שיטות סטטיסטיות



תוכן העניינים

1. סטטיסטיקה תיאורית-הקדמה 1
2. סטטיסטיקה תיאורית- הצגה של נתונים 4
3. סטטיסטיקה תיאורית-גבולות מדומים ואמיתיים 15
4. סטטיסטיקה תיאורית- סכימה 17
5. סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום מרכזי 21
6. סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - הטווח, השונות וסטיית התקן 30
7. סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - טווח בין רבעוני 33
8. סטטיסטיקה תיאורית- מדדי מיקום יחסי-ציון תקן 35
9. סטטיסטיקה תיאורית-מדדי מיקום יחסי-אחוזונים במחלקות 37
10. סטטיסטיקה תיאורית- תרשים קופסא 40
11. סטטיסטיקה תיאורית - טרנספורמציה לינארית 42
12. סטטיסטיקה תיאורית - שאלות מסכמות 45
13. מקדם המתאם (מדד קשר) הלינארי 52
14. רגרסיה 68
15. מדדי קשר-רגרסיה -שונות מוסברת ושונות לא מוסברת 71
16. הסקה סטטיסטית - הקדמה 74
17. מושגי יסוד באמידה 77
18. רווח סמך לתוחלת (ממוצע) 82
19. מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים 92
20. בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) 98
21. מבחני חי בריבוע 120
22. מבחנים אפרמטרים למדגמים מזווגים 129

שיטות סטטיסטיות

פרק 1 - סטטיסטיקה תיאורית-הקדמה

תוכן העניינים

1. כללי 1

סטטיסטיקה תיאורית – הקדמה:

רקע:

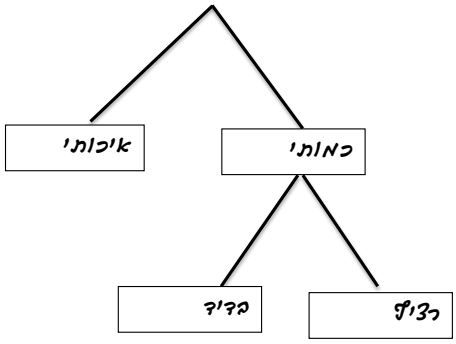
בסטטיסטיקה תיאורית אנו חוקרים קבוצה מסוימת, שיכולה להיות קבוצת ילדים בגן, קבוצת מניות בתיק, כלל התושבים בעיר מסוימת וכולי.
בין ישות לישות בקבוצה ישנם גורמים היכולים לקבל מספר ערכים. גורמים אלה נקראים משתנים. למשל, בין מניה למניה בתיק משתנה התשואה היומית של המניה, הוותק של המניה, תחום המניה וכדומה.
בסטטיסטיקה תיאורית אנחנו נתבונן בקבוצה מסוימת ובתוך הקבוצה הזו נאסוף נתונים לגבי משתנה מסוים ונלמד להציג את הנתונים ולנתח אותם מכל מיני אספקטים.

דוגמה:

בתיק מניות 10 מניות. מנהל התיק פרסם את התשואה של כל מניה בשנת 2011.

1) מי הקבוצה הנחקרת?
2) מה גודל הקבוצה?
3) מה המשתנה הנחקר?

סוגי משתנים:



משתנה איכותי

משתנה שלערכיו אין משמעות של יותר או פחות, אין עניין כמותי לערכים המתקבלים.
כמו: מקום מגורים של אדם (רעננה, תל אביב, אשדוד..), מין האדם (זכר, נקבה) ומצב משפחתי (רווק, נשוי, גרוש, אלמן).

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

משתנה כמותי

משתנה שערכיו הם מספרים, להם יש משמעות כמותית כמו: גובה אדם בס"מ, ציון בבחינה וכדומה.
את המשתנה הכמותי נסווג לשני סוגים:

1. משתנה בדיד – משתנה שערכיו מתקבלים מתוך סידרה של ערכים אפשריים. כמו: מספר ילדים למשפחה (1,2,3..) וציון בבחינה (מ-0 ועד 100 בקפיצות של 1).

2. משתנה רציף – משתנה שערכיו מתקבלים מתוך אינסוף ערכים בתחום מסוים. הערכים מתקבלים ברצף וללא קפיצות של ערכים. כמו: גובה בס"מ – אם למשל, הגובה הנמוך ביותר הוא 150 ועד 190 ס"מ בקבוצה הגבהים הם ברצף. גם בין 160 ל-161 ס"מ יש רצף אינסופי של ערכים אפשריים לגובה (160.33 ס"מ הוא גם גובה אפשרי), משקל בק"ג, מהירות בקמ"ש וכולי.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) סווגו את המשתנים הבאים לפי: איכותי / כמותי בדיד / כמותי רציף:

א. מספר הדירות בבניין.

ב. גיל אדם בשנים.

ג. אחוז האבטלה בעיר.

ד. מקצוע לימוד מועדף.

2) להלן התפלגות מספר האיחורים לעבודה בחודש של העובדים בחברת "סטארר":

מספר האיחורים	מספר העובדים
0	17
1	23
2	85
3	50
4	25

בחברה 200 עובדים.

א. מהו המשתנה הנחקר כאן?

ב. האם מדובר במשתנה איכותי או כמותי?
אם הוא כמותי האם הוא בדיד או רציף?

3) להלן רשימה של משתנים כמותיים, ציינו ליד כל אחד אם הוא רציף או בדיד:

א. שכר עובד ב-₪.

ב. ציון בחינת בגרות.

ג. תוצאה בהטלת קובייה.

ד. מהירות ריצה בתחרות.

ה. שיעור התמיכה בממשלה.

תשובות סופיות:

1) א. כמותי בדיד. ב. כמותי רציף. ג. כמותי רציף.
ד. איכותי.

2) א. מספר איחורים. ב. כמותי בדיד.

3) א. רציף. ב. בדיד. ג. בדיד.
ד. רציף. ה. רציף.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שיטות סטטיסטיות

פרק 2 - סטטיסטיקה תיאורית- הצגה של נתונים

תוכן העניינים

1. כללי 4

סטטיסטיקה תיאורית – הצגה של נתונים:

רקע:

דרכים להצגת נתונים שנאספו:

רשימה של תצפיות:

התצפית היא הערך שנצפה עבור ישות מסוימת בקבוצה. רושמים את התצפיות שהתקבלו כרשומה, יעיל שיש מספר מועט של תצפיות. ההצגה הזו רלבנטית לכל סוגי המשתנים. למשל, להלן מספר החדרים בבניין בן 5 דירות: 4, 5, 3, 4, 3.

טבלת שכיחויות בדידה:

שם המשתנה- X	שכיחות – $f(x)$	שכיחות יחסית באחוזים
X_1	f_1	$\frac{f_1}{N}\cdot 100$
X_2	f_2	$\frac{f_2}{N}\cdot 100$
X_3	f_3	$\frac{f_3}{N}\cdot 100$
⋮	⋮	⋮
X_k	f_k	$\frac{f_x}{N}\cdot 100$
סה"כ	$N=\sum_{i=1}^{k} f_i$	100%

רושמים את התצפיות בטבלה שבה עמודה אחת מבטאת את ערכי המשתנה והשנייה את השכיחות. יעיל עבור משתנה איכותי וכמותי בדיד וכשיש מספר רב של תצפיות. לא יעיל למשתנה כמותי רציף.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה:

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת:

הציון- X	מספר התלמידים – השכיחות - f	F_i	$\frac{f_i}{n}$
5	2	2	0.08=2/25
6	4	6	0.16=4/25
7	8	14	0.32=8/25
8	5	19	0.2=5/25
9	4	23	0.16=4/25
10	2	25	0.08=2/25

שכיחות מצטברת – צבירה של השכיחויות.

השכיחויות F_i – השכיחות המצטברת נותנת כמה תצפיות קטנות או שוות לערך.

שכיחות יחסית (פרופורציה) – השכיחות מחולקת לכמות התצפיות הכללי:

$\frac{f_i}{n}$ – איזה חלק מהתצפיות בקבוצה שוות לערך.

טבלת שכיחויות במחלקות:

משתמשים שהמשתנה כמותי רציף או כאשר יש מספר ערכים רב במשתנה הבדיד וטבלת שכיחויות תהיה ארוכה מידי.

דוגמה:

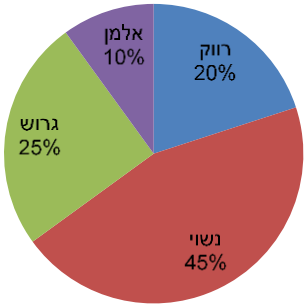
נתנו לקבוצת ילדים לבצע משימה, בדקו את התפלגות זמן הביצוע, בדקות.
להלן ההתפלגות שהתקבלה:

זמן בדקות	מספר הילדים
0.5-3.5	20
3.5-9.5	18
9.5-19.5	14
19.5-29.5	8

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

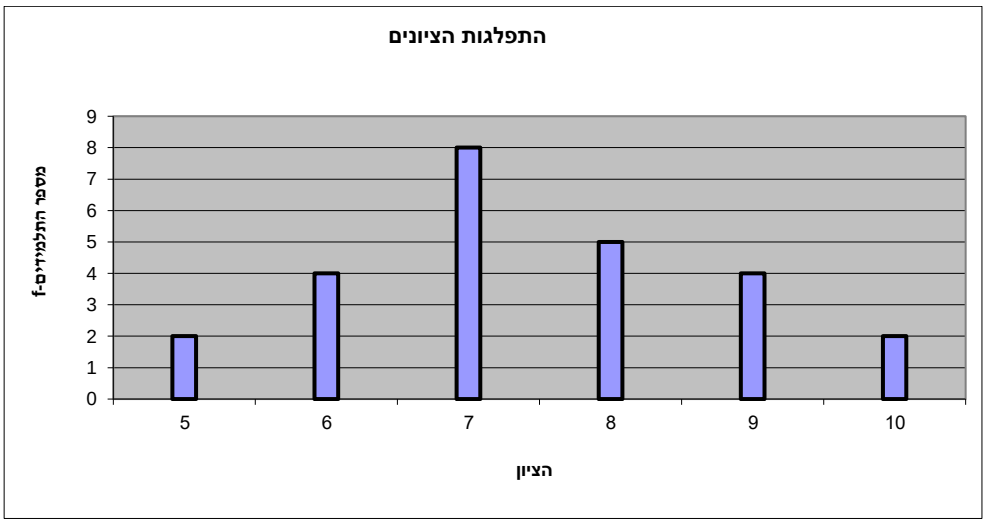
דיאגרמת עוגה:

זהו התיאור הגרפי של משתנה איכותי. בדיאגראמת עוגה כל ערך במשתנה מקבל "נתח", שהוא פרופורציונלי לשכיחות היחסית של ערך המשתנה בנתונים.



דיאגרמת מקלות:

הציר האופקי הוא הציר של המשתנה והציר האנכי של השכיחות, כך שהגובה של המקל מעיד על השכיחות. רלבנטי למשתנה כמותי בדיד. לא נהוג להשתמש בתיאור למשתנה איכותי וכמו כן לא למשתנה כמותי רציף, וכן בסולמות מדידה עבור משתנה מסולם סדר.

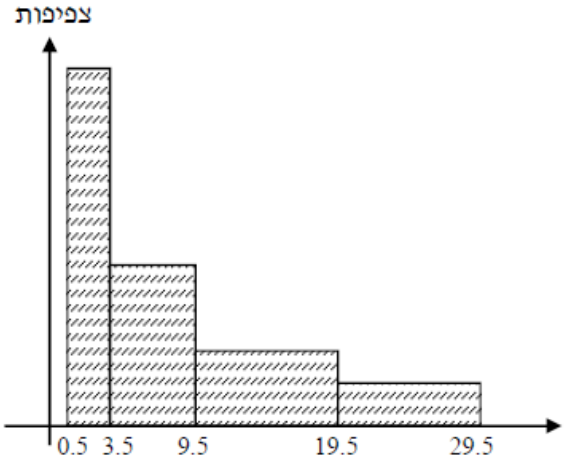


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

היסטוגרמה:

היסטוגרמה היא הדרך הגרפית כדי לתאר טבלת שכיחויות במחלקות, והיא רלוונטית למשתנה כמותי רציף.
בהיסטוגרמה הציר האופקי הוא הציר של המשתנה והציר האנכי הוא הציר של הצפיפות.
הצפיפות מחושבת בכל מחלקה על ידי חלוקת השכיחות ברוחב של כל המחלקה, והיא נותנת את מספר התצפיות הממוצע בכל מחלקה ליחדה. אם המחלקות הן שוות ברוחב, ניתן לשרטט את ההיסטוגרמה לפי השכיחות ואין צורך בצפיפות.

X	רוחב	אמצע	שכיחות	מצטברת	צפיפות
0.5 - 3.5	3	2	20	20	6.6667
3.5 - 9.5	6	6.5	18	38	3
9.5 - 19.5	10	14.5	14	52	1.4
19.5 - 29.5	10	24.5	8	60	0.8



פוליגון – מצולעון:

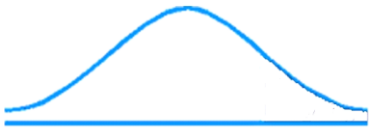
אם נחבר את אמצע קצה כל מלבן בקווים ישרים.
נותן מראה חזותי לצורה של התפלגות המשתנה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

צורות התפלגות נפוצות:

התפלגות סימטרית פעמונית

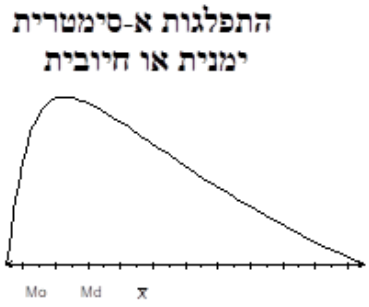
רוב התצפיות במרכז, וככל שנתרחק מהמרכז יהיו פחות תצפיות באופן סימטרי. לדוגמה, ציוני IQ.



ישנן התפלגויות סימטריות שאינן פעמוניות, כגון:

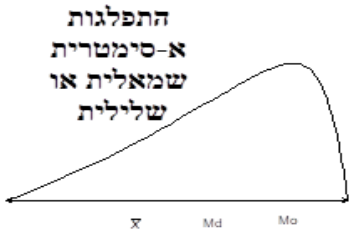
התפלגות אסימטרית ימנית (חיובית)

רוב התצפיות מקבלות ערכים נמוכים ויש מיעוט הולך וקטן של תצפיות שמקבלות ערכים גבוהים קיצוניים. לדוגמה, שכר במשק.



התפלגות אסימטרית שמאלית (שלילית)

רוב התצפיות מקבלות ערכים גבוהים ויש מיעוט הולך וקטן של תצפיות שמקבלות ערכים נמוכים קיצוניים. לדוגמה, אורך חיים.



© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) בסקר צפייה בטלוויזיה התקבלו התוצאות הבאות: 25 צפו בערוץ הראשון, 25 צפו בערוץ 10, 75 צפו בערוץ השני, 50 צפו באחד מערוצי הכבלים ו-25 לא צפו בטלוויזיה בזמן הסקר.

א. רשמו את טבלת השכיחות ואת השכיחות היחסית.

ב. תארו את הנתונים באופן גרפי.

2) להלן נתונים על התפלגות המקצוע המועדף של תלמידי שכבה ו' בבית הספר "מעוף":

מספר התלמידים	המקצוע
44	מתמטיקה
20	תנ"ך
12	אנגלית
26	היסטוריה

א. מהו המשתנה הנחקר?

ב. מהי פרופורציית התלמידים שמעדיפים תנ"ך?

3) להלן התפלגות ההשכלה במקום עבודה מסוים:

מספר העובדים	השכלה
60	נמוכה
120	תיכונית
20	אקדמאית

א. מהו המשתנה הנחקר?
מאיזה סולם הוא?

ב. תארו את הנתונים באופן גרפי.

4) להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:
6, 5, 8, 7, 6, 9, 8, 6, 7, 6, 7, 8, 5, 4, 6, 10, 9, 8, 6, 7.

א. מהו המשתנה? האם הוא בדיד או רציף?

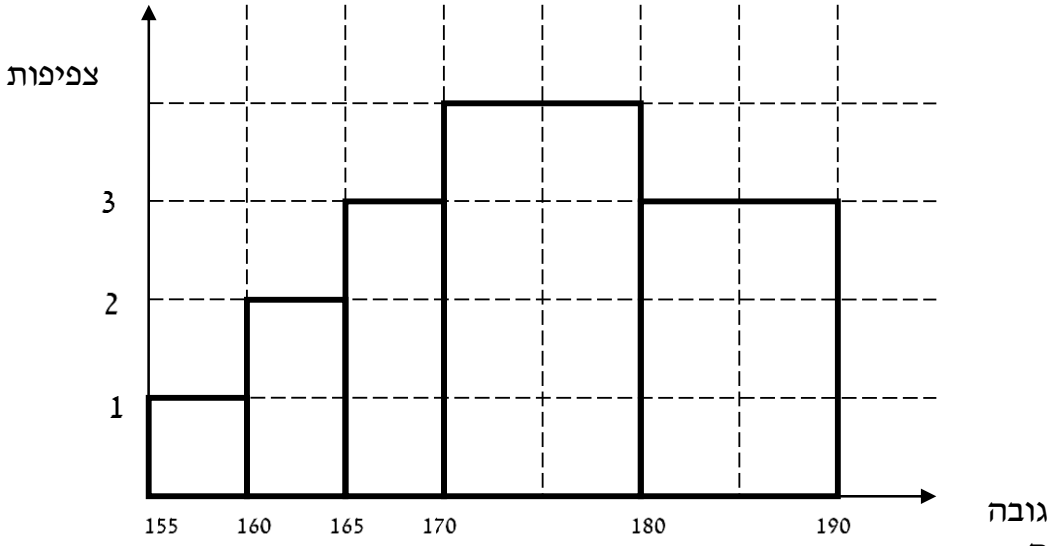
ב. תארו את הרשימה בטבלת שכיחויות.

ג. הוסיפו שכיחויות יחסיות לטבלה.

ד. תארו את הנתונים באופן גרפי.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) להלן היסטוגרמה המתארת את התפלגות הגבהים בס"מ של קבוצה מסוימת:



א. מהו המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?
ב. תארו את הנתונים בטבלת שכיחויות במחלקות.
ג. הוסיפו שכיחות יחסית לטבלה.
ד. הוסיפו את הצפיפות של כל מחלקה לטבלה.
ה. מהי צורת ההתפלגות של הגבהים?

6) להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג:

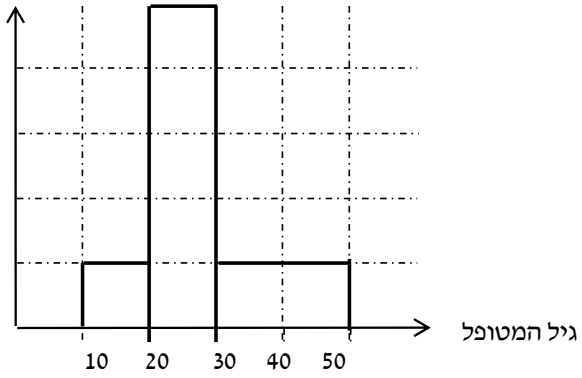
משקל	מספר מקרים
40-45	10
45-50	20
50-60	30
60-65	20
65-70	10

א. תארו את ההתפלגות באופן גרפי.
ב. מה ניתן להגיד על צורת ההתפלגות?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

7) להלן גיל המטופלים של ד"ר שוורץ בשנים:
קנה מידה:





א. מה המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?
ב. מהי הקבוצה הנחקרת?
ג. תרגמו את ההסיטוגרמה לטבלת שכיחות.
ד. מהי הפרופורציה של המטופלים של ד"ר שוורץ בגילאים 20-30?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. להלן טבלה:

x	$f(x)$	$\frac{f(x)}{n}$	%
ערוץ 1	25	$\frac{25}{200}$	12.5%
ערוץ 10	25	$\frac{25}{200}$	12.5%
ערוץ 2	75	$\frac{75}{200}$	37.5%
כבלים	50	$\frac{50}{200}$	25%
לא צפו	25	$\frac{25}{200}$	12.5%
סה"כ	200	1	100%

ב. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.

2) א. מקצוע מועדף.

ב. 19.6%.

3) א. משתנה נחקר: השכלה, סוג: סדר.

ב. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) א. המשתנה: ציון, משתנה בדיד.
ד. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.

ב+ג. להלן טבלה:

x	$f(x)$	$\frac{f(x)}{n}$	%
4	1	$\frac{1}{20}$	5%
5	2	$\frac{2}{20}$	10%
6	6	$\frac{6}{20}$	30%
7	4	$\frac{4}{20}$	20%
8	4	$\frac{4}{20}$	20%
9	2	$\frac{2}{20}$	10%
10	1	$\frac{1}{20}$	5%
סה"כ	20	20	100%

5) א. גובה בס"מ, רציף.

ב+ג+ד. להלן טבלה:

ה. אסימטרית.

x	$f(x)$	$\frac{f(x)}{n}$	%	d
155-160	5	$\frac{5}{100}$	5%	1
160-165	10	$\frac{10}{100}$	10%	2
165-170	15	$\frac{15}{100}$	15%	3
170-180	40	$\frac{40}{100}$	40%	4
180-190	30	$\frac{30}{100}$	30%	3

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

6) א. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.
ב. סימטרית.

7) א. המשתנה: גיל בשנים, משתנה רציף.
ב. המטופלים של ד"ר שוורץ.
ד. להלן טבלה:
ה. 62.5%.

x	$f(x)$
10-20	8
20-30	40
30-50	16

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שיטות סטטיסטיות

פרק 3 - סטטיסטיקה תיאורית-גבולות מדומים ואמיתיים

תוכן העניינים

1. כללי 15

סטטיסטיקה תיאורית – גבולות מדומים וגבולות אמיתיים:

רקע:

עבור משתנה רציף נהוג לתאר את הנתונים בטבלת שכיחויות במחלקות.
הנתונים שנאספים הם ברמת דיוק מסוימת.
לדוגמה: משקל של בני אדם ומשקל של יהלומים ישקלו ברמת דיוק שונה.

גבולות מדומים:

כאשר גבול עליון של מחלקה אחת שונה מגבול תחתון של המחלקה הבאה אז הגבולות הם גבולות מדומים. כשהגבולות מדומים, ההפרש בין גבול תחתון של מחלקה לבין גבול עליון של המחלקה הקודמת יהיה רמת הדיוק.

רמת הדיוק חייבת להיות קבועה - אין אפשרות שחלק מהאנשים נדייק ברמה אחת ואת השאר ברמה אחרת. בגלל שהמשתנה הוא משתנה רציף, כשננתח את הנתונים נעבור מגבולות מדומים לגבולות אמתיים. אם הנתונים יינתנו בגבולות מדומים נהפוך אותם תמיד לגבולות אמיתיים.

כיצד עוברים מגבולות מדומים לגבולות אמיתיים?

לוקחים את רמת הדיוק ומחלקים אותה ב-2, ואת התוצאה המתקבלת מוסיפים לגבולות העליונים ומפחיתים מהגבולות התחתונים. אם יתנו נתונים בגבולות מדומים אנחנו מוכרחים לעבור לגבולות אמיתיים על מנת להמשיך ולנתח, אך אם הנתונים כבר יינתנו בגבולות אמיתיים נשאיר אותם כמו שהם.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

להלן התפלגות הגבהים בס"מ של תלמידי כיתה ח':
יש להעביר את הנתונים לגבולות אמתיים.

$f(x)$	X
20	130-139
25	140-149
30	150-159
20	160-169
10	170-189

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) להלן התפלגות של משתנה בהצגה של מחלקות.
יש להעביר את הנתונים לגבולות אמתיים:

$f(x)$	X
542	500-590
32	600-690
154	700-790
254	800-890

2) להלן התפלגות המשקלים בק"ג של קבוצת אנשים מסוימת.
יש לרשום את הנתונים בגבולות אמיתיים:

משקל בק"ג	מספר אנשים
60-64	18
65-69	24
70-79	52
80-89	19

תשובות סופיות:

1) להלן טבלה:

$f(x)$	x
542	495-595
32	595-695
154	695-795
254	795-895

2) להלן טבלה:

$f(x)$	x
18	59.5-64.5
24	64.5-69.5
52	69.5-79.5
19	79.5-89.5

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שיטות סטטיסטיות

פרק 4 - סטטיסטיקה תיאורית- סכימה

תוכן העניינים

1. כללי 17

סטטיסטיקה תיאורית – סכימה:

רקע:

בסטטיסטיקה ישנה צורת רישום מקובלת לסכום של תצפיות: $\sum_{i=1}^{n} X_i$.

נסביר את צורת הרישום על ידי הדוגמה הבאה:

i	X_i
1	5
2	0
3	1
4	3
5	2

(הסבר מלא מופיע בסרטונים באתר).

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) בבניין 5 דירות. לכל דירה רשמו את מספר החדרים שיש בדירה (X),
ומספר הנפשות החיות בדירה (Y). חשבו:

מספר דירה	X	Y
1	2	1
2	3	1
3	2	2
4	4	3
5	3	2

א. $\sum_{i=1}^{3} X_i$.

ב. $\sum_{i=1}^{5} Y_i$.

ג. $\sum_{i=1}^{4} X_i$.

ד. $\left(\sum_{i=1}^{4} X_i\right)^2$.

ה. $\sum X_i$.

ו. $\sum X_i Y_i$.

ז. $\sum(X_i)\sum(Y_i)$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

2) נתון לוח ערכי המשתנים X_i ו- Y_i, כאשר: $i=1,2,...,6$, ונתונים הקבועים: $a=2$, $b=5$. חשבו את הנוסחאות הבאות:

i	1	2	3	4	5	6
X_i	3	2	4	-2	1	4
Y_i	2	0	0	1	-5	2

א. $\sum_{i=1}^{4} y_i$.

ב. $\sum_{i=1}^{6} a$.

ג. $\sum_{i=1}^{6} x_i y_i$.

ד. $\sum_{i=1}^{6} (x_i + y_i)$.

ה. $\sum_{i=1}^{6} x_i + a$.

3) קבעו לכל זהות האם היא נכונה:

א. $\sum_{i=1}^{n} bX_i = b \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$.

ב. $\sum_{i=1}^{n} a = a \cdot n$.

ג. $\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

4) נתון: $\sum_{i=1}^{10} X_i^2 = 1640$, $\sum_{i=1}^{10} X_i = 80$.

