# שיטות כמותיות



# תוכן העניינים

1. הפונקציה הממשית ומבוא לתורת הקבוצות ..... 1
2. גבול של פונקציה ..... 13
3. רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים ..... 19
4. חישוב נגזרת של פונקציה ..... 26
5. משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי ..... 39
6. כלל לופיטל ..... 48
7. חקירת פונקציה ..... 54
8. בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון) ..... 68
9. אינטגרלים מיידיים ואינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים" ..... 81
10. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים ..... 87
11. אינטגרלים בשיטת ההצבה ..... 89
12. אינטגרלים של פונקציות רציונליות ..... 91
13. האינטגרל המסוים, סכומי רימן ..... 95
14. שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת) ..... 100
15. שימושי האינטגרל המסוים - נפח גוף סיבוב ..... 111
16. פונקציות של שני משתנים ..... 114
17. נגזרות חלקיות ..... 124
18. קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים ..... 130
19. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז') ..... 132
20. קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה ..... 135
21. פונקציות הומוגניות-משפט אוילר ..... 136
22. סדרות ..... 144
23. טורים עם איברים קבועים ..... 153

# תוכן העניינים

24. הוכחות של משפטים נבחרים ..... 161
25. אינטגרלים כפולים ..... 163
26. עקומות לורנץ ומדד ג׳יני ..... 168

# שיטות כמותיות

## פרק 1 - הפונקציה הממשית ומבוא לתורת הקבוצות

### תוכן העניינים


1. פונקציה - הגדרה ותכונות בסיסיות ..... (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית ..... (ללא ספר)
3. הפונקציה הריבועית ..... (ללא ספר)
4. הפונקציה המעריכית ..... (ללא ספר)
5. הפונקציה הלוגריתמית ..... (ללא ספר)
6. פונקציות מפורסמות נוספות ..... (ללא ספר)
7. הזזות שיקופים מתיחות וכיווצים של פונקציה ..... (ללא ספר)
8. תחום הגדרה של פונקציה ..... 1
9. הרכבת פונקציות ..... 3
10. פונקציה זוגית ופונקציה אי זוגית ..... 6
11. פונקציה מפוצלת ..... 8
12. תרגילים משולבים ..... 9

# תחום הגדרה של פונקציה

## שאלות

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

**1)** $y=x^3-x^2-4x+1$

**2)** $y=\frac{1}{x^2-4}$

**3)** $y=\frac{4x+1}{x^2+1}$

**4)** $y=\frac{1}{x^3-x}$

**5)** $y=\frac{x^2}{x^2-x-2}$

**6)** $y=\sqrt{x-4}$

**7)** $y=\sqrt{x^2+x-2}$

**8)** $y=\sqrt[3]{x^2+x-1}$

**9)** $y=\frac{1}{\sqrt{1-|x|}}$

**10)** $y=\ln\left(x^2+x-2\right)$

**11)** $y=\log x+\frac{1}{\log x}$

**12)** $y=e^{x^2+x+1}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**13)** $y=\log_x\left(x+4\right)$

## תשובות סופיות

**1)** כל $x$.

**2)** $x\neq\pm2$

**3)** כל $x$.

**4)** $x\neq0,1,-1$

**5)** $x\neq2,-1$

**6)** $x\geq4$

**7)** $x\leq-2\ ,\ x\geq1$

**8)** כל $x$.

**9)** $-1<x<1$

**10)** $x<-2\ ,\ x>1$

**11)** $x>0\ ,\ x\neq1$

**12)** כל $x$.

**13)** $x>0\ ,\ x\neq1$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הרכבת פונקציות

## שאלות

**1)** נתונות הפונקציות $f(x)=x-4$ , $g(x)=x^2$ , $h(x)=\frac{4}{x}$.

חשבו את הפונקציות המורכבות הבאות:

א. $f(g(1))$ ב. $h(g(f(5)))$ ג. $f(g(x))$

ד. $h(f(x))$ ה. $f(f(x))$ ו. $h(h(x))$

**2)** נתון $f(x)=\frac{x-2}{x-1}$.

חשבו את $f(f(x))$ עבור $x=3$.

**3)** נתון $f(x)=\frac{x-3}{x+2}$, $g(x)=\frac{5-x}{x-7}$.

חשבו את $f(g(x))+g(f(x))$ עבור $x=8$.

**4)** נתון $f(x)=x^2-7x$, $g(x)=\ln x$.

חשבו את $f(g(x))$ עבור $x=e^2$.

**5)** נתון $f(x)=e^{2x}$, $g(x)=\ln x$.

חשבו את $f(g(x))$ עבור $x=2$.

**6)** נתון $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x>0\\ x^2 & x\le 0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x+3 & x>4\\ 3x & x\le 4\end{cases}$.

חשבו את $f(g(x)), g(f(x))$.

**7)** נתונות הפונקציות

$g(x)=\begin{cases}x^2-4 & x<1\\ -x^2-2x-1 & x\ge 1\end{cases}$ ו- $f(x)=\begin{cases}2x+4 & x\le -1\\ \sqrt{x+1} & x>-1\end{cases}$.

מצאו נוסחה עבור ההרכבה $z(x)=g(f(x))$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**8)** נתונות הפונקציות

$$g(x)=\begin{cases}x^2-4 & x<1\\ -x^2-2x-1 & x\geq 1\end{cases}$$ ו- $$f(x)=\begin{cases}2x+4 & x\leq -1\\ \sqrt{x+1} & x>-1\end{cases}$$.

א. מצאו נוסחה עבור ההרכבה $h(x)=f\left(g(x)\right)$.

ב. נתון ש- $n\in\mathbb{Z}$ ו- $h(n)\notin\mathbb{Z}$.

מה ניתן להסיק בוודאות?

1. $n\leq -3$
2. $n\geq 1$
3. $n$ אי-זוגי שלילי.
4. אף תשובה אינה נכונה.

**9)** נתון $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

מצאו את $f^n(x)=\underbrace{f(f(f(...(f(x)))))}_{n\text{ Times}}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) א. -3 ב. 4 ג. $x^2-4$ ד. $\frac{4}{x-4}$ ה. $x-8$ ו. $x$

2) 3

3) 69/13

4) -10

5) 4

6) $f(g(x))=\begin{cases}\frac{1}{x+3} & x>4\\ \frac{1}{3x} & 0<x\le 4\\ (3x)^2 & x\le 0\end{cases}$ , $g(f(x))=\begin{cases}x^2+3 & x<2\\ 3x^2 & -2\le x\le 0\\ \frac{1}{x}+3 & 0<x<\frac{1}{4}\\ 3\frac{1}{x} & x\ge\frac{1}{4}\end{cases}$

7) $z(x)=\begin{cases}4x^2+16x+12 & x<-1.5\\ -4x^2-20x-25 & -1.5\le x\le -1\\ x-3 & -1<x<0\\ -x-2-2\sqrt{x+1} & x\ge 0\end{cases}$

8) א. $h(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-3} & x<-\sqrt{3}\\ 2x^2-4 & -\sqrt{3}\le x<1\\ -2x^2-4x+2 & x\ge 1\end{cases}$ ב. $n\le -3$

9) $f^n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# פונקציה זוגית ואי זוגית

## שאלות

מצאו איזה מבין הפונקציות בשאלות **1-6** הן אי-זוגיות ואיזה זוגיות:

**1)** $y=4x^3$ **2)** $y=x^4+x^{10}$ **3)** $y=1$

**4)** $y=\frac{1}{x}$ **5)** $y=2^x$ **6)** $y=\ln x+x^2$

**7)** נתונה פונקציה אי-זוגית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
ונסמן $z(x)=f\left(x^2\right),\ k(x)=-f(x)$.
בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות $k,z$, האם היא זוגית או אי-זוגית.

**8)** נתונה פונקציה אי-זוגית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, פונקציה זוגית $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
ונסמן $z(x)=-g\left(x^3\right)$ ו- $k(x)=-f\left(x^3\right)$.
טענה א': $z(x)$ אי-זוגית.
טענה ב': $k(x)$ אי-זוגית.
איזו טענה נכונה?

**9)** נתונה פונקציה אי-זוגית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, פונקציה זוגית $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
ונסמן $k(x)=f(-x)+x^{11}g(|x|)$, $z(x)=-g(-4x)\cdot f\left(x^4\right)$.
בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות $z,k$, האם היא זוגית או אי-זוגית.

**10)** הוכיחו כי:

א. סכום פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית

ב. מכפלת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ג. מנת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ד. הרכבה של פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ה. הרכבה של פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה אי-זוגית.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

שאלות **1-6**: זוגית: **2,3**; אי- זוגית: **1,4**; כללית: **5,6**.

**7)** $k$ אי-זוגית, $z$ זוגית.

**8)** טענה ב'.

**9)** $k$ אי-זוגית, $z$ זוגית.

**10)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# פונקציה מפוצלת

## שאלות

רשמו כל אחת מהפונקציות **1-4** כפונקציה מפוצלת ושרטטו את גרף הפונקציה:

**1)** $y=|x-2|$

**2)** $y=3|x+1|$

**3)** $y=x^2+2|x-1|$

**4)** $y=\frac{|x|}{x}$

**5)** נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}x^2 & 0\le x\le 4\\ -x & x<0\end{cases}$.

א. חשבו $f(7),\ f(0),\ f(-4),\ f(4),\ f(1)$.

ב. שרטטו את גרף הפונקציה.

ג. בדקו האם הפונקציה זוגית, אי-זוגית או כללית.

## תשובות סופיות

**1)** $y=\begin{cases}x-2 & x\ge 2\\ 2-x & x<2\end{cases}$

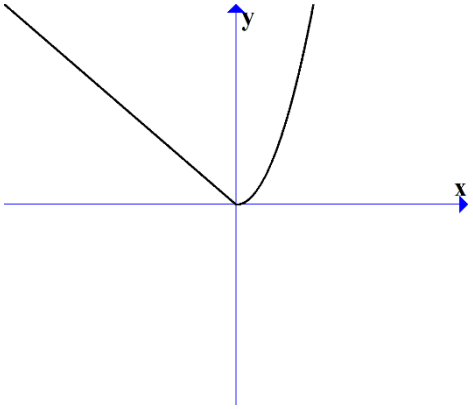
**2)** $y=\begin{cases}3x+3 & x\ge -1\\ -3x-3 & x<-1\end{cases}$

**3)** $y=\begin{cases}x^2+2x-2 & x\ge 1\\ x^2-2x+2 & x<1\end{cases}$

**4)** $y=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$

**5)** א. $f(7)=\text{undefind},\ f(0)=0,\ f(-4)=4,\ f(4)=16,\ f(1)=1$

ב.




ג. כללית.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# תרגילים משולבים

## שאלות

**1)** נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}x+1 & x>1\\ x^3+1 & -1\le x\le 1\\ x+1 & x<-1\end{cases}$.

שרטטו את הפונקציה, וקבעו האם היא:

א. עולה.

ב. יורדת.

ג. אי-זוגית.

ד. זוגית.

ה. חסומה.

ו. לא חסומה.

ז. חח"ע.

ח. על $\mathbb{R}$.

הערה: ניתן להתבסס על הציור כנימוק.

**2)** נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{x} & x>1\\ x^5+1 & -1\le x\le 1\\ x+1 & x<-1\end{cases}$.

בכל אחד מהסעיפים הבאים יש טענה.
קבעו האם הטענה נכונה או לא נכונה.

א. הפונקציה מונוטונית עולה ממש.

ב. הפונקציה על $\mathbb{R}$.

ג. הפונקציה אי-זוגית.

ד. הפונקציה זוגית.

ה. הפונקציה חח"ע.

הערה: ניתן לשרטט ולהתבסס על הציור כנימוק.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**3)** נתונה פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ , זוגית ומונוטונית עולה ממש,
ופונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ , אי-זוגית ומונוטונית יורדת ממש.
נסמן: $z(x)=-g(x^3)$ ו- $k(x)=-f(x^3)$.
טענה א': $k(x)$ מונוטונית עולה ממש.
טענה ב': $z(x)$ מונוטונית עולה ממש.
טענה ג': $h(x)=k(x)z(x)$ זוגית.
מי מבין הטענות נכונה?

**4)** נתונות שתי פונקציות, $f,g:[0,1]\to[0,1]$.
נתון ש- $f$ מונוטונית עולה ממש, ואילו $g$ מונוטונית יורדת חלש,
אך אינה יורדת ממש.
תהי $h(x)=f(g(x))$.
איזו טענה נכונה?

א. $h$ יורדת חלש.
ב. $h$ עולה ממש.
ג. $h$ עולה חלש, אך אינה עולה ממש.
ד. $h$ אינה חסומה בהכרח.

**5)** נתונות הפונקציות $g(x)=\begin{cases}x^2-4 & x<0\\ -x^2-2x-1 & x\geq 0\end{cases}$ ו- $f(x)=\begin{cases}x+4 & x\leq 0\\ \sqrt{x} & x>0\end{cases}$.
תהי $h(x)=f(g(x))$.

א. מצאו את $h$ בקטע $[-2,0)$.
ב. קבעו האם $h$ חח"ע בקטע $[-2,0)$.
ג. קבעו האם $h$ חסומה בקטע $[-2,0)$.
ד. קבעו האם $h:[-2,0)\to[0,4]$ היא על.

* בסעיפים ב-ד ניתן להסתמך על גרף הפונקציה.

**6)** נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$ : $f(x)=x^3,\ g(x)=(-1)^{\lfloor x\rfloor}$.
קבעו מי מבין הטענות הבאות נכונה.
הפונקציה $h(x)=f(g(x))$ היא:

א. חסומה.
ב. אי-זוגית.
ג. חח"ע.
ד. מונוטונית.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**7)** נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$ : $f(x)=x^3,\ g(x)=-\lfloor x\rfloor$.

א. בדקו את מונוטוניות $z(x)=f\left(g(x)\right)$.

ב. בדקו את מונוטוניות $k(x)=g\left(f(x)\right)$.

ג. בדקו האם $h(x)=\sqrt[3]{f(x)}-g(-x)$ חסומה.

תזכורת לסעיפים א+ב:

אם $a<b \Leftarrow f(a)\geq f(b)$ אז הפונקציה $f$ יורדת חלש.

**8)** נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$ $\begin{matrix} f(x)=\left(3\lfloor x\rfloor\right)^3+27\lfloor x\rfloor \\ g(x)=f(x)+x^3-28 \end{matrix}$.

הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה $f$ עולה ממש וחח"ע.

ב. הפונקציה $g$ עולה ממש וחח"ע.

**9)** מצאו את הפונקציה ההפוכה לפונקציה $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$,

קבעו את תחום הגדרתה והוכיחו שהפונקציה על $\mathbb{R}$.

הערה: פונקציה זו נקראת סינוס היפרבולי.

**10)** חקרו את מונוטוניות הפונקציה $f(x)=\frac{2x+3}{3x-1}$.

הערה: אין להשתמש בנגזרות.

**11)** נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{2+x-x^2}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את התמונה של הפונקציה.

ג. הוכיחו שהפונקציה חסומה.

ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. כן. ב. לא. ג. לא. ד. לא. ה. לא. ו. כן.
ז. כן. ח. כן.

**2)** אף טענה אינה נכונה.

**3)** טענה ב' נכונה.

**4)** טענה א' נכונה.

**5)** א. $h(x)=x^2$ ב. הפונקציה חח"ע בקטע.
ג. הפונקציה חסומה בקטע. ד. הפונקציה לא על.

**6)** א. הפונקציה חסומה. ב. הפונקציה לא זוגית ולא אי זוגית.
ג. הפונקציה לא חח"ע. ד. הפונקציה לא מונוטונית.

**7)** א. הפונקציה $z(x)$ יורדת חלש. ב. הפונקציה $k(x)$ יורדת חלש.
ג. הפונקציה חסומה.

**8)** שאלת הוכחה.

**9)** $f^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ ; תחום הגדרתה: כל $x$.

**10)** ראו באתר.

**11)** א. $-1\le x\le 2$ ב. $0\le y\le \frac{3}{2}$ ג. שאלת הוכחה.
ד. $-1\le x<\frac{1}{2}$ עלייה, $\frac{1}{2}<x\le 2$ ירידה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות במותיות

## פרק 2 - גבול של פונקציה

### תוכן העניינים

1. הסבר כללי ..... (ללא ספר)
2. הצבה ..... 13
3. צמצום ..... 14
4. הכפלה בצמוד ..... 15
5. פונקציה שואפת לאינסוף ..... 16
6. x שואף לאינסוף ..... 17

# הצבה

## שאלה

חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 4} x^2+x+1$

ב. $\lim_{x\to 10} \frac{x+1}{x+2}$

ג. $\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x+3}$

ד. $\lim_{x\to 100} 20$

## תשובה

א. 21 ב. $\frac{11}{12}$ ג. 2 ד. 20


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# צמצום

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}$

2) $\lim_{x\to -5}\frac{2x^2-50}{2x^2+3x-35}$

3) $\lim_{x\to 1}\frac{x^7-x}{x-1}$

4) $\lim_{x\to 1}\frac{x^n-x}{x-1}$

5) $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{2x^2-5x+2}{6x^2-5x+1}$

6) $\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$

7) $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$

8) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$

9) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^3-4x^2+x-4}$

## תשובות סופיות

1) $\frac{5}{6}$ 2) $\frac{10}{8.5}$ 3) 6 4) $n-1$ 5) -3

6) 32 7) 3 8) 27 9) $\frac{8}{17}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הכפלה בצמוד

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}$

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-\sqrt{x+6}}{2x-6}$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1}$

5) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4}$

6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{3x+1}}{1-\sqrt{2x-1}}$

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}$

8) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x}$

## תשובות סופיות

1) $\frac{1}{2}$ 2) $4$ 3) $-\frac{1}{12}$ 4) $\frac{3}{8}$

5) $\frac{1}{6}$ 6) $\frac{3}{4}$ 7) $\frac{1}{3}$ 8) $-\frac{8}{3}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# פונקציה שואפת לאינסוף

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+4}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)^2}{x-2}$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-x^2}{(2-x)^2}$

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{(x-2)(x-5)}$

5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x}$

6) $\lim\limits_{x\to 2^-}-\dfrac{1}{2}\ln(2-x)$

7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left((\ln x)^2+2\ln x-3\right)$

8) $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$

9) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

10) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

## תשובות סופיות

1) $\phi$
2) $\phi$
3) $-\infty$
4) $\phi$
5) $-\infty$
6) $\infty$
7) $\infty$
8) $\phi$
9) $0$
10) $1$
11) $\phi$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# $x$ שואף לאינסוף

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

**1)** $\lim_{x\to\infty}\left(e^{-x}\right)^{\ln x}$

**2)** $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+2}{x^2+1000x}$

**3)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+2x^2+6}{3x^3+10x}$

**4)** $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^2+6}{3x^5+10x}$

**5)** $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-5x+6}{2x+10}-\frac{x}{2}\right)$

**6)** $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

**7)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

**8)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^6-5x}}{x^3-2x^2+1}$

**9)** $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4+2x^2+6+27x^6}}{\sqrt{3x^3+10x+4x^4}}$

**10)** $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$

**11)** $\lim_{x\to\infty}\frac{16^x+4^{x+1}}{2^{4x+2}+2^{x+3}}$

**12)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{16^x+4^{x+\frac{1}{2}}}{2^{4x+2}+2^{x+3}}$

**13)** $\lim_{x\to\infty}\frac{4\cdot9^x+3^{x+1}}{81^{0.5x}+3^{x+3}}$

**14)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{4\cdot9^x+3^{x+1}}{81^{0.5x}+3^{x+3}}$

**15)** $\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{4x^2+2}{x^2+1000x}}$

**16)** $\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{3x^3-5x-1}{x^3-2x^2+1}\right)$

**17)** $\lim_{x\to\infty}e^{\frac{x^4+2x^2+6}{3x^4+10x}}$

**18)** $\lim_{x\to\infty}\sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}}$

**19)** $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)$

**20)** $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+kx}-x\right)$

**21)** $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$

**22)** $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)$

**23)** $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+x^2+1}-x^2\right)$

**24)** $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}\right)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) 0
2) 4
3) $-\infty$
4) 0
5) -5
6) 1
7) -1
8) -3
9) 1.5
10) $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$
11) $\frac{1}{4}$
12) 0
13) 4
14) $\frac{1}{9}$
15) 2
16) $\ln 3$
17) $e^{\frac{1}{3}}$
18) 0
19) אם $b\neq 0$ : $\lim=\sqrt[5]{\frac{a}{b}}$ . אם $a>0$ , $b=0$ : $\infty$ . אם : $a<0$ , $b=0$ : $-\infty$ .
20) 2.5
21) $\frac{k}{2}$
22) $\frac{1}{2}$
23) $-\frac{1}{2}$
24) $\frac{1}{2}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות במותיות

## פרק 3 - רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים

### תוכן העניינים

1. רציפות של פונקציה ..... 19
2. משפט ערך הביניים ..... 23

# רציפות של פונקציה

## שאלות

בשאלות **1-2** בדקו את רציפות הפונקציות ב"נקודת התפר"[1] שלהן,
ושרטטו את גרף הפונקציה:

**1)** $f(x)=\begin{cases}x+1 & x\le 2\\ 5-x & x>2\end{cases}$

**2)** $f(x)=\begin{cases}x & x\ge 1\\ x^2 & x<1\end{cases}$

**3)** נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}1/x & x\le 1\\ |x-2| & 1<x<2\\ 1 & x=2\\ x-2 & x>2\end{cases}$.

א. בדקו את רציפות הפונקציה בנקודות התפר שלה.

ב. עבור כל נקודת אי רציפות, קבעו מאיזה סוג היא.

בשאלות **4-7**, מה צריך להיות הערך הקבוע של $k$,
על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות לכל $x$:

**4)** $f(x)=\begin{cases}kx^2+x-2 & x\le 2\\ 5kx-6 & x>2\end{cases}$

**5)** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1} & x\ne 1\\ k & x=1\end{cases}$

**6)** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} & x\ne 2\\ k & x=2\end{cases}$

**7)** $f(x)=\begin{cases}2x-k & x\le 0\\ x^{2x} & x>0\end{cases}$

הערה: שאלה **7** ניתן לפתור רק לאחר שנלמד הנושא 'כלל לופיטל'.

[1] נקודת תפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **8-10**, מה צריכים להיות הערכים של הקבועים $a$ ו- $b$, על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות בתחום הגדרתן?

**8)**
$$f(x)=\begin{cases} a\sqrt[3]{x}+x^2 & x<-1 \\ bx^2+x-1 & -1\le x\le 1 \\ 4\dfrac{\sqrt{x-1+a}-\sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x>1 \end{cases}$$

**9)**
$$f(x)=\begin{cases} x^{\frac{1}{1-x}} & x>1 \\ (x-1)\ln(x+1)+b & 0\le x\le 1 \\ a\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-2}{2^{\frac{1}{x}}+4} & x<0 \end{cases}$$

**10)**
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} & x<1 \\ ax^2+b & 1\le x\le 2 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x>2 \end{cases}$$

**הערה: שאלות 9-10 ניתן לפתור רק לאחר שנלמד הנושא 'כלל לופיטל'.**

**11)** הוכיחו או הפריכו:

א. סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.

ב. הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.

ג. מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.

ד. מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.

**12)** ידוע ש- $f$ רציפה ו- $g$ לא רציפה.

האם $f+g$ רציפה? הוכיחו זאת.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**13)** נתונה הפונקציה $f(x)=x-\frac{1}{2}\lfloor 2x \rfloor$ .

הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה $f$ חסומה לכל $x$.

ב. הפונקציה $f$ רציפה לכל $x$.

ג. הפונקציה $f$ מונוטונית לכל $x$ .

ד. הפונקציה $f$ זוגית או אי-זוגית לכל $x$.

**14)** תהי $f(x)=\begin{cases}|x|-1 & |x+1|\geq 4\\ 2 & |x+1|<4\end{cases}$ .

א. שרטטו את גרף הפונקציה.

ב. מצאו את נקודות האי רציפות של הפונקציה ואת סוגן (במידה ויש).

ג. תהי $g(x)=x+\frac{1}{x}$ , ותהי $f(x)$ מוגדרת וחיובית לכל $x$.

האם ההרכבה $g(f(x))$ בהכרח רציפה לכל $x$ ?

**15)** תהי $f$ פונקציה חסומה בקטע $(0,1)$.

תהי $g$ הפונקציה המוגדרת בקטע $(0,2)$, על ידי $g(x)=\begin{cases}f(x) & 0<x<1\\ x^2 & 1\leq x<2\end{cases}$ .

א. האם יתכן שהנקודה $x_0=1$ היא נקודת אי-רציפות סליקה של $g$? נמקו.

ב. האם $g$ חסומה בקטע $(0,2)$? נמקו.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** רציפה.

**2)** רציפה.

**3)** א. רציפה בנקודה $x=1$, לא רציפה בנקודה $x=2$. ב. סליקה.

**4)** $k=1$

**5)** $k=4$

**6)** $k=\frac{2}{3}$

**7)** $k=-1$

**8)** $a=1,b=2$ או $a=2,b=1$.

**9)** $a=-2e^{-1},b=e^{-1}$

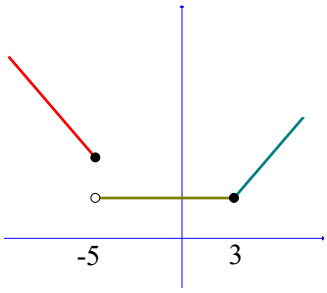
**10)** $a=\frac{e}{3},b=-\frac{e}{3}$

**11)** הוכחה.

**12)** הוכחה.

**13)** א. טענה נכונה. ב. טענה לא נכונה. ג. טענה לא נכונה. ד. טענה לא נכונה.

**14)** א.




ב. הפונקציה רציפה לכל $x\neq -5$. ב-$-5$ יש אי רציפות מסוג ראשון. ג. לא.

**15)** א. לא. ב. כן.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# משפט ערך הביניים

## שאלות

בשאלות **1-3** הוכיחו שלמשוואה יש לפחות פתרון אחד:

**1)** $x^3+4x-1=0$

**2)** $x^2=-\ln x$

**3)** $x^3+bx^2+cx+d=0$

בשאלות **4-5** הוכיחו שלמשוואה יש לפחות שני פתרונות:

**4)** $e^x-5x=0$

**5)** $4x^3+5x-\frac{1}{x}=0$

**6)** מצאו קטע, שאורכו אינו עולה על יחידה אחת,
בו למשוואה $x^2=10-\frac{1}{x}$ יש פתרון.

**7)** נגדיר $f(x)=x^2+\frac{1}{x-1}$.

א. חשבו את $f(2)$ , $f(0)$.

ב. האם ניתן להסיק, לפי משפט ערך הביניים, שלמשוואה $x^2+\frac{1}{x-1}=0$
יש פתרון בקטע $(0,2)$?

**8)** תהיינה $f,g$ פונקציות רציפות ב-$[a,b]$, המקיימות:
$f(a)<g(a), f(b)>g(b)$.
הוכיחו שקיימת נקודה $a<c<b$, שבה $f(c)=g(c)$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**9)** נתונה פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$, שהוא חלקי לתחום הגדרתה.
נניח ש- $f([a,b])\subseteq[a,b]$.
הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in[a,b]$, כך ש- $f(c)=c$.
נקודה $c$ כנ"ל נקראת "**נקודת שֶׁבֶת**" של הפונקציה.

