שדות אלקטרומגנטיים

תוכן העניינים

GOOL
בשביל התירגול

שדות אלקטרומגנטיים

פרק 1 - אנליזה וקטורית

תוכן העניינים

הסבר ותרגילים:

שאלות:

1) שטח דיסקה

חשב שטח דיסקה בעלת רדיוס R (שטח מעגל) באמצעות אינטגרל על אלמנט שטח בקואורדינטות פולריות.

2) חישוב נפח כדור

חשב נפח של כדור באמצעות אינטגרל על אלמנט נפח בקואורדינטות כדוריות.

3) דיסקה עם חור

מצא את צפיפות המטען של דיסקה בעלת רדיוס R הטעונה במטען כולל Q המתפלג בצורה אחידה.

בדיסקה קדחו חור ברדיוס r, מצא את כמות המטען שהוצאה מהדיסקה.

4) מטען כולל בכדור

מצא את המטען הכולל בכדור בעל רדיוס R וצפיפות מטען: $\rho(r)=\rho_0\frac{r}{R}$.

5) פירוק וקטור לרכיבים גליליים

נתון השדה הוקטורי הבא: $\vec{A}=a\hat{x}+b\hat{y}+c\hat{z}$ כאשר c , b , a קבועים נתונים.

א. האם $\vec{A}$ וקטור קבוע?

ב. מצא את הרכיבים של $\vec{A}$ בקואורדינטות גליליות ובטא אותן בעזרת: z , θ , r.

6) פירוק וקטור לרכיבים בקואורדינטות כדוריות

נתון השדה הוקטורי הבא: $\vec{A}=a\hat{x}+b\hat{y}+c\hat{z}$ כאשר c , b , a קבועים נתונים.

מצא את הרכיבים של $\vec{A}$ בקואורדינטות כדוריות ובטא אותן בעזרת: θ , φ , r.

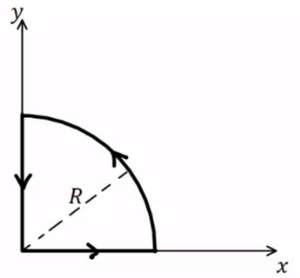
7) divr

חשב את $\vec{\nabla}\cdot\vec{r}$ כאשר $\vec{r}$ הוא וקטור המיקום. בצע את החישוב בקואורדינטות קרטזיות גליליות וכדוריות.

8) הוכחה של דיברגנט של סקלרית כפול וקטורית

הוכח את הזהות הבאה: $\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{A}\right)=f\cdot\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\vec{A}\cdot\vec{\nabla}f$ כאשר $\vec{A}$ היא פונקציה וקטורית כלשהיא ו- f היא פונקציה סקלרית כלשהיא.

9) אינטגרל קווי על רבע מעגל



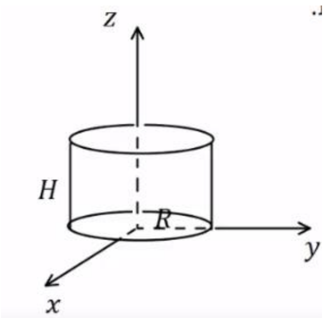
נתונה הפונקציה הוקטורית הבאה: $\vec{F}=2\hat{r}+3\hat{\varphi}-5\hat{\theta}$

בקואורדינטות כדוריות כאשר φ היא הזווית עם ציר z.

א. חשב את: $\oint\vec{F}\cdot d\vec{l}$ לאורך המסלול הרבע מעגלי באיור.

ב. חשב את: $\int\vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot d\vec{s}$ על השטח שכלוא בתוך המסלול.

10) אינטגרל על מעטפת גלילית



נתונה הפונקציה הוקטורית הבאה: $\vec{F}=ar\hat{r}+b\hat{\theta}+czz$,
בקואורדינטות גליליות, כאשר c , b , a קבועים נתונים.
נתונה מעטפת גלילית ברדיוס R וגובה H הנמצאת כך שציר הסימטריה שלה הוא ציר ה-z ובסיסה מונח על מישור xy.

א. חשב את: $\oint\vec{F}\cdot d\vec{s}$ על כל שטח המעטפת הגלילית.

ב. חשב בצורה מפורשת את: $\int\vec{\nabla}\times\vec{F}dv$ על הנפח הכלוא בתוך המעטפת.

11) מצא וקטור יחידה מאונך לפונקציה

מצא וקטור יחידה המאונך לפונקציה: $f=ax^2+by^2+cz^2$.
הוקטור צריך להיות פונקציה של: x , y , z .

12) מציאת רכיב בכיוון הגרדיאנט

נתונה הפונקציה הסקלרית: $f\left(x,y,z\right)=2xy$,
והפונקציה הוקטורית: $\vec{A}=2\hat{x}+5\hat{y}-4\hat{z}$.

א. חשב את: $\vec{\nabla}f$.

ב. מצא את הרכיב של $\vec{A}$ בכיוון של $\vec{\nabla}f$ בנקודה המתאימה ל- $f=12$, $x=2$.

13) הוכחה של דיב-רוט שווה לאפס

הוכח כי: $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)=0$.

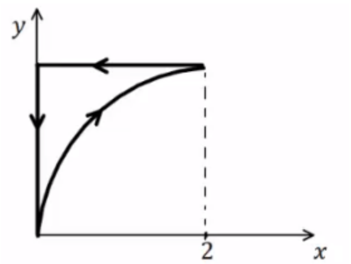
14) חוק סטוקס על מסלול של קווים ישרים

נתון השדה הוקטורי: $\vec{A} = y\hat{x} - x\hat{y}$.

א. חשב את האינטגרל הקווי: $\oint \vec{A}\cdot d\vec{l}$ לאורך המסלול המתואר ע"י הקווים הישרים המחברים בין הנקודות הבאות במישור xy:
$(0,0) \to (2,0) \to (0,1) \to (0,0)$.

ב. חשב את האינטגרל המשטחי: $\int \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot d\vec{s}$ על השטח הסגור בתוך המסלול של סעיף א'.

15) חוק סטוקס על מסלול פרבולי



נתון שדה וקטורי: $\vec{A} = x^2 y\hat{x} + y^2 x\hat{y} + C\cos(\beta y)\hat{z}$

כאשר β ו- C קבועים נתונים.

א. חשב את האינטגרל: $\oint \vec{A}\cdot d\vec{l}$ על המסלול המתואר באיור.
משוואת העקום היא: $y^2 = bx$ כאשר b קבוע נתון.

ב. חשב את האינטגרל: $\int \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot d\vec{s}$ על השטח התחום ע"י המסלול.

תשובות סופיות:

1) $S=\pi R^2$.

2) $V=\dfrac{4\pi R^3}{3}$.

3) $q=Q\left(\dfrac{r}{R}\right)^2$, $\sigma=\dfrac{Q}{\pi R^2}$.

4) $Q=\rho_0\pi R^3$.

5) א. כן. ב. $A_r=a\cos\theta+b\sin\theta$, $A_Q=-a\sin\theta+b\cos\theta$, $A_z=C$.

6) $A_r=a\sin\varphi\cos\theta+b\sin\varphi\sin\theta+C\cos\varphi$, $A_\varphi=a\cos\varphi\cos\theta+b\cos\varphi\sin\theta-C\sin\varphi$,
$A_\theta=-a\sin\theta rb\cos\theta$.

7) $\vec{\nabla}\cdot\vec{r}=3$.

8) הוכחה.

9) א. $\oint\vec{F}\cdot d\vec{l}=-5R\dfrac{\pi}{2}$. ב. $\int\vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot d\vec{s}=-5R\dfrac{\pi}{2}$.

10) א. $\oint\vec{F}\cdot d\vec{s}=(2a+C)\pi R^2H$. ב. $\int\vec{\nabla}\times\vec{F}dv=(2a+C)\pi R^2H$.

11) $\hat{n}=\dfrac{1}{\sqrt{(ax)^2+(by)^2+(cz)^2}}(ax,by,cz)$.

12) א. $\vec{\nabla}f=2y\hat{x}+2x\hat{y}+0\cdot\hat{z}$. ב. $\dfrac{16}{13}(3,2)$.

13) הוכחה.

14) א. $\oint\vec{A}\cdot d\vec{l}=-2$. ב. $\int\vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot=-2$.

15) א. $\oint\vec{A}\cdot d\vec{l}=-\dfrac{1}{21}2^{\frac{7}{2}}b^{\frac{1}{2}}+\dfrac{2^{\frac{5}{2}}}{5}b^{\frac{3}{2}}$. ב. $\int\vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot d\vec{s}=\dfrac{2^{\frac{5}{2}}}{5}b^{\frac{3}{2}}-\dfrac{2^{\frac{7}{2}}}{21}b^{\frac{1}{2}}$.

שדות אלקטרומגנטיים

פרק 2 - מבוא לגלים

תוכן העניינים

הרצאות ותרגילים – מערכת של שתי מסות

שאלות

1) מסה מחוברת למסה שמחוברת לתקרה

מסה m מחוברת לתקרה באמצעות קפיץ אנכי בעל קבוע 2k . מסה m נוספת מחוברת למסה הראשונה באמצעות קפיץ אנכי נוסף בעל קבוע k . המסות זזות רק בציר האנכי.

א. הסבירו מדוע ניתן להתעלם מכוח הכובד בבעיה זאת, כאשר אנו באים למצוא את התדירויות העצמיות ואת אופני התנודה.

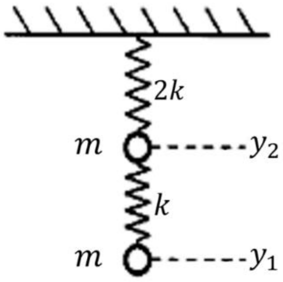
ב. כתבו את מערכת המשוואות בצורה מטריציונית ומצאו את התדירויות העצמיות.

ג. מצאו את אופני התנודה, ותארו אותם.

ד. בזמן $t=0$ נותנים מכה קטנה למסה התחתונה, כך שהיא מקבלת מהירות התחלתית v_0.

מצאו את תנועת המסות כתלות זמן.

רמז: במקרה זה יהיה יותר פשוט לפרוש את תנאֵי ההתחלה כאשר הפתרון רשום באמצעות סכום של סינוסים וקוסינוסים.



תשובות סופיות

1) א. כוח הכובד הוא כוח קבוע. כוחות קבועים מתבטלים על ידי תוספת קבועה של מתיחה לקפיץ. לכן, כוחות קבועים משנים רק את נקודת שיווי המשקל ואינם משפיעים על התדירויות או על אופני התנודה.

ב. $w_{1,2}=\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}w_0,\quad w_{3,4}=\pm\sqrt{2-\sqrt{2}}w_0$ ג. $v_1=\begin{pmatrix}1\\-2.41\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}1\\0.41\end{pmatrix}$

ד. $$\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.63\\-1.52\end{pmatrix}\cdot\frac{v_0}{w_0}\sin\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}w_0t\right)+\begin{pmatrix}0.9\\0.37\end{pmatrix}\cdot\frac{v_0}{w_0}\sin\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}t\right)$$

$$w_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

שדות אלקטרומגנטיים

פרק 3 - קווי תמסורת

תוכן העניינים

קווי תמסורת ללא הפסדים

רקע

הקשרים בין המתח לזרם (בקו ללא הפסדים):

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C_0 \frac{\partial V}{\partial t} \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t}$$

משוואות הגלים:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

כאשר C_0 ו- L_0 הם הקיבול וההשראות ליחידת אורך.

עכבה

עכבה כללית מוגדרת לפי: $Z = \frac{V}{I}$ והיא יכולה להיות תלויה במיקום

עכבה אופיינית:

$$\frac{V^+(x,t)}{I^+(x,t)} = -\frac{V^-(x,t)}{I^-(x,t)} = Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

לא תלויה במיקום (בדר"כ כשנתונה העכבה הכוונה לעכבה אופיינית).

