שיטות מתמטיות בכימיה

תוכן העניינים

שיטות מתמטיות בכימיה

פרק 1 - מספרים מרוכבים

תוכן העניינים

שיטות מתמטיות בכימיה

פרק 2 - מספרים מרוכבים ופתרון משוואות פולינומיאליות

תוכן העניינים

מספרים מרוכבים – היכרות ותכונות בסיסיות

שאלות

בשאלות **1-3** פתרו את המשוואות ומצאו את z :

1) $z^2+9=0$ **2)** $z^2-4z+5=0$ **3)** $z^2-6z+13=0$

בשאלות **4-7** חשבו :

4) $(i\sqrt{2})^6$ **5)** $(i^5-i^{13})^2$

6) $(4+i)-(2+10i)$ **7)** $(-4-i)(2-3i)$

8) נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1=a_1+b_1i$ ו- $z_2=a_2+b_2i$.
ידוע כי z_1+z_2 ממשי וכי z_1-z_2 מדומה.
א. מצאו קשר בין a_1 ל- a_2 ובין z_1 ל- z_2 .
ב. הראו כי המכפלה $z_1\cdot z_2$ היא ממשית.

9) יהיו $z_1,z_2,...,z_n$ מספרים מרוכבים.
א. הוכיחו כי $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$
ב. הוכיחו כי $|z_1\cdot z_2\cdot...\cdot z_n|=|z_1|\cdot|z_2|\cdot...\cdot|z_n|$
ג. הוכיחו כי $|z_1^n|=|z_1|^n$

10) יהי z מספר מרוכב.
הוכיחו : אם $z^{11}=1$ אז $z+\frac{1}{z}$ מספר ממשי.

11) יהי z מספר מרוכב.
הוכיחו : אם $|z+1|=|z-1|$ אז iz מספר ממשי.

תשובות סופיות

1) $\pm 3i$
2) $2\pm i$
3) $3\pm 2i$
4) -8
5) 0
6) $2-9i$
7) $-11+10i$
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.
11) שאלת הוכחה.

הצמוד המרוכב

שאלות

בשאלות **3-1** חשבו (כתבו את התוצאה בצורה $z=x+yi$):

1) $\frac{5}{2+i}$ **2)** $\frac{1+i}{1-3i}$ **3)** $\frac{i}{1-i}-\frac{1}{(i+1)^2}$

פתרו את המשוואות בשאלות **6-4** ומצאו את המספר המרוכב z:

4) $2z-6i=\bar{z}-1$ **5)** $z\bar{z}-5\bar{z}=10i$ **6)** $(1+i)z^2+2z-i+1=0$

7) פתרו את מערכת המשוואות הבאה (כאשר z ו-w משתנים מרוכבים):

$$\begin{cases} 3z+iw=5-4i \\ 5iz-2w=5+8i \end{cases}$$

8) חשבו את ערכי המספרים המרוכבים הבאים:

א. $\sqrt{5-12i}$

ב. $\sqrt{8+6i}$

9) פתרו את המשוואות הריבועיות הבאות:

א. $(1-i)z^2-2z+i+1=0$

ב. $(-2+i)z^2-(6+12i)z+10-25i=0$

בשאלות **11-10** פתרו את המשוואות:

10) $iz^2-2(1-i)z+6+15i=0$

11) $z^2-i\bar{z}+6=0$

12) הוכיחו שהמספר הבא הוא מספר מדומה $\frac{z}{\bar{z}^2}-\frac{\bar{z}}{z^2}$ כאשר $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

13) נתון מספר מרוכב $z \neq 0$ המקיים: $|z-i|=1$.

הוכח:

א. $|z|^2 = 2\operatorname{Im}(z)$

ב. $\frac{z-2i}{iz} \in \mathbb{R}$

14) המספר $\frac{3+4i}{a-i}$ הוא ממשי טהור.

מצאו את a.

15) נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1 = a_1 + b_1 i$ ו- $z_2 = a_2 + b_2 i$.

הראו כי כדי שתוצאת החילוק $\frac{z_1}{z_2}$ תהיה ממשית טהורה, צריך להתקיים

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$.

תשובות סופיות

1) $2-i$

2) $-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$

3) $-\frac{1}{2}+i$

4) $z=-1+2i$

5) $z=1+2i, z=4+2i$

6) $z=i, z=-1$

7) $z=2-3i,\ \ w=5+i$

8) א. $z=\pm(3-2i)$ ב. $z=\pm(3+i)$

9) א. $z_{1,2}=i,\ 1$ ב. $z_{1,2}=-2-i,\ \ 2-5i$

10) $z_1=-2-5i,\ \ z_2=3i$

11) $z_1-3i,\ \ z_2=2i$

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) $a=-\frac{3}{4}$

15) שאלת הוכחה.

הצגת מספר מרוכב בצורה קוטבית

שאלות

כתבו את המספרים בשאלות **1-8** בצורה קוטבית:

1) $1+\sqrt{3}i$ **2)** $-1-i$ **3)** $-3-\sqrt{3}i$ **4)** $1-i$

5) $1+i$ **6)** $\sqrt{3}-i$ **7)** $\sqrt{3}i$ **8)** -8

9) נתון המספר המרוכב $z=Rcis\theta$.
הביעו באמצעות R ו-θ את המספרים:

א. $\bar{z}$

ב. $\frac{1}{z}$

ג. $-z$

ד. $-\frac{1}{z}$

ה. iz

ו. $z\cdot\bar{z}$

10) הראו כי המספרים הבאים הם ממשיים טהורים:

א. $z+\bar{z}$

ב. $z\cdot\bar{z}$

ג. $\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}$

11) הראו כי המספרים הבאים הם מדומים טהורים:

א. $z^2-\bar{z}^2$

ב. $\frac{1}{\bar{z}}-\frac{1}{z}$

12) הוכיחו:

א. $z-i\bar{z}=\overline{\bar{z}+iz}$

ב. $z\cdot\bar{z}=|z|^2$

תשובות סופיות

1) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

2) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

3) $\sqrt{12}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

4) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

5) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

6) $2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

7) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

8) $8(\cos\pi+i\sin\pi)$

9) א. $R\text{cis}(-\theta)$ ב. $\frac{1}{R}\text{cis}(-\theta)$ ג. $R\text{cis}(180°+\theta)$

ד. $\frac{1}{R}\text{cis}(180°+\theta)$ ה. $R\text{cis}(90°+\theta)$ ו. R^2

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

נוסחת דה-מואבר – חזקה ושורש של מספר מרוכב

שאלות

בשאלות **1-6** חשבו:

1) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{10}$ **2)** $\left(1+\sqrt{3}i\right)^{9}$ **3)** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{100}$

4) $\sqrt[6]{-8}$ **5)** $\sqrt[5]{1}$ **6)** $\sqrt[3]{-8}$

7) בעזרת משפט דה-מואבר, הוכיחו את הזהויות הבאות:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$
$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

8) בעזרת משפט דה-מואבר, הוכיחו כי: $\sin 1+\sin 2+\ldots+\sin n = \dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\sin\frac{n}{2}}{\sin\frac{1}{2}}$.

תשובות סופיות

1) $\frac{1}{32}i$

2) -2^9

3) -1

4) $8^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{\pi+2\pi\kappa}{6}+i\sin\frac{\pi+2\pi\kappa}{6}\right) \quad k=0,1,2,3,4,5$

5) $1^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{0+2\pi\kappa}{5}+i\sin\frac{0+2\pi\kappa}{5}\right) \quad k=0,1,2,3,4$

6) $8^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi+2\pi\kappa}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi\kappa}{3}\right) \quad k=0,1,2$

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

תרגול נוסף במספרים מרוכבים

שאלות

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את כל הפתרונות של המשוואה $z^4+z^2+1=0$.

ב. הראו כי אם z הוא פתרון של המשוואה מסעיף א אזי: $z^6=1$.

2) נתונה המשוואה $z^4=-8-8\sqrt{3}i$.

א. מצאו את פתרונות המשוואה הנתונה.

ב. הוכיחו כי החזקה השלישית של כל אחד מפתרונות הנתונה היא מספר ממשי או מספר מדומה טהור.

3) פתרו את המשוואה $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4=1$.

4) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את שלושת הפתרונות של המשוואה $z^3=i$.

ב. הראו שמכפלת שלושת הפתרונות היא i.

ג. הראו שאם מעלים בריבוע פתרון כלשהו של המשוואה, התוצאה שווה למכפלת שני הפתרונות האחרים.

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. פתרו את המשוואה $z^5=-16(\sqrt{3}-i)$.

ב. הוכיחו כי חמשת השורשים מהווים סדרה הנדסית, ומצאו את מנת הסדרה.

הערה: סדרה הנדסית היא סדרה מהצורה $a_1, a_1q, a_1q^2, ..., a_1q^{n-1}$, כאשר q מנת הסדרה.

6) נתון $w=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$.

א. מצאו את פתרונות המשוואה $z^3=w^3$.

ב. הראו כי מכפלת הפתרונות של המשוואה היא w^3.

7) נתונה המשוואה $(z-1)^3=1$.
הוכיחו שסכום שורשיה הוא 3.

8) נתונה המשוואה $z^3=-\sqrt{3}+i$.
א. מצאו את שורשי המשוואה: z_1, z_2, z_3.
ב. מצאו את הסכום $|z_1|^3+|z_2|^3+|z_3|^3$.
ג. הראו כי הסכום $(z_1)^9+(z_2)^9+(z_3)^9$ הוא מספר מדומה טהור.

9) נתונה המשוואה $z^2+|z|^2-2ti=18s^2$, כאשר z הוא מספר מרוכב,
s ו-t הם מספרים ממשיים שונים מאפס ו-z_1, z_2 הם פתרונות המשוואה.
א. הביעו את פתרונות המשוואה באמצעות s ו-t.
ב. נתון $z_1 \cdot z_2=-18i$. מצאו את הפרמטרים s ו-t.

10) ענו על הסעיפים הבאים:
א. פתרו את המשוואה $\bar{z}\cdot i+(\bar{z})^2+|z|^2+z+\bar{z}=0$.
ב. אחד מהפתרונות שמצאת בסעיף א הוא איבר אחרון בסדרה חשבונית,
שכל איבריה שונים מאפס.
הפרש סדרה זו הוא $1+\frac{1}{16}i$.
האיבר הראשון בסדרה הוא מספר ממשי.
חשבו את האיבר הראשון בסדרה.

הערה: סדרה חשבונית היא סדרה מהצורה: $a_1, a_1+d, a_1+2d, ..., a_1+(n-1)d$,
כאשר d נקרא הפרש הסדרה.

תשובות סופיות

1) א. $z_1 = cis60^\circ, z_2 = cis240^0, z_3 = cis120^\circ, z_4 = cis300^\circ$ ב. שאלת הוכחה.

2) א. $z_1 = 1+\sqrt{3}i, z_2 = -\sqrt{3}+i,\ z_3 = -1-\sqrt{3}i, z_4 = \sqrt{3}-i$ ב. שאלת הוכחה.

3) $z = 0\ ,\ z = 1\ ,\ z = -1$

4) א. $z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i, z_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i,\ z_3 = -i$
ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.

5) א. $z_n = 2cis[30^\circ + (n-1)72^\circ]\ \ n = 1,2,3,4,5$ ב. $q = cis72^\circ$

6) א. $z_1 = cis45^\circ,\ z_2 = cis165^\circ,\ z_3 = cis285^\circ$ ב. שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) א. $z_3 = \sqrt[3]{2}cis290^\circ, z_2 = \sqrt[3]{2}cis170^\circ, z_1 = \sqrt[3]{2}cis50^\circ$ ב. 6 ג. שאלת הוכחה.

9) א. $z_2 = -3s - \frac{t}{3s}i\ ,\ z_2 = -3s - \frac{t}{3s}i$ ב. $t = 9\ ,\ s = \pm 1$

10) א. $z_2 = -0.5+0.5i,\ z_1 = 0$ ב. $a_1 = -8.5$

חילוק פולינומים

שאלות

צמצמו עד כמה שניתן את השברים האלגבריים הבאים:

1) $\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$

2) $\frac{4x^4+6x^3+31x^2+99x+10}{x^2-x+10}$

3) $\frac{4x^2+x-1}{x-2}$

4) $\frac{x^2-5x-14}{x+2}$

5) $\frac{x^3+x^2+3x-5}{x-1}$

6) $\frac{x^4+x^3-x^2+14x-3}{x+3}$

7) $\frac{x^3-4x^2+9}{x-3}$

8) $\frac{x^3+5x^2-4x-20}{x+5}$

תשובות סופיות

1) x^2+1

2) 0

3) $4x+9+\frac{17}{x-2}$

4) $x-7$

5) x^2+2x+5

6) x^3-2x^2+5x-1

7) x^2-x-3

8) x^2-4

פתרון משוואות פולינומיאליות ממעלה גבוהה

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $k^4+3k^3-15k^2-19k+30=0$

2) $k^3+2k^2-3k+20=0$

3) $k^5+3k^4+2k^3-2k^2-3k-1=0$

4) $k^3-6k^2+12k-8=0$

5) $k^6-3k^4+3k^2-1=0$

6) $k^3-k^2+k-1=0$

7) $k^4-3k^3+6k^2-12k+8=0$

תשובות סופיות

1) $k_1=1,\quad k_2=-2,\quad k_3=3,\quad k_4=-5$

2) $k_1=-4,\quad k_{2,3}=1\pm 2i$

3) $k_1=1,\quad k_2=-1,\quad k_3=-1,\quad k_4=-1,\quad k_5=-1$

4) $k_1=2,\quad k_2=2,\quad k_3=2$

5) $k_1=1,\quad k_2=-1,\quad k_3=1,\quad k_4=-1\quad k_5=1\quad k_6=-1$

6) $k_1=1,\quad k_{2,3}=\pm i$

7) $k_1=1,\quad k_2=2,\quad k_{3,4}=\pm 2i$

שימושים של מספרים מרוכבים באלגברה ליניארית

שאלות

בשאלות **1-4** נתון $v=(5+i,2-3i,7+2i)$, $u=(3-2i,4i,1+6i)$.
מצאו:

1) א. $4u+v$ ב. $2i\cdot u-v$ **2)** $u\cdot v$

3) א. $u\cdot u$ ב. $|u|$

4) $|v|$

בשאלות **5-6** פתרו את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס,

מעל **השדה F** :

$$\begin{aligned} z_1+iz_2+(1-i)z_3&=1+4i\\ iz_1+z_2+(1+i)z_3&=2+i\\ (-1+3i)z_1+(3-i)z_2+(2+4i)z_3&=5-i\end{aligned}$$

, כאשר:

5) $\mathbf{F}=\mathbb{R}$

6) $\mathbf{F}=\mathbb{C}$

בשאלות **7-8** בדקו האם $W=\left\{(z_1,z_2,z_3)\mid z_2=\overline{z}_1, z_3=z_1+\overline{z}_1\right\}$
הוא תת-מרחב של C^3 :

7) מעל השדה הממשי $\mathbb{R}$.

