שיטות מחקר במימון

תוכן העניינים

תוכן העניינים

שיטות מחקר במימון

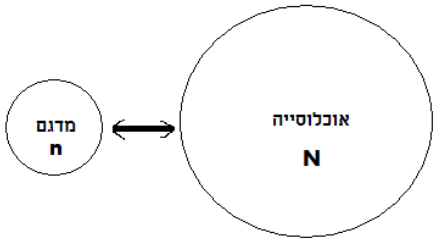
פרק 1 - הסקה סטטיסטית - הקדמה

תוכן העניינים

הסקה סטטיסטית – הקדמה:

רקע:

אוכלוסייה:



קבוצה שאליה מפנים שאלה מחקרית.
למשל, חברת תרופות שמעוניינת לפתח תרופה למחלת הסוכרת מתעניינת באוכלוסיית חולי הסוכרת בעולם.

מדגם:

חלק מתוך האוכלוסייה.
למשל, אם נדגום באקראי 10 אנשים מתוך חולי הסוכרת אז זהו מדגם מתוך אוכלוסיית חולי הסוכרת.

במקרים רבים אין אפשרות לחקור את כל האוכלוסייה כיוון שאין גישה לכולה, היא גדולה מידי, אנו מוגבלים בזמן ובאמצעים טכניים ולכן מבצעים מדגם במטרה לבצע הסקה סטטיסטית מהמדגם לאוכלוסייה.
הדגימה בקורס תהיה דגימה מקרית - הכוונה לדגימה שבה לכל תצפית באוכלוסייה יש את אותו סיכוי להיכלל במדגם.

סטטיסטי:

גודל המחושב על המדגם.

פרמטר:

גודל המתאר את האוכלוסייה.

הסימונים לפרמטר וסטטיסטי הם שונים:

	סטטיסטי (מדגם)	פרמטר (אוכלוסייה)
ממוצע	$\overline{X}$	μ
פרופורציה (שכיחות יחסית)	$\hat{p}$	P

פרמטר הוא גודל קבוע גם אם אנו לא יודעים אותו סטטיסטי הוא משתנה ממדגם למדגם ולכן יש לו התפלגות הנקראת התפלגות הדגימה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

25% מאזרחי המדינה תומכים בהצעת החוק של חבר כנסת מסוים.
הוחלט לדגום 200 אזרחים ומתוכם לבדוק מהו אחוז התומכים בהצעת החוק.

א. מי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מה הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

ה. מהו הסטטיסטי שמתכננים להוציא מהמדגם?

ו. האם הפרמטר או הסטטיסטי הוא משתנה מקרי?

שאלות:

1) מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.

א. מי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מהם הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

2) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה בישוב "העוגן". נגדיר את X להיות מספר המקלטים של משפחה אקראית. מתכננים לדגום מאוכלוסייה זו 4 משפחות ולהתבונן בממוצע מספר מקלטי הטלוויזיה במדגם.

א. מיהי האוכלוסייה ומהו המשתנה הנחקר?

ב. מהו הסטטיסטי שיילקח מהמדגם ומה סימונו?

מספר המשפחות	מספר מקלטים
50	0
250	1
350	2
300	3
50	4
סך הכול $N=1000$	

3) נתון כי 20% מהשכירים במדינה הם אקדמאיים. נבחרו באקראי 10 שכירים באותה אוכלוסייה ומתכננים לפרסם את מספר האקדמאיים שנדגמו.

א. מהי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה באוכלוסייה?

ג. מהם הפרמטרים?

ד. מהו הסטטיסטי?

תשובות סופיות:

1) א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון.
ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15. ד. 2.

2) א. האוכלוסייה: 1000 משפחות בישוב העוגן, המשתנה הנחקר: מס' מקלטים.
ב. $\bar{X} =$ ממוצע מדגם.

3) א. השכירים במדינה. ב. השכלה: אקדמאי, לא אקדמאי.
ג. שיעור ההצלחות באוכלוסייה: 0.2. ג. מס' האקדמאים במדגם.

שיטות מחקר במימון

פרק 2 - התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי

תוכן העניינים

התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי:

רקע:

בפרק זה נדון בהתפלגות של ממוצע המדגם: $\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}$.

מכיוון שממדגם למדגם אנו יכולים לקבל ממוצע מדגם שונה, אזי ממוצע המדגם הוא משתנה מקרי ויש לו התפלגות.

גדלים המתארים התפלגות כלשהי או אוכלוסייה כלשהי נקראים פרמטרים.

להלן רשימה של פרמטרים החשובים לפרק זה:

ממוצע האוכלוסייה נסמן ב- μ (נקרא גם תוחלת).

שונות אוכלוסייה נסמן ב- σ^2.

סטיית תקן של אוכלוסייה: σ.

תכונות התפלגות:

ממוצע כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לממוצע האוכלוסייה: $E(\bar{x})=\mu_{\bar{x}}=\mu$.

שונות כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לשונות האוכלוסייה מחולק ב- n.

תכונה זו נכונה רק במדגם מקרי: $V(\bar{x})=\sigma_{\bar{x}}^2=\frac{\sigma^2}{n}$.

יש יחס הפוך בין גודל המדגם לבין שונות ממוצעי המדגם.

אם נוציא שורש לשונות נקבל סטיית תקן של ממוצע המדגם שנקראת גם טעות תקן: $\sigma(\bar{x})=\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

השכר הממוצע במשק הינו 9000 ₪ עם סטיית תקן של 4000. דגמו באקראי 25 עובדים.

א. מיהי אוכלוסיית המחקר? מהו המשתנה הנחקר?

ב. מהם הפרמטרים של האוכלוסייה?

ג. מה התוחלת ומהי סטית התקן של ממוצע המדגם?

דגימה מהתפלגות נורמאלית:

אם נדגום מתוך אוכלוסייה שהמשתנה בה מתפלג נורמאלית עם ממוצע μ ושונות σ^2.

ממוצע המדגם גם יתפלג נורמאלית: $Z_{\bar{x}}=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, $\bar{x}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.
מה ההסתברות שבמדגם של 4 תינוקות אקראיים בעת הולדתם המשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-3.5 ק"ג?

משפט הגבול המרכזי:

אם אוכלוסייה מתפלגת כלשהו עם ממוצע μ ושונות σ^2 אזי עבור מדגם מספיק גדול $(n\geq 30)$ ממוצע המדגם מתפלג בקירוב נורמאלי: $\bar{x}\sim\succ N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם וסטיית תקן של 4 גרם.
דגמו מקו הייצור 36 חפיסות שוקולד אקראיות.
מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד שנדגמו יהיה מתחת ל-102 גרם?

שאלות:

1) מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים.
נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.
א. מיהי האוכלוסייה?
ב. מה המשתנה?
ג. מהם הפרמטרים?
ד. מהו גודל המדגם?
ה. מהו תוחלת ממוצע המדגם?
ו. מהי טעות התקן?

2) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה בישוב מסוים:

מספר המשפחות	מספר מקלטים
500	0
2500	1
3500	2
3000	3
500	4
סך הכול $N=10000$	

א. בנו את פונקציית ההסתברות של X.
ב. חשבו את התוחלת, השונות וסטיית התקן של X.
ג. אם נדגום 4 משפחות מהישוב עם החזרה מה תהיה התוחלת, מהי השונות ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?

3) אם נטיל קובייה פעמיים ונתבונן בממוצע התוצאות שיתקבלו, מה תהיה התוחלת ומה תהיה סטיית התקן של ממוצע זה?

4) משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.
א. מה ההסתברות שתינוק אקראי בעת הלידה ישקול פחות מ-3800 גרם?

נתון כי ביום מסוים נולדו 4 תינוקות.
ב. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע שלהם יעלה על 4 ק"ג?
ג. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-2.5 ק"ג?
ד. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה רחוק מהתוחלת בלא יותר מ-50 גרם?
ה. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם היה מדובר על יותר מ-4 תינוקות?

5) הגובה של המתגייסים לצה"ל מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 175 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ. ביום מסוים התגייסו 16 חיילים.

א. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה לפחות 190 ס"מ?

ב. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה בדיוק 180 ס"מ?

ג. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יסטה מתחולת הגבהים בפחות מ-5 ס"מ?

ד. מהו הגובה שבהסתברות של 90% הגובה הממוצע של המדגם יהיה נמוך ממנו?

6) הזמן הממוצע שלוקח לאדם להגיע לעבודתו 30 דקות עם שונות של 16 דקות רבועות. האדם נוסע לעבודה במשך שבוע 5 פעמים.
לצורך הפתרון הניחו שזמן הנסיעה לעבודה מתפלג נורמאלית.

א. מה ההסתברות שבמשך שבוע משך הנסיעה הממוצע יהיה מעל 33 דקות?

ב. מהו הזמן שבהסתברות של 90% ממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה גבוה ממנו?

ג. מה ההסתברות שממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה מרוחק מ-30 דקות בלפחות 2 דקות?

ד. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם האדם היה נוסע לעבודה 6 פעמים בשבוע?

7) נפח היין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 סמ"ק וסטיית תקן של 10 סמ"ק.

א. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה בדיוק 755 סמ"ק?

ב. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה יותר מ-755 סמ"ק?

ג. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה לפחות 755 סמ"ק?

ד. בקבוקיי היין שבארגז נמזגים לקערה עם קיבולת של שלושה ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהקערה?

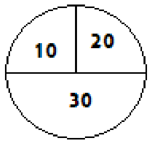
8) משתנה מתפלג נורמאלית עם תוחלת 80 וסטיית תקן 4.

א. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה כאשר גודל המדגם הוא 9?

ב. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה שגודל המדגם הוא 16?

ג. הסבר את ההבדל בתשובות של שני הסעיפים.

9) בקזינו ישנה רולטה. על הרולטה רשומים המס' הבאים כמוראה בשרטוט:



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד.

ב. מה התוחלת ומה השונות של סכום הזכייה?

ג. אם האדם ישחק את המשחק 5 פעמים מה התוחלת ומה השונות של ממוצע סכום הזכייה בחמשת המשחקים?

ד. אם האדם משחק את המשחק 50 פעם מה ההסתברות שבסה"כ יזכה ב-1050 ₪ ומעלה?

10) לפי הערכות הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה השכר הממוצע במשק הוא 8000 ₪ עם סטיית תקן של 3000 ₪.
מה ההסתברות שבמדגם מקרי של 100 עובדים השכר הממוצע יהיה יותר מ-8500 ₪?

11) קובייה הוטלה 50 פעמים.
מה ההסתברות שהממוצע של התוצאות יהיה לפחות 3.72?

12) אורך צינור שמפעל מייצר הינו עם ממוצע של 70 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ.

א. נלקחו באקראי 100 מוטות, מה ההסתברות שממוצע אורך המוטות יהיה בין 68 ל-78 ס"מ?

ב. יש לחבר 2 בניינים באמצעות מוטות. המרחק בין שני הבניינים הינו 7200 ס"מ. מה ההסתברות ש-100 המוטות יספיקו למלאכה?

ג. מה צריך להיות גודל המדגם המינימאלי, כדי שבהסתברות של 5% ממוצע המדגם יהיה קטן מ-69 ס"מ. היעזרו במשפט הגבול המרכזי.

13) נתון משתנה מקרי בדיד בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

X	8	6	4	2
$P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

מתוך התפלגות זו נלקח מדגם מקרי בגודל 50.
מה הסיכוי שממוצע המדגם יהיה קטן מ-5?

14) נתון ש- $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$. דגמו 5 תצפיות מאותה התפלגות והתבוננו בממוצע המדגם $\bar{X}$. לכן: $P\left(\bar{X} > \mu\right)$ יהיה (בחרו בתשובה הנכונה):

א. 0.
ב. 0.5.
ג. 1.
ד. לא ניתן לדעת.

15) נתון ש- X מתפלג כלשהו עם תוחלת μ ושונות σ^2.
החליטו לבצע מדגם בגודל 200 מתוך ההפלגות הנתונה לפי משפט הגבול המרכזי מתקיים (בחרו בתשובה הנכונה):

א. $X \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{200}\right)$.
ב. $\mu \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{200}\right)$.
ג. $\bar{X} \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$.
ד. $\bar{X} \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{200}\right)$.

16) נתון ש- $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$. אם נדגום n תצפיות מתוך ההתפלגות ונגדיר: $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$,
אזי (בחרו בתשובה הנכונה):

א. μ ו- $\bar{X}$ יהיו משתנים מקריים.
ב. μ יהיה משתנה מקרי ו- $\bar{X}$ קבוע.
ג. $\bar{X}$ יהיה משתנה מקרי ו- μ קבוע.
ד. μ ו- $\bar{X}$ יהיו קבועים.

17) משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם. החפיסות נארזות בקרטון המכיל 36 חפיסות שוקולד אקראיות. ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד בקרטון יהיה מעל 99 גרם הוא 0.9932.

א. מהי סטיית התקן של משקל חפיסת שוקולד בודדת?
ב. מה הסיכוי שמתוך 4 קרטונים בדיוק קרטון אחד יהיה עם משקל ממוצע לחפיסה הנמוך מ-100 גרם?

18) משתנה מקרי כלשהו מתפלג עם סטיית תקן של 20.
מה הסיכוי שאם נדגום 100 תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות אזי ממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בפחות מ-2?

תשובות סופיות:

1) א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון.
ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15. ד. 2.
ה. 78. ו. 10.6.

2) א. להלן טבלה:

X	0	1	2	3	4
$P(X)$	0.05	0.25	0.35	0.3	0.05

ב. $\mu = 2.05$, $\sigma^2 = 0.9475$, $\sigma = 0.973$

ג. $\mu_{\bar{x}} = 2.05$, $\sigma^2_{\bar{x}} = 0.2369$, $\sigma(\bar{X}) = 0.486$.

3) $\mu_{\bar{x}} = 3.5$, $\sigma(\bar{X}) = 1.21$.

4) א. 0.8413. ב. 0.0013. ג. 0. ד. 0.1974.

5) א. 0. ב. 0. ג. 0.9544. ד. 178.205.

6) א. 0.0465. ב. 27.71. ג. 0.2628. ד. התשובה הייתה קטנה.

7) א. 0. ב. 0.1587. ג. 0.1587. ד. 0.5.

8) א. 0.5468. ב. 0.6826.

9) א. להלן טבלה:

X	10	20	30
$P(X)$	0.25	0.25	0.5

ב. התוחלת: 22.5, השונות: 68.75. ג. התוחלת: 22.5, השונות: 13.75.
ד. 0.8997.

10) 0.0475.

11) 0.1814.

12) א. 0.9772. ב. 0.0228. ג. 271.

13) 0.5.

14) ב'.

15) ד'.

16) ג'.

17) א. 2.429. ב. 0.25.

18) 0.6826.

שיטות מחקר במימון

פרק 3 - מושגי יסוד באמידה

תוכן העניינים

מושגי יסוד באמידה:

רקע:

כזכור מהמפגש הקודם, פרמטר הוא גודל המתאר את האוכלוסייה או התפלגות מסוימת. כמו ממוצע הגבהים בקרב מתגייסים לצה"ל - μ.

כמו פרופורציית התומכים בממשלה בקרב אזרחי המדינה - p.

בדרך כלל הפרמטרים הם גדלים שאינם ידועים באמת, ולכן מבצעים מדגמים במטרה לאמוד אותם. אין אפשרות לחשב אותם הניסיון הוא בלהעריך כמה הם שווים ככל שניתן.

- נסמן באופן כללי פרמטר באות θ ואומד ב- $\hat{\theta}$. $\hat{\theta}$ הוא סטטיסטי המחושב על המדגם ובאמצעותו נאמוד את θ.
- שגיאת אמידה: $\left|\hat{\theta}-\theta\right|$ - ההפרש בין האומד לאמת (הפרמטר).

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בכנסת ה-19 קיבלה מפלגת העבודה 15 מנדטים. בערוץ 10 ברגע סגירת הקלפיות העריכו את מספר המנדטים של המפלגה להיות 17 מנדטים וזאת על סמך תוצאות מדגם של הערוץ.

א. מה הפרמטר בדוגמה זו?

ב. מהי טעות האמידה של ערוץ 10?

- $\hat{\theta}$ יהיה אומד חסר הטיה ל- θ אם התוחלת של $\hat{\theta}$ תהיה שווה ל- θ: $E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$.
- טעות התקן של אומד היא סטיית התקן שלו, כלומר: $\sigma\left(\hat{\theta}\right)=S.E$

פרמטרים מרכזיים והאומדים שלהם:

ממוצע האוכלוסייה μ:

האומד הנקודתי שלו יהיה: ממוצע המדגם: $\bar{x}=\frac{\sum x}{n}$.

$E(\bar{x})=\mu$ לכן $\bar{x}$ הינו אומד חסר הטיה ל- μ. כמו כן, טעות תקן: $\sigma(\bar{x})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=SE$.

פרופורציה באוכלוסייה p:

האומד הנקודתי שלו יהיה: פרופורציה במדגם: $\hat{p}=\frac{y}{n}$.

$E(\hat{p})=p$, לכן $\hat{p}$ הינו אומד חסר הטיה ל- p. כמו כן טעות התקן: $\sigma(\hat{P})=\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$.

שונות האוכלוסייה σ^2:

האומד הנקודתי שלו יהיה: $S^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$.

$E(S^2)=\sigma^2$ ולכן S^2 הינו אומד חסר הטיה ל- σ^2: $S^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}=\frac{\sum x_i^2-n\bar{x}^2}{n-1}$.

הערה: אומד הוא הנוסחה הכללית לאמידת הפרמטר ואומדן הוא הערך הספציפי שהתקבל במדגם מסוים.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נדגמו 10 משפחות בתל אביב ונבדק עבור כל משפחה מספר הילדים שלה.
להלן התוצאות שהתקבלו: 3, 1, 2, 5, 4, 1, 2, 3, 1, 2.
אמדו באמצעות אומדים חסרי הטיה את הפרמטרים הבאים:

1. ממוצע מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
2. שונות מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
3. פרופורציית המשפחות בנות שני ילדים.

שאלות:

1) מתוך 500 טירונים, נמצאו 120 בעלי שברי הליכה. נתון שהסיכוי שטירון יהיה עם שבר הליכה הוא 0.25.

א. מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?

ב. מהי טעות התקן של האומד כשהמדגם בגודל 500?

ג. מהו האומדן לפרמטר?

ד. מהי טעות האמידה?

2) לפי נתוני היצרן, מקרר צורך בממוצע 2400 וואט לשעה עם סטיית תקן של 500 וואט לשעה.
במדגם של 25 מקררים של היצרן התקבל ממוצע של 2342 וואט לשעה.

א. מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?

ב. מהי טעות התקן של האומד?

ג. מהו האומדן לפרמטר?

ד. מהי טעות האמידה?

3) נדגמו עשרה מתגייסים לצה"ל. גובהם נמדד בס"מ. להלן התוצאות שהתקבלו: 168, 184, 192, 171, 180, 177, 187, 168, 177 ו-175.

א. מצאו אומדן חסר הטיה לגובה הממוצע של מתגייסי צה"ל.

ב. מצאו אומדן חסר הטיה לשונות הגבהים של מתגייסי צה"ל.

ג. מצאו אומדן חסר הטיה לפרופורציות המתגייסים בגובה של לפחות 180 ס"מ.

4) נדגמו 20 שכירים באקראי. עבור כל שכיר נמדד השכר באלפי שקלים.
להלן התוצאות שהתקבלו: $\sum_{i=1}^{20} X_i = 162$, $\sum_{i=1}^{20} X^2_i = 1502.2$.

א. אמדו את השכר הממוצע של השכירים במשק.

ב. אמדו את סטיית התקן של שכר השכירים במשק.

5) במטרה לאמוד את ממוצע האוכלוסייה, דגמו תצפיות בלתי תלויות מהאוכלוסייה וחישבו את הממוצע שלהם. מהי טעות התקן?

א. סטיית התקן של האוכלוסייה.

ב. סטיית התקן של ממוצע האוכלוסייה.

ג. סטיית התקן של המדגם.

ד. סטיית התקן של ממוצע המדגם.

6) משקל הממוצע של אוכלוסייה מסוימת הוא 75 ק"ג עם שונות של 25 .
אם יבחרו כל המדגמים האפשריים בגודל 10 מאוכלוסייה זו סטיית התקן של ממוצעי המדגמים תהייה:

א. 3.
ב. 2.5.
ג. 1.581.
ד. אין מספיק נתונים לדעת.

7) במדגם מקרי, מתי סכום ריבועי הסטיות מהממוצע, $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$, מחולק ב-$n-1$?

א. כאשר n קטן.
ב. כאשר תצפיות המדגם אינן בלתי תלויות.
ג. כאשר האוכלוסייה אינה מתפלגת נורמאלית.
ד. כאשר מעוניינים באומד חסר הטיה לשונות האוכלוסייה ממנה הוצא המדגם.
ה. כאשר מעוניינים לחשב את שונות התפלגות הדגימה של ממוצע המדגם.

8) $X_1, X_2, ..., X_{16}$ מדגם מקרי מתוך אוכלוסייה בעלת ממוצע μ לא ידוע ושונות: $\sigma^2=64$. טעות התקן של האומד ל-μ היא:

א. 16.
ב. 8.
ג. 4.
ד. 2.

9) מהו אומד חסר הטיה?

א. אומד שערכו שווה לממוצע התפלגות הדגימה שלו.
ב. אומד שערכו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.
ג. אומד שממוצע התפלגות הדגימה שלו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.
ד. אומד שהסיכוי שערכו יהיה גבוה מערך הפרמטר באוכלוסייה שווה לסיכוי שיהיה נמוך ממנו.

תשובות סופיות:

1) א. 0.25. ב. 0.019. ג. 0.24. ד. 0.01.
2) א. אוכלוסייה: מקררים של יצרן, תוחלת: 2400, סטיית תקן: 500.
ב. 100. ג. 2342. ד. 58.
3) א. 177.9. ב.64.1. ג.0.4.
4) א. 8.1. ב.3.16.
5) ד'.
6) ג'.
7) ד'.
8) ד'.
9) ג'.

שיטות מחקר במימון

פרק 4 - אמידה נקודתית

תוכן העניינים

אומד חסר הטייה:

רקע:

$\hat{\theta}$ יהיה אומד חסר הטיה ל-θ, אם התוחלת של $\hat{\theta}$ תהיה שווה ל-θ : $E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

המשתנה X הוא בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

X	1	2	3
הסתברות	2θ	$1-60\theta$	4θ

מעוניינים לאמוד את θ על סמך שתי תצפיות מההתפלגות: X_1 ו-X_2.

א. הראו שהאומד: $T_1=\frac{2X_1+X_2}{2}$, הוא אומד מוטה ל-θ.

הטיה של אומד היא: $E\left(\hat{\theta}\right)-\theta$. כמובן שלאומד חסר הטיה אין הטיה.

ב. מהי ההטיה של האומד T_1?

ג. תקנו את T_1, כך שיהיה אומד חסר הטיה.

אם יש שני אומדים חסרי הטיה עדיף זה עם השונות היותר קטנה.

ד. מוצא האומד הבא: $T_3=1.5X_1-X_2-1$.

האם הוא עדיף על האומד שהצעת בסעיף ג'?

אם $\hat{\theta}$ אומד חסר הטיה ל-θ, אז $g\left(\hat{\theta}\right)$ יהיה אומד חסר הטיה עבור $g\left(\theta\right)$,
רק אם g תהיה לינארית.

ה. מצאו אומד חסר הטיה ל: $P\left(X=3\right)$.

אומד חסר הטיה לשונות האוכלוסייה σ^2 : $S^2=\frac{\sum\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{n-1}=\frac{\sum x_i^2-n\bar{x}^2}{n-1}$.

ו. מצאו אומד חסר הטיה לשונות של X.

תזכורות חשובות:

אם: $Y=aX+b$, אזי: $E(Y)=aE(X)+b$, $V(Y)=a^2\cdot V(X)$, $\sigma_Y=|a|\sigma_x$.

אם: $X_1,X_2,.......,X_n$ משתנים מקריים, אזי:

$E(T)=E(X_1+X_2+......+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+......+E(X_n)$.

אם: $X_1,X_2,.......,X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות, אזי:

$V(T)=V(X_1+X_2+......+X_n)=V(X_1)+V(X_2)+......+V(X_n)$.

שאלות:

1) הציון במבחן מסוים של תלמידי כתה ח' הנו משתנה מקרי בעל תוחלת μ וסטיית תקן 10. כדי לאמוד את התוחלת μ, נלקח מדגם של 5 ציונים: $X_1,\ldots,X_5$.
שלושה חוקרים הציעו אומדים לתוחלת על סמך מדגם זה:

חוקר א' הציע: $T_1=\dfrac{X_1+\ldots+X_5}{5}$.

חוקר ב' הציע: $T_2=\dfrac{2X_1-X_3+X_4}{2}$.

חוקר ג' הציע: $T_3=\dfrac{2X_1+X_3}{2}$.

א. איזה מן האומדים הוא חסר הטיה?
ב. הציעו תיקון לאומד המוטה כך שיהיה חסר הטיה.
ג. במדגם התקבלו הציונים הבאים: 65, 78, 58, 82, 100.
חשבו את האומדנים המתקבלים עבור האומדים חסרי ההטיה.
ד. איזה מבין שני האומדים חסרי ההטיה עדיף? נמקו.

2) כדי לאמוד את המשקל הממוצע של הנשים בארה"ב, נבחר מדגם של $2n$ נשים.
נסמן את שונות הגובה ב- σ^2. הוצעו שני אומדים לממוצע המשקל על סמך מדגם זה: $T_1=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, $T_2=\dfrac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$.

א. בדקו לגבי כל אומד אם הוא בלתי מוטה.
ב. איזה אומד עדיף? נמקו.

3) $X\sim B(n,p)$. כלומר, X הינו משתנה מקרי המתפלג בינומית עם פרמטר P (סיכוי להצלחה בניסיון בודד) במדגם בגודל n.

א. פתחו אומד חסר הטיה ל- P.
ב. מהו אומד חסר הטיה לסיכוי לכישלון בניסיון בודד?
ג. מהו אומד חסר הטיה ל- $E(X)$?
ד. מצאו אומד חסר הטיה ל- $E\left(X^2\right)$.

4) בתיק מניות שתי מניות. מספר המניות שיעלו ביום מסוים הוא משתנה מקרי התלוי בפרמטר לא ידוע: θ, $0\le\theta\le 2$.
פונקציית ההסתברות של X - מספר המניות שיעלו ביום מסוים:
$$P(X=2)=\frac{\theta}{6}\ ,\ P(X=1)=\frac{\theta}{3}\ ,\ P(X=0)=1-\frac{\theta}{2}\ .$$
א. מְצאו אומד בלתי מוטה ל-θ, שמתבסס על מספר המניות שיעלו ביום מסוים.
ב. מצאו אומד בלתי מוטה ל-θ, שמתבסס על מספר המניות שעלו ביום, במשך שלושה ימים - X_1, X_2, X_3 (לכל אחד מהם אותה התפלגות כנ"ל והם בלתי תלויים).

5) בקרב המטפלות בת"א, מספר התינוקות שבטיפולן הוא משתנה מקרי בעל התפלגות התלויה בפרמטר θ באופן הבא:
הסיכוי שמטפלת תטפל בתינוק אחד בלבד הוא 3θ,
הסיכוי שמטפלת תטפל ב-2 תינוקות הוא $1-4\theta$,
הסיכוי שמטפלת תטפל ב-3 תינוקות הוא θ.
במדגם מיקרי של 4 מטפלות מת"א, נמצא כי שתים מהם מטפלות בתינוק אחד בלבד, אחת מהן בשנים ואחת השלושה תינוקות.
א. מצאו אומד חסר הטיה לפרמטר θ על סמך תצפית בודדת.
ב. מצאו אומד חסר הטיה לפרמטר θ על סמך 4 תצפיות.
ג. מהו האומדן לפרמטר θ על סמך תוצאות המדגם.
ד. מצאו אומד חסר הטיה לסיכוי שלמטפלת בת"א תטפל בתינוק בודד אחד.
ה. מצאו אומדים חסרי הטיה לתוחלת ולשונות של מספר התינוקות בטיפול אצל מטפלת מת"א. חשבו אומדנים.

6) קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות:
א. אם T הוא אומד בלתי מוטה עבור פרמטר θ, אז $5T$ אומד בלתי מוטה עבור הפרמטר 5θ.
ב. אם T הוא אומד בלתי מוטה עבור פרמטר θ, אז T^2 אומד בלתי מוטה עבור הפרמטר θ^2.

7) במפעל שתי מכונות המייצרות מוצרים. במכונה הראשונה ההסתברות שמכשיר תקין היא p , ובמכונה השנייה ההסתברות שמכשיר תקין היא $2p$.
דוגמים 20 מכשירים מהייצור של כל מכונה.
נסמן ב- X את מספר המכשירים התקינים שיוצרו על ידי המכונה הראשונה,
וב- Y את מספר המכשירים התקינים שיוצרו על ידי המכונה השנייה.
איזה מבין האומדים הבאים אינו אומד חסר הטיה ל- p ?

א. $\frac{X}{20}$.

ב. $\frac{Y}{20}$.

ג. $\frac{X+Y}{60}$.

ד. $\frac{2X+Y}{80}$.

8) יהיו T_1 ו- T_2 אומדים חסרי הטיה ובלתי תלויים לפרמטר θ.

א. מצאו אומד חסר הטיה ל- θ^2, המתבסס על T_1 ו- T_2.

ב. מצאו אומד חסר הטיה ל- $\theta(1-\theta)$, המתבסס על T_1 ו- T_2.

9) נתון ש- X הינו משתנה מקרי עם תוחלת μ ושונות σ^2.
נדגמו n תצפיות בלתי תלויים מאותה אוכלוסיה.

א. הראו ש- $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ אומד חסר הטייה ל- μ, כאשר: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

ב. נתבונן במכפלת שתי התצפיות הראשונות: $X_1 \cdot X_2$.
הראו שהוא אומד חסרי הטיה ל- μ^2.

תשובות סופיות:

1) א. T_1 ו- T_2. ב. $\frac{2}{3}T_3$. ג. $T_1=76.6$, $T_2=110$ ד. T_1.

2) א. ראו בווידאו. ב. T_2.

3) א. $\frac{x}{n}$. ב. $1-\frac{x}{n}$ ג. X. ד. θ.

4) א. $\frac{3x}{2}$. ב. $\frac{3\overline{x}}{2}$.

5) א. $1-\frac{x}{2}$. ב. $1-\frac{1}{2}\overline{x}$. ג. 0.125. ד. $3\left(1-\frac{1}{2}\overline{x}\right)$.
ה. לשונות 0.917.

6) א. נכון. ב. לא נכון.

7) ב'.

8) א. $T_1 \cdot T_2$. ב. $T_1 - T_1 \cdot T_2$.

9) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

שיטת המומנטים:

רקע:

מומנט מסדר ראשון של משתנה X מוגדר להיות: $E(X)$.

מומנט מסדר שני של משתנה X מוגדר להיות: $E\left(X^2\right)$.

באופן כלל, מומנט מסדר r מוגדר להיות: $E\left(X^r\right)$.

מומנט מסדר ראשון של n תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות מוגדר להיות: $\frac{\sum X_i}{n}$ - זהו מומנט מסדר ראשון של המדגם.

מומנט מסדר שני של n תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות מוגדר להיות: $\frac{\sum X_i^2}{n}$ - זהו המומנט מסדר שני של המדגם.

באופן כללי, מומנט מסדר r של n תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות מוגדר להיות: $\frac{\sum X_i^r}{n}$ - זהו מומנט ה-r של המדגם.

השיטה: משווים את המומנט המתאים של ההתפלגות לפי המומנט המתאים של המדגם.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נגיד שמספר הפעמים שאדם מתעטש ביום מתפלג פואסונית על ידי פרמטר λ (קצב ההתעטשויות ביום). רוצים לאמוד את λ בשיטת המומנטים.

שאלות:

1) X מתפלג אחיד רציף מהערך המינימלי a לערך המכסימלי 20. מצא אומד לערך מינימלי a לפי שיטת המומנטים על סמך n תצפיות מההתפלגות.

2) דוגמים n תצפיות בלתי תלויות מתוך התפלגות נורמאלית אשר תוחלתה היא μ והשונות שלה היא σ^2. מצא אומדים לפרמטרים אלה לפי שיטת המומנטים.

3) אדם מטיל מטבע רגיל n פעמים. יש לאמוד את מספר הפעמים שהוא מטיל את המטבע וזאת על סמך X – מספר העצים שהוא קיבל.

א. מצא אומד בשיטת המומנטים ל-n על סמך X בודד.

ב. מצא אומד בשיטת המומנטים ל-n על סמך חזרה של m פעמים על אותו תהליך בו מטילים את המטבע ההוגן n פעמים.

ג. מהו האומדן אם האדם חזר על התהליך שלוש פעמים: פעם אחת קיבל 5 עצים, בפעם השנייה הוא קיבל 4 עצים ובפעם השלישית הוא קיבל 7 עצים.

4) נתון ש- $X_i \sim \exp(\lambda)$. מצא אומד בשיטת המומנטים לפרמטר λ על סמך מדגם של n תצפיות.

5) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x)=\begin{cases}\theta \cdot X^{\theta-1} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & else\end{cases}$.

א. בטא את $E(X)$ כפונקציה של הפרמטר θ.

ב. מצא אומד ל-θ על פי שיטת המומנטים.

6) הזמן בדקות להכנת לחם במאפייה מתפלג באופן הבא: $X_i \sim N(10,\sigma^2)$. במדגם של הכנת ארבעה לחמים התקבלו התוצאות הבאות: 5, 10, 6, 4.

א. אמוד את σ^2 בשיטת המומנטים על סמך מדגם בגודל n.

ב. מצא את האומדן ל- σ^2. מה הבעייתיות בתשובה?

תשובות סופיות:

1) $\hat{a} = 2\overline{X} - 20$.

2) $\hat{\mu} = \overline{X}$, $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum X_i^2}{n} - \overline{X}^2$.

3) א. $\hat{n} = 2X$. ב. $\hat{n} = 2\overline{X}_m$. ג. $\hat{n} = 10\frac{2}{3}$.

4) $\hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}}$.

5) א. $\frac{\theta}{\theta+1}$. ב. $\hat{\theta} = \frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$.

6) א. $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum X_i^2}{n} - 100$. ב. -55.75.

אומד עקיב:

רקע:

יהי $\hat{\theta}_n$ אומד לפרמטר θ, המתבסס על n תצפיות.

אומד זה יקרא אומד עקיב, אם יתקיים ש: $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$.

אם $\hat{\theta}_n$ אומד חסר הטיה לפרמטר θ ומתקיים ש: $\lim_{n\to\infty} V(\hat{\theta}_n) = 0$,

אזי $\hat{\theta}_n$ אומד עקיב ל- θ.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

הסבר מדוע $\overline{X}$ אומד עקיב ל- μ.

אם $\hat{\theta}_n$ אומד נראות מקסימלית לפרמטר θ, מתקיים ש: $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$.

כלומר, $\hat{\theta}_n$ אומד עקיב ל- θ.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

הסבר מדוע בהתפלגות גיאומטרית $\frac{1}{\overline{X}}$, אומד עקיב לפרמטר P.

שאלות:

1) נתון כי: $X_i \sim U(0,\theta)$, כאשר: $i=1,2...,n$.
$2\bar{X}$ מוצע להיות האומד ל- θ.
א. הראה שאומד זה הוא חסר הטיה.
ב. הסבר מדוע האומד הינו עקיב.

2) נתון ש- $X \sim B(n,p)$. כמו כן, נתון ש: $\hat{p}=\frac{X}{n}$ הינו אומד ל- p.
הוכח שאומד זה הינו אומד עקיב ל- p.

3) אורך חיי נורה מתפלג מעריכית עם קצב λ לשנה.
נגדיר את: $W_1,W_2,...,W_n$ כסדרת זמנים (בשנים) של n נורות בלתי תלויות.
א. מהו אומד הנראות המקסימלי עבור λ? האם האומד עקיב?
ב. מצא אומד עקיב לסיכוי שנורה כלשהי תישרף תוך פחות משנתיים.

4) נפח החלב בקרטון חלב מתפלג נורמלית עם תוחלת μ ושונות σ^2.
מצא אומד עקיב לפרמטר σ^2, המתבסס על n תצפיות בלתי תלויות.

תשובות סופיות:

1) א. שאלת הוכחה. ב. ראה סרטון.

2) שאלת הוכחה.

3) א. $\frac{1}{\bar{W}}$. ב. $1-e^{-\frac{2}{\bar{W}}}$.

4) $\frac{\sum_i (X_i-\bar{X})^2}{n}$.

אומד נראות מקסימלית:

רקע:

להלן נלמד את שיטת הנראות המקסימלית למציאת אומדים.

נניח ש- X משתנה מקרי בדיד עם פונקציית הסתברות $P(x,\theta)$,
כאשר θ הפרמטר הבלתי ידוע.

יהיו: $X_1, X_2, ..., X_n$ תוצאות מדגם מקרי בגודל n הנלקח מאוכלוסייה זו.

נבנה את פונקציית ההסתברות המשותפת (פונקציית הדגימה).