**10)** נתונה פונקציה רציפה $f:[0,1]\to[0,1]$.
הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in[0,1]$, כך ש- $f(c)=c^{1.5}$.

**11)** נתונה פונקציה רציפה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, המקיימת $f(0)=f(1)$.
א. הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in[0,0.5]$, כך ש- $f(c)=f(c+0.5)$.
ב. הוכיחו כי קיימות נקודות $c,d\in[0,1]$, כך ש- $f(c)=f(d)$.

**12)** נתונה פונקציה רציפה $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, המקיימת $f(0)<f(2)<f(1)$.
הוכיחו כי קיימים $c_1,c_2\in[0,2]$, כך ש- $f(c_1)=f(c_2)$.

**13)** נתונה פונקציה רציפה $f:[0,8]\to\mathbb{R}$, המקיימת $f(0)=f(8)$.
הוכיחו כי קיימות נקודות $c_1,c_2,c_3,c_4\in[0,8]$, כך ש-
$f(c_1)=f(c_2),\ f(c_3)=f(c_4)$.

**14)** יהיו $0\le a_1,...,a_n\le 1$ קבועים המקיימים $a_1+...+a_n=1$.
הוכיחו כי למשוואה $|x-a_1|+...+|x-a_n|=\frac{n}{2}$ יש לפחות פתרון אחד.

**15)** יהי $P$ פולינום ממעלה **זוגית**, מהצורה $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$,
וננית כי $a_0<0$.
הוכיחו כי ל- $P$ ישנם לפחות שני שורשים ממשיים, שונים זה מזה.

**16)** יהיו $f,g$ פונקציות רציפות המקיימות:
$\lim_{x\to\infty}f(x)=k,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=-k,\ \lim_{x\to\infty}g(x)=-k,\ \lim_{x\to-\infty}g(x)=k$, כאשר $0<k\in\mathbb{R}$.
הוכיחו כי קיים לפחות פתרון אחד למשוואה $f(x)=g(x)$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**17)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f$ פונקציה רציפה בקטע $(a,b)$, ותהיינה $x_1,\ldots,x_n$ (כאשר $n>1$) נקודות כלשהן ב-$(a,b)$.

הוכיחו שקיימת נקודה $c$ בקטע $(a,b)$,

כך ש-$f(c)=\frac{1}{n}\left(f(x_1)+\ldots+f(x_n)\right)$.

ב. תהי $f$ פונקציה רציפה בקטע $(a,b)$.

האם לכל $c\in(a,b)$, ניתן למצוא נקודות $x_1,\ldots,x_n$, שונות זו מזו,

כאשר $n>1$, כך ש-$f(c)=\frac{1}{n}\left(f(x_1)+\ldots+f(x_n)\right)$?

הוכיחו זאת.

## תשובות סופיות

**6)** $[0.1,1]$

**7)** א. $f(2)=5$ , $f(0)=-1$ ב. לא.

שאלות **1-5** ושאלות **8-17** הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 4 - חישוב נגזרת של פונקציה

### תוכן העניינים

1. כללי הגזירה ..... (ללא ספר)
2. תרגול בכללי הגזירה ..... 26
3. גזירה סתומה ..... 29
4. כלל השרשרת ..... 31
5. גזירה לוגריתמית ..... 34
6. נגזרת הפונקציה ההפוכה ..... 35
7. תרגילים נוספים לפי סוגים ..... 36

# תרגול בכללי הגזירה

## שאלות

גזרו פעמיים את הפונקציות הבאות (בשאלות **22-24** מצאו רק את הנגזרת הראשונה):

**1)** $f(x)=\dfrac{x^2+2x+4}{2x}$

**2)** $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{2x+10}$

**3)** $f(x)=\dfrac{2x^2}{(x+1)^2}$

**4)** $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$

**5)** $f(x)=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

**6)** $f(x)=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^3$

**7)** $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

**8)** $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

**9)** $f(x)=x\cdot\ln x$

**10)** $f(x)=x^2\cdot\ln x$

**11)** $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1}{2-x}}$

**12)** $f(x)=\ln^2 x+2\ln x-3$

**13)** $f(x)=\ln^2 x+\dfrac{1}{\ln^2 x}$

**14)** $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

**15)** $f(x)=(x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}}$

**16)** $f(x)=x\cdot e^{-2x^2}$

**17)** $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

**18)** $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$

**19)** $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(1-x)$

**20)** $y=\sqrt[x]{x}$

**21)** $y=x^{\sqrt{x}}$

**22)** $y=\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$

**23)** $y=\left(x^2+1\right)^x$

**24)** $y=(x+1)^{(x+1)}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

## תשובות סופיות

**1** $f'(x)=\frac{2x^2-8}{4x^2},\ f''(x)=\frac{4}{x^3}$

**2** $f'(x)=\frac{2x^2+20x-62}{(2x+10)^2},\quad f''(x)=\frac{448}{(2x+10)^3}$

**3** $f'(x)=\frac{4x}{(x+1)^3},\ f''(x)=\frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$

**4** $f'(x)=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2},\ f''(x)=\frac{4x\cdot(2x^2+24)}{(x^2-4)^3}$

**5** $f'(x)=\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3},\ f''(x)=\frac{6x}{(x+1)^4}$

**6** $f'(x)=-\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4},\ f''(x)=12\frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5}$

**7** $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2},\ f''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}$

**8** $f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x^{1.5}},\ f''(x)=\frac{3\ln x-8}{4x^{2.5}}$

**9** $f'(x)=\ln x+1,\ f''(x)=\frac{1}{x}$

**10** $f'(x)=x(2\ln x+1),\ f''(x)=2\ln x+3$

**11** $f'(x)=\frac{1}{2(2-x)},\ f''(x)=\frac{1}{(4-2x)^2}$

**12** $f'(x)=\frac{2}{x}(\ln x+1),\ f''(x)=\frac{-2\ln x}{x^2}$

**13** $f'(x)=\frac{2}{x}\left[\frac{(\ln x)^4-1}{(\ln x)^3}\right],\ f''(x)=-\frac{2}{x^2}\left\{\frac{(\ln x)^5-(\ln x)^4-(\ln x)-3}{(\ln x)^4}\right\}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

**14** $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right),\quad f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1+2x}{x^4}\right)$

**15** $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x^2-x-2}{x^2}\right),\quad f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{5x+2}{x^4}\right)$

**16** $f'(x)=e^{-2x^2}(1-4x^2),\quad f''(x)=-4xe^{-2x^2}(3-4x^2)$

**17** $f'(x)=\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}},\quad f''(x)=-\frac{2}{9\cdot\sqrt[3]{x^4}}$

**18** $f'(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}},\quad f''(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{-\frac{1}{3}x^2-1}{(x^2-1)^{5/3}}$

**19** $f'(x)=\frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}},\quad f''(x)=-\frac{2}{9}\cdot\frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}}$

**20** $y'=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$

**21** $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x}{2}+1\right)$

**22** $y'=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\sqrt{x}\right)$

**23** $y'=\left(x^2+1\right)^x\left(1\cdot\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x\cdot x\right)$

**24** $y'=(x+1)^{(x+1)}\left[\ln(x+1)+1\right]$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

# גזירה סתומה

## שאלות

**1)** גזרו את הפונקציה הסתומה $x^2+y^5-1=1$.

**2)** גזרו את הפונקציה הסתומה $4\ln x+10\ln y=y^2$.

**3)** גזרו את הפונקציה הסתומה $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{xy}$.

**4)** מצאו את משואת המשיק למעגל $x^2+y^2=25$, בנקודה $(3,4)$.

**5)** מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $xy^2+y-x=xy$, דרך הנקודה $(1,1)$.

**6)** מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה
$x^2y+e^{y^2-4x}=\ln x+1$,
דרך הנקודה $(1,2)$ – הנמצאת על גרף הפונקציה.

**7)** מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $\sqrt{xy+y}+x^2y=xy^2$,
דרך הנקודה $(1,2)$ – הנמצאת על גרף הפונקציה.

**8)** מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $e^{xy^2}+y=y^2-1$,
דרך הנקודה $(0,2)$ – הנמצאת על גרף הפונקציה.

**9)** נתונה הפונקציה הסתומה $x+y\cdot e^y=xy^2+x^2$.

א. מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, בהן $y=0$.

ב. מצאו את משוואת הישרים המשיקים של גרף הפונקציה, בנקודות שנמצאו בסעיף א.

**10)** גזרו את הפונקציה הסתומה: $x^y-xy=10$.

**11)** גזרו את הפונקציה הסתומה: $x^y-y^x=1$.

**12)** נתונה פונקציה סתומה $xy-y^3+x^2-x=0$.
מצאו את ערך $y^n$ בנקודה בה $y=1$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

**13)** נתון כי המשוואה $h(y)-x+1=2x^3+4e^y+2y$ ,
מגדירה את $y=y(x)$ כפונקציה סתומה של $x$.
נתון כי $h(y)$ גזירה ברציפות ויורדת.
הוכיחו כי $y(x)$ יורדת חזק.

## תשובות סופיות

**1)** $y'=\frac{-2x}{5y^4-1}$ $\quad 5y^4-1\neq 0,$

**2)** $y'=\frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y}-2y}$ $\quad \frac{10}{y}-2y\neq 0,$

**3)** $y'=\frac{\sqrt{y}-1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{2\sqrt{y}}{1-\sqrt{x}}$ $\quad \sqrt{x}\neq 0,\quad \sqrt{x}\neq 1,$

**4)** $y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$

**5)** $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

**6)** $y=\frac{1}{5}x+1\frac{4}{5}$

**7)** $y=\frac{1}{5}x+1\frac{4}{5}$

**8)** $y=\frac{4}{3}x+2$

**9)** א. $(0,0),\ (1,0)$.

ב. בראשית הצירים : $y=-x$ , המשוואה השנייה : $y=x-1$ .

**10)** $y'=\frac{y-x^y\cdot\frac{y}{x}}{x^y\cdot\ln x-x}$ $\quad x^y\cdot\ln x-x\neq 0,$

**11)** $y'=\frac{-x^y\cdot\frac{y}{x}+y^x\cdot\ln y}{x^y\ln x-y^x\cdot\frac{x}{y}}$ $\quad x^y\ln x-y^x\cdot\frac{x}{y}\neq 0,$

**12)** -1

**13)** הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

# כלל השרשרת

## שאלות

**1)** נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(4)=10$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x)=f(x^2)$.
חשבו את $g'(2)$.

**2)** נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(2)=4$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.

א. חשבו את $g'(0.5)$.

ב. נתון בנוסף כי $f$ עולה. הוכיחו כי $g$ יורדת.

**3)** נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(1)=e$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x)=x^2+f(\ln x)$.

א. חשבו את $g'(e)$.

ב. הוכיחו שהפונקציה $g$ עולה בנקודה $x=e$.

ג. חשבו את הגבול $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(e+h)-g(e)}{h}$.

**4)** נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f(1)=-2,\quad f'(1)=e$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x)=f^2(\ln x)$.

א. חשבו את $g'(e)$.

ב. האם $g$ עולה או יורדת, בנקודה $x=e$?

ג. נתון כי $f$ שלילית ועולה. מה ניתן לומר על $g$?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

**5)** נתונה פונקציה, $f(x)$ , יורדת וחיובית.

נגדיר פונקציה חדשה $g(x)=\sqrt{f\left(x^2+4\right)}$ .

מי מהבאים נכון?

א. $g$ עולה לכל $x$ .

ב. $g$ יורדת לכל $x$ .

ג. $g$ עולה לכל $x>0$ .

ד. $g$ יורדת לכל $x>0$ .

**6)** נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{f^2\left(\sqrt{x}\right)-1}{f\left(\sqrt{x}\right)}$ .

ידוע כי $f(10)=f'(10)=4$ . חשבו $g'(100)$ .

**7)** נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{f\left(\frac{1}{x}\right)+4}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)}$ .

ידוע כי $f'(1)=4$ , $f(1)=1$ .

חשבו $g'(1)$ .

**8)** נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{f^2(\ln x)}{f(\ln x)+1}$ .

ידוע כי $f'(0)=1$ , $f(0)=2$ .

חשבו $g'(1)$ .

**9)** נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{f^{10}(4x)+1}{f\left(\frac{4}{x}\right)+1}$ .

ידוע כי $f'(4)=2$ , $f(4)=1$ .

חשבו $g'(1)$ .

**10)** נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{\sqrt[4]{f^7\left(x^2\right)}}{f\left(x^4\right)}$ .

ידוע כי $f'(1)=4$ , $f(1)=1$ .

חשבו $g'(1)$ .


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

## תשובות סופיות

1) 40

1) א. -16 ב. שאלת הוכחה.

2) א. $2e+1$ ב. שאלת הוכחה. ג. $2e+1$

3) א. -4 ב. יורדת. ג. $g'(x)<0$

4) ד

5) $\frac{17}{80}$

6) 36

7) $\frac{8}{9}$

8) 44

9) -2


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

# גזירה לוגריתמית

## שאלות

גזרו את הפונקציות הבאות:

**1)** $y=\sqrt[4]{\frac{10x-1}{x+1}}\cdot\sqrt[10]{(2x+1)^7}$

**1)** $y=\left(\sqrt[4]{10x+1}\right)^{2x}$

**2)** $y=\frac{(x+2)^{3x+4}\cdot(5x+6)}{(7x+8)\cdot(9x+10)}$

## תשובות סופיות

**1)** $y'=y\left[\frac{1}{4}\frac{1}{10x-1}\cdot 10+\frac{7}{10}\frac{1}{2x+1}\cdot 2-\frac{1}{4}\frac{1}{x+1}\right]$

**2)** $y'=\left((10x+1)^{\frac{1}{4}}\right)^{2^x}\cdot\frac{1}{4}\left[2^x\cdot\ln 2\cdot\ln(10x+1)+\frac{1}{10x+1}\cdot 10\cdot 2^x\right]$

**3)** $y'=y\left[3\cdot\ln(x+2)+\frac{1}{x+2}(3x+4)+\frac{1}{5x+6}\cdot 5-\frac{1}{7x+8}\cdot 7-\frac{1}{9x+10}\cdot 9\right]$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

# נגזרת הפונקציה ההפוכה

## שאלה

הוכיחו, בעזרת כלל הנגזרת של הפונקציה ההפוכה, את הנוסחה הבאה:

**1)** $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

לתשובה מלאה בסרטון וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

# תרגילים נוספים לפי סוגים

## שאלות

### הנגזרת של פונקציית חזקה

**1)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3$ ב. $f(x)=x^7$ ג. $f(x)=x^2$

ד. $f(x)=x^1$ ה. $f(x)=x^{-3}$ ו. $f(x)=x^{-1}$

ז. $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ ח. $f(x)=x\frac{1}{3}$ ט. $f(x)=x^{\frac{3}{4}}$

### הנגזרת של קבוע כפול פונקציה

**2)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=2x^3$ ב. $f(x)=3x^7$ ג. $f(x)=\frac{1}{2}x^4$

ד. $f(x)=\frac{x^6}{7}$ ה. $f(x)=8x^1$ ו. $f(x)=3x^{-2}$

ז. $f(x)=\frac{4}{x}$ ח. $f(x)=6x^{\frac{1}{2}}$ ט. $f(x)=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$

### הנגזרת של קבוע

**3)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=12$ ב. $f(x)=\frac{7}{8}$

### הנגזרת של סכום והפרש

**4)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3+2x^2-3x+5$ ב. $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{x^3}{6}+\frac{3x}{4}-\frac{2}{5}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

### הנגזרת של פונקציה חזקה מורכבת

**5)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x-2)^3$ ב. $f(x)=(x^3+6)^5$ ג. $f(x)=3(x-x^2)^2$

ד. $f(x)=\frac{(5-x)^3}{4}$ ה. $f(x)=\frac{2(x+1)^4}{3}$

### הנגזרת של אחד חלקי איקס

**6)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3}{x}$ ב. $f(x)=\frac{2}{x}$ ג. $f(x)=\frac{1}{x^2}$ ד. $f(x)=\frac{3}{x^3}$

ה. $f(x)=\frac{1}{x^2-3x}$ ו. $f(x)=\frac{2}{3-x}$ ז. $f(x)=\frac{6}{x+5}$

### הנגזרת של מכפלה

**7)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x+1)(x-3)$

ב. $f(x)=(5x+1)^3(x-3)$

ג. $f(x)=x^3(6-x)^4$

### הנגזרת של מנה

**8)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3x-1}{1+2x}$ ב. $f(x)=\frac{x^2+1}{5x-12}$ ג. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+3}$

ד. $f(x)=\frac{x^2+8}{x-1}$ ה. $f(x)=\frac{1}{x}$ ו. $f(x)=\frac{3}{x^3}$

### הנגזרת של שורש

**9)** גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x}$ ב. $f(x)=4\sqrt{x+1}$ ג. $f(x)=\sqrt{x^3-1}$

ד. $f(x)=(3x+1)\sqrt{x}$ ה. $f(x)=x^2\sqrt{x+3}$ ו. $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x}}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

## תשובות סופיות

**1)**

א. $f'(x)=3x^2$ ב. $f'(x)=7x^6$ ג. $f'(x)=2x$

ד. $f'(x)=1$ ה. $f'(x)=3x^{-4}$ ו. $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

ז. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ח. $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ט. $f'(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$

**2)**

א. $f'(x)=6x^2$ ב. $f'(x)=21x^6$ ג. $f'(x)=2x^3$

ד. $f'(x)=\frac{6x^5}{7}$ ה. $f'(x)=8$ ו. $f'(x)=-\frac{6}{x^3}$

ז. $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$ ח. $f'(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$ ט. $f'(x)=\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$

**3)** א. 0 ב. 0

**4)** א. $f'(x)=3x^2+4x-3$ ב. $f'(x)=x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{4}$

**5)** א. $f'(x)=15(5x-x)^2$ ב. $f'(x)=15x^2(x^3+6)^4$

ג. $f'(x)=6(x-x^2)(1-2x)$ ד. $f'(x)=-\frac{3}{4}(5-x)^2$ ה. $f'(x)=\frac{8(x+1)^3}{3}$

**6)** א. $f'(x)=-\frac{3}{x^2}$ ב. $f'(x)=\frac{2}{x^2}$ ג. $f'(x)=-\frac{2}{x^3}$ ד. $f'(x)=-\frac{9}{x^4}$

ה. $f'(x)=-\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2}$ ו. $f'(x)=\frac{2}{(3-x)^2}$ ז. $f'(x)=-\frac{6}{(x+3)^2}$

**7)** א. $f'(x)=10x-14$ ב. $f'(x)=(5x+1)^2(20x-44)$

ג. $f'(x)=x^2(6-x)^3(18-7x)$

**8)** א. $f'(x)=\frac{5}{(1+2x)^2}$ ב. $f'(x)=\frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2}$ ג. $f'(x)=\frac{8x}{(x^2+3)^2}$

ד. $f'(x)=\frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$ ה. $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ ו. $f'(x)=-\frac{9}{x^4}$

**9)** א. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ב. $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ ג. $f'(x)=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$

ד. $f'(x)=\frac{9x+1}{2\sqrt{x}}$ ה. $f'(x)=\frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}}$ ו. $f'(x)=\frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 5 - משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי

### תוכן העניינים

1. המשיק ..... 39
2. בעיות משיקים ..... 41
3. בעיות משיקים עם נוסחת המשיק ..... 43
4. הנורמל ..... 46
5. נוסחת הקירוב הלינארי - דיפרנציאל שלם ..... 47

# המשיק

## שאלות

**1)** מצאו את שיפוע הפונקציה

א. $f(x)=2x^3-7x$ , בנקודה $(2,2)$.

ב. $f(x)=\frac{1}{x^2-3}$ , בנקודה $x=-2$.

**2)** נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{ax}$ , כאשר $a>0$.

המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=\frac{1}{2}$ , הוא בעל שיפוע 1.

מצאו את הקבוע $a$.

**3)** הישר $2y-3x=3$ משיק לגרף הפונקציה $h(x)=3\sqrt{x}$.

מצאו את נקודת ההשקה.

**4)** שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=a\cdot 3^{2x-1}+3^{x-b}$ , בנקודה $(1,15)$, הוא $21\ln 3$.

מצאו את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.

**5)** שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{\ln^2 x+a}{\ln x+b}$ , בנקודה $\left(\frac{1}{e},-1\right)$, הוא $\frac{e}{3}$.

מצאו את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.

**6)** לאילו ערכי $k$ ישיק הישר $y=-5x+6$ , לגרף הפונקציה $f(x)=x^3-2x^2-4x+k$ ?

לכל ערך $k$ כזה מצאו את נקודת ההשקה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. 17 ב. 4

**2)** $a=2$

**3)** $(1,3)$

**4)** $a=2,\ b=-1$

**5)** $a=2,\ b=-2$

**6)** לערך $k=6$, בנקודה $x=1$ ; לערך $k=\frac{158}{27}$, בנקודה $x=\frac{1}{3}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# בעיות משיקים

## שאלות

**1)** הישר $y=4x+b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x^2}+3$.
מצאו את $b$ ואת נקודת ההשקה.

**2)** הישר $y=3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=x\sqrt{x}+b$.
מצאו את $b$ ואת נקודת ההשקה.

**3)** הישר $y=ax+\frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x)=\frac{2}{x+c}$ בנקודה $x=0$.
מצאו את $a$ ו- $c$.

**4)** הישר $y=x+b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=e^x$.
מצאו את $b$ ואת נקודת ההשקה.

**5)** מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\ln x$ בנקודה $x=e$.

בשאלות **6-7** מצאו את נקודת ההשקה, ואת משוואת המשיק לגרף העקומה, העובר דרך הנקודה הנתונה:

**6)** $(2,-3), y=x^2-2x+1$

**7)** $(-3,1), y=\sqrt{x}$

**8)** מצאו את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות $y=x^2$ ו- $y=-\frac{1}{4}x^2-5$.

**9)** הפונקציות $y=\frac{1}{x}$ ו- $y=-\frac{1}{2}x^2+k$ משיקות זו לזו.
מצאו את $k$ ואת נקודת ההשקה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** נקודת ההשקה היא $(-1,5)$ ומשוואת המשיק היא $y=4x+9$.

**2)** נקודת ההשקה היא $(4,12)$ ו- $b=4$.

**3)** נקודת ההשקה היא $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ ומשוואת המשיק היא $y=-\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}$.

**4)** נקודת ההשקה היא $(0,1)$ ומשוואת המשיק היא $y=x+1$.

**5)** משוואת המשיק היא $y=\frac{1}{e}x$.

**6)** $(0,1)$ , $y=-2x+1$ ; $(4,9)$ , $y=6x-15$

**7)** המשיק $(9,3)$ , $y=\frac{1}{6}x+\frac{3}{2}$.

**8)** $y=2x-1$ , $y=-2x-1$

**9)** $k=1.5$ , נקודת ההשקה $(1,1)$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# בעיות משיקים עם נוסחת המשיק

## שאלות

**1)** מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=2(4x+3)^3$ , בנקודה $x=-1$ .

**2)** מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=x^4-2x$ , ששיפועו $2$ .

**3)** מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=x^3+1$ , בנקודה $x=0$ .

**4)** מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{x^3+3x-1}{x^2-2}$ , בנקודה $x_1=1$ .

**5)** שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{2}{ax+3}$ , בנקודה $y=2$ , הוא $-4$ .
מצאו את ערכו של הפרמטר $a$ ואת משוואת המשיק.

**6)** מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x)=\frac{1}{3x^3}$ , היוצרים זווית של $135°$
עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

**7)** מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{4}{\sqrt{x-1}}$ , ששיפועו $-2$ .

**8)** מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$ , בנקודה $x=2$ .

**9)** שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{a}{\sqrt{bx-1}}$ , בנקודה $(1,6)$ , הוא $-6$ .
מצאו את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$ .

**10)** נתונה הפונקציה $y=e^{2x}+3ex$ , והעבירו לה משיק בנקודה $x=2$ .
מצאו את משוואת המשיק.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=e^{2x}+xe^{-x}$ , בנקודה $x=0$ .

**12)** מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x)=(e+1)e^{x}-e^{2x}$ ,
בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y=e$ .

**13)** לפונקציה $g(x)=\frac{\ln x^2}{x}$ העבירו משיק בנקודה שבה $x=e^2$ .
מצאו את משוואת המשיק.

**14)** מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y=x\cdot\ln(x^2+1)$ , בנקודה $x=1$ .

**15)** הגרפים של $f(x)=\ln x$ ו- $g(x)=1$ נחתכים בנקודה A, ברביע הראשון.
בנקודה A העבירו משיק.
מצאו את משוואת המשיק והוכיחו שהמשיק עובר דרך ראשית הצירים.

**16)** מצאו את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $xy^2+y-x=xy$ ,
דרך הנקודה $(1,1)$ , הנמצאת על גרף הפונקציה.

**17)** מצאו את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה הסתומה
$x^2y+e^{y^2-4x}=\ln x+1$ , דרך הנקודה $(1,2)$ , הנמצאת על גרף הפונקציה.