8) מעל שדה המרוכבים $\mathbb{C}$.

בשאלות **9-10** בדקו האם הווקטורים $\{(1,i,i-1),(i+1,i-1,-2)\}$,
תלויים ליניארית ב- C^3 :

9) מעל $\mathbb{C}$.

10) מעל $\mathbb{R}$.

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **11-13** מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסנו אותה.
כלומר, מצאו מטריצה הפיכה P, כך ש- $P^{-1}AP = D$, באשר D מטריצה אלכסונית.
פתרו פעם מעל $\mathbb{C}$ ופעם מעל $\mathbb{R}$.

(11 $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

(12 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

(13 נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
מצאו את הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים של המטריצה.

תשובות סופיות

1) א. $(17-7i,2+13i,11+26i)$ ב. $(-1+5i,-10+3i,-19)$

2) א. $20+35i$ ב. 66

3) $\sqrt{66}$

4) $\sqrt{92}$

5) $(z_1,z_2,z_3)\underset{F=\mathbb{R}}{=}(2,3,-1)$

6) $(z_1,z_2,z_3)\underset{F=\mathbb{C}}{=}((-1+i)t+1+i,3,t)$

7) כן

8) לא

9) תלויים.

10) בלתי תלויים.

11) אין פתרונות מעל $\mathbb{R}$, ולכן אין ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

מעל $\mathbb{C}$: $x=1\pm 2i$, $\boldsymbol{v}_{x=1+2i}=\langle 1+i,2\rangle$, $\boldsymbol{v}_{x=1-2i}=\langle 1-i,2\rangle$,

$$A=\begin{bmatrix}1+i & 1-i\\ 2 & 2\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}1+2i & 0\\ 1 & 1-2i\end{bmatrix}$$

12) ערכים עצמיים: $x=3$, וקטורים עצמיים: $\boldsymbol{v}_{x=3}=\langle -1,1\rangle$. לא ניתנת ללכסון.

13) $x=1,x=1\pm\sqrt{3i}$, $\boldsymbol{v}_{x=1}=\langle 1,1,1\rangle$, $\boldsymbol{v}_{x=1+\sqrt{3i}}=\left(1-\sqrt{3i},1+\sqrt{3i},-2\right)$,

$$\boldsymbol{v}_{x=1-\sqrt{3i}}=\left(1+\sqrt{3i},1-\sqrt{3i},-2\right)$$

שיטות מתמטיות בכימיה

פרק 3 - טורים

תוכן העניינים

טורים מספריים:

שאלות:

1) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(in)}{2^n}$.

2) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\sin(in)}{3^n}$.

3) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)^n$.

4) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2+i^n}$.

5) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+i^n}$.

תשובות סופיות:

1) מתבדר.
2) מתכנס.
3) מתבדר.
4) מתבדר.
5) מתכנס.

טורים כלליים:

שאלות:

1) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$.

2) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{(1-i)^n}$.

3) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n (z-1)^n}$.

4) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n$.

5) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nz}$.

תשובות סופיות:

1) $|z| > 1$

2) $|z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$

3) $|z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$

4) $2 < |z| < 4$

5) $\mathrm{Re}(z) < 0$

טורי טיילור ומקלורן:

שאלות:

1) מצאו טור טיילור עבור $f(z)=\sin(z+1)$ סביב $z=0$ ומצאו תחום התכנסות.

2) מצאו טור טיילור עבור $f(z)=\frac{1}{z}$ סביב $z=i$ וציינו את רדיוס ההתכנסות.

3) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{2i}{2+i+z}$ סביב $z_0\neq-(2+i)$ בתחום $|z-z_0|<|2+i+z_0|$.

4) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(1-z)^3}$ לטור חזקות סביב $z_0\neq1$ בתחום $|z-z_0|<|1-z_0|$.

5) נניח כי $f(z)$ שלמה ומתאפסת רק בנקודה $z=0$ ומתקיים $f'(0)=1$.
חשבו את $\oint\limits_{|z|=1}\frac{\cos(z)}{f(z)}dz$.

תשובות סופיות:

1) $z\in\mathbb{C}$ $\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\cos(1)\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}+\sin(1)\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}\right)$.

2) $|z-i|<1$ $\quad f(z)=\frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{i}\right)^n(z-i)^n$.

3) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2i(-1)^n}{(2+i+z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n$.

4) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{(n+1)(n+2)}{(1-z_0)^{n+3}}(z-z_0)^n$.

5) $2\pi i$.

קריטריון קושי – הדמרד:

שאלות:

1) מצאו רדיוס התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} e^{in} z^n$.

2) מצאו רדיוס התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{in}\right)^n$.

3) מצאו רדיוס התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n (2n+1)} (z-3n)^n$.

תשובות סופיות:

1) $R=1$

2) $R=\infty$

3) $R=3$

טורי לורן:

שאלות:

1) פתחו את הפונקציה לטור לורן סביב $z_0=0$ בכל התחומים האפשריים $f(z)=\frac{1}{1-z}$.

2) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ בתחום $|z|<2$ ובתחום $|z|>2$.

3) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0=-1$ בתחומים הבאים: $0<|z+1|<2$ ו- $|z+1|>2$.

4) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(z+2)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0=-3$ בכל התחומים האפשריים.

5) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ בתחום $1<|z|<3$.
רמז: פירוק לשברים חלקיים.

6) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ בתחום $|z|>3$.
רמז: פירוק לשברים חלקיים.

7) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ בתחום $|z|<1$.

8) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ בתחום $|z|<1$ ומצאו את המקדם a_{-1}.

9) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ לטור לורן סביב $z_0=i$ בתחום $0<|z-i|<2$ ומצאו את המקדם a_{-1}.

10) פתחו את הפונקציה $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ לטור לורן סביב $z_0=i$ בתחום $|z-i|>2$.

11) פתחו את הפונקציה $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-4)}$ לטור לורן סביב $z_0=1$ כך שיתכנס בתחום המכיל את $z=5$.

12) פתחו את הפונקציה $f(z)=\dfrac{1}{z^2-5z+6}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ כך שיתכנס בתחום המכיל את $1-3i$.

13) נניח כי $|a|<1$ ונגדיר את הפונקציה $f(z)=\dfrac{a}{z-a}$ (כאשר a מספר ממשי).

א. פתחו פונקציה זו לטור לורן בטבעת $|a|<|z|<\infty$.

ב. הוכיחו את הזהות $\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos(n\theta)=\dfrac{a\cos(\theta)-a^2}{1-2a\cos(\theta)+a^2}$.

14) תהי $a\in\mathbb{C}$ ונניח כי $f(z)$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ ונניח כי מתקיים $\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=0$.

הוכיחו כי לכל $r>0$ מתקיים $f(a)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=r}\dfrac{f(z)}{z-a}dz$.

15) נסמן $\sum_{-\infty}^{\infty}a_nz^n$ פיתוח לטור לורן של $f(z)=\dfrac{z}{e^{z^2}-1}$ סביב $z_0=0$ בתחום $0<|z|<r$.

א. מצאו מהו ה- r המקסימלי.

ב. מצאו את a_n לכל $n\le 4$.

הערה: תרגיל זה דורש ידע בסיווג של נקודות סינגולריות.

16) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1}z^3\cos\left(\dfrac{1}{z}\right)dz$.

תזכורת: מקדמי לורן נתונים ע"י הנוסחה $a_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$.

17) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1}e^{\frac{1}{z}}dz$.

תזכורת: מקדמי לורן נתונים ע"י הנוסחה $a_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$.

תשובות סופיות:

1)

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad |z|<1$$

$$f(z)=-\left(\frac{1}{z}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n \qquad |z|>1$$

2)

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n \qquad |z|<2$$

$$f(z)=-\left(\frac{2}{z}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n \qquad |z|>2$$

3)

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z+1)^{n-1} \qquad 0<|z+1|<2$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(z+1)^{n+2}} \qquad |z+1|>2$$

4)

$$f(z)=-\frac{1}{(z+3)}\sum_{n=0}^{\infty}(z+3)^n \qquad 0<|z+3|<1$$

$$f(z)=\frac{1}{(z+3)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+3)^n} \qquad |z+3|>1$$

5)

$$f(z)=\frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n}-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^n} \qquad 1<|z|<3$$

6)

$$f(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{z^{n+1}} \qquad |z|>3$$

7)

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{6\cdot 3^n}\right]z^n \qquad |z|<1$$

8)

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n} \qquad |z|<1$$

$$a_{-1}=0$$

9)

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2i}\right)^{n+1}(z-i)^{n-1} \qquad 0<|z-i|<2$$

$$a_{-1}=\frac{1}{2i}$$

10)

$$f(z)=\frac{1}{(2-i)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-2i}{z-i}\right)^n \qquad 2<|z-i|$$

11)

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(z-1)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(z-1)^{n+2}} \qquad |z-1|>3$$

12) $|z|>3$ $\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$

13) א. $|a|<|z|<\infty$ $\quad f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{z^n}$ $\quad$ ב. הוכחה.

14) הוכחה.

15) א. $r=\sqrt{2\pi}$

ב. $a_n=0$ $\forall n\le -2$, $a_{-1}=1$, $a_0=0$, $a_1=-\frac{1}{2}$, $a_2=0$, $a_3=\frac{1}{12}$, $a_4=0$.

16) $\frac{\pi i}{12}$

17) $2\pi i$

שיטות מתמטיות בכימיה

פרק 4 - אינטגרציה מרוכבת

תוכן העניינים

אינטגרל ממשי של פונקציה מרוכבת:

שאלות:

1) חשבו את האינטגרל $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}dx$, לכל $\forall m,n \in \mathbb{Z}$.

2) לכל $z \in \mathbb{C}$, המקיים $\operatorname{Re}(z) < 0$, פתרו את האינטגרל $\int_{0}^{\infty} e^{zt}dt$.

תשובות סופיות:

1) $\begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$

2) $-\frac{1}{z}$

אינטגרל מרוכב של פונקציה מרוכבת:

שאלות:

1) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1} z^n dz$, כאשר $n \in \mathbb{Z}$.

2) חשבון את האינטגרל $\int\limits_{\gamma} \frac{z+2}{z} dz$, כאשר $\gamma = \{ z = 2e^{i\theta} \mid 0 \le \theta \le \pi \}$.

3) חשבון את האינטגרל $\int\limits_{\gamma} (z-1) dz$, כאשר $\gamma = \{ z = 1 + e^{i\theta} \mid \pi \le \theta \le 2\pi \}$.

4) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{\gamma} \pi e^{\pi \bar{z}} dz$, כאשר γ מסילת קווים ישרים, העוברת בנקודות $\gamma : 0 \to 1 \to 1+i \to i \to 0$.

5) חשבון את אורך המסילה $\gamma = [z_1, z_2]$, כאשר $\gamma = [z_1, z_2]$ היא מסילת הקו הישר המחברת בין z_1 ל- z_2 .

6) חשבון את אורך המסילה $\gamma(t) = \{ (t - \sin t) + i \cdot (1 - \cos t) \ \mid \ 0 < t < 1 \}$.

7) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1} \bar{z} \, dz$.

תשובות סופיות:

1) $\begin{cases} 0 & n \ne -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$

2) $2\pi i - 4$

3) 0

4) $4e^{\pi} - 4$

5) $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

6) ≈ 0.48

7) $2\pi i$

אי-שיוויונות אינטגרליים (משפט הערכה):

שאלות:

הוכיחו את אי השוויונות הבאים:

1) $\left|\int_C \frac{z^3}{z^2+1}dz\right| \le \frac{81\pi}{8}$, כאשר $C:\left\{|z|=3\ ,\ \ \mathrm{Re}(z)>0\right\}$.

2) $\left|\int_{|z|=3} \frac{1}{z^2-1}dz\right| \le \frac{6\pi}{8}$

3) $\left|\int_C e^{z^2}dz\right| \le \sqrt{8}$, כאשר C הינה מסילת הקו הישר מ- 0 עד $2+2i$.

4) $\left|\int_C \frac{z^2}{\sin(z)}dz\right| \le \frac{\pi^2}{2}+2$, כאשר C הוא הקטע הישר המתחיל בנקודה $\frac{\pi}{2}+i$ ומסתיים בנקודה $\frac{\pi}{2}-i$.

תשובות סופיות:

ראה פתרונות מלאים בסרטוני הוידאו.

משפט קושי גורסט:

שאלות:

1) חשבו את האינטגרל $\int_0^{2+\frac{i\pi}{4}} e^z dz$.

2) הוכיחו כי $\int_4^{1+i} \frac{1}{2\sqrt{z}} dz = \sqrt[4]{2}\cos(\frac{\pi}{8}) - 2 + i\sqrt[4]{2}\sin(\frac{\pi}{8})$.
כאשר $\sqrt{z}$ הינו הענף העיקרי של פונקציית השורש.

תשובות סופיות:

1) $\frac{e^2[1+i]}{\sqrt{2}} - 1$

2) הוכחה.

נוסחת האינטגרל של קושי:

שאלות:

1) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z}dz$.