אם אנו יודעים את תוצאות המדגם, ולא את הפרמטר, קוראים לפונקציית הנראות שהיא פונקציה של הפרמטר.

נגדיר את פונקציית הנראות:

$$L(\theta)=P(x_1,\theta)\cdot P(x_2,\theta)\cdot\ldots\cdot P(x_n,\theta)=\prod_{i=1}^{n}P(x_i,\theta).$$

פונקציית הנראות היא ההסתברות לקבל את התצפית הראשונה (כפונקציה של θ), כפול ההסתברות לקבל את התצפית השנייה, וכולי. כלומר, המשמעות של פונקציית הנראות היא ההסתברות לקבל את המדגם שהתקבל, כפונקציה של הפרמטר המבוקש θ.

אם מדובר במשתנה רציף, נכפיל את פונקציות הצפיפות ולא את פונקציות ההסתברות:

$$L(\theta)=f(x_1,\theta)\cdot f(x_2,\theta)\cdot\ldots\cdot f(x_n,\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta).$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

הסיכוי של שחקן כדורסל לקלוע לסל הוא p (לא ידוע). השחקן זורק כדורים לסל עד שהוא קולע בפעם הראשונה. נניח כי הזריקות בלתי תלויות זו בזו.
הכדור נכנס לסל לראשונה בניסיון השלישי.
השחקן חוזר על התהליך שוב, והפעם הכדור נכנס לסל בניסיון החמישי.
מצאו את פונקציית הנראות של p.

אומד נראות מקסימלית עבור θ הוא האומד $\hat{\theta}$, שממקסם את פונקציית הנראות $L(\theta)$.
כלומר, אנו מחפשים את האומד שיגרום לכך שהמדגם המקרי שקיבלנו יהיה כמה שיותר סביר.

שלבים למציאת אומד נראות מקסימלית:

- לוקחים את פונקציית ההסתברות המשותפת של המדגם (או צפיפות משותפת אם המשתנה רציף).
- מציבים את תוצאות המדגם ומקבלים את פונקציית הנראות (פונקציה של הפרמטר הנחקר).
- מוצאים מקסימום לפונקציית הנראות (לעיתים כדאי להוסיף ln כדי להקל על המלאכה).

המשך דוגמה:

חשבו את אומדן הנראות המקסימלית עבור p.

משפט: אם $\hat{\theta}$ הוא אומד נראות מקסימלית עבור θ, אזי $g\left(\hat{\theta}\right)$ הוא אומד נראות מקסימלית עבור $g\left(\hat{\theta}\right)$, בהנחה והפונקציה היא חד-חד ערכית (אינווריאנטיות).

המשך דוגמה:

מצאו אומדן נראות מקסימלית לסיכוי של שחקן הכדורסל לקלוע לסל פעמיים ברצף.

שאלות:

1) הסיכוי של שחקן לנצח במשחק הוא p (לא ידוע).
השחקן משחק במשחק עד אשר הוא מנצח בפעם הראשונה.
נתון שהשחקן ניצח לראשונה רק במשחק השני.
א. חשבו את פונקציית הנראות של p, וציירו גרף שלה.
ב. מצאו אומדן נראות מקסימלית עבור p.
ג. מצאו אומדן נראות מקסימלית ל- p, אם ביום אחד הוא נאלץ לשחק 4 פעמים וביום אחר הוא נאלץ לשחק 5 פעמים, עד אשר ניצח.

2) מספר הלקוחות שנכנסים לחנות מסוימת, מתפלג פואסונית עם תוחלת של λ לקוחות ביום.
א. מצאו אומד נראות מקסימלית ל- λ, על סמך מספר הלקוחות שנכנסים ביום מסוים.
ב. מצאו אומד נראות מקסימלית ל- λ, על סמך מספר הלקוחות שנכנסים ב- n ימים מסוימים.

3) הזמן שלוקח לאדם לחכות בתור מתפלג מעריכית עם פרמטר λ.
דגמו 4 אנשים מקריים שחיכו בתור ומדדו את זמני ההמתנה שלהם.
התוצאות שהתקבלו בדקות הן: 3, 7,5 ו-3.
א. פתחו אומד נראות מקסימלית לפרמטר זה על סמך n תצפיות כלשהן.
ב. מהו האומדן לפרמטר?

4) משך זמן הכנת שיעורי הבית (בשעות) של בני נוער, ביום אחד, מתפלג אחיד: $U(0,q)$.
כדי לאמוד את θ, נשאלו ביום מסוים מספר בני נוער כמה שעות הם הכינו שיעורי-בית באותו יום.
א. אלעד הכין ביום מסוים שעורי בית במשך שעה שלמה. חשבו את פונקציית הנראות של θ המתבססת על תצפית זו, וציירו את הגרף שלה.
ב. מצאו אומדן נראות מקסימלית ל- θ על סמך התצפית.
ג. משכי הכנת שיעורי בית (שעות) של 3 בני נוער היו 1,3,1.5.
מצאו אומדן נראות מקסימלית ל- θ על סמך המדגם הזה.
ד. מצאו באופן כללי אומד נראות מקסימלית ל- θ, על סמך מדגם של n בני נוער – $X_1,\dots,X_n$.

5) הגובה של אוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם תוחלת ידועה של 170 ס"מ ושונות σ^2 לא ידועה.
א. מצאו אומד נראות מקסימלית עבור השונות על סמך מדגם $X_1,\ldots,X_n$ מתצפיות מהאוכלוסייה.
ב. נדגמו 5 אנשים בלתי תלויים בעלי הגבהים: 170, 182, 165, 174, 174.
מהו האומדן לשונות הגבהים באוכלוסייה?

6) פתחו אומד נראות מקסימלית לפרמטר p בהתפלגות הבינומית,
על סמך מדגם בגודל n, בו X הוא מספר ההצלחות במדגם.

7) X הוא משתנה מקרי בעל פונקציית הצפיפות: $f(x)=\begin{cases}2\theta xe^{-\theta x^2} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$.
א. מצאו אומד נראות מקסימלית ל- θ על סמך n תצפיות בלתי תלויות: $X_1,\ldots,X_n$.
ב. מצאו אומד נראות מקסימלית ל- θ^2.

8) בכד א' 10 כדורים שחורים ו-10 לבנים ובכד ב' 5 כדורים שחורים ו-15 לבנים.
דוגמים באקראי כדור, בלי לדעת מאיזה כד.
א. מצא אומד נראות מקסימלית לכד שממנו הוצא הכדור על סמך הצבע של הכדור.
ב. מהו האומדן אם הצבע הוא שחור?

9) הזמן שלוקח ליוסי לפתור תשבץ מתפלג מעריכית עם תוחלת לא ידועה.
נתנו ליוסי לפתור חמישה תשבצים ובממוצע לקח לו 32 דקות לפתור אותם.
א. מה אומדן הנראות המקסימלית לתוחלת זמן הפתרון של תשבץ על ידי יוסי (אין חובה לפתח).
ב. מה אומדן הנראות המקסימלית לסיכוי שייקח לו לפחות חצי שעה לפתור את התשבץ הבא?

10) מספר הלקוחות הממתינים בתור במוקד טלפוני הוא משתנה מקרי X,
בעל התפלגות התלויה בפרמטר θ, באופן הבא:

X	0	1	2
$P(X)$	$4\theta^2$	$4\theta-8\theta^2$	$1-4\theta+4\theta^2$

בחמישה זמנים שונים שנבחרו באקראי נמצאו: 0, 0, 0, 1, 0 לקוחות ממתינים בתור.

א. מצאו אומדן בשיטת הנראות המקסימלית עבור הפרמטר θ, על-סמך המדגם הנתון.

ב. מצאו אומדן בשיטת הנראות המקסימלית לסיכוי שלא יהיו לקוחות בתור.

11) אדם מחזיק בידו שני מטבעות: מטבע הוגן ומטבע שאינו הוגן – שהסיכוי לקבל בו תוצאה של עץ הוא 0.2. האדם מטיל את אחד המטבעות פעמיים ומודיע לך כמה פעמים הוא קיבל עץ. אתה צריך לנחש איזה מטבע הוא הטיל: את ההוגן או את זה שאינו הוגן.

א. מצא אומד בשיטת הנראות המקסימלית לסוג המטבע שהוטל.

ב. מהו האומדן אם האדם קיבל פעמיים עץ?

12) מעוניינים לאמוד את אחוז המובטלים באוכלוסייה.
דוגמים 50 אנשים אקראיים ומתקבל ש-4 מהם מובטלים.

א. מצא אומדן נראות מקסימלית לשיעור המובטלים באוכלוסייה.

ב. מצא אומדן לשיעור העובדים באוכלוסייה.

ג. מצא אומדן ליחס בין שיעור העובדים לשיעור המובטלים באוכלוסייה.

13) במשחק מחשב שלוש רמות משחק:
ברמה 1 הסיכוי של יוסי לסיים את המשחק הוא 0.9.
ברמה 2 הסיכוי של יוסי לסיים את המשחק הוא 0.7.
ברמה 3 הסיכוי של יוסי לסיים את המשחק הוא 0.4.
יוסי בחר ברמה מסוימת, אך אינו יודע באיזו רמה הוא בחר.
הוא משחק במשחק ברמה שבחר פעמיים.

א. הציעו א.נ.מ. לרמה של המשחק שיוסי שיחק, על סמך מספר הפעמים שסיים את המשחק.

ב. אם יוסי סיים את שני המשחקים, מה יהיה האומדן לרמה?

ג. מהו א.נ.מ. לסיכוי, שמתוך שני משחקים הוא יצליח בדיוק משחק אחד?

14) $X_1,X_2,...,X_n$ מתפלגים אחיד בקטע: $[-\theta,\theta]$.
מצא אומד נראות מקסימלית לפרמטר θ.

15) $X_1,X_2,...,X_n$ מתפלגים בדיד לפי פונקציית ההסתברות הבאה:

$$K=1,2 \qquad P(X=k)=\frac{\binom{2}{k}\cdot P^k\cdot(1-P)^{2-k}}{1-(1-P)^2}.$$

הוכח שא.נ.מ ל- P, הינו: $2-\frac{2}{\overline{X}}$.

16) במכשיר חשמלי יש 2 סוללות שפועלות באופן ב"ת זו בזו, והוא מפסיק לפעול ברגע שאחת הסוללות מפסיקה לעבוד. הסיכוי של סוללה לתפקד לפחות חודש הוא P. כאשר המכשיר מפסיק לפעול מחליפים את שתי הסוללות שלו.
בתחילת הניסוי נלקחו 80 מכשירים כאלה עם סוללות חדשות ולאחר חודש נמצא ש-30 מהם עדיין פועלים.

א. מצא אומדן נראות מקסימלית עבור P.

ב. רשמו את האומד שבו השתמשתם בחלק א' באופן כללי, עבור מדגם של n מכשירים שמתוכם נמצאו Y מכשירים שעדיין פועלים לאחר חודש אחד.

ג. בהנחה שאורך החיים (בחודשים) של סוללה בודדת הוא מעריכי,
עם פי צפיפות: $f(t)=\theta e^{-\theta t}$ עבור $t>0$.
מצא א.נ.מ. עבור θ, המבוסס על Y.
מהו האומדן המתאים מן המדגם הנתון?

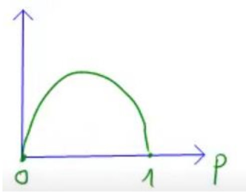
17) חיוג אוטומטי של מכשיר טלפון משדר אות אחת לשתי דקות. אם לאחר 20 דקות (10 אותות חיוג) המספר שאליו מטלפנים עדיין תפוס, החיוג האוטומטי נפסק.

א. רשמו את פונקציית ההסתברות של המשתנה X – מספר הפעמים שהחייגן האוטומטי מחייג למספר הטלפון המבוקש, אם ההסתברות לקבלת צליל "פנוי" בשידור אחד של אות חיוג הוא P.

ב. מתוך 12 ניסיונות חיוג אוטומטי למשרד הרישוי בזמנים שונים במשך 5 ימים, התקבלו התוצאות הבאות: בשני ניסיונות הופסק החיוג האוטומטי ובשאר הניסיונות שבהם הצליח המטלפן להשיג את המספר המבוקש, מספר החיוגים האוטומטיים עד לקבל צליל "פנוי" היו: 1, 6, 2, 7, 3, 8, 2, 2, 1, 5.
מצאו אומדן נראות מקסימלית עבור P, על סמך התוצאות שהתקבלו.

תשובות סופיות:

1) א. $L(p)=(1-p)\cdot p$. להלן גרף:



ב. 0.5. ג. $\frac{2}{9}$.

2) א. X. ב. $\overline{X}$.

3) א. $\frac{1}{\overline{X}}$. ב. $\frac{2}{9}$.

4) א. 1. ב. 1. ג. 3. ד. $\hat{\theta}=\max\{X_1,\dots,X_n\}$.

5) א. $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-170)^2}{n}$. ב. 40.2.

6) $\frac{x}{n}$.

7) א. $\frac{n}{\sum X_i^2}$. ב. $\left(\frac{n}{\sum X_i^2}\right)^2$.

8) א. ראה סרטון. ב. כד א'.

9) א. 32. ב. 0.3916.

10) א. 0.45. ב. 0.81.

11) א.ראה סרטון. ב. הוגן.

12) א. 0.08. ב.0.92. ג. 11.5.

13) א. $\hat{\theta}=\begin{cases}3 & X=0,1\\ 1 & X=2\end{cases}$. ב. 1. ג. $\hat{p}=\begin{cases}2\cdot 0.4\cdot 0.6 & X=0,1\\ 2\cdot 0.9\cdot 0.1 & X=2\end{cases}$.

14) $\max|X_i|$.

15) שאלת הוכחה.

16) א. 0.6124 ב. $\hat{p}=\sqrt{\frac{y}{n}}$ ג.0.49.

17) א. $P(x)=\begin{cases}(1-p)^{x-1}p & 1\le x\le 9\\ (1-p)^9 & x=10\end{cases}$. ב. 0.1818.

נספח:

התפלגויות רציפות

ההתפלגות	פונקציית הצפיפות	פונקציית ההתפלגות המצטברת	תוחלת	שונות	הערות	אנ"מ
$X\sim U(a,b)$	$f(x)=\frac{1}{b-a}$ $a\le x\le b$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$		$b=\max(X_i)$ $a=\min(X_i)$
$X\sim \exp(\lambda)$	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$	$1-e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	הזמן עד להתרחשות מאורע מסוים. λ - הוא ממוצע האירועים ביחידת זמן.	$\hat{\lambda}=\frac{1}{\bar{X}}$
$X\sim N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\Phi(t)$	μ	σ^2	$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$	$\hat{\mu}=\bar{X}$ $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

התפלגויות בדידות

ההתפלגות	פונקציית ההסתברות $P(X=k)$	תוחלת	שונות	הערות	אנ"מ
בינומית $B(n,p)$ $0\le p\le 1$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,\dots,n$	np	$np(1-p)$	(1)	$\hat{P}=\frac{Y}{n}$
גיאומטרית $G(p)$ $0< p\le 1$	$(1-p)^{k-1}p$ $k=1,2,\dots,\infty$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	(2)	$\hat{P}=\frac{1}{\bar{X}}$
אחידה $U(a,b)$	$\frac{1}{b-a+1}$ $K=a,\dots,b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$	(3)	$b=\max(X_i)$ $a=\min(X_i)$
פואסונית $P(\lambda)$ $\lambda>0$	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ $k=0,1,\dots,\infty$	λ	λ	(4)	$\hat{\lambda}=\bar{X}$

(1) מספר ההצלחות ב- n ניסויי ברנולי ב"ת. p - ההסתברות להצלחה.

(2) מספר הניסויים עד להצלחה הראשונה בסדרת ניסויי ברנולי ב"ת, p - ההסתברות להצלחה.

(3) בחירה אקראית של מספר בין a ו- b.

(4) מספר אירועים ביחידת זמן, λ - קצב האירועים.

שיטות מחקר במימון

פרק 5 - מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים

תוכן העניינים

הקדמה:

רקע:

תהליך של בדיקת השערות הוא תהליך מאד נפוץ בעולם הסטטיסטיקה.
בבדיקת השערות על פרמטרים נעבוד לפי השלבים הבאים:

שלב א: נזהה את הפרמטר הנחקר.

שלב ב: נרשום את השערות המחקר.
השערת האפס המסומנות ב- H_0.
בדרך כלל השערת האפס מסמלת את אשר היה מקובל עד עכשיו, את השגרה, הנורמה.
השערה אלטרנטיבית (השערת המחקר) המסומנת ב- H_1.
ההשערה האלטרנטיבית מסמלת את החדשנות בעצם ההשערה האלטרנטיבית מדברת על הסיבה שהמחקר נעשה היא שאלת המחקר.

שלב ג: נבדוק האם התנאים לביצוע התהליך מתקיימים ונניח הנחות במידת הצורך.

שלב ד: נרשום את כלל ההכרעה. בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שנקרא כלל הכרעה. הכלל יוצר אזורים שנקראים:

1. **אזור דחייה:**
   דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.
2. **אזור קבלה:**
   קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה. כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי. אזור הדחיה מוכתב על ידי סיכון שלוקח החוקר מראש שנקרא רמת מובהקות ומסומן ב- α.

שלב ה: בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולחשב את הסטטיסטי המתאים ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה.

שלב ו: להסיק מסקנה בהתאם לתוצאות המדגם.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום לידתם בישראל 3300 גרם.
משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון.
להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:
$S=280$, $\overline{X}=3120$, $n=20$.

א. מהי אוכלוסיית המחקר?

ב. מה המשתנה הנחקר?

ג. מה הפרמטר הנחקר?

ד. מהן השערות המחקר?

שאלות:

בשאלות הבאות, ענו על הסעיפים הבאים:

א. מהי אוכלוסיית המחקר?

ב. מה המשתנה הנחקר?

ג. מה הפרמטר הנחקר?

ד. מהן השערות המחקר?

1) ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות.
מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים.
משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים.
ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5.

2) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ״ק וסטיית תקן 20 סמ״ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ״ק במדגם בגודל 25.

3) במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה למשפטים היה 25%.
השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22.
מחקר מעוניין לבדוק האם השנה מקשים על הקבלה לפקולטה למשפטים.

4) בחודש ינואר השנה פורסם שאחוז האבטלה במשק הוא 8% במדגם עכשווי התקבל שמתוך 200 אנשים 6.5% מובטלים. רוצים לבדוק ברמת מובהקות של 5% האם כיום אחוז האבטלה הוא כמו בתחילת השנה.

תשובות סופיות:

1) א. נבחנים בבגרות באנגלית.
ב. ציון.
ג. ממוצע הציונים בשיטת לימוד חדשה.
ד. $\begin{array}{l} H_0: \mu = 72 \\ H_1: \mu > 72 \end{array}$.

2) א. משקאות בבקבוק של חברה מסוימת.
ב. נפח משקה בסמ"ק.
ג. ממוצע נפח המשקה בבקבוק.
ד. $\begin{array}{l} H_0: \mu = 500 \\ H_1: \mu < 500 \end{array}$.

3) א. מועמדים לפקולטה למשפטים.
ב. משתנה דיכוטומי (התקבל, לא התקבל).
ג. אחוז הקבלה.
ד. $\begin{array}{l} H_0: p = 0.25 \\ H_1: p < 0.25 \end{array}$.

4) א. אזרחים בוגרים במשק.
ב. משתנה דיכוטומי (מובטל, עובד).
ג. אחוז האבטלה כיום.
ד. $\begin{array}{l} H_0: p = 0.08 \\ H_1: p \neq 0.08 \end{array}$.

סוגי טעויות:

רקע:

בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שניקרא כלל הכרעה.
הכלל יוצר אזורים שנקראים:

1. אזור דחייה – דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.
2. אזור קבלה – קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה.

כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי .
בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה וכך להגיע למסקנה – המסקנה היא בעירבון מוגבל כיוון שהיא תלויה בכלל ההכרעה ובתוצאות המדגם. אם נשנה את כלל ההכרעה אז אנחנו יכולים לקבל מסקנה אחרת. אם נבצע מדגם חדש אז אנחנו עלולים לקבל תוצאה אחרת.
לכן יתכנו טעויות במסקנות שלנו:

		הכרעה	
		H_0	H_1
מציאות	H_0	אין טעות	טעות מסוג 1
	H_1	טעות מסוג 2	אין טעות

הגדרת הטעויות:

טעות מסוג ראשון: להכריע לדחות את H_0 למרות שבמציאות H_0 נכונה.

טעות מסוג שני: להכריע לקבל את H_0 למרות שבמציאות H_1 נכונה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

אדם חשוד בביצוע עבירה ונתבע בבית המשפט.
אילו סוגי טעויות אפשריות בהכרעת הדין?

שאלות:

1) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25. בסופו של דבר הוחלט להכריע לטובת חברת המשקאות.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מה מסקנת המחקר?

ג. איזו סוג טעות יתכן וביצעו במחקר?

2) במחקר על פרמטר מסוים הוחלט בסופו של דבר לדחות את השערת האפס.

א. האם ניתן לדעת אם בוצע טעות במחקר?

ב. מה סוג הטעות האפשרית?

3) לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. ישנה טענה שכיום ממוצע מספר הילדים במשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות. במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה. על סמך תוצאות המדגם נקבע שלא ניתן לקבוע שבאופן מובהק תוחלת מספר הילדים למשפחה קטנה כיום.

א. מהי אוכלוסיית המחקר?

ב. מה המשתנה הנחקר?

ג. מה הפרמטר הנחקר?

ד. מה השערות המחקר?

ה. מה מסקנת המחקר?

ו. מהי סוג הטעות האפשרית במחקר?

תשובות סופיות:

1) א. $\begin{matrix} H_0: \mu = 500 \\ H_1: \mu < 500 \end{matrix}$. ב. לא דחינו את H_0. ג. טעות מסוג שני.

2) א. לא ניתן לדעת. ב. טעות מסוג ראשון.

3) א. משפחות כיום. ב. מס' הילדים.

ג. תוחלת מספר הילדים למשפחה כיום. ד. $\begin{matrix} H_0: \mu = 2.3 \\ H_1: \mu < 2.3 \end{matrix}$.

ה. לא לדחות את H_0. ו. טעות מסוג שני.

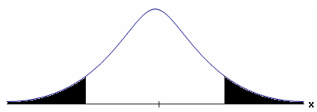
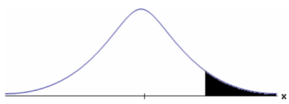
שיטות מחקר במימון

פרק 6 - בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)

תוכן העניינים

בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסייה ידועה:

רקע:

השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	$H_0: \mu \geq \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu \leq \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$
תנאים:	1. σ ידועה 2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0:	$Z_{\bar{x}} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\bar{x}} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ■-דוחים את H_0	$Z_{\bar{x}} < -Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ ■-דוחים את H_0	$Z_{\bar{x}} > Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ ■-דוחים את H_0

סטטיסטי המבחן: $Z_{\bar{x}} = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

נדחה H_0 אם מתקיים:	$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

דוגמה:

יבול העגבניות מתפלג נורמלית עם תוחלת של 10 טון לדונם וסטיית תקן של 2.5 טון לדונם בעונה. משערים ששיטת זיבול חדשה תעלה את תוחלת היבול לעונה מבלי לשנות את סטיית התקן. נדגמו 4 חלקות שזובלו בשיטה החדשה. היבול הממוצע שהתקבל היה 12.5 טון לדונם. בדקו את ההשערה ברמת מובהקות של 1%.

פיתרון:

<u>אוכלוסייה</u>: עגבניות.

<u>המשתנה</u>: X = יבול העגבניות בטון לעונה.

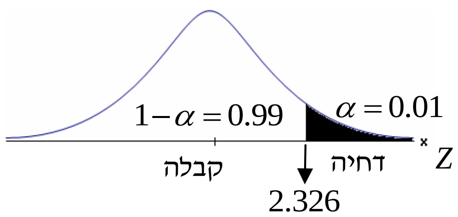
<u>הפרמטר</u>: μ = תוחלת היבול בשיטת הזיבול החדשה.

<u>השערות</u>: $\begin{array}{l} H_0: \mu = 10 \\ H_1: \mu > 10 \end{array}$.

<u>תנאים</u>:

1. $X \sim N$.
2. $\sigma = 2.5$.

<u>כלל הכרעה</u>:



נדחה את H_0 אם $Z_{\bar{x}} > 2.326$

<u>תוצאות</u>: $\bar{x} = 12.5$, $n = 4$

<u>סטטיסטי המבחן</u>: $Z_{\bar{x}} = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

<u>נציב</u>: $Z_{\bar{x}} = \dfrac{1.25 - 10}{\dfrac{2.5}{\sqrt{4}}} = 2 < 2.326$

<u>מסקנה</u>:

לא נדחה H_0 (נקבל H_0).

ברמת מובהקות של 1% לא נוכל לקבל את הטענה ששיטת הזיבול החדשה מעלה את תוחלת היבול של העגבניות.

שאלות:

1) ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות. מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים.
ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5.
בהנחה שגם בשיטתו סטיית התקן תהיה 15 מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

2) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25.
א. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 2.5%?
ב. האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה עבור רמת מובהקות הגבוהה מ-5%?

3) מהנדס האיכות מעוניין לבדוק אם מכונה מכוילת (מאופסת). המכונה כוונה לחתוך מוטות באורך 50 ס"מ. לפי נתוני היצרן סטיית התקן בחיתוך המוטות היא 0.5 ס"מ. במדגם של 50 מוטות התקבל ממוצע אורך המוט 50.93 ס"מ. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

4) המשקל הממוצע של הספורטאים בתחום ספורט מסוים הוא 90 ק"ג, עם סטיית תקן 8 ק"ג. לפי דעת מומחים בתחום יש צורך בהורדת המשקל ובשימוש בדיאטה מסוימת שצריכה להביא להורדת המשקל. לשם בדיקת יעילות הדיאטה נלקח מדגם מקרי של 50 ספורטאים ובתום שנה של שימוש בדיאטה התברר שהמשקל הממוצע במדגם זה היה 84 ק"ג.
יש לבדוק בר"מ של 10%, האם הדיאטה גורמת להורדת המשקל.

5) לפי מפרט נתון, על עובי בורג להיות 4 מ"מ עם סטיית תקן של 0.2 מ"מ.
במדגם של 25 ברגים העובי הממוצע היה 4.07 מ"מ.
קבעו ברמת מובהקות 0.05, האם עובי הברגים מתאים למפרט.
הניחו כי עובי של בורג מתפלג נורמלית וסטיית התקן של עובי בורג היא אכן 0.2 מ"מ.

6) במחקר נמצא שתוצאה היא מובהקת ברמת מובהקות של 5% מה תמיד נכון? בחרו בתשובה הנכונה.
א. הגדלת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.
ב. הגדלת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.
ג. הקטנת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.
ד. הקטנת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.

7) חוקר ערך מבחן דו צדדי ברמת מובהקות של α והחליט לדחות את השערת האפס.
אם החוקר היה עורך מבחן צדדי ברמת מובהקות של $\frac{\alpha}{2}$ אזי בהכרח:
א. השערת האפס הייתה נדחית.
ב. השערת האפס הייתה לא נדחית.
ג. לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו במקרה זה.

8) שני סטטיסטיקאים בדקו השערות: $H_0: \mu = \mu_0$ כנגד $H_1: \mu > \mu_0$,
עבור שונות ידועה ובאותה רמת מובהקות.
שני החוקרים קבלו אותו ממוצע במדגם אך לחוקר א' היה מדגם בגודל 100 ולחוקר ב' מדגם בגודל 200.
א. אם חוקר א' החליט לדחות את H_0, מה יחליט חוקר ב'? נמקו.
ב. אם חוקר א' יחליט לא לדחות את H_0, מה יחליט חוקר ב'? נמקו.

תשובות סופיות:

1) נקבל H_0, ברי"מ של 5% לא נקבל את הטענה של המורה ששיטת הלימוד שלו מעלה את ממוצע הציונים.
2) א. נדחה H_0, ברי"מ של 2.5% נקבל את תלונת אגודת הצרכנים בדבר הפחתת נפח המשקה בבקבוק.
ב. הגדלנו את רמת המובהקות לכן אנחנו נשארים בדחייה של H_0 והמסקנה לא תשתנה.
3) נדחה H_0, ברי"מ של 5% נקבע שהמכונה לא מאופסת.
4) נדחה H_0, ברי"מ של 0.1 נקבל את הטענה שהדיאטה יעילה ומפחיתה את המשקל הממוצע.
5) נקבל H_0, ברי"מ של 0.05 נכריע שתוחלת עובי הבורג מתים למפרט.
6) א'.
7) ג'.
8) א. לדחות. ב. לא ניתן לדעת.

מובהקות תוצאה – אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסייה ידועה):

רקע:

דרך נוספת להגיע להכרעות שלא דרך כלל הכרעה, היא דרך חישוב מובהקות התוצאה:
באמצעות תוצאות המדגם מחשבים את מובהקות התוצאה שמסומן ב- p_v.
את רמת המובהקות החוקר קובע מראש לעומת זאת, את מובהקות התוצאה החוקר יוכל לחשב רק אחרי שיהיו לו את התוצאות.
המסקנה של המחקר תקבע לפי העיקרון הבא: אם $p_v \le \alpha$, דוחים את H_0.
מובהקות התוצאה זה הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = P_{H_0}$.
אם ההשערה היא דו צדדית:
(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = 2P_{H_0}$.

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

השערת האפס: **השערה אלטרנטיבה:**	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \ne \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$
תנאים:	1. σ ידועה 2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול		
p-value	אם $\bar{x} > \mu_0 \Leftarrow 2 \cdot P_{H_0}\left(\bar{X} \ge \bar{x}\right)$ אם $\bar{x} < \mu_0 \Leftarrow 2 \cdot P_{H_0}\left(\bar{X} \le \bar{x}\right)$	$P_{H_0}(\bar{X} \le \bar{x})$	$P_{H_0}(\bar{X} \ge \bar{x})$

כאשר בהנחת השערת האפס: $\bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, $Z_{\bar{x}} = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

דוגמה:

המשקל הממוצע של מתגייסים לצבא לפני 20 שנה היה 65 ק"ג. מחקר מעוניין לבדוק האם כיום המשקל הממוצע של מתגייסים גבוה יותר. נניח שמשקל המתגייסים מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 12 ק"ג. במדגם של 16 מתגייסים התקבל משקל ממוצע של 71 ק"ג.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה המסקנה אם רמת המובהקות היא 5% ואם רמת המובהקות היא 1%?

פתרון:

א. <u>אוכלוסייה</u>: המתגייסים לצבא כיום.

<u>משתנה</u>: X = משקל בק"ג.

<u>פרמטר</u>: μ.

<u>השערות</u>: $\begin{matrix} H_0: \mu = 65 \\ H_1: \mu > 65 \end{matrix}$.

<u>תנאים</u>:

1. $X \sim N$.
2. $\sigma = 12$.

<u>תוצאות מדגם</u>:

$n = 16$

$\bar{X} = 71$

$$P_V = P_{H_0}\left(\text{לתוצאות המדגם וקיצוני}\right) = P_{H_0}\left(\bar{X} \ge 71\right) = 1 - \phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{71 - 65}{\frac{12}{\sqrt{16}}} = 2$$

$\alpha_{\min} = 0.0228$

שאלות:

1) להלן השערות של מחקר: $H_0: \mu = 70 \ , \ H_1: \mu > 70$.
המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית עם סטיית תקן 20.
במדגם מאותה אוכלוסייה התקבלו התוצאות הבאות: $n = 100 \ , \ \bar{x} = 74$.
מהי מובהקות התוצאה?

2) השכר הממוצע במשק בשנת 2012 היה 8800 ₪ עם סטיית תקן 2000. במדגם שנעשה אתמול על 100 עובדים התקבל שכר ממוצע 9500 ₪. מטרת המחקר היא לבדוק האם כיום חלה עליה בשכר. עבור אילו רמות מובהקות שיבחר החוקר יוחלט שחלה עליה בשכר הממוצע במשק?

3) אדם חושד שחברת ממתקים לא עומדת בהתחייבויותיה, ומשקלו של חטיף מסוים אותו הוא קונה מדי בוקר נמוך מ-100 גרם.
חברת הממתקים טוענת מצידה שהיא אכן עומדת בהתחייבויותיה. ידוע כי סטיית התקן של משקל החטיף היא 12 גרם. האדם מתכוון לשקול 100 חפיסות חטיפים ולאחר מכן להגיע להחלטה.
לאחר הבדיקה הוא קיבל משקל הממוצע של 98.5 גרם.
א. רשמו את השערות המחקר.
ב. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה דוחים את השערת האפס?
ג. מהי רמת המובהקות המקסימלית עבורה נקבל את השערת האפס?
ד. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5?

4) מכונה לחיתוך מוטות במפעל חותכת מוטות באורך שמתפלג נורמאלית עם תוחלת אליה כוונה המכונה וסטיית תקן 2 ס״מ. ביום מסוים כוונה המכונה לחתוך מוטות באורך 80 ס״מ. אחראי האיכות מעוניין לבדוק האם המכונה מכוילת. לצורך כך נדגמו מקו הייצור 16 מוטות שנחתכו אורכן הממוצע היה 81.7 ס״מ.
א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה נכריע שהמכונה לא מכוילת?
ב. אם נוסיף עוד תצפית שערכה יהיה 82 ס״מ, כיצד הדבר ישפיע על התשובה של הסעיף הקודם?
ג. הכרע ברמת מובהקות של 5% האם המכונה מכוילת.

5) אם מקבלים בחישובים אלפא מינימלית (P value) קטנה מאד, סביר להניח כי החוקר ידחה את השערת האפס בקלות. נכון/לא נכון? נמק.

6) בבדיקת השערות התקבל שה- $p-value=0.02$.
מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 1%?
בחרו בתשובה הנכונה.
א. יקבל את השערת האפס בכל מקרה.
ב. ידחה את השערת האפס מקרה.
ג. ידחה את השערת האפס רק אם המבחן הנו דו צדדי.
ד. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.

7) מובהקות התוצאה (PV) היא גם (בחרו בתשובה הנכונה):
א. רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.
ב. רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.
ג. רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר שטרם קיבל את תוצאות המחקר.
ד. רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.

8) בבדיקת השערות מסוימת התקבל: $p\ value=0.0254$ לכן (בחרו בתשובה הנכונה):
א. ברמת מובהקות של 0.01 אך לא של 0.05 נדחה את H_0.
ב. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 לא נדחה את H_0.
ג. ברמת מובהקות של 0.05 אך לא של 0.01 נדחה את H_0.
ד. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 נדחה את H_0.

תשובות סופיות:

1) 0.0228.

2) עבור כל רמת מובהקות סבירה.

3) א. $\begin{matrix} H_0: \mu = 100 \\ H_1: \mu < 100 \end{matrix}$.   ב. 0.1056.   ג. 0.1056.

ד. נכריע שיש עמידה בהתחייבות של החברה.

4) א. 0.0006.   ב. יקטן.   ג. נכריע שאין כיול.

5) נכון.

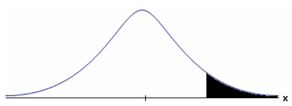
6) א'.

7) א'.

8) ג'.

בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסייה לא ידועה:

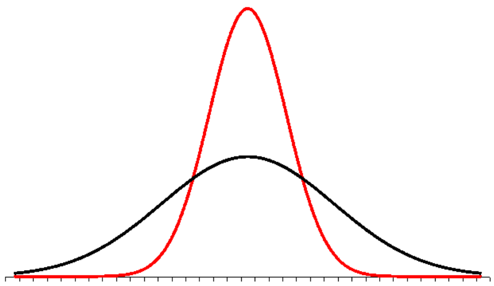
רקע:

השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$
תנאים:	1. σ אינה ידועה 2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0:	$t_{\bar{x}} > t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $t_{\bar{x}} < -t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ ■ - דוחים את H_0	$t_{\bar{x}} < -t^{(n-1)}_{1-\alpha}$  $-t_{1-\alpha,n-1}$ ■ - דוחים את H_0	$t_{\bar{x}} > t^{(n-1)}_{1-\alpha}$  $t_{1-\alpha,n-1}$ ■ - דוחים את H_0
חלופה לכלל הכרעה: נדחה H_0 אם מתקיים:	$\bar{X} > \mu_0 + t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} < \mu_0 - t^{n-1}_{1-\alpha} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + t^{n-1}_{1-\alpha} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$

סטטיסטי המבחן: $t_{\bar{x}} = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}.$$

התפלגות T:



הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים. התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש.

דרגות החופש הן : $df = n-1$.

ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה.

כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מפעל קיבל הזמנה לייצור משטחים בעובי של 0.1 ס״מ.
כדי לבדוק האם המפעל עומד בדרישה נדגמו 10 משטחים ונמצא שהעובי הממוצע הוא 0.104 עם אומדן לסטיית תקן 0.002 ס״מ.

א. מהן השערות המחקר?

ב. מה ההנחה הדרושה לצורך פתרון?

ג. בדוק ברמת מובהקות של 5%.