חשבו: $\sum_{i=1}^{10} (X_i - 4)^2$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. 7. ב. 9. ג. 11. ד. 121.
ה. 14. ו. 27. ז. 126.

2) א. 3. ב. 12. ג. 7.
ד. 12. ה. 14.

3) א. נכונה. ב. נכונה. ג. לא נכונה.

4) 1160.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שיטות סטטיסטיות

פרק 5 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום מרכזי

תוכן העניינים

1. כללי 21

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי מיקום מרכזי:

רקע:

המטרה במדדי המיקום המרכזי היא למדוד את מרכז ההתפלגות של התצפיות.

השכיח – Mode:

השכיח הוא הערך הנפוץ ביותר בהתפלגות.

ברשימה

הערך החוזר על עצמו הכי הרבה פעמים: 6, 10, 4, 8, 4, 9, 7.

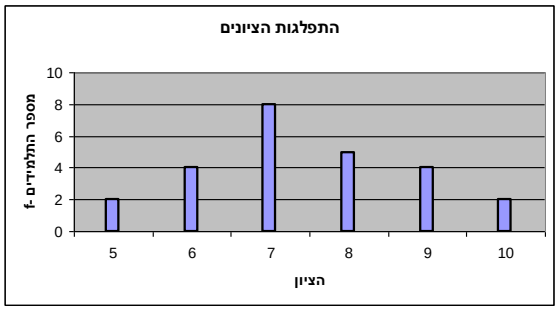
בטבלת שכיחויות בדידה

הערך שהשכיחות שלו היא הגבוהה ביותר.

# תוכניות החיסכון	$f(x)$
0	100
1	75
2	25
3	25
4	25

בדיאגרמת מקלות

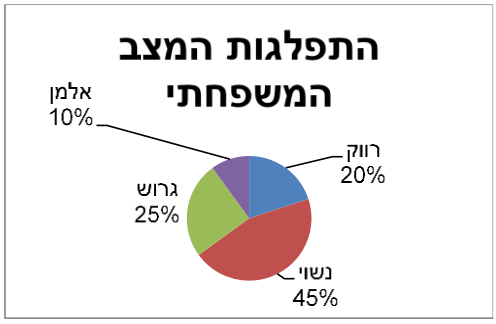
שיעור ה- X של המקל הגבוה ביותר.



© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

בעוגה

הערך של הפלח הגדול ביותר.



בטבלת שכיחויות במחלקות

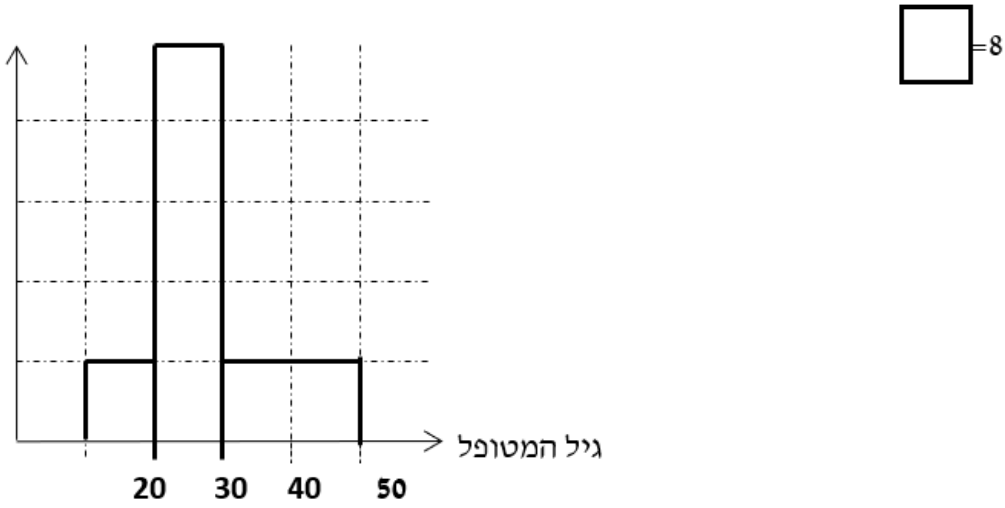
אמצע המחלקה עם הצפיפות הגבוהה ביותר.
לדוגמה, התפלגות הציונים בכיתה:

$f(x)$	X
20	0-60
10	60-70
18	70-80
15	80-90
15	90-100

בהיסטוגרמה

שיעור ה- X של אמצע המחלקה הגבוהה ביותר.

לדוגמה, גיל המטופלים של ד"ר שוורץ בשנים:



© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

כללי

יתכן שלהתפלגות יותר משכיח אחד.

השכיח הוא מדד הרלבנטי לכל סוגי המשתנים.

אמצע תחום (טווח) – Midrange:

הממוצע בין התצפית הגבוהה ביותר לתצפית הנמוכה ביותר:

$$MR = \frac{X_{\min} + X_{\max}}{2}.$$

החציון – Median:

החציון הוא ערך שמחצית מהתצפיות קטנות או שוות לו ומחצית מהתצפיות גדולות או שוות לו.

ברשימה

נסדר את התצפיות בסדר עולה.

אם יש מספר אי זוגי של איברים, מקומו של החציון יהיה התצפית שמיקומה: $\frac{n+1}{2}$.

אם יש מספר זוגי של איברים – החציון הוא ממוצע של האיבר ה- $\frac{n}{2}$,

והאיבר ה-$\frac{n}{2}+1$, כלומר שיש מספר אי-זוגי של תצפיות החציון יהיה: $md = X_{\frac{n+1}{2}}$,

וכשיש מספר זוגי של תצפיות החציון יהיה: $md = \frac{X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}}{2}$.

בטבלת שכיחויות בדידה

נעשה תהליך דומה אך נעזר בשכיחות המצטברת.

דיאגרמת מקלות

נמיר לטבלת שכיחויות בדידה במטרה למצוא את החציון.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

בטבלת שכיחויות במחלקות

שלב א: נמצא את המחלקה החציונית שמיקומה יהיה $\frac{n}{2}$.

שלב ב: נציב בנוסחה הבאה: $Md = L_0 + \frac{\frac{n}{2} - F(x_{m-1})}{f(x_m)} \cdot (L_1 - L_0)$.

$F(x_{m-1})$ - שכיחות מצטברת של מחלקה אחת לפני המחלקה החציונית.

$f(x_m)$ - השכיחות של המחלקה החציונית.

L_0 - גבול התחתון של המחלקה.

L_1 - גבול העליון של המחלקה.

היסטוגרמה

החציון הוא הערך על ציר ה- X שמחלק את ההיסטוגרמה לשני חלקים שווים בשטח.

כללי

החציון אינו רלבנטי למשתנה מסולם שמי ולא רלבנטי למשתנה איכותי.

הממוצע – Average:

הממוצע הוא מרכז הכובד של ההתפלגות.

ברשימה

$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$.

בטבלת שכיחויות

$\overline{x} = \frac{\sum x \cdot f}{n}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

במחלקות

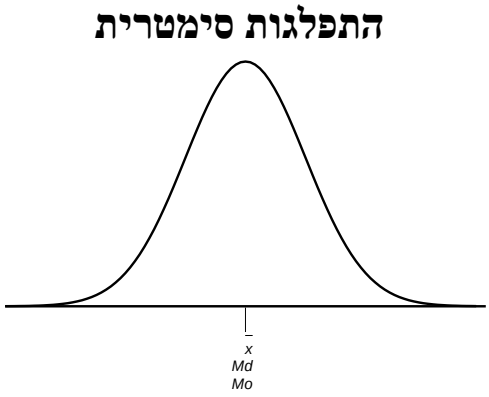
נשתמש באותה נוסחה רק נתייחס לאמצע המחלקה בתור ה- X .
הממוצע הזה יהיה ממוצע מקורב.

כללי

הממוצע רלבנטי רק למשתנה כמותי.

מדדי המיקום המרכזי בהתפלגויות המיוחדות:

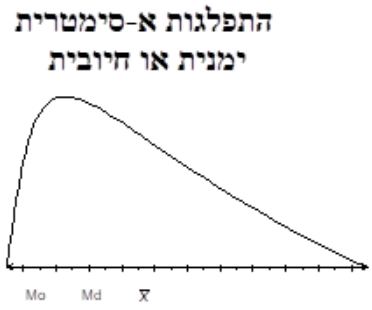
בהתפלגות סימטרית פעמונית כל מדדי המרכז שווים זה לזה:



בהתפלגות סימטרית השכיח לא חייב להיות במרכז:







© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:
6, 5, 8, 7, 6, 9, 8, 6, 7, 6, 7, 8, 5, 4, 6, 10, 9, 8, 6, 7.
חשבו את החציון, השכיח, והממוצע של הציונים.

2) בדקו את מספר החדרים לדירה בבניין בן 5 דירות והתקבל ממוצע 3.8.
לגבי 4 דירות נמצא מספר חדרים: 5, 4, 3, 4.

א. כמה חדרים יש בדירה החמישית?

ב. מהו השכיח ומהו החציון?

3) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה שנספרו עבור כל משפחה בישוב מסוים:

מספר משפחות	מספר מקלטים
22	0
28	1
18	2
22	3
10	4

א. חשבו את הממוצע, החציון והשכיח של ההתפלגות.

ב. הסבירו ללא חישוב כיצד כל מדד שחישבת בסעיף א' היה משתנה אם חלק מהמשפחות (לא כולן) שלא היה להם עד היום טלוויזיה היו רוכשים מקלט אחד.

4) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן":

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

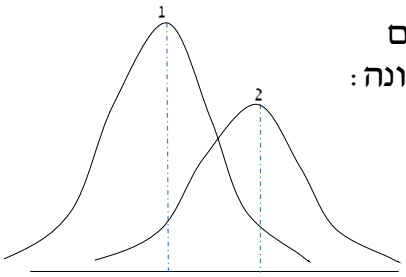
א. כמה משפחות יש בישוב?

ב. מה אחוז המשפחות בישוב עם לכל היותר 2 מכוניות?

ג. חשבו את הממוצע, החציון והשכיח.

הקפידו להסביר לגבי כל סעיף מה משמעות התוצאה שקיבלתם!

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל



5) מורה לימד 2 כיתות, הוא תיאר באותה מערכת צירים את התפלגות הציונים בכל כיתה. בחרו בתשובה הנכונה:

א. בכיתה 1 השכיח גבוה יותר מכיתה 2.

ב. בכיתה 2 השכיח גבוה יותר מכיתה 1.

ג. בשתי הכיתות אותו שכיח.

ד. לא ניתן לדעת באיזו כיתה השכיח גדול יותר.

6) ביישוב מסוים בדקו לכל משפחה את מספר הטלוויזיות שיש לה בבית. ביישוב גרות 200 משפחות. בממוצע יש למשפחה 1.5 טלוויזיות.

מספר טלוויזיות	מספר משפחות
0	28
1	62
2	
3	

א. השלימו את הטבלה.

ב. מהו השכיח, אמצע טווח והחציון.

ג. חלק מהמשפחות להן הייתה טלוויזיה אחת בדיוק הוציאו את הטלוויזיה מביתם. כיצד כל מדד ישתנה (יגדל, יקטן או לא ישתנה). הסבירו ללא חישוב.

7) להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג.
מה הממוצע והחציון של ההתפלגות?

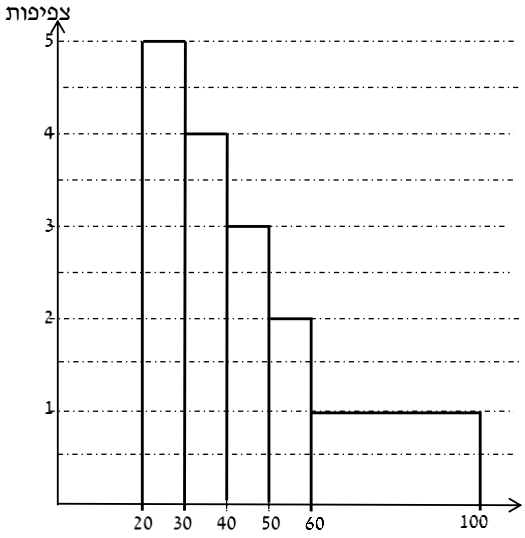
משקל	מספר מקרים
40-45	10
45-50	20
50-60	30
60-65	20
65-70	10

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

8) להלן התפלגות הגבהים בס"מ בקבוצה מסוימת.
חשבו את הממוצע, החציון והשכיח של הגבהים בקבוצה זו.

גובה בס"מ	שכיחות
150-160	30
160-170	40
170-175	60
175-180	70
180-190	40

9) בפקולטה מסוימת בדקו לסטודנטים העובדים בה את השכר לשעת עבודה.
להלן התוצאות:



א. מצאו את השכיח בהתפלגות.

ב. מצאו את החציון בהתפלגות.

ג. הסבירו ללא חישוב האם הממוצע גדול/קטן/שווה לחציון.

ד. הסתבר שיש להוציא מספר תלמידים במחלקה בין 20-30 שקלים.
כיצד הדבר ישפיע על הממוצע, החיצון והשכיח? הסבירו ללא חישוב.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) חציון: 7, שכיח: 6, ממוצע: 6.9.

2) א. 3. ב. שכיח: 3.4, חציון: 4.

3) א. ממוצע: 1.7, חציון: 1.5, שכיח: 1.
ב. הממוצע יגדל ויתר המדדים לא ישתנו.

4) א. 630. ב. 34.13%. ג. שכיח וחציון: 3, ממוצע: 2.952.

5) ב'.

6) א. להלן טבלה: ב. חציון: 2, שכיח: 2, אמצע טווח: 1.5.

מספר טלוויזיות	מספר משפחות
0	28
1	62
2	92
3	18

ג. שכיח: לא ישתנה, אמצע הטווח: לא ישתנה, חציון: לא ישתנה, ממוצע: יקטן.

7) חציון וממוצע: 55.

8) ממוצע: 172.6, חציון: 174.17, שכיח: 177.5.

9) א. 25. ב. 40. ג. גדול מהחציון.
ד. שכיח: לא ישתנה, חציון: יגדל, ממוצע: יגדל.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שיטות סטטיסטיות

פרק 6 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - הטווח, השונות וסטיית התקן

תוכן העניינים

1. כללי 30

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי פיזור – הטווח, השונות וסטיית התקן:

רקע:

המטרה: למדוד את הפיזור של הנתונים, כלומר כמה הם רחוקים זה מזה ושונים זה מזה.

הטווח / תחום (RANGE):
ההפרש בין התצפית הגבוהה ביותר לנמוכה ביותר: $R = X_{\max} - X_{\min}$.

שונות וסטיית תקן:

שונות היא ממוצע ריבועי של הסטיות מהממוצע וסטיית התקן היא שורש של השונות.

עבור סדרת נתונים: $S_x^{\,2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2$.

דוגמאות:

1) נחשב את השונות של סדרת המספרים הבאה: 9, 4, 5.

עבור טבלת שכיחויות: $S_x^{\,2} = \frac{\sum(x-\bar{x})^2 f}{n} = \frac{\sum x^2 \cdot f}{n} - \bar{x}^2$.

2) להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת בה ממוצע הציונים הוא 7.44.

הציון X	השכיחות F	$x^2 \cdot F$
5	2	50
6	4	144
7	8	392
8	5	320
9	4	324
10	2	200
סה"כ		**1430**

$$S_x^{\,2} = \frac{\sum_x x^2 f(x)}{n} - \bar{x}^2 = \frac{1430}{25} - 7.44^2 = 1.8464$$

$$S = \sqrt{S_x^{\,2}} = \sqrt{1.8464} = 1.3588$$

כשיש מחלקות נעזר באמצע המחלקה כדי לחשב את השונות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:
6, 5, 8, 7, 6, 9, 8, 6, 7, 6, 7, 8, 5, 4, 6, 10, 9, 8, 6, 7.
חשבו את השונות, סטיית התקן והטווח של הציונים.

2) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן":

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

א. חשבו סטיית התקן.

ב. חשבו את הטווח של הנתונים.

הקפידו להסביר לגבי כל סעיף מה משמעות התוצאה שקיבלתם.

3) בחברה העוסקת בטלמרקטינג בדקו עבור כל עובד את מספר שנות הוותק שלו. התקבל שממוצע שנות הוותק הוא 4 שנים וסטיית התקן היא שנתיים.

א. האם הממוצע יגדל/יקטן/לא ישתנה וסטיית התקן תגדל/תקטן/לא תשנה כאשר יתווספו שני עובדים עם וותק של 4 שנים להתפלגות?

ב. האם הממוצע יגדל/יקטן/לא ישתנה וסטיית התקן תגדל/תקטן/לא תשנה כאשר יתווספו שני עובדים אשר אחד עם וותק של 0 שנים והשני עם וותק של 8 שנים להתפלגות?

4) נתונה רשימה של 5 תצפיות, אך רק עבור 4 מהן נרשמו הסטיות שלהן מהממוצע: 2, 3, 2, 1-. חשבו את השונות של חמש התצפיות.

5) בשכונה בדקו בכל דירה את מספר החדרים לדירה. בשכונה 200 דירות.

מספר חדרים	פרופורציה
1	0.1
2	0.2
3	0.4
4	0.15
5	

א. מה הממוצע של מספר החדרים לשכונה בדירה?

ב. חשבו את סטיית התקן של מספר החדרים לדירה.

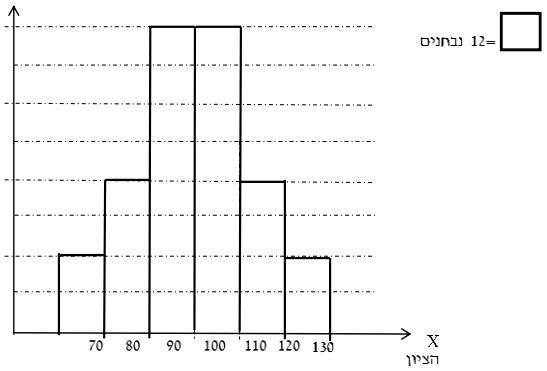
ג. חלק מבעלי הדירות בנות 2 החדרים הפכו את דירתם לדירת חדר. כיצד הדבר ישפיע (יקטין, יגדל, לא ישנה) על כל מדד שחישבתם בסעיפים הקודמים.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

6) להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג:
מהי סטיית התקן של התפלגות המשקל?

משקל	מספר מקרים
40-45	10
45-50	20
50-60	30
60-65	20
65-70	10

7) להלן התפלגות הציונים במבחן אינטליגנציה:



א. מה הממוצע ומה החציון של ההתפלגות?

ב. חשבו את סטיית התקן של הציונים.

ג. מסתבר שיש להוסיף 20 תצפיות לכל אחת משתי המחלקות 90-100 ו- 100-110. כיצד הדבר ישתנה את כל אחד מהמדדים של הסעיפים הקודמים?

תשובות סופיות:

1) שונות: 2.19, סטיית תקן: 1.48, טווח: 6.

2) א. סטיית תקן: 1.106. ב. טווח: 4.

3) א. ממוצע לא ישתנה, סטיית התקן תקטן.

ב. ממוצע לא ישתנה, סטיית התקן תגדל.

4) 10.8.

5) א. 3.05. ב. 1.16. ג. ממוצע: יקטן, סטיית התקן: תגדל.

6) 7.73.

7) א. 100. ב. 12.96. ג. ממוצע: לא ישתנה, סטיית תקן: תקטן.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שיטות סטטיסטיות

פרק 7 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - טווח בין רבעוני

תוכן העניינים

1. כללי 33

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי פיזור – טווח בין רבעוני:

רקע:

הטווח הבין-רבעוני נותן את הטווח בין הרבעונים בו נמצאים 50% מהתצפיות המרכזיות.

שלבים במציאת טווח בין-רבעוני במחלקות:

מספר שנות ותק	רוחב L_1-L_0	f מספר עובדים (שכיחות)	F
$0.5-4.5$	4	56	56
$4.5-9.5$	5	50	106
$9.5-11.5$	2	48	154
$11.5-14.5$	3	36	190
$14.5-19.5$	5	10	200

שלב א:

נמצא את הרבעון התחתון (אחוזון 25) והרבעון העליון (האחוזון ה-75).

מיקום הרבעון התחתון יהיה: $\frac{n}{4}$. מיקום הרבעון העליון יהיה: $\frac{3n}{4}$.

נוסחאות הרבעונים יהיו:

$$Q_1 = L_0 + \frac{\frac{n}{4} - F\left(x_{m-1}\right)}{f\left(x_m\right)} \cdot \left(L_1 - L_0\right)$$

$$Q_3 = L_0 + \frac{\frac{3n}{4} - F\left(x_{m-1}\right)}{f\left(x_m\right)} \cdot \left(L_1 - L_0\right)$$

נציב:

$$Q_1 = 0.5 + \frac{\frac{200}{4} - 0}{56} \cdot 4 = 4.07 \text{ שניות}$$

$$Q_3 = 9.5 + \frac{\frac{3 \cdot 200}{4} - 106}{48} \cdot 2 = 11.33 \text{ שניות}$$

שלב ב:

נחסר את הרבעונים: $IQR = Q_3 - Q_1 = 11.33 - 4.07 = 7.26$ שניות

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

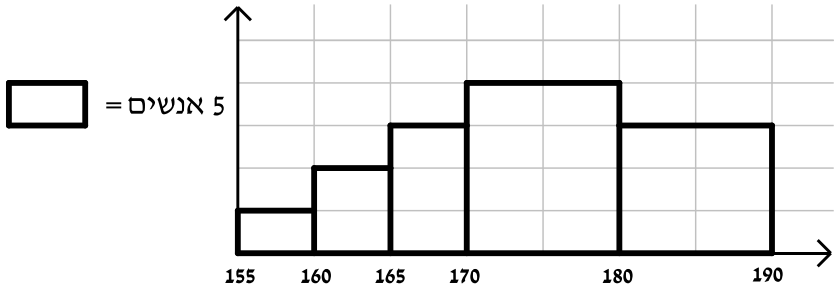
שאלות:

1) להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג:

משקל	מספר מקרים
40-45	10
45-50	20
50-60	30
60-65	20
65-70	10

מצאו את הטווח הבין-רבעוני.

2) להלן היסטוגרמה המתארת את התפלגות הגבהים בס"מ של קבוצה מסוימת:



מצאו את הטווח הבין-רבעוני.

תשובות סופיות:

1) 13.75 ק"ג.

2) 13.33 ק"ג.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שיטות סטטיסטיות

פרק 8 - סטטיסטיקה תיאורית- מדדי מיקום יחסי-ציון תקן

תוכן העניינים

1. כללי 35

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי מיקום יחסי – ציון תקן:

רקע:

המטרה למדוד איך תצפית ממוקמת ביחס לשאר התצפיות בהתפלגות.

ציון תקן:

הנוסחה לציון תקן של תצפית היא: $Z = \frac{X - \overline{X}}{S}$.

ציון התקן נותן כמה סטיות תקן סוטה התצפית מהממוצע. כלומר, ציון התקן מעיד על כמה סטיות תקן התצפית מעל או מתחת לממוצע:

- ציון תקן חיובי אומר שהתצפית מעל הממוצע.
- ציון תקן שלילי אומר שהתצפית מתחת לממוצע.
- ציון תקן אפס אומר שהתצפית בדיוק בממוצע.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במקום עבודה מסוים, ממוצע המשכורות הוא 8 אלף ₪, עם סטית תקן של אלפיים ₪.
באותו מקום עבודה ההשכלה הממוצעת של העובדים הנה 14 שנים, עם סטית תקן של 1.5 שנים. ערן מרוויח במקום עבודה זה 11 אלף ₪ והשכלתו 16 שנים.
מה ערן יותר, באופן יחסי, משכיל או משתכר?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) תלמידי כיתה ח' ניגשו למבחן בלשון ולמבחן במתמטיקה.
להלן התוצאות שהתקבלו:

המקצוע	ממוצע	סטיית תקן
לשון	74	12
מתמטיקה	80	16

עודד קיבל: 68 בלשון ו-70 במתמטיקה.

א. באיזה מקצוע עודד טוב יותר באופן יחסי לשכבה שלו?

ב. איזה ציון עודד צריך לקבל במתמטיקה כדי שיהיה שקול לציונו בלשון?

2) במפעל לייצור מצברים לרכב בדקו במשך 40 ימים את התפוקה היומית (מספר מצברים במאות) ואת מספר הפועלים שעבדו באותו היום.
להלן טבלה המסכמת את המידע שנאסף על שני המשתנים:

	תפוקה	מספר פועלים
ממוצע	48	15
סטיית תקן	10	2

באחד הימים מתוך כלל הימים שנבדקו התפוקה הייתה 50 מאות מצברים ובאותו היום עבדו 13 פועלים.
מה יותר חריג באותו היום, יחסית לשאר הימים שנבדקו: נתוני התפוקה או כמות הפועלים?

א. התפוקה.

ב. כמות הפועלים.

ג. חריגים באותה מידה.

ד. חסרים נתונים כדי לדעת זאת.

3) הגובה הממוצע של המתגייסים לצבא הוא 175 סנטימטר עם סטיית תקן של 10 סנטימטר. המשקל הממוצע הוא 66 ק"ג עם סטיית תקן של 8 ק"ג.
ערן התגייס כשגובהו 180 ס"מ ומשקלו 59 ק"ג.

א. במה ערן חריג יותר ביחס לשאר המתגייסים, גובהו או משקלו?

ב. כמה ערן אמור לשקול כדי שמשקלו יהיה שקול לגובהו?

תשובות סופיות:

1) א. לשון. ב. 72.

2) ב'.

3) א. משקל. ב. 70.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שיטות סטטיסטיות

פרק 9 - סטטיסטיקה תיאורית-מדדי מיקום יחסי-אחוזונים במחלקות

תוכן העניינים

1. כללי 37

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי מיקום יחסי – אחוזונים במחלקות:

רקע:

האחוזון (המאון) ה- p הוא הערך בנתונים המחלק את הנתונים בצורה כזאת שעד אליו יש p % מהנתונים. מסמנים את האחוזון ה- p ב- X_p.
למשל, המאון ה-25 הוא האחוזון ה-25 או הרבעון התחתון:
ערך שרבע מהתצפיות קטנות ממנו והשאר גבוהות ממנו. מסומן: $X_{0.25}$.

מציאת מאון במחלקות:

שלב א: נמצא את המחלקה הרלבנטית שמיקומה יהיה: $\frac{np}{100}$.