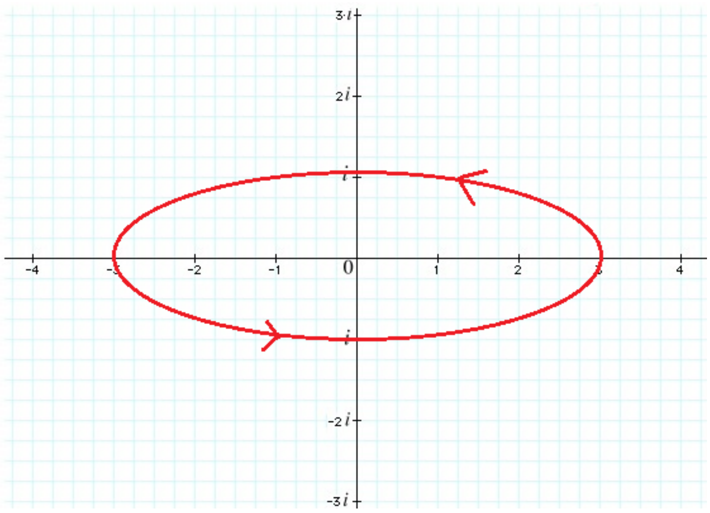
2) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{e^z}{z-2}dz$.

3) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{\sin(z^2)}{z(z-2)}dz$.

4) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z+e^{-z}}{z(z-2)(z-3)}dz$.

5) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1.5} \frac{e^z}{z(z-1)(z-2)}dz$.

6) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{\gamma} \frac{\sin(z)}{z(z-2)(z-4)}dz$, עבור המסילה שבציור:



7) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2-e^{z^2}}{z(z^2-1)(z+3)}dz$.

8) תהי $f(z)$ פונקציה הולומורפית בתחום D .
נניח כי $z_0 \in D$ וכי הדיסק $D(z_0,R)=\{|z-z_0|\le R\}$ מוכל כולו ב- D .
הוכיחו כי $f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\left(z_0+R\cdot e^{i\theta}\right)d\theta$.

9) חשבו את האינטגרל $\int\limits_0^{\pi}\frac{1}{2+\sin(2\theta)}d\theta$.

10) הוכיחו: $n\in\mathbb{N}$ $\int\limits_0^{2\pi}\cos^{2n}(\theta)d\theta=\frac{2\pi}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$.

11) חשבו את האינטגרל $\int\limits_C \frac{z}{z^2+1}dz$ כאשר $C=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=2\,,\ \operatorname{Im}(z)\ge 0\}$.

12) חשבו את האינטגרל $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{(a+b\cos x)}$ כאשר $a>b>0$.

13) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1}\frac{Log\left(1+\frac{z}{3}\right)}{z}dz$.

14) תהי $f(z)=u+iv$ הולומורפית בתחום $|z|<1$ כך ש- $u^2(0)=v^2(0)$.
הוכיחו כי לכל $0<r<1$ מתקיים $\int_0^{2\pi}u^2\left(re^{i\theta}\right)d\theta=\int_0^{2\pi}v^2\left(re^{i\theta}\right)d\theta$.

15) תהי $f(z)=u+iv$ הולומורפית בתחום $D=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$.
הוכיחו כי לכל $0<r<1$ ולכל $0<|a|<r$ מתקיים
$$\oint\limits_{|z|=r}\frac{\operatorname{Re}(z)}{z-a}f(z)dz=\pi i\cdot\left(\left[a+\frac{r^2}{a}\right]f(a)-\frac{r^2}{a}\cdot f(0)\right).$$

תשובות סופיות:

1) $2\pi i$
2) $2\pi e^2 i$
3) $2\pi i \cdot \frac{\sin\left(2^2\right)}{2}$
4) $2\pi i \cdot \frac{1}{3}$
5) $\pi i - 2\pi e i$
6) $-\frac{\sin(2)\pi i}{2}$
7) $\pi i \cdot \left(\frac{17}{12} - \frac{3e}{4}\right)$
8) הוכחה.
9) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$
10) הוכחה.
11) πi
12) $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$
13) 0
14) הוכחה.
15) הוכחה.

נוסחת האינטגרל המוכללת של קושי:

שאלות:

1) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{\sin(z)}{(z-i)^3}dz$.

2) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z^3}dz$.

3) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=4} \frac{\cos(z)}{(z-\pi)^2}dz$.

4) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{(z-1)^2(z-3)}dz$.

5) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{z+1}\right)}{z^3}dz$.

6) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=6} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{(z-1)^2(z-3)}dz$.

7) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=5} \frac{1}{(z-2)^2(z-4)}dz$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{\pi}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$

2) $-\pi i$

3) $-2\pi i\cdot\sin(\pi)$

4) $-\frac{\pi+4}{4\sqrt{2}}\pi i$

5) $-2\pi^2 i$

6) $-\frac{\pi i}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

7) 0

שיטות מתמטיות בכימיה

פרק 5 - נקודות סינגולריות

תוכן העניינים

מיון נקודות סינגולריות:

שאלות:

1) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של הפונקציה $f(z)=\frac{1}{1-z}$.

2) נניח כי $h(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$ כאשר $f(z)$ ו-$g(z)$ אנליטיות בסביבת $z=0$.
נניח כי $z=0$ זה אפס מסדר 7 של $f(z)$.
נניח כי $z=0$ זה אפס מסדר 11 של $g(z)$.
מהו סוג הסינגולריות של $h(z)$ ב-$z=0$?

3) נניח כי $h(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$ כאשר $f(z)$ ו-$g(z)$ אנליטיות בסביבת z_0.
נניח כי z_0 זה אפס מסדר n של $f(z)$.
נניח כי z_0 זה אפס מסדר m של $g(z)$.
מהו סוג הסינגולריות של $h(z)$ ב-z_0? חלקו למקרים $n\geq m$ ו-$n<m$.
א. מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=\frac{1-\cos(z)}{z^2}$.
ב. מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=z\sin\left(\frac{1}{z}\right)$.

4) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=ze^{\frac{1}{z}}$.

5) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=z\cos\left(\frac{1}{z}\right)$.

6) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=\frac{1}{e^{-z}-1}+\frac{1}{z}$.

7) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=\frac{\sin(z)}{\cos(z)}$.

8) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=\frac{1}{z^2-1}\cos\left(\frac{\pi z}{z+1}\right)$.

9) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=e^{\frac{z}{z-2}}$.

10) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$. האם הן מבודדות?

11) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=z\cot(z)$.

12) נתון כי הפונקציה $f(z)$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.
נניח כי 0 זה קוטב מסדר m של $f(z)$ ובנוסף נניח כי $-1\notin f\left[\mathbb{C}\setminus\{0\}\right]$.
מצאו ומיינו את כל הנקודות הסינגולריות של $g(z)=\frac{f(z)-1}{f(z)+1}$.

13) מצאו את הקטבים והאפסים בתחום $|z|<4$ של הפונקציה $f(z)=\frac{(z-2)^2}{\left(e^{2z}-1\right)^2 z^3}$.

14) מיינו את הנקודות $z=0$ ו- $z=\frac{\pi}{4}$ עבור $f(z)=\frac{\tan(z)}{z^2-\frac{\pi}{4}z}$.

15) תהיינה $f,g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ פונקציות שלמות שאינן קבועות.
נניח כי לכל $z\in\mathbb{C}$ מתקיים $|f(z)|\le|g(z)|$.

א. הוכיחו שכל נקודה סינגולרית של $\frac{f(z)}{g(z)}$ הינה סליקה.

ב. הוכיחו כי $f(z)=c\cdot g(z)$ כאשר c קבוע המקיים $|c|\le 1$.

16) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=\frac{\left(z^2-\frac{1}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}$.

17) הוכיחו כי הנקודה $z_0=i$ היא נקודה סינגולרית עיקרית של $f(z)=\cos\left(\frac{1}{z^2+1}\right)$.

18) תהי $f(z):D\to\mathbb{C}$ אנליטית כאשר $D=\{z\in\mathbb{C}\,|\,0<|z-z_0|<1\}$.
נניח כי מתקיים $|z-z_0|^a|f(z)|\le 1$ לכל $z\in D$ עבור $0\le a<1$.
הוכיחו כי z_0 נקודה סינגולרית סליקה של $f(z)$.

19) (אתגר)

נתונה $f(z)$ אנליטית בתחום $0<|z|<1$ המקיימת $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n!}$.

הוכיחו כי $z=0$ זו נקודה סינגולרית עיקרית של $f(z)$.

20) (אתגר)

הוכיחו כי אם z_0 זה קוטב של $f(z)$ אז היא בהכרח עיקרית של $g(z)=e^{f(z)}$.

רמז: רשמו את $f(z)$ באופן הבא $f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$ כאשר $\varphi(z_0)=r_0e^{i\alpha}$.

התבוננו בסדרות הבאות: $w_n=z_0+\frac{1}{n}e^{i\frac{\pi+\alpha}{m}}$, $z_n=z_0+\frac{1}{n}e^{i\frac{\alpha}{m}}$.

תשובות סופיות:

1) $z=1$ קוטב מסדר 1.
2) $z=0$ קוטב מסדר 4.
3) אם $n\ge m$ אז z_0 נקודה סינגולרית מסוג סליקה של $h(z)$.
ואם $n<m$ אז z_0 קוטב מסדר $m-n$ של $h(z)$.
4) $z=0$ עיקרית.
5) $z=0$ עיקרית.
6) $z_k=2\pi ik$ קטבים מסדר 1.
7) $z_k=\frac{\pi}{2}+\pi k$ קטבים מסדר 1.
8) $z=-1$ עיקרית ו- $z=1$ קוטב מסדר 1.
9) $z=2$ עיקרית.
10) $z=0$ לא מבודדת ו- $z_k=\frac{1}{\pi k}$ קטבים מסדר 1.
11) $z=0$ סליקה ו- $z_k=\pi k\ne 0$ קטבים מסדר 1.
12) $z=0$ סליקה.
13) $z=2$ אפס מסדר 2, $z=0$ קוטב מסדר 5, $z=\pm\pi i$ קטבים מסדר 2.
14) $z=0$ סליקה, $z=\frac{\pi}{4}$ קוטב מסדר 1.
15) א) הוכחה
ב) הוכחה
16) $z=0$ לא מבודדת.
$(k\ne 0,2,-2)$ $z_k=\frac{1}{k}$ קטבים מסדר 1.
$z=\pm\frac{1}{2}$ סליקות.
17) הוכחה.
18) הוכחה.
19) הוכחה.
20) הוכחה.

מיון נקודות סינגולריות באינסוף:

שאלות:

1) מיינו את הנקודה הסינגולרית ∞ של הפונקציה $f(z)=\frac{z^2}{1+z}$.

2) מיינו את הנקודה הסינגולרית ∞ של הפונקציה $f(z)=e^z$.

תשובות סופיות:

1) ∞ זה קוטב מסדר 1 של $f(z)$.

2) ∞ זאת נקודה סינגולרית עיקרית של $f(z)$.

שיטות מתמטיות בכימיה

פרק 6 - משפט השארית

תוכן העניינים

מציאת שארית:

שאלות:

חשבו את השאריות של הפונקציות בנקודות הבאות:

1) $\text{Res}\left(\frac{z+3}{z+2}, z=-2\right)$

2) $\text{Res}\left(\frac{1}{z^2+9}, z=3i\right)$

3) $\text{Res}\left(\frac{z+2}{z^4+2z^3-2z-1}, z=1\right)$

4) $\text{Res}\left(\frac{z+2}{z^4+2z^3-2z-1}, z=-1\right)$

5) נניח כי לפונקציה $\frac{f(z)}{g(z)}$ יש קוטב פשוט ב- z_0 כאשר ונניח כי $g'(z_0)\neq 0$.

הוכיחו כי $\text{Res}\left(\frac{f(z)}{g(z)}, z_0\right)=\frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$

6) $\text{Res}\left(\frac{\cos(z)}{z}, 0\right)$

7) $\text{Res}\left(\frac{\sin(z+1)}{z}, 0\right)$

8) חשבו את השאריות בנקודות הסינגולריות (הסופיות) של הפונקציה $f(z)=\frac{\tan(z)}{z^2-\frac{\pi}{4}z}$

9) חשבו את השאריות בנקודות הסינגולריות (הסופיות) של הפונקציה $f(z)=\frac{1-\cos(z)}{z^3(z-\pi)}$.

10) נניח כי $f(z)$ פונקציה שלמה בעלת n אפסים בדיוק.
הוכיחו שכל הנקודות הסינגולריות של $\frac{f'(z)}{f(z)}$ הן קטבים פשוטים וחשבו את השאריות בנקודות אלו.

תשובות סופיות:

1) 1

2) $\frac{1}{6i}$

3) $\frac{3}{8}$

4) $-\frac{3}{8}$

5) הוכחה.

6) 1

7) $\sin(1)$

8) $\operatorname{Res}\left[f(z),\frac{\pi}{2}+\pi k\right]=-\frac{1}{\left[\frac{\pi}{2}+\pi k\right]\left[\frac{\pi}{4}+\pi k\right]}$

9) $\operatorname{Res}\left[f(z),\pi\right]=\frac{2}{\pi^3}$ $\qquad$ $\operatorname{Res}\left[f(z),0\right]=-\frac{1}{2\pi}$

10) $\operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)},z_k\right]=m_k$ כאשר z_k אפס מסדר m_k של $f(z)$.

מסילת חצי קשת מעגלית:

שאלות:

בכל התרגילים הבאים נסמן את המסלולים הבאים:

$$C_R=\left\{z=\mathrm{R}e^{i\theta}\,|\,0\le\theta\le\pi\right\}$$

$$\gamma=\left\{z=x\,|\,-R\le x\le R\right\}$$

1) חשבו את $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$ על ידי משפט השארית.

הדרכה:

א. חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{C_R+\gamma}\frac{1}{1+z^2}dz$

ב. הוכיחו כי $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{1}{1+z^2}dz=0$

ג. הסיקו מהסעיף הקודם כי $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim\limits_{R\to\infty}\oint\limits_{C_R+\gamma}\frac{1}{1+z^2}dz$

2) הוכיחו כי $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^4}dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ על ידי משפט השארית.