שאלות:

1) משך זמן ההחלמה בלקיחת אנטיביוטיקה מסוימת הוא 120 שעות בממוצע עם סטיית תקן לא ידועה. מעוניינים לבדוק האם אנטיביוטיקה אחרת מקטינה את משך זמן ההחלמה. במדגם של 5 חולים שלקחו את האנטיביוטיקה האחרת התקבלו זמני ההחלמה הבאים: 125, 80, 100, 95, 90 שעות. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%.
מהי ההנחה הדרושה לצורך הפתרון?

2) משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום היוולדם בישראל 3300 גר'. משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע.
במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון.
להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$$n = 20$$

$$\bar{x} = 3120$$

$$S = 280$$

מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5% מה יש להניח לצורך פתרון?

3) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמלית. בארה"ב ממוצע הציונים הוא 100. במדגם שנעשה על 23 נבחנים ישראלים, התקבל ממוצע ציונים 104.5 וסטיית התקן המדגמית 16. האם בישראל ממוצע הציונים שונה מארה"ב? הסיקו ברמת מובהקות של 5%.

4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750$$

$$\sum_{i=1}^{10} \left(X_i - \bar{X} \right)^2 = 900$$

נתון שההתפלגות היא נורמלית.
בדוק ברמת מובהקות של 5% האם התוחלת של ההתפלגות שונה מ-80 .

5) ליאור ורוני העלו את אותן השערות על ממוצע האוכלוסייה.
כמו כן הם התבססו על אותן תוצאות של מדגם.
ליאור השתמש בטבלה של התפלגות Z.
רוני השתמשה בטבלה של התפלגות t.
מה נוכל לומר בנוגע להחלטת המחקר שלהם? בחר בתשובה הנכונה.

א. אם ליאור ידחה את השערת האפס אז גם בהכרח רוני.
ב. אם רוני תדחה את השערת האפס אז גם בהכרח ליאור.
ג. שני החוקרים בהכרח יגיעו לאותה מסקנה.
ד. לא ניתן לדעת על היחס בין דחיית השערת האפס של שני החוקרים.

6) נתון ש: $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ כמו כן נתונות ההשערות הבאות: $\begin{matrix} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{matrix}$.
חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות.
σ^2 לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5% לאחר מכן כדי לחזק את קביעתו הוא דגם עוד 5 תצפיות ושקלל את תוצאות אלה גם למדגם כך שכלל עכשיו 15 תצפיות.
בחר בתשובה הנכונה:

א. כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.
ב. כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.
ג. כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

תשובות סופיות:

1) נדחה H_0.
2) נדחה H_0.
3) נקבל H_0.
4) נקבל H_0.
5) ב'.
6) ג'.

מובהקות תוצאה – אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסייה לא ידועה):

רקע:

נזכיר שהמסקנה של המחקר תיקבע לפי העיקרון הבא: אם $p_v \le \alpha$ דוחים את H_0.
מובהקות התוצאה היא הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.
(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = P_{H_0}$.
אם ההשערה היא דו צדדית:
(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = 2P_{H_0}$.

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$
תנאים:	1. σ אינה ידועה או 2. מדגם מספיק גדול $X \sim N$		
p-value	אם $\bar{x} > \mu_0 \Leftarrow 2\cdot P_{H_0}\left(\bar{X} \ge \bar{x}\right)$ אם $\bar{x} < \mu_0 \Leftarrow 2\cdot P_{H_0}\left(\bar{X} \le \bar{x}\right)$	$P_{H_0}\left(\bar{X} \le \bar{x}\right)$	$P_{H_0}\left(\bar{X} \ge \bar{x}\right)$

$$t_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$

$$d.f = n-1$$

דוגמה:

ממוצע זמן הנסיעה של אדם לעבודה הינו 40 דקות. הוא מעוניין לבדוק דרך חלופית שאמורה להיות יותר מהירה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שבהם הוא נוסע בדרך החלופית. זמני הנסיעה שקיבל בדקות הם: 27, 32, 30, 40, 34.
הניחו שזמן הנסיעה מתפלג נורמלית.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מצאו חסמים למובהקות התוצאה.

ג. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

פתרון:

אוכלוסייה: כלל הנסיעות לעבודה בדרך החלופית.

משתנה: X = זמן נסיעה בדקות.

תנאים: $X \sim N$.

פרמטר: μ.

א. השערות: $\begin{matrix} H_0: \mu = 40 \\ H_1: \mu < 40 \end{matrix}$.

ב. תוצאות המדגם:

$$n = 5 \ , \ \bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{34+40+...}{5} = 32.6$$

$$S^2 = \frac{\sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} = \frac{34^2+40^2-...-5\cdot 32.6^2}{5-1} = 23.4$$

$$S = \sqrt{23.4}$$

$$t_{\bar{X}} = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{32.6-40}{\frac{4.88}{\sqrt{5}}} = -3.39$$

$$P_V = P_{H_0} = \left(\bar{X} \le 32.6\right) = P\left(t \le -3.39\right)$$

$$d.f = 5-1 = 4$$

$$1\% < P_V < 2.5\%$$

$P_V < \alpha = 0.05$, לכן דוחים את H_0.

מסקנה: בר"מ של 5% נכריע שהדרך החלופית מהירה יותר.

שאלות:

1) קו ייצור אריזות סוכר נארזות כך שהמשקל הממוצע של אריזות הסוכר צריך להיות אחד קילוגרם. בכל יום דוגמים מקו הייצור 5 אריזות במטרה לבדוק האם קו הייצור תקין. בבדיקה דגמו 5 אריזות סוכר ולהלן משקלן בגרמים: 997, 996, 1005, 1008, 1024.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מהי מובהקות התוצאה? הצג חסמים.

ג. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

2) חוקר בדק את הטענה כי פועלים העובדים במשמרת לילה איטיים יותר מפועלים העובדים ביום. ידוע כי משך הזמן הממוצע הדרוש לייצר מוצר מסוים ביום הוא 6 שעות. במדגם מיקרי של 25 פועלים שעבדו במשמרת לילה נמצא כי הזמן הממוצע לייצר אותו מוצר הוא 7 שעות עם סטית תקן של 3 שעות.

מהי ה- α המינימלית שלפיה ניתן להחליט שאכן העובדים במשמרת לילה איטיים יותר?

3) הגובה של מתגייסים לצה״ל מתפלג נורמלית. במדגם של 25 מתגייסים מדדו את הגבהים שלהם בס״מ והתקבלו התוצאות הבאות:

$\bar{x}=176.2$, $\sum(x_i-\bar{x})^2=2832$.

מטרת המחקר היא לבדוק האם תוחלת הגבהים של המתגייסים גבוה מ-174 ס״מ באופן מובהק.

מהי בקרוב מובהקות התוצאה ועל פיה מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 6%?

תשובות סופיות:

1) א. $\begin{matrix} H_0: \mu=1000 \\ H_1: \mu\neq 1000 \end{matrix}$. ב. $20\% \le P_v \le 50\%$.

ג. ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקו הייצור אינו תקין.

2) 10%.

3) 1.01, נקבל את H_0 .

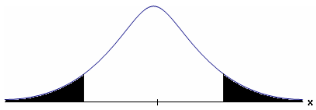
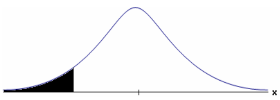
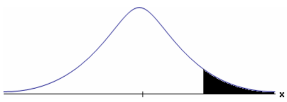
שיטות מחקר במימון

פרק 7 - בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

תוכן העניינים

בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

כשהשונויות של האוכלוסייה ידועות – רקע

השערת האפס: **השערה אלטרנטיבית:**	$H_0 \quad \mu_1-\mu_2=c$ $H_1 \quad \mu_1-\mu_2\neq c$	$H_0 \quad \mu_1-\mu_2=c$ $H_1 \quad \mu_1-\mu_2<c$	$H_0 \quad \mu_1-\mu_2=c$ $H_1 \quad \mu_1-\mu_2>c$
תנאים:	מדגמים בלתי תלויים σ_1,σ_2 ידועות $X_1,X_2\sim N$ או מדגמים מספיק גדולים		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0: $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $\quad Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$Z_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}<-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}>Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $\quad Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ■-דוחים את H_0	$Z_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}<-Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ ■-דוחים את H_0	$Z_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}>Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ ■-דוחים את H_0

סטטיסטי המבחן:

$$Z_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2-c}{\sqrt{\frac{\sigma_1^{\,2}}{n_1}+\frac{\sigma_2^{\,2}}{n_2}}}$$

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

נדחה H_0 אם מתקיים:	
$\bar{x}_1-\bar{x}_2>c+Z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ **או** $\bar{x}_1-\bar{x}_2<c-Z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$	$\bar{x}_1-\bar{x}_2>c+Z_{1-\alpha}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
$\bar{x}_1-\bar{x}_2<c-Z_{1-\alpha}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$	

התפלגות הפרש הממוצעים: $\bar{x}_1-\bar{x}_2\sim N(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2})$

התקנון: $Z_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\dfrac{\bar{x}_1-\bar{x}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1{}^2}{n_1}+\frac{\sigma_2{}^2}{n_2}}}$

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

בשנת 2004 הפער בין השכר הממוצע של הגברים לנשים היה 3000₪ לטובת הגברים. מעוניינים לבדוק האם כיום הצטמצם הפער בין הגברים לנשים מבחינת השכר הממוצע. נדגמו 100 עובדים גברים. שכרם הממוצע היה 9,072₪. נדגמו 80 עובדות, שכרן הממוצע היה 7809₪. לצורך פתרון נניח שסטיות התקן של השכר ידועות ושוות ל-2000₪ באוכלוסיית הנשים ו-3000₪ באוכלוסיית הגברים.
מה המסקנה ברמת מבוהקות של 5%?

שאלות

1) מחקר טוען שאנשים החיים במרכז הארץ צופים בממוצע בטלוויזיה יותר מאנשים שלא חיים במרכז. נדגמו 100 אנשים מהמרכז ו-107 אנשים לא מהמרכז. אנשים אלה נשאלו כמה שעות ביום הם נוהגים לצפות בטלוויזיה.
במדגם של מרכז הארץ התקבל ממוצע 2.7 שעות.
במדגם של מחוץ למרכז הארץ התקבל ממוצע 1.8 שעות.
לצורך פתרון הניחו שבכל אזור, סטיית התקן היא שעה 1 ביום.
בדקו את טענת המחקר ברמת מובהקות של 1%.

2) ציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית עם סטיית תקן 100. מכון ללימוד פסיכומטרי טוען שהוא יכול לשפר את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות.
במדגם של 20 נבחנים שניגשו למבחן ללא הכנה במכון התקבל ממוצע 508.
במדגם של 25 נבחנים שעברו הכנה במכון התקבל ממוצע ציונים 561. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%.

3) במדגם אקראי של 20 ימים נבדקה התפוקה של מפעל ביום. התפוקה הממוצעת הייתה של 340 מוצרים ליום. במדגם אקראי של 20 ימים אחרים נבדקה התפוקה של המפעל בלילה והתפוקה הממוצעת הייתה 295. לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של התפוקה ביום היא 40 מוצרים ובלילה 30 מוצרים.
א. מהי מובהקות התוצאה לבדיקה האם התפוקה הממוצעת היומית גבוהה מהתפוקה הממוצעת הלילית.
ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 8%?

4) במחקר מקיף שנעשה באירופה נקבע שגברים גבוהים מנשים ב-8 ס״מ בממוצע. מחקר ישראלי מתעניין לבדוק האם בישראל הפער גדול יותר. לצורך המחקר נדגמו 40 גברים ו 40 נשים באקראי. כמו כן, נניח שסטיות התקן של הגברים והנשים ידועות ושוות ל-6 ס״מ אצל הנשים ו-12 ס״מ אצל הגברים.
א. מהן השערות המחקר ומהו כלל ההכרעה ברמת מובהקות של 10%?
ב. אם בישראל הפער בין גברים לנשים מבחינת הגובה הממוצע הוא 11 ס״מ, מה ההסתברות שהמחקר לא יגלה זאת? איך קוראים להסתברות הזאת?

תשובות סופיות

1) נדחה H_0.

2) לא נדחה את H_0.

3) א. 0 ב. נדחה את H_0.

4) א. נדחה את H_0, אם במדגם הגברים יהיו גבוהים בממוצע מהנשים ביותרמ-10.72 ס״מ.

ב. 0.6331

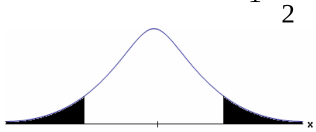
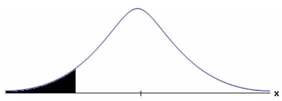
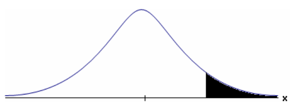
שיטות מחקר במימון

פרק 8 - בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגמים מזווגים

תוכן העניינים

בדיקת השערות על תוחלת ההפרשים במדגמים מזווגים (תלויים)

בדיקת השערות למדגמים מזווגים – רקע

השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:	$H_0:\ \mu_D = C$ $H_1:\ \mu_D \neq C$	$H_0:\ \mu_D = C$ $H_1:\ \mu_D < C$	$H_0:\ \mu_D = C$ $H_1:\ \mu_D > C$
תנאים:	1. σ_D אינה ידועה 2. $D \sim N$ או מדגם מספיק גדול		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0:	$t_{\bar{D}} > t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $t_{\bar{D}} < -t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ ■ - דוחים את H_0	$t_{\bar{D}} < -t^{(n-1)}_{1-\alpha}$  $-t_{1-\alpha,n-1}$ ■ - דוחים את H_0	$t_{\bar{D}} > t^{(n-1)}_{1-\alpha}$  $t_{1-\alpha,n-1}$ ■ - דוחים את H_0
חלופה לכלל הכרעה: נדחה H_0 אם מתקיים:	$\bar{D} > C + t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$ או $\bar{D} < C - t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$	$\bar{D} < C - t^{n-1}_{1-\alpha} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$	$\bar{D} > C + t^{n-1}_{1-\alpha} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$

סטטיסטי המבחן: $$t_{\bar{D}} = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}} \ , \quad S_D^{\ 2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(D_i - \bar{D}\right)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} D^2{}_i - n\bar{D}^2}{n-1}$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

חברה שיווקית מעוניינת לבדוק את טענת רשת השיווק "מגה בעיר" הטוענת שמחיריה נמוכים מהמחירים מרשת השיווק "שופרסל".
לצורך הבדיקה נבחרו באקראי 4 מוצרים שונים. המחירים נבדקו בשתי הרשתות.
להלן המחירים:

המוצר / רשת	מגה בעיר	שופרסל
שמפו	17	18
ג'יל כביסה	48	57
עוגת גבינה	35	35
לחם	12	10
קפה נמס	49	47
בקבוק יין	113	142
גבינה בולגרית	20	26

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמאלית, בדקו ברמת מובהקות של 5% את טענת רשת "מגה בעיר".

שאלות

1) במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין חברת X לחברת Y מבחינת המחירים לשיחות בינ"ל. נדגמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. להלן התוצאות:

חברה/ מדינה	ארה"ב	קנדה	הולנד	פולין	מצרים	סין	יפן
X	1.5	2.1	2.2	3	3.5	3.2	4.2
Y	1.4	2	1.9	3.1	3.2	3.2	4.2

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית בכל חברה, בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין החברות מבחינת המחירים בממוצע?

2) מכון המכין לפסיכומטרי טוען שהוא מעלה את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות. 8 נבחנים נבדקו לפני ואחרי שהם למדו במכון. להלן התוצאות שהתקבלו:

לפני	506	470	420	640	670	390	500	590
אחרי	570	540	430	610	680	510	520	580

מה מסקנתכם ברמת מובהקות 5%? הניחו שציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית.

3) נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'. להלן הציונים שלהם בסמסטר א' ו- ב':

סטטיסטיקה א'	74	68	90	75	82
סטטיסטיקה ב'	80	84	87	76	100

פורסם שתלמידים שמסיימים את סמסטר ב משפרים בממוצע את הציונים ב-5 נקודות לעומת סמסטר א'. הניחו שהציונים מתפלגים נורמלית.

א. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שהשיפור הוא יותר מ 5 נקודות?

ב. על סמך הסעיף הקודם, מהי רמת המובהקות המינימלית להכרעה שהשיפור הוא יותר מ- 5 נקודות?

ג. לאור זאת, מה המסקנה ברמת מובהקות של 10%?

4) לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה. לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים נורמאלית ללא ידיעת השונות האמתית. המבחן שיש לבצע כאן הוא:

א. מבחן Z למדגם יחיד.

ב. מבחן T למדגם יחיד.

ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.

ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

5) בתחנת טיפת חלב מסוימת יש שני מכשירי שקילה. על מנת להשוות בין שני המשקלים נדגמו 4 תינוקות. כל תינוק בן חודשיים נשקל בכל אחד מהמשקלים. להלן תוצאות השקילה (בק"ג):

משקל במכשיר 1	4.5	9.6	0.7	2.5
משקל במכשיר 2	3.5	6.9	1.7	0.5

נניח שהמשקלים מתפלגים נורמלית, המבחן שיש לבצע כאן הוא:
א. מבחן Z למדגם יחיד.
ב. מבחן T למדגם יחיד.
ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

6) כדי להשוות בין שני אצנים נדגמו 5 תוצאות מריצת 100 מטר של כל אצן. זמני הריצה נרשמו ויש להניח שמתפלגים נורמלית. המטרה להשוות בין האצנים. המבחן שיש לבצע כאן הוא:
א. מבחן Z למדגם יחיד.
ב. מבחן T למדגם יחיד.
ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

תשובות סופיות

1) לא נדחה H_0.
2) לא נדחה H_0.
3) א. $0.25 \le pv \le 0.5$ ב. 0.5 ג. לא נדחה H_0.
4) ד'.
5) ד'.
6) ג'.

שיטות מחקר במימון

פרק 9 - מבחנים אפרמטרים למדגמים מזווגים

תוכן העניינים

מבחנים אפרמטרים למדגמים מזווגים

מבחן הסימן – רקע

מבחן הסימן הוא מבחן שמשתמשים בו כאשר לפנינו מדגם מזווג ולא ניתן להניח שהמשתנה הנחקר מתפלג נורמלית.

גם אם המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית ניתן לבצע את מבחן הסימן אבל מבחן T למדגמים מזווגים יהיה מבחן עם עוצמה גבוהה יותר ולכן יש לבצע אותו.
מבחן הסימן נחשב למבחן אפרמטרי – מבחנים אפרמטרים הינם כל המבחנים שאינם דורשים שהמשתנה הנחקר יתפלג נורמלית.
מבחן הסימן נקרא כך כיוון שהוא דורש הגדרת סימן לכל תצפית:

$(+)$ – אם מצב X גבוה ממצב Y.

$(-)$ – אם מצב Y גבוה ממצב X.

(0) – אין הבדל בין המצבים.
במבחן הסימן נתעלם מהפרשים שהם 0, ולכן נסמן את מספר ההפרשים האפקטיביים (השונים מאפס) ב- n^*.
תחת השערת האפס נאמר שהסיכוי לקבל הפרש חיובי $(p+)$ שווה לסיכוי לקבל הפרש שלילי $(p-)$.

השערות המבחן:

$$H_0: P_+ = 0.5 \quad H_1: P_+ \neq,<,> 0.5$$

או

$$H_0: P_- = 0.5 \quad H_1: P_- \neq,<,> 0.5$$

נסמן ב $n(+)$ או ב S_+ את מספר התצפיות שקיבלו את הערך (+), ובאופן דומה:
נסמן ב $n(-)$ או ב S_- את מספר התצפיות שקיבלו את הערך (–).
ניתן לומר שבהנחת השערת האפס: $n(+) \setminus n(-) \sim B(n^*, 0.5)$.
נחשב את PV על סמך תוצאות המדגם בעזרת ההתפלגות הבינומית כך שאם $PV \le \alpha$ נדחה את השערת האפס.
במבחן הסימן אין התייחסות לגודל הפער בתצפיות אלא רק את כיוון ההבדל.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

קופות החולים טוענות כי רכישת תרופות שאינן דורשות מרשם רופא, הינן זולות יותר אצלן מאשר מברשתות הפארם. דגמו 11 תרופות ובדקו את מחירן בבית המרקחת של קופות החולים וברשת הפארם. המחיר המוצג הינו עבור קפסולה בודדת:
בדקו ברמת מובהקות של 5% באמצעות מבחן הסימן.

שם התרופה	קופת חולים	פארם
אדוויל	1.2	1.5
אקמול	2.6	2.6
אופטלגין	0.9	1.4
פוסטינור	3.5	3.2
סטרפסיל	1.1	1.4
נורפן	1.7	1.8
לורסטין	0.8	1.1
קולדקס	1.5	2
אלרגיז	2	2.8
נוסידקס	2	2.5
קורמיר	3	3.3

שאלות

1) רוצים לבדוק את הטענה שהציונים במבחן בסטטיסטיקה ב גבוהים מאשר בסטטיסטיקה א. נלקחו 10 סטודנטים שסיימו את סטטיסטיקה ב.
עבור כל סטודנט נבדק מה הציון בסטטיסטיקה א ומה הציון בסטטיסטיקה ב.
להלן התוצאות שהתקבלו:

א	62	74	68	94	82	67	65	84	78	80
ב	70	80	70	90	77	67	80	86	79	82

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% באמצעות מבחן הסימן.

ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם יוחלט לתת פקטור של 2 נקודות לכל הסטודנטים בשני המועדים?

2) מעוניינים לבדוק האם ההוצאות על "ג'אנק פוד" בקרב הסטודנטים רבות יותר בזמן הלימודים לעומת ימי החופשה.
נדגמו 15 סטודנטים מקריים, אצל 13 ההוצאות בתקופת הלימודים היו גבוהות יותר מימיי החופשה ואצל 2 נמוכות יותר.
מה מסקנתך בר"מ של 0.05?

3) מעוניינים לבדוק האם סם מסוים משפיע על לחץ הדם. נלקחו 24 אנשים אשר נמדד להם לחץ הדם לאחר מכן ניתן להם הסם ושוב מדדו להם את לחץ הדם. לחמישה אנשים לחץ הדם לא השתנה ל 15 אנשים לחץ הדם עלה וליתר לחץ הדם ירד אחרי לקיחת הסם. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

4) במדגם שנעשה על 15 משפחות השוו את רמת הביטחון העצמי של הבכור במשפחה לעומת הצעיר שבמשפחה. תוצאות המדגם הראו שאצל 7 משפחות רמת הביטחון העצמי של הבכור הייתה גבוהה יותר, אצל 3 משפחות רמת הביטחון העצמי של הצעיר הייתה גבוהה יותר ואצל 5 משפחות לא נמצא הבדל בין האחים מבחינת רמת הביטחון העצמי. טענת החוקר הייתה שבמשפחות לבכור ביטחון עצמי גבוה מזה של הצעיר במשפחה.

א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה יוחלט לקבל את טענת החוקר?

ב. רמת הביטחון הוערכה על ידי פסיכולוג זוטר. פסיכולוג בכיר ביצע הערכה מחודשת וקבע שלמשפחה אחת במדגם הייתה הערכה שגויה: הפסיכולוג הזוטר קבע שלצעיר במשפחה יש ביטחון עצמי יותר גבוה למרות שלאח הבכור יש ביטחון עצמי יותר גבוה במשפחה הזו. מה יקרה לרמת המובהקות המינימלית שחושבה בשאלה הקודמת?

5) איזה מהטענות הבאות נכונות?

א. $n(+)+n(-)=n^*$

ב. $n(+)+n(-)=n$

ג. $n(+)=n(-)$

ד. $n(+)-n(-)=n^*$

תשובות סופיות

1) א. לא נדחה את H_o. ב. לא תשתנה המסקנה.

2) נדחה את H_o.

3) נדחה את H_o.

4) א. 0.172 ב. תקטן.

5) א'.

מבחן הסימן (שימוש בקירוב הנורמלי) – רקע

מבחן הסימן הוא מבחן שמשתמשים בו כאשר לפנינו מדגם מזווג ולא ניתן להניח שהמשתנה הנחקר מתפלג נורמלית.

גם אם המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית ניתן לבצע את מבחן הסימן אבל מבחן T למדגמים מזווגים יהיה מבחן עם עוצמה גבוהה יותר ולכן יש לבצע אותו.
מבחן הסימן נחשב למבחן אפרמטרי – מבחנים אפרמטרים הינם כל המבחנים שאינם דורשים שהמשתנה הנחקר יתפלג נורמלית.
מבחן הסימן נקרא כך כיוון שהוא דורש הגדרת סימן לכל תצפית:

$(+)$ – אם מצב X גבוה ממצב Y.

$(-)$ – אם מצב Y גבוה ממצב X.

(0) – אין הבדל בין המצבים.

במבחן הסימן נתעלם מהפרשים שהם 0, ולכן נסמן את מספר ההפרשים האפקטיביים (השונים מאפס) ב- n^*.
תחת השערת האפס נאמר שהסיכוי לקבל הפרש חיובי $(p+)$ שווה לסיכוי לקבל הפרש שלילי $(p-)$.

השערות המבחן:

$$H_0: P_+ = 0.5 \qquad H_1: P_+ \neq,<,> 0.5$$

או

$$H_0: P_- = 0.5 \qquad H_1: P_- \neq,<,> 0.5$$

נסמן ב $n(+)$ או ב S_+ את מספר התצפיות שקיבלו את הערך $(+)$, ובאופן דומה:
נסמן ב $n(-)$ או ב S_- את מספר התצפיות שקיבלו את הערך $(-)$.
ניתן לומר שבהנחת השערת האפס: $n(+) \backslash n(-) \sim B(n^*, 0.5)$.
נחשב את PV על סמך תוצאות המדגם בעזרת ההתפלגות הבינומית כך שאם $PV \le \alpha$ נדחה את השערת האפס.

במבחן הסימן אין התייחסות לגודל הפער בתצפיות אלא רק את כיוון ההבדל.
אם התנאים לקירוב נורמלי מתקיימים ניתן להמיר את ההתפלגות הבינומית להתפלגות נורמלית:

אם: $n^* \cdot 0.5 \ge 5$

אז: $S_{\pm} \sim N\left(n^* \cdot \frac{1}{2}, n^* \cdot \frac{1}{4}\right)$.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

קופות החולים טוענות כי רכישת תרופות שאינן דורשות מרשם רופא, הינן זולות יותר אצלן מאשר מברשתות הפארם. דגמו 11 תרופות ובדקו את מחירן בבית המרקחת של קופות החולים וברשת הפארם. המחיר המוצג הינו עבור קפסולה בודדת. בדקו ברמת מובהקות של 5% באמצעות מבחן הסימן.

שם התרופה	קופת חולים	פארם
אדוויל	1.2	1.5
אקמול	2.6	2.6
אופטלגין	0.9	1.4
פוסטינור	3.5	3.2
סטרפסיל	1.1	1.4
נורפן	1.7	1.8
לורסטין	0.8	1.1
קולדקס	1.5	2
אלרגיז	2	2.8
נוסידקס	2	2.5
קורמיר	3	3.3

שאלות

1) רוצים לבדוק את הטענה שהציונים במבחן בסטטיסטיקה ב גבוהים מאשר בסטטיסטיקה א. נלקחו 10 סטודנטים שסיימו את סטטיסטיקה ב. עבור כל סטודנט נבדק מה הציון בסטטיסטיקה א ומה הציון בסטטיסטיקה ב. להלן התוצאות שהתקבלו :

א	62	74	68	94	82	67	65	84	78	80
ב	70	80	70	90	77	67	80	86	79	82

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% באמצעות מבחן הסימן.
ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם יוחלט לתת פקטור של 2 נקודות לכל הסטודנטים בשני המועדים?

2) מעוניינים לבדוק האם ההוצאות על "ג'אנק פוד" בקרב הסטודנטים רבות יותר בזמן הלימודים לעומת ימי החופשה. נדגמו 15 סטודנטים מקריים, אצל 13 ההוצאות בתקופת הלימודים היו גבוהות יותר מימיי החופשה ואצל 2 נמוכות יותר. מה מסקנתך בר"מ של 0.05?

3) מעוניינים לבדוק האם סם מסוים משפיע על לחץ הדם. נלקחו 24 אנשים אשר נמדד להם לחץ הדם לאחר מכן ניתן להם הסם ושוב מדדו להם את לחץ הדם. לחמישה אנשים לחץ הדם לא השתנה ל 15 אנשים לחץ הדם עלה וליתר לחץ הדם ירד אחרי לקיחת הסם. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

4) במדגם שנעשה על 15 משפחות השוו את רמת הביטחון העצמי של הבכור במשפחה לעומת הצעיר שבמשפחה. תוצאות המדגם הראו שאצל 7 משפחות רמת הביטחון העצמי של הבכור הייתה גבוהה יותר, אצל 3 משפחות רמת הביטחון העצמי של הצעיר הייתה גבוהה יותר ואצל 5 משפחות לא נמצא הבדל בין האחים מבחינת רמת הביטחון העצמי. טענת החוקר הייתה שבמשפחות לבכור ביטחון עצמי גבוה מזה של הצעיר במשפחה.

א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה יוחלט לקבל את טענת החוקר?
ב. רמת הביטחון הוערכה על ידי פסיכולוג זוטר. פסיכולוג בכיר ביצע הערכה מחודשת וקבע שלמשפחה אחת במדגם הייתה הערכה שגויה: הפסיכולוג הזוטר קבע שלצעיר במשפחה יש ביטחון עצמי יותר גבוה למרות שלאח הבכור יש ביטחון עצמי יותר גבוה במשפחה הזו. מה יקרה לרמת המובהקות המינימלית שחושבה בשאלה הקודמת?

5) איזה מהטענות הבאות נכונות?

א. $n(+)+n(-)=n^*$.
ב. $n(+)+n(-)=n$.
ג. $n(+)=n(-)$.
ד. $n(+)-n(-)=n^*$.

תשובות סופיות

1) א. לא נדחה H_0. ב. לא תשתנה המסקנה.
2) נדחה H_0.
3) נדחה H_0.
4) א. 0.172 ב. תקטן.
5) א'.

ניתוח פלטים במבחן הסימן

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

בדקו לאנשים את רמת הסוכר בדם בבוקר לעומת רמת הסוכר בלילה, ובצעו את מבחן הסימן. להלן הפלט שהתקבל. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם הסוכר בלילה גבוה מאשר בבוקר.

Sign Test

Frequencies

		N
night-day	Negative Differences[a]	13
	Positive Differences[b]	27
	Ties[c]	5
	Total	45

a. day > night

b. day < night

c. day = night

Test Statistics[a]

	day - night
Z	-2,055
Asymp. Sig. (2-tailed)	,040

a. Sign Test

שאלות

1) מחקר בדק את רמת שביעות הרצון משירות לקוחות אחרי רפורמה שבוצעה בחברה. להלן תוצאות שהתקבלו כאשר שביעות הרצון הייתה בסקלה מ-1 כלל לא מרוצה ועד 5 מרוצה מאד.

4	1	1	4	5	4	2	5	4	5	4	2	**Before**
5	5	5	4	3	5	5	5	4	4	4	4	**After**

Sign Test

Frequencies

		N
after-before	Negative Differences[a]	???
	Positive Differences[b]	???
	Ties[c]	???
	Total	???

a. after < before
b. after > before
c. after = before

Test Statistics[a]

	after-before
Exact Sig. (2-tailed)	.289[b]

א. השלימו את סימני השאלה שבטבלה.
ב. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם הרפורמה הייתה יעילה.
ג. כיצד הייתה משתנה מובהקות התוצאה אם היו מוסיפים עוד 2 תצפיות שעבורם הפרש שביעות הרצון היה אפס?
ד. כיצד הייתה משתנה מובהקות התוצאה של הפלט אם הינו מוסיפים תצפית כזו:

Before	**After**
5	4

2) להלן פלט של מבחן הסימן:

Sign Test

Frequencies

		N
time_after- time_before	Negative Differences[a]	27
	Positive Differences[b]	2
	Ties[c]	?????
	Total	30

a. time_after < time_before
b. time_after > time_before
c. time_after = time_before

Test Statistics[a]

	time_after- time_before
Z	-4.457
Asymp. Sig. (2-tailed)	.000

a. Sign Test

א. השלימו את החלק החסר שמסומן בסימן שאלה.
ב. מה הייתה מובהקות התוצאה אם ההשערה הייתה חד צדדית?
ג. מה היה קורה למובהקות התוצאה הרשומה בפלט אם תצפית אחת הייתה עוברת מההפרש החיובי להפרש השלילי?

תשובות סופיות

1) א. 2,6,4,12 ב. לא נדחה את H_0.
ג. לא תשתנה המסקנה ד. תגדל.

2) א. 1 ב. לא ניתן לדעת. ג. P_V ישאר 0.

שיטות מחקר במימון

פרק 10 - מבחנים אפרמטריים למדגמים בלתי תלויים

תוכן העניינים

מבחנים אפרמטרים למדגמים בלתי תלויים

ניתוח פלטים במבחן מן-וויטני – רקע

מבחן מן-ויטני מיועד לבדוק האם לשתי אוכלוסיות התפלגות שווה.
המבחן בוחן באופן רוחבי את כל תחום הערכים ולא מתמקד בערך מרכזי אחד.
נשתמש במבחן זה כאשר יש שני מדגמים בלתי תלויים והמשתנה הכמותי הנחקר אינו מתפלג נורמלית או שמדובר במשתנה מסולם סדר.
המבחן מתבסס על דירוג כל התצפיות. בעצם, מבחן זה הוא המענה האפרמטרי למבחן הפרמטרי להפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

להלן תוצאות הערכות שקיבלו שני מורים : ד״ר A ופרופסור B. סטודנטים נתנו משוב כללי על המורים בסקלה של 1 (גרוע) עד 5 (מצוין). הטענה היא שד״ר A הוא מרצה טוב יותר מאשר פרופסור B.

Mann-Whitney Test

Ranks

	teacher	N	Mean Rank	Sum of Ranks
grade	dr A	17	25.00	425.00
	prof B	20	13.90	278.00
	Total	37		

Test Statistics[a]

	grade
Mann-Whitney U	68.000
Wilcoxon W	278.000
Z	-3.249
Asymp. Sig. (2-tailed)	.001
Exact Sig. [2*(1-tailed Sig.)]	.001[b]

a. Grouping Variable: teacher
b. Not corrected for ties.

- הסבירו מדוע נעשה כאן מבחן מן-וויטני.
- מה המסקנה ברמת מובהקות של 1%?

שאלות

1) מחקרים טוענים שקיים הבדל בין שעות השינה של גברים לשעות השינה של נשים. כיוון שלא ניתן להוכיח ששעות שינה הינו משתנה המתפלג נורמלית ביצעו מבחן מן-וויטני בו לקחו נשים וגברים אקראיים ובדקו את שעות השינה שלהם.

Ranks

	gender	N	Mean Rank	Sum of Ranks
sleeptime	male	10	???	135.00
	female	???	7.50	75.00
	Total	20		

Mann-Whitney Test

Test Statistics[a]

	sleeptime
Mann-Whitney U	20.000
Wilcoxon W	75.000
Z	-2.319
Asymp. Sig. (2-tailed)	.020

א. השלימו את סימני השאלה החסרים בפלט.

ב. מהי המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

ג. מה הייתה מובהקות התוצאה אם טענת המחקר הייתה שגברים ישנים יותר מנשים?

2) שני אנשים נתבקשו לבדוק את מספר תאונות הדרכים בשבוע בשני קטעי כביש שונים. כל אחד בחר את השבועות באופן אקראי ובלתי תלוי באחר וספר כמה תאונות היו בכל כביש בשבוע. הפלטים שהתקבלו:

מספר תאונות

	Frequency
.00	2
1.00	1
2.00	2
3.00	1
Total	6

a. road = 1.00

מספר תאונות

	Frequency
.00	2
1.00	1
2.00	1
3.00	1
4.00	1
5.00	1
Total	7

a. road = 2.00

Ranks

	road	N	Mean Rank	Sum of Ranks
מספר תאונות	1.00	A	B	C
	2.00	D	E	F
	Total	G		

Test Statistics[a]

	VAR00002
Asymp. Sig. (2-tailed)	.465

א. השלימו בטבלה השלישית את המספרים החסרים במקום האותיות.

ב. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת ההשערה שאין הבדל בין הכבישים מבחינת התפלגות תאונות הדרכים?

ג. כיצד הייתה משתנה התשובה של הסעיף הקודם אם כל חוקר היה מוסיף נתונים על שבוע נוסף לכל כביש?

ד. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

ה. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת ההשערה שכביש מספר 1 עם התפלגות תאונות גבוהה יותר מאשר כביש מספר 2?

תשובות סופיות

1) א. 13.5, 10 ב. נדחה H_0. ג. 0.01.

2) א. 6, 6.17, 37, 7, 7.71, 54, 13 ב. 0.465.

ג. לא ניתן לדעת. ד. לא נדחה H_0. ה. 0.7675.

שיטות מחקר במימון

פרק 11 - ניתוח שונות חד כיוונית

תוכן העניינים

ניתוח שונות חד כיוונית

רקע תיאורטי

ניתוח שונות (חד כיווני) הוא מבחן להשוואת תוחלות $\left(\mu_{1...},\mu_k\right)$ של k אוכלוסיות שונות.

