

# קלוקוס 1



## תוכן העניינים

1	1. הפונקציה הממשית ומבוא לתורת הקבוצות
27	2. גבול של פונקציה
45	3. רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים
60	4. הגדרת הנגזרת - גזירות של פונקציה - נגזרות חד-צדדיות
73	5. חישוב נגזרת של פונקציה
86	6. חישוב נגזרת של פונקציות מיוחדות
90	7. משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי
101	8. כלל לופיטל
108	9. חקירת פונקציה
137	10. מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה
142	11. בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון)
162	12. אינטגרלים מיידיים
167	13. אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"
169	14. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים
173	15. אינטגרלים בשיטת ההצבה
176	16. אינטגרלים של פונקציות רציונליות
181	17. אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות
192	18. האינטגרל המסוים, אינטגרליות לפי רימן ולפי דארבו
204	19. שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)
226	20. אינטגרלים לא אמיתיים
237	21. בעיות מינימום ומקסימום כלכליות
241	22. המשפט היסודי של החדו"א, משפטי הערך הממוצע לאינטגרלים
244	23. הוכחות של משפטים נבחרים בקורס

# תוכן העניינים

# קלקולוס 1

## פרק 1 - הפונקציה הממשית ומבוא לתורת הקבוצות

### תוכן העניינים

1. פונקציה - הגדרה ותכונות בסיסיות..... (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית..... (ללא ספר)
3. הפונקציה הריבועית..... (ללא ספר)
4. הפונקציה המעריכית..... (ללא ספר)
5. הפונקציה הלוגריתמית..... (ללא ספר)
6. פונקציות מפורסמות נוספות..... (ללא ספר)
7. הזזות שיקופים מתיחות וכיווצים של פונקציה..... (ללא ספר)
8. תחום הגדרה של פונקציה..... 1
9. הרכבת פונקציות..... 3
10. הפונקציה ההפוכה..... 6
11. פונקציה זוגית ופונקציה אי זוגית..... 10
12. פונקציה מפוצלת..... 12
13. תרגילים משולבים..... 13
14. מבוא לתורת הקבוצות..... 17

## תחום הגדרה של פונקציה

### שאלות

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$y = x^3 - x^2 - 4x + 1 \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{x^2 - 4} \quad (2)$$

$$y = \frac{4x + 1}{x^2 + 1} \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{x^3 - x} \quad (4)$$

$$y = \frac{x^2}{x^2 - x - 2} \quad (5)$$

$$y = \sqrt{x - 4} \quad (6)$$

$$y = \sqrt{x^2 + x - 2} \quad (7)$$

$$y = \sqrt[3]{x^2 + x - 1} \quad (8)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - |x|}} \quad (9)$$

$$y = \ln(x^2 + x - 2) \quad (10)$$

$$y = \log x + \frac{1}{\log x} \quad (11)$$

$$y = e^{x^2 + x + 1} \quad (12)$$

$$y = \log_x(x+4) \quad (13)$$

### תשובות סופיות

- (1) כל  $x$
- (2)  $x \neq \pm 2$
- (3) כל  $x$
- (4)  $x \neq 0, 1, -1$
- (5)  $x \neq 2, -1$
- (6)  $x \geq 4$
- (7)  $x \leq -2, x \geq 1$
- (8) כל  $x$
- (9)  $-1 < x < 1$
- (10)  $x < -2, x > 1$
- (11)  $x > 0, x \neq 1$
- (12) כל  $x$
- (13)  $x > 0, x \neq 1$

## הרכבת פונקציות

### שאלות

(1) נתונות הפונקציות  $h(x) = \frac{4}{x}$ ,  $g(x) = x^2$ ,  $f(x) = x - 4$

חשבו את הפונקציות המורכבות הבאות:

א.  $f(g(1))$       ב.  $h(g(f(5)))$       ג.  $f(g(x))$

ד.  $h(f(x))$       ה.  $f(f(x))$       ו.  $h(h(x))$

(2) נתון  $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$

חשבו את  $f(f(x))$  עבור  $x=3$ .

(3) נתון  $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ ,  $g(x) = \frac{5-x}{x-7}$

חשבו את  $f(g(x)) + g(f(x))$  עבור  $x=8$ .

(4) נתון  $f(x) = x^2 - 7x$ ,  $g(x) = \ln x$

חשבו את  $f(g(x))$  עבור  $x=e^2$ .

(5) נתון  $f(x) = e^{2x}$ ,  $g(x) = \ln x$

חשבו את  $f(g(x))$  עבור  $x=2$ .

(6) נתון  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$ ,  $g(x) = \begin{cases} x+3 & x > 4 \\ 3x & x \leq 4 \end{cases}$

חשבו את  $f(g(x))$ ,  $g(f(x))$

(7) נתונות הפונקציות

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 1 \\ -x^2-2x-1 & x \geq 1 \end{cases}$$

מצאו נוסחה עבור ההרכבה  $z(x) = g(f(x))$ .

## 8 נתונות הפונקציות

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases} \quad \text{ו-} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 1 \\ -x^2 - 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

א. מצאו נוסחה עבור ההרכבה  $h(x) = f(g(x))$ .

ב. נתון ש- $n \in \mathbb{Z}$  ו- $h(n) \notin \mathbb{Z}$ .

מה ניתן להסיק בוודאות?

1.  $n \leq -3$

2.  $n \geq 1$

3.  $n$  אי-זוגי שלילי.

4. אף תשובה אינה נכונה.

9 נתון  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

מצאו את  $f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\dots(f(x))))}_{n \text{ Times}}$

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } -3 \quad \text{ב. } 4 \quad \text{ג. } x^2 - 4 \quad \text{ד. } \frac{4}{x-4} \quad \text{ה. } x-8 \quad \text{ו. } x$$

$$(2) \quad 3$$

$$(3) \quad 69/13$$

$$(4) \quad -10$$

$$(5) \quad 4$$

$$f(g(x)) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & x > 4 \\ \frac{1}{3x} & 0 < x \leq 4 \\ (3x)^2 & x \leq 0 \end{cases}, \quad g(f(x)) = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 2 \\ 3x^2 & -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{x} + 3 & 0 < x < \frac{1}{4} \\ 3\frac{1}{x} & x \geq \frac{1}{4} \end{cases} \quad (6)$$

$$z(x) = \begin{cases} 4x^2 + 16x + 12 & x < -1.5 \\ -4x^2 - 20x - 25 & -1.5 \leq x \leq -1 \\ x - 3 & -1 < x < 0 \\ -x - 2 - 2\sqrt{x+1} & x \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{ב. } n \leq -3 \quad h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3} & x < -\sqrt{3} \\ 2x^2 - 4 & -\sqrt{3} \leq x < 1 \\ -2x^2 - 4x + 2 & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{א. } (8)$$

$$f^n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}} \quad (9)$$

## הפונקציה ההפוכה

### שאלות

בשאלות 1-4 הוכיחו שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצאו את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{3} \quad (1)$$

$$(x \geq 0) f(x) = x^2 - 4 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad (3)$$

בשאלות 5-7, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (7)$$

$$f(x) = x^2 - x \quad (6)$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad (5)$$

בשאלות 8-10, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע, אם כן, מצאו את הפונקציה ההפוכה ואת התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \left( \frac{2x-1}{2x+1} \right)^3 \quad (10)$$

$$y = \frac{x^2+3}{2x-1} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (8)$$

$$(11) \text{ נתונה } f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x-1}}$$

האם הפונקציה היא חח"ע? מצאו את התמונה של הפונקציה.

(12) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו את תחום ההגדרה, הטווח והתמונה וקבעו האם היא פונקציה על:

א.  $f(x) = \frac{x-1}{3}$  ;  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

ב.  $f(x) = \frac{x+1}{x}$  ;  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

ג.  $f(x) = \frac{3x-2}{x-2}$  ;  $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}$

ד.  $f(x) = x^2 - 4$  ;  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

**13** עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו תחום הגדרה, טווח ותמונה. בנוסף, קבעו האם הפונקציה הנתונה היא על.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{א.}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f: \mathbb{R} \rightarrow (0, 1] \quad \text{ב.}$$

$$h(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f: (1, \infty) \rightarrow (0, 1] \quad \text{ג.}$$

**14** תהיינה שתי פונקציות  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ .

תהי  $h: A \rightarrow C$  ההרכבה, המוגדרת על ידי  $h(x) = g(f(x))$ . הוכיחו או הפריכו:

א. אם  $f$  ו- $g$  חח"ע אז  $h$  חח"ע.

ב. אם  $f$  ו- $g$  חח"ע אז  $h$  על.

ג. אם  $f$  ו- $g$  על אז  $h$  על.

ד. אם  $f$  ו- $g$  על אז  $h$  חח"ע.

ה. אם  $f$  חח"ע ו- $g$  על אז  $h$  חח"ע.

ו. אם  $f$  חח"ע ו- $g$  על אז  $h$  על.

ז. אם  $f$  על ו- $g$  חח"ע אז  $h$  חח"ע.

ח. אם  $f$  על ו- $g$  חח"ע אז  $h$  על.

**15** תהיינה שתי פונקציות  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ .

תהי  $h: A \rightarrow C$  ההרכבה, המוגדרת על ידי  $h(x) = g(f(x))$ .

נתון כי  $h$  על.

הוכיחו או הפריכו:

א.  $f$  חח"ע.

ב.  $f$  על.

ג.  $g$  חח"ע.

ד.  $g$  על.

16) תהיינה שתי פונקציות  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ .

תהי  $h: A \rightarrow C$  ההרכבה, המוגדרת על ידי  $h(x) = g(f(x))$ .

נתון כי  $h$  חח"ע.

הוכיחו או הפריכו:

א.  $g$  על.

ב.  $f$  על.

ג.  $g$  חח"ע.

ד.  $f$  חח"ע.

## תשובות סופיות

$$(1) \quad f^{-1}(x) = 3x + 1, \text{ כל } y.$$

$$(2) \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}, y \neq 1$$

$$(3) \quad f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{x-3}, y \neq 3$$

$$(4) \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}, y \geq -4$$

$$(5) \quad \text{לא חח"ע. תמונה: } y \leq -2 \text{ או } y \geq 2.$$

$$(6) \quad \text{לא חח"ע. תמונה: } y \geq -\frac{1}{4}.$$

$$(7) \quad \text{לא חח"ע. תמונה } 0 \leq y \leq 1.$$

$$(8) \quad \text{כן חח"ע. תמונה: } y > 0. \text{ פונקציה הפוכה: } f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{x^2}, x > 0.$$

$$(9) \quad \text{לא חח"ע. תמונה: } y \geq 2.3 \text{ או } y \leq -1.3$$

$$(10) \quad \text{כן חח"ע. תמונה: } y \neq 1. \text{ פונקציה הפוכה: } f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2}.$$

$$(11) \quad \text{לא חח"ע. תמונה: } y \geq \frac{6}{\sqrt{3}}.$$

$$(12) \quad \text{א. תחום הגדרה, טווח ותמונה: } \mathbb{R}; \text{ על.}$$

$$\text{ב. תחום הגדרה } \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ טווח } \mathbb{R}, \text{ תמונה: } \mathbb{R} \setminus \{0\}; \text{ לא על.}$$

$$\text{ג. תחום הגדרה } \mathbb{R} \setminus \{2\}, \text{ טווח ותמונה: } \mathbb{R} \setminus \{3\}; \text{ על.}$$

$$\text{ד. תחום הגדרה } [0, \infty), \text{ טווח } \mathbb{R}, \text{ תמונה: } [-4, \infty); \text{ לא על.}$$

$$(13) \quad \text{א. תחום הגדרה וטווח: } \mathbb{R}, \text{ תמונה: } (0, 1]; \text{ לא על.}$$

$$\text{ב. תחום הגדרה } \mathbb{R}, \text{ טווח ותמונה: } (0, 1]; \text{ על.}$$

$$\text{ג. תחום הגדרה } (1, \infty], \text{ טווח } (0, 1], \text{ תמונה: } (0, 0.5); \text{ לא על.}$$

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16) שאלת הוכחה.

## פונקציה זוגית ואי זוגית

### שאלות

מצאו איזה מבין הפונקציות בשאלות 1-6 הן אי-זוגיות ואיזה זוגיות:

$$y = 4x^3 \quad (1) \quad y = x^4 + x^{10} \quad (2) \quad y = 1 \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{x} \quad (4) \quad y = 2^x \quad (5) \quad y = \ln x + x^2 \quad (6)$$

(7) נתונה פונקציה אי-זוגית  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\text{ונסמן } k(x) = -f(x), \quad z(x) = f(x^2).$$

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות  $k, z$ , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(8) נתונה פונקציה אי-זוגית  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , פונקציה זוגית  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\text{ונסמן } k(x) = -f(x^3) \text{ ו- } z(x) = -g(x^3).$$

טענה א':  $z(x)$  אי-זוגית.

טענה ב':  $k(x)$  אי-זוגית.

איזו טענה נכונה?

(9) נתונה פונקציה אי-זוגית  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , פונקציה זוגית  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\text{ונסמן } k(x) = f(-x) + x^{11}g(|x|), \quad z(x) = -g(-4x) \cdot f(x^4).$$

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות  $k, z$ , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(10) הוכיחו כי:

א. סכום פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית

ב. מכפלת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ג. מנת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ד. הרכבה של פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ה. הרכבה של פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה אי-זוגית.

**תשובות סופיות**

שאלות 1-6: זוגית: 2,3; אי-זוגית: 1,4; כללית: 5,6.

(7)  $k$  אי-זוגית,  $z$  זוגית.

(8) טענה ב'.

(9)  $k$  אי-זוגית,  $z$  זוגית.

(10) שאלת הוכחה.

## פונקציה מפוצלת

### שאלות

רשמו כל אחת מהפונקציות 1-4 כפונקציה מפוצלת ושרטטו את גרף הפונקציה:

$$y = 3|x+1| \quad (2)$$

$$y = |x-2| \quad (1)$$

$$y = \frac{|x|}{x} \quad (4)$$

$$y = x^2 + 2|x-1| \quad (3)$$

$$(5) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 4 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

א. חשבו  $f(1)$ ,  $f(4)$ ,  $f(-4)$ ,  $f(0)$ ,  $f(7)$ .

ב. שרטטו את גרף הפונקציה.

ג. בדקו האם הפונקציה זוגית, אי-זוגית או כללית.

### תשובות סופיות

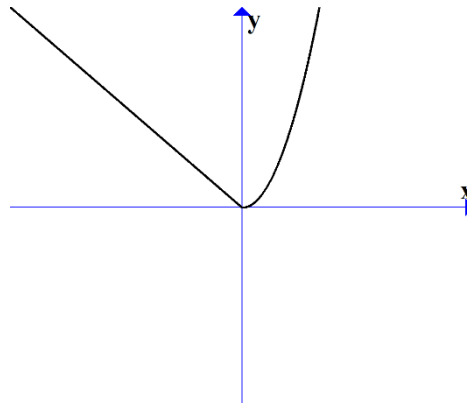
$$y = \begin{cases} 3x+3 & x \geq -1 \\ -3x-3 & x < -1 \end{cases} \quad (2)$$

$$y = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & x < 1 \end{cases} \quad (3)$$

(5) א.  $f(1) = 1$ ,  $f(4) = 16$ ,  $f(-4) = 4$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(7) = \text{undefind}$  ב. ג. כללית.



## תרגילים משולבים

### שאלות

$$(1) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ x^3 + 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

שרטטו את הפונקציה, וקבעו האם היא:

א. עולה.

ב. יורדת.

ג. אי-זוגית.

ד. זוגית.

ה. חסומה.

ו. לא חסומה.

ז. חח"ע.

ח. על  $\mathbb{R}$ .

הערה: ניתן להתבסס על הציור כנימוק.

$$(2) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & x > 1 \\ x^5 + 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

בכל אחד מהסעיפים הבאים יש טענה.

קבעו האם הטענה נכונה או לא נכונה.

א. הפונקציה מונוטונית עולה ממש.

ב. הפונקציה על  $\mathbb{R}$ .

ג. הפונקציה אי-זוגית.

ד. הפונקציה זוגית.

ה. הפונקציה חח"ע.

הערה: ניתן לשרטט ולהתבסס על הציור כנימוק.

(3) נתונה פונקציה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , זוגית ומונוטונית עולה ממש, ופונקציה  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , אי-זוגית ומונוטונית יורדת ממש.

$$\text{נסמן: } z(x) = -g(x^3) \text{ ו- } k(x) = -f(x^3).$$

טענה א':  $k(x)$  מונוטונית עולה ממש.

טענה ב':  $z(x)$  מונוטונית עולה ממש.

טענה ג':  $h(x) = k(x)z(x)$  זוגית.

