1: p \neq 0.2$   
 ג. המסקנה לא תשתנה.
- (5) א. נדחה  $H_0$ .  
 ב. המסקנה לא תשתנה.
- (6) ג'.

## סיכוי לטעויות ועוצמה:

רקע:

הגדרת הסתברויות:

הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 (רמת מובהקות):

$$\alpha = P(H_0 \text{ לדחות את } H_0 \mid H_0 \text{ נכונה}) = P_{H_0}(H_0)$$

הסיכוי לבצע טעות מסוג 2:

$$\beta = P(H_0 \text{ לקבל את } H_0 \mid H_1 \text{ נכונה}) = P_{H_1}(H_0)$$

רמת בטחון:

$$(1-\alpha) = P(H_0 \text{ לקבל את } H_0 \mid H_0 \text{ נכונה}) = P_{H_0}(H_0)$$

עוצמה:

$$\pi = (1-\beta) = P(H_0 \text{ לדחות את } H_0 \mid H_1 \text{ נכונה}) = P_{H_1}(H_0)$$

		הכרעה	
		$H_0$	$H_1$
מציאות	$H_0$	אין טעות	טעות מסוג 1
	$H_1$	טעות מסוג 2	אין טעות

התהליך לחישוב סיכוי לטעות מסוג שני:

$H_0: p = p_0$ $H_1: p > p_0$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p < p_0$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p \neq p_0$	השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:
$np_0 \geq 5 \& n(1-p_0) \geq 5$			תנאים:
$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} < p_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ או $\hat{p} < p_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	כלל ההכרעה: אזור הדחייה של $H_0$ :

חישוב $\beta$ :
$P_{H_1} \left( \hat{p} < p_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right)$
$P_{H_1} \left( p_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} < \hat{p} < p_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right)$
$P_{H_1} \left( \hat{p} > p_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right)$

$$\hat{p} \sim N \left( p, \frac{p(1-p)}{n} \right) \text{ : כאשר}$$

$$Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \text{ : והתקנון}$$

#### דוגמה (פתרון בהקלטה):

רופאי שיניים טוענים שיותר ממחצית האוכלוסייה הבוגרת בארץ אינם מבקרים אצל רופא שיניים באופן קבוע, כנדרש. כדי לבדוק טענה זו, נערך סקר בקרב 150 אנשים בוגרים.

- א. רשמו את ההשערות וכלל הכרעה ברמת מובהקות של 10%.
- ב. מהי עוצמת המבחן אם מסתבר ש 60% מהאוכלוסייה אינם מבקרים אצל רופא שיניים באופן קבוע.

## שאלות:

- (1) משרד הבריאות פרסם ש-10% מתושבי המדינה סובלים ממחלת האסטמה. מחקר דורש לבדוק האם בחיפה, בגלל זיהום האוויר, שיעור הסובלים מאסטמה גבוה יותר. לצורך המחקר נבדקו 260 מתושבי חיפה.
- א. רשמו את השערות המחקר, וצרו מבחן ברמת מובהקות של 5% לבדיקתן.  
 ב. מהי עצמת המבחן של סעיף א' בהנחה ובחיפה 16% מהתושבים סובלים מאסטמה?  
 ג. כיצד תשנה התשובה לסעיף ב' אם מסתבר שבחיפה 18% סובלים מאסטמה?  
 ד. בהמשך לסעיף א' האם נכון לומר שבהסתברות של 5% ההשערה שבחיפה 10% מהתושבים סובלים מאסטמה אינה נכונה?
- (2) אחוז הסובלים מתופעות הלוואי מתרופה מסוימת הוא 15%. חברת תרופות טוענת שפיתחה תרופה שאמורה לצמצם את אחוז הסובלים מתופעות לוואי. לצורך בדיקת הטענה הוחלט לבצע מחקר שיכלול 120 חולים שיקבלו את התרופה הנבדקת. נניח שהתרופה נבדקת אכן מורידה את פרופורציות הסובלים מתופעות הלוואי ל-10%, מהי עצמת המבחן עבור רמת מובהקות של 5%?
- (3) בעיר מסוימת היו 20% אקדמאים. בעקבות פתיחת מכללה בעיר לפני כמה שנים מעוניינים לבדוק האם אחוז האקדמאים גדל. מעוניינים שהמחקר יכלול 200 אנשים והוא יהיה ברמת מובהקות של 5%.
- א. חשבו את הסיכוי לבצע טעות מסוג שני בהנחה והיום יש 28% אקדמאים.  
 ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם תשתנה אם נגדיל את רמת המובהקות?
- (4) מעוניינים לבדוק האם בפקולטה מסוימת ישנה העדפה לגברים. הוחלט לדגום 200 מתקבלים ועל סמך מספר הבנים לקבוע אם טענת המחקר מתקבלת. חוקר א' קבע רמת מובהקות של 5% וחוקר ב' החליט לקבל את טענת המחקר אם במדגם יהיו לפחות 120 בנים. למי מבין החוקרים רמת מובהקות גדולה יותר?
- (5) חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן (בחרו בתשובה הנכונה):
- א. השערת האפס נכונה.  
 ב. השערת האפס נדחתה.  
 ג. השערת האפס לא נדחתה.  
 ד. אף אחת מהתשובות לא נכונה בהכרח.
- (6) קבעו אם הטענה הבאה נכונה: בבדיקת השערות לא ניתן לבצע בו זמנית טעות מסוג ראשון וטעות מסוג שני.