החזרה והעברה

$$V^-(x_0,\mathrm{t}) = -rV^+(x_0,\mathrm{t}) \qquad I^-(x_0,\mathrm{t}) = rI^+(x_0,\mathrm{t})$$

$$r = \frac{Z_0 - Z_L}{Z_L + Z_0}$$

$$V_L^+(x_0,\mathrm{t}) = tV^+(x_0,\mathrm{t}) \qquad I_L^+(x_0,\mathrm{t}) = tI^+(x_0,\mathrm{t})$$

$$t = \frac{2Z_0}{Z_L + Z_0}$$

הערה: הנוסחאות הן בהנחה שאין גל חוזר בעומס.

כאשר יש קצר בקצה בקו, $Z_L = 0$, מקבלים גל עומד.

שאלות

1) עכבת כניסה

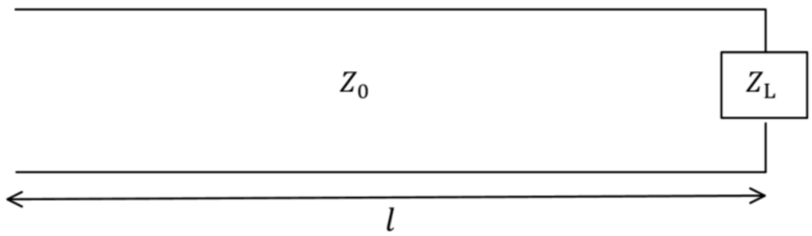
קו תמסורת באורך l ועכבה אופיינית Z_0 מחובר בקצה לעומס בעל עכבה אופיינית Z_L. הניחו כי אין גל חוזר בעומס וכי אמפליטודת הגל המתקדם בכיוון החיובי ידועה.

א. רשמו את פונקציות המתח והזרם של הגל הפוגע והגל החוזר אם ראשית הצירים נמצאת בנקודת החיבור עם העומס.

ב. חזרו על סעיף א אם הראשית בתחילת הקו.

ג. חשבו עבור סעיפים א' ו- ב' את העכבה בתחילת הקו, עכבה זו נקראת עכבת הכניסה Z_{in}.

ד. חשבו עבור סעיף ב את העכבה בדיוק באמצע הקו.



2) גל בכבל קואקסיאלי פוגע בצומת

נתון קו תמסורת חשמלי המורכב מכבל קואקסיאלי ארוך מאוד שבו צומת כך שהעכבות האופייניות משני צידי הצומת הן Z_1 ו- Z_2.
לצומת מגיע גל הרמוני. נתונים האמפליטודה, התדירות ואורך הגל של גל הזרם המגיע לצומת: $\omega, \lambda_1 I_0^+$.
על סמך הנתונים הנ"ל:

א. האם ניתן לחשב את אמפליטודת גל הזרם העובר והחוזר?

ב. האם ניתן לחשב את אמפליטודות של שלושת גלי המתח?

ג. האם ניתן לחשב את אורך הגל של הגל החוזר ואת אורך הגל של הגל העובר?

ד. האם ניתן לחשב את ההספק של כל אחד מהגלים?

3) קו תמסורת פתוח עם תנאי התחלה

נתון קו תמסורת בעל השראות ליחידת אורך של: $0.03n\,H/m$
וקיבוליות ליחידת אורך של: $4\,\mu F/m$. אורך הקו הוא: $l = 400m$
והוא פתוח משני קצוותיו.
ברגע: $t = 0$ המתח בקו מתאפס והזרם הוא:

$$I(x) = \begin{cases} I_0 \dfrac{x}{l} & , \; 0 \le x \le l/2 \\ 0 & , \; l/2 \le x \le l \end{cases}$$

כאשר: $I_0 = 20A$.

א. מהי מהירות הגלים בקו? האם הקו נמצא בריק?
ב. בקירוב של שתי הרמוניות ראשונות, חשבו את הזרם ב- $t = 3\mu s$ כתלות ב- x.
ג. מהו המתח באותו זמן בקצוות ובמרכז הקו?

4) קו תמסורת אינסופי עם תנאי התחלה

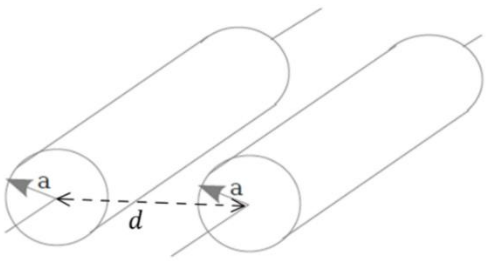
קו תמסורת עשוי מכבל קואקסיאלי אינסופי בעל עכבה אופיינית של 25Ω
וקיבול ליחידת אורך של: $C_0 = 0.2\,nF/m$.

א. חשבו את מהירות הגלים והקבוע הדיאלקטרי היחסי ε_r.
ניתן להניח: $\mu_r = 1$.
ב. נתון כי: $V(x,t=0) = \frac{aV_0x}{x^2+a^2}$ וכי: $I(x,t=0) = 0$
כאשר: V_0 , a נתונים.
חשבו את גלי המתח והזרם כתלות במיקום ובזמן.
ג. מהי האנרגיה הכוללת החולפת ב- $x = 50\text{m}$ מ- $t = 0$ ועד $t = 1\text{ms}$.
מספיק לרשום את האינטגרל אין צורך לפתור אותו.

5) חישוב השראות וקיבול בכבלים מקבילים

נתון קוו תמסורת העשוי משני כבלים ארוכים מאוד בעלי רדיוס a ומרחק d בין מרכזיהם. הניחו ש- $d >> a$ וכי התפלגות המטען על הכבלים היא אחידה ביחס לסיבוב הכבל.

א. מהו הקיבול ליחידת אורך של הכבלים?
ב. מהי ההשראות ליחידת אורך של הכבלים?



6) חישוב השראות וקיבול בכבל קואקסיאלי

כבל קואקסיאלי ארוך מאוד עשוי ממעטפת גלילית ברדיוס a ומעטפת חיצונית ברדיוס b וריק בינהם.

א. מהו הקיבול ליחידת אורך של הכבל?

ב. מהי ההשראות ליחידת אורך של הכבל?

ג. מהי מהירות הגלים בכבל?

תשובות סופיות

1) א. $V^+(x)=V_0^+e^{ikx}\ ,\ V^-(x)=-rV_0^+e^{-ikx}\ ,\ I^+(x)=\frac{V_0^+}{Z_0}e^{ikx}\ ,\ I^-(x)=r\frac{V_0^+}{Z_0}e^{-ikx}$

ב. $V^+(x)=V_0^+e^{ikx}\ ,\ V^-(x)=-rV_0^+e^{2ikl}e^{-ikx}\ ,\ I^+(x)=\frac{V_0^+}{Z}e^{ikx}\ ,\ I^-(x)=r\frac{V_0^+}{Z_0}e^{2ikl}e^{-ikx}$

ג. בשני המקרים: $Z_{in}=Z_0\frac{1-re^{2ikl}}{1+re^{2ikl}}$

ד. $Z_0\frac{1-re^{ikl}}{1+re^{ikl}}$

2) א. כן. ב. כן.

ג. אורך הגל החוזר זהה לאורך הגל הפוגע, אין מספיק נתונים לחשב את אורך הגל העובר.

ד. אין מספיק נתונים לחשב את אורך הגל העובר.

3) א. $9.13\cdot10^9\ \frac{m}{\sec}$ ב. $3.39_{\text{A}}\sin\left(\frac{\pi}{400}x\right)-2.91\sin\left(\frac{2\pi}{400}x\right)$

ג. $V(0,3\mu s)=-0.13V\ ,\ V(l,3\mu s)=1.73V\ ,\ V\left(\frac{l}{2},3\mu s\right)=0.798V$

4) א. $\varepsilon_r=2.25\ ,\ V=2\cdot10^8\ \frac{m}{\sec}$

ב. $V(x,t)=\frac{1}{2}\left[\frac{aV_0(x-Vt)}{(x-Vt)^2+a^2}+\frac{aV_0(x+Vt)}{(x+Vt)^2+a^2}\right]\ ,$

$$I(x,t)=\frac{aV_0}{2VL_0}\left[\frac{x-Vt}{(x-Vt)^2+a^2}-\frac{x+Vt}{(x+Vt)^2+a^2}\right]$$

ג. $\Delta E=\int_0^{0.001}V(50,t)I(50,t)\,dt$

5) א. $\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\left|\frac{d-a}{a}\right|}$ ב. $\frac{\mu_0}{\pi}\ln\left|\frac{d-a}{a}\right|$

6) א. $\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{b}{a}}$ ב. $\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$ ג. מהירות האור.

שדות אלקטרומגנטיים

פרק 4 - משוואות מקסוואל

תוכן העניינים

המשוואות והמעברים:

רקע:

משוואות מקסוול:

	הצורה הדיפרנציאלית	הצורה האינטגרבילית	הערות
1	$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$	$\oint\vec{E}\cdot d\vec{s}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int\rho\,\mathrm{d}V$	חוק גאוס
2	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$	$\oint\vec{B}\cdot d\vec{s}=0$	השטף המגנטי על משטח סגור תמיד מתאפס= אין מטען מגנטי
3	$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$	$\oint\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\int\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$	מהמשוואה ניתן לקבל את חוק פארדיי $\varepsilon=-\dot{\phi}_B$
4	$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}t}$	$\oint\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0\int\vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{s}+\mu_0\int\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\vec{s}$	חוק אמפר והתיקון של מקסוול (שנקרא גם זרם העתקה)

שאלות:

1) שדה מגנטי רדיאלי והיקפי מתאפסים

באזור מסוים במרחב נתון כי ישנו שדה מגנטי בכיוון ציר z בעל סימטריה גלילית. כמו כן נתון כי אין זרמים באזור זה. הראו כי B_θ ו- B_r מתאפסים.

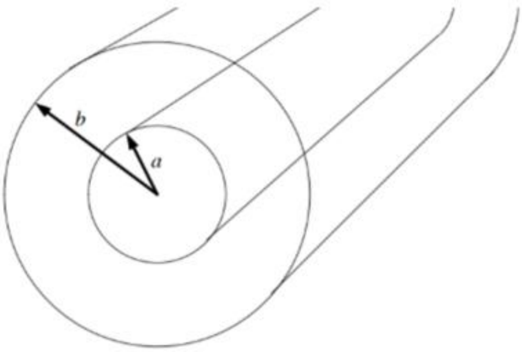
2) גלים בכבל קו אקסיאלי

כבל קו-אקסיאלי עשוי משתי קליפות גליליות מוליכות וארוכות מאוד בעלות רדיוסים a, b. ציר הסימטריה של הכבל הוא ציר z ובין הקליפות אין חומר. השדה החשמלי בין הקליפות נתון לפי הפונקציה:

$$\vec{E}=\begin{cases}\frac{E_0}{r}\cos\left(\omega t-\omega\frac{z}{c}\right)\hat{r} & a<r<b\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

ידוע שאין זרמי DC.

א. מצאו את השדה המגנטי.
ב. מצאו את צפיפות הזרם המשטחית על הקליפות.
ג. מצאו את צפיפות המטען המשטחית על הקליפות.
ד. הראו כי משוואת הרציפות מתקיימת.



תשובות סופיות:

1) הוכחה בסרטון.

2) א. $\vec{B}=\begin{cases}\frac{E_0}{cr}\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}z\right)\hat{\theta} & a<r<b\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$.

ב. $\overrightarrow{k_{(b)}}=-\frac{E_0}{cb}\cos\left(wt-\frac{w}{c}z\right)\hat{z}$, $\overrightarrow{k_{(a)}}=-\frac{E_0}{ca}\cos\left(wt-\frac{w}{c}z\right)\hat{z}$.

ג. $\sigma_{(b)}=-\frac{\varepsilon_o E_0}{b}\cos\left(wt-w\frac{z}{c}\right)$, $\sigma_{(a)}=\frac{\varepsilon_o E_0}{a}\cos\left(wt-w\frac{z}{c}\right)$.