מי מבין הטענות נכונה?

(4) נתונות שתי פונקציות,  $f, g: [0,1] \rightarrow [0,1]$ .

נתון ש- $f$  מונוטונית עולה ממש, ואילו  $g$  מונוטונית יורדת חלש,

אך אינה יורדת ממש.

תהי  $h(x) = f(g(x))$ .

איזו טענה נכונה?

א.  $h$  יורדת חלש.

ב.  $h$  עולה ממש.

ג.  $h$  עולה חלש, אך אינה עולה ממש.

ד.  $h$  אינה חסומה בהכרח.

$$(5) \text{ נתונות הפונקציות } f(x) = \begin{cases} x+4 & x \leq 0 \\ \sqrt{x} & x > 0 \end{cases} \text{ ו- } g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 0 \\ -x^2-2x-1 & x \geq 0 \end{cases}$$

תהי  $h(x) = f(g(x))$ .

א. מצאו את  $h$  בקטע  $[-2,0)$ .

ב. קבעו האם  $h$  חח"ע בקטע  $[-2,0)$ .

ג. קבעו האם  $h$  חסומה בקטע  $[-2,0)$ .

ד. קבעו האם  $h: [-2,0) \rightarrow [0,4]$  היא על.

\* בסעיפים ב-ד ניתן להסתמך על גרף הפונקציה.

(6) נתונות פונקציות המוגדרות על כל  $\mathbb{R}$ :  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$ .

קבעו מי מבין הטענות הבאות נכונה.

הפונקציה  $h(x) = f(g(x))$  היא:

א. חסומה.

ב. אי-זוגית.

ג. חח"ע.

ד. מונוטונית.

7 נתונות פונקציות המוגדרות על כל  $\mathbb{R}$  :  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = -\lfloor x \rfloor$ .

א. בדקו את מונוטוניות  $z(x) = f(g(x))$ .

ב. בדקו את מונוטוניות  $k(x) = g(f(x))$ .

ג. בדקו האם  $h(x) = \sqrt[3]{f(x)} - g(-x)$  חסומה.

תזכורת לסעיפים א+ב:

אם  $a < b \Leftrightarrow f(a) \geq f(b)$  אז הפונקציה  $f$  יורדת חלש.

8 נתונות פונקציות המוגדרות על כל  $\mathbb{R}$  :  
 $f(x) = (3\lfloor x \rfloor)^3 + 27\lfloor x \rfloor$   
 $g(x) = f(x) + x^3 - 28$

הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה  $f$  עולה ממש וחח"ע.

ב. הפונקציה  $g$  עולה ממש וחח"ע.

9 מצאו את הפונקציה ההפוכה לפונקציה  $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ,

קבעו את תחום הגדרתה והוכיחו שהפונקציה על  $\mathbb{R}$ .  
 הערה: פונקציה זו נקראת סינוס היפרבולי.

10 חקרו את מונוטוניות הפונקציה  $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$ .

הערה: אין להשתמש בנגזרות.

11 נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$ .

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את התמונה של הפונקציה.

ג. הוכיחו שהפונקציה חסומה.

ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

## תשובות סופיות

- (1) א. כן. ב. לא. ג. לא. ד. לא. ה. לא. ו. כן.  
ז. כן. ח. כן.
- (2) אף טענה אינה נכונה.
- (3) טענה ב' נכונה.
- (4) טענה א' נכונה.
- (5) א.  $h(x) = x^2$ . ב. הפונקציה חח"ע בקטע.
- ג. הפונקציה חסומה בקטע. ד. הפונקציה לא על.
- (6) א. הפונקציה חסומה. ב. הפונקציה לא זוגית ולא אי זוגית.  
ג. הפונקציה לא חח"ע. ד. הפונקציה לא מונוטונית.
- (7) א. הפונקציה  $z(x)$  יורדת חלש. ב. הפונקציה  $k(x)$  יורדת חלש.  
ג. הפונקציה חסומה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9)  $f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ; תחום הגדרתה: כל  $x$ .
- (10) ראו באתר.
- (11) א.  $-1 \leq x \leq 2$ . ב.  $0 \leq y \leq \frac{3}{2}$ . ג. שאלת הוכחה.
- ד.  $-1 \leq x < \frac{1}{2}$  עלייה,  $\frac{1}{2} < x \leq 2$  ירידה.

## מבוא לתורת הקבוצות

### סיכום כללי

#### הגדרות יסודיות

- גרירה חד כיוונית  $\Rightarrow$ .  $A \Rightarrow B$  פירושו: אם  $A$  מתקיים, אז גם  $B$  מתקיים.
- גרירה דו-כיוונית  $\Leftrightarrow$  (אם ורק אם).  $A \Leftrightarrow B$  פירושו:  $A \Rightarrow B$  וגם  $B \Rightarrow A$ .
- הסימן 'או'  $\vee$ .
- הסימן 'וגם'  $\wedge$ .

#### קבוצה, איבר של קבוצה ושייכות לקבוצה

- קבוצה היא אוסף של עצמים.
- כל עצם בקבוצה נקרא איבר של הקבוצה.
- שייכות לקבוצה:
  - על מנת לציין שהאיבר  $a$  שייך לקבוצה  $A$  נרשום  $a \in A$ .
  - על מנת לציין שהאיבר  $a$  אינו שייך לקבוצה  $A$  נרשום  $a \notin A$ .

#### שוויון בין קבוצות

- שתי קבוצות הן שוות אם יש להן בדיוק את אותם איברים.
- פורמלית שוויון בין קבוצות מוגדר באופן הבא:  $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ .

#### הקבוצה ריקה

קבוצה שאין בה כלל איברים נקראת הקבוצה הריקה ומסומנת ב- $\emptyset$ , כלומר  $\emptyset = \{ \}$ .

#### קבוצה סופית ואינסופית

- קבוצה תקרא סופית אם מספר האיברים בה סופי.
- קבוצה תקרא אינסופית אם מספר האיברים בה אינסופי.

## עוצמה של קבוצה

מספר האיברים של קבוצה  $A$  נקרא גם העוצמה של הקבוצה ומסומן  $|A|$ .

### תת-קבוצה

אם קבוצה  $A$  מוכלת בקבוצה  $B$ , נסמן  $A \subseteq B$ .

תמיד מתקיים:

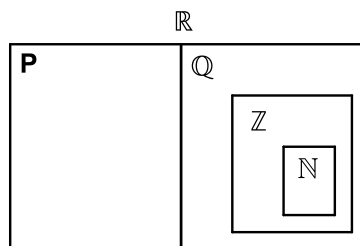
- $A \subseteq A$

- $\emptyset \subseteq A$

עבור שוויון קבוצות נדרוש  $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$  או  $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$ .

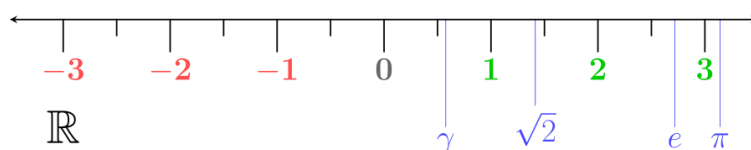
### קבוצות מספרים מיוחדות

- קבוצת המספרים הטבעיים:  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- קבוצת המספרים השלמים:  $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$
- קבוצת המספרים הרציונאליים:  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$
- קבוצת המספרים האי-רציונאליים (אין סימון ספציפי לקבוצה זו, למעט  $\mathbb{P}$ ).
- קבוצת המספרים הממשיים:  $\mathbb{R}$  (כוללת את  $\mathbb{Q}$  ואת  $\mathbb{P}$ ).



### ציר המספרים

את קבוצת כל המספרים הממשיים ניתן לתאר על ידי הישר הממשי שהוא הישר שנקודותיו הן המספרים הממשיים:



## קטעים על ציר המספרים

סימון קטעים	סימון קבוצות	תיאור מילולי
$(a, b)$	$\{x \mid a < x < b\}$	הקטע הפתוח מ- $a$ ל- $b$ לא כולל נקודות הקצה
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	הקטע הסגור מ- $a$ ל- $b$ וכולל נקודות קצה
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	קטע חצי סגור וחצי פתוח, מכיל את $a$ ולא את $b$
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	קטע חצי סגור וחצי פתוח, מכיל את $b$ ולא את $a$
$(a, \infty)$	$\{x \mid a < x < \infty\}$	הקרו הפתוחה מ- $a$ עד $\infty$ ללא $a$
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \leq x < \infty\}$	הקרו הסגורה מ- $a$ עד $\infty$ כולל $a$
$(-\infty, b)$	$\{x \mid -\infty < x < b\}$	הקרו הפתוחה מ- $-\infty$ עד $b$ ללא $b$
$(-\infty, b]$	$\{x \mid -\infty < x \leq b\}$	הקרו הסגורה מ- $-\infty$ עד $b$ כולל $b$

## קבוצת החזקה של קבוצה נתונה

קבוצת כל תתי-הקבוצות של  $A$ , נקראת קבוצת החזקה של  $A$ , ומסומנת  $P(A)$ .

## איחוד וחיתוך קבוצות

- איחוד קבוצות  $A$  ו- $B$  פירושו הגדרת קבוצה חדשה שמכילה את כל האיברים של הקבוצות עצמן ומסומנת  $A \cup B$ .
- חיתוך קבוצות  $A$  ו- $B$  פירושו הגדרת קבוצה חדשה שמכילה את האיברים המשותפים של הקבוצות עצמן ומסומנת  $A \cap B$ .

תכונות החיתוך	תכונות האיחוד
$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
$A \cap \phi = \phi$	$A \cup \phi = A$
	$A \subseteq A \cup B$

הדיסטריבוטיביות של החיתוך מעל האיחוד ושל האיחוד מעל החיתוך:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

### הפרש קבוצות

ההפרש של שתי קבוצות  $A$  ו- $B$ , המסומן  $A - B$ , הוא קבוצה שאיבריה הם כל איברי  $A$  שאינם איברי  $B$ , כלומר  $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ .

### משלים של קבוצה

ההפרש  $U - A$  מסומן ב- $A^c$  או ב- $A'$  ונקרא **המשלים** של  $A$ , כאשר  $U$  היא הקבוצה האוניברסלית.

### כללי דה-מורגן

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \bullet$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad \bullet$$

### דיאגרמת וון

תיאור גרפי של קבוצות והיחסים ביניהן.

## שאלות

(1) רשמו את הטענות הבאות במילים ובדקו האם הן נכונות:

א.  $\forall x \forall y: (x+y)^2 > 0$

ב.  $\forall x \exists y: (x+y)^2 > 0$

ג.  $\forall x \forall y \exists z: xz = \frac{y}{4}$

ד.  $\forall x > 0, \forall y > 0, \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

ה.  $\forall n \exists k, n^3 - n = 6k$  ( $n-1$  ו- $k$  טבעיים).

(2) רשמו כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון אי-השוויון  $x^2 > 4$ , הוא  $x > 2$  או  $x < -2$ .

ב. אי השוויון  $x^2 + 4 > 0$ , מתקיים לכל  $x$ .

ג. לכל מספר טבעי  $n$ , המספר  $n^3 - n$  מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר  $x$ ,  $|x| < 1$  אם ורק אם  $-1 < x < 1$ .

(3) רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים,

ואת מספר איברי הקבוצה:

א.  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}$

ב.  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16\}$

ג.  $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16\}$

ד.  $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+4)(x-1) < 0\}$

ה.  $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 + x^2 - 2x = 0\}$

ו.  $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}$

(4) הגדירו את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן

בצורה:  $A = \{x \mid x \text{ מקיים תכונה מסוימת}\}$ .

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האי-זוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 1, 2, 3, 4.

5) ציינו אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו:

א.  $A = \{11, 13, 17, 19\}$

ב.  $B = \{x \mid 10 < x < 20, x \text{ מספר ראשוני}\}$

ג.  $C = \{11, 11, 17, 13, 19\}$

ד.  $D = \{x \mid x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$

ה.  $E = \{x \mid x = 2m, m \text{ שלם זוגי}\}$

6) נתונה הקבוצה  $A = \{1, 2, \{2\}, \{2, 5\}, 4, \{2, 4\}\}$ .

מי מבין הטענות הבאות נכונה:

א.  $5 \in A$       ב.  $2 \in A$       ג.  $\{2\} \in A$

ד.  $\{2\} \subseteq A$       ה.  $\{\{2\}\} \subseteq A$       ו.  $\emptyset \in A$

ז.  $\emptyset \subseteq A$       ח.  $\{2, \{2\}\} \subseteq A$       ט.  $\{2, 4\} \subseteq A$

י.  $\{2, 4\} \in A$       יא.  $\{\{2, 4\}\} \in A$       יב.  $\{2, 5\} \subseteq A$

יג.  $\{2, 5\} \in A$       יד.  $\{1, 4\} \in A$

7) מצאו שתי קבוצות,  $A$  ו- $B$ , המקיימות:

א.  $A \in B$

ב.  $A \subseteq B$

8) נתונות הקבוצות הבאות:

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{4, 6, 8, 10\}, C = \{3, 5, 7, 9\}, D = \{6, 7, 8\}, E = \{7, 8\}$$

קבעו איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה  $X$ :

א.  $X \subseteq A$  וגם  $X \not\subseteq D$

ב.  $X \subseteq D$  וגם  $X \not\subseteq C$

ג.  $X \subseteq E$  וגם  $X \not\subseteq A$

9) הוכיחו:  $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ .

**10** נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{4, 6, 8, 10\}, C = \{3, 5, 7, 9\}, D = \{6, 7, 8\}$$

רשמו את :

א.  $A \cup B$       ב.  $A \cap B$       ג.  $(A \cup B) \cap C$

ד.  $(B \cup C) \cap (B \cup D)$       ה.  $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

**11** נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = [1, 4), B = (-2, 1), C = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}, D = \{x \mid 2^x = 0\}$$

רשמו את :

א.  $A \cup B$       ב.  $A \cap B$       ג.  $(A \cup B) \cap C$

ד.  $(B \cup C) \cap (B \cup D)$       ה.  $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

**12** נתונות 3 קבוצות :

$$A = \{4, 5, 6, 7, 8\}, B = \{5, 6, 7, 8, 9\}, C = \{4, 5, 6, 10\}$$

א. חשבו את  $(A - B) - C$ .

ב. חשבו את  $A - (B - C)$ .

**13** נתון :  $U = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$ ,  $A = \{12, 15, 18\}$ ,  $B = \{13, 15, 17\}$

הדגימו את כלל דה מורגן  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ .

**14** הוכיחו את כלל דה מורגן הראשון  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ .

**15** מצאו את הקבוצה המשלימה, ביחס ל- $\mathbb{R}$ , של הקבוצות הבאות :

א.  $A = [1, \infty)$

ב.  $B = (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$

ג.  $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 > 0\}$

ד.  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 2 \vee x > 4\}$

**16** הציגו באמצעות דיאגרמת וון את הקבוצות הבאות :

- |                                  |                                  |
|----------------------------------|----------------------------------|
| א. $A \cap B$                    | ב. $A \cup B$                    |
| ג. $A^c$                         | ד. $A \cap B^c$                  |
| ה. $A^c \cap B$                  | ו. $A \cup B^c$                  |
| ז. $A^c \cup B$                  | ח. $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$ |
| ט. $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ |                                  |

**17** ענו על הסעיפים הבאים :

- א. הוכיחו כי  $A \setminus B = A \cap B^c$ .  
הראו זאת גם בעזרת דיאגרמת ון.
- ב. נסמן:  $X = C \setminus (A \cap B)$ ,  $Y = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ .  
הוכיחו כי  $X = Y$ .
- ג. נסמן:  $X = A \setminus (B \cup C)$ ,  $Y = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ .  
הוכיחו כי  $X = Y$ .

**18** תהיינה  $X, Y, Z$  קבוצות כלשהן.

- טענה א':  $X \cap Y \cap Z = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus Z) \cup (Z \setminus X)$ .
- טענה ב':  $((X \cap Y) \cup Z)^c = (X^c \cup Y^c) \cap Z^c$ .
- טענה ג':  $X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \setminus Z$ .
- איזו טענה נכונה לכל בחירה של  $X, Y, Z$ ?

**19** נתונה הקבוצה  $A = \{\emptyset, 4, \{4\}\}$ .

רשמו את  $P(A)$ .

**20** הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית :

- א. לכל קבוצה  $A$  מתקיים  $A \subseteq P(A)$ .
- ב. לכל קבוצה  $A$  מתקיים  $A \not\subseteq P(A)$ .