שלב ב: נציב בנוסחה הבאה: $x_p = L_0 + \frac{\frac{n\cdot p}{100} - F\left(x_{m-1}\right)}{f\left(x_m\right)} \cdot \left(L_1 - L_0\right)$, את המשתנים:

$F\left(x_{m-1}\right)$ - שכיחות מצטברת של מחלקה אחת לפני המחלקה הרלבנטית.

$f\left(x_m\right)$ - השכיחות של המחלקה הרלבנטית.

L_0 - גבול התחתון של המחלקה.

L_1 - גבול העליון של המחלקה.

אם נרצה לחלץ את אחוז התצפיות שמתחת לערך מסוים נשתמש בנוסחה הבאה: $P_x = \left[\frac{\left(x - L_0\right)}{\left(L_1 - L_0\right)} \cdot f\left(x_m\right) + F\left(x_{m-1}\right)\right] \cdot \frac{100}{n}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

להלן התפלגות השכר של עובדים בחברה מסוימת:

שכר ב-₪	
4000-6000	140
6000-10000	128
10000-15000	60
15000-20000	54
20000-40000	18

א. מצאו את המאון ה-40.

ב. מהו אחוז העובדים שמשתכרים מתחת ל-5,000 ₪?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) להלן התפלגות השכר (באלפי שקלים) בחברה:

שכר - X	שכיחות מצטברת
6-10	48
10-15	100
15-20	120
20-30	132
30-60	136

א. חשבו את המאון ה-60.

ב. מהו העשירון העליון?

ג. 20% מהמשכורות הגבוהות ביותר הן משכורות של הבכירים, מהי המשכורת המינימאלית לבכיר?

ד. מה אחוז האנשים שמשתכרים מתחת ל-7,000 ₪?

ה. איזה אחוז מהעובדים משתכרים מעל ל-25,000 ₪?

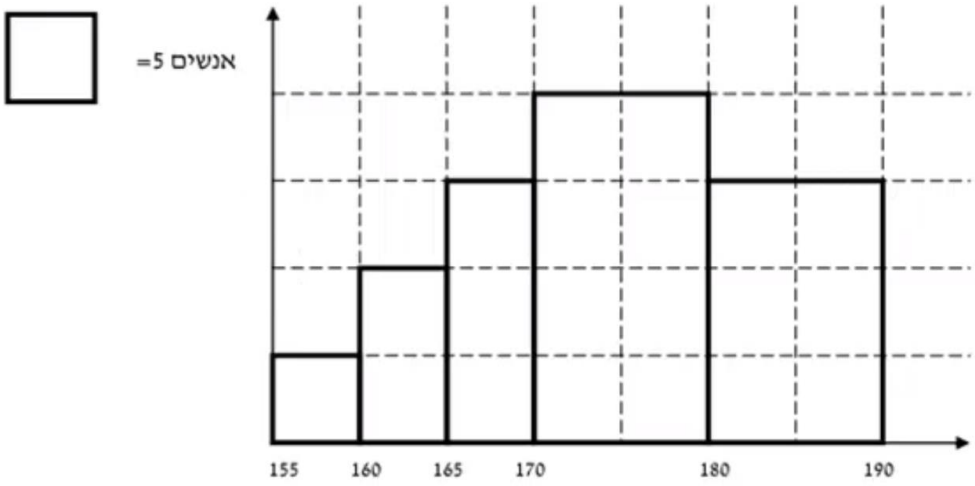
ו. איזה אחוז מהעובדים משתכרים בין 7,000 ₪ ל-25,000 ₪?

2) למבחן ניגשו 400 נבחנים. נתון שהעשירון התחתון הוא הציון 60. הרבעון העליון הוא הציון 80. כמו כן ההתפלגות של הציונים היא סימטרית. מלאו את השכיחויות החסרות.

ציון- X	$f(x)$
50-60	
60-70	
70-80	
80-90	
90-100	

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

3) להלן היסטוגרמה המתארת את התפלגות הגבהים בס״מ של קבוצה מסוימת:



חשבו:

א. העשירון התחתון.

ב. האחוזון ה-30.

ג. הגובה ש-20% מהתצפית גדולות ממנו.

ד. את אחוז התצפיות מתחת לגובה 158 ס״מ.

ה. את אחוז התצפיות מעל לגובה 185 ס״מ.

ו. את אחוז התצפיות בין גובה 170 ס״מ ל-185 ס״מ.

תשובות סופיות:

1) א. 13.23. ב. 22. ג. 17.2. ד. 8.82%. ה. 7.36%.
ו. 83.82%.

2) להלן טבלה:

ציון- X	$f(x)$
50-60	40
60-70	60
70-80	200
80-90	60
90-100	40

3) א. 162.5. ב. 170. ג. 183.33. ד. 3%. ה. 15%.
ו. 55%.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שיטות סטטיסטיות

פרק 10 - סטטיסטיקה תיאורית- תרשים קופסא

תוכן העניינים

1. כללי 40

סטטיסטיקה תיאורית – תרשים קופסא (Boxplot):

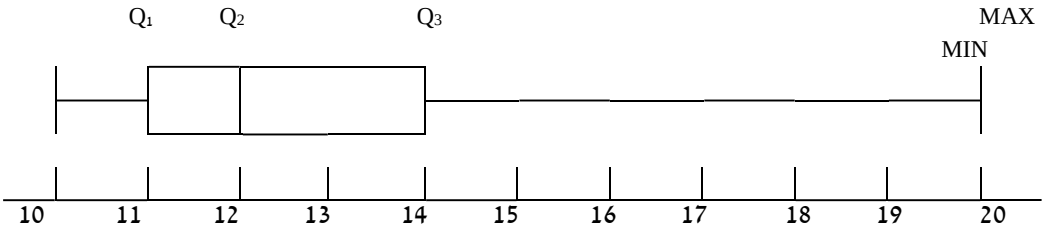
רקע:

תרשים קופסא הינו תרשים שבעזרתו ניתן לבחון:

1) את המרכז של ההתפלגות על ידי החציון (Q_2).

2) את הפיזור של הנתונים (הטווח והטווח הבין רבעוני).

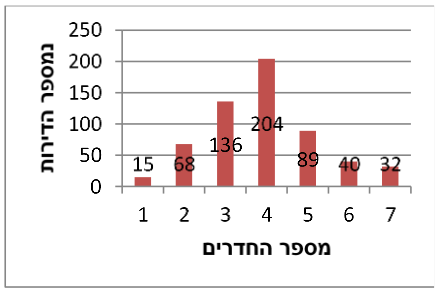
3) את צורת ההתפלגות (סימטרית \אסימטרית ימנית או אסימטרית שמאלית).



© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

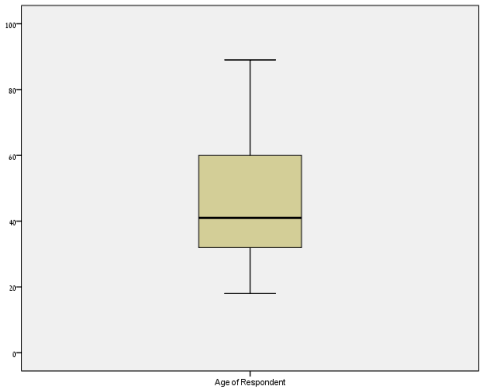
שאלות:

1) להלן התפלגות מספר החדרים לדירות שנבנו בשנת 2009 בעיר אשדוד:



א. מצאו את החציון, הרבעון התחתון והרבעון העליון של ההתפלגות.
ב. שרטטו דיאגרמת קופסא להתפלגות.
ג. מה ניתן לומר על צורת ההתפלגות?

2) להלן דיאגרמת קופסא המתארת את התפלגות הגיל (בשנים) באוכלוסייה מסוימת:



א. מה הגיל החציוני?
ב. מה בערך טווח הגילאים?
ג. מה ניתן להגיד על צורת ההתפלגות?

תשובות סופיות:

1) א. חציון: 4 , רבעון תחתון: 3, רבעון עליון: 5.
ב. ראה גרף מלא בסרטון וידאו. ג. כמעט סימטרית.

2) א. חציון: 40. ב. טווח: 70. ג. התפלגות אסימטרית ימנית.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שיטות סטטיסטיות

פרק 11 - סטטיסטיקה תיאורית - טרנספורמציה לינארית

תוכן העניינים

1. כללי 42

סטטיסטיקה תיאורית – טרנספורמציה לינארית:

רקע:

מצב שבו מבצעים שינוי מסוג הוספה (או החסרה) של קבוע, והכפלה (או חילוק) של קבוע, לכל התצפיות: $y = a \cdot x + b$. כך יושפעו המדדים השונים:

מדדי המרכז:

$$MR_y = a \cdot MR + b$$
$$MO_y = a \cdot MO + b$$
$$\bar{y} = a \cdot \bar{x} + b$$
$$Md_y = a \cdot \leq Md_x + b$$

מדדי הפיזור:

$$R_y = |a| R_x$$
$$S_y = |a| S_x$$
$$S_y^{\,2} = a^2 S_x^{\,2}$$

מדדי המיקום היחסי:

$$Y_p = a \cdot X_p + b$$
$$Z_Y = \frac{a}{|a|} Z_x$$

שלבי העבודה:

1. נזהה שמדובר בטרנספורמציה לינארית (שינוי קבוע לכל התצפיות).
2. נרשום את כלל הטרנספורמציה לפי נתוני השאלה.
3. נפשט את הכלל ונזהה את ערכי a ו-b.
4. נציב בנוסחאות שלעיל בהתאם למדדים שנשאלים.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

השכר הממוצע של עובדים הינו 9000 ₪ וטווח 6000 ₪. חשבו את המדדים הללו לאחר שהעלו את כל המשכורות ב-10% ואחר כך קנסו אותם ב-100 ₪.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) עבור סדרת נתונים התקבל: $\bar{x}=80, S=15, MO=70$.
הוחלט להכפיל את כל התצפיות ב-4 ולהחסיר מהתוצאה 5.
חשבו את המדדים הללו לאחר השינוי.

2) בחברה מסוימת השכר הממוצע הוא 40 ₪ לשעה עם סטיית תקן של 5 ₪ לשעה.
הוחלט להעלות את כל המשכורות ב-10%, אך זה לא סיפק את העובדים ולכן הם קיבלו לאחר מכן תוספת של 2 ₪ לשעה.
מה הממוצע ומהי השונות של השכר לשעה לאחר כל השינויים.

3) במבחן מסוים הציון החציוני היה 73, טווח הציונים היה 40 נקודות והעשירון העליון היה הציון 87. כיוון שהציונים בבחינה היו נמוכים, המורה החליט לתת פקטור של 4 נק' לכל התלמידים.
חשבו את המדדים לאחר הפקטור.

4) דגמו מקו ייצור 50 קופסאות של גפרורים. בדקו בכל קופסא בה יש 40 גפרורים את כמות הגפרורים הפגומים. התקבל שבממוצע יש 3 גפרורים פגומים בקופסא, עם סטיית תקן של 1.5 גפרורים.
מה יהיה הממוצע ומה תהיה סטיית התקן של מספר התקינים בקופסא?

5) חברת בזק הציעה את ההצעה הבאה: שלושים שקלים דמי מנוי חודשיים קבועים וכן 10 אגורות לכל דקה של שיחה יוצאת. אדם בדק במשך שנה את דקות השיחות היוצאות שלו, וקיבל שבממוצע חודשי יש לו 600 דקות שיחות יוצאות עם שונות של 2500 דקות רבועות, כמו כן בחודש ינואר ציון התקן היה 2.
חשבו את המדדים הללו עבור חשבון הטלפון החודשי של אותו אדם בשקלים אם היה משתמש בחבילה המוצעת לו על ידי בזק.

6) הוכיחו שאם כל התצפיות בהתפלגות עברו טרנספורמציה לינארית: $Y_i = a \cdot X_i + b$,
אזי הממוצע והשונות של כלל התצפיות לאחר הטרנספורמציה יהיו בהתאמה:
$\bar{y} = a \cdot \bar{x} + b, S_y^2 = a^2 S_x^2$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) ממוצע: 315, סטיית תקן: 60, שכיח: 275.
2) ממוצע: 46, שונות: 30.25.
3) טווח: 40, חציון: 77, עשירון עליון: 91.
4) ממוצע: 37, סטיית תקן: 1.5.
5) ממוצע: 90, שונות: 25, ציון תקן: 2.
6) $a^2 \cdot S_x^2$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שיטות סטטיסטיות

פרק 12 - סטטיסטיקה תיאורית - שאלות מסכמות

תוכן העניינים

1. כללי 45

סטטיסטיקה תיאורית – שאלות מסכמות:

שאלות:

1) בדקו עבור 5 תלמידים את המשקל שלהם:

מספר תלמיד	משקל בק"ג
1	58
2	62
3	48
4	34
5	58

א. מהו המשתנה הנחקר? בדיד או רציף?

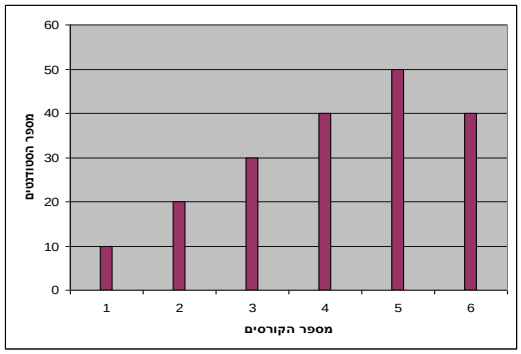
ב. מה המשקל החציוני, הממוצע והשכיח?

ג. מה הטווח וסטיית התקן של המשקל?

ד. לאותם תלמידים חישבו גם את הגובה בס"מ וקיבלו גובה ממוצע של 168 וסטיית תקן 6. במה תלמיד מספר 3, שגובהו 162, יותר חריג – במשקל או בגובה?

ה. הוסיפו עוד תלמיד השוקל 52 ק"ג בדיוק. הסבירו ללא חישוב כיצד הדבר ישפיע על הממוצע וסטיית התקן (יגדיל, יקטין או לא ישנה).

2) בפקולטה להנדסה אספה המזכירות נתונים לגבי מס' הקורסים שכל סטודנט סיים בשנה הראשונה ללימודיו בשנת 2008. להלן התוצאות שהתקבלו:



א. מה המשתנה הנחקר? בדיד או רציף?

ב. מהי צורת ההתפלגות?

ג. תארו את הנתונים בטבלת שכיחויות.

ד. חשבו את השכיח, החציון והטווח.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

3) להלן התפלגות הציונים בבחינה בלשון שנעשתה עבור תלמידי כיתות ד'.
במחקר השתתפו 150 תלמידים. ממוצע הציונים שהתקבל: $\overline{X} = 7\frac{1}{15}$.

ציון	מספר התלמידים
4	12
5	16
6	
7	38
8	
9	14
10	10

א. השלימו את השכיחויות החסרות בטבלה.
ב. חשבו את הציון החציוני, השכיח.
ג. חשב שונות וסטיית תקן להתפלגות הציונים.

4) חברה סלולארית דגמה 200 אנשים. עבור כל אדם נבדקה מידת שביעות הרצון של הלקוח מהחברה (1 - שביעות רצון נמוכה ו-5 - שביעות רצון גבוהה).
להלן ההתפלגות שהתקבלה:

שביעות רצון	מספר האנשים
1	40
2	60
3	50
4	30
5	20

א. מה אחוז האנשים עם רמת שביעות רצון נמוכה?
ב. מה המשתנה הנחקר ומאיזה סוג הוא?
ג. מהי הדרך הגרפית המתאימה ביותר לתיאור הנתונים?
   i. היסטוגרמה.
   ii. דיאגרמת מקלות.
   iii. דיאגרמת עוגה.
ד. חשבו את המדדים הבאים:
   i. טווח.
   ii. שכיח.
   iii. חציון.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) להלן התפלגות מספר שעות העבודה לשבוע של העובדים (כ-200) בחברת "סטאר":

מספר שעות עבודה	שכיחות יחסית (פרופורציה)	שכיחות
10-20	15%	
20-30	20%	
30-40	30%	
40-50	20%	
50-60		

א. השלימו את הטבלה.

ב. חשבו את החציון, השכיח והממוצע של התפלגות מס' שעות העבודה בחברה.

ג. מה סטיית התקן של מספר שעות העבודה?

ד. מה העשירון העליון של ההתפלגות?

ה. איזה אחוז מהעובדים עובדים מעל 45 שעות בשבוע?

ו. מה ציון התקן של רינה, שעובדת 30 שעות בשבוע?

ז. כיצד ישתנה החציון, הממוצע וסטיית התקן אם מספר שעות העבודה המינימאלי אינו 10 אלא 15? הסבירו.

6) חברה סלולארית דגמה 200 אנשים. עבור כל אדם נבדק מס' המסרונים ששלח במשך חודש. להלן ההתפלגות שהתקבלה:

מספר המסרונים	מספר האנשים
0-50	40
50-100	60
100-150	50
150-250	30
250-ומעלה	20

א. מה אחוז האנשים ששלחו פחות מ-80 מסרונים בחודש?

ב. מה אחוז האנשים ששלחו בין 50 ל-120 מסרונים?

ג. הוחלט להעניק מתנה עבור $\frac{1}{4}$ מהלקוחות שמשתמשים במספר הרב ביותר של מסרונים בחודש. החל מאיזה כמות של מסרונים תחולק המתנה?

ד. ציינו איזה מדד ניתן לחשב ואיזה לא ניתן. אם ניתן, חשבו:

i. ממוצע.

ii. שכיח.

iii. חציון.

iv. שונות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

7) נתנו לקבוצת ילדים לבצע משימה מסוימת ובדקו את התפלגות זמן ביצוע המשימה בדקות. להלן ההתפלגות שהתקבלה:

זמן בדקות	מספר הילדים
0.5-3.5	20
3.5-9.5	18
9.5-19.5	14
19.5-29.5	8

א. שרטטו היסטוגרמה לתיאור התפלגות זמן ביצוע המשימה.

ב. מתוך ההיסטוגרמה שבנית בסעיף א', מהי צורת ההתפלגות?

ג. חשבו את השכיח והחציון של ההתפלגות.

ד. הסבירו, ללא חישוב, האם הזמן הממוצע לביצוע המשימה, קטן או גדול או שווה ביחס לשכיח ולחציון.

8) התפלגות ציוני מבחן אינטליגנציה היא סימטרית. נתון שהעשירון העליון הוא 130, הרבעון התחתון הוא 90, ושלמבחן נגשו 500 מועמדים.

הציון	מספר הנבחנים
50-70	
70-90	
90-100	
100-110	
110-130	
130-150	

א. השלימו את הטבלה.

ב. מהו הממוצע והחציון של ההתפלגות?

ג. מהו הציון ש-40% מהתלמידים קיבלו מעליו? באיזה אחוזון מדובר?

ד. הוחלט להעלות את כל הציונים ב-10 נקודות.
כיצד הדבר ישפיע על הממוצע וסטיית התקן של הציונים?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

9) להלן מספר טענות, עבור כל טענה ציינו אם היא נכונה או לא נכונה ונמקו.

א. בסדרה שבה כל התצפיות שוות זו לזו השונות הינה 0.

ב. ציון התקן של החציון תמיד יהיה 0.

ג. ציון התקן של האחוזון ה-70 בהתפלגות אסימטרית ימנית (חיובית) תמיד יהיה חיובי.

ד. אם נוסיף תצפיות לסדרה של תצפיות, הדבר בהכרח יגדיל את הממוצע של הסדרה.

ה. בסדרה החציון הינו 80. הוספו שתי תצפיות אחת 79 ואחת 100 לכן החציון יגדל.

ו. אם נוסיף את הערך 4 לכל התצפיות אז סטיית התקן לא תשתנה.

ז. אם נחלק את כל התצפיות בהתפלגות ב-2 אז השונות תקטן פי 2.

ח. אם נגדיל את ממוצע המשכורות של עובדים בחברה אז גם השונות תגדל.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. המשתנה הנחקר: משקל תלמיד בק"ג, משתנה כמותי רציף.

ב. $\bar{X}=52$, $Md=X_{\frac{n+1}{2}}=X_3=58$, שכיח: 58.

ג. $S=10.12$, $R=28$.

ד. הוא חריג יותר בגובה כי שם ציון התקן בערך מוחלט יותר גבוה.

ה. הממוצע לא ישתנה אך סטיית התקן תקטן.

2) א. מספר הקורסים, בדיד. ב. התפלגות אסימטרית שמאלית.

ג. להלן טבלה: ד. שכיח: 5, טווח: 5.

x	$f(x)$
1	10
2	20
3	30
4	40
5	50
6	40
סה"כ	**190**

3) א. 20 תלמידים קיבלו ציון 6 ו-40 תלמידים קיבלו ציון 8.

ב. חציון: 7, שכיח: 8. ג. שונות: 2.533 , סטיית תקן: 1.592.

4) א. 20%.

ב. שביעות רצון (סדר).

ג. ii.

ד. טווח: 4, שכיח:2, חציון: 2.

5) א. להלן טבלה:

ב. חציון: 35, שכיח: 35, ממוצע: 35.

מספר שעות עבודה	שכיחות יחסית (פרופורציה)	שכיחות
10-20	15%	30
20-30	20%	40
30-40	30%	60
40-50	20%	40
50-60	15%	30

ג. סטיית תקן: 12.65.

ד. 53.333.

ה. 25%.

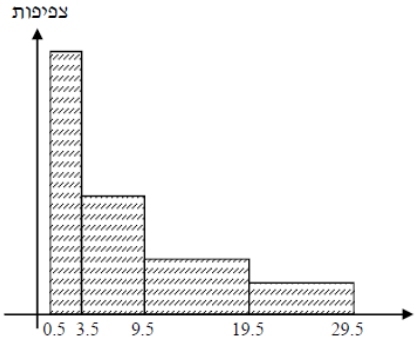
ו. -0.395.

ז. חציון לא ישתנה, ממוצע יגדל, סטיית תקן תקטן.

6) א. 38% ב. 40% ג. 150 ד. חציון: 100.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

7) א. שרטוט: ב. ההתפלגות היא א-סימטרית ימנית.



ג. שכיח: 2, חציון: 6.83.

ד. בהתפלגות א-סימטרית ימנית מתקיים: $Mo < Md < \bar{X} < MR$.

8) א. ראו טבלה:

ציון	מספר הנבחנים
50-70	50
70-90	75
90-100	125
100-110	125
110-130	75
130-150	50

ב. 100. ג. 104.

ד. הממוצע יעלה ב-10 נקודות, אך סטיית התקן לא תשתנה.

9) א. נכון. ב. לא נכון. ג. לא נכון. ד. לא נכון. ה. לא נכון.
ו. נכון. ז. לא נכון. ח. לא נכון.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שיטות סטטיסטיות

פרק 13 - מקדם המתאם (מדד קשר) הלינארי

תוכן העניינים

1. מקדם המתאם הלנארי (פירסון) 52
2. חישוב מקדם המתאם הלנארי (פירסון) 63

מקדם המתאם (מדד קשר) הלינארי ומובהקותו

מדד הקשר הלינארי (פירסון) – מבוא

מעוניינים לבדוק עד כמה קיים קשר מסוג קשר לינארי (קו ישר) בין שני משתנים.
שני המשתנים שאנו בודקים לגביהם קשר צריכים להיות משתנים כמותיים.
מבחינת סולמות מדידה כל משתנה נחקר צריך להיות מסולם רווחים או מנה.
בדרך כלל המשתנה המוצג כ- Y הוא המשתנה התלוי והמשתנה המוצג ב- X הוא המשתנה הבלתי תלוי.
תיאור גרפי לנתונים נעשה על ידי דיאגרמת פיזור. בדיאגרמת פיזור אנחנו מסמנים כל תצפית בנקודה לפי שיעור ה- X ושיעור ה- Y שלה.
דיאגרמת הפיזור נותנת אינדיקציה גרפית על הקשר בין שני המשתנים.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

בבניין 8 דירות בדקו לכל דירה את מספר החדרים שלה וכמו כן את מספר הנפשות הגרות בדירה. להלן התוצאות שהתקבלו :

מספר חדרים בדירה	2	2	3	2	3	3	4	4
מספר הנפשות בדירה	0	1	2	2	3	4	4	5

1) כמה תצפיות ישנן בדוגמה?

2) כמה משתנים ישנם בדוגמה, מי הם?

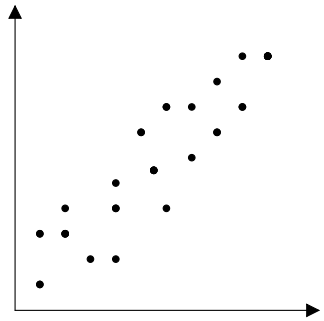
3) שרטטו לנתונים דיאגרמת פיזור.

4) מי המשתנה התלוי ומיהו המשתנה הבלתי תלוי?

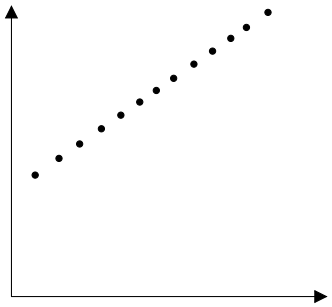
© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דיאגרמות פיזור לקשר בין משתנים וניתוחם

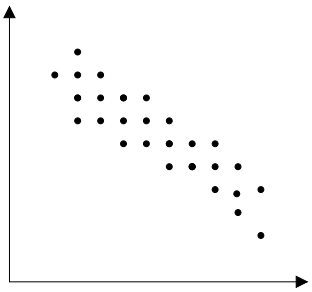
קשר לנארי חיובי חלקי



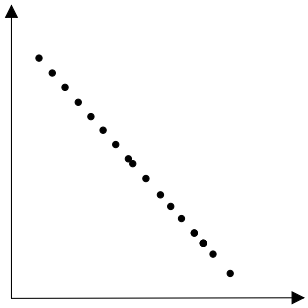
קשר לנארי חיובי מלא



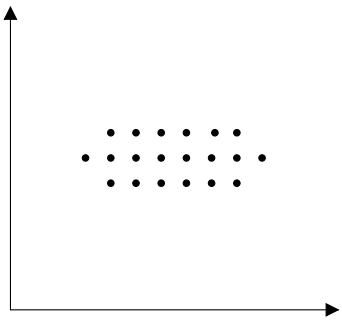
קשר לינארי שלילי חלקי



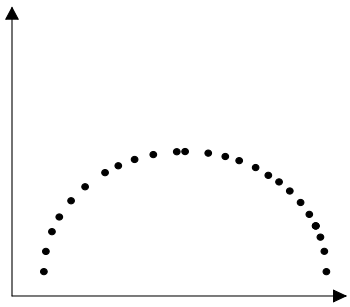
קשר לינארי שלילי מלא



אין קשר



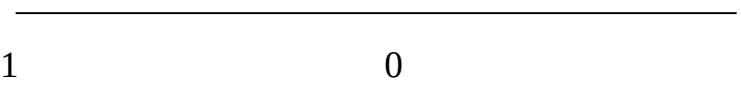
אין קשר לינארי



משמעות מקדם המתאם:

כדי לבדוק עד כמה קיים קשר לינארי בין שני המשתנים ישנו מדד קשר שנקרא גם מקדם המתאם הלינארי הידוע גם בשם מקדם המתאם של פירסון.

מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין 1 ל-1.



© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מקדם מתאם 1-או 1 אומר שקיים קשר לינארי מלא בין המשתנים שניתן לבטאו על ידי נוסחה של קו ישר: $y = ax + b$.

מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1):

קיים קשר לנארי מלא בו השיפוע a יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי (מקדם מתאם-1) מלא אומר שקיים קשר לנארי מלא בו השיפוע a שלילי.

מתאם חיובי חלקי:

ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט ואילו מתאם שלילי חלקי אומר שככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט. ככל שמקדם המתאם קרוב לאפס עוצמת הקשר יותר חלשה וככל שהמדד רחוק יותר מהאפס העוצמה יותר חזקה. לסיכום, מקדם המתאם בודק את עוצמת הקשר הלנארי, ואת כיוון הקשר.

מקדם המתאם הלינארי אינו מושפע מיחידות המדידה. כל שינוי ביחידות המדידה של המשתנים, לא ישנה את מקדם המתאם.

מדד הקשר הלינארי באוכלוסייה, שנקרא גם מקדם המתאם של פירסון או מדד הקשר של פירסון באוכלוסייה מסומן ב: ρ - פרמטר המאפיין את עוצמת הקשר הלינארי באוכלוסייה וכיוונו בין שני המשתנים הנחקרים. כאשר:

r - מדד הקשר הלינארי במדגם שמהווה אומד לפרמטר ρ.

קיומו של מתאם בין שני משתנים אינו מצביע על סיבתיות בהכרח. למשל, אם נמצא מתאם חיובי בין כמות הסוכרזית שאדם אוכל לבין במשקל שלו אין זה אומר שהסיבה להשמנה היא הסוכרזית. מדד הקשר של פירסון הוא מדד קשר סימטרי, כלומר אם נחליף את X ב- Y התוצאה תהיה זהה.

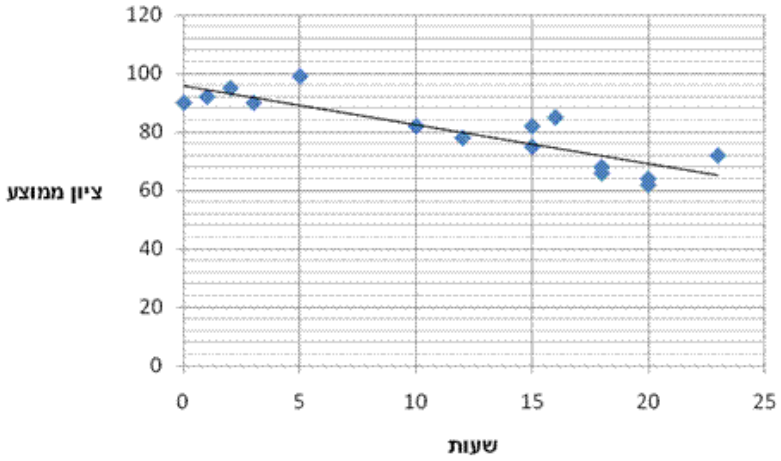
דוגמה (פתרון בהקלטה) :

- מה ניתן להגיד על מקדם המתאם של שני המשתנים על סמך דיאגרמת הפיזור ששרטטנו?
- אם היינו משנים את השרטוט כך שבציר האנכי היה המשתנה "מספר החדרים" ובציר האופקי היה "מספר הנפשות", האם הדבר היה משפיע על מדד הקשר של פירסון?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) חוקר רצה לאפיין את הקשר בין מספר השעות בשבוע שסטודנט מקדיש לבילויים לבין הציון הממוצע שלו בסוף הסמסטר. לשם כך הוא אסף נתונים של 15 סטודנטים ויצר דיאגרמת פיזור:



א. מיהו המשתנה הבלתי תלוי?

ב. מה ניתן לומר על כיוון הקשר בין מספר שעות הבילוי השבועיות לבין הציון הממוצע של הסמסטר? מה ניתן להגיד על עוצמת הקשר?

2) להלן טבלה המסכמת את מקדמי המתאם הלינארי בין ציוני מבחנים שונים שהתקבלו עבור תלמידים בכיתה מסוימת:

	ספורט	לשון	מתמטיקה
ספורט	?	-0.7	?
לשון	?	?	0.6
מתמטיקה	-0.1	?	?

א. השלימו את מקדמי המתאם שמסומנים בסימן שאלה בטבלה.

ב. בין אילו שני ציוני מקצועות שונים קיים מתאם בעל העוצמה החזקה ביותר?

3) במחקר נתבקשו לבדוק את הקשר בין מספר שעות התרגול של קורס לבין הציון הסופי שלו. להלן תוצאות מדגם שהתקבל:

שעות תרגול	ציון סופי
20	90
25	90
30	95
15	60
30	90
20	85
10	50

א. מיהו המשתנה התלוי ומיהו המשתנה הבלתי תלוי בדוגמה זו?

ב. שרטטו דיאגרמת פיזור לנתונים.

ג. מה ניתן לומר על הקשר בין המשתנים במדגם?

ד. מסתבר שבסופו של דבר נתנו פקטור של 5 נקודות לציון הסופי. כיצד הדבר היה משנה את מקדם המתאם של המדגם?

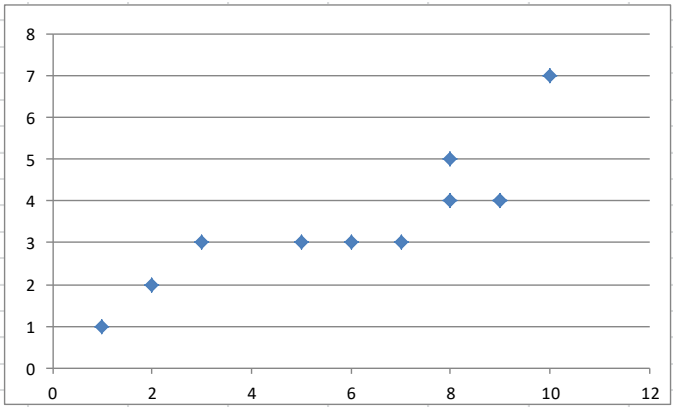
© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) בתחנה המטאורולוגית רצו לבדוק את הקשר שבין הטמפרטורה במעלות צלזיוס לכמות המשקעים במ״מ. הם אספו נתונים על 10 ימים במהלך חודש ינואר. המתאם שהתקבל היה 0.8.

א. השלימו את המשפט:
בחודש ינואר ככל שהטמפרטורה היומית נוטה לרדת, כך כמות המשקעים נוטה _____.

ב. הוחלט להעביר את הטמפרטורה למעלות פרנהייט על מנת שיוכלו להשוות אותה לנתונים מארה״ב. נוסחת המעבר היא $F^0 = 32 + \frac{9}{5}C^0$.
כיצד הדבר ישפיע על מקדם המתאם בין הטמפרטורה במעלות פרנייט לכמות המשקעים במ״מ?

5) להלן דיאגרמת פיזור המראה קשר בין שני משנים:



א. השלימו: ניתן לראות שהקשר הוא לינארי _____ (מלא\ חלקי) כיוון הקשר הוא (חיובי \שלילי).

ב. השלימו: אם היינו מוסיפים תצפית שערך ה- X שלה הוא 4 וערך ה- Y שלה הוא 7, מקדם המתאם של פירסון היה _____ (גדל\ קטן\ לא משתנה).

שאלות רב ברירה (יש לבחור את התשובה הנכונה):

6) חוקר אקלים דגם כמה ימים בשנה ומדד את הטמפרטורה בטורונטו שבקנדה ואת הטמפרטורה בסידני שבאוסטרליה באותו היום. הוא חישב ומצא מקדם מתאם שלילי בין הטמפרטורה היומית בטורונטו לבין הטמפרטורה היומית בסידני. משמעות מקדם המתאם השלילי במדגם:

א. אין קשר בין הטמפרטורה בטורונטו לבין הטמפרטורה בסידני בימים שנדגמו.

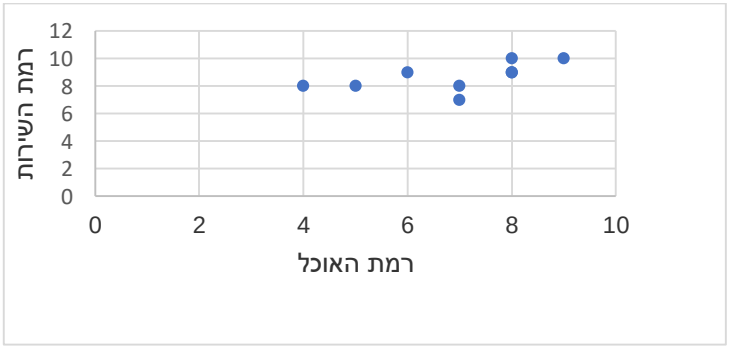
ב. במדגם, רוב הטמפרטורות בטורונטו היו שליליות.

ג. ההפרש בין הטמפרטורה בטורונטו לבין הטמפרטורה באוסטרליה, במדגם זה, הוא שלילי.

ד. במדגם יש נטייה שהטמפרטורה יורדת בטורונטו לטמפרטורה לעלות בסידני.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

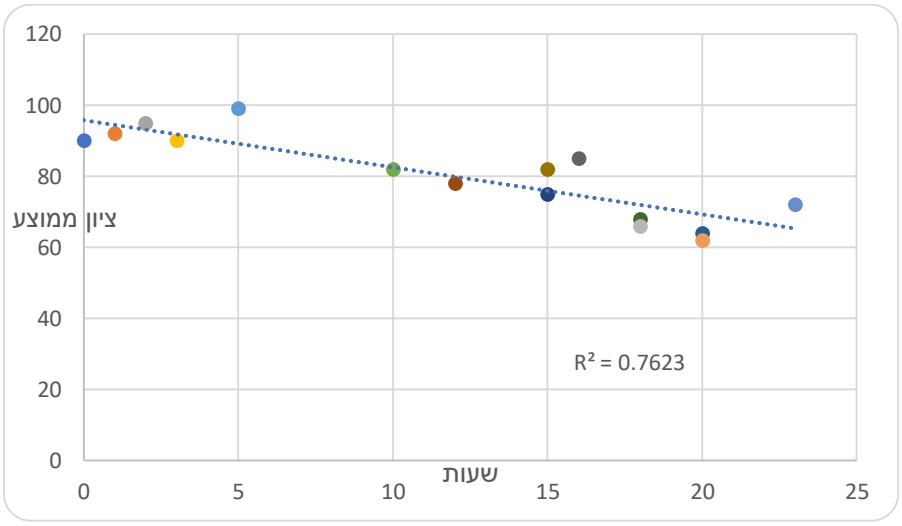
7) בסקר שביעות רצון שנערך בבית הקפה "פת לחם" התבקשו הלקוחות לדרג את מידת שביעות הרצון שלהם (בסולם 1-10) בשני נושאים: רמת האוכל ורמת השירות.



מה יהיה ערכו של מקדם המתאם (r)?

א. $r=-0.3$
ב. $r=0$
ג. $r=1.125$
ד. $r=0.593$

8) חוקר רצה לאפיין את הקשר בין מספר השעות בשבוע שסטודנט מקדיש לבילויים לבין הציון הממוצע שלו בסוף הסמסטר. לשם כך הוא אסף נתונים של 15 סטודנטים ויצר דיאגרמת פיזור.

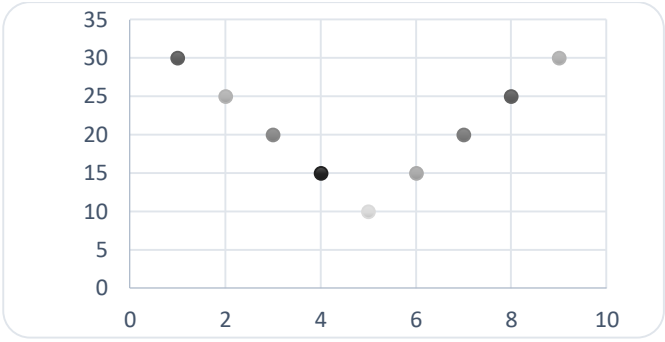


מה ניתן לומר על כיוון הקשר במדגם בין מספר שעות הבילוי השבועיות לבין הציון הממוצע של הסמסטר?

א. ככל שמבלים יותר הציון נוטה לרדת.
ב. אין קשר בין שעות הבילוי לציון.
ג. ככל שמבלים פחות הציון נוטה לרדת.
ד. ככל שהציון נוטה לרדת הסטודנט מבלה פחות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

9) התרשים הבא מתאר קשר בין שני משתנים, איזה מהמתאמים הבאים הוא המתאים ביותר לתיאור הקשר בין שני המשתנים?



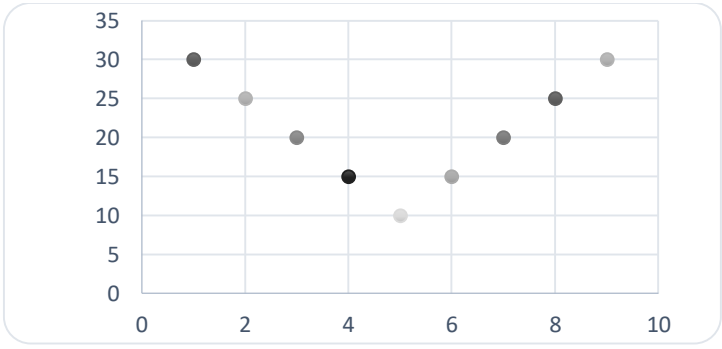
א. $r = 1$ היות ושני המשתנים יוצרים קוים ישרים.

ב. $r = 2$ היות ויש שני קוים בעלי קשר מושלם.

ג. $r = 0$ היות והקו יורד ואחר כך עולה באותו האופן.

ד. $r = \pm 1$ היות ויש קו עולה וגם קו יורד.

10) התרשים הבא מתאר דיאגרמת פיזור.



איזו טענה נכונה?

א. בתרשים מוצג הקשר בין שני משתנים.

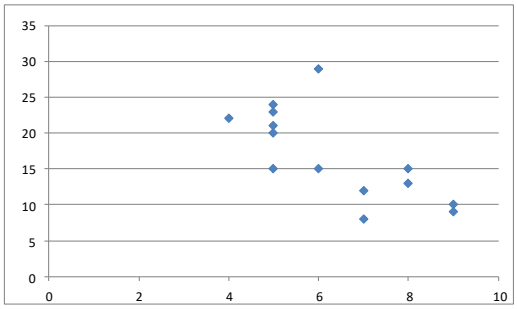
ב. בתרשים מוצג הקשר בין 9 משתנים.

ג. בתרשים מוצג הקשר בין 10 משתנים.

ד. אין לדעת כמה משתנים מוצגים בתרשים.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

בגרף הבא מתוארת דיאגרמת פיזור של שני משתנים:



X - (משתנה בלתי תלוי בציר האופקי)
ו- Y (משתנה תלוי).
במדגם התקבל $r^2 = 0.52$.

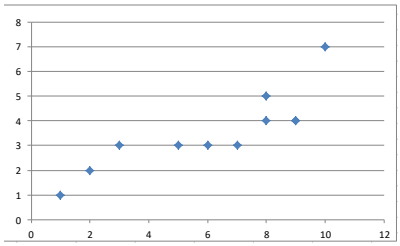
11) לאור הנתונים המופיעים בדיאגרמה, איזה מבין הערכים הבאים מתאים להיות התוצאה של r?

א. -0.52
ב. 0.72
ג. -0.72
ד. 0.52

12) אם מקדם המתאם בין שני משתנים הוא 1, אזי:

א. הערכים של המשתנים הם חיוביים.
ב. עבור כל תצפית ערך של משתנה אחד שווה לערך של המשתנה השני.
ג. הקשר הלינארי הוא בעוצמה חזקה.
ד. אף אחת מהתשובות לא בהכרח נכונה.

13) להלן דיאגרמת פיזור:



מה יהיה מקדם המתאם בין שני המשתנים?

א. 1
ב. 0.85
ג. 0.15
ד. 0

14) בבדיקת קשר בין שני משתנים התקבל: $r = -1$.

א. קיימת נוסחה לינארית הקושרת בין כל התצפיות.
ב. לא קיים קשר בין שני המשתנים.
ג. ככל שמשתנה אחד נוטה לרדת גם לשני יש נטייה לרדת.
ד. קיים קשר בין שני המשתנים, אך לא ניתן לדעת מאיזה סוג.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

15) לפי הפתגם "רחוק מהעין, רחוק מהלב", יש קשר ____ בין קרבה פיזית לקרבה נפשית.

א. חיובי

ב. שלילי

ג. אפסי

ד. לא ניתן לדעת.

16) מבחן אמי"ר הינו מבחן מיון באנגלית של המרכז הארצי לבחינות והערכה. הציון המינימלי בבחינה הינו 150 והמקסימלי הינו 250. בקורס הכנה למבחן השתתפו 19 תלמידים. להלן הציונים שלהם על פי פלט שהתקבל:

		159
		170
		180
		185
		204
		224
		236
		212
		168
		189
		195
		163
		187
		206
		201
		223
		242
		203
		205
197.47	AVERAGE	
536.25	VARPA	

יש להוסיף עמודה נוספת לצד עמודת הציונים שתראה לכל תלמיד כמה נקודות חסרות לו כדי להשלים לציון המקסימלי בבחינה.

מה יהיה מקדם המתאם בין שתי העמודות (כלומר, מקדם המתאם בין הציון לבין הנקודות החסרות)?

א. -1

ב. 1

ג. -0.5

ד. 0.5

17) מקדם המתאם בין שטחי דירה למחיר שלהם חושב ונמצא 1.2. מה נובע מכך?

א. ככל שהדירה גדולה יותר בשטחה כך היא יקרה יותר.

ב. ככל שהדירה קטנה יותר בשטחה כך היא זולה יותר.

ג. לא קיים קשר בין שטח הדירה למחיר הדירה.

ד. מצב כזה שמתואר הנתונים לא אפשרי.

18) אם ניקח 10 אנשים ונרשום לכל אדם את הגובה במטר וכמו כן את הגובה בס"מ. מה יהיה מקדם המתאם בין גובה האדם במטר לגובה האדם בס"מ?

א. 1

ב. 0

ג. -1

ד. לא ניתן לדעת.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

19) נמצא מתאם חיובי בעוצמה גבוהה בין X – ציון בבגרות בלשון ל Y – ציון בבגרות במתמטיקה. אילו מהמשפטים הבאים נכון?

א. ניתן לומר שאחת מהסיבות להבדלים שיש לסטודנטים במתמטיקה נובעים מההבדלים שיש להם בלשון.

ב. קיימת נוסחה של קו ישר שקושרת בין ציון בבגרות במתמטיקה לציון בבגרות בלשון.

ג. ללא יוצא מן הכלל, ניתן להגיד שכל תלמיד שמצליח יותר מתלמיד אחר בלשון גם יצליח יותר מאותו תלמיד במתמטיקה.

ד. אף אחד מהטענות שהוצגו אינה בהכרח נכונה.

20) עבור סדרה של תצפיות מדדו את X ואת Y. נמצא שעבור כל התצפיות שהערך של Y ירד הערך של X בהכרח ירד ללא יוצא מן הכלל. מקדם המתאם של פירסון יהיה בהכרח:

א. 1

ב. -1

ג. 0

ד. אף אחת מהתשובות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות

1) א. שעות בילוי. ב. הקשר חלקי, כיוון הקשר שלילי .

2) א. להלן טבלה :

	ספורט	לשון	מתמטיקה
ספורט	1	-0.7	0.1
לשון	-0.7	1	0.6
מתמטיקה	-0.1	0.6	1

ב. ספורט ולשון.

3) א. ב"ת- מס' שעות התרגול, תלוי- ציון. ב. ראה גרף בפתרון וידאו.
ג. קשר לינארי חיובי חלקי. ד. מקדם המתאם לא היה משתנה.

4) א. לעלות. ב. לא ישפיע על מקדם המתאם.

5) א. חלקי, חיובי. ב. קטן.

6) ד'. **7)** ד'. **8)** א'. **9)** ג'. **10)** א'.

11) ג'. **12)** ד'. **13)** ב'. **14)** א'. **15)** א'.

16) א'. **17)** ד'. **18)** א'. **19)** ד'. **20)** ד'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מדדי קשר – מדד הקשר הלינארי (פירסון) – רקע

המטרה היא לבדוק האם קיים קשר (קורלציה, מתאם) של קו ישר בין שני משתנים כמותיים. מבחינת סולמות המדידה קשר בין סולמות רווחים ומנה.
בדרך כלל, X הוא המשתנה המסביר (הבלתי תלוי) ו- Y הוא המשתנה המוסבר (התלוי).

דוגמה:

נרצה להסביר כיצד השכלה של אדם הנמדדת בשנות לימוד – X מסבירה את ההכנסה שלו Y. במקרה זה שנות ההשכלה זהו המשתנה המסביר (או הבלתי תלוי) ואנחנו מעוניינים לבדוק כיצד שינויים בשנות ההשכלה של אדם יכולים להסביר את השינויים שלו בהכנסה, ולכן רמת ההכנסה זהו המשתנה המוסבר התלוי במשתנה המסביר אותו.

שלב ראשון: נהוג לשרטט דיאגרמת פיזור. זו דיאגרמה שנותנת אינדיקציה ויזואלית על טיב הקשר בין שני המשתנים.

דוגמה:

בבניין של 5 דירות בדקו את הנתונים הבאים:
X -מס' חדרים בדירה. Y-מס' נפשות הגרות בדירה.
להלן התוצאות שהתקבלו:

מס' דירה	X	Y
1	3	2
2	2	2
3	4	3
4	3	3
5	5	4

נשרטט מנתונים אלה דיאגרמת פיזור (הדיאגרמה המלאה בסרטון). נתבונן בכמה מקרים של דיאגרמות פיזור וננתח אותן (הדיאגרמות המלאות בסרטון).

שלב שני: מחשבים את מקדם המתאם (מדד הקשר) שבודק עד כמה קיים קשר לינארי בין שני המשתנים. המדד (ניקרא גם מדד הקשר של פירסון) מכמת את מה שניראה בשלב הראשון רק בעין.
המדד בודק את כיוון הקשר (חיובי או שלילי) ואת עוצמת הקשר (חלש עד חזק).
מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין 1- ל-1.
מקדם מתאם 1- או 1 אומר שקיים קשר לינארי מוחלט ומלא בין המשתנים שניתן לבטאו על ידי הנוסחה: $y = bx + a$.

מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1):

קיים קשר לנארי מלא בו השיפוע b יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי מלא אומר שקיים קשר לנארי מלא בו השיפוע b שלילי (מקדם מתאם 1-).

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

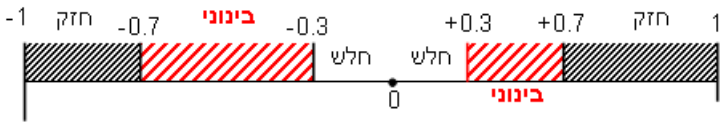
מתאם חיובי חלקי:

ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט.

מתאם שלילי חלקי:

ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט.

ככל שערך מקדם המתאם קרוב לאפס נאמר שעוצמת הקשר חלשה יותר וככל שמקדם המתאם רחוק מהאפס נאמר שעוצמת הקשר חזקה יותר:



מקדם המתאם יסומן באות r.

כדי לחשב את מקדם המתאם, יש לחשב את סטיות התקן של כל משתנה ואת השונות המשותפת.

שונות משותפת: $COV(x,y)=\frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n}=\frac{\sum xy}{n}-\bar{x}\cdot\bar{y}$

שונות של המשתנה X: $s_x^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-\bar{x}^2$

שונות המשתנה Y: $S_Y^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}{n}-\bar{y}^2$

מקדם המתאם הלינארי: $r_{xy}=\frac{COV(x,y)}{S_x\cdot S_y}$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) להלן נתונים לגבי שישה תלמידים שנגשו למבחן. בדקו לגבי כל תלמיד את הציון שלו בסוף הקורס וכמו כן את מספר החיסורים שלו מהקורס.

מספר חיסורים	2	1	0	2	3	4
ציון	80	90	90	70	70	50

א. שרטטו דיאגראמת פיזור לנתונים. מה ניתן להסיק מהדיאגרמה על טיב הקשר ביו מספר החיסורים של תלמיד לציונו? מיהו המשתנה הבלתי תלוי ומיהו המשתנה התלוי?

ב. חשבו את מדד הקשר של פירסון. האם התוצאה מתיישבת עם תשובתך לסעיף א'?

ג. הסבירו, ללא חישוב, כיצד מקדם המתאם היה משתנה אם היה מתווסף תלמיד שהחסיר 4 פעמים וקיבל ציון 80?

2) במחקר רפואי רצו לבדוק האם קיים קשר בין רמת ההורמון X בדם החולה לרמת ההורמון Y שלו. לצורך כך מדדו את רמת ההורמונים ההלו עבור חמישה חולים. להלן התוצאות שהתקבלו:

X	Y
10	12
14	15
15	15
18	17
20	21

א. מה הממוצע של כל רמת הורמון?

ב. מהו מקדם המתאם בין ההורמונים? ומה משמעות התוצאה?

3) נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 240 \qquad \sum_{i=1}^{20} Y_i = 200$$

$$\sum_{i-1}^{20} (X_i - \bar{X})^2 = 76 \qquad \sum_{i-1}^{20} (Y_i - \bar{Y})^2 = 76$$

$$\sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})(Y - \bar{Y}) = 60.8$$

א. חשב את מדד הקשר הלינארי בין X ל- Y. מיהו המשתנה התלוי?