לכן, בניתוח שונות, השערות המחקר הן:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$ (התוחלות של כל האוכלוסיות שוות)

$H_1 :$ אחרת (לפחות שתיים מהתוחלות שונות)

ההנחות הדרושות לביצוע התהליך:

2) בכל אוכלוסייה מתוך k האוכלוסיות ההתפלגות נורמלית.
3) כל האוכלוסיות הן עם אותה שונות σ^2.
4) המדגמים בלתי תלויים זה בזה.

ישנו משתנה המבדיל בין הקבוצות השונות, הוא המשתנה הבלתי תלוי הנקרא גורם (factor). משתנה זה הוא קטגוריאלי עם k רמות (levels).
כדי לבצע את התהליך יש לבצע מדגם מכל אוכלוסייה:
נסמן ב- n_i את גודל המדגם בקבוצה i.

$n = \sum_{1}^{k} n_i$ - מספר התצפיות סך הכול (בכל המדגמים).

$\bar{X}_1$ - ממוצע המדגם הראשון,.......,$\bar{X}_k$-ממוצע המדגם ה- k-י.
$\bar{X}$ - ממוצע כללי (של כל המדגמים).

סכום ריבועים בין הקבוצות: $SS_B = \sum_{i=1}^{k} n_i \left[\bar{X}_i - \bar{X}\right]^2$

סכום ריבועים בתוך הקבוצות: $SS_W = \sum_{i=1}^{k} n_i \left[n_i - 1\right] \bullet \hat{S}_i^2$

סכום ריבועים כללי: $SS_T = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_j} [X_{ij} - \bar{X}]^2$

$SST = SSB + SSW$

יש למלא את טבלת ניתוח השונות הבאה:

F	ממוצע הריבועים MS	דרגות חופש df	סכום הריבועים SS	מקור השונות
$\frac{MSB}{MSW}$	$\frac{SSB}{k-1}$	$k-1$	SSB	**בין הקבוצות** - B
	$\frac{SSW}{n-k}$	$n-k$	SSW	**בתוך הקבוצות** - W
		$n-1$	SST	**סה"כ** - T

$$F=\frac{\frac{SSB}{k-1}}{\frac{SSW}{n-k}}\sim F(k-1,n-k)$$

אזור דחיית H_0 : $1-\alpha$: $F>F_{(k-1,n-k)}$

שאלות

1) מחקר מעוניין להשוות בין שלוש תרופות לשיכוך כאבים במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין התרופות מבחינת הזמן בדקות שלוקח עד שהתרופה משפיעה. לצורך הבדיקה נלקחו 15 אנשים שסובלים מכאבי ראש. אנשים אלה חולקו באקראי לשלוש: קבוצה 1קיבלה "אקמולי" קבוצה 2 קיבלה "אופטלגין" קבוצה 3 קיבלה "נורופן".
כל אדם במחקר מסר את מספר הדקות עד שהתרופה השפיעה עליו.

א. מהו המשתנה התלוי ומהו המשתנה הבלתי תלוי במחקר? מהו ה"גורם" וכמה רמות יש לו?

ב. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים כאן? רשמו את ההשערות.

ג. מה הן ההנחות הדרושות כדי לבצע את המבחן הסטטיסטי שהצעת בסעיף הקודם?

2) בעיר מסוימת שלושה בתי ספר תיכון. ראש העיר התעניין לבדוק האם קיים הבדל בהצלחה של בתי הספר במקצוע מתמטיקה. לצורך כך הוא דגם מספר תלמידים שנבחנו במבחן הבגרות במתמטיקה ברמה של 3 יחידות בעירו ובדק עבור כל תלמיד מה ציון הבגרות שלו במתמטיקה.
להלן הציונים שהתקבלו:

"המתמיד"	"רבין"	"הסי"
78	98	85
65	62	83
70	55	74
90	80	85
56		75

א. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים? רשמו את ההשערות ואת ההנחות של המבחן.

ב. מהו גודל המדגם? מהו המשתנה הבלתי תלוי (factor) כמה רמות יש לו?

ג. חשבו את הממוצע ואת סטיית התקן של הציונים בכל אחד מהמדגמים.

ד. מלאו את טבלת ANOVA.

ה. רשמו את כלל ההכרעה למבחן שהוצע בסעיף א ברמת מובהקות של 5%.

ו. האם קיים הבדל בין בתי הספר בעיר מבחינת רמת הצלחת התלמידים במקצוע המתמטיקה? ענה על סמך הסעיפים הקודמים.

3) מעוניינים לבדוק האם יש הבדל בהשפעה של שיטות טפול שונות על לחץ הדם הסיסטולי (SBP) באוכלוסייה של קשישים. נבדקו 4 שיטות שונות.
בטבלה המצורפת מרוכזים ממצאי המחקר.

השיטה	A	B	C	D
גודל המדגם	12	14	8	12
הממוצע	178	172	180	182
סטיית התקן	4	8	5	3

א. רשמו את השערות המחקר וההנחות הדרושות כדי לבצע את המבחן המתאים.

ב. מה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 5%?

ג. האם יש צורך לבצע השוואות מרובות?

4) שלושה אופים נתבקשו להכין עוגת שוקולד. לכל אופה בדקו את משך זמן ההכנה בדקות. כל אופה נדרש לאפות בכל יום 4 עוגות.
האם קיים הבדל בין האופים מבחינת תוחלת זמני ההכנה של העוגות?
בדקו ברמת מובהקות של 5%.

האופה	ניר	מוזס	שלום
סכום הזמנים	206	212	182
סכום ריבועי הזמנים	10644	11250	8982

5) להלן טבלת ניתוח שונות חד כיוונית. במחקר בחנו 4 סוגי סוללות. רצו לבדוק האם לסוג הסוללה השפעה על תוחלת אורך החיים שלה. הפעילו את כל הסוללות על אותו מכשיר ובדקו את אורך החיים של כל סוללה בשעות.
מה המסקנה ברמת מובהקות של 10%? רשמו את ההשערות וההנחות הדרושות.

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	10.317	3	3.439	1.361	.279
Within Groups	60.648	24	2.527		
Total	70.964	27			

6) להלן טבלת ANOVA בטבלה הושמטו חלקים.
השלימו את החלקים בטבלה שהושמטו ומסומנים באותיות.

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	357.450	ב	ג	ה	.000
Within Groups	א	17	ד		
Total	522.950	19			

7) חברת תרופות לקחה 15 אנשים ברמת בריאות דומה. החברה חילקה את האנשים ל שלוש קבוצות שוות בגודלן. לכל קבוצה ניתנה אותה תרופה במינון שונה (dosage). המינונים שניתנו הם: 10 מ"ג, 20 מ"ג ו-30 מ"ג. לאחר שעה מזמן לקיחת התרופה ניבדק קצב פעימות הלב של כל אדם (pulse). הנתונים הוזנו לתוכנה סטטיסטית והתקבלו התוצאות הבאות:

ANOVA

pulse

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	414.400	2	207.200	19.733	.000
Within Groups	126.000	12	10.500		
Total	540.400	14			

pulse

Tukey HSD[a]

dosage	N	Subset for alpha = 0.05	
		1	2
30.00	5	71.0000	
20.00	5		80.2000
10.00	5		83.4000
Sig.		1.000	.299

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.

a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 5.000.

Post Hoc Tests

Multiple Comparisons

pulse
Tukey HSD

(I) dosage	(J) dosage	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Lower Bound	Upper Bound
10.00	20.00	3.20000	2.04939	.299	-2.2675	8.6675
	30.00	12.40000*	2.04939	.000	6.9325	17.8675
20.00	10.00	-3.20000	2.04939	.299	-8.6675	2.2675
	30.00	9.20000*	2.04939	.002	3.7325	14.6675
30.00	10.00	-12.40000*	2.04939	.000	-17.8675	-6.9325
	20.00	-9.20000*	2.04939	.002	-14.6675	-3.7325

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין המינונים השונים מבחינת תוחלת הדופק של האנשים? רשמו את ההשערות וההנחות הדרושות לצורך פתרון.

ב. הסבירו ללא חישוב כיצד הייתה משתנה התשובה לסעיף הקודם אם הינו מעלים את הדופק של כל התצפיות במחקר ב-2.

ג. האם יש צורך במחקר בהשוואה מרובות. נמקו!

ד. לטבלת הANOVA צורפו טבלאות של השוואות מרובות בשיטה הנקראת "טוקיי". ברמת בטחון של 95% מה הם הממצאים לפי שיטה זו?

8) בעיר מסוימת רצו לבדוק האם קיים הבדל ברמה של התלמידים בין בתי הספר השונים בעיר. ביצעו מדגם מכל בית ספר ונתנו מבחן זהה לכל הנדגמים. לאחר מכן ריכזו את הנתונים בתוכנה סטטיסטית והפעילו ניתוח שונות. מצורפים הפלטים שהתקבלו. ענו על הסעיפים הבאים :

א. כמה בתי ספר יש בעיר?
ב. כמה תלמידים השתתפו בסך הכול במחקר?
ג. האם קיים הבדל בין בתי הספר בעיר מבחינה רמת הציונים? בדקו ברמת מובהקות של 1%
ד. בביטחון של 95% אילו בתי ספר שונים זה מזה ברמת התלמידים? נמקו והסבירו.

Oneway

ANOVA

grade

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	7799.600	4	1949.900	13.586	.000
Within Groups	2870.400	20	143.520		
Total	10670.000	24			

Post Hoc Tests

Multiple Comparisons

grade

Scheffe

(I) school	(J) school	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
1.00	2.00	5.40000	7.57681	.971	-20.2543	31.0543
	3.00	36.80000*	7.57681	.003	11.1457	62.4543
	4.00	36.40000*	7.57681	.003	10.7457	62.0543
	5.00	-2.60000	7.57681	.998	-28.2543	23.0543
2.00	1.00	-5.40000	7.57681	.971	-31.0543	20.2543
	3.00	31.40000*	7.57681	.011	5.7457	57.0543
	4.00	31.00000*	7.57681	.013	5.3457	56.6543
	5.00	-8.00000	7.57681	.888	-33.6543	17.6543
3.00	1.00	-36.80000*	7.57681	.003	-62.4543	-11.1457
	2.00	-31.40000*	7.57681	.011	-57.0543	-5.7457
	4.00	-.40000	7.57681	1.000	-26.0543	25.2543
	5.00	-39.40000*	7.57681	.001	-65.0543	-13.7457
4.00	1.00	-36.40000*	7.57681	.003	-62.0543	-10.7457
	2.00	-31.00000*	7.57681	.013	-56.6543	-5.3457
	3.00	.40000	7.57681	1.000	-25.2543	26.0543
	5.00	-39.00000*	7.57681	.001	-64.6543	-13.3457
5.00	1.00	2.60000	7.57681	.998	-23.0543	28.2543
	2.00	8.00000	7.57681	.888	-17.6543	33.6543
	3.00	39.40000*	7.57681	.001	13.7457	65.0543
	4.00	39.00000*	7.57681	.001	13.3457	64.6543

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Homogeneous Subsets

grade

Scheffe[a]

school	N	Subset for alpha = 0.05 1	Subset for alpha = 0.05 2
3.00	5	45.0000	
4.00	5	45.4000	
2.00	5		76.4000
1.00	5		81.8000
5.00	5		84.4000
Sig.		1.000	.888

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.
a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 5.000.

תשובות סופיות

1) א. משתנה בלתי תלוי: סוג התרופה.
משתנה תלוי: הזמן עד להשפעת התרופה בדקות.

ב. ניתוח שונות חד כיווני
$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$
$H_1: otherwise$.

ג. 1. מדגמים בלתי תלויים.
2. שווין שונויות.
3. משתנים מתפלגים נורמלית.

2) א. המבחן לניתוח שונות חד כיוונית.
$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$
$H_1: otherwise$
הנחות:
1. מדגמים בלתי תלויים.
2. משתנים מתפלגים נורמלית.
3. שוויון שונוית.

ב. גודל המדגם: 14. משתנה ב"ת: בית הספר, בעל 3 רמות.

ג. $\bar{X} = 71.8, \hat{S} = 12.93$, $\bar{X} = 73.75, \hat{S} = 19.29$, $\bar{X} = 80.4, \hat{S} = 5.46$.

ד. להלן טבלה:

מקור השונות	SS	df	MS	F
B	200.6	2	100.3	
W	1904.75	11	173.2	
סה"כ	2105.35	13		0.58

ה. $F > 3.98$.

ו. נקבל את H_0 .

3) א. $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$
$H_1: otherwise$
ב. נדחה את H_0 .
ג. כן.

הנחות:
1. מדגמים בלתי תלויים.
2. שוויון שונויות.
3. משתנים מתפלגים נורמלית.

4) נקבל את H_0 : נכריע שאין הבדל מובהק בין האופים מבחינת תוחלת זמן הכנה.

5) $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$
$H_1: otherwise$

הנחות:
1. מדגמים בלתי תלויים.
2. שוויון שונויות.
3. משתנים מתפלגים נורמלית.

נקבל את H_0 : לסוג סוללה אין השפעה של תוחלת החיים ברמת ביטחון של 10%.

6) להלן טבלה:

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	357.450	ב 2	ג 178.725	ה 18.36	.000
Within Groups	א 165.5	17	ד 9.735		
Total	522.950	19			

7) א. $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$
$H_1: otherwise$

הנחות:
1. מדגמים בלתי תלויים.
2. משתנים מתפלגים נורמלית.
3. שוויון שונויות.

נדחה את H_0 : ברמת ביטחון של 5% קיים הבדל במינונים השונים מבחינת תוחלת הדופק.

ב. ראה וידאו. ג. כן. ד. $\mu_{20} = \mu_{10} > \mu_{30}$.

8) א. 5 ב. 25

ג. נדחה את H_0 : יש לפחות שני בתי ספר בעיר עם תוחלת רמת ציונים שונה.

ד. $(\mu_3 = \mu_4) < (\mu_1 = \mu_2 = \mu_3)$.

שיטות מחקר במימון

פרק 12 - מבוא לקורס

תוכן העניינים

מבוא לקורס:

רקע:

הגדרות וסימונים:

משתנה אמפירי – תוצאותיו ידועות מראש (למשל: רמת הכנסה, גיל, מסי שנות לימוד במדגם מסוים).
משתנה מקרי – תוצאותיו לא ידועות מראש (כגון תוצאה בהטלת קובייה או בהטלת מטבע). באקונומטריקה נעסוק בעיקר במשתנים מקריים.

שני סוגי המשתנים יסומנו באות לועזית עם אינדקס (למשל: Y_t או X_t).
קבוע – מקבל ערך אחד בלבד (מסומן באות לועזית ללא אינדקס – למשל a או b).
לכל משתנה מקרי X_t יש תוחלת המייצגת את מרכז ההתפלגות (μ_X או $E(X)$).
השונות – מייצגת את מידת הפיזור של ההתפלגות (σ_X^2 או $V(X)$).
סטית התקן – היא השורש של השונות. (σ_X).
שונות משותפת (covariance) – מדד להתפלגות המשותפת של שני משתנים מקריים ומייצגת את הכיוון של הקשר ביניהם ($\mathrm{Cov}(X,Y)$):
$\mathrm{Cov}(X,Y)=0 \Leftrightarrow$ X,Y בלתי מתואמים.
$\mathrm{Cov}(X,Y)>0 \Leftrightarrow$ מתאם חיובי בין המשתנים.
$\mathrm{Cov}(X,Y)<0 \Leftrightarrow$ מתאם שלילי בין המשתנים.
X,Y בלתי תלויים $\Leftarrow$ X,Y בלתי מתואמים.
מקדם המתאם של פירסון – מדד לכיוון ולעוצמת הקשר הליניארי בין שני משתנים: $\eta_{xy}=\dfrac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma_x\cdot\sigma_y}$.
$-1\le\eta\le1$
$\eta=1$ מתאם ליניארי חיובי מלא בין שני המשתנים.
$\eta=-1$ מתאם ליניארי שלילי מלא בין שני המשתנים.
$\eta=0$ לא קיים מתאם ליניארי בין שני המשתנים.

אמידה:

פרמטר – ערך המשתנה הנחקר המתאר את כל האוכלוסייה.
סטטיסטי/אומד – ערך המשתנה הנחקר המתאר את המדגם.

אוכלוסייה	מדגם
$E(X)=\mu$	$\bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$
$V(X)=\sigma^2=E(X-E(X))^2$	$S_X^2=\frac{S_{XX}}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n}$
$\text{cov}(X,Y)=E(X-E(X))(Y-E(Y))$	$\frac{S_{XY}}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{n}$
$\eta_{XY}=\frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$	$r_{XY}=\frac{S_{XY}}{\sqrt{S_{XX}}\sqrt{S_{YY}}}$

נוסחאות וחוקים בסטטיסטיקה:

יהיו X ו- Y משתנים מקריים, ו- a, b קבועים:

<u>חוקי הסיגמה</u>:

1. $\sum_{t=1}^{T}X_t=X_1+X_2+X_3+\ldots+X_T$.
2. סכום של קבוע: $\sum_{t=1}^{T}a=Ta$.
3. סכום של קבוע כפול משתנה = לקבוע כפול הסכום: $\sum_{t=1}^{T}aX_i=a\sum_{t=1}^{T}X_t$.
4. סכום של סכום/הפרש = לסכום/הפרש הסכומים: $\sum_{t=1}^{T}(X_t\pm Y)_t=\sum_{t=1}^{T}X_t\pm\sum_{t=1}^{T}Y_t$.
5. יש לשים לב כי: $\sum_{t=1}^{T}X_t^2\neq\left(\sum_{t=1}^{T}X_t\right)^2$

$\sum_{t=1}^{T}X_tY_t\neq\sum_{t=1}^{T}X_t\sum_{t=1}^{T}Y_t$.

הגדרות ופיתוחים:

1. סכום הסטיות מהממוצע = 0: $\sum_{t=1}^{T}\left(X_t-\bar{X}\right)=0$.
2. סכום הסטיות הריבועיות מהממוצע (מונה השונות):
$$S_{XX}=\sum_{t=1}^{T}\left(X_t-\bar{X}\right)^2=\sum_{t=1}^{T}X_t^2-T\bar{X}^2=\sum_{t=1}^{T}\left(X_t-\bar{X}\right)X_t.$$
3. מונה של השונות המשותפת:
$$S_{XY}=\sum_{t=1}^{T}\left(X_t-\bar{X}\right)\left(Y_t-\bar{Y}\right)=\sum_{t=1}^{T}X_tY_t-T\bar{X}\bar{Y}=\sum_{t=1}^{T}\left(X_t-\bar{X}\right)Y_t=\sum_{t=1}^{T}\left(Y_t-\bar{Y}\right)X_t.$$

חוקי התוחלת:

1. תוחלת של קבוע = קבוע: $E(a)=a$.
2. תוחלת של סכום/הפרש = לסכום/הפרש התוחלות:
$$E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$$
$$E\left(\sum(X_i)\right)=\sum E(X_i).$$
3. תוחלת של כפל/חילוק $\neq$ לכפל/חילוק התוחלות:
$$E(X\cdot Y)\neq E(X)\cdot E(Y)$$
$$E\left(\frac{X}{Y}\right)\neq\frac{E(X)}{E(Y)}.$$
$$E\left(X^2\right)\neq\left[E(X)\right]^2$$
4. השפעת טרנספורמציה ליניארית על התוחלת:
$$E\left(a/\frac{1}{a}X\pm b\right)=a/\frac{1}{a}\cdot E(X)\pm b.$$

חוקי השונות:

1. עבור X ו- Y בלתי תלויים/בלתי מתואמים מתקיים:
שונות של סכום/הפרש = סכום השונויות:
$$V(X\pm Y)=V(X)+V(Y)$$
$$V\sum(X_i)=\sum V(X_i).$$
2. עבור X ו- Y תלויים/מתואמים מתקיים:
שונות של סכום/הפרש $\neq$ סכום השונויות:
$$V(X\pm Y)=V(X)+V(Y)\pm 2\cdot Cov(X,Y).$$

3. שונות של קבוע = 0: $V(a)=0$, $V(a\pm x)=V(X)$.

4. השפעת טרנספורמציה ליניארית על השונות: $V(aX+b)=a^2V(X)$.

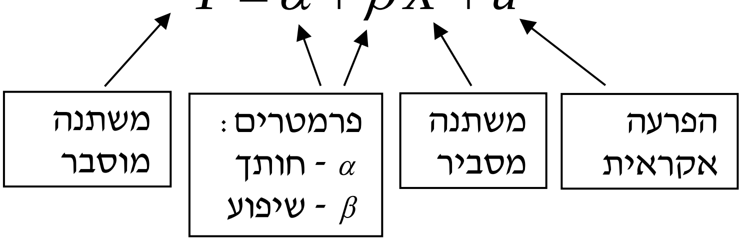
- חוקי התוחלת והשונות מתייחסים למשתנים אמפיריים כאל קבועים (יוצאים מחוץ לתוחלת או לשונות).
חוקי הסכימה מתייחסים למשתנים אמפיריים כמשתנים הנשארים בתוך הסיגמא (רק הקבועים ייצאו מחוץ לסיגמא).

<u>חוקי השונות המשותפת</u>:

1. שונות משותפת בין משתנה לקבוע = 0: $\operatorname{cov}(X,a)=0$.
2. שונות משותפת של משתנים המוכפלים בקבוע: $\operatorname{cov}(aX,bY)=ab\cdot\operatorname{cov}(X,Y)$.
3. שונות משותפת של משתנה עם עצמו = שונות המשתנה: $\operatorname{cov}(X,X)=V(X)$, $\operatorname{cov}(Y,Y)=V(Y)$.

המודל האקונומטרי:

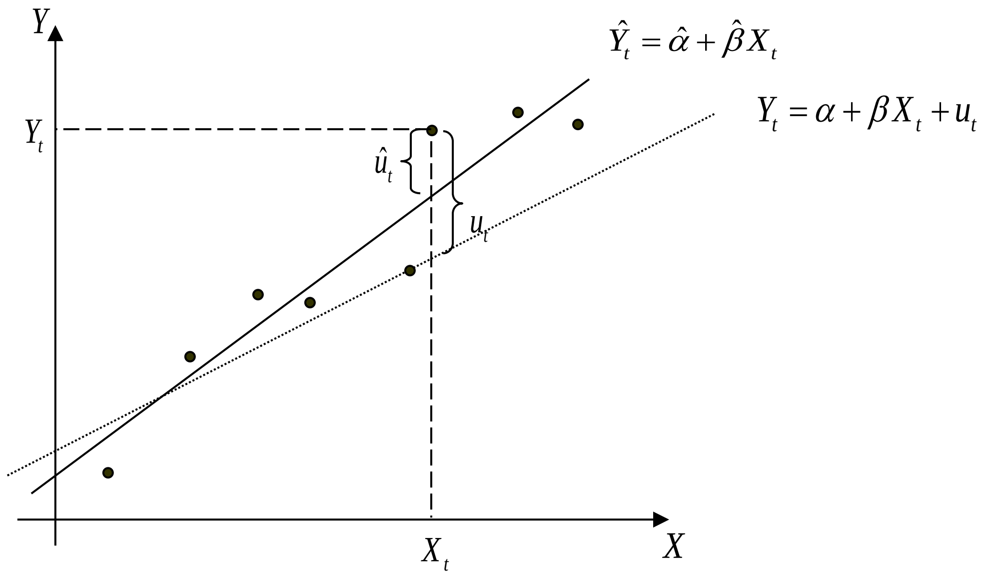
$$Y=\alpha+\beta X+u$$



1. במודל: $Y_t=\alpha+\beta X_t+u_t$, α ו- β הם מספרים קבועים אך לא ידועים.
אנו יכולים להעריך אותם ולקבל אומדים (תהליך קבלת האומדנים נקרא אמידה).
2. $\hat{\alpha}$ הוא האומד ל- α ו- $\hat{\beta}$ הוא האומד ל- β.
3. אומדי ריבועים פחותים (אר"פ) הם אומדים שחושבו בשיטת הריבועים הפחותים. מסומנים בד"כ ע"י 'כובע' - $\hat{\beta}$.
אומדים אחרים מסומנים בד"כ ע"י 'תלתל' - $\tilde{\beta}$.

4. בעוד α ו-β הם קבועים, $\hat{\alpha}$ ו-$\hat{\beta}$ הם משתנים מקריים כיוון שבכל מדגם מתקבלים $\hat{\alpha}$ ו-$\hat{\beta}$ אחרים.
5. את α ו-β ו-u_t לא ניתן לדעת (אלא רק לאמוד מנתוני המדגם) – הקו האמיתי באוכ' לא ידוע.
6. אפשר לדעת את $\hat{u}_t$, שהיא הסטיה מקו הרגרסיה במדגם:

- עבור X_t, הערך הצפוי של המשתנה המוסבר $\left(\hat{Y}_t\right)$ המתקבל לפי הרגרסיה הוא: $\hat{Y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_t$.
- הסטיה של התצפית (Y_t) מהערך הצפוי לפי הרגרסיה $\left(\hat{Y}_t\right)$ היא: $\hat{u}_t = Y_t - \hat{Y}_t$.



— קו הרגרסיה הנאמד (במדגם)
..... קו הרגרסיה האמיתי באוכלוסייה)
• תצפית בודדת

שאלות:

1) הבא נוכיח את הזהויות הבאות:

א. $\sum_{t=1}^{T}\left(X_t-\bar{X}\right)^2=\sum_{t=1}^{T}X_t^2-T\bar{X}^2$.

ב. $\sum_{t=1}^{T}\left(X_t-\bar{X}\right)^2=\sum_{t=1}^{T}\left(X_t-\bar{X}\right)X_t$.

ג. $\sum\left(X_t-\bar{X}\right)=0$.

ד. $\sum\frac{\left(X_t-\bar{X}\right)^2}{\sum\left(X_t-\bar{X}\right)X_t}=1$.

ה. $\sum\left(\hat{\alpha}+\hat{\beta}x_i\right)\left(x_i-\bar{x}\right)=\hat{\beta}\left(x_i-\bar{x}\right)^2$.

ו. $\sum_{t=1}^{T}\left(X_t-\bar{X}\right)\left(Y_t-\bar{Y}\right)=\sum_{t=1}^{T}X_tY_t-T\bar{X}\bar{Y}$.

ז. $\sum_{t=1}^{T}\left(X_t-\bar{X}\right)\left(Y_t-\bar{Y}\right)=\sum_{t=1}^{T}\left(X_t-\bar{X}\right)Y_t$.

2) בטא באמצעות: $\operatorname{cov}(x,y),\operatorname{var}(x),\operatorname{var}(y)$ והקבועים a ו- b את הביטויים הבאים:

א. $Var(ax)$.

ב. $Var(x+y)$.

ג. $Var(ax+b)$.

ד. $Cov(x,ay)$.

ה. $Cov(x+a,y+b)$.

ו. מקדם המתאם בין x ל- y.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. $a^2\operatorname{var}(x)$. ב. $\operatorname{var}(x)+\operatorname{var}(y)+2\operatorname{cov}(x,y)$. ג. $a^2\operatorname{var}(x)$. ד. $a\operatorname{cov}(x,y)$.

ה. $\operatorname{cov}(x,y)$. ו. $r=\frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sqrt{\operatorname{var}(x)}\cdot\sqrt{\operatorname{var}(y)}}$.

שיטות מחקר במימון

פרק 13 - אומדי הריבועים הפחותים

תוכן העניינים

אומדי הריבועים הפחותים:

רקע:

Ordinary Least Squares (OLS) – שיטת האמידה של α ושל β לקבלת אומדים $\hat{\alpha}$ ו-$\hat{\beta}$ שיביאו למינימום את סכום ריבועי טעויות האמידה:

$$\min_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \sum \hat{u}_t^2 = \min_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \sum \left(y_t - \hat{y}_t\right)^2 = \min_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \sum \left[y_t - \left(\hat{\alpha} + \hat{\beta} x_t\right)\right]^2 = ?$$

מתוך גזירת הפונקציה הזו מתקבלים האומדים $\hat{\alpha}$ ו-$\hat{\beta}$.

	מודל עם חותך ושיפוע $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$	מודל ללא חותך $Y_t = \beta X_t + u_t$	מודל רק עם חותך $Y_t = \alpha + u_t$
חישוב האומדים	$\hat{\beta} = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{\sum_{t=1}^{T}\left(X_t - \bar{X}\right)\left(Y_t - \bar{Y}\right)}{\sum_{t=1}^{T}\left(X_t - \bar{X}\right)^2}$ $= \frac{\sum_{t=1}^{T}\left(X_t - \bar{X}\right)Y_t}{\sum_{t=1}^{T}\left(X_t - \bar{X}\right)^2}$ $\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X}$	$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{T} X_t Y_t}{\sum_{t=1}^{T} X_t^2}$	$\hat{\alpha} = \bar{Y}$
תוחלת האומדים	$E\left(\hat{\beta}\right) = \beta$ $E\left(\hat{\alpha}\right) = \alpha$	$E\left(\hat{\beta}\right) = \beta$	$E\left(\hat{\alpha}\right) = \alpha$
שונות האומדים	$V\left(\hat{\beta}\right) = \frac{\sigma_u^2}{S_{XX}}$ $V\left(\hat{\alpha}\right) = \sigma_u^2\left(\frac{1}{T} + \frac{\bar{X}^2}{S_{XX}}\right)$	$V\left(\hat{\beta}\right) = \frac{\sigma_u^2}{\sum_{i=1}^{T} X_t^2}$	$V\left(\hat{\alpha}\right) = \frac{\sigma_u^2}{T}$

"המשוואות הנורמליות" מתקבלות בתהליך הגזירה של פונקציית הריבועים הפחותים וחייבות להתקיים על מנת שהפונקציה תתקיים $\left(\sum \hat{u}_t^2 = \min\right)$:

עבור המודל הקלאסי (עם חותך):

בגזירה של α: $\sum \hat{u}_t = 0$.

בגזירה של β: $\sum \hat{u}_t \cdot x_t = 0$.

עבור מודל ללא חותך:

בגזירת β בלבד: $\sum \hat{u}_t \cdot x_t = 0$.

מן המשוואות הנורמליות נובעות:

1. התכונות הגיאומטריות:

   א. $\sum \hat{u}_i = 0$.

   ב. $\sum x_i \hat{u}_i = 0$.

- ברגרסיה <u>ללא שיפוע</u> מתקיימת רק התכונה הגיאומטרית הראשונה.
  ברגרסיה <u>ללא חותך</u> מתקיימת רק התכונה הגיאומטרית השנייה.

2. התכונות האלגבריות:

   א. $\operatorname{cov}(x_i, \hat{u}_i) = 0$.

   ב. $\operatorname{cov}(\hat{y}_i, \hat{u}_i) = 0$.

   ג. $\bar{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\bar{x} = \bar{\hat{y}}$.

- התכונות האלגבריות תקפות עבור קו הרגרסיה הקלאסי (עם חותך ושיפוע) במדגם בלבד.

ההנחות הקלאסיות של מודל הרגרסיה:

1. קיים קשר ליניארי בין המשתנה המוסבר למשתנה המסביר.
2. X איננו קבוע: $S_{XX} = \sum_{t=1}^{T} \left(X_t - \bar{X}\right)^2 \neq 0$.
3. תוחלת ההפרעה האקראית היא אפס לכל תצפית: $E(u_t) = 0$ לכל t.
4. X_t אינם משתנים מקריים $\Leftarrow$ ניתן להוציא אותם מחוץ לתוחלת ולשונות $\Leftarrow$ $\operatorname{cov}(X_t, u_t) = 0$.

5. הומוסקדסטיות: שונות ההפרעה האקראית קבועה לכל תצפית:
$V(u_t)=\sigma_u^2$ לכל t.

6. u_t ב"ת: $\operatorname{cov}(u_t,u_s)=0$ לכל $t\neq s$.

7. ההפרעות האקראיות מתפלגות נורמלית: $u_t\approx N$.

תכונות האומדים:

אומדי הריבועים הפחותים הם לינאריים, חסרי הטיה, יעילים ועקיבים.

1. לינאריות:
אר"פ ניתנים להצגה כטרנספורמציה לינארית של Y_t.
כדי ש-$\hat{\beta}$ למשל, יהיה אומד ליניארי צריך להתקיים: $\hat{\beta}=\sum W_t\cdot Y_t$.
כאשר W_t היא קומבינציה של ערכי X בדרך כלל. למשל: $\hat{\beta}=\frac{\sum X_t\cdot Y_t}{\sum X_t^2}$.
כדי להביא את האומד לצורה: $\tilde{\beta}=\sum w_t\cdot y_i$ נעזר בשוויון: $\frac{\sum 0}{\sum 0}=\sum\frac{0}{\sum 0}$.
אומד זה ניתן להצגה בצורה הבאה:
$$\hat{\beta}=\sum\frac{X_t}{\sum X_t^2}Y_t=\sum W_t\cdot Y_t$$
$$W_t=\frac{X_t}{\sum X_t^2}$$
לפיכך מדובר באומד ליניארי.

- שימו לב כי:
W_t אסור שיכלול את Y_t.
Y_t אסור שיהיה במכנה או בשורש/חזקה (אלא אם כן במודל הנתון הוא מצוי בשורש/חזקה).

2. חוסר הטיה:

אומד $\hat{\vartheta}$ מסוים יהווה אח"ה לפרמטר ϑ אותו הוא אומד באוכלוסייה אם מתקיים: $E(\hat{\vartheta}) = \vartheta$.

כיצד יודעים אם אומד הוא חסר הטיה?

1. בשלב הראשון יש לבצע עבודת הכנה – מבטאים את האומד באמצעות הפרמטר האמיתי – מציבים במקום ה- Y_t את המודל ומפתחים אלגברית.

• יש לזכור כי: u_t y_t מהווים משתנים מקריים ⇐ נשארים בתוך התוחלת, השונות וה- $\sum$. x_t איננו משתנה מקרי (על פי הנחה מס' 4) ⇐ יוצא מחוץ לתוחלת ולשונות אך נשאר בתוך ה- $\sum$ ו- α β קבועים ⇐ יוצאים מחוץ לתוחלת, לשונות ול- $\sum$.

2. בשלב השני מפעילים תוחלת על האומד המפותח ואם התוחלת שווה לפרמטר האמיתי אז האומד חסר הטייה.

- חוסר הטייה מחייב את התקיימותן של הנחות (3) $E\left(u_t\right) = 0$ לכל t ו- (4) $\operatorname{cov}\left(X_t, u_t\right) = 0$.

3. יעילות:

יעילות פירושה השונות הקטנה ביותר. ככל שהשונות של האומד קטנה יותר, כך יש הסתברות גבוהה יותר שהוא יהיה קרוב לפרמטר האמיתי באוכלוסייה אותו הוא אומד.

$\hat{\vartheta}_1$ יקרא אומד יעיל יותר מ- $\hat{\vartheta}_2$ אם מתקיים שהשונות שלו קטנה יותר: $V(\hat{\vartheta}_1) < V(\hat{\vartheta}_2)$.

משפט גאוס מרקוב – אר"פ הם בעלי השונות הנמוכה ביותר בקבוצה שלהם (קבוצת האומדים הלינאריים חסרי ההטיה), והם נקראים: B.L.U.E (Best Linear Unbiased Estimation).

כיצד מחשבים שונות של אומד?

חייבות להתקיים הנחות (4) $\text{cov}(X_t,u_t)=0$, (5) $V(u_t)=\sigma_u^2$ לכל t ו-(6) $\text{cov}(u_t,u_s)=0$ לכל $t\neq s$. אם הן מתקיימות, מחשבים את השונות של האיברים המכילים את u_t מהפיתוח הקודם (לפי כללי הסיגמא והשונות).

4. עקיבות:
ככל שהמדגם יגדל כן יתקרב האומד לערך האמיתי של הפרמטר.
אם נגדיל את המדגם לאינסוף תצפיות ונחשב את האומד, הוא יהיה שווה לפרמטר האמיתי באוכלוסייה: $\begin{pmatrix}\hat{\theta}\to\vartheta\end{pmatrix}$ $(T\to\infty)$.
תנאי הכרחי לעקיבות:
האומד חייב להיות פונקציה של גודל המדגם. במילים אחרות, האומד צריך להיות מושפע מגודל המדגם. ברגע שהאומד עונה על תנאי זה הוא יהיה עקיב. אומד המחושב במדגם סופי בהגדרה לא יוכל להיות עקיב לפרמטר באוכלוסייה.

סיכום: השלבים להוכחת התכונות:

1. הוכחת ליניאריות.
2. הכנת האומד ⇐ להציב במקום Y_t את המודל האמיתי.
   במודל עם חותך: $Y_t=\alpha+\beta X_t+u_t$.
   במודל ללא חותך: $Y_t=\beta X_t+u_t$.
3. פיתוח האלגברה.
4. חישוב תוחלת, שונות, עקיבות.

- ליניאריות מהווה תנאי הכרחי לחוסר הטיה.
- ליניאריות וחוסר הטיה מהוות תנאי הכרחי לבחינת היעילות של האומד לפי משפט גאוס-מרקוב.
- עקיבות איננה תלויה בתכונות האחרות, אלא רק בהיותו של האומד פונקציה של גודל המדגם (לא מחושב על מדגם סופי). כך שאומד לא חייב להיות ליניארי או חסר הטיה כדי להיות עקיב.
- העקיבות משפיעה על היעילות של האומד. עבור אומדים התלויים בגודל המדגם: ככל שגודל המדגם גדול יותר כך שונות האומד קטנה והאומד יהיה יעיל יותר לפרמטר באוכ'.