**21** הוכיחו כי:  $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$ .

## תשובות סופיות

- (1) א. לכל  $x$  ולכל  $y$  מתקיים  $(x+y)^2 > 0$ . הטענה אינה נכונה.  
 ב. לכל  $x$  קיים  $y$ , כך ש- $(x+y)^2 > 0$ . הטענה אינה נכונה.  
 ג. לכל  $x$  ולכל  $y$  קיים  $z$  כך ש- $xz = \frac{y}{4}$ . הטענה אינה נכונה.  
 ד. לכל  $x$  חיובי ולכל  $y$  חיובי מתקיים  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ . הטענה נכונה.  
 ה. לכל  $n$  טבעי המספר  $n^3 - n$  מתחלק ב-6. הטענה נכונה.
- (2) א.  $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2 \vee x < -2$  ב.  $\forall x: x^2 + 4 > 0$   
 ג.  $\forall n \exists k: n^3 - n = 6k$  ד.  $\forall x: |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$
- (3) א.  $A = (-4, 4)$ , בקבוצה אינסוף איברים.  
 ב.  $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ , בקבוצה 7 איברים.  
 ג.  $C = \{1, 2, 3\}$ , בקבוצה 3 איברים.  
 ד.  $D = \{-3, -2, -1, 0\}$ , בקבוצה 4 איברים.  
 ה.  $E = \{0, 1\}$ , בקבוצה 2 איברים.  
 ו.  $F = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ , בקבוצה 9 איברים.
- (4) א.  $A = \{x \mid x = 2n - 1, n \in \mathbb{N}\}$  ב.  $B = \{11, 13, 17, 19\}$   
 ג.  $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4^2, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$  ד.  $D = \{1, 4, 9, 16\}$
- (5) הקבוצות  $A, B$  ו- $C$  שוות זו לזו, והקבוצות  $D$  ו- $E$  שוות זו לזו.
- (6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.  
 ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.  
 יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.
- (7)  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{\{1, 2\}, 1, 2\}$
- (8) א.  $A, C$  ב.  $E, D$  ג. לא קיימת קבוצה כזאת.
- (9) שאלת הוכחה.

$$A \cap B = \{4, 6, 8\} \quad \text{ב.} \quad A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \quad \text{א. (10)}$$

$$(B \cup C) \cap (B \cup D) = \{4, 6, 7, 8, 10\} \quad \text{ד.} \quad (A \cup B) \cap C = \{3, 5, 7, 9\} \quad \text{ג.}$$

$$(B \cap C) \cup (B \cap D) = \{6, 8\} \quad \text{ה.}$$

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{ב.} \quad A \cup B = (-2, 4) \quad \text{א. (11)}$$

$$(B \cup C) \cap (B \cup D) = (-2, 1) \quad \text{ד.} \quad (A \cup B) \cap C = (0, 4) \quad \text{ג.}$$

$$(B \cap C) \cup (B \cap D) = [0, 1) \quad \text{ה.}$$

$$\{4, 5, 6\} \quad \text{ב.} \quad \emptyset \quad \text{א. (12)}$$

(13) ללא פתרון.

(14) שאלת הוכחה.

$$C^c = [1, 4] \quad \text{ג.} \quad B^c = [1, 4] \quad \text{ב.} \quad A^c = (-\infty, 1) \quad \text{א. (15)}$$

$$D^c = (-\infty, 1] \cup [3, 4] \quad \text{ד.}$$

(16) ראו סרטון.

(17) שאלת הוכחה.

(18) טענה ב.

$$P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{4\}, \{\{4\}\}, \{\emptyset, 4\}, \{4, \{4\}\}, \{\emptyset, \{4\}\}, \{\emptyset, 4, \{4\}\}\} \quad \text{(19)}$$

(20) שאלת הוכחה.

(21) שאלת הוכחה.

# קלקולוס 1

## פרק 2 - גבול של פונקציה

### תוכן העניינים

1. הסבר כללי	(ללא ספר)
2. הצבה	27
3. צמצום	28
4. הכפלה בצמוד	29
5. גבולות טריגונומטריים	30
6. פונקציה שואפת לאינסוף	33
7. איקס שואף לאינסוף	34
8. הגבול של אוילר	36
9. כלל הסנדויץ	37
10. גבול של פונקציה מפוצלת	39
11. גבול לפי הגדרה	42

## הצבה

### שאלה

חשבו את הגבולות הבאים:

א.  $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1$

ב.  $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2}$

ג.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3}$

ד.  $\lim_{x \rightarrow 100} 20$

### תשובה

א. 21      ב.  $\frac{11}{12}$       ג. 2      ד. 20

## צמצום

### שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x - 1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[5]{x} + 1}{x + 1} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad (9)$$

### תשובות סופיות

-3 (5)	$n-1$ (4)	6 (3)	$\frac{10}{8.5}$ (2)	$\frac{5}{6}$ (1)
$\frac{1}{5}$ (10)	$\frac{8}{17}$ (9)	27 (8)	3 (7)	32 (6)

## הכפלה בצמוד

### שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-\sqrt{x+6}}{2x-6} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt{3x+1}}{1-\sqrt{2x-1}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+x}-1}{\sqrt[3]{x}} \quad (9)$$

### תשובות סופיות

$$\frac{3}{8} \quad (4)$$

$$-\frac{1}{12} \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$-\frac{8}{3} \quad (8)$$

$$\frac{1}{3} \quad (7)$$

$$\frac{3}{4} \quad (6)$$

$$\frac{1}{6} \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} \quad (9)$$

## גבולות טריגונומטריים

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול הטריגונומטרי  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{4x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin 2x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{x^3} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{x^2 - 1} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 4x}{\sin 10x} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \tan \left( \frac{\pi}{4} - x \right) \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \cos x}{\sin^2 x} \quad (17)$$

## תשובות סופיות

$\frac{1}{2}$ (5)	$\frac{1}{2}$ (4)	$\frac{1}{2}$ (3)	$\frac{3}{4}$ (2)	$\frac{3}{4}$ (1)
	$\frac{1}{4}$ (9)	4 (8)	$\frac{1}{8}$ (7)	$\frac{1}{2}$ (6)
$\frac{1}{\cos^2 a}$ (13)	$-\sin a$ (12)	$\cos a$ (11)	$-\frac{1}{2}$ (10)	
1 (17)	$\frac{2}{\pi}$ (16)	$\frac{1}{2}$ (15)	$\frac{4}{10}$ (14)	$-\frac{1}{12}$ (18)

## זהויות טריגונומטריות שכדאי להכיר

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2} \\ \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a-b}{2} \sin \frac{a+b}{2} \\ \tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b} \\ \tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \pi n = 0 \\ \cos \pi n = (-1)^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos a \\ \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin a \end{cases}$$

## פונקציה שואפת לאינסוף

### שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( (\ln x)^2 + 2 \ln x - 3 \right) \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \cot x \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[4]{x-1}}{\sqrt{x-1}} \quad (13)$$

### תשובות סופיות

$\phi$ (4)	$-\infty$ (3)	$\phi$ (2)	$\phi$ (1)
$\phi$ (8)	$\infty$ (7)	$\infty$ (6)	$-\infty$ (5)
$-\infty$ (12)	$\phi$ (11)	1 (10)	0 (9)
			$-\infty$ (13)

## x שואף לאינסוף

### שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x + e^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax + 1}{bx + 2}} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx} - x) \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{\frac{x+1}{2}}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \left( \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \right) \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^5}{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^4} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-4)^{10} (3x^2-1)^4}{x^2 (2x-5)^{10} (x^3+1)^2} \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(5 \cdot 2^{x+2} + 6 \cdot e^{x+1}) - x] \quad (29)$$

### תשובות סופיות

- |   |                                      |                        |                    |
|---|--------------------------------------|------------------------|--------------------|
| $-\infty$ (4)   | 4 (3)                                | $-\frac{\pi}{2}$ (2)   | 0 (1)              |
| -1 (8)  | 1 (7)                                | -5 (6)                 | 0 (5)              |
| $\frac{1}{4}$ (12)  | $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (11) | 1.5 (10)               | -3 (9)             |
| 2 (16)  | $\frac{1}{9}$ (15)                   | 4 (14)                 | 0 (13)             |
|   | 0 (19)                               | $e^{\frac{1}{3}}$ (18) | $\ln 3$ (17)       |
| $-\infty: b=0, a < 0$ : א. $\infty: b=0, a > 0$ א. $\lim = \sqrt[5]{\frac{a}{b}}: b \neq 0$ א. (20) |                                      |                        |                    |
| $-\frac{1}{2}$ (24)   | $\frac{1}{2}$ (23)                   | $\frac{k}{2}$ (22)     | 2.5 (21)           |
| $\frac{5}{4}$ (28)  | $\frac{3^4}{2^{10}}$ (27)            | $\frac{a-b}{2}$ (26)   | $\frac{1}{2}$ (25) |
|   |                                      |                        | $\ln(6e)$ (29)     |

## הגבול של אוילר

### שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול של אוילר:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ ):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1} \quad (4) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \quad (6) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + x + 2}\right)^{10x} \quad (8) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 4}\right)^{4x^2} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{x}\right)^x \quad (9)$$

### תשובות סופיות

$$e^3 \quad (5) \qquad e^{-1} \quad (4) \qquad e^2 \quad (3) \qquad 1 \quad (2) \qquad e^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$e \quad (9) \qquad e^{30} \quad (8) \qquad e^{-12} \quad (7) \qquad e \quad (6)$$

## כלל הסנדוויץ'

### שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-10:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(2x+1)}{x} \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + \sin 2x}{x^2 + \cos 3x} \quad (4) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \cos(\ln x^2) \quad (6) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{2^x + 3^x + 4^x} \quad (8) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \arctan(2x-3)}{4x + \arctan(x - \ln x)} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} [x] \quad (10) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [x] \quad (9)$$

(11) נתונה פונקציה  $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , המקיימת  $\lim_{x \rightarrow 2} z(x) = 4$ ,

ונתונה פונקציה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , המקיימת  $4z(x) \leq f(x) \leq (z(x))^2$  לכל  $x$ .

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 2} \tan(z(x)), \quad \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(z(x))}{x}$$

(12) חשבו את הגבול  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$ .

(13) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכח:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$ .

ב. האם נכונה גם הטענה:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 1$ ?

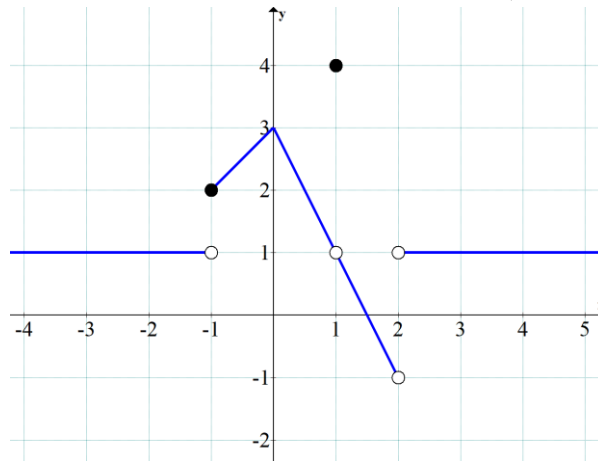
## תשובות סופיות

- 0 (5)      3 (4)       $\frac{3}{4}$  (3)      0 (2)      0 (1)
- 0 (10)      1 (9)      4 (8)       $\frac{3}{4}$  (7)      0 (6)
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(z(x))}{x} = 0$        $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 16$  (11)
- $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2) = 2$        $\lim_{x \rightarrow 2} \tan(z(x)) = \tan 4$
- 0 (12)
- (13) א. שאלת הוכחה. ב. לא.

## גבול של פונקציה מפוצלת

## שאלות

(1) להלן גרף של פונקציה:



חשבו את הגבולות הבאים או הוכיחו שהם לא קיימים:

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad 2. \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad 3. \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \quad \text{א.}$$

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} (3f - f^2) \quad 2. \lim_{x \rightarrow -1} (3f - f^2) \quad \text{ב.}$$

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{4-f} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-f} \quad \text{ג.}$$

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0.5 & x = 0 \\ 1-x^2 & 0 < x < 2 \\ 1.5x-6 & x \geq 2 \end{cases} \quad \text{נגדיר פונקציה } f(x)$$

א. שרטטו את הפונקציה.

ב. חשבו, אם ניתן, את  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול  $\lim_{x \rightarrow 2} [4(f(x))^2 + 10f(x)]$ .

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0.5 & x = 0 \\ \cos x & 0 < x < \pi \\ -0.5 & x \geq \pi \end{cases} \quad (3) \quad \text{נגדיר פונקציה } f(x) :$$

א. שרטטו את הפונקציה.

ב. חשבו, אם ניתן, את  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$ .

ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול  $\lim_{x \rightarrow \pi} [2(f(x))^2 + 3f(x)]$ .

חשבו את הגבול  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  של הפונקציות הבאות:

$$(a=0), f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ x & x = 0 \\ 4 + e^x & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$(a=1), f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & x > 1 \\ \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} & x < 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$(a=0), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (6)$$

$$(a=\infty), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (7)$$

$$(a=-\infty), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|1-x|}{x^2 + x - 2} \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|1-x|}{x^2 + x - 2} \quad \text{ב.}$$

## תשובות סופיות

1.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ , 2.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \cancel{\exists}$ , 3.  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \cancel{\exists}$ . א. (1)
1.  $\lim_{x \rightarrow 1} (3f - f^2) = 2$ , 2.  $\lim_{x \rightarrow -1} (3f - f^2) = 2$ . ב.
1.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{4 - f(x)} = \frac{1}{3}$ , 2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 - f(x)} = \cancel{\exists}$ . ג.
- א. ראו בסרטון. ב.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3$ . ג. 6. (2)
- א. ראו בסרטון. ב.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ ,  $\cancel{\exists} \lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$ . ג. -1. (3)
4. (4)
- $\phi$ . (5)
- $\phi$ . (6)
1. (7)
- 1. (8)
- א. אין גבול. ב.  $\frac{1}{6}$ . (9)

## גבול לפי הגדרה

### שאלות

בשאלות 1-6, על פי הגדרת הגבול, הוכיחו:

$$\lim_{x \rightarrow 24} \sqrt{x+1} = 5 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x = 20 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 7x + 14 = 28 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \sin x = \sin \alpha \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x}{x^2 - 2} = 1 \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x+2}} = \frac{1}{4} \quad (4)$$

$$(7) \text{ חשבו, על פי הגדרת הגבול: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-1}$$

הוכיחו על פי הגדרת הגבול את מקרים 8-11:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+7}{x+2} = 1 \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+x}{x^2+1} = 1 \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-1}{x^2+x+1} = 3 \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-4x}{2x+1} = -2 \quad (10)$$

$$(12) \text{ נתונה פונקציה } f(x) \text{ המקיימת: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -5$$

הוכיחו כי קיים  $M > 0$  ממשי כלשהו, כך שעבור כל  $x > M$  מתקיים  $f(x) < -4$ .

$$(13) \text{ נתונה פונקציה } f(x) \text{ המקיימת: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$$

הוכיחו כי קיים  $M > 0$  ממשי כלשהו, כך שעבור כל  $x > M$  מתקיים  $f^2(x) > 16$ .

$$(14) \text{ נניח } f \text{ פונקציה ממשית וחיובית בתחום } [a, \infty) \text{ המקיימת } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\text{הוכיחו שמתקיים } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{f(x)} = 0$$

$$(15) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 3x + 2} = 1 \quad \text{נתון הגבול}$$

מצאו ערך של  $M > 0$ , עבורו לכל  $x > M$  הביטוי שבגבול קרוב לערך הגבול עד כדי 0.1 (במילים אחרות, מצאו  $M$ , כך ש- $|\forall x > M : f(x) - L| < 0.1$ ).

$$(16) \quad \text{נגדיר את הפונקציה} \quad f(x) = \begin{cases} 2 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \in \mathbb{R} / \mathbb{Z} \end{cases}$$

האם הגבולות קיימים? הוכיחו זאת בהסתמך על הגדרת הגבול.

$$\text{א. } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{ב. } \lim_{x \rightarrow 2.5} f(x) \quad \text{ג. } \lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$$

$$(17) \quad \text{בהינתן הגבול } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+4}{x+11} = \frac{1}{2}, \text{ מצאו } \delta > 0, \text{ כך שלכל } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{המקיים } |x-1| < \delta, \text{ אי-השוויון } \left| \frac{2x+4}{x+11} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{100} \text{ מתקיים.}$$

(18) הוכיחו או הפריכו:

$$\text{א. אם } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0, \text{ אז } \lim_{x \rightarrow \infty} (f^2(x) - g^2(x)) = 0$$

$$\text{ב. אם } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = 0, \text{ אז } \lim_{x \rightarrow x_0} (f^2(x) - g^2(x)) = 0$$

$$\text{ג. אם } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = L, \text{ אז: הגבול } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ קיים ושווה ל-} L \text{ או } -L.$$

$$\text{ד. אם הגבולות } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) \text{ ו-} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ קיימים,}$$

$$\text{אז גם הגבול } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ קיים.}$$

$$(19) \quad \text{יש להוכיח כי } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x+3} \neq 1 \text{ לפי ההגדרה.}$$

$$(20) \quad \text{יש להוכיח כי } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x+1}{x+10} \neq 1 \text{ לפי ההגדרה.}$$

$$(21) \quad \text{הוכיחו שאם } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3, \text{ אז קיימת סביבה נקובה של 0 שבה } f(x) > 2.$$

(22) הוכיחו שאם  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > L$ , אז קיימת סביבה נקובה של  $x_0$  שבה  $f(x) > L$ .