ד. הוכחה בסרטון.

שדות אלקטרומגנטיים

פרק 5 - משוואת פואסון ולפלס מצומצם

תוכן העניינים

משוואת פואסון ולפלס:

סיכום כללי:

משוואת פואסון:

$$\vec{\nabla}^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

משוואת לפלס:

$$\vec{\nabla}^2\varphi = 0$$

הלפלאסיאן של פונקציה סקלרית f כתלות בקואורדינטות קרטזיות:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

גליליות:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

כדוריות:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

כאשר φ היא הזווית עם ציר z לפעמים מסמנים את הלפלאסיאן גם ב-Δf.

שאלות:

1) דוגמה – שתי קליפות

נתונות שתי קליפות כדוריות בעלות מרכז משותף ברדיוסים a ו-b $(a<b)$.
נתון כי הקליפה הפנימית מוארקת והחיצונית מוחזקת בפוטנציאל V.

א. רשמו את משוואת לפלס לכל תחום.

ב. פתרו את המשוואה, השתמשו בתנאי השפה ומצאו את הפוטנציאל בכל תחום.

ג. מהי התפלגות המטען על הקליפה המוארקת?

תשובות:

1) א. $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=0$.

ב. $\varphi r=\begin{cases}0 & r<a\\ -\frac{abV}{r(b-a)}+\frac{bV}{b-a} & a<r<b\\ \frac{bV}{r} & b<r\end{cases}$.

ג. $\sigma(a)=\frac{-\varepsilon_0 bV}{a(b-a)}$.

שדות אלקטרומגנטיים

פרק 6 - גלים אלקטרו-מגנטיים

תוכן העניינים

הרצאות ותרגילים:

נושא 1: מושגים בסיסיים בגלים

רקע:

גל - הפרעה שמתקדמת במרחב.

גלים רוחביים - ההפרעה בכיוון ניצב להתקדמות הגל.

גלים אורכיים - ההפרעה בכיוון מקביל להתקדמות הגל.

זמן מחזור - הזמן שלוקח להפרעה לעשות מחזור שלם (סימון - T).

תדירות - מספר המחזורים שנעשים בשנייה (סימון - $f = \frac{1}{T}$).

אורך הגל - המרחק בין מחזורים (או המרחק בין שיא לשיא)(סימון - λ).

מהירות הגל - קצב התקדמות ההפרעה במרחב (סימון - u).

גל מוחזר - כשגל פוגע בנקודה בה יש שינוי בתווך נוצר גל מוחזר.
הגל המוחזר יהיה בתדירות זהה ובכיוון הפוך לגל הפוגע.

התאבכות - סכמה של שני גלים.

גל עומד - ההפרעה לא מתקדמת במרחב.

פונקציית הגל - פונקציה המתארת את ההפרעה כתלות במיקום ובזמן

משוואת הגלים -

במימד אחד - $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t}$

בשלושה מימדים - $\vec{\nabla}^2 f = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t}$

נושא 2: משוואת הגלים האלקטרומגנטיים

רקע:

משוואות מקסוול בהיעדר מטענים וזרמים חופשיים:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{H}=-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

בחומר איזוטרופי ולינארי מתקיים:

$$\vec{B}=\mu\vec{H}$$

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$$

משוואת הגלים עבור השדה החשמלי והמגנטי:

$$\vec{\nabla}^2\vec{E}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

כאשר:

$$u=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

ובריק: $u=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=c=3\cdot10^8\,{}^{m}/_{s}$

המשוואה היא עבור כל רכיב בנפרד.
המשוואה זהה לשדה המגנטי.

אינדקס השבירה (מהירות האור בריק חלקי מהירות האור בחומר):

$$n=\frac{c}{u}=\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$$

תמיד גדול מאחד (מהירות האור בחומר תמיד קטנה מהמהירות בריק):

פתרון למשוואת הגלים במימד אחד:

$$E_x(x,t)=A\cos(kx-\omega t)$$

$$\mathrm{k}=\frac{2\pi}{\lambda},\ \ \omega=2\pi f=\frac{2\pi}{T}$$

מעבר לייצוג קופלקסי: $\cos(kx-\omega t) = Re\left[e^{i(kx-\omega t)}\right]$.

כשעובדים עם הייצוג הקומפלקסי ניתן לעבוד רק עם החלק התלוי במרחב (או השדה ב-$t=0$) ובסוף להכפיל את הפונקציה ב- $e^{-i\omega t}$ בשביל לקבל את התלות בזמן.

יחס הדיספרסיה - הקשר בין התדירות למספר הגל:

$$\omega = uk$$

אם היחס לא לינארי אז צריך להבדיל בין מהירות הפאזה למהירות החבורה:

$$u_{ph} = \frac{\omega}{k}\ , u_g = \frac{d\omega}{dk}$$

נושא 3: גל אלקטרומגנטי מישורי

רקע:

הצורה הכללית של הפתרון ההרמוני:

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0\cdot\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$$

כאשר:

וקטור הגל - $\vec{k}=k_x\hat{x}+k_y\hat{y}+k_z\hat{z}$

$$\vec{k}\cdot\vec{r}=k_x x+k_y y+k_z$$

הערות – תמיד אפשר להוסיף גם פאזה.

יחס הדיספרסיה בגל: $\omega=u|k|=u\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}$.

הכיוון של $\vec{k}$ הוא כיוון התקדמות הגל ובגל מישורי תמיד $\vec{E}\perp\hat{k}$.

לכיוון של $\vec{E}$ (המסומן בדר"כ ב-$\hat{n}$) קוראים כיוון הקיטוב של הגל.

השדה המגנטי בגל:
כיוון השדה המגנטי מאונך לשדה החשמלי ולכיוון התקדמות הגל.
התלות בזמן ובמרחב של השדה המגנטי זהה לזו של השדה החשמלי.
(אותו קוסינוס עם אותו ארגומנט).

$$\vec{B}=\frac{1}{u}\hat{k}\times\vec{E}=\frac{\vec{k}\times\vec{E}}{\omega}$$

ה**עכבה** של התווך: $\eta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$

בריק: $\eta=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=\eta_0=120\pi$

$$\vec{H}=\frac{1}{\eta}\hat{k}\times\vec{E},$$

$$\vec{E}=-\eta\hat{k}\times\vec{H}$$

וקטור פוינטינג (האנרגיה שהגל נושא) - כמות אנרגיה ליחידת שטח ליחידת זמן.

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$$

בנוסחה מציבים את הביטוי הממשי של השדות.

הכיוון של $\vec{S}$ הוא בכיוון של $\hat{k}$ (כיוון התקדמות הגל).

הממוצע של הוקטור פוינטינג בזמן (נקרא גם ה**עוצמה** של הגל):

$$\vec{S}_{Avg} = \langle \vec{S} \rangle = \mathrm{Re}\left\{\frac{\tilde{\vec{E}} \times \tilde{\vec{H}}^*}{2}\right\}$$

$\tilde{\vec{E}}$ ו- $\tilde{\vec{H}}$ הם הייצוג הקומפלקסי של השדות.

המרה של הנגזרות בזמן ובמרחב:

$$\frac{\partial}{\partial t} \to -\mathrm{i}\omega$$

$$\vec{\nabla} \to \mathrm{i}\vec{k}$$

שאלות:

1) **דוגמה - חישוב כל הגדלים הבסיסיים**

השדה החשמלי של גל א"מ המתקדם בחומר לא מגנטי נתון בביטוי הבא: $\vec{E} = 4\pi\cos(10^9 t - 6x)\hat{y}\frac{mV}{m}$.

א. מהו התדר של הגל ומהו אורך הגל?

ב. מהו מקדם השבירה והקבוע הדיאלקטרי של החומר?

ג. מהו $\vec{H}$ ומהו וקטור פוינטינג הממוצע?

2) **דוגמה 2 - חישוב כל הגדלים 2**

השדה: $\vec{H} = H_0 e^{\mathrm{i}(2\pi x - 6\pi y - 10^8 \pi t)} \cdot \frac{3\hat{x}+\hat{y}}{\sqrt{10}}$ מתפשט בתווך לא מגנטי.

מצאו את:

א. וקטור הגל ואורך הגל.

ב. תדר הגל.

ג. מהירות הגל בתווך ומקדם השבירה.

ד. המקדם הדיאלקטרי והעכבה.

ה. השדה החשמלי.

תשובות סופיות:

1) א. $f=1.59\cdot 10^{8}Hz\ ,\ \lambda=\frac{\pi}{3}m$. ב. $n=1.8\ ,\ \varepsilon_r=3.24$.

ג. $\vec{S}_{AVg}=12\pi\cdot 10^{-8}\hat{x}\ ,\ \vec{H}=6\cdot 10^{-5}\cos\left(6x-10^{9}t\right)z\frac{A}{m}$.

2) א. $\lambda=\frac{1}{\sqrt{10}}m\ ,\ \vec{K}=2\pi\left(1,-3,0\right)$. ב. $f=5\cdot 10^{7}Hz$.

ג. $n=18.97\ ,\ u=5\cdot\sqrt{10}\cdot 10^{6}\frac{m}{\sec}$. ד. $\eta=2\pi\cdot\sqrt{10}\ ,\ \varepsilon_r=360$.

ה. $\vec{E}\left(x,y,t\right)=-2\pi\cdot\sqrt{10}\cdot H_0e^{i\left(2\pi x-6\pi y-10^{8}\pi t\right)}\hat{z}$.

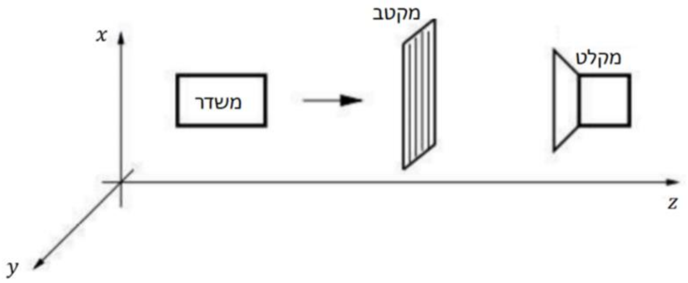
נושא 4 : קיטוב מעגלי ואליפטי

רקע:

הקיטוב של הגל נקבע על ידי כיוון השדה החשמלי (לא לבלבל עם כיוון הגל).
מקטב - מודד את הקיטוב של הגל.
קיטוב לינארי - כיוון השדה קבוע.
קיטוב מעגלי ימני - רכיב y מפגר אחרי רכיב x ב-$90°$.
כלומר הפאזה של רכיב y פחות הפאזה של רכיב x שווה $\varphi = \frac{\pi}{2}$.
השדה מסתובב נגד השעון או בהתאם לכלל יד ימין ביחס לציר ה-z.
קיטוב מעגלי שמאלי - רכיב y מקדים את רכיב x ב-$90°$.
($\varphi = -\frac{\pi}{2}$ השדה מסתובב עם השעון או הפוך לכלל יד ימין ביחס לציר ה-z).
קיטוב אליפטי - מתקבל כאשר יש הפרש פאזה של $90°$ והאמפליטודה של הרכיבים שונה או אם הפרש הפאזה שונה מ-$90°$.

שאלות:

1) **דוגמה חשובה - שינוי עוצמה ממקטבים**
נתונה המערכת הבאה:



במערכת, המשדר יכול לייצר גל הנע בכיוון z בכל קיטוב שנרצה.
והמשדר יכול למדוד גל בכל קיטוב שמגיע אליו.
המקטב מורכב מרשת מתכתית כפי שמתואר באיור.
כיוון המקטב מוגדר לפי כיוון הרכיב של השדה שעובר, כלומר במאונך לרשת.

א. עבור המצב של המקטב בתמונה נתון כי המקלט אינו קולט סיגנל.
רשמו את פונקציית הגל שמייצר המשדר.