ב. מה המשמעות של התוצאה שקיבלת בסעיף א?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 240 \qquad \sum_{i=1}^{20} Y_i = 200$$

$$\sum_{i-1}^{20} X_i^2 = 2960 \qquad \sum_{i=1}^{20} Y_i^2 = 2080$$

$$\sum_{i=1}^{20} X_i Y_i = 2464$$

חשבו את מדד הקשר הלינארי בין X ל- Y.

5) במוסד אקדמי ציון ההתאמה מחושב כך: מכפילים את הציון הממוצע בבגרות ב-3 ומפחיתים 2 נקודות. ידוע שעבור 40 מועמדים סטיית התקן של ממוצע הציון בבגרות הייתה 2.
מה מקדם המתאם בין ציון ההתאמה לציון הממוצע בבגרות שלהם?

6) להלן רשימת טענות, לגבי כל טענה קבעו נכון/לא נכון ונמקו.

א. מתווך דירות המיר מחירי דירות מדולר לשקל. נניח שדולר אחד הוא 3.5₪. אם מתווך הדירות יחשב את מדד הקשר של פירסון בין מחיר הדירה בשקלים למחיר הדירה בדולרים הוא יקבל 1.

ב. לסדרה של נתונים התקבל $\bar{X} = \bar{Y} = 6$, $S_x = S_y = 1$.
לכן, מדד הקשר של פירסון יהיה 1.

ג. אם השונות המשותפת של X ושל Y הינה 0 אז בהכרח גם מקדם המתאם של פירסון יהיה 0.

שאלות רב-ברירה:

7) נמצא שקיים מקדם מתאם שלילי בין הציון בעברית לציון בחשבון בבחינה לכן:

א. הדבר מעיד שהציונים בכתה היו שליליים.

ב. ככל שהציון של תלמיד יורד בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.

ג. ככל שהציון של תלמיד עולה בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.

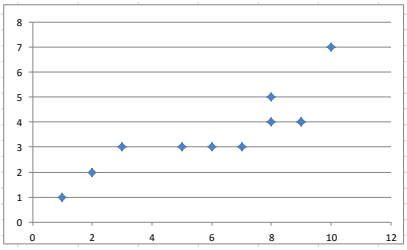
ד. אף אחת מהתשובות לא נכונה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

8) נלקחו 20 מוצרים ונבדק ביום מסוים המחיר שלהם בדולרים והמחיר שלהם בש"ח (באותו היום ערך הדולר היה-4.2₪).
מהו מקדם המתאם בין המחיר בדולר למחיר בש"ח?

א. 1
ב. 0
ג. 4.2
ד. לא ניתן לדעת.

9) להלן דיאגראמת פיזור:
מה יהיה מקדם המתאם בין שני המשתנים?



א. 1
ב. 0.85
ג. 0.15
ד. 0

תשובות סופיות

1) א. משתנה תלוי: ציון, משתנה ב"ת: מס' חיסורים. ראה דיאגרמה בוידאו. ניתן להסיק שקיים קשר לינארי שלילי וחלקי בין מספר החיסורים לציון התלמיד.
ב. 0.9325-. ג. הקשר יישאר לינארי שלילי חלקי אך עוצמתו תחלש.

2) א. $\bar{y}=16$, $\bar{x}=15.4$ ב. $r_{xy}=0.96$.

3) א. 0.8.

4) 0.8.

5) 1.

6) א. נכון. ב. לא נכון. ג. נכון.

7) ג'.

8) א'.

9) ב'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שיטות סטטיסטיות

פרק 14 - רגרסיה

תוכן העניינים

1. כללי 68

מדדי קשר – רגרסיה ליניארית:

רקע:

במידה וקיים קשר חזק בין שני המשתנים הכמותיים נהוג לבצע ניבוי. לבנות קו ניבויים הנקרא גם קו רגרסיה המנבא משתנה אחד על סמך האחר. מדובר בקו שמנבא את Y על סמך X.
השיטה למציאת הקו הנ"ל נקראת שיטת הריבועים הפחותים והקו המתקבל נקרא קו הרגרסיה או קו הניבויים או קו הריבועים הפחותים.

a - נותן את ערך Y כאשר X הנו אפס על גבי קו הניבויים. הוא נקרא החותך של הקו.

b - הוא שיפוע הקו נותן בכמה בעצם Y משתנה כאשר X גדל ביחידה אחת על גבי קו הניבויים.

להלן המשוואות למציאת הפרמטרים של קו הרגרסיה: $b = r\frac{S_r}{S_x}$, $Y = bX + a$.

לצורך בניית קו ניבויים לניבוי X על סמך Y נצטרך לעדכן את הנוסחאות בהתאם.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 200 \ , \ \sum_{i=1}^{20} X_i = 240$$

$$\sum_{i=1}^{20} \left(X_i - \overline{X} \right)^2 = 76 \ , \ \sum_{i=1}^{20} \left(Y_i - \overline{Y} \right) = 76 \ .$$

$$\sum_{i=1}^{20} \left(X_i - \overline{X} \right)\left(Y_i - \overline{Y} \right) = 60.8$$

א. חשבו את מדד הקשר הלינארי בין X ל- Y. מיהו המשתנה התלוי?
ב. מצאו את קו הרגרסיה לניבוי ההוצאה של משפחה על סמך הכנסה שלה. הסבירו את משמעות הפרמטרים של קו הרגרסיה.
ג. משפחת כהן הכניסה 15,000₪. מה ההוצאה הצפויה שלה?

2) נסמן ב- X את ההשכלה של אדם בשנות לימוד.
נסמן ב- Y את הכנסתו באלפי ₪. במחקר התקבלו התוצאות הבאות:

$$\mathrm{COV}\left(X,Y\right) = 7.5 \ , \ \overline{Y} = 8 \ , \ \overline{X} = 14 \ , \ S_Y = 5 \ , \ S_X = 2 \ .$$

א. חשבו את מדד הקשר של פירסון בין ההשכלה להכנסה.
ב. מה ההכנסה הצפויה לאדם שהשכלתו 12 שנים?
ג. מה ההשכלה הצפויה לאדם שהכנסתו 10,000₪?

3) חוקר רצה לחקור את הקשר הקווי שבין הציון המבחן בסטטיסטיקה לבין מספר שעות ההכנה של הסטודנטים למבחן. במדגם של 100 סטודנטים שנבחנו בקורס נרשמו התוצאות הבאות: הציון הממוצע של הסטודנטים היה 65 עם סטיית תקן של 27. מספר שעות ההכנה הממוצע היה 30 עם סטיית תקן של 18. מקדם המתאם בין הציון לשעות ההכנה היה 0.8.

א. על פי משוואת הרגרסיה, שעת הכנה נוספת משפרת את ציון המבחן ב-?
ב. על פי משוואת הרגרסיה, תלמיד שייגש למבחן ללא שעות הכנה כלל יקבל ציון?
ג. מהו קו הרגרסיה לניבוי הציון לפי שעות ההכנה?

4) נתונים 2 משתנים X ו- Y. כמו כן נתון: $\overline{X} = 1.5$, $S_x = S_y = 4$,
וכן שקו הרגרסיה של Y על בסיס X הינו: $Y = -0.2X + 0.5$.
חשבו מהו מקדם המתאם בין X ל- Y.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. 0.8. ב. $Y=0.8X+0.4$. ג. 12.4 אלפי ₪.

2) א. 0.75. ב. 4.25 אלפי ₪. ג. 14.6 שנים.

3) א. 1.2. ב. 29. ג. $Y=1.2X+29$.

4) -0.2.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שיטות סטטיסטיות

פרק 15 - מדדי קשר-רגרסיה -שונות מוסברת ושונות לא מוסברת

תוכן העניינים

1. כללי 71

מדדי קשר – רגרסיה – שונות מוסברת ושונות לא מוסברת:

רקע:

המטרה ברגרסיה היא להסביר את השונות של המשתנה התלוי.
למשל, להסביר את השונות של המשכורת באמצעות הוותק או להסביר את השוני בציונים באמצעות כמות החיסורים.

r^2 - החלק מהשונות של המשתנה התלוי מוסבר. השונות המוסברת נקראת גם שונות נ'יבויים. השונות הלא מוסברת נקראת גם שונות טעויות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) נמצא קשר חיובי בעוצמה של 0.7 בין שטח דירה למחירה. כמו כן, נתון שסטיית התקן של מחירי הדירות הינה 200.

א. איזה אחוז מהשונות של מחירי הדירות מוסבר על ידי שטח הדירה?

ב. איזה אחוז מהשונות של מחירי הדירות לא מוסבר על ידי שטח הדירה?

ג. מהי השונות המוסברות ומהי השונות הלא מוסברת של מחירי הדירות?

2) להלן רשימת טענות, לגבי כל טענה קבעו נכון/לא נכון ונמקו!

א. אם שונות הטעויות שווה ל-0 (השונות הלא מוסברת) אז מקדם המתאם של פירסון יהיה 1.

ב. אם מקדם המתאם של פירסון בין שני משתנים הוא 1 אזי שונות הטעויות (השונות הלא מוסברת) תהיה 0.

ג. אם השונות המשותפת של X ושל Y היא 0 אז בהכרח גם מקדם המתאם של פירסון יהיה 0.

שאלות רב-ברירה:

3) בקשר בין שני משתנים התקבל: $r^2 = 0.64$, לכן:

א. ללא יוצא מן הכלל ככל שערכי משתנה אחד עולה השני יעלה.

ב. 64% מהשונות של משתנה אחד מוסבר על ידי המשתנה השני.

ג. הקשר בין שני המשתנים הוא בעוצמה של 0.64.

ד. כל התשובות נכונות.

4) אם מגדילים את r^2, ניתן לומר כי:

א. אחוז השונות המוסברת יקטן.

ב. אחוז השונות המוסברת יגדל.

ג. אחוז השונות המוסברת יישאר ללא שינוי.

ד. סטיית התקן משתנה.

ה. לא ניתן לדעת.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) בקורס מבוא לכלכלה ניתנו במשך השנה שני מבחנים: מבחן בסוף סמסטר א' X ומבחן בסוף סמסטר ב' Y. כאשר בנו את קו הרגרסיה של הציון במבחן סוף סמסטר ב' לפי הציון במבחן סוף סמסטר א התקבלה שונות טעויות של 80, ושונות ניבויים של 20.
לפי נתונים אלו, מקדם המתאם בין הציון במבחן סוף סמסטר א' לבין הציון במבחן סוף סמסטר ב' הוא:

א. 0.44.

ב. 0.44 -.

ג. עוצמת ההקשר הלינארי היא 0.44, אך אין אפשרות לדעת את סימנה.

ד. אין אפשרות לחשב את מקדם המתאם.

ה. 0.35.

תשובות סופיות:

1) א. 49%. ב. 51%.
ג. שונות מוסברת: 19,600, שונות לא מוסברת: 20,400.

2) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון.

3) ב'.

4) ב'.

5) ג'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שיטות סטטיסטיות

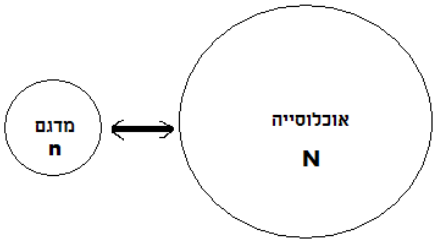
פרק 16 - הסקה סטטיסטית - הקדמה

תוכן העניינים

1. כללי 74

הסקה סטטיסטית – הקדמה:

רקע:



אוכלוסייה:
קבוצה שאליה מפנים שאלה מחקרית.
למשל, חברת תרופות שמעוניינת לפתח תרופה למחלת הסוכרת מתעניינת באוכלוסיית חולי הסוכרת בעולם.

מדגם:

חלק מתוך האוכלוסייה.
למשל, אם נדגום באקראי 10 אנשים מתוך חולי הסוכרת אז זהו מדגם מתוך אוכלוסיית חולי הסוכרת.

במקרים רבים אין אפשרות לחקור את כל האוכלוסייה כיוון שאין גישה לכולה, היא גדולה מידי, אנו מוגבלים בזמן ובאמצעים טכניים ולכן מבצעים מדגם במטרה לבצע הסקה סטטיסטית מהמדגם לאוכלוסייה.
הדגימה בקורס תהיה דגימה מקרית - הכוונה לדגימה שבה לכל תצפית באוכלוסייה יש את אותו סיכוי להיכלל במדגם.

סטטיסטי:

גודל המחושב על המדגם.

פרמטר:

גודל המתאר את האוכלוסייה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הסימונים לפרמטר וסטטיסטי הם שונים:

	סטטיסטי (מדגם)	פרמטר (אוכלוסייה)
ממוצע	$\overline{X}$	μ
פרופורציה (שכיחות יחסית)	$\hat{p}$	P

פרמטר הוא גודל קבוע גם אם אנו לא יודעים אותו סטטיסטי הוא משתנה ממדגם למדגם ולכן יש לו התפלגות הנקראת התפלגות הדגימה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

25% מאזרחי המדינה תומכים בהצעת החוק של חבר כנסת מסוים.
הוחלט לדגום 200 אזרחים ומתוכם לבדוק מהו אחוז התומכים בהצעת החוק.

א. מי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מה הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

ה. מהו הסטטיסטי שמתכננים להוציא מהמדגם?

ו. האם הפרמטר או הסטטיסטי הוא משתנה מקרי?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.

א. מי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מהם הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

2) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה בישוב "העוגן".
נגדיר את X להיות מספר המקלטים של משפחה אקראית. מתכננים לדגום מאוכלוסייה זו 4 משפחות ולהתבונן בממוצע מספר מקלטי הטלוויזיה במדגם.

א. מיהי האוכלוסייה ומהו המשתנה הנחקר?

ב. מהו הסטטיסטי שיילקח מהמדגם ומה סימונו?

מספר המשפחות	מספר מקלטים
50	0
250	1
350	2
300	3
50	4
סך הכול $N=1000$	

3) נתון כי 20% מהשכירים במדינה הם אקדמאיים. נבחרו באקראי 10 שכירים באותה אוכלוסייה ומתכננים לפרסם את מספר האקדמאיים שנדגמו.

א. מהי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה באוכלוסייה?

ג. מהם הפרמטרים?

ד. מהו הסטטיסטי?

תשובות סופיות:

1) א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון.
ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15. ד. 2.

2) א. האוכלוסייה: 1000 משפחות בישוב העוגן, המשתנה הנחקר: מס' מקלטים.
ב. $\bar{X}$ = ממוצע מדגם.

3) א. השכירים במדינה. ב. השכלה: אקדמאי, לא אקדמאי.
ג. שיעור ההצלחות באוכלוסייה: 0.2. ג. מס' האקדמאים במדגם.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שיטות סטטיסטיות

פרק 17 - מושגי יסוד באמידה

תוכן העניינים

1. כללי 77

מושגי יסוד באמידה:

רקע:

כזכור מהמפגש הקודם, פרמטר הוא גודל המתאר את האוכלוסייה או התפלגות מסוימת. כמו ממוצע הגבהים בקרב מתגייסים לצה"ל - μ.
כמו פרופורציית התומכים בממשלה בקרב אזרחי המדינה - p.
בדרך כלל הפרמטרים הם גדלים שאינם ידועים באמת, ולכן מבצעים מדגמים במטרה לאמוד אותם. אין אפשרות לחשב אותם הניסיון הוא בלהעריך כמה הם שווים ככל שניתן.

- נסמן באופן כללי פרמטר באות θ ואומד ב-$\hat{\theta}$. $\hat{\theta}$ הוא סטטיסטי המחושב על המדגם ובאמצעותו נאמוד את θ.
- שגיאת אמידה: $\left|\hat{\theta}-\theta\right|$ - ההפרש בין האומד לאמת (הפרמטר).

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בכנסת ה-19 קיבלה מפלגת העבודה 15 מנדטים. בערוץ 10 ברגע סגירת הקלפיות העריכו את מספר המנדטים של המפלגה להיות 17 מנדטים וזאת על סמך תוצאות מדגם של הערוץ.

א. מה הפרמטר בדוגמה זו?

ב. מהי טעות האמידה של ערוץ 10?

- $\hat{\theta}$ יהיה אומד חסר הטיה ל-θ אם התוחלת של $\hat{\theta}$ תהיה שווה ל-θ: $E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$.
- טעות התקן של אומד היא סטיית התקן שלו, כלומר: $\sigma\left(\hat{\theta}\right)=S.E$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

פרמטרים מרכזיים והאומדים שלהם:

ממוצע האוכלוסייה μ:

האומד הנקודתי שלו יהיה: ממוצע המדגם: $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$.

$E(\bar{x}) = \mu$ לכן $\bar{x}$ הינו אומר חסר הטיה ל- μ. כמו כן, טעות תקן: $\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = SE$.

פרופורציה באוכלוסייה p:

האומד הנקודתי שלו יהיה: פרופורציה במדגם: $\hat{p} = \frac{y}{n}$.

$E(\hat{p}) = p$, לכן $\hat{p}$ הינו אומר חסר הטיה ל- p. כמו כן טעות התקן: $\sigma(\hat{P}) = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$.

שונות האוכלוסייה σ^2:

האומד הנקודתי שלו יהיה: $S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$.

$E(S^2) = \sigma^2$ ולכן S^2 הינו אומד חסר הטיה ל- σ^2: $S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$.

הערה: אומד הוא הנוסחה הכללית לאמידת הפרמטר ואומדן הוא הערך הספציפי שהתקבל במדגם מסוים.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נדגמו 10 משפחות בתל אביב ונבדק עבור כל משפחה מספר הילדים שלה.
להלן התוצאות שהתקבלו: 3, 1, 2, 5, 4, 1, 2, 3, 1, 2.
אמדו באמצעות אומדים חסרי הטיה את הפרמטרים הבאים:

1. ממוצע מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
2. שונות מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
3. פרופורציית המשפחות בנות שני ילדים.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) מתוך 500 טירונים, נמצאו 120 בעלי שברי הליכה. נתון שהסיכוי שטירון יהיה עם שבר הליכה הוא 0.25.

א. מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?

ב. מהי טעות התקן של האומד כשהמדגם בגודל 500?

ג. מהו האומדן לפרמטר?

ד. מהי טעות האמידה?

2) לפי נתוני היצרן, מקרר צורך בממוצע 2400 וואט לשעה עם סטיית תקן של 500 וואט לשעה .
במדגם של 25 מקררים של היצרן התקבל ממוצע של 2342 וואט לשעה.

א. מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?

ב. מהי טעות התקן של האומד?

ג. מהו האומדן לפרמטר?

ד. מהי טעות האמידה?

3) נדגמו עשרה מתגייסים לצה"ל. גובהם נמדד בס"מ. להלן התוצאות שהתקבלו: 168, 184, 192, 171, 180, 177, 187, 168, 177 ו-175.

א. מצאו אומדן חסר הטיה לגובה הממוצע של מתגייסי צה"ל.

ב. מצאו אומדן חסר הטיה לשונות הגבהים של מתגייסי צה"ל.

ג. מצאו אומדן חסר הטיה לפרופורציות המתגייסים בגובה של לפחות 180 ס"מ.

4) נדגמו 20 שכירים באקראי. עבור כל שכיר נמדד השכר באלפי שקלים.
להלן התוצאות שהתקבלו: $\sum_{i=1}^{20} X_i = 162$, $\sum_{i=1}^{20} X^2_i = 1502.2$.

א. אמדו את השכר הממוצע של השכירים במשק.

ב. אמדו את סטיית התקן של שכר השכירים במשק.

5) במטרה לאמוד את ממוצע האוכלוסייה, דגמו תצפיות בלתי תלויות מהאוכלוסייה וחישבו את הממוצע שלהם. מהי טעות התקן?

א. סטיית התקן של האוכלוסייה.

ב. סטיית התקן של ממוצע האוכלוסייה.

ג. סטיית התקן של המדגם.

ד. סטיית התקן של ממוצע המדגם.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

6) משקל הממוצע של אוכלוסייה מסוימת הוא 75 ק"ג עם שונות של 25 .
אם יבחרו כל המדגמים האפשריים בגודל 10 מאוכלוסייה זו סטיית התקן של ממוצעי המדגמים תהייה:

א. 3.
ב. 2.5.
ג. 1.581.
ד. אין מספיק נתונים לדעת.

7) במדגם מקרי, מתי סכום ריבועי הסטיות מהממוצע, $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$, מחולק ב-$n-1$?

א. כאשר n קטן.
ב. כאשר תצפיות המדגם אינן בלתי תלויות.
ג. כאשר האוכלוסייה אינה מתפלגת נורמאלית.
ד. כאשר מעוניינים באומד חסר הטיה לשונות האוכלוסייה ממנה הוצא המדגם.
ה. כאשר מעוניינים לחשב את שונות התפלגות הדגימה של ממוצע המדגם.

8) $X_1, X_2, ..., X_{16}$ מדגם מקרי מתוך אוכלוסייה בעלת ממוצע μ לא ידוע ושונות: $\sigma^2 = 64$. טעות התקן של האומד ל-μ היא:

א. 16.
ב. 8.
ג. 4.
ד. 2.

9) מהו אומד חסר הטיה?

א. אומד שערכו שווה לממוצע התפלגות הדגימה שלו.
ב. אומד שערכו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.
ג. אומד שממוצע התפלגות הדגימה שלו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.
ד. אומד שהסיכוי שערכו יהיה גבוה מערך הפרמטר באוכלוסייה שווה לסיכוי שיהיה נמוך ממנו.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. 0.25 ב. 0.019 ג. 0.24 ד. 0.01
2) א. אוכלוסייה: מקררים של יצרן, תוחלת: 2400, סטיית תקן: 500.
ב. 100 ג. 2342 ד. 58
3) א. 177.9 ב. 64.1 ג. 0.4
4) א. 8.1 ב. 3.16
5) ד'.
6) ג'.
7) ד'.
8) ד'.
9) ג'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שיטות סטטיסטיות

פרק 18 - רווח סמך לתוחלת (ממוצע)

תוכן העניינים

1. רווח סמך כששונות האוכלוסיה ידועה 82
2. קביעת גודל מדגם 87
3. רווח סמך כששונות האוכלוסיה לא ידועה 89

רווח סמך כששונות האוכלוסייה ידועה:

רקע:

ממוצע המדגם הוא אומד לממוצע האוכלוסייה, אך לא באמת ניתן להבין ממנו על גודלו של ממוצע האוכלוסייה. ההסתברות שממוצע המדגם יהיה בדיוק כמו הממוצע האמתי הוא אפסי.
מה שנהוג לעשות כדי לאמוד את ממוצע האוכלוסייה, זה לבנות רווח סמך.
נבנה מרווח בטחון שהסיכוי שהפרמטר μ ייכלל בתוכו הוא: $1-\alpha$.
$1-\alpha$: נקרא רמת בטחון או רמת סמך. כך ש: $P(A \le \mu \le B)=1-\alpha$.
A - גבול התחתון של רווח הסמך.
B - הגבול העליון של רווח הסמך.
$L=B-A$ - אורך רווח הסמך.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

חוקר דגם 25 חיילים שנבחנו במבחן הפסיכומטרי. הוא בנה רווח סמך לממוצע הציונים במבחן הפסיכומטרי בקרב אוכלוסיית החיילים וקיבל בין 510 ל-590.
רווח הסמך נבנה ברמת סמך של 95%.

1. מהי אוכלוסיית המחקר?
2. מה המשתנה באוכלוסייה?
3. מה הפרמטר שהחוקר רצה לאמוד?
4. מהו רווח הסמך?
5. מה אורך רווח הסמך?
6. מהי רמת הביטחון של רווח הסמך?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

בפרק זה נרצה לבנות רווח סמך לתוחלת (μ) במקרה ש-σ^2 (שונות האוכלוסייה) ידועה.

פרמטר אותו נרצה לאמוד: μ.

אומד נקודתי: $\bar{x}$.

תנאים לבניית רווח הסמך: $X \sim N$ או $n \geq 30$.

σ^2 (שונות האוכלוסייה) ידועה.

נוסחה לרווח הסמך: $\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

על פי נתוני היצרן אורך חיי סוללה מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 1 שעה. מעוניינים לאמוד את תוחלת חיי סוללה. נדגמו באקראי 4 סוללות, אורך החיים הממוצע שהתקבל הוא 13.5 שעות. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת אורך חיי סוללה.

שגיאת האמידה המקסימלית: $\varepsilon = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

ε - נותן את שגיאת האמידה המקסימלית, דבר שנקרא גם טעות סטטיסטית, טעות דגימה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בהמשך לשאלה עם הסוללות. מה ניתן להגיד בביטחון של 95% על שגיאת האמידה?

קשרים מתמטיים ברווח הסמך:

- אורך רווח הסמך הוא פעמיים שגיאת האמידה המקסימלית: $L = 2\varepsilon$.
- ממוצע המדגם נופל תמיד באמצע רווח הסמך: $\bar{X} = \frac{A+B}{2}$.
- ככל שמספר התצפיות (n) גבוה יותר, כך יש יותר אינפורמציה ולכן האומד יותר מדויק, ולכן נקבל רווח סמך יותר קצר.
- ככל שרמת הביטחון ($1-\alpha$) גבוהה יותר, כך: $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ יותר גבוה, ורווח הסמך יותר ארוך.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) חוקר התעניין לאמוד את השכר הממוצע במשק. על סמך מדגם הוא קבע שבביטחון של 95% כי השכר הממוצע במשק נע בין 9200 ל-9800 ₪.

א. מי האוכלוסייה במחקר?

ב. מה המשתנה הנחקר?

ג. מה הפרמטר שאותו רוצים לאמוד?

ד. מה רווח הסמך לפרמטר?

ה. מהי רמת הסמך לפרמטר?

ו. מה אורך רווח הסמך?

ז. מה הסיכוי שטעות הדגימה תעלה על 300 ₪?

2) מעוניינים לאמוד את התפוקה היומית הממוצעת של מפעל מסוים ברמת סמך של 95%. במדגם אקראי של 100 ימים התקבלה תפוקה ממוצעת 4950 מוצרים ביום. לצורך פתרון הנח שסטיית התקן האמתית ידועה ושווה 150 מוצרים ביום. בנו את רווח הסמך.

3) מעוניינים לאמוד את ממוצע אורך החיים של מכשיר. מנתוני היצרן ידוע שאורך החיים מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 20 שעות. נדגמו 25 מכשירים ונמצא כי ממוצע אורך החיים שלהם היה 230 שעות.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.