(23) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$

ב. האם נכונה גם הטענה:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = k \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = |k|$  ( $k \neq 0$ )

## תשובות סופיות

(7)  $\pm\infty$

תשובות לשאר השאלות נמצאות באתר: [GOOL.co.il](http://GOOL.co.il)

# קלקולוס 1

פרק 3 - רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים

תוכן העניינים

45	.....	1. רציפות של פונקציה
52	.....	2. משפט ערך הביניים
56	.....	3. תכונות נוספות של פונקציות רציפות
59	.....	4. שיטת החצייה

## רציפות של פונקציה

### שאלות

בשאלות 1-6: בדקו את רציפות הפונקציות בנקודת התפר<sup>1</sup> שלהן, ובשאלות 1 ו-2, שרטטו גם את גרף הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ 5-x & x > 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x < 2 \\ x-3 & x \geq 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq 1 \\ |x-2| & 1 < x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ x-2 & x > 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ 1+e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ x & x = 0 \\ 4+e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (5)$$

(7) עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 3-6: רשמו עבור כל נקודת אי רציפות מאיזה סוג היא. בנוסף, הדגימו פונקציה בעלת נקודת אי רציפות מסוג שני.

בשאלות 8-11: מה צריך להיות הערך הקבוע של  $k$ , על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות לכל  $x$ ?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases} \quad (9)$$

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 + x - 2 & x \leq 2 \\ 5kx - 6 & x > 2 \end{cases} \quad (8)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - k & x \leq 0 \\ x^{2x} & x > 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x-2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases} \quad (10)$$

הערה: שאלה 11 ניתן לפתור רק בעזרת 'כלל לופיטל'.

<sup>1</sup> נקודת תפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.

בשאלות 12-15: מה צריכים להיות הערכים של הקבועים  $a$  ו- $b$ , על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות בתחום הגדרתן?

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{2x} & 0 < x < \pi \\ a \cos x & x \geq \pi \end{cases} \quad (12)$$

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt[3]{x} + x^2 & x < -1 \\ bx^2 + x - 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 4 \frac{\sqrt{x-1+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x > 1 \end{cases} \quad (13)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{1-x}} & x > 1 \\ (x-1)\ln(x+1) + b & 0 \leq x \leq 1 \\ a \frac{2^x - 2}{2^x + 4} & x < 0 \end{cases} \quad (14)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} & x < 1 \\ ax^2 + b & 1 \leq x \leq 2 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x > 2 \end{cases} \quad (15)$$

הערה: שאלות 14-15 ניתן לפתור רק בעזרת 'כלל לופיטל'.

(16) הוכיחו או הפריכו:

- סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
- מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.

**17** ידוע ש- $f$  רציפה ו- $g$  לא רציפה. האם  $f+g$  רציפה? הוכיחו זאת.

$$\text{18 תהי } f(x) = \begin{cases} |x|-1 & |x+1| \geq 4 \\ 2 & |x+1| < 4 \end{cases}$$

- א. שרטטו את גרף הפונקציה.  
 ב. מצאו את נקודות האי רציפות של הפונקציה ואת סוגן (במידה ויש).  
 ג. תהי  $g(x) = x + \frac{1}{x}$ , ותהי  $f(x)$  מוגדרת וחיובית לכל  $x$ .  
 האם ההרכבה  $g(f(x))$  בהכרח רציפה לכל  $x$ ?

**19** תהי  $f$  פונקציה חסומה בקטע  $(0,1)$ .

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < 1 \\ x^2 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

תהי  $g$  הפונקציה המוגדרת בקטע  $(0,2)$ , על ידי

- א. האם יתכן שהנקודה  $x_0 = 1$  היא נקודת אי-רציפות סליקה של  $g$ ? נמקו.  
 ב. האם  $g$  חסומה בקטע  $(0,2)$ ? נמקו.

**20** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  פונקציה שמקיימת  $f(x+y) = f(x)f(y)$ , לכל  $x, y \in \mathbb{R}$ .  
 נניח ש- $f$  רציפה ב- $x=0$ .  
 הוכיחו ש- $f$  רציפה לכל  $x$ .

**21** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  פונקציה שמקיימת  $f(x+y) = [f(x)f(y)]^2$ , לכל  $x, y \in \mathbb{R}$ .  
 נניח ש- $f$  רציפה ב- $x=0$ .  
 הוכיחו ש- $f$  רציפה לכל  $x$ .

$$\text{22 נתונה הפונקציה } f(x) = x - \frac{1}{2} \lfloor 2x \rfloor$$

- הוכיחו או הפריכו:  
 א. הפונקציה  $f$  חסומה לכל  $x$ .  
 ב. הפונקציה  $f$  רציפה לכל  $x$ .  
 ג. הפונקציה  $f$  מונוטונית לכל  $x$ .  
 ד. הפונקציה  $f$  זוגית או אי-זוגית לכל  $x$ .

**(23)** ענו על הסעיפים הבאים :

א. פונקציה  $f(x)$  מקיימת  $|f(x)| \leq x$  לכל  $x$ .

הוכיחו שהפונקציה רציפה ב- $x=0$ .

ב. פונקציה  $f(x)$  מקיימת  $|f(x)| \leq \sin x$  לכל  $x$ .

הוכיחו שהפונקציה רציפה באינסוף נקודות שונות.

**(24)** הפונקציה  $f(x)$  רציפה לכל  $x$ .

ידוע כי עבור  $x \neq \pm 1$ ,  $f(x)$  נתונה על ידי הנוסחה  $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{1-|x|}$ .

מצאו את הנוסחה של  $f(x)$  לכל  $x$ .

**(25)** הפונקציות  $f(x) + 2g(x) - 3g(x) - 2g(x) - f(x)$  רציפות לכל  $x$ .

הוכיחו שהפונקציה  $|f(x) - g(x)|$  רציפה לכל  $x$ .

**(26)** תהי  $f(x)$  מוגדרת לכל  $x$  ומקיימת  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)(1-f(x))] = 0$ .

א. הוכיחו או הפריכו:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  או  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .

ב. האם תשתנה תשובתך לסעיף א' אם נחליף את המילה 'מוגדרת' במילה 'רציפה'?

**(27)** תהי  $f$  מוגדרת לכל  $x$ .

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם  $f(\sin x)$  רציפה לכל  $x$ , אז  $f$  רציפה לכל  $x$ .

ב. אם  $\sin(f(x))$  רציפה לכל  $x$ , אז  $f$  רציפה לכל  $x$ .

ג. אם לכל  $x_0$  מתקיים  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 4$ , אזי  $f(x) = 4$  לכל  $x$ .

כיצד תשתנה תשובתך, אם ידוע בנוסף כי  $f$  רציפה לכל  $x$ ?

**(28) ענו על הסעיפים הבאים :**

א. הוכיחו כי לכל  $x, y \in \mathbb{R}$  :

$$1. \min\{x, y\} = \frac{1}{2}[(x+y) - |x-y|]$$

$$2. \max\{x, y\} = \frac{1}{2}[(x+y) + |x-y|]$$

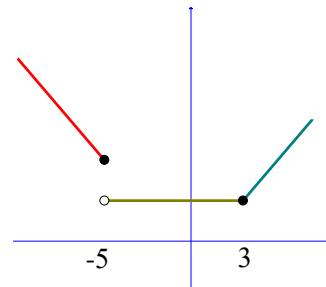
ב. הוכיחו כי אם  $f, g$  רציפות ב- $\mathbb{R}$  אז גם הפונקציות הבאות רציפות ב- $\mathbb{R}$  :

$$1. z_1(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

$$2. z_2(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

### תשובות סופיות

- (1) רציפה.
- (2) רציפה.
- (3) רציפה בנקודה  $x=1$ , לא רציפה בנקודה  $x=2$ .
- (4) רציפה בנקודות  $x=0,1$ , לא רציפה בנקודה  $x=2$ .
- (5) לא רציפה.
- (6) לא רציפה.
- (7) 5. סליקה. 6. סליקה. 4. סוג ראשון. 3. סליקה.
- (8)  $k=1$
- (9)  $k=4$
- (10)  $k=\frac{2}{3}$
- (11)  $k=-1$
- (12)  $a=0, b=\frac{1}{2}$
- (13)  $a=2, b=1$  או  $a=1, b=2$
- (14)  $a=-2e^{-1}, b=e^{-1}$
- (15)  $a=\frac{e}{3}, b=-\frac{e}{3}$
- (16) שאלת הוכחה.
- (17) שאלת הוכחה.
- (18) א.



- ב. הפונקציה רציפה לכל  $x \neq -5$ . ב-5 יש אי רציפות מסוג ראשון. ג. לא.
- (19) א. לא. ב. כן.
- (20) שאלת הוכחה.

(21) שאלת הוכחה.

(22) א. טענה נכונה. ב. טענה לא נכונה. ג. טענה לא נכונה. ד. טענה לא נכונה.

(23) שאלת הוכחה.

$$f(x) = \begin{cases} -\pi & x = -1 \\ \frac{\sin(\pi x)}{1-|x|} & x \neq \pm 1 \\ \pi & x = 1 \end{cases} \quad (24)$$

(25) שאלת הוכחה.

(26) שאלת הוכחה.

(27) שאלת הוכחה.

(28) שאלת הוכחה.

## משפט ערך הביניים

### שאלות

בשאלות 1-4 הוכיחו שלמשוואה יש לפחות פתרון אחד:

$$(1) \quad x^3 + 4x - 1 = 0$$

$$(2) \quad x^2 = -\ln x$$

$$(3) \quad x - 0.25 \sin x = 7$$

$$(4) \quad x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

בשאלות 5-6 הוכיחו שלמשוואה יש לפחות שני פתרונות:

$$(5) \quad e^x - 5x = 0$$

$$(6) \quad 4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0$$

(7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי  $f$  פונקציה רציפה לכל  $x$ , המקיימת:  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 2$ .

הוכיחו שלמשוואה  $f(x) + \sin x = 4x$  יש לפחות פתרון אחד.

ב. תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow [-4, 4]$  פונקציה רציפה.

הוכיחו שלמשוואה  $2x + f(x) = 1$  יש לפחות פתרון אחד.

(8) מצאו קטע, שאורכו אינו עולה על יחידה אחת,

בו למשוואה  $x^2 = 10 - \frac{1}{x}$  יש פתרון.

$$(9) \quad \text{נגדיר } f(x) = x^2 + \frac{1}{x-1}$$

א. חשבו את  $f(0)$ ,  $f(2)$ .

ב. האם ניתן להסיק לפי משפט ערך הביניים שלמשוואה  $x^2 + \frac{1}{x-1} = 0$

יש פתרון בקטע  $(0, 2)$ ?

**10** תהיינה  $f, g$  פונקציות רציפות ב- $[a, b]$  המקיימות  $f(a) < g(a), f(b) > g(b)$ .  
 הוכיחו שקיימת נקודה  $a < c < b$  שבה  $f(c) = g(c)$ .

**11** נתונה פונקציה רציפה בקטע סגור  $[a, b]$  שהוא חלקי לתחום הגדרתה.

נניח ש- $f([a, b]) \subseteq [a, b]$ .

הוכיחו כי קיימת נקודה  $c \in [a, b]$  כך ש- $f(c) = c$ .  
 נקודה  $c$  כנ"ל נקראת "נקודת שִׁבְת" של הפונקציה.

**12** נתונה פונקציה רציפה  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ .

הוכיחו כי קיימת נקודה  $c \in [0, 1]$  כך ש- $f(c) = c^{1.5}$ .

**13** נתונה פונקציה רציפה  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $f(0) = f(1)$ .

א. הוכיחו כי קיימת נקודה  $c \in [0, 0.5]$  כך ש- $f(c) = f(c+0.5)$ .

ב. הוכיחו כי קיימות נקודות  $c, d \in [0, 1]$  כך ש- $f(c) = f(d)$ .

**14** נתונה פונקציה רציפה  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $f(0) < f(2) < f(1)$ .

הוכיחו כי קיימים  $c_1, c_2 \in [0, 2]$  כך ש- $f(c_1) = f(c_2)$ .

**15** נתונה פונקציה רציפה  $f: [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $f(0) = f(8)$ .

הוכיחו כי קיימות נקודות  $c_1, c_2, c_3, c_4 \in [0, 8]$  כך ש-

$$f(c_1) = f(c_2), f(c_3) = f(c_4)$$

**16** הוכיחו שהפונקציה  $f(x) = x + \sin x$  היא על  $\mathbb{R}$ .

**17** הוכיחו שהפונקציה  $f(x) = x \cdot \sin x$  היא על  $\mathbb{R}$ .

**18** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה ומחזורית עם מחזור  $2\pi$ .

הוכיחו שקיים  $x_0 \in \mathbb{R}$  כך ש- $f(x_0 + \pi) = f(x_0)$ .

**19** יהיו  $0 \leq a_1, \dots, a_n \leq 1$  קבועים המקיימים  $a_1 + \dots + a_n = 1$ .

הוכיחו כי למשוואה  $|x - a_1| + \dots + |x - a_n| = \frac{n}{2}$  יש לפחות פתרון אחד.

(20) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חח"ע ורציפה. הוכיחו כי  $f$  עולה ממש או יורדת ממש.
- ב. תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  פונקציה חח"ע ועל. הוכיחו כי  $f$  לא רציפה ב- $\mathbb{R}$ .

(21) תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  פונקציה רציפה.

הוכיחו כי קיימים אינסוף ערכים של  $x$ , שעבורם  $f(x) = \sin x$ .

(22) יהי  $P$  פולינום ממעלה זוגית, מהצורה  $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ , ונניח כי  $a_0 < 0$ .

הוכיחו כי ל- $P$  ישנם לפחות שני שורשים ממשיים, שונים זה מזה.

(23) יהיו  $f, g$  פונקציות רציפות המקיימות :

כאשר  $0 < k \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -k$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -k$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = k$ . הוכיחו כי קיים לפחות פתרון אחד למשוואה  $f(x) = g(x)$ .

(24) ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי  $f$  פונקציה רציפה בקטע  $(a, b)$ , ותהיינה  $x_1, \dots, x_n$  (כאשר  $n > 1$ ) נקודות כלשהן ב- $(a, b)$ .

הוכיחו שקיימת נקודה  $c$  בקטע  $(a, b)$ , כך ש-

$$f(c) = \frac{1}{n}(f(x_1) + \dots + f(x_n))$$

ב. תהי  $f$  פונקציה רציפה בקטע  $(a, b)$ .

האם לכל  $c \in (a, b)$ , ניתן למצוא נקודות  $x_1, \dots, x_n$ , שונות זו מזו,

$$f(c) = \frac{1}{n}(f(x_1) + \dots + f(x_n))$$

כאשר  $n > 1$ , כך ש-

הוכיחו זאת.

(25) תהי  $f$  פונקציה רציפה בקטע פתוח  $(a, b)$ .

נניח כי:  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$

הראו כי תמונת הקטע  $(a, b)$  היא  $\mathbb{R}$ .

(26) תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, המקיימת  $f(0) = -1$ ,  $f(1) = 4$ .

תהי  $S = \{x \in [0,1] \mid f(x) = 0\}$ .

א. הוכיחו ש- $S$  לא ריקה.

ב. הוכיחו שלקבוצה  $S$  יש חסם עליון, שנסמנו  $\alpha$ .

ג. הוכיחו כי  $\alpha \in (0,1]$ .

ד. הוכיחו כי  $f(\alpha) = 0$ .

(27) תהי  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה, כך ש- $f(a) = f(b)$ .

הוכיחו שקיימים  $a < x_1 < x_2 < b$ , כך ש- $f(x_1) = f(x_2)$ .

(28) תהי  $z(x)$  פונקציה רציפה בקטע  $[a,b]$  ויהי  $0 \leq r \leq 1$ .

הוכיחו שיש  $c$  בקטע, עבורו מתקיים  $z(c) = rz(a) + (1-r)z(b)$ .

(29) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי למשוואה  $A \sin x + B \cos x = C \sin 2x$  יש פתרון.