ב. עבור אותו גל מוסיפים לפני המקטב הקיים מקטב זהה נוסף בזווית של 30 מעלות ביחס לציר ה-x.
מה היחס בין העוצמה שימדוד הגלאי לעוצמה שיוצאת מהמשדר?

2) דוגמה - קיטוב לינארי ומעגלי

מצאו את הקיטוב של השדה במקרים הבאים.
עבור קיטוב לינארי רשמו את כיוון הקיטוב וזווית הקיטוב.

א. $\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t)\,\hat{x} + 3E_0 \cos(kz - \omega t)\,\hat{y}$.

ב. $\vec{E} = E_0 \cos\left(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}\right)\hat{x} + E_0 \cos(kz - \omega t)\,\hat{y}$.

ג. $\vec{E} = E_0 \cos(kz + \omega t)\,\hat{x} + E_0 \cos\left(kz + \omega t + \frac{\pi}{2}\right)\hat{y}$.

ד. $\vec{H} = H_0 \cos\left(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}\right)\hat{x} + H_0 \cos\left(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}\right)\hat{y}$.

3) דוגמה - קיטובים אליפטים וערכים מקסימאלים

מצאו את הקיטוב של הגלים הבאים.
אם הקיטוב אליפטי, מצאו את הערך המקסימאלי של השדה החשמלי ואת זווית ההטיה של הציר הראשי של האליפסה.

א. $\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t)\,\hat{x} + 2E_0 \cos(kz - \omega t)\,\hat{y}$.

ב. $\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t)\,\hat{x} + 2E_0 \cos\left(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}\right)\hat{y}$.

ג. $\vec{E} = E_0 \cos\left(kz - \omega t + \frac{\pi}{4}\right)\hat{x} + E_0 \cos(kz - \omega t)\,\hat{y}$.

ד. $\vec{E} = E_0 \cos\left(kz - \omega t + \frac{\pi}{4}\right)\hat{x} + \frac{1}{2}E_0 \cos(kz - \omega t)\,\hat{y}$.

4) קיטוב אליפטי הוא סכום של קיטובים מעגליים

הוכיחו כי ניתן לייצג גל בעל קיטוב אליפטי בעזרת סכום של גל בעל קיטוב מעגלי ימני וגל בעל קיטוב מעגלי שמאלי.

5) קיטוב מעגלי כסכום של קיטובים אליפטיים

הוכיחו כי גל בעל קיטוב מעגלי הינו סופרפוזיציה של שני גלים בעלי קיטוב אליפטי בכיוונים הפוכים.

תשובות סופיות:

1) א. $\vec{E}(z,t)=E_0\hat{x}\cos(kz-\omega t)$ ב. $\frac{3}{16}$

2) א. קיטוב ליניארי, $\theta=72^\circ$, $\hat{n}=\frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)$.

ב. קיטוב מעגלי שמאלי. ג. קיטוב מעגלי ימני.

ד. קיטוב ליניארי, $\theta=-45^\circ$, $\hat{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$.

3) א. קיטוב ליניארי, $\theta=26.6^\circ$, $\hat{n}=\frac{(1,2)}{\sqrt{5}}$.

ב. קיטוב אליפטי, $\theta=\frac{\pi}{2}$, $E_{max}=2E_0$.

ג. קיטוב אליפטי, $\theta=45^\circ$, $E_{max}=1.7E_0$.

ד. קיטוב אליפטי, $\theta=21.7^\circ$, $E_{max}=1.27E_0$.

4) הוכחה.

5) הוכחה.

נושא 5: פגיעה ישרה בתווך דיאלקטרי

רקע:

כאשר גל הנע בתווך אחד פוגע בשפה של תווך אחר נקבל גל עובר וגל מוחזר תדירות כל הגלים זהה ושווה לתדירות המקוראת אמפליטודות הגל העובר והגל המוחזר נקבל מתנאי השפה.

$$B_{2\perp} = B_{1\perp} \qquad D_{2\perp} - D_{1\perp} = \sigma_{free}$$

$$H_{2||} - H_{1||} = k_{\text{free}} \qquad E_{2||} = E_{1||}$$

σ_{free} - היא צפיפות המטען המשטחית והחופשית על השפה

k_{free} - צפיפות הזרם המשטחי והחופשי על השפה

בפגיעה ישרה (או פגיעה בניצב) לשני השדות רכיב מקביל לשפה בלבד.

בתווך דיאלקטרי: $\sigma_{free} = \text{k}_{free} = 0$

הקשר בין האמפליטודות:

$$\frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

$$\frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

<u>השוויון השני נכון רק אם</u>: $\mu_1 = \mu_2$ (זה המצב ברוב המקרים).

לא לבלבל בין n ל-η.

מקדם העברה:

$$\tau = \frac{E_t}{E_0}$$

מקדם החזרה:

$$\Gamma = \frac{E_r}{E_0}$$

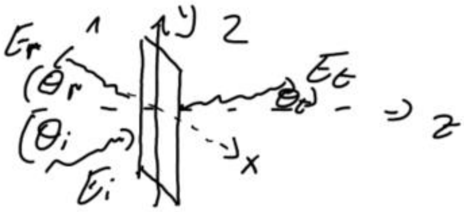
בפגיעה ישרה בתווך דיאלקטרי:

$$1 + \Gamma = \tau$$

נושא 6: פגיעה בזווית בתווך דיאלקטרי

רקע:

מישור השפה בין החומרים (מישור xy באיור).
מישור הפגיעה הוא המישור של וקטורי הגל (מישור yz באיור).



משיקולי סימטריה k_y זהה לכל הגלים.

$$\theta_i = \theta_r$$

חוק סנל: $\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \frac{u_t}{u_i} = \frac{n_i}{n_t}$

אם: $n_i > n_t$ אז קיימת **זווית קריטית**.
אם זווית הפגיעה גדולה מהזווית הקריטית אז לא יהיה גל עובר או תהיה החזרה מלאה:

$$\theta_c = \mathrm{shiftsin}\left(\frac{n_t}{n_i}\right)$$

משוואות פרנל:
עבור פגיעה בזווית עם קיטוב אנכי (השדה החשמלי מאונך **למישור הפגיעה**):

$$\Gamma^{\perp} = \frac{E_{r_0}^{\perp}}{E_{i_0}^{\perp}} = \frac{\eta_2\cos\theta_i - \eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t} = \frac{n_1\cos\theta_i - \frac{\mu_1}{\mu_2}\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_i}}{n_1\cos\theta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2}\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_i}}$$

$$\tau^{\perp} = \frac{E_{t_0}^{\perp}}{E_{i_0}^{\perp}} = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t} = \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2}\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_i}}$$

$$1 + \Gamma^{\perp} = \tau^{\perp}$$

עבור פגיעה בזווית עם קיטוב מקבילי (השדה החשמלי מקביל **למישור הפגיעה**):

$$\Gamma^{||}=\frac{E_{r_0}^{||}}{E_{i_0}^{||}}=\frac{\eta_2\cos\theta_\mathrm{t}-\eta_1\cos\theta_\mathrm{i}}{\eta_2\cos\theta_\mathrm{t}+\eta_1\cos\theta_\mathrm{i}}=\frac{\frac{\mu_1}{\mu_2}n_2^2\ \cos\theta_i-n_1\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2\theta_i}}{\frac{\mu_1}{\mu_2}n_2^2\ \cos\theta_i+n_1\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2\theta_i}}$$

$$\tau^{||}=\frac{E_{t_0}^{||}}{E_{i_0}^{||}}=\frac{2\eta_2\cos\theta_\mathrm{i}}{\eta_2\cos\theta_\mathrm{t}+\eta_1\cos\theta_\mathrm{i}}=\frac{2n_1\,n_2\cos\theta_i}{\frac{\mu_1}{\mu_2}n_2^2\ \cos\theta_i+n_1\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2\theta_i}}$$

$$1+\Gamma^{||}=\tau^{||}\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}$$

זווית ברוסטר היא הזווית שבה יש העברה מלאה (ואין החזרה).

זווית ברוסטר בקיטוב מקבילי:

$$\sin^2\theta_B{}^{||}=\frac{1-\frac{\mu_\mathrm{t}\varepsilon_\mathrm{i}}{\mu_\mathrm{i}\varepsilon_\mathrm{t}}}{1-\left({\varepsilon_\mathrm{t}}/{\varepsilon_\mathrm{i}}\right)^2}$$

אם: $\mu_2\approx\mu_1$ אז:

$$\sin\theta_B{}^{||}=\frac{1}{1+{\varepsilon_\mathrm{i}}/{\varepsilon_\mathrm{t}}}$$

$$\tan\theta_B{}^{||}=\frac{n_\mathrm{t}}{n_\mathrm{i}}$$

בקיטוב אנכי:

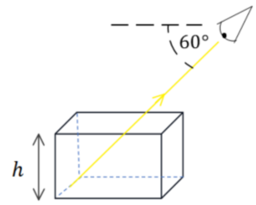
$$\sin^2\theta_B{}^{\perp}=\frac{1-\frac{\mu_\mathrm{i}\varepsilon_\mathrm{t}}{\mu_\mathrm{t}\varepsilon_\mathrm{i}}}{1-\left({\mu_\mathrm{i}}/{\mu_\mathrm{t}}\right)^2}$$

* מאוד נדיר למצוא חומרים שקיימת עבורם זווית ברוסטר בקיטוב אנכי.

שאלות:

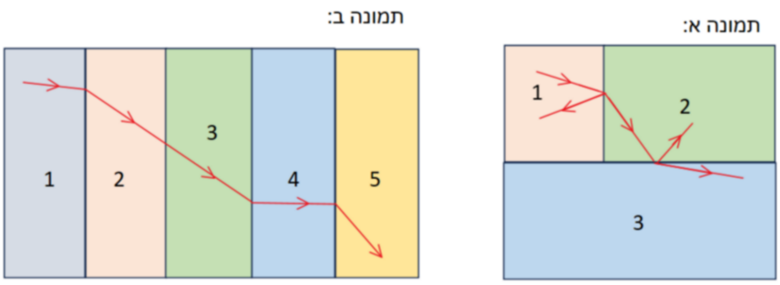
1) תרגיל - צופה מסתכל על תיבה

לתיבת זכוכית ריקה גובה של: $h = 6cm$. צופה מסתכל על התיבה, כאשר הוא מוריד את ראשו בזווית של 60 מעלות מתחת לאופק הוא רואה בדיוק את קצה הבסיס הרחוק של התיבה. ממלאים את התיבה בשמן $n = 1.54$.
איזה נקודה בבסיס התיבה יראה הצופה?
(מצאו את מרחק הנקודה מהקצה הרחוק של בסיס התיבה).



2) תרגיל - שבירה דרך מספר חומרים

בתמונות הבאות מתוארים חומרים בעלי מקדמי שבירה שונים.
גל עובר דרך השכבות כמתואר באיורים. הניחו שהתמונות מדויקות.
דרגו את מקדמי השבירה של החומרים השונים, בכל תמונה, מהקטן לגדול (אין קשר בין התמונות).



3) דוגמה - גל פוגע בזווית במים

גל אלקטרומגנטי מישורי נע באוויר (ריק) ופוגע בזווית בפני הים.
הקבוע הדיאלקטרי של מי ים הוא בערך 80. (הניחו שהמים מתנהגים כמבודד).

א. מצאו את זווית ברוסטר עבור גל בקיטוב מקבילי.

גל המקוטב אנכית פוגע בפני הים בזווית שחישבתם בסעיף א.

ב. מהי זווית ההעברה של הגל?

ג. מה הם מקדמי ההעברה וההחזרה?

4) תרגיל - שבירה במעברים עם זווית קריטית וברוסטר

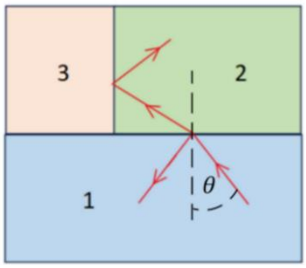
אור נכנס מחומר 1 ועובר שבירה במעבר לחומר 2 כך שחלקו מוחזר וחלקו מועבר, ראו איור. הקרן שהועברה ממשיכה עד לפגיעה בחומר 3 שם היא פוגעת בו בזווית הקריטית ומבצעת החזרה מלאה.