הדרכה:

א. חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{C_R+\gamma}\frac{1}{1+z^4}dz$

ב. הוכיחו כי $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{1}{1+z^4}dz=0$

ג. הסיקו מהסעיפים הקודמים כי $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^4}dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

3) הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \pi\sqrt{2}$

הדרכה:

א. חשבו את האינטגרל $\oint_{C_R+\gamma} \frac{z^2+1}{z^4+1} dz$

ב. הוכיחו כי $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{z^2+1}{z^4+1} dz = 0$

ג. הסיקו מהסעיפים הקודמים כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \pi\sqrt{2}$

4) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(x^2+1\right)^3} dx$

5) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+6}{x^6+1} dx$.

6) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+4\right)^2} dx$

7) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\left(x^2+4x+13\right)^2} dx$

8) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+9\right)^2} dx$

9) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+9\right)}$

תשובות סופיות:

1) א) $\oint\limits_{C_R+\gamma} \frac{1}{1+z^2}dz = \pi$

ב) הוכחה.

ג) הוכחה.

2) א) $\oint\limits_{C_R+\gamma} \frac{1}{1+z^4}dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

ב) הוכחה.

ג) הוכחה.

3) א) $\oint\limits_{C_R+\gamma} \frac{z^2+1}{z^4+1}dz = \pi\sqrt{2}$

ב) הוכחה.

ג) הוכחה.

4) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(x^2+1\right)^3}dx = \frac{3\pi}{8}$

5) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+6}{x^6+1}dx = \frac{14\pi}{3}$

6) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+4\right)^2}dx = \frac{\pi}{4}$

7) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\left(x^2+4x+13\right)^2}dx = -\frac{\pi}{27}$

8) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+9\right)^2}dx = \frac{\pi}{6}$

9) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+9\right)} = \frac{5}{96}\pi$

שארית באינסוף:

שאלות:

1) נניח כי ∞ הינה נקודה סינגולרית מבודדת של $f(z)$.

הוכיחו כי $\operatorname{Res}\left[f(z),\infty\right]=-\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right]$.

2) נניח כי $f(z)$ אנליטית במישור המרוכב פרט למספר סופי של נקודות סינגולריות $z_1,\dots,z_n\in\mathbb{C}$.

הוכיחו כי:

$$\operatorname{Res}\left[f(z),z_1\right]+\operatorname{Res}\left[f(z),z_2\right]+\dots+\operatorname{Res}\left[f(z),z_n\right]+\operatorname{Res}\left[f(z),\infty\right]=0$$

3) חשבו $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=10}\frac{e^{\sin\left(\sin\left(\frac{1}{z}\right)\right)}\cos\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2-1}dz$.

4) חשבו $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2-4}dz$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) הוכחה.

3) $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=10}\frac{e^{\sin\left(\sin\left(\frac{1}{z}\right)\right)}\cos\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2-1}dz=0$

4) $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}{z^4-1}dz=-\frac{\sin\left(\frac{1}{2i}\right)}{2i}$

שיטות מתמטיות בכימיה

פרק 7 - טורי פורייה

תוכן העניינים

טור פורייה ממשי:

שאלות:

1) חשבון טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\pi \\ 0 & -\pi<x<0\end{cases}$.

3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\sin(|x|)$.

4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1 \\ 0 & else\end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $\sum_{n=1}^{20}-\frac{2}{n}(-1)^n\sin(nx)$

2) $f(x)\sim\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k-1)}\sin((2k-1)x)$

3) $\sin(|x|)\sim\frac{2}{\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\frac{1}{1-(2k)^2}\cos(2kx)$

4) $f(x)\sim\frac{1}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{\sin(n)}{n}\cos(nx)$

טור פורייה מרוכב:

שאלות:

1) חשבון טור פורייה מרוכב לפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}-x & -\pi\le x<0\\ 0 & 0\le x<\pi\end{cases}$.

3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}x & -\pi\le x<0\\ 2x & 0\le x<\pi\end{cases}$.

4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & -\pi\le x<0\\ -2 & 0\le x<\pi\end{cases}$.

5) מצאו טור פורייה מרוכב של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}0 & -\pi\le x<0\\ \sin(x) & 0\le x<\pi\end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $x\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} i\frac{(-1)^n}{n}e^{inx}$

2) $f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}-\frac{1}{2\pi}\left\{-\pi\frac{(-1)^n}{in}+\frac{1-(-1)^n}{n^2}\right\}e^{inx}$

3) $f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n^2}-3(-1)^n\frac{\pi}{in}\right]e^{inx}$

4) $f(x)\sim-\frac{1}{2}-\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\frac{3}{\pi i(2k-1)}e^{i(2k-1)x}$

5) $f(x)\sim\frac{1}{4i}e^{ix}-\frac{1}{4i}e^{-ix}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1-(2k)^2}e^{i[2k]x}$

שיטות מתמטיות בכימיה

פרק 8 - התמרת פורייה

תוכן העניינים

מבוא כללי:

שאלות:

1) חשבון את התמרת פורייה של $\chi_{[-1,1]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[-1,1]\\ 0 & else\end{cases}$.

2) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}1-|x| & |x|<1\\ 0 & else\end{cases}$.

3) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & else\end{cases}$.

4) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\le 1\\ 2 & 1<|x|<2\\ 0 & else\end{cases}$.

5) הוכיחו כי התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}e^{-ax} & x>0\\ e^{bx} & x\le 0\end{cases}$ כאשר $a,b>0$ קבועים הינה $f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{b-i\omega}+\frac{1}{a+i\omega}\right]$.

6) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & else\end{cases}$.

7) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ 2 & 1\le x<2\\ 0 & else\end{cases}$.

8) מצאו התמרת פורייה עבור $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & 0\le x<1\\ 0 & else\end{cases}$.

9) הוכיחו התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}e^{2ix} & -1<x<1\\ 0 & else\end{cases}$ הינה $f(\omega)=\frac{1}{\pi}\frac{\sin[2-\omega]}{2-\omega}$.

10) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}\sin(x) & -1<x<1\\ 0 & else\end{cases}$.

11) חשבון את התמרת פורייה של $f(x)=\begin{cases}x & |x|<a\\ 0 & else\end{cases}$ עבור $a>0$.

12) האם קיימת $f\in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ כך ש- $f(\omega)=\begin{cases}1-|\omega| & |\omega|\le\frac{1}{2}\\ 0 & |\omega|>\frac{1}{2}\end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $\dfrac{\sin(\omega)}{\pi\omega}$

2) $f(\omega)=\dfrac{1-\cos(\omega)}{\pi\omega^2}$

3) $f(\omega)=\dfrac{1}{2\pi(1+i\omega)}$

4) $f(\omega)=\dfrac{2\sin(2\omega)-\sin(\omega)}{\pi\omega}$

5) הוכחה.

6) $f(\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\sin(\omega)+i\left[\cos(\omega)-1\right]}{\omega}$

7) $f(\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1+e^{-i\omega}-2e^{-i2\omega}}{i\omega}$

8) $f(\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{e^{(1-i\omega)}-1}{1-i\omega}$

9) הוכחה.

10) $f(\omega)=-i\cdot\dfrac{1}{2\pi}\left\{\dfrac{\sin([1-\omega])}{1\quad\omega}-\dfrac{\sin([1+\omega])}{1\,|\,\omega}\right\}$

11) $f(\omega)=-\dfrac{1}{\pi}i\dfrac{\sin(\omega a)-\omega a\cos(\omega a)}{\omega^2}$

12) לא. אינה רציפה בנקודות $\omega=\pm\dfrac{1}{2}$.

נוסחת כיווץ והזזה:

שאלות:

1) מצאו התמרת פורייה של $\chi_{[-r,r]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[-r,r]\\ 0 & else\end{cases}$ כאשר $r>0$.

2) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=e^{-4x^2-4x-1}$ על ידי שימוש בעובדה כי $F\left\{e^{-x^2}\right\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$.

3) נתונה פונקציה $g(x)\in G(R)$ בעלת התמרת פורייה $g(\omega)$.
מצאו פונקציה $f(x)$ (כתלות ב- $g(x)$) בעלת התמרת פורייה $g(\omega)\cos(\omega)$.

4) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=e^{-ax^2}$ כאשר $a>0$.
רמז: $F\left\{e^{-x^2}\right\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

5) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=\cos(4\pi\omega)\cdot\frac{\sin(2\omega)}{\omega}$.
רמז: $F\left\{\chi_{[-1,1]}(x)\right\}=\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega}$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{\sin(\omega\cdot r)}{\pi\omega}$

2) $f(\omega)=\frac{e^{i\frac{\omega}{2}}}{4\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{16}}$

3) $f(x)=\frac{g(x+1)+g(x-1)}{2}$

4) $f(\omega)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a}}e^{-\frac{(\omega)^2}{4a}}$

5) $f(x)=\frac{\pi}{2}\begin{cases}1 & 4\pi-2\le x\le 4\pi+2 \;\; or \;\; -4\pi-2\le x\le -4\pi+2\\ 0 & else\end{cases}$

נוסחת הנגזרת:

שאלות:

1) נניח כי $f(x)\in G$ גזירה, מקיימת $\lim_{|x|\to\infty} f(x)=0$, $f'(x)\in G$ ו- $f(\omega)=\frac{\omega}{1+\omega^{30}}$.
מצאו התמרת פורייה של $f'(x)\cos(2x)$.

2) יהי a ממשי כלשהו. הוכיחו כי $F\left\{\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2}\right\}_\omega=\left(-\frac{1}{2}\right)(i\omega)\frac{1}{2|a|}e^{-|\omega a|}$.

3) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=\omega^2 e^{-|\omega|}$.
רמז: $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\}=\frac{1}{2}e^{-|\omega|}$.

תשובות סופיות:

1) $$\frac{i\cdot\frac{(\omega-2)^2}{1+(\omega-2)^{30}}+i\cdot\frac{(\omega+2)^2}{1+(\omega+2)^{30}}}{2}$$

2) הוכחה.

3) $f(x)=(-2)\frac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3}$

נוסחאות כפל באקספוננט ומודולציה:

שאלות:

1) הוכיחו כי התמרת פורייה של $F\left\{\sin(cx)e^{-|x|}\right\}_{(\omega)} = \frac{1}{\pi i}\frac{2c\cdot\omega}{\left[1+(\omega-c)^2\right]\left[1+(\omega+c)^2\right]}$.

2) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=\frac{\sin(\omega-1)}{\omega-1}-\frac{\sin(\omega+1)}{\omega+1}$.

3) הוכיחו כי התמרת פורייה של $g(x)=\begin{cases}\sin(ax)e^{-bx} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$ כאשר $a,b>0$ קבועים,
הינה $g(\omega)=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{bi-(\omega-a)}-\frac{1}{bi-(\omega+a)}\right]$.

4) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=e^{-|x|}\cos(2x)$ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה ובעובדה
כי $F\left\{e^{-|x|}\right\}=\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$.

5) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=e^{-|x|}\sin^2(3x)$ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה
ובעובדה כי $F\left\{e^{-|x|}\right\}=\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$.

6) נניח כי $f(x)\in G(R)$ ונגדיר $g(x)=f(3x-2)\cdot\cos(x)$. בטאו את $g(\omega)$ על ידי $f(\omega)$.

7) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega)=e^{3i\omega}\cdot e^{-|\omega-2|}$. רמז: $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\}=\frac{1}{2}e^{-|\omega|}$.

8) תהי $H(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$.
חשבו את התמרת הפורייה של הפונקציות הבאות:
א. $H(x)e^{-ax}$ כאשר $a>0$.
ב. $H(x)e^{-ax}\cos(bx)$ כאשר $a,b>0$.
ג. $H(x)e^{-ax}\sin(bx)$ כאשר $a,b>0$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) $f(x)=2\pi i\cdot\chi_{[-1,1]}(x)\cdot\sin(x)$

3) הוכחה.

4) $$F\left\{e^{-|x|}\cos(2x)\right\}=\frac{1}{2\pi\left(1+[\omega+2]^2\right)}+\frac{1}{2\pi\left(1+[\omega-2]^2\right)}$$

5) $$g(\omega)=\frac{1}{2}\frac{1}{\pi\left(1+\omega^2\right)}-\left[\frac{1}{2\pi\left(1+[\omega+6]^2\right)}+\frac{1}{2\pi\left(1+[\omega-6]^2\right)}\right]$$

6) $$g(\omega)=\frac{1}{6}\left[e^{-i\frac{2}{3}(\omega+1)}f\left(\frac{\omega+1}{3}\right)+e^{-i\frac{2}{3}(\omega-1)}f\left(\frac{\omega-1}{3}\right)\right]$$

7) $$F\left\{e^{2i[x+3]}\frac{2}{1+[x+3]^2}\right\}$$

8) א. $$\frac{1}{2\pi(a+i\omega)}$$

ב. $$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{a+i[\omega-b]}+\frac{1}{a+i[\omega+b]}\right)$$

ג. $$\frac{1}{4\pi i}\left(\frac{1}{a+i[\omega-b]}+\frac{1}{a+i[\omega+b]}\right)$$

נוסחת המומנט:

שאלות:

1) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=\begin{cases} x & x\in(-1,1) \\ 0 & else \end{cases}$ על ידי שימוש בנוסחה $F\{x\cdot f(x)\}=i\frac{d}{d\omega}f(\omega)$.

2) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=x^2e^{-x^2}$ על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה כי $F\{e^{-x^2}\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$.

3) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=x\cdot e^{-|x|}$ על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה כי $F\{e^{-|x|}\}=\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$.

4) מצאו את התמרת פורייה של $f(x)=e^{-x^2}$.

5) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=8x^3e^{\frac{-4(x+1)^2+5}{3}}$.

6) תהי $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^5} & x\geq 1 \\ 0 & x<1 \end{cases}$.

הוכיחו כי $f(\omega)$ גזירה ברציפות 3 פעמים.

7) נתון כי התמרת פורייה של $f\in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ רציפה היא $f(\omega)=\frac{1}{1+|\omega|}$.

הוכיחו כי האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}|x\cdot f(x)|dx$ מתבדר.