ב. תהי  $f(x)$  רציפה לכל  $x$  המקיימת  $f(0) > 0$ ,  $f(4) > 2f(2)$ .

הוכיחו שקיים  $c$  כך ש- $f(2c) = 2f(c)$ .

ג. תהי  $f(x)$  רציפה לכל  $x$  המקיימת  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 2$ .

הוכיחו שקיים  $a$  כך ש- $f(a) = \frac{1}{a}$ .

(30) פונקציה  $f$  מוגדרת לכל  $x$ .

לפונקציה יש את התכונה הבאה:

כל ערך ממשי מתקבל על ידי הפונקציה בדיוק פעמיים.

הוכיחו כי הפונקציה אינה יכולה להיות רציפה.

## תשובות סופיות

(8)  $[0,1]$

(9) א.  $f(0) = -1$ ,  $f(2) = 5$ . ב. לא.

שאלות 1-7 ושאלות 10-30 הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## תכונות נוספות של פונקציות רציפות

### שאלות

- (1) קבעו בכל סעיף האם הטענה נכונה או לא נכונה, והוכיחו זאת.  
קיימת פונקציה המוגדרת בקטע  $[0,1]$ , שהיא:
- א. חחייע, אבל לא מונוטונית.
  - ב. מונוטונית, אבל לא רציפה.
  - ג. מונוטונית, אבל לא חסומה.
  - ד. חסומה, אבל לא רציפה.
  - ה. רציפה, אבל לא חסומה.
  - ו. הופכת מחיובית לשלילית מבלי לעבור דרך האפס.
  - ז. מקבלת מקסימום ומינימום אבל לא רציפה.
  - ח. רציפה אבל לא מקבלת מקסימום.
  - ט. חסומה, שתמונתה אינו קטע.
  - י. רציפה, שתמונתה אינה קטע.
- יא. אינה רציפה בקטע זה, אבל בעלת התכונה, שתמונת הקטע  $[0,1]$ , על ידי  $f$ , היא קטע.
- (2) תהי  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, המקיימת  $f(x) > 0$  לכל  $x \in [a,b]$ . הוכיחו שקיים  $\alpha > 0$ , כך ש-  $f(x) \geq \alpha$  לכל  $x \in [a,b]$ .
- (3) תהי  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, ונניח כי  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  קיים. הוכיחו ש-  $f$  חסומה.
- (4) יהיו  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות רציפות. נתון שלכל שתי נקודות  $x_1, x_2$ , המקיימות  $x_1 < x_2$ , קיימת נקודה  $x_3$  כך ש-  $x_1 < x_3 < x_2$ , שעבורה  $f(x_3) = g(x_3)$ . הוכיחו כי  $f(x) = g(x)$  לכל  $x$ .
- (5) תהי  $f: [0,1] \rightarrow (0,1)$  פונקציה על. הוכיחו ש-  $f$  לא רציפה ב-  $[0,1]$ .
- (6) תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, שמקיימת  $f(x) = f(x^2)$  לכל  $x \in \mathbb{R}$ . הוכיחו ש-  $f$  פונקציה קבועה.

**(7)** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, שמקיימת  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ,  
 לכל  $x, y \in \mathbb{R}$ .  
 הוכיחו כי  $f(x) = f(1)x$ , לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

**(8)** תהי  $f(x)$  פונקציה המוגדרת בקטע  $(a, b)$ , ונניח שקיים קבוע ממשי  $K$ ,  
 כך שלכל שתי נקודות,  $x_1$  ו- $x_2$ , בקטע  $(a, b)$ , מתקיים **תנאי ליפשיץ**:  
 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K |x_1 - x_2|$   
 הוכיחו כי  $f(x)$  רציפה בקטע  $(a, b)$ .  
 \* נסו להוכיח בשתי דרכים שונות.

**(9)** הוכיחו שלכל פולינום ממעלה זוגית יש נקודת מינימום מוחלט.  
 באריכות:  
 הוכיחו שאם  $f$  פולינום ממעלה זוגית, אז קיימת נקודה  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  
 כך ש- $f(x) \geq f(x_0)$ , לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

**(10)** בסעיפים א ו-ב הוכיחו:

א. שלכל מספר ממשי, קיימת סדרה של רציונליים שמתכנסת אליו.  
 ב. שלכל מספר ממשי, קיימת סדרה של אי-רציונליים שמתכנסת אליו.  
 ג. תהי  $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ . הוכיחו שהפונקציה לא רציפה בכל נקודה  $x \in \mathbb{R}$ .  
 הערה: פונקציה זאת נקראת פונקציית דיריכלה.

**(11)** הוכיחו או הפריכו:

א. אם  $f(x)$  רציפה בנקודה  $c$ , אז  $|f(x)|$  רציפה בנקודה  $c$ .  
 ב. אם  $|f(x)|$  רציפה בנקודה  $c$ , אז  $f(x)$  רציפה בנקודה  $c$ .

בשאלות **12-13** הוכיחו:

**(12)** אם  $f$  רציפה ב- $x_0$ , אז קיימת סביבה של  $x_0$ , בה  $f$  חסומה.

**(13)** אם  $f$  רציפה ב- $x_0$ , ואם  $f(x_0) > 0$ , אז קיימת סביבה של  $x_0$ , שבה  $f(x) > 0$ .

**14** יהיו  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות רציפות המקיימות  $f(a) \neq g(a)$ , עבור  $a$  ממשי מסוים. הראו שקיימת סביבה של  $a$ , שבה  $f(x) \neq g(x)$ .

הערה

תרגיל זה מכיל בתוכו גם את הטענה הבאה:  
 תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה המקיימת  $f(a) \neq 0$ , עבור  $a$  ממשי מסוים. הראו שקיימת סביבה של  $a$ , שבה  $f(x) \neq 0$ . פשוט לקחנו  $g(x) = 0$ . בטענה זו נשתמש בשאלה האחרונה תחת הנושא 'משפט ערך הביניים', בסעיף האחרון.

**15** הוכיחו כי אם הפונקציה  $f(x)$  רציפה בנקודה  $a$ , אזי הפונקציה  $g(x)$ ,

$$g(x) = \begin{cases} -c & f(x) < -c \\ f(x) & |f(x)| \leq c \\ c & f(x) > c \end{cases}$$

המוגדרת על ידי  $a$ , גם רציפה בנקודה  $a$  (כאשר  $c$  מספר חיובי כלשהו).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{x} & x \geq 1 \\ e^{-x} - e^{-1} & x < 1 \end{cases}$$

**16** נתונה הפונקציה

בדקו האם  $f$  הפיכה בתחום הגדרתה. אם כן, מצאו את  $f^{-1}(x)$ .

**17** הוכיחו כי אם  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה ו- $f(x) > 0$  לכל  $x \in [a, b]$  אז יש  $c > 0$  כך ש-  
 $f(x) > c$  לכל  $x \in [a, b]$ .

**18** הוכיחו כי אם  $f, g$  רציפות ב- $\mathbb{R}$  אז גם הפונקציה  $z(x) = \min\{f(x), g(x)\}$  רציפה ב- $\mathbb{R}$ .

הערה: יש להוכיח לפי ההגדרה (בלשון  $\varepsilon, \delta$ ).  
 השוו לשאלה 28 בנושא הראשון בפרק זה.

## תשובות סופיות

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & -1 < x \leq 0 \\ -\ln(x + e^{-1}) & x > 0 \end{cases} \quad (16)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## שיטת החצייה

### שאלות

(1) נתונה המשוואה  $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ . בעזרת שיטת החצייה בקטע  $[-2, 3]$ , מצאו שורש מקורב של המשוואה על ידי 6 איטרציות. מהו קירוב השורש?

(2) נתונה המשוואה:  $x^3 - x - 2 = 0$ .  
 א. מצאו קטע שאורכו לא עולה על 1, המכיל שורש של המשוואה.  
 ב. כמה איטרציות של שיטת החצייה יש לבצע, כדי למצוא קירוב של השורש בדיוק של 0.001?  
 ג. חשבו את השורש שמצאתם בדיוק של 0.001.

הערה: בסרטון ההסבר של שיטת החצייה יש תרגיל נוסף.

### תשובות סופיות

(1) 0.07  
 (2) א.  $[1, 2]$  ב. 10 ג.  $x = 1.520$

# קלקולוס 1

פרק 4 - הגדרת הנגזרת - גזירות של פונקציה - נגזרות חד-צדדיות

תוכן העניינים

- 1. הגדרת הנגזרת וגזירות של פונקציה ..... 60
- 2. נגזרות חד צדדיות ..... 68

## הגדרת הנגזרת, גזירות של פונקציה

### שימו לב

בפרק זה יש לדעת גזירת פונקציות לפי נוסחאות גזירה, כפי שנלמד בבית הספר. למי שלא למדו זאת כדאי לעבור קודם לפרק הבא, ללמוד את הנושא, ורק אחר כך לחזור לכאן.

### שאלות\*

בשאלות 1-6 חשבו את הנגזרת של הפונקציה הנתונה על פי ההגדרה:

$$f(x) = \sin 4x \quad (3) \qquad f(x) = \frac{1}{x+1} \quad (2) \qquad f(x) = x^2 + 4x + 1 \quad (1)$$

$$f(x) = \sqrt{x+10} \quad (6) \qquad f(x) = \ln x \quad (5) \qquad f(x) = e^x \quad (4)$$

$$(7) \quad \text{חשבו את } f'(0), \text{ אם נתון כי } f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-44)$$

$$(8) \quad \text{חשבו את } f'(0), \text{ אם נתון כי } f(x) = 2x(|x|+1)\sqrt{1+x+x^2}$$

$$(9) \quad \text{חשבו את } f'(0), \text{ אם נתון כי } f(x) = x \cdot z(x) \text{ כאשר } z(0) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} z(x) = 4$$

$$(10) \quad \text{נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} & x > 0 \\ -(x+1)^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

א. מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה רציפה.

ב. בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה  $x=1$ . האם קיים משיק בנקודה זו?

$$(11) \quad \text{נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (n \text{ טבעי}).$$

א. עבור אילו ערכים של  $n$  הפונקציה גזירה בנקודה  $x=0$ ?

ב. עבור אילו ערכים של  $n$  הפונקציה גזירה ברציפות בנקודה  $x=0$ ?

\* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

$$(12) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} x^n \arctan \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \text{ (n טבעי).}$$

- א. עבור אילו ערכים של  $n$  הפונקציה גזירה בנקודה  $x = 0$  ?  
 ב. עבור אילו ערכים של  $n$  הפונקציה גזירה ברציפות בנקודה  $x = 0$  ?

(13) חשבו את הגבולות הבאים:

$$\text{א. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(4+x) - \ln 4}{x} \quad \text{ב. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1+x} - e}{x}$$

(14) נתון כי  $f$  גזירה בנקודה  $x_0$ . הוכח כי:

$$\text{א. } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\text{ב. } 2x_0 f(x_0) - x_0^2 f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 f(x_0) - x_0^2 f(x)}{x - x_0}$$

(15) נתון כי  $f$  גזירה וזוגית. הוכיחו כי  $f'$  אי זוגית.

(16) נתונה פונקציה המוגדרת ב- $[a, b]$  ומקיימת לכל  $x, y$  ב- $[a, b]$ :

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$$

הוכיחו כי גזירה ב- $[a, b]$  וחשבו את נגזרתה.

$$(17) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ x^3 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

חשבו את  $f'(x)$  על פי ההגדרה.

$$(18) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

חשבו את  $f'(x)$  על פי ההגדרה.

$$(19) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = |\sin^5 x|$$

א. חשבו את  $f'(x)$ .

ב. מצאו את כל הנקודות עבורן  $f'(x) = 0$ .

\* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

**(20) הוכיחו או הפריכו :**

- א. אם  $h$  גזירה ב- $x_0$  ו- $g$  אינה גזירה ב- $x_0$ , אז  $f = g + h$  אינה גזירה ב- $x_0$ .
- ב. אם  $h$  אינה גזירה ב- $x_0$  ו- $g$  אינה גזירה ב- $x_0$ , אז  $f = g + h$  אינה גזירה ב- $x_0$ .
- ג. אם  $h$  אינה גזירה ב- $x_0$  ו- $g$  אינה גזירה ב- $x_0$ , אז  $f = g \cdot h$  אינה גזירה ב- $x_0$ .
- ד. אם  $h$  גזירה ב- $x_0$  ו- $g$  אינה גזירה ב- $x_0$ , אז  $f = g \cdot h$  אינה גזירה ב- $x_0$ .

**(21) הוכיחו או הפריכו :**

- א. אם  $f$  גזירה, אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] = f'(x)$ .
- ב. אם הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right]$  קיים וסופי, אז  $f$  גזירה.

**(22) הוכיחו או הפריכו :**

- א. אם  $f$  גזירה ב- $(a, b)$  ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ , אז  $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \infty$ .
- ב. אם  $f$  גזירה ב- $(a, b)$  ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \infty$ , אז  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ .

**(23) נתון כי  $f(x)$  רציפה ב- $x = 4$ , ומקיימת  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - \pi - 10(x - 4)}{x - 4} = 0$** הוכיחו ש- $f$  גזירה ב- $x = 4$ , וחשבו את  $f'(4)$ .**(24) תהי  $f$  פונקציה רציפה בסביבת הנקודה  $x = 0$  המקיימת  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$** א. הוכיחו כי  $f(0) = 0$ .ב. הוכיחו כי  $f$  גזירה ב- $x = 0$  ו- $f'(0) = 0$ .**(25) תהי  $f$  פונקציה גזירה על כל הישר, ונתון כי  $f(0) = 0$  ו- $f'(0) = k$** הוכיחו כי  $\lim_{x \rightarrow \infty} x f\left(\frac{1}{x}\right) = k$ **(26) תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה בנקודה  $x_0$** א. אם  $f(x_0) \neq 0$ , הוכיחו שגם  $|f|$  גזירה ב- $x_0$ .ב. אם  $f(x_0) = 0$ , הראו שייתכן כי  $|f|$  גזירה ב- $x_0$  וייתכן שלא.

**(27)** תהינה  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות גזירות בנקודה  $x_0$ .

נגדיר  $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$  לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

הראו שאם  $f(x_0) \neq g(x_0)$ , אז  $h$  גזירה ב- $x_0$ .

**(28)** תהי  $f$  פונקציה זוגית ב- $\mathbb{R}$ .

הוכיחו כי אם  $f$  גזירה ב-0, אז  $f'(0) = 0$ .

הערה: פתרו בשתי דרכים שונות.

**(29)** נתונה פונקציה  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $f(xy) = f(x) + f(y)$ ,

לכל  $x, y \in (0, \infty)$ .

נתון כי  $f$  גזירה בנקודה  $x=1$ .

א. הוכיחו כי  $f(1) = 0$  ו- $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$ .

ב. הראו כי  $f$  גזירה, ושכל  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$ .

**(30)** נתון כי  $f$  פונקציה גזירה המקיימת  $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ .

הוכיחו ש- $f$  פונקציה לינארית.

**(31)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו את הטענה הבאה:

אם  $f$  גזירה ב- $x_0$ , אז  $f'(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + a_n) - f(x_0)}{a_n}$

לכל סדרה  $a_n \rightarrow 0$ .

ב. תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה בנקודה  $x_0 = 1$ , ו- $f(1) = 1$ .

הראו שאם  $k \in \mathbb{N}$ , אז

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \left( f\left(1 + \frac{1}{n}\right) + f\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \right) - k \right] = \frac{k(k+1)}{2} f'(1)$$

ג. חשבו את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{10}{n}} - 10 \right]$ .

32) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו שפונקציית דיריכלה  $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$  לא גזירה בכל מקום.

ב. הוכיחו שהפונקציה  $f(x) = (x-1)^2 D(x)$  גזירה רק בנקודה  $x=1$ .

33) פונקציה  $f(x)$  מקיימת  $|f(x)| \leq x^2$  לכל  $x$ .

הוכיחו שהפונקציה גזירה ב- $x=0$ .

34) פונקציה  $f(x)$  מקיימת  $|f(x)| \leq \sin^2 x$  לכל  $x$ .

הוכיחו שהפונקציה גזירה באינסוף נקודות שונות.

35) תהי  $f$  פונקציה גזירה ב- $x_0$ .

א. הוכיחו כי  $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$ .

ב. תנו דוגמה של פונקציה רציפה  $f$ , באופן שהגבול בסעיף א' קיים, אך  $f'(x_0)$  אינו קיים.

ג. הביעו באמצעות  $f'(x_0)$  את הגבול  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0-2h) - f(x_0+3h)}{h}$ .

36) תהי  $f$  פונקציה גזירה פעמיים ב- $x_0$ .