ב. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.

ג. הסבירו כיצד ומדוע השתנה רווח הסמך.

4) דגמו 200 עובדים מהמשק הישראלי. השכר הממוצע שלהם היה 9700 ₪. נניח שסטיית התקן של השכר במשק היא 3000 ₪.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת השכר במשק.

ב. מה ניתן לומר בביטחון של 95% על הסטייה המרבית בין ממוצע המדגם לתוחלת השכר?

ג. מה היה צריך להיות גודל המדגם אם הינו רוצים להקטין את רווח הסמך ב-50%?

ד. אם היינו מגדילים את גודל המדגם ובונים רווח סמך באותה רמת סמך האם היה ניתן לטעון בביטחון רב יותר שרווח הסמך מכיל את הפרמטר?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) בנו רווח סמך לממוצע הציונים של מבחן אינטליגנציה. ידוע שסטיית התקן היא 15 והמדגם מתבסס על 100 תצפיות. רווח הסמך שהתקבל הוא (105,99). שחזרו את:

א. ממוצע המדגם.

ב. שגיאת האמידה המקסימאלית.

ג. רמת הסמך.

6) זמן החלמה מאנגינה מתפלג עם סטיית תקן של יומיים. חברת תרופות מעוניינת לחקור אנטיביוטיקה חדשה שהיא פיתחה. במחקר השתתפו 60 אנשים שחלו באנגינה וקיבלו את האנטיביוטיקה החדשה. בממוצע הם החלימו לאחר 4 ימים.

א. בנו רווח סמך לתוחלת זמן ההחלמה תחת האנטיביוטיקה החדשה ברמת סמך של 90%.

ב. מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היה תקציב להגדלת גודל המדגם פי 4? הסבירו.

ג. מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת סמך גדולה יותר? הסבירו.

7) חוקר בנה רווח סמך לממוצע וקיבל את רווח הסמך הבא: $82 < \mu < 92$.
נתון שסטיית התקן בהתפלגות שווה ל-10 ושהמדגם מתבסס על 16 תצפיות. התפלגות המשתנה היא נורמאלית.

א. מהו ממוצע המדגם?

ב. מהי רמת הסמך של רווח הסמך שנבנה?

ג. מה הסיכוי ששגיאת האמידה באמידת ממוצע האוכלוסייה תעלה על 5?

8) חוקר בנה רווח סמך לתוחלת כאשר השונות בהתפלגות ידועה ברמת סמך של 95%. אם החוקר כעת יבנה על סמך אותם נתונים רווח סמך ברמת סמך קטנה מ-95%, איזה מהמשפטים הבאים לא יהיה נכון.

א. אורך רווח הסמך החדש יהיה קטן יותר.

ב. גודל המדגם יהיה כעת קטן יותר.

ג. המרחק בין ממוצע המדגם לקצות רווח הסמך יהיו קטנים יותר ברווח הסמך החדש.

ד. רמת הביטחון לבנות רווח הסמך החדש תהיה קטנה יותר.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

9) חוקר בנה רווח סמך ל- μ וקיבל: $48 < \mu < 54$. מה נכון בהכרח:

א. $\mu = 51$.

ב. $\overline{X} = 6$.

ג. $\overline{X} = 51$.

ד. אורך רווח הסמך הינו 3.

10) איזה מהגורמים הבאים אינו משפיע על גודלו של רווח בר סמך, כאשר שונות האוכלוסייה ידועה (בחרו בתשובה הנכונה):

א. רמת הביטחון.

ב. סטיית התקן באוכלוסייה.

ג. מספר המשתתפים.

ד. סטיית התקן במדגם.

תשובות סופיות:

1) א. העובדים במשק. ב. שכר ב-₪. ג. μ. ד. $9200 < \mu < 9800$.
ה. 0.95. ו. 600. ז. 0.05.

2) $4920.6 < \mu < 4979.4$.

3) א. $223.42 < \mu < 236.58$. ב. $222.16 < \mu < 237.84$.
ג. ראה סרטון.

4) א. $9284 < \mu > 10,116$. ב. הסטיה המירבית בין $\bar{x}$ ל- μ היא 416 ₪ בבטחון של 95%.
ג. 800. ד. לא.

5) א. 102. ב. 3. ג. 0.9544.

6) א. $83.5 < \mu < 4.42$. ב. יקטן פי 2. ג. גדל.

7) א. 87. ב. 5. ג. 0.9544.

8) ב'.

9) ג'.

10) ד'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

קביעת גודל מדגם:

רקע:

אם מעוניינים לאמוד את ממוצע האוכלוסייה כאשר סטיית התקן של האוכלוסייה ידועה: σ ברמת סמך של $1-\alpha$ ושגיאת אמידה שלא תעלה על ε מסוים, נציב בנוסחה הבאה: $n \geq \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\varepsilon} \right)^2$.

כדי להציב בנוסחה צריך שהמשתנה הנחקר יתפלג נורמלית או שהמדגם ייצא בגודל של לפחות 30 תצפיות.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

חברת תעופה מעוניינת לאמוד את תוחלת משקל המטען של נוסע. נניח שמשקל מטען של נוסע מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 2 ק"ג. כמה נוסעים יש לדגום אם מעוניינים שבביטחון של 98% הסטייה המרבית בין ממוצע המדגם לממוצע האמתי לא יעלה על 0.5 ק"ג? (תשובה: 87).

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) משתנה מקרי מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן ידועה 12.
מה צריך להיות גודל המדגם כדי לבנות רווח סמך ברמת סמך של 98% שאורכו לא יעלה על 2?

2) מעוניינים לאמוד את הדופק הממוצע של מתגייסים לצבא.
מעוניינים שבביטחון של 95% שגיאת האמידה המרבית תהיה 0.5.
נניח שהדופק מתפלג נורמאלית על סטיית תקן של 3 פעימות לדקה.

א. כמה מתגייסים יש לדגום?

ב. אם ניקח מדגם הגדול פי 4 מהמדגם של סעיף א ונאמוד את הממוצע באותה רמת סמך כיצד הדבר ישפיע על שגיאת האמידה?

3) יהי X משתנה מקרי עם ממוצע μ וסטיית תקן σ. חוקר רוצה לבנות רווח בר סמך ל- μ ברמת ביטחון של 0.95, כך שהאורך של הרווח יהיה 0.5σ.
מהו גודל המדגם הנדרש?

תשובות סופיות:

1) 780.

2) א. 139. ב. הדבר יקטין את ε פי 2.

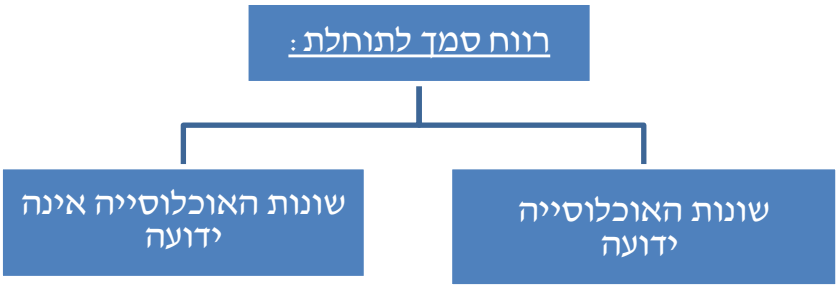
3) $n=62$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

רווח סמך כששונות האוכלוסייה לא ידועה:

רקע:

בבואנו לבנות רווח סמך לתוחלת אנו צריכים להתמקד בשני המצבים הבאים:

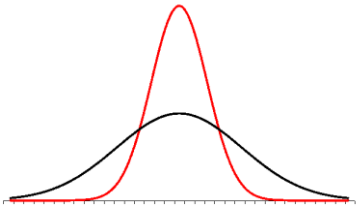


בפרק זה נעסוק במקרה ששונות האוכלוסייה $\left(\sigma^2\right)$ אינה ידועה לנו.

מקרה יותר פרקטי.

התנאי: $X \sim N$ או שהמדגם גדול.

רווח סמך: $\bar{X} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$.



האומד לשונות: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X^2{}_i - n\bar{X}^2}{n-1}$.

התפלגות T:

הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים.

התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש. דרגות החופש הן: $df = n-1$.

ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה.

כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

הזמן שלוקח לפתור שאלה מסוימת בחשבון מתפלג אצל תלמידי כיתות ח' נורמאלית.
במטרה לאמוד את תוחלת זמן הפתרון נדגמו 4 תלמידים בכיתה ח'. להלן התוצאות שהתקבלו בדקות: 5.3, 4.6, 5.2, 4.7.
בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לממוצע זמן הפתרון לשאלה בקרב תלמידי כיתה ח'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) מחקר מעוניין לדעת כיצד תרופה מסוימת משפיעה על קצב פעימות הלב.
ל-5 אנשים שנטלו את התרופה מדדו את הדופק והתקבל מספר פעימות לדקה: 84, 88, 84, 79, 89.
הערה: לצורך פתרון הנח שקצב פעימות הלב מתפלג נורמאלית בקירוב.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת הדופק של נוטלי התרופה הנ"ל.

ב. נתון שהדופק הממוצע ללא לקיחת התרופה הינו 70. לאור זאת, האם בביטחון של 95% התרופה משפיעה על הדופק?

ג. בהמשך לסעיף א', אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת ביטחון של 99%, כיצד הדבר היה משפיע על רווח הסמך?

2) במדגם שנעשה על 25 מתגייסים לצבא האמריקאי התקבל כי גובה ממוצע של חייל הינו 178 ס"מ עם סטיית תקן: $S=13$ ס"מ.
בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לתוחלת גובה המתגייסים לצבא האמריקאי. מה יש להניח לצורך פתרון?

3) אדם מעוניין לאמוד את זמן הנסיעה הממוצע שלו לעבודה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שזמן הנסיעה בהם בדקות הוא: 30, 40, 32, 34, 27.

א. ברמת ביטחון של 95% אמוד את זמן הנסיעה הממוצע. מהי ההנחה הדרושה לצורך פתרון?

ב. איך גודל רווח הסמך היה משתנה אם היו דוגמים עוד ימים?

4) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמאלית. נדגמו 25 מבחנים והתקבל ממוצע ציונים 102 וסטיית תקן מדגמית 13.

א. בנו רווח סמך לממוצע הציונים באוכלוסייה ברמת ביטחון של 95%.

ב. חזרו על סעיף א' אם סטיית התקן הינה סטיית התקן האמתית של כלל הנבחנים.

ג. הסבירו את ההבדלים בין שני הסעיפים הנ"ל.

5) נשקלו 60 תינוקות אשר נולדו בשבוע ה-40 של ההיריון. המשקל נמדד בקילוגרמים. להלן התוצאות שהתקבלו: $\sum_{i=1}^{60} X_i = 195$, $\sum_{i=1}^{60} X^2_i = 643.19$.
בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת משקל תינוק ביום היוולדו.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

6) נדגמו 120 אנשים אקראיים מעל גיל 50. עבור כל אדם נבדק מספר שנות השכלתו. להלן התוצאות שהתקבלו: $S=2$, $\bar{x}=13.8$.
בנו רווח סמך ברמת סמך של 96% לממוצע ההשכלה של אזרחים מעל גיל 50.

7) שני סטטיסטיקאים בנו רווח בר-סמך לאותו פרמטר μ.
לכל אחד מהסטטיסטיקאים מדגם אחר, אך באותו גודל 10.
שניהם קבעו אותה רמת סמך.
סטטיסטיקאי א: הניח $\sigma=20$ 2.
סטטיסטיקאי ב: חישב לפי המדגם וקיבל $S=20$.
למי משני הסטטיסטיקאים יהיה רווח סמך ארוך יותר?

א. סטטיסטיקאי א.

ב. סטטיסטיקאי ב.

ג. אותו אורך רווח סמך לשני הסטטיסטיקאים.

ד. תלוי בתוצאות המדגם של כל סטטיסטיקאי.

8) נתון ש: $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ ביצעו מדגם בגודל 16 וקיבלו סטיית תקן מדגמית 10.
אורך רווח הסמך שהתקבל הוא: 8.765. מהי רמת הביטחון של רווח הסמך?

תשובות סופיות:

1) א. $79.88 < \mu < 89.72$ ב. כן. ג. הוא היה גדל.

2) ראה בסרטון.

3) א. צריך להניח שהמשתנה מתפלג נורמלית. ב. לא ניתן לדעת.

4) א. $96.63 < \mu < 107.37$. ב. $96.90< \mu <107.10$. ג. ראה בסרטון.

5) $3.149< \mu < 3.351$.

6) $13.42< \mu < 14.18$.

7) ב'.

8) 90%.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שיטות סטטיסטיות

פרק 19 - מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים

תוכן העניינים

1. הקדמה 92
2. סוגי טעויות 96

הקדמה:

רקע:

תהליך של בדיקת השערות הוא תהליך מאד נפוץ בעולם הסטטיסטיקה.
בבדיקת השערות על פרמטרים נעבוד לפי השלבים הבאים:

שלב א: נזהה את הפרמטר הנחקר.

שלב ב: נרשום את השערות המחקר.
השערת האפס המסומנות ב- H_0.
בדרך כלל השערת האפס מסמלת את אשר היה מקובל עד עכשיו, את השגרה, הנורמה.
השערה אלטרנטיבית (השערת המחקר) המסומנת ב- H_1.
ההשערה האלטרנטיבית מסמלת את החדשנות בעצם ההשערה האלטרנטיבית מדברת על הסיבה שהמחקר נעשה היא שאלת המחקר.

שלב ג: נבדוק האם התנאים לביצוע התהליך מתקיימים ונניח הנחות במידת הצורך.

שלב ד: נרשום את כלל ההכרעה. בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שנקרא כלל הכרעה. הכלל יוצר אזורים שנקראים:

1. **אזור דחייה:**
   דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.
2. **אזור קבלה:**
   קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה. כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי. אזור הדחיה מוכתב על ידי סיכון שלוקח החוקר מראש שנקרא רמת מובהקות ומסומן ב- α.

שלב ה: בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולחשב את הסטטיסטי המתאים ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה.

שלב ו: להסיק מסקנה בהתאם לתוצאות המדגם.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום לידתם בישראל 3300 גרם.
משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון.
להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$n=20$, $\overline{X}=3120$, $S=280$.

א. מהי אוכלוסיית המחקר?

ב. מה המשתנה הנחקר?

ג. מה הפרמטר הנחקר?

ד. מהן השערות המחקר?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

בשאלות הבאות, ענו על הסעיפים הבאים:

א. מהי אוכלוסיית המחקר?

ב. מה המשתנה הנחקר?

ג. מה הפרמטר הנחקר?

ד. מהן השערות המחקר?

1) ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות.
מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים.
משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים.
ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5.

2) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25.

3) במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה למשפטים היה 25%.
השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22.
מחקר מעוניין לבדוק האם השנה מקשים על הקבלה לפקולטה למשפטים.

4) בחודש ינואר השנה פורסם שאחוז האבטלה במשק הוא 8% במדגם עכשווי התקבל שמתוך 200 אנשים 6.5% מובטלים. רוצים לבדוק ברמת מובהקות של 5% האם כיום אחוז האבטלה הוא כמו בתחילת השנה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. נבחנים בבגרות באנגלית.
ב. ציון.
ג. ממוצע הציונים בשיטת לימוד חדשה.
ד. $\begin{matrix} H_0:\mu=72 \\ H_1:\mu>72 \end{matrix}$.

2) א. משקאות בבקבוק של חברה מסוימת.
ב. נפח משקה בסמ"ק.
ג. ממוצע נפח המשקה בבקבוק.
ד. $\begin{matrix} H_0:\mu=500 \\ H_1:\mu<500 \end{matrix}$.

3) א. מועמדים לפקולטה למשפטים.
ב. משתנה דיכוטומי (התקבל, לא התקבל).
ג. אחוז הקבלה.
ד. $\begin{matrix} H_0:p=0.25 \\ H_1:p<0.25 \end{matrix}$.

4) א. אזרחים בוגרים במשק.
ב. משתנה דיכוטומי (מובטל, עובד).
ג. אחוז האבטלה כיום.
ד. $\begin{matrix} H_0:p=0.08 \\ H_1:p\neq 0.08 \end{matrix}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סוגי טעויות:

רקע:

בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שניקרא כלל הכרעה.
הכלל יוצר אזורים שנקראים:

1. אזור דחייה – דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.
2. אזור קבלה – קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה.

כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי .
בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה וכך להגיע למסקנה – המסקנה היא בעירבון מוגבל כיוון שהיא תלויה בכלל ההכרעה ובתוצאות המדגם. אם נשנה את כלל ההכרעה אז אנחנו יכולים לקבל מסקנה אחרת. אם נבצע מדגם חדש אז אנחנו עלולים לקבל תוצאה אחרת.
לכן יתכנו טעויות במסקנות שלנו:

	הכרעה		
		H_0	H_1
מציאות	H_0	אין טעות	טעות מסוג 1
	H_1	טעות מסוג 2	אין טעות

הגדרת הטעויות:

טעות מסוג ראשון: להכריע לדחות את H_0 למרות שבמציאות H_0 נכונה.

טעות מסוג שני: להכריע לקבל את H_0 למרות שבמציאות H_1 נכונה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

אדם חשוד בביצוע עבירה ונתבע בבית המשפט.
אילו סוגי טעויות אפשריות בהכרעת הדין?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25. בסופו של דבר הוחלט להכריע לטובת חברת המשקאות.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מה מסקנת המחקר?

ג. איזו סוג טעות יתכן וביצעו במחקר?

2) במחקר על פרמטר מסוים הוחלט בסופו של דבר לדחות את השערת האפס.

א. האם ניתן לדעת אם בוצע טעות במחקר?

ב. מה סוג הטעות האפשרית?

3) לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. ישנה טענה שכיום ממוצע מספר הילדים במשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות. במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה. על סמך תוצאות המדגם נקבע שלא ניתן לקבוע שבאופן מובהק תוחלת מספר הילדים למשפחה קטנה כיום.

א. מהי אוכלוסיית המחקר?

ב. מה המשתנה הנחקר?

ג. מה הפרמטר הנחקר?

ד. מה השערות המחקר?

ה. מה מסקנת המחקר?

ו. מהי סוג הטעות האפשרית במחקר?

תשובות סופיות:

1) א. $\begin{matrix} H_0:\mu=500 \\ H_1:\mu<500 \end{matrix}$. ב. לא דחינו את H_0. ג. טעות מסוג שני.

2) א. לא ניתן לדעת. ב. טעות מסוג ראשון.

3) א. משפחות כיום. ב. מס' הילדים.

ג. תוחלת מספר הילדים למשפחה כיום. ד. $\begin{matrix} H_0:\mu=2.3 \\ H_1:\mu<2.3 \end{matrix}$.

ה. לא לדחות את H_0. ו. טעות מסוג שני.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שיטות סטטיסטיות

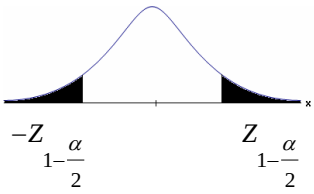
פרק 20 - בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)

תוכן העניינים

1. בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסיה ידועה..... 98
2. סיכוי לטעויות ועוצמה (ששונות האוכלוסיה ידועה)..... 102
3. מובהקות תוצאה - אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסיה ידועה)..... 108
4. בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסיה לא ידועה..... 113
5. מובהקות תוצאה - אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסיה לא ידועה)..... 117

בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסייה ידועה:

רקע:

השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu\neq\mu_0$	$H_0:\mu\geq\mu_0$ $H_1:\mu<\mu_0$	$H_0:\mu\leq\mu_0$ $H_1:\mu>\mu_0$
תנאים:	1. σ ידועה 2. $X\sim N$ או מדגם מספיק גדול		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0:	$Z_{\bar{x}}<-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\bar{x}}>Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ דוחים את H_0	$Z_{\bar{x}}<-Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ דוחים את H_0	$Z_{\bar{x}}>Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ דוחים את H_0

סטטיסטי המבחן: $Z_{\bar{x}}=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

נדחה H_0 אם מתקיים:	$\bar{X}>\mu_0+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X}<\mu_0-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X}<\mu_0-Z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X}>\mu_0+Z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה:

יבול העגבניות מתפלג נורמלית עם תוחלת של 10 טון לדונם וסטיית תקן של 2.5 טון לדונם בעונה. משערים ששיטת זיבול חדשה תעלה את תוחלת היבול לעונה מבלי לשנות את סטיית התקן. נדגמו 4 חלקות שזובלו בשיטה החדשה. היבול הממוצע שהתקבל היה 12.5 טון לדונם. בדקו את ההשערה ברמת מובהקות של 1%.

פיתרון:

<u>אוכלוסייה</u>: עגבניות.

<u>המשתנה</u>: X = יבול העגבניות בטון לעונה.

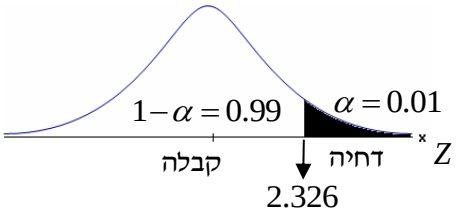
<u>הפרמטר</u>: μ = תוחלת היבול בשיטת הזיבול החדשה.

<u>השערות</u>: $H_0 : \mu = 10$
$H_1 : \mu > 10$

<u>תנאים</u>:

1. $X \sim N$.
2. $\sigma = 2.5$.

<u>כלל הכרעה</u>:



נדחה את H_0 אם $Z_{\bar{x}} > 2.326$

<u>תוצאות</u>: $n = 4$, $\bar{x} = 12.5$

<u>סטטיסטי המבחן</u>: $Z_{\bar{x}} = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

<u>נציב</u>: $Z_{\bar{X}} = \dfrac{1.25 - 10}{\dfrac{2.5}{\sqrt{4}}} = 2 < 2.326$

<u>מסקנה</u>:

לא נדחה H_0 (נקבל H_0).

ברמת מובהקות של 1% לא נוכל לקבל את הטענה ששיטת הזיבול החדשה מעלה את תוחלת היבול של העגבניות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות.
מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים.
ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5.
בהנחה שגם בשיטתו סטיית התקן תהיה 15 מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

2) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ״ק וסטיית תקן 20 סמ״ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ״ק במדגם בגודל 25.

א. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 2.5%?

ב. האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה עבור רמת מובהקות הגבוהה מ-5%?

3) מהנדס האיכות מעוניין לבדוק אם מכונה מכוילת (מאופסת). המכונה כוונה לחתוך מוטות באורך 50 ס״מ. לפי נתוני היצרן סטיית התקן בחיתוך המוטות היא 0.5 ס״מ. במדגם של 50 מוטות התקבל ממוצע אורך המוט 50.93 ס״מ.
מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

4) המשקל הממוצע של הספורטאים בתחום ספורט מסוים הוא 90 ק״ג, עם סטיית תקן 8 ק״ג. לפי דעת מומחים בתחום יש צורך בהורדת המשקל ובשימוש בדיאטה מסוימת שצריכה להביא להורדת המשקל. לשם בדיקת יעילות הדיאטה נלקח מדגם מקרי של 50 ספורטאים ובתום שנה של שימוש בדיאטה התברר שהמשקל הממוצע במדגם זה היה 84 ק״ג.
יש לבדוק בר״מ של 10%, האם הדיאטה גורמת להורדת המשקל.

5) לפי מפרט נתון, על עובי בורג להיות 4 מ״מ עם סטיית תקן של 0.2 מ״מ.
במדגם של 25 ברגים העובי הממוצע היה 4.07 מ״מ.
קבעו ברמת מובהקות 0.05, האם עובי הברגים מתאים למפרט.
הניחו כי עובי של בורג מתפלג נורמלית וסטיית התקן של עובי בורג היא אכן 0.2 מ״מ.

6) במחקר נמצא שתוצאה היא מובהקת ברמת מובהקות של 5% מה תמיד נכון?
בחרו בתשובה הנכונה.

א. הגדלת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.

ב. הגדלת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.

ג. הקטנת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.

ד. הקטנת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

7) חוקר ערך מבחן דו צדדי ברמת מובהקות של α והחליט לדחות את השערת האפס.
אם החוקר היה עורך מבחן צדדי ברמת מובהקות של $\frac{\alpha}{2}$ אזי בהכרח:

א. השערת האפס הייתה נדחית.

ב. השערת האפס הייתה לא נדחית.

ג. לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו במקרה זה.

8) שני סטטיסטיקאים בדקו השערות: $H_0:\mu=\mu_0$ כנגד $H_1:\mu>\mu_0$,
עבור שונות ידועה ובאותה רמת מובהקות.
שני החוקרים קבלו אותו ממוצע במדגם אך לחוקר א' היה מדגם בגודל 100 ולחוקר ב' מדגם בגודל 200.

א. אם חוקר א' החליט לדחות את H_0, מה יחליט חוקר ב'? נמקו.

ב. אם חוקר א' יחליט לא לדחות את H_0, מה יחליט חוקר ב'? נמקו.

תשובות סופיות:

1) נקבל H_0, ברי"מ של 5% לא נקבל את הטענה של המורה ששיטת הלימוד שלו מעלה את ממוצע הציונים.

2) א. נדחה H_0, ברי"מ של 2.5% נקבל את תלונת אגודת הצרכנים בדבר הפחתת נפח המשקה בבקבוק.

ב. הגדלנו את רמת המובהקות לכן אנחנו נשארים בדחייה של H_0 והמסקנה לא תשתנה.

3) נדחה H_0, ברי"מ של 5% נקבע שהמכונה לא מאופסת.

4) נדחה H_0, ברי"מ של 0.1 נקבל את הטענה שהדיאטה יעילה ומפחיתה את המשקל הממוצע.

5) נקבל H_0, ברי"מ של 0.05 נכריע שתוחלת עובי הבורג מתים למפרט.

6) א'.

7) ג'.

8) א. לדחות. ב. לא ניתן לדעת.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

סיכוי לטעויות ועוצמה (ששונות האוכלוסייה ידועה):

רקע:

		הכרעה	
		H_0	H_1
מציאות	H_0	אין טעות	טעות מסוג 1
	H_1	טעות מסוג 2	אין טעות

הגדרת הסתברויות:

הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 (רמת מובהקות):

(לדחות H_0 | H_0 נכונה) $= P_{H_0}$ (לדחות את H_0) $= \alpha$.