תשובות סופיות:

1) $i \cdot \dfrac{\omega \cos \omega - \sin \omega}{\pi \omega^2}$

2) $F\left\{x^2 e^{-x^2}\right\} = \dfrac{1}{4\sqrt{\pi}}\left(1-\dfrac{\omega^2}{2}\right)e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

3) $F\left\{x \cdot e^{-|x|}\right\} = -\dfrac{i}{\pi}\dfrac{2\omega}{\left(1+\omega^2\right)^2}$

4) $f(\omega) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

5) $f(\omega) = \dfrac{1}{256}\sqrt{\dfrac{3}{\pi}}\left(27i\omega^3 + 216\omega^2 - 792i\omega - 1088\right)e^{i\omega - \frac{3\omega^2}{16} - \frac{5}{3}}$

6) הוכחה.

7) הוכחה.

נוסחת ההתמרה ההפוכה:

שאלות:

1) חשבו $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{\pi(1+\omega^2)} d\omega$ לכל x ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

2) חשבו $\lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} \frac{\sin(\omega)\cos(\omega x)}{\pi\omega} d\omega$ לכל x ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

תשובות סופיות:

1) ראו סרטון.

2) $$\begin{cases} 0 & |x|>1 \\ 1 & |x|<1 \\ \frac{1}{2} & x=1\ ,\ x=-1 \end{cases}$$

משפט פלנשראל:

שאלות:

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $f(x)=\chi_{[-a,a]}(x)$ עבור $a>0$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(ax)}{x}\frac{\sin(bx)}{x}dx$ עבור $a,b>0$.

2) הוכיחו כי $\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-x}\sin(x)}{x}dx=\frac{\pi}{4}$. תוכלו להיעזר בעובדה: $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\}=\frac{1}{2}e^{-|\omega|}$.

3) הוכיחו כי $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(2x)}{x(1+4x^2)}dx=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

4) הוכיחו כי לא קיימת פונקציה $f(x)\in L^1_{PC}(\mathbb{R})\cap L^2_{PC}(\mathbb{R})$ כך ש- $f(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+|\omega|}}$.

תשובות סופיות:

1) א. $f(\omega)=\frac{\sin(\omega a)}{\pi\omega}$ ב. $\pi\cdot\min\{a,b\}$

2) הוכחה.

3) הוכחה.

4) הוכחה.

משפט הקונבולוציה:

שאלות:

1) חשבון את הקונבולוציה $\left(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}\right)_{(x)}$.

תזכורת: $\chi_{[-1,1]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[-1,1]\\ 0 & else\end{cases}$.

רמז: חלקו למקרים.

2) חשבון את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$ כאשר $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$.

רמז: חלקו למקרים $x>0$ ו- $x\le 0$.

3) מצאו פונקציה $f\in G$ כך ש- $f(\omega)=\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^2$.

4) נסמן ב- E את מרחב הפונקציות הממשיות הגזירות פעמיים $f(t)$ המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty$ וגם $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt<\infty$.

מצאו פונקציה $g(x)$ כך שלכל $f(t)\in E$ מתקיים השיוויון.

$\int_{-\infty}^{\infty}\left(f(t)-f''(t)\right)g(x-t)dt=2f(x)$.

5) נגדיר $f(x)=\frac{1}{x^2+4}$, $g(x)=\frac{1}{x^2+1}$. מצאו את הקונבולוציה $(f*g)_{(x)}$.

תזכורת: $F\left\{\frac{1}{x^2+a^2}\right\}=\frac{1}{2a}e^{-a|\omega|}$.

6) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $(1+|x|)e^{-|x|}$.

ב. פתרו את המשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x-t|}f(t)dt=e^{-|x|}+|x|e^{-|x|}$.

7) ענו על הסעיפים הבאים :

א. חשבו את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$ כאשר $f(x)=\chi_{[0,1]}(x)$.

ב. הוכיחו כי $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-\cos x)^2}{x^4}dx=\frac{\pi}{3}$.

8) חשבו את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$ כאשר $f(x)=\chi_{[1,2]}(x)$.

9) חשבו את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$ כאשר $f(x)=\chi_{[0,2]}(x)$.

10) חשבו את הקונבולוציה $\left(\chi_{[0,1]}(x)*\chi_{[1,2]}(x)\right)_{(x)}$.

11) חשבו את הקונבולוציה $\left(e^{-x^2}*e^{-x^2}\right)_{(x)}$.

א. לפי ההגדרה.

ב. על ידי שימוש במשפט הקונבולוציה.

הערה : תוכלו להיעזר בעובדה $\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.

12) מצאו פתרון למשוואה האינטגרלית $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)f(x-t)dt=e^{\frac{-3(x+1)^2}{2}}$.

13) נניח כי $f(x)\in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ רציפה ומקיימת את המשוואה האינטגרלית $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{-y^2}e^{2xy}dy\equiv 0$ הוכיחו כי $f(x)\equiv 0$.

תשובות סופיות:

1) $$\left(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}\right)_{(x)} = \begin{cases} 2+x & x\in[-2,0] \\ 2-x & x\in[0,2] \\ 0 & else \end{cases}$$

2) $$(f*f)_{(x)} = \begin{cases} xe^{-x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

3) $$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(2+x) & x\in[-2,0] \\ \frac{\pi}{2}(2-x) & x\in[0,2] \\ 0 & else \end{cases}$$

4) $$g(x) = e^{-|x|}$$

5) $$\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{x^2+9}$$

6) א. $$\frac{2}{\pi\left(1+\omega^2\right)^2}$$ ב. $$f(x) = e^{-|x|}$$

7) א. $$(f*f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x>2 \\ 2-x & 1<x<2 \\ x & 0<x<1 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$ ב. הוכחה.

8) $$(f*f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x>4 \\ 4-x & 3<x<4 \\ x-2 & 2<x<3 \\ 0 & x<2 \end{cases}$$

9) $$(f*f)_{(x)}=\begin{cases}0 & x>4\\ 4-x & 2<x<4\\ x & 0<x<2\\ 0 & x<0\end{cases}$$

10) $$\left(\chi_{[0,1]}(x)*\chi_{[1,2]}(x)\right)_{(x)}=\begin{cases}0 & x>3\\ 3-x & 2<x<3\\ x-1 & 1<x<2\\ 0 & x<1\end{cases}$$

11) א. $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ ב. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}$

12) $$f(x)=\sqrt[4]{\frac{6}{\pi}}e^{-3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$$

13) הוכחה.

שיטות מתמטיות בכימיה

פרק 9 - משוואות ליניאריות מסדר שני

תוכן העניינים

משוואה חסרה – שיטת הורדת סדר המשוואה

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $(x \neq 0)\ \ x^2 y''+xy'=\frac{1}{x}$

2) $(\cos x \neq 0)\ \ y''\tan x-1=y'$

3) $2xy'y''-(y')^2+1=0$

4) $y''x\ln x=y'$

5) $xy''=x^2e^x+y'$

6) $yy''+(y')^2=0$

7) $2y''y-(y')^2=1$

8) $(\cos y \neq 0)\ \ y''\tan y=2(y')^2$

תשובות סופיות

1) $y=\frac{1}{x}+C_1\cdot\ln x+C_2$

2) $y=-x+C_1\cdot\cos x+C_2$

3) $y=\pm\frac{2}{3C_1}\left(C_1x+1\right)^{3/2}+C_2 ; y=\pm x+C_3$

4) $y=C_1\left(x\ln x-x\right)+C_2 ; y=C_3$

5) $y=e^x\left(x-1\right)+C_1\frac{x^2}{2}+C_2$

6) $\frac{y^2}{2}=cx+k \quad ; \quad y=c$

7) $y=\frac{1}{c}\left[\frac{c^2\left(x+k\right)^1}{4}+1\right]$

8) $\cot y=-\left(cx+k\right) \quad ; \quad y=c$

משוואה לינארית הומוגנית, עם מקדמים קבועים

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות **1-11**:

1) $y''-100y=0$

2) $y''-4y'=0$

3) $y''-8y'+7y=0$

4) $z(0)=1\,,\ z'(0)=1,\ 4z''+z'-5z=0$

5) $y''-2y'+y=0$

6) $4\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+4\frac{\partial x}{\partial t}+x(t)=0$

7) $y''+4y=0$

8) $y''+10y'+125y=0$

9) $y(0)=0,\ \ y'(0)=3\,;\ y''-2y'+10y=0$

10) $5y''+8y'+4y=0$

11)
$$\begin{cases} y''(x)-\frac{1}{a^2}y(x)=0 \qquad (a>0) \\ y(0)=4 \\ y(\infty)=y(-\infty)=0 \end{cases}$$

12) נתונה המד"ר $yy''+(y')^2=0$.

א. הראו כי $y_1=4$ ו- $y_2=\sqrt{x}$ הם פתרונות של המד"ר.

ב. הראו כי הפתרון $z(x)=y_1(x)+y_2(x)$, אינו פתרון של המד"ר.
האם יש בכך סתירה לעקרון הסופרפוזיציה?

תשובות סופיות

1) $y=c_1e^{10x}+c_2e^{-10x}$

2) $y=c_1+c_2e^{4x}$

3) $y=c_1e^{x}+c_2e^{7x}$

4) $z=e^{x}$

5) $y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}$

6) $x(t)=c_1e^{\frac{-t}{2}}+c_2te^{\frac{-t}{2}}$

7) $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$

8) $y=e^{-5x}\left[c_1\cos 10x+c_2\sin 10x\right]$

9) $y=e^{2}\sin 3x$

10) $y=e^{\frac{-4x}{5}}\left[c_1\cos\left(\frac{2}{5}x\right)+c_2\sin\left(\frac{2}{5}x\right)\right]$

11) $y=4e^{-\frac{|x|}{a}}$

12) שאלת הוכחה.

השוואת מקדמים בשיטת "הניחוש המושכל"

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $y''+5y'+6y=22x+6x^2$

2) $y(0)=2,\ y'(0)=7;\ \ y''-2y'+y=e^{2x}$

3) $y''-y'-2y=4\sin 2x$

4) $y''-2y=xe^{-x}$

5) $y''-y=3e^{2x}\cos x$

6) $z''+z=\sin x$

7) $y''-3y'+2y=2x^2+e^x+2xe^x+4e^{3x}$

8) $y''+3y'=9x$

9) $y''-3y'+2y=e^x$

10) $y''-2y'=6x^2-2x$

11) $x''+5x'+6x=e^{-t}+e^{-2t}$

12) $y''+2y'+5y=e^{-x}\sin 2x$

תשובות סופיות

1) $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-2x}+x^2+2x-2$

2) $y=e^x+4xe^x+e^{2x}$

3) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}+\frac{1}{5}\sin 2x-\frac{3}{5}\cos 2x$

4) $y=c_1e^{-\sqrt{2}x}+c_2e^{\sqrt{2}x}+(2-x)e^{-x}$

5) $y=c_1e^{-x}+c_2e^x+\frac{3}{10}e^{2x}\cos x+\frac{3}{5}e^{2x}\sin x$

6) $z=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$

7) $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+x^2+3x+3.5-x^2e^x-3xe^x+2e^{3x}$

8) $y=c_1+c_2e^{-3x}+\frac{3}{2}x^2-x$

9) $y=c_1e^x+c_2e^{2x}-xe^x$

10) $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-2x}-x^2-x-x^3$

11) $x=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}+\frac{1}{2}\cdot e^{-t}+te^{-2t}$

12) $y=e^{-x}\sin 2x$

השוואת מקדמים בשיטת "המרשם"

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $y''+5y'+6y=22x+6x^2$

2) $y(0)=2,\ \ y'(0)=7;\ \ \ y''-2y'+y=e^{2x}$

3) $y''-y'-2y=4\sin 2x$

4) $y''-2y=xe^{-x}$

5) $y''-y=3e^{2x}\cos x$

6) $z''+z=\sin x$

7) $y''+3y'=9x$

8) $y''-3y'+2y=e^{x}$

9) $y''-2y'=6x^2-2x$

10) $x''+5x'+6x=e^{-t}+e^{-2t}$

11) $y''-3y'+2y=2x^2+e^{x}+2xe^{x}+4e^{3x}$

12) $y''+2y'+5y=e^{-x}\sin 2x$

תשובות סופיות

1) $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-2x}+x^2+2x-2$

2) $y=e^x+4xe^x+e^{2x}$

3) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}+\frac{1}{5}\sin 2x-\frac{3}{5}\cos 2x$

4) $y=c_1e^{-\sqrt{2}x}+c_2e^{\sqrt{2}x}+(2-x)e^{-x}$

5) $y=c_1e^{-x}+c_2e^{x}+\frac{3}{10}e^{2x}\cos x+\frac{3}{5}e^{2x}\sin x$

6) $z=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$

7) $y=c_1+c_2e^{-3x}+\frac{3}{2}x^2-x$

8) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}-xe^{x}$

9) $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-2x}-x^2-x-x^3$

10) $x=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}+\frac{1}{2}\cdot e^{-t}+te^{-2t}$

11) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+x^2+3x+3.5-x^2e^{x}-3xe^{x}+2e^{3x}$

12) $y=e^{-x}\sin 2x$

וריאציית פרמטרים

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$

2) $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$

3) $y''+2y'+y=3e^{-x}\sqrt{x+1}$

4) $y''-2y'+y=\dfrac{e^{x}}{x}\quad ;\quad y(1)=0\,,\ y'(1)=0$

5) $y''-3y'+2y=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$

6) $y''+4y=\sec 2x$

תשובות סופיות

1) $y=c_1\cos x+c_2\sin x-\cos x\cdot x+\sin x\cdot\ln\left|\sin x\right|$

2) $y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}-e^{-2x}\dfrac{x^2}{2}\left[\ln x-\dfrac{1}{2}\right]+x^2e^{-2x}\left[\ln x-1\right]$

3) $y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}-e^{-x}\left[\dfrac{6\left(\sqrt{x+1}\right)^5}{5}-\dfrac{6\left(\sqrt{x+1}\right)^3}{3}\right]+xe^{-x}\left[2\left(x+1\right)^{3/2}\right]$

4) $y=e^{x}-xe^{x}+xe^{x}\ln x\quad\left(x>0\right)$

5) $y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+e^{x}\ln\left(1+e^{-x}\right)+e^{2x}\left[\ln\left(1+e^{-x}\right)-\left(1+e^{-x}\right)\right]$

6) $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\dfrac{1}{4}\cos 2x\ln\left|\cos 2x\right|+\sin 2x\cdot x$

משוואה לינארית כללית, שיטת הפתרון השני, שיטת אבל

שאלות

1) פתרו $y''+\tan x\cdot y'-\left(2\tan x+4\right)y=0$, כאשר ידוע $y_1\left(x\right)=e^{2x}$.