נתון: $n_1 = 1.5,\ \ n_2 = 1.3,\ \ n_3 = 1.1$.

א. מהי הזווית θ שבאיור?

ב. האם צריך להגדיל או להקטין את הזווית θ כך שהאור לא יבצע החזרה מלאה וייכנס לחומר 3?

ג. האם האור יעבור לחומר 3 בהינתן ש-θ היא זווית ברוסטר למעבר בין חומר 1 לחומר 2? (הניחו כי הפרמביליות זהה).



5) תרגיל - גלים בין שני מקטבים

גל בעל קיטוב בכיוון x ואמפליטודה של השדה החשמלי E_0 נע בכיוון z.
הגל עובר דרך שני מקטבים הראשון בעל קיטוב בזווית 20 מעלות עם ציר x והשני בזווית 60 מעלות עם ציר x. בכל הסעיפים ניתן להזניח החזרות מרובות.

א. מהי האמפליטודה והכיוון של הגל העובר את המקטב הראשון?

ב. מהי האמפליטודה והכיוון של הגל העובר את המקטב השני? רשמו ביטוי לגל זה.

ג. בהנחה שהמקטב השני הוא מקטב רשת המחזיר את הרכיב המקביל ללא איבוד אנרגיה לחום. מהי האמפליטודה והכיוון של הגל המוחזר מהמקטב השני?

6) תרגיל - מקטב מערימה של משטחי זכוכית

דרך פשוטה ויעילה לבנות מקטב היא להשתמש בערימה של משטחי זכוכית מיקרוספקופים עם מרווחים ביניהם. הרעיון הוא לנצל את ההבדל בין מקדמי ההעברה של הרכיב המקביל והמאונך. בזווית ברוסטר ישנה העברה מלאה של הרכיב המקביל בעוד שרק חלק מהרכיב המאונך עובר, כלומר זהו סוג של מקטב. נניח שיש לנו חתיכה אחת של זכוכית והפגיעה בה היא בזווית ברוסטר.

א. מצאו את זווית ברוסטר עבור הפגיעה בזכוכית (מאוויר) בעלת מקדם שבירה $n = 1.46$ (מקדם השבירה תלוי באורך הגל, הניחו שזה מקדם השבירה עבור אורך הגל שבבעיה וכי הפרמביליות אחידה).

ב. מצאו את זווית ההעברה, האם היא תלויה בקיטוב?

ג. הראו כי זווית הפגיעה ביציאה מהזכוכית היא זווית ברוסטר לאותו מעבר.

ד. מצאו את מקדמי ההעברה לכל רכיב ($\tau^{\perp}$, $\tau^{\parallel}$) עבור היציאה מהזכוכית.

מקדמי ההחזרה וההעברה של האנרגיה עבור שני הרכיבים מוגדרים באופן הבא: $T = \frac{n_t \cos\theta_t}{n_i \cos\theta_i}|\tau|^2$.

מקדם ההעברה הכולל הוא מכפלה של מקדם ההעברה בכניסה של האור לזכויות במקדם ההעברה של היציאה של האור מהזכוכית.

ניתן להזניח החזרות מרובות.

ה. מהו מקדם ההעברה הכולל של האנרגיה עבור כל רכיב.

ו. נגדיר את יעילות המקטב לפי: $e = \frac{T^{\parallel}}{T^{\perp}}$ לכמה שכבות נזדקק על מנת להגיע ליעילות של $e = 10^4$

תשובות סופיות:

1) 1.4cm.

2) תמונה א: $n_1 > n_2 > n_3$, תמונה ב: $n_5 < n_3 = n_2 < n_1 < n_4$.

3) א. $\theta_B" = 84°$. ב. $\theta_t = 6.4°$.

ג. $\Gamma^{\perp} = -0.975$, $\tau^{\perp} = 0.025$.

4) א. $\theta \approx 27.5°$ ב. צריך להגדיל את טטה. ג. האור ייכנס.

5) א. $E_0 \cos(20°)$ בכיוון: $\cos(20°)\hat{x} + \sin(20°)\hat{y}$.

ב. $\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(20°)\cos(40°)(\cos(60°)\hat{x} + \sin(60°)\hat{y})\cos(kz - \omega t)$.

ג. $E_0 \cos(20°)\sin(40°)$ בכיוון: $\cos(30°)\hat{x} - \sin(30°)\hat{y}$.

6) א. $\theta_B \approx 55.6°$ ב. $\theta_t \approx 34.4°$ לא תלויה בקיטוב.

ג. $\tau^{\perp} = 1.36$ $\tau^{"} = 0.685$ ד. $\tau^{\perp} = 0.754$ $\tau^{"} = 1$ ה. 33

נושא 7: פגיעה במוליך מושלם

רקע:

במוליך מושלם השדות בתוך המוליך מתאפסים תנאי השפה:

$$H_{1||} = -k_{\text{free}}$$

$$E_{1||} = 0$$

בפגיעה ישרה מתקבל **גל עומד**.
יש הפרש פאזה של 90 בין השדה החשמלי למגנטי
בפגיעה בזווית:

$$\theta_i = \theta_r$$

צריך לחלק לקיטוב מקביל או מאונך למישור הפגיעה אבל בשני המקרים מקבלים גל עומד בכיוון z (בכיוון מאונך לשפה) וגל מתקדם בכיוון y (בכיוון מקביל לשפה).

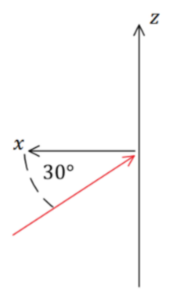
שאלות:

1) תרגיל - גל פוגע במראה בזווית

גל אלקטרו מגנטי מתקדם במישור xz עם זווית של 30 מעלות ביחס לציר ה-x כפי שמתואר באיור. לגל כיתוב בכיוון y. הגל פוגע במראה מישורית הנמצאת במישור zy ומוחזר ממנה.

א. כתבו את $\hat{k}$ עבור הגל הפוגע והמוחזר.

ב. מהו הכיוון של השדה החשמלי והמגנטי של הגל המוחזר?



תשובות סופיות:

1) א. $\hat{k}_r = \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{z}$, $\hat{k}_i = -\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{z}$ ב. $\hat{E} = -\hat{y}$ ג. $\hat{B}_r = -\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{z} + \frac{1}{2}\hat{x}$

נושא 8: גלים במוליך לא אידיאלי

רקע:

התפלגות המטען הנפחית דועכת וכל המטען נע לכיוון השפה.
הזמן האופייני של דעיכת הצפיפות הנפחית הוא

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

σ - היא המוליכות.

במוליך מושלם: $\sigma \to \infty$ ו- $\tau \to 0$
במוליך לא מושלם מסתכלים על היחס בין זמן הדעיכה לזמן המחזור.
טיב המוליכות תלוי בתדר (עבור תדרים מסוימים החומר יהיה מוליך טוב ועבור תדרים אחרים מוליך לא טוב).

מוליך טוב $\tau \ll \frac{1}{\omega}$ או $\frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \gg 1$
מוליך גרוע $\tau \gg \frac{1}{\omega}$ או $\frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \ll 1$

משוואות מקסוול במוליכים:

$$1)\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$$

$$2)\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$3)\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$4)\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\boldsymbol{J}} + \frac{\partial \vec{\mathrm{D}}}{\partial t}$$

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon + \mathrm{i}\frac{\sigma}{\omega}$$

המשוואה והפתרון נשארים כמו במקרה של תווך דיאלקטרי רק ש: $\varepsilon \to \varepsilon_{eff}$

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_{\mathrm{eff}}} \to k = k_R + \mathrm{i}k_I$$

עבור גל המתקדם בכיוון $\hat{z}$:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-k_I z} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_R z - \omega t)}$$

מהירות הפאזה:

$$u = \frac{\omega}{k_R}$$

עומק החדירה:

$$d = \frac{1}{k_I}$$

העכבה הופכת למורכבת:

$$\eta_{eff} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_{eff}}} = |\eta|e^{i\varphi}$$

φ - הפרש פאזה בין השדה המגנטי לחשמלי.

שאלות:

1) דוגמה - גלי סונר ורדיו מתפשטים בים

גל אלקטרומגנטי בעל קיטוב ליניארי מתפשט בתוך מי ים.
המוליכות הסגולית של מי ים היא: $\sigma \approx 4\frac{1}{\Omega \cdot m}$ והמקדם הדיאלקטרי היחסי הוא: $\varepsilon_r \approx 80$. הניחו כי הגל מתפשט בכיוון z וכי האמפליטודה של השדה החשמלי היא: E_0.
מצאו את הגדלים הבאים עבור גלי רדיו: $f = 10^7 Hz$, ועבור גלי סונר: $f = 10^3 Hz$.

א. עומק החדירה, אורך הגל, ומהירות הגל.
ב. השדה החשמלי ו-$\vec{H}$.
ג. הוקטור פוינטינג.
ד. כמות יחסית של אנרגיה הנקלטת בצוללת בעומק של 15 מטר מתחת לפני הים.

2) ציפוי כסף למיקרוגל

מיקרוגל פועל בתדרים של $10^{10} Hz$. על מנת שקרינה לא תצא מהמיקרו יש לעטוף אותו בשכבת מתכת (כלוב פארדיי).
העריכו מה צריכה להיות עובי השכבה כך שלא תהיה יציאה של קרינה מהמיקרו אם המתכת היא כסף.
למה לדעתכם לא משתמשים בכסף ליצירה של שכבת הגנה במיקרו?
ההתנגדות הסגולית של כסף היא: $\rho = 1.59 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$, ו-$\mu_r \approx \varepsilon_r \approx 1$.

תשובות סופיות:

1) א. רדיו: $d = 0.08m\ ,\ \lambda = 0.5m\ ,\ u = 5\cdot 10^{6}\ \frac{m}{\sec}$.

סונר: $d = 8m\ ,\ \lambda = 50m\ ,\ u = 5\cdot 10^{4}\ \frac{m}{\sec}$.

ב. רדיו: $\vec{E} = E_0 e^{-\frac{7}{0.08}} e^{i\left(4\pi z - 2\pi\cdot 10^{7} t\right)}\hat{x}\ ,\ \vec{H} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} E_0 e^{-\frac{7}{0.08}} e^{i\left(4\pi z - 2\pi\cdot 10^{7} t + \frac{\pi}{4}\right)}\hat{y}$.

סונר: $\vec{E} = E_0 e^{-\frac{7}{8}} e^{i\left(4\pi\cdot 10^{-2} z - 2\pi\cdot 10^{3} t\right)}\hat{x}\ ,\ \vec{H} = \frac{100}{\sqrt{2\pi}} E_0 e^{-\frac{7}{8}} e^{i\left(4\pi\cdot 10^{2} z - 2\pi\cdot 10^{3} t + \frac{\pi}{4}\right)}\hat{y}$.

ג. רדיו: $\vec{S} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} E_0^2 e^{-\frac{z}{0.04}}\hat{z}$. סונר: $\vec{S} = \frac{100}{\sqrt{2\pi}} E_0^2 e^{-\frac{z}{4}}\hat{z}$.

ד. רדיו: 0%.

סונר: 2.35%.

2) $\sim 3\mu m$ עובי השכבה. כסף היא מתכת יקרה.

נושא 9 : פגיעה בזווית במוליך לא מושלם

רקע:

מאותם שיקולי סימטריה לציר y שהיו במעבר בין חומרים דיאלקטרים k_y זהה לכל הגלים.
מכאן שזווית הפגיעה שווה לזווית ההחזרה וחוק סנל ממשיך להתקיים
מכיוון ש- k_y מגיע מהחומר הדיאלקטרי הוא חייב להיות ממשי ולא תלוי במוליכות
הדעיכה נובעת ותלויה רק ברכיב המדומה של k_z.
<u>במקרה של מוליך טוב</u>

הגל העובר יהיה רק במאונך לשפה ($\theta_t = 0$)

הרכיבים של השדות המאונכים לשפה לא חודרים למוליך.