הסיכוי לבצע טעות מסוג 2:

(לקבל H_0 | H_1 נכונה) $= P_{H_1}$ (לקבל את H_0) $= \beta$.

רמת בטחון:

(לקבל H_0 | H_0 נכונה) $= P_{H_0}$ (לקבל את H_0) $= (\alpha - 1)$.

עוצמה:

(לדחות H_0 | H_1 נכונה) $= P_{H_1}$ (לדחות את H_0) $= \pi = (\beta - 1)$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

התהליך לחישוב סיכוי לטעות מסוג שני:

השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu\neq\mu_0$	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu<\mu_0$	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu>\mu_0$
תנאים:	1. σ ידועה 2. $X\sim N$ או מדגם מספיק גדול		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0:	$\bar{X}>\mu_0+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X}<\mu_0-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X}<\mu_0-Z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X}>\mu_0+Z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
חישוב β:	$P_{\mu_1}\left(\mu_0-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\bar{X}<\mu_0+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$	$P_{\mu_1}\left(\bar{X}>\mu_0-Z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$	$P_{\mu_1}\left(\bar{X}<\mu_0+Z_{1-\alpha}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

התפלגות ממוצע המדגם: $\bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$.

התקנון: $Z=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

דוגמה:

בתחילת השנה חשבון הטלפון הסלולארי הממוצע לאדם היה 200₪ עם סטיית תקן של 80 ₪ לחודש. בעקבות כניסתן של חברות טלפון סלולארית חדשות מעוניינים לבדוק האם כיום ממוצע חשבון הטלפון הסלולארי פחת. לצורך בדיקה דגמו באקראי 36 אנשים וחשבון הטלפון הסלולארי שלהם היה 150 ₪ בממוצע לחודש.

א. רשמו את השערות המחקר ובנו כלל הכרעה במונחי חשבון ממוצע מדגמי ברמת מובהקות של 5%.

ב. מה מסקנתכם? איזה סוג טעות אפשרית במסקנה?

ג. נניח שבמציאות כיום החשבון הממוצע הוא 160 ₪. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני?

ד. אם נקטין את רמת המובהקות מסעיף א', כיצד הדבר ישפיע על התשובה מסעיף ג'?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

פתרון:

א. <u>אוכלוסייה</u>: משלמי חשבון טלפון סלולאר כיום.

<u>המשתנה</u>: X = חשבון הטלפון החודשי בשקלים.

<u>הפרמטר</u>: μ.

<u>השערות</u>: $\begin{matrix} H_0: \mu = 200 \\ H_1: \mu < 200 \end{matrix}$.

<u>תנאים</u>:

1. $\mu = 200$.

2. $n = 36$.

$K = \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$$\alpha = 0.05$$
$$Z_{1-\alpha} = Z_{0.95} = 1.645$$

נציב: שקלים $K = 200 - 1.645 \cdot \frac{80}{\sqrt{36}} = 178.07$.

<u>כלל ההכרעה</u>: דחה את H_0 אם שקלים $\bar{X} < 178.07$.

ב. ברמת מובהקות של 5% נכריע שאכן ממוצע חשבון הטלפון הסלולרי פחת מתחילת השנה.

ג. <u>השערות</u>: $\begin{matrix} H_0: \mu_0 = 200 \\ H_1: \mu < 200 \end{matrix}$.

<u>כלל ההכרעה</u>: נדחה את H_0 אם $\bar{X} < 178.07$.

$$H_1: \bar{X} \sim N\left(160, \frac{80^2}{36}\right).$$

$$Z = \frac{178.07 - 160}{\frac{80}{\sqrt{36}}} = 1.36$$

$$\beta = P_{H_1}\left(\begin{matrix}\text{לקבל את} \\ H_0\end{matrix}\right) = P_{H_1}\left(\bar{X} > 178.07\right) = 1 - \phi(136) = 1 - 0.9131 = 0.0869$$

ד. הקטנת α מגדילה את β.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) נתון ש: $X \sim N\left(\mu, \sigma^2 = 1\right)$.

להלן השערות של חוקר לגבי הפרמטר μ: $H_1: \mu = 7$, $H_0: \mu = 5$.

מעוניינים ליצור כלל הכרעה המתבסס על הסמך תצפית בודדת כך שרמת המובהקות תהיה 5%.

א. עבור אילו ערכים של X שידגם נדחית השערת H_0?

ב. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני?

ג. אם במדגם התקבל ש-$X = 6.9$ מה תהיה המסקנה ומה הטעות האפשרית?

2) לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. מעוניינים לבדוק אם כיום ממוצע מספר הילדים למשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות.
במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה.

א. רשמו כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קריטי וברמת מובהקות של 5%.

ב. בהמשך לסעיף א' מה תהיה המסקנה ומהי הטעות האפשרית במסקנה?

ג. אם באמת ממוצע מספר הילדים במשפחה פחת לכדי 2.1 מהי העצמה של הכלל מסעיף א'?

3) להלן נתונים על תהליך של בדיקת השערות על תוחלת:

$n = 225$, $\sigma = 30$, $H_1: \mu \neq 200$, $H_0: \mu = 200$.

א. רשמו כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קריטי וברמת מובהקות של 10%.

ב. בהמשך לסעיף א', מהי העצמה אם התוחלת שווה ל-195?

ג. הסבירו, ללא חישוב, איך העצמה תשתנה אם רמת המובהקות תהיה 5%?

4) מפעל לייצור צינורות מייצר צינור שקוטרו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 50 מ"מ וסטית תקן של 6 מ"מ. במחלקת ביקורת האיכות דוגמים בכל יום 81 צינורות ומודדים את קוטרם, בכדי לבדוק, בעזרת מבחן סטטיסטי, האם מכונת הייצור מכוילת כנדרש או שקוטר הצינורות קטן מהדרוש.

א. רשמו את ההשערות ואת כלל ההכרעה ברמת מובהקות של 5%.

ב. אם ביום כלשהו מכונת הייצור התקלקלה והיא מייצרת את הצינורות בקוטר שתוחלתו 48 מ"מ בלבד (סטית התקן לא השתנתה), מה ההסתברות שהתקלה לא תתגלה בביקורת האיכות? כיצד נקראת הסתברות זו?

ג. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף ב תשתנה אם רמת המובהקות תגדל.

ד. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף ב תשתנה אם התוחלת האמיתית היא 47 ולא 48 מ"מ.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) להלן השערות של מחקר: $H_1:\mu=58$, $H_0:\mu=50$.
מעוניינים לדגום 100 תצפיות. ידוע שסטיית התקן של ההתפלגות הינה 20.

א. בנו כלל הכרעה שהסיכוי לטעות מסוג שני בו הוא 10%.
מהי רמת המובהקות?

ב. כיצד הייתה משתנה רמת המובהקות אם (כל סעיף בפני עצמו)?

i. סטיית התקן הייתה יותר גדולה.

ii. הסיכוי לטעות מסוג שני גדול יותר.

השאלות שלהלן הן שאלות רב-ברירה, בחרו בתשובה הנכונה ביותר:

6) אם חוקר החליט להגדיל את רמת המובהקות במחקר שלו אזי:

א. הסיכוי לטעות מסוג ראשון גדל.

ב. העוצמה של המבחן גדלה.

ג. הסיכוי לטעות מסוג שני גדל.

ד. תשובות א' ו-ב' נכונות.

7) חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן:

א. השערת האפס נכונה.

ב. השערת האפס נדחתה.

ג. השערת האפס לא נדחתה.

ד. אף אחת מהתושבות לא נכונה בהכרח.

8) מה המצב הרצוי לחוקר המבצע בדיקת השערה:

α	$1-\beta$
א. גדולה	גדולה
ב. גדולה	קטנה
ג. קטנה	גדולה
ד. קטנה	קטנה

9) נערך שינוי בכלל ההחלטה של בדיקת השערה מסוימת ובעקבותיו אזור דחיית H_0 קטן. כל שאר הגורמים נשארו ללא שינוי. כתוצאה מכך:

א. הן α, והן $1-\beta$, יקטנו.

ב. α יישאר ללא שינוי ואילו $1-\beta$ יגדל.

ג. α יגדל ואילו $1-\beta$ יקטן.

ד. הן α והן $1-\beta$ יגדלו.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

10) ידוע כי לחץ דם תקין באוכלוסייה הוא 120. רופא מניח שלחץ הדם בקרב עיתונאים גבוה יותר מהממוצע באוכלוסייה. הוא לקח מדגם של 60 עיתונאים וקיבל ממוצע 137. על סמך המדגם, הוא בודק טענתו ברמת מובהקות 0.02 ומסיק שלחץ הדם בקרב העיתונאים אינו גבוה יותר.
מה הטעות האפשרית שהרופא עושה?

א. טעות מסוג ראשון.

ב. טעות מסוג שני.

ג. טעות מסוג שלישי.

ד. אין טעות במסקנתו.

תשובות סופיות:

1) א. מעל 6.645. ב. 0.3594.

ג. דחינו את H_0, תתכן טעות מסוג ראשון.

2) א. נדחה H_0 אם $\bar{X} < 2.24$. ב. נדחה H_0. ג. 1.

3) א. נדחה H_0 אם $\bar{X} > 203.29$ או $\bar{X} < 196.71$. ב. 0.8051. ג. תקטן.

4) א. נדחה H_0 אם $\bar{X} < 48.9$. ב. 0.0885. ג. תקטן. ד. תקטן.

5) א. 0.0033. ב. i. רמת המובהקות הייתה קטנה.

ב. ii. רמת המובהקות הייתה גדלה.

6) ד'.

7) ג'.

8) ג'.

9) א'.

10) ב'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מובהקות תוצאה – אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסייה ידועה):

רקע:

דרך נוספת להגיע להכרעות שלא דרך כלל הכרעה, היא דרך חישוב מובהקות התוצאה:

באמצעות תוצאות המדגם מחשבים את מובהקות התוצאה שמסומן ב- p_v.

את רמת המובהקות החוקר קובע מראש לעומת זאת, את מובהקות התוצאה החוקר יוכל לחשב רק אחרי שיהיו לו את התוצאות.

המסקנה של המחקר תקבע לפי העיקרון הבא: אם $p_v \le \alpha$, דוחים את H_0.

מובהקות התוצאה זה הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = P_{H_0}$.

אם ההשערה היא דו צדדית:

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = 2P_{H_0}$.

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

השערת האפס: **השערה אלטרנטיבה:**	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu\neq\mu_0$	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu<\mu_0$	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu>\mu_0$
תנאים:	1. σ ידועה 2. $X\sim N$ או מדגם מספיק גדול		
p-value	אם $\bar{x}>\mu_0 \Rightarrow 2\cdot P_{H_0}\left(\bar{X}\ge\bar{x}\right)$ אם $\bar{x}<\mu_0 \Rightarrow 2\cdot P_{H_0}\left(\bar{X}\le\bar{x}\right)$	$P_{H_0}(\bar{X}\le\bar{x})$	$P_{H_0}(\bar{X}\ge\bar{x})$

כאשר בהנחת השערת האפס: $\bar{X}\sim N\left(\mu_0,\frac{\sigma^2}{n}\right)$, $Z_{\bar{x}}=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה:

המשקל הממוצע של מתגייסים לצבא לפני 20 שנה היה 65 ק"ג. מחקר מעוניין לבדוק האם כיום המשקל הממוצע של מתגייסים גבוה יותר. נניח שמשקל המתגייסים מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 12 ק"ג. במדגם של 16 מתגייסים התקבל משקל ממוצע של 71 ק"ג.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה המסקנה אם רמת המובהקות היא 5% ואם רמת המובהקות היא 1%?

פתרון:

א. <u>אוכלוסייה</u>: המתגייסים לצבא כיום.

<u>משתנה</u>: X = משקל בק"ג.

<u>פרמטר</u>: μ.

<u>השערות</u>: $\begin{matrix} H_0:\mu=65 \\ H_1:\mu>65 \end{matrix}$.

<u>תנאים</u>:

1. $X\sim N$.
2. $\sigma=12$.

<u>תוצאות מדגם</u>:

$n=16$

$\bar{X}=71$

$$P_V=P_{H_0}\left(\begin{matrix}\text{לתוצאות}\\ \text{המדגם}\\ \text{וקיצוני}\end{matrix}\right)=P_{H_0}\left(\bar{X}\geq 71\right)=1-\phi\left(2\right)=1-0.9772=0.0228$$

$$Z_{\bar{x}}=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{71-65}{\frac{12}{\sqrt{16}}}=2$$

$\alpha_{\min}=0.0228$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) להלן השערות של מחקר: $H_0:\mu=70$, $H_1:\mu>70$.
המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית עם סטיית תקן 20.
במדגם מאותה אוכלוסייה התקבלו התוצאות הבאות: $\bar{x}=74$, $n=100$.
מהי מובהקות התוצאה?

2) השכר הממוצע במשק בשנת 2012 היה 8800 ₪ עם סטיית תקן 2000. במדגם שנעשה אתמול על 100 עובדים התקבל שכר ממוצע 9500 ₪. מטרת המחקר היא לבדוק האם כיום חלה עליה בשכר. עבור אילו רמות מובהקות שיבחר החוקר יוחלט שחלה עליה בשכר הממוצע במשק?

3) אדם חושד שחברת ממתקים לא עומדת בהתחייבויותיה, ומשקלו של חטיף מסוים אותו הוא קונה מדי בוקר נמוך מ-100 גרם.
חברת הממתקים טוענת מצידה שהיא אכן עומדת בהתחייבויותיה. ידוע כי סטיית התקן של משקל החטיף היא 12 גרם. האדם מתכוון לשקול 100 חפיסות חטיפים ולאחר מכן להגיע להחלטה.
לאחר הבדיקה הוא קיבל משקל הממוצע של 98.5 גרם.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה דוחים את השערת האפס?

ג. מהי רמת המובהקות המקסימלית עבורה נקבל את השערת האפס?

ד. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

4) מכונה לחיתוך מוטות במפעל חותכת מוטות באורך שמתפלג נורמאלית עם תוחלת אליה כוונה המכונה וסטיית תקן 2 ס"מ. ביום מסוים כוונה המכונה לחתוך מוטות באורך 80 ס"מ. אחראי האיכות מעוניין לבדוק האם המכונה מכוילת. לצורך כך נדגמו מקו הייצור 16 מוטות שנחתכו אורכן הממוצע היה 81.7 ס"מ.

א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה נכריע שהמכונה לא מכוילת?

ב. אם נוסיף עוד תצפית שערכה יהיה 82 ס"מ, כיצד הדבר ישפיע על התשובה של הסעיף הקודם?

ג. הכרע ברמת מובהקות של 5% האם המכונה מכוילת.

5) אם מקבלים בחישובים אלפא מינימלית (P value) קטנה מאד, סביר להניח כי החוקר ידחה את השערת האפס בקלות. נכון/לא נכון? נמק.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

6) בבדיקת השערות התקבל שה- $p-value=0.02$.
מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 1%?
בחרו בתשובה הנכונה.

א. יקבל את השערת האפס בכל מקרה.

ב. ידחה את השערת האפס מקרה.

ג. ידחה את השערת האפס רק אם המבחן הנו דו צדדי.

ד. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.

7) מובהקות התוצאה (PV) היא גם (בחרו בתשובה הנכונה):

א. רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.

ב. רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.

ג. רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר שטרם קיבל את תוצאות המחקר.

ד. רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.

8) בבדיקת השערות מסוימת התקבל: $p\ value=0.0254$ לכן (בחרו בתשובה הנכונה):

א. ברמת מובהקות של 0.01 אך לא של 0.05 נדחה את H_0 .

ב. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 לא נדחה את H_0 .

ג. ברמת מובהקות של 0.05 אך לא של 0.01 נדחה את H_0 .

ד. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 נדחה את H_0 .

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) 0.0228.

2) עבור כל רמת מובהקות סבירה.

3) א. $\begin{matrix} H_0:\mu=100 \\ H_1:\mu<100 \end{matrix}$. ב. 0.1056. ג. 0.1056.

ד. נכריע שיש עמידה בהתחייבות של החברה.

4) א. 0.0006. ב. יקטן. ג. נכריע שאין כיול.

5) נכון.

6) א'.

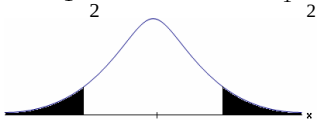
7) א'.

8) ג'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסייה לא ידועה:

רקע:

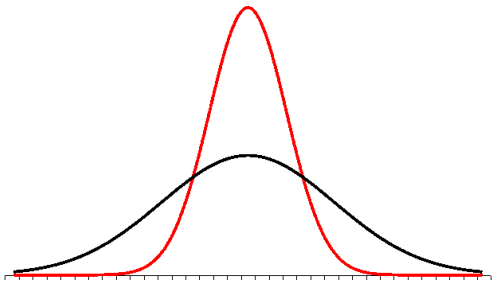
השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu\neq\mu_0$	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu<\mu_0$	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu>\mu_0$
תנאים:	1. σ אינה ידועה 2. $X\sim N$ או מדגם מספיק גדול		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0:	$t_{\bar{x}}>t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $t_{\bar{x}}<-t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ ■ - דוחים את H_0	$t_{\bar{x}}<-t^{(n-1)}_{1-\alpha}$  $-t_{1-\alpha,n-1}$ ■ - דוחים את H_0	$t_{\bar{x}}>t^{(n-1)}_{1-\alpha}$  $t_{1-\alpha,n-1}$ ■ - דוחים את H_0
חלופה לכלל הכרעה: נדחה H_0 אם מתקיים:	$\bar{X}>\mu_0+t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X}<\mu_0-t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X}<\mu_0-t^{n-1}_{1-\alpha}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X}>\mu_0+t^{n-1}_{1-\alpha}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$

סטטיסטי המבחן: $t_{\bar{x}}=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$.

$S^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{n-1}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X^2{}_i-n\bar{X}^2}{n-1}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

התפלגות T:



הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים. התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש.

דרגות החופש הן: $df = n-1$.

ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה.

כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מפעל קיבל הזמנה לייצור משטחים בעובי של 0.1 ס״מ.

כדי לבדוק האם המפעל עומד בדרישה נדגמו 10 משטחים ונמצא שהעובי הממוצע הוא 0.104 עם אומדן לסטיית תקן 0.002 ס״מ.

א. מהן השערות המחקר?

ב. מה ההנחה הדרושה לצורך פתרון?

ג. בדוק ברמת מובהקות של 5%.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) משך זמן ההחלמה בלקיחת אנטיביוטיקה מסוימת הוא 120 שעות בממוצע עם סטיית תקן לא ידועה. מעוניינים לבדוק האם אנטיביוטיקה אחרת מקטינה את משך זמן ההחלמה. במדגם של 5 חולים שלקחו את האנטיביוטיקה האחרת התקבלו זמני ההחלמה הבאים: 125, 80, 100, 95, 90 שעות. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%.
מהי ההנחה הדרושה לצורך הפתרון?

2) משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום היוולדם בישראל 3300 גר'. משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע.
במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון.
להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$$n = 20$$
$$\bar{x} = 3120$$
$$S = 280$$

מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5% מה יש להניח לצורך פתרון?

3) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמלית. בארה"ב ממוצע הציונים הוא 100. במדגם שנעשה על 23 נבחנים ישראלים, התקבל ממוצע ציונים 104.5 וסטיית התקן המדגמית 16. האם בישראל ממוצע הציונים שונה מארה"ב? הסיקו ברמת מובהקות של 5%.

4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750$$
$$\sum_{i=1}^{10} \left(X_i - \bar{X} \right)^2 = 900$$

נתון שההתפלגות היא נורמלית.
בדוק ברמת מובהקות של 5% האם התוחלת של ההתפלגות שונה מ-80 .

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) ליאור ורוני העלו את אותן השערות על ממוצע האוכלוסייה.
כמו כן הם התבססו על אותן תוצאות של מדגם.
ליאור השתמש בטבלה של התפלגות Z.
רוני השתמשה בטבלה של התפלגות t.
מה נוכל לומר בנוגע להחלטת המחקר שלהם? בחר בתשובה הנכונה.

א. אם ליאור ידחה את השערת האפס אז גם בהכרח רוני.

ב. אם רוני תדחה את השערת האפס אז גם בהכרח ליאור.

ג. שני החוקרים בהכרח יגיעו לאותה מסקנה.

ד. לא ניתן לדעת על היחס בין דחיית השערת האפס של שני החוקרים.

6) נתון ש: $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ כמו כן נתונות ההשערות הבאות: $\begin{matrix} H_0:\mu=\mu_0 \\ H_1:\mu<\mu_0 \end{matrix}$.
חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות.
σ^2 לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5% לאחר מכן כדי לחזק את קביעתו הוא דגם עוד 5 תצפיות ושקלל את תוצאות אלה גם למדגם כך שכלל עכשיו 15 תצפיות.
בחר בתשובה הנכונה:

א. כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.

ב. כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.

ג. כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

תשובות סופיות:

1) נדחה H_0.

2) נדחה H_0.

3) נקבל H_0.

4) נקבל H_0.

5) ב'.

6) ג'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מובהקות תוצאה – אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסייה לא ידועה):

רקע:

נזכיר שהמסקנה של המחקר תיקבע לפי העיקרון הבא: אם $p_v \le \alpha$ דוחים את H_0.

מובהקות התוצאה היא הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = P_{H_0}$.

אם ההשערה היא דו צדדית:

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = 2P_{H_0}$.

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \ne \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$
תנאים:	1. σ אינה ידועה או 2. מדגם מספיק גדול $X \sim N$		
p-value	אם $\bar{x} > \mu_0 \Rightarrow 2 \cdot P_{H_0}\left(\bar{X} \ge \bar{x}\right)$ אם $\bar{x} < \mu_0 \Rightarrow 2 \cdot P_{H_0}\left(\bar{X} \le \bar{x}\right)$	$P_{H_0}\left(\bar{X} \le \bar{x}\right)$	$P_{H_0}\left(\bar{X} \ge \bar{x}\right)$

$$t_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X^2{}_i - n\bar{X}^2}{n-1}$$

$$d.f = n-1$$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה:

ממוצע זמן הנסיעה של אדם לעבודה הינו 40 דקות. הוא מעוניין לבדוק דרך חלופית שאמורה להיות יותר מהירה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שבהם הוא נוסע בדרך החלופית. זמני הנסיעה שקיבל בדקות הם: 27, 32, 30, 40, 34.
הניחו שזמן הנסיעה מתפלג נורמלית.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מצאו חסמים למובהקות התוצאה.

ג. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

פתרון:

<u>אוכלוסייה</u>: כלל הנסיעות לעבודה בדרך החלופית.

<u>משתנה</u>: X = זמן נסיעה בדקות.

<u>תנאים</u>: $X \sim N$.

<u>פרמטר</u>: μ.

א. <u>השערות</u>: $\begin{matrix} H_0: \mu = 40 \\ H_1: \mu < 40 \end{matrix}$.

ב. <u>תוצאות המדגם</u>:

$$n=5\ ,\ \bar{X}\frac{\sum X_i}{n}=\frac{34+40+...}{5}=32.6$$

$$S^2=\frac{\sum X_i{}^2-n\cdot\bar{X}^2}{n-1}=\frac{34^2+40^2-...-5\cdot 32.6^2}{5-1}=23.4$$

$$S=\sqrt{23.4}$$

$$t_{\bar{X}}=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}=\frac{32.6-40}{\frac{4.88}{\sqrt{5}}}=-3.39$$

$$P_V=P_{H_0}=\left(\bar{X}\le 32.6\right)=P\left(t\le -3.39\right)$$

$$d.f=5-1=4$$

$$1\%<P_V<2.5\%$$

$P_V<\alpha=0.05$, לכן דוחים את H_0.

<u>מסקנה</u>: ברי"מ של 5% נכריע שהדרך החלופית מהירה יותר.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) קו ייצור אריזות סוכר נארזות כך שהמשקל הממוצע של אריזות הסוכר צריך להיות אחד קילוגרם. בכל יום דוגמים מקו הייצור 5 אריזות במטרה לבדוק האם קו הייצור תקין. בבדיקה דגמו 5 אריזות סוכר ולהלן משקלן בגרמים:
997, 996, 1005, 1008, 1024.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מהי מובהקות התוצאה? הצג חסמים.

ג. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

2) חוקר בדק את הטענה כי פועלים העובדים במשמרת לילה איטיים יותר מפועלים העובדים ביום. ידוע כי משך הזמן הממוצע הדרוש לייצר מוצר מסוים ביום הוא 6 שעות. במדגם מיקרי של 25 פועלים שעבדו במשמרת לילה נמצא כי הזמן הממוצע לייצר אותו מוצר הוא 7 שעות עם סטית תקן של 3 שעות.
מהי ה- α המינימלית שלפיה ניתן להחליט שאכן העובדים במשמרת לילה איטיים יותר?

3) הגובה של מתגייסים לצה"ל מתפלג נורמלית. במדגם של 25 מתגייסים מדדו את הגבהים שלהם בס"מ והתקבלו התוצאות הבאות:
$\sum(x_i-\bar{x})^2=2832$, $\bar{x}=176.2$.
מטרת המחקר היא לבדוק האם תוחלת הגבהים של המתגייסים גבוה מ-174 ס"מ באופן מובהק.
מהי בקרוב מובהקות התוצאה ועל פיה מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 6%?

תשובות סופיות:

1) א. $H_0:\mu=1000$, $H_1:\mu\neq1000$. ב. $20\%\le P_v\le 50\%$.

ג. ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקו הייצור אינו תקין.

2) 10%.

3) 1.01, נקבל את H_0.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שיטות סטטיסטיות

פרק 21 - מבחני חי בריבוע

תוכן העניינים

1. מבחן טיב התאמה 120
2. מבחן לאי תלות 125

מבחני חי בריבוע

מבחן טיב התאמה – רקע

מבחן זה בא לבדוק האם אוכלוסייה מסוימת מתפלגת לפי התפלגות נתונה.
המשתנה הנחקר מחולק למספר קטגוריות ויש לבדוק האם תוצאות המדגם תואמות להתפלגות הנתונה.

מבנה המבחן:

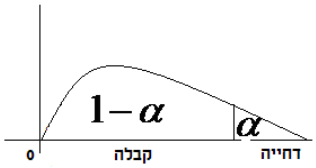
השערות:

המשתנה מתפלג לפי התפלגות מסוימת - H_0.