2) פתרו $\left(1-x^2\right)y''+2xy'-2y=0$.

3) הסבירו את שיטת "הפתרון השני" לפתרון מד"ר לינארית, כללית, לא הומוגנית, מסדר שני. הדגימו על המד"ר:

$$\left(1-x\right)y''+x\cdot y'-y=2\left(1-x\right)^2e^{-x}\quad,\left(0<x<1\right),$$

כאשר ידוע ש- $y_1\left(x\right)=e^x$, פתרון של המד"ר ההומוגנית המתאימה.

תשובות סופיות

1) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}\left(\sin x-4\cos x\right)$

2) $y=c_1x+c_2\left(x^2+1\right)$

3) שאלת הדגמה.

הוורונסקיאן ושימושיו

שאלות

1) האם ייתכן כי $y_1(x)=e^x,\ \ y_2(x)=\sin x$, הם שני פתרונות של המשוואה $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, עם מקדמים רציפים בקטע $[0,\pi]$?

2) הראו כי הפונקציות $y_1(x)=\sin x^2,\ \ y_2(x)=\cos x^2$ הן פתרונות בת״ל של המשוואה $xy''-y'+4x^3y=0$, בקטע $(-4,\infty)$.
חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות והראו כי הוא מתאפס רק עבור $x=0$.
דני טוען שיש בכך סתירה לטענה ידועה. מהי הטענה? והאם דני צודק?

3) בדיקה ישירה מראה שהפונקציות $y_1(x)=xe^x,\ \ \ y_2(x)=e^{-x}$,
הן פתרונות של המשוואה $y''-\dfrac{2}{1+2x}y'-\dfrac{2x+3}{1+2x}y=0$, בקטע $\left(-\dfrac{1}{2},\infty\right)$.
האם הפונקציות הללו בת״ל בקטע?

4) נתונות שתי פונקציות $y_2=\left|x^3\right|$, $y_1=x^3$, בקטע $[-4,4]$.

א. חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות בקטע.

ב. בדקו האם הפונקציות תלויות לינארית בקטע.

ג. האם ייתכן כי הפונקציות הן פתרונות של אותה מד״ר הומוגנית מסדר שני בעלת מקדמים רציפים?

ד. הפונקציות הנתונות הן פתרונות של המד״ר $xy''-2y'=0$.
האם יש בכך סתירה לתוצאה בסעיף ג׳?

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. יהיו $y_1(x)\ ,\ \ y_2(x)$ פונקציות גזירות פעמיים בקטע I,
ונניח כי הוורונסקיאן שלהן שונה מאפס ב- I.
הוכיחו כי קיימת משוואה הומוגנית מסדר 2, בעלת מקדמים רציפים בקטע, ש- $y_1(x)\ ,\ \ y_2(x)$ הם פתרונות שלה.

ב. רשמו משוואה הומוגנית מסדר שני עם מקדמים רציפים בקטע $x>0$, שהפונקציות $y_1(x)=x^2\ ,\ \ y_2(x)=x^4$, הן פתרונות שלה.

6) נתון כי $y_1(x),\ y_2(x)$, הם פתרונות של המד"ר $y''(x)+p(x)y'+q(x)=0$, בקטע I , כאשר p, q רציפות בקטע I .
הראו כי אם קיימת נקודה c בקטע I , שעבורה $y_1(c)=y_2(c)=0$,
אז $\{y_1(x), y_2(x)\}$ אינה מערכת בסיסית של פתרונות המד"ר הנתונה.

תשובות סופיות

1) לא.

2) $W=-2x$

3) כן.

4) א. $W=0$ ב. שאלת בדיקה. ג. לא. ד. לא.

5) א. שאלת הוכחה. ב. $y''-\frac{5}{x}y'+\frac{8}{x^2}y=0$

6) שאלת הוכחה.

משפט הקיום והיחידות למדר ליניארית מסדר שני

שאלות

1) נתונה המשוואה $y''-4y=12x$.

א. פתרו את המשוואה.

ב. מצאו פתרון המקיים: $\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=11 \end{cases}$.

ג. נסו למצוא פתרון המקיים: $\begin{cases} y(0)=4 \\ y'(0)=2 \\ y''(0)=1 \end{cases}$.

האם כישלונך מפריך את משפט הקיום?

ד. תנו דוגמה מפורשת לשני פתרונות שונים, המקיימים $y(0)=1$.

האם הדוגמה מפריכה את משפט היחידות?

2) נתונה הבעיה: $\begin{cases} x^2y''-2xy'+2y=0 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$.

הראו כי $y_1(x)=0$ ו- $y_2(x)=x^2$, הם פתרונות של הבעיה.

האם אין בכך סתירה למשפט הקיום והיחידות?

3) האם קיימת משוואה דיפרנציאלית ליניארית מסדר שני, עם מקדמים רציפים בסביבת הנקודה $x=0$, כך שהפונקציות $y=4x$ ו- $y=\sin 4x$ הן פתרונותיה?

תשובות סופיות

1) א. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}-3x$ ב. $y=4e^{2x}-3e^{-2x}-3x$

ג. המשוואות הראשונה והשלישית סותרות זו את זו. לא.

ד. לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

2) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

3) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

השיטה האופרטורית

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדקו עם המרצה אם הוא נדרש או לא.

בשאלות אלו הסימון הוא: $ay''+by'+cy=Q(x) \;\Leftrightarrow\; (aD^2+bD+c)y=Q(x)$.

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $(D^2-D-2)y=4e^{-2x}+10e^x+11$

2) $(D^2-2D+1)y=10e^{4x}+e^x-1$

3) $(D^2+D-2)y=4e^x+e^{10x}+14$

4) $(D^2+4)y=\sin 5x$

5) $(D^2-4)y=\sin x\cos x\cos 2x$

6) $(D^2+D-2)y=\cos x-3\sin x$

7) $(D^2+2D-3)y=2\cos x\cos 2x$

תשובות סופיות

1) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + e^{-2x} - 5e^{x} - 5.5$

2) $y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + \frac{10}{9} e^{4x} + x^2 e^{x} - 1$

3) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} - 4xe^{x} + \frac{1}{72} e^{10x} + 7$

4) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{21} \sin 5x$

5) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{80} \sin 4x$

6) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} + \sin x$

7) $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{10} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + \frac{1}{30} \sin 3x - \frac{1}{15} \cos 3x$

שיטות מתמטיות בכימיה

פרק 10 - משוואת החום

תוכן העניינים

שיטות מתמטיות בכימיה

פרק 11 - טורים עם איברים קבועים

תוכן העניינים

טורים מתכנסים וטורים מתבדרים

שאלות

טור גיאומטרי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **1-6**.
במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(0.44)^n$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{7^{n+1}}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{4^{n+2}}$

4) $\sum_{n=0}^{\infty}(-4)\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+(-5)^n}{7^n}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n}}{3^{2n}}$

טור טלסקופי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **7-11**.
במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+3)(4n-1)}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

10) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)(\ln(n+1))}$

11) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}$

טור הרמוני מוכלל

12) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{5n}$

ד. $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2/3}$

ה. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{\sqrt[3]{n^4}}$

ו. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^e}$

תכונות אלגבריות של טורים

13) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4^n}{7^{n+1}}+n^{-1.5}\right)$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{n^2}$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

14) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)^2}$, אם ידוע כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

15) מצאו את השבר הרציונלי, שהצגתו העשרונית היא $0.141414...+0.123123123...$.

תשובות סופיות

1) מתכנס ל- $\frac{11}{14}$.

2) מתכנס ל- $\frac{1}{3}$.

3) מתבדר.

4) מתכנס ל- $-\frac{64}{7}$.

5) מתכנס ל- $\frac{11}{12}$.

6) מתכנס ל- 8.

7) מתכנס ל- $\frac{1}{2}$.

8) מתכנס ל- $\frac{1}{12}$.

9) מתבדר.

10) $S=\frac{1}{\ln 2}$

11) $\frac{1}{12}$

12) א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתבדר.
ד. מתבדר. ה. מתכנס. ו. מתכנס.

13) א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתבדר.

14) $\frac{\pi^2}{6}-\frac{5}{4}$

15) $\frac{323}{1221}$

מבחן ההתבדרות של טורים

שאלות

1) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$

ד. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^2+2}$ ה. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$ ו. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^n$

תשובות סופיות

1) א-ו: מתבדר.

מבחני התכנסות לטורים חיוביים

שאלות

מבחן האינטגרל

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **1-5** (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+5}}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan n}{n^2+1}$

4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\ (p>1)$

5) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\ (p\le 1)$

6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n^3}$.

ב. מצאו את הגבול $\lim_{n\to\infty}n^2e^{-n^3}$.

מבחן ההשוואה ומבחן ההשוואה הגבולי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **7-15** (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+10n+1}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4n+1}{\sqrt{n^{10}+n+1}}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+5}{\sqrt{n^4+n+1}}$

11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-2}{3^n+2n}$

12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\sin^2 n}{n!}$

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$

14) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$

15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}$

מבחן המנה, מבחן השורש ומבחן רַאבֶּה

בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n+2)}$

18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!(2n)^n}$

19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{n!\cdot3^n}$

20) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}$

21) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{1000}e^{-n}$

22) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

23) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(1+n^2)}{n!}$

24) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

25) $\sum\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}$

26) $\sum\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$

תשובות סופיות

1) מתבדר.
2) מתבדר.
3) מתכנס.
4) מתכנס.
5) מתבדר.
6) א. מתכנס. ב. 0
7) מתכנס.
8) מתבדר.
9) מתכנס.
10) מתבדר.
11) מתכנס.
12) מתכנס.
13) מתבדר.
14) מתכנס.
15) מתכנס.
16) מתבדר.
17) מתכנס.
18) מתכנס.
19) מתכנס.
20) מתכנס.
21) מתכנס.
22) מתכנס.
23) מתכנס.
24) מתכנס.
25) מתבדר.
26) מתבדר.

מבחני התכנסות לטורים כלליים

מבחן לייבניץ

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **1-3**:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{4n+1}$ **2)** $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+n}$

מבחן דיריכלה

בשאלות **4** ו-**5**, קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר:

4) $1+\frac{1}{4}-\frac{2}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{13}-\frac{2}{16}+\dots$

5) $\sum\frac{\sin n\cdot\sin n^2}{n+1}$

6) הוכיחו שהטורים $\sum\cos n\theta$, $\sum\sin n\theta$, כאשר $\theta\neq 2\pi k$, חסומים.

7) הוכיחו את התכנסות הטורים הבאים:

$\sum\frac{\sin n\theta}{\sqrt{n+4}},\quad \sum\frac{\cos n\theta}{n+1},\quad \sum\frac{\sin n\theta}{n}\ (\theta\neq 2\pi k)$.

8) בדקו התכנסות הטור $\sum\frac{\sin^2 n}{n}$.

9) הוכיחו שאם הסדרה b_n יורדת ושואפת לאפס, אז הטור $\sum b_n\sin n$ מתכנס.

10) ענו על שני הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}(3-n)(\bmod 7)$ הוא טור חסום.

ב. בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3-n)(\bmod 7)}{\sqrt{n+1}}$.

מבחן אבל

קבעו האם הטור מתכנס או מתבדר:

11) $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+4}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

12) $\sum \frac{(-1)^n n}{4^n - 4^{2n}}$

13) $\sum \frac{(-1)^n \ln\left(1+n^{-1}\right)}{n}$

14) $\sum \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{n^2}$

תשובות סופיות

1) מתכנס.	2) מתכנס.	3) מתכנס.
4) מתכנס.	5) מתכנס.	6) הוכחה.
7) הוכחה.	8) מתבדר.	9) הוכחה.
10) א. הוכחה.	ב. מתכנס.	11) מתכנס.
12) מתכנס.	13) מתכנס.	14) מתכנס.

התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

שאלות

בשאלות הבאות, קבעו אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{n^2}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}$

4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^3}$

6) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1+n\ln n}{n^2}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+n}$

תשובות סופיות

1) מתבדר.

2) מתכנס בהחלט.

3) מתכנס בתנאי.

4) מתכנס בתנאי.

5) מתכנס בהחלט.

6) מתכנס בהחלט.

7) מתכנס בתנאי.

8) מתכנס בתנאי.

9) מתכנס בתנאי.

תרגילי תיאוריה

1) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.
א. אם $\sum a_n$ מתכנס ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum(a_n+b_n)$ מתבדר.
ב. אם $\sum a_n$ מתבדר ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum(a_n+b_n)$ מתבדר.

2) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.
א. אם $\sum a_n^2$ מתכנס, אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.
ב. אם $\sum a_n$ חיובי ומתכנס, אז $\sum \frac{1}{a_n}$ מתבדר.
ג. אם $\sum a_n$ מתכנס, אז $\sum a_n^2$ מתכנס.

3) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+(-1)^n\right)$ מתבדר.

4) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ומתכנס, אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס.

5) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.
הוכיחו כי $\sum\left(1-\frac{\sin(a_n)}{a_n}\right)$ מתכנס.

6) א. נתון טור חיובי $\sum a_n$.
הוכיחו כי $\sum \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ מתבדר.
ב. נתון טור מתכנס $\sum a_n$.
הוכיחו ש- $\sum |a_n|$ מתבדר אם $\sum a_n^2$ מתבדר.