שאלות:

גזירת ארפ:

1) כלכלן החליט לאמוד את המודל: $y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$.
   א. נסחו את בעיית ה-OLS.
   ב. מצאו את תנאי סדר ראשון של בעיית ה-OLS (המשוואות הנורמאליות).
   ג. מצאו נוסחה לקבלת האומדים: $\hat{\beta}$, $\hat{\alpha}$.
   ד. הוכיחו כי קו הרגרסיה עובר דרך נקודת הממוצעים $(\bar{X},\bar{Y})$.
   ה. בהנחה והיינו בוחרים אומד אחר ל- β שאינו אומד הריבועים הפחותים, מה היה יחס הביטויים: $\sum e_i$ ו- $\sum e_i^2$ של אומד זה ביחס לאומד הריבועים הפחותים?

2) כלכלן החליט לאמוד את המודל: $y_i = \beta x_i + u_i$.
   א. נסחו את בעיית ה-OLS.
   ב. מצאו את תנאי סדר ראשון של בעיית ה-OLS.
   ג. מצאו נוסחה לקבלת $\hat{\beta}$.
   ד. הוכיחו כי קו הרגרסיה אינו עובר דרך נקודת הממוצעים $(\bar{X},\bar{Y})$.
   ה. מהו התנאי שבו אומד הריבועים הפחותים שמצאתם בסעיף ג' יהיה זהה לנוסחה של אומד הריבועים הפחותים שנמצא בשאלה הקודמת (במודל עם חותך)?

3) חוקר רצה לחקור האם ציוני IQ משפיעים על הציון באקונומטריקה ולכן אסף תצפיות מ-5 סטודנטים:

SCORE	IQ	e_i
80	100	1
75	110	-1
80	110	1
90	103	2
85	102	-3

איזה מבין המודלים הבאים נאמד?
   א. $\hat{score}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \cdot IQ_i$.
   ב. $\hat{score}_i = \hat{\beta} \cdot IQ_i$.
   ג. $\hat{score}_i = \hat{\alpha}$.
   ד. $\hat{score}_i = \bar{y}$.

4) נבדק הקשר שבין שכר לשעה שעובד מסוים מרוויח אצל מעסיק מסוים (X) לבין כמות העובדים שמועסקים אצל אותו מעסיק (Y) (הניחו שכר שווה בין העובדים אצל אותו המעסיק).
לשם כך נדגמו 10 מעסיקים באופן מקרי ונתקבלו התוצאות הבאות:

$$\bar{x} = 35$$
$$\bar{y} = 5.8$$
$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 19{,}100$$
$$\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 440$$
$$\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 2858.85$$

מהי תחזית כמות העובדים המועסקים אצל מעסיק מסוים המשתכרים 25 ₪ לשעה?

5) כלכלן החליט לאמוד את המודל: $y_i = \alpha + u_i$.
א. נסחו את בעיית ה-OLS.
ב. מצאו את תנאי סדר ראשון של בעיית ה-OLS.
ג. מצאו נוסחה לקבלת $\hat{\alpha}$.

6) חוקר רצה לבדוק את המודל: $y_i = \hat{\beta} x_i + u_i$ כאשר המשתנה התלוי הוא הציון במקרו והב"ת הוא ציוני IQ. לשם כך אסף תצפיות של 5 סטודנטים:

SCORE	IQ	ציון חזוי	e_i
80	100		
90	110		
95	110		
92			5
	102		3

מאמידת הרגרסיה התקבל כי: $\hat{\beta} = 0.85$.
השלם את התאים הריקים בטבלה.

הנחות המודל:

7) שכר של עובדים מנובא על ידי השכלתם במודל הבא: $w_i = \alpha + \beta \cdot s_i + u_i$.

א. כתבו את ההנחות הקלאסיות במונחי המשתנים של המודל הנתון והסבירו אותן.

ב. התייחסו לכל אחת מהטענות הבאות וקבעו האם היא: הנחה קלאסית / משוואה נורמאלית (או תוצאה הנובעת ממשוואה נורמאלית) / אף אחד מהשניים:

i. $\operatorname{cov}(s_i, u_i) = 0$

ii. $E(u_i) = 0$

iii. $\operatorname{cov}(u_i, u_j) = 0$

iv. $\bar{e} = 0$

v. $\bar{w} = \bar{\hat{w}}$

vi. $\sum u_i = 0$

vii. $V(u_i) = \sigma_i$

viii. $S_s^{\ 2} \neq 0$

ix. $\operatorname{cov}(s, e) = 0$

x. $\operatorname{cov}(\hat{y}_i, e) = 0$

8) חוקר מעוניין לאמוד את ההשפעה של נוכחות בתרגולים על הציון בקורס אקונומטריקה. לשם כך אמד את המשוואה: $score = \alpha + \beta attendance + u$ הועלתה הטענה כי מודל זה אינו מקיים את הנחה מס' 4 של אי תלות בין המשתנה הב"ת לטעויות $\left(\operatorname{cov}(x_i, u_i) = 0\right)$. חווה דעתך על טענה זו.

ליניאריות:

9) האם האומד: $\hat{\beta} = \dfrac{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})Y_t}{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \bar{X})^2}$ הוא ליניארי?

10) האם האומד: $\tilde{\beta} = \dfrac{\sum_{t=1}^{T} Y_t^3 \sum_{t=1}^{T} X_t(Z_t + Y_t)}{\sum_{t=1}^{T} X_t^2}$ הוא ליניארי?

11) כלכלן החליט לאמוד את המודל: $y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$.
מי מהאומדים הבאים הוא ליניארי ומהן המשקולות:

א. $\tilde{\beta} = \dfrac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$.

ב. $\tilde{\beta} = \dfrac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$.

ג. $\tilde{\beta} = \sum \left(\dfrac{y_i}{x_i} \right)^2$.

ד. $\tilde{\beta} = \sum \dfrac{Y_i}{n}$.

ה. $\tilde{\beta} = \sum \dfrac{X_t}{Y_i}$.

ו. $\tilde{\beta} = \dfrac{\sum x_i y_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$.

ז. $\tilde{\beta} = \dfrac{\bar{Y}}{\bar{X}}$.

חוסר הטיה:

12) נתון האומד הבא: $\tilde{\beta} = \dfrac{\sum_{t=1}^{T} X_t Y_t}{\sum_{t=1}^{T} X_t^2}$.
האם האומד הנ"ל הוא חסר הטיה?
א. בדוק במודל עם חותך.
ב. בדוק במודל ללא חותך.

13) נתון המודל הבא: $y_i = \alpha + \beta\, x_i + u_i$ נתון בנוסף כי האומד ל- β הינו ליניארי וחסר הטיה.
איזה מן הטענות מתקיימת בהכרח:
א. $\sum w_i x_i = 1$.
ב. $\sum w_i x_i = 0$.
ג. $\sum w_i = 0$.

יעילות ועקיבות:

14) כלכלן הציע את האומד הבא עבור β : $\tilde{\beta} = \frac{y_9 - y_5 + y_2}{x_9 - x_5 + x_2}$.

א. בדוק האם האומד חסר הטיה עבור המודל הקלאסי.

ב. האם תשתנה תשובתך אם מדובר באומד ללא חותך?

ג. חשב את שונות האומד עבור מודל ללא חותך.

תרגול ממבחנים:

15) נתון המודל: $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$, $T = 100$, כאשר מתקיימות כל ההנחות הקלאסיות.

נתון האומד: $\tilde{\beta} = \frac{\sum_{t=51}^{100} Y_t - \sum_{t=1}^{50} Y_t}{\sum_{t=51}^{100} X_t - \sum_{t=1}^{50} X_t}$.

א. האומד $\tilde{\beta}$ הינו אומד חסר הטיה ל- β. נכון / לא נכון

ב. האומד $\tilde{\beta}$ הינו אומד עקיב ל- β. נכון / לא נכון

ג. האומד $\tilde{\beta}$ הינו אומד ליניארי ל- β. נכון / לא נכון

ד. האומד $\tilde{\beta}$ הינו אומד יעיל ל- β. נכון / לא נכון

ה. השונות האמיתית של $\tilde{\beta}$ היא?

16) נתון המודל: $Y_t = \beta X_t + u_t$, כאשר כל ההנחות הקלאסיות מתקיימות. (יש לשים לב המודל ללא חותך).

נתון האומד: $\tilde{\beta} = \frac{\sum Y_t}{\sum X_t}$.

א. האומד $\tilde{\beta}$ הינו אומד מוטה ל- β : נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

ב. על סמך משפט גאוס-מרקוב ניתן להסיק כי $\tilde{\beta}$ איננו אומד יעיל יותר מאומד הריבועים הפחותים: נכון / לא נכון / לא ניתן לדעת

ג. מהי השונות האמיתית של $\tilde{\beta}$?

17) נתון המודל: $Y_t = \beta X_t + u_t$, כאשר כל ההנחות הקלאסיות מתקיימות.
(יש לשים לב המודל ללא חותך).

נתון האומד: $\tilde{\beta} = \dfrac{\sum X_t Y_t}{\sum \left(X_t - \bar{X}\right)^2}$.

א. מהי התוחלת של $\tilde{\beta}$?

ב. $E\left(\tilde{\beta}\right) < \beta$. — נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

ג. על סמך משפט גאוס-מרקוב ניתן להסיק כי אומד הריבועים הפחותים הינו אומד יעיל יותר מ- $\tilde{\beta}$. — נכון / לא נכון / לא ניתן לדעת

ד. מהי השונות האמיתית של האומד: $\dfrac{\sum X_t Y_t}{\sum X_t^2}$?

18) בכל השאלות ההנחות הקלאסיות מתקיימות.
האומדים הם אר״פ, והמודל הוא: $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.

א. $E\left(Y_t\right) = E\left(\hat{Y}_t\right)$ — נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

ב. $\sum_{t=1}^{T} \left(X_t - \bar{X}\right)\bar{Y} \neq 0$ — נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

ג. אמידת המודל בשיטת הריבועים הפחותים תיתן את התוצאה: $\sum_{t=1}^{T} u_t = 0$. — נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

ד. אם נתון ש- $r_{XY} = 0.57$, אזי $\hat{\beta}$:
i. הוא בהכרח שלילי.
ii. הוא בהכרח חיובי.
iii. הוא בהכרח שווה לאפס.
iv. לא ניתן לקבוע את סימנו על סמך הנתונים הקיימים.

ה. סמן את הטענה הנכונה בהכרח:
i. $\sum_{t=1}^{T} \left(X_t - \bar{Y}\right)\hat{u}_t = 0$.
ii. $S_{XX} = \sum_{t=1}^{T} X_t^2 - \left(T\bar{X}\right)^2$.
iii. $\sum_{t=1}^{T} X_t u_t = 0$.
iv. אף אחת מהטענות הנ״ל אינה נכונה בהכרח.

ו. אומדי הריבועים הפחותים אינם חסרי הטיה, אם נתון שהשונות של u_t אינה קבועה. נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

ז. אומד חסר הטיה הוא אינו בהכרח גם אומד עקיב. נכון / לא נכון / אי אפשר לדעת

תשובות סופיות:

1) א. $\min_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \sum\left[y_t-\left(\hat{\alpha}+\hat{\beta}x_t\right)\right]^2$ ב. $\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i x_i=0 \Rightarrow \hat{\beta}$, $\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i=0 \Rightarrow \hat{\alpha}$.
ג. $\bar{y}-\hat{\beta}\bar{x}=\hat{\alpha}$, $\frac{S_{xy}}{S_{xx}}=\hat{\beta}$. ד. הוכחה. ה. ראה סרטון.

2) א. $\min_{\hat{\beta}} \sum\left[y_t-\left(\hat{\beta}x_t\right)\right]^2$ ב. $\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i x_i=0 \Rightarrow \hat{\beta}$.
ג. $\frac{\sum y_i x_i}{\sum x_i^2}=\hat{\beta}$. ד. הוכחה. ה. ראה סרטון.

3) א'.

4) $\hat{y}_i=4.59$.

5) א. $\min_{\hat{\alpha}} \sum\left[y_t-\left(\hat{\alpha}\right)\right]^2$. ב. $\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i=0$. ג. $\hat{\alpha}=\bar{y}$.

6)

SCORE	IQ	ציון חזוי	e_i
80	100	85	-5
90	110	93.5	-3.5
95	110	93.5	1.5
92	114	97	5
89.7	102	86.7	3

7) א. ראה סרטון.
ב. i. הנחה, לא בהכרח מתקיים.
ii. הנחה, לא בהכרח מתקיים.
iii. הנחה, לא בהכרח מתקיים.
iv. נגזר מהמשוואה, מתקיים בהכרח.
v. נגזר מהמשוואה, מתקיים בהכרח.
vi. אף אחד מהשניים.
vii. אף אחד מהשניים.
viii. הנחה, לא בהכרח מתקיים.
ix. נגזר מהמשוואה, מתקיים בהכרח.
x. נגזר מהמשוואה, מתקיים בהכרח.

8) ראה סרטון.

9) כן.

10) לא.

11) א. ליניארי, $W_i = \frac{x_i}{\sum x_i^2}$. ב. ליניארי, $W_i = \frac{(x_i - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$.

ג. לא ליניארי. ד. ליניארי, $W_i = \frac{1}{n}$.

ה. לא ליניארי. ו. ליניארי, $W_i = \frac{x_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$.

ז. ליניארי, $W_i = \frac{1}{\sum x_i}$.

12) א. לא. ב. כן.

13) א' ו-ג'.

14) א. מוטה. ב. חסר הטיה. ג. $\frac{1}{(x_9 - x_5 + x_2)^2} \sigma_u^2$.

15) א. נכון. ב. לא נכון. ג. נכון. ד. לא נכון.

ה. $V(\tilde{\beta}) = \frac{100\sigma_u^2}{\left(\sum_{t=51}^{100} X_t - \sum_{t=1}^{50} X_t\right)^2}$.

16) א. לא נכון. ב. נכון. ג. $V(\tilde{\beta}) = \frac{T\sigma_u^2}{\left(\sum X_t\right)^2}$.

17) א. $E(\tilde{\beta}) = \frac{\beta \sum X_t^2}{\sum (X_t - \bar{X})^2}$. ב. לא נכון. ג. לא נכון.

ד. $\frac{\sigma_u^2}{\sum X_t^2}$.

18) א. נכון. ב. לא נכון. ג. לא נכון. ד. ii.

ה. i. ו. לא נכון. ז. נכון.

שיטות מחקר במימון

פרק 14 - מודלים לא ליניאריים

תוכן העניינים

מודלים לא ליניאריים:

רקע:

המודל	משמעות ה- β	השינוי השולי $\left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)$ בכמה ישתנה Y אם נגדיל את X ביחידה?	הגמישות $\left(\frac{\partial Y}{\partial X}\cdot\frac{X}{Y}\right)$ בכמה % ישתנה Y אם נגדיל את X ב-1%?
ליניארי: $Y=\alpha+\beta X+u$	השינוי השולי אם נגדיל את X ביחידה Y ישתנה ב- β יחידות	β	$\frac{\beta X}{Y}$
חצי לוגריתמי: $\ln Y=\alpha+\beta X+u$ $\left(Y=e^{\alpha+\beta X+u}\right)$	שיעור השינוי השולי אם נגדיל את X ביחידה Y ישתנה ב- $100\cdot\beta\%$	βY	βX
לוגריתמי כפול: $\ln Y=\alpha+\beta\ln X+u$ $\left(Y=e^{\alpha}\cdot X^{\beta}\cdot e^{u}\right)$	הגמישות אם נגדיל את X ב-1% Y ישתנה ב- $\beta\%$	$\frac{\beta Y}{X}$	β
לוג ליניארי: $Y=\alpha+\beta\ln X+u$ $\left(e^{y}=e^{\alpha}\cdot X^{\beta}\cdot e^{u}\right)$	אין משמעות כלכלית אם נגדיל את X ב-1% Y ישתנה ב- β	$\frac{\beta}{X}$	$\frac{\beta}{Y}$

- המשתנה שיש בו LN השינוי בו יהיה באחוזים.

תזכורת של חוקי לוגים:

$$LN\left(e^{x}\right)=X$$
$$LN\left(X^{Y}\right)=Y\cdot LN\left(X\right)$$

$$LN\left(X\cdot Y\right)=LN\left(X\right)+LN\left(Y\right)$$
$$LN\left(\frac{X}{Y}\right)=LN\left(X\right)-LN\left(Y\right)$$

שאלות:

1) על מנת לאמד את התשואה להשכלה בישראל בשנים 1948-1990 נאמדו המודלים הבאים:

1. $MWAGE_t = 139.547 + 118.628 \cdot SCL_t$.
2. $MWAGE_t = -1445.08 + 1239.60 \cdot LN(SCL)_t$.
3. $LN(MWAGE)_t = 5.244 + 0.778 \cdot LN(SCL)_t$.
4. $LN(MWAGE)_t = 6.292 + 0.070 \cdot SCL_t$.

א. הסבירו את המשמעות של β בכל אחד מהמודלים.

ב. חשבו את הגמישות בנקודת הממוצעים: (12.311,1600.01) עבור כל אחד מהמודלים.

2) נתונים תוצאות האמידה של המודלים הבאים:

1. $\hat{Y} = e^{4.5} \cdot X^{0.05}$.
2. $\hat{Y} = e^{4.5+0.05X}$.
3. $\hat{Y} = 4.5 + \frac{0.05}{X}$.
4. $\hat{Y} = \frac{1}{1+e^{4.5+0.05X}}$.

א. כתבו את המודלים בצורה ליניארית בעזרת טרנספורמציה מתאימה.

ב. עבור כל אחד מהמודלים ערכו תחזית נקודתית עבור $X = 6$.

3) נתונים המודלים הבאים עבור התוצר במשק:

1. $Q_i = AK_i^{\beta_1} e^{u_i}$.
2. $Q_i = Ae^{\beta_1 L_i + u_i}$.
3. $Q_i = A + K_i^{\beta_1} + e^{u_i}$.
4. $Q_i = A + \frac{\beta_1}{L_i} + u_i$.
5. $Q_i = A + \beta_1 \sqrt{K_i} + u_i$.
6. $Q_i = e^{A+\beta_1 Ki + u_i}$.
7. $Q_i = A\left(\frac{K_i}{2} + 7\right)^{\beta_1} e^{u_i}$.
8. $Q_i = A + \beta_1 L_i + u_i$.
9. $Q_i = A + \beta_1 \left(\frac{K_i}{L_i}\right) + u_i$.

כאשר:

Q - הוצאות צריכה על מוצר מסוים על ידי פרט מסוים.

A - הוצאות צריכה על המוצר בהינתן רמת הכנסה אפסית.

K - הכנסת הפרט.

L - שנות לימוד.

א. מי מהמודלים הבאים ניתן לאמידה בשיטת OLS?

ב. מי מבין המודלים שלא ניתנים לאמידה בשיטת OLS ניתן להביא למודל ליניארי בפרמטרים ועל כן לאמוד את הפרמטרים שלו?

ג. עבור כל אחד מהמודלים קבעו מיהו המשתנה המוסבר ומיהו המסביר במשוואת הרגרסיה הליניארית.

ד. עקומת אנג׳ל מתארת את גמישות הצריכה של הפרט מוצר מסוים ביחס להכנסתו. איזה מהמודלים מתאים כדי לתאר את עקומת אנג׳ל?

4) נתון המודל הבא: $Q_i = \frac{A}{K_i^{\beta_1}} e^{u_i}$.

א. האם ניתן לאמוד את המודל בשיטת OLS?

ב. מה המשוואה שצריך לאמוד על מנת לקבל את הפרמטרים למודל זה (כלומר כיצד הופכים את המודל לליניארי בפרמטרים)?

ג. נאמד המודל הבא: $\ln(Q_i) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(K_i) + u_i$, והתקבלו התוצאות הבאות: $\hat{\alpha}_0 = 3$, $\hat{\alpha}_1 = 0.8$.

מהם האומדנים עבור: A, β_1?

5) נתון כי הקשר באוכלוסייה בין X ל- Y נתון על ידי המודל הבא: $\ln Y = \alpha + \beta \ln X + u$. נתון גם כי עבור המודל הנ״ל כל ההנחות הקלאסיות מתקיימות.

כלכלן הציע את האומד הבא עבור β: $\tilde{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(\ln X_t - \ln \bar{X})\ln Y_t}{\sum_{t=1}^{T}(\ln X_t - \ln \bar{X})^2}$.

א. האם האומד ליניארי?

ב. האם האומד חסר הטיה?

ג. האם האומד *blue*?

ד. מהי שונותו?

תשובות סופיות:

1) א.1. השינוי השולי. 2. אין משמעות כלכלית. 3. גמישות.
4. שיעור השינוי השולי.
ב.1. 0.912. 2. 0.77. 3. 0.778. 4. 0.861.

2) א.1. $\hat{\ln}(Y)=4.5+0.05\cdot\ln(X)$. 2. $\hat{\ln}(Y)=4.5+0.05X$.
3. אין צורך. 4. $\ln\left(\frac{1-\hat{Y}}{\hat{Y}}\right)=4.5+0.05X$.
ב.1. 98.45. 2. 121.51. 3. 4.50833. 4. 0.00816.

3) א. מודלים: 4, 5, 8 ו-9.
ב. מודלים: 1, 2, 6 ו-7.
ג.1. מסביר: $\ln(K_i)$, מוסבר: $\ln(Q_i)$. 2. מסביר: L_i, מוסבר: $\ln(Q_i)$.
3. אינו ליניארי. 4. מסביר: $\frac{1}{L_i}$, מוסבר: Q_i.
5. מסביר: $\sqrt{K_i}$, מוסבר: Q_i. 6. מסביר: K_i, מוסבר: $\ln(Q_i)$.
7. מסביר: $K_i=\frac{K_i}{2}+7$, מוסבר: $\ln(Q_i)$. 8. מסביר: L_i, מוסבר: Q_i.
9. מסביר: $\frac{K_i}{L_i}$, מוסבר: Q_i.
ד. מודלים: 1 ו-7.

4) א. לא. ב. $\ln(Q_i)=\ln(A)-\beta_1\ln(K_i)+u_i$.
ג. $A=20$, $\beta_1=-0.8$.

5) א. כן. ב. כן. ג. כן. ד. $V(\hat{\beta})=\frac{\sigma_u^2}{SS\ln x}$.

שיטות מחקר במימון

פרק 15 - מבחני המובהקות וקריאת פלטים - תוכנת SAS

תוכן העניינים

מבחני המובהקות וקריאת פלטים – תוכנת SAS:

רקע:

פלט ניתוח שונות (Analysis of Variance):

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	k	RSS	$RSS/k = MSR$	$F = \frac{MSR}{MSE}$	PF
Error	$+\ T-k-1$	$+\ ESS$	$ESS/T-k-1 = MSE$		
C Total	$T-1$	TSS			

Root MSE	$\sqrt{MSE} = s_u$	R-square	$R^2 = \frac{RSS}{TSS}$
Dep Mean	$\overline{Y}$	Adj R-sq	$\overline{R}^2 = 1 - \frac{ESS}{TSS} \cdot \frac{T-1}{T-k-1}$
C.V.	$\frac{s_u}{\overline{Y}} \cdot 100$		

פלט מקדמי הרגרסיה (Parameter Estimates):

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	$\hat{\alpha}$	$s_{\hat{\alpha}}$	$\frac{\hat{\alpha}}{s_{\hat{\alpha}}} = t_{(\hat{\alpha}=0)}$	$Pt_{\hat{\alpha}}$
X	1	$\hat{\beta}$	$s_{\hat{\beta}}$	$\frac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}} = t_{(\hat{\beta}=0)}$	$Pt_{\hat{\beta}}$

פלט ה – Covariance of Estimates:

פלט שמתאר את השונות המשותפת (covariance) של האומדנים- $\hat{\alpha}$ ו- $\hat{\beta}$:

Covariance of Estimates		
COVB	**INTERCEP**	X
INTERCEP	$s^2_{\hat{\alpha}}$	$\operatorname{cov}\left(\hat{\alpha},\hat{\beta}\right)$
X	$\operatorname{cov}\left(\hat{\alpha},\hat{\beta}\right)$	$s^2_{\hat{\beta}}$

עריכת תחזית וקריאת פלטים (תוכנת SPSS):

אמידה נקודתית:

אמידה נקודתית עבור X_0 מסוים (תחזית).

מחושבת על פי קו הרגרסיה במדגם: $\hat{Y}_0=\hat{\alpha}+\hat{\beta}\cdot X_0$.

אמידה מרווח ל- $E(Y)$:

אמידת התחזית באוכלוסייה עבור X_0 מסוים. נחשב רווח בר סמך לערך ממוצע של Y באוכ' עבור X_0 מסוים ($E(Y)$) ברמת סמך $1-\alpha$.

נוסחת הרב"ס: $\hat{Y}\pm t_{n-2;1-\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_u\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\left(X_0-\bar{X}\right)^2}{\sum\left(X_i-\bar{X}\right)^2}}$.

$\sum\left(X_i-\bar{X}\right)^2=S_{XX}=(n-1)S_X^2$, $\hat{\sigma}_u=MSE=\frac{SSE}{n-2}$.

רישום הרב"ס: $p\left(\_\_\_\le E(Y)\le\_\_\_\right)=1-\alpha$.

אמידה מרווח ל- Y :

אמידת ערך בודד של Y באוכלוסייה עבור X_0 מסוים. נחשב רווח בר סמך לערך בודד של Y באוכ' עבור X_0 מסוים $\left(Y_0\right)$ ברמת סמך $1-\alpha$.

נוסחת הרב"ס: $\hat{Y}\pm t_{n-2;1-\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_u\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{\left(X_0-\bar{X}\right)^2}{\sum\left(X_i-\bar{X}\right)^2}}$.

רישום הרב"ס: $p\left(\_\_\_\le Y\le\_\_\_\right)=1-\alpha$.

- רב"ס לערך בודד יהיה רחב יותר מאשר רב"ס לערך ממוצע משום שטעות התקן בראשון גדולה מאשר באחרון.

שאלות:

פלט ניתוח שונות:

1) חוקר רצה לבחון את השפעת ההכנסה (*INCOME*) על גובה המס (*TAX*) (במיליארדי $) שגובה מדינה במערב לפי המודל: $TAX_t = \alpha + \beta \cdot INCOME_t + u_t$.
לשם כך אסף נתונים מ-51 מדינות. להלן התוצאות:

Model: MODEL1

Dependent Variable: TAX

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	1	2046.89694	2046.89694	8798.672	0.0001
Error	49	11.39922	0.23264		
C Total	50	2058.29615			

Root MSE	0.48232	R-square	0.9945
Dep Mean	5.4242	Adj R-sq	0.9943
C.V.	8.88711		

בדקו את ההשערה כי המודל מובהק ברמת מובהקות של 0.05.

פלט מקדמי הרגרסיה:

2) בהמשך לדוגמא הקודמת – בדיקת השפעת ההכנסה על גודל המס, התקבלו גם התוצאות הבאות:

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	-0.086912	0.08953904	-0.971	0.3365
INCOME	1	0.152232	0.0016229	93.801	0.0001

א. אמדו את המודל: $TAX = \alpha + \beta \cdot INCOME + U$.
מהי המשמעות הכלכלית של β?

ב. האם המודל מובהק? בדקו על סמך הפלט הנ"ל ברמת מובהקות של 0.05.

ג. מהי רמת המובהקות הקטנה ביותר, עבורה עדיין תידחה השערת האפס מסעיף ב'?

ד. בדקו את ההשערה כי ככל שההכנסה עולה כך עולה גם המס (שיפוע β חיובי) ברמת מובהקות של 0.01.

ה. בנו רווח-סמך ברמת סמך של 95% עבור β.

ו. בדקו את ההשערה שתוספת של מיליארד $ להכנסה תגדיל את המס ב-0.2 מיליארד $, ברמת מובהקות של 0.05.

- שימו לב כי:
  במודל עם משתנה מסביר אחד בלבד קיימת זהות בין מבחן F למובהקות המודל לבין מבחן t למובהקות ה-β:

$$F_{(1,T-2;1-\alpha)}=t^2_{\left(T-2;1-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$F=t^2_{\hat{\beta}}$$

  כלומר: כל החלטה המתקבלת במבחן אחד חייבת להיות זהה להחלטה המתקבלת במבחן השני.

פלט שונויות משותפות:

3) נתון פלט האמידה של המודל: $Y_t=\alpha+\beta X_t+u_t$, שלצורך אמידתו נאספו 240 תצפיות:

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	5.25	0.25	21	0.0000
X	1	0.96	0.12	8	0.0000

Covariance of Estimates

	INTERCEP	X
INTERCEP	0.0625	-0.003
X	-0.003	0.0144

יש לבדוק את ההשערה: $H_0:\alpha=5\beta$.

שאלה מסכמת:

4) חוקר רצה לבדוק את השפעת הותק בעבודה (EXP) על השכר ($SALARY$) לפי המודל: $\ln\left(SALARY_t\right)=\alpha+\beta\cdot EXP_t+u_t$. הוא אסף 403 תצפיות, ואמד את הפרמטרים בתוכנת SAS. להלן חלקים מהפלט ויש להשלימו:

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	----	----	5.68015	----	----
Error	----	205.22539	----		
C Total	----	----			

Root MSE	----	R-square	----
Dep Mean	7.14247	Adj R-sq	0.0245
C.V.	10.01602		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	---- (*)	----	----	----
EXP	1	-0.008740	----	----	0.0009

Covariance of Estimates

COVB	INTERCEP	EXP
INTERCEP	0.0047463101	----
EXP	-0.000154685	6.882844 E-6

- נתון נוסף: $EXP=22$.

א. קיים קשר חיובי מובהק בין ותק ללוג השכר. נכון / לא נכון

ב. שיעור התשואה בשכר לשנת ותק הוא?

ג. תחזית לוג השכר עבור אדם בעל 10 שנות ותק היא?

ביצוע תחזיות:

5) במדגם של 30 דירות מושכרות לסטודנטים ברדיוס של עד 2 ק"מ מסביב למכללה נחקר הקשר בין שכר דירה למספר הסטודנטים הגרים בדירה. להלן התוצאות:

Descriptive Statistics

	Mean	Std. Deviation	N
שכר הדירה	1386.7667	509.46027	30
מספר הסטודנטים	3.0000	1.31306	30

Model Summary[b]

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.602[a]	.362	.339	414.05503

a. Predictors: (Constant), number of students
b. Dependent Variable:rent

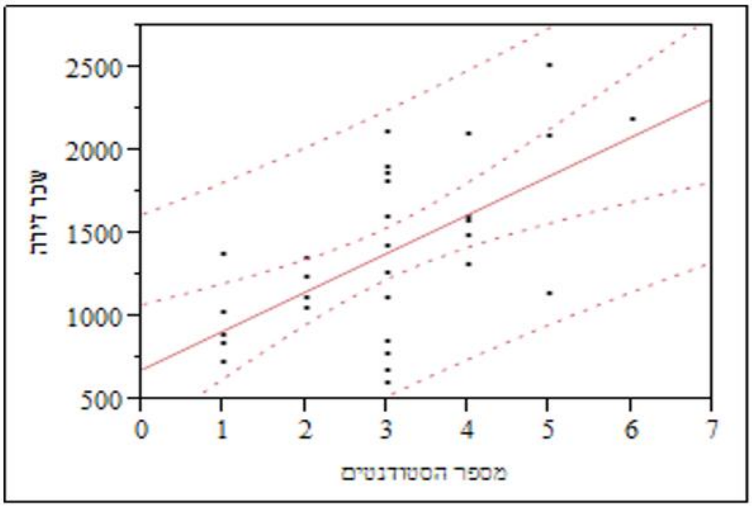
ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	Df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	2726579.520	1	2726579.520	15.904	.000[a]
	Residual	4800363.847	28	171441.566		
	Total	7526943.367	29			

a. Predictors: (Constant), number of students
b. Dependent Variable: rent

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	T	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	686.207	191.244		3.588	.001
	מספר הסטודנטים	233.520	58.556	.602	3.988	.000



א. חשב אומדן נקודתי לשכר הדירה אותו ישלמו סטודנטים החולקים את הדירה עם שותף אחד בלבד.

ב. אמוד את שכר הדירה הממוצע שישלמו סטודנטים החולקים את הדירה עם שותף אחד בלבד, ברמת בטחון של 95%.

ג. אמוד את שכר הדירה שישלם סטודנט יחיד החולק את הדירה עם שותף אחד בלבד, ברמת ביטחון של 95%.

תשובות סופיות:

1) יש עדות לכך.

2) א. ראה סרטון. ב. יש עדות לכך. ג. $Pt_{\hat{\beta}} = 0.0001$.

ד. יש עדות לכך. ה. $P\left(0.1488 \le \beta \le 0.1554\right) = 0.95$.

ו. יש עדות לכך.

3) אין עדות לכך.

4) א. לא נכון. ב. -0.87%. ג. 7.24735.

5) א. 1153.247. ב. $p\left(957.4 \le \mu_{Y_{X=2}} \le 1349.08\right) = 0.95$.

ג. $p\left(282.94 \le Y_{X=2} \le 2023.55\right) = 0.95$.

שיטות מחקר במימון

פרק 16 - שינוי יחידות מדידה

תוכן העניינים

שינוי יחידות מדידה:

רקע:

טרנספורמציה ליניארית: הוספה/החסרה של קבוע ו/או הכפלה/חילוק של קבוע של אחד או שני המשתנים (התלוי והב"ת).

- טרנספורמציה ליניארית של המשתנים לא תשפיע על: R^2, F, $t_{\hat{\beta}}$ ו- PF.

השינויים מסוכמים בטבלה הבאה:

	$\hat{\beta}'$	$\hat{\alpha}'$	$S_{\hat{\beta}}$	$S\hat{\alpha}$
הוספת קבוע ל- X: $Y=\alpha'+\beta'(X+d)+v$	$\hat{\beta}'=\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}'=\hat{\alpha}-\hat{\beta}d$	$s_{\hat{\beta}'}=s_{\hat{\beta}}$	$s_{\hat{\alpha}'}\neq s_{\hat{\alpha}}$
הוספת קבוע ל- Y: $Y+d=\alpha'+\beta'X+v$	$\hat{\beta}'=\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}'=\hat{\alpha}+d$	$s_{\hat{\beta}'}=s_{\hat{\beta}}$	$s_{\hat{\alpha}'}=s_{\hat{\alpha}}$
הכפלת X **פי קבוע:** $Y=\alpha'+\beta'(dX)+v$	$\hat{\beta}'=\frac{\hat{\beta}}{d}$	$\hat{\alpha}'=\hat{\alpha}$	$s_{\hat{\beta}'}=\frac{s_{\hat{\beta}}}{d}$	$s_{\hat{\alpha}'}=s_{\hat{\alpha}}$
הכפלת Y **פי קבוע:** $dY=\alpha'+\beta'X+v$	$\hat{\beta}'=d\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}'=d\hat{\alpha}$	$s_{\hat{\beta}'}=ds_{\hat{\beta}}$	$s_{\hat{\alpha}'}=ds_{\hat{\alpha}}$

- $t_{(\hat{\beta}'=0)}=t_{(\hat{\beta}=0)}$ תמיד.
- $t_{(\hat{\alpha}'=0)}=t_{(\hat{\alpha}=0)}$ רק בהכפלות.

שאלות:

1) חוקר ביקש לאמוד את הקשר בין שכר ב-₪ (*MWAGE*) לבין שנות לימוד (*SCL*) באמצעות 2 מודלים שונים.
להלן תוצאות האמידה:

א. $MWAGE_t = 139.54 + 118.62 \cdot SCL_t$.

ב. $MWAGE_t = -1445.08 + 1239.60 \cdot LN\left(SCL\right)_t$.

חשבו מחדש את מקדמי הרגרסיה וסטטיסטי המבחן F בכל אחד מהמודלים כתוצאה:

1. התברר כי נעשה טעות בחישוב מספר שנות הלימוד, ויש צורך להוסיף 20% למשתנה המקורי.
2. התברר כי הקשר בין שכר לשנות לימוד הוא ריבועי ולכן יש צורך להעלות את המשתנה המקורי של מספר שנות הלימוד בריבוע.

2) בהמשך לנתוני השאלה לדוגמא מהפרק החמישי:
החוקר טען כי יש לבדוק את הקשר בין שכר לוותק ע"י שימוש בשכר נטו (*NET*) ולא בשכר ברוטו (*SALARY*). (קיים שיעור מס קבוע של 20%).
המודל הוא: $\ln\left(NET_t\right) = \alpha' + \beta' \cdot EXP_t + v_t$.
מה יהיו ערכי האומדים, סטיות התקן שלהם וטיב ההתאמה באמידת מודל זה?

תשובות סופיות:

1) 1. א. $\hat{\alpha}' = \alpha = 139.59$, $\hat{\beta}' = 98.85$, סטטיסטי F לא משתנה.
ב. $\hat{\alpha}' = -1671$, $\hat{\beta}' = 1239.6$, סטטיסטי F לא משתנה.
2. לא ניתן לדעת.

2) $S_{\hat{\alpha}'} = S_{\hat{\alpha}} = 0.0688935$, $S_{\hat{\beta}'} = S_{\hat{\beta}} = 0.0026235$, $\hat{\alpha}' = 7.11161$, $\hat{\beta}' = \hat{\beta} = -0.00874$,
$R^2 = 0.0269$.