**תשובות סופיות:**

- (1) א.  $H_0 : p = 0.1$   
 $H_1 : p > 0.1$
- (2) 0.4404
- (3) א. 0.1446 ב. תקטן.
- (4) חוקר א'.
- (5) ג'.
- (6) נכונה.
- ב. 0.9015 ג. תגדל. ד. טענה לא נכונה.

# שיטות סטטיסטיות ב

פרק 24 - בדיקת השערות על שונויות

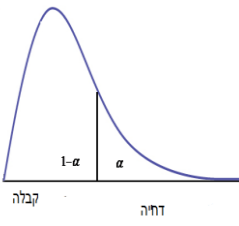
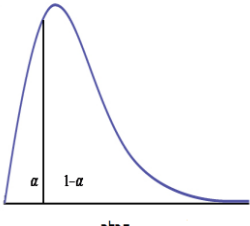
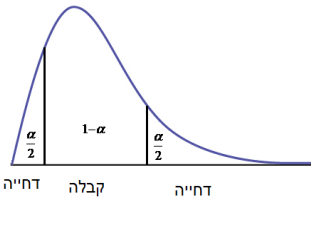
תוכן העניינים

1. בדיקת השערות על שונות וסטיית תקן.....126

## בדיקת השערות על שונות וסטיית תקן:

רקע:

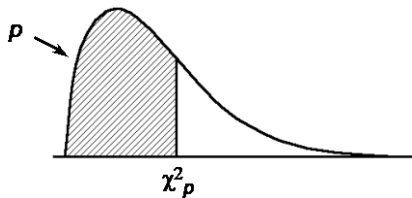
בדיקת השערות על שונות האוכלוסייה כאשר התוחלת לא ידועה:

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:
$X \sim N$			תנאים:
 $\chi^2 > \chi_{1-\alpha}^{2(n-1)}$	 $\chi^2 < \chi_{\alpha}^{2(n-1)}$	 $\chi^2 < \chi_{\frac{\alpha}{2}}^{2(n-1)}$ או $\chi^2 > \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^{2(n-1)}$	נדחה את השערת האפס אם:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \quad \text{סטטיסטי המבחן:}$$

התפלגות חי בריבוע:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^{2(n-1)} \quad \text{אם } X_i \sim N(\mu, \sigma^2), \text{ והפרמטר } \mu \text{ אינו ידוע, מתקיים ש:}$$



התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס וערכיה שואפים לאינסוף.

התפלגות זו תלויה בדרגות החופש.

אם  $\mu$  אינו ידוע, אז:  $d.f = n - 1$ .

