

שיטות מתקדמות ויישומים סטטיסטיים



$$\{\sqrt{x}\}^2$$



תוכן העניינים

1	1. הסקה סטטיסטית - הקדמה
4	2. התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי
15	3. מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים
21	4. בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים
32	5. בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגמים מזווגים
42	6. מבחני חי בריבוע
55	7. מבחנים אפרמטרים למדגמים מזווגים
68	8. מבחנים אפרמטריים למדגמים בלתי תלויים
79	9. ניתוח שונות חד כיוונית
88	10. ניתוח שונות דו כיווני
124	11. מקדם המתאם (מדד קשר) הלינארי ומובהקותו
151	12. רגרסיה
154	13. מדדי קשר-רגרסיה -שונות מוסברת ושונות לא מוסברת

שיטות מתקדמות ויישומים סטטיסטיים

פרק 1 - הסקה סטטיסטית - הקדמה

תוכן העניינים

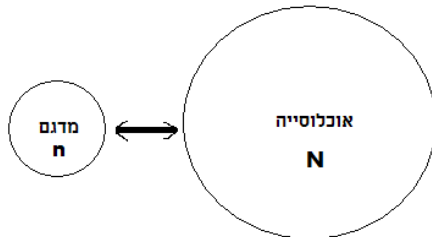
1. כללי..... 1

הסקה סטטיסטית – הקדמה:

רקע:

אוכלוסייה:

קבוצה שאליה מפנים שאלה מחקרית. למשל, חברת תרופות שמעוניינת לפתח תרופה למחלת הסוכרת מתעניינת באוכלוסיית חולי הסוכרת בעולם.



מדגם:

חלק מתוך האוכלוסייה. למשל, אם נדגום באקראי 10 אנשים מתוך חולי הסוכרת אז זהו מדגם מתוך אוכלוסיית חולי הסוכרת.

במקרים רבים אין אפשרות לחקור את כל האוכלוסייה כיוון שאין גישה לכולה, היא גדולה מידי, אנו מוגבלים בזמן ובאמצעים טכניים ולכן מבצעים מדגם במטרה לבצע הסקה סטטיסטית מהמדגם לאוכלוסייה. הדגימה בקורס תהיה דגימה מקרית - הכוונה לדגימה שבה לכל תצפית באוכלוסייה יש את אותו סיכוי להיכלל במדגם.

סטטיסטי:

גודל המחושב על המדגם.

פרמטר:

גודל המתאר את האוכלוסייה.

הסימונים לפרמטר וסטטיסטי הם שונים:

פרמטר (אוכלוסייה)	סטטיסטי (מדגם)	ממוצע
μ	\bar{X}	
P	\hat{p}	פרופורציה (שכיחות יחסית)

פרמטר הוא גודל קבוע גם אם אנו לא יודעים אותו סטטיסטי הוא משתנה ממדגם למדגם ולכן יש לו התפלגות הנקראת התפלגות הדגימה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

25% מאזרחי המדינה תומכים בהצעת החוק של חבר כנסת מסוים. הוחלט לדגום 200 אזרחים ומתוכם לבדוק מהו אחוז התומכים בהצעת החוק.

א. מי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מה הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

ה. מהו הסטטיסטי שמתכננים להוציא מהמדגם?

ו. האם הפרמטר או הסטטיסטי הוא משתנה מקרי?

שאלות:

- (1) מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.
- מי האוכלוסייה?
 - מה המשתנה?
 - מהם הפרמטרים?
 - מהו גודל המדגם?
- (2) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה בישוב "העוגן". נגדיר את X להיות מספר המקלטים של משפחה אקראית. מתכננים לדגום מאוכלוסייה זו 4 משפחות ולהתבונן בממוצע מספר מקלטי הטלוויזיה במדגם.
- מיהי האוכלוסייה ומהו המשתנה הנחקר?
 - מהו הסטטיסטי שיילקח מהמדגם ומה סימונו?

מספר משפחות	מספר מקלטים
50	0
250	1
350	2
300	3
50	4
סך הכול $N = 1000$	

- (3) נתון כי 20% מהשכירים במדינה הם אקדמאיים. נבחרו באקראי 10 שכירים באותה אוכלוסייה ומתכננים לפרסם את מספר האקדמאיים שנדגמו.
- מיהי האוכלוסייה?
 - מה המשתנה באוכלוסייה?
 - מהם הפרמטרים?
 - מהו הסטטיסטי?

תשובות סופיות:

- (1) א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון. ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15. ד. 2.
- (2) א. האוכלוסייה: 1000 משפחות בישוב העוגן, המשתנה הנחקר: מס' מקלטים. ב. \bar{X} = ממוצע מדגם.
- (3) א. השכירים במדינה. ב. השכלה: אקדמאי, לא אקדמאי. ג. שיעור ההצלחות באוכלוסייה: 0.2. ג. מס' האקדמאים במדגם.

שיטות מתקדמות ויישומים סטטיסטיים

פרק 2 - התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי

תוכן העניינים

1. התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי 4
2. התפלגות סכום תצפיות בלתי תלויות ומשפט הגבול המרכזי 12

התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי:

רקע:

בפרק זה נדון בהתפלגות של ממוצע המדגם: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$.

מכיוון שממדגם למדגם אנו יכולים לקבל ממוצע מדגם שונה, אזי ממוצע המדגם הוא משתנה מקרי ויש לו התפלגות.

גדלים המתארים התפלגות כלשהי או אוכלוסייה כלשהי נקראים פרמטרים.

להלן רשימה של פרמטרים החשובים לפרק זה:

ממוצע האוכלוסייה נסמן ב- μ (נקרא גם תוחלת).

שונות אוכלוסייה נסמן ב- σ^2 .

סטיית תקן של אוכלוסייה: σ .

תכונות התפלגות:

ממוצע כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לממוצע האוכלוסייה: $E(\bar{x}) = \mu_x = \mu$.

שונות כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לשונות האוכלוסייה מחולק ב- n .

תכונה זו נכונה רק במדגם מקרי: $V(\bar{x}) = \sigma_x^2 = \frac{\sigma^2}{n}$.

יש יחס הפוך בין גודל המדגם לבין שונות ממוצעי המדגם.

אם נוציא שורש לשונות נקבל סטיית תקן של ממוצע המדגם שנקראת גם

טעות תקן: $\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

השכר הממוצע במשק הינו 9000 ₪ עם סטיית תקן של 4000. דגמו באקראי 25 עובדים.

א. מיהי אוכלוסיית המחקר? מהו המשתנה הנחקר?

ב. מהם הפרמטרים של האוכלוסייה?

ג. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?

דגימה מהתפלגות נורמאלית:

אם נדגום מתוך אוכלוסייה שהמשתנה בה מתפלג נורמאלית עם ממוצע μ ושוונות σ^2 .

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

ממוצע המדגם גם יתפלג נורמאלית:

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם. מה ההסתברות שבמדגם של 4 תינוקות אקראיים בעת הולדתם המשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-3.5 ק"ג?

משפט הגבול המרכזי:

אם אוכלוסייה מתפלגת כלשהו עם ממוצע μ ושוונות σ^2 אזי עבור מדגם מספיק

$$\bar{x} \rightsquigarrow N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad (n \geq 30)$$

ממוצע המדגם מתפלג בקירוב נורמאלי:

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם וסטיית תקן של 4 גרם. דגמו מקו הייצור 36 חפיסות שוקולד אקראיות. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד שנדגמו יהיה מתחת ל-102 גרם?

שאלות:

- (1) מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.
- מיהי האוכלוסייה?
 - מה המשתנה?
 - מהם הפרמטרים?
 - מהו גודל המדגם?
 - מהו תוחלת ממוצע המדגם?
 - מהי טעות התקן?

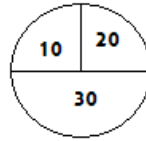
- (2) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה בישוב מסוים:

מספר משפחות	מספר מקלטים
500	0
2500	1
3500	2
3000	3
500	4
סך הכול $N = 10000$	

- בנו את פונקציית ההסתברות של X .
 - חשבו את התוחלת, השונות וסטיית התקן של X .
 - אם נדגום 4 משפחות מהישוב עם החזרה מה תהיה התוחלת, מהי השונות ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?
- (3) אם נטיל קובייה פעמיים ונתבונן בממוצע התוצאות שיתקבלו, מה תהיה התוחלת ומה תהיה סטיית התקן של ממוצע זה?
- (4) משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.
- מה ההסתברות שתינוק אקראי בעת הלידה ישקול פחות מ-3800 גרם? נתון כי ביום מסוים נולדו 4 תינוקות.
 - מה ההסתברות שהמשקל הממוצע שלהם יעלה על 4 ק"ג?
 - מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-2.5 ק"ג?
 - מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה רחוק מהתוחלת בלא יותר מ-50 גרם?
 - הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם היה מדובר על יותר מ-4 תינוקות?

- (5) הגובה של המתגייסים לצה"ל מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 175 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ. ביום מסוים התגייסו 16 חיילים.
- מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה לפחות 190 ס"מ?
 - מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה בדיוק 180 ס"מ?
 - מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יסטה מתוחלת הגבהים בפחות מ-5 ס"מ?
 - מהו הגובה שבהסתברות של 90% הגובה הממוצע של המדגם יהיה נמוך ממנו?
- (6) הזמן הממוצע שלוקח לאדם להגיע לעבודתו 30 דקות עם שונות של 16 דקות רבועות. האדם נוסע לעבודה במשך שבוע 5 פעמים.
- לצורך הפתרון הניחו שזמן הנסיעה לעבודה מתפלג נורמאלית.
- מה ההסתברות שבמשך שבוע משך הנסיעה הממוצע יהיה מעל 33 דקות?
 - מהו הזמן שבהסתברות של 90% ממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה גבוה ממנו?
 - מה ההסתברות שממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה מרוחק מ-30 דקות בלפחות 2 דקות?
 - כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם האדם היה נוסע לעבודה 6 פעמים בשבוע?
- (7) נפח היין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 סמ"ק וסטיית תקן של 10 סמ"ק.
- בארגו 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגו יהיה בדיוק 755 סמ"ק?
 - בארגו 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגו יהיה יותר מ-755 סמ"ק?
 - בארגו 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגו יהיה לפחות 755 סמ"ק?
 - בקבוקי היין שבארגו נמזגים לקערה עם קיבולת של שלושה ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהקערה?
- (8) משתנה מתפלג נורמאלית עם תוחלת 80 וסטיית תקן 4.
- מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה כאשר גודל המדגם הוא 9?
 - מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה שגודל המדגם הוא 16?
 - הסבר את ההבדל בתשובות של שני הסעיפים.

9) בקזינו ישנה רולטה. על הרולטה רשומים המס' הבאים כמראה בשרטוט:



- אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה.
- בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד.
 - מה התוחלת ומה השונות של סכום הזכייה?
 - אם האדם ישחק את המשחק 5 פעמים מה התוחלת ומה השונות של ממוצע סכום הזכייה בחמשת המשחקים?
 - אם האדם משחק את המשחק 50 פעם מה ההסתברות שבסה"כ יזכה ב-1050 ₪ ומעלה?

10) לפי הערכות הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה השכר הממוצע במשק הוא 8000 ₪ עם סטיית תקן של 3000 ₪. מה ההסתברות שבמדגם מקרי של 100 עובדים השכר הממוצע יהיה יותר מ-8500 ₪?

11) קובייה הוטלה 50 פעמים. מה ההסתברות שהממוצע של התוצאות יהיה לפחות 3.72?

- 12) אורך צינור שמפעל מייצר הינו עם ממוצע של 70 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ.
- נלקחו באקראי 100 מוטות, מה ההסתברות שממוצע אורך המוטות יהיה בין 68 ל-78 ס"מ?
 - יש לחבר 2 בניינים באמצעות מוטות. המרחק בין שני הבניינים הינו 7200 ס"מ. מה ההסתברות ש-100 המוטות יספיקו למלאכה?
 - מה צריך להיות גודל המדגם המינימאלי, כדי שבהסתברות של 5% ממוצע המדגם יהיה קטן מ-69 ס"מ. היעזרו במשפט הגבול המרכזי.

13) נתון משתנה מקרי בדיד בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

2	4	6	8	X
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$P(X)$

מתוך התפלגות זו נלקח מדגם מקרי בגודל 50. מה הסיכוי שממוצע המדגם יהיה קטן מ-5?

14 נתון ש- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. דגמו 5 תצפיות מאותה התפלגות והתבוננו במוצע

המדגם \bar{X} . לכן: $P(\bar{X} > \mu)$ יהיה (בחרו בתשובה הנכונה):

- א. 0.
- ב. 0.5.
- ג. 1.
- ד. לא ניתן לדעת.

15 נתון ש- X מתפלג כלשהו עם תוחלת μ ושונויות σ^2 .

החליטו לבצע מדגם בגודל 200 מתוך ההפלגות הנתונה לפי משפט הגבול המרכזי מתקיים (בחרו בתשובה הנכונה):

א. $X \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$.

ב. $\mu \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$.

ג. $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$.

ד. $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$.

16 נתון ש- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. אם נדגום n תצפיות מתוך ההתפלגות ונגדיר: $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$,

אזי (בחרו בתשובה הנכונה):

א. μ ו- \bar{X} יהיו משתנים מקריים.

ב. μ יהיה משתנה מקרי ו- \bar{X} קבוע.

ג. \bar{X} יהיה משתנה מקרי ו- μ קבוע.

ד. μ ו- \bar{X} יהיו קבועים.

17 משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם. החפיסות נארזות

בקרטון המכיל 36 חפיסות שוקולד אקראיות. ההסתברות שהמשקל הממוצע

של חפיסות השוקולד בקרטון יהיה מעל 99 גרם הוא 0.9932.

א. מהי סטיית התקן של משקל חפיסת שוקולד בודדת?

ב. מה הסיכוי שמתוך 4 קרטונים בדיוק קרטון אחד יהיה עם משקל ממוצע

לחפיסה הנמוך מ-100 גרם?

18 משתנה מקרי כלשהו מתפלג עם סטיית תקן של 20.
מה הסיכוי שאם נדגום 100 תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות אזי ממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בפחות מ-2?

תשובות סופיות:

- (1) א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון.
 ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15.
 ד. 2.
 ה. 78.
 ו. 10.6.

(2) א. להלן טבלה:

4	3	2	1	0	X
0.05	0.3	0.35	0.25	0.05	P(X)

ב. $\sigma = 0.973$, $\sigma^2 = 0.9475$, $\mu = 2.05$

ג. $\sigma(\bar{X}) = 0.486$, $\sigma_{\bar{x}}^2 = 0.2369$, $\mu_{\bar{x}} = 2.05$

(3) $\sigma(\bar{X}) = 1.21$, $\mu_{\bar{x}} = 3.5$

- (4) א. 0.8413 ב. 0.0013 ג. 0 ד. 0.1974
- (5) א. 0 ב. 0 ג. 0.9544 ד. 0.178.205
- (6) א. 0.0465 ב. 27.71 ג. 0.2628 ד. התשובה הייתה קטנה.
- (7) א. 0 ב. 0.1587 ג. 0.1587 ד. 0.5
- (8) א. 0.5468 ב. 0.6826
- (9) א. להלן טבלה:

30	20	10	X
0.5	0.25	0.25	P(X)

- א. התוחלת: 22.5, השונות: 68.75.
 ב. התוחלת: 22.5, השונות: 13.75.
 ג. התוחלת: 22.5, השונות: 13.75.
- ד. 0.8997
- (10) 0.0475
- (11) 0.1814
- (12) א. 0.9772 ב. 0.0228 ג. 0.271
- (13) 0.5
- (14) ב'
- (15) ד'
- (16) ג'
- (17) א. 2.429 ב. 0.25
- (18) 0.6826

התפלגות סכום תצפיות בלתי תלויות ומשפט הגבול המרכזי:

רקע:

כעת נדון בסטטיסטי המבטא את סכום התצפיות במדגם: $T = \sum_{i=1}^n X_i$.
 כאשר כל התצפיות נדגמו באקראי מאותה אוכלוסייה, כלומר, היו: X_1, \dots, X_n -
 משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות זהה שתוחלתה μ ושוונתה σ^2 אזי:
 התוחלת והשוונות של סכום התצפיות: $E(T) = n\mu$, $V(T) = n\sigma^2$.

דגימה מתוך התפלגות נורמלית:

אם: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, אזי: $Z = \frac{T - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$, $T \sim N(n\mu, n\sigma^2)$

משפט הגבול המרכזי:

אם X מתפלג כלשהו וידוע כי: $E(X) = \mu$, $V(X) = \sigma^2$, אזי עבור מדגם מספיק גדול (לפחות 30): $T \rightsquigarrow N(n\mu, n\sigma^2)$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

- בעיר מסוימת המשכורת הממוצעת של עובד הינה 8000 ₪. עם סטיית תקן של 2000 ₪. נדגמו 100 עובדים מהעיר שמפקידים את משכורותיהם לסניף בנק.
- מה התוחלת וסטיית התקן של סך המשכורות שיופקדו לסניף הבנק על ידי העובדים הללו?
 - מה ההסתברות שלסניף יופקד פחות מ-780 אלף ₪ ע"י אותם עובדים?

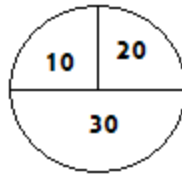
שאלות:

- (1) המשקל באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 60 ק"ג וסטיית תקן של 10 ק"ג.
- א. מה הסיכוי שאדם אקראי מהאוכלוסייה ישקול מתחת ל-65 ק"ג?
 ב. מה הסיכוי שהמשקל הממוצע של 4 אנשים אקראיים יהיה מתחת ל-65 ק"ג?
 ג. מה הסיכוי שהמשקל הכולל של 4 אנשים אקראיים יהיה מתחת ל-240 ק"ג?
- (2) נפח יין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 מ"ל וסטיית תקן של 20 מ"ל. אדם קנה מארז של 4 בקבוקי יין.
- א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של נפח היין במארז?
 ב. את היין שבמארז האדם מזג לכלי שקיבולתו 3.1 ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהכלי?
 ג. אם לא היה נתון שנפח היין מתפלג נורמאלית. האם התשובה לסעיף א' הייתה משתנה? האם התשובה לסעיף ב' הייתה משתנה?
- (3) בספר כלשהו 500 עמודים. קצב הקריאה הממוצע הוא עמוד אחד ב-4 דקות עם סטיית תקן של 1 דקות.
- א. מה ההסתברות לסיים את הפרק הראשון (40 עמודים) תוך שעתיים וחצי?
 ב. מהו האחוזון ה-95 לזמן סיום קריאת הספר?
- (4) במגדל נבנו 40 יחידות דיור. כמו כן נבנו 135 מקומות חנייה לבניין. להלן פונקציית ההסתברות של מספר המכוניות ליחידת דיור:

x	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0.1	0.2	0.3	0.25	0.15

- נניח שמספר המכוניות ליחידת דיור בלתי תליות זו בזו ועם אותה פונקציית הסתברות לכל יחידת דיור (אין צורך בתיקון רציפות).
- א. מהי ההסתברות שיהיה מקום בחניון המגדל לכל מכוניות הבניין?
 ב. בהינתן ויש מקום במגדל לכל המכוניות, מה הסיכוי שבפועל מספר המכוניות נמוך מ-130?

5) בקזינו ישנה רולטה עליה מסומנים המספרים הבאים :



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום.

- א. אם האדם משחק 50 פעמים, מה ההסתברות שבסך הכול יזכה בסכום של 1050 ₪ ומעלה?
- ב. האדם מגיע בכל יום לקזינו ומשחק 50 פעם, עד אשר מגיע היום בו הוא יזכה ב-1050 ₪ ומעלה. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הימים שיבלה בקזינו?

תשובות סופיות:

- (1) א. 0.6915 ב. 0.8413 ג. 0.5
- (2) א. תוחלת 3000 מ"ל, סטיית תקן 40 מ"ל. ב. 0.0062
- ג. סעיף א' - לא משתנה, סעיף ב' - לא פתיר, התבסס על התפלגות נורמלית.
- (3) א. 0.0571 ב. 2036.8
- (4) א. 0.883 ב. 0.7949
- (5) א. 0.8997 ב. תוחלת 1.111, שונות 0.1239

שיטות מתקדמות ויישומים סטטיסטיים

פרק 3 - מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים

תוכן העניינים

15	1. הקדמה
19	2. סוגי טעויות

הקדמה:

רקע:

תהליך של בדיקת השערות הוא תהליך מאד נפוץ בעולם הסטטיסטיקה. בבדיקת השערות על פרמטרים נעבוד לפי השלבים הבאים:

שלב א: נוהה את הפרמטר הנחקר.

שלב ב: נרשום את השערות המחקר.

השערת האפס המסומנות ב- H_0 .

בדרך כלל השערת האפס מסמלת את אשר היה מקובל עד עכשיו, את השגרה, הנורמה.

השערה אלטרנטיבית (השערת המחקר) המסומנת ב- H_1 .

ההשערה האלטרנטיבית מסמלת את החדשנות בעצם ההשערה האלטרנטיבית מדברת על הסיבה שהמחקר נעשה היא שאלת המחקר.

שלב ג: נבדוק האם התנאים לביצוע התהליך מתקיימים ונניח הנחות במידת הצורך.

שלב ד: נרשום את כלל ההכרעה. בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שנקרא כלל הכרעה. הכלל יוצר אזורי שנקראים:

1. **אזור דחייה:**

דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.

2. **אזור קבלה:**

קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה. כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי. אזור הדחייה מוכתב על ידי סיכון שלוקח החוקר מראש

שנקרא רמת מובהקות ומסומן ב- α .

שלב ה: בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולחשב את הסטטיסטי המתאים ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה.

שלב ו: להסיק מסקנה בהתאם לתוצאות המדגם.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום לידתם בישראל 3300 גרם. משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון. להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$$n = 20, \bar{X} = 3120, S = 280$$

- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
- ב. מה המשתנה הנחקר?
- ג. מה הפרמטר הנחקר?
- ד. מהן השערות המחקר?

שאלות:

בשאלות הבאות, ענו על הסעיפים הבאים:

- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
- ב. מה המשתנה הנחקר?
- ג. מה הפרמטר הנחקר?
- ד. מהן השערות המחקר?

- (1) ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות. מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים. ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5.
- (2) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25.
- (3) במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה למשפטים היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. מחקר מעוניין לבדוק האם השנה מקשים על הקבלה לפקולטה למשפטים.
- (4) בחודש ינואר השנה פורסם שאחוז האבטלה במשק הוא 8% במדגם עכשווי התקבל שמתוך 200 אנשים 6.5% מובטלים. רוצים לבדוק ברמת מובהקות של 5% האם כיום אחוז האבטלה הוא כמו בתחילת השנה.

תשובות סופיות:

- (1) א. נבחנים בבגרות באנגלית.
 ב. ציון.
 ג. ממוצע הציונים בשיטת לימוד חדשה.
 ד. $H_0: \mu = 72$
 $H_1: \mu > 72$
- (2) א. משקאות בבקבוק של חברה מסוימת.
 ב. נפח משקה בסמ"ק.
 ג. ממוצע נפח המשקה בבקבוק.
 ד. $H_0: \mu = 500$
 $H_1: \mu < 500$
- (3) א. מועמדים לפקולטה למשפטים.
 ב. משתנה דיכוטומי (התקבל, לא התקבל).
 ג. אחוז הקבלה.
 ד. $H_0: p = 0.25$
 $H_1: p < 0.25$
- (4) א. אזרחים בוגרים במשק.
 ב. משתנה דיכוטומי (מובטל, עובד).
 ג. אחוז האבטלה כיום.
 ד. $H_0: p = 0.08$
 $H_1: p \neq 0.08$

סוגי טעויות:

רקע:

בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שניקרא כלל הכרעה.
 הכלל יוצר אזורי שנקראים:

1. אזור דחייה – דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.
2. אזור קבלה – קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה.

כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי.
 בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה וכך להגיע למסקנה – המסקנה היא בעירבון מוגבל כיוון שהיא תלויה בכלל ההכרעה ובתוצאות המדגם. אם נשנה את כלל ההכרעה אז אנחנו יכולים לקבל מסקנה אחרת. אם נבצע מדגם חדש אז אנחנו עלולים לקבל תוצאה אחרת. לכן יתכנו טעויות במסקנות שלנו:

		הכרעה	
		H_0	H_1
מציאות	H_0	אין טעות	טעות מסוג 1
	H_1	טעות מסוג 2	אין טעות

הגדרת הטעויות:

טעות מסוג ראשון: להכריע לדחות את H_0 למרות שבמציאות H_0 נכונה.

טעות מסוג שני: להכריע לקבל את H_0 למרות שבמציאות H_1 נכונה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

אדם חשוד בביצוע עבירה ונתבע בבית המשפט.
 אילו סוגי טעויות אפשריות בהכרעת הדין?

שאלות:

- (1) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25. בסופו של דבר הוחלט להכריע לטובת חברת המשקאות.
- רשמו את השערות המחקר.
 - מה מסקנת המחקר?
 - איזו סוג טעות יתכן וביצעו במחקר?
- (2) במחקר על פרמטר מסוים הוחלט בסופו של דבר לדחות את השערת האפס.
- האם ניתן לדעת אם בוצע טעות במחקר?
 - מה סוג הטעות האפשרית?
- (3) לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. ישנה טענה שכיום ממוצע מספר הילדים במשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות. במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה. על סמך תוצאות המדגם נקבע שלא ניתן לקבוע שבאופן מובהק תוחלת מספר הילדים למשפחה קטנה כיום.
- מהי אוכלוסיית המחקר?
 - מה המשתנה הנחקר?
 - מה הפרמטר הנחקר?
 - מה השערות המחקר?
 - מה מסקנת המחקר?
 - מהי סוג הטעות האפשרית במחקר?

תשובות סופיות:

- (1) א. $H_0: \mu = 500$
 ב. $H_1: \mu < 500$
 ג. טעות מסוג שני.
- (2) א. לא ניתן לדעת.
 ב. טעות מסוג ראשון.
 ג. משפחות כיום.
- (3) א. תוחלת מספר הילדים למשפחה כיום.
 ב. מס' הילדים.
 ג. לא לדחות את H_0 . ו. טעות מסוג שני.
- ד. $H_0: \mu = 2.3$
 $H_1: \mu < 2.3$

שיטות מתקדמות ויישומים סטטיסטיים

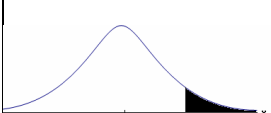
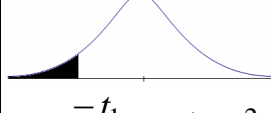
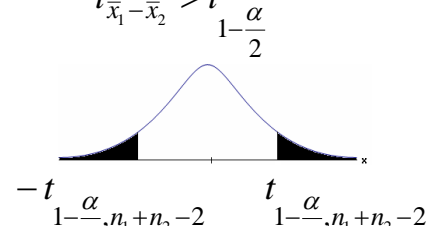
פרק 4 - בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

תוכן העניינים

1. כששונויות האוכלוסיה לא ידועות ומניחים שהן שוות. 21
2. ניתוח פלטים. 25

בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

כששונויות האוכלוסייה לא ידועות ומניחים שהן שוות – רקע

$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 > c$	$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 < c$	$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 \neq c$	השערת האפס: השערה אלטרנטיבית: תנאים:
$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$	$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$	$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}$ או $t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}$	1. מדגמים בלתי תלויים 2. σ_1, σ_2 לא ידועות אך שוות 3. המשתנים בכל אוכלוסייה מתפלגים נורמלית
 $t_{1-\alpha, n_1+n_2-2}$ דוחים את H_0	 $-t_{1-\alpha, n_1+n_2-2}$ דוחים את H_0	 $-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}$ דוחים את H_0	אזור הדחייה של H_0

$$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - c}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}}$$

סטטיסטי המבחן:

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

השונויות המשוקללת:

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

נדחה H_0 אם מתקיים:	
$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$ <p style="text-align: center;">או</p> $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$
$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$	

דוגמה (פתרון בהקלטה):

חברה המייצרת מוצרי בנייה טוענת שפיתחה סגסוגת (תערובת מתכות) שטמפרטורת ההתכה שלה גבוהה משמעותית מטמפרטורת ההתכה של הסגסוגת לבנייה שמשמשים בה כיום לבניית בניינים. לצורך בדיקת טענת המחקר נדגמו 10 יחידות של מתכות מהסוג הישן ו-12 יחידות של מתכות מהסוג החדש. להלן תוצאות המדגם:

טמפרטורת ההתכה הממוצעת במתכת הישנה 1170 מעלות עם אומד חסר הטיה לשונות $S^2 = 200$.

טמפרטורת ההתכה הממוצעת במתכת החדשה 1317 מעלות עם אומד חסר הטיה לשונות $S^2 = 260$.

נניח לצורך פתרון שטמפרטורת ההתכה מתפלגת נורמאלית עם אותה שונות במתכות השונות. בדקו ברמת מובהקות של 5%.

שאלות

1) להלן נתונים של שטחי דירות מתוך דירות שנבנו בשנת 2012 ובשנת 2013 (במ"ר):

120	94	90	130	95	112	120	2012
	69	74	105	91	82	100	2013

בדקו שבשנת 2013 הייתה ירידה משמעותית בשטחי הדירות לעומת שנת 2012 עבור רמת מובהקות של 5%.
הניחו ששטחי הדירות בכל שנה מתפלגים נורמלית עם אותה שונות.

2) נדגמו 15 ישראלים ו-15 אמריקאים. כל הנדגמים נגשו למבחן IQ. להלן תוצאות המדגם:

המדינה	ישראל	ארה"ב
גודל המדגם	15	15
סכום הציונים	1560	1470
סכום ריבועי הציונים	165,390	147,560

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל של נקודה בין ישראלים לאמריקאים מבחינת ממוצע הציונים במבחן ה-IQ לטובת ישראל.
רשמו את כל ההנחות הדרושות לצורך פתרון התרגיל.

3) להלן תוצאות מדגם הבדק אורך חיים של נורות מסוג W60 ומסוג W100. אורך החיים נמדד בשעות.