שיטות מחקר במימון

פרק 17 - הרגרסיה המרובה

תוכן העניינים

רגרסיה מרובה:

רקע:

מבחן T ו-F:

כאשר יש יותר ממשתנה מסביר אחד, מדובר ברגרסיה מרובה.

המודל הקלאסי: $Y_t = \alpha + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \ldots + \beta_k X_{kt} + u_t$.

- קבוע α יש אחד.
- מספר ה-β טות כמספר המשתנים הב״ת במודל.

מבחן F למובהקות המודל:

השערות: $\begin{matrix} H_0 = \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_K = 0 \\ H_1 : OTHERWISE \end{matrix}$.

סטטיסטי המבחן F וכלל ההכרעה:

$$F = \frac{\frac{RSS}{k}}{\frac{ESS}{T-k-1}} = \frac{\frac{R^2}{k}}{\frac{1-R^2}{T-k-1}} > F\left(k, T-k-1; 1-\alpha\right).$$

מבחן t למובהקות ה-β טות:

מבחן לבדיקת מובהקות β ספציפית:

השערות: $\begin{matrix} H_0 = \beta_1 = 0 \\ H_1 : \beta_1 \neq 0 \end{matrix}$.

סטטיסטי המבחן t וכלל ההכרעה:

$$\left|t_{\hat{\beta}_i}\right| = \left|\frac{\hat{\beta}_i}{S_{\hat{\beta}_i}}\right| > t_{\left(T-k-1; 1-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

השוואה בין מודלים – $\bar{R}^2$ וחוק חיטובסקי:

בכדי להחליט האם כדאי לנו להוסיף למודל משתנה ב"ת מסוים:
נשווה את פרופורציית השונות המוסברת המתוקנת $\bar{R}^2$ בין המודל ללא המשתנה המסביר לבין המודל עם המשתנה המסביר שהוספנו.

- ניתן להשתמש גם באומד המוטה - R^2 להשוואה בין מודלים אם מתקיימים שני התנאים הבאים:
  1. מספר המשתנים זהה.
  2. המשתנה המוסבר זהה.

לפי חוק חיטובסקי – בהוספת משתנה מסביר אחד בלבד למודל ה- $\bar{R}^2$ יעלה אך ורק אם: $\left|t_{\hat{\beta}}\right|>1$.

כאשר: $\left|t_{\hat{\beta}}\right|<1$ אז $\bar{R}^2$ ירד בהוספת המשתנה והוא גם לא יהיה רלוונטי למודל (מובהק).

כאשר: $\left|t_{\hat{\beta}}\right|>2$ אז $\bar{R}^2$ יעלה והמשתנה שהוסף יהיה גם מובהק.

כאשר: $1<\left|t_{\hat{\beta}}\right|<2$ אז ה- $\bar{R}^2$ יעלה אך יש לבדוק את רלוונטיות המשתנה שהוסף למודל על פי מבחן t.

שאלות:

מבחן T ו-F:

1) נאמד המודל: $Y_t = \alpha + \beta_x X_t + \beta_z Z_t + \beta_w W_t + \beta_s S_t + u_t$ והתקבלו התוצאות הבאות:

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	------	646169.84	------------	-----------	0.0000
Error	------	-----------	------------		
C Total	203	646790.01			

Root MSE	------------	R-square	-------------
Dep Mean	178.6645	Adj R-sq	0.999022
C.V.	0.988075		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	5.067731	0.456604	11.09874	0.0000
X	1	-------------	0.042711	22.84485	0.0000
Z	1	3.005385	0.008679	346.2721	0.0000
W	1	-5.029101	0.073149	-------------	0.0000
S	1	8.974106	0.029075	308.6485	0.0000

א. השלם את הנתונים החסרים בפלט.
ב. האם המודל מובהק? בדקו ברמת מובהקות של 0.05.
ג. האם משתנה W רלוונטי למודל? בדקו ברמת מובהקות של 0.01.

השוואה בין מודלים:

2) במודל לניבוי ההכנסה על פי שנות לימוד וותק במקום העבודה, התקבל: $\bar{R}^2 = 0.266$. הוסף המשתנה היקף המשרה. במבחן למובהקות המשתנה הנוסף התקבל: $t_{\hat{\beta}} = 0.456$. האם ערך $\bar{R}^2$ יעלה/ירד/לא ישתנה בהוספת המשתנה הנוסף למודל?

מבחן Wald ו-T מורכב:

3) נאמד המודל: $Y_t = \alpha + \beta_x X_t + \beta_z Z_t + \beta_w W_t + \beta_s S_t + u_t$ והתקבלו התוצאות הבאות:

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	4	646169.84	161542.46	51835.84	0.0000
Error	199	620.1683	3.1164236		
C Total	203	646790.01			

Root MSE	1.7653395	R-square	0.999041
Dep Mean	178.6645	Adj R-sq	0.999022
C.V.	0.988075		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	5.067731	0.456604	11.09874	0.0000
X	1	0.975736	0.042711	22.84485	0.0000
Z	1	3.005385	0.008679	346.2721	0.0000
W	1	-5.029101	0.073149	-68.75141	0.0000
S	1	8.974106	0.029075	308.6485	0.0000

הועלתה ההשערה כי ההשפעה על Y של משתנה S היא פי 3 מזו של משתנה Z, וכן כי החותך הוא 5.

א. מהי השערת האפס?

ב. מהו המודל המוגבל שאותו צריך לאמוד?

להלן אמידת המודל המוגבל:

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	2	646166.01	323083.01		
Error	201	623.9983	3.104469		
C Total	203	646790.01			

Root MSE	1.7619504	R-square	0.999035
Dep Mean	173.6645	Adj R-sq	0.999026
C.V.	1.0145714		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
X	1	0.978491	0.036399	26.88240	0.0000
Z+3S	1	2.999995	0.003669	817.6080	0.0000
W	1	-5.043109	0.071218	-70.81249	0.0000

ג. חשב את הסטטיסטי של WALD.
ד. כמה דרגות חופש יש במונה וכמה במכנה?
ה. האם דוחים או מקבלים את השערת האפס?

4) על מנת לאמוד את פונקציית התצרוכת נאספו נתונים על 42 משקי בית בשנת 2007 ונאמדה המשוואה הבאה: $C_t = \alpha + \beta_1 \cdot W_t + \beta_2 \cdot P_t + u_t$.
להלן תוצאות האמידה של המשוואה הנ"ל:

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	---	---------	--------	-------	--------
Error	---	---------	52968		
C Total	---	---------			

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	-107.226	------	----------	-------
W	1	0.743	------		
P	1	0.561	-------		

Covariance of Estimates

COV	INTERCEP	W	P
INTERCEP	-----------	-----------	--------
W	-----------	0.0046	-0.0090
P	-----------	-0.0090	0.016

על מנת לבדוק את ההשערה שהנטייה השולית לצרוך מתוך ההכנסה זהה לנטייה השולית לצרוך מתוך ההון, נאמדה גם המשוואה הבאה:
$C_t = \alpha + \beta_1 \cdot Y_t + u_t$, כאשר: Y_t = סה"כ ההכנסה של משק בית t.
התקבל: $ESS = 0.4566$.
בדקו את ההשערה בשתי דרכים.

תרגיל מסכם:

5) חוקר אמד את התצרוכת של 500 משקי בית כפונקציה של הכנסה שלהן לפי המשוואה: $EXPENSE_t = \alpha + \beta \cdot INCOME_t + u_t$.
$EXPENSE_t$ - התצרוכת של משק הבית ה-t-י באלפי שקלים.
$INCOME_t$ - ההכנסה של משק הבית ה-t-י באלפי שקלים.
ההפרעות האקראיות מקיימות את כל ההנחות הקלאסיות התקבל הפלט הבא:

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	1	2013.105	2013.105	6495.745	0.0000
Error	498	154.3358	0.3099112		
C Total	499	2167.441			

Root MSE	0.556697	R-square	0.928794
Dep Mean	3.990208	Adj R-sq	0.928651
C.V.	13.95157		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	0.041995	0.054951	0.764236	0.4451
INCOME	1	0.713503	0.008853	80.59618	0.0000

א. מהו Pvalue לבדיקת מובהקות המודל ע"י מבחן F?
ב. מהו אחוז השונות בתצרוכת המוסבר ע"י ההכנסה?
ג. מהו אומדן לתצרוכת ההתחלתית של משק בית?
ד. האם אומדן זה מובהק?
ה. על עוזר מחקר הטיל החוקר לבדוק את ההשערה כי על כל 1000 ₪ נוספים בהכנסה צורך הפרט 700 ₪, כנגד ההשערה כי הוא צורך יותר מ-700 ₪. נסח את השערת האפס ואת ההשערה האלטרנטיבית.
ו. מהו הסטטיסטי t לבדיקת ההשערה?
ז. מהו הסטטיסטי WALD לבדיקת ההשערה?
ח. התברר כי הייתה טעות בנתונים, וכי יש להוסיף 1000 ₪ לתצרוכת של כל משק בית:
i. ההוספה תגדיל את האומד ל- α : נכון / לא נכון / לא ניתן לדעת.

ii. בעקבות ההוספה האומד ל- α יהיה מובהק: נכון / לא נכון / לא ניתן לדעת.

iii. ההוספה תשנה את האומד ל- β: נכון / לא נכון / לא ניתן לדעת.

iv. ההוספה תשנה את R^2: נכון / לא נכון / לא ניתן לדעת.

החוקר טען כי יש להוסיף לפונקציית התצרוכת גם את השפעת העושר. העושר של משק בית מורכב מתוכניות החסכון שלו ($SAVINGS$) ומניירות הערך שיש לו (NE). שתי סדרות הנתונים הן באלפי שקלים.
החוקר אמד את המשוואה:

$$EXPENSE_t = \alpha + \beta_1 \cdot INCOME_t + \beta_2 \cdot SAVINGS_t + \beta_3 \cdot NE_t + u_t ,$$

וקיבל כי סכום ריבועי הסטיות של הטעויות הוא 121.

ט. מהי השערת האפס לבדיקת הטענה של החוקר (שהמודל החדש נכון ולא המקורי)?

י. מהו הסטטיסטי WALD לבדיקת ההשערה?

החוקר רצה לבדוק את ההשערה כי הנש"צ מתוך ההכנסה שווה ל-0.6 וכי השפעת ניירות הערך על התצרוכת היא פי 2 מהשפעת תוכניות החסכון.

יא. מהי השערת האפס לבדיקה זו?

יב. המודל המוגבל לבדיקת ההשערה יהיה מהצורה: $Z_t = \gamma_0 + \gamma_1 W_t + v_t$.
בטא את Z_t, ו- W_t באמצעות המשתנים המקוריים.

תשובות סופיות:

1) א.

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	4	646169.84	161542.46	51835.84	0.0000
Error	199	620.1683	3.1164236		
C Total	203	646790.01			

Root MSE	1.7653395	R-square	0.999041
Dep Mean	178.6645	Adj R-sq	0.999022
C.V.	0.988075		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	5.067731	0.456604	11.09874	0.0000
X	1	0.975736	0.042711	22.84485	0.0000
Z	1	3.005385	0.008679	346.2721	0.0000
W	1	-5.029101	0.073149	-68.75141	0.0000
S	1	8.974106	0.029075	308.6485	0.0000

ב. יש עדות לכך. ג. יש עדות לכך.

2) ירד.

3) א. $H_0: \alpha = 5\ ,\ \beta_s = 3\beta_z$. ב. $Y_t - 5 = \beta_x X_t + \beta_z (Z_t + 3S_t) + \beta_w W_t + u_t$.

ג. $WALD_{stat} = 0.6145$. ד. מונה: 2 , מכנה: 199-.

ה. מקבלים.

4) בדיקה ע"י מבחן WALD ו-t: אין עדות לכך.

5) א. $PF = 0.000$. ב. 92%. ג. $\hat{\alpha} = 0.04195$. ד. לא.

ה. $H_0: \beta = 0.70\ , H_1: \beta > 0.70$. ו. $t_{\hat{\beta}} = 1.583$. ז. $WALD_{stat} = 2.505$.

ח. i. נכון. ii. נכון. iii. לא נכון. iv. לא נכון.

ט. $H_0: \beta_2 = \beta_3 = 0\ , H_1: OTHERWISE$. י. $WALD_{stat} = 68.32$.

יא. $H_0: \beta_3 = 2\cdot\beta_2\ ,\ \beta_1 = 0.6$.

יב. $W_t = SAVINGS_t + 2\cdot NE_t\ ,\ Z_t = EXPENCE_t - 0.6\cdot INCOME_t$.

שיטות מחקר במימון

פרק 18 - מבחן LM

תוכן העניינים

מבחן LM:

רקע:

במבחן כופלי לגרנג' (LM) אנו בודקים האם משתנה או משתנים מסבירים מסוימים רלוונטיים למודל.

לדוגמא:
נניח שיש לנו מודל הכולל 4 משתנים מסבירים (UNRESTRICTED):
$Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + \beta_4 x_{4t}$.
לגבי השניים הראשונים אנו בטוחים כי הם רלוונטיים וחייבים להופיע במודל. לגבי השניים האחרונים אנחנו לא בטוחים.

השערות: $\begin{matrix} H_0 : \beta_3 = \beta_4 = 0 \\ H_1 : OTHERWISE \end{matrix}$.

המודל המוגבל (RESTRICTED): $Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t}$.
במבחן LM אומדים את המודל המוגבל ומקבלים עבור כל תצפית את הסטייה מקו הרגרסיה: $Y_t - \hat{Y}_t = \hat{u}_t$.
כעת אומדים את רגרסיית העזר שבה מנסים לנבא את הסטייה מקו הרגרסיה עבור כל תצפית: $\hat{u}_t = \delta_0 + \delta_1 x_{1t} + \delta_2 x_{2t} + \delta_3 x_{3t} + \delta_4 x_{4t} + \omega_t$.
חישוב הסטטיסטי: (R^2 של רגרסיית העזר * מספר התצפיות) $LM_{stat} = R^2 \cdot T$.
כלל הכרעה: אם: $LM_{stat} > \chi^2_m$ נדחה את H_0 (m = מסי' ההגבלות ב- H_0).

- שימו לב כי:

  עבור המשתנים הנוספים למודל – כל המדדים (הבטות, ערכי t וה- $Pvalu$) ברגרסיית העזר שווים לאלו של הרגרסיה הלא מוגבלת.
  עבור המשתנים הקיימים במודל – המדדים אינם שווים בין שתי הרגרסיות.

שאלות:

1) נניח מודל הכולל 4 משתנים מסבירים (UNRESTRICTED) :

$$Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + \beta_4 x_{4t}.$$

UNRESTRICTED

Dependent variable: Y

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	------	646169.84	------------	-----------	0.0000
Error	------	620.17			
C Total	203	646790.01			

Root MSE	------	R-square	-----
Dep Mean	----	Adj R-sq	-----
C.V.	-----		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	5.067731	0.456604	11.09874	0.0000
X1	1	0.975726	0.042711	22.84485	0.0000
X2	1	3.005385	0.008679	346.2721	0.0000
X3	1	-5.029101	0.073149	-68.75146	0.0000
X4	1	8.974106	0.029075	308.6485	0.0000

RESTRICTED

Dependent variable: Y

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	------	646001.81			
Error	------	788.2			
C Total	203	646790.01			

Root MSE	---------	R-square	-----
Dep Mean	---------	Adj R-sq	-----
C.V.	---------		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	7.067731	0.656604	10.76406	0.0000
X1	1	26.36455	0.756627	34.84485	0.0000
X2	1	29.58626	0.076993	384.2721	0.0000

רגרסיית עזר

Dependent variable :RES

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	------	646169.84	--------	-------	0.0000
Error	------	620.17			
C Total	203	646790.01			

Root MSE	---------	R-square	0.213
Dep Mean	---------	Adj R-sq	-------
C.V.	---------		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	5.9608892	0.776604	7.675584	0.0000
X1	1	1.2077723	0.978845	1.233875	0.8455
X2	1	0.4840697	0.886754	0.545889	0.9976
X3	1	-5.029101	0.073149	-68.75146	0.0000
X4	1	8.974106	0.029075	308.6485	0.0000

א. בדוק את הטענה כי לפחות אחד מן המשתנים הנוספים רלוונטי למודל בשתי דרכים.

ב. איזה מן המשתנים הנוספים רלוונטי למודל?

ג. הסבירו את הקשרים בין שלוש המשוואות: R, U ועזר ואת הקשר בין מבחן WALD ומבחן LM.

U: $\hat{Y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1t} + \hat{\beta}_2 x_{2t} + \hat{\beta}_3 x_{3t} + \hat{\beta}_4 x_{4t} + \hat{v}_t$.

R: $\hat{Y}_t = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 x_{1t} + \hat{\alpha}_2 x_{2t} + \hat{u}_t$.

עזר: $\hat{u}_t = \hat{\delta}_0 + \hat{\delta}_1 x_{1t} + \hat{\delta}_2 x_{2t} + \hat{\delta}_3 x_{3t} + \hat{\delta}_4 x_{4t} + \hat{\omega}_t$.

ד. שחזרו בעזרת שתי המשוואות הראשונות (U ו-R) את LM_{stat}.

ה. שחזרו בעזרת המשוואה האחרונה (רגרסיית העזר) את $WALD_{stat}$.

תשובות סופיות:

1) א. מבחן LM ומבחן WALD, יש עדות לכך.

ב. $pt_{\hat{\beta}_3} = pt_{\hat{\beta}_4} = 0.00$.

ג. i. U=R+עזר.

ii. $ESS_U = ESS_{ע}$.

iii. $ESS_R = TSS_{ע}$.

iv. $R^2 = 1 - \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{ESS_U}{ESS_R} = \frac{ESS_R - ESS_U}{ESS_R}$.

ד. $LM_{stat} = 43.489$.

ה. $WALD_{stat} = 26.962$.

שיטות מחקר במימון

פרק 19 - בעיות ספציפיקציה

תוכן העניינים

בעיות ספציפיקציה:

רקע:

טעויות ספציפיקציה הן טעויות בניסוח משוואת הרגרסיה.

1. הוספת משתנה לא רלוונטי:
למשל, המודל האמיתי: $Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \varepsilon$.
המודל הנאמד (הטעותי): $Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + \varepsilon$.
אם נקבל את H_0 במבחן t למובהקות β_3 נסיק כי המשתנה איננו רלוונטי ונאמוד את המודל מחדש הפעם ללא המשתנה השלישי. אולם, גם אם לא נוכל לאמוד מחדש, הימצאותו של משתנה שאיננו רלוונטי במודל הרגרסיה איננה פוגמת ברלוונטיות של המשתנים האחרים במודל ולא בתכונות החיוניות למבחני המובהקות שלהם.

2. השמטת משתנה רלוונטי:
למשל, המודל האמיתי: $Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \varepsilon$.
המודל הנאמד (הטעותי): $Y_t = \alpha + \beta_1 x_{1t} + \varepsilon$.
בהיעדר x_2, בדיקות ההשערות לפרמטרים של המודל הטעותי אינן תקפות:

<table>
<tr><th></th><th>אומד ל- β_1</th><th>אומד ל- α</th><th>אומד לשונות הפרמטרים</th></tr>
<tr><td>$S_{12} = 0$</td><td>חסר הטיה</td><td>מוטה
אלא אם:
$\bar{x}_2 = 0$</td><td rowspan="2">מוטה (כלפי מעלה)</td></tr>
<tr><td>$S_{12} \neq 0$</td><td>מוטה
<u>כיוון ההטיה:</u>
חיובי: S_{12} ו- β_2 שווי סימן
שלילי: S_{12} ו- β_2 מנוגדי סימן</td><td>מוטה</td></tr>
</table>

שיטות מחקר במימון

פרק 20 - תיאוריה מולטיקוליניאריות

תוכן העניינים

מולטיקוליניאריות:

רקע:

מולטיקוליניאריות היא תופעה סטטיסטית בעייתית המתייחסת למתאם בין המשתנים המסבירים במודל.

נבחין בין מולטיקוליניאריות מלאה לחלקית.

מולטיקוליניאריות מלאה:

מתאם מלא בין המשתנים המסבירים במודל.

הדבר קורה כאשר משתנה מסביר אחד הוא קומבינציה ליניארית מלאה של המשתנה המסביר השני: $x_1 = a + bx_2$ (x_1 הוא קומבינציה ליניארית מלאה של x_2)

מכאן ש: $r_{12} = 1$.

- שימו לב כי מדובר בטרנספורמציה ליניארית ולא בטרנספורמציה אחרת (למשל: $x_1 = x_2^2$), אז בהכרח: $r_{12} \neq 1$.

במצב של מולטיקוליניאריות מלאה אין כל השפעה של המשתנה האחד מעבר לשני.
מדוע זה בעייתי?
כיוון שלא ניתן לאמוד את המודל שכן אר״פ אינם מוגדרים.
פתרון: הורדת אחד המשתנים ואמידת המשוואה מחדש בלעדיו.

מולטיקוליניאריות חלקית:

כאשר יש מתאם גבוה מאוד בין משתנים מסבירים במודל (אך לא מושלם) עלולה להיווצר בעיה של מולטיקוליניאריות חלקית.

מכיוון שיש מתאם גבוה בין המשתנים הב״ת לא נוכל לבודד באופן מלא את ההשפעה המדויקת של כל אחד מהם על ציוני המשתנה התלוי.
כל אחד מהמשתנים הב״ת ״יגזול״ מן ההשפעה הייחודית שיש למשתנה הב״ת השני על המשתנה התלוי, כך שבסופו של דבר, למרות שהמודל עם שני המשתנים הב״ת יהיה מובהק, התרומה הייחודית של כל משתנה ב״ת לניבוי התלוי לא תהיה מובהקת.

זיהוי מולטיקולינאריות חלקית:

1. כאשר קיימת סתירה בין התוצאה במבחן F למובהקות המודל (המודל מובהק) לבין מבחני t למובהקות השיפועים (אף אחד מן השיפועים איננו מובהק).
הסתירה נוצרת כתוצאה מהגדלת השונות של כל אחד מהשיפועים בשל המתאם הגבוה בין הב״ת, באופן שלא מאפשר לדחות את השערת האפס למובהקות השיפועים: $S^2_{\hat{\beta}_1} = \dfrac{MSE}{SSX_1\left(1-r_{12}\right)}$, $t = \dfrac{\hat{\beta}_1}{S_{\hat{\beta}_1}}$.

2. רגישות לספציפיקציה – הורדת משתנה ב״ת שאיננו מובהק תהפוך משתנים ב״ת אחרים במודל למובהקים. אם אין בעיה של מולטיקולינאריות, הורדת משתנים ב״ת שאינם רלוונטיים מהמודל, לא אמורה להשפיע על מובהקותם של המשתנים הב״ת האחרים.

3. סימנים הפוכים – כאשר השיפועים של המשתנים הב״ת מקבלים סימנים הפוכים מכיוון ההשפעה שלהם על המשתנה התלוי. אם למשל, x_1 משפיע חיובית על Y ואילו x_2 משפיע שלילית על Y אבל הם יופיעו במשוואת הרגרסיה עם סימנים הפוכים ($\hat{\beta}_1$ שלילית ואילו $\hat{\beta}_2$ חיובית), יש לחשוד שקיימת בעיה.

השלכות של מולטיקולינאריות חלקית:
מולטיקולינאריות חלקית איננה פוגעת בתכונות של אר״פ (הם נותרים ליניאריים, חסרי הטיה, יעילים ועקיבים) ולא באומד השונות של האומדים (שנותר חסר הטיה) כך שבדיקת השערות תוך שימוש באומדים הללו תהיה תקפה (זאת בניגוד למולטיקולינאריות מלאה).
במובן הזה, בעיה של מולטיקולינאריות חלקית דומה לבעיה של הוספת משתנה ב״ת שאיננו רלוונטי.

פתרונות למולטיקולינאריות חלקית:

1. ברוב המקרים נשקול להוריד את אחד המשתנים.
יחד עם זאת, כאשר המובהקות של המשתנים היא גבולית: $1 < t_{\hat{\beta}} < 2$, יתכן ונותיר את שניהם בתוך המודל כיוון שבסך הכל יש עליה ב- $AdjR^2$ (לפי חוק חיטובסקי).

2. ניתן לעיתים לאחד את שני המשתנים למשתנה אחד.

שלבי בדירת ההשערות:

1. מבצעים מבחן F לבדיקת מובהקות המודל.
2. במידה והמודל מובהק, מבצעים מבחן t למובהקות כל אחד מהשיפועים.
3. ביצוע מבחן WALD לבדיקת כל השיפועים שלא יצאו מובהקים:

א. אם מקבלים את H_0: אין סתירה בין מבחן WALD למבחני t - אין בעיה של מולטיקוליניאריות חלקית, נוריד את קבוצת המשתנים הלא רלוונטיים מהמודל.

ב. אם דוחים את H_0: יש סתירה בין מבחן WALD למבחני t - קיימת בעיה של מולטיקוליניאריות חלקית, יש להוריד מן המודל כל פעם משתנה אחד ולבצע מבחן WALD בלעדיו, עד שמזהים את המשתנה / משתנים שיש להוריד מהמודל.

שיטות מחקר במימון

פרק 21 - סיכום ותרגול של בעיות ספציפיקציה ומולטיקוליניאריות

תוכן העניינים

סיכום ותרגול של בעיות ספציפיקציה ומולטיקוליניאריות:

רקע:

<table>
<tr><th>הבעיה</th><th>הגדרה</th><th>זיהוי</th><th>השלכות</th><th>פתרון</th></tr>
<tr><td>הוספת משתנה לא רלוונטי</td><td>המודל האמיתי:
$Y_t=\alpha+\beta_1x_{1t}+\varepsilon$
המודל הנאמד (הטעותי):
$Y_t=\alpha+\beta_1x_{1t}+\beta_2x_{2t}+\varepsilon$</td><td>קבלת H_0 במבחן t למובהקות β_2</td><td>ניתן לבצע בדיקת השערות
אר״פ $\left(\hat{\alpha},\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2\right)$ חסרי הטיה
אומדי השונות $\left(S^2_{\hat{\alpha}},S^2_{\hat{\beta}_1},S^2_{\hat{\beta}_2}\right)$ חסרי הטיה</td><td>*הורדת המשתנה</td></tr>
<tr><td>השמטת משתנה רלוונטי</td><td>המודל האמיתי:
$Y_t=\alpha+\beta_1x_{1t}+\beta_2x_{2t}+\varepsilon$
המודל הנאמד (הטעותי):
$Y_t=\alpha+\beta_1x_{1t}+\varepsilon$</td><td>דחיית H_0 במבחן t למובהקות β_2</td><td><table>
<tr><th>בהיעדר x_2:</th><th>אומד ל- β_1</th><th>אומד ל- α</th><th>אומד לשונות הפרמטרים</th></tr>
<tr><td>$S_{12}=0$</td><td>חסר הטיה</td><td>מוטה
אלא אם:
$\bar{x}_2=0$</td><td>מוטה חיובית</td></tr>
<tr><td>$S_{12}\neq 0$</td><td>מוטה חיובית:
S_{12} ו- β_2 שווי סימן
מוטה שלילית:
S_{12} ו- β_2 מנוגדי סימן</td><td>מוטה</td><td>מוטה חיובית</td></tr>
</table>לא ניתן לבצע בדיקת השערות</td><td>הוספת המשתנה</td></tr>
<tr><td>מולטיקוליניאריות מלאה</td><td>מתאם מלא בין המשתנים המסבירים במודל
$Y_t=\alpha+\beta_1x_{1t}+\beta_2x_{2t}+\varepsilon$
כאשר: $r_{12}=\pm 1$</td><td>אם:
$x_1=a+bx_2$
אז: $r_{12}=1$</td><td>לא ניתן לבצע בדיקת השערות
אר״פ $\left(\hat{\alpha},\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2\right)$ בלתי מוגדרים.</td><td>הורדת אחד המשתנים</td></tr>
<tr><td>מולטיקוליניאריות חלקית</td><td>מתאם חזק בין המשתנים המסבירים במודל
$Y_t=\alpha+\beta_1x_{1t}+\beta_2x_{2t}+\varepsilon$
כאשר: $0.7<\left|r_{12}\right|<1$</td><td>א. סתירה בין מבחן F ל-t
ב. רגישות לספציפיקציה
ג. סימנים הפוכים</td><td>ניתן לבצע בדיקת השערות
אין פגיעה בתכונות אר״פ ושונותם</td><td>**הורדת אחד המשתנים
או
איחודם</td></tr>
</table>

*במידה והמובהקות גבולית ($1<t_{\hat{\beta}}<2$) נשקול להשאיר משתנה לא רלוונטי כי מעלה את $AdjR^2$ (חוק חיטובסקי).

** במידה ומובהקותם גבולית ($1<t_{\hat{\beta}}<2$) נשקול להשאיר את שניהם בשל העלייה ב- $AdjR^2$ (חוק חיטובסקי).

שאלות:

1) להלן מודל של שכר W_t, כפונקציה של שנות לימוד S_t:

1. $W_t = \alpha + \beta \cdot S_t + u_t$.

להלן מודל של שכר W_t, כפונקציה של שנות לימוד S_t ושל גיל A_t:

2. $W_t = \alpha + \beta_1 \cdot S_t + \beta_2 \cdot A_t + v_t$.

כל האומדים חיוביים ומובהקים וקיים קשר שלילי בין גיל להשכלה.

א. $\hat{\beta}_1$ במשוואה (1) הוא:

i. אומד חסר הטיה.

ii. אומד מוטה שלילית.

iii. אומד מוטה חיובית.

iv. אומד מוטה, אך לא ניתן לדעת את כיוון ההטיה.

ב. ניתן להשתמש במבחן t לבדיקת מובהקות השיפוע במשוואה (1). נכון/לא נכון/לא ניתן לדעת

ג. בנוסף למשתנים במשוואה השנייה, החליט החוקר להוסיף גם את משתנה הוותק, EXP_t. מכיוון שלא היו בידו נתונים על הוותק, החליט החוקר להעריכו עבור כל עובד על ידי הגיל של העובד פחות 24 שנים (מתוך ההנחה שהחיים המקצועיים מתחילים בגיל זה לערך).

להלן משוואה מס' 3:

3. $W_t = \alpha + \beta_1 \cdot S_t + \beta_2 \cdot A_t + \beta_3 \cdot EXP_t + w_t$.

חווה דעתך על המשוואה השלישית.

2) נתונות ארבע משוואות הרגרסיה הבאות (כאשר הסטיות במודל האמיתי מקיימות את הנחות הרגרסיה הקלאסיות):

1. $X_{2t} = \lambda + \delta \cdot X_{1t} + V_t$. כאשר התקבל: $\sum \hat{V}_t^2 = \sum \left(X_{2t} - \bar{X}_{2t} \right)^2$.

2. $$\underset{}{Y_t = \alpha + \beta_1 \cdot \underset{(10.3)}{X_{1t}} + \beta_2 \cdot \underset{(19.8)}{X_{2t}} + U_t}.$$

3. $$Y_t = \alpha + \beta_1 \cdot \underset{(9.9)}{X_{1t}} + \beta_2 \cdot \underset{(17.3)}{X_{2t}} + \beta_3 \cdot \underset{(0.37)}{X_{3t}} + W_t.$$

4. $$Y_t = \alpha + \beta_1 \cdot \underset{(6.3)}{X_{1t}} + \sum_t.$$

(המספרים בסוגריים הם ערכי t של אומדני המקדמים).

לגבי הטענות הבאות, קבעו לגבי כל טענה אם היא נכונה או לא, והסבירו:

א. האומד של β_1 במשוואה (2) הינו חסר הטיה, אך אומד השונות של β_1 מוטה.

ב. האומד של β_1 במשוואה (3) הינו חסר הטיה, אך אומד השונות של β_1 מוטה.

ג. האומד של β_1 במשוואה (4) הינו חסר הטיה, אך אומד השונות של β_1 מוטה.

ד. האומדן $\hat{\beta}_1$ במשוואה (4) זהה ל- $\hat{\beta}_1$ במשוואה (2).

ה. השונות התיאורטית של האומדן $\hat{\beta}_1$ במשוואה (4) זהה לשונות התיאורטית של $\hat{\beta}_1$ במשוואה (2), אך אומדני השונויות שונים.

ו. האומד ל- α במשוואה (4) הינו חסר הטיה.

ז. האומד ל- α במשוואה (3) הינו חסר הטיה.

ח. R^2 של משוואה (2) גדול מ- R^2 של משוואה (3).

ט. $\bar{R}^2$ של משוואה (2) גדול מ- $\bar{R}^2$ של משוואה (3).

3) נתון המודל: $Y_t = \alpha + \beta_1 \cdot X_{1t} + \beta_2 \cdot X_{2t} + U_t$.

חוו דעתכם על הטענות הבאות (כל סעיף עומד בפני עצמו):

א. בהנחה כי מתקיים: $Y_t = \alpha + \beta_1 \cdot X_{1t} + \beta_2 \cdot X_{2t} + U_t \quad R^2 = 0.92$

(0.3) (0.5)

הערכים בסוגריים הם ערכי t.

למובהקות הבטות יש טעות במודל

כי המודל מובהק והמקדמים לא: נכון/לא נכון/לא ניתן לדעת

ב. בהנחה כי מתקיים: $X_{1t} - 2X_{2t} = 1$ לא ניתן לאמוד

את המודל בשיטת הריבועים הפחותים: נכון/לא נכון/לא ניתן לדעת

ג. בהנחה כי מתקיים: $X_{1t} = X_{2t}^2$ לא ניתן לאמוד

את המודל בשיטת הריבועים הפחותים: נכון/לא נכון/ לא ניתן לדעת

ד. הוכיחו תשובותיכם לסעיפים א' ו-ב'.

ה. בהנחה כי מתקיים: $r_{12} = 0.98$.

i. לא ניתן לאמוד את המודל בשיטת הריבועים הפחותים: נכון/לא נכון/ לא ניתן לדעת.

ii. איזו בעיה עלולה להיווצר במודל ומהן השלכותיה.

iii. בהנחה שהמודל יצא מובהק אולם הבטות אינן מובהקות וערכי t למובהקות הבטות הן כדלקמן: $t_{\hat{\beta}_2} = 1.45$, $t_{\hat{\beta}_1} = 1.31$, מה יהיה הפתרון הטוב ביותר, לדעתכם, לבעיה במודל (אליה התייחסתם בסעיף ii)?

1. להוריד את x_1.
2. להוריד את x_2.
3. להוריד את שני המשתנים.
4. להותיר את שני המשתנים.

תשובות סופיות:

1) א. ii. ב. לא נכון. ג. קיימת בעיית מולטיקוליניאריות מלאה.
2) א. לא נכון. ב. לא נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.
ו. לא נכון. ז. נכון. ח. לא נכון. ט. נכון.
3) א. לא נכון. ב. נכון. ג. לא נכון. ד. הוכחה. ה.i. לא נכון.
ii. מולטיקוליניאריות חלקית. iii. 4.

שיטות מחקר במימון

פרק 22 - משתנה דמי

תוכן העניינים

משתנה דמי:

רקע:

הכנסת משתנים ב"ת איכותיים למודל הרגרסיה.
למשל, נתונה משוואת הרגרסיה: $W_t = \alpha + \beta \cdot S_t$.
W_t = השכר (התלוי).
S_t = שנות לימוד (הב"ת) שניהם כמותיים.
נניח שאנו סבורים שגם משתנה המגדר (משתנה איכותי) משפיע על השכר.
כדי להכניסו למשוואת הרגרסיה יש להגדיר משתני דמי (dummy variable):
נגדיר משתנה D שיקבל את הערך 0 אם מדובר ב"אישה" ואת הערך 1 אם מדובר ב"גבר".
ניתן להכניס את משתנה הדמי למודל בשלושה אופנים שונים:

1. משתנה דמי לחותך – המגדר משפיע על השכר ההתחלתי בלבד.
2. משתנה דמי לשיפוע – המגדר משפיע על התוספת לשכר בגין שנות הלימוד.
3. משתנה דמי לכל הפונקציה – המגדר משפיע גם על החותך וגם על השיפוע.

משתנה דמי לחותך:

המין משפיע על השכר ההתחלתי בלבד.
המודל: $W_t = \alpha_0 + \alpha_1 D + \beta \cdot S_t + u_t$ החותך מייצג כאן את השכר ההתחלתי.
שכר ההתחלתי של אישה: α_0.
שכר התחלתי של גבר: $\alpha_0 + \alpha_1$.
הבדל בשכר בין נשים וגברים: α_1 (הפרש בין החותכים).
בדיקת השערות על משתנה הדמי: מבחן t למובהקות הפרש החותכים: $H_0 : \alpha_1 = 0$.

- השיפוע מייצג את התוספת בשכר כפונקציה של מס' שנות הלימוד והוא זהה עבור נשים וגברים.

פונקציית רגרסיה המכילה משתנים איכותיים בלבד:

המגדר הוא המשתנה היחיד במשוואה: $W_t = \alpha_0 + \alpha_1 D + u_t$.
החותך מייצג כאן את השכר הממוצע עבור כל קטגוריה:
שכר הממוצע של אישה: α_0.
שכר הממוצע של גבר: $\alpha_0 + \alpha_1$.
הבדל בשכר הממוצע בין נשים וגברים: α_1 (הפרש בין החותכים).
בדיקת השערות על משתנה הדמי: מבחן t: $H_0 : \alpha_1 = 0$ (מבחן זהה למבחן t להבדל בין ממוצעים).