**18)** מצאו את משוואת המשיק למעגל $x^2+y^2=25$ בנקודה $(3,4)$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $y=24x+22$

**2)** $y=2x-3$

**3)** $y=1$

**4)** $y=-12x+9$

**5)** $a=2,\quad y=-4x-2$

**6)** $y=-x+1\frac{1}{3},\quad y=-x-1\frac{1}{3}$

**7)** $y=-2x+8$

**8)** $y=\frac{11}{16}x-\frac{30}{16}$

**9)** $a=6,\ b=2,\quad y=-6x+12$

**10)** $y=\left(2e^4+3e\right)x-3e^4$

**11)** $y=3x+1$

**12)** $y=\left(-e^2+e\right)x+e^2,\quad y=\left(e-1\right)x+e$

**13)** $y=-\frac{2}{e^4}x+\frac{6}{e^2}$

**14)** $y=\left(\ln 2+1\right)x-1$

**15)** $y=\frac{1}{e}x$

**16)** $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

**17)** $y=\frac{1}{5}x+1\frac{4}{5}$

**18)** $y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הנורמל

## שאלות

**1)** מצאו את משוואת הישר, הנורמל לגרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{2x-2}$ , בנקודה $(3,2)$.

**2)** מצאו את משוואת הנורמל לגרף הפונקציה $f(x)=x^4$ , המאונך לישר העובר דרך הנקודות $(5,0)$ ו-$(2,4)$.

**3)** משוואת נורמל לגרף הפונקציה $f(x)=x^3-2x^2+1$ , בנקודה מסוימת, היא $4y+x=6$.
מצאו את הנקודה.

## תשובות סופיות

**1)** $y=-2x+8$

**2)** $y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$

**3)** $(2,1)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# נוסחת הקירוב הלינארי – דיפרנציאל שלם

## שאלות

**1)** חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים $\sqrt{27},\ \sqrt{8},\ \sqrt{5}$.

**2)** חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים $\sqrt[3]{9},\ \ln 2$.

## תשובות סופיות

**1)** $\sqrt{27}=5\frac{1}{5},\ \sqrt{8}\cong 2\frac{5}{6},\ \sqrt{5}\cong 2.25$

**2)** $\sqrt[3]{9}\cong 2\frac{1}{12},\ \ln 2\cong 1$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 6 - כלל לופיטל

### תוכן העניינים

1. גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף ..... 48
2. גבול מהצורה אפס כפול אינסוף ..... 50
3. גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף ..... 51
4. גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף ..... 52
5. מקרים בהם כלל לופיטל נכשל ..... 53

# גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף

## שאלות

**גבולות מהצורה** $\frac{0}{0}$ **ו-** $\frac{\infty}{\infty}$

חשבו את הגבולות בשאלות **1-3** (ביטויים רציונאליים):

**1)** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}$

**2)** $\lim\limits_{x\to -5}\frac{2x^2-50}{2x^2+3x-35}$

**3)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-x}{x-1}$

חשבו את הגבולות בשאלות **4-8** (ביטויים אי-רציונאליים):

**4)** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

**5)** $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4}$

**6)** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{\sqrt{x-2}-1}$

**7)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x^2-1}-\sqrt{x}}{x-1}$

**8)** $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\sqrt{1-\frac{3}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$

חשבו את הגבולות בשאלות **9-12** (פונקציות חזקה):

**9)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

**10)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}\ \ (a,b>0)$

**11)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$

**12)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x-x^2-2x-2}{2x^3}$

חשבו את הגבולות בשאלות **13-15** (פונקציות לוגריתמיות):

**13)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{x^2-2x+1}$

**14)** $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}{\frac{1}{x^2}}$

**15)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln^2(x+1)+x}{x}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את הגבולות הבאים (שאלות משולבות):

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2+x+3}$

17) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}$

18) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x+x+1}{e^x}$

19) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^2+2\ln x-3}{x}$

20) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$

## תשובות סופיות

1) $\frac{5}{6}$ 2) $\frac{20}{17}$ 3) $n-1$ 4) $4$ 5) $\frac{1}{6}$

6) $\frac{3}{2}$ 7) $\frac{5}{6}$ 8) $-\frac{3}{2}$ 9) $1$ 10) $\ln\frac{a}{b}$

11) $\frac{1}{2}$ 12) $\frac{1}{6}$ 13) $-\frac{1}{2}$ 14) $2$ 15) $1$

16) $\frac{1}{2}$ 17) $\frac{1}{2}$ 18) $\infty$ 19) $0$ 20) $0$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# גבול מהצורה אפס כפול אינסוף

**גבולות מהצורה** $0\cdot\infty$

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot e^{x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln x$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{2}e^{-x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0^{+}}x\cdot\ln x$

5) $\lim\limits_{x\to 3^{+}}\left(x^{2}-9\right)\cdot\ln\left(x-3\right)$

6) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\left[\sqrt{1+\frac{5}{x}}-1\right]$

## תשובות סופיות

1) $\infty$ 2) 0 3) 0 4) 0

5) 0 6) 6 7) $\frac{5}{2}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף

## שאלות

**גבולות מהצורה** $\infty-\infty$

חשבו את הגבולות הבאים:

**1)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$

**2)** $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x$

**3)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}+x$

**4)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$

## תשובות סופיות

**1)** $\frac{1}{2}$

**2)** $\frac{1}{2}$

**3)** $-\frac{1}{2}$

**4)** $\frac{1}{3}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף

## שאלות

**גבולות מהצורה:** $\infty^0$ , $0^{\pm\infty}$ , $1^{\pm\infty}$

חשבו את הגבולות הבאים:

**1)** $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

**2)** $\lim\limits_{x\to 0^+} (ax)^x \ , \ (a>0)$

**3)** $\lim\limits_{x\to 2^+} (2x-4)^{x-2}$

**4)** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$

## תשובות סופיות

**1)** $e$

**2)** 1

**3)** 1

**4)** 1


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מקרים בהם כלל לופיטל נכשל

## שאלות

הגבולות הבאים הם מהצורה $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

הראו זאת והסבירו מדוע, למרות כך, כלל לופיטל אינו ישים, ולבסוף, חשבו את הגבול.

**1)** $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

**2)** $\lim_{x\to\infty}\frac{16^x+4^{x+1}}{2^{4x+2}+2^{x+3}}$

## תשובות סופיות

**1)** $1$

**2)** $\frac{1}{4}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 7 - חקירת פונקציה

### תוכן העניינים

1. מושגי יסוד ..... (ללא ספר)
2. חקירת פולינום ..... 54
3. חקירת פונקציה רציונלית ..... 56
4. חקירת פונקציה מעריכית ..... 60
5. חקירת פונקציה לוגריתמית ..... 63
6. חקירת פונקציה עם שורשים ..... 67

# שלבי עבודה והערות

1. בשאלות החקירה בפרק זה יש לחקור לפי השלבים הבאים:
   - תחום הגדרה ורציפות.
   - נקודות חיתוך עם הצירים.
   - זוגיות ואי-זוגיות.
   - אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות.
   - תחומי עלייה וירידה.
   - נקודות קיצון.
   - תחומי קמירות וקעירות.
   - נקודות פיתול.
   - שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

2. יש האומרים על פונקציה קמורה שהיא קעורה כלפי מעלה ועל פונקציה קעורה שהיא קעורה כלפי מטה. אלה מינוחים שמקובלים בדרך כלל בתיכון.

3. ברוב המוסדות האקדמיים לומדים למצוא אסימפטוטה משופעת, שכוללת בתוכה גם את האפשרות לאסימפטוטה אופקית. יחד עם זאת, בחלק מהמוסדות לומדים רק אסימפטוטה אופקית ולכן בכל חקירה אני מוצא גם אסימפטוטה משופעת וגם אופקית. צפו בפתרון רק בחלק הרלוונטי עבורכם.

4. בחלק מהחקירות אציין בשאלה שאין צורך לעבור על כל שלבי החקירה. שימו לב לזה.

5. אני ממליץ על תוכנה חינמית בשם Graph, שניתן להוריד מכאן.

   בעזרתה תוכלו לשרטט כל פונקציה בקלות ולבדוק את תשובותיכם.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חקירת פולינום

## שאלות

חקרו את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

**1)** $f(x)=x(x-9)^2$ **2)** $f(x)=x^4-2x^3$

## תשובות סופיות

**1)** תחום הגדרה: כל $x$. נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: 0, עם ציר ה-$x$: 0 ו-9.

נקודות קיצון: מינימום: $(9,0)$, מקסימום: $(3,108)$.

תחום עלייה: $x<3$ $or$ $x>9$, ירידה: $3<x<9$.

תחום קמירות: $x>6$, קעירות: $x<6$.

נקודת פיתול: $(6,54)$.

**2)** תחום הגדרה: כל $x$. נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: 0, עם ציר ה-$x$: 0 ו-2.

נקודות קיצון: מינימום: $\left(1.5,\frac{-27}{16}\right)$.

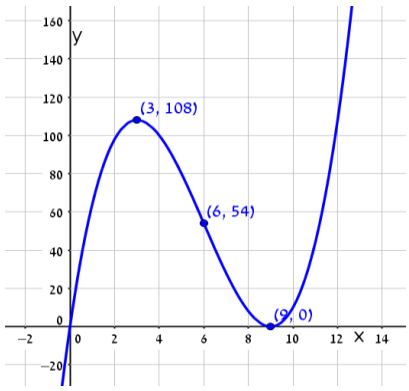
תחום עלייה: $x>1.5$, ירידה: $x<1.5$.

תחום קמירות: $x<0$ $or$ $x>1$, קעירות: $0<x<1$.

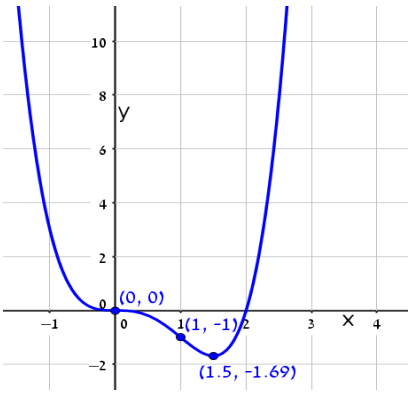
נקודות פיתול: $(1,-1)$, $(0,0)$.

### גרפים

**1)**




**2)**





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חקירת פונקציה רציונלית

## שאלות

חקרו את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

**1)** $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$

**2)** $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$

**3)** $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

**4)** $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

**5)** $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

**6)** $f(x)=\frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)}$

**7)** $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2-4}$

**8)** $f(x)=\frac{x^3-x^2}{x^2-1}$

### הערות

1. בשאלה **6** יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואה ממעלה שלישית.
2. בשאלה **7** יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.
3. בשאלה **8** מצאתי רק אסימפטוטה אופקית ולא משופעת. מומלץ למצוא גם אסימפטוטה משופעת. פונקציה כמעט זהה יש בסרטון ההסבר על אסימפטוטה משופעת. בכל אופן, קיבלנו שם אסימפטוטה משופעת $y=x-1$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq 0$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: אין, עם ציר ה-$x$: 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב-$\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(2,0.25)$. נקודת פיתול: $\left(3,\frac{2}{9}\right)$.
תחום עליה: $0<x<2$, ירידה: $x<0 \ \ or \ \ x>2$.
תחום קמירות: $x>3$, קעירות: $x<0 \ \ or \ \ 0<x<3$.

**2)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq -1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: 0, עם ציר ה-$x$: 0.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=-1$, משופעת ואופקית: הישר $y=2$ ב-$\pm\infty$.
נקודות קיצון: מינימום: $(0,0)$. נקודת פיתול: $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{9}\right)$.
תחום עליה: $x<-1 \ \ or \ \ x>0$, ירידה: $-1<x<0$.
תחום קמירות: $-1<x<\frac{1}{2}$, קעירות: $x<-1 \ \ or \ \ x>\frac{1}{2}$.

**3)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq \pm 2$. זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: 0, עם ציר ה-$x$: 0.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2,\ x=-2$, משופעת: הישר $y=x$ ב-$\pm\infty$,
אופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $\left(\sqrt{12},\sqrt{27}\right)$, מקסימום: $\left(-\sqrt{12},-\sqrt{27}\right)$.
תחום עליה: $x<-\sqrt{12} \ \ or \ \ x>\sqrt{12}$, ירידה: $-\sqrt{12}<x\neq\pm 2<\sqrt{12}$.
נקודת פיתול: $(0,0)$.
תחום קמירות: $-2<x<0 \ \ or \ \ x>2$, קעירות: $0<x<2 \ \ or \ \ x<-2$.

**4)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq -1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: 0, עם ציר ה-$x$: 0.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=-1$, משופעת: הישר $y=x-2$ ב-$\pm\infty$,
אופקית: אין, כי הפונקציה רציונלית, שבה מעלת המונה גדולה ממעלת המכנה.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(-3,-\frac{27}{4}\right)$.
תחום עליה: $x<-3 \ or \ x>-1$, ירידה: $-3<x<-1$.
נקודת פיתול: $(0,0)$.
תחום קמירות: $x>0$, קעירות: $-1<x<0 \ \ or \ \ x<-1$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq 1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: $-1$, עם ציר ה-$x$: $-1$.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=1$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב-$\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין; הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
נקודות פיתול: $(-1,0)$, $\left(-3,\frac{1}{8}\right)$.
תחום קמירות: $-3<x<-1$ & $x>1$, קעירות: $-1<x<1$ or $x<-3$.

**6)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq 5$, $x\neq 2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: $y=-\frac{1}{10}$, עם ציר ה-$x$: $\pm 1$.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2$, $x=5$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב-$\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(2.78,-3.88)$, מינימום: $(0.36,-0.11)$.
תחום עלייה: $0.36<x<2$ or $2<x<2.78$,
ירידה: $x<0.36$ or $2.78<x<5$ or $x>5$. נקודת פיתול: $(-1,0)$.
תחום קמירות: $-1<x<2$ or $x>5$, קעירות: $2<x<5$ or $x<-1$.

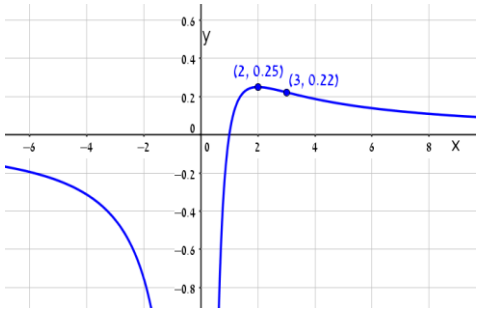
**7)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq\pm 2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: $y=-\frac{3}{4}$, עם ציר ה-$x$: $x=3$, $x=1$.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=-2$, $x=2$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב-$\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין; כי למשוואה הריבועית שקיבלנו אין פתרון.
תחום עלייה: הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
נקודת פיתול: $(0.85,-0.09)$.
תחום קמירות: $0.85<x<2$ or $x<-2$, קעירות: $-2<x<0.85$ or $x>2$.

**8)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq -1$, $x\neq 1$.
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: 0, עם ציר ה-$x$: 0.
אסימפטוטה אופקית: אין, אנכית: הישר $x=-1$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(-2,-4)$, מינימום: $(0,0)$.
תחום עליה: $x<-2$ or $0<x<1$ or $x>1$, ירידה: $-2<x<-1$ or $-1<x<0$.
נקודת פיתול: אין.
תחום קמירות: $-1<x<1$ or $x>1$, קעירות: $x<-1$.

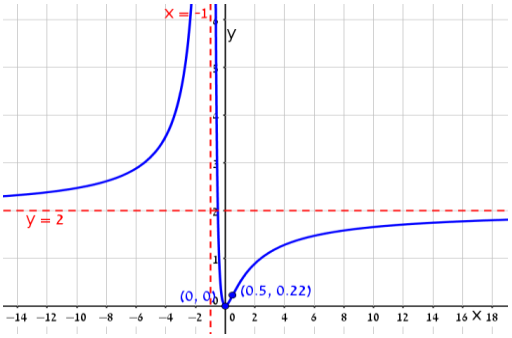

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## גרפים

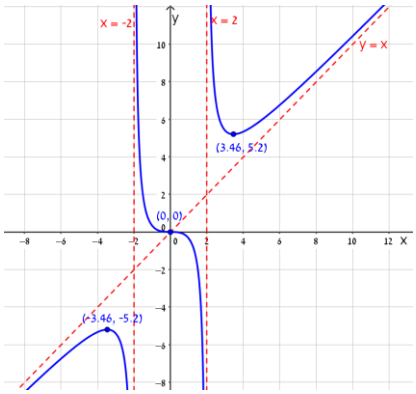
1)



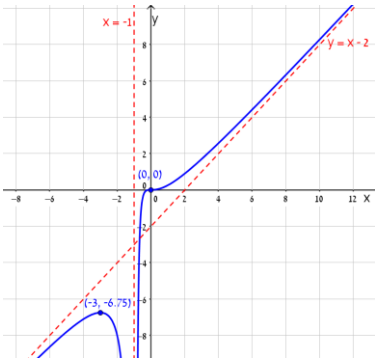

2)



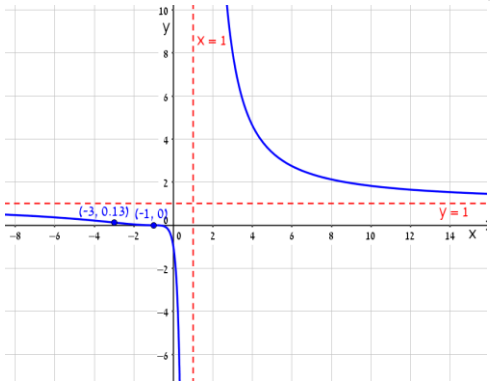

3)



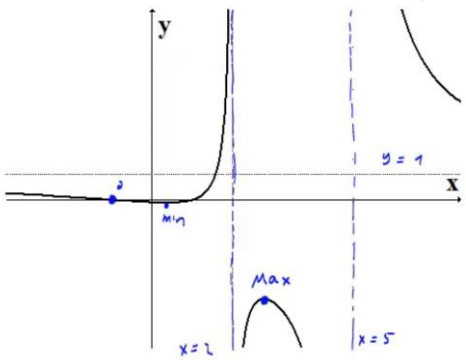

4)



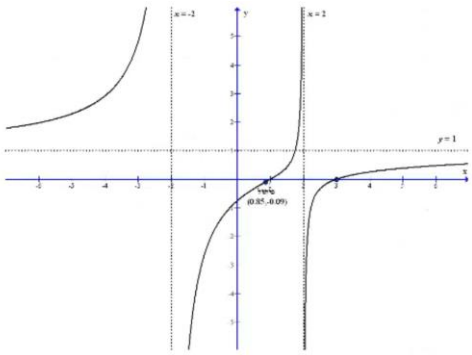

5)



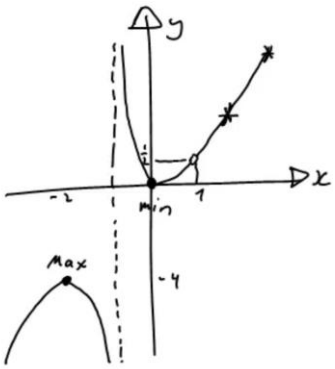

6)




7)



8)





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חקירת פונקציה מעריכית

## שאלות

חקרו את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

**1)** $f(x)=x-e^{x}$

**2)** $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

**3)** $f(x)=(x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}}$

**4)** $f(x)=x\cdot e^{-2x^{2}}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: $-1$, עם ציר ה-$x$: אין (ראו בהרחבה בסרטון).
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: הישר $y=x$ ב-$-\infty$ בלבד.
נקודות קיצון: מקסימום: $(0,-1)$. תחום עלייה: $x<0$, ירידה: $x>0$.
נקודת פיתול: אין. תחום קמירות: קעורה לכל $x$.

**2)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq 0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: אין, עם ציר ה-$x$: אין.
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב-$\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין.
תחום עלייה וירידה: הפונקציה יורדת בתחום הגדרתה.
נקודת פיתול: $\left(-0.5,e^{-2}\right)$.
תחום קמירות: $-0.5<x<0$ $or$ $x>0$, תחום קעירות: $x<-0.5$.

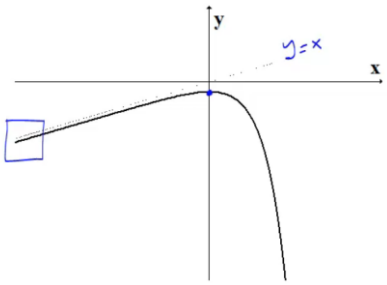
**3)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq 0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: אין, עם ציר ה-$x$: $-2$.
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x=0$, משופעת: הישר $y=x+3$ ב-$\pm\infty$.
אופקית: אין. נקודות קיצון: מקסימום: $\left(-1,e^{-1}\right)$, מינימום: $\left(2,4e^{\frac{1}{2}}\right)$.
תחום עלייה: $x<-1$ $or$ $-1<x<0$, ירידה: $x>2$ $or$ $0<x<2$.
נקודת פיתול: $\left(-0.4,1.6e^{-2.5}\right)$.
תחום קמירות: $-0.4<x<0$ $or$ $x>0$, תחום קעירות: $x<-0.4$.

**4)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x$. זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: 0, עם ציר ה-$x$: 0.
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת (אופקית): הישר $y=0$ ב-$\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right)$, מינימום: $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right)$.
תחום עלייה: $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$, ירידה: $x<-\frac{1}{2}$ $or$ $x>\frac{1}{2}$.
נקודות פיתול: $\left(\sqrt{\frac{3}{4}},\sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{3}{4}},-\sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5}\right)$, $(0,0)$.
תחום קמירות: $-\sqrt{\frac{3}{4}}<x<0$ $or$ $x>\sqrt{\frac{3}{4}}$, תחום קעירות: $0<x<\sqrt{\frac{3}{4}}$ $or$ $x<-\sqrt{\frac{3}{4}}$.

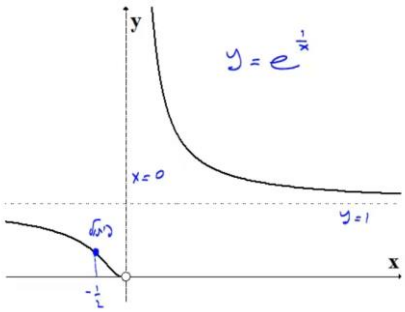

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## גרפים

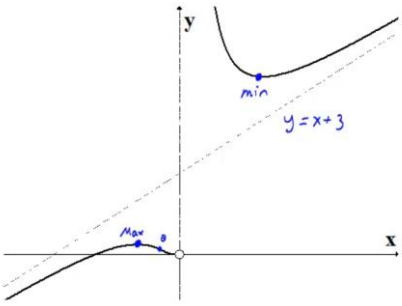
1)



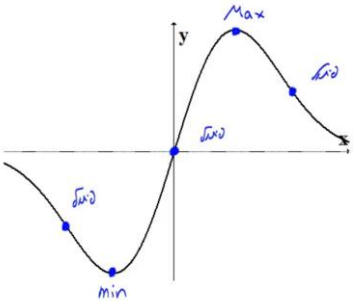

2)




3)




4)





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חקירת פונקציה לוגריתמית

## שאלות

חקרו את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

**1)** $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

**2)** $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

**3)** $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1}{2-x}}$

**4)** $f(x)=x\cdot\ln x$

**5)** $f(x)=\ln^2 x+2\ln x-3$

**6)** $f(x)=4\ln^2 x-4\ln x-3$

**7)** $f(x)=\ln^2 x+\frac{1}{\ln^2 x}$

### הערה

בשאלה **7** יש למצוא נקודת פיתול רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: אין, עם ציר ה-$x$: 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב-$\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e,\frac{1}{e}\right)$.
תחום עליה: $0<x<e$, ירידה: $x>e$.
נקודת פיתול: $\left(e^{1.5},\frac{1.5}{e^{1.5}}\right)$.
תחום קמירות: $x>e^{1.5}$, קעירות: $0<x<e^{1.5}$.

**2)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: אין, עם ציר ה-$x$: 1.
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): הישר $x=0$,
משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב-$\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e^2,\frac{2}{e}\right)$.
תחום עליה: $0<x<e^2$, ירידה: $x>e^2$.
נקודת פיתול: $\left(e^{\frac{8}{3}},\frac{\frac{8}{3}}{\sqrt{e^{\frac{8}{3}}}}\right)$. תחום קמירות: $0<x<e^{\frac{8}{3}}$, קעירות: $x>e^{\frac{8}{3}}$.

**3)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x<2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: $y=-\frac{1}{2}\ln 2$, עם ציר ה-$x$: 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=2$, משופעת: אין.
נקודות קיצון: אין.
תחום עליה: עולה בכל תחום הגדרתה.
נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.

**4)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: אין, עם ציר ה-$x$: 1.
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{-1},-e^{-1}\right)$.
תחום עליה: $x>e^{-1}$, ירידה: $0<x<e^{-1}$.
נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: אין, עם ציר ה-$x$: $x=e^{-3},\ x=e^{1}$.
אסימפטוטה אנכית: $x=0$, משופעת ואופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{-1},-4\right)$.
תחום עלייה: $x>e^{-1}$, ירידה: $0<x<e^{-1}$.
נקודת פיתול: $(1,-3)$. תחום קמירות: $x>1$, קעירות: $0<x<1$.

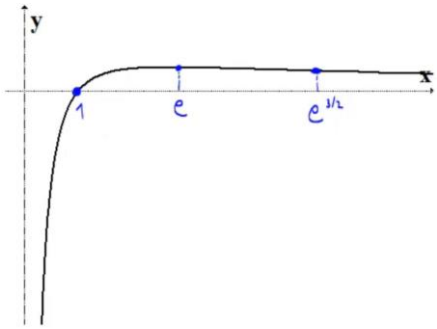
**6)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: אין, עם ציר ה-$x$: $x=e^{-0.5},\ x=e^{1.5}$.
אסימפטוטה אנכית: $x=0$, משופעת ואופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{\frac{1}{2}},-4\right)$.
תחום עלייה: $x>e^{\frac{1}{2}}$, ירידה: $0<x<e^{\frac{1}{2}}$.
נקודת פיתול: $\left(e^{1.5},0\right)$. תחום קמירות: $0<x<1.5$, קעירות: $x>1.5$.

**7)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0,\ x\neq 1$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: אין, עם ציר ה-$x$: אין.
אסימפטוטה אנכית: $x=1$, משופעת ואופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{-1},2\right),(e,2)$.
תחום עלייה: $e^{-1}<x<1$ or $x>e$, ירידה: $x<e^{-1}$ or $1<x<e$.
נקודת פיתול: $(5.15,3.06)$.
תחום קמירות: $1<x<5.15$ or $0<x<1$, קעירות: $x>5.15$.

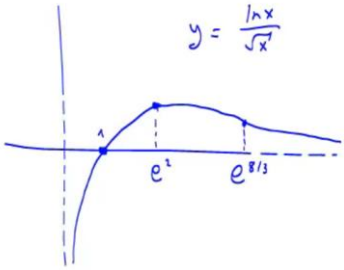

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## גרפים

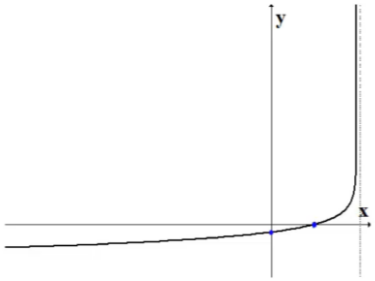
1)



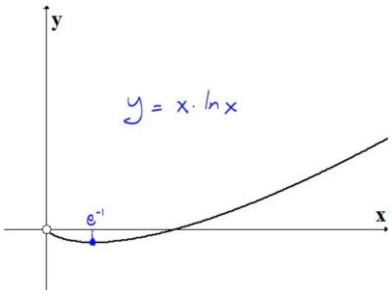

2)



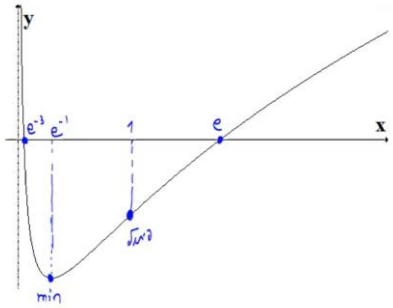

3)



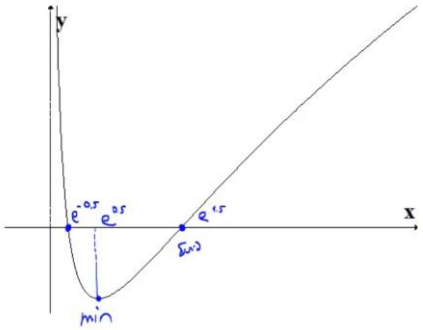

4)



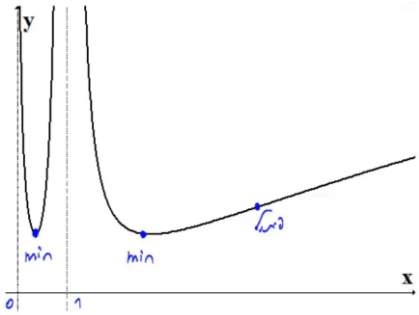

5)




6)




7)





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חקירת פונקציה עם שורשים

## שאלה

**1)** חקרו את הפונקציה הבאה חקירה מלאה: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

## תשובה

**1)** תחום הגדרה ורציפות: לכל $x$.

נקודות חיתוך עם ציר ה-$y$: **1**, עם ציר ה-$x$: אין.

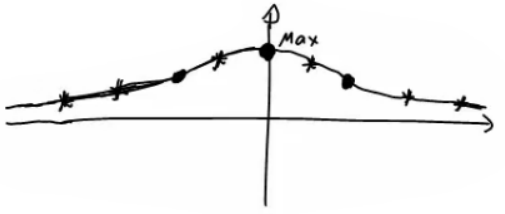
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: $y=0$.

נקודות קיצון: מקסימום: $(0,1)$. תחום עלייה: $x<0$, ירידה: $x>0$.

נקודות פיתול: $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{1}{2}},\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$.

תחום קמירות: $x<\sqrt{\frac{1}{2}}\ \ or\ \ x<-\sqrt{\frac{1}{2}}$, קעירות: $-\sqrt{\frac{1}{2}}<x<\sqrt{\frac{1}{2}}$.

גרף:





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 8 - בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון)

### תוכן העניינים

1. הסבר כללי על בעיות קיצון ..... (ללא ספר)
2. בעיות קיצון כלכליות מסוג ראשון ..... 68
3. בעיות קיצון כלכליות מסוג שני ..... 74
4. בעיות קיצון יסודיות עם מספרים ..... 76
5. בעיות קיצון בפונקציות וגרפים ..... 77
6. בעיות קיצון בהנדסת המישור ..... 79

## שלבי עבודה

- נגדיר את אחד הגדלים בשאלה כ- $x$.
- נבטא את שאר הגדלים בשאלה באמצעות $x$.
- נבנה פונקציה שמבטאת את מה שרצינו שיהיה מינימלי/מקסימלי.
- נגזור את הפונקציה, נשווה לאפס ונחלץ ערך/ערכי ה- $x$.
- נוודא שערך ה- $x$ מסעיף 4 הוא אכן מינימום/מקסימום באמצעות "$y$" (או טבלה).
- ננסח את התשובה לשאלה המקורית.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# בעיות קיצון כלכליות מסוג ראשון

## שאלות

**1)** כאשר חברת 'יוטבתה' מוכרת $x$ ליטר שוקו ליום,
היא יכולה לקבל מחיר של $p(x)=-\frac{1}{4}x+10$ שקל לליטר.

א. מהו מחיר ליטר אחד, אם הכמות שנמכרת ביום היא 4 ליטר?
ב. מהו מחיר ליטר אחד, אם הכמות שנמכרת ביום היא 12 ליטר?
ג. מהי הכמות הנמכרת ביום, אם המחיר הוא 6 ₪ לליטר?
ד. שרטטו את הגרף של פונקציית הביקוש, ומצאו את תחום ההגדרה שלה.
ה. פונקציית הביקוש הנתונה מתארת את מחיר המוצר, כפונקציה של הכמות הנמכרת ממנו. שנו את נוסחת הפונקציה, כך שהיא תתאר את הכמות הנמכרת מהמוצר, כפונקציה של מחירו.

**2)** פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x)=-0.6x+120$.

א. מצאו את פונקציית הפדיון ואת התחום שלה.
ב. אם $x=20$, מהו מחיר המוצר ומהו הפדיון?
ג. אם המחיר הוא 12 ₪, מהו הפדיון?

**3)** פונקציית הפדיון של מוצר מסוים היא $R(x)=-0.08x^2+40x$.

א. מהו התחום של פונקציית הפדיון?
ב. שרטטו את הגרף של פונקציית הפדיון.
ג. מצאו את פונקציית הביקוש ושרטטו את הגרף שלה.

**4)** פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x)=-0.4x+100$.

א. מצאו את תחום הפונקציה.
ב. מצאו את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון הממוצע.
ג. מצאו את פונקציית הפדיון השולי.
ד. לאיזה ערך של $x$ יתקבל פדיון מקסימלי, ומהו?

**5)** פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x)=-6x^2+240x+1800$.

א. מצאו את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון השולי.
ב. אם $x=40$, האם כדאי להגדיל את הייצור?
ג. מתי יהיה הפדיון מקסימלי, ומהו?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**6)** פונקציית הביקוש של מוצר מסוים נתונה ע"י $Q(x)=10x-\frac{x^2}{5}$.

א. מצאו את המחיר, הנותן את הפדיון המקסימלי.

ב. מהו הביקוש במקרה זה?

ג. מהו הביקוש השולי בנקודת המחיר שמצאנו? מה משמעותו?

**7)** פונקציית ההוצאות של יצרן, המייצר $x$ קפה ביום, היא $C(x)=5x+150$.

א. שרטטו גרף של פונקציית ההוצאות. מהן ההוצאות הקבועות?

ב. מצאו כמה ק"ג קפה מייצר היצרן, אם ההוצאות הן 1,000 ₪.

ג. מהן ההוצאות, אם מייצרים 20 ק"ג קפה ביום?

ד. מצאו את פונקציית ההוצאה השולית.

**8)** פונקציית העלות, של יצרן כובעים, היא $TC(x)=0.04x^2+10x+400$ שקל ליום.

א. חשבו את העלות הממוצעת ליום, אם הוא מייצר 40 כובעים.

ב. כמה כובעים עליו לייצר, כדי שהעלות הממוצעת תהיה מינימלית?

ג. חשבו את העלות השולית ליום, עבור $x=100$. איזו מסקנה ניתן להסיק?

**9)** פונקציית העלות של מוצר מסוים היא $C(x)=0.004x^2+10x+200$.

א. חשבו את העלות, כאשר $x=100$ וכאשר $x=101$.

ב. חשבו את העלות השולית, כאשר $x=100$.

ג. חשבו כמה תעלה יחידת מוצר נוספת, כאשר הייצור יעבור מ- $x=100$ ל- $x=101$, והשוו עם התוצאה של סעיף ב. מהי המסקנה?

ד. מצאו האם קצב השינוי של העלות גדל או קטן.

**10)** ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q)=100-0.06Q$,

ופונקציית עלות כוללת $TC(Q)=200+4Q$.

מהי הכמות, $Q$, שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?

מהו המקסימום במקרה זה?

**11)** ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q)=20$,

ופונקציית עלות $TC(Q)=300+2Q^2$.

מהי הכמות שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?

מהו המקסימום במקרה זה?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**12)** ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = -0.15Q + 50$,
ופונקציית עלות שולית $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$.
מהי הכמות שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?

**13)** ליצרן פונקציית ביקוש $Q = \frac{5000 - 50P}{3}$,
ופונקציית עלות $TC(Q) = 200 + 4Q$.
מהי הכמות, $Q$, שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
מהו המקסימום במקרה זה?

**14)** ליצרן פונקציית עלות שולית $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$.
מצאו את פונקציית העלות, אם ידוע שכאשר הכמות המיוצרת היא $Q = 10$,
אז העלות הכוללת היא 225 ₪.

**15)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהרווח המקסימלי מתקבל כאשר הפדיון השולי שווה להוצאה השולית. הסבר את המשמעות הגרפית.

ב. הוכיחו שאם מחיר המוצר קבוע, אז הרווח המקסימלי מתקבל כאשר ההוצאה שולית שווה למחיר המוצר.

**16)** $C(x)$ – פונקציית הוצאות, $C'(x)$ – הוצאות שוליות, $\frac{C(x)}{x}$ – הוצאות ממוצעות.

א. האם ייתכן שהוצאה שולית קבועה, למרות שהוצאה ממוצעת משתנה?

ב. האם ייתכן להפך?

ג. הוכיחו כי ההוצאה הממוצעת היא פונקציה עולה אם ורק אם ההוצאה השולית גדולה מן ההוצאה הממוצעת.

**17)** מפעל המייצר מוצר מסוים משתמש בשני גורמי הייצור.
נסמן את מחירי גורמי הייצור, ליחידה, ב- $p_1$ וב- $p_2$, בהתאמה.
אם נשתמש ב- $x$ יחידות מג"י אחד וב- $y$ יחידות מג"י 2,
המפעל מייצר $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ יחידות. תקציב המפעל $A$ ₪.

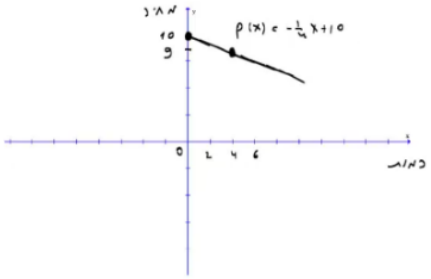
א. הוכיחו כי באילוץ התקציב, הייצור מקסימלי
כאשר מתקיימת הנוסחה $\frac{x}{y} = \frac{p_2^2}{p_1^2}$.

ב. חשבו $x$ ו- $y$, עבורם הייצור מקסימלי, אם נתון:
$p_1 =$ ₪ 3,000 , $p_2 =$ ₪ 100 , $A =$ ₪ 372,000.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

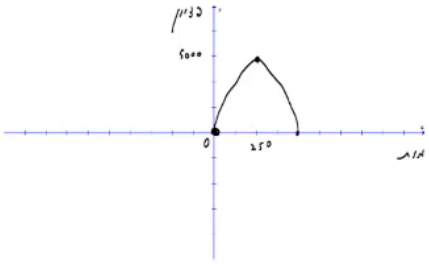
## תשובות סופיות

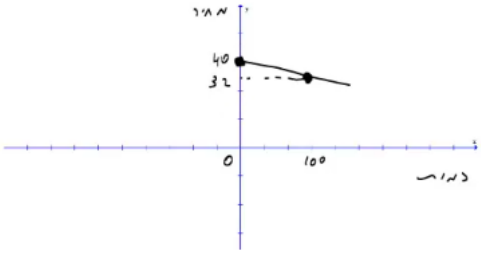
**1)** א. 9 ב. 7 ג. 16 ה. $x(p)=40-4p$ ד.



**2)** א. $R(x)=-0.6x^2+120x$, בתחום: $x\geq 0$. ב. 2,160 ג. 2,160

**3)** א. $x\geq 0$ ב. ג.





**4)** א. $x\geq 0$ ב. פונקציית הפדיון: $R(x)=-0.04x^2+100x$,

הפדיון הממוצע: $AR(x)=-0.4x+100$. $x>0$ ג. $R'(x)=-0.08x+100$

ד. 1,250 ; הפדיון המקסימלי: 62,500.

**5)** א. פונקציית הפדיון: $R(x)=-6x^3+240x^2+1800x$,

הפדיון השולי: $R'(x)=-18x^2+480x+1800$. ב. לא.

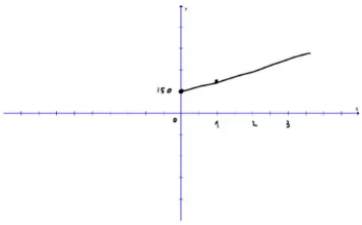
ג. 30 ; הפדיון המקסימלי: 108,000.

**6)** א. $33\frac{1}{3}$ ב. $Q\left(33\frac{1}{3}\right)=10\cdot 33\frac{1}{3}-\frac{33\frac{1}{3}^2}{5}$

ג. $-3\frac{1}{3}$ ; העלאת המחיר ביחידה אחת – תקטין את הביקוש ב-3.33 יח', בערך.

**7)** א. ההוצאות הקבועות הן הוצאות המפעל, גם כאשר הוא אינו מייצר. ב. 170

ג. 250 ד. $MC(x)=5$



**8)** א. 21.6 ב. 100 ג. 18 ₪ ; אם המפעל יעלה את הייצור ביחידה אחת, מ-100 ל-101, העלות הכוללת שלו תגדל ב-18 ₪ בערך.

**9)** א. $C(100)=1240,\ C(101)=1250.804$ ב. 10.8

ג. בערך הסכום שיעלה למפעל לייצר יחידה נוספת. ד. גדל.

**10)** הכמות: 800, המקסימום: 38,200.

**11)** הכמות: 5, המקסימום: 250-.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**12)** 25

**13)** הכמות: 800, המקסימום: 38,200.

**14)** $TC(Q)=0.02Q^3+20Q+5$

**15)** שאלת הוכחה.

**16)** א. כן. ב. לא. ג. שאלת הוכחה.

**17)** א. שאלת הוכחה. ב. $x=4,\quad y=3600$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# בעיות קיצון כלכליות מסוג שני

## שאלות

**1)** יצרן מכונות כביסה מוכר 500 מכונות בשבוע, במחיר של $225 למכונה.
עלות הייצור למכונת כביסה אחת היא $125. סקר שוק מראה, שעל כל הוזלה של $5 במחיר – מספר המכונות הנמכרות בשבוע עולה ב-50.

א. מהו המחיר שהיצרן צריך לקבוע למכשיר, על מנת להגיע לרווח מקסימלי?

ב. מהן ההוצאות במצב זה? האם בהכרח אלו ההוצאות המינימליות? נמקו.

**2)** מחיר חבילת זמן אוויר בחברת סלולר הוא 100 ₪ ל-200 דקות.
בסקר שוק שערכה החברה התגלה, כי על כל הוזלה של 2 ₪ בתשלום, לקוחות מנצלים 10 דקות זמן אוויר נוספות.
לאור תוצאות הסקר, איזו חבילה (כלומר, **מה המחיר** שיש לקבוע **ולכמה דקות**) כדאי לחברה להציע ללקוחותיה, כדי להגיע להכנסה מקסימלית?

**3)** אמן מייצר תכשיטים, בעלות של 30 ₪ עבור כל תכשיט.
הוא מצליח למכור 100 תכשיטים, כאשר מחירם 40 ₪ לתכשיט.
על כל עלייה של 2 ₪ במחיר, הוא מוכר 4 תכשיטים פחות.

א. מצאו כמה תכשיטים האמן צריך לייצר, כדי ש**הרווח** שלו יהיה מקסימלי.

ב. באיזה מחיר ימכור האמן כל תכשיט במצב זה?

ג. מהי עלות הייצור של האמן (עבור כל התכשיטים) במצב זה?

**4)** חברת 'טיול נעים' משכירה אוטובוס ל-30 תיירים, שכל אחד מהם משלם 100 דולר. על כל תייר נוסף שמצטרף, החברה מסכימה להוריד את התשלום לכל אחד מהתיירים, בשני דולר.
מה צריך להיות מספר התיירים, כדי שלחברה יהיה הרווח הגדול ביותר?

**5)** מחיר שליחת SMS ברשת 'סלקום' הוא 50 אג',
ומספר ה-SMS־ים החודשי הממוצע הוא 200.
על כל 5 אג' ש'סלקום מעלה – יורד מספר ה-SMS־ים החודשי הממוצע בעשר.
מצאו מה צריך להיות מחיר שליחת SMS,
כדי שהכנסתה של 'סלקום' תהיה מקסימלית.

**6)** קולנוע 'חן' מוכר כל שבוע 60 כרטיסים לסרטי תלת-מימד במחיר של 45 ₪ לכרטיס. כל הורדה של מחיר הכרטיס בחצי שקל גורמת למכירת שני כרטיסים נוספים בשבוע.
מה צריך להיות מחיר הכרטיס, כדי שהכנסתו של בית הקולנוע תהיה בגדולה ביותר? מצאו גם מהי ההכנסה המקסימלית.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**7)** הייצור של בובת 'בוב ספוג' עולה לחברת 'ניקולדיאון' 25 ₪.
אם החברה מוכרת את הבובה ב-45 ₪, היא מצליחה למכור 200 בובות ליום.
על כל חצי שקל שהחברה מורידה ממחיר הבובה, היא מצליחה למכור 10 בובות נוספות ליום.
מהו הרווח היומי המקסימלי של החברה?

**8)** חברת 'אופיס דיפו' רוכשת מספר מסוים של מוצרים ב-800 ₪.
5 מהמוצרים היא מוכרת ברווח של 20% לכל מוצר,
ואת שאר המוצרים היא מוכרת ברווח של 2 ₪ לכל מוצר.
הוכיחו שהרווח של החברה, בעסקה כזו, הוא לפחות 70 ₪.

**9)** חברת BMX מוכרת 300 זוגות אופניים בחיר של 500 ₪ לזוג אופניים.
לכל $x$ זוגות אופניים נוספים שהיא מוכרת, היא מורידה – את מחירם בלבד – ב-$2x$ ₪ לזוג אופניים, ואילו את מחירם של 300 הזוגות הראשונים היא מורידה רק ב-$x$ ₪ לזוג אופניים.
מה מספר זוגות האופניים שעל החברה למכור,
על מנת שהכנסתה תהיה מקסימלית?

## תשובות סופיות

**1)** א. 200 ב. $93,750$ ; לא, כי תמיד ניתן לייצר פחות וכך להקטין הוצאות.

**2)** 70 ₪ ל-350 דקות.

**3)** א. 60 ב. 60 ₪ ג. 1,800 ₪

**4)** 40

**5)** 75 אג'.

**6)** מחיר הכרטיס : 30 ₪, ההכנסה המקסימלית : 3,600 ₪.

**7)** 4,500 ₪.

**8)** שאלת הוכחה.

**9)** 350


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# בעיות קיצון יסודיות עם מספרים

## שאלות

**1)** נתונים שלושה מספרים שסכומם 24. המספר הראשון שווה למספר השני. מצאו מהם המספרים, אם ידוע שמכפלתם מקסימלית.

**2)** מצאו את המספר החיובי, שאם נוסיף לו את המספר ההופכי לו, הסכום המתקבל יהיה מינימלי.

**3)** נתונים שלושה מספרים שסכומם הוא 36. ידוע שמספר אחד זהה לשני.

א. מה צריכים להיות שלושת המספרים כדי שמכפלתם תהיה מקסימלית?

ב. כיצד תשתנה התוצאה אם מספר אחד יהיה גדול פי 2 מהשני במקום שווה לו?

ג. באיזה מקרה תהיה מכפלה גדולה יותר?

**4)** $x$ ו- $y$ הם שני מספרים המקיימים $x+6y=60$.

א. הביעו את $y$ באמצעות $x$.

ב. מה צריכים להיות המספרים $x$ ו- $y$, כדי שמכפלת ריבועיהם תהיה מקסימלית?

ג. מהי המכפלה הנ"ל?

## תשובות סופיות

**1)** 8,8,8

**2)** 1

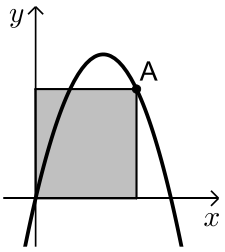
**3)** א. 12, 12, 12 ב. 8, 12, 16 ג. מקרה א'.

**4)** א. $y=10-\frac{x}{6}$ ב. $x=30$ , $y=5$ ג. $M=22500$

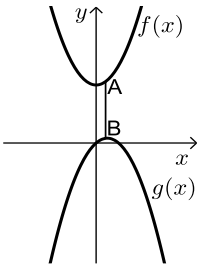

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# בעיות קיצון בפונקציות וגרפים

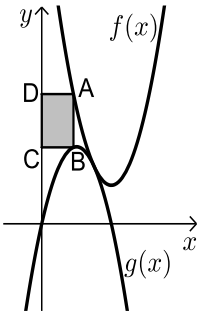
## שאלות




**1)** נתונה הפונקציה $f(x)=6x-x^2$ . מנקודה A שעל הפונקציה ברביע הראשון הורידו אנכים לצירי השיעורים כך שנוצר מלבן כמתואר בשרטוט.
מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?

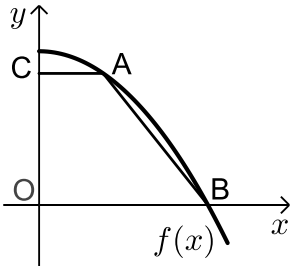



**2)** נתונות הפונקציות: $f(x)=x^2+12$ ו- $g(x)=2x-x^2$
כמתואר: הנקודות A ו-B נמצאות בהתאמה על הגרפים של הפונקציות: $f(x)$ ו- $g(x)$, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$ .
מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.




**3)** באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות:
$f(x)=x^2-8x+18$ ו- $g(x)=-x^2+4x$ .
הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$ . מעבירים אנכים מהנקודות A ו-B לציר ה- $y$ כך שנוצר מלבן (המסומן).
נסמן את שיעור ה- $x$ של הנקודה A ב- $t$ .

א. הביעו באמצעות $t$ את שטח המלבן המסומן.
ב. מצאו את ערכו של $t$ עבורו שטח המלבן הוא מקסימלי.
ג. מה יהיה שטח המלבן במקרה זה?

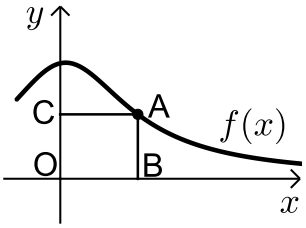



**4)** נתונה הפונקציה $f(x)=36-x^2$ .
על גרף הפונקציה ברביע הראשון מסמנים נקודה A. מהנקודה A מעבירים ישר, המקביל לציר ה- $x$, שחותך את ציר ה- $y$ בנקודה C.
הנקודה B היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ ו-O ראשית הצירים.

א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי ששטח הטרפז ABOC יהיה מקסימלי?
ב. מה יהיה שטח הטרפז במקרה זה?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x+12}{x^2+3}$, בתחום $x\geq 0$.

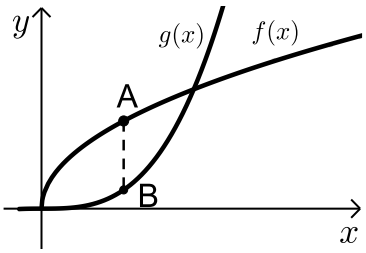



נקצה נקודה A על גרף הפונקציה וממנה נוריד אנכים לצירים, כך שנוצר המלבן ABCO, כמתואר באיור.

א. מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, עבורם שטח המלבן יהיה מקסימלי.

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, עבורם שטח המלבן יהיה מינימלי בתחום הנ"ל.

**6)** נתונות הפונקציות $f(x)=2\sqrt{x}$ ו- $g(x)=\frac{1}{3}x^3$.




את הנקודה A שעל $f(x)$ חיברו עם הנקודה B, שנמצאת מתחתיה על $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה-$y$.

מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?

## תשובות סופיות

**1)** $A(4,8)$

**2)** $A(0.5,12.25)$

**3)** א. $S=2t^3-12t^2+18t$ ב. $t=1$ ג. $S=8$

**4)** א. $A(2,32)$ ב. $S=128$

**5)** א. $A(2,2)$ ב. $A(0,4)$

**6)** $A(1,2)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

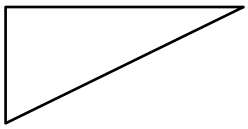
# בעיות קיצון בהנדסת המישור

## שאלות

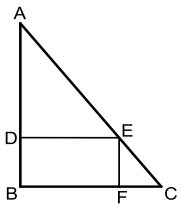
**1)** אדם מתכנן לבנות מרפסת בביתו
ורוצה להציב מעקה סביב המרפסת.
שטח המרפסת המתוכנן הוא 24 מ״ר.
מחיר מעקה בחזית המרפסת (BC)
הוא 120 ₪ למטר,
ומחיר מעקה בצדי המרפסת הוא 40 ₪ למטר.
מה צריכים להיות ממדי המרפסת, כדי שמחיר המעקה יהיה מינימלי?



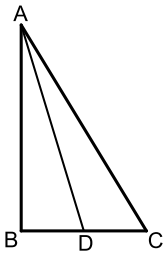

**2)** במשולש ישר זווית סכום אורכי הניצבים הוא 12 ס״מ.
מה צריך להיות אורך כל ניצב,
כדי ששטח המשולש יהיה מקסימלי?



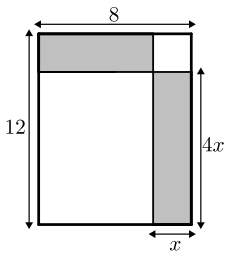
**3)** במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle B=90°$)
הנקודה E נמצאת על היתר AC,
כך שהמרובע EDBF הוא מלבן.
נתון: $AB=$ 20 ס״מ , $BC=$ 16 ס״מ.
מצאו את שטחו של המלבן בעל השטח
הגדול ביותר.




**4)** במשולש ישר הזווית ABC ($\sphericalangle B=90°$),
AD הוא תיכון לניצב BC.
ידוע כי סכום אורכי הניצבים הוא 20 ס״מ.
מצאו מה צריכים להיות אורכי הניצבים,
עבורם אורך התיכון AD יהיה מינימלי.




**5)** נתון מלבן שאורכי צלעותיו הם 8 ס״מ ו-12 ס״מ,
כמתואר באיור.
מקצים קטעים באורכים של $x$ ו-$4x$
על צלעות המלבן, כך שנוצרים המלבנים המקווקווים.
מצאו את $x$ עבורו סכום שטחי המלבנים הוא מינימלי.





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $4\cdot 6$

**2)** א. 6 ס"מ ו-6 ס"מ  ב. 18 סמ"ר  ג. $6\sqrt{2}\approx 8.48$ ס"מ.

**3)** 80 סמ"ר $=S$.

**4)** 4 ס"מ, 16 ס"מ.

**5)** $x=2.75$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 9 - אינטגרלים מיידיים ואינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

### תוכן העניינים

1. אינטגרלים מידיים ..... 81
2. אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים" ..... 84
3. מציאת פונקציה קדומה ..... 85

# אינטגרלים מיידיים

## שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-12**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$)

**1)** $\int 4dx$ **2)** $\int x^4 dx$ **3)** $\int \frac{1}{x^2} dx$

**4)** $\int \sqrt{x} dx$ **5)** $\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$ **6)** $\int 4x^{10} dx$

**7)** $\int \left(2x^2 - x + 1\right) dx$ **8)** $\int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x}\right) dx$ **9)** $\int \left(x^2 + 1\right)^2 dx$

**10)** $\int \left(x^2 + 1\right)\left(x + 2\right) dx$ **11)** $\int \frac{1 + 2x^2 + x^4}{x^2} dx$ **12)** $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$

חשבו את האינטגרלים בשאלות **13-20**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int \left(ax+b\right)^n dx = \frac{\left(ax+b\right)^{n+1}}{a \cdot \left(n+1\right)} + c$)

**13)** $\int \left(4x+1\right)^{10} dx$ **14)** $\int \left(x^2 - 2x + 1\right)^{10} dx$ **15)** $\int \frac{4}{\left(x-2\right)^5} dx$

**16)** $\int \sqrt[3]{4x-10} dx$ **17)** $\int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx$ **18)** $\int \frac{x}{\left(x-1\right)^4} dx$

**19)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x}}$ **20)** $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את האינטגרלים בשאלות **21-26**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{\ln|ax+b|}{a}+c$)

**21)** $\int \frac{1}{4x}dx$ **22)** $\int \frac{1+x+x^2}{x}dx$ **23)** $\int \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 dx$

**24)** $\int \frac{1}{4x-1}dx$ **25)** $\int \frac{x+3}{x+2}dx$ **26)** $\int \frac{4x+1}{x+2}dx$

חשבו את האינטגרלים בשאלות **27-29**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int e^{ax+b}dx = \frac{e^{ax+b}}{a}+c$)

**27)** $\int \left(e^{4x}+e^{-x}\right)dx$ **28)** $\int \left(e^{x+1}\right)^2 dx$ **29)** $\int \left(4\sqrt{e^x}+\frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}}\right)dx$

**30)** חשבו את האינטגרל: $\int \frac{2^x+4^{2x}+10^{3x}}{5^x}dx$

(פתירה על ידי הכלל: $\int a^{mx+n}dx = \frac{a^{mx+n}}{m\ln a}+c$)

**31)** חשבו את האינטגרל: $\int \frac{x^2}{1-x^2}dx$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $4x+c$

2) $\frac{x^5}{5}+c$

3) $-\frac{1}{x}+c$

4) $\frac{x^{1.5}}{1.5}+c$

5) $-\frac{2}{\sqrt{x}}+c$

6) $\frac{4x^{11}}{11}+c$

7) $\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+c$

8) $-\frac{1}{x^3}+\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2}+c$

9) $\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x+c$

10) $\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+c$

11) $-\frac{1}{x}+2x+\frac{x^3}{3}+c$

12) $\frac{x^{1.5}}{1.5}+\frac{x^{0.5}}{0.5}+c$

13) $\frac{(4x+11)^{11}}{44}+c$

14) $\frac{(x-1)^{21}}{21}+c$

15) $-\frac{1}{(x-2)^4}+c$

16) $\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4}+c$

17) $10\sqrt{2x+4}+c$

18) $-\frac{1}{2(x-2)^2}-\frac{1}{3(x-1)^3}+c$

19) $-\frac{2}{3}\left((x-1)^{3/2}+x^{3/2}\right)+c$

20) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-x+c$

21) $\frac{\ln|x|}{4}+c$

22) $\ln|x|+x+\frac{x^2}{2}+c$

23) $x+2\ln|x|-\frac{1}{x}+c$

24) $\frac{\ln|4x-1|}{4}+c$

25) $x+\ln|x+2|+c$

26) $4\left(x-1.75\ln|x+2|\right)+c$

27) $\frac{e^{4x}}{4}-e^{-x}+c$

28) $\frac{e^{2x+2}}{2}+c$

29) $8e^{\frac{x}{2}}-\frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4}+c$

30) $\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}+\frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)}+\frac{(200)^x}{\ln(200)}+c$

31) $-\left(x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

## שאלות

**הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.**

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$

2) $\int \frac{x^2}{x^3+1}dx$

3) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$

4) $\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1}dx$

5) $\int e^{x^2}2xdx$

6) $\int e^{-2x^2}xdx$

7) $\int \frac{\ln x}{x}dx$

8) $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

9) $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$

10) $\int x^2\sqrt{x^3+4}dx$

11) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$

## תשובות סופיות

1) $\ln\left|x^2+1\right|+c$

2) $\frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right|+c$

3) $\ln\left|\ln\left|x\right|\right|+c$

4) $e^2\ln\left|e^x+1\right|+c$

5) $e^{x^2}+c$

6) $-\frac{e^{-2x^2}}{4}+c$

7) $\frac{1}{2}(\ln x)^2+c$

8) $2\sqrt{x^2+1}+c$

9) $\frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+c$

10) $\frac{2}{9}\left(x^3+4\right)^{\frac{3}{2}}+c$

11) $\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מציאת פונקציה קדומה

## שאלות

**1)** נתונה הנגזרת $f'(x)=2x-\sqrt[3]{4x}$.

ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(2,3)$.

מצאו את הפונקציה.

**2)** נתונה הנגזרת $f'(x)=\sqrt[3]{5x+7}$.

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה-$x$ בנקודה שבה $x=4$.

מצאו את הפונקציה.

**3)** נתונה הנגזרת $f'(x)=\frac{10}{\sqrt[5]{x+1}}+(x-1)^2$.

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה-$y$ בנקודה שבה $y=-6$.

מצאו את הפונקציה.

**4)** נתונה הנגזרת $f'(x)=2x-6$.

ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.

מצאו את הפונקציה.

**5)** נתונה הנגזרת $f'(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}+2$.

שיפוע המשיק לפונקציה, בנקודה שבה $y=5\frac{2}{3}$, הוא 3.

מצאו את הפונקציה.

**6)** נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה $f''(x)=6x+6$.

שיפוע הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא $-12$,

וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1.

מצאו את הפונקציה.

**7)** נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה $f''(x)=1+\frac{8}{x^3}$.

המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא הישר $y=-4$.

מצאו את הפונקציה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**8)** נתונה פונקציה $f:R\to R$ המקיימת $f(0)=0$ וכן לכל $x_0$ ממשי:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=|x_0|$$

א. מצאו את תחומי הרציפות של הפונקציה.

ב. חשבו את הגבול $\lim_{x\to 0}f(x)$ או קבעו שהוא אינו קיים.

ג. מצאו כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה עם ציר ה- $x$.

ד. מצאו את כל נקודות הפיתול של הפונקציה.

ה. תהי $G(x)$ פונקציה קדומה של $|x|$.

חשבו את הנגזרת $\left(G(x)-f(x)\right)'$.

## תשובות סופיות

**1)** $f(x)=x^2-\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x)^4}+2$

**2)** $f(x)=\frac{3}{20}\sqrt[3]{(5x+7)^4}-12\frac{3}{20}$

**3)** $f(x)=12\frac{1}{2}\sqrt[5]{(x+1)^4}+\frac{1}{3}(x-1)^3-18\frac{1}{6}$

**4)** $f(x)=x^2-6x+14$

**5)** $f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3}-\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+2x-3$

**6)** $f(x)=x^3+3x^2-9x-10$

**7)** $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{x}+3x+2$

**8)** א. רציפה לכל $x$. ב. $\lim_{x\to 0}f(x)=0$, ג. נקודת חיתוך אחת $(0,0)$.

ד. נקודת פיתול אחת $(0,0)$. ה. 0


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 10 - אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

### תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים ..... 87

# אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

## שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-12**:

**1)** $\int xe^x dx$

**2)** $\int x^4 \ln x dx$

**3)** $\int \left(x^2+2x+3\right)\ln x dx$

**4)** $\int x^2 e^{-4x} dx$

**5)** $\int \ln x dx$

**6)** $\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$

**7)** $\int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx$

**8)** $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

**9)** $\int \ln^2 x dx$

**10)** $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$

**11)** $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$

**12)** $\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx$

**13)** מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int x^n e^x dx$, באשר $n$ טבעי.

**14)** חשבו את $\int x^4 e^x dx$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $xe^x - e^x + c$

2) $\frac{x^5}{5}\left(\ln x - \frac{1}{5}\right) + c$

3) $\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right)\ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c$

4) $-\frac{x^2}{4}e^{-4x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}xe^{-4x} - \frac{1}{16}e^{-4x}\right) + c$

5) $x\ln x - x + c$

6) $-\frac{1}{3}(x\ln x - x) + c$

7) $\frac{1}{5}\left(\frac{x^2}{2}\ln(x-2) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + 2x + 4x\ln|x-2|\right)\right) + c$

8) $-\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + c$

9) $x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x) + c$

10) $-\frac{1}{x}\ln x - \frac{2}{x}(\ln x - 1) + c$

11) $\frac{e^x}{x+1} + c$

12) $\frac{2}{9}(x+1)(x+2)^{\frac{9}{2}} - \frac{4}{99}(x+2)^{\frac{11}{2}} + c$

13) $x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x dx$

14) $e^x\left(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24\right) + c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 11 - אינטגרלים בשיטת ההצבה

### תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת ההצבה ..... 89

# אינטגרלים בשיטת ההצבה

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$

2) $\int \sqrt{x^3+4}\cdot x^5 dx$

3) $\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$

4) $\int \frac{1}{x\ln^4 x}dx$

5) $\int e^{x^2}x^3 dx$

6) $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$

7) $\int \frac{1}{\sqrt{x\left(1+x\right)}}dx$

8) $\int x^3\left(3x^2-1\right)^{14}dx$

9) $\int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx$

10) $\int \ln^3 x dx$

11) $\int \frac{\ln^4 x}{x}dx$

12) $\int \frac{dx}{x\cdot\ln x\cdot\ln\left(\ln x\right)}$

13) $\int \frac{x^7}{\left(1-x^4\right)^2}dx$

14) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

15) $\int x^5\sqrt[3]{x^3+1}dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $-\frac{1}{x^2+1}+c$

**2)** $\frac{2}{3}\left(\frac{\left(\sqrt{x^3+4}\right)^5}{5}-\frac{4}{3}\left(\sqrt{x^3+4}\right)^3\right)+c$

**3)** $2\left(\frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3}-\sqrt{x^2+1}\right)+c$

**4)** $-\frac{1}{3(\ln x)^3}+c$

**5)** $\frac{1}{2}\left(x^2e^{x^2}-e^{x^2}\right)+c$

**6)** $3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x}^2-2\sqrt[3]{x}+2\right)+c$

**7)** $\ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|+c$

**8)** $\frac{1}{18}\left(\frac{\left(3x^2-1\right)^{16}}{16}+\frac{\left(3x^2-1\right)^{15}}{15}\right)+c$

**9)** $\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|+c$

**10)** $x\left(\ln^3 x-3\ln^2 x+6\ln x-6\right)+c$

**11)** $\frac{(\ln x)^5}{5}+c$

**12)** $\ln\left|\ln\left(\ln x\right)\right|+c$

**13)** $-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{1-x^4}-\ln\left|1-x^4\right|\right)+c$

**14)** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}\right|+c$

**15)** $\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^7}{7}-\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^4}{4}+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 12 - אינטגרלים של פונקציות רציונליות

### תוכן העניינים

1. אינטגרלים של פונקציה רציונלית ..... 91
2. חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית ..... 93
3. אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית ..... 94

# אינטגרלים של פונקציה רציונלית

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{x+1}{(x-4)^2}dx$

2) $\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4}dx$

3) $\int \frac{dx}{x^2-4}$

4) $\int \frac{2-x}{x^2+5x}dx$

5) $\int \frac{x}{x^2+5x+6}dx$

6) $\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x}dx$

7) $\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6}dx$

8) $\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36}dx$

9) $\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)}dx$

10) $\int \frac{5-x}{x^3+x^2}dx$

11) $\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x}dx$

12) $\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $\ln|x-4|-\frac{5}{x-4}+c$

**2)** $-\frac{1}{3(x-6)^6}-\frac{1}{(x-1)^7}+c$

**3)** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$

**4)** $\frac{2}{5}\ln|x|-\frac{7}{5}|x+5|+c$

**5)** $3\ln|x+3|-2\ln|x+2|+c$

**6)** $\ln|x|+\frac{1}{2}|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+c$

**7)** $\ln|x+1|+2\ln|x+2|+3\ln|x-3|+c$

**8)** $\ln|x+3|+\ln|x-3|-\ln|x+2|-\ln|x-2|+c$

**9)** $\ln|x-2|-\frac{4}{x-2}-\ln|x+2|+c$

**10)** $6\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|-\frac{5}{x}+c$

**11)** $4\ln\left|\frac{x}{x+3}\right|+\frac{3}{x+3}+c$

**12)** $2\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

**1)** $\int \frac{3x^3-5x^2+4x-2}{x-1}dx$

**2)** $\int \frac{x^4+2x^3-10x^2-8x}{x+4}dx$

**3)** $\int \frac{12x^3-11x^2+6x-1}{4x-1}dx$

**4)** $\int \frac{x^4-2x^3+x^2+x}{(x-1)^2}dx$

**5)** $\int \frac{x^4-4x^2+x+1}{x^2-4}dx$

## תשובות סופיות

**1)** $x^3-x^2+2x+c$

**2)** $\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-x^2+c$

**3)** $x^3-x^2+x+c$

**4)** $\frac{x^3}{3}+\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+c$

**5)** $\frac{x^3}{3}+\frac{3}{4}\ln|x-2|+\frac{1}{4}\ln|x+2|+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-x}$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$

3) $\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x-1}}dx$

4) $\int \frac{1}{1+e^x}dx$

5) $\int \sqrt{1+e^x}dx$

## תשובות סופיות

1) $-1.5\ln\left|1-\sqrt[3]{x}^2\right|+c$

2) $6\left(\frac{\left(1+\sqrt[6]{x}\right)^3}{3}-\frac{3\left(1+\sqrt[6]{x}\right)}{2}+3\left(1+\sqrt[6]{x}\right)-\ln\left|1+\sqrt[6]{x}\right|\right)+c$

3) $4\left(\frac{\left(1+\sqrt[4]{x-1}\right)^2}{3}-\frac{3\left(1+\sqrt[4]{x-1}\right)^2}{2}+3\left(1+\sqrt[4]{x-1}\right)-\ln\left|1+\sqrt[4]{x-1}\right|\right)+c$

4) $-\ln\left|1+e^x\right|+x+c$

5) $2\sqrt{1+e^x}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 13 - האינטגרל המסוים, סכומי רימן

### תוכן העניינים

1. האינטגרל המסוים ..... 95
2. אי שוויונים עם אינטגרלים ..... 97
3. סכומי רימן ..... 98

# האינטגרל המסוים

## שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-6**:

**1)** $\int_1^4 \left(x^2-4x+1\right)dx$

**2)** $\int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5}dx$

**3)** $\int_0^1 xe^{-x}dx$

**4)** $\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x}dx$

**5)** $\int_0^4 f\left(x\right)dx$ כאשר $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{x} & 0\le x<1\\ \frac{1}{x^2} & x\ge 1\end{cases}$

**6)** $\int_{-1}^4 \sqrt{4+\left|x-1\right|}dx$

**7)** נתונה פונקציה רציפה $f$. הוכיחו:

א. אם $f$ זוגית, אזי $\int_{-a}^a f\left(x\right)dx=2\int_0^a f\left(x\right)dx$.

ב. אם $f$ אי-זוגית, אזי $\int_{-a}^a f\left(x\right)dx=0$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $-6$

**2)** $\ln\left(\frac{15}{8}\right)$

**3)** $-2e^{-1}+1$

**4)** $\frac{1}{5}$

**5)** $\frac{17}{12}$

**6)** $\frac{2}{3}\left(-16+6^{1.5}+7^{1.5}\right)$

**7)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אי שוויונים עם אינטגרלים

הוכיחו את אי-השוויונים הבאים:

**1)** $\frac{2}{41} \le \int_{-1}^{3} \frac{dx}{1+x^4} \le 4$

**2)** $6 \le \int_{-4}^{2} \sqrt{1+x^2}\,dx \le 6\sqrt{17}$

**3)** $2 \le \int_{0}^{2} e^{x^2} dx \le 2e^4$

**4)** $\frac{1}{2}e^{-10} \le \int_{0}^{10} \frac{e^{-x}}{x+10} dx \le 1$

**5)** $\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 4}} \le \int_{3}^{4} \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{\ln 3}}$

**6)** $\frac{2}{9} \le \int_{-1}^{1} \frac{dx}{8+x^3} \le \frac{2}{7}$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# סכומי רימן

חשבו את הגבולות בשאלות **1-5**:

**1)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^4+2^4+\ldots+n^4}{n^5}$

**2)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{n+n}\right\}$

**3)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{n}{n^2+1^2}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right\}$

**4)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right\}$

**5)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\ldots+\sqrt{2n}}{n^{3/2}}\right\}$

חשבו את האינטגרלים הבאים על פי ההגדרה (של רימן).

תוכל להיעזר בזהויות הבאות:

$$1+2+3+\ldots+n=0.5n(n+1)$$
$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

**6)** $\int_0^1 xdx$ **7)** $\int_0^1 x^2dx$ **8)** $\int_0^1 x^3dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $\frac{1}{5}$

2) $\ln 2$

3) $\frac{\pi}{4}$

4) $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

5) $\frac{2^{1.5}}{1.5}-\frac{2}{3}$

6) $\frac{1}{2}$

7) $\frac{1}{3}$

8) $\frac{1}{4}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 14 - שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)

### תוכן העניינים

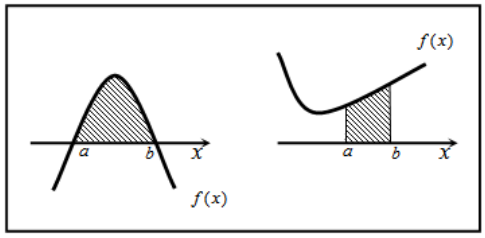
1. חישוב שטחים ..... 100
2. חישוב שטחים ביחס לציר ה-y ..... 109
3. אורך קשת ..... 110

# חישוב שטחים

## חישוב שטחים באמצעות האינטגרל (מקרים פרטיים)

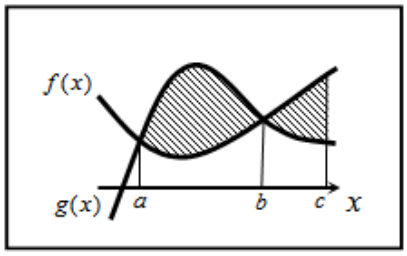
1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- $x$ :

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$



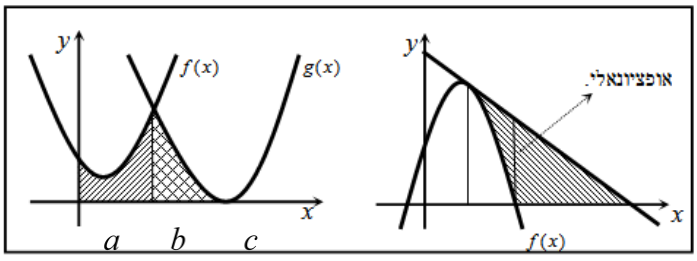

2. שטח הכלוא בין שני גרפים, כך שגרף אחד כולו מעל השני :

$$S_1=\int_a^b\big(g(x)-f(x)\big)dx$$
$$S_2=\int_b^c\big(f(x)-g(x)\big)dx$$
$$S=S_1+S_2$$




3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- $x$ :

$$S=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c g(x)\,dx$$

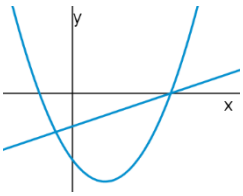




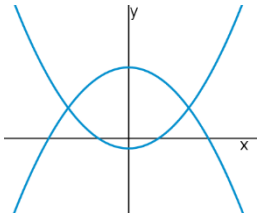
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## שאלות

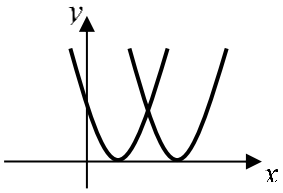
**1)** נתונות הפונקציות $f(x)=x^2-4x-12$ ו- $g(x)=x-6$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות.




**2)** נתונות הפונקציות $f(x)=x^2-1\ ,\ g(x)=7-x^2$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות.




**3)** נתונות הפונקציות $f(x)=x^2-2x+1\ ,\ g(x)=x^2-6x+9$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- $x$.

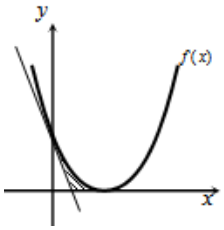



**4)** נתונה הפונקציה $f(x)=(x-2)^2$.
מנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ מעבירים משיק.

א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. מצאו את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- $x$ (השטח המסומן).

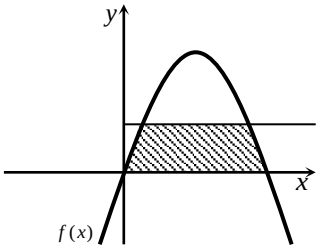



**5)** נתונה הפונקציה $f(x)=kx-x^2$.
הישר $y=9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.
ידוע כי שיעור ה- $x$ של אחת מנקודות החיתוך הוא $x=9$.

א. מצאו את ערך הפרמטר $k$.

ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.

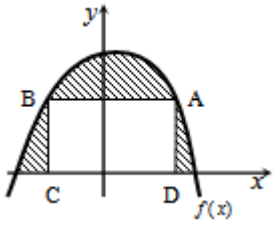
ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- $x$ (השטח המסומן).





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

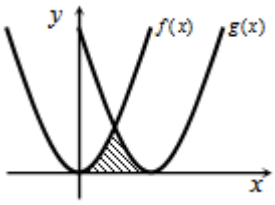
**6)** הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ , המתוארת באיור שלהלן,
היא $f'(x)=3-2x$ . ישר AB, שמשוואתו $y=6$ ,
חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו-B.
מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- $x$ ,
כך שנוצר מלבן ABCD.
ידוע ששיעור ה- $x$ של הנקודה A הוא 4.




א. מצאו את הפונקציה $f(x)$ .

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- $x$ .

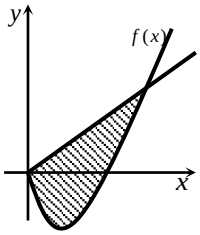
**7)** באיור שלהלן חותך גרף הפונקציה $f(x)=x^2$ ,
את גרף הפונקציה $g(x)$ , בנקודה שבה $x=2$ .
הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ היא $g'(x)=2x-8$ .




א. מצאו את הפונקציה $g(x)$ .

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- $x$ (המסומן).

**8)** באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y=2x$ .
נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=2x-6$ ,
וידוע כי הישר חותך את הפונקציה
בנקודה שבה ערך ה- $y$ הוא 16.

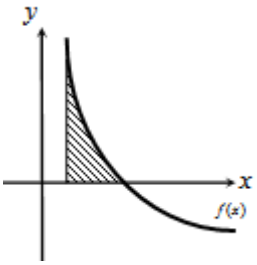



א. מצאו את הפונקציה $f(x)$ .

ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן מצאו אותן.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.

**9)** גרף הפונקציה $f(x)=\frac{a-x^2}{x^2}$ ( $a$ קבוע)
חותך את ציר ה- $x$ בנקודה $(6,0)$ .

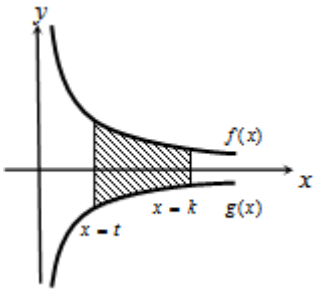



א. מצאו את $a$ וכתוב את הפונקציה.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,
ציר ה- $x$ והישר $x=2$ .


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x)=-\frac{3}{\sqrt{x}}$.

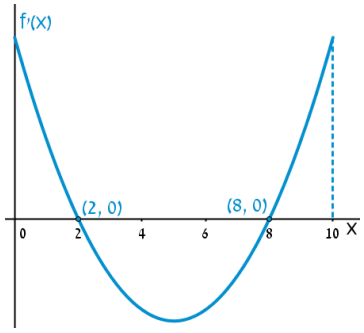



העבירו שני ישרים $x=k$ ו- $x=t$, אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.
ידוע כי $AB=2CD$.

א. הראו כי $k=4t$.

ב. השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות והישרים $x=k$ ו- $x=t$, הוא $S=12$.
מצאו את $t$.

**11)** הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0\le x\le 10$.

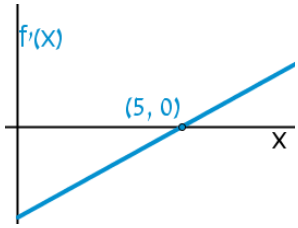



בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.

א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,
אם $f(2)=6$, $f(0)=-4$, $f(5)=0$
וכן $f(10)>0$.

ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י **גרף הנגזרת והצירים**
ברביע הראשון, עד לנקודה שבה $x=2$.

**12)** להלן גרף הפונקציה $f'(x)$.




הגרף המתואר חותך את ציר ה-$x$
בנקודה אחת בלבד והיא $(5,0)$.

א. מצאו את התחומים שבהם $f'(x)$ חיובית
ואת התחומים שבהם היא שלילית.

ב. קבעו מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

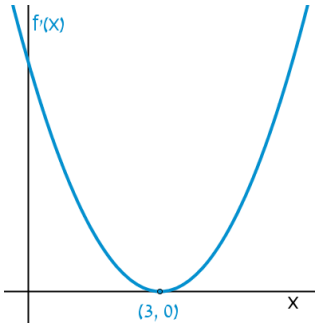
ג. כתבו את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי שיעור ה-$y$ שלה הוא $-2$.

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי גרף הפונקציה
חותך את ציר ה-$y$ כאשר $y=8$.

ה. חשבו את השטח הכלוא בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$ והצירים.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**13)** הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$ מתוארת באיור.

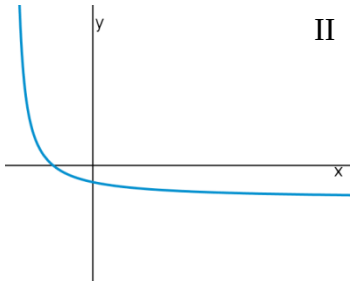


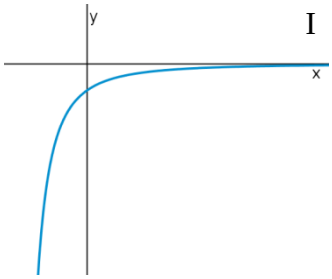

א. האם ל-$f(x)$ יש נקודות קיצון? נמקו.

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי $f(3)=4$ וכי היא חותכת את ציר ה-$y$ בנקודה שבה $y=-5$.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$ והצירים ברביע הראשון.

**14)** באיורים שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$f'(x)$:

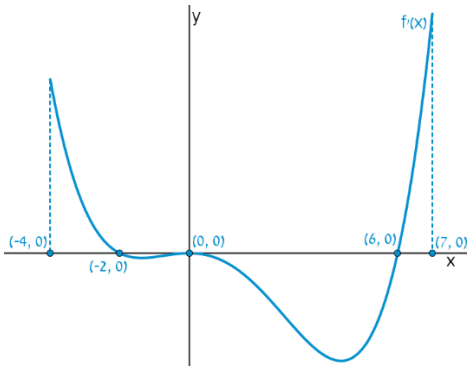



א. זהו איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמקו.

ב. נתון כי $f(10)=-3$ וכי $f(x)$ חותכת את ציר ה-$y$ בנקודה שבה $y=-2$.
מהו השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$, הצירים והישר $x=10$?

**15)** נתון גרף הנגזרת $f'(x)$:




א. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$, בתחום $-4\le x\le 7$,
לפי הנתונים $f(0)=-2$, $f(-2)=7.6$ ו-$f(6)=-606.8$.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** וציר ה-$x$ ברביע השלישי.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** וציר ה-$x$ ברביע הרביעי.

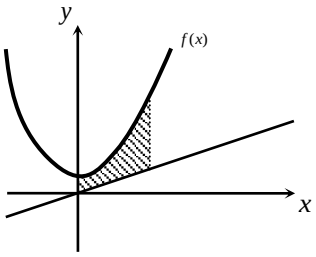

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## פונקציות מעריכיות

### אינטגרלים מיידים של פונקציות מעריכיות

| אינטגרלים של פונקציות מורכבות | אינטגרלים יסודיים |
|---|---|
| $\int a^{mx+n}dx=\frac{a^{mx+n}}{m\cdot\ln a}+c$ | $\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+c$ |
| $\int e^{mx+n}dx=\frac{e^{mx+n}}{m}+c$ | $\int e^{x}dx=e^{x}+c$ |

**16)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{e^x+e^{ax}}{4}$.




ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה: $\left(1,\frac{e^3+1}{4e^2}\right)$.

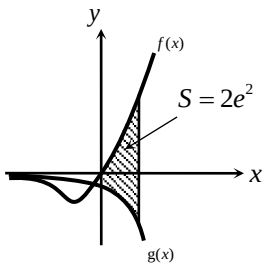
א. מצאו את $a$ וכתוב את הפונקציה.

ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$, והישר $y=0.1x$.
חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר ה-$y$ והאנך $x=2$.

**17)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. גזרו את הפונקציה $y=e^x(x-1)$.

ב. באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $g(x)=-e^x$, $f(x)=xe^x$.




העבירו ישר $x=a$ $(a>0)$, החותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח המתואר הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה-$y$ והישר.
ידוע כי שטח זה שווה ל-$2e^2$.
מצאו את $a$.

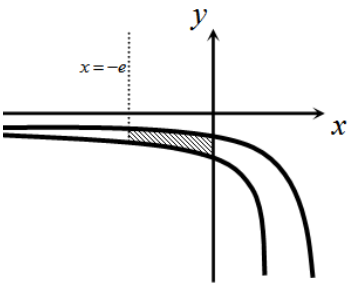

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## פונקציות לוגריתמיות

### אינטגרלים מיידים של פונקציות לוגריתמיות

| אינטגרל של פונקציה מורכבת | אינטגרל יסודי |
|---|---|
| $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + c$ | $\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + c$ |

**18)** באיור שלהלן נתונות הפונקציות $f(x)=\frac{a}{x-1}$ ו- $g(x)=\frac{a-1}{x-2}$, בתחום $x<0$.

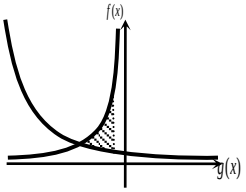



ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x=3$.

א. מצאו את $a$ וכתבו את שתי הפונקציות.

ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- $y$ והישר $x=-e$.

**19)** נתונות הפונקציות $f(x)=-\frac{4}{x}$ ו- $g(x)=\frac{k}{2x+5}$.




גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה- $y$ בנקודה $y=0.4$.

א. מצאו את הפונקציה $g(x)$.

ב. מצאו את נקודת החיתוך של שני הגרפים.

ג. חשבו את השטח המוגבל על ידי שני הגרפים והישר $x=-1$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

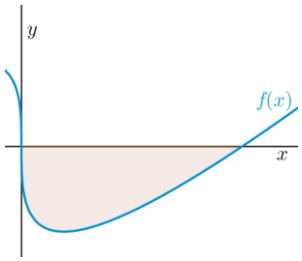
## פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

### אינטגרלים מיידים של פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

| אינטגרל של פונקציה מורכבת | אינטגרל יסודי |
|---|---|
| $\int \sqrt[n]{(ax+b)^m}\,dx=\int (ax+b)^{\frac{m}{n}}\,dx=\frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a\cdot\left(\frac{m}{n}+1\right)}+c$ | $\int \sqrt[n]{x^m}\,dx=\int x^{\frac{m}{n}}\,dx=\frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1}+c$ |

תנאי לקיום האינטגרציה: $\frac{m}{n}\neq -1$.

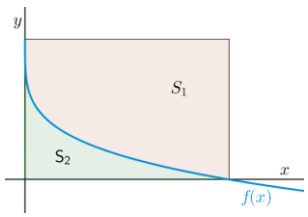
**20)** באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה $f(x)=x-4\sqrt[3]{x}$.




א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ב. חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.

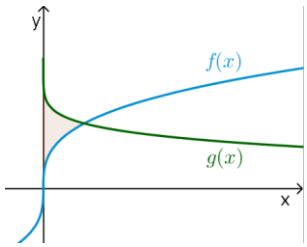
**21)** באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=2-\sqrt[4]{x}$.




העבירו אנכים לצירים מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים כך שנוצר מלבן.
מסמנים את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים ב-$S_1$ ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב-$S_2$.

מצאו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.

**22)** באיור שלהלן נתונים הגרפים של הפונקציות $g(x)=2-\sqrt[6]{x}$ ו-$f(x)=\sqrt[3]{x}$.




א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה-$y$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $57\frac{1}{6}$ יח"ש. **2)** $21\frac{1}{3}$ יח"ש. **3)** $\frac{2}{3}$ יח"ש.

**4)** א. $y=-4x+4$ ב. $(1,0)$ ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.

**5)** א. $k=10$ ב. $(1,9)$ ג. $81\frac{1}{3}$ יח"ש.

**6)** א. $f(x)=-x^2+3x+10$ ב. $27\frac{1}{6}$ יח"ש.

**7)** א. $g(x)=(x-4)^2$ ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.

**8)** א. $f(x)=x^2-6x$ ב. $(0,0)$ ג. $85\frac{1}{3}$ יח"ש.

**9)** א. $a=36$ , $f(x)=\frac{36-x^2}{x^2}$ ב. 8 יח"ש.

**10)** א. הוכחה ב. $t=1$

**11)** ב. 10 יח"ש.

**12)** א. חיובית: $x>5$ , שלילית: $x<5$ . ב. עולה: $x>5$ , יורדת: $x<5$

ג. $\min(5,-2)$ ד. הוכחה ה. 10 יח"ש.

**13)** א. לא. הנקודה $(3,0)$ היא פיתול מכיוון שהפונקציה עולה לפניה ואחריה.

ב. הוכחה ג. 9 יח"ש.

**14)** א. $f'(x)$: I , $f(x)$: II ב. 1 יח"ש.

**15)** א. הוכחה ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.

**16)** א. $a=-2$ , $f(x)=\frac{e^x+e^{-2x}}{4}$ ב. 1.52

**17)** א. $y'=xe^x$ ב. $a=2$

**18)** א. $a=2$ , $g(x)=\frac{1}{x-2}$ , $f(x)=\frac{2}{x-1}$ ב. $S=1.76$ יח"ש.

**19)** א. $g(x)=\frac{2}{2x+5}$ ב. $(-2,2)$ ג. $S=\ln 5\frac{1}{3}\approx 1.674$ יח"ש.

**20)** א. $(0,0)$, $(8,0)$ ב. $S=16$ יח"ש.

**21)** $\frac{S_1}{S_2}=4$

**22)** א. $(1,1)$ ב. $S=\frac{11}{28}$ יח"ש.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב שטחים ביחס לציר ה-y

## שאלות

**1)** חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $y^2=-x$ והישר $y=x+6$.

**2)** חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $x=y^2+2$ והישר $y=x-8$.

## תשובות סופיות

**1)** $20\frac{5}{6}$

**2)** $20\frac{5}{6}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אורך קשת

## שאלות

חשבו את אורך העקום הנתון:

1) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\frac{x^4}{8}+\frac{1}{4x^2}$

2) $(1\le x\le 8)\ ,\ y=x^{2/3}$

3) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\frac{x^5}{15}+\frac{1}{4x^3}$

4) $(0\le x\le 3)\ ,\ y=\frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}$

5) $(0\le x\le 3)\ ,\ y=\frac{1}{3}\sqrt{x}\left(3-x\right)$

6) $(1\le x\le 8)\ ,x^{2/3}+y^{2/3}=4$

7) $(0\le y\le 4)\ ,\ x=3y^{3/2}-1$

8) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\ln x$

## תשובות סופיות

1) $\frac{33}{16}$

2) $\frac{1}{9}\left\{\frac{40^{1.5}}{3}-\frac{13^{1.5}}{3}\right\}$

3) $\frac{1097}{480}$

4) 21

5) $\frac{1}{2}\left\{2\sqrt{3}+\frac{2}{3}3^{1.5}\right\}$

6) 9

7) $\frac{8}{243}\left\{82^{1.5}-1\right\}$

8) $\left\{\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right|\right\}-\left\{\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|\right\}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 15 - שימושי האינטגרל המסוים - נפח גוף סיבוב

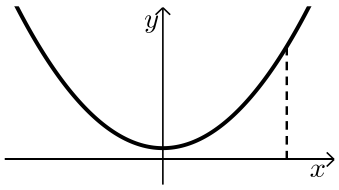
### תוכן העניינים

1. חישוב נפח גוף-סיבוב ..... 111

# חישוב נפח גוף-סיבוב

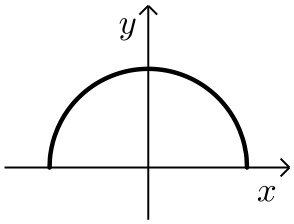
## שאלות

**1)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^2+1$.




השטח הכלוא בין הפונקציה, הישר $x=3$ והצירים מסתובב סביב ציר ה-$x$.
חשבו את נפח גוף הסיבוב המתקבל באופן זה.

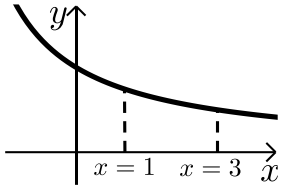
**2)** באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{4-x^2}$.




א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.

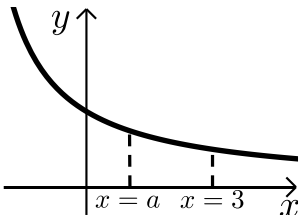
ב. חשבו את נפח הגוף שנוצר ע"י סיבוב גרף הפונקציה סביב ציר ה-$x$.

**3)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{12}{x+3}$ בתחום $x\geq 0$.



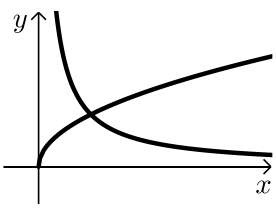

גרף הפונקציה מסתובב סביב ציר ה-$x$.
נסמן את נפח הגוף שנוצר בתחום $0\leq x\leq 1$, ב-$V_1$ ואת נפח הגוף שנוצר בתחום $1\leq x\leq 3$, ב-$V_2$.
חשבו את היחס $\frac{V_1}{V_2}$.

**4)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{12}{x+3}$ בתחום $x\geq 0$.




גרף הפונקציה מסתובב סביב ציר ה-$x$.
נסמן את נפח הגוף הנוצר בתחום $0\leq x\leq a$, ב-$V_1$ ואת נפח הגוף שנוצר בתחום $a\leq x\leq 3$, ב-$V_2$.
מתקיים $V_1=V_2$.
מצאו את $a$.

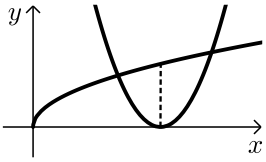
**5)** בשרטוט הבא נתונות הפונקציות ברביע הראשון $f(x)=\sqrt{x}$ ו-$g(x)=\frac{1}{x}$.




מצאו את נפח גוף הסיבוב שנוצר, כאשר השטח הכלוא בין הפונקציות והישר $x=2$ מסתובב סביב ציר ה-$x$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

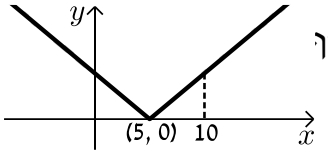
**6)** נתונים הגרפים של הפונקציות $f(x)=\sqrt{x}$ ו- $g(x)=(2x-3)^2$.




א. הראו כי הפונקציות נפגשות בנקודה שבה $x=1$.

ב. השטח הכלוא בין הפונקציות ונמצאו משמאל לאנך לציר ה- $x$, היוצא מקודקוד הפרבולה $g(x)$ מסתובב סביב ציר ה- $x$.
מצאו את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

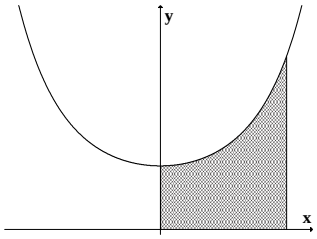
**7)** להלן גרף הפונקציה $f(x)=|x-5|$.



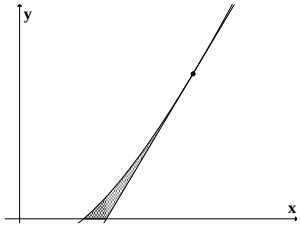

א. חשבו את נפח הגוף שנוצר כאשר השטח בין גרף הפונקציה בתחום $0\le x\le 10$ ובין ציר ה- $x$ מסתובב סביב ציר ה- $x$.

ב. האם תוצאת החישוב של הסעיף הקודם תשתנה, אם במקום $f(x)=|x-5|$ נשתמש בפונקציה $g(x)=x-5$? נמקו.

**8)** השטח, הכלוא בין גרף הפונקציה $y=e^{x^2}$ והישרים $x=1$, $x=0$, $y=0$, מסתובב סביב ציר ה- $y$.
מהו נפח הגוף המתקבל?




**9)** השטח, הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)=x\ln x$, המשיק לגרף בנקודה $(e,e)$ וציר ה- $x$, מסתובב סביב ציר ה- $x$.
מהו נפח הגוף המתקבל?





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $69\frac{3}{5}\pi$ יח"נ $= V$.

**2)** א. $(-2,0)$ , $(2,0)$. ב. $10\frac{2}{3}\pi$ יח"נ $= V$.

**3)** $\frac{V_1}{V_2}=1$

**4)** $a=1$

**5)** $\pi$ יח"נ $= V$.

**6)** $\frac{21}{40}\pi$ יח"נ $= V$.

**7)** א. $83\frac{1}{3}\pi$ יח"נ $= V$ ב. לא.

**8)** $\pi(e-1)$

**9)** $\frac{e^3-4}{54}\pi$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 16 - פונקציות של שני משתנים

### תוכן העניינים

1. מבוא לפונקציה של שני משתנים ..... 114
2. קווי גובה לפונקציה של שני משתנים ..... 116
3. משטחים מפורסמים ..... 118
4. נספח - משטחים ממעלה שנייה ..... 120

# מבוא לפונקציה של שני משתנים

## שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. מצאו את תחום ההגדרה $D$ של הפונקציה.

ב. שרטטו סקיצה של הקבוצה $D$.

**1)** $f(x,y)=\sqrt{5-x^2-y^2}+\ln(4y-x^2)$

**2)** $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

**3)** $f(x,y)=\sqrt{-x^2+y^2+1}+\frac{x+y}{x-y}$

**4)** $g(x,y)=\sqrt{x+4y}+\sqrt{x-4y}$

**5)** $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x+4y}}+\frac{1}{\sqrt{x-4y}}$

**6)** $h(x,y)=\sqrt{x-\sqrt{y+4}}$

**7)** $f(x,y)=e^{xy}\sqrt{\ln\frac{4}{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2-4}$

**8)** $z(x,y)=\frac{4}{\sqrt{1-|x|-|y|}}$

**9)** $z(x,y)=\ln\left(\frac{x-4y}{x+4y}\right)$

**10)** $f(x,y)=\ln\left[x\ln(y-4x)\right]$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** $u(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x+4}}+\frac{1}{\sqrt{y-1}}+\frac{1}{\sqrt{z}}$ (ענו על סעיף א בלבד)

## תשובות סופיות

**1)** $D=\left\{(x,y)\middle|\ \frac{1}{4}x^2\le y\le\sqrt{5-x^2}\right\}$

**2)** $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\ge 4\ ,\ x>0\right\}$

**3)** $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2-y^2\le 1\ ,\ y\ne x\right\}$

**4)** $D=\left\{(x,y)\middle|\ -\frac{1}{4}x\le y\le\frac{1}{4}x\ \right\}$

**5)** $D=\left\{(x,y)\middle|\ -\frac{1}{4}x< y<\frac{1}{4}x\ \right\}$

**6)** $D=\left\{(x,y)\middle|\ -4\le y\le x^2-4\ ,\ x\ge 0\ \right\}$

**7)** $D=\left\{(x,y)\middle|\ x^2+y^2=4\ \right\}$

**8)** $D=\left\{(x,y)\,|\,|x|+|y|<1\right\}$

**9)** $D=\left\{(x,y)\middle|\frac{1}{4}x<y<-\frac{1}{4}x\ or\ -\frac{1}{4}x<y<\frac{1}{4}x\right\}$

**10)** $D=\left\{(x,y)\,|\,[x<0\,\text{and}\,4x<y<4x+1]\ \text{or}\ [x>0\ \text{and}\ y>4x+1]\right\}$

**11)** $D=\left\{(x,y,z)\,|\,x>-4,y>1,z>0\right\}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# קווי גובה לפונקציה של שני משתנים

## שאלות

בשאלות **1-6**, מצאו תחום הגדרה, ושרטטו אותו ואת מפת קווי הגובה/רמה.

**1)** $f(x,y)=\frac{y}{x}$

**2)** $f(x,y)=\ln x+\ln y$

**3)** $f(x,y)=x^2+y^2$

**4)** $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

**5)** $f(x,y)=\ln(x^2-y)$

**6)** $f(x,y)=x\sqrt{y}$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **7-10** שרטטו מפת קווי גובה:

**7)** $f(x,y)=(x-1)^2+(y+3)^2$

**8)** $f(x,y)=e^{x-y}$

**9)** $f(x,y)=2\ln x+\ln y$

**10)** $f(x,y)=\min\{3x,y\}$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **11-13**, שרטטו את קו הגובה $k$:

**11)** $f(x,y)=(x-y)^2 \quad (k=0,4)$

**12)** $f(x,y)=\min\left\{y-x^2,x+y\right\} \quad (k=0,2)$

**13)** $f(x,y)=\begin{cases}x^2+3x-y-3 & x^2\geq y\\ -x^2+3x+y-3 & x^2<y\end{cases} \quad (k=1)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**14)** נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}x^2-y & x\le 1\\ 2x+y & x>1\end{cases}$.

א. שרטטו את קו הגובה $f(x,y)=0$.

ב. לאילו ערכי $C$ קו הגובה $f(x,y)=C$ הוא קו רציף?
ציירו את קו הגובה במקרה זה.

**הערות**

* בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.
** קווי גובה = קווי רמה = עקומות אדישות = עקומות שוות ערך.

## תשובות סופיות

**1)** $x\neq 0$, המישור ללא ציר ה- $y$.

**2)** $x>0, y>0$, הרביע הראשון ללא הצירים.

**3)** כל המישור.

**4)** $x^2+y^2\le 1$, עיגול היחידה.

**5)** $y<x^2$

**6)** $y\ge 0$, חצי המישור העליון.

לפתרונות מלאים ושרטוטים של שאר השאלות, היכנסו לאתר GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# משטחים מפורסמים

## שאלות

זהו ושרטטו את המשטחים בשאלות **1-3**:

**1)** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$

**2)** $z=5x^2+1.25y^2$

**3)** $20x^2+45y^2=180+36z^2$

**4)** זהו ושרטטו את המשטחים הבאים:

א. $z=4x^2+y^2+1$

ב. $z=3-x^2-y^2$

**5)** זהו כל אחד מהמשטחים הבאים:

א. $25x^2+100y^2+4z^2=100$

ב. $25x^2+4y^2-50x-16y-100z+41=0$

ג. $x^2+4y^2-4z^2+80z-404=0$

**6)** מצאו את החיתוך בין המשטח $x^2+y^2+z^2=169$ לבין המשטח $z=12$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

**7)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. זהו את המשטח $2x^2+2y^2+2z^2-16x-4y+40z+206=0$.

ב. מצאו את נקודות החיתוך של המשטח הנ"ל עם הישר
$\frac{x-5}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+14}{2}$.

**8)** מצאו את החיתוך בין שני המשטחים $x^2+y^2+(z-10)^2=24$,
ו- $x^2+y^2+z^2=64$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**9)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. זהו את המשטח $36z^2+4x^2-9y^2=36$ ושרטטו אותו.

ב. רשמו הצגה פרמטרית של שני ישרים שאינם נמצאים באותו מישור, ושנמצאים כולם על המשטח מסעיף א'.

- **להלן נספח עם סיכום של כל המשטחים הנפוצים.**

## תשובות סופיות

**1)** אליפסואיד.

**2)** פרבולואיד אליפטי הנפתח כלפי מעלה.

**3)** היפרבולואיד חד יריעתי.

**4)** א. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,1)$ ונפתח כלפי מעלה.

ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,3)$ ונפתח כלפי מטה.

**5)** א. אליפסואיד.

ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(1,2,0)$ ונפתח כלפי מעלה.

ג. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו בנקודה $(0,0,10)$.

**6)** החיתוך הוא מעגל $x^2+y^2=25$ שמרכזו בנקודה $(0,0,12)$.

**7)** א. ספירה שמרכזה $(4,1,-10)$ ורדיוסה $\sqrt{14}$.

נקודות החיתוך הן $A(7,0,-12),\ B(\frac{59}{5},-\frac{2}{9},-\frac{112}{9})$.

**8)** החיתוך הוא המעגל $x^2+y^2=15$ שמרכזו בנקודה $(0,0,7)$.

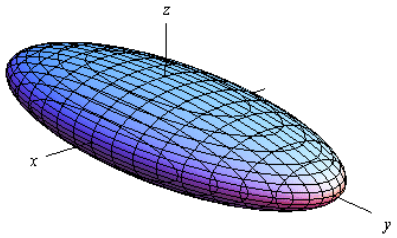
**9)** א. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו על ציר ה-$y$.

ב. $\ell_2:\ (x,y,z)=(3,2t,t)\quad \ell_1:(x,y,z)=(3t,2t,1)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# נספח – משטחים ממעלה שנייה

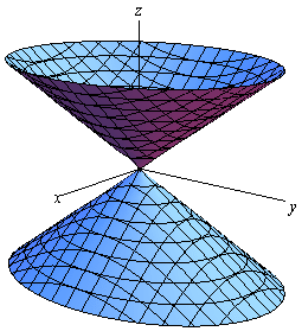
## אליפסואיד




משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a=b=c$, נקבל **כדור** עם רדיוס $a$ והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

## חרוט אליפטי

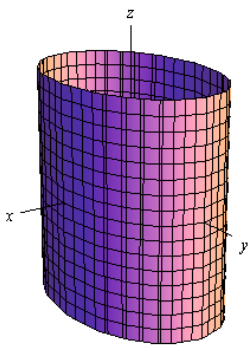



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

תיאור: החתך במישור $xy$ הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$ הם אליפסות. החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות.

* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.

## גליל אליפטי



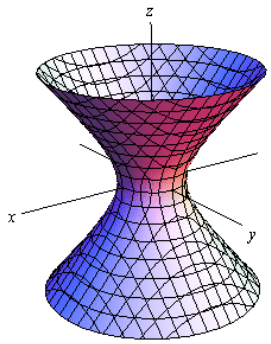

משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

תיאור: החתך במישור $xy$ הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$. החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא $x^2+y^2=r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים.

* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## היפרבולואיד חד-יריעתי

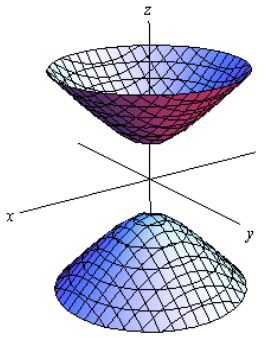



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

תיאור: החתך במישור $xy$ הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$. החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים

## היפרבולואיד דו-יריעתי

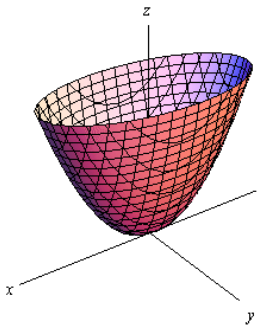



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

תיאור: למשטח זה אין חתך במישור $xy$; החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$, החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים

## פרבולואיד אליפטי




משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

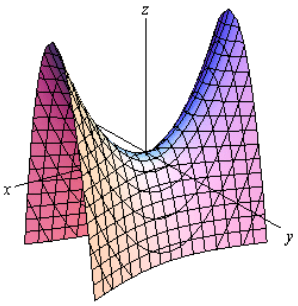
תיאור: החתך במישור $xy$ הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$ ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## פרבולואיד היפרבולי




משוואה: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

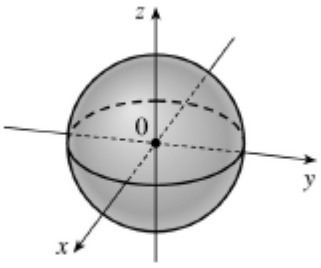
תיאור: החתך במישור $xy$ הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור $xy$ הם היפרבולות; אלו שמעל למישור $xy$ נפתחות בכיוון ציר ה- $y$ ואלו שמתחת למישור $xy$ נפתחות בכיוון ציר ה- $x$.

החתכים במישור $xz$ ו- $yz$ הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

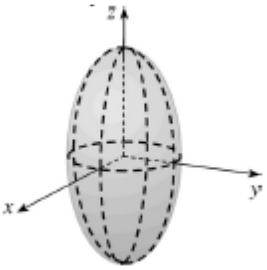
* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$

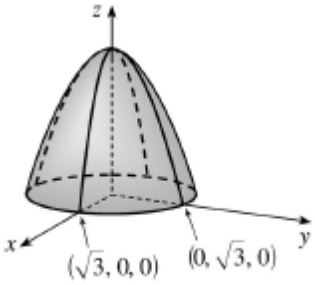
## דוגמאות שונות



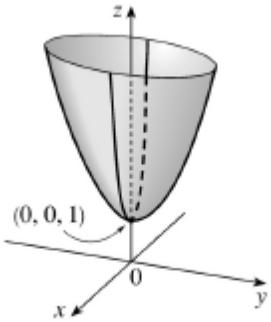

$x^2+y^2+z^2=1$



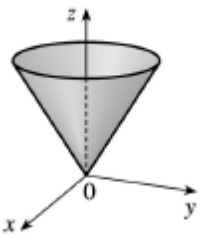

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$



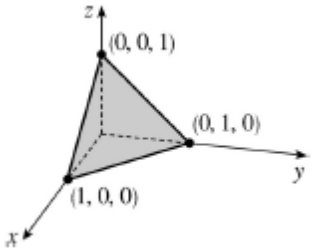

$z=3-x^2-y^2$




$z=4x^2+y^2+1$




$z=\sqrt{x^2+y^2}$




$x+y+z=1$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# נוסחאות – גבולות

| | $x \to -\infty$ | $x \to 0$ | $x \to \infty$ |
|---|---|---|---|
| $y = \frac{1}{x}$ | $\frac{1}{-\infty} = 0$ | $\frac{1}{0^+} = \infty,\ \frac{1}{0^-} = -\infty$ | $\frac{1}{\infty} = 0$ |
| $y = e^x$ | $e^{-\infty} = 0$ | $e^0 = 1$ | $e^{\infty} = \infty$ |
| $y = \ln x$ | $---$ | $\ln(0^+) = -\infty$ | $\ln(\infty) = \infty$ |
| $y = a^x, a > 1$ | $a^{-\infty} = 0$ | $a^0 = 1$ | $a^{\infty} = \infty$ |
| $y = a^x, 0 < a < 1$ | $a^{-\infty} = \infty$ | $a^0 = 1$ | $a^{\infty} = 0$ |
| $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ | $e$ | (from right) $1$ | $e$ |
| $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ | $---$ | $e$ | $1$ |
| $y = \sqrt{x}$ | $---$ | $\sqrt{0^+} = 0$ | $\sqrt{\infty} = \infty$ |
| $y = \sqrt[3]{x}$ | $-\infty$ | $\sqrt[3]{0} = 0$ | $\sqrt[3]{\infty} = \infty$ |

Defined Limits:

$\infty \cdot \infty = \infty$ , $\infty(-\infty) = -\infty$ , $\infty + \infty = \infty$ , $\infty \pm a = \infty$ , $\infty \cdot (\pm a) = \pm\infty$ , $\infty / (\pm a) = \pm\infty$

Undefined Limits :

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 17 - נגזרות חלקיות

### תוכן העניינים

1. נגזרות חלקיות מסדר ראשון ..... 124
2. נגזרות חלקיות מסדר שני ..... 126

# נגזרות חלקיות מסדר ראשון

## שאלות

בשאלות **1-6** חשבו את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה הנתונה:

**1)** $f(x,y)=4x^3-3x^2y^2+2x+3y$

**2)** $f(x,y)=x^5\ln y$

**3)** $f(x,y)=\dfrac{x^2y^4\left(\sqrt{y}+5\ln y\right)}{y^2+5y+y^y}$ (רק $f_x$).

**4)** $f(x,y)=\left(x^2+y^3\right)\cdot(2x+3y)$

**5)** $f(x,y)=\dfrac{x^2-3y}{x+y^2}$

**6)** $f(x,y,z)=xy^2z^3$

**7)** נתון: $z(x,y)=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$.

הוכיחו כי $x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2}$.

**8)** נתון: $f(x,y,z)=e^x\left(y^2-\dfrac{1}{z}\right)$.

חשבו: $\dfrac{\partial f}{\partial z}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right)$.

### הערת סימון

$$f=f(x,y)\quad\Rightarrow\quad f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=f_1\ ;\quad f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=f_2$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2$ $\qquad f_y = -6x^2y + 3$

**2)** $f_x = 5x^4 \ln y$ $\qquad f_y = \dfrac{x^5}{y}$

**3)** $f_x = 2x\dfrac{y^4\left(\sqrt{y} + 5\ln y\right)}{y^2 + 5y + y^y}$

**4)** $f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3$ $\qquad f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2$

**5)** $f_x = \dfrac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{\left(x + y^2\right)^2}$ $\qquad f_y = \dfrac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{\left(x + y^2\right)^2}$

**6)** $f_x = y^2z^3$ $\qquad f_y = 2xyz^3$ $\qquad f_z = 3xy^2z^2$

**7)** שאלת הוכחה.

**8)** $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right) = -1,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right) = -2,\ \dfrac{\partial f}{\partial z}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right) = 4$

### הערת סימון

$$f = f(x,y) \Rightarrow \begin{array}{ll} f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = f_1 & f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\ f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} & f_{yy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\ f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} & f_{yx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21} \end{array}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# נגזרות חלקיות מסדר שני

## שאלות

בשאלות **1-13** חשבו את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני של הפונקציה הנתונה:

**1)** $f(x,y)=4x^2-x^2y^2+4x+10y$

**2)** $f(x,y)=x^4\ln y$

**3)** $f(x,y)=x^3+y^3-6xy$

**4)** $f(x,y)=x^3+y^3+3(1-y)(x+y)$

**5)** $f(x,y)=xy(x-y)$

**6)** $f(x,y)=(x-9)(2y-6)(4x-3y+12)$

**7)** $f(x,y)=e^{xy}(x+y)$

**8)** $f(x,y)=e^{x+y}\left(x^2+y^2\right)$

**9)** $f(x,y)=\left(x^2+2y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$

**10)** $f(x,y)=\ln\left(1+x^2+y^2\right)$

**11)** $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$

**12)** $f(x,y)=\ln\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)$

**13)** $f(x,y,z)=xyz$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**14)** חשבו $f'_{xy}(1,1)$ , עבור $f(x,y)=\ln\left(xy-x^2-y^2\right)$ .

**15)** חשבו $f'_{xy}(1,1)$ , עבור $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$ .

**16)** חשבו $f'_{xy}(1,1)$ , עבור $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ .

**17)** נתון: $f(x,y)=\dfrac{x^2}{\ln y+x}$ .

חשבו: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,e)$ , $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,e)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,e)$.

**הערת סימון**

$$f=f(x,y)\quad\Rightarrow\quad f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=f_1\qquad f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=f_2$$
$$f_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{11}\qquad f_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{22}$$
$$f_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{12}\qquad f_{yx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{21}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1** $f_x=8x-2xy^2+4$ $f_{xx}=8-2y^2$ $f_y=-2x^2y+10$

$f_{yy}=-2x^2$ $f_{xy}=-4xy$ $f_{yx}=-4xy$

**2** $f_x=4x^3\ln y$ $f_{xx}=12x^2\ln y$ $f_y=\frac{x^4}{y}$

$f_{yy}=-\frac{x^4}{y^2}$ $f_{xy}=\frac{4x^3}{y}$ $f_{yx}=\frac{4x^3}{y}$

**3** $f_x=3x^2-6y$ $f_{xx}=6x$ $f_y=3y^2-6x$

$f_{yy}=6y$ $f_{xy}=6$ $f_{yx}=-6$

**4** $f_x=3x^2+3-3y$ $f_{xx}=6x$ $f_y=3y^2+3-3x-6y$

$f_{yy}=6y-6$ $f_{xy}=-3$

**5** $f_x=2xy-y^2$ $f_{xx}=2y$ $f_y=x^2-2xy$

$f_{yy}=-2x$ $f_{xy}=f_{yx}=2x-2y$

**6** $f_x=2\left[8xy-3y^2\cdot1-24x-0+57y\cdot1+72+0+0\right]$

$f_y=2\left[4x^2\cdot1-3x\cdot2y-0-54y+57x\cdot1+0+27+0\right]$

$f_{xx}=2\left[8y-0-24\right]$ , $f_{yy}=2\left[0-6x\cdot1-54+0+0\right]$

$f_{xy}=2\left[8x\cdot1-6y-0+57+0\right]$

**7** $f_x=e^{xy}\left(xy+y^2+1\right)$ $f_y=e^{xy}\left(x^2+xy+1\right)$

$f_{xx}=e^{xy}\cdot y\left(xy+y^2+1\right)+\left(y+0+0\right)\cdot e^{xy}$

$f_{yy}=e^{xy}\cdot x\left(x^2+xy+1\right)+\left(0+x\right)\cdot e^{xy}$

$f_{xy}=e^{xy}\cdot x\left(xy+y^2+1\right)+\left(x+2y\right)\cdot e^{xy}$

**8** $f_x=e^{x+y}\left(x^2+y^2+2x\right)$ $f_y=e^{x+y}\left(x^2+y^2+2y\right)$

$f_{xx}=e^{x+y}\left(x^2+y^2+2x\right)+\left(2x+2\right)e^{x+y}$

$f_{yy}=e^{x+y}\left(x^2+y^2+2y\right)+\left(2y+2\right)e^{x+y}$

$f_{xy}=e^{x+y}\left(x^2+y^2+2x\right)+2y\cdot e^{x+y}$

**9** $f_x=e^{-x^2-y^2}\left(2x-2x^3-4xy^2\right)$ $f_y=e^{-x^2-y^2}\left(4y-2x^2y-4y^3\right)$

$f_{xx}=e^{-x^2-y^2}\left(-2x\right)\left(2x-2x^3-4xy^2\right)+\left(2-6x^2-4y^2\right)e^{-x^2-y^2}$

$f_{yy}=e^{-x^2-y^2}\left(-2y\right)\left(4y-2x^2y-4y^3\right)+\left(4-2x^2-12y^2\right)e^{-x^2-y^2}$

$f_{xy}=e^{-x^2-y^2}\left(-2y\right)\left(2x-2x^3-4xy^2\right)+\left(-4x\cdot2y\right)e^{-x^2-y^2}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**(10)**

$$f_x=\frac{2x}{1+x^2+y^2}$$

$$f_y=\frac{2y}{1+x^2+y^2}$$

$$f_{xy}=\frac{2y\cdot 2x}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}$$

$$f_{yy}=\frac{2\cdot\left(1+x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(1+x^2+y^2\right)}$$

$$f_{xx}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$f_{xy}=\frac{0\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

**(11)**

$$f_x=\frac{2x}{x^2+y^2}\qquad f_y=\frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$f_{yy}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$f_{xx}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}$$

$$f_{xy}=\frac{0\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}$$

**(12)**

$$f_x=\frac{2x}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{3}\qquad f_y=\frac{2y}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{3}$$

$$f_{yy}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}$$

**(13)**

$$f_x=yz\qquad f_{xx}=0\qquad f_{xy}=z\qquad f_{xz}=y$$

$$f_{yx}=z\qquad f_{yy}=0\qquad f_{yz}=x\qquad f_y=xz$$

$$f_{zy}=x\qquad f_{zz}=0\qquad f_z=xy\qquad f_{zx}=y$$

**(14)** $-2$

**(15)** $-1$

**(16)** $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

**(17)** $\frac{\frac{4}{e^2}\left(1+\frac{1}{e}\right)}{16}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות במותיות

## פרק 18 - קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

### תוכן העניינים

1. קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים ..... 130

# קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

## שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **1-7**,
מצאו נקודות קריטיות וסווגו אותן למקסימום, מינימום או אוכף:

**1)** $f(x,y)=8x^3+12xy+3y^2-18x$

**2)** $f(x,y)=x^3+y^3-3x-12y+20$

**3)** $f(x,y)=x^3+y^3-3xy+4$

**4)** $f(x,y)=3x-x^3-2y^2+y^4$

**5)** $f(x,y)=e^{4y-x^2-y^2}$

**6)** $f(x,y)=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$

**7)** $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2-8x+y}{xy}$

**8)** נתון משטח $z=x^3+y^3-3xy+4$.
מצאו את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

**9)** מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשבו את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

**10)** יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין.
עלות הייצור של מחשבון בארץ היא 6$ ועלות ייצור מחשבון בסין היא 8$.
מנהל השיווק אומד את הביקוש $Q_1$ למחשבון בארץ, ואת הביקוש $Q_2$ למחשבון בסין, על ידי: $Q_2=144+16P_1-24P_2$, $Q_1=116-30P_1+20P_2$.
כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבונים, $P_1$ ו- $P_2$,
על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** נתונה הפונקציה $f(x,y)=x^2+y^2+axy$ .

א. הוכיחו שהנקודה $(0,0)$, היא נקודה קריטית.

ב. בעזרת מבחן הנגזרת השנייה, קבעו עבור אילו ערכים של $a$, הנקודה מסעיף א' היא מקסימום, מינימום, אוכף, או שלא ניתן לדעת.

## תשובות סופיות

**1)** $(-0.5,1)$ אוכף ; $(1.5,-3)$ מינימום.

**2)** $(1,\ 2)$ מינימום ; $(-1,-2)$ מקסימום ; $(-1,\ 2)$ , $(1,-2)$ אוכף.

**3)** $(0,0)$ אוכף ; $(1,1)$ מינימום.

**4)** $(-1,\ -1)(-1,\ 1)$ מינימום ; $(1,\ 0)$ מקסימום ; $(1,\ -1)$ $(-1,\ 0),(1,1),$ אוכף.

**5)** $(0,\ 2)$ מקסימום.

**6)** $(4,\ 4)$ מקסימום.

**7)** $(-0.5,\ 4)$ מקסימום.

**8)** $z=4,\quad z=3$

**9)** רוחב 4 ס"מ , אורך 4 ס"מ , גובה 2 ס"מ.

**10)** $P_2=12\$$ $P_1=10\$,$ רווח מקסימלי $288\$$ .

**11)** א. שאלת הוכחה. ב. עבור $a=-2,\ a=2$ , לא ניתן לדעת ;
$a<-2,\ a>2$ אוכף ; $-2<a<2$ מינימום.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 19 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

### תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז') ..... 132

# קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

## שאלות

מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציות בשאלות **1-4**, בכפוף לאילוץ הנתון:

**1)** $f(x,y)=x^2+y^2; \qquad 2x^2+3xy=1-2y^2$

**2)** $f(x,y)=x^2-y^2; \qquad x^2+y^2=1$

**3)** $f(x,y)=4x+6y; \qquad x^2+y^2=13$

**4)** $f(x,y)=x^2y; \qquad x^2+2y^2=6$

**5)** נתונה בעיית הקיצון $\max\{xy\} \quad s.t. \quad x+3y=12$.

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

**6)** נתונה בעיית הקיצון $\max\{2x+y\} \quad s.t. \quad \sqrt{x}+\sqrt{y}=9$, כאשר $x,y\geq 0$.

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

**7)** מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר $x+3y=12$,
מצאו את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

**8)** מבין כל הנקודות שעל העקומה $2x^2+3xy=1-2y^2$, מצאו את הנקודות שמרחקיהן מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מקסימלי.

**9)** מוישל'ה קונה בשוק $x$ ק"ג מלפפונים ו- $y$ ק"ג עגבניות.
התועלת מצריכת הסל, $(x,y)$, נתונה על ידי $u(x,y)=\ln x+\ln y$.
מחיר ק"ג מלפפונים הוא 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.
מוישל'ה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$,
והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית.
נסחו ופתרו את בעיית מוישל'ה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** דני קונה בשוק $x$ ק"ג מלפפונים ו- $y$ ק"ג עגבניות.
התועלת מצריכת הסל $(x,y)$ נתונה על ידי $u(x,y)=xy$.
מחיר ק"ג מלפפונים הוא 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.
לדני תקציב של 12 ש"ח.
נסחו ופתרו את בעיית דני.

**11)** עקומת התמורה בין מנגו, $(x)$, ואננס, $(y)$, היא $x^2+y^2=13$.
לדני תועלת $f(x,y)=4x+6y$.
דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) = $(x,y)$, על עקומת התמורה,
המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס.
נסחו ופתרו את הבעיה.

**12)** ליצרן פונקציית ייצור $Q=\sqrt{k}+\sqrt{L}$.
המחירים ליחידת $K$ ו- $L$ הם $P_K=2,\ P_L=1$.
היצרן נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף $\left(K^*,L^*\right)$,
המביא למינימום את העלות.
נסחו את בעיית היצרן (אל תפתרו).


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $\min\left(\pm\sqrt{1/7},\pm\sqrt{1/7}\right)$ $\max\left(\pm1,\mp1\right)$

2) $\min\left(\pm1,0\right)$ $\max\left(0,\pm1\right)$

3) $\min\left(-2,-3\right)$ $\max\left(2,3\right)$

4) $\min\left(\pm2,-1\right)$ $\max\left(\pm2,1\right)$

5) $\max\left(6,2\right)$

6) $\max\left(9,36\right)$

7) $\left(6,2\right)$

8) $\min\left(\pm\sqrt{1/7},\pm\sqrt{1/7}\right)$ $\max\left(\pm1,\mp1\right)$

9) $\min\left(\sqrt{32},\sqrt{8}\right)$

10) $\max\left(6,2\right)$

11) $\max\left(2,3\right)$

12) $\min\left\{2K+L\right\};\ \sqrt{K}+\sqrt{L}=100$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 20 - קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה

### תוכן העניינים

1. קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה ..... 135

# קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה

## שאלות

**1)** חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של הפונקציה $f(x,y)=3xy-6x-3y+7$ בתחום $R$, כאשר $R$ הוא התחום הסגור בצורת משולש שקודקודיו הם $(0,5),(3,0),(0,0)$.

**2)** חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של הפונקציה $f(x,y)=x^2-3y^2-2x+6y$ בתחום $R$, כאשר $R$ הוא התחום הסגור בצורת ריבוע שקודקודיו הם $(2,0),(2,2),(0,2),(0,0)$.

**3)** חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של הפונקציה $f(x,y)=x^2+2y^2-x$ בתחום $R$, כאשר $R$ הוא העיגול $x^2+y^2\le 4$.

**4)** חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של הפונקציה $f(x,y)=x^2+y^2-xy+x+y$ בתחום $R$, כאשר $R$ הוא התחום הסגור $R=\{(x,y)\,|\,x+y\ge -3\,,\ x\le 0, y\le 0\}$.

**5)** חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של הפונקציה $f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y$ בתחום $R$, כאשר $R$ הוא התחום הסגור $R=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1,\ 3x\ge -y\}$.

## תשובות סופיות

**1)** מקסימום מוחלט 7. מינימום מוחלט $-11$.

**2)** מקסימום מוחלט 3. מינימום מוחלט $-1$.

**3)** מקסימום מוחלט $33\frac{1}{4}$. מינימום מוחלט $-\frac{1}{4}$.

**4)** מקסימום מוחלט 6. מינימום מוחלט $-1$.

**5)** מקסימום מוחלט $1+6\sqrt{10}$. מינימום מוחלט $1-6\sqrt{10}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 21 - פונקציות הומוגניות-משפט אוילר

### תוכן העניינים

1. פונקציות הומוגניות ..... 136
2. משפט אוילר ..... 139

# פונקציות הומוגניות

## שאלות

בשאלות **1-3** בדקו האם הפונקציה הומוגנית ומאיזה סדר:

**1)** $f(x,y)=x^3\sqrt{y}+y^3\sqrt{x}$

**2)** $h(x,y)=\dfrac{\ln\left(e^{5x}\right)}{\sqrt[3]{ex^6-7y^6}}$

**3)** $f(x,y)=\ln\left(4^x\right)\cdot g\left[\dfrac{\sqrt{xy}}{x+7y}\right]$

**4)** נתון כי $z(x,y)$ פונקציה הומוגנית מסדר 3.

בדקו האם הפונקציה $f(x,y)=\dfrac{x}{y^4}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^5}}+\dfrac{1}{z(x,y)}-4$ הומוגנית.

במידה ואינה הומוגנית, השמיטו ממנה חלק, כך שתתקבל פונקציה הומוגנית.

מהו סדר ההומוגניות של הפונקציה במקרה זה?

**5)** מצאו עבור איזה ערך של הפרמטר $\alpha$, כל אחת מהפונקציות הבאות הומוגניות.

כמו כן, מצאו את סדר ההומוגניות עבור ה- $\alpha$ שנמצאה.

א. $f(x,y)=\dfrac{x^4y+xy^\alpha}{4x+10y}$

ב. $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{y}{x}}\left(\ln\alpha x-\ln y\right)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**6)** בתרגיל זה נדגים את התכונה הבאה של פונקציות הומוגניות:
אם פונקציה היא הומוגנית מסדר $n$, אז אם נחלק אותה ב- $x^n$, נקבל פונקציה של $\frac{y}{x}$.

א. הדגימו את הטענה על הפונקציות הבאות:

1. $f(x,y)=x^2-xy+2y^2$
2. $f(x,y)=\sqrt{x+y}$

ב. הוכיחו את הטענה לעיל.

**הערה**
ניסוח פורמלי של הטענה לעיל הוא:
אם פונקציה היא הומוגנית מסדר $n$, אז קיימת פונקציה $g(t)$, כך ש- $t=\frac{y}{x}$, המקיימת $\frac{f(x,y)}{x^n}=g(t)$.

**7)** תהיינה $f$ ו- $g$ פונקציות ב- $n$ משתנים, והומוגניות מסדר $r_1$ ו- $r_2$, בהתאמה.
קבעו, לכל אחת מהפונקציות הבאות, אם היא הומוגנית ומאיזה דרגה:

א. $f\cdot g$ ב. $\frac{f}{g}$ ג. $\frac{(f)^2}{\sqrt[n]{g}}$ ד. $f+g$

**8)** נתון כי $f$ פונקציה הומוגנית מסדר 4.
ידוע כי $f_x(1,2)=10$, $f(1,2)=4$.
חשבו את $f_x(1.5,3)$, $f_x(2,4)$, $f(0.5,1)$, $f(2,4)$.

**9)** נתונה פונקציה $f(x,y)=x^4+y^2z(x,y)$.
ידוע כי $z$ פונקציה הומוגנית מסדר 2 וכי $f(4,10)=1$.

א. חשוב את $f(2,5)$.

ב. ידוע כי $f_x(1,1)=4$.
חשבו את $f_x(a,a)$, לכל קבוע $a$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** הומוגנית מסדר 3.5.

**2)** הומוגנית מסדר $-1$.

**3)** הומוגנית מסדר 1.

**4)** הפונקציה לא הומוגנית. על ידי השמטת חלקים מהפונקציה אפשר לקבל:

$f(x,y)=\frac{x}{y^4}+\frac{1}{z(x,y)}$ הומוגנית מסדר $-3$.

$f(x,y)=\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^5}}$ הומוגנית מסדר $-2$.

$f(x,y)=-4$ הומוגנית מסדר 0.

**5)** א. עבור $\alpha=4$ הפונקציה הומוגנית מסדר 4. ב. הומוגנית מסדר 0 לכל $\alpha>0$.

**6)** א.1. $g(t)=1-t+2t^2$ .2 $g(t)=\sqrt{1+t}$ ב. הוכחה.

**7)** א. הומוגנית מדרגה $r_1+r_2$. ב. הומוגנית מדרגה $r_1-r_2$.

ג. הומוגנית מדרגה $2r_1-\frac{r_2}{n}$.

ד. הומוגנית מדרגה $r_1$ רק אם $r_1=r_2$. אחרת לא הומוגנית.

**8)** $f(0.5,1)=\frac{1}{4}$, $f(2,4)=64$, $f_x(1.5,3)=33.75$, $f_x(2,4)=80$

**9)** א. $f(2,5)=\frac{1}{16}$ ב. $f_x(a,a)=4a^3$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# משפט אוילר

## שאלות

**1)** נתונה הפונקציה $f(x,y)=x^2-xy+2y^2$.

א. הוכיחו שהפונקציה הומוגנית ומצאו את דרגתה.

ב. הראו שמשפט אוילר מתקיים.

**2)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. נניח ש-$f=f(x,y)$ הומוגנית מסדר 0.

הוכיחו כי $\frac{f_x}{f_y}=-\frac{y}{x}$.

ב. נתון כי $f(x,y)=\frac{e^{\frac{x}{y}}(x+y)}{(x-y)(\ln x-\ln y)}$.

הוכיחו כי $x\cdot f_x=-y\cdot f_y$.

**3)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי פונקציית התועלת $u(x,y)=\left(\frac{1}{2}x^m+\frac{1}{2}y^m\right)^{1/m}$ הומוגנית.

הניחו כי $m$ קבוע חיובי.

ב. הוכיחו, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $u_y(a,a)=u_y(1,1)$.

ג. הוכיחו, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $u_x(2,2)+u_y(1,1)=1$.

**4)** תהי $f$ פונקציה הומוגנית מסדר 2.

נגדיר $h(x,y)=x^2-y^2+f\left(\frac{x^2}{y},\frac{y^2}{x}\right)$.

א. הוכיחו כי $h$ הומוגנית מסדר 2.

ב. נתון $f(8,1)=16,\quad h_x'(6,3)=9$.

מצאו את $h(2,1)$ ואת $h_y'(2,1)$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** $h$ ו- $g$ הינן פונקציות הומוגניות מסדר 2 ו-10, בהתאמה. נגדיר:

$$f(x,y)=(x+y)h(x,y)+\frac{\sqrt{g(x,y)}}{x^2+y^2}$$

א. הוכיחו כי $f$ הומוגנית מסדר 3.

ב. נתון: $h(4,32)=16$ $\quad f_y'(1,8)=3,$ $\quad f_x'(2,16)=12,$.

מצאו את: $f(1,8)$ ואת $g(1,8)$.

**6)** $f$ הומוגנית מסדר 4, $g$ הומוגנית מסדר 2 ו- $h$ הומוגנית מסדר 0.

מגדירים את הפונקציה: $p(x,y)=f(x,y)+g(x,y)-h(x,y)$.

נתון: $p(1,2)=\frac{7}{2}$ $\quad h\left(\frac{1}{2},1\right)=\frac{5}{2},$ $\quad f_y'(-1,-2)=-4,$ $\quad f_x'(2,4)=64,$.

חשבו את $g\left(\frac{1}{2},1\right)$.

**7)** הפונקציה $f(x,y)$ הומוגנית מסדר 3, והנתונים בשרטוט.

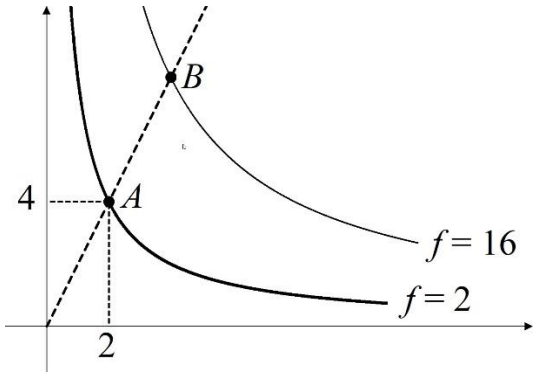
א. מצאו את שיעורי הנקודה B.

ב. מצאו את ערך הסכום $f_x(4,8)+2f_y(4,8)$.

ג. נגדיר פונקציה חדשה $u(x,y)$, על ידי $u(x,y)=\left(f(x,y)\right)^2$.

1. לפי כללי הגזירה, מתקיים $u_x(x,y)=2\cdot f(x,y)\cdot f_x(x,y)$.
הסבירו זאת בקצרה.

2. הוכיחו כי $x\cdot u_x(x,y)+y\cdot u_y(x,y)=6\left(f(x,y)\right)^2$.
היעזרו בתת-הסעיף הקודם ובנתונים על $f$.





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**8)** תהי $f(x,y)$ פונקציה הומוגנית מסדר $m$,
המקיימת $f(6,3)=243$ ו- $f(2,1)=27$.

א. מצאו את סדר ההומוגניות $m$.

ב. בנקודה $(2,1)$ עוברת עש"ע של $f$.
העבירו משיק לעש"ע בנקודה הנ"ל.
המשיק הוא $2x+3y=7$.
מצאו את $f_x(1,0.5)$ , $f_y(2,1)$ , $f_x(2,1)$.

**9)** תהי $g(t)$ פונקציה של משתנה אחד.
על הפונקציה $g$ ידוע, כי $g'(8)=2$ , $g(1)=3$ , $g(4)=5$.

המשתנה $t$ תלוי במשתנים החיוביים $(x,y)$, כך: $t=\frac{4y}{x}$.

נגדיר תועלת $u$ כפונקציה של המשתנים $(x,y)$, באופן הבא:

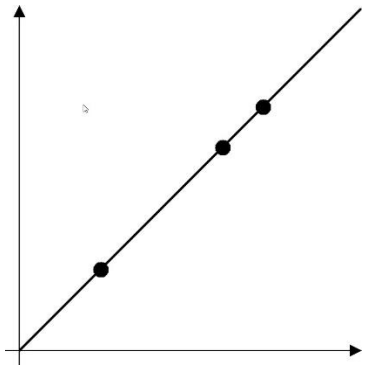
$$u(x,y)=g(t)=g\left(\frac{4y}{x}\right).$$

א. באיור שלהלן קרן עם שיפוע 1.
מה הערך של התועלת בנקודות המסומנות על הקרן?

ב. הוכיחו כי הקרן $4y-x=0$ היא עקומת אדישות של התועלת.
ציירו את הקרן הזאת ורשמו באיור מה הערך של התועלת.

ג. הוכיחו כי התועלת היא פונקציה הומוגנית. מהו סדר ההומוגניות?

ד. הוכיחו כי $u_x(1,2)=-16$.



**10)** נניח ש- $f=f(x,y)$ הומוגנית מסדר 1.
הוכיחו כי $x^2f_{xx}+2xyf_{xy}+y^2f_{yy}=0$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** מפעל מייצר $x$ חולצות ו- $y$ מכנסיים.
הרווח השולי, המתקבל מייצור כל אחד מהמוצרים, נתון על ידי:
$f_x(x,y)=4x+8y,\quad f_y(x,y)=8x+20y$ ₪ ליחידה.
מצאו את פונקציית הרווח של המפעל, אם ידוע שפונקציה זו הומוגנית.