מקבלים את משוואות פרנל עם עכבה אפקטיבית

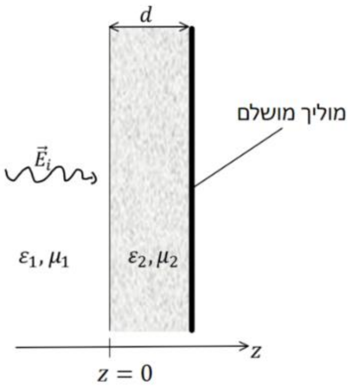
נושא 10: מעבר של יותר מתווך אחד

רקע:

נציב את תנאי השפה עבור כל ממעבר.

שאלות:

1) **שכבת חומר דיאלקטרי ליד מוליך מושלם**



גל הנע בתווך דיאלקטרי בעל ε_1, μ_1 פוגע בניצב לשכבה בעובי d עם ε_2, μ_2 ומוחזר ממוליך מושלם הנמצא בקצה השכבה, ראו איור. השדה החשמלי של הגל נתון לפי: $\vec{E}_i(z,t) = E_{i0}\,\hat{x}\cos\omega\left(\frac{z}{u} - t\right)$.

מצאו את:

א. $\vec{E}_r(z,t)$.

ב. $\vec{E}_1(z,t)$.

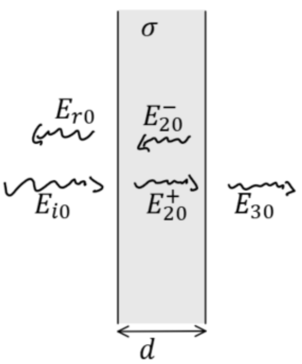
ג. $\langle s_1\rangle$.

ד. העובי d עבורו לא ניתן יהיה לזהות את השכבה.

2) **גל עובר דרך פיסת נחושת**

גל אלקטרומגנטי מישורי בתדירות $10\ MHz$ עם אמפליטודה E_{i0} פוגע בניצב לפיסת נחושת $\left(\sigma = 5.80 \cdot 10^7\ \frac{S}{m}\right)$ דקה מישורית בעובי d השווה לעומק החדירה.

הזניחו החזרות מסדר שני ומעלה וחשבו את:



א. האמפליטודות של כל שאר הגלים: $E_{r0}, E_{20}^+, E_{20}^-, E_{30}$ כתלות ב-E_{i0}.

ב. $\frac{\langle s_3\rangle}{\langle s_{1i}\rangle}$.

3) **חישוב כל הגדלים**

השדה החשמלי של גל מישורי הנע בתווך הומוגני נתון לפי הביטוי: $\vec{E} = \cos(z + 2\pi\cdot 10^7 t)\hat{y}$ ביחידות של וולט למטר.

א. מהו תדר הגל (בהרץ)?

ב. מהו כיוון התקדמות הגל?

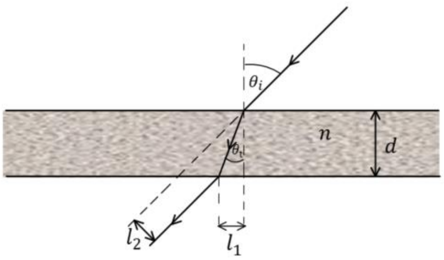
ג. מהו אורך הגל?
בהנחה כי: $\mu = \mu_0$ מצאו את המקדם הדיאלקטרי היחסי של החומר.
רשמו ביטוי ל-$\vec{H}$.

ד. רשמו ביטוי לווקטור פוינטינג הממוצע בזמן.

4) ציירו קיטוב אליפטי

ציירו את אליפסת הפולריזציה (האליפסה אותה "מצייר" קצהו של ווקטור השדה החשמלי במישור המאונך לכיוון התקדמות הגל כאשר הצופה מודד אותו לאורך זמן בנקודה קבועה) עבור הגל: $\vec{E}=(5i\hat{x}-\hat{y})e^{-i(\pi z+\omega t)}$.

5) חישוב הזזה לטרלית (חוק סנל)



קרן אור נעה באוויר ופוגעת בזווית θ_i בחומר שקוף בעובי d בעל אינדיקס שבירה n.

א. מצאו את זווית ההעברה.

ב. מצאו את המרחק של נקודת היציאה l_1.

ג. מצאו את ההזזה הלטרלית (המרחק l_2 באיור).

6) תרגיל - אלכוהול מזויף

רועי קנה בקבוק יוקרתי של משקה ג'ין ורוצה לוודא שהאלכוהול אינו מזויף. אלכוהול מזויף מכיל כמות גבוהה של אתנול במקום מתנול. לרועי יש שני מצביעי לייזר באורכי גל של $532nm$ ו- $638nm$. הוא מכוון את הלייזר בזווית 30 מעלות כלפי מעלה ולמרכז הבקבוק ומודד את הגובה h ממנו יוצאת קרן האור, ראו איור. קוטר הבקבוק הוא 12cm. את מקדמי השבירה של מתנול ואתנול ניתן למצא באינטרנט והקירוב שלהם עבור תחום אורכי גל: $\lambda\in[0.4\mu m, 0.8\mu m]$ הוא:

מתנול: $n(\lambda)\approx -0.8\lambda^3+1.8\lambda^2-1.4\lambda+1.7$

אתנול: $n(\lambda)\approx -0.1\lambda^3+0.3\lambda^2-0.3\lambda+1.4$

בנוסחה יש להציב את אורך הגל הנמדד באוויר ב - μm.

לצורך הפשטות נניח כי הבקבוק מכיל 100% אתנול או מתנול.

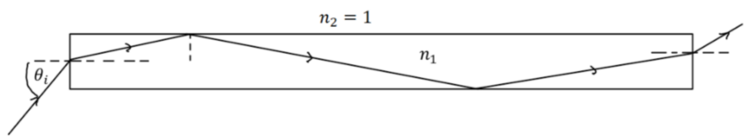
א. ציירו באמצעות מחשב גרף של $n(\lambda)$ עבור מתנול ואתנול על אותו גרף.

ב. ציירו באמצעות מחשב את זווית ההעברה כתלות ב- λ.
על איזה מהלייזרים תמליצו לרועי להשתמש?

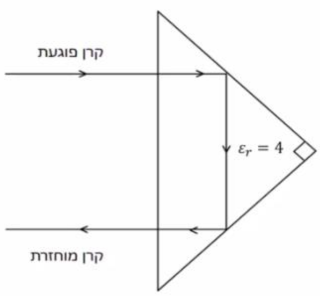
ג. מצאו את הערך של h עבור כל אחד מסוגי החומרים.

7) גל א"מ לא יוצא מסיב אופטי

סיב אופטי ישר עשוי מחומר דיאלקטרי שקוף בעל אינדקס שבירה n_1.
גל אלקטרו מגנטי נכנס בצידו האחד של הסיב בזווית θ_i ופוגע בדפנות של הסיב במהלך ההתקדמות.
מהו n_1 המינימלי כך שהגל לא יצא מהסיב עד אשר יגיע לקצה השני ללא תלות בזווית הפגיעה θ_i.



8) אור מוחזר מפריזמה משולשת



אור נכנס ומוחזר מפריזמה משולשת העשויה זכוכית.
מסלול קרן האור מתואר באיור.
מהו אחוז עוצמת האור של הקרן המוחזרת.
הניחו $\varepsilon_r = 4$ עבור זכוכית.
הפריזה היא משולש שווה שוקיים וישר זווית.

9) פגיעה ישרה במוליך מושלם

גל הנע באוויר (ריק) בכיוון ציר z פוגע פגיעה ישירה במוליך מושלם (שפת המוליך היא מישור xy). אמפליטודת השדה החשמלי של הגל היא: $6\,m\frac{V}{m}$ והתדירות היא: $100\,MHz$.

א. מצאו את השדה החשמלי ואת H של הגל הפוגע והגל המוחזר.
ב. רשמו ביטוי לשדה החשמלי הכולל .
ציינו במפורש מה גודל השדה הנמדד כתלות בזמן ובמרחב.
ג. מצאו את המיקום הכי קרוב למוליך שבו השדה החשמלי מתאפס.

10) גל מקוטב מעגלית פוגע במוליך מושלם

השדה החשמלי של גל מישורי הנע באוויר נתון לפי: $\vec{E}(z) = E_{i0}(\hat{x} - i\hat{y})e^{ikz}$.
הגל פוגע פגיעה ישרה במוליך מושלם כך ששפת המוליך היא במישור $z = 0$.

א. מהו סוג הקיטוב של הגל? במקרה של קיטוב מעגלי או אליפטי ציינו גם אם הקיטוב ימני או שמאלי.
ב. מצאו את הקיטוב של הגל המוחזר.
ג. מהו הזרם המושרה במוליך?
ד. רשמו ביטוי מפורש לשדה החשמלי הנמדד כתלות במרחב ובזמן.

11) גל פוגע בזווית במוליך מושלם

גל מישורי בתדירות ω נע באוויר (ריק) ופוגע בזווית במוליך מושלם.
זווית הפגיעה היא θ_i וקיטוב הגל מאונך למישור הפגיעה.
אמפליטודת השדה החשמלי היא E_{i0} .

א. מצאו את הזרם על שפת המוליך כתלות בזמן ובמרחב.
ב. מצאו את הממוצע בזמן של הוקטור פוינטינג.

12) גל פוגע בזווית במוליך מושלם קיטוב מקבילי

השדה החשמלי של גל מישורי הנע באוויר נתון
לפי: $\vec{E}_i(x,z) = 10e^{i(6x+8z)}\hat{y}\frac{V}{m}$.
הגל פוגע במוליך מושלם ששפתו היא במישור $z=0$.

א. מהם אורך הגל והתדירות?
ב. רשמו ביטוי עבור השדה החשמלי ו-H הנמדדים כתלות בזמן ובמרחב.
ג. מהי זווית הפגיעה?
ד. מצאו את השדה החשמלי ואת H של הגל המוחזר.
ה. רשמו את השדה החשמלי ואת H השקולים באוויר.

13) גל פוגע בזווית במוליך מושלם קיטוב אנכי

השדה החשמלי של גל מישורי הנע באוויר נתון
לפי: $\vec{E}_i(x,z) = 5(\hat{y}+\sqrt{3}\hat{z})e^{-i6(\sqrt{3}y-z)}\frac{V}{m}$.
הגל פוגע במוליך מושלם ששפתו היא במישור $z=0$.

א. מהם אורך הגל והתדירות?
ב. רשמו ביטוי עבור השדה החשמלי ו-H הנמדדים כתלות בזמן ובמרחב.
ג. מהי זווית הפגיעה?
ד. מצאו את השדה החשמלי ואת H של הגל המוחזר.
ה. רשמו את השדה החשמלי ואת H השקולים באוויר.

14) גלי רדיו בנחושת

מצאו את אורך הגל ומהירות הפאזה של גל רדיו בתדר של 1MHz המתפשט בנחושת.
השוו לתוצאה המתקבלת באוויר (או ריק).
המוליכות של נחושת היא: $59.6\cdot 10^6(\Omega\cdot m)^{-1}$ ו- $\mu_r \approx \varepsilon_r \approx 1$.

15) כמה עמוק חודרת קרינת הפלאפון למח

המוליכות של עצם הגולגולת היא בערך : $0.15\,\frac{S}{m}$ ($S = siemens = \frac{1}{\Omega}$) והמקדם הדיאלקטרי הוא בערך 12. עבור רקמת המוח עצמה המוליכות היא בקירוב $1\frac{S}{m}$ והמקדם הדיאלקטרי הוא בקירוב 50 (קרוב למים).