100W	60W	הקבוצה
956	1007	\bar{x}
72	80	S
15	13	n

- א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W60 דולקות בממוצע יותר מאשר נורות מסוג W100. רשמו את כל ההנחות הדרושות לפתרון.
- ב. עבור איזו רמת מובהקות ניתן לקבוע שנורות מסוג W60 דולקות בממוצע יותר מאשר נורות מסוג 100?
- ג. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W60 דולקות יותר מ 1000 שעות. רשמו את כל ההנחות הדרושות.

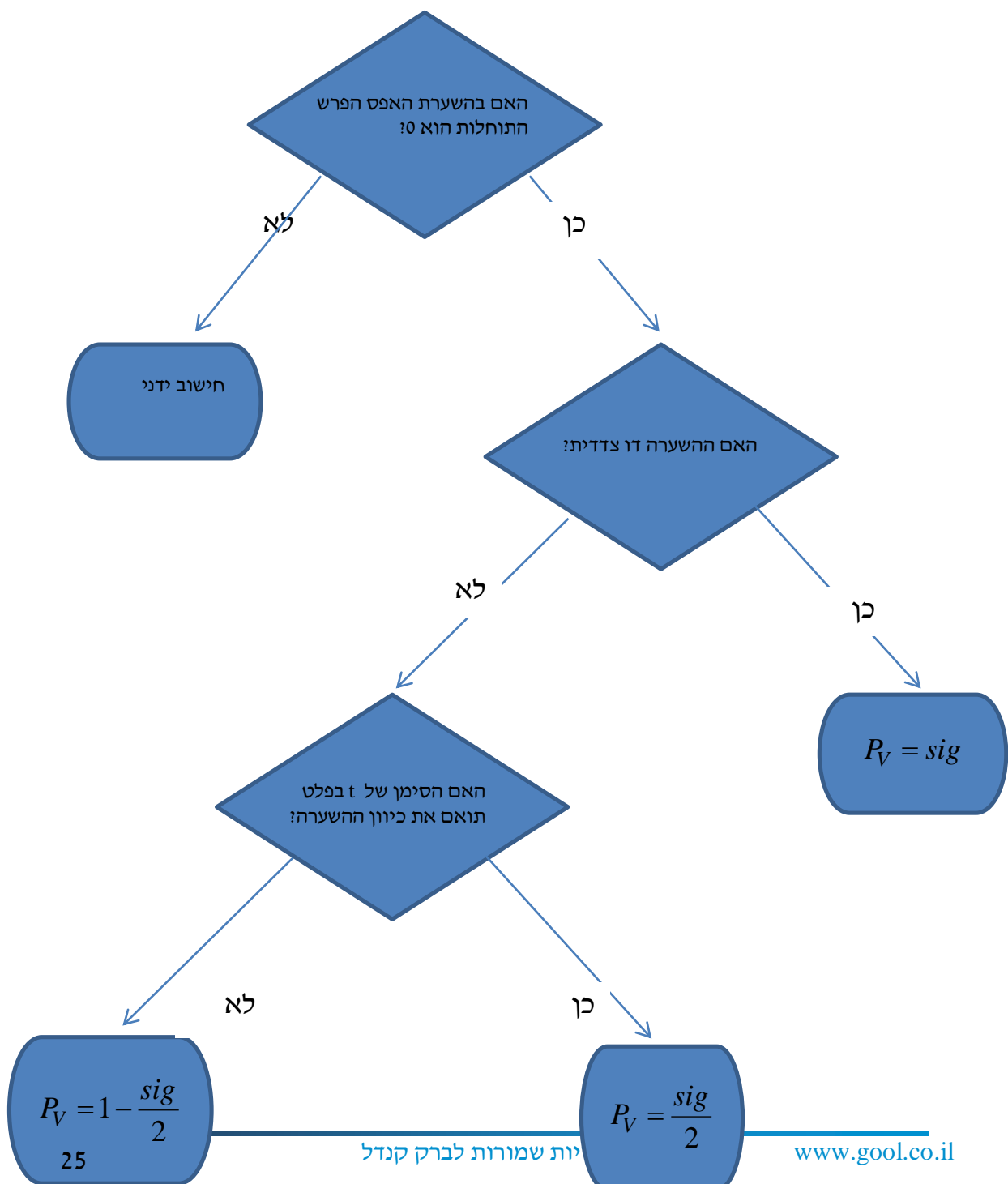
תשובות סופיות

- (1) נדחה את H_0 .
- (2) הנחות:
1. סטיות התקן שוות.
2. המשתנים מתפלגים נורמלית.
נקבל את H_0 .
- (3) א. נדחה את H_0 .
ב. רמת מובהקות של לפחות 5%.
ג. לא נדחה את H_0 .

בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

ניתוח פלטים – רקע

מובהקות התוצאה על סמך הפלט:



דוגמה (פתרון בהקלטה) :

בסקר שנערך בארה"ב בשנת 1993 נשאלו נסקרים משני אזורים שונים במדינה על מס' האחים והאחיות שלהם. להלן הפלט שהתקבל :

Group Statistics

	Region of the United States	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Number of Brothers and Sisters	North East	676	3.76	2.939	.113
	South East	410	4.05	2.993	.148

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
									Lower	Upper
Number of Brothers and Sisters	Equal variances assumed	.173	.677	-1.583	1084	.114	-.293	.185	-.657	.070
	Equal variances not assumed			-1.576	850.945	.115	-.293	.186	-.658	.072

- א. מהו המבחן הסטטיסטי שנעשה כאן?
- ב. בדוק ברמת מובהקות של 5% האם קיים שוויון שונויות בין שני האזורים?
- ג. בדוק האם קיים הבדל בין "South East" ל-"North East" ברמת מובהקות של 5% מבחינת מספר האחים והאחיות הממוצע.
- ד. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שהפרש הממוצע בין "South East" לבין "North East" חיובי?

שאלות

- 1) להלן פלט מתוכנת SPSS מתוך מחקר שבחן את רמת האופטימיות של גברים ונשים. רמת האופטימיות נמדדה בסולם ציונים של 1 עד 5.

Group Statistics

GENDER		N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
optimizm	MALE	633	2.6053	.49781	.01979
	FEMALE	568	2.5503	.48483	.02034

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
									Lower	Upper
optimizm	Equal variances assumed	.383	.536	1.935	1199	.053	.05500	.02842	-.00076	?
	Equal variances not assumed			1.938	1190.977	.053	.05500	.02838	-.00068	.11067

- א. האם ניתן להניח ששוונות האופטימיות של נשים וגברים שווה ברמת מובהקות של 5%?
- ב. ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין הנשים לגברים ברמת האופטימיות הממוצעת שלהם?
- ג. מצא את הגבול העליון של רווח הסמך המסומן בסימן שאלה בפלט. דייק עד 5 ספרות אחרי הנקודה.
- ד. בנה רווח סמך לתוחלת רמת האופטימיות של הגברים ברמת סמך של 95%.

2) פסיכולוגים טוענים שאנשים שניגשים למבחן אינטליגנציה יותר מפעם אחת נוטים לקבל ציונים גבוהים יותר. להלן הפלט שהתקבל:

Group Statistics

		N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
grade	A	9	96.8889	9.40006	3.13335
	B	11	108.4545	11.46616	3.45718

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
									Lower	Upper
grade	Equal variances assumed	.206	.656	-2.428	18	.026	-11.56566	4.76333	-21.57304	-1.55828
	Equal variances not assumed			-2.479	17.997	.023	-11.56566	4.66583	-21.36832	-1.76299

T-Test

מקרא:

A = נגשו פעם אחת.

B = נגשו יותר מפעם אחת.

- רשמו את השערות המחקר והסבירו מהו המבחן המתאים כאן.
- כיצד הייתה משתנה התשובה לסעיף הקודם אם היה מדובר על אותם אנשים שציונם נבדק פעם אחרי המבחן הראשון שעשו ופעם אחרי המבחן השני?
- האם ניתן לומר כי מידת הפיזור של ציוני אנשים הנבחנים בפעם הראשונה שונה ממידת הפיזור של ציוני האנשים אשר נבחנים בפעם השנייה. בדוק ברמת מובהקות של $\alpha = 0.05$.
- האם נכונה טענת הפסיכולוגים ברמת מובהקות של $\alpha = 0.01$.

3) כחלק ממחקר בנושא הנישואין בישראל, אחד החוקרים העלה השערה שיש הבדל בממוצע גיל הנישואין (הראשונים), בין נשים הגרות בערים מרכזיות לבין נשים הגרות בערים מרוחקות מהמרכז. לשם כך נדגמו 50 כלות מכל אחת משתי ערים עיר א'-מרכזית ועיר ב'-מרוחקת ונרשם גילן. תוצאות עיבוד הנתונים מופיעות בטבלאות שלהלן:

T-Test

Group Statistics

מקום המגורים	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
גיל הנישואין עיר א	50	24.8072	1.38978	.19654
עיר ב	50	23.0131	1.62070	.22920

Independent Samples Test

	Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means							
	F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference		
								Lower	Upper	
גיל הנישואין	Equal variances assumed	.330	.567	5.942	98	.000	1.79415	.30193	1.19497	2.39332
	Equal variances not assumed			5.942	95.772	.000	1.79415	.30193	1.19480	2.39350

- א. מהו המבחן הסטטיסטי שנעשה כאן?
 ב. מצא רווח סמך ברמת סמך של 95% להפרש בין עיר א לעיר ב מבחינת גיל הנשים הממוצע בנישואין הראשונים.
 ג. האם ניתן לומר ברמת מובהקות של 1% שנשים בערים מרכזיות מתחתנות בגיל מאוחר יותר מאשר נשים הגרות בערים מרוחקות?

4) להלן פלט של תוכנת SPSS:

T-Test

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
X	26	36.3077	13.23259	2.59513
Y	24	46.4583	20.96369	4.27920

Independent Samples Test

	Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
	F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
								Lower	Upper
Equal variances assumed	4.446	.040	-2.164	???	.044	-10.15064	???	-20.03781	-.26347
Equal variances not assumed			-2.038	38.267	.048	???	5.00462	-20.27964	-.02164

- א. השלימו את סימני השאלה בטבלה.
- ב. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שקיים הבדל בין השונות של X לזה של Y ?
- ג. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שהתוחלת של X גדולה מהתוחלת של Y ?
- ד. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שהתוחלת של X קטנה מהתוחלת של Y ?

תשובות סופיות

- (1) א. נקבל את H_0 ונכריע שיש שוויון שוניות.
 ב. נקבע שלא קיים הבדל בין נשים לגברים מבחינת האופטימיות הממוצעת.
 ג. 0.11076
 ד. $2.5665 \leq \mu \leq 2.6441$.
- (2) א. מבחן T להפרש ממוצעים במדגמים בלתי תלויים.
 ב. מבחן T למדגמים מזווגים.
 ג. נקבל את H_0 , נקבע לקיום שוויון שוניות.
 ד. נקבל את H_0 , לא נקבל את טענת הפסיכולוגים.
- (3) א. מבחן T להשוואת תוחלת במדגמים בלתי תלויים.
 ב. $1.19497 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 2.39332$ ג. כן.
- (4) א. 10.15, 4.69, -48
 ב. 0.04
 ג. 0.978
 ד. 0.022

שיטות מתקדמות ויישומים סטטיסטיים

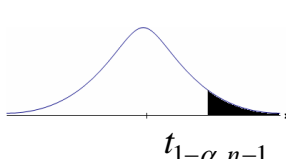
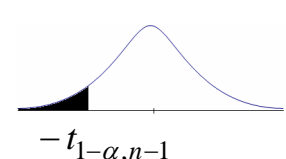
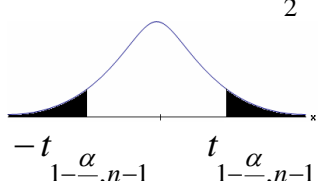
פרק 5 - בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגמים מזווגים

תוכן העניינים

- 1. בדיקת השערות למדגמים מזווגים 32
- 2. ניתוח פלטים 36

בדיקת השערות על תוחלת ההפרשים במדגמים מזווגים (תלויים)

בדיקת השערות למדגמים מזווגים – רקע

$H_0: \mu_D = C$ $H_1: \mu_D > C$	$H_0: \mu_D = C$ $H_1: \mu_D < C$	$H_0: \mu_D = C$ $H_1: \mu_D \neq C$	השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:
1. σ_D אינה ידועה 2. $D \sim N$ או מדגם מספיק גדול			תנאים:
$t_{\bar{D}} > t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $t_{1-\alpha, n-1}$ דוחים את H_0	$t_{\bar{D}} < -t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $-t_{1-\alpha, n-1}$ דוחים את H_0	או $t_{\bar{D}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$ $t_{\bar{D}} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$  $-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ דוחים את H_0	כלל הכרעה: אזור הדחייה של H_0
$\bar{D} > C + t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$	$\bar{D} < C - t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$	$\bar{D} > C + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$ $\bar{D} < C - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$	חלופה לכלל הכרעה: נדחה H_0 אם מתקיים:

$$S_D^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n D_i^2 - n\bar{D}^2}{n-1}, \quad t_{\bar{D}} = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}}$$

סטטיסטי המבחן:

דוגמה (פתרון בהקלטה):

חברה שיווקית מעוניינת לבדוק את טענת רשת השיווק "מגה בעיר" הטוענת שמחיריה נמוכים מהמחירים מרשת השיווק "שופרסל". לצורך הבדיקה נבחרו באקראי 4 מוצרים שונים. המחירים נבדקו בשתי הרשתות. להלן המחירים:

המוצר / רשת	מגה בעיר	שופרסל
שמפו	17	18
גיל כביסה	48	57
עוגת גבינה	35	35
לחם	12	10
קפה נמס	49	47
בקבוק יין	113	142
גבינה בולגרית	20	26

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמאלית, בדקו ברמת מובהקות של 5% את טענת רשת "מגה בעיר".

שאלות

- (1) במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין חברת X לחברת Y מבחינת המחירים לשיחות בינ"ל. נדגמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. להלן התוצאות:

יפן	סין	מצרים	פולין	הולנד	קנדה	ארה"ב	חברה/מדינה
4.2	3.2	3.5	3	2.2	2.1	1.5	X
4.2	3.2	3.2	3.1	1.9	2	1.4	Y

- בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית בכל חברה, בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין החברות מבחינת המחירים במוצע?
 (2) מכון המכין לפסיכומטרי טוען שהוא מעלה את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות. 8 נבחנים נבדקו לפני ואחרי שהם למדו במכון. להלן התוצאות שהתקבלו:

לפני	506	470	420	640	670	390	500	590
אחרי	570	540	430	610	680	510	520	580

מה מסקנתכם ברמת מובהקות 5%? הניחו שציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית.

- (3) נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'. להלן הציונים שלהם בסמסטר א' ו- ב':

82	75	90	68	74	סטטיסטיקה א'
100	76	87	84	80	סטטיסטיקה ב'

- פורסם שתלמידים שמסיימים את סמסטר ב' משפרים במוצע את הציונים ב-5 נקודות לעומת סמסטר א'. הניחו שהציונים מתפלגים נורמלית.
 א. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שהשיפור הוא יותר מ-5 נקודות?
 ב. על סמך הסעיף הקודם, מהי רמת המובהקות המינימלית להכרעה שהשיפור הוא יותר מ-5 נקודות?
 ג. לאור זאת, מה המסקנה ברמת מובהקות של 10%?

- (4) לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה. לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים נורמלית ללא ידיעת השונות האמתית. המבחן שיש לבצע כאן הוא:

- מבחן Z למדגם יחיד.
- מבחן T למדגם יחיד.
- מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- מבחן T למדגמים מזווגים.

(5) בתחנת טיפת חלב מסוימת יש שני מכשירי שקילה. על מנת להשוות בין שני המשקלים נדגמו 4 תינוקות. כל תינוק בן חודשיים נשקל בכל אחד מהמשקלים. להלן תוצאות השקילה (בק"ג):

משקל במכשיר 1	2.5	0.7	9.6	4.5
משקל במכשיר 2	0.5	1.7	6.9	3.5

נניח שהמשקלים מתפלגים נורמלית, המבחן שיש לבצע כאן הוא:

- א. מבחן Z למדגם יחיד.
- ב. מבחן T למדגם יחיד.
- ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

(6) כדי להשוות בין שני אצנים נדגמו 5 תוצאות מריצת 100 מטר של כל אצן. זמני הריצה נרשמו ויש להניח שמתפלגים נורמלית. המטרה להשוות בין האצנים. המבחן שיש לבצע כאן הוא:

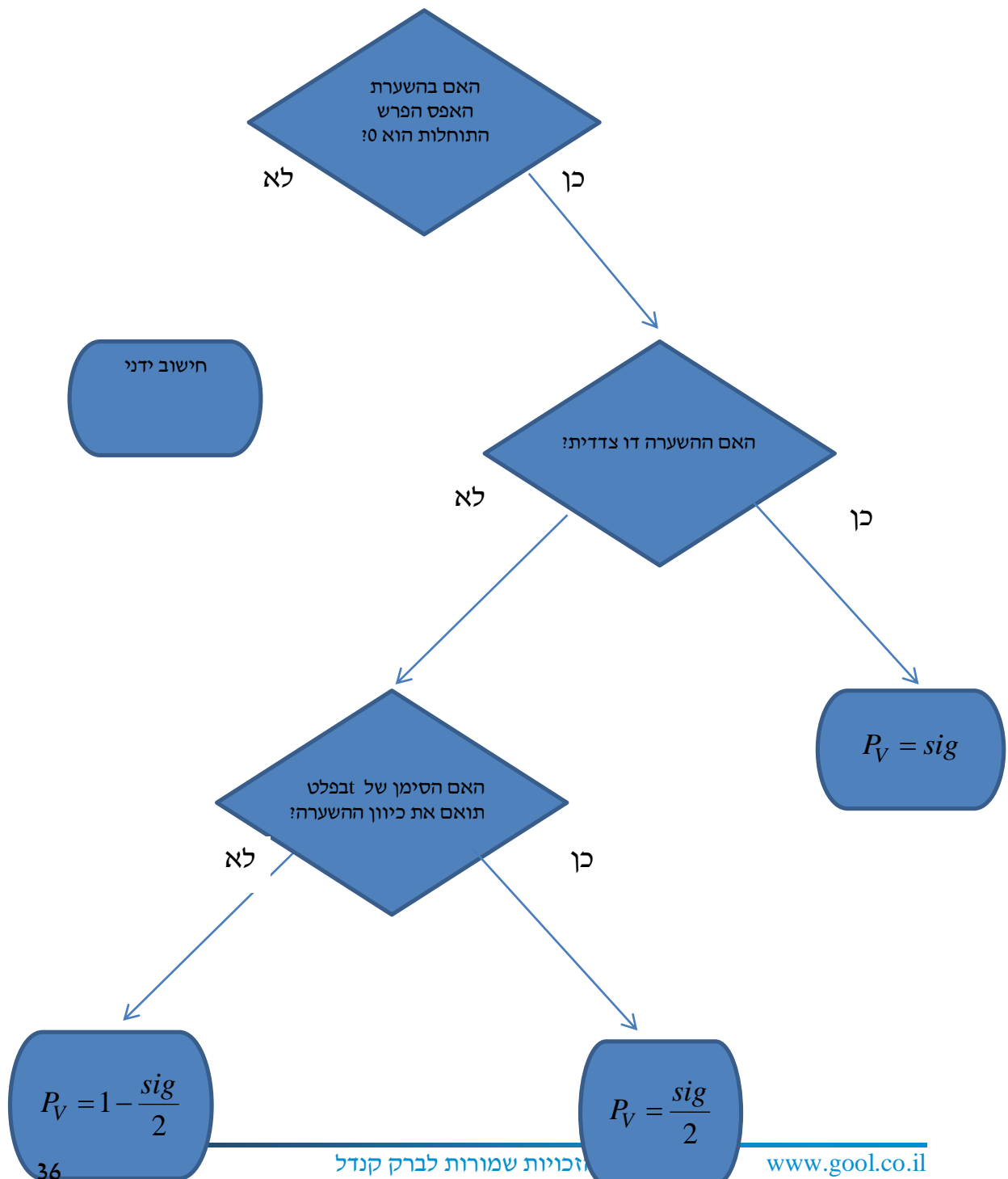
- א. מבחן Z למדגם יחיד.
- ב. מבחן T למדגם יחיד.
- ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

תשובות סופיות

- (1) לא נדחה H_0 .
- (2) לא נדחה H_0 .
- (3) א. $0.25 \leq p \leq 0.5$ ב. 0.5 ג. לא נדחה H_0 .
- (4) ד'.
- (5) ד'.
- (6) ג'.

בדיקת השערות על תוחלת ההפרשים במדגמים מזווגים (תלויים)

מדגמים מזווגים – ניתוח פלטים – רקע



דוגמה (פתרון בהקלטה) :

כדי לבדוק את ההשפעה של קורס לגמילה מעישון נלקח מדגם מקרי של 5 נבדקים. עבור כל אחד מהם נמדדה צריכת הסיגריות היומית לפני הקורס וחודשיים אחריו. הניחו שצריכת הסיגריות מתפלגת נורמלית. להלן התוצאות :

נבדק	1	2	3	4	5
לפני	40	22	25	28	30
אחרי	30	24	13	10	12

Paired Samples Statistics

	Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1 BEFORE	29.0000	5	6.85565	3.06594
AFTER	17.8000	5	8.72926	3.90384

Paired Samples Test

	Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	90% Confidence Interval of the Difference				
				Lower	Upper			
Pair 1 BEFORE - AFTER	11.20000	8.19756	3.66606	3.38452	19.01548	3.055	4	.038

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם הקורס יעיל.

שאלות

1) בסקר שנערך בארה"ב בשנת 1993 נשאלו נסקרים על השכלת הוריהם, להלן הפלט שהתקבל:

Paired Samples Test									
		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference				
					Lower	Upper			
Pair 1	Highest Year School Completed, Father - Highest Year School Completed, Mother	-.007	3.115	.100	-.203	.189	-.072	973	.943

- א. תנו אומדן להפרש הממוצעים.
 ב. תנו אומדן לטעות התקן של הפרש הממוצעים.
 ג. האם קיים הבדל מובהק בין השכלת האבות להשכלת האימהות ברמת מובהקות של 5%?

2) בתחרות קפיצה למים שופטים באופן קבוע שופט איטלקי ושופט דרום קוריאני. להלן פלט המנתח את הציונים ששופטים אלה נתנו בתחרויות השונות:

Paired Samples Statistics					
		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Italy	???	300	.86742	.05008
	South Korea	8.9183	???	.81992	.04734

Paired Samples Test									
		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference				
					Lower	Upper			
Pair 1	Italy - South Korea	-.42233	.36153	.02087	-.46341	-.38126	-20.234	???	???

- א. השלימו את החלקים החסרים בפלט (מסומנים בסימני שאלה).
 ב. בדקו את הטענה שהשופט הדרום קוריאני נותן בממוצע 0.2 נקודות יותר מאשר השופט האיטלקי ברמת מובהקות של 5%.
 ג. מהו רווח הסמך ברמת סמך של 95% לתוחלת פער הציונים בין השופטים?
 ד. בנו את הרווח כעת ברמת סמך של 98% לתוחלת פער בציונים בין השופטים.

3) בדקו את ציוניהם של 44 נבדקים אקראיים במבחן הפסיכומטרי. פעם אחת לפני הכנה (Before) ופעם אחת אחרי הכנה (After).

Paired Samples Test									
		Paired Differences				t	df	Sig. (2-tailed)	
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference				
					Lower	Upper			
Pair 1	Before - After	-7.45455	19.28303	2.90703	-13.31712	-1.59197	-2.564	43	.014

- א. רשמו מהו המבחן הסטטיסטי ונסח את ההשערות אליהם מתייחס הפלט.
- ב. בדקו את ההשערה שממוצע ציונים משתפרים לאחר ההכנה ברמת מובהקות של 5%.
- ג. בדקו את ההשערה שממוצע ציונים משתפרים לאחר ההכנה ביותר מ-5 נקודות ברמת מובהקות של 5%.
- ד. מצאו רווח סמך לתוחלת שיפור ממוצע הציונים לאחר ההכנה ברמת ביטחון של 95%.

(4) להלן פלט של תכנת SPSS:

T-Test

Paired Samples Statistics

	Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1 x	54.0000	6	5.86515	2.39444
Pair 1 y	46.5000	6	10.72847	4.37988

Paired Samples Test

	Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference				
				Lower	Upper			
Pair 1 x - y	7.50000	??	4.72405	-4.64356	19.64356	??	5	.173

- מלא את החלקים החסרים בטבלה.
- מהי רמת המובהקות המינימלית לקבלת הטענה שיש הבדל בין X ל- Y בממוצע?
- האם התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה, ואם כן גדלה או קטנה, אם הינו מוסיפים עוד תצפית שההפרש בין X ל- Y הוא 0.
- מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה ש X גדול מ- Y בממוצע?
- מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה ש X קטן מ- Y בממוצע?
- בנו רווח סמך לתוחלת של X ברמת סמך של 90%.

תשובות סופיות

- (1) א. -0.007 ב. 0.1 ג. אין הבדל מובהק.
- (2) א. $d.f = 299$ ב. $n = 300$ ג. $\bar{X} = 8.496$, $\text{Sig} = 0$.
- (3) א. ראה וידאו. ב. נדחה את H_0 . ג. לא נדחה את H_0 .
- ד. (1.592, 13.317).
- (4) א. 1.5876, 11.5715 ב. 0.173 ג. יגדל.
- ד. 0.0865 ה. 0.9135 ו. $49.18 < \mu < 58.82$.

שיטות מתקדמות ויישומים סטטיסטיים

פרק 6 - מבחני חי בריבוע

תוכן העניינים

1. מבחן לאי תלות..... (ללא ספר) 42
2. ניתוח פלטים במבחן אי תלות..... 53
3. מקדם המתאם של קרמר.....

פלטטים על מבחן לאי תלות – רקע

מבחן לאי תלות מטרתו לבדוק האם קיים קשר בין שני משתנים. שני המשתנים שנבדקים צריכים להיות מחולקים למספר קטגוריות.

מבנה המבחן:

השערות:

H_0 : אין תלות בין המשתנים.

H_1 : יש תלות בין המשתנים.

דרגות חופש: $d.f = (r-1)(c-1)$.

r : מספר הקטגוריות של המשתנה שבשורות.

c : מספר הקטגוריות של המשתנה שבעמודות.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} : \text{סטטיסטי המבחן}$$

O_i - השכיחות נצפית במדגם בתא i .

E_i - שכיחות צפויה במדגם בתא i בהנחת השערת האפס.

$$E_i = \frac{f(x) \cdot f(y)}{n}$$

הערה:

תנאי כדי לבצע את המבחן הוא $E_i \geq 5$ לכל i . במידה ותנאי זה לא מתקיים יש

אפשרות לאחד קטגוריות סמוכות עד שהתנאי יתקיים.

תנאי חלופי: אין E קטן מ-1 וגם אין ביותר מ-20% מהתאים E קטן מ-5.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

במחקר רצו לבדוק את הקשר בין צבע שיער לבין צבע עיניים של אנשים. הפלטים שהתקבלו מצורפים.

- א. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?
- ב. כמה קטגוריות יש לכל משתנה?
- ג. רשמו את השערות המחקר.
- ד. מה מספר דרגות החופש?
- ה. כמה אנשים במדגם נמצאו עם שיער חום?
- ו. כמה אנשים היית מצפה במדגם שיהיה להם שיער חום ועיניים ירוקות בהנחה ואין קשר בין צבע שיער לצבע עיניים?
- ז. מתוך הבלונדינים מה אחוז בעלי עיניים כחולות במדגם?
- ח. מתוך בעלי עיניים ירוקות מה אחוז הבלונדינים במדגם?
- ט. מה ערכו של סטטיסטי המבחן ומהי מובהקות התוצאה?
- י. מה מסקנת המחקר? $\alpha = 5\%$

להלן הפלטים שהתקבלו :

Case Processing Summary

	Cases					
	Valid		Missing		Total	
	N	Percent	N	Percent	N	Percent
hair_color * eye_color	78	100.0%	0	0.0%	78	100.0%

hair_color * eye_color Crosstabulation

		eye_color			Total	
		brown	green	Blue		
hair_color	black	Count	13	7	7	27
		Expected Count	10.7	8.3	8.0	27.0
		% within hair_color	48.1%	25.9%	25.9%	100.0%
		% within eye_color	41.9%	29.2%	30.4%	34.6%
	brown	Count	12	12	6	30
		Expected Count	11.9	9.2	8.8	30.0
		% within hair_color	40.0%	40.0%	20.0%	100.0%
		% within eye_color	38.7%	50.0%	26.1%	38.5%
	blond	Count	6	5	10	21
		Expected Count	8.3	6.5	6.2	21.0
		% within hair_color	28.6%	23.8%	47.6%	100.0%
		% within eye_color	19.4%	20.8%	43.5%	26.9%
Total	Count	31	24	23	78	
	Expected Count	31.0	24.0	23.0	78.0	
	% within hair_color	39.7%	30.8%	29.5%	100.0%	
	% within eye_color	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	5.880 ^a	4	.208
Likelihood Ratio	5.641	4	.228
Linear-by-Linear Association	2.682	1	.101
N of Valid Cases	78		

a. 0 cells (0.0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 6.19.

שאלות

- 1) בסקר שנעשה על ידי משרד ראש הממשלה נדגמו 60 אזרחים. כל אזרח נשאל על מגדרו והאם הוא בעד הקמת מדינה פלסטינית.
- מה ההשערות הנבדקות ומהו סטטיסטי המבחן?
 - אם סטטיסטי המבחן היה גדל כיצד הדבר היה משפיע על SIG שבפלט.
 - האם קיים קשר בין מגדר ודעה ברמת מובהקות של 5%?
 - מהו האומדן לאחוז התומכים במדינה פלסטינית מתוך הגברים?
 - איזה אחוז מהנשאלים שהיו בעד מדינה פלסטינית הם גברים?

להלן הפלטים:

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	1.973 ^a	2	.373
Likelihood Ratio	1.987	2	.370
Linear-by-Linear Association	1.882	1	.170
N of Valid Cases	60		

a. 0 cells (.0%) have expected count less than 5.

b. The minimum expected count is 7.25.

gender * opinion Crosstabulation

		opinion			Total	
		yes	now	no opinion		
gender	Male	Count	10	10	9	29
		Expected Count	12.6	9.2	7.3	29.0
		% within gender	34.5%	34.5%	31.0%	100.0%
		% within opinion	38.5%	52.6%	60.0%	48.3%
		% of Total	16.7%	16.7%	15.0%	48.3%
female		Count	16	9	6	31
		Expected Count	13.4	9.8	7.8	31.0
		% within gender	51.6%	29.0%	19.4%	100.0%
		% within opinion	61.5%	47.4%	40.0%	51.7%
		% of Total	26.7%	15.0%	10.0%	51.7%
Total		Count	26	19	15	60
		Expected Count	26.0	19.0	15.0	60.0
		% within gender	43.3%	31.7%	25.0%	100.0%
		% within opinion	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
		% of Total	43.3%	31.7%	25.0%	100.0%

2) להלן פלט על סמך סקר שנעשה בקרב סטודנטים, בסקר נשאלו הסטודנטים על המוזיקה אותה הם מעדיפים וצורת הביטוי המועדפת עליהם.

Crosstab

Count		בילוי			Total
		קריאה	ספורט	מועדון	
מוזיקה	רוק	0	0	11	11
	פופ	1	6	8	15
	קלאסי	5	6	9	20
Total		6	12	28	46

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	11.929 ^a	?	.018
N of Valid Cases	46		

a. 5 cells (55.6%) have expected count less than 5.

b. The minimum expected count is 1.43.

- א. בין אלו משתנים נבדק הקשר? כמה קטגוריות לכל משתנה?
- ב. האם התנאים של המודל מתקיימים?
- ג. מה מספר דרגות החופש במבחן הני"ל?
- ד. מה ההשערות של המבחן?

- 3) מחקר התעניין לבדוק את הקשר בין רמת הכנסה של משפחה לבין צריכת עגבניות אורגניות. הפלטים מצורפים.
- א. השלימו את שלושת המספרים החסרים בטבלה (היכן שיש סימני שאלה).
- ב. מה ערכו של חי בריבוע הסטטיסטי.
- ג. תנו הערכה למובהקות התוצאה לבדיקת הקשר בין רמת הכנסה של משפחה לבין צריכת עגבניות אורגניות.

Crosstabulation רמת_הכנסה * צרכן עגבניות

		צרכן עגבניות		Total
		אורגני	לא אורגני	
הרבה מתחת לממוצע רמת_הכנסה	Count	17	42	59
	% within רמת_הכנסה	28.8%	?	100.0%
	% within צרכן עגבניות	13.6%	33.6%	23.6%
מתחת לממוצע	Count	27	22	49
	% within רמת_הכנסה	55.1%	44.9%	100.0%
	% within צרכן עגבניות	?	17.6%	19.6%
ממוצע	Count	31	29	60
	% within רמת_הכנסה	51.7%	48.3%	100.0%
	% within צרכן עגבניות	24.8%	23.2%	24.0%
מעל הממוצע	Count	44	26	70
	% within רמת_הכנסה	62.9%	37.1%	100.0%
	% within צרכן עגבניות	35.2%	20.8%	28.0%
הרבה מעל הממוצע	Count	?	6	12
	% within רמת_הכנסה	50.0%	50.0%	100.0%
	% within צרכן עגבניות	4.8%	4.8%	4.8%
Total	Count	125	125	250

- 4) חוקר בדק את הקשר בין צבע השיער לבין צבע העיניים בעזרת מבחן חי בריבוע בקרב 52 נבדקים. תוצאות המבחן מוצגות בטבלה. בנוסף ידוע כי סטטיסטי המבחן שהתקבל מעיבוד הנתונים הוא 8.08.
- מה תהיה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 1%?
 - מה ערכו של E עבור עיניים כחולות וצבע שיער כהה.
 - מה יהיה בקירוב ערכו של מקדם המתאם של קרמר?
 - מהי פרופורציית בעלי צבע השיער הבהיר מקרב בעלי העיניים הירוקות?

להלן הפלט:

Crosstabulation צבע עיניים * צבע שיער

		צבע שיער		Total	
		כהה	בהיר		
צבע עיניים	כחול	Count			
		% within	50.0%	50.0%	100.0%
		% within	21.6%	53.3%	30.8%
		% of Total	15.4%	15.4%	30.8%
חום		Count			
		% within	83.3%	16.7%	100.0%
		% within	27.0%	13.3%	23.1%
		% of Total	19.2%	3.8%	23.1%
ירוק		Count			
		% within	79.2%	20.8%	100.0%
		% within	51.4%	33.3%	46.2%
		% of Total	36.5%	9.6%	46.2%
Total		Count			
		% within	71.2%	28.8%	100.0%
		% within	100.0%	100.0%	100.0%
		% of Total	71.2%	28.8%	100.0%

- 5) במחקר מסוים רצו לבדוק האם יש קשר בין המגדר להוצאה על לבוש במשך שנה. דגמו באופן מקרי גברים ונשים ובדקו את רמת ההוצאה שלהם על לבוש בשנה האחרונה. חוקר א' בדק האם קיים הבדל בתוחלות ההוצאה בין גברים לנשים. חוקר ב' קיבץ את ההוצאה לקטגוריות ובאופן הזה בדק האם קיים הבדל בהתפלגות ההוצאה בין גברים לנשים. הקטגוריות חולקו לשלוש קבוצות הוצאה.
- איזה פלט מתאים לאיזה אחד מהחוקרים? נמקו.
 - מה מסקנתו של חוקר א'? בדקו ברמת מובהקות $\alpha = 0.05$. (רשמו השערות, נסחו הנחות, ציינו כלל החלטה ותנו מסקנה במונחי המשתנים).
 - איזו טעות יכולה להיות במסקנתו של חוקר א'? נסחו את הטעות במונחי השאלה.
 - מהי מסקנתו של חוקר ב'? בדקו ברמת מובהקות $\alpha = 0.05$. (רשמו השערות, נסחו הנחות, ציינו כלל החלטה ורשמו מסקנה במונחי המשתנים).
 - איזו טעות יכולה להיות במסקנתו של חוקר ב'? נסחו זאת במונחי השאלה.
 - כיצד ניתן ליישב את מסקנות שני החוקרים?

להלן פלט ראשון:

T-Test

Group Statistics

gender	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
female	40	2.9000	1.15025	.18187
male	40	2.6000	2.52982	.40000

dimensio
n1

Independent Samples Test

	Levene's Test for Equality of Variances	t-test for Equality of Means								
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
									Lower	Upper
expose	Equal variances assumed	16.805	.000	.683	78	.497	.30000	.43941	-.57479	1.17479
	Equal variances not assumed			.683	54.464	.498	.30000	.43941	-.58078	1.18078

להלן פלט שני:

Crosstabs

Case Processing Summary

	Cases					
	Valid		Missing		Total	
	N	Percent	N	Percent	N	Percent
gender * category	80	100.0%	0	.0%	80	100.0%

gender * category Crosstabulation

			category			Total
			a	b	c	
gender	Female	Count	2	30	8	40
		Expected Count	11.0	21.0	8.0	40.0
		% within gender	5.0%	75.0%	20.0%	100.0%
		% within category	9.1%	71.4%	50.0%	50.0%
Male	Count	Count	20	12	8	40
		Expected Count	11.0	21.0	8.0	40.0
		% within gender	50.0%	30.0%	20.0%	100.0%
		% within category	90.9%	28.6%	50.0%	50.0%
Total	Count	Count	22	42	16	80
		Expected Count	22.0	42.0	16.0	80.0
		% within gender	27.5%	52.5%	20.0%	100.0%
		% within category	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	22.442 ^a	2	.000
Likelihood Ratio	25.064	2	.000
N of Valid Cases	80		

a. 0 cells (.0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 8.00.

תשובות סופיות

- (1) א. 1.973 ב. קטן . ג. לא נדחה H_0 .
 ד. 34.5% ה. 38.5%
- (2) א. בילוי מועדף ומוזיקה מועדפת עם 3 קטגוריות לכל משתנה.
 ב. לא ג. 4.
 ד. H_0 אין תלות בין בילוי מועדף למוזיקה מועדפת.
 H_1 יש תלות בין בילוי מועדף למוזיקה מועדפת.
- (3) א. 6, 21.6%, 71.2% ב. 15.8 ג. קטן מ-0.005.
 ד. 20.8%
- (4) א. לא נדחה H_0 . ב. 11.4 ג. 0.394
- (5) א. פלא א' - חוקר א', פלא ב' - חוקר ב'. ב. נקבל את H_0 .
 ג. טעות מסוג שני- הכרענו שאין הבדל בין גברים לנשים למרות שיש במציאות הבדל.
 ד. נקבל את H_1 .
 ה. טעות מסוג ראשון- הכרענו שיש קשר בין מין להוצאה למרות שבמציאות אין קשר.
 ו. כל חוקר פעל בשיטה סטטיסטית שונה ובמצב כזה יתכן מסקנות סותרות.

מדדי קשר-מדד הקשר של קרמר – רקע

מתי משתמשים במדד הזה? - כאשר אחד המשתנים הוא מסולם שמי והשני מכל סולם אפשרי. מדד הקשר מקבל ערכים בין 0 ל-1. ככל שהמדד יותר קרוב לאחד קיים קשר בעוצמה יותר חזקה בין המשתנים.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

במחקר רוצים לבדוק את הקשר בין מין לדעה בנושא מסוים, שאלו 100 גברים ו-100 נשים האם הם בעד/נגד/נמנעים באיזשהו נושא. להלן טבלת השכיחויות המשותפת שהתקבלה.

$f(x)$	נמנע	נגד	בעד	X / Y
100	10	40	50	גבר
100	10	60	30	אישה
$n = 200$	20	100	80	$f(y)$

בהקשר של קרמר הטבלה נקראת טבלת O (observed).

X - מין (גבר/אישה) – סולם שמי.

Y - דעה (בעד/נמנע/נגד) – סולם שמי/סדר.

שלב ב' בחישוב r_c :

שלב א' :

נבנה את טבלת E (Expected)

נעתיק את המסגרת של טבלת O ואז כל $E_i = \frac{f(x) \cdot f(y)}{n}$.

$f(x)$	נמנע	נגד	בעד	X / Y
100				גבר
100				אישה
$n=200$	20	100	80	$f(y)$

שלב ב' :

$$\text{נחשב } \chi^2 = \sum_i \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

שלב ג' :

$$\text{נחשב: } r_c = \sqrt{\frac{1}{n(L-1)} \chi^2}$$

כאשר L מבטא את המספר הקטן מבין מספר השורות או העמודות.

שאלות

- (1) להלן תוצאות מחקר שבדק את הקשר בין מין להשכלה. לגבי כל נחקר נבדק המין שלו והשכלתו.

מין / השכלה	נמוכה	תיכונית	גבוהה
גבר	120	40	20
אישה	20	20	80

להלן התוצאות:

האם קיים קשר בין מין להשכלה? נמקו!

- (2) נלקחו 200 אנשים שמתוכם 60 הצהירו שהם עוסקים בפעילות גופנית סדירה. מתוך אלו שעוסקים בפעילות גופנית סדירה 50 נמצאו במצב בריאותי תקין. מתוך אלו שלא עוסקים בפעילות גופנית סדירה 90 נמצאו במצב בריאותי תקין.

א. בנו טבלת שכיחות משותפת לנתונים שהוצגו בשאלה.

ב. האם קיים קשר בין פעילות גופנית למצב בריאותי?

חשבו לפי מדד הקשר של קרמר.

תשובות סופיות

- (1) קיים קשר בעוצמה בינונית בין המין להשכלה מקדם המתאם של קרמר הוא 0.595.
- (2) א. להלן טבלה: ב. מדד קרמר 0.19 מעיד על קשר בעוצמה נמוכה.

$f(x)$	לא תקין	תקין	y/x
60	10	50	כן
140	50	90	לא
200	60	140	$f(y)$

שיטות מתקדמות ויישומים סטטיסטיים

פרק 7 - מבחנים אפרמטרים למדגמים מזווגים

תוכן העניינים

1. מבחן ווילקוקסון - על ידי שימוש בטבלה לערכים קריטיים 55
2. מבחן ווילקוקסון- פלטים 59
3. מבחן מקנמר (דו צדדי) 63
4. תרגול בזיהוי מבחנים 65

מבחן ווילקוקסון למדגמים מזווגים (על ידי שימוש בטבלה של ערכים

קריטיים) – רקע

מתי נשתמש במבחן זה ?

מבחן זה לא דורש הנחה של התפלגות נורמלית, אולם דורש ערכים מספריים המאפשרים חישוב הפרש בין ערכי X לערכי Y . מבחן זה הוא הגרסה הלא פרמטרית למבחן T למדגמים מזווג. נשתמש במבחן זה שיש משתנה כמותי שאינו מתפלג נורמלית או שיש משתנה מסולם סדר על מדגם מזווג.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

שני קונדיטורים מתחרים על מקום עבודה. נתנו לשניהם להכין 8 מאפים שונים כאשר כל אחד מהמאפים נאפה על ידי שניהם. בסופו של דבר בעל הקונדיטוריה נתן ציון לכל אחד מהאופים בעבור כל אחד מהמאפים. להלן הציונים שהתקבלו, ורוצים לבדוק שאופה א טוב יותר מאופה ב.

אופה א	אופה ב
10	9
9	8
7	7
8	9
9	6
10	6
7	5
8	4

א. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?

ב. מהן השערות המחקר?

חישוב סטטיסטי המבחן :

- נחשב את ההפרשים D_i לכל תצפית.
- נוציא מהמדגם את כל התצפיות עם ההפרשים ששוים ל-0.
- נדרג את ההפרשים הנותרים מהקטן אל הגדול בלי להתייחס לסימן ההפרש, כלומר מדרגים את הערכים המוחלטים של ההפרשים. הפרשים זהים מקבלים דרגה זהה שהיא הדרגה הממוצעת של המקומות שהם תופסים.
- מסכמים את הדרגות של ההפרשים החיוביים (W^+) ואת הדרגות של ההפרשים השליליים (W^-).
- W יהיה W^+ או W^- , זה שאמור להיות יותר קטן לפי השערת המחקר או הקטן מבניהם אם ההשערה היא דו צדדית.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

חשבו את W על סמך תוצאות המדגם.

אופה א	אופה ב
10	9
9	8
7	7
8	9
9	6
10	6
7	5
8	4

כלל הכרעה :

במבחן ווילקוקסון זה כלל ההכרעה הוא : נדחה את H_0 אם $W \leq W_c$.
 כאשר, W_c - הערך הקריטי ; W - הסטטיסטי.
 את הערכים הקריטיים נחלץ מתוך טבלה מתאימה :

n_1	חד-צדדי $\alpha = 0.01$ דו-צדדי $\alpha = 0.02$	חד-צדדי $\alpha = 0.025$ דו-צדדי $\alpha = 0.05$	חד-צדדי $\alpha = 0.05$ דו-צדדי $\alpha = 0.10$
5			1
6		1	2
7	0	2	4
8	2	4	6
9	3	6	8
10	5	8	11
11	7	11	14
12	10	14	17
13	13	17	21
14	16	21	26
15	20	25	30
16	24	30	36
17	28	35	41
18	33	40	47
19	38	46	54
20	43	52	60
21	49	59	68
22	56	66	75
23	62	73	83
24	69	81	92
25	77	90	101
26	85	98	110
27	93	107	120
28	102	117	130
29	111	127	141
30	120	137	152

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

- א. רשמו את כלל ההכרעה המתאים ברמת מובהקות של 5%.
- ב. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

שאלות

- (1) נדגמו 8 לקוחות שקיבלו שירות ממוקד טלפוני. לקוחות אלה נתבקשו לתת הערכה על יעילות השירות ועל האדיבות שבשירות. הציונים ניתנו בסקאלה מ-1 (הערכה הנמוכה) עד 10 (הערכה הגבוהה ביותר). להלן התוצאות שהתקבלו:

5	7	5	2	3	4	8	7	הערכה על יעילות השירות	X
4	7	10	8	6	7	7	8	הערכה על אדיבות השירות	Y

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין הערכה על יעילות השירות להערכה על אדיבות השירות?

- (2) סטודנטים נתבקשו לתת חוות דעתם על רמת הקושי של הקורס (סקאלה של 1-5 כאשר 5=קשה ביותר) ועל רמת הקושי של הבחינות באותה סקאלה. הסטודנטים טוענים שהבחינה הייתה ברמה גבוהה יותר מהרמה של הקורס. להלן תוצאות המדגם:

4	5	1	2	3	4	2	3	4	1-קושי קורס
2	3	5	5	5	3	4	4	4	2-קושי בחינה

בדקו ברמת מובהקות של 5% את טענת הסטודנטים.

- (3) רוצים לבדוק את הטענה שהציונים במבחן בסטטיסטיקה ב גבוהים מאשר בסטטיסטיקה א. נלקחו 10 סטודנטים שסיימו את סטטיסטיקה ב. עבור כל סטודנט נבדק מה הציון בסטטיסטיקה א ומה הציון בסטטיסטיקה ב. להלן התוצאות שהתקבלו:

80	78	84	65	67	82	94	68	74	62	א
82	79	86	80	67	77	90	80	80	70	ב

- א. בדקו ברמת מובהקות של 5% באמצעות מבחן ווילקוקסון.
- ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם יוחלט לתת פקטור של 2 נקודות לכל הסטודנטים בשני המועדים?
- ג. כיצד הייתה משתנה התשובה אם מסתבר שנפלה טעות ועבור הסטודנט הראשון ברשימה יש להחליף בנתונים את הציון של סטטיסטיקה ב עם סטטיסטיקה א?

- (4) רוצים לבדוק האם תרופה חדשה להקלת כאבי ראש יעילה יותר מתרופה מוכרת. לצורך כך נלקח מדגם בן 9 אנשים, שנתבקשו להשתמש בתרופה החדשה ובתרופה המוכרת, ולהשוות את יעילותה של התרופה החדשה ליעילות התרופה המוכרת.
- האנשים במחקר היו צריכים לתת הערכה של יעילות בסקלה של מ-1 עד 100. התוצאות שקיבל היו:

הנבדק	1	2	3	4	5	6	7	8	9
תרופה חדשה	95	90	100	80	75	81	69	100	86
תרופה מוכרת	80	76	65	49	75	70	50	60	60

האם התרופה החדשה משפרת את היעילות ביותר מ 10 נקודות? בדקות ברמת מובהקות של 1%.

תשובות סופיות

- (1) לא נדחה H_0 .
- (2) לא נדחה H_0 .
- (3) א. לא נדחה H_0 . ב. לא משתנה. ג. לא משתנה.
- (4) לא נדחה H_0 .

ניתוח פלטי SPSS במבחן ווילקוקסון למדגמים מזווגים – רקע

מבחן זה לא דורש הנחה של התפלגות נורמלית, אולם דורש ערכים מספריים המאפשרים חישוב הפרש בין ערכי X לערכי Y . מבחן זה הוא הגרסה הלא פרמטרית למבחן t למדגם מזווג. נשתמש במבחן זה שיש משתנה כמותי שאינו מתפלג נורמלית או שיש משתנה מסולם סדר. נראה איך מנתחים פלט של תכנת SPSS במבחן זה על ידי דוגמה.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

קופות החולים טוענות כי רכישת תרופות שאינן דורשות מרשם רופא, הינן זולות יותר אצלן מאשר ברשתות הפארם. דגמו 11 תרופות ובדקו את מחירן בבית המרקחת של קופות החולים וברשת הפארם. המחיר המוצג הינו עבור קפסולה בודדת :

שם התרופה	קופת חולים	פארם
אדוויל	1.2	1.5
אקמול	2.6	2.6
אופטלגין	0.9	1.4
פוסטינור	3.5	3.2
סטרפסיל	1.1	1.4
נורפן	1.7	1.8
לורסטין	0.8	1.1
קולדקס	1.5	2
אלרגיז	2	2.8
נוסידקס	2	2.5
קורמיר	3	3.3

להלן פלט שמתקבל מהרצת מבחן ווילקוקסון על הנתונים הללו:

Wilcoxon Signed Ranks Test

		Ranks		
		N	Mean Rank	Sum of Ranks
HMO-PHARM	Negative Ranks	9 ^a	???	51.00
	Positive Ranks	1 ^b	4.00	4.00
	Ties	1 ^c		
	Total	11		

a. HMO < PHARM

b. HMO > PHARM

c. HMO = PHARM

Test Statistics^a

	HMO-PHARM
Z	-2.434 ^b
Asymp. Sig. (2-tailed)	.015
Exact Sig. (2-tailed)	.014
Exact Sig. (1-tailed)	.007

a. Wilcoxon Signed Ranks Test

b. Based on positive ranks.

א. הסבירו מדוע מבחן ווילקוקסון למדגמים מזווגים מתאים למקרה זה?

ב. השלם את הערך החסר שמסומן בסימני שאלה בטבלה.

ג. מה תהיה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 5%?

שאלות

1) רוצים לבדוק את הטענה שהציונים במבחן בסטטיסטיקה ב גבוהים מאשר בסטטיסטיקה א. נלקחו 10 סטודנטים שסיימו את סטטיסטיקה ב. עבור כל סטודנט נבדק מה הציון בסטטיסטיקה א ומה הציון בסטטיסטיקה ב. להלן תוצאות הפלט שהתקבל:

Wilcoxon Signed Ranks Test

		Ranks		
		N	Mean Rank	Sum of Ranks
STAS2-	Negative Ranks	2 ^a	6.50	13.00
STAS1	Positive Ranks	8 ^b	5.25	42.00
	Ties	0 ^c		
	Total	10		

a. STAS2 < STAS1

b. STAS2 > STAS1

c. STAS2 = STAS1

Test Statistics^a

	STAS2- STAS1
Z	-1.483 ^b
Asymp. Sig. (2-tailed)	.138

a. Wilcoxon Signed Ranks Test

b. Based on negative ranks.

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% את הטענה.
 ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם יוחלט לתת פקטור של 2 נקודות לכל הסטודנטים בשני המועדים?

2) מחקר בדק את רמת שביעות הרצון משירות לקוחות אחרי רפורמה שבוצעה בחברה. להלן תוצאות שהתקבלו כאשר שביעות הרצון הייתה בסקלה מ-1 ככל לא מרוצה ועד 5 מרוצה מאד.

4	1	1	4	5	4	2	5	4	5	4	2	Before
5	5	5	4	3	5	5	5	4	4	4	4	After

Wilcoxon Signed Ranks Test

		Ranks		
		N	Mean Rank	Sum of Ranks
after-before	Negative Ranks	?????a	3.25	?????
	Positive Ranks	?????b	4.92	?????
	Ties	?????c		
	Total	12		

- a. after < before
- b. after > before
- c. after = before

Test Statistics^a

	after-before
Z	-1.622
Asymp. Sig. (2-tailed)	.105

- א. השלימו את הערכים עם סימני השאלה אשר בטבלה.
- ב. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם הרפורמה הייתה יעילה.
- ג. כיצד הייתה משתנה מובהקות התוצאה אם היו מוסיפים עוד 2 תצפיות שעבורן הפרש שביעות הרצון היה אפס?
- ד. כיצד הייתה משתנה מובהקות התוצאה של הפלט אם הינו מוסיפים תצפית כזו:

before	after
5	4

תשובות סופיות

- 1) א. לא נדחה H_0 . ב. לא תשתנה המסקנה.
- 2) א. 2, 6, 4, 6.5, 29.5 ב. לא נדחה H_0 . ג. לא משתנה. ד. גדלה.

מבחן מקומר (דו צדדי) – רקע

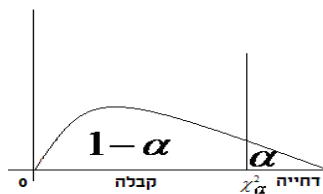
מבחן סטטיסטי זה נכנס לקטגוריית המבחנים האפרמטריים. המבחן רלבנטי כשהמדגם מזווג וכשהמשתנה התלוי (הנחקר) הוא דיכוטומי, כלומר מקבל שני ערכים בלבד. בנוסף, צריכים להתקיים שני תנאים טכניים:

- השערת המחקר היא דו צדדית.
 - מספר התצפיות שחל בהן שינוי צריך להיות לפחות 20.
- אם לפחות אחד משני התנאים הטכניים לא מתקיים יש לבצע את מבחן הסימן.

דוגמה:

50 איש נשאלו האם הם נוהגים לשלוח מסרונים בזמן הנהיגה. הם נשאלו בשני מצבים: פעם ראשונה לפני שצפו בסרטון ופעם שניה שבוע אחרי שצפו בסרטון. המחקר התעניין לבדוק האם הסרטון השפיע על שליחת מסרונים בנהיגה. התוצאות שהתקבלו היו: 13 אנשים טענו שהם נוהגים לשלוח מסרונים בזמן הנהיגה גם לפני הצפייה בסרטון וגם אחרי הצפייה בסרטון. 9 אנשים טענו שלפני הצפייה בסרטון הם לא שלחו מסרונים אבל אחרי הצפייה בסרטון הם כן שלחו מסרונים בזמן הנהיגה. 20 איש טענו שהם נהגו לשלוח מסרונים לפני הסרטון אך אחרי צפייה בסרטון הם הפסיקו לשלוח מסרונים בזמן הנהיגה. 8-1 אנשים לא שלחו מסרונים בזמן הנהיגה לא לפני ולא אחרי צפייה בסרטון. מהן השערות המחקר ומהו המבחן הסטטיסטי המתאים?

מבנה המבחן:



המבחן מתבסס על התפלגות χ^2 עם דרגת חופש $df = 1$. אזור הדחייה בצד ימין לערך הקריטי כמוראה בשרטוט.

סטטיסטי המבחן הוא: $\chi^2 = \frac{(B-C)^2}{B+C}$ כאשר B, C – שכיחויות שבהן חל שינוי ומתעלמים מהשכיחויות שלא חל בהן שינוי.

דוגמה:

בדקו ברמת מובהקות של 5%: האם לסרטון השפעה על שליחת המסרונים בזמן הנהיגה?

שאלות

- (1) פוליטיקאי הופיע אמש בתכנית טלוויזיה והוא מעוניין לבדוק האם התוכנית השפיעה על אמון הציבור בו. לצורך כך בוצע סקר שבו נשאל הצופה האם בעניו הפוליטיקאי נתפס כאמין לפני התוכנית והאם הוא נתפס כאמין לאחר התוכנית. להלן התוצאות שהתקבלו (המספרים מייצגים מספר צופים):
 מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

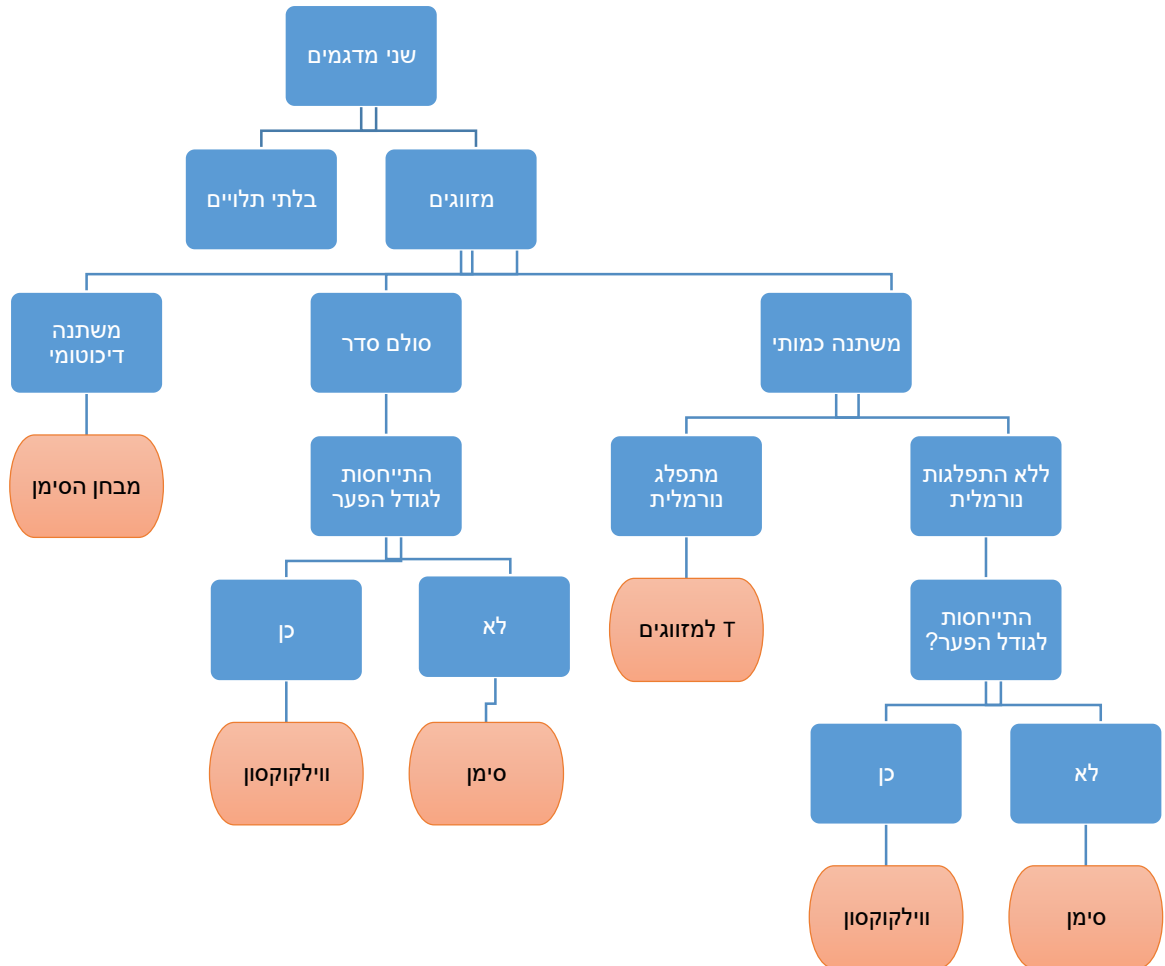
לפני			
לא אמין	אמין		
21	12	אמין	אחר
17	7	לא אמין	

- (2) חברת משקאות יצאה בקמפיין שנוי במחלוקת. החברה מעוניינת לבדוק האם הקמפיין השפיע על הרגלי הצריכה. במחקר שבו השתתפו 50 נשאלים 30 טענו שלא שינו את הרגלי הצריכה. 15 טענו שהחלו לרכוש את המשקה בעקבות הקמפיין ו-5 טענו שהפסיקו לרכוש את המשקה בעקבות הקמפיין.
 מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 2.5%?

תשובות סופיות

- (1) נדחה H_0 .
 (2) לא נדחה H_0 .

זיהוי מבחנים סטטיסטיים – רקע



שאלות

(1) במטרה להשוות את רמת האפיייה של שני קונדיטורים בחרו 9 מאפים שונים (קרואסון, בראוני וכדומה) ונתנו לכל אחד משני הקונדיטורים לאפות את 9 המאפים השונים. 18 המאפים שנאפו ניתנו למומחה שנתן ציון למאפים השונים. הציון שניתן הוא בין 1 ל-5 לפי ניסיונו וטעמו האישי של המומחה. מהו המבחן המתאים ביותר במקרה זה?

- מבחן ווילקוקוסון.
- מבחן הסימן.
- מבחן T למזווגים.
- מבחן למדגמים בלתי תלויים.

(2) שני מוסיקאים מפורסמים נתנו ציון בסולם של 1-10 לקולם של 8 מתמודדים בתוכנית ראלטי ידועה. ציון 10 ניתן לקול שמצא חן ביותר בעיני המוסיקאי. מפיך התוכנית רצה לבדוק האם יש הבדל בין המוסיקאים מבחינת הטעם. בטבלה הבאה נתונים הציונים של כל אחד מהמוסיקאים את שמונת המתמודדים:

8	7	6	5	4	3	2	1	
4	1	1	3	4	7	5	6	מוסיקאי א'
7	2	3	3	2	5	7	5	מוסיקאי ב'

מהו המבחן המתאים ביותר במקרה זה?

- מבחן ווילקוקוסון.
- מבחן הסימן.
- מבחן T למזווגים.
- מבחן למדגמים בלתי תלויים.

(3) במחקר בדקו לאנשים את רמת הסוכר בבוקר ואת רמת הסוכר בערב. מתוך 26 אנשים ל-3 רמת הסוכר הייתה זהה. ל-14 רמת הסוכר הייתה גבוהה יותר בשעות הערב. וליתר רמת הסוכר הייתה גבוהה יותר בשעות הבוקר. רוצים לבדוק ברמת מובהקות של 6% האם קיים הבדל בין רמת הסוכר בבוקר לרמת הסוכר בערב אצל האנשים. מהו המבחן המתאים ביותר במקרה זה?

- מבחן ווילקוקוסון.
- מבחן הסימן.
- מבחן T למזווגים.
- מבחן למדגמים בלתי תלויים.

- (4) חוקר מעוניין לבדוק את התפתחות היכולת לדחות סיפוקים מיידיים בקרב ילדים. לשם כך, הוא משתמש במבחן לבדיקה של דחיית סיפוקים, ומעביר אותו בו זמנית ל-2 קבוצות גיל. מבחן זה מודד כמה זמן (בשניות) מסוגל הילד לדחות קבלה של תגמול מיידי קטן על מנת לקבל תגמול גדול יותר בעתיד. התוצאות שמתקבלות הן הזמנים של הנחקרים בכל קבוצת גיל. מהו המבחן המתאים ביותר במקרה זה?
- מבחן ווילקוקוסון.
 - מבחן הסימן.
 - מבחן T למזווגים.
 - מבחן למדגמים בלתי תלויים.
- (5) חברת משקאות יצאה בקמפיין שנוי במחלוקת. החברה מעוניינת לבדוק האם הקמפיין השפיע על הרגלי הצריכה. במחקר השתתפו נשאלים האם הם נהגו לרכוש את המשקה לפני הקמפיין והאם הם רכשו אותו לאחר הקמפיין. מהו המבחן המתאים ביותר במקרה זה?
- מבחן ווילקוקוסון.
 - מבחן הסימן.
 - מבחן T למזווגים.
 - מבחן למדגמים בלתי תלויים.
- (6) מחקר התעניין בדפוסי שיחות הטלפון, שמנהל הפרט בעקבות פרידה מבן זוגו. במחקר השתתפו גברים ו-נשים (כולם נפרדו מבן זוגם). המשתתפים דיווחו על משך השיחות (בדקות; לפני ואחר הפרידה). שאלת המחקר בחנה האם פרידה מבן הזוג קשורה למשך השיחות (משך השיחות הוא משתנה שנהוג להתייחס אליו כמתפלג נורמלית). מהו המבחן המתאים ביותר במקרה זה?
- מבחן ווילקוקוסון.
 - מבחן הסימן.
 - מבחן T למזווגים.
 - מבחן למדגמים בלתי תלויים.

תשובות סופיות

- (1) א'
- (2) א'
- (3) ב'
- (4) ד'
- (5) ב'
- (6) ג'

שיטות מתקדמות ויישומים סטטיסטיים

פרק 8 - מבחנים אפרמטריים למדגמים בלתי תלויים

תוכן העניינים

1. מבחן מאן וויטני - שימוש בפלטים 68
2. מבחן ווילקוקסון למדגמים בלתי תלויים 72

מבחנים אפרמטריים למדגמים בלתי תלויים

ניתוח פלטים במבחן מן-וויטני – רקע

מבחן מן-וויטני מיועד לבדוק האם לשתי אוכלוסיות התפלגות שווה. המבחן בוחן באופן רוחבי את כל תחום הערכים ולא מתמקד בערך מרכזי אחד. נשתמש במבחן זה כאשר יש שני מדגמים בלתי תלויים והמשתנה הכמותי הנחקר אינו מתפלג נורמלית או שמדובר במשתנה מסולם סדר. המבחן מתבסס על דירוג כל התצפיות. בעצם, מבחן זה הוא המענה האפרמטרי למבחן הפרמטרי להפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

להלן תוצאות הערכות שקיבלו שני מורים: ד"ר A ופרופסור B. סטודנטים נתנו משוב כללי על המורים בסקלה של 1 (גרוע) עד 5 (מצוין). הטענה היא שד"ר A הוא מרצה טוב יותר מאשר פרופסור B.

Mann-Whitney Test

Ranks

	teacher	N	Mean Rank	Sum of Ranks
grade	dr A	17	25.00	425.00
	prof B	20	13.90	278.00
	Total	37		

Test Statistics^a

	grade
Mann-Whitney U	68.000
Wilcoxon W	278.000
Z	-3.249
Asymp. Sig. (2-tailed)	.001
Exact Sig. [2*(1-tailed Sig.)]	.001 ^b

a. Grouping Variable: teacher

b. Not corrected for ties.

- הסבירו מדוע נעשה כאן מבחן מן-וויטני.
- מה המסקנה ברמת מובהקות של 1%?

שאלות

1) מחקרים טוענים שקיים הבדל בין שעות השינה של גברים לשעות השינה של נשים. כיוון שלא ניתן להוכיח ששעות שינה הינו משתנה המתפלג נורמלית ביצעו מבחן מן-וויטני בו לקחו נשים וגברים אקראיים ובדקו את שעות השינה שלהם.

Ranks				
	gender	N	Mean Rank	Sum of Ranks
sleeptime	male	10	???	135.00
	female	???	7.50	75.00
	Total	20		

Mann-Whitney Test

Test Statistics ^a	
	sleeptime
Mann-Whitney U	20.000
Wilcoxon W	75.000
Z	-2.319
Asymp. Sig. (2-tailed)	.020

- א. השלימו את סימני השאלה החסרים בפלט.
- ב. מהי המסקנה ברמת מובהקות של 5%?
- ג. מה הייתה מובהקות התוצאה אם טענת המחקר הייתה שגברים ישנים יותר מנשים?

2) שני אנשים נתבקשו לבדוק את מספר תאונות הדרכים בשבוע בשני קטעי כביש שונים. כל אחד בחר את השבועות באופן אקראי ובלתי תלוי באחר וספר כמה תאונות היו בכל כביש בשבוע. הפלטים שהתקבלו:

מספר תאונות

	Frequency
.00	2
1.00	1
2.00	2
3.00	1
Total	6

a. road = 1.00

מספר תאונות

	Frequency
.00	2
1.00	1
2.00	1
3.00	1
4.00	1
5.00	1
Total	7

a. road = 2.00

Ranks

	road	N	Mean Rank	Sum of Ranks
מספר תאונות	1.00	A	B	C
	2.00	D	E	F
	Total	G		

Test Statistics^a

	VAR00002
Asymp. Sig. (2-tailed)	.465

- א. השלימו בטבלה השלישית את המספרים החסרים במקום האותיות.
- ב. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת ההשערה שאין הבדל בין הכבישים מבחינת התפלגות תאונות הדרכים?
- ג. כיצד הייתה משתנה התשובה של הסעיף הקודם אם כל חוקר היה מוסיף נתונים על שבוע נוסף לכל כביש?
- ד. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?
- ה. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת ההשערה שכביש מספר 1 עם התפלגות תאונות גבוהה יותר מאשר כביש מספר 2?

תשובות סופיות

- (1) א. 10, 13.5 ב. נדחה H_0 ג. 0.01
- (2) א. 6, 6.17, 7, 7.71, 13, 54 ב. 0.465
- ג. לא ניתן לדעת. ד. לא נדחה H_0 ה. 0.7675

מבחן ווילקוקסון למדגמים בלתי תלויים – רקע

מבחן ווילקוקסון למדגמים בלתי תלויים נכנס לקטגוריות המבחנים האפרמטריים. מבחן זה רלבנטי כאשר רוצים להשוות בין שתי אוכלוסיות על סמך שני מדגמים בלתי תלויים. המשתנה התלוי הוא משתנה כמותי שאינו מתפלג נורמלית או משתנה מסולם סדר. מבחן זה הוא החלופה האפרמטרית למבחן הפרמטרי להשוואת תוחלות על סמך שני מדגמים בלתי תלויים.

דוגמה:

מחקר חינוכי מעוניין להשוות בין 2 שיטות חינוך. המחקר רוצה לבדוק האם קיים הבדל ברמת ביטחון העצמי של הילדים בשיטות החינוך השונות. נבחרו באקראי 5 ילדים שחונכו בשיטת A. כמו כן נדגמו באקראי 5 ילדים שחונכו בשיטת B. פסיכולוגים בחנו את 10 הילדים ונתנו ציון לביטחון העצמי בסקאלה של 1-20. מהן ההשערות ומהו המבחן הסטטיסטי המתאים?

שיטה A	שיטה B
16	14
17	14
20	19
10	9
18	8

כדי לבצע את המבחן יש לחשב על סמך תוצאות המדגם את סטטיסטי המבחן שנסמן באות U.

השלבים לחישוב סטטיסטי המבחן:

- נסדר את כלל התצפיות של המחקר בסדר עולה מהנמוך ביותר לגבוה ביותר אך יש לדעת כל תצפית מאיזה מדגם היא באה.
- נדרג את כלל התצפיות של המחקר (אם יש תצפיות עם ערכים זהים הדירוג שלהן יהיה ממוצע המקומות שהם תופסים)
- נחשב את W_1 - סכום הדירוגים של התצפיות השייכות למדגם 1,
- נחשב את W_2 - סכום הדירוגים של התצפיות השייכות למדגם 2.
- נחשב את הגדלים הבאים:

$$U_1 = W_1 - \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} \quad U_2 = W_2 - \frac{n_2(n_2 + 1)}{2}$$

- הסטטיסטי U: במבחן דו צדדי $U = \min(U_1, U_2)$ במבחן חד צדדי U יהיה ה- U_i , שאמור להיות יותר קטן לפי השערת המחקר.

כדי להגיע למסקנה יש שני סוגים של טבלאות סטטיסטיות.
 טבלה מהסוג הראשון: עוזרת לנו לחשב את מובהקות התוצאה לאחר שחישבנו את
 ה- U הסטטיסטי.

טבלה מהסוג השני שקובעת מראש את הערך הקריטי של U שנסמן ב- U_c .

טבלה מהסוג השני	טבלה מהסוג הראשון
n_1 או $n_2 \geq 9$	$n_1 - n_2 \leq 8$
נותנת את הערך הקריטי U_c כל הכרעה: נדחה את H_0 אם $U \leq U_c$	עוזרת לחשב על סמך תוצאות המדגם את P_v אם $P_v \leq \alpha$ דוחים את H_0 .

דוגמה:

מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

טבלאות למציאת מובהקות התוצאה במבחן ווילקוקסון למדגמים בלתי תלויים

 $n_2 = 3$

u	n_1		
	1	2	3
0	0.250	0.100	0.050
12	0.500	0.200	0.100
3	0.750	0.400	0.200
4		0.600	0.350
5			0.500
			0.650

 $n_2 = 4$

u	n_1			
	1	2	3	4
0	0.200	0.067	0.028	0.014
1	0.400	0.133	0.057	0.029
2	0.600	0.267	0.114	0.057
3		0.400	0.200	0.100
4		0.600	0.314	0.171
5			0.429	0.243
6			0.571	0.343
7				0.443
8				0.557

 $n_2 = 5$

u	n_1				
	1	2	3	4	5
0	0.167	0.047	0.018	0.008	0.004
1	0.333	0.095	0.036	0.016	0.008
2	0.500	0.190	0.071	0.032	0.016
3	0.667	0.286	0.125	0.056	0.028
4		0.429	0.196	0.095	0.048
5		0.571	0.286	0.143	0.075
6			0.393	0.206	0.111
7			0.500	0.278	0.155
8			0.607	0.365	0.210
9				0.452	0.274
10				0.548	0.345
11					0.421
12					0.500
13					0.579

$$n_2 = 6$$

u	n_1					
	1	2	3	4	5	6
0	0.143	0.036	0.012	0.005	0.002	0.001
1	0.286	0.071	0.024	0.010	0.004	0.002
2	0.428	0.143	0.048	0.019	0.009	0.004
3	0.571	0.214	0.083	0.033	0.015	0.008
4		0.321	0.131	0.057	0.026	0.013
5		0.429	0.190	0.086	0.041	0.021
6		0.571	0.274	0.129	0.063	0.032
7			0.357	0.176	0.089	0.047
8			0.452	0.238	0.123	0.066
9			0.548	0.305	0.165	0.090
10				0.381	0.214	0.120
11				0.457	0.268	0.155
12				0.545	0.331	0.197
13					0.396	0.242
14					0.465	0.294
15					0.535	0.350
16						0.409
17						0.469
18						0.531

$$n_2 = 7$$

u	n_1						
	1	2	3	4	5	6	7
0	0.125	0.028	0.008	0.003	0.001	0.001	0.000
1	0.250	0.056	0.017	0.006	0.003	0.001	0.001
2	0.375	0.111	0.033	0.012	0.005	0.002	0.001
3	0.500	0.167	0.058	0.021	0.009	0.004	0.002
4	0.625	0.250	0.092	0.036	0.015	0.007	0.003
5		0.333	0.133	0.055	0.024	0.011	0.006
6		0.444	0.192	0.082	0.037	0.017	0.009
7		0.556	0.258	0.115	0.053	0.026	0.013
8			0.333	0.158	0.074	0.037	0.019
9			0.417	0.206	0.101	0.051	0.027
10			0.500	0.264	0.134	0.069	0.036
11			0.583	0.324	0.172	0.090	0.049
12				0.394	0.216	0.117	0.064
13				0.464	0.265	0.147	0.082
14				0.538	0.319	0.183	0.104
15					0.378	0.223	0.130
16					0.438	0.267	0.159
17					0.500	0.314	0.191
18					0.562	0.365	0.228
19						0.418	0.267
20						0.473	0.310
21						0.527	0.355
22							0.402
23							0.451
24							0.500
25							0.549

$$n_2 = 8$$

u	n_1							
	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0.111	0.022	0.006	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.222	0.044	0.012	0.004	0.002	0.001	0.000	0.000
2	0.333	0.089	0.024	0.008	0.003	0.001	0.001	0.000
3	0.444	0.133	0.042	0.014	0.005	0.002	0.001	0.001
4	0.556	0.200	0.067	0.024	0.009	0.004	0.002	0.001
5		0.267	0.097	0.036	0.015	0.006	0.003	0.001
6		0.356	0.139	0.055	0.023	0.010	0.005	0.002
7		0.444	0.188	0.077	0.033	0.015	0.007	0.003
8		0.556	0.248	0.107	0.047	0.021	0.010	0.005
9			0.315	0.141	0.064	0.030	0.014	0.007
10			0.387	0.184	0.085	0.041	0.020	0.010
11			0.461	0.230	0.111	0.054	0.027	0.014
12			0.539	0.285	0.142	0.071	0.036	0.019
13				0.341	0.177	0.091	0.047	0.025
14				0.404	0.217	0.114	0.060	0.032
15				0.467	0.262	0.141	0.076	0.041
16				0.533	0.311	0.172	0.095	0.052
17					0.362	0.207	0.116	0.065
18					0.416	0.245	0.140	0.080
19					0.472	0.286	0.168	0.097
20					0.528	0.331	0.198	0.117
21						0.377	0.232	0.139
22						0.426	0.268	0.164
23						0.475	0.306	0.101
24						0.525	0.347	0.221
25							0.389	0.253
26							0.433	0.287
27							0.478	0.323
28							0.522	0.360
29								0.399
30								0.439
31								0.480
32								0.520

טבלה למציאת U_c

ברמת מובהקות של 5% למבחן חד צדדי או ברמת מובהקות של 10% למבחן דו צדדי במבחן ווילקוסון למדגמים בלתי תלויים.

n_1	n_2											
	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1											0	0
2	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4
3	3	4	5	5	6	7	7	8	9	9	10	11
4	6	7	8	9	10	11	12	14	15	16	17	18
5	9	11	12	13	15	16	18	19	20	22	23	25
6	12	14	16	17	19	21	23	25	26	28	30	32
7	15	17	19	21	24	26	28	30	33	35	37	39
8	18	20	23	26	28	31	33	36	39	41	44	47
9	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54
10	24	27	31	34	37	41	44	48	51	55	58	62
11	27	31	34	38	42	46	50	54	57	61	65	69
12	30	34	38	42	47	51	55	60	64	68	72	77
13	33	37	42	47	51	56	61	65	70	75	80	84
14	36	41	46	51	56	61	66	71	77	82	87	92
15	39	44	50	55	61	66	72	77	83	88	94	100
16	42	48	54	60	65	71	77	83	89	95	101	107
17	45	51	57	64	70	77	83	89	96	102	109	115
18	48	55	61	68	75	82	88	95	102	109	116	123
19	51	58	65	72	80	87	94	101	109	116	123	130
20	54	62	69	77	84	92	100	107	115	123	130	138

שאלות

- (1) מעוניינים להשוות בין שתי קבוצות כדורסל. נלקחו 5 משחקים מקבוצה א' ושישה משחקים מקבוצה ב'. נבדק בכל משחק ועבור כל קבוצה מספר הנקודות שצברה במשחק.

קבוצה א	קבוצה ב
68	82
82	74
78	82
94	64
87	67
	65

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין הקבוצות מבחינת הניקוד שצברה במשחק.

- (2) מעוניינים לבדוק האם קורס קיץ באנגלית משפר את יכולות האנגלית לתלמידי חטיבת ביניים. נלקחו 20 ילדים בגיל חטיבת הביניים ברמת אנגלית דומה. 12 מהם נשלחו לקורס קיץ והיתר לא. בסוף הקיץ כולם נבחנו במבחן באנגלית הציון הגבוה ביותר התקבל בקרב אחד שלא עשה את הקורס ושבעת הציונים הנמוכים ביותר היו גם בקרב תלמידים שלא עשו את הקורס. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

- (3) במחקר לבדיקת יעילות ויטמין C נבחרו 15 מתנדבים מבין עובדי המפעל. תשעה מהם נבחרו מקרית וקיבלו טיפול שוטף בוויטמין C, ואילו שאר המתנדבים (קבוצת הביקורת) קבלו גלולת סוכר. במשך שלוש שנות המחקר היו מספר ימי ההיעדרות בגלל ההצטננות:
קבוצת הטיפול: 1, 3, 9, 3, 4, 0, 8, 12, 16.
קבוצת הביקורת: 19, 7, 28, 13, 23, 12.
 בדקו ברמת מובהקות של 5% שמספר ימי המחלה במשך שלוש שנים מצטמצם ביותר מ-4 ימים עם לקיחת ויטמין C.

תשובות סופיות

- (1) לא נדחה את H_0 .
 (2) נדחה את H_0 .
 (3) לא נדחה את H_0 .

\\

שיטות מתקדמות ויישומים סטטיסטיים

פרק 9 - ניתוח שונות חד כיוונית

תוכן העניינים

79 1. כללי

ניתוח שונות חד כיוונית

רקע תיאורטי

ניתוח שונות (חד כיוונית) הוא מבחן להשוואת תוחלות (μ_1, \dots, μ_k) של k אוכלוסיות שונות. לכן, בנייתוח שונות, השערות המחקר הן:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k \quad (\text{התוחלות של כל האוכלוסיות שוות})$$

$$H_1: \quad \text{אחרת} \quad (\text{לפחות שתיים מהתוחלות שונות})$$

ההנחות הדרושות לביצוע התהליך:

- (1) בכל אוכלוסייה מתוך k האוכלוסיות ההתפלגות נורמלית.
- (2) כל האוכלוסיות הן עם אותה שונות σ^2 .
- (3) המדגמים בלתי תלויים זה בזה.

ישנו משתנה המבדיל בין הקבוצות השונות, הוא המשתנה הבלתי תלוי הנקרא גורם (factor). משתנה זה הוא קטגוריאלי עם k רמות (levels). כדי לבצע את התהליך יש לבצע מדגם מכל אוכלוסייה: נסמן ב- n_i את גודל המדגם בקבוצה i .

$$n = \sum_{i=1}^k n_i \quad \text{- מספר התצפיות סך הכול (בכל המדגמים).}$$

$$\bar{X}_1 - \text{ממוצע המדגם הראשון, } \dots, \bar{X}_k - \text{ממוצע המדגם ה-} k \text{-י.}$$

$$\bar{X} - \text{ממוצע כללי (של כל המדגמים).}$$

$$SS_B = \sum_{i=1}^k n_i [\bar{X}_i - \bar{X}]^2 \quad \text{סכום ריבועים בין הקבוצות:}$$

$$SS_W = \sum_{i=1}^k n_i [n_i - 1] \cdot \hat{S}_i^2 \quad \text{סכום ריבועים בתוך הקבוצות:}$$

$$SS_T = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_j} [X_{ij} - \bar{X}]^2 \quad \text{סכום ריבועים כללי:}$$

$$SST = SSB + SSW$$

יש למלא את טבלת ניתוח השונות הבאה :

מקור השונות	סכום הריבועים SS	דרגות חופש df	ממוצע הריבועים MS	F
B - בין הקבוצות	SSB	$k - 1$	$\frac{SSB}{k - 1}$	$\frac{MSB}{MSW}$
W - בתוך הקבוצות	SSW	$n - k$	$\frac{SSW}{n - k}$	
T - סה"כ	SST	$n - 1$		

$$F = \frac{\frac{SSB}{k-1}}{\frac{SSW}{n-k}} \sim F(k-1, n-k)$$

אזור דחיית $H_0 : 1-\alpha : F > F_{(k-1, n-k)}$

שאלות

- (1)** מחקר מעוניין להשוות בין שלוש תרופות לשיכוך כאבים במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין התרופות מבחינת הזמן בדקות שלוקח עד שהתרופה משפיעה. לצורך הבדיקה נלקחו 15 אנשים שסובלים מכאבי ראש. אנשים אלה חולקו באקראי לשלוש קבוצה: קבוצה 1 קיבלה "אקמול" קבוצה 2 קיבלה "אופטלגין" קבוצה 3 קיבלה "נורופן". כל אדם במחקר מסר את מספר הדקות עד שהתרופה השפיעה עליו.
- מהו המשתנה התלוי ומהו המשתנה הבלתי תלוי במחקר?
 - מהו ה"גורם" וכמה רמות יש לו?
 - מהו המבחן הסטטיסטי המתאים כאן? רשמו את ההשערות.
 - מה הן ההנחות הדרושות כדי לבצע את המבחן הסטטיסטי שהצעת בסעיף הקודם?

- (2)** בעיר מסוימת שלושה בתי ספר תיכון. ראש העיר התעניין לבדוק האם קיים הבדל בהצלחה של בתי הספר במקצוע מתמטיקה. לצורך כך הוא דגם מספר תלמידים שנבחנו במבחן הבגרות במתמטיקה ברמה של 3 יחידות בעירו ובדק עבור כל תלמיד מה ציון הבגרות שלו במתמטיקה. להלן הציונים שהתקבלו:

"הס"	"רבין"	"המתמיד"
85	98	78
83	62	65
74	55	70
85	80	90
75		56

- מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?
- רשמו את ההשערות ואת ההנחות של המבחן.
- מהו גודל המדגם? מהו המשתנה הבלתי תלוי (factor) כמה רמות יש לו?
- חשבו את הממוצע ואת סטיית התקן של הציונים בכל אחד מהמדגמים.
- מלאו את טבלת ANOVA.
- רשמו את כלל ההכרעה למבחן שהוצע בסעיף א ברמת מובהקות של 5%.
- האם קיים הבדל בין בתי הספר בעיר מבחינת רמת הצלחת התלמידים במקצוע המתמטיקה? ענה על סמך הסעיפים הקודמים.

- (3)** מעוניינים לבדוק האם יש הבדל בהשפעה של שיטות טפול שונות על לחץ הדם הסיסטולי (SBP) באוכלוסייה של קשישים. נבדקו 4 שיטות שונות. בטבלה המצורפת מרוכזים ממצאי המחקר.

D	C	B	A	השיטה
12	8	14	12	גודל המדגם
182	180	172	178	הממוצע
3	5	8	4	סטיית התקן

- רשמו את השערות המחקר וההנחות הדרושות כדי לבצע את המבחן המתאים.
- מה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 5%?
- האם יש צורך לבצע השוואות מרובות?

- 4) שלושה אופים נתבקשו להכין עוגת שוקולד. לכל אופה בדקו את משך זמן ההכנה בדקות. כל אופה נדרש לאפות בכל יום 4 עוגות. האם קיים הבדל בין האופים מבחינת תוחלת זמני ההכנה של העוגות? בדקו ברמת מובהקות של 5%.

האופה	ניר	מוזס	שלום
סכום הזמנים	206	212	182
סכום ריבועי הזמנים	10644	11250	8982

- 5) להלן טבלת ניתוח שונות חד כיוונית. במחקר בחנו 4 סוגי סוללות. רצו לבדוק האם לסוג הסוללה השפעה על תוחלת אורך החיים שלה. הפעילו את כל הסוללות על אותו מכשיר ובדקו את אורך החיים של כל סוללה בשעות. מה המסקנה ברמת מובהקות של 10%? רשמו את ההשערות וההנחות הדרושות.

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	10.317	3	3.439	1.361	.279
Within Groups	60.648	24	2.527		
Total	70.964	27			

- 6) להלן טבלת ANOVA בטבלה הושמטו חלקים. השלימו את החלקים בטבלה שהושמטו ומסומנים באותיות.

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	357.450	ב	ג	ה	.000
Within Groups	א	17	ד		
Total	522.950	19			

7) חברת תרופות לקחה 15 אנשים ברמת בריאות דומה. החברה חילקה את האנשים ל שלוש קבוצות שוות בגודלן. לכל קבוצה ניתנה אותה תרופה במינון שונה (dosage). המינונים שניתנו הם: 10 מ"ג, 20 מ"ג ו-30 מ"ג. לאחר שעה מזמן לקיחת התרופה נבדק קצב פעימות הלב של כל אדם (pulse). הנתונים הוזנו לתוכנה סטטיסטית והתקבלו התוצאות הבאות:

ANOVA						pulse			
pulse						Tukey HSD ^a			
	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	dosage	N	Subset for alpha = 0.05	
								1	2
Between Groups	414.400	2	207.200	19.733	.000	30.00	5	71.0000	
Within Groups	126.000	12	10.500			20.00	5		80.2000
Total	540.400	14				10.00	5		83.4000
						Sig.		1.000	.299

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.
a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 5.000.

Post Hoc Tests

Multiple Comparisons

(I) dosage		(J) dosage	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
						Lower Bound	Upper Bound
10.00	20.00	30.00	3.20000	2.04939	.299	-2.2675	8.6675
		30.00	12.40000 [*]	2.04939	.000	6.9325	17.8675
20.00	10.00	30.00	-3.20000	2.04939	.299	-8.6675	2.2675
		30.00	9.20000 [*]	2.04939	.002	3.7325	14.6675
30.00	10.00	20.00	-12.40000 [*]	2.04939	.000	-17.8675	-6.9325
		20.00	-9.20000 [*]	2.04939	.002	-14.6675	-3.7325

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

- א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין המינונים השונים מבחינת תוחלת הדופק של האנשים? רשמו את ההשערות וההנחות הדרושות לצורך פתרון.
- ב. הסבירו ללא חישוב כיצד הייתה משתנה התשובה לסעיף הקודם אם הינו מעלים את הדופק של כל התצפיות במחקר ב-2.
- ג. האם יש צורך במחקר בהשוואת מרובות. נמקו!
- ד. לטבלת ANOVA צורפו טבלאות של השוואות מרובות בשיטה הנקראת "טוקי". ברמת בטחון של 95% מה הם הממצאים לפי שיטה זו?

- 8) בעיר מסוימת רצו לבדוק האם קיים הבדל ברמה של התלמידים בין בתי הספר השונים בעיר. ביצעו מדגם מכל בית ספר ונתנו מבחן זהה לכל הנדגמים. לאחר מכן ריכזו את הנתונים בתוכנה סטטיסטית והפעילו ניתוח שונות. מצורפים הפלטים שהתקבלו. ענו על הסעיפים הבאים:
- כמה בתי ספר יש בעיר?
 - כמה תלמידים השתתפו בסך הכול במחקר?
 - האם קיים הבדל בין בתי הספר בעיר מבחינה רמת הציונים? בדקו ברמת מובהקות של 1%
 - בביטחון של 95% אילו בתי ספר שונים זה מזה ברמת התלמידים? נמקו והסבירו.

Oneway

ANOVA

grade

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	7799.600	4	1949.900	13.586	.000
Within Groups	2870.400	20	143.520		
Total	10670.000	24			

Post Hoc Tests

Multiple Comparisons

grade

Scheffe

(I) school	(J) school	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Lower Bound	Upper Bound
1.00	2.00	5.40000	7.57681	.971	-20.2543	31.0543
	3.00	36.80000*	7.57681	.003	11.1457	62.4543
	4.00	36.40000*	7.57681	.003	10.7457	62.0543
	5.00	-2.60000	7.57681	.998	-28.2543	23.0543
2.00	1.00	-5.40000	7.57681	.971	-31.0543	20.2543
	3.00	31.40000*	7.57681	.011	5.7457	57.0543
	4.00	31.00000*	7.57681	.013	5.3457	56.6543
	5.00	-8.00000	7.57681	.888	-33.6543	17.6543
3.00	1.00	-36.80000*	7.57681	.003	-62.4543	-11.1457
	2.00	-31.40000*	7.57681	.011	-57.0543	-5.7457
	4.00	-.40000	7.57681	1.000	-26.0543	25.2543
	5.00	-39.40000*	7.57681	.001	-65.0543	-13.7457
4.00	1.00	-36.40000*	7.57681	.003	-62.0543	-10.7457
	2.00	-31.00000*	7.57681	.013	-56.6543	-5.3457
	3.00	.40000	7.57681	1.000	-25.2543	26.0543
	5.00	-39.00000*	7.57681	.001	-64.6543	-13.3457
5.00	1.00	2.60000	7.57681	.998	-23.0543	28.2543
	2.00	8.00000	7.57681	.888	-17.6543	33.6543
	3.00	39.40000*	7.57681	.001	13.7457	65.0543
	4.00	39.00000*	7.57681	.001	13.3457	64.6543

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Homogeneous Subsets

grade

Scheffe^a

school	N	Subset for alpha = 0.05	
		1	2
3.00	5	45.0000	
4.00	5	45.4000	
2.00	5		76.4000
1.00	5		81.8000
5.00	5		84.4000
Sig.		1.000	.888

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.

a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 5.000.

תשובות סופיות

1) א. משתנה בלתי תלוי : סוג התרופה. ב. ניתוח שונות חד כיווני

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$H_1 : otherwise$$
 משתנה תלוי : הזמן עד להשפעת התרופה בדקות.

- ג. 1. מדגמים בלתי תלויים.
- 2. שווין שונויות.
- 3. משתנים מתפלגים נורמלית.

2) א. המבחן לניתוח שונות חד כיוונית.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$H_1 : otherwise$$

הנחות :

- 1. מדגמים בלתי תלויים.
- 2. משתנים מתפלגים נורמלית.
- 3. שווין שונויות.
- ב. גודל המדגם : 14. משתנה ב"ת : בית הספר, בעל 3 רמות.
- ג. $\bar{X} = 80.4, \hat{S} = 5.46, \bar{X} = 73.75, \hat{S} = 19.29, \bar{X} = 71.8, \hat{S} = 12.93$.
- ד. להלן טבלה :

F	MS	df	SS	מקור השונות
	100.3	2	200.6	B
	173.2	11	1904.75	W
0.58		13	2105.35	סה"כ

ה. $F > 3.98$.

ו. נקבל את H_0 .

3) א. $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ ב. נדחה את H_0 . ג. כן.

הנחות :

- 1. מדגמים בלתי תלויים.
- 2. שווין שונויות.
- 3. משתנים מתפלגים נורמלית.

4) נקבל את H_0 : נכריע שאין הבדל מובהק בין האופים מבחינת תוחלת זמן הכנה.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 \quad (5)$$

$$H_1 : otherwise$$

הנחות :

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. שוויון שונות.

3. משתנים מתפלגים נורמלית.

נקבל את H_0 : לסוג סוללה אין השפעה של תוחלת החיים ברמת ביטחון של 10%.

6) להלן טבלה :

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	357.450	2 ב	178.725 ג	18.36 ה	.000
Within Groups	165.5 א	17	9.735 ד		
Total	522.950	19			

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \quad (7) \quad \text{א.}$$

$$H_1 : otherwise$$

הנחות :

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. משתנים מתפלגים נורמלית.

3. שוויון שונות.

נדחה את H_0 : ברמת ביטחון של 5% קיים הבדל במינונים השונים מבחינת תוחלת הדופק.

$$\text{ב. ראה וידאו. ג. כן. ד. } \mu_{20} = \mu_{10} > \mu_{30} .$$

$$\text{א. 5 ב. 25} \quad (8)$$

ג. נדחה את H_0 : יש לפחות שני בתי ספר בעיר עם תוחלת רמת ציונים שונה.

$$\text{ד. } (\mu_3 = \mu_4) < (\mu_1 = \mu_2 = \mu_3) .$$

שיטות מתקדמות ויישומים סטטיסטיים

פרק 10 - ניתוח שונות דו כיווני

תוכן העניינים

88	1. הקדמה
98	2. אפקטים פשוטים, עיקריים ואינטראקציה
110	3. תהליך ניתוח שונות דו כיווני
(ללא ספר)	4. ניתוח פלטים

ניתוח שונות דו-כיווני - הקדמה

רקע

ראשית, נחזור על עיקרי ניתוח השונות החד-כיווני (חד-גורמי).

בניתוח שונות חד-כיווני יש משתנה תלוי יחיד, שהוא כמותי, ומשתנה בלתי תלוי יחיד, שהוא משתנה קטגוריאלי (משתנה שהערכים שלו שייכים למספר סופי של קטגוריות). המשתנה הקטגוריאלי נקרא לעתים גם גורם (פקטור), והקטגוריות שלו נקראות רמות. המטרה בניתוח שונות חד-כיווני היא לבדוק האם לגורם יש השפעה מובהקת על המשתנה התלוי. השערת האפס של המחקר בניתוח שונות חד-כיווני היא שבכל הקטגוריות יש אותה התוחלת, והשערת המחקר טוענת שיש לפחות שתי קטגוריות שבהן התוחלות שונות.

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

נבדקו שלושה סוגי דיאטות על אנשים בעלי משקל עודף. נבחרו 30 מטופלים בעלי משקל עודף, והם חולקו באקראי לשלוש קבוצות שוות בגודלן, כך שכל קבוצה קיבלה דיאטה נחקרת אחרת. כעבור שלושה חודשים בדקו את מספר הקילוגרמים שהפחית כל מטופל ממשקלו בתקופה זו. מטרת המחקר הייתה לבדוק האם קיים הבדל בין הדיאטות מבחינת ההפחתה במשקל.

- מהו המשתנה התלוי במחקר?
- מהו המשתנה הבלתי תלוי במחקר? כמה רמות יש לו?
- מה הן השערות המחקר?
- מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?

בניתוח שונות דו-כיווני אנו מוסיפים עוד משתנה בלתי תלוי למחקר, כלומר עוד גורם שאנו רוצים לבדוק איך הוא משפיע על המשתנה התלוי. לכן בניתוח שונות דו-כיווני יש משתנה תלוי כמותי יחיד ושני משתנים בלתי תלויים שכל אחד מהם קטגוריאלי. כזכור, למשתנים הבלתי תלויים אנו קוראים גם גורמים (פקטורים), ומספר הקטגוריות של כל גורם נקרא גם מספר הרמות שלו. ניתוח שונות רב-כיווני או רב-גורמי הוא ניתוח שונות שבו יש יותר מגורם אחד, כלומר יותר ממשתנה בלתי תלוי קטגוריאלי אחד. בניתוח שונות דו-כיווני יש שני גורמים, בניתוח שונות תלת-גורמי יש שלושה גורמים וכו'. ככל שנוסיף גורמים, הניתוח הסטטיסטי יהיה מורכב יותר ויידרשו יותר תצפיות למחקר אבל כיוון שהוא יקטין את שונות הטעויות (שונות מקרית) וייתן יותר הסבר לשונות הכללית, כך שהמבחן יהיה עוצמתי יותר.

המשך הדוגמה:

מבין 30 המטופלים שבמחקר 15 היו גברים ו-15 היו נשים. המטופלים חולקו כך שבכל דיאטה השתתפו 5 גברים ו-5 נשים.

מה הם המשתנים הבלתי תלויים? כמה רמות יש לכל משתנה?

בניתוח שונות דו-כיווני אנו בעצם רוצים לבדוק סימולטנית שלוש שאלות מחקר על אוכלוסיית כבדי המשקל:

- האם יש הבדלים משמעותיים בין שיעורי הפחתת המשקל של מטופלים כבדי משקל כתוצאה משימוש בדיאטות שונות?
- האם יש הבדלים משמעותיים בין שיעורי הפחתת המשקל של מטופלים כבדי משקל כתוצאה ממגדר שונה?
- האם יש השפעה משולבת (אינטראקציה) של שני הגורמים הנבדקים על הפחתת המשקל של מטופלים כבדי משקל, כלומר האם צירוף של דיאטה מסוימת ומגדר מסוים מביא להפחתת משקל גדולה יותר או קטנה יותר מצירופים אחרים?

נסמן גורם אחד ב- a ואת מספר הרמות שלו ב- A . באותו האופן הגורם האחר יסומן ב- b , ואת מספר הרמות שלו נסמן ב- B . מספר הקבוצות הכולל שאנו יוצרים הוא $A \cdot B$.

המשך הדוגמה:

- בחרו גורם אחד להיות a וגורם אחר להיות b . מהו A ומהו B ?
- כמה קבוצות שונות נוצרו במחקר?

נסמן ב- m את מספר התצפיות בכל תא (בהנחה שהוא יהיה מספר קבוע). תא הוא שילוב של רמה מסוימת של גורם a עם רמה מסוימת של גורם b .

המשך הדוגמה:

- כמה תאים (קבוצות) יש במחקר?
- מה ערכו של m ?
- מהו הקשר המתמטי בין m לבין n , גודל המדגם?

נסמן ב- a_1 את הרמה הראשונה של a , ב- a_2 את הרמה השנייה שלו וכך הלאה.
 נסמן ב- b_1 את הרמה הראשונה של b , ב- b_2 את הרמה השנייה שלו וכך הלאה.
 נסמן ב- μ_i את התוחלת ברמה a_i . נסמן ב- μ_j את התוחלת ברמה b_j . נסמן ב- μ_{ij} את התוחלת של תא ij .

המשך הדוגמה:

- מה המשמעות של μ_1 ושל μ_2 ?
- מה המשמעות של μ_{12} ושל μ_{21} ?

השערות המחקר בניתוח שונות דו-כיווני

את השערות המחקר בניתוח שונות דו-כיווני אפשר לרשום בצורות רבות:

לגורם a אין השפעה על המשתנה התלוי: H_0

אחרת: H_1

לגורם b אין השפעה על המשתנה התלוי: H_0

אחרת: H_1

אין אינטראקציה בין שני הגורמים: H_0

אחרת: H_1

דרך אחרת היא שימוש בתוחלות:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_A.$$

H_1 : אחרת

$$H_0: \mu_{.1} = \mu_{.2} = \dots = \mu_{.B}$$

H_1 : אחרת

H_0 : אין אינטראקציה בין שני הגורמים

H_1 : אחרת

המשך הדוגמה:

אם אנחנו מעוניינים לבצע ניתוח שונות דו-כיווני, מה הן ההשערות הנחקרות?

שאלות

- (1) בחברת טקסטיל בחנו 4 סוגי בדים שונים מבחינת חוזקם. דגמו 5 חתיכות בד מכל סוג ובדקו את חוזק הקריעה של כל סוג בד.
- מהו המשתנה התלוי במחקר?
 - כמה משתנים בלתי תלויים יש במחקר? מה הם?
 - מהו המבחן הסטטיסטי המתאים במקרה זה?
- (2) במחקר בתחום הפסיכולוגיה נדגמו אנשים הסובלים מחרדות מסוגים שונים. כל מטופל סווג כסובל מאחד מסוגי החרדות הבאים: חרדה חברתית, חרדה כללית או אגורפוביה. במחקר השתתפו 6 מטופלים מכל סוג חרדה שצוין. המטופלים במחקר חולקו כך שכל מטופל היה צריך לעבור במשך שנה את אחד מהטיפולים הבאים: טיפול קוגניטיבי התנהגותי (CBT), טיפול קבוצתי או טיפול דיאלקטי התנהגותי (DBT). בכל סוג טיפול השתתפו 2 מטופלים מכל סוג חרדה. בסוף השנה נבדקו כל המטופלים וקיבלו ציון כמותי על השיפור במצבם הנפשי (משתנה כמותי). מטרת המחקר הייתה לבדוק האם סוג החרדה, סוג הטיפול והשילוב ביניהם משפיעים על המצב הנפשי של המטופלים.
- מהו גודל המדגם?
 - מהו המשתנה התלוי במחקר הזה ומה הם המשתנים הבלתי תלויים?
 - כמה קטגוריות יש לכל משתנה בלתי תלוי?
 - כמה קבוצות שונות יש במערך המחקרי?
 - מהו המבחן הסטטיסטי המתאים במערך מחקרי זה?

3) מחקר שיווקי בדק את השפעת גובה המדף בסופרמרקט והשפעת החומר שממנו עשוי הבקבוק (זכוכית או פלסטיק) על היקף המכירות של משקאות קלים. נבדקו שני סופרמרקטים. בכל סופרמרקט נבחן כל צירוף אפשרי של גובה המדף וחומר הבקבוק, ועבור כל צירוף כזה נבדק מספר בקבוקי המשקה הקל שנמכרו באותו סופרמרקט ביום מסוים. הנה התוצאות שהתקבלו:

פלסטיק	זכוכית	סוג בקבוק
		גובה המדף
59	23	נמוך
63	32	
88	47	בינוני
90	55	
51	40	גבוה
56	48	

- מהו המבחן הסטטיסטי המתאים? נמקו.
- מהו מספר הרמות של כל גורם מחקרי?
- מה יהיו השערות המחקר אם יתבצע ניתוח שונות דו-כיווני?
- מהו ערכו של m ומהו ערכו של n ?

4) יצרן של נוזל כביסה מעוניין לבחון שני נוזלי ניקוי מבחינת יעילותם בהסרת כתמים בשלוש רמות טמפרטורה. בכל אחד מששת הצירופים של סוג נוזל וטמפרטורה נבחנה יכולת הסרת הכתמים מבדים דומים, וניתן ציון בין 0 ל-15 (הציון הטוב ביותר).

מספר סידורי	סוג הנוזל	טמפרטורה במעלות צלזיוס	ציון הסרת כתמים
1	C	30	4
2	C	30	5
3	C	30	4
4	C	30	6
5	C	40	6
6	C	40	6
7	C	40	7
8	C	40	6
9	C	60	9
10	C	60	8
11	C	60	7
12	C	60	10
13	w	30	9
14	w	30	9
15	w	30	9
16	w	30	10
17	w	40	12
18	w	40	13
19	w	40	11
20	w	40	11
21	w	60	14
22	w	60	14
23	w	60	15
24	w	60	13

- א. כמה משתנים יש במחקר?
- ב. לגבי כל משתנה קבעו האם הוא משתנה תלוי או בלתי תלוי.
- ג. כמה רמות יש לכל גורם?
- ד. אם נבצע ניתוח שונות דו-כיוונית, מה יהיו השערות המחקר?
- ה. רכזו את נתוני המחקר בטבלה שבה בשורות גורם אחד, בעמודות גורם שני ובתאים התוצאות שהתקבלו למשתנה התלוי.

5) קבעו לגבי כל אחד מהבאים האם הוא משתנה קטגוריאל:

- א. מספר הניתוחים שעבר אדם בחייו.
- ב. אחוז האבטלה בישראל בחודש זה.
- ג. סוג הדם של חולה.
- ד. שונות הציונים בבחינת הבגרות באנגלית במועד האחרון.
- ה. משקל חבילה בדואר בגרמים.
- ו. היבשת שאירחה את משחקי המונדיאל.

בשאלות הבאות יש לבחור את התשובה הנכונה ביותר:

- 6) משרד החינוך רוצה לבדוק עד כמה שיטת הוראה (יש 3 שיטות הוראה מקובלות) ומגדר משפיעים על ציוני הבגרות בהיסטוריה. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים למחקר זה?
- א. מבחן T להשוואת תוחלות.
 - ב. ניתוח שונות חד-כיוונית.
 - ג. ניתוח שונות דו-כיוונית.
 - ד. מבחן T לתוחלת אחת.

- 7) מחלקת שירות הלקוחות של חברת החשמל דגמה עובדים כדי לבחון האם ככל שמספר שנות הוותק של נותן השירות גדול יותר גדל גם מספר הלקוחות שבו הוא מטפל במהלך משמרת. מהו המבחן הסטטיסטי שיכול לבדוק זאת?
- א. מבחן T להשוואת תוחלות.
 - ב. ניתוח שונות חד-כיוונית.
 - ג. ניתוח שונות דו-כיוונית.
 - ד. אף אחת מהאפשרויות שלעיל.

8) האיחוד האירופי המשותף דגם 10 עובדים מתחום ההוראה בכל אחת מהמדינות הבאות: הולנד, צרפת, בלגיה, גרמניה ואוסטריה. לכל עובד בדקו את גובה המשכורת החודשית שלו ביורו. אם נרצה להשוות בין המדינות הללו מבחינת תוחלת השכר של עובדי ההוראה במדינה, מה יהיה המבחן הסטטיסטי המתאים?

- א. מבחן T להשוואת תוחלות
- ב. ניתוח שונות חד-כיווני
- ג. ניתוח שונות דו-כיווני
- ד. אף אחת מהאפשרויות שלעיל

9) בקו ייצור 2 סוגים של מכונות ו-3 רמות ותק של מפעיל המכונה (עד שנתיים במפעל, בין שנתיים ל- חמש שנים במפעל, יותר מחמש שנים במפעל). מנהל הייצור רוצה לבדוק אם קיימת השפעה של סוג המכונה והוותק של המפעיל על מספר המוצרים הפגומים שיוצאים מהמכונה. מה יהיה המבחן הסטטיסטי המתאים במקרה זה?

- א. מבחן T להשוואת תוחלות.
- ב. ניתוח שונות חד-כיווני.
- ג. ניתוח שונות דו-כיווני.
- ד. ניתוח שונות תלת-כיווני.

10) במחקר נאספו הנתונים הבאים על קבוצת נחקרים:

1. כמה כוסות קפה הנחקר שותה ביום: לא שותה / 1-2 כוסות/ יותר מ-2 כוסות.

2. מין הנחקר: גבר/אישה.

3. דופק (מספר פעימות בדקה) שעתיים אחרי הקימה.

מטרת המחקר הייתה לבדוק האם מספר כוסות הקפה שאדם שותה ביום משפיע על הדופק אצל גברים אחרת מאשר אצל נשים. מה יהיה המבחן הסטטיסטי המתאים במקרה זה?

- א. מבחן T להשוואת תוחלות.
- ב. ניתוח שונות חד-כיווני.
- ג. ניתוח שונות דו-כיווני.
- ד. ניתוח שונות תלת-כיווני.

- 11) במחקר יש משתנה כמותי אחד ושני גורמים שלכל אחד מהם שתי רמות. אילו מהמשפטים הבאים אינו נכון?
- אפשר מבחינה טכנית לבדוק כיצד כל גורם בנפרד משפיע על המשתנה התלוי באמצעות ניתוח שונות חד-כיווני שייערך לכל גורם בנפרד.
 - אפשר מבחינה טכנית להשוות בין התוחלות של כל רמה בגורם הראשון על ידי מבחן T להשוואת תוחלות.
 - אפשר מבחינה טכנית לבצע ניתוח שונות דו-כיווני במערך מחקרי זה.
 - כיוון שבמחקר יש בסך הכול שלושה משתנים, אפשר מבחינה טכנית לבצע ניתוח שונות תלת-כיווני.

תשובות סופיות

- א. חוזק הקריעה.
 - ג. ניתוח שונות חד גורמי.
- א. 18
 - ב. המשתנה התלוי: ציון במצב הנפש. המשתנים הב"ת: סוג חרדה, סוג הטיפול.
 - ג. 3,3
 - ה. ניתוח שונות דו גורמי.
- א. ניתוח שונות דו גורמי.
 - ב. 3,2
 - ג. H_0 : אין אינטראקציה, H_1 : יש אינטראקציה.
 - ד. $m = 2, n = 12$
- א. 3
 - ב. משתנים ב"ת: סוג הנוזל, טמפרטורה. משתנה תלוי: ציון הסרת כתמים.
 - ג. 3,2
 - ד. H_0 : אין אינטראקציה בין הגורמים, H_1 : אחרת.
 - ה. עיין בסרטון הוידאו.
- א. כן.
 - ב. לא.
 - ג. כן.
 - ד. לא.
 - ה. תלוי.
 - ו. כן.
- ג.
- ד.
- ב.
- ג.
- ג.
- ד.

אפקטים פשוטים, עיקריים ואינטראקציה

רקע

בניתוח שונות דו-כיווני אנו דנים במשתנה כמותי תלוי יחיד ובשני משתנים בלתי תלויים (גורמים) המחולקים כל אחד למספר רמות. מטרת המחקר היא לבדוק שלוש השערות שונות:

לגורם a אין השפעה על המשתנה התלוי: H_0

אחרת: H_1

לגורם b אין השפעה על המשתנה התלוי: H_0

אחרת: H_1

אין אינטראקציה בין שני הגורמים: H_0

אחרת: H_1

נרצה להבין מה בדיוק כל השערה בודקת לגבי האוכלוסייה הנחקרת.

אפקט עיקרי: אם יש שתי קטגוריות (רמות) לפחות של גורם מסוים שהתוחלות שלהן שונות, נאמר שלגורם זה יש השפעה על המשתנה התלוי. השפעה זאת נקראת "אפקט עיקרי". למשל, אם יימצאו לפחות שתי תרופות נוגדות דיכאון שונות שמביאות לתוחלות שונות במצב הנפשי, נגיד שלסוג התרופה יש השפעה על המצב הנפשי, כלומר יש אפקט עיקרי. כמות האפקטים העיקריים שאפשר למצוא היא כמות הגורמים במחקר.

אפקט אינטראקציה: מצב שבו גורם אחד משפיע על המשתנה התלוי באופן שונה בקטגוריות שונות של הגורם השני. למשל, תרופה נוגדת דיכאון אחת מביאה את הגברים למצב רוח טוב יותר מאשר את הנשים לעומת תרופה אחרת שמביאה דווקא את הנשים למצב רוח טוב יותר מאשר את הגברים. אפקט האינטראקציה הוא יחיד, כלומר נאמר אם יש או אין אינטראקציה. כמו כן הוא אפקט סימטרי: אם קיימת אינטראקציה בין מגדר לסוג התרופה, יש גם אינטראקציה בין סוג התרופה למגדר.

אפקט פשוט: אפקט פשוט מתייחס להשפעת גורם אחד על המשתנה התלוי בתוך קטגוריה מסוימת של הגורם השני. למשל, נרצה לבדוק רק בקטגוריה של הגברים האם קיים הבדל בין התרופות נוגדות הדיכאון. אם נמצא הבדלים כאלה נאמר שיש

אפקט פשוט של סוג התרופה בקרב אוכלוסיית הגברים. כמות האפקטים הפשוטים שאפשר למצוא היא סכום מספר הקטגוריות (רמות) של כל גורם. למשל, אם יש שלושה סוגי תרופות ושתי אפשרויות למגדר, בסך הכול נוכל לבדוק 5 אפקטים פשוטים.

דוגמה

נבדקו שלושה סוגי דיאטות על אנשים בעלי משקל עודף. כעבור שלושה חודשים בדקו כמה קילוגרמים הפחית כל מטופל ממשקלו באותה התקופה. נניח שאנו יודעים את תוחלת הפחתת המשקל של כל דיאטה בחלוקה למגדרים.

נתאר כמה מצבים אפשריים לגבי האוכלוסייה הנחקרת וננתח כל מצב מבחינת ההשפעה של כל גורם על תוחלת המשתנה התלוי ומבחינת אפקט האינטראקציה.

שימו לב שהמצבים שנתאר להלן מתייחסים לתוחלות האמיתיות. בניתוח שונות אין לנו נתוני אמת, אלא רק נתוני מדגם, ונרצה לבדוק האם האפקטים שהתקבלו במדגם הם מובהקים, כנדרש בכל תהליך של הסקה סטטיסטית.

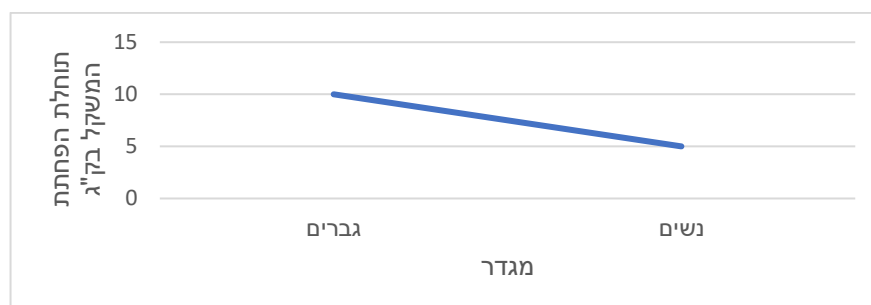
אם התוצאות שלנו יהיו ממוצעי מדגם ולא תוחלות, נוכל לבדוק אם קיימים אפקטים במדגם, אך אין זה אומר שקיימים אפקטים באוכלוסייה, כלומר לא נוכל לדעת אם האפקטים במדגם הם מובהקים. כדי לבדוק אם האפקטים הם מובהקים נצטרך לעשות את מבחן ניתוח השונות.

מצב א:

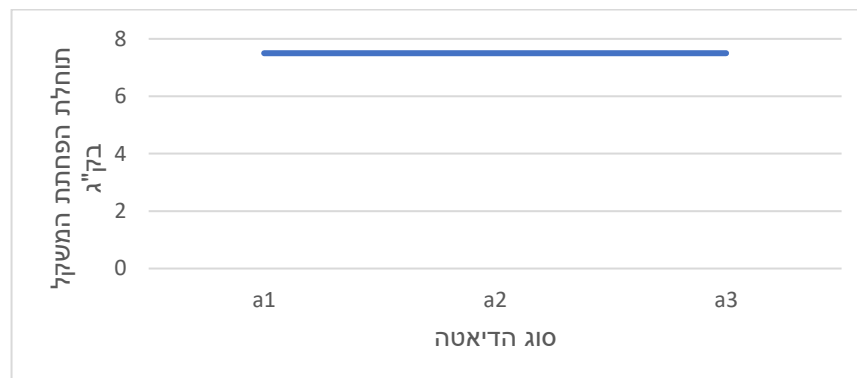
הטבלה הבאה מתארת את תוחלת הפחתת המשקל בק"ג לכל קבוצה:

נשים	גברים	
5	10	a_1
5	10	a_2
5	10	a_3

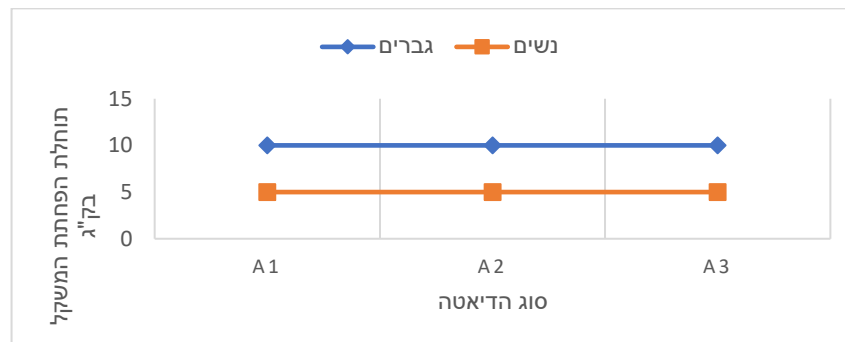
תיאור גרפי לבדיקת אפקט למגדר



תיאור גרפי לבדיקת אפקט לסוג הדיאטה



גרף אפקטים פשוטים



ניתוח המצב: למגדר יש אפקט, לסוג הדיאטה אין אפקט, אין אפקט אינטראקציה. הערה: אם הקווים הנוצרים בגרף האפקטים הפשוטים מקבילים או מתלכדים, אנו אומרים שאין אפקט אינטראקציה.

מצב ב

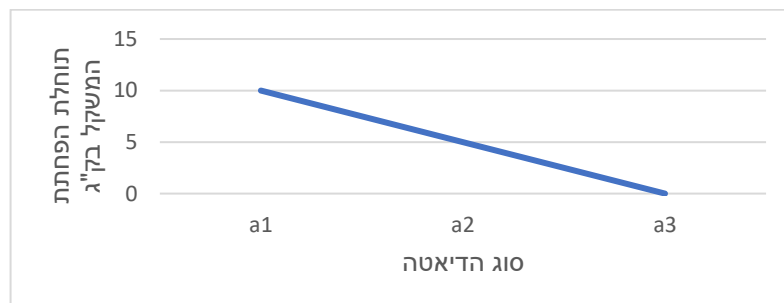
הטבלה הבאה מתארת את תוחלת הפחתת המשקל בק"ג לכל קבוצה:

נשים	גברים	
10	10	a_1
5	5	a_2
0	0	a_3

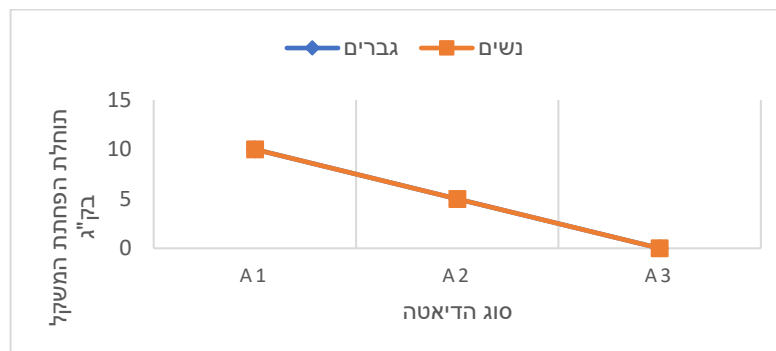
תיאור גרפי לבדיקת אפקט למגדר



תיאור גרפי לבדיקת אפקט לסוג הדיאטה



גרף אפקטים פשוטים

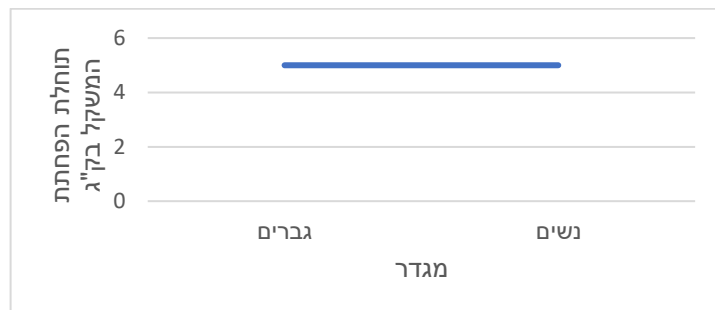
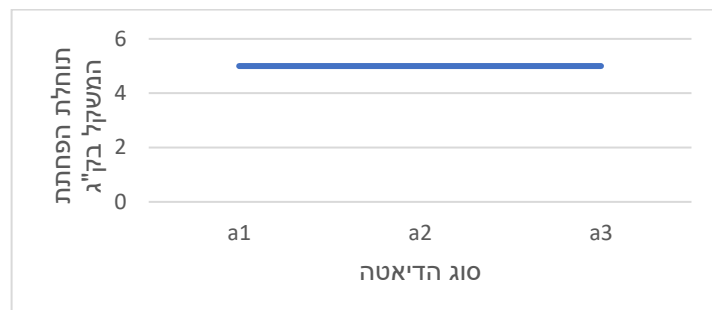
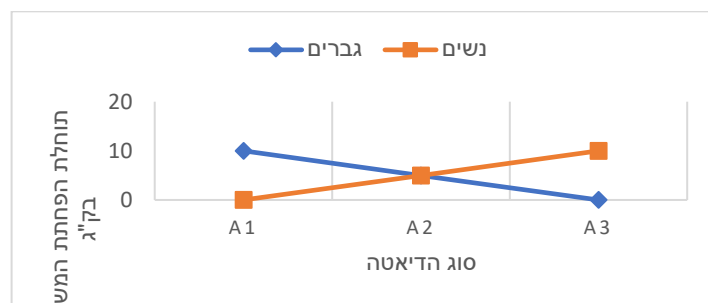


ניתוח המצב: למגדר אין אפקט, לסוג הדיאטה יש אפקט, אין אפקט אינטראקציה.

מצב ג

הטבלה הבאה מתארת את תוחלת הפחתת המשקל בק"ג לכל קבוצה:

נשים	גברים	
0	10	a_1
5	5	a_2
10	0	a_3

תיאור גרפי לבדיקת אפקט למגדר**תיאור גרפי לבדיקת אפקט לסוג הדיאטה****גרף אפקטים פשוטים**

ניתוח המצב: למגדר אין אפקט, לסוג הדיאטה אין אפקט, יש אפקט אינטראקציה.

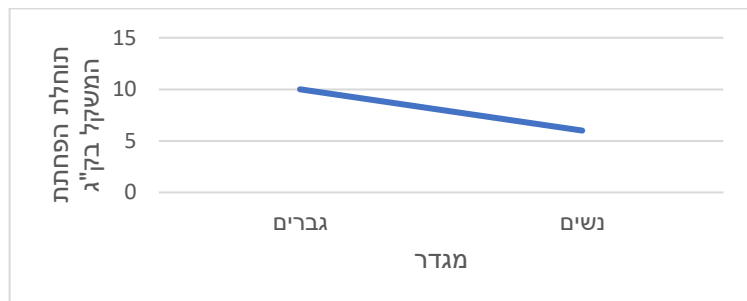
אינטראקציה דיסאורדינלית (נקראת גם "אינטראקציה מהותית"): אפשר לזהות מצב של אינטראקציה כזו באמצעות גרף של אפקטים פשוטים, כאשר נוצרים קווים נחתכים שאחד מהם עולה והאחר יורד. המשמעות היא שגורם אחד משפיע על המשתנה התלוי ברמה מסוימת של הגורם השני באופן הפוך משהוא משפיע על המשתנה התלוי ברמה אחרת של הגורם השני. במצב זה אין להתייחס לאפקטים עיקריים. יש להתייחס רק לאפקטים הפשוטים.

מצבה

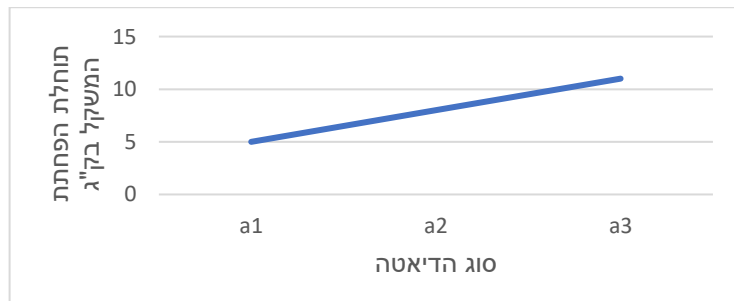
הטבלה הבאה מתארת את תוחלת הפחתת המשקל בק"ג לכל קבוצה:

נשים	גברים	
5	5	a_1
6	10	a_2
7	15	a_3

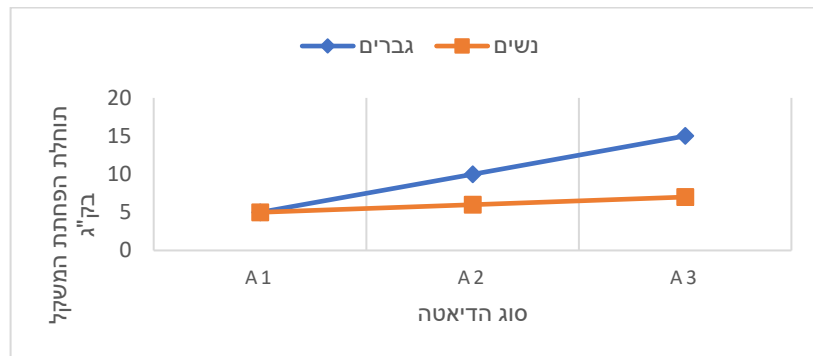
תיאור גרפי לבדיקת אפקט למגדר



תיאור גרפי לבדיקת אפקט לסוג הדיאטה



גרף אפקטים פשוטים



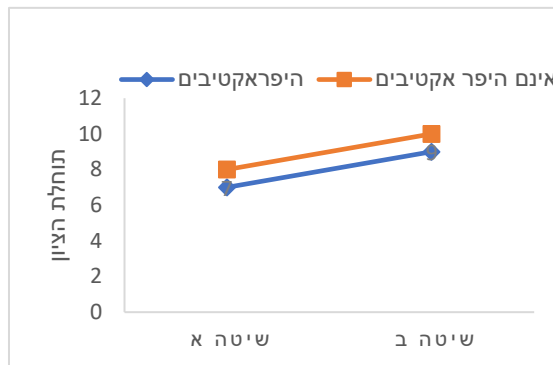
ניתוח המצב: למגדר יש אפקט, לסוג הדיאטה יש אפקט, יש אפקט אינטראקציה.

אינטראקציה אורדינלית (נקראת גם "אינטראקציה לא מהותית"): אפשר לזהות מצב של אינטראקציה כזו כאשר בגרף האפקטים הפשוטים נוצרים קווים נחתכים עם אותו הכיוון (כולם עולים או כולם יורדים אבל לא באותו השיפוע). המשמעות היא שבמעבר של גורם אחד מרמה אחת לרמה אחרת שלו הוא משפיע על המשתנה התלוי באותו אופן בכל רמה של המשתנה האחר אבל עם גודל אפקט שונה.

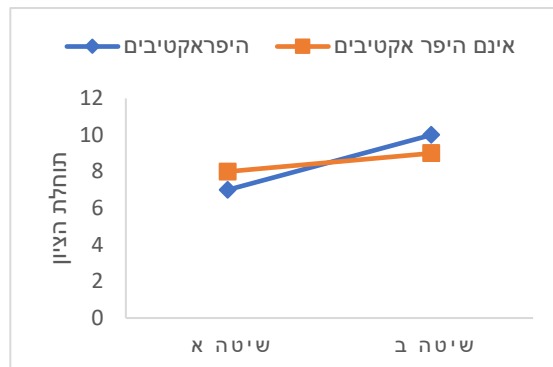
שאלות

1) בגני החובה יש שתי שיטות הוראה. שיטות אלו נוסו על ילדים היפראקטיביים וילדים שאינם היפראקטיביים. בתרשימים הבאים מיוצגים גרפים שמתארים את תוחלת הציון במבחן אוצר המילים שניתן לילדים בסוף השנה. בכל אחד מהמקרים יש לקבוע האם קיימת אינטראקציה בין שני הגורמים. אם קיימת אינטראקציה, יש לקבוע האם היא אינטראקציה אורדינלית או דיסאורדינלית.

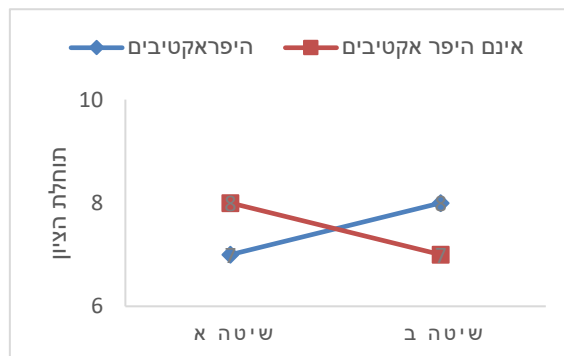
א.

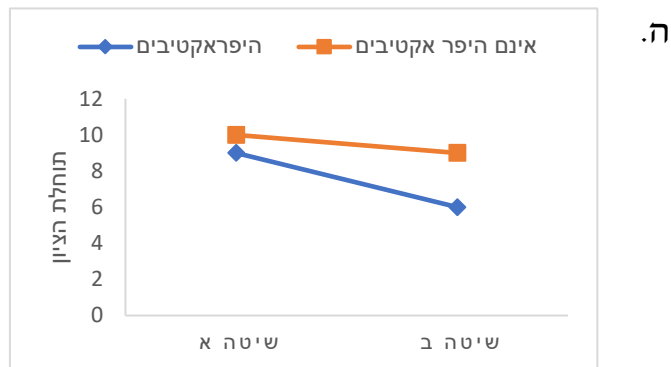
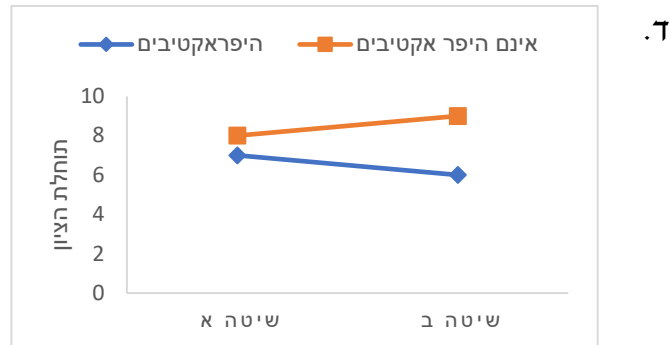


ב.



ג.





2) משרד האוצר פרסם נתונים על המחיר הממוצע של דירות גן ודירות גג של 4 חדרים ב-3 ערים בארץ. מחיר הדירות נמדד במיליוני שקלים. להלן התוצאות שהתקבלו:

דירות גג	דירות גן	
3	4	הרצליה
1	2	אשדוד
2	3	חולון

- א. מהו המשתנה התלוי ומה הם המשתנים הבלתי תלויים?
- ב. האם קיים אפקט לעיר? היעזרו בגרף מתאים.
- ג. האם קיים אפקט לסוג הדירה? היעזרו בגרף מתאים.
- ד. האם קיימת אינטראקציה בין הגורמים? אם כן, מהו סוג האינטראקציה? היעזרו בגרף מתאים.
- ה. האם יש אפקט פשוט לעיר עבור דירות גן?
- ו. האם יש אפקט פשוט לעיר עבור דירות גג?
- ז. האם יש אפקט פשוט לסוג הדירה בהרצליה?
- ח. האם יש אפקט פשוט לסוג הדירה באשדוד?
- ט. האם יש אפקט פשוט לסוג הדירה בחולון?

3) משרד החינוך פרסם נתונים על תוחלת הציונים בבחינת הבגרות באנגלית לפי עיר וסוג בית הספר (עיוני או מקצועי). להלן התוצאות שהתקבלו:

מקצועי	עיוני	
70	85	רעננה
75	75	תל אביב
85	70	פתח תקווה

- א. תארו את הנתונים באמצעות גרף אפקטים פשוטים.
 ב. האם קיימת אינטראקציה בין הגורמים? אם כן, מה סוג האינטראקציה?
 ג. באילו ערים קיים אפקט פשוט לסוג בית הספר?

4) משרד התחבורה פרסם נתונים על תוחלת מספר עבירות התנועה לבעלי רישיון נהיגה לפי עיר ולפי מגדר. להלן התוצאות שהתקבלו:

אישה	גבר	
1	2	חיפה
1	2	אשקלון
1	2	רמת גן

- א. האם קיים אפקט עיקרי לעיר?
 ב. האם קיים אפקט עיקרי למגדר?
 ג. האם יש אפקט פשוט לעיר אצל הגברים?
 ד. האם קיימת אינטראקציה בין הגורמים? אם כן, מהו סוג האינטראקציה?

5) המשרד לאיכות הסביבה פרסם נתונים על תוחלת רמת זיהום האוויר בערים שונות בארץ בחורף ובקיץ. להלן התוצאות שהתקבלו:

חורף	קיץ	
20	20	חיפה
10	10	ירושלים
15	15	באר שבע

- א. האם קיים אפקט עיקרי לעיר?
 ב. האם קיים אפקט עיקרי לעונה?
 ג. האם קיימת עיר שבה יש אפקט פשוט לעונה?
 ד. האם קיימת אינטראקציה בין הגורמים? אם כן, מה סוג האינטראקציה?

6) המשרד לאיכות הסביבה פרסם נתונים על תוחלת רמת זיהום האוויר בערים שונות בארץ בחורף ובקיץ. להלן התוצאות שהתקבלו:

חורף	קיץ	
10	10	רמת גן
10	10	גבעתיים
10	10	בת ים

האם קיים אפקט עיקרי לגורם כלשהו? האם קיימת אינטראקציה?

בשאלות הבאות יש לבחור את התשובה הנכונה ביותר:

7) במחקר נדגמו 5 אנשים מכל אחת מ-4 הקבוצות הבאות: 1. מתעמלים באופן קבוע ושומרים על תזונה בריאה; 2. מתעמלים באופן קבוע ולא שומרים על תזונה בריאה; 3. לא מתעמלים באופן קבוע ושומרים על תזונה בריאה; 4. לא מתעמלים באופן קבוע ולא שומרים על תזונה בריאה. להלן טבלה המסכמת את ממוצע הטריגליצרידים בדם (מ"ג לדציליטר) שנמצא בכל מדגם:

לא תזונה בריאה	תזונה בריאה	
100	90	מתעמלים
160	100	לא מתעמלים

- קיים אפקט עיקרי מובהק לגורם ההתעמלות.
- קיים אפקט עיקרי מובהק לגורם התזונה.
- קיים אפקט אינטראקציה מובהק בין שני הגורמים במחקר.
- אי אפשר לדעת אם קיים אפקט מובהק כלשהו על סמך תוצאות המדגם בלבד ללא ביצוע מבחן מתאים וללא קביעת רמת המובהקות של המחקר.

8) במחקר בדקו 3 טיפולים שונים לחולי פסוריאזיס. המחקר השווה גם בין גברים לנשים ובדק את זמן התגובה לטיפול. מסקנת המחקר הייתה שאצל גברים נמצאו הבדלים מובהקים בין הטיפולים השונים מבחינת תוחלת זמן התגובה. לאיזה סוג אפקט המסקנה מתייחסת?

- אפקט אינטראקציה.
- אפקט עיקרי של גורם המין.
- אפקט עיקרי של גורם סוג הטיפול.
- אפקט פשוט.

- 9) במחקר בדקו 3 טיפולים שונים לחולי פסוריאזיס. המחקר השווה גם בין גברים לנשים ובדק את זמן התגובה לטיפול. במדגם היה ממוצע זמן התגובה של הגברים שונה מממוצע זמן התגובה של הנשים.
- א. אפשר להגיד שבמדגם קיים אפקט עיקרי, אך אי אפשר לדעת אם האפקט העיקרי מובהק.
- ב. אפשר להגיד שבמדגם קיימת אינטראקציה, אך אי אפשר לדעת אם האינטראקציה מובהקת.
- ג. אפשר להגיד שקיים אפקט עיקרי מובהק.
- ד. אפשר להגיד שקיימת אינטראקציה מובהקת.
- 10) במחקר בדקו 3 טיפולים שונים לחולי פסוריאזיס. המחקר השווה גם בין גברים לנשים ובדק את זמן התגובה לטיפול. אחת המסקנות של המחקר הייתה שהטיפולים השונים משפיעים במידה משמעותית יותר על זמן התגובה של הגברים מאשר על זה של הנשים, אם כי באותו האופן.
- א. המסקנה היא שאין אינטראקציה בין הגורמים במחקר.
- ב. המסקנה היא שיש אינטראקציה אורדינלית בין הגורמים במחקר.
- ג. המסקנה היא שיש אינטראקציה דיסאורדינלית בין הגורמים במחקר.
- ד. המסקנה היא שיש אפקט עיקרי של המגדר.

תשובות סופיות

- 1) א. אין אינטראקציה.
 ג. אינטראקציה דיסאורדנלית.
 ה. אינטראקציה אורדינלית.
- 2) א. המשתנים הבי"ת: העיר, סוג הדירה. המשתנה התלוי: מחיר.
 ב. קיים.
 ד. לא קיים.
 ו. קיים.
 ח. קיים.
- 3) א. עיין בסרטון הוידאו.
 ג. רעננה ופתח תקווה.
- 4) א. לא.
 ג. לא.
- 5) א. כן.
 ג. לא.
- 6) לא, לא.
- 7) ד
- 8) ד
- 9) א
- 10) ב

תהליך ניתוח שונות דו כיווני – הליך מבחן

רקע

כפי שכבר ציינו, ניתוח שונות דו-כיווני נעשה כאשר יש שני גורמים מחקרניים ומשתנה כמותי תלוי אחד. מטרת המחקר היא לבדוק האם הגורמים משפיעים על המשתנה התלוי. מערך מחקר זה נקרא "מערך מחקר פקטוריאלי", כיוון שאנו בונים את המחקר לפי גורמים. מערך דו-גורמי יסומן כמעריך מסוג $A \times B$, כאשר A מייצג את מספר הרמות של גורם a , ו- B מייצג את מספר הרמות של גורם b . במערך מחקרי תלת-גורמי נסמן את סוג המערך $A \times B \times C$, וכך הלאה.

דוגמה

נבדקו שלושה סוגי דיאטות על אנשים בעלי משקל עודף. נבחרו 18 מטופלים בעלי משקל עודף, 9 מהם גברים ו-9 נשים. המטופלים חולקו כך שבכל דיאטה השתתפו 3 גברים ו-3 נשים. כעבור שלושה חודשים מתחילת הדיאטה נשקלו כלל המטופלים ונבדק המשקל בק"ג שהם הפחיתו. הטבלה הבאה מסכמת את המשקל שכל מטופל במדגם הפחית כעבור שלושה חודשים.

סוג הדיאטה \ מין	b_1	b_2	b_3	סה"כ
נשים	8	6	4	54
	4	8	6	
	0	10	8	
גברים	6	0	9	72
	10	2	12	
	14	4	15	
סה"כ	42	30	54	126

מטרת המחקר היא לבדוק האם יש השפעה של סוג הדיאטה, המין והשילוב ביניהם על ההפחתה במשקל.

- באיזה סוג מערך מחקרי מדובר?
- מהו המבחן הסטטיסטי המתאים לבדיקת ההשערות?
- מה הן השערות המחקר?

בדומה לניתוח שונות חד-כיווני גם התהליך של ניתוח שונות דו-כיווני דורש הנחות. ההנחות הן:

1. $A \times B$ הקבוצות שנוצרות בלתי תלויות זו בזו.

2. בכל $A \times B$ האוכלוסיות המשתנה התלוי מתפלג נורמלית.

3. בכל $A \times B$ האוכלוסיות אותה שונות, σ^2 .

הערה: ניתוח שונות הוא מבחן רובסטי, כלומר יש לו רגישות נמוכה להנחות. התיאוריה הסטטיסטית שפותחה התבססה על ההנחות האלה, אבל הלכה למעשה השיטה תעבוד טוב גם אם ההנחות הללו לא יתקיימו במדויק במלואן. זו הסיבה שהשיטה הזו נפוצה כל כך בעולם הסטטיסטיקה.

בהמשך לדוגמה

רשמו את כל ההנחות הדרושות לביצוע ניתוח השונות.

הליך המבחן

בניית טבלת ממוצעים

נבנה טבלת ממוצעים לכל רמה ולכל תא:

$$\bar{X}_i - \text{ממוצע המדגם ברמה } i \text{ של גורם } a$$

$$\bar{X}_j - \text{ממוצע המדגם ברמה } j \text{ של גורם } b$$

$$\bar{X}_{ij} - \text{ממוצע המדגם בתא } ij$$

בהמשך לדוגמה

- מלאו את טבלת הממוצעים הבאה:

סוג הדיאטה \ מין	b_1	b_2	b_3	\bar{X}_i
נשים				
גברים				
\bar{X}_j				

- שרטטו גרפים מתאימים לבדיקת אפקטים עיקריים ולבדיקת אינטראקציה במדגם. האם אפשר להגיד שיש אפקט מובהק?

בניית טבלת ריבועי הפרשים מהממוצעים

נמלא את הטבלה הבאה. בתוך תא ij נחשב: $(\bar{X}_{ij} - \bar{X}_i - \bar{X}_j + \bar{X})^2$

בהמשך לדוגמה

- מלאו את טבלת הפרשי הממוצעים:

סוג הדיאטה \ מין	b_1	b_2	b_3	$(\bar{X}_i - \bar{X})^2$
נשים				
גברים				
$(\bar{X}_j - \bar{X})^2$				

חישוב סכום ריבועי הסטיות מהממוצע

מתוך טבלת ריבועי הסטיות מהממוצע נחשב את סכום ריבועי הסטיות מהממוצע הבאים :

הסימון SS הוא ראשי התיבות של "sum of squares" (סכום הריבועים).

סכום ריבועי הסטיות מהממוצע של גורם a :

$$SS_a = m \cdot B \sum_{i=1}^A (\bar{X}_{.i} - \bar{X})^2$$

סכום ריבועי הסטיות מהממוצע של גורם b :

$$SS_b = m \cdot A \sum_{j=1}^B (\bar{X}_{.j} - \bar{X})^2$$

סכום ריבועי הסטיות של האינטראקציה :

$$SS_{ab} = m \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^B (\bar{X}_{ij} - \bar{X}_{.i} - \bar{X}_{.j} + \bar{X})^2$$

סכום ריבועי השגיאות (סכום ריבועי הסטיות של התצפיות בתא מהממוצע בתא) :

$$SS_W = \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^B \sum_{k=1}^m (X_{ijk} - \bar{X}_{ij})^2 = (m-1) \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^B S_{ij}^2$$

סכום ריבועי הסטיות של כלל התצפיות מהממוצע הכללי :

$$SS_T = \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^B \sum_{k=1}^m (X_{ijk} - \bar{X})^2 = (n-1) \cdot S^2$$

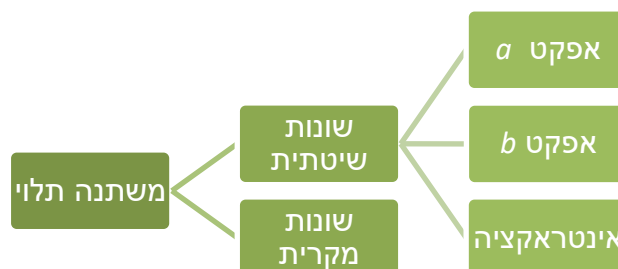
הקשר המתמטי בין סכום הריבועים הללו הוא :

$$SS_T = SS_a + SS_b + SS_{ab} + SS_W$$

לכן אין אנו צריכים לחשב את כל חמשת המרכיבים הללו.

החלק הזה של הנוסחה מתייחס לשונות השיטתית : $SS_a + SS_b + SS_{ab}$. השונות השיטתית היא שונות שמקורה בגורמים עצמם.

החלק הזה של הנוסחה מתייחס לשונות המקרית : SS_W . השונות המקרית היא שונות שנקראת גם "שונות טעויות" או "שונות בתוך הקבוצות". זוהי שונות בין התצפיות שאינה נובעת מהגורמים הנחקרים. האות W מייצגת את המילה "Within", כלומר שונות בתוך התאים.



בהמשך לדוגמה

- חשבו את ריבועי הסטיות הבאים:

$$SS_a =$$

$$SS_b =$$

$$SS_{ab} =$$

$$SS_T =$$

$$SS_w =$$

חישוב ממוצע ריבועי הסטיות וסטטיסטי המבחן

MS הוא הסימון של ממוצע ריבועי הסטיות (Mean Square) שמהווה אומד לשונות של כל גורם. החישוב ייעשה על ידי חלוקת ה-SS המתאים בדרגות החופש המתאימות. לאחר מכן נחשב שלושה סטטיסטי מבחן, בהתאם לשלוש ההשערות הנבדקות.

נרכז את כלל החישובים הללו בטבלה הנקראת טבלת ניתוח שונות, ANOVA (Analysis of Variance).

מקור השונות Source of Variation	דרגות החופש Degrees of Freedom	סכום ריבועי הסטיות מהממוצע Sum of Squares	ממוצע ריבוע הסטייה Mean Square	F
a	$A - 1$	SS_a	MS_a	$F_a = MS_a / MS_w$
b	$B - 1$	SS_b	MS_b	$F_b = MS_b / MS_w$
ab	$(A - 1)(B - 1)$	SS_{ab}	MS_{ab}	$F_{ab} = MS_{ab} / MS_w$
Within	$AB(m - 1)$	SS_w	MS_w	
Total	$n - 1 = ABm - 1$	SS_T		

בהמשך לדוגמה : מלאו את טבלת ניתוח השונות

מקור השונות Source of Variation	דרגות החופש Degrees of Freedom	סכום ריבועי הסטיות מהממוצע Sum of Squares	ממוצע ריבוע הסטייה Mean Square	F
a				
b				
ab				
Within				
Total				

כללי ההכרעה לבדיקת ההשערות

הסטטיסטי F_a מייצג את היחס בין השונות המדגמית של גורם a ובין השונות המקרית. לכן ככל שהערכים שלו גבוהים יותר, נרצה להגיד שלגורם a יש השפעה גדולה יותר על המשתנה התלוי. F_a יקבל ערכים גבוהים אם השונות המדגמית של גורם A תגדל או אם השונות המדגמית המקרית תקטן. הסטטיסטי מתפלג התפלגות F, ואזור הדחייה שלו יהיה בצד ימין.

- כלל ההכרעה לבדיקת המובהקות של גורם a :

דחה את השערת H_0 ברמת מובהקות של α אם

$$F_a > F_{1-\alpha}(df_a, df_w)$$

לפי אותו עיקרון שאר כללי ההכרעה יהיו :

- כלל ההכרעה לבדיקת המובהקות של גורם b :

דחה את השערת H_0 ברמת מובהקות של α אם

$$F_b > F_{1-\alpha}(df_b, df_w)$$

- כלל ההכרעה לבדיקת המובהקות של האינטראקציה :

דחה את השערת H_0 ברמת מובהקות של α אם

$$F_{ab} > F_{1-\alpha}(df_{ab}, df_w)$$

בהמשך לדוגמה

רשמו את כל כללי ההכרעה המתאימים והסיקו מסקנות מתאימות ברמת מובהקות של 5%.

הערות

1. אם מכריעים שקיימת אינטראקציה מובהקת, יש לבדוק האם היא אורדינלית או דיסאורדינלית. אם האינטראקציה דיסאורדינלית, יש לבדוק האם האפקטים העיקריים נמצאו מובהקים. אם לפחות אחד מהם נמצא מובהק נאמר שהוא אינו משמעותי כיוון שהוא נובע מהאינטראקציה בין הגורמים ולא מהגורם עצמו.
2. אם אחד מהאפקטים נמצא מובהק, אין זה אומר אילו רמות שונות זו מזו בתוחלת. למשל, אם נמצא הבדל מובהק בין סוגי הטיפולים, לא נוכל לדעת לפי זה איזה טיפול שונה מאחר באופן מובהק. לכן יש להמשיך בתהליך של השוואות מרובות כדי להסיק ממה נובע השוני.

בהמשך לדוגמה

האם יש סיבה לבצע השוואות מרובות במחקר?

שאלות

1) מחקר שיווקי בדק את השפעת גובה המדף בסופרמרקט והשפעת החומר שממנו עשוי הבקבוק (זכוכית או פלסטיק) על היקף המכירות של משקאות קלים. נבדקו שני סופרמרקטים. בכל סופרמרקט נבחן כל צירוף אפשרי של גובה המדף וחומר הבקבוק, ועבור כל צירוף כזה נבדק מספר בקבוקי המשקה הקל שנמכרו באותו סופרמרקט ביום מסוים. הנה התוצאות שהתקבלו:

פלסטיק	זכוכית	סוג בקבוק
		גובה המדף
59	23	נמוך
63	32	
88	47	בינוני
90	55	
51	40	גבוה
56	48	

בצעו ניתוח שונות דו-כיווני על נתוני מחקר זה ברמת מובהקות של 5%. סכמו את המסקנות מתוך ניתוח השונות שביצעתם. מה הן ההנחות הדרושות לביצוע המבחן?

2) במחקר בתחום החקלאות נדגמו 8 חלקות אדמה : 4 חלקות בנגב ו-4 בעמק יזרעאל. בכל חלקה ההשקיה הייתה או באמצעות ממטרות או באמצעות טפטפות. בדקו את יבול העגבניות (בטונה לדונם) בכל חלקה. להלן התוצאות שהתקבלו :

מספר חלקה	מיקום החלקה	שיטת השקיה	יבול העגבניות
1	נגב	ממטרות	12
2	נגב	ממטרות	10
3	נגב	טפטפות	15
4	נגב	טפטפות	17
5	עמק יזרעאל	ממטרות	12
6	עמק יזרעאל	ממטרות	14
7	עמק יזרעאל	טפטפות	17
8	עמק יזרעאל	טפטפות	19

- א. רשמו את כלל המשתנים במחקר וציינו לגבי כל אחד מהם האם הוא משתנה תלוי או בלתי תלוי.
- ב. הציגו את נתוני המחקר באמצעות גרפים מתאימים. האם נראה שבמדגם יש אפקט עיקרי לכל גורם? האם יש אינטראקציה בין הגורמים במדגם? האם האפקטים מובהקים?
- ג. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם האפקט העיקרי של כל גורם הוא מובהק והאם האינטראקציה היא מובהקת. מה הן ההנחות הדרושות?