הערה: אין קשר בין הסעיפים

7) תהי (a_n) סדרה חיובית השואפת לאינסוף.
הוכיחו כי $\sum \frac{1}{(a_n)^n}$ מתכנס.

8) $\sum a_n$ הוא טור אי-שלילי ומתכנס.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n+4^n}{a_n+10^n}$ מתכנס.

9) הוכיחו או הפריכו:

אם הסדרה $(a_n)_{n\geq 1}$ מקיימת $0\leq a_n\leq \frac{1}{n}$ לכל n, אז $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ מתכנס.

10) נניח כי $a_n\geq 0$.

הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

11) הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס והסדרה b_n חסומה, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

12) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי, אז $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ מתבדר.

13) הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי ואם $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$, אז $\sum b_n$ מתכנס בתנאי.

14) נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ לכל n, אז הטור מתכנס.

ב. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ לכל n, אז הטור מתבדר.

15) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס.

16) נתונים שני טורים חיוביים $\sum a_n, \sum b_n$.

א. נתון שהטורים $\sum a_n^2, \sum b_n^2$ מתכנסים.

1. הוכיחו כי $\sum a_n b_n$ מתכנס.

2. הוכיחו כי $\sum (a_n + b_n)^2$ מתכנס.

ב. נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ מתכנס.

17) הוכיחו:

א. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\lim_{n\to\infty}(na_n) = k \neq 0$, אז הטור מתבדר.

ב. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\sum (na_n - k)$ מתכנס (כאשר $k \neq 0$),

אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

18) הוכיחו כי אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\lim_{n\to\infty}(n^2 a_n) = k$, אז הטור מתכנס.

19) נתון $a_n \geq 0$ לכל n.

א. נתון כי $\lim_{n\to\infty} n^3 a_n^2 = k > 0$.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

ב. נתון כי $\sum (n^3 a_n^2 - k)$ מתכנס (כאשר $k > 0$).

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

20) הסדרה (a_n) מוגדרת על ידי $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{21}{20}$, כאשר $(n \geq 1)$.

האם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס?

21) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מוגדר כך: $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n=k^2 \\ \frac{1}{n^2} & n \neq k^2 \end{cases}$.

הוכיחו כי הטור מתכנס.

22) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$,

ונתון כי לכל n מתקיים $a_{n+1} \le a_n$.

הוכיחו כי $\sum n(a_n - a_{n+1})$ מתכנס.

23) נתון $\forall n \ge 1:\ 0 < a_n < 1,\ 4a_n(1-a_{n+1}) > 1$.

האם $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 - 1\right)$ מתכנס?

24) נניח כי (a_n) סדרה המקיימת $a_n \le a_{2n} + a_{2n+1}$, $a_n > 0$ לכל n טבעי.

הוכיחו כי $\sum a_n$ מתבדר.

25) (a_n) היא סדרה חשבונית שכל איבריה שונים מאפס.

הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ מתבדר.

26) נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם הטור מתכנס לפי מבחן השורש, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן המנה.

ב. אם הטור מתכנס לפי מבחן המנה, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן השורש.

27) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי הסדרה a_n מתכנסת אם ורק אם $\sum_{n=2}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$ מתכנס.

ב. בדקו האם הסדרה $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ מתכנסת.

ג. בדקו האם הסדרה $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ מתכנסת.

הערה: סעיף ג' מיועד רק למי שלמדו את הנושא **'טורי מקלורן עם שארית לגראנז'**.

28) פונקציה f מוגדרת לכל x, גזירה ב- 0 ומקיימת $f(0)=0$.
הוכיחו כי אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, אז $\sum f(a_n)$ מתכנס בהחלט.

29) נתון $p(x)$ פולינום.
$\sum a_n$ מתכנס בהחלט.
הוכיחו כי $\sum P(a_n)$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $p(0)=0$.

30) יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n , \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים חיוביים.
נתון כי:
(1) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.(2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$ לכל n טבעי.
הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

פתרונות לכל שאלות התיאוריה תוכלו למצוא באתר: GooL.co.il

שיטות מתמטיות בכימיה

פרק 12 - טורי טיילור - מקלורן

תוכן העניינים

טור טיילור וטור מקלורן

שאלות

בשאלות **1-24** מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x=0$ (טור מקלורן) :

1) $f(x)=\sin 2x$
2) $f(x)=x^2e^{-4x}$
3) $f(x)=\sinh x$
4) $f(x)=\sin^2 x$
5) $f(x)=\cos^2 x$
6) $f(x)=2^x$
7) $f(x)=x\cos(4x^2)$
8) $f(x)=\ln(2-3x+x^2)$
9) $f(x)=\arcsin x$
10) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$
11) $f(x)=\dfrac{3}{1-x^4}$
12) $f(x)=\dfrac{1}{1+9x^2}$
13) $f(x)=\dfrac{1}{x-5}$
14) $f(x)=\dfrac{x}{4x+1}$
15) $f(x)=\dfrac{x}{9+x^2}$
16) $f(x)=\dfrac{3}{x^2+x-2}$
17) $f(x)=\dfrac{7x-1}{3x^2+2x-1}$
18) $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$
19) $f(x)=\ln(1+x)$
20) $f(x)=\ln(1-x)$
21) $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$
22) $f(x)=\ln(5-x)$
23) $f(x)=\dfrac{x^2}{(1-2x)^2}$
24) $f(x)=\arctan\left(\dfrac{x}{3}\right)$

הערות : לפתרון שאלות **15** ו-**16**, יש להכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.
לפתרון סעיפים **18**, **19**, **23** ו-**24** יש להכיר את הנושא גזירה ואינטגרציה של טורי מקלורן.
אפשר להיעזר בפיתוחים הידועים לטור מקלורן המופיעים בנספח.

בשאלות **25-27** מצאו את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס,
בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות (נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים) :

25) $f(x)=e^{-x^2}\cos x$
26) $f(x)=\tan x$
27) $f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x}$

תשובות סופיות

1) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n x^{n+2}}{n!}$ $(-\infty<x<\infty)$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

5) $\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n x^n}{n!}$ $(-\infty<x<\infty)$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{2n}x^{4n+1}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

8) $\ln 2-\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1\le x<1)$

9) $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(-1<x<1)$

10) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ $(|x|<1)$

11) $\sum_{n=0}^{\infty}3x^{4n}$ $(|x|<1)$

12) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 9^n x^{2n}$ $(|x|<\frac{1}{3})$

13) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{5^{n+1}}x^n$ $(|x|<5)$

14) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{n+1}$ $(|x|<\frac{1}{4})$

15) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$ $(|x|<3)$

16) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}-1\right)x^n$ $(|x|<1)$

17) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2(-1)^n-3^n\right)x^n$ $(|x|<\frac{1}{3})$

18) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n\cdot x^{n-1}$ $(|x|<1)$

19) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ $(-1<x\le 1)$

20) $\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1\le x<1)$

21) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x|<1)$

22) $\ln 5-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)}$ $(-5\le x<5)$

23) $\sum_{n=0}^{\infty}2^n(n+1)x^{n+2}$ $(|x|<\frac{1}{2})$

24) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}$ $(|x|\le 3)$

25) $1-\frac{3}{2}x^2+\frac{25}{24}x^4-\frac{331}{720}x^6+..$

26) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\ldots$

27) $x-x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5+..$

טור טיילור סביב $x = x_0$

שאלות

מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x = x_0$ של הפונקציות הבאות:

1) $f(x) = \ln x$ $\quad (x_0 = 1)$

2) $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad (x_0 = 2)$

3) $f(x) = \sin x$ $\quad \left(x_0 = \frac{\pi}{2}\right)$

תשובות סופיות

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1}$
$(0 < x \le 2)$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}}$
$(0 < x < 4)$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-\frac{\pi}{2})^{2n}}{2n!}$
$(-\infty < x < \infty)$

חישוב סכום של טור

שאלות

חשבו את סכום הטורים הבאים:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{n!}$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n!}$

4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$

5) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$

6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$

8) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$

9) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)}$

תשובות סופיות

1) e 2) e^{-2} 3) $\sqrt{e}$ 4) $2e$ 5) $\pi/4$

6) $\sin 1$ 7) $\cos 1$ 8) $\ln 2$ 9) $\ln\frac{3}{2}$

חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן

שאלות

בשאלות **1-3** חשבו את ערך הגבול:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^3}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

4) נתון כי $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{x^2}-1}{x^n}=k$ כאשר k קבוע שונה מאפס.
מצאו את n ואת k.

5) חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\ln(1-\ln x)\right]^{x-1}$.

6) חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sinh x^4 - x^4}{(x-\sin x)^4}$.

7) חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x^2)^3-(\sin x^3)^2}{\ln(1+x^{10})}$.

תשובות סופיות

1) $\dfrac{1}{120}$

2) $\dfrac{1}{3}$

3) $\dfrac{1}{3}$

4) $k=1, n=3$

5) 1

6) 216

7) $-\dfrac{1}{2}$

חישובים מקורבים עם השארית של לייבניץ

שאלות

בשאלות **1-3** חשב בשגיאה הקטנה מ-0.001:

1) $\frac{1}{e}$ **2)** $\sin 3^{\circ}$ **3)** $\arctan 0.25$

בשאלות **4-6** חשב בעזרת n איברים ראשונים (שונים מאפס), בפיתוח לטור מקלורן, והעריכו את השגיאה בחישוב:

4) $(n=3)\frac{1}{\sqrt{e}}$ **5)** $(n=1)\cos 4^{\circ}$ **6)** $(n=4)\ln 1.5$

7) מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sin x \cong x-\frac{x^3}{3!}$ עבור $|x|\le\frac{\pi}{6}$?

8) מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\ln(1+x)\cong x$ עבור $|x|<0.01$?

9) מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\cos x\cong 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$ עבור $|x|\le 0.2$?

10) עבור אילו ערכי x, $\sin x\cong x-\frac{x^3}{3!}$ בשגיאה הקטנה מ-0.001?

11) עבור אילו ערכי x, $\arctan x\cong x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}$ בשגיאה הקטנה מ-0.01?

תשובות סופיות

1) $\frac{53}{144}$

2) $\frac{\pi}{60}$

3) $\frac{47}{192}$

4) $\frac{5}{8}$, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{48}$.

5) 1, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{\pi\cdot\pi}{4050}$.

6) $\frac{77}{192}$, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{160}$.

7) $\frac{(\pi/6)^5}{5!}$

8) $\frac{(0.01)^2}{2}$

9) $\frac{(0.2)^6}{6!}$

10) $|x|<\sqrt[5]{3/25}$

11) $|x|<\sqrt[9]{9/100}$

חישוב מקורב של אינטגרל מסוים

שאלות

חשבו בקירוב את האינטגרלים הבאים בשגיאה הקטנה מ- ε:

1) $\int\limits_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx$ $(\varepsilon = 0.0001)$

2) $\int\limits_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ $(\varepsilon = 0.001)$

3) $\int\limits_0^{0.5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$ $(\varepsilon = 0.0001)$

תשובות סופיות

1) $\frac{449}{2250}$

2) $\frac{39}{400}$

3) $\frac{143}{576}$

חישובים מקורבים עם השארית של לגראנז'

1) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt{x+4}$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.
חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt{5}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $x>0$ מתקיים:
$$2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2<\sqrt{x+4}<2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2+\frac{1}{512}x^3$$
ג. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sqrt{x+4}\cong 2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2$, עבור $|x|<0.1$?

2) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{64+x}$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.
חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[3]{66}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $x>0$ מתקיים:
$$4+\frac{1}{48}x-\frac{1}{9216}x^2<\sqrt[3]{64+x}<4+\frac{1}{48}x-\frac{1}{9216}x^2+\frac{5}{5308416}x^3$$

3) א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר ראשון לפונקציה $f(x)=\tan x$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.
חשבו בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\tan 0.1$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $0<x<1$ מתקיים:
$$x<\tan x<x+4\sqrt{3}x^2$$

4) רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt[4]{x}$ סביב $x_0=16$, כולל שארית לגראנז'.
חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[4]{15}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

5) חשבו את $\sqrt[3]{29}$ ברמת דיוק של 10^{-3}.

6) חשבו את $\sin 36^{\circ}$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{1000000}$, בשתי דרכים:
א. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x=0$.
ב. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x=\frac{\pi}{4}$.

מי מהטורים טוב יותר על מנת לחשב את $\sin 36^{\circ}$? נמקו.

7) נתונה $f(x)=\sqrt{1+x}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 1 עבור $0\le x\le 1$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכיחו שלכל $x\ge 0$ מתקיים $\sqrt{1+x}\le 1+\frac{1}{2}x$.

8) נתונה $f(x)=\frac{1}{1+x}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 3, עבור $0.1\le x\le 0.9$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת $\frac{1}{1+x}\cong 1-x+x^2-x^3$, עבור $0.1\le x\le 0.9$.

ג. הוכיחו כי עבור $-1<x$ מתקיים $\frac{1}{1+x}\ge 1-x+x^2-x^3$.

9) נתונה $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$.

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב 0 עד סדר 2, עבור $|x|\le 0.5$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}\cong 1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2$, עבור $|x|\le 0.5$.

ג. פתרו את אי השוויון $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}<1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2$, עבור $-1<x$.

10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x)=e^x$, כולל נוסחת השארית של לגראנז'.

ב. חשבו את $\sqrt{e}$ ברמת דיוק של 10^{-4}.

ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת:

$$e^x\cong 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$$, עבור $0\le x\le 1$.

ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(-1,1)$, שעבורו $\left|e^x-p(x)\right|<10^{-5}$.

11) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x)=\ln(1+x)$, כולל נוסחת השארית של לגראנז'.

ב. חשבו את $\ln 1.5$ ברמת דיוק של 10^{-4}.

ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת:

$\ln(1+x)\cong x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ עבור $0\le x\le 1$.

ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(0,1)$, שעבורו $\left|\ln(1+x)-p(x)\right|<10^{-2}$.

ה. הוכיחו כי לכל $x>0$ מתקיים אי השוויון $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

12) תהי f פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[0,1]$,

ונניח ש- $f(0)=f(1)=0$ ו- $|f''(x)|\le M$ לכל $0<x<1$.