העריכו את עומק החדירה של קרינת ה-4g המשודרת בתדרים בסביבות ה-$1GHz$.

מה יהיה השינוי בעומק החדירה עבור קרינת ה-5g המשודרת בתדרים של כ-$30GHz$ (בפועל התוצאה נמוכה פי 10 כי המקדם הדיאלקטרי והמוליכות גם משתנים עם שינוי התדר).

16) גל פוגע בזווית במי ים

גל בעל תדירות של $10\ kHz$ המקוטב במקביל למישור הפגיעה נע באוויר ופוגע בזווית בשפה של המים באוקיינוס.

זווית הפגיעה היא : $88°$, $\varepsilon_r = 80$, $\mu_r = 1$ ו- $\sigma = 4\frac{S}{m}$.

א. מצאו את זווית ההעברה.

ב. מצאו את מקדם ההעברה $\tau^{||}$.

ג. את היחס $\frac{\langle s_t \rangle}{\langle s_i \rangle}$ על השפה ($\langle s \rangle$ הוא הממוצע בזמן).

ד. ואת המרחק שבו עוצמת השדה יורדת ב-30dB (דציבל).

תשובות סופיות:

1) א. $\vec{E}_r(z,t)=E_{i0}\cos(K_1 z+\omega t-2\theta)\hat{x}$ כאשר $\tan\theta=\frac{\eta_2}{\eta_1}\tan(K_2 d)$.

ב. $\vec{E}_1(z,t)=E_{i0}\hat{x}\left[\cos(K_1 z-\omega t)+\cos(K_1 z+\omega t-2\theta)\right]$.   ג. $\langle S_1\rangle=0$.

ד. $d=\frac{\pi n}{\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}}$.

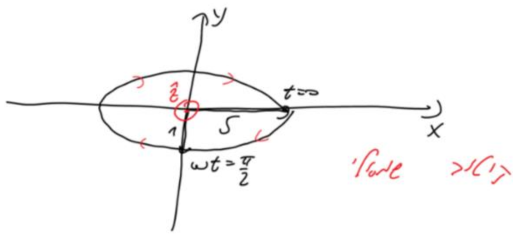
2) א. $\frac{E_{20}^{-}}{E_{i0}}\approx(-2.49+4.53i)\cdot 10^{-6}$, $\frac{E_{20}^{+}}{E_{i0}}\approx(1.90+0.140i)\cdot 10^{-6}$, $\frac{E_{r0}}{E_{i0}}\approx -1+4.67\cdot 10^{-6}i$

$\frac{E_{30}}{E_{i0}}\approx(-2.70+4.90i)\cdot 10^{-6}$.   ב. $\frac{\langle S_3\rangle}{\langle S_1\rangle}=3.13\cdot 10^{-11}$.

3) א. $f=10^7\,Hz$.   ב. בכיוון $-\hat{z}$.   ג. $\lambda=2\pi m$.   ד. $\varepsilon_r=22.8$.

ה. $\vec{H}(z,t)=\frac{1}{8\pi^2}\cos\left(z+2\pi\cdot 10^7 t\right)\hat{x}$.   ו. $\vec{S}_{AVg}=-\frac{\hat{z}}{16\pi^2}$.

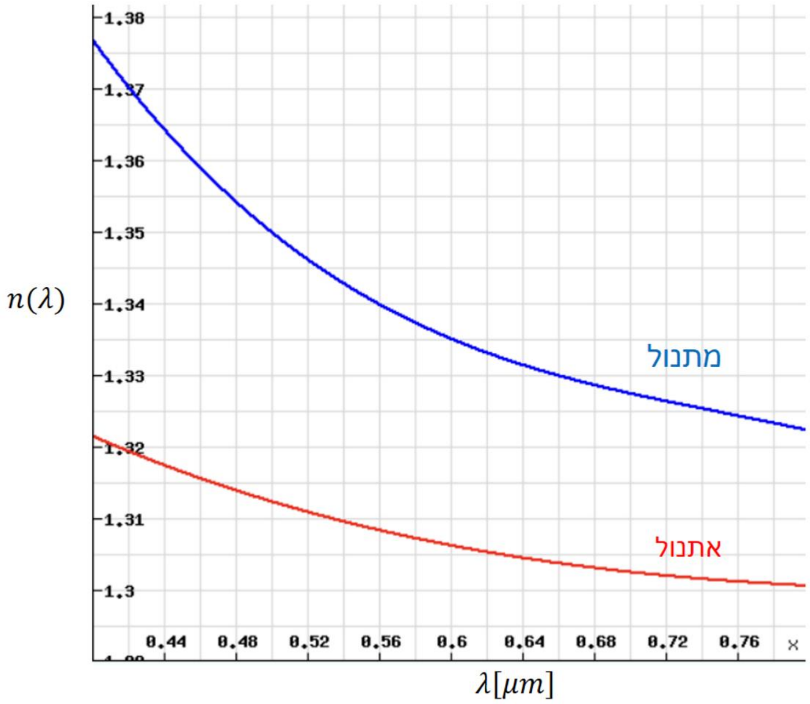
4) שרטוט:



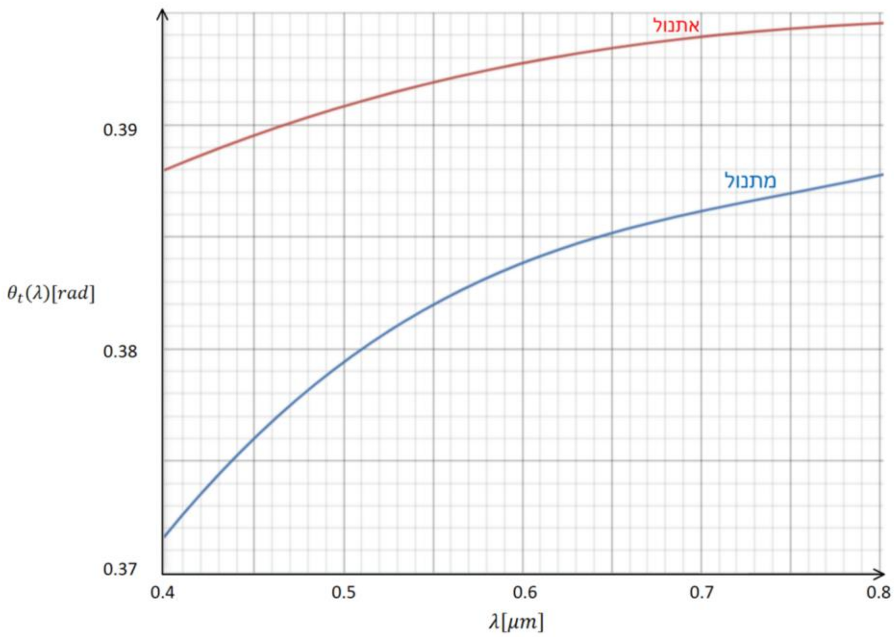
5) א. $\sin\theta_t=\frac{1}{n}\sin\theta_i$.   ב. $l_1=\frac{d\sin\theta_i}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta_i}}$.

ג. $l_2=d\sin\theta_i\left(1-\frac{1}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta_i}}\right)$.

6) א. שרטוט:



ב. בלייזר של ה-532 ננומטר.



ג. אתנול – 4.83cm , מתנול - 4.96cm.

7) $\sqrt{2}$.

8) 79%.

9) א. $\vec{E}_i = 6\cdot10^{-3} e^{i\left(\frac{2\pi}{3}z - 2\pi\cdot10^8 t\right)}\hat{x}$, $\vec{H}_i = \frac{6\cdot10^{-3}}{120\pi} e^{i\left(\frac{2\pi}{3}z-2\pi\cdot10^8 t\right)}\hat{y}$.

ב. $\vec{E}_T = 12\cdot10^{-3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}z\right)\sin\left(2\pi\cdot10^8 t\right)$. ג. $-\frac{3}{2}m$.

10) א. קיטוב מעגלי שמאלי. ב. מעגלי ימני. ג. $\vec{J}_S = \frac{2E_{i0}}{\eta_0}\left(\hat{x} - i\hat{y}\right)$.

ד. $\vec{E}_1(z,t) = 2E_{i0}\sin(kz)\left(\sin(\omega t)\right)\hat{x} + \cos(\omega t)\hat{y}$.

11) א. $\vec{J}_S(y,t) = \frac{E_{i0}}{60\pi}\cos\theta_i \cos\left(\frac{\omega}{c}\sin\theta_i y - \omega t\right)\hat{x}$.

ב. $\langle\vec{S}\rangle = \frac{-E_{i0}^{\ \ 2}}{30\pi}\sin\theta_i \sin^2\left(\frac{\omega}{c}\cos\theta_i z\right)\hat{y}$.

12) א. $\lambda = \frac{\pi}{5}m$, $f = \frac{3}{2\pi}\cdot10^9 Hz$.

ב. $\vec{E}_i(x,z,t) = 10\cos\left(6x+8z-3\cdot10^9 t\right)\hat{y}$, $\vec{H}_i(x,z,t) = \frac{3\hat{z}-4\hat{x}}{60\pi}\cos\left(6x+8z-3\cdot10^9 t\right)$.

ג. $\theta_i = 36.9°$.

ד. $\vec{E}_r(x,z,t) = -10\cos\left(6x-8z-3\cdot10^9 t\right)\hat{y}$, $\vec{H}_r(x,z,t) = \frac{-3\hat{z}-4\hat{x}}{60\pi}\cos\left(6x-8z-3\cdot10^9 t\right)$.

ה. $\vec{E}_1(x,z,t) = -20\sin(8z)\sin\left(6x-3\cdot10^9 t\right)\hat{y}$,

$\vec{H}_1(x,z,t) = \frac{1}{30\pi}\left(-3\sin(8z)\sin\left(6x-3\cdot10^9 t\right)\hat{z} - 4\cos(8z)\cos\left(6x-3\cdot10^9 t\right)\hat{x}\right)$.

13) א. $\lambda = \frac{\pi}{6}m$, $f = \frac{1.8}{\pi}\cdot10^9 Hz$.

ב. $\vec{E}_i = 5\left(\hat{y}+\sqrt{3}\hat{z}\right)\cos\left(6\sqrt{3}y - 6z + 3.6\cdot10^9 t\right)$, $\vec{H}_i = -\frac{\hat{x}}{12\pi}\cos\left(6\sqrt{3}+6z+3\cdot6\cdot10^9 t\right)$.

ג. $\theta = 60°$.

ד. $\vec{E}_r = 5\left(-\hat{y}+\sqrt{3}\hat{z}\right)\cos\left(6\sqrt{3}y+6z+3.6\cdot10^9 t\right)$, $\vec{H}_r = -\frac{\hat{x}}{12}\cos\left(6\sqrt{3}y+6z+3.6\cdot10^9 t\right)$.

ה. $\vec{E}_1 = 10\left(\sin(6z)\sin\left(6\sqrt{3}y+3.6\cdot10^9 t\right)\hat{y}\right) + \sqrt{3}\cos(6z)\cos\left(6\sqrt{3}y+3.6\cdot10^9 t\right)\hat{z}$,

$\vec{H}_1 = -\frac{\hat{x}}{12\pi}\cos(6z)\cos\left(6\sqrt{3}y+3.6\cdot10^9 t\right)\hat{z}$.

14) $\lambda = 4.1\cdot10^{-4}m$, $u = 410\frac{m}{\sec} \approx 10^{-5}c$.

15) $d = 4cm$ עבור ה-5g אין הבדל.

16) א. $\theta_t = 0.03^\circ$.   ב. $\tau'' = 7.37\cdot 10^{-4} e^{-i\cdot 0.778}$.   ג. $\frac{\langle S_t \rangle}{\langle S_i \rangle} = 1.03\cdot 10^{-3}$.

ד. $8.69m$.

שדות אלקטרומגנטיים

פרק 7 - וקטור פויינטינג והאנרגיה האגורה בשדות

תוכן העניינים

הרצאות ותרגילים:

רקע:

<u>אנרגיה אלקטרו מגנטית האגורה בשדות</u>:

$$U = \int \left(\frac{\varepsilon_0 (\vec{E})^2}{2} + \frac{(\vec{B})^2}{2\mu_0} \right) \mathrm{d}v$$

צפיפות האנרגיה:

$$u_{em} = \frac{\varepsilon_0 (\vec{E})^2}{2} + \frac{(\vec{B})^2}{2\mu_0}$$

<u>וקטור פויינטינג</u>:

$$\vec{s} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

שטף האנרגיה ליחידת שטח וליחידת זמן.

<u>הקשר בין האנרגיה לוקטור פויינטינג</u>:

$$P + \oint \vec{s} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\frac{\mathrm{d}U_{em}}{\mathrm{d}t}$$

בצד שמאל עושים אינטגרל של הוקטור פויינטינג על משטח סגור (שטף) ובצד ימין גוזרים בזמן את האנרגיה האגורה בשדות בנפח הכלוא במשטח.

P - ההספק שהולך לחום

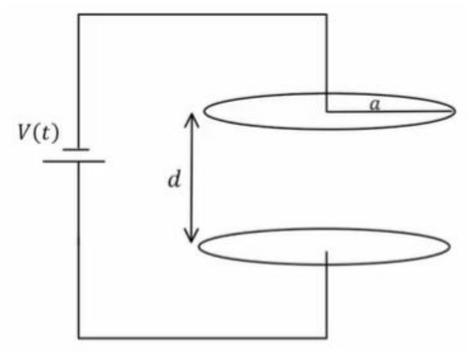
הקשר הדיפרנציאלי:

$$\vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{\nabla} \cdot \vec{s} = -\frac{\mathrm{d}u_{em}}{\mathrm{d}t}$$

$\vec{J}$ - צפיפות הזרם

$\vec{E} \cdot \vec{J}$ הוא הספק ליחידת נפח

שאלות:



1) קבל לוחות עם מתח ליניארי בזמן

קבל לוחות מורכב משני לוחות מעגליים ברדיוס a הנמצאים במרחק $d << a$ זה מזה. הקבל מחובר למקור מתח התלוי ליניארית בזמן $V(t) = A \cdot t$, כאשר A קבוע נתון.

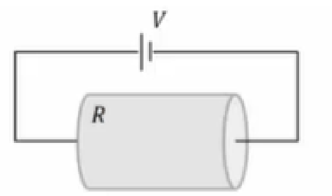
א. מצא את השדה החשמלי בקבל כתלות בזמן.

ב. מצא את השדה המגנטי בתוך הקבל ומחוץ לו.

ג. מצא את האנרגיה האגורה בתוך משטח סגור העוטף את הקבל.

ד. מצא את הוקטור פויינטינג על השפה של המשטח מסעיף ג'.

ה. חשב את השטף של הוקטור פויינטינג על המשטח והראה כי הוא שווה למינוס השינוי בזמן של האנרגיה מסעיף ג'.



2) משפט פויינטינג בנגד גלילי

נגד גלילי בעל אורך L, רדיוס בסיס a והתנגדות R מחובר למקור מתח V.

א. חשב את השדה החשמלי והמגנטי בנגד.

ב. חשב את הוקטור פויינטינג על השפה של הנגד.

ג. חשב את האנרגיה האלקטרומגנטית בנגד והראה כי משפט פויינטינג מתקיים.

ד. הראה כי המשפט מתקיים גם בצורה הדיפרנציאלית שלו.

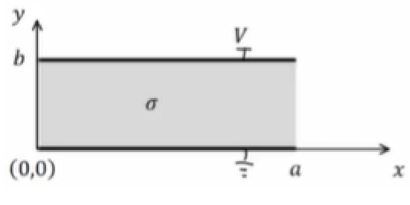
3) מישור אינסופי במתח קבוע

נתון מוליך בגודל $a \times b \times W$ כאשר $W >> a , b$.

נבחר את מערכת הצירים כך שהראשית בפינת המוליך.

הרוחב a מקביל לציר x, הגובה b מקביל לציר y והאורך W מקביל לציר z (ראה איור).

המוליכות של החומר היא σ והוא מוחזק בהפרש פוטנציאלים V.



א. מה השדה החשמלי והזרם במוליך?

ב. מהו $\vec{H}$ במרחב?

ג. מהו ההספק ליחידת נפח שמתבזבז? חשב בדרך ישירה ודרך משפט פויינטינג.

תשובות סופיות:

1) א. $\vec{E}=\frac{A\cdot t}{d}\hat{z}$ ב. $\vec{B}=\frac{\mu_0\varepsilon_0 Ar}{2d}\hat{\theta} \quad r<a$, $\vec{B}=\frac{\mu_0\varepsilon_0 Aa^2}{2rd}\hat{\theta} \quad r\geq a$

ג. $U=\frac{\varepsilon_0 A^2\pi a^2}{2d}\left(t^2+\frac{\mu_0\varepsilon_0 a^2}{2}\right)$ ד. $\vec{S}=\frac{-A^2\varepsilon_0 ta}{d}\pi a$ ה. הוכחה.

2) א. $\vec{E}=\frac{V}{L}\hat{z}$, $\vec{B}=\frac{\mu_0 Vr}{2\pi a^2 R}\hat{\theta}$ ב. $\vec{S}_{(r=a)}=\frac{V^2(-\hat{r})}{2\pi a LR}$ ג. $U_{em}=\frac{\varepsilon_0 V^2\pi a^2}{2L}+\frac{V^2 L}{16\pi R^2}$

ד. הוכחה.

3) א. $\vec{E}=-\frac{V}{b}\hat{y}$, $\vec{J}=-\frac{\sigma V}{b}\hat{y}$ ב. $H_z=\frac{\sigma V}{b}\left(x-\frac{a}{2}\right)$ ג. $\vec{E}\cdot\vec{J}=\frac{\sigma V^2}{b^2}$

שדות אלקטרומגנטיים

פרק 8 - גלים דו מימדיים ומנחה גלים

תוכן העניינים

גלים דו מימדיים

רקע

משוואת הגלים:

$$\frac{T}{\rho}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

T - מתיחות ליחידת אורך.
ρ - צפיפות מסה ליחידת שטח.

פתרון:

$$z(x,y,t)=Ae^{\mathrm{i}(k_x x+k_y y-\omega t)}$$
$$\vec{k}=(k_x,k_y)$$

כיוון וקטור הגל $\vec{k}$ הוא כיוון התקדמות הגל וחזיתות הגל הן במאונך אליו.

אורך הגל:

$$\lambda=\frac{2\pi}{|\vec{k}|}$$

יחס הנפיצה:

$$\omega^2=\frac{T}{\rho}(k_x^2+k_y^2)=v^2\cdot|\vec{k}|^2$$

$$v=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

תנאי שפה מלבנים עבור שפה קשורה:

$$z(x,y,t)=\sum_{m,n}A_{m,n}\sin\left(\frac{\pi n}{L_x}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{L_y}y\right)\cos(\omega_{m,n}t+\varphi_{m,n})$$

שאלות

1) תנאי התחלה משולשים בתוף ריבועי

נתון תוף ריבועי כך ש: $0 \le x, y \le L$. התוף קשור בקצוותיו ובעל מתיחות ליח' אורך T וצפיפות ρ. מותחים את מרכז התוף במרכזו ומשחררים ממנוחה כך שבזמן: $t = 0$ נוצרת בו הצורה:

$$z(x,y,0) = Af(x)f(y)$$

$$f(q) = \begin{cases} q & , \ 0 \le q \le \frac{L}{2} \\ L - q & , \ \frac{L}{2} \le q \le L \end{cases}$$

א. מצאו את מקדמי הפרישה ורשמו את הצורה הכללית של פונקציית הגל.

ב. מצאו את פונקציית הגל אם ראשית הצירים הייתה במרכז התוף ולא בפינה רמז: אין צורך לפתור מחדש.

ג. נניח כי כל מקדם פרישה הקטן מ- $\frac{A_{11}}{100}$ הוא זניח. כמה מקדמי פרישה משמעותיים קיימים (ללא מקדמים המאפסים את הפונקציה).

2) תוף ריבועי לא איזוטרופי

נתון תוף ריבועי בגודל $L_x L_y$, התפוס בקצותיו. התוף אינו איזוטרופי, המתיחות בציר x היא T_x והמתיחות בציר y היא T_y.

א. רשמו את משוואת הגלים עבור התוף.

ב. מהו יחס הנפיצה?

ג. מהם אופני התנודה?

תשובות סופיות

1) א. $z(x,y,t)=\sum_{m,n} A_{m,n}\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{L}y\right)\cos\left(w_{m,n}t\right)$

$$A_{m,n}=\frac{16L^2}{\pi^2 m^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi m}{2}\right)$$

$$w_{m,n}=\frac{T}{\rho}\cdot\frac{\pi^2}{L^2}\left(n^2+m^2\right)$$

ב. $z(x,y,t)=\sum_{m,n} A_{m,n}\sin\left(\frac{\pi n}{L}\left(x+\frac{L}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{\pi m}{L}\left(y+\frac{L}{2}\right)\right)\cos\left(w_{m,n}t\right)$

ג. 10

2) א. $\frac{T_x}{\rho}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{T_y}{\rho}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$

ב. $w^2=\frac{T_x}{\rho}k_x^2+\frac{T_y}{\rho}k_y^2$

ג. $z(x,y,t)=\sum_{m,n} A_{m,n}\sin\left(\frac{\pi n}{L_x}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{L_y}y\right)\cos\left(w_{m,n}t+\varphi_{m,n}\right)$

מנחה גלים

רקע

הפתרון עבור רצועה מלבנית ארוכה ברוחב L עם התאפסות הפונקציה בשפה:

$$z(x,y,t) = A\sin\left(\frac{\pi n}{L}y\right)e^{i(k_x x-\omega t)}$$

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_x}$$

$$v_g = \frac{k_x v^2}{\omega}$$

$$v_g \cdot v_\varphi = v^2$$

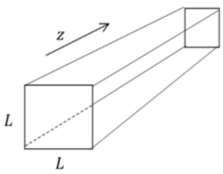
חסם תחתון:

$$\omega > \frac{\pi n}{L}$$

שאלות

1) מוליך גלים תלת מימדי

נסתכל על מוליך גלים תלת מימדי הבנוי מתיבה מאוד ארוכה בעלת שטח חתך ריבועי עם צלע L. שטח החתך הוא במישור xy והמוליך הוא לאורך ציר z.
משוואת הגלים במקרה התלת מימדי היא:



$$v^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

הניחו שבשפות התיבה פונקציית הגל מתאפסת.

א. מצאו פתרון כללי למשוואה, $\psi(x,y,z,t)$ הניחו כי גל המתקדם בכיוון z החיובי.

ב. הציבו את תנאי השפה ומצאו את אופני התנודה האפשריים ויחס הנפיצה.

ג. מהי תדירות הקטעון (תדירות החסם התחתון הנמוך ביותר)?

ד. כיצד ישתנו תשובותיכם לסעיף ב' אם התנאי בשפת התיבה היה שהנגזרת של הפונקציה מתאפסת ולא הפונקציה עצמה?

תשובות סופיות

1) א. $\psi(x,y,z,t)=\left(Ae^{ik_x x}+Be^{-ik_x x}\right)\left(Ce^{ik_y y}+Dc^{-ik_y y}\right)e^{i(k_z z-wt)}$

ב. $\psi_{m,n}(x,y,z,t)=A_{m,n}\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{L}y\right)e^{i(k_z z-wt)}$

$$w^2=v^2\left(\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2+\left(\frac{\pi m}{L}\right)^2+k_z^2\right)$$

ג. $w_{m,n}=\frac{v\pi}{L}\sqrt{2}$

ד. $\psi_{m,n}(x,y,z,t)=A_{m,n}\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\cos\left(\frac{\pi m}{L}y\right)e^{i(k_z z-wt)}$