3) חברה לייצור מוצרי שיער פיתחה נוסחה חדשנית לצבע לשיער שאינו דורש תוספת חמצן בעת תהליך הצביעה. החברה השוותה את צבע השיער החדש לצבע השיער הרגיל מבחינת כושר הכיסוי וזאת על שלושה סוגי שיער: בהיר, כהה ושיבה. ציון רמת הכיסוי הוא משתנה שמתפלג נורמלית עם שונות קבועה לכל סוג שיער ולכל סוג צבע. לכל קבוצה של סוג צבע וסוג שיער נדגמו 4 צביעות שנוסו על אנשים שונים, וניתן ציון מספרי על רמת הכיסוי. להלן סיכום תוצאות המדגם שהתקבלו:

שונות	ממוצע	הקבוצה
40	62	צבע רגיל על שיער בהיר
44	51	צבע רגיל על שיער כהה
42	45	צבע רגיל על שיער שיבה
46	60	צבע חדש על שיער בהיר
40	54	צבע חדש על שיער כהה
42	44	צבע חדש על שיער שיבה

בצעו ניתוח שונות דו-כיווני על הנתונים ברמת מובהקות של 5%. סכמו את כל המסקנות המתקבלות.

4) בוצע ניתוח שונות על נתונים. במערך המחקרי לגורם a יש 4 רמות ולגורם b יש 3 רמות. נערכו 3 תצפיות לכל אחת מ-12 הקבוצות שנוצרו. להלן טבלת ניתוח שונות דו-גורמי שבוצע:

מקור השונות	df	SS	MS	F
a	?	318	?	?
b	?	?	?	?
אינטראקציה	?	190	?	?
W	?	156	?	
T	?	674		

א. מלאו את כל התאים בטבלה המסומנים בסימני שאלה.

ב. בצעו את הבדיקות הבאות ברמת מובהקות של 5%:

- i. האם האינטראקציה מובהקת?
- ii. האם גורם a משפיע על המשתנה התלוי הנחקר?
- iii. האם לגורם b יש לפחות שתי רמות עם תוחלות שונות?

5) במחקר בדקו האם ארץ מוצא ומגדר של אדם משפיעים על שנות ההשכלה שלו. הנתונים סוכמו בטבלת ניתוח שונות:

מקור השונות	df	SS	MS	F
ארץ מוצא	4	34		
מגדר			2	
אינטראקציה		18	4.5	
W	10	12		
T				

- א. כמה ארצות מוצא נבדקו במחקר זה?
- ב. מהו גודל המדגם הכולל במחקר זה?
- ג. חשבו את ערכי F הסטטיסטי עבור ארץ המוצא, המגדר והאינטראקציה.
- ד. מה הם האפקטים המובהקים במחקר זה ברמת מובהקות של 5%?

6) בטבלה הבאה מסוכמים הממוצעים של מערך מחקרי דו-גורמי עם משתנה כמותי תלוי:

	b_1	b_2	b_3
a_1	8	14	11
a_2	6	13	16

מספר התצפיות בכל תא הוא 5. הטבלה הבאה היא טבלה מסכמת של ניתוח השונות על סמך נתוני מחקר זה:

מקור השונות	df	SS	MS	F
a				
b		281.7		
ab		71.7		
W		190.1		
T				

- א. מלאו את טבלת ניתוח השונות.
- ב. הסיקו מסקנות ברמת מובהקות של 5%.
- ג. שרטטו גרף אינטראקציות והסבירו את משמעות הממצאים.

תשובות סופיות

- 1) עיין בסרטון הוידאו.
- 2) א. משתנים ב"ת: מיקום החלקה, שיטת השקיה. משתנה תלוי: יבול בטונה לדונם.
ב. עיין בסרטון הוידאו.
ג. עיין בסרטון הוידאו.
- 3) עיין בסרטון הוידאו.
- 4) א. עיין בסרטון הוידאו. ב. i. כן. ii. כן. iii. לא.
- 5) א. 4. ב. 20. ג. עיין בסרטון הוידאו.
- 6) א. עיין בסרטון הוידאו. ב. עיין בסרטון הוידאו. ג. עיין בסרטון הוידאו.

שיטות מתקדמות ויישומים סטטיסטיים

פרק 11 - מקדם המתאם (מדד קשר) הלינארי ומובהקותו

תוכן העניינים

1. מקדם המתאם הלינארי (פירסון) 124
2. חישוב מקדם המתאם הלינארי (פירסון) 135
3. בדיקת השערות על מקדם המתאם הלינארי 140
4. ניתוח פלטים על מקדם המתאם הלינארי 144

מקדם המתאם (מדד קשר) הלינארי ומובהקותו

מדד הקשר הלינארי (פירסון) – מבוא

מעוניינים לבדוק עד כמה קיים קשר מסוג קשר לינארי (קו ישר) בין שני משתנים. שני המשתנים שאנו בודקים לגביהם קשר צריכים להיות משתנים כמותיים. מבחינת סולמות מדידה כל משתנה נחקר צריך להיות מסולם רווחים או מנה. בדרך כלל המשתנה המוצג כ- Y הוא המשתנה התלוי והמשתנה המוצג ב- X הוא המשתנה הבלתי תלוי. תיאור גרפי לנתונים נעשה על ידי דיאגרמת פיזור. בדיאגרמת פיזור אנחנו מסמנים כל תצפית בנקודה לפי שיעור ה- X ושיעור ה- Y שלה. דיאגרמת הפיזור נותנת אינדיקציה גרפית על הקשר בין שני המשתנים.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

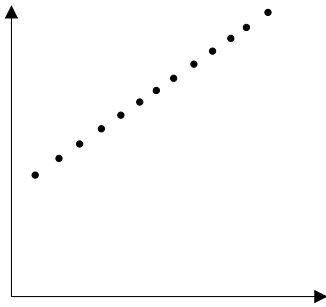
בבניין 8 דירות בדקו לכל דירה את מספר החדרים שלה וכמו כן את מספר הנפשות הגרות בדירה. להלן התוצאות שהתקבלו :

4	4	3	3	2	3	2	2	מספר חדרים בדירה
5	4	4	3	2	2	1	0	מספר הנפשות בדירה

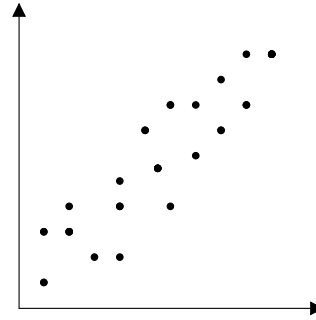
- (1) כמה תצפיות ישנן בדוגמה?
- (2) כמה משתנים ישנם בדוגמה, מי הם?
- (3) שרטטו לנתונים דיאגרמת פיזור.
- (4) מי המשתנה התלוי ומיהו המשתנה הבלתי תלוי?

דיאגרמות פיזור לקשר בין משתנים וניתוחם

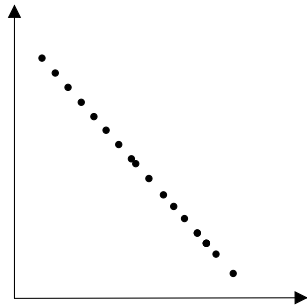
קשר לינארי חיובי מלא



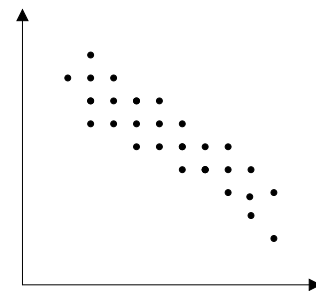
קשר לינארי חיובי חלקי



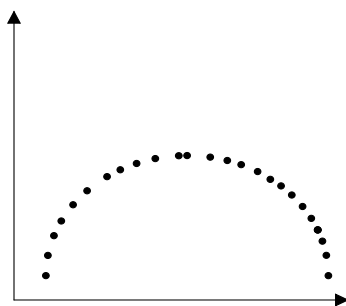
קשר לינארי שלילי מלא



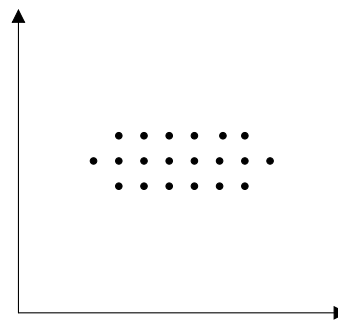
קשר לינארי שלילי חלקי



אין קשר לינארי



אין קשר



משמעות מקדם המתאם:

כדי לבדוק עד כמה קיים קשר לינארי בין שני המשתנים ישנו מדד קשר שנקרא גם מקדם המתאם הלינארי הידוע גם בשם מקדם המתאם של פירסון. מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין 1 ל-1.

-1

0

1

מקדם מתאם 1-1 או 1 אומר שקיים קשר לינארי מלא בין המשתנים שניתן לבטאו על ידי נוסחה של קו ישר: $y = ax + b$.

מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1):

קיים קשר לינארי מלא בו השיפוע a יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי (מקדם מתאם-1) מלא אומר שקיים קשר לינארי מלא בו השיפוע a שלילי.

מתאם חיובי חלקי:

ככל שמשנתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט ואילו מתאם שלילי חלקי אומר שככל שמשנתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט. ככל שמקדם המתאם קרוב לאפס עוצמת הקשר יותר חלשה וככל שהמדד רחוק יותר מהאפס העוצמה יותר חזקה. לסיכום, מקדם המתאם בודק את עוצמת הקשר הלינארי, ואת כיוון הקשר.

מקדם המתאם הלינארי אינו מושפע מיחידות המדידה. כל שינוי ביחידות המדידה של המשתנים, לא ישנה את מקדם המתאם.

מדד הקשר הלינארי באוכלוסייה, שנקרא גם מקדם המתאם של פירסון או מדד הקשר של פירסון באוכלוסייה מסומן ב: ρ - פרמטר המאפיין את עוצמת הקשר הלינארי באוכלוסייה וכיוונו בין שני המשתנים הנחקרים. כאשר:

r - מדד הקשר הלינארי במדגם שמהווה אומדן לפרמטר ρ .

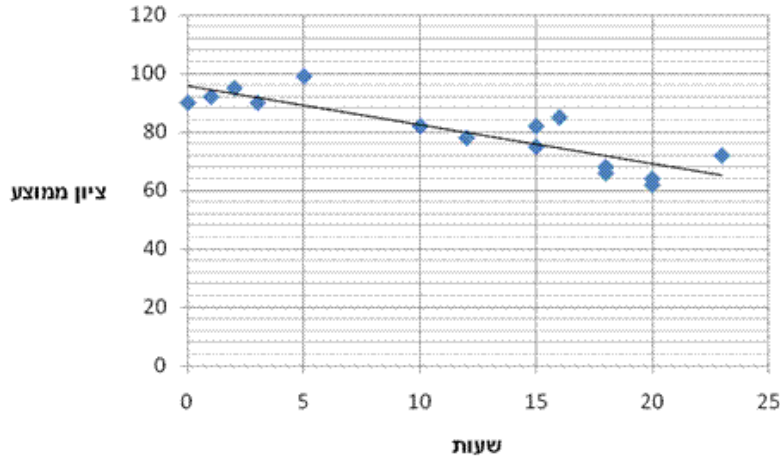
קיומו של מתאם בין שני משתנים אינו מצביע על סיבתיות בהכרח. למשל, אם נמצא מתאם חיובי בין כמות הסוכרזית שאדם אוכל לבין במשקל שלו אין זה אומר שהסיבה להשמנה היא הסוכרזית. מדד הקשר של פירסון הוא מדד קשר סימטרי, כלומר אם נחליף את X ב- Y התוצאה תהיה זהה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

- מה ניתן להגיד על מקדם המתאם של שני המשתנים על סמך דיאגרמת הפיזור ששרטטנו?
- אם היינו משנים את השרטוט כך שבציר האנכי היה המשתנה "מספר החדרים" ובציר האופקי היה "מספר הנפשות", האם הדבר היה משפיע על מדד הקשר של פירסון?

שאלות

1) חוקר רצה לאפיין את הקשר בין מספר השעות בשבוע שסטודנט מקדיש לבילויים לבין הציון הממוצע שלו בסוף הסמסטר. לשם כך הוא אסף נתונים של 15 סטודנטים ויצר דיאגרמת פיזור:



- א. מיהו המשתנה הבלתי תלוי?
- ב. מה ניתן לומר על כיוון הקשר בין מספר שעות הבילוי השבועיות לבין הציון הממוצע של הסמסטר? מה ניתן להגיד על עוצמת הקשר?

2) להלן טבלה המסכמת את מקדמי המתאם הלינארי בין ציוני מבחנים שונים שהתקבלו עבור תלמידים בכיתה מסוימת:

מתמטיקה	לשון	ספורט	
?	-0.7	?	ספורט
0.6	?	?	לשון
?	?	-0.1	מתמטיקה

- א. השלימו את מקדמי המתאם שמסומנים בסימן שאלה בטבלה.
- ב. בין אילו שני ציוני מקצועות שונים קיים מתאם בעל העוצמה החזקה ביותר?

3) במחקר נתבקשו לבדוק את הקשר בין מספר שעות התרגול של קורס לבין הציון הסופי שלו. להלן תוצאות מדגם שהתקבל:

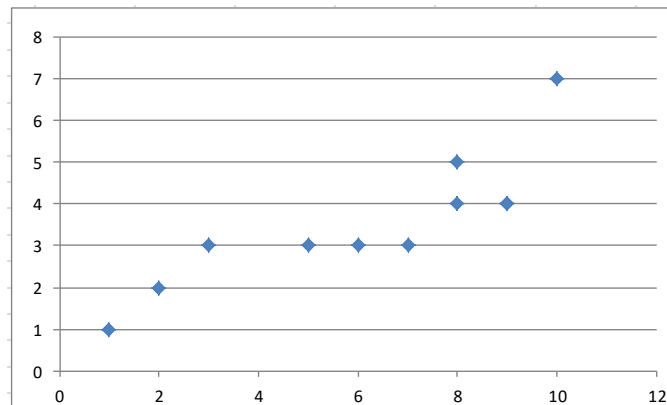
שעות תרגול	ציון סופי
20	90
25	90
30	95
15	60
30	90
20	85
10	50

- א. מיהו המשתנה התלוי ומיהו המשתנה הבלתי תלוי בדוגמה זו?
- ב. שרטטו דיאגרמת פיזור לנתונים.
- ג. מה ניתן לומר על הקשר בין המשתנים במדגם?
- ד. מסתבר שבסופו של דבר נתנו פקטור של 5 נקודות לציון הסופי. כיצד הדבר היה משנה את מקדם המתאם של המדגם?

4) בתחנה המטאורולוגית רצו לבדוק את הקשר שבין הטמפרטורה במעלות צלזיוס לכמות המשקעים במ"מ. הם אספו נתונים על 10 ימים במהלך חודש ינואר. המתאם שהתקבל היה 0.8.

- א. השלימו את המשפט:
בחודש ינואר ככל שהטמפרטורה היומית נוטה לרדת, כך כמות המשקעים נוטה _____.
- ב. הוחלט להעביר את הטמפרטורה למעלות פרנהייט על מנת שיוכלו להשוות אותה לנתונים מארה"ב. נוסחת המעבר היא $F^0 = 32 + \frac{9}{5}C^0$.
כיצד הדבר ישפיע על מקדם המתאם בין הטמפרטורה במעלות פרנהייט לכמות המשקעים במ"מ?

5) להלן דיאגרמת פיזור המראה קשר בין שני משנים:

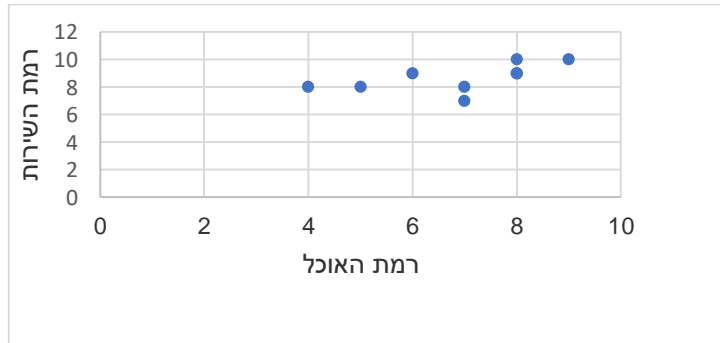


- א. השלימו: ניתן לראות שהקשר הוא לינארי _____ (מלאו חלקי) כיוון הקשר הוא (חיובי/שלילי).
- ב. השלימו: אם היינו מוסיפים תצפית שערך ה- X שלה הוא 4 וערך ה- Y שלה הוא 7, מקדם המתאם של פירסון היה _____ (גדלו קטן/לא משתנה).

שאלות רב ברירה (יש לבחור את התשובה הנכונה):

- 6) חוקר אקלים דגם כמה ימים בשנה ומדד את הטמפרטורה בטורונטו שבקנדה ואת הטמפרטורה בסידני שבאוסטרליה באותו היום. הוא חישב ומצא מקדם מתאם שלילי בין הטמפרטורה היומית בטורונטו לבין הטמפרטורה היומית בסידני. משמעות מקדם המתאם השלילי במדגם:
- א. אין קשר בין הטמפרטורה בטורונטו לבין הטמפרטורה בסידני בימים שנדגמו.
ב. במדגם, רוב הטמפרטורות בטורונטו היו שליליות.
ג. ההפרש בין הטמפרטורה בטורונטו לבין הטמפרטורה באוסטרליה, במדגם זה, הוא שלילי.
ד. במדגם יש נטייה שהטמפרטורה יורדת בטורונטו לטמפרטורה לעלות בסידני.

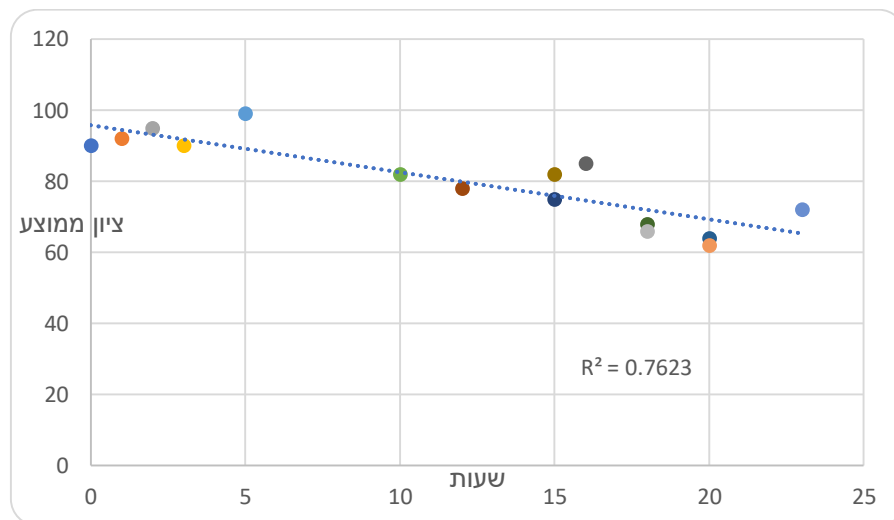
- 7) בסקר שביעות רצון שנערך בבית הקפה "פת לחם" התבקשו הלקוחות לדרג את מידת שביעות הרצון שלהם (בסולם 1-10) בשני נושאים: רמת האוכל ורמת השירות.



מה יהיה ערכו של מקדם המתאם (r)?

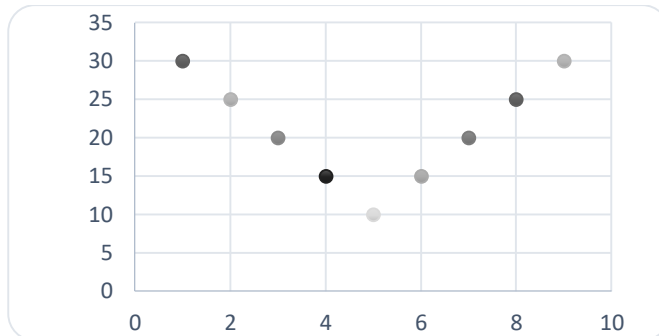
- א. $r = -0.3$
 ב. $r = 0$
 ג. $r = 1.125$
 ד. $r = 0.593$

- 8) חוקר רצה לאפיין את הקשר בין מספר השעות בשבוע שסטודנט מקדיש לבילויים לבין הציון הממוצע שלו בסוף הסמסטר. לשם כך הוא אסף נתונים של 15 סטודנטים ויצר דיאגרמת פיזור.



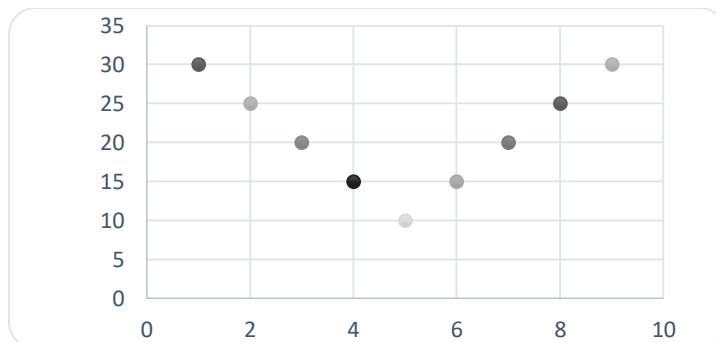
- מה ניתן לומר על כיוון הקשר במדגם בין מספר שעות הבילוי השבועיות לבין הציון הממוצע של הסמסטר?
- א. ככל שמבלים יותר הציון נוטה לרדת.
 ב. אין קשר בין שעות הבילוי לציון.
 ג. ככל שמבלים פחות הציון נוטה לרדת.
 ד. ככל שהציון נוטה לרדת הסטודנט מבלה פחות.

9) התרשים הבא מתאר קשר בין שני משתנים, איזה מהמתאמים הבאים הוא המתאים ביותר לתיאור הקשר בין שני המשתנים?



- א. $r = 1$ היות ושני המשתנים יוצרים קוים ישרים.
 ב. $r = 2$ היות ויש שני קוים בעלי קשר מושלם.
 ג. $r = 0$ היות והקו יורד ואחר כך עולה באותו האופן.
 ד. $r = \pm 1$ היות ויש קו עולה וגם קו יורד.

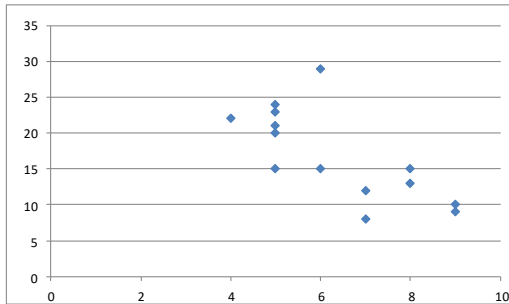
10) התרשים הבא מתאר דיאגרמת פיזור.



איזו טענה נכונה?

- א. בתרשים מוצג הקשר בין שני משתנים.
 ב. בתרשים מוצג הקשר בין 9 משתנים.
 ג. בתרשים מוצג הקשר בין 10 משתנים.
 ד. אין לדעת כמה משתנים מוצגים בתרשים.

בגרף הבא מתוארת דיאגרמת פיזור של שני משתנים:



X - (משתנה בלתי תלוי בציר האופקי)
ו- Y (משתנה תלוי).

במדגם התקבל $r^2 = 0.52$.

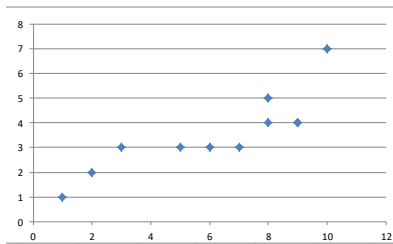
11) לאור הנתונים המופיעים בדיאגרמה, איזה מבין הערכים הבאים מתאים להיות התוצאה של r ?

- א. -0.52
- ב. 0.72
- ג. -0.72
- ד. 0.52

12) אם מקדם המתאם בין שני משתנים הוא 1, אזי:

- א. הערכים של המשתנים הם חיוביים.
- ב. עבור כל תצפית ערך של משתנה אחד שווה לערך של המשתנה השני.
- ג. הקשר הלינארי הוא בעוצמה חזקה.
- ד. אף אחת מהתשובות לא בהכרח נכונה.

13) להלן דיאגרמת פיזור:



מה יהיה מקדם המתאם בין שני המשתנים?

- א. 1
- ב. 0.85
- ג. 0.15
- ד. 0

14) בבדיקת קשר בין שני משתנים התקבל: $r = -1$.

- א. קיימת נוסחה לינארית הקושרת בין כל התצפיות.
- ב. לא קיים קשר בין שני המשתנים.
- ג. ככל שמשתנה אחד נוטה לרדת גם לשני יש נטייה לרדת.
- ד. קיים קשר בין שני המשתנים, אך לא ניתן לדעת מאיזה סוג.

15) לפי הפתגם "רחוק מהעין, רחוק מהלב", יש קשר ____ בין קרבה פיזית לקרבה נפשית.

- א. חיובי
- ב. שלילי
- ג. אפסי
- ד. לא ניתן לדעת.

16) מבחן אמי"ר הינו מבחן מיון באנגלית של המרכז הארצי לבחינות והערכה. הציון המינימלי בבחינה הינו 150 והמקסימלי הינו 250. בקורס הכנה למבחן השתתפו 19 תלמידים. להלן הציונים שלהם על פי פלט שהתקבל:

	159
	170
	180
	185
	204
	224
	236
	212
	168
	189
	195
	163
	187
	206
	201
	223
	242
	203
	205
197.47	AVERAGE
536.25	VARPA

יש להוסיף עמודה נוספת לצד עמודת הציונים שתראה לכל תלמיד כמה נקודות חסרות לו כדי להשלים לציון המקסימלי בבחינה.

מה יהיה מקדם המתאם בין שתי העמודות (כלומר, מקדם המתאם בין הציון לבין הנקודות החסרות)?

- א. -1
- ב. 1
- ג. -0.5
- ד. 0.5

17) מקדם המתאם בין שטחי דירה למחיר שלהם חושב ונמצא 1.2. מה נובע מכך?

- א. ככל שהדירה גדולה יותר בשטחה כך היא יקרה יותר.
- ב. ככל שהדירה קטנה יותר בשטחה כך היא זולה יותר.
- ג. לא קיים קשר בין שטח הדירה למחיר הדירה.
- ד. מצב כזה שמתואר הנתונים לא אפשרי.

18) אם ניקח 10 אנשים ונרשום לכל אדם את הגובה במטר וכמו כן את הגובה בס"מ. מה יהיה מקדם המתאם בין גובה האדם במטר לגובה האדם בס"מ?

- א. 1
- ב. 0
- ג. -1
- ד. לא ניתן לדעת.

- 19) נמצא מתאם חיובי בעוצמה גבוהה בין X – ציון בבגרות בלשון ל Y – ציון בבגרות במתמטיקה. אילו מהמשפטים הבאים נכון?
- א. ניתן לומר שאחת מהסיבות להבדלים שיש לסטודנטים במתמטיקה נובעים מההבדלים שיש להם בלשון.
- ב. קיימת נוסחה של קו ישר שקושרת בין ציון בבגרות במתמטיקה לציון בבגרות בלשון.
- ג. ללא יוצא מן הכלל, ניתן להגיד שכל תלמיד שמצליח יותר מתלמיד אחר בלשון גם יצליח יותר מאותו תלמיד במתמטיקה.
- ד. אף אחד מהטענות שהוצגו אינה בהכרח נכונה.

- 20) עבור סדרה של תצפיות מדדו את X ואת Y . נמצא שעבור כל התצפיות שהערך של Y ירד הערך של X בהכרח ירד ללא יוצא מן הכלל. מקדם המתאם של פירסון יהיה בהכרח:
- א. 1
- ב. -1
- ג. 0
- ד. אף אחת מהתשובות.

תשובות סופיות

- (1) א. שעות בילוי.
 (2) א. להלן טבלה:

מתמטיקה	לשון	ספורט	
0.1	-0.7	1	ספורט
0.6	1	-0.7	לשון
1	0.6	-0.1	מתמטיקה

- (3) א. ב"ת- מס' שעות התרגול, תלוי- ציון.
 ג. קשר לינארי חיובי חלקי.
 (4) א. לעלות.
 (5) א. חלקי, חיובי.

- (6) ד' (7) ד' (8) א' (9) ג' (10) א'
 (11) ג' (12) ד' (13) ב' (14) א' (15) א'
 (16) א' (17) ד' (18) א' (19) ד' (20) ד'

מדדי קשר – מדד הקשר הלינארי (פירסון) – רקע

המטרה היא לבדוק האם קיים קשר (קורלציה, מתאם) של קו ישר בין שני משתנים כמותיים. מבחינת סולמות המדידה קשר בין סולמות רווחים ומנה. בדרך כלל, X הוא המשתנה המסביר (הבלתי תלוי) ו- Y הוא המשתנה המוסבר (התלוי).

דוגמה:

נרצה להסביר כיצד השכלה של אדם הנמדדת בשנות לימוד X מסבירה את ההכנסה שלו Y . במקרה זה שנות ההשכלה זהו המשתנה המסביר (או הבלתי תלוי) ואנחנו מעוניינים לבדוק כיצד שינויים בשנות ההשכלה של אדם יכולים להסביר את השינויים שלו בהכנסה, ולכן רמת ההכנסה זהו המשתנה המוסבר התלוי במשתנה המסביר אותו.

שלב ראשון: נהוג לשרטט דיאגרמת פיזור. זו דיאגרמה שנותנת אינדיקציה ויזואלית על טיב הקשר בין שני המשתנים.

דוגמה:

מס' דירה	X	Y
1	3	2
2	2	2
3	4	3
4	3	3
5	5	4

בבניין של 5 דירות בדקו את הנתונים הבאים:
 X - מס' חדרים בדירה. Y - מס' נפשות הגרות בדירה.
 להלן התוצאות שהתקבלו:

נשרטט מנתונים אלה דיאגרמת פיזור (הדיאגרמה המלאה בסרטון). נתבונן בכמה מקרים של דיאגרמות פיזור ונתח אותן (הדיאגרמות המלאות בסרטון).