אחרת - H_1.

כלל הכרעה:

הערך הקריטי נקבע על סמך התפלגות חי בריבוע. התפלגות זו היא אסימטרית חיובית ותלויה בדרגות החופש. $d.f = K-1$, כאשר K - מספר הקטגוריות.



הערך הקריטי הוא: $\chi^2_{1-\alpha,K-1}$, כלומר האחוזון ה- $1-\alpha$ בהתפלגות חי בריבוע שדרגות החופש הן $K-1$.

אם $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha,K-1}$, דוחים את השערת האפס.

סטטיסטי המבחן: $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$.

O_i - השכיחות שנצפתה במדגם בקטגוריה i.

p_i - הסתברות לקטגוריה i לפי השערת האפס.

$E_i = np_i$ - שכיחות צפויה במדגם לקטגוריה i בהנחת השערת האפס.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הערה:

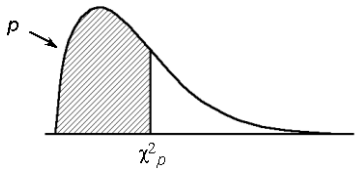
תנאי כדי לבצע את המבחן הוא $E_i \geq 5$ לכל i. במידה ותנאי זה לא מתקיים יש אפשרות לאחד קטגוריות סמוכות עד שהתנאי יתקיים.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

במדינה מסוימת שלוש מפלגות. בפרלמנט הנוכחי התפלגות מספר המושבים היא 30% למפלגה A, 60% למפלגה B ו-10% למפלגה C.
לקראת הבחירות המתוכננות בשבוע הבא נעשה סקר שכלל 300 אזרחים.
בסקר התקבל ש40% יצביעו למפלגה A, 50% למפלגה B ו-10% למפלגה C.
האם תוצאות הסקר תואמות להתפלגות המושבים בפרלמנט הנוכחי?
בדקו ברמת מובהקות של 5%.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה



							p						
df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3982	0.0^2393	0.0158	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) במטרה לבדוק האם קובייה הוגנת, מטילים אותה 120 פעמים.
התקבל 17 פעמים 1, 23 פעמים 2, 20 פעמים 3, 25 פעמים 4, 18 פעמים 5 ו-17 פעמים 6. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

2) מפעל מייצר סוכריות בצבעים כחול, אדום, ירוק וכתום. מעוניינים לבדוק שפרופורציית הסוכריות הכחולות גדולה פי 2 מכל צבע אחר. לצורך כך נדגמו באקראי 200 סוכריות והתקבל: 70 כחולות, 50 אדומות, 40 ירוקות והיתר כתומות.
מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

3) 200 איש נתבקשו לבחור ספרה באקראי והנה התוצאות שהתקבלו:
18 איש בחרו בספרה 0, 24 איש בחרו בספרה 1, 17 איש בחרו בספרה 2, 19 איש בחרו בספרה 3, 20 איש בחרו בספרה 4, 18 איש בחרו בספרה 5, 22 איש בחרו בספרה 6 והיתר בחרו בספרות 7-9.

א. על סמך התוצאות הללו האם בחירת הספרות אקראית?
בדקו ברמת מובהקות של 2.5%.

ב. תנו הערכה למובהקות התוצאה.

ג. אם נגדיל את גודל המדגם פי 2 ונשמור על אותם יחסים של כמות האנשים במדגם שבחרו בספרות, כיצד הדבר ישפיע על ערכו של הסטטיסטי χ^2? מה תהיה המסקנה במקרה זה?

4) מעוניינים לבדוק האם קובייה היא הוגנת. הטילו את הקובייה פעמיים והתבוננו בסכום הוצאות. חזרו על התהליך 72 פעמים.
להלן התוצאות שהתקבלו במדגם:
מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

סכום התוצאות	מספר הטלות
2-5	20
6-8	17
9-10	20
11-12	15

5) בפנס יש 4 סוללות. בבדיקה שנערכה ב-400 פנסים נמצאו סוללות פגומות לפי השכיחויות הבאות:

מספר הסוללות הפגומות	0	1	2	3 ומעלה
שכיחות	276	104	12	8

מעוניינים לבדוק על סמך תוצאות מדגם אלה האם הסיכוי לסוללה פגומה הוא 20%. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה נכריע שהסיכוי לסוללה פגומה אינו 20%?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

6) להלן השערות מחקר: $H_1 : else$, $H_0 : X \sim N(40, 2^2)$.

תוצאות המדגם הן:

X	מתחת 36	36-40	40-44	מעל 44
מספר הדגימות	3A	50A	45A	2A

מהו ערכו המקסימלי של A עבורו נקבל את H_0 ברמת מובהקות של 5%?

תשובות סופיות

1) לא נדחה H_0.

2) לא נדחה H_0.

3) א. לא נדחה H_0. ב. בין 0.95 ל-0.975 ג. יגדל פי 2; המסקנה לא תשתנה.

4) נכריע שהקובייה אינה הוגנת.

5) 0.005.

6) 14.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבחן חי בריבוע לאי תלות בין משתנים – רקע

מבחן לאי תלות מטרתו לבדוק האם קיים קשר בין שני משתנים.
שני המשתנים שנבדקים צריכים להיות מחולקים למספר קטגוריות.

מבנה המבחן:

השערות:

אין תלות בין המשתנים H_0.

יש תלות בין המשתנים H_1.

כלל הכרעה:

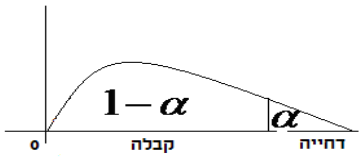
הערך הקריטי נקבע על סמך התפלגות חי בריבוע. התפלגות זו היא אסימטרית חיובית ותלויה בדרגות החופש $d.f=(r-1)(c-1)$.

כאשר: r - מספר הקטגוריות של המשתנה שבשורות.

c - מספר הקטגוריות של המשתנה שבעמודות.

הערך הקריטי הוא: $\chi^2_{1-\alpha,(r-1)(c-1)}$, כלומר האחוזון ה- $1-\alpha$ בהתפלגות חי בריבוע שדרגות החופש הן $(r-1)(c-1)$. אם $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha,(r-1)(c-1)}$ אז דוחים את השערת האפס.

סטטיסטי המבחן: $\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}$.



כאשר:

O_i - השכיחות נצפית במדגם בתא i.

E_i - שכיחות צפויה במדגם בתא i בהנחת השערת האפס.

$$E_i=\frac{f(x)\cdot f(y)}{n}$$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

הערה:

תנאי כדי לבצע את המבחן הוא $E_i \geq 5$ לכל i. במידה ותנאי זה לא מתקיים יש אפשרות לאחד קטגוריות סמוכות עד שהתנאי יתקיים.
תנאי חלופי: אין E קטן מ-1 וגם אין ביותר מ 20% מהתאים E קטן מ-5.

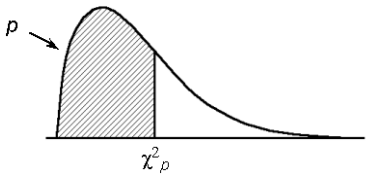
דוגמה (הפתרון בהקלטה):

האם יש תלות בין המגדר לבין דעה מסוימת?
יש לבדוק ברמת מובהקות של 5% על סמך תוצאות הסקר:

המגדר / דעה	בעד	נגד	נמנע	סה"כ
גברים	50	40	10	
נשים	20	60	20	
סה"כ				

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה $\chi^2 p$



df	p .005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3982	0.0^2393	0.0158	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) נבדקה התלות בין גודל הארגון לבין שביעות הרצון של העובדים.
להלן התוצאות:

שביעות רצון גודל המפעל	נמוכה	בינונית	גבוהה	סה"כ
גדול	182	203	215	600
קטן	154	110	136	400
סה"כ	336	313	351	1000

מה המסקנה ברמת מובהקות של 2.5%?

2) מפעל עובד בשלוש משמרות. להלן מספר המוצרים הפגומים והתקינים בכל אחת מן המשמרות לפי מדגם שנעשה:

	יום	ערב	לילה
פגומים	50	60	70
תקינים	600	700	800

האם יש הבדל בין שיעורי הפגומים במשמרות השונות?
הסיקו עבור רמת מובהקות $\alpha = 0.05$.

3) נדגמו 50 מוצרים ממפעל מסוים מתוך 30 מוצרים שיוצרו ביום 17 נבחרו לייצוא מתוך המוצרים שיוצרו בלילה 10 נבחרו לייצוא.
האם יש קשר בין היות מוצר לייצוא למועד שבו הוא יוצר?
בדקו ברמת בטחון של 95%.

תשובות סופיות

1) נסיק שיש קשר בין גודל הארגון לשביעות הרצון של העובדים.

2) נסיק שאין הבדל מובהק בין שיעור הפגומים במשמרות השונות.

3) נסיק שאין קשר בין היות מוצא לייצוא למועד שבו הוא יוצר.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שיטות סטטיסטיות

פרק 22 - מבחנים אפרמטרים למדגמים מזווגים

תוכן העניינים

1. מבחן הסימן 129
2. מבחן הסימן - על ידי שימוש בקירוב הנורמלי 132
3. מבחן וילקוקסון - על ידי שימוש בקירוב הנורמלי 136

מבחנים אפרמטרים למדגמים מזווגים

מבחן הסימן – רקע

מבחן הסימן הוא מבחן שמשתמשים בו כאשר לפנינו מדגם מזווג ולא ניתן להניח שהמשתנה הנחקר מתפלג נורמלית.
גם אם המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית ניתן לבצע את מבחן הסימן אבל מבחן T למדגמים מזווגים יהיה מבחן עם עוצמה גבוהה יותר ולכן יש לבצע אותו.
מבחן הסימן נחשב למבחן אפרמטרי – מבחנים אפרמטרים הינם כל המבחנים שאינם דורשים שהמשתנה הנחקר יתפלג נורמלית.
מבחן הסימן נקרא כך כיוון שהוא דורש הגדרת סימן לכל תצפית:

$(+)$ – אם מצב X גבוה ממצב Y.

$(-)$ – אם מצב Y גבוה ממצב X.

(0) – אין הבדל בין המצבים.

במבחן הסימן נתעלם מהפרשים שהם 0, ולכן נסמן את מספר ההפרשים האפקטיביים (השונים מאפס) ב- n^*.
תחת השערת האפס נאמר שהסיכוי לקבל הפרש חיובי $(p+)$ שווה לסיכוי לקבל הפרש שלילי $(p-)$.

השערות המבחן:

$$H_0: P_+ = 0.5 \quad H_1: P_+ \neq,<,> 0.5 \quad \text{או} \quad H_0: P_- = 0.5 \quad H_1: P_- \neq,<,> 0.5$$

נסמן ב $n(+)$ או ב S_+ את מספר התצפיות שקיבלו את הערך (+), ובאופן דומה:
נסמן ב $n(-)$ או ב S_- את מספר התצפיות שקיבלו את הערך (–).
ניתן לומר שבהנחת השערת האפס: $n(+) \setminus n(-) \sim B(n^*, 0.5)$.
נחשב את PV על סמך תוצאות המדגם בעזרת ההתפלגות הבינומית כך שאם $PV \leq \alpha$ נדחה את השערת האפס.
במבחן הסימן אין התייחסות לגודל הפער בתצפיות אלא רק את כיוון ההבדל.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

קופות החולים טוענות כי רכישת תרופות שאינן דורשות מרשם רופא, הינן זולות יותר אצלן מאשר מברשתות הפארם. דגמו 11 תרופות ובדקו את מחירן בבית המרקחת של קופות החולים וברשת הפארם. המחיר המוצג הינו עבור קפסולה בודדת:
בדקו ברמת מובהקות של 5% באמצעות מבחן הסימן.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שם התרופה	קופת חולים	פארם
אדוויל	1.2	1.5
אקמול	2.6	2.6
אופטלגין	0.9	1.4
פוסטינור	3.5	3.2
סטרפסיל	1.1	1.4
נורפן	1.7	1.8
לורסטין	0.8	1.1
קולדקס	1.5	2
אלרגיז	2	2.8
נוסידקס	2	2.5
קורמיר	3	3.3

שאלות

1) רוצים לבדוק את הטענה שהציונים במבחן בסטטיסטיקה ב גבוהים מאשר בסטטיסטיקה א. נלקחו 10 סטודנטים שסיימו את סטטיסטיקה ב.
עבור כל סטודנט נבדק מה הציון בסטטיסטיקה א ומה הציון בסטטיסטיקה ב.
להלן התוצאות שהתקבלו:

א	62	74	68	94	82	67	65	84	78	80
ב	70	80	70	90	77	67	80	86	79	82

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% באמצעות מבחן הסימן.

ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם יוחלט לתת פקטור של 2 נקודות לכל הסטודנטים בשני המועדים?

2) מעוניינים לבדוק האם ההוצאות על "ג'אנק פוד" בקרב הסטודנטים רבות יותר בזמן הלימודים לעומת ימי החופשה.
נדגמו 15 סטודנטים מקריים, אצל 13 ההוצאות בתקופת הלימודים היו גבוהות יותר מימיי החופשה ואצל 2 נמוכות יותר.
מה מסקנתך בר"מ של 0.05?

3) מעוניינים לבדוק האם סם מסוים משפיע על לחץ הדם. נלקחו 24 אנשים אשר נמדד להם לחץ הדם לאחר מכן ניתן להם הסם ושוב מדדו להם את לחץ הדם.
לחמישה אנשים לחץ הדם לא השתנה ל 15 אנשים לחץ הדם עלה וליתר לחץ הדם ירד אחרי לקיחת הסם. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) במדגם שנעשה על 15 משפחות השוו את רמת הביטחון העצמי של הבכור במשפחה לעומת הצעיר שבמשפחה. תוצאות המדגם הראו שאצל 7 משפחות רמת הביטחון העצמי של הבכור הייתה גבוהה יותר, אצל 3 משפחות רמת הביטחון העצמי של הצעיר הייתה גבוהה יותר ואצל 5 משפחות לא נמצא הבדל בין האחים מבחינת רמת הביטחון העצמי. טענת החוקר הייתה שבמשפחות לבכור ביטחון עצמי גבוה מזה של הצעיר במשפחה.

א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה יוחלט לקבל את טענת החוקר?

ב. רמת הביטחון הוערכה על ידי פסיכולוג זוטר. פסיכולוג בכיר ביצע הערכה מחודשת וקבע שלמשפחה אחת במדגם הייתה הערכה שגויה: הפסיכולוג הזוטר קבע שלצעיר במשפחה יש ביטחון עצמי יותר גבוה למרות שלאח הבכור יש ביטחון עצמי יותר גבוה במשפחה הזו. מה יקרה לרמת המובהקות המינימלית שחושבה בשאלה הקודמת?

5) איזה מהטענות הבאות נכונות?

א. $n(+)+n(-)=n^*$

ב. $n(+)+n(-)=n$

ג. $n(+)=n(-)$

ד. $n(+)-n(-)=n^*$

תשובות סופיות

1) א. לא נדחה את H_o. ב. לא תשתנה המסקנה.

2) נדחה את H_o.

3) נדחה את H_o.

4) א. 0.172 ב. תקטן.

5) א'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבחן הסימן (שימוש בקירוב הנורמלי) – רקע

מבחן הסימן הוא מבחן שמשתמשים בו כאשר לפנינו מדגם מזווג ולא ניתן להניח שהמשתנה הנחקר מתפלג נורמלית.

גם אם המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית ניתן לבצע את מבחן הסימן אבל מבחן T למדגמים מזווגים יהיה מבחן עם עוצמה גבוהה יותר ולכן יש לבצע אותו.

מבחן הסימן נחשב למבחן אפרמטרי – מבחנים אפרמטרים הינם כל המבחנים שאינם דורשים שהמשתנה הנחקר יתפלג נורמלית.

מבחן הסימן נקרא כך כיוון שהוא דורש הגדרת סימן לכל תצפית:

$(+)$ – אם מצב X גבוה ממצב Y.

$(-)$ – אם מצב Y גבוה ממצב X.

(0) – אין הבדל בין המצבים.

במבחן הסימן נתעלם מהפרשים שהם 0, ולכן נסמן את מספר ההפרשים האפקטיביים (השונים מאפס) ב- n^*.

תחת השערת האפס נאמר שהסיכוי לקבל הפרש חיובי $(p+)$ שווה לסיכוי לקבל הפרש שלילי $(p-)$.

השערות המבחן:

$$H_0: P_+ = 0.5 \quad H_1: P_+ \neq,<,> 0.5 \quad \textbf{או} \quad H_0: P_- = 0.5 \quad H_1: P_- \neq,<,> 0.5$$

נסמן ב $n(+)$ או ב S_+ את מספר התצפיות שקיבלו את הערך (+), ובאופן דומה:

נסמן ב $n(-)$ או ב S_- את מספר התצפיות שקיבלו את הערך (–).

ניתן לומר שבהנחת השערת האפס: $n(+) \setminus n(-) \sim B(n^*, 0.5)$.

נחשב את PV על סמך תוצאות המדגם בעזרת ההתפלגות הבינומית כך שאם $PV \leq \alpha$ נדחה את השערת האפס.

במבחן הסימן אין התייחסות לגודל הפער בתצפיות אלא רק את כיוון ההבדל.

אם התנאים לקירוב נורמלי מתקיימים ניתן להמיר את ההתפלגות הבינומית להתפלגות נורמלית:

אם: $n^* \cdot 0.5 \geq 5$

אז: $S_\pm \sim N\left(n^* \cdot \frac{1}{2}, n^* \cdot \frac{1}{4}\right)$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

קופות החולים טוענות כי רכישת תרופות שאינן דורשות מרשם רופא, הינן זולות יותר אצלן מאשר מברשתות הפארם. דגמו 11 תרופות ובדקו את מחירן בבית המרקחת של קופות החולים וברשת הפארם. המחיר המוצג הינו עבור קפסולה בודדת. בדקו ברמת מובהקות של 5% באמצעות מבחן הסימן.

שם התרופה	קופת חולים	פארם
אדוויל	1.2	1.5
אקמול	2.6	2.6
אופטלגין	0.9	1.4
פוסטינור	3.5	3.2
סטרפסיל	1.1	1.4
נורפן	1.7	1.8
לורסטין	0.8	1.1
קולדקס	1.5	2
אלרגיז	2	2.8
נוסידקס	2	2.5
קורמיר	3	3.3

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) רוצים לבדוק את הטענה שהציונים במבחן בסטטיסטיקה ב גבוהים מאשר בסטטיסטיקה א. נלקחו 10 סטודנטים שסיימו את סטטיסטיקה ב. עבור כל סטודנט נבדק מה הציון בסטטיסטיקה א ומה הציון בסטטיסטיקה ב. להלן התוצאות שהתקבלו:

א	62	74	68	94	82	67	65	84	78	80
ב	70	80	70	90	77	67	80	86	79	82

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% באמצעות מבחן הסימן.

ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם יוחלט לתת פקטור של 2 נקודות לכל הסטודנטים בשני המועדים?

2) מעוניינים לבדוק האם ההוצאות על "ג'אנק פוד" בקרב הסטודנטים רבות יותר בזמן הלימודים לעומת ימי החופשה. נדגמו 15 סטודנטים מקריים, אצל 13 ההוצאות בתקופת הלימודים היו גבוהות יותר מימיי החופשה ואצל 2 נמוכות יותר. מה מסקנתך בר"מ של 0.05?

3) מעוניינים לבדוק האם סם מסוים משפיע על לחץ הדם. נלקחו 24 אנשים אשר נמדד להם לחץ הדם לאחר מכן ניתן להם הסם ושוב מדדו להם את לחץ הדם. לחמישה אנשים לחץ הדם לא השתנה ל 15 אנשים לחץ הדם עלה וליתר לחץ הדם ירד אחרי לקיחת הסם. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

4) במדגם שנעשה על 15 משפחות השוו את רמת הביטחון העצמי של הבכור במשפחה לעומת הצעיר שבמשפחה. תוצאות המדגם הראו שאצל 7 משפחות רמת הביטחון העצמי של הבכור הייתה גבוהה יותר, אצל 3 משפחות רמת הביטחון העצמי של הצעיר הייתה גבוהה יותר ואצל 5 משפחות לא נמצא הבדל בין האחים מבחינת רמת הביטחון העצמי. טענת החוקר הייתה שבמשפחות לבכור ביטחון עצמי גבוה מזה של הצעיר במשפחה.

א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה יוחלט לקבל את טענת החוקר?

ב. רמת הביטחון הוערכה על ידי פסיכולוג זוטר. פסיכולוג בכיר ביצע הערכה מחודשת וקבע שלמשפחה אחת במדגם הייתה הערכה שגויה: הפסיכולוג הזוטר קבע שלצעיר במשפחה יש ביטחון עצמי יותר גבוה למרות שלאח הבכור יש ביטחון עצמי יותר גבוה במשפחה הזו. מה יקרה לרמת המובהקות המינימלית שחושבה בשאלה הקודמת?

5) איזה מהטענות הבאות נכונות?

א. $n(+)+n(-)=n^*$.

ב. $n(+)+n(-)=n$.

ג. $n(+)=n(-)$.

ד. $n(+)-n(-)=n^*$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות

1) א. לא נדחה H_0. ב. לא תשתנה המסקנה.

2) נדחה H_0.

3) נדחה H_0.

4) א. 0.172 ב. תקטן.

5) א'.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

מבחן ווילקוקסון למדגמים מזווגים (על ידי שימוש בקירוב הנורמלי) – רקע

מתי נשתמש במבחן זה?

מבחן זה לא דורש הנחה של התפלגות נורמלית, אולם דורש ערכים מספריים המאפשרים חישוב הפרש בין ערכי X לערכי Y. מבחן זה הוא הגרסה הלא פרמטרית למבחן T למדגמים מזווג. נשתמש במבחן זה שיש משתנה כמותי שאינו מתפלג נורמלית או שיש משתנה מסולם סדר במדגם מזווג.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

שני קונדיטורים מתחרים על מקום עבודה. נתנו לשניהם להכין 8 מאפים שונים כאשר כל אחד מהמאפים נאפה על ידי שניהם. בסופו של דבר בעל הקונדיטוריה נתן ציון לכל אחד מהאופים בעבור כל אחד מהמאפים.
להלן הציונים שהתקבלו, ורוצים לבדוק את הטענה שאופה א טוב יותר מאופה ב.

אופה א	אופה ב
10	9
9	8
7	7
8	9
9	6
10	6
7	5
8	4

א. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?

ב. מהן השערות המחקר?

חישוב סטטיסטי המבחן:

1. נחשב את ההפרשים D_i לכל תצפית.
2. נוציא מהמדגם את כל התצפיות עם ההפרשים ששווים ל-0.
3. נדרג את ההפרשים הנותרים מהקטן אל הגדול בלי להתייחס לסימן ההפרש, כלומר מדרגים את הערכים המוחלטים של ההפרשים. הפרשים זהים מקבלים דרגה זהה שהיא הדרגה הממוצעת של המקומות שהם תופסים.
4. מסכמים את הדרגות של ההפרשים החיוביים $(R+)$ ואת הדרגות של ההפרשים השליליים $(R-)$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה (פתרון בהקלטה):

חשבו את W על סמך תוצאות המדגם.

אופה א	אופה ב
10	9
9	8
7	7
8	9
9	6
10	6
7	5
8	4

מתקיים תמיד ש: $R_+ + R_- = \frac{n^*(n^*+1)}{2}$.

כמו כן, ניתן להגיד שהתוחלת והשונות של הסטטיסטיים הללו הם:

$$\mu_{R_\pm} = \frac{n^*(n^*+1)}{4} \qquad \sigma^2_{R_\pm} = \frac{n^*(n^*+1)(2n^*+1)}{24}$$

אם המדגם מספיק גדול, ניתן לבצע קירוב נורמלי לסטטיסטיים אלה באופן הבא:

$$R_\pm \sim N\left(\frac{n^*(n^*+1)}{4}, \frac{n^*(n^*+1)(2n^*+1)}{24}\right)$$

$$Z_\pm = \frac{R_\pm - \mu_{R_\pm}}{\sqrt{\sigma^2_{R_\pm}}} \sim N(0,1)$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

א. מהי מובהקות התוצאה של מבחן זה?

ב. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות

1) נדגמו 8 לקוחות שקיבלו שירות ממוקד טלפוני. לקוחות אלה נתבקשו לתת הערכה על יעלות השירות ועל האדיבות שבשירות. הציונים ניתנו בסקאלה מ-1 (הערכה הנמוכה) עד 10 (הערכה הגבוהה ביותר). להלן התוצאות שהתקבלו:

X	הערכה על יעילות השירות	7	8	4	3	2	5	7	5
Y	הערכה על אדיבות השירות	8	7	7	6	8	10	7	4

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין הערכה על יעילות השירות להערכה על אדיבות השירות?

2) סטודנטים נתבקשו לתת חוות דעתם על רמת הקושי של הקורס (סקאלה של 1-5 כאשר 5=קשה ביותר) ועל רמת הקושי של הבחינות באותה סקאלה. הסטודנטים טוענים שהבחינה הייתה ברמה גבוהה יותר מהרמה של הקורס. להלן תוצאות המדגם:

1-קושי קורס	4	3	2	4	3	2	1	5	4
2-קושי בחינה	4	4	5	3	5	5	5	3	2

בדקו ברמת מובהקות של 5% את טענת הסטודנטים.

3) רוצים לבדוק את הטענה שהציונים במבחן בסטטיסטיקה ב גבוהים מאשר בסטטיסטיקה א. נלקחו 10 סטודנטים שסיימו את סטטיסטיקה ב. עבור כל סטודנט נבדק מה הציון בסטטיסטיקה א ומה הציון בסטטיסטיקה ב. להלן התוצאות שהתקבלו:

א	62	74	68	94	82	67	65	84	78	80
ב	70	80	80	90	77	67	80	86	79	82

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% באמצעות מבחן ווילקוקסון.

ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם יוחלט לתת פקטור של 2 נקודות לכל הסטודנטים בשני המועדים?

ג. כיצד הייתה משתנה התשובה אם מסתבר שנפלה טעות ועבור הסטודנט הראשון ברשימה יש להחליף בנתונים את הציון של סטטיסטיקה ב עם סטטיסטיקה א?

תשובות סופיות

1) לא נדחה H_0.

2) לא נדחה H_0.

3) א. לא נדחה H_0. ב. לא משתנה. ג. לא משתנה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל