שיטות כמותיות בניהול

תוכן העניינים

GOOL
בשביל התירגול

שיטות כמותיות בניהול

פרק 1 - משוואות אלגבריות

תוכן העניינים

משוואה ממעלה ראשונה

סיכום כללי

משוואה ממעלה ראשונה היא מהצורה : $ax=b$ (כלומר, החזקה של הנעלם היא 1).

פתרון של משוואה ממעלה ראשונה הוא $x=\frac{b}{a}$ כאשר $a\neq 0$.

שלבי הפתרון הם :

1. ביצוע מכנה משותף (במידה וצריך).
2. פתיחת סוגריים אם ישנם.
3. העברת אגפים וכינוס אברים דומים (בידוד הנעלם באגף אחד והמספרים באגף שני).
4. בידוד הנעלם ומציאתו ע״י חילוק במקדם שלו.

שאלות

1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות ממעלה ראשונה) :

א. $-7x+5+2x=4x-13$

ב. $x-2+5x=4-3x-5+7x+7$

2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פתיחת סוגריים) :

א. $3(x-1)-4=2$

ב. $6(4-x)-(6-x)=3x$

3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה מספרי) :

א. $\frac{x}{3}-\frac{x}{9}=-4$

ב. $\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}x=x-\frac{7}{15}$

ג. $\frac{2}{5}(x-3)-\frac{3}{15}(4-x)=x+2$

4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם נעלם במכנה) :

א. $\frac{3}{x}=\frac{1}{x+2}$

ב. $\frac{x+5}{3x^2}-\frac{1}{6x}=\frac{1}{x}$

ג. $\frac{1}{4x}+\frac{3}{x}=\frac{13}{2}$

5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה משותף ע"י פירוק לגורמים):

א. $\frac{x^2+2}{3x^2+5x}=\frac{3x-1}{9x+15}$

ב. $\frac{7}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}+\frac{3}{2-2x}=0$

ג. $\frac{3}{(2-x)^2}+\frac{5}{12-3x^2}=0$

תשובות סופיות

1) א. $x=2$ ב. $x=4$

2) א. $x=3$ ב. $x=2\frac{1}{4}$

3) א. $x=-18$ ב. $x=-1$ ג. $x=-10$

4) א. $x=-3$ ב. $x=2$ ג. $x=\frac{1}{2}$

5) א. $x=-6$ ב. $x=-7$ ג. $x=-7$

משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון

סיכום כללי

משוואה ממעלה ראשונה

למשוואה ממעלה ראשונה מהצורה: $ax=b$ יתכן פתרון יחיד אם ורק אם $a \neq 0$

מכיוון שניתן לחלק ולכתוב: $x=\frac{b}{a}$.

כאשר $a=0$ מתקבלת המשוואה $0 \cdot x=b$ ויתכנו שני מצבים:

1. אם $b=0$ את המשוואה היא $0x=0$ ויש אינסוף פתרונות המקיימים אותה.
2. אם $b \neq 0$ את המשוואה היא $0x=b \neq 0$ ואין אף ערך של x המקיים אותה.

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $x+4=6+x$

2) $3x+6-x=4+2x+2$

3) $6(x-2)=2x+5+4x$

4) $5x-3+x=4x+2x-3$

תשובות סופיות

1) אף פתרון.
2) אינסוף פתרונות.
3) אין פתרון.
4) אינסוף פתרונות.

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה

סיכום כללי

הגדרה

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (ליניאריות) היא מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

כאשר $a_1\ ,b_1\ ,c_1$ ו- $a_2\ ,b_2\ ,c_2$ הם מקדמים מספריים.

דוגמאות למערכות של משוואות: $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=1 \end{cases}$, $\begin{cases} y=3x-1 \\ \dfrac{x+3}{2}=y+6 \end{cases}$.

פתרון של מערכת משוואות

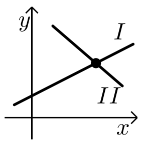
פתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור המקיים את כל המשוואות שבמערכת.

הצגה גרפית של מערכת משוואות

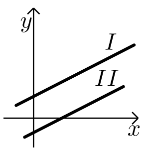
פתרון גרפי של מערכת משוואות הוא נקודת החיתוך של הישרים המייצגים כל משוואה.

יתכנו שלושה מצבים הדדיים בין שני ישרים:

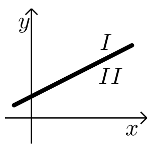
- הישרים נחתכים:
  במקרה זה נקודת החיתוך תהיה פתרון המערכת.



- הישרים מקבילים:
  במקרה זה לא יהיה פתרון למערכת.



- הישרים מתלכדים:
  במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות למערכת המשוואות.



פתרון אלגברי של מערכת משוואות

- פתרון ע"י שיטת ההצבה:
נבודד את אחד הנעלמים ממשוואה אחת ונציב אותו במשוואה השנייה.
נבחר בשיטה זו במקרים בהם קל לבודד נעלם באחת המשוואות.

- פתרון ע"י השוואת מקדמים:

1. כופלים (או מחלקים) משוואה אחת (או שתיהן) במספר השונה מאפס כך שתתקבלנה משוואות שקולות בעלות מקדמים נגדיים או זהים עבור אחד המשתנים.
2. מחברים (או מחסרים) את המשוואות ומקבלים משוואה חדשה עם נעלם אחד.
3. מוצאים את ערך הנעלם מהמשוואה החדשה ומציבים אותו באחת המשוואות המקוריות למציאת ערך הנעלם השני.

הערה

נוח להשתמש בשיטת השוואת המקדמים ע"י כך שמעבירים את המערכת הנתונה למערכת שקולה שבה המשתנים באגף אחד והמספר החופשי באגף השני.

שאלות

1) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x+3y=5 \\ x-3y=3 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} 5x+2y=14 \\ 5x+3y=23 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 5y=2x \\ 4x=5y+8 \end{cases}$

ד. $\begin{cases} 4x=3y-29 \\ 5y=9-13x \end{cases}$

2) פתור את המשוואה הבאה: $\begin{cases} x+2y=1 \\ 4x+8y=5 \end{cases}$.

3) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} 3y-x+2=4x+2-3y \\ 2x-3-y=5y-4x+3 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} \frac{x-3}{8}-\frac{x+y}{16}=\frac{y-1}{4} \\ 3(2x-y)-4x-11=0 \end{cases}$

4) פתור את המשוואה הבאה: $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{3}{y}=2 \\ \frac{9}{x}-\frac{4}{y}=-7 \end{cases}$.

5) פתור את המשוואה הבאה: $\begin{cases} 5x-4xy=22 \\ 6x+xy=-20 \end{cases}$.

תשובות סופיות

1) א. $\left(4,\frac{1}{3}\right)$ ב. $\left(-\frac{4}{5},9\right)$ ג. $(4,1.6)$ ד. $(-2,7)$

2) א. אין פתרון.

3) א. $(6,5)$ ב. $(7,1)$

4) $(-3,1)$

5) $(-2,4)$

משוואה ממעלה שנייה

סיכום כללי

משוואה מהצורה: $ax^2+bx+c=0$, $(a\neq 0)$ נקראת משוואה ריבועית.
פתרונות המשוואה יסומנו ב- x_1 ו- x_2 ויחושבו לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

למשוואה ריבועית יתכנו שלושה סוגים של פתרונות:

1. **משוואה עם שני פתרונות ממשיים שונים.**
אם מתקבל מספר חיובי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים.
דוגמא: $x^2+5x-4=0$.

2. **משוואה עם פתרון ממשי אחד בלבד.**
אם מתקבל אפס בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד בלבד.
דוגמא: $x^2+4x+4=0$.

3. **משוואה ללא פתרונות ממשיים כלל.**
אם מתקבל מספר שלילי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה לא יהיו פתרונות ממשיים כלל.
דוגמא: $x^2+x+4=0$.

שאלות

1) פתור את המשוואות הבאות:

א. $x^2+3x-10=0$

ב. $25x^2-20x+4=0$

2) פתור את המשוואות הבאות:

א. $2(x-5)^2-(2x-3)^2=10x+21$

ב. $(2x-1)^2+x(2x+3)=(x-1)(x-7)$

3) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת b): $32x^2-18=0$.

4) פתור את המשוואה הבאה (משוואה חסרת c): $5x^2-x=0$.

5) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\frac{4x+1}{3}-\frac{x+2}{2}=\frac{2}{x}$

ב. $\frac{x^2-9}{x+3}+x=x^2-18$

ג. $\frac{3}{2x+2}-\frac{2x-5}{2(x-1)^2}-\frac{4}{1-x^2}=0$

תשובות סופיות

1) א. $x_1=2\ ,\ x_2=-5$ ב. $x=\frac{2}{5}$

2) א. $x_1=1\ ,\ x_2=-10$ ב. $x_1=0.6\ ,\ x_2=-2$

3) $x=\pm\frac{3}{4}$

4) $x_1=0\ ,\ x_2=\frac{1}{5}$

5) א. $x_1=2\ ,\ x_2=-1.2$ ב. $x=5\ ,\ x\neq-3$ ג. $x_1=0\ ,\ x_2=-5$

מערכת משוואות ממעלה שנייה

סיכום כללי

מערכת משוואות ריבועיות מיוחסת למערכת של שתי משוואות (לפחות), שאחת מהן מכילה את אחד מהנעלמים בריבוע.
למערכת משוואות ריבועיות יכולים להתקבל עד 4 פתרונות שונים. יש לפתור את המערכת לפי הטכניקות הרגילות של בידוד והצבה או השוואת מקדמים.

שאלות

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ x+y=6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x^2+4y^2=16 \\ 5x^2-3y^2=17 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=5 \\ \frac{4}{y}-\frac{1}{x}=-19 \end{cases}$

תשובות סופיות

4) $(2,4),(4,2)$

5) $(\pm2,\pm1)$

6) $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{4}\right)$

משוואות דו-ריבועיות:

סיכום כללי:

משוואה דו-ריבועית היא משוואה מהצורה: $ax^4+bx^2+c=0$ כאשר הנעלם הוא x.
פתרון המשוואה יבוצע ע"י מעבר לפרמטר: $x^2=t \to at^2+bt+c=0$ ומציאתו.
לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה ולמצוא את ערכי x.

ניתן להביא משוואות לצורה זו ולהגדיר ביטוי המופיע בחזקות 2 ו-4
כגון: $\left(x^2-1\right)^2+3\left(x^2-1\right)-2=0$ באמצעות פרמטר: $t=x^2-1$
ובכך לפתור משוואה: $t^2+3t-2=0$ ולהחזיר את ההצבה עבור מציאת x.
דרך הפתרון תקפה לכל משוואה בה הנעלם מופיע בחזקות כפולות כגון 3 ו-6, או 4 ו-8.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $5x^4+3x^2-8=0$

2) $x^2\left(x^2+1\right)=10\left(3x^2-10\right)$

3) $x^3+4=\dfrac{32}{x^3}$

4) $x-9\sqrt{x}+14=0$

תשובות סופיות:

1) $x=\pm 1$
2) $x=\pm 2,\pm 5$
3) $x=-2,\sqrt[3]{4}$
4) $x_1=4\ ,\ x_2=49$

משוואות עם פרמטרים

סיכום כללי

משוואה עם פרמטר הינה משוואה שמכילה שני סוגי גדלים – משתנים ופרמטרים.

את המשתנים מקובל לסמן באותיות x, y ו- z, ואת הפרמטרים בשאר האותיות.

פתרון המשוואה יתקבל על ידי בידוד המשתנה, כך שיבוטא באמצעות הפרמטר/ים שבמשוואה, למשל פתרון המשוואה: $mx=4$ (כאשר x הוא הנעלם ו- m הוא פרמטר) הוא $x=\frac{4}{m}$, אשר מבוטא באמצאות הפרמטר m.

בכתיבת פתרון של משוואה עם פרמטרים יש לציין את תחום ההגדרה של הפרמטר עבורו הפתרון הוא בעל משמעות. בדוגמא הנ"ל, תחום ההגדרה הוא $m\neq 0$.

שאלות

1) פתור את המשוואות הבאות:

א. $3x-b=(b+1)x-6$

ב. $\frac{m+1}{x-1}=\frac{m-1}{x+1}$

2) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} x+my=1 \\ x+y=m \end{cases}$.

3) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

א. $x^2-2mx+m^2-1=0$

ב. $x^2+m(x+10)=2m^2-5x$

תשובות סופיות

1) א. $b\neq 2$, $x=\frac{b-6}{2-b}$ ב. $x=-m$

2) $(m+1,-1)$, $m\neq 1$

3) א. $x=m+1,\mathrm{m}-1$ ב. $x=m-5,-2m$

משוואות עם שורשים

סיכום כללי

פתרון משוואה מהצורה $\sqrt{x}=a$, יתקבל על ידי העלאה בריבוע של שני אגפי-המשוואה, באופן הבא: $\left(\sqrt{x}\right)^2=(a)^2 \quad \rightarrow \quad x=a^2$.

הערות

1) יש לזכור בעת העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה יש לבדוק את כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבתם במשוואה המקורית.
2) למשוואה מהצורה $\sqrt{x}=a$, שבה $a<0$, אין פתרון.
3) יש לסדר תחילה משוואות שבהן הביטוי עם שורש אינו מבודד.
4) במשוואות שבהן יותר מביטוי אחד עם שורש, יש לבודד תחילה את אחד הביטויים, להעלות בריבוע ולאחר מכן לחזור על התהליך ולבצע העלאה בריבוע פעם נוספת.

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $\sqrt{2x+5}=7$
2) $\sqrt{x+2}=x$
3) $\sqrt{3x+1}+x=13$
4) $\sqrt{2x+7}+4=x$
5) $\sqrt{x-1}+3=x$
6) $\sqrt{10x+6}+9=x$
7) $\sqrt{x+6}-2=2x$

תשובות סופיות

1) $x=22$
2) $x=2$
3) $x=8$
4) $x=9$
5) $x=5$
6) $x=25$
7) $x=0.25$

משוואות עם ערך מוחלט

סיכום כללי

הגדרה

ערך מוחלט הינו המרחק של מספר מ-0 ומוגדר באופן הבא: $|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$.

משוואה עם ערך מוחלט

משוואה עם ערך מוחלט היא מהצורה: $|x|=a$.
כדי לפתור משוואה עם ערכים מוחלטים יש למצוא את נקודות האפס של כל ערך מוחלט (קרי: הנקודות בהן הביטוי שבתוך הערך המוחלט מתאפס),
ולפצל את המשוואה הנתונה לתחומים עבור כל תחום.

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $|3x+14|=7$

2) $|12-x|=3x$

3) $2x-|8-x|=10$

4) $|x+2|+6=|2x-4|$

תשובות סופיות

1) $x=-\frac{7}{3},\ -7$ 2) $x=3$ 3) $x=6$ 4) $x=12,-1\frac{1}{3}$

שיטות כמותיות בניהול

פרק 2 - אי שוויונים אלגבריים

תוכן העניינים

אי-שוויונים ממעלה ראשונה

סיכום כללי

פעולות המותרות לביצוע בפתרון אי-שוויון

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

פעולות אסורות לביצור בפתרון אי-שוויון

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

שאלות

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $45x-26>109$

2) $2(x-5)\geq\frac{1}{2}(4x+6)$

3) $\frac{8x-4}{2}<\frac{9(x+1)}{3}$

תשובות סופיות

1) $x>3$

2) אף x.

3) $x<5$

אי-שוויונים ממעלה שנייה

סיכום כללי

אי שוויון ריבועי הוא מהצורה: $ax^2+bx+c \underset{<}{\overset{>}{}} 0$ כאשר $a \neq 0$.

כדי לפתור אי שוויון ריבועי יש למצוא את נקודות האפס של הביטוי הריבועי ולאחר מכן למצוא את תחום ההצבה הביטוי מקיים את אי השוויון עצמו.

שאלות

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $x^2<144$
2) $x^2-12x>-32$
3) $(x+2)(x+5)<0$
4) $(x+2)(x+4)<35$
5) $-x^2+13x+30<0$

תשובות סופיות

1) $-12<x<12$
2) $x<4\ ,\ x>8$
3) $-5<x<-2$
4) $-9<x<3$
5) $x<-2\ ,\ x>15$

אי-שוויונים ממעלה שלישית

סיכום כללי

אי שוויונים ממעלה גבוהה מיוחסים לכאלה שניתן לכתוב אותם בצורה של פולינומים, כגון: $x^3-4x^2+4x+1>0$, $x^4+2x^2+1<0$ וכו'.

נפתור אותם על ידי פירוק לגורמים ומציאת נקודות האפס של כל גורם.

לאחר מכן נבדוק את כל אחד מתחומי המספרים המתקבלים עבור הנעלם, ונראה באלו מהם מתקבל פסוק אמת.

שאלות

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $(x-1)(x-2)(x-3)>0$

2) $(-2x^2-3x+2)(x+1)\le 0$

3) $(x^2+3x+5)(x-2)>0$

תשובות סופיות

1) $1<x<2$, $x>3$

2) $-2\le x\le -1$, $x\ge \frac{1}{2}$

3) $x>2$

אי-שוויונים עם מנה

סיכום כללי

אי שוויון מהצורה $\frac{f(x)}{g(x)}>0$ (או $\frac{f(x)}{g(x)}<0$) נקרא אי-שוויון עם מנה,

בו $f(x)$ ו-$g(x)$ פולינומים.

למשל $\frac{2x+4}{x^2-3x+4}<0$, בו $f(x)=2x+4$ ו-$g(x)=x^2-3x+4$.

כדי לפתור אי שוויון עם מנה, נמצא את נקודות האפס של $f(x)$ ושל $g(x)$,

ונציב מספרים בתחומים המתקבלים.

אלו שיתנו פסוק אמת יהוו את פתרון אי-השוויון.

הערות

- ניתן לבצע כפל של המכנה בריבוע בכדי להעביר את אי השוויון לצורה של מכפלות.
- ניתן להעביר אי שוויון המכיל מספר מנות ומספרים שלמים לצורה הנ״ל,
על ידי פעולות אלגבריות מתאימות תחילה.

שאלות

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $\frac{x-1}{x^2-9}>0$

2) $\frac{x-1}{3x+2}\geq -3$

3) $\frac{x-3}{2x^2-10x+12}>0$

תשובות סופיות

1) $-3<x<1\ ,\ x>3$

2) $x<-\frac{2}{3}\ ,\ x\geq-\frac{1}{2}$

3) $2<x<3\ ,\ x>3$

אי-שוויונים כפולים – מערכות וגם ואו

סיכום כללי

אי-שוויון כפול הוא צורה מקוצרת להציג שני אי-שיוונים אשר יש לפתור יחד (קרי: כמערכת 'וגם').

למשל, במקום לכתוב: $a<b$ וגם $b<c$, ניתן לכתוב: $a<b<c$.

מכאן, כדי לפתור אי שוויון כפול יש לפצל אותו תחילה לשני אי-שיוונים,

ולפתור כל אחד בנפרד. לאחר מכן יש לקחת את חיתוך הפתרונות.

שאלות

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $3<x+1<5$

2) $-1<\frac{x-1}{x+1}<1$

3) $6x-38\le x-3\le 5x+7$

תשובות סופיות

1) $2<x<4$

2) $x>0$

3) $-2.5\le x\le 7$

אי שוויונים עם ערך מוחלט

סיכום כללי

כללים לפתרון אי שוויון עם ערך מוחלט יחיד

מקרה	$\|x\| < a$	$\|x\| > a$
פתרון	$-a < x < a$	$x < -a \bigcap x > a$

כללים לפתרון אי שוויון עם מספר ערכים מוחלטים

- נמצא את הנקודות המאפסות כל ביטוי עם ערך מוחלט.
- מחלקים את אי השוויון לתחומים לפי נקודות האפס.
- פותרים את אי השוויון לכל תחום בנפרד.
- כותבים פתרון כללי (מערכת או) לכל התחומים יחדיו.

שאלות

1) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $|x+2| < 3$ ב. $|2x+1| > 7$

ג. $|6-2x| < x$ ד. $|2x+1| - 3x > 4$

2) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $1 < |4-3x| < 7$ ב. $|2x+3| < 8 < |5-x|$

3) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $|x-3| + |2x+2| > 7$ ב. $|3-2x| - 11 > 4 - |6+x|$

תשובות סופיות

1) א. $-5<x<1$ ב. $3<x$ או $x<-4$

ג. $2<x<6$ ד. $x<-1$.

2) א. $3\frac{2}{3}<x<1\frac{2}{3}$ או $-1<x<1$ ב. $-5\frac{1}{2}<x<-3$

3) א. $2<x$ או $x<-2$ ב. $4<x$ או $x<-6$

אי שוויונים עם שורשים

סיכום כללי

מקרים בפתרון אי-שוויונות עם שורשים

מקרה	אי השוויון	פתרון
$a \geq 0$	$\sqrt{f(x)} < a$	$0 \leq f(x) < a^2$
$a < 0$	$\sqrt{f(x)} < a$	אין פתרון
	$\sqrt{f(x)} > a$	כל x בת.ה. של $f(x)$

שאלות

פתור את אי השוויונים הבאים:

1) $\sqrt{x+3} < 7$

2) $\sqrt{2x-5} \geq 1$

3) $\sqrt{2x^2+5x-6} > 2-x$

4) $\sqrt{x^2+x-6} < x-3$

תשובות סופיות

1) $-3 \leq x < 46$

2) $x \geq 3$

3) $x < -10\ ,\ x > 1$

4) $\varnothing$

שיטות כמותיות בניהול

פרק 3 - חוקי החזקות והשורשים

תוכן העניינים

חוקי החזקות

סיכום כללי

סיכום חוקי החזקות

1. $a^0=1$
2. $a^1=a$
3. $a^n\cdot a^m=a^{m+n}$
4. $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$
5. $\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$
6. $a^m\cdot b^m=\left(a\cdot b\right)^m$
7. $\frac{a^m}{b^m}=\left(\frac{a}{b}\right)^m$
8. $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$
9. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}=\left(\frac{b}{a}\right)^m$

שאלות

1) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^na^m=a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$.

א. a^2a^6 ב. $t^3t^5t^7$ ג. $b^2b^5b^{12}b^3$

ד. $\frac{k^8}{k^3}$ ה. $\frac{n^{14}}{n^9}$ ו. $\frac{c^6}{c^2}$

ז. $\frac{a^3a^{19}}{a^{15}}$ ח. $\frac{x^{30}}{x^9x^{18}}$ ט. $\frac{y^3y^{15}}{y^4y^{14}}$

י. $3^23^33^4$ יא. $\frac{2^{16}2^2}{2^{10}}$ יב. $\frac{5^{20}5^35^{16}}{5^45^{22}5^8}$

2) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^na^m=a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$.

א. $\frac{3^42^7}{2^63^2}$ ב. $\frac{a^{10}b^{13}a^3}{b^4b^6b^2a^{12}}$ ג. $\frac{x^8y^5y^9x^2}{y^4x^4}$

3) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{2^3\cdot 2^7}{2^4\cdot 2^5}$ ב. $\frac{9^3\cdot 27^2}{3^9\cdot 81}$

ג. $\frac{10^9\cdot 25^5\cdot 8^{-1}}{40^3\cdot 125^5}$ ד. 2^3+2^5

4) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוק: $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$.

א. $(a^2)^4$
ב. $(c^3)^{10}$
ג. $(x^3x^{10})^2$
ד. $\dfrac{(b^2)^3}{b^2b^3}$
ה. $\dfrac{n^7n^8}{(n^3)^4}$
ו. $\dfrac{d^{20}(d^4)^2}{d^{12}(d^3)^2}$
ז. $\dfrac{2^5(2^4)^2 2^3}{(2^3 2^2)^3}$
ח. $\dfrac{3^6(3^3 3^2)^6}{3^{28}(3^2)^3}$
ט. $\dfrac{(8^3)^8 8^{11}}{(8^2 8)^3 8^8}$

5) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\dfrac{2^4\cdot 16^5}{8\cdot 512}$
ב. $\dfrac{(4^2)^3 16}{64\cdot 2^3}$
ג. $\dfrac{((3^4)^4)^5}{81^3 27^4 3^5}$

6) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\dfrac{(2a^2b)^3\cdot(ab^{-3})^2}{4ab^{-2}\cdot\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^4}$
ב. $\dfrac{(k^2)^{m+2}\cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3\cdot\dfrac{1}{k^{7m-4}}}$
ג. $\dfrac{4^{b+3}}{4^{b+1}+4^{b+2}}$
ד. $\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{x^{n+3}+x^{n+5}}{x^{n+2}}$

7) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $(ab)^n = a^nb^n$ ו- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

א. $(a^2b)^3$
ב. $(m^4n^3)^5$
ג. $(x^{12}y^3)^3$
ד. $\left(\dfrac{a^3}{b^2}\right)^4$
ה. $\left(\dfrac{i^4}{k^3}\right)^7$
ו. $\left(\dfrac{a^{14}b^4}{a^6ab^3}\right)^3$
ז. $\left(\dfrac{x^3y^5y^2x^6}{y^4x^7}\right)^6$
ח. $\left(\dfrac{t^7r^{20}t^3}{r^2r^{12}t^8}\right)^2$
ט. $\left(\dfrac{(b^{12}c)^2c^{14}}{c(c^3b^5)^4b^3}\right)^2$

8) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה שלילית:

א. $\frac{1}{4^6}$ ב. $\frac{1}{5^3}$ ג. $\frac{1}{2^{10}}$

ד. $\frac{1}{8}$ ה. $\frac{1}{81}$ ו. $\frac{1}{125}$

9) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה חיובית וחשב את ערכם:

א. $\frac{1}{4^{-3}}$ ב. $\frac{1}{3^{-2}}$ ג. $\frac{1}{5^{-3}}$

10) חשב את הביטויים הבאים:

א. $\frac{2^{-5}\cdot 5^3\cdot 2^{14}}{5^2\cdot 5^{-10}\cdot 5^8\cdot 2^6}$ ב. $\frac{3^{-6}\cdot 7^7\cdot 7^{-4}}{3^{-4}\cdot 3^{-3}\cdot 7^3}$

11) פשט את הביטויים הבאים לצורה ללא חזקות שליליות.

א. $\left(\frac{5^{-4}}{3^2}\right)^{-6}$ ב. $\frac{\left(4^4\right)^{-4}3^{-11}}{\left(3^{-2}4^3\right)^{-6}}$ ג. $\frac{2^{-3}5^4}{5^4\cdot 125\cdot\left(5^2 2\right)^{-3}\cdot 2^{-4}}$

12) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{a^{n+2}\cdot a^{2-3n}}{\left(a^3\right)^{n+1}}$ ב. $\frac{\left(k^2\right)^{m+2}\cdot k^{1-3m}}{\left(k^{2m}\right)^3\cdot\frac{1}{k^{7m-4}}}$ ג. $\frac{\left(m^{n+2}\right)^3\cdot m^{-4n-2}}{\frac{1}{m^{6n+2}}\cdot\left(m^3\right)^{n-2}}$

תשובות סופיות

1) א. a^8 ב. t^{15} ג. b^{22} ד. k^5 ה. n^5 ו. c^4
ז. a^7 ח. x^3 ט. 1 י. 3^9 יא. 2^8 יב. 5^5

2) א. 18 ב. ab ג. x^6y^{10}

3) א. 2 ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{5}{8}$ ד. 40

4) א. a^8 ב. c^{30} ג. x^{26} ד. b ה. n^3 ו. d^{10}
ז. 2 ח. 9 ט. 8^{18}

5) א. 2^{12} ב. 2^7 ג. 3^{51}

6) א. $\frac{2b^3}{a}$ ב. k ג. $3\frac{1}{5}$ ד. $\frac{1}{x}+x$

7) א. a^6b^3 ב. $m^{20}n^{15}$ ג. $x^{36}y^9$ ד. $\frac{a^{12}}{b^8}$ ה. $\frac{i^{28}}{k^{21}}$ ו. $a^{21}b^3$
ז. $x^{12}y^{18}$ ח. t^4r^{12} ט. b^2c^6.

8) א. 4^{-6} ב. 5^{-3} ג. 2^{-10} ד. 2^{-3} ה. 3^{-4} ו. 5^{-3}

9) א. 64 ב. 9 ג. 125

10) א. 1000 ב. 3

11) א. $5^{24}\cdot 3^{12}$ ב. $\frac{4^2}{3^{23}}$ ג. $5^3\cdot 2^4$

12) א. a^{1-5n} ב. k ג. m^{2n+12}

חוקי השורשים

סיכום כללי

סיכום חוקי השורשים

1. $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$
2. $\sqrt[m]{a}=a^{\frac{1}{m}}$
3. $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$
4. $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{a\cdot b}$
5. $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$
6. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$

שאלות

1) הבא את הביטויים הבאים לצורה: $\sqrt[n]{a^m}$.

א. $3^{\frac{1}{4}}$ ב. $2^{\frac{3}{5}}$ ג. $6^{\frac{5}{6}}$

ד. $-12^{\frac{2}{7}}$ ה. $-(-4)^{\frac{1}{3}}$ ו. $-(-3)^{\frac{3}{4}}$

ז. $5^{-\frac{1}{4}}$ ח. $27^{-\frac{1}{3}}$ ט. $64^{-\frac{5}{6}}$

2) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{49}$ ב. $-\sqrt{25}$ ג. $\sqrt[3]{8}$

ד. $-\sqrt[7]{128}$ ה. $\sqrt[3]{(-2)^6}$ ו. $\left(\sqrt[5]{1024}\right)^2$

ז. $\left(\sqrt[5]{-243}\right)^3$ ח. $\sqrt[4]{-16}$ ט. $\sqrt[4]{-25^2}$

י. $\sqrt[4]{(-25)^2}$

3) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

א. $8^{\frac{2}{3}}$ ב. $32^{-\frac{3}{5}}$ ג. $128^{-\frac{2}{7}}$

ד. $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$ ה. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2.5}$ ו. $\left(\frac{64}{343}\right)^{-\frac{2}{3}}$

ז. $81^{\frac{3}{4}}\cdot 64^{-\frac{1}{3}}$ ח. $343^{-\frac{2}{3}}\cdot 100^{\frac{1}{2}}$ ט. $16^{\frac{1}{4}}\cdot 8^{-\frac{1}{3}}\cdot 4^{-\frac{1}{2}}$

4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ ב. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$ ג. $\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}$

ד. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ ה. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$ ו. $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$

ז. $\frac{\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$ ח. $\frac{\sqrt[3]{500}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt[4]{25^2}\cdot\sqrt[3]{4}}$ ט. $\frac{\sqrt[3]{8^2}\sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{400}\sqrt{2}}$

5) הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים:

א. $3\sqrt{2}$ ב. $5\sqrt{3}$ ג. $\frac{\sqrt{36}}{2}$

ד. $2\sqrt[3]{3}$ ה. $x\sqrt{x}$

6) הכנס את כל המקדמים בביטויים הבאים לתוך השורש:

א. $2\sqrt{5}$ ב. $4\sqrt[3]{2}$ ג. $2\sqrt[5]{3}$

ד. $\frac{\sqrt{24}}{2}$ ה. $\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$ ו. $\frac{3\sqrt[4]{5000}}{10}$

ז. $-5\sqrt[3]{2}$ ח. $-5\sqrt[4]{2}$ ט. $-5\sqrt[5]{-2}$

7) הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר:

א. $\sqrt{12}$ ב. $\sqrt{48}$ ג. $\sqrt{63}$

ד. $\sqrt[3]{54}$ ה. $\sqrt{x^5}$

8) חלץ מן הביטויים הבאים את המקדם הגבוה ביותר ככל הניתן:

א. $\sqrt{40}$ ב. $\sqrt{50}$ ג. $\sqrt{320}$

ד. $\sqrt[3]{108}$ ה. $\sqrt[3]{56}$ ו. $\sqrt[5]{160}$

ז. $\sqrt[4]{162}$ ח. $\sqrt[5]{972}$ ט. $\sqrt[6]{192}$

תשובות סופיות

1) א. $\sqrt[4]{3}$ ב. $\sqrt[5]{2^3}$ ג. $\sqrt[6]{6^5}$ ד. $-\sqrt[7]{12^2}$ ה. $-\sqrt[3]{-4}$ ו. ϕ
ז. $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ ח. $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$ או $\frac{1}{3}$ ט. $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}}$ או $\frac{1}{2^5}$

2) א. 7 ב. -5 ג. 2 ד. -2 ה. 4 ו. 16
ז. -27 ח. ϕ ט. ϕ י. 5

3) א. 4 ב. $\frac{1}{8}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. 125 ה. $\frac{32}{243}$ ו. $\frac{49}{16}$
ז. $\frac{27}{4}$ ח. $\frac{10}{49}$ ט. $\frac{1}{2}$

4) א. 4 ב. 9 ג. 20 ד. 6 ה. 3 ו. 2
ז. $\sqrt{2}$ ח. $\sqrt{5}$ ט. $\sqrt{2}$

5) א. $\sqrt{18}$ ב. $\sqrt{75}$ ג. $\sqrt{9}$ ד. $\sqrt[3]{24}$ ה. $\sqrt{x^3}$

6) א. $\sqrt{20}$ ב. $\sqrt[3]{128}$ ג. $\sqrt[5]{96}$ ד. $\sqrt{6}$ ה. $\sqrt[3]{3}$
ו. $\sqrt[4]{40\frac{1}{2}}$ ז. $\sqrt[3]{-250}$ ח. $-\sqrt[4]{1250}$ ט. $\sqrt[5]{5^5\cdot 2}$.

7) א. $2\sqrt{3}$ ב. $4\sqrt{3}$ ג. $3\sqrt{7}$ ד. $3\sqrt[3]{2}$ ה. $x^2\sqrt{x}$

8) א. $2\sqrt{10}$ ב. $5\sqrt{2}$ ג. $8\sqrt{5}$ ד. $3\sqrt[3]{4}$ ה. $2\sqrt[3]{7}$ ו. $2\sqrt[5]{5}$
ז. $3\sqrt[4]{2}$ ח. $3\sqrt[5]{4}$ ט. $2\sqrt[6]{3}$

משוואות מעריכיות יסודיות

סיכום כללי

- פתרון כללי של משוואת מעריכית מהצורה: $a^x=a^y$ הוא: $x=y$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x=1$ הוא: $x=0$ שכן: $a^x=1=a^0$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x=b^x$ הוא: $x=0$ שכן: $a^x=b^x=1$ ללא תלות בבסיסים.

שאלות

1) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי החזקות היסודיים):

א. $5^x\cdot 25^{x+2}=125$

ב. $\left(2^x\cdot 32\right)^3=8$

ג. $\left(5^{x^2}\right)^5\cdot\frac{1}{5^5}=625^{x-1}$

2) פתור את המשוואה הבאה (הבסיס הוא שבר): $27\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{5x+2}=8$.

3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי השורשים):

א. $\sqrt{27}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}=9\sqrt{3}$

ב. $\left(9\sqrt{27}\right)^{3x}\cdot 3^{2-x}=\frac{1}{9}$

ג. $\sqrt[x]{16}\cdot\left(\frac{1}{2^x}\right)^3=\frac{1}{16}$

תשובות סופיות

1) א. $x=-\frac{1}{3}$ ב. $x=-4$ ג. $x=1,-\frac{1}{5}$

2) $x=\frac{1}{5}$

3) א. $x=-\frac{1}{2}$ ב. $x=-8$ ג. $x=2,-\frac{2}{3}$

משוואות עם חיבור וחיסור איברים

סיכום כללי

במשוואות הכוללות חיבור וחיסור של איברים, נאתר את הבסיס עם המעריך הקטן ביותר ונסמן אותו ב- t, למשל במשוואה: $4^x-3\cdot2^x=4$ נסמן: $2^x=t$.

נבטא את כל איברים המשוואה באמצעות t ונפתור אותה עבורו.

לאחר מכן נחזיר את ההצבה למציאת ערכי ה- x המתאימים.

שאלות

1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם חיבור וחיסור ממעלה ראשונה):

א. $2^x+6\cdot2^x=56$
ב. $5\cdot3^x-3^{x+1}=162$

2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם חיבור וחיסור ממעלה ראשונה):

א. $81^{x+1}+18\cdot3^{4x-3}=735$
ב. $5^{3x+2}+4\cdot125^x=29$

3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחיסור ממעלה שנייה):

א. $9^x-36\cdot3^x+243=0$
ב. $16^{x+1}-65\cdot4^x+4=0$

4) פתור את המשוואה הבאה (משוואות כלליות): $\frac{20}{9^x+1}=3-\frac{8}{9^x-1}$.

5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות מסכמות):

א. $\frac{1}{25^{1-x}}-6\cdot5^{x-1.5}+1=0$
ב. $3^x-\sqrt{16\cdot3^{x+1}}=-9$

תשובות סופיות

1) א. $x=3$ ב. $x=4$

2) א. $x=\frac{1}{2}$ ב. $x=0$

3) א. $x=2,3$ ב. $x=1,-2$

4) $x=1,-\frac{1}{2}$

5) א. $x=\frac{1}{2},1\frac{1}{2}$ ב. $x=1,3$

משוואות עם קבוע אוילר

סיכום כללי

קבוע אוילר מסומן באות e וערכו שווה (בערך) ל-2.71828.

למספר זה משמעויות רבות במתמטיקה ובמדעים ועל כן הוחלט לסמן אותו באות משלו ולשלב אותו במשוואות מתמטיות.

דרך הפתרון של משוואה שבה הבסיס הוא e זהה לחלוטין לזו של משוואה מעריכית רגילה, כפי שנלמד בפרק זה.

שאלות

1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם קבוע אוילר):

א. $e^{3x}=e^{2x-1}$

ב. $e^{x-5}=\left(e^{1-x}\right)^3$

2) פתור את המשוואה הבאה (עם חיבור וחיסור): $e^{2x}+e^x-2=0$.

3) פתור את המשוואה הבאה (המשתנה גם בבסיס): $xe^x=\sqrt[4]{e}\cdot x$.

תשובות סופיות

1) א. $x=-1$ ב. $x=2$

2) $x=0$

3) $x=0\ ,\ \frac{1}{4}$

אי שוויונים מעריכיים:

סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $a^x > a^y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

שאלות:

פתור את אי השיוויונים הבאים:

1) $3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x}$

2) $e^{\sqrt{x}+1} > e^{2x}$

3) $25^x + 5 < 6 \cdot 5^x$

הערה

השאלות הבאות דורשות הכרות עם מושג הלוגריתם הטבעי (ln) וכן חוקי הלוגריתמים אשר ילמדו בהמשך.

4) $e^{2x} - 5e^x + 4 > 0$

תשובות סופיות

1) $x < \frac{2}{3}$

2) $0 \le x < 1$

3) $0 < x < 1$

4) $x > \ln 4$ או $x < 0$

שיטות כמותיות בניהול

פרק 4 - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים

תוכן העניינים

הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות

סיכום כללי

הגדרה

הלוגריתם מוגדר באופן הבא: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, כאשר: $a \neq 1$, $b > 0$, a.

הסבר

לוגריתם על בסיס a של b מוגדר בתור החזקה שיש להעלות את a,
על מנת שיהיה שווה ל- b. ערך חזקה זו הוא x.
ערך לוגריתם יכול להיות חיובי, שלילי או אפס.
נחשב ערכי לוגריתמים ונפתור משוואות לוגריתמיות על ידי מעבר לפי ההגדרה למשוואה מעריכית מתאימה.

כללים יסודיים בלוגריתמים

מהגדרת הלוגריתם נובע כי: $\log_a a = 1$ וכן: $\log_a 1 = 0$, לכל $a > 0$, $a \neq 1$.

שאלות

1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמים הבאים:

א. $\log_2 32$ ב. $\log 1000$ ג. $\log_{25} 5$

ד. $\log_8 4$ ה. $\log_4 \frac{1}{16}$ ו. $\log_a a^4$

ז. $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$

2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (יסודי - שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\log_{36} 6 = x$ ב. $\log_2 x = 16$

ג. $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$ ד. $\log_x 64 = 3$

ה. $\log_x 25 = 2$ ו. $\log_x (3x+4) = 2$

3) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (כללי - שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\log_6(4x-2)=1$

ב. $\log_8(x^4-73)=1$

ג. $\log_3 \frac{x+3}{3-3x}=-2$

4) פתור את המשוואה הלוגריתמית הבאה: $\log_4(\log_3 x)=1$.

(שימוש בהגדרת הלוג מספר פעמים)

5) פתור את המשוואה הלוגריתמית הבאה: $\log_2(3^x+37)=6$.

(מתקבלת משוואה מעריכית)

6) פתור את המשוואה הלוגריתמית הבאה (הצבה): $(\log_2 x)^4=10000$.

תשובות סופיות

1) א. 5 ב. 3 ג. $\frac{1}{2}$ ד. $\frac{2}{3}$ ה. -2

ו. 4 ז. -1.5

2) א. $x=\frac{1}{2}$ ב. $x=65,536$ ג. $x=27$ ד. $x=4$

ה. $x=5$ ו. $x=4$

3) א. $x=2$ ב. $x=\pm3$ ג. $x=-2$

4) $x=81$

5) $x=3$

6) $x=1024, \frac{1}{1024}$

חוקי הלוגריתמים:

סיכום כללי:

להלן 3 חוקי הלוגריתמים עבור בסיס $a>0\neq 1$ וארגומנטים x ו- y חיוביים:

- מכפלה לסכום: $\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$.
- מנה להפרש: $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$.
- מקדם למעריך: $\log_a b^n=n\log_a b$ (כאשר $b>0$ ו- n מספר ממשי כלשהו).

שאלות:

שאלות חישוב כלליות:

1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

א. $\log_3 12+\log_3 2.25$

ב. $\log_{\frac{1}{5}} 40+\log_{\frac{1}{5}} 12.5+\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{4}$

ג. $\log_2 200-\log_2 100$

2) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

א. $\dfrac{\log_5 16}{\log_5 8}$

ב. $\dfrac{\log_9 62.5+\log_9 2}{\log_9 0.2}$

משוואות לוגריתמיות:

3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש ישיר בחוקי הלוגריתמים):

א. $\log_2 x+\log_2(x-6)=4$

ב. $\log_3 x+\log_3(x+2)=1$

4) פתור את המשוואות הבאות (פתרון בשיטת לוג שווה לוג):

א. $\log_5(4x-3)=\log_5 7$.

ב. $2\log_2(2x-2)-\log_2(16-x)=\log_2(x-1)+1$.

5) פתור את המשוואות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א. $\log_3\left(3\cdot5^x+39\right)=3+\log_3\left(5^x-3\right)$.

תשובות סופיות:

1) א. 3 ב. 3- ג. 1

2) א. $\frac{4}{3}$ ב. 3-

3) א. $x=8$ ב. $x=3,\frac{1}{27}$

4) א. $x=2.5$ ב. $x=6$.

5) $x=1$

הלוגריתם הטבעי

סיכום כללי

לוגריתם על בסיס e (קבוע אוילר) מסומן: $\log_e \Rightarrow \ln$ ונקרא הלוגריתם הטבעי.

למשל: $\ln 3 = \log_e 3$ או $\ln\frac{1}{4} = \log_e\frac{1}{4}$. לוג זה נקרא בשם לן.

מהגדרת הלוגריתם מתקיים: $\ln a = b \rightarrow e^b = a$, כאשר $a > 0$ ו- b מספרים.

שאלות

1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הטבעיים הבאים:

א. $\ln e^2$ ב. $\ln\frac{1}{e^4}$ ג. $\ln\frac{1}{e\sqrt{e}}$

2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\ln x = 2$ ב. $\ln x = -\frac{1}{2}$

3) פתור את המשוואות הבאות (הצבה וחוקי הלוגריתמים):

א. $\ln\left(e^{2x} - \frac{1}{2}\right) + \ln 2 = x$

ב. $3\ln^2 x + \ln x = 2$

ג. $\ln\left(e^2 x^3\right) \cdot \ln\frac{1}{x} = \ln\left(ex^2\right)$

4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הוצאת לוג משני אגפי המשוואה)

א. $x^{\ln x} = e^6 x$ ב. $\left(\frac{1}{x}\right)^{2-3\ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x}$

5) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א. $e^{\ln 3}$ ב. $e^{2\ln 3}$

תשובות סופיות

1) א. 2 ב. -4 ג. -1.5

2) א. $x=e^2$ ב. $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$

3) א. $x=0$ ב. $x=\sqrt[3]{e^2},\frac{1}{e}$ ג. $x=\frac{1}{\sqrt[3]{e}},\frac{1}{e}$

4) א. $x=e^3,\frac{1}{e^2}$ ב. $x=\sqrt{e},e$

5) א. 3 ב. 9

משוואות עם בסיסים שונים:

סיכום כללי:

לעיתים תתקבל משוואה מעריכית שבה לא ניתן למצוא חזקה שלמה, כגון: $3^x=4$.
במקרים אלו נעזר בהגדרת הלוג כדי לבטא את ערך המעריך: $x=\log_3 4$.
את ערך הביטוי $\log_3 4$ ניתן לחשב ע"י מחשבון או ע"י מעבר לבסיס 10: $\log_3 4=\frac{\log 4}{\log 3}$.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות (בסיסים שונים):

א. $3^x=6$ ב. $2^x-9=0$

2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם בסיס ולוגריתם טבעי): $e^{3x}=3$

תשובות סופיות:

1) א. $x=\log_3 6=1.63$ ב. $x=\log_2 9=3.17$

2) $x=\frac{1}{3}\ln 3=0.36$

אי-שוויונים לוגריתמים

סיכום כללי

פתרון אי-השוויון $\log_a x > \log_a y$, הוא $x > y$, עבור $a > 1$, ו-$x < y$ עבור $0 < a < 1$.

שאלות

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $\log_2 x < \log_2 (5x - 20)$

2) $\ln x \geq \ln(x^2 - 12)$

3) $\ln x < 3$

4) $\ln^2 x - 6\ln x < 7$

5) $\frac{6}{\ln^2 x} \geq 2 - \frac{1}{\ln x}$

תשובות סופיות

1) $x > 5$

2) $2\sqrt{3} < x \leq 4$

3) $0 < x < e^3$

4) $\frac{1}{e} < x < e^7$

5) $\frac{1}{\sqrt{e^3}} \leq x \leq e^2$ וגם $x \neq 1$

שיטות כמותיות בניהול

פרק 5 - הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות

תוכן העניינים

הפונקציה הליניארית

סיכום כללי

ניתן להציג תהליכים שונים באמצעות יחס ישר בין שני משתנים.

יחס זה מוצג בתור קו ישר מהצורה: $\frac{y}{x}=m$ או $y=mx$.

הפונקציה מהצורה: $y=mx$ מתאר יחס ישר בין x ל- y.

שאלות

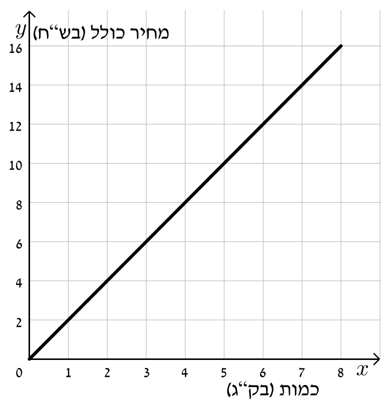
1) המחיר של 1 ק״ג עגבניות הוא 2 ₪.
הקו הישר שבסרטוט מתאר את מחיר העגבניות הכולל כפונקציה של משקל העגבניות.

א. מה המחיר של 3 ק״ג עגבניות?

ב. מהי כמות העגבניות שניתן לקנות ב-12 ₪?

ג. מהו היחס בין כמות העגבניות (בק״ג) שניתן לרכוש לבין מחירם?

ד. כתוב ביטוי אלגברי שייצג את המחיר הכולל של העגבניות כתלות במשקלם.



שיפוע ישר – סיכום

ישר שמשוואתו היא $y=mx$ הוא בעל שיפוע m כאשר:

- אם $m>0$ הישר עולה.
- אם $m<0$ הישר יורד.
- אם $m=0$ הישר קבוע (אינו עולה ואינו יורד).

חישוב שיפוע בשיטת המדרגות

בכל התקדמות של יחידה אחת לאורך ציר x נבדוק כמה יחידות עלינו או ירדנו לאורך ציר y. שיפוע הישר יתאים להתקדמות בציר ה- y.

שיפוע בין שתי נקודות

ניתן לחשב שיפוע בין שתי נקודות כלליות הנמצאות על ישר.

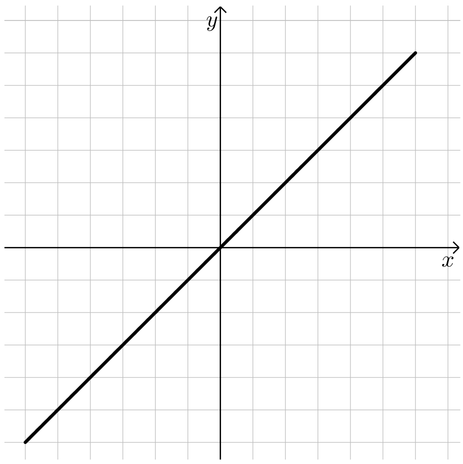
נניח ישר העובר דרך שתי נקודות $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ ו- $\mathrm{B}(x_2, y_2)$.

שיפוע הישר יחושב: $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (כאשר $\Delta x \neq 0$).

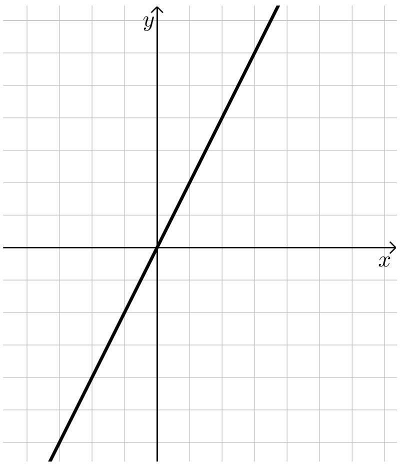
חשוב להקפיד על חיסור של אותן הנקודות במונה ובמכנה.

2) לפניך הגרפים של הישרים הבאים:

i.



ii.

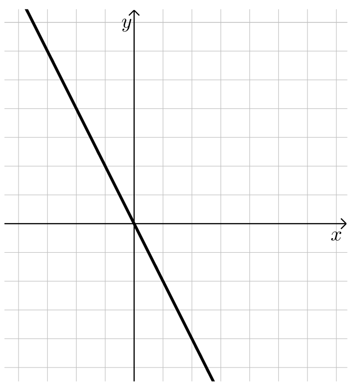


א. מצא את השיפוע של כל אחד מהם.

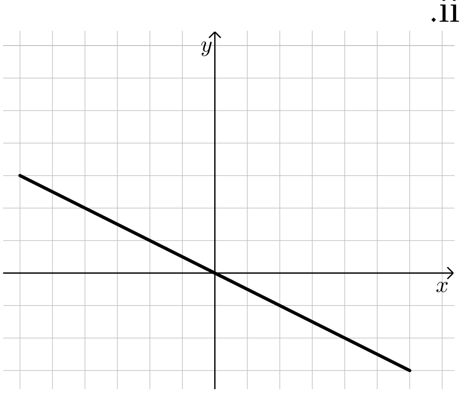
ב. רשום פונקציה מהצורה: $y = mx$ לכל אחד מהישרים.

3) לפניך הגרפים של הישרים הבאים:

i.



ii.



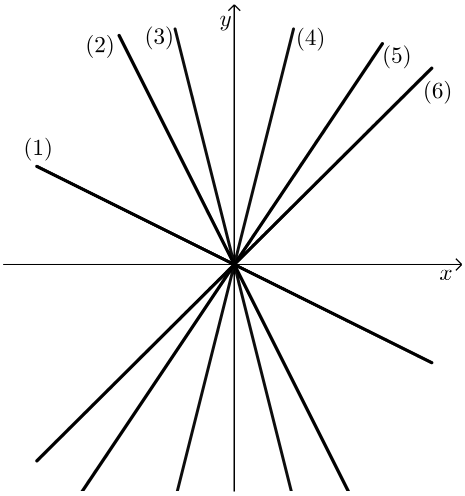
א. מצא את השיפוע של כל אחד מהם.

ב. רשום פונקציה מהצורה: $y = mx$ לכל אחד מהישרים.

4) לפניך 6 ישרים במערכת צירים אחת ו-6 שיפועים :

$-\frac{2}{3}$, 2 , -2 , 1.2 , -4 , 4 .

התאם כל שיפוע לכל ישר.



הקו הישר הכללי – סיכום

- משוואת הקו הישר הכללית היא מהצורה : $y=mx+b$
כאשר m הוא שיפוע הישר ו- b הוא האיבר החופשי כמשוואה.
- האיבר החופשי מייצג את נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y
אשר תמיד תהיה $(0,b)$.
- ישרים המקבילים זה לזה על בעלי אותו השיפוע (אותו m) ואיברים חופשיים שונים (b שונה), למשל : $y=4x-5$, $y=4x+1$.
- ישרים המקבילים לצירים הם מהצורות הבאות :
    - ישר המקביל לציר ה- x : $y=n$.
    - ישר המקביל לציר ה- y : $x=k$.

5) כתוב מהו m ומהו b במשוואות הישרים הבאות :

א. $y=3x-2$ ב. $y=x+6$

ג. $y=\frac{x}{3}+\frac{2}{5}$ ד. $y=\frac{x-3}{2}$

ה. $y=3+2(x-1)$ ו. $3y-2x+1=0$

6) כתוב את משוואות הישרים הבאות :

א. ישר בעל שיפוע $m=3$ אשר חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y=-1$.

ב. ישר בעל שיפוע 5- שפוגש את ציר ה- y כאשר $y=6$.

ג. ישר קבוע שחותך את ציר ה- y ב-4-.

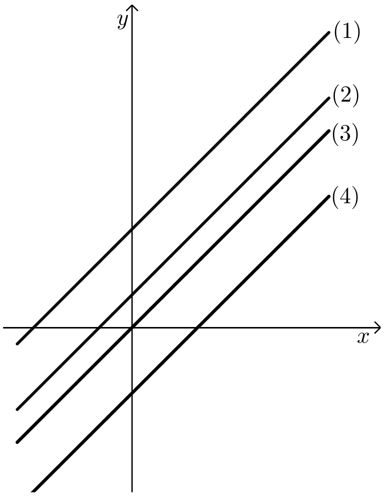
7) התאם בין הגרפים למשוואות הישרים:

א. $y=x+3$

ב. $y=x+1$

ג. $y=x$

ד. $y=x-2$



מציאת משוואת ישר – סיכום

שיפוע ישר לפי שתי נקודות

שיפוע ישר העובר דרך שתי נקודות $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$ יחושב: $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

(כאשר $\Delta x\neq 0$).

משוואת ישר

ניתן למצוא משוואת ישר מהצורה $y=mx+b$ כאשר נתונות שתי נקודות הנמצאות עליו לפי השלבים הבאים:

- מציאת הפרמטר m (שיפוע הישר) לפי: $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.
- מציאת הפרמטר b (האיבר החופשי) ע"י הצבת m ואחת מן הנקודות הנתונות במשוואת הישר.

לחילופין ניתן לבצע את שתי הפעולות יחד לפי הנוסחה: $y-y_1=m(x-x_1)$.

חישוב שיפוע בין שתי נקודות

8) חשב את השיפוע של ישר העובר דרך הזוגות הבאים:

א. $(0,4)$, $(8,0)$

ב. $(0,0)$, $(3,-4)$

ג. $(1,8)$, $(7,-9)$

ד. $\left(\frac{2}{3},2\right)$, $\left(1\frac{1}{3},5\right)$

מציאת משוואת ישר באמצעות נקודה ושיפוע

9) מצא את משוואת הישרים הבאות:

א. שיפועו 3 והוא עובר דרך הנקודה $(2,8)$.

ב. שיפועו -0.5 והוא עובר דרך הנקודה $(0,-7)$.

ג. שיפועו 0 והוא עובר דרך הנקודה $(-1,-3)$.

ד. שיפועו $-\frac{5}{8}$ והוא עובר דרך הנקודה $(-8,2)$.

ה. שיפועו 1 והוא עובר דרך ראשית הצירים.

10) מצא משוואת ישר המקביל לישר $y=3x-1$ וחותך את ציר ה- y בנקודה $(0,4)$.

11) מצא משוואת ישר המקביל לישר $y=-4x+9$ ועובר דרך הנקודה $(-5,7)$.

12) מצא משוואת ישר המקביל לישר $5y-4x+9=0$ ועובר דרך ראשית הצירים.

מציאת משוואת ישר באמצעות שתי נקודות

13) מצא את משוואות הישרים העוברים דרך הנקודות הבאות:

א. $(3,6)$, $(1,8)$

ב. $(-4,-6)$, $(0,6)$

14) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודות $(2,-6)$ ו- $(5,3)$.

ב. מצא את משוואת הישר המקביל לישר שמצאת בסעיף הקודם ועובר דרך הנקודה $(-1,10)$.

חיוביות ושליליות של קו ישר – סיכום

חיתוך של פונקציה קווית עם הצירים

- כדי למצוא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה הקווית $y=mx+b$ עם ציר ה- y יש להציב $x=0$ במשוואתה. מתקבל: $y=b$, כלומר: $(0,b)$ היא נקודת החיתוך של הפונקציה הקווית עם ציר ה- y.
- כדי למצוא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה הקווית עם ציר ה- x יש להציב $y=0$. זו היא נקודת האפס של של הפונקציה.

חיתוך בין פונקציות קוויות

כדי למצוא את נקודת החיתוך בין שתי פונקציות קוויות $f(x)$ ו- $g(x)$ יש להשוות את משוואותיהם: $f(x)=g(x)$ ולהציב את ערך ה- x המתקבל כפתרון באחת המשוואות כדי לקבל את ערך ה- y של נקודת החיתוך.

תחומי חיוביות ושליליות של פונקציה

- תחום החיוביות של פונקציה הוא אוסף כל ערכי ה- x המקיימים: $f(x)>0$.
- תחום השליליות של פונקציה הוא אוסף כל ערכי ה- x המקיימים: $f(x)<0$.

ניתן למצוא תחומי חיוביות ושליליות ע"י ידיעת נקודת האפס של הפונקציה תחילה.

15) מצא את נקודות החיתוך של כל ישר עם הצירים:

א. $y=2x+5$

ב. $y=3x-1$

16) נתונה הפונקציה: $f(x)=3x-4$.

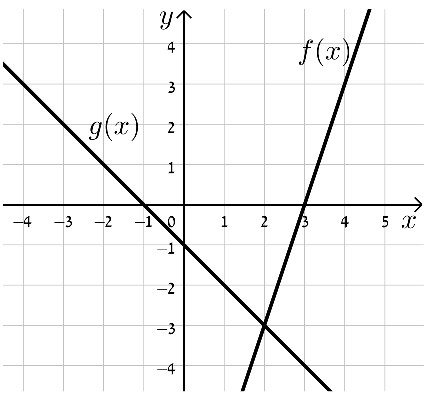
א. מצא את הנקודה שבה: $f(x)=0$.

ב. מצא את התחום שבו $f(x)>0$ ואת התחום שבו $f(x)<0$.

ג. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y.

ד. סרטט את הפונקציה במערכת צירים והראה את התחומים שמצאת.

17) לפניך שני גרפים של פונקציות קוויות.
(הרווח בין השנתות מתאר יחידה אחת).



א. מהן נקודות האפס של כל פונקציה?

ב. מהם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$?

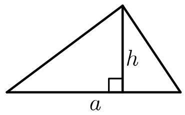
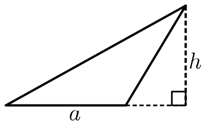
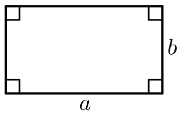
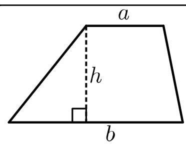
ג. מהם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$?

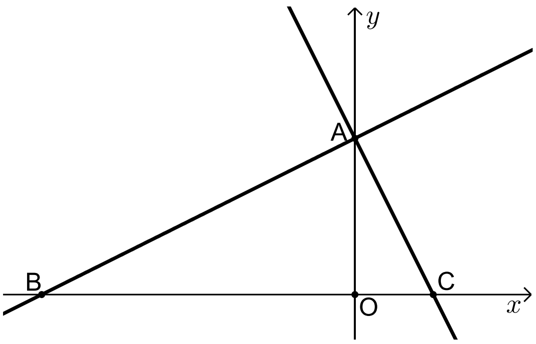
ד. מהי נקודת החיתוך של הפונקציות?

ה. מהו התחום בו $f(x)>g(x)$ ומהו התחום בו $f(x)<g(x)$.

חישובי שטחים עם הפונקציה הקווית – סיכום

שטחים של משולשים ומרובעים

שם הצורה	איור	אופן החישוב
משולש		$S=\frac{a\cdot h}{2}$
משולש קהה זווית		$S=\frac{a\cdot h}{2}$
מלבן		$S=a\cdot b$
טרפז		$S=\frac{(a+b)h}{2}$



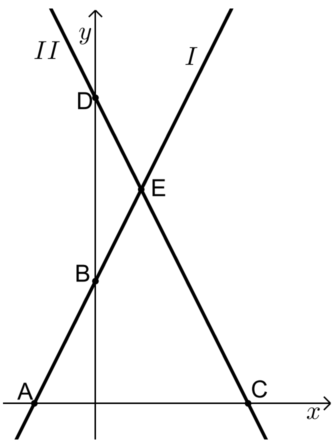
18) בסרטוט שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=\frac{1}{2}x+4$ ו- $g(x)=-2x+4$.

א. מצא את שיעורי נקודת המפגש של שתי הפונקציות (הנקודה A).

ב. מצא את נקודות החיתוך של כל פונקציה עם ציר ה- x (הנקודות B ו-C).

ג. מצא את אורך הקטע BC ואת אורך הקטע AO.

ד. חשב את $S_{\Delta ABC}$.



19) נתונים הישרים: $y=2x+4$ ו- $y=-2x+10$ המתוארים באיור הבא:

א. התאם לכל משוואה את הישר המתאים ונמק.

ב. מצא את שיעורי הנקודות A , B , C , D , E.

ג. מצא את שטחי המשולשים ACE ו-BDE.

20) בסרטוט שלפניך מתוארים הישרים AE ו-DE.

משוואת הישר DE היא $y=-\frac{1}{2}x+2$.

נתון כי: 3 יחידות אורך = EF

(מקביל לציר ה- y) וכן: $A(0,5)$.

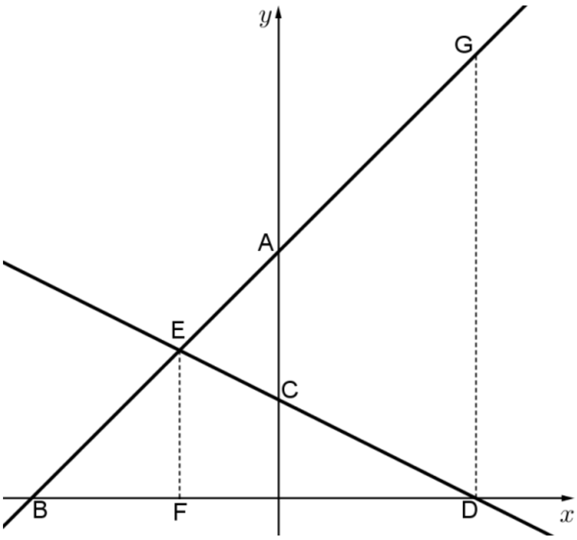
א. חשב את שיעורי הנקודה E.

ב. מצא את משוואת הישר AE.

ג. חשב את שיעורי הנקודות B ו-D.

ד. נתון כי DG מקביל לציר ה- y.

חשב את שטח הטרפז EFDG.



תשובות סופיות

1) א. 6 ס"מ ב. 6 קי"ג ג. $2:1$ ד. $y=2x$

2) i. א. $m=1$ ב. $y=x$ ii. א. $m=2$ ב. $y=2x$

3) i. א. $m=-2$ ב. $y=-2x$ ii. א. $m=-\frac{1}{2}$ ב. $y=-\frac{1}{2}x$

4) $m_{(6)}=1.2$, $m_{(5)}=2$, $m_{(4)}=4$, $m_{(3)}=-4$, $m_{(2)}=-2$, $m_{(1)}=-\frac{2}{3}$

5) א. $m=3\,,b=-2$ ב. $m=1\,,b=6$ ג. $m=\frac{1}{3}\,,b=\frac{2}{5}$

ד. $m=\frac{1}{2}\,,b=-\frac{3}{2}$ ה. $m=2\,,b=1$ ו. $m=\frac{2}{3}\,,b=-\frac{1}{3}$

6) א. $y=3x-1$ ב. $y=-5x+6$ ג. $y=4$.

7) א. (1) ב. (2) ג. (3) ד. (4)

8) ג. -0.5 ד. $-\frac{4}{3}$ ה. $-2\frac{5}{6}$ ו. 4.5

9) א. $y=3x+2$ ב. $y=-\frac{1}{2}x-7$ ג. $y=-3$ ד. $y=-\frac{5}{8}x-3$

ה. $y=x$

10) $y=3x+4$

11) $y=-4x-13$

12) $y=\frac{4}{5}x$

13) א. $y=-x+9$ ב. $y=3x+6$

14) א. $y=3x-12$ ב. $y=3x+13$

15) א. $(0,5)$, $(-2.5,0)$ ב. $\left(\frac{1}{3},0\right)$, $(0,-1)$

16) א. $\left(\frac{4}{3},0\right)$ ב. $f(x)<0:\ x<\frac{4}{3}$, $f(x)>0:\ x>\frac{4}{3}$

ג. $(0,-4)$ ד. לאיור מלא עיין בסרטון.

17) א. $f(x):\ (3,0)$; $g(x):\ (-1,0)$

ב. חיובית: $x>3$, שלילית: $x<3$ ג. חיובית: $x<-1$, שלילית: $x>-1$.

ד. $(2,-3)$ ה. $f(x)>g(x)$ עבור: $x>2$, ו- $f(x)<g(x)$ עבור: $x<2$.

18) א. $(0,4)$ ב. $B(-8,0)$, $C(2,0)$ ג. $AO=4$, $BC=10$ ה. 20 יח"ש.

19) א. $I: y=2x+4\ ,\ II: y=-2x+10$

ב. $A(-2,0)\ ,\ B(0,4)\ ,\ C(5,0)\ ,\ D(0,10)\ ,\ E(1.5,7)$

ג. 24.5 יח״ש $= S_{ACE}$, 4.5 יח״ש $= S_{BDE}$.

20) א. $E(-2,3)$ ב. $y=x+5$ ג. $B(-5,0)\ ,\ D(4,0)$

ד. 36 יחידות שטח.

הפונקציה הריבועית

סיכום כללי

ניתן להציג את משוואת הפונקציה הריבועית במספר צורות:

הצגה סטנדרטית: $y=ax^2+bx+c$ (כאשר: $a\ ,b\ ,c$ הם פרמטרים ו-$a\neq 0$).

הצגה קודקודית: $y=a(x-p)^2+k$ (כאשר: $a\ ,p\ ,k$ הם פרמטרים ו-$a\neq 0$).

הצגה כמכפלה: $y=a(x-m)(x-n)$ (כאשר: $a\ ,m\ ,n$ הם פרמטרים ו-$a\neq 0$).

הערה

הצגה כמכפלה אפשרית רק כאשר יש לפחות נקודת אפס אחת לגרף הפרבולה.

שאלות

1) כתוב פונקציה ריבועית המתאימה לערכי המקדמים הבאים:

א. $a=1\ ,b=0\ ,c=-4$

ב. $a=-1\ ,b=2\ ,c=5$

ג. $a=b=3\ ,c=-5$

ד. $a=\frac{1}{2}\ ,b=\frac{1}{3}\ ,c=0$

ה. $a=-\frac{1}{5}\ ,b=0\ ,c=\frac{1}{20}$

ו. $a=7\ ,b=\frac{1}{4}\ ,c=-1$

2) נתונה הפונקציה: $y=2x^2+bx-3$.
ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(1,-1)$.

א. מצא את ערך המקדם b.

ב. מצא את ציר הסימטריה של הפרבולה ואת שיעורי נקודת הקדקוד שלה.

ג. תאר אלו פעולות הזזה/מתיחה נעשו על גרף הפונקציה $y=x^2$ לקבלת גרף הפונקציה הנתונה.

סרטוט של גרף הפונקציה הריבועית הכללית – סיכום

בפונקציה הריבועית הנתונה בהצגתה הסטנדרטית: $y=ax^2+bx+c$, $(a\neq 0)$:

- הפרמטר a קובע האם הפרבולה היא ישרה או הפוכה וכן את מידת המתיחה שלה.
- הפרמטר c קובע את שיעור ה-y של נקודת החיתוך של גרף הפרבולה עם ציר ה-y.
- נוסחה למציאת ציר הסימטריה: $x=-\frac{b}{2a}$.
- שיעורי נקודת הקדקוד עבור פונקציה הנתונה בהצגה סטנדרטית הם: $\left(-\frac{b}{2a},c-\frac{b^2}{4a}\right)$.

3) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:
i. חשב את שיעורי נקודת הקדקוד של הפרבולה המתאימה.
ii. רשום את משוואת ציר הסימטריה של הפרבולה המתאימה.
iii. סרטט סרטוט סכמתי (מקורב) של הפרבולה המתאימה.

א. $y=-2x^2+10$ ב. $y=-x^2+3x$

ג. $y=3x^2-6x+7$ ד. $y=-8x^2-4x+1$

ה. $y=4x^2+20x+25$

מציאת נקודות האפס של פונקציה ריבועית עם a כללי – סיכום

פונקציות ריבועיות חלקיות

- פונקציה חסרת b היא מהצורה: $y=ax^2+c$, $(a\neq 0)$.

  אם a ו-c אם שוני סימן אז לפונקציה שתי נקודות אפס ששיעוריהן: $\left(\pm\sqrt{\frac{-c}{a}},0\right)$.

- פונקציה חסרת c היא מהצורה: $y=ax^2+bx$, $(a\neq 0)$.

  לפונקציה שתי נקודות אפס ששיעוריהן: $\left(-\frac{b}{a},0\right)$, $(0,0)$.

שיטות לפתרון משוואה ריבועית

- פירוק טרינום (במידה וישנם שני שורשים או שורש כפול).
- השלמה לריבוע.
- נוסחת השורשים: $\boxed{x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$

שאלות עם פונקציות

4) מצא את נקודות החיתוך עם ציר ה- x של הפונקציות הריבועיות הבאות:

א. $y=x^2+4x-5$ ב. $y=x^2+6x+10$

5) בכל אחד מהמקרים שלפניך נתון ציר הסימטריה של פרבולה ושיעורי אחת מנקודות האפס שלה. מצא את שיעורי נקודת האפס הנוספת.

א. $x=4\ ;\ \ (5,0)$ ב. $x=-1\ ;\ \ (7,0)$

6) נתונה הפונקציה: $y=x^2-2x-15$.

א. מהם שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפרבולה עם ציר ה- y?

ב. רשום פונקציה ריבועית נוספת בעלת אותה נקודת חיתוך עם ציר ה- y.

ג. מהם שיעורי נקודות האפס של הפרבולה?

ד. כמה נקודות חיתוך יש לפרבולה עם הישרים הבאים:

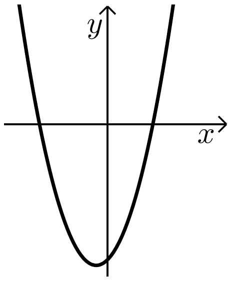
i. $y=-15$.

ii. $y=15$.

iii. $y=-25$.

ה. רשום פונקציה ריבועית נוספת שיש לה את אותן נקודות האפס כמו לפונקציה הנתונה.

7) לפניך הפרבולה: $y=x^2+x-6$.

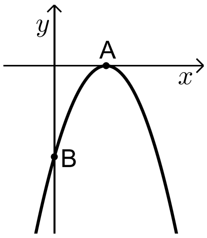


א. חשב את נקודות החיתוך של הפרבולה עם הצירים.

ב. חשב את המרחק של נקודת החיתוך של הפרבולה עם ציר ה- y מראשית הצירים.

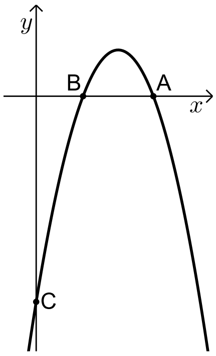
ג. חשב את המרחק שבין שתי נקודות החיתוך עם ציר ה- x.

8) לפניך סרטוט של גרף הפונקציה: $y=-x^2+4x-4$.



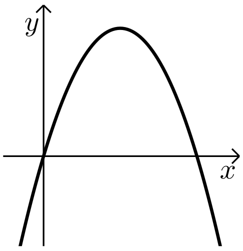
א. מצא את נקודות החיתוך של הגרף עם הצירים.
ב. מצא את מרחק הנקודה A (ראה ציור) מראשית הצירים.
ג. מצא את מרחק הנקודה B מראשית הצירים.

9) לפניך סרטוט של גרף הפונקציה: $y=-x^2+7x-10$.

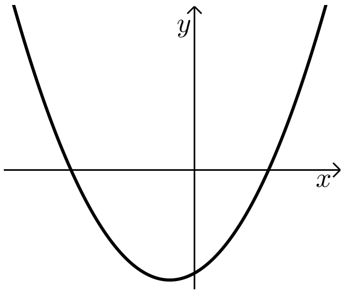


א. חשב את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
ב. חשב את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
ג. מהו המרחק בין הנקודה C לראשית הצירים?
ד. מצא את המרחק בין נקודה A לנקודה B (ראה סרטוט).
ה. מצא את המרחק בין נקודה A לראשית הצירים.

10) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפרבולה שמשוואתה: $y=-x^2+4x$.



11) נתונה הפרבולה: $y=-2x^2+12x$.
א. מצא את שיעורי קדקוד הפרבולה.
ב. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפרבולה.

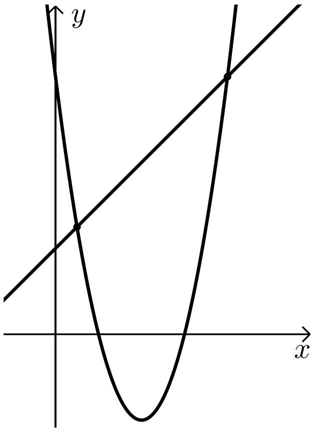


12) נתונה הפרבולה: $y=x^2+2x-15$.
א. לאלו ערכים של x הפונקציה חיובית?
ב. לאלו ערכים של x הפונקציה שלילית?

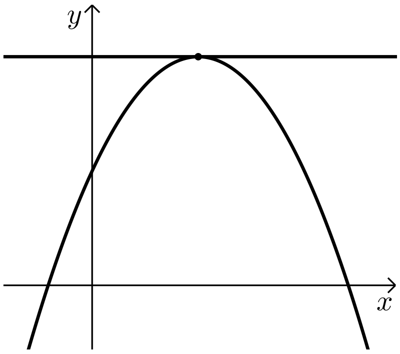
חיתוך בין ישר ופרבולה – סיכום

כדי למצוא חיתוך בין ישר $y=mx+b$ ופרבולה: $f(x)=ax^2+bx+c$ אנו נשווה בין משוואותיהם ונפתור עבור x . לאחר מכן נמצא את שיעורי ה- y ע"י הצבה באחת המשוואות (של הישר או הפרבולה). יתכנו 3 מקרים:

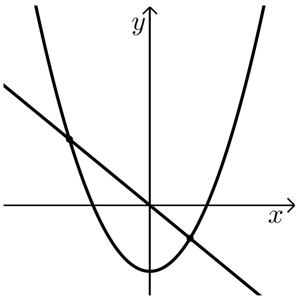
- הישר חותך את הפרבולה בשתי נקודות שונות.
- הישר חותך (משיק) לגרף הפרבולה בנקודה אחת בלבד.
- הישר והפרבולה לא חותכים זה את זה כלל.



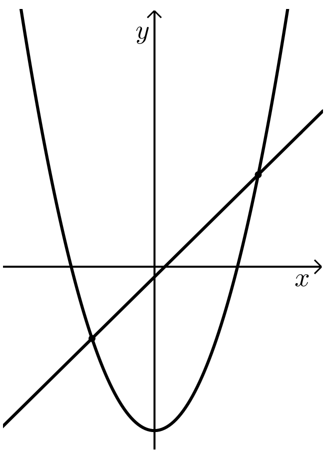
13) לפניך הגרפים של שתי הפונקציות:
$f(x)=x^2-8x+12$ ו- $g(x)=x+4$
מצא את נקודות החיתוך שבין שני הגרפים.



14) מצא את שיעורי הנקודה המשותפת
לגרף הפרבולה $f(x)=-x^2+10x+25$
ו- $y=50$.



15) נתונים פרבולה $y=x^2-8$ וישר $y=-2x$.
א. מצא את נקודות החיתוך בין גרף הפרבולה והישר.
ב. מצא נקודת החיתוך של הפרבולה עם ציר ה- y
ואת נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y.
ג. מצא את המרחק שבין נקודת החיתוך של גרף הפרבולה
עם ציר ה- y לבין נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y.
ד. מצא את קדקוד הפרבולה.
ה. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפרבולה.

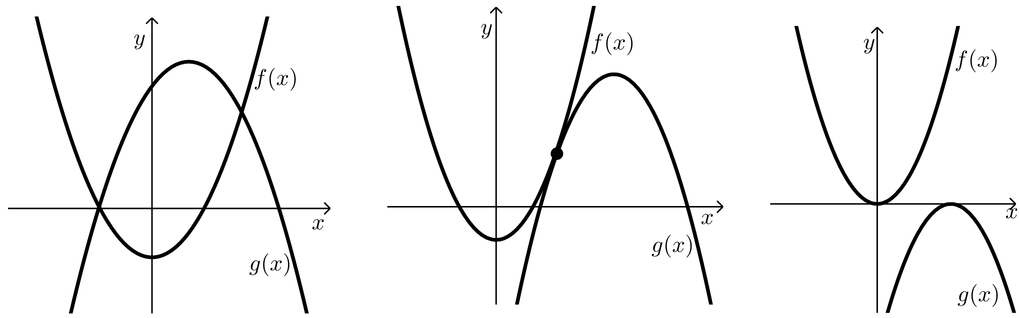


16) נתונים פרבולה וישר שהמשוואות שלהם: $y=x^2-16$ ו- $y=2x-1$.
א. מצא את נקודות החיתוך שבין הישר והפרבולה.
ב. תן דוגמה ל- x עבורו הישר נמצא מעל לפרבולה.
ג. תן דוגמה ל- x עבורו הפרבולה נמצאת מעל לישר.
ד. תן דוגמה לנקודה על הפרבולה שערך ה- y שלה חיובי.
ה. תן דוגמה לנקודה על הפרבולה שערך ה- y שלה שלילי.
ו. מצא את נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- x.
ז. מצא את תחום השליליות של הישר.

חיתוך בין שתי פרבולות – סיכום

הגרפים של שתי פרבולות $f(x)$ ו-$g(x)$ יכולים להיות באחד משלושה מצבים:

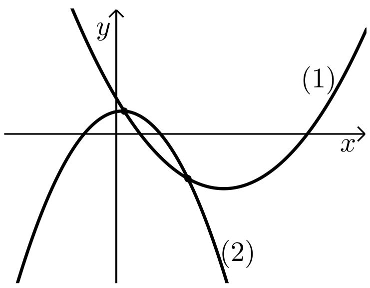
אין חיתוכים | **נקודת חיתוך (השקה) אחת** | **שתי נקודות חיתוך**



כדי למצוא את נקודות החיתוך עצמן נשווה בין משוואותיהם: $f(x)=g(x)$.
לפי מספר הפתרונות של המשוואה המתקבלת נוכל להסיק באיזה מקרה מדובר.

17) מצא את נקודות החיתוך בין זוגות הפונקציות הבאות:
א. $f(x)=x^2+4x+5$ ו- $g(x)=-2x^2+x+11$.
ב. $f(x)=x^2-3x+6$ ו- $g(x)=-x^2+5x-2$.

18) לפניך סרטוט של שתי פונקציות ריבועיות:
$f(x)=x^2-9x+8$ ו-$g(x)=-2x^2+x+5$.
א. התאם לכל גרף (1) ו-(2) את הפונקציה המתאימה לו.
ב. מה הם תחומי החיוביות והשליליות של גרף (1)?
ג. מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

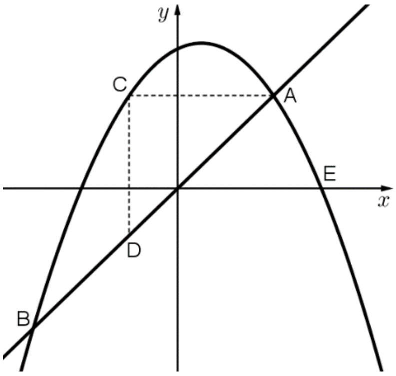


שאלות מסכמות שונות

הערה כללית

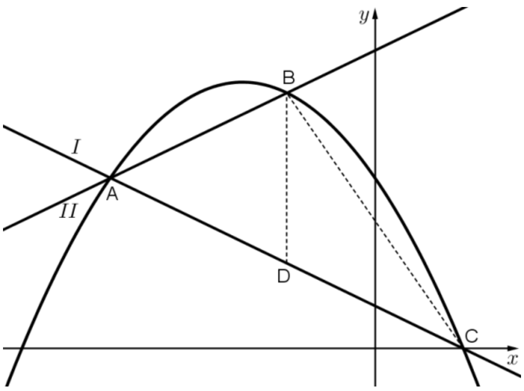
בנושא זה ישנן שאלות מסכמות העוסקות בכל הנושאים שנלמדו בפרקים על הישר, הפרבולה וחישובי שטחים של צורות הנדסיות. שאלות אלו ברמה הגבוהה משאלות בגרות ומטרתן היא תרגול העשרה של כל החומר הנלמד בפונקציות וגרפים.

19) בסרטוט שלפניך מתוארים
הישר: $y = 2x$ והפרבולה: $y = -x^2 + x + 6$.



א. חשב את שיעורי נקודות החיתוך של הישר והפרבולה, A ו-B.
ב. הישר AC מקביל לציר ה- x והישר CD מקביל לציר ה- y.
חשב את שטח המשולש ACD.
ג. מצא את משוואת הישר המקביל לישר הנתון ועובר דרך הנקודה E, נקודת החיתוך של גרף הפרבולה עם ציר ה- x הנמצאת מימין לראשית הצירים.

20) בסרטוט שלפניך מתוארים הגרפים של שני ישרים I ו- II.
ושל הפרבולה $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x + 8$.
שני הישרים והפרבולה נחתכים בנקודה A.
משוואת הישר II היא: $y = x + 14$.



ד. חשב את שיעורי הנקודה A.
ה. חשב את שיעורי הנקודה C, נקודת החיתוך של גרף הפרבולה עם ציר ה- x הנמצאת מימין לראשית הצירים.
ו. מצא את משוואת הישר I.
ז. חשב את שיעורי הנקודה B.
ח. הקטע BD מקביל לציר ה- y וחותך את ישר I בנקודה D.
חשב את שטח המשולש BCD.

21) נתונות שתי הפרבולות: $y = x^2 - x + 6$ ו- $y = ax^2 - 6x - 8$, $a \neq 0$ פרמטר.
ט. לשתי הפרבולות נקודת חיתוך משותפת: $(-2,12)$.
מצא את ערך הפרמטר a.
י. מצא את נקודת החיתוך שנייה של שתי הפרבולות.
יא. סרטט סקיצה של גרף הפרבולה: $y = x^2 - x + 6$.
(היעזר בנקודות החיתוך עם הצירים ובקדקוד הפרבולה).

תשובות סופיות

1) א. $y=x^2-4$ ב. $y=-x^2+2x+5$

ג. $y=3x^2+3x-5$ ד. $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x$

ה. $y=-\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{20}$ ו. $y=7x^2+\frac{1}{4}x-1$.

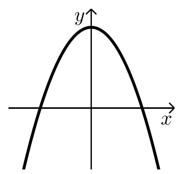
2) א. $b=0$ ב. $x=0$, $(0,-3)$ ג. כיווץ פי 2 והזזה 3 יחידות למטה.

3) א. $(0,10)$, $x=0$ ב. $\left(1\frac{1}{2},2\frac{1}{4}\right)$, $x=1\frac{1}{2}$ ג. $(1,4)$, $x=1$

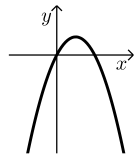
ד. $\left(-\frac{1}{4},1\frac{1}{2}\right)$, $x=-\frac{1}{4}$ ה. $(-2.5,0)$, $x=-2.5$

איורים לסעיפים:

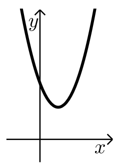
א.



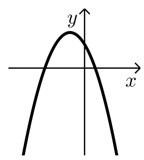
ב.



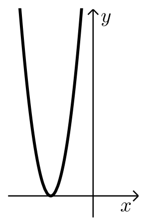
ג.



ד.



ה.



4) א. $(-5,0)$, $(1,0)$ ב. אין חיתוכים.

5) א. $(3,0)$ ב. $(-9,0)$ ג. $(8,0)$ ד. $\left(-15\frac{1}{2},0\right)$.

6) א. $(0,-15)$ ב. $y=x^2-15$ ג. $(-3,0)$, $(5,0)$

ד. i. שתיים. ii. שתיים. iii. אפס. ה. $y=2x^2-4x-30$.

7) א. $(2,0)$, $(-3,0)$ ב. 6 יחידות. ג. 5 יחידות.

8) א. $(0,-4)$, $(2,0)$ ב. 2 יחידות. ג. 4 יחידות.

9) א. $(5,0)$, $(2,0)$ ב. $(0,-10)$ ג. 10 יחידות. ד. 3 יחידות.

ה. 5 יחידות.

10) עולה: $x<2$, יורדת: $x>2$.

11) א. $(3,18)$ ב. עולה : $x<3$, יורדת : $x>3$.

12) א. $x<-5$, $x>3$ ב. $-5<x<3$.

13) $(8,12)$, $(1,5)$

14) $(5,50)$.

15) א. $(2,-4)$, $(-4,8)$ ב. $(0,0)$, $(0,-8)$ ג. 8 יחידות.

ד. $(0,-8)$ ה. עולה : $x>0$, יורדת : $x<0$.

16) א. $(5,9)$, $(-3,-7)$ ב. כל x הגדול מ-5 או קטן מ-3-.

ג. כל x שבין 3- ל-5. ד. כל נקודה שערך ה- x שלה גדול מ-4 או קטן מ-4-.

ה. כל נקודה שערך ה- x שלה בין 4- ל-4. ו. $(0.5,0)$ ז. $x<0.5$

17) א. $(1,10)$, $(-2,1)$ ב. $(2,4)$

18) א. $(1)\rightarrow f(x)$, $(2)\rightarrow g(x)$

ב. חיובית : $x<1$, $x>8$, שלילית : $1<x<8$. ג. $\left(\frac{1}{3},5\frac{1}{9}\right)$, $(3,-10)$.

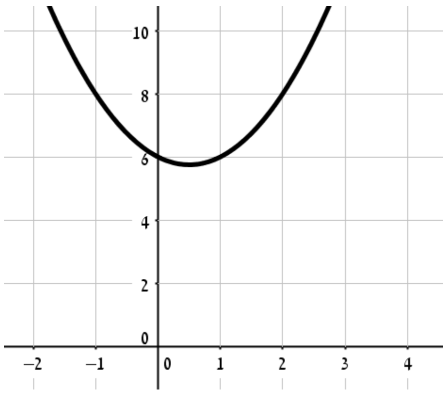
19) א. $A(2,4)$, $B(-3,-6)$ ב. 4.5 יחידות שטח. ג. $y=2x-6$.

20) א. $A(-6,8)$ ב. $C(2,0)$ ג. $y=-x+2$

ד. $B(-2,12)$ ה. 16 יחידות שטח.

21) א. $a=2$ ב. $(7,48)$.

ג. להלן סקיצה :



שיטות כמותיות בניהול

פרק 6 - תכנון ליניארי - ניסוח בעיות ופתרון גרפי

תוכן העניינים