שלב שני: מחשבים את מקדם המתאם (מדד הקשר) שבודק עד כמה קיים קשר לינארי בין שני המשתנים. המדד (ניקרא גם מדד הקשר של פירסון) מכמת את מה שניראה בשלב הראשון רק בעין.
 המדד בודק את כיוון הקשר (חיובי או שלילי) ואת עוצמת הקשר (חלש עד חזק).
 מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין -1 ל-1.
 מקדם מתאם -1 או 1 אומר שקיים קשר לינארי מוחלט ומלא בין המשתנים שניתן לבטאו על ידי הנוסחה: $y = bx + a$.

מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1):

קיים קשר לינארי מלא בו השיפוע b יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי מלא אומר שקיים קשר לינארי מלא בו השיפוע b שלילי (מקדם מתאם -1).

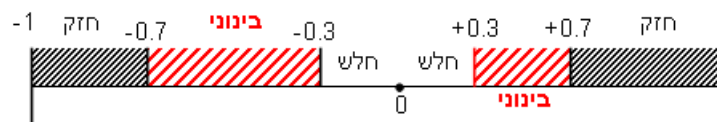
מתאם חיובי חלקי:

ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט.

מתאם שלילי חלקי:

ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט.

ככל שערך מקדם המתאם קרוב לאפס נאמר שעוצמת הקשר חלשה יותר וככל שמקדם המתאם רחוק מהאפס נאמר שעוצמת הקשר חזקה יותר:



מקדם המתאם יסומן באות r .

כדי לחשב את מקדם המתאם, יש לחשב את סטיות התקן של כל משתנה ואת השונות המשותפת.

$$COV(x, y) = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{n} = \frac{\sum xy}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y} : \text{שונות משותפת}$$

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2 : \text{שונות של המשתנה } X$$

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n} - \bar{y}^2 : \text{שונות המשתנה } Y$$

$$r_{xy} = \frac{COV(x, y)}{S_x \cdot S_y} : \text{מקדם המתאם הלינארי}$$

שאלות

1) להלן נתונים לגבי שישה תלמידים שנגשו למבחן. בדקו לגבי כל תלמיד את הציון שלו בסוף הקורס וכמו כן את מספר החיסורים שלו מהקורס.

מספר חיסורים	2	1	0	2	3	4
ציון	80	90	90	70	70	50

- א. שרטטו דיאגרמת פיזור לנתונים. מה ניתן להסיק מהדיאגרמה על טיב הקשר בין מספר החיסורים של תלמיד לציונו? מיהו המשתנה הבלתי תלוי ומיהו המשתנה התלוי?
- ב. חשבו את מדד הקשר של פירסון. האם התוצאה מתיישבת עם תשובתך לסעיף א'?
- ג. הסבירו, ללא חישוב, כיצד מקדם המתאם היה משתנה אם היה מתווסף תלמיד שהחסיר 4 פעמים וקיבל ציון 80?

2) במחקר רפואי רצו לבדוק האם קיים קשר בין רמת ההורמון X בדם החולה לרמת ההורמון Y שלו. לצורך כך מדדו את רמת ההורמונים ההלו עבור חמישה חולים. להלן התוצאות שהתקבלו:

א. מה הממוצע של כל רמת הורמון?

ב. מהו מקדם המתאם בין ההורמונים? ומה משמעות התוצאה?

X	Y
10	12
14	15
15	15
18	17
20	21

3) נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 200 \qquad \sum_{i=1}^{20} X_i = 240$$

$$\sum_{i=1}^{20} (Y_i - \bar{Y})^2 = 76 \qquad \sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})^2 = 76$$

$$\sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = 60.8$$

- א. חשב את מדד הקשר הלינארי בין X ל- Y . מיהו המשתנה התלוי?
- ב. מה המשמעות של התוצאה שקיבלת בסעיף א'?

4) נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 200 \quad \sum_{i=1}^{20} X_i = 240$$

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i^2 = 2080 \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 2960$$

$$\sum_{i=1}^{20} X_i Y_i = 2464$$

חשבו את מדד הקשר הלינארי בין X ל- Y .

5) במוסד אקדמי ציון ההתאמה מחושב כך: מכפילים את הציון הממוצע בבגרות ב-3 ומפחיתים 2 נקודות. ידוע שעבור 40 מועמדים סטיית התקן של ממוצע הציון בבגרות הייתה 2.
מה מקדם המתאם בין ציון ההתאמה לציון הממוצע בבגרות שלהם?

6) להלן רשימת טענות, לגבי כל טענה קבעו נכון/לא נכון ונמקו.
א. מתווך דירות המיר מחירי דירות מדולר לשקל. נניח שדולר אחד הוא 3.5₪. אם מתווך הדירות יחשב את מדד הקשר של פירסון בין מחיר הדירה בשקלים למחיר הדירה בדולרים הוא יקבל 1.
ב. לסדרה של נתונים התקבל $\bar{X} = \bar{Y} = 6$, $S_x = S_y = 1$. לכן, מדד הקשר של פירסון יהיה 1.
ג. אם השונות המשותפת של X ושל Y הינה 0 אז בהכרח גם מקדם המתאם של פירסון יהיה 0.

שאלות רב-ברירה:

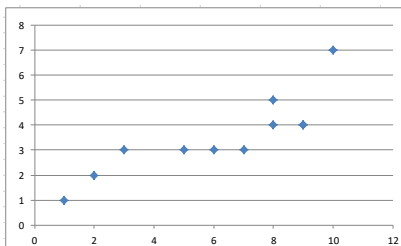
7) נמצא שקיים מקדם מתאם שלילי בין הציון בעברית לציון בחשבון בבחינה לכן:
א. הדבר מעיד שהציונים בכתה היו שליליים.
ב. ככל שהציון של תלמיד יורד בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.
ג. ככל שהציון של תלמיד עולה בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.
ד. אף אחת מהתשובות לא נכונה.

8) נלקחו 20 מוצרים ונבדק ביום מסוים המחיר שלהם בדולרים והמחיר שלהם בש"ח (באותו היום ערך הדולר היה-4.2ש"ח). מהו מקדם המתאם בין המחיר בדולר למחיר בש"ח?

- א. 1
 ב. 0
 ג. 4.2
 ד. לא ניתן לדעת.

9) להלן דיאגרמת פיזור:

מה יהיה מקדם המתאם בין שני המשתנים?



- א. 1
 ב. 0.85
 ג. 0.15
 ד. 0

תשובות סופיות

- 1) א. משתנה תלוי: ציון, משתנה ב"ת: מס' חיסורים. ראה דיאגרמה בוידאו. ניתן להסיק שקיים קשר לינארי שלילי וחלקי בין מספר החיסורים לציון התלמיד.
 ב. -0.9325.
 ג. הקשר יישאר לינארי שלילי חלקי אך עוצמתו תחלש.
- 2) א. $\bar{y} = 16$, $\bar{x} = 15.4$ ב. $r_{xy} = 0.96$.
- 3) א. 0.8
 4) 0.8
 5) 1
 6) א. נכון. ב. לא נכון. ג. נכון.
 7) ג'.
 8) א'.
 9) ב'.

בדיקת השערות על מקדם המתאם הלינארי – רקע

מדד הקשר הלינארי באוכלוסייה, שנקרא גם מקדם המתאם של פירסון או מדד הקשר של פירסון באוכלוסייה מסומן ב: ρ - פרמטר המאפיין את עוצמת הקשר הלינארי וכיוונו בין שני המשתנים הנחקרים באוכלוסייה. כאשר: r - מדד הקשר הלינארי במדגם שמהווה אומדן לפרמטר ρ .

השערת האפס: תהיה שבאוכלוסייה לא קיים כלל קשר לינארי בין שני המשתנים $H_0: \rho = 0$. ההנחה שעליה אנו מתבססים בתהליך היא ששני המשתנים הנחקרים מתפלגים דו נורמלית.

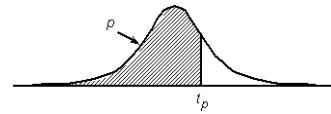
$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \sim t(n-2)$$

סטטיסטי זה מתפלג t עם $n-2$ דרגות חופש.

$H_0: \rho = 0$	$H_0: \rho = 0$	$H_0: \rho = 0$	השערת האפס:
$H_1: \rho > 0$	$H_1: \rho < 0$	$H_1: \rho \neq 0$	השערת המחקר:
$t \geq t_{1-\alpha}$	$t \leq -t_{1-\alpha}$	$t \geq t_{1-\alpha}$ γ א $t \leq -t_{1-\alpha}$	כלל ההכרעה: אזור דחייה של השערת האפס

טבלת ערכים קריטיים של t - נספח: טבלת התפלגות T

P



דרגות חופש	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9995
1	1.000	3.078	6.314	12.709	31.821	63.657	636.619
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.941
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

שאלות

1) להלן נתונים על הוותק בעבודה (בשנים) ועל השכלה (בשנים) במדגם של 10 עובדים :

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	נחקר
24	17	28	5	9	16	8	2	18	13	X-וותק
15	12	8	13	12	11	8	17	14	12	Y-השכלה

מקדם המתאם חושב והתקבל : -0.31 .

- א. האם קיים מתאם בין וותק העובד להשכלתו? בדקו ברמת מובהקות של 5%?
- ב. אם הוותק של העובד היה נמדד בחודשים האם התשובה לסעיף א' הייתה משתנה?

2) מחקר התעניין לבדוק את הקשר בין גיל נשים בהריון לרמת ההמוגלובין שלהן בדם בזמן הריון. נדגמו 7 נשים והתקבלו התוצאות הבאות :

נחקרת	1	2	3	4	5	6	7
המוגלובין	14.7	13.5	9.7	12	10.8	13	10.3
גיל	39	34	30	29	28	26	23

במדגם חושב מדד הקשר של פירסון להיות 0.7 .

- א. האם ניתן לומר שבמדגם אם אישה היא יותר מבוגרת אזי בהכרח יש לה יותר המוגלובין בדם?
- ב. האם ניתן לומר, ברמת מובהקות של 5%, שקיים מתאם בין גיל האישה שבהריון לבין רמת ההמוגלובין שלה בדם?

3) בתחנה המטאורולוגית רצו לבדוק את הקשר שבין הטמפרטורה במעלות צלזיוס לכמות המשקעים במ"מ. הם אספו נתונים על 10 ימים במהלך חודש ינואר. המתאם שהתקבל היה -0.8 .

- א. בדקו ברמת מובהקות של 2.5% האם קיים קשר לינארי שלילי בחודש ינואר בין הטמפרטורה במעלות צלזיוס לבין המשקעים במעלות צלזיוס.
- ב. כיצד הייתה משתנה התשובה לסעיף א אם הינו מוסיפים עוד תצפיות למדגם?
- ג. על סמך טבלת T המצורפת עבור אילו רמות מובהקות ניתן להחליט שקיים קשר לינארי שלילי מובהק?

4) מתווך דירות חישב את מקדם המתאם בין שטח דירה במרכז תל אביב לבין המחיר של הדירה עבור 17 דירות. מקדם המתאם שקיבל היה 0.6 .

- א. בדוק ברמת מובהקות של 5% האם ניתן להגיד שקיים קשר ישר עולה בין שטח הדירה לבין מחיר הדירה במרכז תל אביב?
- ב. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת ההשערה שקיים קשר ישר עולה בין שטח הדירה לבין מחיר הדירה בתל אביב.

תשובות סופיות

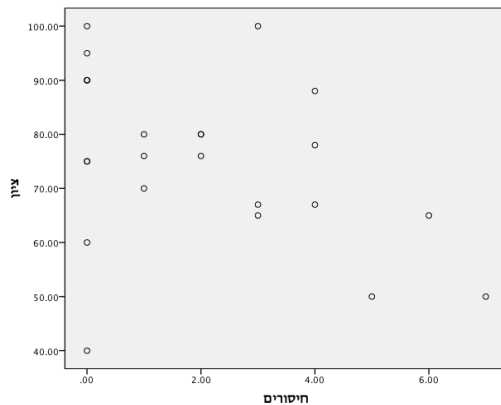
- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| ב. לא תשתנה. | (1) א. לא נדחה את H_0 . |
| ב. לא נדחה את H_0 . | (2) א. לא |
| ב. לא ניתן לדעת. | (3) א. נדחה את H_0 . |
| ב. $0.005 < P_v < 0.01$. | ג. לפחות 0.005. |
| | (4) א. נדחה את H_0 . |

מדד הקשר הלינארי – ניתוח פלטים – רקע

מדד הקשר הלינארי באוכלוסייה, שנקרא גם מקדם המתאם של פירסון או מדד הקשר של פירסון באוכלוסייה מסומן ב: ρ - פרמטר המאפיין את עוצמת הקשר הלינארי באוכלוסייה וכיוונו בין שני המשתנים הנחקרים. כאשר: r - מדד הקשר הלינארי במדגם שמהווה אומדן לפרמטר ρ .

השערת האפס: תהיה שבאוכלוסייה לא קיים כלל קשר לינארי בין שני המשתנים: $H_0: \rho = 0$. ההנחה שעליה אנו מתבססים בתהליך היא ששני המשתנים הנחקרים מתפלגים דו נורמלית. דוגמה (פתרון בהקלטה):

הדיקן ביקש לדגום סטודנטים כדי לבדוק את הקשר בין ציון הסטודנט בקורס למספר הפעמים שהוא החסיר שיעור בקורס. דיאגרמת הפיזור שהתקבלה במדגם שבוצע:



- מיהו המשתנה התלוי ומיהו המשתנה הבלתי תלוי במחקר?
- מה ניתן לראות לגבי הקשר הלינארי בין המשתנים שהתקבל בהתקבל במדגם?

Correlations

		חיסורים	ציון
חיסורים	Pearson Correlation	1	-.389
	Sig. (2-tailed)		.060
	N	24	24
ציון	Pearson Correlation	-.389	1
	Sig. (2-tailed)	.060	
	N	24	24

- מהו מקדם המתאם שהתקבל במדגם? מה המשמעות שלו?
- האם ניתן להגיד ברמת מובהקות של 5% שקיים מתאם לינארי שלילי בין מספר החיסורים של הסטודנטים מהקורס לבין הציון של הסטודנטים בקורס?

שאלות

1) מחקר רפואי התעניין לבדוק האם קיים קשר לינארי בין גיל האישה בהריון לרמת ההמוגלובין שלה. להלן תוצאות מדגם שהתקבלו, עבור נשים בהריון:

Correlations

		age	hemoglobin
age	Pearson	1	.565
	Correlation		
	Sig. (2-tailed)	23	.005
	N		
hemoglobin	Pearson	.565	1
	Correlation		
	Sig. (2-tailed)	23	.005
	N		

- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
- ב. מהן השערות המחקר?
- ג. מהו המשתנה הבלתי תלוי ומהו המשתנה התלוי במחקר?
- ד. מהי מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 5%?

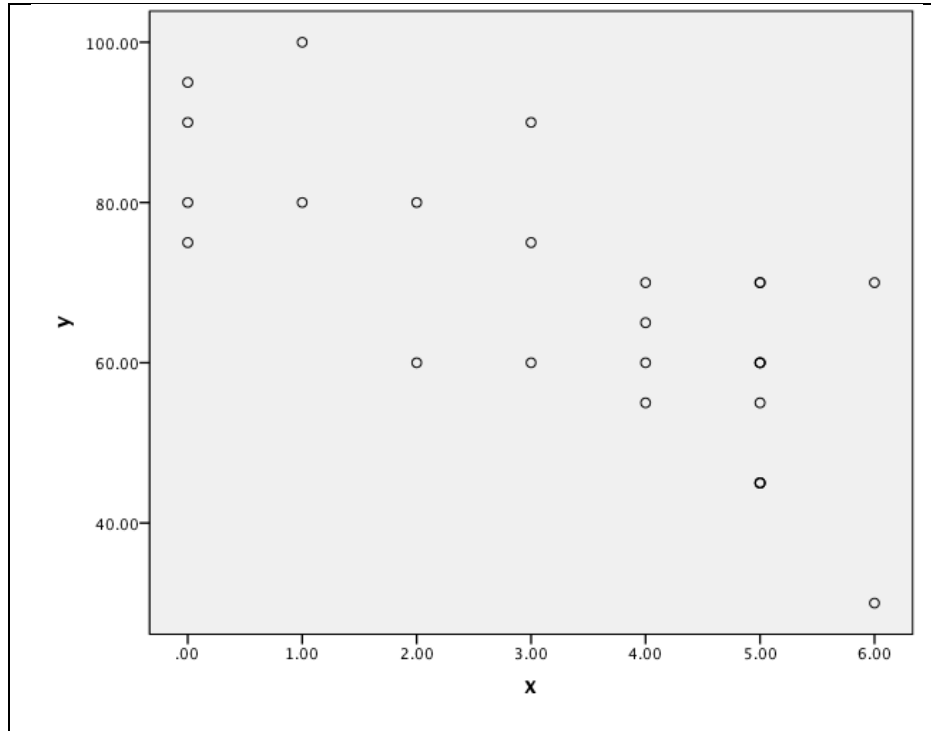
2) במדגם שנעשה נבדקו מספר משתנים על התצפיות שנדגמו. להלן פלט שהופק על המדגם:

Correlations

		x	y	z	w
x	Pearson	???	-.682	.134	.176
	Correlation				
	Sig. (2-tailed)		.005	.634	.530
	N	15	15	15	15
y	Pearson	-.682	1	???	-.555
	Correlation				
	Sig. (2-tailed)	.005		.544	.032
	N	15	15	15	15
z	Pearson	.134	.170	1	-.247
	Correlation				
	Sig. (2-tailed)	???	.544		.374
	N	15	15	15	15
w	Pearson	.176	-.555	-.247	1
	Correlation				
	Sig. (2-tailed)	.530	.032	.374	
	N	15	15	15	15

- א. בין אילו שני משתנים שונים הקשר הלינארי במדגם נמצא עם העוצמה הכי חזקה?
- ב. ברמת מובהקות של 5%, אילו שני משתנים בעל קשר לינארי מובהק?
- ג. השלימו את המספרים המסומנים בפלט בסימני שאלה.

3) נדגמו מספר תלמידים בכיתה יב' ובדקו לכל תלמיד: X - מספר שעות שבועיות שהתלמיד צופה בטלוויזיה ביום Y - ציון הבגרות שלו במתמטיקה. להלן התוצאות שהתקבלו במחקר:



Correlations

		x	y	
x	Pearson	1	-.741**	
	Correlation			
	Sig. (2-tailed)			.000
	N			26
y	Pearson	-.741**	1	
	Correlation			
	Sig. (2-tailed)			.000
	N			26

** . Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

- מהו המשתנה התלוי ומהו המשתנה הבלתי תלוי?
- מהו כיוון הקשר שהתקבל במדגם ומהו עוצמתו?
- האם ניתן להגיד שבאופן מובהק ככל שתלמיד צופה יותר בטלוויזיה הוא מצליח פחות בבגרות במתמטיקה?
- בהמשך לסעיף הקודם, האם ניתן להגיד שהסיבה להצלחה או אי הצלחה בבגרות במתמטיקה היא זמן הצפייה בטלוויזיה?

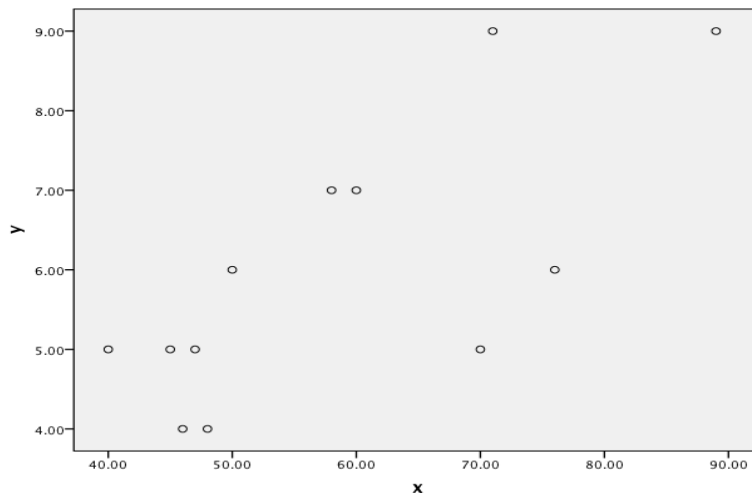
4) נדגמו ילדים בגיל 8 ונבדק עבור כל ילד גובהו בס"מ ומשקלו בק"ג. להלן הפלט שהתקבל עבור תוצאות המדגם:

Correlations

		גובה	משקל
גובה	Pearson		
	Correlation	1	.552
	Sig. (2-tailed)		.062
	N	12	12
משקל	Pearson		
	Correlation	.552	1
	Sig. (2-tailed)	.062	
	N	12	12

- בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים קשר לנארי חיובי בין המשקל והגובה.
- באילו רמות מובהקות ניתן לקבוע שקיים קשר לנארי חיובי בין במשקל והגובה?
- כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם היו מתווספות עוד 3 תצפיות למדגם?

5) בתהליך כימי מסוים חוקר בדק את הקשר בין הטמפרטורה בתהליך (X) לבין אחוז החומר (Y) בתהליך. דיאגרמת הפיזור שהתקבלה היא:



Correlations

		x	y	
x	Pearson	1	.732**	
	Correlation			
	Sig. (2-tailed)			.007
	N			12
y	Pearson	.732**	1	
	Correlation			
	Sig. (2-tailed)			.007
	N			12

** . Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

- מה ניתן להגיד על סמך הפלט על הקשר שנימצא במדגם בין הטמפרטורה בתהליך לאחוז החומר?
- האם הקשר בין הטמפרטורה בתהליך לבין אחוז החומר הוא קווי חיובי מובהק? בדקו ברמת מובהקות של 5%.
- מה היה קורה למקדם המתאם במדגם ומובהקות התוצאה אם הייתה מתווספת תצפיות שבה הטמפרטורה היא 40 ואחוז החומר 9?

תשובות סופיות

- (1) א. נשים בהריון. ב. $H_0 : p = 0$
 $H_1 : p \neq 0$
- ג. משתנה תלוי – רמת ההמוגלובין, משתנה בלתי תלוי- גיל.
 ד. קיים קשר לינארי בין גיל האישה בהריון לרמת ההמוגלובין שלה בדם.
- (2) א. בין X ל- Y . ב. X ו- Y . כמו כן, W ו- Y . ג. ראה וידאו.
 ד. לא.
- (3) א. משתנה תלוי – ציון בבגרות במתמטיקה, משתנה בלתי תלוי- שעות צפייה.
 ב. כיוון שלילי ועוצמה של 0.741. ג. כן. ד. לא.
- (4) א. נדחה את H_0 . ב. לפחות 0.032. ג. לא ניתן לדעת.
- (5) א. קיים קשר לינארי חיובי וחלקי שעוצמתו: 0.732. ב. נדחה את H_0 .
 ג. מקדם המתאם קטן ומובהקות התוצאה גדלה.

שיטות מתקדמות ויישומים סטטיסטיים

פרק 12 - רגרסיה

תוכן העניינים

1. כללי 151

מדדי קשר – רגרסיה ליניארית:

רקע:

במידה וקיים קשר חזק בין שני המשתנים הכמותיים נהוג לבצע ניבוי. לבנות קו ניבויים הנקרא גם קו רגרסיה המנבא משתנה אחד על סמך האחר. מדובר בקו שמנבא את Y על סמך X . השיטה למציאת הקו הנ"ל נקראת שיטת הריבועים הפחותים והקו המתקבל נקרא קו הרגרסיה או קו הניבויים או קו הריבועים הפחותים. a - נותן את ערך Y כאשר X הנו אפס על גבי קו הניבויים. הוא נקרא החותך של הקו. b - הוא שיפוע הקו נותן בכמה בעצם Y משתנה כאשר X גדל ביחידה אחת על גבי קו הניבויים.

להלן המשוואות למציאת הפרמטרים של קו הרגרסיה: $Y = bX + a$, $b = r \frac{S_y}{S_x}$.

לצורך בניית קו ניבויים לניבוי X על סמך Y נצטרך לעדכן את הנוסחאות בהתאם.

שאלות:

- (1) נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 200, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i = 240$$

$$\sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})^2 = 76, \quad \sum_{i=1}^{20} (Y_i - \bar{Y}) = 76$$

$$\sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = 60.8$$

- א. חשבו את מדד הקשר הלינארי בין X ל- Y . מיהו המשתנה התלוי?
 ב. מצאו את קו הרגרסיה לניבוי ההוצאה של משפחה על סמך הכנסה שלה. הסבירו את משמעות הפרמטרים של קו הרגרסיה.
 ג. משפחת כהן הכניסה 15,000₪. מה ההוצאה הצפויה שלה?

- (2) נסמן ב- X את ההשכלה של אדם בשנות לימוד. נסמן ב- Y את הכנסתו באלפי ₪. במחקר התקבלו התוצאות הבאות:

$$S_x = 2, \quad S_y = 5, \quad \bar{X} = 14, \quad \bar{Y} = 8, \quad \text{COV}(X, Y) = 7.5$$

- א. חשבו את מדד הקשר של פירסון בין ההשכלה להכנסה.
 ב. מה ההכנסה הצפויה לאדם שהשכלתו 12 שנים?
 ג. מה ההשכלה הצפויה לאדם שהכנסתו 10,000₪?

- (3) חוקר רצה לחקור את הקשר הקווי שבין הציון המבחן בסטטיסטיקה לבין מספר שעות ההכנה של הסטודנטים למבחן. במדגם של 100 סטודנטים שנבחנו בקורס נרשמו התוצאות הבאות: הציון הממוצע של הסטודנטים היה 65 עם סטיית תקן של 27. מספר שעות ההכנה הממוצע היה 30 עם סטיית תקן של 18. מקדם המתאם בין הציון לשעות ההכנה היה 0.8.

- א. על פי משוואת הרגרסיה, שעת הכנה נוספת משפרת את ציון המבחן ב-?
 ב. על פי משוואת הרגרסיה, תלמיד שייגש למבחן ללא שעות הכנה כלל יקבל ציון?
 ג. מהו קו הרגרסיה לניבוי הציון לפי שעות ההכנה?

- (4) נתונים 2 משתנים X ו- Y . כמו כן נתון: $\bar{X} = 1.5, S_x = S_y = 4$,
 וכן שקו הרגרסיה של Y על בסיס X הינו: $Y = -0.2X + 0.5$.
 חשבו מהו מקדם המתאם בין X ל- Y .

תשובות סופיות:

- | | | |
|----------------------|-----------------------|-------------|
| ג. 12.4 אלפי ₪. | ב. $Y = 0.8X + 0.4$. | א. 0.8 (1) |
| ג. 14.6 שנים. | ב. 4.25 אלפי ₪. | א. 0.75 (2) |
| ג. $Y = 1.2X + 29$. | ב. 29. | א. 1.2 (3) |
| | | א. -0.2 (4) |

שיטות מתקדמות ויישומים סטטיסטיים

פרק 13 - מדדי קשר-רגרסיה - שונות מוסברת ושונות לא מוסברת

תוכן העניינים

1. כללי 154

מדדי קשר – רגרסיה – שונות מוסברת ושונות לא מוסברת:

רקע:

המטרה ברגרסיה היא להסביר את השונות של המשתנה התלוי. למשל, להסביר את השונות של המשכורת באמצעות הוותק או להסביר את השוני בציונים באמצעות כמות החיסורים.

r^2 - החלק מהשונות של המשתנה התלוי מוסבר. השונות המוסברת נקראת גם שונות ניבויים. השונות הלא מוסברת נקראת גם שונות טעויות.

שאלות:

- (1) נמצא קשר חיובי בעוצמה של 0.7 בין שטח דירה למחירה. כמו כן, נתון שסטיית התקן של מחירי הדירות הינה 200.
- איזה אחוז מהשונות של מחירי הדירות מוסבר על ידי שטח הדירה?
 - איזה אחוז מהשונות של מחירי הדירות לא מוסבר על ידי שטח הדירה?
 - מהי השונות המוסברת ומהי השונות הלא מוסברת של מחירי הדירות?
- (2) להלן רשימת טענות, לגבי כל טענה קבעו נכון/לא נכון ונמקו!
- אם שונות הטעויות שווה ל-0 (השונות הלא מוסברת) אז מקדם המתאם של פירסון יהיה 1.
 - אם מקדם המתאם של פירסון בין שני משתנים הוא 1 אזי שונות הטעויות (השונות הלא מוסברת) תהיה 0.
 - אם השונות המשותפת של X ושל Y היא 0 אז בהכרח גם מקדם המתאם של פירסון יהיה 0.

שאלות רב-ברירה:

- (3) בקשר בין שני משתנים התקבל: $r^2 = 0.64$, לכן:

- ללא יוצא מן הכלל ככל שערכי משתנה אחד עולה השני יעלה.
- 64% מהשונות של משתנה אחד מוסבר על ידי המשתנה השני.
- הקשר בין שני המשתנים הוא בעוצמה של 0.64.
- כל התשובות נכונות.

- (4) אם מגדילים את r^2 , ניתן לומר כי:

- אחוז השונות המוסברת יקטן.
- אחוז השונות המוסברת יגדל.
- אחוז השונות המוסברת יישאר ללא שינוי.
- סטיית התקן משתנה.
- לא ניתן לדעת.

- (5) בקורס מבוא לכלכלה ניתנו במשך השנה שני מבחנים : מבחן בסוף סמסטר א' X ומבחן בסוף סמסטר ב' Y . כאשר בנו את קו הרגרסיה של הציון במבחן סוף סמסטר ב' לפי הציון במבחן סוף סמסטר א' התקבלה שונות טעויות של 80, ושונות ניבויים של 20.
- לפי נתונים אלו, מקדם המתאם בין הציון במבחן סוף סמסטר א' לבין הציון במבחן סוף סמסטר ב' הוא :
- א. 0.44 .
 ב. - 0.44 .
 ג. עוצמת ההקשר הלינארי היא 0.44, אך אין אפשרות לדעת את סימנה.
 ד. אין אפשרות לחשב את מקדם המתאם.
 ה. 0.35 .

תשובות סופיות:

- (1) א. 49% . ב. 51% .
 ג. שונות מוסברת : 19,600, שונות לא מוסברת : 20,400 .
- (2) א. לא נכון . ב. נכון . ג. נכון .
- (3) ב' .
- (4) ב' .
- (5) ג' .