משתנה דמי לשיפוע:

המגדר משפיע על התוספת לשכר בגין שנות הלימוד: $W_t = \alpha + \beta_0 S_t + \beta_1 DS_t + u_t$.
השיפוע מייצג כאן את התוספת לשכר בגין שנות לימוד.
אצל אישה: התוספת לשכר בגין שנות לימוד: β_0.
אצל גבר: התוספת לשכר בגין שנות לימוד: $\beta_0 + \beta_1$.
הבדל בין גברים לנשים בתוספת לשכר בגין שנות הלימוד: β_1 (הפרש השיפועים).
בדיקת השערות על משתנה הדמי: מבחן t למובהקות הפרש השיפועים: $H_0: \beta_1 = 0$.

- החותך, המייצג את השכר ההתחלתי, יהיה זהה עבור גברים ונשים.

משתנה דמי לכל הפונקציה:

המין משפיע גם על החותך וגם על השיפוע – גם על השכר ההתחלתי וגם על התוספת לשכר ההתחלתי בגין שנות הלימוד.
המודל: $W_t = \alpha_0 + \alpha_1 D + \beta_0 S_t + \beta_1 DS_t + u_t$.
השכר ההתחלתי של אישה: α_0.
השכר ההתחלתי של גבר: $\alpha_0 + \alpha_1$.
הבדל בשכר ההתחלתי בין המינים: α_1 (הבדל בחותכים).
אצל אישה: התוספת לשכר בגין שנות הלימוד: β_0.
אצל גבר: התוספת לשכר בגין שנות הלימוד: $\beta_0 + \beta_1$.
הבדל בין המינים בתוספת לשכר בגין שנות הלימוד: β_1 (הבדל בשיפועים).

2 דרכים לבדיקה האם יש השפעה למשתנה האיכותי:

1. בדיקת השערות למשתני הדמי:
   באמצעות מבחן WALD יש לבדוק: $H_0: \alpha_1 = \beta_1 = 0$.
   לפחות אחד הפרמטרים שונה מ-0: H_1.
   אם דוחים את השערת האפס, יש לבצע מבחני t עבור כל אחד מהפרמטרים בנפרד: $H_0: \alpha_1 = 0$ ו- $H_0: \beta_1 = 0$.

2. מבחן CHOW:
   דרך נוספת לבדיקת ההבדל בין הקטגוריות בלא יצירת משתני דמי:
   חלוקת המדגם לפי הקטגוריות של המשתנה האיכותי.
   מדגם של גברים (T_m) ושל נשים (T_f).
   עבור כל קבוצה לאמוד משוואות רגרסיה לניבוי שכר על ידי שנות לימוד:
   נשים: $W_t = \alpha_f + \beta_f X_t + u_t$.
   גברים: $W_t = \alpha_m + \beta_m X_t + u_t$.
   השערות: $H_0: \alpha_f = \alpha_m; \beta_f = \beta_m$.

לבדיקת ההשערה נשתמש במבחן CHOW (הזהה למבחן WALD):

המודל המוגבל (R) לא לוקח בחשבון את השפעת המגדר ולכן יכלול את המדגם המאוחד: $W_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.

המודל הלא מוגבל (U) כולל את שני חלקי המדגם: $ESS_U = ESS_f + ESS_m$, $DF_U = DF_f + DF_m$.

סטטיסטי המבחן: $WALD_{stat} = \dfrac{\dfrac{ESS_R - \left(ESS_f + ESS_m\right)}{DF_R - \left(DF_f + DF_m\right)}}{\dfrac{ESS_f + ESS_m}{DF_f + DF_m}} = CHOW_{stat}$.

למרות התוצאות הזהות בשתי הדרכים, שיטת משתני הדמי עדיפה:

1. אם דחינו את H_0 במבחן CHOW נתקשה לברר את מקור ההבדל שנמצא.
2. בהרצת שתי רגרסיות נפרדות אנו בודקים הבדל בכל הפונקציה ואילו שיטת משתני הדמי מאפשרת לבדוק הבדל רק בחותך או רק בשיפוע.

סיכום ביניים:

	משתנה דמי לחותך	משתנה דמי לשיפוע	משתנה דמי לכל הפונקציה
המודל	$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 D + \beta \cdot X_t + u_t$	$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 DX_t + u_t$	$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 D + \beta_0 X_t + \beta_1 DX_t + u_t$
ההשערה במילים	קיים הבדל בין הקטגוריות ב-Y ההתחלתי (בחותך).	קיים הבדל בין הקטגוריות בתוספת ל- Y בגין X (בשיפוע).	קיים הבדל בין הקטגוריות במשוואת הרגרסיה כולה (בחותך ובשיפוע).
בדיקת ההשערה	מבחן t להפרש החותכים: $H_0: \alpha_1 = 0$	מבחן t להפרש השיפועים: $H_0: \beta_1 = 0$	מבחן WALD להפרש בין הפונקציות (החותכים והשיפועים): $H_0: \alpha_1 = \beta_1 = 0$ **ניתן לבדוק את ההשערה בדבר הבדל בין הפונקציות גם במבחן CHOW. אם דוחים את H_0 יש לברר את מקור ההבדל באמצעות מבחני t (אפשרי רק ב-WALD): $H_0: \alpha_1 = 0$, $H_0: \beta_1 = 0$

משתני דמי אם המשתנה האיכותי יכול לקבל יותר משני ערכים:

כאשר המשתנה האיכותי כולל יותר משני ערכים/קטגוריות נגדיר מס' משתני דמי כמספר הקטגוריות פחות אחד.

למשל, את המשתנה האיכותי של עונות השנה הכולל 4 ערכים: אביב, קיץ, סתיו, חורף נייצג באמצעות 3 משתני דמי:

D_1 יקבל את הערך 1 אם מדובר באביב ו-0 אחרת.

D_2 יקבל את הערך 1 אם מדובר בקיץ ו-0 אחרת.

D_3 יקבל את הערך 1 אם מדובר בסתיו ו-0 אחרת.

אם מדובר בחורף אז כל משתני הדמי יקבלו את הערך 0 ולכן החורף היא קבוצת הייחוס.

נניח שאנו רוצים לבדוק עונתיות במחירי הירקות:

$V_t=$ מדד מחירי הירקות.

$p_t=$ מדד המחירים לצרכן.

1. משתני דמי לחותך:

הטענה: יש הבדל בין עונות השנה במחיר ההתחלתי של הירקות.

המודל: $V_t=\alpha_0+\alpha_1 D_{1t}+\alpha_2 D_{2t}+\alpha_3 D_{3t}+\beta\cdot P_t+u_t$.

כל עליה של יחידה אחת במדד המחירים לצרכן תעלה את מחירי הירקות ב- β. למחיר זה יתווסף α_0 בחורף, $\alpha_0+\alpha_1$ באביב, $\alpha_0+\alpha_2$ בקיץ ו-$\alpha_0+\alpha_3$ בסתיו.

ניתן לראות כי: α_0 - החותך בקטגוריה שהושמטה, $\alpha_0+\alpha_1$ - החותך בקטגוריה i.

בדיקת השערות:

השערות:
$$H_0:\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$$
$$H_1: OTHERWISE$$

המבחן הסטטיסטי – מבחן WALD:

(U): $V_t=\alpha_0+\alpha_1 D_{1t}+\alpha_2 D_{2t}+\alpha_3 D_{3t}+\beta\cdot P_t+u_t$.

(R): $V_t=\alpha+\beta\cdot P_t+u_t$.

- שימו לב שהחותך במשוואה המוגבלת איננו α_0 שכן המשתנה המסביר של עונות השנה ירד.

אם נדחה את H_0 במבחן הסטטיסטי של הסעיף הקודם, יש לבדוק מה מקור ההבדל בין החותכים על ידי מבחני t :

1. האם יש הבדל במחיר ההתחלתי של הירקות בין האביב לחורף:
$H_0 : \alpha_1 = 0$.
2. האם יש הבדל במחיר ההתחלתי של הירקות בין הקיץ לחורף:
$H_0 : \alpha_2 = 0$.
3. האם יש הבדל במחיר ההתחלתי של הירקות בין הסתיו לחורף:
$H_0 : \alpha_3 = 0$.

2. משתני דמי לשיפוע:

הטענה: יש הבדל בין עונות השנה בתוספת למחיר הירקות בגין המחיר לצרכן.

המודל: $V_t = \alpha + \beta_0 P_t + \beta_1 (D_{1i} P_t) + \beta_2 (D_{2i} P_t) + \beta_3 (D_{3i} P_t) + u_t$.

המחיר ההתחלתי של הירקות שווה בין עונות השנה (α) אולם כל עליה של יחידה אחת במדד המחירים לצרכן תעלה את מחירי הירקות ב: β_0 בחורף, $\beta_0 + \beta_1$ באביב, $\beta_0 + \beta_2$ בקיץ ו- $\beta_0 + \beta_3$ בסתיו.

ניתן לראות כי- β_0: השיפוע בקטגוריה שהושמטה $\beta_0 + \beta_i$: השיפוע בקטגוריה i.

בדיקת השערות:

השערות: $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, $H_1 : OTHERWISE$.

המבחן הסטטיסטי – מבחן WALD:

(U): $V_t = \alpha + \beta_0 P_t + \beta_1 (D_{1i} P_t) + \beta_2 (D_{2i} P_t) + \beta_3 (D_{3i} P_t) + u_t$.

(R): $V_t = \alpha + \beta \cdot P_t + u_t$.

- שימו לב שהשיפוע במשוואה המוגבלת איננו β_0 שכן המשתנה המסביר של עונות השנה ירד.

אם נדחה את H_0 במבחן הסטטיסטי של הסעיף הקודם, יש לבדוק מה מקור ההבדל בין השיפועים על ידי מבחני t.

3. משתני דמי לכל הפונקציה:
הטענה: יש הבדל בין עונות השנה בפונקציית הרגרסיה לניבוי מחיר הירקות באמצעות המחיר לצרכן.
המודל:
$$V_t = \alpha_0 + \alpha_1 D_{1i} + \alpha_2 D_{2i} + \alpha_3 D_{3i} + \beta_0 P_t + \beta_1 (D_{1i} P_t) + \beta_2 (D_{2i} P_t) + \beta_3 (D_{3i} P_t) + u_t.$$

בדיקת השערות:
השערות: $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$.
המבחן הסטטיסטי - מבחן WALD:
(U):
$$V_t = \alpha_0 + \alpha_1 D_{1i} + \alpha_2 D_{2i} + \alpha_3 D_{3i} + \beta_0 P_t + \beta_1 (D_{1i} P_t) + \beta_2 (D_{2i} P_t) + \beta_3 (D_{3i} P_t) + u_t.$$
(R): $V_t = \alpha + \beta \cdot P_t + u_t$.

אם דוחים את H_0, יש לבדוק במבחני WALD האם ההבדל הוא בין החותכים או בין השיפועים: $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$.
אם דוחים את H_0 יש להמשיך לבדוק באמצעות מבחני t:
$H_0: \alpha_j = 0$, $H_0: \beta_j = 0$.

משתני דמי עבור שני משתנים איכותיים:

לדוגמא – שני משתנים איכותיים המשפיעים על פונקציית השכר:
מגדר (אישה, גבר) וגזע (לבן, שחור).
נגדיר משתנה דמי G שיקבל 1 אם מדובר בגבר ו-0 אחרת (אישה).
נגדיר משתנה דמי R שיקבל 1 אם מדובר בלבן ו-0 אחרת (שחור).
נבדוק כיצד מגדר וגזע משפיעים על השכר ההתחלתי (החותך), כאשר השכר תלוי גם בשנות לימוד (S_t).

1. הבדל בחותך ללא אינטראקציה:
המודל: $W_t = \alpha_0 + \alpha_1 G + \alpha_2 R + \beta \cdot S_t + u_t$.
במודל זה – אין השפעה משולבת של מגדר וגזע על השכר ההתחלתי.
ניתן לבדוק השערות על כל אחד מהמשתנים הב"ת האיכותיים בנפרד:

1. הבדל בשכר ההתחלתי בין גברים לנשים: $H_0: \alpha_1 = 0$.

2. הבדל בשכר ההתחלתי בין שחורים ללבנים: $H_0: \alpha_2 = 0$.

2. הבדל בחותך עם אינטראקציה:

המודל: $W_t = \alpha_0 + \alpha_1 G + \alpha_2 R + \alpha_3 G \cdot R + \beta \cdot S_t + u_t$.

במודל זה הטענה היא כי קיימת, בנוסף להשפעה של מגדר וגזע בנפרד על השכר, גם השפעה משולבת (אינטראקציה) של מגדר וגזע על השכר ההתחלתי.

במודל זה, לעומת הקודם, נוספת ההשערה לבדיקת השפעת האינטראקציה בין מגדר לגזע על השכר ההתחלתי:

3. $H_0 : \alpha_3 = 0$.

3. דרך נוספת ליצירת מודל עם אינטראקציה:

הגדרת משתני דמי המייצגים שילוב בין המשתנים האיכותיים גזע ומגדר באופן הבא:

D_1 יקבל 1 אם מדובר בגבר לבן ו-0 אחרת.

D_2 יקבל 1 אם מדובר בגבר שחור ו-0 אחרת.

D_3 יקבל 1 אם מדובר באשה לבנה ו-0 אחרת.

הנשים השחורות מהוות כאן את קבוצת הייחוס.

המודל: $W_t = \gamma_0 + \gamma_1 D_1 + \gamma_2 D_2 + \gamma_3 D_3 + \delta \cdot S_t + u_t$.

נעזר בטבלה בכדי לנסח את ההשערות לבדיקת האינטראקציה:

	גבר	אישה	הפרש
לבן	$\gamma_0 + \gamma_1$	$\gamma_0 + \gamma_3$	$\gamma_1 - \gamma_3$
שחור	$\gamma_0 + \gamma_2$	γ_0	γ_2
הפרש	$\gamma_1 - \gamma_2$	γ_3	

ההשערות לבדיקת קיום האינטראקציה: $H_0 : \gamma_1 - \gamma_3 = \gamma_2$ או $H_0 : \gamma_1 - \gamma_2 = \gamma_3$

התוצאות שיתקבלו כאן יהיו כמובן זהות לחלוטין לתוצאות שהתקבלו בדרך הקודמת: $\begin{matrix} WALD = t^2 \\ PF = Pt \end{matrix}$.

שאלות:

משתנה דמי לחותך:

1) על בסיס מדגם של 50 איש העובדים בחברה מסוימת התקבלו התוצאות הבאות:

$$W_t = 5500 + 1043 \cdot D + 119 \cdot S_t .$$

(S.E) (134) (56) (24)

המספרים בסוגריים הם טעויות התקן של מבחני המובהקות לפרמטרים.

א. מהו השכר ההתחלתי של גבר בעל 12 שנות לימוד?

ב. מה ההבדל בשכר ההתחלתי בין גברים לנשים?

ג. האם הבדל זה מובהק באוכלוסייה?

ד. בדקו את הטענה כי השכר ההתחלתי של גברים גבוה ביותר מ-500 ₪ מזה של נשים.

ה. בדקו את הטענה שהשכר ההתחלתי של נשים נמוך ב-600 ₪ מזה של גברים.

פונקציית רגרסיה המכילה משתנים איכותיים בלבד:

2) על אותו המדגם של 50 איש העובדים בחברה מסוימת ביקש החוקר לבדוק האם יש הבדל בשכר הממוצע בין גברים לנשים.

תוצאות האמידה: $W_t = 5200 + 1120 \cdot D$.

נתון: $S_{\hat{\alpha}_1} = 63$.

בדקו האם קיים הבדל מובהק בשכר הממוצע בין נשים וגברים?

משתנה דמי לשיפוע:

3) על בסיס אותו מדגם, ביקש החוקר לדעת האם קיים הבדל מובהק בין גברים לנשים בתוספת לשכר בגין שנות הלימוד.

תוצאות האמידה נתונות להלן:

$$W_t = 5000 + 110 \cdot S_t + 120 \cdot D \cdot S_t + u_t$$

(68) (23) (25)

בדוק את ההשערה.

משתנה דמי לכל פונקציה:

4) חוקר רצה לבדוק את הטענה שסוג הכביש משפיע על מס' תאונות הדרכים בקטעי כביש בינעירוניים, בהינתן נפח התנועה.
החוקר בדק האם הפונקציה של מס' התאונות בהינתן נפח התנועה, שונה בין כבישים מהירים לבין כבישים שאינם מהירים. לשם כך אמד החוקר את ארבע המשוואות הבאות:

1. $NUM_t = \gamma_1 + \delta_1 \cdot AVGD_t + \varepsilon_{1t}$ כבישים מהירים בלבד.
2. $NUM_t = \gamma_2 + \delta_2 \cdot AVGD_t + \varepsilon_{2t}$ כבישים לא מהירים בלבד.
3. $NUM_t = \gamma_3 + \delta_3 \cdot AVGD_t + \varepsilon_{3t}$ שני סוגי הכביש (כל המדגם).
4. $NUM_t = \alpha + \beta_1 \cdot TYPE_t + \beta_2 \cdot AVGD_t + \beta_3 \cdot (AVGD \cdot TYPE)_t + U_t$

כאשר:
NUM_t - מס' תאונות הדרכים הקטלניות בקטע כביש t בשנה.
$AVGD_t$ - נפח התנועה בקטע כביש t ליום באלפים.
$TYPE_t$ - משתנה דמי המקבל את הערך 1 כאשר הכביש מהיר, ו-0 כאשר הכביש לא מהיר.
תוצאות אמידת המשוואות מופיעות בהמשך השאלה.

א. בדקו את טענת החוקר בשתי דרכים שונות. ציינו איזה מן המשוואות רלוונטיות עבור כל דרך.
ב. חשבו את הערכים המספריים עבור אומדני משוואה (4).
ג. מהו האומדן הנקודתי למס' התאונות בכביש מהיר כאשר נפח התנועה עומד על ארבעת מכוניות ליום בקטע הכביש האמור?

הועלתה הטענה כי המקדם להשפעה של נפח התנועה בדרכים מהירות הינו כפול מזה שבדרכים לא-מהירות.

ד. מהי השערת האפס לבדיקת הטענה (במונחי משוואה (4))?
ה. מהי הרגרסיה "תחת H_0" למבחן WALD?

משוואה (1) - כבישים מהירים בלבד:

The REG Procedure

Model: MODEL1

Dependent Variable: num num

Number of Observations Read	344
Number of Observations Used	344

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	1	4700.81174	4700.81174	89.12	<.0001
Error	342	18039	52.74684		
Corrected Total	343	22740			

Root MSE	7.26270	R-Square	0.2067
Dependent Mean	5.10465	Adj R-Sq	0.2044
Coeff Var	142.27617		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t|
Intercept	1	1.55289	0.54303	2.86	0.0045
avgd	1	0.02098	0.00222	9.44	<.0001

משוואה (2) - כבישים לא מהירים בלבד:

The REG Procedure

Model: MODEL1

Dependent Variable: num num

Number of Observations Read	410
Number of Observations Used	410

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	1	971.99073	971.99073	145.83	<.0001
Error	408	2719.34830	6.66507		
Corrected Total	409	3691.33902			

Root MSE	2.58168	R-Square	0.2633
Dependent Mean	1.38780	Adj R-Sq	0.2615
Coeff Var	186.02612		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t|
Intercept	1	0.14978	0.16360	0.92	0.3605
avgd	1	0.02877	0.00238	12.08	<.0001

משוואה (3) - שני סוגי הכביש (כל המדגם):

The REG Procedure

Model: MODEL1

Dependent Variable: num num

Number of Observations Read	754
Number of Observations Used	754

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	1	8052.00804	8052.00804	288.84	<.0001
Error	752	20964	27.87730		
Corrected Total	753	29016			

Root MSE	5.27990	R-Square	0.2775
Dependent Mean	3.08355	Adj R-Sq	0.2765
Coeff Var	171.22758		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t|
Intercept	1	0.73903	0.23665	3.12	0.0019
avgd	1	0.02330	0.00137	17.00	<.0001

משוואה (4):

The REG Procedure

Model: MODEL1

Dependent Variable: num num

Number of Observations Read	754
Number of Observations Used	754

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	3	8256.966	2752.322	99.44	<.0001
Error	750	20759	27.678		
Corrected Total	753	29016			

Root MSE	5.26102	R-Square	0.2846
Dependent Mean	3.08355	Adj R-Sq	0.2817
Coeff Var	170.61553		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t|
Intercept	1	0.14978	0.33340	0.45	0.6534
type	1				0.0067
avgd	1				<.0001
avgdtype	1				0.1283

משתנה איכותי עם יותר משתי קטגוריות:

5) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הועלתה הטענה כי יש הבדל במחיר ההתחלתי בין האביב לקיץ.

i. מהי השערת האפס לבדיקת הטענה?

ii. פרטו שני מבחנים סטטיסטיים בעזרתם ניתן לבדוק את הטענה.

ב. הועלתה הטענה כי יש רק שתי עונות המשפיעות על מחיר הירקות ההתחלתי: קיץ + אביב, חורף + סתיו.

i. מהי השערת האפס לבדיקת הטענה?

ii. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים? פרטו.

משתנה דמי עבור שני משתנים איכותיים:

6) חוקר בדק השפעות של השכלה, גזע (שחור, לבן) וניסיון (EXP) על לוג השכר (ln(Y)) במדגם בן 306 תצפיות:

$\ln(Y)_t = \alpha_0 + \alpha_1 D_1 + \alpha_2 D_2 + \alpha_3 D_3 + \beta_1 EXP_t + \beta_2 EXP_t^2 + u_t$.

$\ln(Y)$ - לוג השכר.

EXP - שנות ניסיון.

D_1 - מקבל את הערך 1 עבור שחורים בעלי השכלה גבוהה (ו-0 אחרת).

D_2 - מקבל את הערך 1 עבור שחורים בעלי השכלה נמוכה (ו-0 אחרת).

D_3 - מקבל את הערך 1 עבור לבנים בעלי השכלה גבוהה (ו-0 אחרת).

תוצאות אמידת משוואת הרגרסיה מוצגות בפלט להלן:

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	5	---------	------	------	------
Error	300	140	------		
Corrected Total	305	210			

Root MSE	-------	R-Square	-------
Dependent Mean	-------	Adj R-Sq	-------
Coeff Var	-------		

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t|
Intercept	1	-------	--------	60.84	0.00
D1	1	-------	--------	-3.20	0.00
D2	1	-------	--------	-5.56	0.00
D3	1	-------	--------	7.23	0.00
EXP	1	-------	--------	8.11	0.00
EXP^2	1	--------	--------	-7.45	0.00

א. לפי המשוואה הניסיון זהה עבור
שחורים ולבנים: נכון/לא נכון/ לא ניתן לדעת

ב. בדוק את הטענה כי בקרב אנשים בעלי השכלה נמוכה אין השפעה לגזע.

ג. בדוק את הטענה כי אין השפעות השכלה בקרב לבנים.

ד. מהי השערת האפס לבדיקת הטענה כי אין אינטראקציה בין גזע להשכלה?

ה. לבדיקת ההשערה של הסעיף הקודם בוצע מבחן WALD.
הרגרסיה המוגבלת תחת השערת האפס הינה:
$Z_0 = \gamma_0 + \gamma_1 Z_1 + \gamma_2 Z_2 + \gamma_3 Z_3 + \gamma_4 Z_4 + v$.
מהם ה-Z-ים?

ו. בדוק את ההשערה אם ידוע שבמודל המוגבל $R^2 = 0.33$.

ז. החוקר החליט לאמוד במקום את המשוואה המקורית את המשוואה:
$$\ln(Y)_t = \lambda_0 + \lambda_1 S + \lambda_2 E + \lambda_3 (S \cdot E) + \delta_1 EXP + \delta_2 EXP^2 + \omega_t$$
כאשר:
S מקבל את הערך 1 עבור שחורים ו-0 אחרת (לבנים).
E מקבל את הערך 1 עבור השכלה גבוהה ו-0 אחרת (השכלה נמוכה).
מה הקשר בין המקדמים של שני המודלים?

ח. אם יאמוד החוקר את המשוואה:
$\ln(Y)_t = \lambda_0 + \lambda_1 S + \lambda_2 E + \delta_1 EXP + \delta_2 EXP^2 + \omega_t$, האם תהיה טעות ספציפיקציה של השמטת משתנה רלוונטי (היעזר בסעיפים ד', ו' ו-ז').

7) חוקרת בדקה השפעות השכלה, מגדר וניסיון על הכנסה מעבודה לפי המשוואה הבאה:

$$\ln\left(MWAGE\right)=\alpha_0+\alpha_1\cdot S+\alpha_2\cdot E+\alpha_3\cdot\left(S\cdot E\right)+\beta_0\cdot EXP+\beta_1\cdot\left(EXP\cdot S\right)+\beta_2\cdot\left(EXP\cdot S\right)+$$
$$\beta_3\cdot\left(EXP\cdot S\cdot E\right)+U ,$$

כאשר:

S משתנה דמי: 1= עבור נשים, 0=גברים.

E משתנה דמי: 1= עבור השכלה גבוהה $\left(scl>12\right)$, 0=השכלה נמוכה.

א. רשמו את הפונקציה לחישוב:

i. תחזית לוג השכר עבור גבר בעל השכלה נמוכה ו- 10 שנות ניסיון.

ii. תחזית לוג השכר ההתחלתי עבור נשים משכילות.

iii. לאחר כמה שנות ניסיון ישתווה השכר של נשים משכילות לזה של גברים משכילים?

ב. רשמו את השערות האפס המתאימות לבדיקת הטענות הבאות:

i. אין השפעה של מגדר והשכלה על השכר.

ii. השפעת ההשכלה אינה תלויה במגדר.

iii. אין השפעות השכלה אצל גברים.

iv. אין הבדל בשיעורי התשואה לניסיון, בקרב הנשים.

תשובות סופיות:

1) א. $W_t = 7971$. ב. 1,043 ש"ח. ג. כן. ד. יש עדות לכך.
ה. יש עדות לכך.

2) יש עדות לכך.

3) יש עדות לכך.

4) א. יש עדות לכך, מבחן CHOW: 1, 2 ו-3, משתנה דמי: 3 ו-4.
ב. $\hat{\alpha} = 0.14978$, $\hat{\beta}_1 = 1.40311$, $\hat{\beta}_2 = 0.002877$, $\hat{\beta}_3 = -0.008$.
ג. $NUM_t = 1.532398$. ד. $H_0 : \beta_2 + \beta_3 = 2 \cdot \beta_2$, $H_0 : \beta_3 = \beta_2$.
ה. $NUM_t = \alpha + \beta_1 \cdot TYPE_t + \beta_3 \cdot \left(AVGD_t + AVGD \cdot TYPE \right)_t + U_t$.

5) א.i. $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2$. ii. WALD ו-t. ב.i. $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2, \alpha_3 = 0$.
ii. WALD.

6) א. נכון. ב. יש עדות לכך. ג. יש עדות לכך.
ד. $H_0 : \alpha_2 = \alpha_1 - \alpha_3$ או $H_0 : \alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_2$.
ה. $Z_0 = \ln(Y)_t$, $Z_1 = D_1 + D_3$, $Z_2 = D_2 - D_3$, $Z_3 = EXP_t$, $Z_4 = EXP_t^2$
ו. אין עדות לכך. ז. $\lambda_0 = \alpha_0$, $\lambda_1 = \alpha_2$, $\lambda_2 = \alpha_3$, $\lambda_3 = \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$.
ח. לא.

7) א.i. $\hat{\ln}(MWAGE) = \hat{\alpha}_0 + \hat{\beta}_0 \cdot 10$.
ii. $\hat{\ln}(MWAGE) = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_3$. iii. $EXP_t = \dfrac{-(\alpha_1 + \alpha_3)}{\beta_1 + \beta_3}$.
ב.i. $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$. ii. $H_0 : \alpha_3 = \beta_3 = 0$.
iii. $H_0 : \alpha_2 = \beta_2 = 0$. iv. $H_0 : \beta_2 + \beta_3 = 0$.

שיטות מחקר במימון

פרק 23 - תיאוריה הפרת ההנחות קלאסיות

תוכן העניינים

הפרת ההנחות הקלאסיות:

רקע:

ארבעת הנושאים הבאים עוסקים במצב של הפרת אחת ההנחות הקלאסיות הדרושות לאמידת הפרמטרים בשיטת OLS:

- הטרוסקדסטיות (הפרת הנחה מס׳ 5) – שונות קבועה ויחידה לאורך קו הרגרסיה: $V(u_t)=\sigma^2$.
- מתאם סידרתי (הפרת הנחה מס׳ 6) – אי תלות בין הטעויות: $\mathrm{cov}(u_t,u_s)=0$.
- מודלים דינמיים ו-משוואות סימולטניות (הפרת הנחה מס׳ 4) – אי תלות בין המשתנים הב״ת לטעויות: $\mathrm{cov}(x,u)=0$.

בכל אחד מן הנושאים נלמד:

- מהן ההשלכות של הפרת ההנחות הללו על אומדי הריבועים הפחותים.
- מהם המבחנים הסטטיסטיים המשמשים לזיהוי קיומה של ההפרה.
- כיצד נתקן את משוואת הרגרסיה כך שניתן יהיה לאמוד את הפרמטרים בשיטת OLS.

שיטות מחקר במימון

פרק 24 - הטרוסקדסטיות

תוכן העניינים

הטרוסקדסטיות:

רקע:

הטרוסקדסטיות הוא מצב שבו מופרת הנחת ההומוסקדסטיות, הגורסת כי שונות הטעויות היא אותה שונות עבור כל תצפית ותצפית: $V(u_t)=\sigma^2$ לכל t, כלומר התצפיות מפוזרות באופן אחיד סביב קו הרגרסיה.
במצב של הטרוסקדסטיות שונות הטעויות של כל תצפית היא שונה: $V(u_t)=\sigma_t^2$.

ההשלכות של הטרוסקדסטיות על אומדי OLS:

בהינתן הטרוסקדסטיות מופרת תכונת היעילות של אומדי הריבועים הפחותים שכן בכדי לחשב שונות יעילה של האומדים השתמשנו בהנחה של שונות קבועה.

מבחנים לזיהוי הטרוסקדסטיות:

החשד לקיומה של בעיית הטרוסקדסטיות בנתונים צריך להתעורר כאשר אנו בוחנים את גרף השאריות – באיזה אופן השונות של הטעויות משתנה בין תצפית לתצפית.
שיטות לזיהוי הטרוסקדסטיות: מבחן GQ (Goldfeld-Qauandt) ומבחן White.
מבחן GQ מניח כי במקום שונות אחת אחידה של הטעויות לכל התצפיות, קיימות שתי שונויות שונות בלבד. ואילו מבחן White מניח כי לכל תצפית ותצפית שונות שונה של טעויות.

1. מבחן GQ:
ההנחה העומדת בבסיס מבחן זה היא כי קיימות שתי שונויות שונות של טעויות.
ביצוע המבחן:
    - מחלקים את המדגם לשני חלקים:
        1. החלק שבו אנו חושדים שיש שונות גבוהה יותר.
        2. החלק שבו אנו חושדים שיש שונות נמוכה יותר.

    מקובל להשמיט מס' תצפיות (בין 1/6 ל-1/3) במרכז המדגם.

    - אומדים כל אחד מהחלקים בנפרד ומקבלים את ה-ESS של כל חלק.

    - מחשבים את הסטטיסטי: $F_{stat}=\dfrac{ESS_1/T_1-K-1}{ESS_2/T_2-K-1}$ (תמיד השונות הגבוהה חלקי הקטנה).

- סטטיסטי זה מתפלג: $F_{(\alpha;T_1-K-1,T_2-K-1)}$.
- כלל ההכרעה: אם $F_{stat} > F_C$ אז דוחים את H_0.
- ההשערות: $\begin{matrix} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \end{matrix}$.

2. מבחן White:
ההנחה העומדת בבסיס מבחן זה כי לכל תצפית ותצפית שונות שונה של טעויות. הביטוי המתמטי של הנחה זו היא היותה של השונות פונקציה ליניארית של כל המשתנים המסבירים, ריבועיהם והאיברים הצולבים:

$$\sigma_t^2 = f\left(x_j, x_j^2, x_j x_j\right)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k + \beta_1 x_k^2 + \ldots + \beta_k x_k^2 + \gamma_{12} x_1 x_2 + \gamma_{13} x_1 x_3 \ldots$$

האומד ל- σ_t^2 הוא $\hat{u}_t^2$.
המבחן הוא מבחן LM:

- אומדים את המודל המקורי ומקבלים את הסטיות מקו הרגרסיה $\hat{u}_t$ (המכונה בתוכנה הסטטיסטית RES-SAS).
- אומדים את $\hat{u}_t^2$ כפונקציה ליניארית של כל המשתנים המסבירים, ריבועיהם והאיברים הצולבים: $\hat{u}_t^2 / x_j, x_j^2, x_j x_j$ זוהי רגרסיית העזר.
- נחשב את סטטיסטי LM: $LM_{stat} = T_y \cdot R_y^2$.
- אם $LM_{stat} > \chi_m^2$ כאשר, m = מסי המשתנים ברגרסיית העזר.

השערות: $\begin{matrix} H_0: \alpha_j = \beta_j = \gamma_{jj} = 0 \\ H_1: OTHERWISE \end{matrix}$.

פיתרון בעיית ההטרוסקדסטיות – ריבועים פחותים משוקללים (WLS):

נניח שאנו רוצים לאמוד את המודל: $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ וידוע כי לכל קריזה שונות אחרת. ההנחה שעומדת בבסיס שיטת ה-WLS היא כי השונות המשתנה כוללת בתוכה מרכיב קבוע ומרכיב משתנה: $\sigma_t^2 = Z_t \cdot \sigma^2$ את המרכיב המשתנה בשונות (Z_t) יש לנטרל. לשם כך ניצור משתנה חדש – W_t שיהווה השורש ההופכי לאותו מרכיב משתנה: $W_t = \dfrac{1}{\sqrt{Z_t}}$.

נכפיל כל תצפית במשתנה החדש W_t וניצור משוואה שהיא קומבינציה ליניארית של

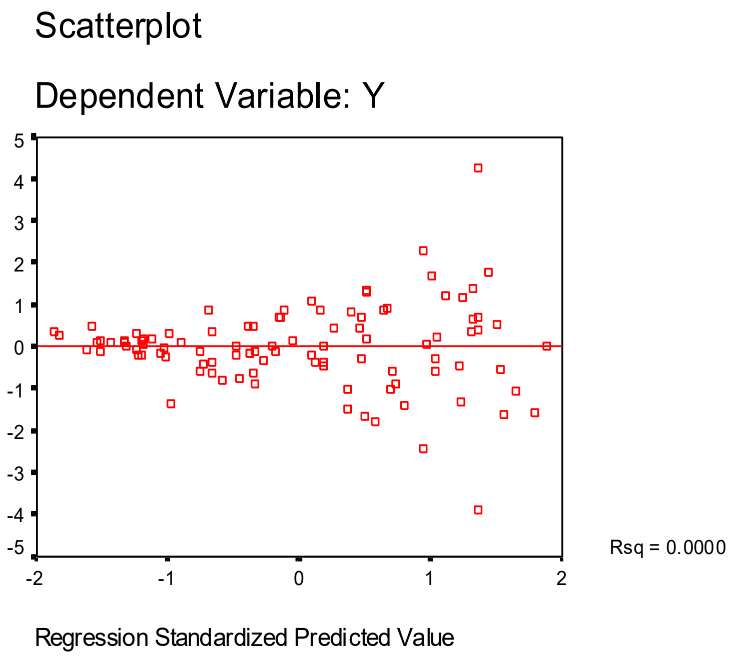
המשוואה המקורית: $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$
$Y_t W_t = \alpha \cdot W_t + \beta \left(X_t W_t \right) + u_t W_t$.

בצורתה המפורשת המשוואה החדשה נראית כך: $\frac{Y_t}{\sqrt{Z_t}} = \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{Z_t}} + \beta \cdot \frac{X_t}{\sqrt{Z_t}} + \frac{u_t}{\sqrt{Z_t}}$.

שאלות:

מבחן GQ:

1) נאמד הקשר שבין הכנסה לתצרוכת: $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.
גרף השאריות של הרגרסיה הנ"ל נתון להלן:



מגרף זה אנו למדים כי השונות איננה אחידה סביב קו הרגרסיה אלא תלויה ברמת ההכנסה – זהו מצב של הטרוסקדסטיות.
בכדי לבצע מבחן GQ:

- התצפיות של משתנה ההכנסה סודרו מהגדול לקטן והמדגם חולק לשלוש קבוצות שוות.
- רגרסיה נפרדת הורצה על השליש הראשון ועל השליש האחרון.

התוצאות של אמידת הקשר בין הכנסה לתצרוכת מוצג בפלטים 1 ו-2 בהתאמה:

משוואה (1)

```
The REG Procedure
Model: MODEL1
Dependent Variable: y

Number of Observations Read         16
Number of Observations Used         16

Analysis of Variance

                            Sum of            Mean
Source            DF       Squares          Square    F Value     Pr > F
  Model
Error             14         166452.9
Corrected Total
```

משוואה (2)

```
The REG Procedure
Model: MODEL1
Dependent Variable: y

Number of Observations Read         16
Number of Observations Used         16

Analysis of Variance

                            Sum of          Mean
Source            DF         Squares       Square    F Value     Pr > F
Model
Error             14      2934638
Corrected Total
```

האם יש עדות לקיום הטרוסקדסטיות בנתונים? (בצעו את המבחן המתאים: רשמו השערות, חשבו סטטיסטי מבחן, רשמו כלל הכרעה והגיעו למסקנה).

2) על מנת לבחון את פונקציית הייצור בענף מסוים נאספו נתונים על 150 פירמות. נסמן:

Q - תפוקה שנתית באלפי שקלים.

L - מספר עובדים.

המודל הנאמד: $\ln(Q)=\alpha+\beta\cdot\ln(L)$.

החוקר חשש שההפרעה המקרית איננה הומוסקדסטית. לשם כך הוא מיין את התצפיות בסדר עולה של מספר העובדים, השמיט $\frac{1}{3}$ מהתצפיות האמצעיות והריץ שתי רגרסיות נפרדות עם מספר שווה של תצפיות:

ברגרסיה הכוללת את הערכים הנמוכים יחסית של תשומת העבודה הוא

קיבל: $R^2 = 0.403$, $ESS = 279.3$.
ברגרסיה הכוללת את הערכים הגבוהים יחסית של תשומת העבודה הוא
קיבל: $R^2 = 0.238$, $ESS = 493.8$.
האם יש עדות לקיום הטרוסקדסטיות בנתונים? (בצעו את המבחן המתאים:
רשמו השערות, חשבו סטטיסטי מבחן, רשמו כלל הכרעה והגיעו למסקנה).

מבחן WHITE:

3) על אותו הקשר שבין הכנסה לתצרוכת: $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.
שאנו חושדים על פי גרף השאריות כי קיים בו מצב של הטרוסקדסטיות.
בכדי לבצע את מבחן WHITE:

- נחשב את השאריות של הרגרסיה: $\hat{u}_t = Y_t - \hat{Y}_t$.
- נעלה את השאריות בריבוע: $\hat{u}_t^2$.
- נאמוד את המשוואה: $\hat{u}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \beta_1 X_t^2 + v_t$.

תוצאות האמידה מוצגות להלן:

The REG Procedure
Model: MODEL1

Dependent Variable: RES^2

Number of Observations Read	48
Number of Observations Used	48

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model					
Error					
Corrected Total					

Root MSE		R-Square	0.390763
Dependent Mean		Adj R-Sq	

בצעו מבחן White (השערות, סטטיסטי המבחן, כלל הכרעה ומסקנה).

4) חוקר מניח כי מכירות של חנות הן פונקציה של שיטחה, דמי שכירות והאפשרות של מכירת עיתונים.
נסמן :
Y_SALES - מכירות חודשיות (₪).
$X1\_SQUARES$ - שטח החנות (מ"ר).
$X2\_RENT$ - דמי שכירות ($).
$PAPERS$ - משתנה איכותי המקבל 1 אם החנות מוכרת גם עיתונים ו-0 אם לא.
החוקר חשד כי קיימת בעיה של הטרוסקדסטיות בנתונים.
החוקר ביצע מבחן לזיהוי הטרוסקדסטיות שתוצאותיו נתונות להלן :

```
                    Dependent Variable:
                Number of Observations Read         20
                Number of Observations Used         20

                   Analysis of Variance

                            Sum of            Mean
Source            DF        Squares           Square       F Value     Pr > F
Model
Error
Corrected Total
              Root MSE                     R-Square     0.086942
              Dependent Mean              Adj R-Sq

                   Parameter Estimates
                         Parameter       Standard
Variable            DF       Estimate        Error      t Value     Pr > |t|
Intercept
X1_SQUARE
X1_SQUARE^2
X1_SQUARE*X2_RENT
X2_RENT
X2_RENT^2
X2_RENT*PAPERS
 PAPERS
```

הרגרסיה המופיעה בפלט לעיל נועדה לבדיקת : ____________________________.
על ידי מבחן : ______________________ .
המשתנה התלוי הינו: __________________.
המשתנים הב"ת: _____________________.
ההשערות הינן: _________________________ .
גודל הסטטיסטי למבחן הינו (רשמו תוצאה מספרית): _______________.
המסקנה המתקבלת היא: __________________________________.

שיטת WLS:

5) נתון המודל:

1. $Y_t = \alpha + \beta \cdot X_t + U_t$.

ונתון כי: $VAR(U_t) = \frac{\sigma^2}{Z_t^2}$ (Z_t משתנה ידוע).

א. מהי הבעיה שנוצרת באמידת משוואה (1)?

ב. מהן תכונות אומדי הריבועים הפחותים של משוואה (1)?

כדי לפתור את הבעיה שנוצרה, נאמדה המשוואה הבאה:

2. $Y_t \cdot W_t = \alpha \cdot W_t + \beta \cdot (X_t \cdot W_t) + U_t \cdot W_t$.

ג. מהו W_t שבעזרתו ניתן לאמוד את α ו-β בצורה יעילה?

ד. מהו האומד היעיל של σ^2?

ה. האם ניתן להשוות בין המודלים על בסיס R^2? אם לא, האם ניתן להחליט בכל זאת איזה מודל טוב יותר?

ו. חוו דעתכם על הטענות הבאות, ונמקו:

i. אם נתון כי: $Z_t = a + b \cdot \bar{X}$, התשובות לסעיפים א' ו-ב' נשארות ללא שינוי.

ii. המשוואה הנורמאלית: $\sum \hat{\varepsilon}_t = 0$ (כאשר: $\varepsilon_t = U_t \cdot W_t$) היא אחת המשוואות הנורמאליות לאמידת משוואה (2).

6) ענו על השאלה הקודמת, כאשר נתון כי: $VAR(U_t) = \sigma^2 \cdot X_t^2$.

7) נתון המודל: $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$. וקיים מדגם של 100 תצפיות כאשר נתון כי: $V(u_t) = \sigma_t^2 = \begin{cases} X_t \sigma^2 \Leftrightarrow t \geq 50 \\ X_t^2 \sigma^2 \Leftrightarrow t \leq 50 \end{cases}$. (שאר ההנחות הקלאסיות מתקיימות).

א. במשוואה מס' 1 יש בעיה של:________________.

ב. אמידת משוואה (1) תניב אומדים בלתי מוטים ועקיבים: נכון/ לא נכון/ לא ניתן לדעת

ג. פתרון הבעיה הקיימת במשוואה (1) ייתכן על ידי אמידת המשוואה הבאה: $Y_t \cdot W_t = \alpha \cdot W_t + \beta \cdot (X_t \cdot W_t) + \omega_t$.

כאשר: $W_t =$ ______.

ד. אם נתון כי: $V(u_t) = \sigma_t^2 = \begin{cases} 3\sigma^2 \Leftrightarrow t \geq 50 \\ \sigma^2 \Leftrightarrow t \leq 50 \end{cases}$

האם ישתנו תשובותיכם לסעיפים א' ו-ב': כן/לא/לא ניתן לדעת

תשובות סופיות:

1) יש עדות לכך, השערות: $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$, חישוב סטטיסטי: 17.62, כלל הכרעה: 2.48.

2) יש עדות לכך, השערות: $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$, חישוב סטטיסטי: 1.77, כלל הכרעה: 1.69.

3) יש עדות לכך, השערות: $H_0: \alpha_1 = \beta_1 = 0$, $H_1: OTHERWISE$, חישוב סטטיסטי: 18.75,
כלל הכרעה: 5.991.

4) קיום הטרוסקדסטיות בנתונים.
$(LM)WHITE$.
RES^2.
$X1\_SQUARE$, $X1\_SQUARE^2$, $X1\_SQUARE * X2\_RENT$,
$X2\_RENT$, $X2\_RENT^2$, $X2\_RENT * PAPERS$, $PAPERS$.
$LM_{stat} = 1.73$.
אין עדות לכך.

5) א. הטרוסקדסטיות. ב. ראו סרטון. ג. $W_t = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{Z_t^2}}} = Z_t$.
ד. $\sigma^2 = \frac{ESS}{T-K}$. ה. לא, המודל השני. ו. i. לא נכון ii. לא נכון.

6) א. הטרוסקדסטיות. ב. ראו סרטון. ג. $W_t = \frac{1}{X_t}$.
ד. $S^2 = \frac{ESS}{T-k-1}$. ה. ראו סרטון. ו. ראו סרטון.

7) א. הטרוסקדסטיות. ב. נכון.
ג. $t \geq 50$ $W_t = \frac{1}{\sqrt{X_t}}$, $t \leq 50$ $W_t = \frac{1}{\sqrt{X_t^2}}$. ד. לא.

שיטות מחקר במימון

פרק 25 - מתאם סדרתי

תוכן העניינים

מתאם סדרתי:

רקע:

מתאם סדרתי עוסק במצב שבו מופרת ההנחה (מס׳ 6) של אי תלות בין הטעויות: $\operatorname{cov}(u_t,u_s)=0$ ונוצרת תלות סטטיסטית בין הטעויות במודל: $\operatorname{cov}(u_t,u_s)\neq 0$.
תלות כזו בין הטעויות קיימת בדרך כלל כאשר הנתונים הנאספים הם נתוני סדרות עיתיות ולא נתוני חתך בהם עסקנו עד כה. בנתוני סדרות עיתיות, מאחר ומדובר באותו הפרט הנמדד בזמנים שונים סביר שהטעויות בניבוי שלו תהיינה תלויות אחת בשנייה.

השלכות על אומדי הריבועים הפחותים (OLS):

מבין התכונות של אר״פ (ליניאריות, חוסר הטיה, עקיבות ויעילות) היחידה שמופרת כאשר קיים מתאם סידרתי היא: תכונת היעילות.
משום שתכונת היעילות היא היחידה מבין תכונות אר״פ התלויה להוכחתה בקיומה של הנחת אי התלות בין הטעויות. משום הפגיעה בתכונת היעילות, בדיקת ההשערות לא תהיה תקפה.

- שימו לב: כי במידה וקיים מתאם סידרתי חיובי בין הטעויות ולמשתנים יש מגמת זמן (X עולה או יורד עם הזמן) אומד השונות (ESS) יהיה מוטה כלפי מטה ואז נקבל: R^2, F ו-t מוטים כלפי מעלה.

מבנה המתאם הסדרתי:

מתאם סדרתי מסדר ראשון:
ההנחה היא כי יש מתאם בין הטעויות במרחק אחד, כלומר u_t תלוי ישירות רק ב-u_{t-1}: $\operatorname{cov}(u_t,u_{t-1})\neq 0$.
את המתאם בין הטעויות מסדר ראשון ניתן לנסח באופן הבא: $u_t=\rho\cdot u_{t-1}+\varepsilon_t$

כך ש:

1. $\rho\neq 0$ (כי אם $\rho=0$ אין מתאם סידרתי).
2. $-1<\rho<1$ (כי אם חורג מ-1 הטעות הולכת וגדלה עם הזמן).
3. ρ חיובי פירושו מתאם סדרתי חיובי ואילו ρ שלילי פירושו מתאם סדרתי שלילי (לא נפוץ).

4. ε_t מקיים את ההנחות הקלאסיות מאחר ומהווה סטייה מקרית לחלוטין

(בניגוד ל- u_t) כך ש:

$$E(\varepsilon_t)=0$$
$$V(\varepsilon_t)=\sigma_\varepsilon^2.$$
$$\operatorname{cov}(\varepsilon_t,\varepsilon_{t-s})=0$$

המודל יכיל שתי משוואות-המשוואה העיקרית והגדרת המתאם הסדרתי (מסדר ראשון):

$$Y_t=\alpha+\beta X_t+u_t$$
$$u_t=\rho\cdot u_{t-1}+\varepsilon_t.$$

מלבד α ו- β נרצה לאמוד גם את ρ.

מתאם סדרתי מסדר שני:

$u_t=\rho_1\cdot u_{t-1}+\rho_2\cdot u_{t-2}+\varepsilon_t$.

הן u_{t-1} והן u_{t-2} משפיעים ישירות על u_t.

מתאם סדרתי מסדר P:

$u_t=\rho_1\cdot u_{t-1}+\rho_2\cdot u_{t-2}+\ldots+\rho_P\cdot u_{t-P}+\varepsilon_t$.

u_t מושפע מתקופות שונות בעבר.

תכונות המתאם הסדרתי:

מכיוון שכל טעות בזמן מסוים מתואמת עם הטעות הסמוכה לה בזמן: $r_{(u_t,u_{t-s})}=\rho^s$

המתאם של u_t הולך ופוחת עם הזמן: $\rho_{u_tu_{t-1}}>\rho^2_{u_tu_{t-2}}>\rho^3_{u_tu_{t-3}}>\ldots>\rho^s_{u_tu_{t-s}}$.

בנוסף לכך, התוחלת, השונות והשונות המשותפת של הטעויות:

$$E(u_t)=0$$
$$V(u_t)=\sigma_u^2=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2}$$
$$COV(u_t,u_{t-s})=\rho^s\sigma_{u_t}^2=\rho^s\frac{\sigma_s^2}{1-\rho^2}$$

מבחנים לזיהוי מתאם סדרתי:

מבחן DW (דרבין ווטסון) לקיום מתאם סדרתי מסדר ראשון:

- נניח תחילה כי אין מתאם סדרתי ונאמוד את המשוואה הראשית בשיטת OLS.
- כחלק מתוצאות האמידה נקבל ציון DW (יכול לקבל ערכים בין 0 ל-4 בלבד).
- נתבונן בטבלת DW ולפי K = מס' המשתנים הב"ת במודל ו-T = מס' התצפיות במדגם נשלוף שני ערכים: d_U ו- d_L.
- נחלק את הטווח שבין 0 ל-4 באופן הבא:

$$0 — \rho > 0 — d_L — d_U — \rho = 0 — 4-d_U — 4-d_L — \rho < 0 — 4$$

- נראה היכן נופל ציון ה-DW שהתקבל כחלק מתוצאות האמידה.
ניתן לדעת אם יש מתאם ואיזה סוג של מתאם רק אם ציון ה-DW ייפול בחלקים המודגשים באדום.

השערות: $\begin{matrix} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho > 0, \rho < 0 \end{matrix}$.

חישוב הסטטיסטי: $DW_{stat} \cong 2 \cdot (1-\hat{\rho})$.

אם אנו מקבלים ציון $\hat{\rho}$ ניתן להציב בנוסחה ולקבל DW_{stat}.

למבחן DW יש שתי בעיות עיקריות:

1. מתאים רק למתאם סדרתי מסדר ראשון.
2. יש אזורים "מתים" בטווח בהם לא ניתן לדעת האם יש מתאם סדרתי.

בנוסף לכך על מספר תנאים להתקיים כדי שאפשר יהיה להשתמש במבחן DW:

1. הרגרסיה כוללת חותך.
2. ה-Xים קבועים ולא משתנים.
3. אין משתנים מסבירים שהם פיגור של המשתנה המוסבר.
4. אין תצפיות חסרות באמצע.
5. אם קיים מתאם סדרתי מסדר ראשון אז הוא מהצורה: $u_t = \rho \cdot u_{t-1} + \varepsilon_t$.

מבחן LM:

לעומת מבחן DW מבחן LM מתאים גם לבחינת קיומו של מתאם סדרתי מסדרים גבוהים יותר מסדר ראשון: $\begin{matrix} Y_t = \alpha + \beta \cdot X_t + u_t \\ u_t = \rho \cdot u_{t-1} + \varepsilon_t \end{matrix}$.

המודל הלא מוגבל:

(U): $Y_t = \alpha + \beta \cdot X_t + \rho \cdot u_{t-1} + \varepsilon_t$.

ניתן להתייחס לבחינת קיומו של מתאם סדרתי כהוספת משתנה מסביר: $\hat{u}_{t-1}$.

השלבים לביצוע המבחן:

- נאמוד את המודל המקורי ונחשב $\hat{u}_t$ ו- $\hat{u}_{t-1}$.
- נאמוד את רגרסיית העזר: $\hat{u}_t / x_1, x_2, ..., x_k; \hat{u}_{t-1}$.
- נחשב סטטיסטי LM: $LM_{stat} = T \cdot R^2$.
- נדחה את H_0 כאשר: $LM_{stat} > \chi^2_m$ כאשר m = סדר המתאם הסדרתי.

אם נדחה את H_0 נדע את סימנו של המתאם הסדרתי לפי המקדם של $\hat{u}_{t-1}$ ברגרסיית העזר ששווה ל- $\hat{\rho}$.

שימו לב כי אם נרצה לבדוק מתאם סדרתי מסדרים גבוהים יותר:

ההשערות: $\begin{matrix} H_0 : \rho_1 = \rho_2 = ... = \rho_s = 0 \\ H_1 : OTHERWISE \end{matrix}$.

רגרסיית העזר: $\hat{u}_t / x_1, x_2, ..., x_k; \hat{u}_{t-1}, \hat{u}_{t-2}, ..., \hat{u}_{t-s}$.

פתרון בעיית המתאם הסדרתי – רגרסיית הפרשים (שיטת קוקרן-אורקט):

ניצור משוואה שהיא קומבינציה ליניארית של המשוואה המקורית שבה לא יהיה מתאם סדרתי ולכן ניתן יהיה לאמוד אותה בשיטת הריבועים הפחותים, האומדים יהיו יעילים וניתן יהיה לבצע בדיקת השערות.

משוואה (1): המודל בזמן t: $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$.

משוואה (2): המודל בזמן $t-1$ מוכפל ב- ρ: $\rho \cdot Y_{t-1} = \rho \cdot \alpha + \rho \cdot X_{t-1} + \rho \cdot u_t$.

החסרת משוואה (2) ממשוואה (1):

$Y_t - \rho Y_{t-1} = \alpha(1-\rho) + \beta(X_t - \rho X_{t-1}) + (u_t - \rho u_{t-1})$.

כדי לאמוד את הפרמטרים של רגרסיית ההפרשים נגדיר:

$$Y_t^* = Y_t - \rho Y_{t-1}$$
$$\alpha^* = \alpha(1-\rho)$$
$$\beta^* = \beta$$
$$X_t^* = X_t - \rho X_{t-1}$$
$$\varepsilon_t = u_t - \rho u_{t-1}$$

כך "נטרלנו" את המתאם הסדרתי: $u_t = \rho \cdot u_{t-1} + \varepsilon_t \Leftarrow \varepsilon_t = u_t - \rho \cdot u_{t-1}$.

ε_t מקיים את כל ההנחות הקלאסיות ולכן שונות הרגרסיה וכן שונות הפרמטרים הנאמדים לא תהיה תלויה במקדם המתאם הסדרתי.
המשוואה "המתוקנת" אותה נאמוד: $Y^* = \alpha^* + \beta^* X_t^* + \varepsilon_t$.
לאחר אמידת משוואה זו ניתן לחלץ את האומדים של הפרמטרים המקוריים: $\hat{\beta}$, $\hat{\alpha}$.
מאחר ש- ρ איננו ידוע יש צורך לאמוד אותו.

אמידת ρ בשיטת קוקרן אורקוט:
שיטת קוקרן אורקוט לאמידת ρ היא שיטה איטראטיבית – מבוססת על חזרות של תהליך מסוים עד להתכנסות.
התהליך הממוחשב נקרא אוטורגרסיה (AUTOREGRESION) מסדר ראשון, שני, שלישי וכו' (תלוי בסדר המתאם הסדרתי). התיקון למתאם הסדרתי יתבצע על ידי הרצת רגרסיה עם משתנה AR(1) (אוטו רגרסיה מסדר ראשון), AR(1) ו-AR(2) (אם מניחים קיום אוטורגרסיה מסדר שני) וכו'. אם משתנה AR מובהק זו אינדיקציה שפתרנו את הבעיה של המודל המקורי.

שאלות:

תכונות המתאם הסדרתי:

1) נתון מתאם סדרתי מסדר ראשון: $u_t = \rho \cdot u_{t-1} + \varepsilon_t$.
נתון כי: $\rho = 0.9$ וכי: $V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 = 1$.
מצאו את:
א. המתאם בין u_t ל- u_{t-1}.
ב. המתאם בין u_t ל- u_{t-4}. הסבר את ההבדל בין המתאמים (סעיף א' ו-ב').
ג. השונות σ_u^2.
ד. חזרו על סעיפים א' עד ג' עבור $\rho = 0.4$. הסבירו את ההבדל בין התוצאות.

מבחן DW:

2) חוקר רצה לאמוד את מחיר סגירה של מניה כפונקציה של הזמן שעובר:
$CLOSE_t = \alpha + \beta \cdot TIME_t + u_t$.
כאשר:
$CLOSE_t$ = מחיר סגירה של מניה ב-$ ביום t.
$TIME_t$ = משתנה זמן שמקבל את הערכים: ...1,2,3.
תוצאות האמידה שהתקבלו:

Dependent variable: CLOSE

Analysis of Variance

F Value	Prob>F	Mean Square	Sum of Squares	DF	Source
	55.78		-------	1	Model
			-------	151	Error
			-------	152	C Total
		0.181	R-square	---- Root MSE	
		------	Adj R-sq	---- Dep Mean	
				---- C.V.	

Parameter Estimates

T for H0: Parameter=0	Prob>|T|	Standard Error	Parameter Estimate	DF	Variable
91.047	0.0000	0.0148	1.3474	1	INTERCEP
0.0000	-7.468	0.0001	-0.00075	1	TIME

Durbin-Watson D 0.150

האם קיים מתאם סדרתי?

TABLE 12 Cutoff Points for the Distribution of the Durbin-Watson Test Statistic

Let d_α be the number such that $P(d < d_\alpha) = \alpha$, where the random variable d has the distribution of the Durbin-Watson statistic under the null hypothesis of no autocorrelation in the regression errors. For probabilities $\alpha = .05$ and $\alpha = .01$, the tables show, for numbers of independent variables, K, values d_L and d_U such that $d_L \le d_\alpha \le d_U$, for numbers n of observations.

$\alpha = .05$

n	K = 1 d_L	K = 1 d_U	K = 2 d_L	K = 2 d_U	K = 3 d_L	K = 3 d_U	K = 4 d_L	K = 4 d_U	K = 5 d_L	K = 5 d_U
15	1.08	1.36	0.95	1.54	0.82	1.75	0.69	1.97	0.56	2.21
16	1.10	1.37	0.98	1.54	0.86	1.73	0.74	1.93	0.62	2.15
17	1.13	1.38	1.02	1.54	0.90	1.71	0.78	1.90	0.67	2.10
18	1.16	1.39	1.05	1.53	0.93	1.69	1.82	1.87	0.71	2.06
19	1.18	1.40	1.08	1.53	0.97	1.68	0.86	1.85	0.75	2.02
20	1.20	1.41	1.10	1.54	1.00	1.68	0.90	1.83	0.79	1.99
21	1.22	1.42	1.13	1.54	1.03	1.67	0.93	1.81	0.83	1.96
22	1.24	1.43	1.15	1.54	1.05	1.66	0.96	1.80	0.86	1.94
23	1.26	1.44	1.17	1.54	1.08	1.66	0.99	1.79	0.90	1.92
24	1.27	1.45	1.19	1.55	1.10	1.66	1.01	1.78	0.93	1.90
25	1.29	1.45	1.21	1.55	1.12	1.66	1.04	1.77	0.95	1.89
26	1.30	1.46	1.22	1.55	1.14	1.65	1.06	1.76	0.98	1.88
27	1.32	1.47	1.24	1.56	1.16	1.65	1.08	1.76	1.01	1.86
28	1.33	1.48	1.26	1.56	1.18	1.65	1.10	1.75	1.03	1.85
29	1.34	1.48	1.27	1.56	1.20	1.65	1.12	1.74	1.05	1.84
30	1.35	1.49	1.28	1.57	1.21	1.65	1.14	1.74	1.07	1.83
31	1.36	1.50	1.30	1.57	1.23	1.65	1.16	1.74	1.09	1.83
32	1.37	1.50	1.31	1.57	1.24	1.65	1.18	1.73	1.11	1.82
33	1.38	1.51	1.32	1.58	1.26	1.65	1.19	1.73	1.13	1.81
34	1.39	1.51	1.33	1.58	1.27	1.65	1.21	1.73	1.15	1.81
35	1.40	1.52	1.34	1.58	1.28	1.65	1.22	1.73	1.16	1.80
36	1.41	1.52	1.35	1.59	1.29	1.65	1.24	1.73	1.18	1.80
37	1.42	1.53	1.36	1.59	1.31	1.66	1.25	1.72	1.19	1.80
38	1.43	1.54	1.37	1.59	1.32	1.66	1.26	1.72	1.21	1.79
39	1.43	1.54	1.38	1.60	1.33	1.66	1.27	1.72	1.22	1.79
40	1.44	1.54	1.39	1.60	1.34	1.66	1.29	1.72	1.23	1.79
45	1.48	1.57	1.43	1.62	1.38	1.67	1.34	1.72	1.29	1.78
50	1.50	1.59	1.46	1.63	1.42	1.67	1.38	1.72	1.34	1.77
55	1.53	1.60	1.49	1.64	1.45	1.68	1.41	1.72	1.38	1.77
60	1.55	1.62	1.51	1.65	1.48	1.69	1.44	1.73	1.41	1.77
65	1.57	1.63	1.54	1.66	1.50	1.70	1.47	1.73	1.44	1.77
70	1.58	1.64	1.55	1.67	1.52	1.70	1.49	1.74	1.46	1.77
75	1.60	1.65	1.57	1.68	1.54	1.71	1.51	1.74	1.49	1.77
80	1.61	1.66	1.59	1.69	1.56	1.72	1.53	1.74	1.51	1.77
85	1.62	1.67	1.60	1.70	1.57	1.72	1.55	1.75	1.52	1.77
90	1.63	1.68	1.61	1.70	1.59	1.73	1.57	1.75	1.54	1.78
95	1.64	1.69	1.62	1.71	1.60	1.73	1.58	1.75	1.56	1.78
100	1.65	1.69	1.63	1.72	1.61	1.74	1.59	1.76	1.57	1.78

3) המודל הינו: $\begin{matrix} Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t \\ u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \end{matrix}$.

u_t - הפרעה מקרית קלאסית.

וידוע כי: $T = 100$

$u_t = 0.9u_{t-1}$

$d_L = 1.57$

$d_U = 1.65$

האם קיים מתאם סדרתי ברמת מובהקות של 5%?

מבחן LM:

4) עבור הדוגמא הקודמת – ניבוי מחיר סגירה של מניה כפונקציה של הזמן:

$CLOSE_t = \alpha + \beta \cdot TIME + u_t$.

נבחן את קיומו של מתאם סדרתי מסדר ראשון באמצעות מבחן LM.

נאמוד את רגרסיית העזר: $u_t = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot TIME_t + \rho \cdot u_{t-1} + \varepsilon_t$.

תוצאות האמידה שהתקבלו:

Dependent variable: RES

Analysis of Variance

F Value	Prob>F	Mean Square	Sum of Squares	DF	Source
			-------	2	Model
			--------	150	Error
			-------	152	C Total

0.855	R-square	------	Root MSE
------	Adj R-sq	----	Dep Mean
		-----	C.V.

Parameter Estimates

Parameter Estimate	DF	Variable
-.000096	1	INTERCEP
1.16331E-05	1	TIME
0.927172	1	RES1

א. האם קיים מתאם סדרתי?

ב. מהו ערכו של המתאם הסדרתי הנאמד?

ג. מהו כיוונו של המתאם הסדרתי באוכלוסייה?

תיקון המתאם הסדרתי:

5) סטודנט הניח כי במודל: $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ קיים מתאם סדרתי מסדר ראשון בשאריות כך שמתקיים: $u_t = 0.7u_{t-1} + \varepsilon_t$ ולכן במקום לאמוד את המודל המקורי אמד את המודל: $Y_t - 0.7Y_{t-1} = \alpha(1-0.7) + \beta(X_t - 0.7X_{t-1}) + u_t$.
הסטודנט טען כי במודל החדש לא קיים מתאם סדרתי.
טענת הסטודנט: נכונה /לא נכונה /לא ניתן לדעת

6) נמשיך עם הדוגמא של ניבוי מחיר סגירה של מניה כפונקציה של הזמן: $CLOSE_t = \alpha + \beta \cdot TIME + u_t$.
נניח כי קיים מתאם סדרתי מסדר ראשון בנתונים.
תוצאות האמידה בשיטת אוטורגרסיה מסדר ראשון מוצגות להלן:

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	1.333			
TIME	1	-0.0006			
(1)AR	1	0.927			0.000

Durbin-Watson D 2.235

א. בדקו האם נפתרה בעיית המתאם הסדרתי .
ב. מהי המשוואה לאמידת מחיר הסגירה הצפוי ביום המסחר הבא?

תרגול מסכם:

7) נאמד הקשר שבין הכנסה לתצרוכת לתקופה ינואר 1994 עד דצמבר 1997 (T=48).
המודל הינו: $C_t = \alpha + \beta Y_t + u_t$.
בניסיון לבדוק האם מתקיים קשר מהסוג הבא: $u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \varepsilon_t$.
נאמדה המשוואה הבאה: $\hat{u}_t = \gamma_1 \hat{u}_{t-1} + \gamma_2 \hat{u}_{t-2} + \gamma_3 \hat{u}_{t-3} + \gamma_4 Y_t + \omega_t$.
תוצאות האמידה מוצגות להלן:

Depended Variable: RES

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	-54.709	710.85	-0.076	0.939
RESID1	1	0.705	0.152	4.631	0.000
RESID2	1	-0.0066	0.188	-0.035	0.972
RESID3	1	-0.337	0.167	-2.012	0.051
Y	1	0.0027	0.032	0.085	0.932

Durbin-Watson D 1.954

נתון בנוסף כי: $R^2 = 0.479$.

א. הרגרסיה המופיעה בפלט לעיל נועדה לבדיקת: __________________.
על ידי מבחן: ____________________.
ההשערות הינן: ______________________.
גודל הסטטיסטי למבחן הינו (רשמו תוצאה מספרית): _____________.
המסקנה המתקבלת היא: ________________________.

בהנחה כי קיים מתאם סדרתי מסדר שלישי בנתונים נאמד מחדש הקשר שבין ההכנסה לתצרוכת בהתאם לשיטתם של קוקרן ואורקוט.
תוצאות האמידה מוצגות להלן:

Depended Variable:C

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob>|T|
INTERCEP	1	-2103.53	1128.38	-1.864	0.069
Y	1	0.71944	0.0510	14.086	0.000
AR(1)	1	0.7070	0.1525	4.634	0.000
AR(2)	1	-0.0064	0.1889	-0.034	0.972
AR(3)	1	-0.3282	0.1669	-1.966	0.0562
Durbin-Watson D	1.954				

ב. רשמו את המשוואה המתוקנת המשמשת לעריכת תחזיות.

8) חוקר רצה לאמוד את עקומת הביקוש לטיסות לאירופה.
לרשותו נתונים שבועיים לאורך 3 שנים (52 שבועות).
נסמן:
Y_t - מספר כרטיסי הטיסה לאירופה שנמכרו בשבוע t.
p_t - מחיר ממוצע ב-$ של הכרטיסים שנמכרו בשבוע t.
החוקר אמד את המודל: $Y_t = e^{\alpha} \cdot P_t^{\beta_1} \cdot P_{t-1}^{\beta_2} \cdot e^{u_t}$.
וקיבל לאחר הטרנספורמציה הלוגריתמית: $R^2 = 0.81$.
לבדיקת ההשערה כי קיים מתאם סדרתי בנתונים מסדר ראשון הוא חישב את ערכי $\hat{u}_t$ ולאחר מכן חישב את הרגרסיה: $u_t = \gamma_0 + \gamma_1 \ln P_t + \gamma_2 \ln P_{t-1} + \gamma_3 u_{t-1} + v_t$.
מקדם ההסבר המרובה ברגרסיה זו הוא 0.282.

א. נסח את ההשערה ובחן אותה בר"מ של 0.05.

החוקר מניח שיש מתאם סדרתי מסדר ראשון.
לאחר תיקון Cochrane-Orcutt התקבל: $\hat{\ln Y_t} = 7.3 - 0.2\ln P_t + 0.4\ln P_{t-1}$, $\hat{\rho} = 0.2$.
הניחו שהשבוע ובשבוע שעבר מחיר ממוצע של כרטיס היה 500$.
השבוע נמכרו 6,185 כרטיסים. בשבוע הבא צפוי מחיר של 400$.

ב. כמה כרטיסים יימכרו?

החוקר גם מנסה לקבוע האם בנתונים אלה קיים מתאם מסדר שני.

ג. רשמו את המשוואה הנוספת שעליו לאמוד.

במשוואה הנוספת התקבל מתאם מרובה השווה ל-0.12.

ד. מהי המסקנה בר"מ של 0.05?

תשובות סופיות:

1) א. $r_{(u_t,u_{t-1})}=0.9$. ב. $r_{(u_t,u_{t-4})}=0.6561$. ג. $\sigma_u^2=5.263$.
ד. $\sigma_u^2=1.19$, $r_{(u_t,u_{t-4})}=0.0256$, $r_{(u_t,u_{t-1})}=0.4$.
2) יש עדות לכך.
3) יש עדות לכך.
4) א. יש עדות לכך. ב. $\hat{\rho}=0.927$. ג. חיובי.
5) לא נכונה.
6) ראו סרטון.
7) א. קיומו של מתאם סדרתי מסדר שלישי בנתונים.
LM.
$$H_0:\rho_1=\rho_2=\rho_3=0$$
$$H_1:OTHERWISE$$
$LM_{stat}=22.99$.
יש עדות לכך.
ב. $\hat{C}_t=-2103.53+0.719\cdot Y_t+0.707\cdot\hat{u}_{t-1}-0.0064\cdot\hat{u}_{t-2}-0.328\cdot\hat{u}_{t-3}$.
8) א. $H_0:\rho=0$, $H_1:\rho\neq 0$, יש עדות לכך. ב. $Y_{t+1}=5,568$.
ג. $u_t=\gamma_0+\gamma_1\ln P_t+\gamma_2\ln P_{t-1}+\gamma_3 u_{t-1}+\gamma_4 u_{t-2}+\omega_t$. ד. אין עדות לכך.

שיטות מחקר במימון

פרק 26 - סיכום מתאם סדרתי והטרוקדסטיות

תוכן העניינים

סיכום מתאם סדרתי והטרוקדסטיות:

רקע:

	מתאם סדרתי	הטרוסקדסטיות
המשוואה העיקרית של המודל	למשל: $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$	
ההנחה הקלאסית המופרת	$\operatorname{cov}(u_t, u_{t-s}) = 0$	$V(u_t) = \sigma^2$
המצב לאחר ההפרה	$\operatorname{cov}(u_t, u_{t-s}) \neq 0$	$V(u_t) = \sigma_t^2$
המשוואה המאפיינת את ההפרה	$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$	$V(u_t) = W_t \sigma^2$
מה קורה אם אומדים ב-OLS	מתקבלים אומדים חסרי הטיה ועקיבים, אך תכונת היעילות נפגעת.	
זיהוי הבעיה	מבחן DW מבחן LM	מבחן GQ מבחן White
פתרון הבעיה	שיטת קוקרן – אורקוט (רגרסיית ההפרשים) הכנסת משתנה מוסבר בפיגור (מודל דינמי)	שיטת WLS

שיטות מחקר במימון

פרק 27 - סיכום תכונות ארפ

תוכן העניינים

סיכום תכונות אר"פ:

רקע:

אם המודל שאותו אנו אומדים מנסח נכון את הקשר המתמטי בין המשתנים וכולל את כל המשתנים הרלוונטיים להסבר התופעה ורק אותם ולא קיים קשר חזק או מלא בין המשתנים הבלתי תלויים במודל וכל ההנחות הקלאסיות מתקיימות, אזי האומדים שאותם נקבל הם א.ח.ה, הם BLUE (יעילים) והם עקיבים.

הבעיה במודל	כולל את כל המשתנים הרלוונטיים	לא כולל משתנים שאינם רלוונטיים	אין קשר חזק או מלא בין הב"ת	כל ההנחות הקלאסיות מתקיימות	פגיעה בתכונות אר"פ
אין בעיה	√	√	√	√	אין פגיעה
השמטת משתנים רלוונטיים	×	√	√	√	פגיעה בכל התכונות - *מוטים, לא יעילים ולא עקיבים
הוספת משתנים לא רלוונטיים	√	×	√	√	אין פגיעה
מולטיקוליניאריות חלקית	√	√	×	√	אין פגיעה
מולטיקוליניאריות מלאה	√	√	×	√	אר"פ אינם מוגדרים
הטרוסקדסטיות	√	√	√	× $V(u_t)=\sigma_t^2$	יעילות
מתאם סדרתי	√	√	√	× $\mathrm{cov}(u_t,u_s)\neq 0$	יעילות
מודלים דינמיים	√	√	√	× $\mathrm{cov}(x,u)\neq 0$	מוטים היעילות והעקיבות תלויים בקיום מתאם סדרתי
משוואות סימולטניות	√	√	√	× $\mathrm{cov}(x,u)\neq 0$	**אומדים מוטים אך עקיבים. היעילות תלויה בשיטה.

*אלא אם אין מתאם בין המשתנה הב"ת שהושמט לאלו המצויים במודל.
**בהנחה שהמשוואות מזוהות.