הוכיחו כי $|f'(x)|\le\frac{M}{2}$ לכל $0\le x\le 1$.

13) תהי $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f(-1)=f(1)=0$.

כמו כן, נתון כי קיים M, כך ש- $|f''(x)|\le M$ בקטע.

הוכיחו שלכל $-1\le x\le 1$ מתקיים $|f(x)|\le\frac{M}{2}$.

14) תהי f פונקציה גזירה ב- $(0,\infty)$, ונניח כי $|f'(x)|\le M$ לכל $0<x$.

הוכיחו כי $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0$.

15) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f''(x)\ge 0$ לכל $x\in[a,b]$,

ונניח כי $x_0\in[a,b]$.

א. הוכיחו שלכל $x\in[a,b]$ מתקיים $f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

ב. הוכיחו כי $\cos y-\cos x\ge(x-y)\sin x$ לכל $x,y\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$.

16) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים ונניח כי קיימים:

$M_0=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|,\ M_1=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|,\ M_2=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f''(x)|$.

הוכיחו כי $(M_1)^2\le 2M_0M_2$.

17) נניח ש- f גזירה פעמיים ב- $(0,\infty)$ ו- f'' חסומה ב- $(0,\infty)$ ו- $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.
הוכח כי $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$.

18) הוכיחו כי e הוא מספר אי-רציונלי.

תשובות סופיות

1) א. נוסחה: $\sqrt[3]{64+x}=4+\frac{1}{48}x-\frac{1}{9216}x^2+\frac{5}{81\cdot\sqrt[3]{(64+c)^8}}x^3$,

חישוב: $\sqrt[3]{66}=4+\frac{1}{24}-\frac{1}{2304}=\frac{9311}{2304}$, שגיאה בקירוב: $\frac{5}{663552}$.

ב. שאלת הוכחה. ג. $\frac{1}{480000}$

2) א. נוסחה: $\tan x=x+\frac{\sin c}{\cos^3 c}x^2$, חישוב: $\tan 0.1=\frac{1}{10}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{970}$.

ב. שאלת הוכחה.

3) א. נוסחה: $\sqrt{x+4}=2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2-\frac{1}{16\sqrt{(c+4)^8}}x^3$,

חישוב: $\sqrt{5}=2+\frac{1}{4}-\frac{1}{64}=\frac{143}{64}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{512}$.

ב. שאלת הוכחה.

4) נוסחה: $\sqrt[4]{x}=2+\frac{1}{32}(x-16)-\frac{3}{4096}(x-16)^2+\frac{7}{128\cdot\sqrt[4]{c^{11}}}(x-16)^3$,

חישוב: $\sqrt[4]{15}=2-\frac{1}{32}-\frac{3}{4096}=\frac{8061}{4096}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{3130}$.

5) $\sqrt[3]{29}=3\frac{158}{2187}$

6) א. $\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{5}-\frac{\frac{\pi}{5}^3}{3!}+\frac{\frac{\pi}{5}^5}{5!}-\frac{\frac{\pi}{5}^7}{7!}$ ב. $\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4})-\frac{\sqrt{2}}{4}(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4})^2-\frac{\sqrt{2}}{12}(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4})^3$

7) א. ב. $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x$, בשגיאה הקטנה מ-0.25.

8) א. $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{6561}{10000}$.

ב. שגיאה הקטנה מ- $\frac{6561}{10000}$. ג. שאלת הוכחה.

9) א. $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}=1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{7}{27}$.

ב. השגיאה המקסימלית היא $\frac{7}{27}$. ג. ראו בסרטון.

10) א. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^c}{(n+1)!}x^n$ ב. $\sqrt{e}=1.6487$

ג. $\frac{3}{(n+1)!}$ ד. $p(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^8}{8!}$

11) א. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}}x^{n+1}$

ב. $\ln(1.5)=0.5-\frac{0.5^2}{2}+\frac{0.5^3}{3}-\frac{0.5^4}{4}+\frac{0.5^5}{5}-\frac{0.5^6}{6}+\frac{0.5^7}{7}-\frac{0.5^8}{8}+\frac{0.5^9}{9}$

ג. $\frac{1}{n+1}$ ד. $p(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+\frac{x^{101}}{101}-\frac{x^{102}}{102}$ ה. שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

18) שאלת הוכחה.

<u>הערה לגבי קירובים</u>

כאשר נדרש לספק קירוב שהוא **מדויק ל-** n **ספרות אחרי הנקודה**,
אז עלינו לדרוש שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- 0.5×10^{-n}.
למשל, דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה משמעותו,
שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.5\times10^{-3}=0.0005$.
בספר לא השתמשנו בניסוח זה, אך במקומות מסוימים נעשה בו שימוש.

נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

תחום התכנסות	טור מקלורן
$-\infty < x < \infty$	$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$
$-\infty < x < \infty$	$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$
$-\infty < x < \infty$	$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$
$-1 < x \le 1$	$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$
$-1 \le x \le 1$	$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$
$-1 < x < 1$	$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots$
$-1 \le x \le 1 \ (m>0)$ $-1 < x \le 1 \ (-1 < m < 0)$ $-1 < x < 1 \ (m \le -1)$ $m \ne 0,1,2,3,\ldots$	$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!} x^n$ $= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots$

שיטות מתמטיות בכימיה

פרק 13 - סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטורי חזקות

תוכן העניינים

סדרות פונקציות

שאלות

עבור כל אחת מסדרות הפונקציות שבשאלות **1-11**:

א. בדקו התכנסות נקודתית של סדרת הפונקציות.
במידה והסדרה מתכנסת מצאו את הפונקציה הגבולית.

ב. בדקו התכנסות במידה שווה של סדרת הפונקציות.

1) $f_n(x)=x^n$ ב- $[0,0.5]$.

2) $f_n(x)=x^n$ ב- $(0,1)$.

3) $f_n(x)=\arctan(nx)$ ב- $(0,\infty)$.

4) $f_n(x)=\frac{1}{1+nx}$ ב- $[0,1]$.

5) $f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$ ב- $[0,1]$.

6) $f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$ ב- $[0.5,4]$.

7) $f_n(x)=\frac{1}{x^2+n}$ ב- $\mathbb{R}$.

8) $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}$ ב- $\mathbb{R}$.

9) $f_n(x)=\frac{\sin nx}{1+x^2+n^2}$ ב- $\mathbb{R}$.

10) $f_n(x)=n(1-x)x^n$ ב- $[0,1]$.

11) $f_n(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le 1-\frac{1}{n}\\ n(x-1)+1 & 1-\frac{1}{n}\le x\le 1\end{cases}$ ב- $[0,1]$.

12) נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x)=\begin{cases}1 & x\in[n,n+1]\\ 0 & \text{else}\end{cases}$.

א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[0,4]$?

ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[0,4]$?

ג. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?

ד. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

13) נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x)=nxe^{-n^2x^2}$.

א. האם הסדרה מתכנסת נקודתית בקטע $[0,\infty)$?

ב. האם הסדרה מתכנסת במ״ש בקטע $[0,\infty)$?

ג. האם הסדרה מתכנסת במ״ש בקטע $[1,\infty)$?

14) נתונה $f_n(x)=\begin{cases}1 & x\in\left[n,n+\frac{1}{n}\right]\\ 0 & \text{else}\end{cases}$.

א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?

ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

15) נגדיר את סדרת הפונקציות $f_n(x)=[1-\chi_n(x)]\left(x+\frac{1}{n}\right)^{-1}+n^\alpha\cdot\chi_n(x)$,

כאשר $\chi_n(x)=\begin{cases}1 & x\in\left(n-\frac{1}{n^2},n+\frac{1}{n^2}\right)\\ 0 & else\end{cases}$.

א. מהם ערכי הפרמטר α, עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[1,\infty)$?
אם הסדרה מתכנסת נקודתית, מהי הפונקציה הגבולית?

ב. מהם ערכי הפרמטר α, עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[1,\infty)$?

תשובות סופיות

1) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. מתכנסת במידה שווה.

2) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

3) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\frac{\pi}{2}$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

4) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & 0<x\le 1\end{cases}$. ב. לא במידה שווה.

5) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

6) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\begin{cases}0 & 0.5\le x<1\\ \frac{1}{2} & x=1\\ 1 & 1<x\le 4\end{cases}$. ב. לא במידה שווה.

7) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. מתכנסת במידה שווה.

8) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\sqrt{x^2}$. ב. מתכנסת במידה שווה.

9) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. מתכנסת במידה שווה.

10) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

11) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$. ב. לא במידה שווה.

12) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. מתכנסת במידה שווה.
ג. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ד. אינה מתכנסת במידה שווה.

13) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. לא במידה שווה. ג. כן.

14) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

15) א. לכל ערך של α ממשי יש התכנסות נקודתית בתחום $[1,\infty)$, לפונקציה $\frac{1}{x}$.
ב. רק אם $\alpha<0$.

טורי פונקציות

שאלות

מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות **1-6**:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!(x-5)^n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)10^n(x-4)^n}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\left[\ln(nx)\right]^4}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n-1)}$

בדקו התכנסות במידה שווה של הטורים הבאים, בתחום המופיע לידם:

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad (-\infty < x < \infty)$

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\frac{3}{2}}} \quad (-1 \le x \le 1)$

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}+x^2} \quad (-\infty < x < \infty)$

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n!}}\left(x^n + x^{-n}\right) \quad \left(\frac{1}{4} \le x \le 4\right)$

11) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right) \quad (-a \le x \le a)$

12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{1+n^7x^2} \quad (-\infty < x < \infty)$

תשובות סופיות

1) $x > 0$

2) $x \neq 5$

3) $x < 3\frac{9}{10} \text{ or } 4\frac{1}{10}$

4) $0 < x \neq \frac{1}{n}$

5) $x > 0$

6) $x \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$

7) מתכנס במידה שווה.

8) מתכנס במידה שווה.

9) מתכנס במידה שווה.

10) מתכנס במידה שווה.

11) מתכנס במידה שווה.

12) מתכנס במידה שווה.

טורי חזקות

שאלות

מצאו את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות **1-12**:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ **2)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2} x^n$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin^2 \frac{1}{n}$ **5)** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}}$ **6)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{(2n+1)} x^{2n}$

7) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n} (x-1)^n$ **8)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{(2n-2)!} x^n$ **9)** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 4^n}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n (x+5)^n$ **11)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n^4 \cdot 100^n}$ **12)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n+1}}{n \cdot 2^{2n+1}}$

מצאו את הפיתוח לטור חזקות של הפונקציות הבאות, וקבעו את תחום ההתכנסות:

13) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ **14)** $f(x) = \frac{3}{1-x^4}$ **15)** $f(x) = \frac{1}{1+9x^2}$

16) $f(x) = \frac{1}{x-5}$ **17)** $f(x) = \frac{x}{4x+1}$ **18)** $f(x) = \frac{x}{9+x^2}$

19) $f(x) = \frac{3}{x^2+x-2}$ **20)** $f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1}$

הערות חשובות

1. פיתוח לטור חזקות של פונקציות נוספות תמצאו בפרק 3 שאלה 1.
2. לפתרון תרגילים 19 ו-20, יש להכיר את הנושא 'פירוק לשברים חלקיים'.

תשובות סופיות

1) $-1 \le x < 1 \,,\, R = 1$

2) $-\infty < x < \infty \,,\, R = \infty$

3) $-0.2 \le x \le 0.2 \,,\, R = 0.2$

4) $-1 \le x \le 1 \,,\, R = 1$

5) $-3 < x \le -1 \,,\, R = 1$

6) $-1 < x < 1 \,,\, R = 1$

7) $x = 1 \,,\, R = 0$

8) $-\infty < x < \infty \,,\, R = \infty$

9) $-5 < x \le 3 \,,\, R = 4$

10) $-\frac{19}{3} < x < -\frac{11}{3} \,,\, R = 4/3$

11) $-9 \le x \le 11 \,,\, R = 10$

12) $-7 < x < -3 \,,\, R = 2$

13) $\left(|x|<1\right) \ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

14) $\left(|x|<1\right) \ \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n}$

15) $\left(|x|<\frac{1}{3}\right) \ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n}$

16) $\left(|x|<5\right) \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n$

17) $\left(|x|<\frac{1}{4}\right) \ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1}$

18) $\left(|x|<3\right) \ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$

19) $\left(|x|<1\right) \ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1\right) x^n$

20) $\left(|x|<\frac{1}{3}\right) \ \sum_{n=0}^{\infty} \left(2(-1)^n - 3^n\right) x^n$

גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות

שאלות

פתחו לטור חזקות את הפונקציות בשאלות **1-7**:

1) $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$

2) $f(x)=\ln(1+x)$

3) $f(x)=\ln(1-x)$

4) $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

5) $f(x)=\ln(5-x)$

6) $f(x)=\dfrac{x^2}{(1-2x)^2}$

7) $f(x)=\arctan\left(\dfrac{x}{3}\right)$

8) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{4^n}$.

9) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2+n\right)x^{n-1}$.

10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

ב. מהו סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4^n(2n-1)}$?

11) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}$.

ב. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{2n}(4n-3)}$.

12) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^{4n}(4n-1)}$.

13) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

תשובות סופיות

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n\cdot x^{n-1}$ $(|x|<1)$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ $(-1<x\le 1)$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1\le x<1)$

4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x|<1)$

5) $\ln 5-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)}$ $(-5\le x<5)$

6) $\sum_{n=0}^{\infty}2^n(n+1)x^{n+2}$ $(|x|<\frac{1}{2})$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}$ $(|x|\le 3)$

8) $\frac{20}{27}$

9) $|x|<1$ $\frac{2}{(1-x)^3}$

10) א. $|x|<1$ $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ ב. $\frac{1}{4}\ln 3$

11) א. $|x|<1$ $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\frac{1}{2}\arctan x$ ב. $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\ln 3+\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}\right)$

12) $\frac{1}{10}\left(\frac{1}{4}\ln\frac{11}{9}-\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{10}\right)$

13) $|x|\le 1$ $\arctan x$