**12)** לחברת 'מזון בריא' יש 300 מכונות:
$x$ מכונות לייצור שוקולד ו- $y$ מכונות לייצור גלידה.
ידוע כי התפוקה השולית, המתקבלת מייצור כל אחד מהמוצרים,
נתונה על ידי $f_x(x,y)=6x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}},\quad f_y(x,y)=3x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}}$.

א. מצאו את פונקציית הייצור, אם ידוע שהיא הומוגנית.

ב. מצאו כמה מכונות מכל סוג על המפעל להחזיק, כדי לקבל את התפוקה הכוללת המקסימלית.

הערה: סעיף ב אינו קשור להומוגניות ועוסק בנושא "בעיות קיצון תחת אילוץ".

**13)** בחברת 'שוקולד פנדה' בדקו ומצאו, כי התפוקה השולית, המתקבלת משימוש ב- $x$ טון סוכר ו- $y$ טון קקאו, נתונה על ידי $f_x(x,y)=3x^2y^2,\quad f_y(x,y)=2x^3y$.
מחירי המוצרים הם 6,000 ₪ לטון סוכר ו- 4,000 ₪ לטון קקאו,
והתקציב לקניית המוצרים הוא 100,000 ₪.

א. מצאו את פונקציית הייצור, אם ידוע שהיא הומוגנית.

ב. מצאו את כמות הסוכר והקקאו בהם מתקבלת תפוקה מקסימלית.
מהי התפוקה במקרה זה?

ג. כיצד תשתנה התשובה, אם מחירי הסוכר והקקאו יהיו שניהם 5,000 ₪ לטון?

הערה: סעיפים ב-ג אינם קשורים להומוגניות ועוסקים בנושא "בעיות קיצון תחת אילוץ".

**14)** הוכיחו או הפריכו:

א. אם $f_x(x,y)$ הומוגנית מסדר 4, אז $f(x,y)$ הומוגנית מסדר 5.

ב. אם פונקציה $f(x,y)$ מקיימת $f(2,4)=2^3 f(1,2)$,
אז הפונקציה הומוגנית מסדר 3.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** שאלת הוכחה.

**2)** שאלת הוכחה.

**3)** שאלת הוכחה.

**4)** א. שאלת הוכחה. ב. $h(2,1)=4 \quad h_y'(2,1)=8$

**5)** א. שאלת הוכחה. ב. $g(1,8)=0, \quad f(1,8)=9,$

**6)** $-\frac{3}{4}$

**7)** א. $B(4,8)$ ב. 12 ג. הוכחה והסבר.

**8)** א. 2 ב. $f_x(1,0.5)=\frac{54}{7}, \quad f_y(2,1)=\frac{3\left(\frac{108}{7}\right)}{2}, \quad f_x(2,1)=\frac{108}{7},$

**9)** א. 5 ב-ד. שאלת הוכחה.

**10)** שאלת הוכחה.

**11)** $f(x,y)=2x^2+8xy+10y^2$

**12)** א. $f(x,y)=9x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ ב. על המפעל להחזיק 200 מכונות לייצור שוקולד ו-100 מכונות לייצור גלידה, כדי לקבל תפוקה מקסימלית.

**13)** א. $f(x,y)=x^3y^2$

ב. אם המפעל ישתמש ב-10 טון סוכר ו-10 טון קקאו, הוא יקבל תפוקה מקסימלית השווה ל-$f(10,10)=10^3 10^2=100000$ חפיסות שוקולד.

ג. התשובה לא תשתנה.

**14)** א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה אינה נכונה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 22 - סדרות

### תוכן העניינים

1. היכרות עם סדרות ..... (ללא ספר)
2. חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות ..... 144
3. חישוב גבול לפי אוילר ..... 146
4. חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ ..... 147
5. חישוב גבול לפי מבחן המנה ומבחן השורש ..... 149
6. חישוב גבול של סדרה רקורסיבית ..... 150
7. חישוב גבול לפי ההגדרה ..... 152

# חישוב גבול לפי כללי חשבון גבולות

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

**1)** $\lim_{n\to\infty}\left(e^{-n}\right)^{\ln n}$

**2)** $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+2}{n^2+1000n}$

**3)** $\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+2n^2+6}{3n^3+10n}$

**4)** $\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+2n^2+6}{3n^5+10n}$

**5)** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-5n+6}{2n+10}-\frac{n}{2}\right)$

**6)** $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$

**7)** $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^4+2n^2+6+27n^6}}{\sqrt{3n^3+10n+4n^4}}$

**8)** $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{3n-3}}{\sqrt{4n+1}-\sqrt{5n-1}}$

**9)** $\lim_{n\to\infty}\frac{16^n+4^{n+1}}{2^{4n+2}+2^{n+3}}$

**10)** $\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot 9^n+3^{n+1}}{81^{0.5n}+3^{n+3}}$

**11)** $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{4n^2+2}{n^2+1000n}}$

**12)** $\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{3n^3-5n-1}{n^3-2n^2+1}\right)$

**13)** $\lim_{n\to\infty}e^{\frac{n^4+2n^2+6}{3n^4+10n}}$

**14)** $\lim_{n\to\infty}\sqrt[5]{\frac{an+1}{bn+2}}$

**15)** $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n}-n\right)$

**16)** $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+kn}-n\right)$

**17)** $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$

**18)** $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^4+n^2+1}-n^2)$

**19)** $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+an}-\sqrt{n^2+bn}\right)$

**20)** $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{n^2+4n+1}$

**21)** $\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3+n^2+1}$

**22)** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots\frac{1}{n(n+1)}\right)$

* רמז לשאלה **22**: $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

**<u>הערה חשובה מאוד!</u>**

בפתרון המלא, יופיע במקום המשתנה $n$ – המשתנה $x$. יש להתייחס אל $x$ כאל מספר טבעי!

בנוסף, יש לזכור שסדרה היא פונקציה (מהטבעיים לממשיים) ולכן לעיתים אומר פונקציה במקום סדרה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) 0
2) 4
3) $\infty$
4) 0
5) -5
6) 1
7) 1.5
8) $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$
9) 0.25
10) 4
11) 2
12) $\ln 3$
13) $e^{\frac{1}{3}}$
14) $\left(b\neq 0\right)\Leftarrow\left(\lim a_n=\sqrt[5]{a/b}\right)$, $\left(a>0,\ b=0\right)\Leftarrow\left(\lim a_n=\infty\right)$, $\left(a<0,\ b=0\right)\Leftarrow\left(\lim a_n=-\infty\right)$
15) 2.5
16) $\frac{k}{2}$
17) 0.5
18) 0.5
19) $\frac{a-b}{2}$
20) 0.5
21) $\frac{1}{3}$
22) 1


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב גבול לפי אוילר

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$

2) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$

3) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^n$

4) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2-1}$

5) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n-3}\right)^n$

6) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n+4}\right)^{4n^2}$

7) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4n+1}{n^2+n+2}\right)^{10n}$

## תשובות סופיות

1) $e^{0.5}$

2) $1$

3) $e^2$

4) $e^{-1}$

5) $e^3$

6) $e^{-12}$

7) $e^{30}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב גבול לפי כלל הסנדוויץ'

## שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות **1-5**:

**1)** $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}$

**2)** $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$

**3)** $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^{4n+\frac{1}{n}}}$

**4)** $\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$

**5)** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

רמז לשאלה **4**: הוכיחו כי $a_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

**6)** הוכיחו שכל אחת מהסדרות הבאות מתכנסת ל- 0:

א. $a_n=\left(\sqrt{2}-2^{\frac{1}{3}}\right)\left(\sqrt{2}-2^{\frac{1}{5}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sqrt{2}-2^{\frac{1}{2n+1}}\right)$.

ב. $a_n=n^{\alpha}-(n+1)^{\alpha}$ , $\alpha\in(0,1)$.

**7)** יהי $x$ מספר ממשי וחיובי.

נתבונן בסדרה: $a_n=\frac{6n+\sqrt{\lfloor x^2n^2\rfloor}}{3n+\sqrt{2}}$.

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}a_n>2$.

**8)** חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{2^{3n^2-4}+3^{2n^2+1}+4^{1.5n^2+5}+10^n}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) 4
2) 0
3) 1
4) 0
5) 1
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) 9


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב גבול לפי מבחן המנה ומבחן השורש

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$

3) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$

4) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{4n}$

5) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{2n}$

## תשובות סופיות

1) 0

2) 0

3) 4

4) $\frac{1}{4e}$

5) $\infty$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב גבול של סדרה רקורסיבית

## שאלות

בשאלות **1-3** נתונה סדרה בעזרת נוסחת נסיגה (רקורסיה).
הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

**1)** $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}\,,\ a_1=\sqrt{2}$

**2)** $a_{n+1}=\sqrt{2a_n-1},\ a_1=2$

**3)** $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right),\ a_1=2$

**4)** יהיו $a>0,\ \ x_1>0$.

נגדיר סדרה $x_n$ ברקורסיה על ידי $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$, לכל $n$.

הוכיחו שהסדרה מתכנסת ל- $\sqrt{a}$.

**5)** יהי $x_1=a\geq 0$.

נגדיר סדרה $x_n$ ברקורסיה על ידי $x_{n+1}=\frac{1}{5}\left(x_n^2+6\right)$, לכל $n$.

א. מצאו את כל הערכים של הקבוע $a$, עבורם הסדרה עולה/יורדת.
ב. קבעו האם הסדרה $x_n$ מתכנסת עבור $3<a<3.5$.

**6)** יהיו $0<b_1<a_1$.

נגדיר $b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$, $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$, לכל $n$.

הוכיחו שהסדרות $a_n$ ו- $b_n$ מתכנסות ומתקיים $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**7)** נתונה הסדרה $a_1=1,\ a_2=1$ , $a_{n+1}=2a_n+3a_{n-1}$.

א.1. נגדיר סדרה חדשה $b_n$ על ידי $b_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}$.

<u>הניחו</u> שהגבול $\lim_{n\to\infty} b_n$ קיים וחשבו אותו.

הערה: בשלב זה אין לנו את הכלים להוכיח שהגבול $\lim_{n\to\infty} b_n$ קיים.

בהמשך הפרק נלמד מספר שיטות להוכיח זאת.

א.2. בעזרת התוצאה של הסעיף הקודם הוכיחו שהסדרה $a_n$ שואפת לאינסוף.

ב.1. מצאו ביטוי סגור עבור הסדרה $a_n$ (כלומר נוסחה לא רקורסיבית).

ב.2. הוכיחו שהגבול $\lim_{n\to\infty}=\frac{a_n}{a_{n+1}}$ קיים, וחשבו אותו.

ב.3. הוכיחו באינדוקציה שהביטוי הסגור שנמצא בסעיף ב.1 הוא אכן נכון.

## תשובות סופיות

**1)** הגבול 2.

**2)** הגבול 1.

**3)** הגבול 1.

**4)** הגבול הוא $\sqrt{a}$.

**5)** א. אם $2\le a\le 3$ הסדרה יורדת, אחרת היא עולה.
ב. לא מתכנסת.

**6)** שאלת הוכחה.

**7)** ב.1. $a_n=\frac{1}{6}\cdot 3^n-\frac{1}{2}\cdot(-1)^n$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב גבול לפי ההגדרה

## שאלות

על סמך ההגדרה של גבול של סדרה, הוכיחו כי:

**1)** $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{4n+3}=\frac{1}{2}$

**2)** $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^2+1}=1$

**3)** $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+(-1)^n}{n^2+1}=1$

**4)** $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-2n+1}{2n^2+n+3}=2$

**5)** $\lim_{n\to\infty}2n+4=\infty$

**6)** $\lim_{n\to\infty}n^3-n^2+5n+6=\infty$

**7)** $\lim_{n\to\infty}\log(2n+5)=\infty$

**8)** $\lim_{n\to\infty}e^{2n+1}=\infty$

**9)** $\lim_{n\to\infty}\log\frac{1}{n}=-\infty$

**10)** $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n}-n\right)=2$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 23 - טורים עם איברים קבועים

### תוכן העניינים

1. טורים מתכנסים וטורים מתבדרים ..... 153
2. מבחני התכנסות לטורים ..... 155
3. התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי ..... 157
4. תרגילי תיאוריה ..... 158

# טורים מתכנסים וטורים מתבדרים

## שאלות

### טור גיאומטרי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **1-6**. במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

**1)** $\sum_{n=1}^{\infty}(0.44)^n$

**2)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{7^{n+1}}$

**3)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{4^{n+2}}$

**4)** $\sum_{n=0}^{\infty}(-4)\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}$

**5)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+(-5)^n}{7^n}$

**6)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n}}{3^{2n}}$

### טור טלסקופי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **7-11**. במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

**7)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

**8)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+3)(4n-1)}$

**9)** $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

**10)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)(\ln(n+1))}$

**11)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}$

### טור הרמוני מוכלל

**12)** בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{5n}$

ד. $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2/3}$

ה. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{\sqrt[3]{n^4}}$

ו. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^e}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

### תכונות אלגבריות של טורים

**13)** בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4^n}{7^{n+1}}+n^{-1.5}\right)$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{n^2}$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

**14)** חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)^2}$, אם ידוע כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

## תשובות סופיות

**1)** מתכנס ל-$\frac{11}{14}$. **2)** מתכנס ל-$\frac{1}{3}$. **3)** מתבדר.

**4)** מתכנס ל-$-\frac{64}{7}$. **5)** מתכנס ל-$\frac{11}{12}$. **6)** מתכנס ל-8.

**7)** מתכנס ל-$\frac{1}{2}$. **8)** מתכנס ל-$\frac{1}{12}$. **9)** מתבדר.

**10)** $S=\frac{1}{\ln 2}$ **11)** $\frac{1}{12}$

**12)** א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתבדר.
ד. מתבדר. ה. מתכנס. ו. מתכנס.

**13)** א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתבדר.

**14)** $\frac{\pi^2}{6}-\frac{5}{4}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מבחני התכנסות לטורים

## שאלות

### מבחן ההתבדרות

**1)** בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln n$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+2}$ ד. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{n}\right)^n$

### מבחן האינטגרל

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **2-5** (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

**2)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+5}}$

**4)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\,(p>1)$ **5)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\,(p\le 1)$

**6)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n^3}$.

ב. מצאו את הגבול $\lim_{n\to\infty}n^2e^{-n^3}$.

### מבחן ההשוואה ומבחן ההשוואה הגבולי

בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

**7)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+10n+1}$ **8)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)}$ **9)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+5}{\sqrt{n^4+n+1}}$

**10)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-2}{3^n+2n}$ **11)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ **12)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

### מבחן המנה ומבחן השורש

בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

**13)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

**14)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n+2)}$

**15)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!(2n)^n}$

**16)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{n!\cdot 3^n}$

**17)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}$

**18)** $\sum_{n=1}^{\infty}n^{1000}e^{-n}$

**19)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

**20)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(1+n^2)}{n!}$

**21)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

## תשובות סופיות

**1)** א-ו: מתבדר.

**2)** מתבדר. **3)** מתבדר. **4)** מתכנס.

**5)** מתבדר. **6)** א. מתכנס. ב. 0

**7)** מתכנס. **8)** מתבדר. **9)** מתבדר.

**10)** מתכנס. **11)** מתבדר. **12)** מתכנס.

**13)** מתבדר. **14)** מתכנס. **15)** מתכנס.

**16)** מתכנס. **17)** מתכנס. **18)** מתכנס.

**19)** מתכנס. **20)** מתכנס. **21)** מתכנס.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

## שאלות

### מבחן לייבניץ

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **1-3**:

**1)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n+1}$ **2)** $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+n}$

### התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

בשאלות **4-10** קבעו אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

**4)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{n^2}$ **5)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ **6)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n}$

**7)** $\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n$ **8)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$ **9)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1+n\ln n}{n^2}$

**10)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+n}$

## תשובות סופיות

**1)** מתכנס. **2)** מתכנס. **3)** מתכנס.

**4)** מתבדר. **5)** מתכנס בהחלט. **6)** מתכנס בתנאי.

**7)** מתכנס בהחלט. **8)** מתכנס בתנאי. **9)** מתכנס בתנאי.

**10)** מתכנס בתנאי.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# תרגילי תיאוריה

## שאלות

**1)** להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n$ מתכנס ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum\left(a_n+b_n\right)$ מתבדר.

ב. אם $\sum a_n$ מתבדר ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum\left(a_n+b_n\right)$ מתבדר.

**2)** להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n^2$ מתכנס, אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.

ב. אם $\sum a_n$ חיובי ומתכנס, אז $\sum\frac{1}{a_n}$ מתבדר.

ג. אם $\sum a_n$ מתכנס, אז $\sum a_n^2$ מתכנס.

**3)** הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+(-1)^n\right)$ מתבדר.

**4)** הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ומתכנס אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס.

**5)** א. נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ מתבדר.

ב. נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו ש- $\sum\left|a_n\right|$ מתבדר אם $\sum a_n^2$ מתבדר.

**6)** תהי $(a_n)$ סדרה חיובית השואפת לאינסוף.

הוכיחו כי $\sum\frac{1}{(a_n)^n}$ מתכנס.

**7)** $\sum a_n$ הוא טור אי-שלילי ומתכנס.

הוכיחו כי $\sum\frac{a_n+4^n}{a_n+10^n}$ מתכנס.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**8)** הוכיחו או הפריכו:

אם הסדרה $(a_n)_{n\geq 1}$ מקיימת $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$ אז $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ מתכנס.

**9)** נניח כי $a_n \geq 0$.

הוכיחו כי: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

**10)** הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס והסדרה $b_n$ חסומה אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

**11)** הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי אז $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ מתבדר.

**12)** הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי ואם $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$, אז $\sum b_n$ מתכנס בתנאי.

**13)** נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ לכל $n$, אז הטור מתכנס.

ב. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ לכל $n$, אז הטור מתבדר.

**14)** נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum\sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**15)** נתונים שני טורים חיוביים $\sum a_n, \sum b_n$.

א. נתון שהטורים $\sum a_n^2, \sum b_n^2$ מתכנסים.

1. הוכיחו כי $\sum a_n b_n$ מתכנס.

2. הוכיחו כי $\sum (a_n + b_n)^2$ מתכנס.

ב. נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ מתכנס.

פתרונות לכל שאלות התאוריה תוכלו למצוא באתר : GooL.co.il


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 24 - הוכחות של משפטים נבחרים

### תוכן העניינים

1. הוכחות של משפטים נבחרים ..... 161

# הוכחות של משפטים נבחרים בקורס

## הוכיחו את המשפטים הבאים:

### גזירות גוררת רציפות

אם הפונקציה $f(x)$ גזירה בנקודה $x_0$, אזי היא רציפה בנקודה זו.

### כלל השרשרת

תהי $y=g(x)$ פונקציה גזירה בנקודה $x$ ותהי $f(g(x))$ גזירה בנקודה $g(x)$.
אזי הפונקציה המורכבת $f(g(x))$ גזירה בנקודה $x$,
ומתקיים: $\left(f(g(x))\right)'=f'(g(x))\cdot g'(x)$.

### כלל לופיטל

נניח ש- $g$ ו- $f$ פונקציות גזירות ובעלות נגזרות רציפות בנקודה $x_0$,
ונניח כי $f(x_0)=g(x_0)=0$ וכן $g'(x_0)\neq 0$, אזי $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

### משפט לגראנז'

אם הפונקציה $f(x)$:

א. רציפה בקטע הסגור $[a,b]$,

ב. וגזירה בקטע הפתוח $(a,b)$,

אז קיימת נקודה $a<c<b$, כך ש- $f'(c)$ $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**משפט פרמה**

נניח ש- $f$ פונקציה המוגדרת בתחום המכיל את הנקודה $x_0$.

אם $f$ גזירה בנקודה $x_0$ ואם $x_0$ נקודת מקסימום מקומית, אז $f'(x_0)=0$.

**משפט רול**

אם הפונקציה $f(x)$:

א. רציפה בקטע הסגור $[a,b]$,

ב. גזירה בקטע הפתוח $(a,b)$,

ג. ומקיימת $f(a)=f(b)$,

אז קיימת נקודה $a<c<b$, כך ש-$f'(c)$.

**נגזרת הפונקציה ההפוכה**

תהי $y=f(x)$ פונקציה הפיכה ורציפה בסביבת הנקודה $x_0$.

אם $f(x)$ גזירה בנקודה $x_0$ ואם $f'(x_0)\neq 0$, אז גם הפונקציה ההפוכה שלה, $x=g(y)$, גזירה בנקודה $y_0=f(x_0)$, ומתקיים השוויון $g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$.

להוכחות המלאות היכנסו לאתר: GOOL.co.il


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 25 - אינטגרלים כפולים

### תוכן העניינים

1. אינטגרלים כפולים ..... 163
2. החלפת סדר אינטגרציה ..... 165

# אינטגרלים כפולים

## שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-2**:

**1)** $\int_0^1\int_0^1 (x+y)\,dxdy$

**2)** $\int_0^1\int_{x^2}^{x} xy^2\,dydx$

באינטגרל $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, הציבו את הגבולות בשני סדרי האינטגרציה כאשר:

**3)** $D$ – משולש בעל הקודקודים: $\mathrm{B}(1,1),\mathrm{A}(1,0),\mathrm{O}(0,0)$.

**4)** $D$ – משולש בעל הקודקודים: $\mathrm{B}(-2,1),\mathrm{A}(2,1),\mathrm{O}(0,0)$.

**5)** $D$ – טרפז בעל הקודקודים: $\mathrm{C}(0,1),\mathrm{B}(1,2),\mathrm{A}(1,0),\mathrm{O}(0,0)$.

**6)** $D=\left\{(x,y)\,|\,y\le 1, y\ge x^2\right\}$

חשבו את האינטגרלים בשאלות **7-9**:

**7)** $\iint_D xy^2dxdy$, כאשר $D$ חסום ע"י הפרבולה $y^2=4x$ והישר $x=1$.

**8)** $\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{4-x}}$, כאשר $D$ חסום ע"י צירי הקואורדינטות והקשת הקצרה של מעגל בעל רדיוס 2 שמרכזו בנקודה $(2,2)$.

**9)** $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$, כאשר $D$ מקבילית בעלת הצלעות $y=x,\ y=x+a,\ y=a,\ y=3a$ $(a>0)$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $1$

2) $\frac{1}{40}$

3) $\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)dx$

4) $\int_0^2 dx\int_{x/2}^1 f(x,y)dy+\int_{-2}^0 dx\int_{-x/2}^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{-2y}^{2y} f(x,y)dx$

5) $\int_0^1 dx\int_0^{x+1} f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_{y-1}^1 f(x,y)dx$

6) $\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

7) $\frac{32}{21}$

8) $8-\frac{16\sqrt{2}}{3}$

9) $14a^4$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# החלפת סדר אינטגרציה

## שאלות

החליפו סדר אינטגרציה באינטגרלים בשאלות **1-3**:

**1)** $\int_{0}^{2}\int_{x}^{2x} f(x,y)dydx$

**2)** $\int_{-6}^{2}\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dydx$

**3)** $\int_{0}^{1}\int_{x^3}^{x^2} f(x,y)dydx$

חשבו את האינטגרלים הבאים (רמז: שנו את סדר האינטגרציה):

**4)** $\int_{0}^{4}\int_{\sqrt{y}}^{2} e^{x^3}dxdy$

**5)** $\int_{0}^{3}\int_{1}^{\sqrt{4-y}} (x+y)dxdy$

**6)** $(x,y\geq 0)\ \int_{0}^{1}\int_{y^2}^{y^{2/3}} e^{x^2}ydxdy$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

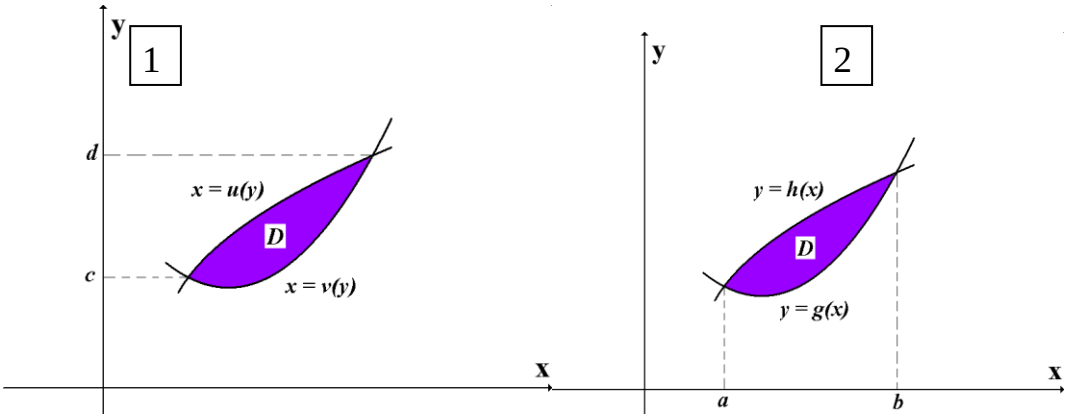
## הערות סימון

1

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\iint_D f(x,y)\,dydx=\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx=\int_a^b dx\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy$$

2

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_c^d\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx$$




שימו לב, ישנם מרצים שלא מקפידים, ורושמים למשל את האינטגרל $\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx$, כך: $\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dxdy$.

רישום זה אינו שגוי מאחר שכפל הוא חילופי. כלומר, הרישום $dxdy$ והרישום $dydx$ זהים.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $\int_0^2 dy \int_{y/2}^{y} f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^{2} f(x,y)dx$

2) $\int_{-1}^{0} dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)dx$

3) $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx$

4) $\frac{1}{3}\left(e^8-1\right)$

5) $\frac{241}{60}$

6) $\frac{1}{4}(e-2)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שיטות כמותיות

## פרק 26 - עקומת לורנץ ומדד ג'יני

### תוכן העניינים

1. עקומת לורנץ ומדד ג׳יני ..... 168

# עקומת לורנץ ומדד ג'יני

## שאלות

**1)** הוכיחו שהפונקציה $f(x)=\frac{x^2}{8}+\frac{7x}{8}$ יכולה לשמש כעקומת לורנץ, וחשבו את מדד GINI עבורה.

**2)** הוכיחו שהפונקציה $f(x)=\frac{4x^2}{2x+2}$ יכולה לשמש כעקומת לורנץ, וחשבו את מדד GINI עבורה.

**3)** הוכיחו שהפונקציה $f(x)=\frac{2x}{9}+\frac{7x^2}{9}$ יכולה לשמש כעקומת לורנץ, וחשבו את מדד GINI עבורה.

**4)** הוכיחו שהפונקציה $f(x)=\frac{x^2}{3}+\frac{2x}{3}$ יכולה לשמש כעקומת לורנץ, וחשבו את מדד GINI עבורה.

**5)** חשבו את מדד GINI עבור $f(x)=\frac{x^7\left(x^4+2\right)}{3}$.

**6)** מהו הערך של $n$, אם ידוע שהפונקציה $f(x)=\frac{x^n}{8}+\frac{7x^{n-1}}{8}$ יכולה לשמש כעקומת לורנץ?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $\frac{1}{24}$

2) $3-4\ln 2$

3) $\frac{7}{27}$

4) $\frac{1}{9}$

5) $\frac{7}{9}$

6) $n>2$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©