**דוגמה:**

ציוני IQ לפי סטנדרטים אמריקאים מתפלגים נורמאלית עם  $\sigma = 15$ . מעוניינים לבדוק האם שונות הציונים של נבחנים ישראלים שונה מאמריקה.

$$\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 = 3420 \quad \text{במדגם של 20 ישראלים התקבל:}$$

מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

**פתרון:**

האוכלוסייה: נבחנים ישראלים במבחן I.Q

המשתנה:  $X =$  ציון I.Q

פרמטר:  $\sigma^2$

$$H_0: \sigma^2 = 15^2 = 225$$

השערות:  $H_1: \sigma^2 \neq 225$

הנחה:  $X \sim N$

$$d.f = n - 1 = 20 - 1 = 19 \quad \text{כלל הכרעה:}$$

נדחה את  $H_0$  אם  $X^2 > 32.9$  או  $X^2 < 8.91$

תוצאות המדגם:  $n = 20$

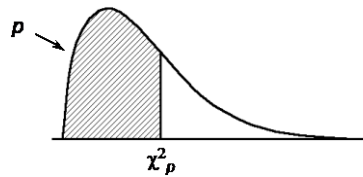
$$\sum (X_i - \bar{X})^2 = 3420$$

$$S^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{3420}{20-1} = 180$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{19 \cdot 180}{225} = 15.2$$

מסקנה: לא נדחה את  $H_0$ , לא נסיק ששונות הציונים של נבחנים ישראלים במבחן I.Q

שונה מזו של אמריקאים. ( $\alpha = 5\%$ )

טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה  $\chi^2_p$ 

df	p												
	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.005157	0.00982	0.01393	0.0158	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

## שאלות:

(1) חברה אורזת סוכר במשקל עם סטיית תקן 20 גרם. משקל הסוכר באריזה מתפלג נורמאלית. החברה החליפה את מכונות האריזה במטרה לדייק יותר במשקל הנארוז. (רוצים שסטיית התקן תהיה קטנה יותר).  
 לצורך בדיקה דגמו 5 אריזות סוכר ולהלן משקלן (בגרם):  
 1008, 1024, 1005, 996, 997.  
 מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

(2) זמן ההחלמה ממחלה מסוימת כאשר משתמשים בטיפול מסוים מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 80 שעות. תרופה חדשה נוסתה על 5 חולים. זמני ההחלמה שלהם בשעות היו: 110, 90, 72, 50, 38.

א. ברמת מובהקות של 5% בדקו האם סטיית התקן של זמן החלמה של התרופה החדשה נמוכה מהתרופה המקורית?

ב. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א', אם נגדיל את רמת המובהקות?

ג. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א אם נקטין את רמת המובהקות?

ד. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א אם נוסיף תצפית שערכה 70?

(3) הגובה של אוכלוסייה מסוימת נחשב כמתפלג נורמלית עם ממוצע של 174 ס"מ וסטיית תקן 12. במדגם של 20 אנשים מהאוכלוסייה התקבל ממוצע 171 וסטיית תקן מדגמית 23.

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם חל שינוי בשונות הגבהים באוכלוסייה.

ב. בדקו ברמת מובהקות של 5%, האם חל שינוי בתוחלת הגבהים

באוכלוסייה, בבחירת המבחן המתאים הסתמך על המסקנה מסעיף א'.

(4) השערות המחקר הן:  $H_1: \sigma^2 > 100$   $H_0: \sigma^2 = 100$

מתכננים לבצע מדגם בגודל 10 תצפיות. רמת המובהקות היא 5%.

א. מה תהיה עוצמת המבחן אם  $\sigma_1^2 = 150$ ?

ב. איזו השערה אלטרנטיבית תיתן עוצמה של 90%?

(5) השערות המחקר הן:  $H_1: \sigma < 2$ ,  $H_0: \sigma = 2$ .

במדגם של 21 תצפיות התקבל סטיית תקן 1.143.

תנו הערכה למובהקות התוצאה.

### תשובות סופיות:

- (1) לא נדחה  $H_0$ .
- (2) א. נדחה את  $H_0$ .  
 ב. לא תשתנה.  
 ג. לא ניתן לדעת.  
 ד. לא תשתנה.
- (3) א. נדחה את  $H_0$ .  
 ב. לא נדחה את  $H_0$ .
- (4) א. בין 25% ל-50%.  
 ב. 405.3.
- (5)  $0 < P_v < 0.005$ .