א. הוכיחו כי  $f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$ .

ב. תנו דוגמה של פונקציה  $f$ , באופן שהגבול בסעיף א' קיים, אך  $f''(x_0)$  אינו קיים.

הערה: פתרו את סעיף א' רק אחרי למידת הנושא 'כלל לופיטל'.

37) נתון כי  $f(x)$  רציפה בנקודה  $x=a$ , ונגדיר פונקציה חדשה  $z(x) = (x-a)f(x)$ . הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה  $z(x)$  גזירה בנקודה  $x=a$ .

ב.  $z'(x)$  רציפה ב- $x=a$ .

38) נניח ש- $f$  גזירה ב- $c$  ו- $f(c) = 0$ . הוכיחו:

א. אם  $f'(c) = 0$  אז  $|f(x)|$  גזירה ב- $c$ .

ב. אם  $|f(x)|$  גזירה ב- $c$  אז  $f'(c) = 0$ .

**(39)** יהיו  $f, g$  פונקציות גזירות ב- $c$  ונניח כי  $f(c) = g(c)$ .

א. הוכיחו כי  $|f(x) - g(x)|$  גזירה ב- $c$  אם ורק אם  $f'(c) = g'(c)$ .

ב. הוכיחו כי  $z_1(x) = \min\{f(x), g(x)\}$  גזירה ב- $c$  אם ורק אם  $f'(c) = g'(c)$ .

ג. הוכיחו כי  $z_2(x) = \max\{f(x), g(x)\}$  גזירה ב- $c$  אם ורק אם  $f'(c) = g'(c)$ .

**(40)** נניח ש- $|f(x)|$  גזירה ב- $c$  ו- $f$  רציפה ב- $c$ .

הוכיחו כי  $f$  גזירה ב- $c$ .

## תשובות סופיות

$$f'(x) = 4 \cos 4x \quad (3) \quad f(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \quad (2) \quad f'(x) = 2x + 4 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+10}} \quad (6) \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad (5) \quad f'(x) = e^x \quad (4)$$

$$4 \quad (9) \quad 2 \quad (8) \quad 44! \quad (7)$$

(10) א. רציפה לכל  $x$ . ב. לא גזירה בנקודה  $x=1$ . קיים משיק אנכי בנקודה.

$$n > 2 \quad \text{ב.} \quad n > 1 \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$n > 1 \quad \text{ב.} \quad n > 1 \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$e \quad \text{ב.} \quad \frac{1}{4} \quad \text{א.} \quad (13)$$

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16) שאלת הוכחה.  $f' = 0$ .

(17) הפונקציה גזירה רק ב- $x=0$ , ומתקיים:  $f'(0) = 0$ .

(18) הפונקציה גזירה רק ב- $x=1$ , ומתקיים:  $f'(1) = 0$ .

$$f'(x) = \begin{cases} 5 \sin^4 x \cos x & 2n\pi < x < (2n+1)\pi \\ 0 & x = n\pi \\ -5 \sin^4 x \cos x & (2n+1)\pi < x < (2n+2)\pi \end{cases} \quad \text{א.} \quad (19)$$

ב.  $x = \frac{\pi}{2}n$

(20) שאלת הוכחה.

(21) שאלת הוכחה.

(22) שאלת הוכחה.

(23) שאלת הוכחה.

(24) שאלת הוכחה.

(25) שאלת הוכחה.

(26) שאלת הוכחה.

(27) שאלת הוכחה.

(28) שאלת הוכחה.

(29) שאלת הוכחה.

(30) שאלת הוכחה.

(31) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. 55.

(32) שאלת הוכחה.

(33) שאלת הוכחה.

(34) שאלת הוכחה.

(35) א. שאלת הוכחה. ב.  $f(x) = |x|$ . ג.  $-5f'(x_0)$ .(36) א. שאלת הוכחה. ב.  $f(x) = \text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ .

(37) שאלת הוכחה.

(38) שאלת הוכחה.

(39) שאלת הוכחה.

(40) שאלת הוכחה.

לפתרונות מלאים בווידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## נגזרות חד-צדדיות

## שאלות

1) תארו שתי דרכים שונות לבדיקת גזירות של פונקציה מפוצלת בנקודות התפר שלה (נקודה שבה מתחלפת נוסחת הפונקציה).

$$\text{השתמשו בפונקציה } f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x & x \geq 2 \\ x^3 + 12 & x < 2 \end{cases} \text{ על מנת להדגים שתי שיטות אלה.}$$

בנוסף, הסבירו מתי יש להשתמש בכל אחת משיטות אלה.

בשאלות 2-9 בדקו את גזירות הפונקציות בתחום הגדרתן, בכל דרך שתבחרו. בנוסף, רשמו נוסחה עבור הנגזרת של כל אחת מהפונקציות.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x & x \geq 2 \\ x^3 - 14 & x < 2 \end{cases} \quad (3) \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & x \geq 2 \\ x^3 - 14 & x < 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+2x) & -0.5 < x < 0 \\ x^2 + 2x & x \geq 0 \end{cases} \quad (5) \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x & x \geq 2 \\ x^3 + 12 & x < 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x) = 3x^2 + x|x| + 1 \quad (7) \qquad f(x) = 2 + 4|x-1| \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (9) \qquad f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (8)$$

10) בדקו האם הפונקציה משאלה 5 גזירה פעמיים בנקודה  $x=0$ .

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x \geq -1 \\ \frac{1}{x} + a & x < -1 \end{cases} \quad (11) \text{ נתונה הפונקציה}$$

- א. עבור איזה ערך של הקבוע  $a$  הפונקציה רציפה בנקודה  $x=-1$ ?
- ב. עבור ערך ה- $a$  שקיבלת בסעיף א', בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה  $x=-1$ . האם קיים משיק בנקודה זו?

\* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

12 מצאו עבור אלו ערכים של הקבועים  $a$  ו- $b$  הפונקציה הבאה גזירה בנקודת

$$\text{התפר: } f(x) = \begin{cases} \ln^3 x & 0 < x \leq e \\ ax + b & x > e \end{cases}$$

עבור ערכים אלו, רשמו נוסחה עבור הנגזרת.

13 מצאו עבור אלו ערכים של הקבועים  $a$  ו- $b$  הפונקציה הבאה גזירה בנקודת

$$\text{התפר: } f(x) = \begin{cases} e^x & 0 < x \leq 1 \\ ax + b & x > 1 \end{cases}$$

עבור ערכים אלו, רשמו נוסחה עבור הנגזרת.

$$14 \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + 4x & x < 0 \\ px + q & x \geq 0 \end{cases}$$

קבעו עבור אילו ערכים של הקבועים  $p$  ו- $q$  הפונקציה הנתונה:  
א. רציפה. ב. גזירה.

15 חשבו את  $f'(0)$ , עבור הפונקציה:  $f(x) = |x^4 - x^3 + \sin(10x) - 1|$

$$16 \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} \sqrt{|\cos \pi x|} & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

הוכיחו שהפונקציה לא גזירה לכל  $x$  ממשי.

### תזכורת (הערך השלם)

פונקציית הערך השלם  $[x]$  מחזירה לכל מספר ממשי  $x$  את המספר השלם הגדול ביותר, שקטן או שווה ל- $x$  (מעגלת כלפי מטה). למשל:  $[4.1] = 4$ ,  $[-4.1] = -5$ .

17 נתונה הפונקציה  $f(x) = [x] - [-x]$ .  
חשבו את  $f'(x)$ .

18 נתונה הפונקציה  $f(x) = [x] \sin(\pi x)$ .  
חשבו את  $f'(x)$  על פי ההגדרה.

19 נתונה הפונקציה  $f(x) = [x](1 - \cos(\pi x))$ .  
חשבו את  $f'(x)$ .

**(20)** הוכיחו שאם  $f$  היא פונקציה המקיימת  $|f(x)| \leq x^2$  לכל  $x$ , אז  $f$  גזירה ב- $x=0$ .

**(21)** תהי  $f$  פונקציה רציפה ב- $x_0=0$ . הוכיחו כי הפונקציה  $z(x) = |x|f(x)$  גזירה ב- $x_0=0$  אם ורק אם  $f(0) = 0$ .

**(22)** יהיו  $f$  ו- $g$  שתי פונקציות המוגדרות בסביבה מלאה של  $x_0 \in \mathbb{R}$ . הוכיחו או הפריכו:

$$\text{א. אם } f(x_0) = g(x_0) \text{ ו-} f'_-(x_0) = g'_+(x_0),$$

אז הפונקציה  $z$ , המוגדרת על ידי  $z(x) = \begin{cases} f(x) & x \leq x_0 \\ g(x) & x \geq x_0 \end{cases}$ , גזירה ב- $x_0$ .

ב. אם  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  לא גזירה ב- $x_0$  ו- $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה ב- $\mathbb{R}$ , אז  $g \circ f$  איננה גזירה ב- $\mathbb{R}$ .

ג. אם  $g$  גזירה מימין ב- $x_0$  והפונקציה  $f$  מוגדרת בסביבה מלאה של  $x_0$ , אז  $g \circ f$  גזירה מימין ב- $x_0$ .

הערה: אין קשר בין הסעיפים.

**(23)** תהינה  $f$  ו- $g$  פונקציות המוגדרות ב- $\mathbb{R}$ . נתון ש- $g$  היא פונקציה רציפה ב- $\mathbb{R}$ , ולכל  $x > y$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = g\left(\frac{x + y}{2}\right).$$

הוכיחו כי  $f$  גזירה ב- $\mathbb{R}$ , ושכל  $x$  ממשי מתקיים  $f'(x) = g(x)$ .

$$\text{(24) נתונה הפונקציה } f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{x} & x \geq 1 \\ \frac{\pi}{4} - \arctan x & x < 1 \end{cases}$$

א. בדקו את רציפות וגזירות  $f$ .

ב. בדקו האם  $f$  הפיכה בתחום הגדרתה. אם כן, מצאו את  $f^{-1}(x)$ .

## תשובות סופיות

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+8 & x \geq 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-4 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-5 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+8 & x \geq 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+2x} & -0.5 < x < 0 \\ 2x+2 & x \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$f'(x) = 4 \quad (x > 1) \quad , \quad f'(x) = -4 \quad (x < 1) \quad (6)$$

$$f'(x) = 8x \quad (x \geq 0) \quad , \quad f'(x) = 4x \quad (x < 0) \quad (7)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (9)$$

(10) לא גזירה פעמיים בנקודה  $x=0$ .

(11) א.  $a=1$  ב. לא גזירה. לא קיים משיק.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} \ln^2 x & 0 < x < e \\ \frac{3}{e} & x \geq e \end{cases} \quad a = 3/e \quad b = -2 \quad (12)$$

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & 0 < x < 1 \\ e & x \geq 1 \end{cases} \quad a = e \quad b = 0 \quad (13)$$

(14) א.  $q=0$  ב.  $q=0, p=4$

(15) -10

(16) שאלת הוכחה.

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Z} \\ \text{undefined} & x \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (17)$$

$$f'(x) = \begin{cases} [x] \cos(\pi x) \pi & x \notin \mathbb{Z} \\ \text{undefined} & x \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (18)$$

$$f'(x) = \begin{cases} [x] \sin \pi x & x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z}, x \text{ even} \\ \text{undefined} & x \in \mathbb{Z}, x \text{ odd} \end{cases} \quad (19)$$

לפתרונות מלאים בווידאו של שאלות 20-23 היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & -1 < x \leq 0 \\ \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) & 0 < x < \frac{3\pi}{4} \end{cases} \quad \text{ב.} \quad (24) \quad \text{א. רציפה לכל } x \text{ וגזירה לכל } x \neq 1.$$

# קלקולוס 1

פרק 5 - חישוב נגזרת של פונקציה

תוכן העניינים

1. כללי הגזירה	(ללא ספר)
2. תרגול בכללי הגזירה	73
3. תרגילים נוספים לפי סוגים	77
4. גזירה סתומה	80
5. כלל השרשרת	82
6. גזירה לוגריתמית	85

## תרגול בכללי הגזירה

### שאלות

גזרו פעמיים את הפונקציות הבאות (בשאלות 27-35 מצאו רק את הנגזרת הראשונה):

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 32 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (15) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$f(x) = \cos(x^4) \quad (21) \quad f(x) = \sin(x^3) \quad (20) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) \quad (19)$$

$$f(x) = \ln(\cos x^2) \quad (24) \quad f(x) = \tan(x^2) \quad (23) \quad f(x) = \sin^3 x \quad (22)$$

$$f(x) = (x+1)^{\sin x} \quad (27) \quad f(x) = \arctan(x^2) \quad (26) \quad f(x) = \arcsin(2x+3) \quad (25)$$

$$y = x^{\ln x} \quad (30) \quad f(x) = (\cos x)^{\ln x} \quad (29) \quad f(x) = (\sin x)^x \quad (28)$$

$$y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}} \quad (33) \quad y = x^{\sqrt{x}} \quad (32) \quad y = \sqrt[3]{x} \quad (31)$$

$$y = (x+1)^{(x+1)} \quad (35) \quad y = (x^2 + 1)^x \quad (34)$$

הערה: בשאלות 28 ו-29 נציג שתי דרכי פתרון. מומלץ לצפות בשתייהן.

## תשובות סופיות

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{x^3} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x+10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4} \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2+24)}{(x^2-4)^3} \quad (4)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4} \quad (5)$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad (6)$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \quad (7)$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad (8)$$

$$f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x} \quad (9)$$

$$f'(x) = x(2 \ln x + 1), \quad f''(x) = 2 \ln x + 3 \quad (10)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}, \quad f''(x) = \frac{1}{(4-2x)^2} \quad (11)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x}(\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} \quad (12)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left[ \frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\} \quad (13)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1+2x}{x^4}\right) \quad (14)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x+2}{x^4}\right) \quad (15)$$

$$f'(x) = e^{-2x^2} (1 - 4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3 - 4x^2) \quad (16)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \quad (17)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2 - 1}{(x^2-1)^{5/3}} \quad (18)$$

$$f'(x) = \frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}} \quad (19)$$

$$f'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2, \quad f''(x) = -9x^4 \sin(x^3) + 6x \cdot \cos(x^3) \quad (20)$$

$$f'(x) = -\sin(x^4) \cdot 4x^3, \quad f''(x) = -16x^6 \cos(x^4) - 12x^2 \cdot \sin(x^4) \quad (21)$$

$$f'(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x, \quad f''(x) = 6\sin x \cos^2 x - 3\sin^3 x \quad (22)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}, \quad f''(x) = \frac{2 \cdot \cos^2(x^2) - 8x^2 \cos(x^2) \sin(x^2)}{\cos^4(x^2)} \quad (23)$$

$$f'(x) = \tan(x^2) \cdot (-2x), \quad f''(x) = \frac{-4x^2}{\cos^2(x^2)} - 2 \tan(x^2) \quad (24)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x+3)^2}} \cdot 2, \quad f''(x) = \frac{4(2x+3)}{(1-(2x+3)^2)^{1.5}} \quad (25)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}, \quad f''(x) = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2} \quad (26)$$

$$f'(x) = x^{\sin x} \left( \cos x \cdot \ln(x+1) + \frac{\sin x}{x+1} \right) \quad (27)$$

$$f'(x) = (\sin x)^x (\ln(\sin x) + \cot x \cdot x) \quad (28)$$

$$f'(x) = (\cos x)^{\ln x} \cdot \left( \frac{\ln(\cos x)}{x} - \tan x \cdot \ln x \right) \quad (29)$$

$$y' = x^{\ln x} \left( \frac{2 \ln x}{x} \right) \quad (30)$$

$$y' = x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x) \quad (31)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot x^{\sqrt{x}} \left( \frac{\ln x}{2} + 1 \right) \quad (32)$$

$$y' = \left( \sqrt{x} + \frac{1}{x} \right)^{\sqrt{x}} \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln \left( \sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{x}}} \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} \right) \cdot \sqrt{x} \right) \quad (33)$$

$$y' = (x^2 + 1)^x \left( 1 \cdot \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \cdot x \right) \quad (34)$$

$$y' = (x+1)^{(x+1)} [\ln(x+1) + 1] \quad (35)$$

## תרגילים נוספים לפי סוגים

### שאלות

#### הנגזרת של פונקציית חזקה

1) גזרו את הפונקציות הבאות:

- |                             |                             |                             |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| א. $f(x) = x^3$             | ב. $f(x) = x^7$             | ג. $f(x) = x^2$             |
| ד. $f(x) = x^1$             | ה. $f(x) = x^{-3}$          | ו. $f(x) = x^{-1}$          |
| ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ | ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ | ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ |

#### הנגזרת של קבוע כפול פונקציה

2) גזרו את הפונקציות הבאות:

- |                           |                              |                                       |
|---------------------------|------------------------------|---------------------------------------|
| א. $f(x) = 2x^3$          | ב. $f(x) = 3x^7$             | ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$            |
| ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$ | ה. $f(x) = 8x^1$             | ו. $f(x) = 3x^{-2}$                   |
| ז. $f(x) = \frac{4}{x}$   | ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$ | ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$ |

#### הנגזרת של קבוע

3) גזרו את הפונקציות הבאות:

- |                |                         |
|----------------|-------------------------|
| א. $f(x) = 12$ | ב. $f(x) = \frac{7}{8}$ |
|----------------|-------------------------|

#### הנגזרת של סכום והפרש

4) גזרו את הפונקציות הבאות:

- |                                 |   |
|---------------------------------|---|
| א. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ | ב. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$ |
|---------------------------------|---|

## הנגזרת של פונקציה חזקה מורכבת

(5) גזרו את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = (5x-2)^3 \quad \text{ב.} & f(x) = (x^3+6)^5 \\ \text{ב.} & f(x) = (x-x^2)^2 \quad \text{ג.} & f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3} \\ \text{ד.} & f(x) = \frac{(5-x)^3}{4} \quad \text{ה.} & \end{array}$$

## הנגזרת של אחד חלקי איקס

(6) גזרו את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = \frac{3}{x} \quad \text{ב.} & f(x) = \frac{2}{x} \\ \text{ב.} & f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{ג.} & f(x) = \frac{1}{x^2} \\ \text{ג.} & f(x) = \frac{3}{x^3} \quad \text{ד.} & f(x) = \frac{6}{x+5} \\ \text{ד.} & f(x) = \frac{1}{x^2-3x} \quad \text{ה.} & f(x) = \frac{2}{3-x} \\ \text{ה.} & f(x) = \frac{1}{x^2-3x} \quad \text{ו.} & f(x) = \frac{2}{3-x} \\ \text{ו.} & f(x) = \frac{1}{x^2-3x} \quad \text{ז.} & f(x) = \frac{6}{x+5} \end{array}$$

## הנגזרת של מכפלה

(7) גזרו את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = (5x+1)(x-3) \\ \text{ב.} & f(x) = (5x+1)^3(x-3) \\ \text{ג.} & f(x) = x^3(6-x)^4 \end{array}$$

## הנגזרת של מנה

(8) גזרו את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = \frac{3x-1}{1+2x} \\ \text{ב.} & f(x) = \frac{x^2+1}{5x-12} \\ \text{ג.} & f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3} \\ \text{ד.} & f(x) = \frac{x^2+8}{x-1} \\ \text{ה.} & f(x) = \frac{1}{x} \\ \text{ו.} & f(x) = \frac{3}{x^3} \end{array}$$

## הנגזרת של שורש

(9) גזרו את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & f(x) = \sqrt{x} \\ \text{ב.} & f(x) = 4\sqrt{x+1} \\ \text{ג.} & f(x) = \sqrt{x^3-1} \\ \text{ד.} & f(x) = (3x+1)\sqrt{x} \\ \text{ה.} & f(x) = x^2\sqrt{x+3} \\ \text{ו.} & f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}} \end{array}$$

## תשובות סופיות

(1)

$$\begin{array}{lll}
 f'(x) = 2x & \text{ג.} & f'(x) = 7x^6 & \text{ב.} & f'(x) = 3x^2 & \text{א.} \\
 f'(x) = -\frac{1}{x^2} & \text{ו.} & f'(x) = 3x^{-4} & \text{ה.} & f'(x) = 1 & \text{ד.} \\
 f'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{4}} & \text{ט.} & f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & \text{ח.} & f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{ז.}
 \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{lll}
 f'(x) = 2x^3 & \text{ג.} & f'(x) = 21x^6 & \text{ב.} & f'(x) = 6x^2 & \text{א.} \\
 f'(x) = -\frac{6}{x^3} & \text{ו.} & f'(x) = 8 & \text{ה.} & f'(x) = \frac{6x^5}{7} & \text{ד.} \\
 f'(x) = \frac{2}{9\sqrt[3]{x}} & \text{ט.} & f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} & \text{ח.} & f'(x) = -\frac{4}{x^2} & \text{ז.}
 \end{array}$$

0. ב. א. (3)

$$f'(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = 3x^2 + 4x - 3 \quad \text{א. (4)}$$

$$f'(x) = 15x^2(x^3 + 6)^4 \quad \text{ב.} \quad f'(x) = 15(5x - x)^2 \quad \text{א. (5)}$$

$$f'(x) = \frac{8(x+1)^3}{3} \quad \text{ה.} \quad f'(x) = -\frac{3}{4}(5-x)^2 \quad \text{ד.} \quad f'(x) = 6(x-x^2)(1-2x) \quad \text{ג.}$$

$$f'(x) = -\frac{9}{x^4} \quad \text{ז.} \quad f'(x) = -\frac{2}{x^3} \quad \text{ג.} \quad f'(x) = \frac{2}{x^2} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = -\frac{3}{x^2} \quad \text{א. (6)}$$

$$f'(x) = -\frac{6}{(x+3)^2} \quad \text{ז.} \quad f'(x) = \frac{2}{(3-x)^2} \quad \text{ו.} \quad f'(x) = -\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2} \quad \text{ה.}$$

$$f'(x) = (5x+1)^2(20x-44) \quad \text{ב.} \quad f'(x) = 10x-14 \quad \text{א. (7)}$$

$$f'(x) = x^2(6-x)^3(18-7x) \quad \text{ג.}$$

$$f'(x) = \frac{8x}{(x^2+3)^2} \quad \text{ג.} \quad f'(x) = \frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = \frac{5}{(1+2x)^2} \quad \text{א. (8)}$$

$$f'(x) = -\frac{9}{x^4} \quad \text{ו.} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{ה.} \quad f'(x) = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2} \quad \text{ד.}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}} \quad \text{ג.} \quad f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{א. (9)}$$

$$f'(x) = \frac{x-3}{2x\sqrt{x}} \quad \text{ו.} \quad f'(x) = \frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}} \quad \text{ה.} \quad f'(x) = \frac{9x+1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ד.}$$

## גזירה סתומה

## שאלות

(1) גזרו את הפונקציה הסתומה  $x^2 + y^5 - 1 = 1$ .

(2) גזרו את הפונקציה הסתומה  $4 \ln x + 10 \ln y = y^2$ .

(3) גזרו את הפונקציה הסתומה  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy}$ .

(4) נתונה הפונקציה הסתומה הבאה  $e^{y^2-4x} + x^2 y^3 = \sin(y-2x) + 4y + 1$  חשבו את  $y'$  בנקודה  $(1,2)$ .

(5) נתונה הפונקציה הסתומה הבאה  $\sqrt{4x+y^3} + \cos^2(xy) = \ln(x^2 y + 1) + \ln e^3$  חשבו את  $y'$  בנקודה בה  $y = 0$ .

(6) גזרו את הפונקציה הסתומה  $x^y - xy = 10$ .

(7) גזרו את הפונקציה הסתומה  $x^y - y^x = 1$ .

(8) נתונה פונקציה סתומה  $xy - y^3 + x^2 - x = 0$  מצאו את ערך  $y''$  בנקודה בה  $y = 1$ .

(9) נתון עקום שמשוואתו  $yx^2 + e^y = x$ .  
א. הראו שעבור  $x=1$  קיים ערך  $y$  אחד ויחיד ומצאו אותו.  
ב. חשבו את  $y''$  בנקודה בה  $x=1$ .

(10) נתון כי המשוואה  $h(y) - x + 1 = 2x^3 + 4e^y + 2y$ , מגדירה את  $y = y(x)$  כפונקציה סתומה של  $x$ . נתון כי  $h(y)$  גזירה ברציפות ויורדת. הוכיחו כי  $y(x)$  יורדת חזק.

## תשובות סופיות

$$5y^4 - 1 \neq 0, \quad y' = \frac{-2x}{5y^4 - 1} \quad (1)$$

$$\frac{10}{y} - 2y \neq 0, \quad y' = \frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y} - 2y} \quad (2)$$

$$\sqrt{x} \neq 0, \quad \sqrt{x} \neq 1, \quad y' = \frac{\sqrt{y} - 1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{y}}{1 - \sqrt{x}} \quad (3)$$

$$y'_{(1,2)} = -\frac{14}{11} \quad (4)$$

$$y'_{(1,0)} = 1 \quad (5)$$

$$x^y \cdot \ln x - x \neq 0, \quad y' = \frac{y - x^y \cdot \frac{y}{x}}{x^y \cdot \ln x - x} \quad (6)$$

$$x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y} \neq 0, \quad y' = \frac{-x^y \cdot \frac{y}{x} + y^x \cdot \ln y}{x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y}} \quad (7)$$

$$-1 \quad (8)$$

$$y''_{(1,0)} = -\frac{9}{8} \quad \text{ב.} \quad (9)$$

$$(10) \text{ שאלת הוכחה.}$$

## כלל השרשרת

## שאלות

- (1) נתונה פונקציה  $f(x)$ , המקיימת  $f'(4) = 10$ .  
נגדיר פונקציה חדשה:  $g(x) = f(x^2)$ .  
חשבו את  $g'(2)$ .

- (2) ענו על הסעיפים הבאים:  
א. נתונה פונקציה  $f(x)$ . נגדיר פונקציה חדשה

$$z(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) - f(4x+1)$$

חשב ואת  $z'(x)$ .

- ב. נתונה פונקציה  $f(x)$  המקיימת  $f(1) = 2$ ,  $f'(1) = e$

$$z(x) = f^2(\ln x) + \frac{1}{f^2(\ln x)}$$

חשבו את  $z'(e)$ .

$$(3) \text{ נתונה הפונקציה } g(x) = \frac{f^2(\sqrt{x}) - 1}{f(\sqrt{x})}$$

ידוע כי  $f(10) = f'(10) = 4$

חשבו  $g'(100)$ .

$$(4) \text{ נתונה הפונקציה } g(x) = \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) + 4}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

ידוע כי  $f(1) = 1$ ,  $f'(1) = 4$

חשבו  $g'(1)$ .

$$(5) \quad \text{נתונה הפונקציה } g(x) = \frac{f^2(\ln x)}{f(\ln x) + 1}$$

ידוע כי  $f(0) = 2$  ,  $f'(0) = 1$

חשבו  $g'(1)$

$$(6) \quad \text{נתונה הפונקציה } g(x) = \frac{f^{10}(4x) + 1}{f\left(\frac{4}{x}\right) + 1}$$

ידוע כי  $f(4) = 1$  ,  $f'(4) = 2$

חשבו  $g'(1)$

$$(7) \quad \text{נתונה הפונקציה } g(x) = \frac{\sqrt[4]{f^7(x^2)}}{f(x^4)}$$

ידוע כי  $f(1) = 1$  ,  $f'(1) = 4$

חשבו  $g'(1)$

(8) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהנגזרת של פונקציה זוגית היא פונקציה אי-זוגית והנגזרת של פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.

ב. הפונקציה  $f(x)$  היא אי-זוגית. בדקו האם הפונקציה  $f'''(x)$  היא זוגית או אי-זוגית.

ג. הפונקציה  $f(x)$  אי-זוגית נגדיר  $g(x) = (f(x))^4$ . קבעו האם הפונקציה  $g'(x)$  זוגית או אי-זוגית.

ד. ידוע שנגזרת של פונקציה היא זוגית. האם ניתן לקבוע שהפונקציה היא אי-זוגית?

## תשובות סופיות

(1) 40

$$z'(e) = 3\frac{3}{4} \quad \text{ב.} \quad z'(x) = f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) - f'(4x+1) \cdot 4 \quad \text{א.} \quad (2)$$

(3)  $\frac{17}{80}$ 

(4) 36

(5)  $\frac{8}{9}$ 

(6) 44

(7) -2

(8) ב. אי-זוגית. ג. אי-זוגית. ד. לא.

## גזירה לוגריתמית

### שאלות

גזרו את הפונקציות הבאות:

$$y = \sqrt[4]{\frac{10x-1}{x+1}} \cdot \sqrt{(2x+1)^7} \quad (1)$$

$$y = \left(\sqrt[4]{10x+1}\right)^{2x} \quad (2)$$

$$y = \frac{(x+2)^{3x+4} \cdot (5x+6)}{(7x+8) \cdot (9x+10)} \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$y' = y \left[ \frac{1}{4} \frac{1}{10x-1} \cdot 10 + \frac{7}{10} \frac{1}{2x+1} \cdot 2 - \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} \right] \quad (1)$$

$$y' = \left( (10x+1)^{\frac{1}{4}} \right)^{2x} \cdot \frac{1}{4} \left[ 2^x \cdot \ln 2 \cdot \ln(10x+1) + \frac{1}{10x+1} \cdot 10 \cdot 2^x \right] \quad (2)$$

$$y' = y \left[ 3 \cdot \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} (3x+4) + \frac{1}{5x+6} \cdot 5 - \frac{1}{7x+8} \cdot 7 - \frac{1}{9x+10} \cdot 9 \right] \quad (3)$$

# קלקולוס 1

פרק 6 - חישוב נגזרת של פונקציות מיוחדות

תוכן העניינים

86	.....	1. נגזרת הפונקציה ההפוכה
87	.....	2. נגזרת מסדר גבוה
88	.....	3. נוסחת לייבניץ
89	.....	4. גזירה פרמטרית

## נגזרת הפונקציה ההפוכה

### שאלות

הוכיחו, בעזרת כלל הנגזרת של הפונקציה ההפוכה, את הנוסחאות הבאות:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (1)$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (2)$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (3)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## נגזרת מסדר גבוה

### שאלות

חשבו את הנגזרת ה- $n$ ,  $f^{(n)}(x)$ , של הפונקציות הבאות:

$$y = \frac{1}{x+a} \quad (1)$$

$$y = \frac{2x+3}{x^2-3x+2} \quad (2)$$

$$y = \frac{x}{(x^2-1)(x-2)} \quad (3)$$

$$y = \frac{x^4}{x^2-1} \quad (4)$$

### תשובות סופיות

$$y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \cdot (x+a)^{-n-1} \quad (1)$$

$$y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \cdot \left( -5(x-1)^{-n-1} + 7(x-2)^{-n-1} \right) \quad (2)$$

$$y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \cdot \left( -\frac{1}{2}(x-1)^{-n-1} - \frac{1}{6}(x+1)^{-n-1} + \frac{2}{3}(x-2)^{-n-1} \right) \quad (3)$$

$$y' = 2x - \frac{1}{2} \left( (x-1)^{-2} - (x+1)^{-2} \right), \quad y'' = 2 + \left( (x-1)^{-3} - (x+1)^{-3} \right) \quad (4)$$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2} (-1)^n \cdot n! \cdot \left( (x-1)^{-n-1} - (x+1)^{-n-1} \right), (n > 2)$$

## נוסחת לייבניץ

### שאלות

חשבו את הנגזרת העשירית,  $y^{(10)}$ , של הפונקציות הבאות:

$$y = x^3 e^x \quad (1)$$

$$y = x^3 \sin 5x \quad (2)$$

### תשובות סופיות

$$(e^x \cdot x^3)^{(10)} = e^x [x^3 + 103x^2 + 456x + 120 \cdot 6] \quad (1)$$

$$(\sin 5x \cdot x^3)^{(10)} = -5^{10} x^3 \sin 5x + 6 \cdot 5^{10} x^2 \cos 5x + 54 \cdot 5^9 x \sin 5x - 24 \cdot 5^9 \cos 5x \quad (2)$$

## גזירה פרמטרית

### שאלה

1) חשבו את הנגזרות הראשונה והשנייה של הפונקציה הבאה,

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = t \cos t \end{cases} \quad \text{הנתונה בצורה פרמטרית}$$

### תשובה

$$y' = \frac{\cos t - \sin t \cdot t}{1 - \cos t}, \quad y'' = \frac{(-t \cos t - 2 \sin t)(1 - \cos t) - \sin t(\cos t - t \sin t)}{(1 - \cos t)^3} \quad (1)$$

# קלקולוס 1

פרק 7 - משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי

תוכן העניינים

90	1. המשיק
92	2. בעיות משיקים
94	3. בעיות משיקים עם נוסחת המשיק
98	4. הנורמל
99	5. זווית שבין שתי עקומות
100	6. נוסחת הקירוב הליניארי - דיפרנציאל שלם

## המשיק

## שאלות

- (1) מצאו את שיפוע הפונקציה  
 א.  $f(x) = 2x^3 - 7x$ , בנקודה  $(2, 2)$ .  
 ב.  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$ , בנקודה  $x = -2$ .
- (2) נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt{ax}$ , כאשר  $a > 0$ .  
 המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = \frac{1}{2}$ , הוא בעל שיפוע 1.  
 מצאו את הקבוע  $a$ .
- (3) הישר  $2y - 3x = 3$  משיק לגרף הפונקציה  $h(x) = 3\sqrt{x}$ .  
 מצאו את נקודת ההשקה.
- (4) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = a \cdot 3^{2x-1} + 3^{x-b}$ , בנקודה  $(1, 15)$ , הוא  $21 \ln 3$ .  
 מצאו את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .
- (5) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{\ln^2 x + a}{\ln x + b}$ , בנקודה  $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$ , הוא  $\frac{e}{3}$ .  
 מצאו את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .
- (6) לאילו ערכי  $k$  ישיק הישר  $y = -5x + 6$ , לגרף הפונקציה  
 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + k$ ?  
 לכל ערך  $k$  כזה מצאו את נקודת ההשקה.
- (7) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2 - 4x + 5$ .  
 א. שרטטו את גרף הפונקציה ואת המשיקים לגרף בנקודות  $x = 3$  ו- $x = 1$ .  
 ב. חשבו את הזווית שיוצר כל אחד מהמשיקים בסעיף א',  
 עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

(8) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 2}$ .

מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, שהמשיק דרכן יוצר זווית של  $45^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

(9) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$ .

מצאו את שיעורי ה- $x$  של הנקודות, שהמשיק דרכן לגרף הפונקציה יוצר זווית של  $135^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .

(10) פונקציה  $f(x)$  גזירה ברציפות ב- $0$  ומקיימת  $f(0) = 0$ .

ידוע שבראשית הצירים הזווית בין המשיק לגרף הפונקציה לבין הכיוון החיובי של ציר ה- $x$  היא  $30^\circ$ .

חשבו את הגבול  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ .

(11) מצאו את הזווית שיוצר המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ , בנקודות  $x = 1$  ו- $x = 0$ .

### תשובות סופיות

(1) א. 17 ב. 4

(2)  $a = 2$

(3)  $(1, 3)$

(4)  $a = 2, b = -1$

(5)  $a = 2, b = -2$

(6) לערך  $k = 6$ , בנקודה  $x = 1$ ; לערך  $k = \frac{158}{27}$ , בנקודה  $x = \frac{1}{3}$ .

(7) א. ראו באתר. ב.  $\alpha = 63.43^\circ, \beta = 116.56^\circ$

(8)  $x = 5, x = -1$

(9)  $x = 1, x = \frac{1}{3}$

(10)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(11)  $\alpha = 33.69^\circ, \beta = 90^\circ$

## בעיות משיקים

### שאלות

(1) הישר  $y = 4x + b$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$ . מצאו את  $b$  ואת נקודת ההשקה.

(2) הישר  $y = 3x$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = x\sqrt{x} + b$ . מצאו את  $b$  ואת נקודת ההשקה.

(3) הישר  $y = ax + \frac{1}{2}$  משיק לגרף הפונקציה  $g(x) = \frac{2}{x+c}$  בנקודה  $x = 0$ . מצאו את  $a$  ו- $c$ .

(4) הישר  $y = x + b$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = e^x$ . מצאו את  $b$  ואת נקודת ההשקה.

(5) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \ln x$  בנקודה  $x = e$ .

בשאלות 6-7 מצאו את נקודת ההשקה, ואת משוואת המשיק לגרף העקומה, העובר דרך הנקודה הנתונה:

$$(6) \quad (2, -3), \quad y = x^2 - 2x + 1$$

$$(7) \quad (-3, 1), \quad y = \sqrt{x}$$

(8) מצאו את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות  $y = x^2$  ו- $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$ .

(9) הפונקציות  $y = \frac{1}{x}$  ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$  משיקות זו לזו. מצאו את  $k$  ואת נקודת ההשקה.

**(10)** נתון כי  $f$  גזירה לכל  $x$ .

א. הוכיחו כי הפונקציה  $z(x) = x^2 f(3x-2)$  גזירה לכל  $x$ .

ב. הישר  $2y = 10x + 11$  משיק לגרף הפונקציה  $z(x)$  בנקודה  $x = -1$ .

מצאו את השיפוע של  $f(x)$  בנקודה  $x = -5$ .

### תשובות סופיות

**(1)** נקודת ההשקה היא  $(-1, 5)$  ומשוואת המשיק היא  $y = 4x + 9$ .

**(2)** נקודת ההשקה היא  $(4, 12)$  ו-  $b = 4$ .

**(3)** נקודת ההשקה היא  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  ומשוואת המשיק היא  $y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$ .

**(4)** נקודת ההשקה היא  $(0, 1)$  ומשוואת המשיק היא  $y = x + 1$ .

**(5)** משוואת המשיק היא  $y = \frac{1}{e}x$ .

**(6)**  $y = 6x - 15, (4, 9)$  ;  $y = -2x + 1, (0, 1)$

**(7)** המשיק  $\left(9, 3\right), y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$ .

**(8)**  $y = 2x - 1, y = -2x - 1$

**(9)** נקודת ההשקה  $(1, 1), k = 1.5$ .

**(10)** א. שאלת הוכחה. השיפוע הוא 2.

## בעיות משיקים עם נוסחת המשיק

### שאלות

(1) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = 2(4x+3)^3$  , בנקודה  $x = -1$  .

(2) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = x^4 - 2x$  , ששיפועו 2 .

(3) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = x^3 + 1$  , בנקודה  $x = 0$  .

(4) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2 - 2}$  , בנקודה  $x_1 = 1$  .

(5) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{2}{ax+3}$  , בנקודה  $y = 2$  , הוא -4 .  
מצאו את ערכו של הפרמטר  $a$  ואת משוואת המשיק.

(6) מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה  $f(x) = \frac{1}{3x^3}$  , היוצרים זווית של  $135^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$  .

(7) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x-1}}$  , ששיפועו -2 .

(8) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$  , בנקודה  $x_1 = 2$  .

(9) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{a}{\sqrt{bx-1}}$  , בנקודה  $(1,6)$  , הוא -6 .  
מצאו את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$  , ואת משוואת המשיק.

(10) נתונה הפונקציה  $y = e^{2x} + 3ex$  , והעבירו לה משיק בנקודה  $x = 2$  .  
מצאו את משוואת המשיק.

(11) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = e^{2x} + xe^{-x}$ , בנקודה  $x = 0$ .

(12) מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה  $f(x) = (e+1)e^x - e^{2x}$ , בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר  $y = e$ .

(13) לפונקציה  $g(x) = \frac{\ln x^2}{x}$  העבירו משיק בנקודה שבה  $x = e^2$ . מצאו את משוואת המשיק.

(14) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $y = x \cdot \ln(x^2 + 1)$ , בנקודה  $x = 1$ .

(15) הגרפים של  $f(x) = \ln x$  ו- $g(x) = 1 - x$  נחתכים בנקודה A, ברביע הראשון. בנקודה A העבירו משיק. מצאו את משוואת המשיק והוכיחו שהמשיק עובר דרך ראשית הצירים.

(16) מצאו את משוואת המשיק למעגל  $x^2 + y^2 = 25$ , בנקודה  $(3, 4)$ .

(17) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $xy^2 + y - x = xy$ , דרך הנקודה  $(1, 1)$ .

(18) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $x^2y + e^{y^2-4x} = \ln x + 1$ , דרך הנקודה  $(1, 2)$ , הנמצאת על גרף הפונקציה.

(19) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $\sqrt{xy + y} + x^2y = xy^2$ , דרך הנקודה  $(1, 2)$ , הנמצאת על גרף הפונקציה.

(20) מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $e^{-y^2} + y = y^2 - 1$ , דרך הנקודה  $(0, 2)$ , הנמצאת על גרף הפונקציה.

**(21)** נתונה הפונקציה הסתומה  $x + y \cdot e^y = xy^2 + x^2$ .

א. מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, בהן  $y = 0$ .

ב. מצאו את משוואת הישרים המשיקים של גרף הפונקציה, בנקודות שנמצאו בסעיף א.

## תשובות סופיות

$$y = 24x + 22 \quad (1)$$

$$y = 2x - 3 \quad (2)$$

$$y = 1 \quad (3)$$

$$y = -12x + 9 \quad (4)$$

$$a = 2, \quad y = -4x - 2 \quad (5)$$

$$y = -x + 1\frac{1}{3}, \quad y = -x - 1\frac{1}{3} \quad (6)$$

$$y = -2x + 8 \quad (7)$$

$$y = \frac{11}{16}x - \frac{30}{16} \quad (8)$$

$$a = 6, \quad b = 2, \quad y = -6x + 12 \quad (9)$$

$$y = (2e^4 + 3e)x - 3e^4 \quad (10)$$

$$y = 3x + 1 \quad (11)$$

$$y = (-e^2 + e)x + e^2, \quad y = (e - 1)x + e \quad (12)$$

$$y = -\frac{2}{e^4}x + \frac{6}{e^2} \quad (13)$$

$$y = (\ln 2 + 1)x - 1 \quad (14)$$

$$y = \frac{1}{e}x \quad (15)$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \quad (16)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad (17)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5} \quad (18)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{5}{6} \quad (19)$$

$$y = \frac{4}{3}x + 2 \quad (20)$$

$$(21) \quad \text{א. } (0,0), (1,0) \quad \text{ב. בראשית הצירים: } y = -x, \text{ המשוואה השנייה: } y = x - 1.$$

## הנורמל

### שאלות

- (1) מצאו את משוואת הישר, הנורמל לגרף הפונקציה  $f(x) = \sqrt{2x-2}$ , בנקודה  $(3,2)$ .
- (2) מצאו את משוואת הנורמל לגרף הפונקציה  $f(x) = x^4$ , המאונך לישר העובר דרך הנקודות  $(5,0)$  ו- $(2,4)$ .
- (3) משוואת נורמל לגרף הפונקציה  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ , בנקודה מסוימת, היא  $4y + x = 6$ . מצאו את הנקודה.

### תשובות סופיות

- (1)  $y = -2x + 8$
- (2)  $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$
- (3)  $(2,1)$

## זווית שבין שתי עקומות

### שאלות

- (1) מצאו את הזווית בין הפונקציות  $y = f(x) = x^2$  ו- $y = g(x) = \frac{1}{x}$ .
- (2) מצאו את הזווית בין המעגל  $x^2 + y^2 = 8$  והפרבולה  $y^2 = 2x$ .
- (3) הוכיחו שהאליפסה  $x^2 + 2y^2 = 8$  וההיפרבולה  $x^2 - y^2 = 2$  נחתכות בזווית ישרה.

### תשובות סופיות

- (1)  $71.57^\circ$
- (2)  $71.56^\circ$
- (3) שאלת הוכחה.

## נוסחת הקירוב הלינארי – דיפרנציאל שלם

---

### שאלות

(1) חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים הבאים:  
 $\sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{27}$

(2) חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים הבאים:  
 $\ln 2, \sqrt[3]{9}$

### תשובות סופיות

$$\sqrt{5} \cong 2.25, \sqrt{8} \cong 2\frac{5}{6}, \sqrt{27} = 5\frac{1}{5} \quad (1)$$

$$\ln 2 \cong 1, \sqrt[3]{9} \cong 2\frac{1}{12} \quad (2)$$

# קלקולוס 1

פרק 8 - כלל לופיטל

תוכן העניינים

101	.....	1. גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף.
104	.....	2. גבול מהצורה אפס כפול אינסוף.
105	.....	3. גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף.
106	.....	4. גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף.
107	.....	5. מקרים בהם כלל לופיטל נכשל.

## גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף

### שאלות

גבולות מהצורה  $\frac{0}{0}$  ו-  $\frac{\infty}{\infty}$

חשבו את הגבולות הבאים (ביטויים רציונאליים):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (3) \qquad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

חשבו את הגבולות הבאים (ביטויים אי-רציונאליים):

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{\sqrt{x - 2} - 1} \quad (6) \qquad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 5}}{x - 4} \quad (5) \qquad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \quad (8) \qquad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - 1} - \sqrt{x}}{x - 1} \quad (7)$$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות חזקות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0) \quad (10) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{2x^3} \quad (12) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \quad (11)$$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות לוגריתמיות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(x + 1) + x}{x} \quad (15) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)}{\frac{1}{x^2}} \quad (14) \qquad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^2 - 2x + 1} \quad (13)$$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות טריגונומטריות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax^2)}{bx^2} \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad (19)$$

חשבו את הגבולות הבאים (שאלות משולבות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \sin(x^2)}{x^4} \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2 + 3x)}{\arcsin(x^2 - 4x)} \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x^2)}{x^4} \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sinh x} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 3} \quad (30)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cosh x - 2}{1 - \cos 2x} \quad (29)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + x + 1}{e^x} \quad (32)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} \quad (31)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)} \quad (34)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x} \quad (33)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \quad (35)$$

## תשובות סופיות

$\frac{1}{6}$ (5)	4 (4)	$n-1$ (3)	$\frac{20}{17}$ (2)	$\frac{5}{6}$ (1)
$\ln \frac{a}{b}$ (10)	1 (9)	$-\frac{3}{2}$ (8)	$\frac{5}{6}$ (7)	$\frac{3}{2}$ (6)
1 (15)	2 (14)	$-\frac{1}{2}$ (13)	$\frac{1}{6}$ (12)	$\frac{1}{2}$ (11)
$\frac{1}{2}$ (20)	$\frac{1}{6}$ (19)	$\frac{a}{b}$ (18)	$\frac{a}{b}$ (17)	1 (16)
$-\frac{1}{2}$ (25)	$-\frac{1}{3}$ (24)	$\frac{1}{3}$ (23)	$\frac{1}{8}$ (22)	$\frac{1}{2}$ (21)
$\frac{1}{2}$ (30)	$\frac{2}{3}$ (29)	1 (28)	1 (27)	$-\frac{3}{4}$ (26)
0 (35)	$\infty$ (34)	0 (33)	$\infty$ (32)	$\frac{1}{2}$ (31)

## גבול מהצורה אפס כפול אינסוף

גבולות מהצורה  $\infty \cdot 0$

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \cdot \ln x \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left( \frac{x+3}{x-3} \right) \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot e^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) \cdot \ln(x - 3) \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left[ \sqrt{1 + \frac{5}{x}} - 1 \right] \quad (9)$$

תשובות סופיות

0 (5)	0 (4)	0 (3)	0 (2)	$\infty$ (1)
	$\frac{5}{2}$ (9)	6 (8)	0 (7)	0 (6)

## גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף

### שאלות

גבולות מהצורה  $\infty - \infty$

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(3x) - \ln(\sin 5x)] \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5} \right) \quad (6)$$

### תשובות סופיות

$$0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\ln \frac{3}{5} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (5)$$

$$\frac{1}{3} \quad (6)$$

## גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף

### שאלות

גבולות מהצורה:  $1^{\pm\infty}$ ,  $0^{\pm\infty}$ ,  $\infty^0$

חשבו את הגבולות הבאים:

$\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x-4)^{x-2}$ (3)	$\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax)^x$ , ( $a > 0$ ) (2)	$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}}$ (1)
$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan 3x)^{\frac{1}{x}}$ (6)	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$ (5)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2}$ (4)
$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x}$ (9)	$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x^2)^{\frac{1}{x^4}}$ (8)	$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ (7)
$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \sin x)^{\tan x}$ (12)	$\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\cot x}$ (11)	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\tan x}$ (10)
$\lim_{x \rightarrow 1^-} [\ln(1 - \ln x)]^{x-1}$ (15)	$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ (14)	$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x^2)^{\cot^2 x}$ (13)

### תשובות סופיות

$e^2$ (5)	1 (4)	1 (3)	1 (2)	$e$ (1)
1 (10)	$e^{-1/2}$ (9)	$e^{1/3}$ (8)	$e^3$ (7)	1 (6)
0 (15)	$e$ (14)	1 (13)	$e$ (12)	1 (11)

## מקרים בהם כלל לופיטל נכשל

### שאלות

כל אחד מהגבולות הבאים הוא מן הסוג  $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$ .

הראו זאת והסבירו מדוע, למרות כך, כלל לופיטל אינו ישים. לבסוף, חשבו את הגבול.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (1)$$

### תשובות סופיות

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

# קלקולוס 1

## פרק 9 - חקירת פונקציה

### תוכן העניינים

108	1. מושגי יסוד
109	2. חקירת פולינום
110	3. חקירת פונקציה רציונלית
114	4. חקירת פונקציה מעריכית
117	5. חקירת פונקציה לוגריתמית
121	6. חקירת פונקציה עם שורשים
122	7. חקירת פונקציה לא גזירה - שורש וערך מוחלט
125	8. חקירת פונקציה טריגונומטרית
129	9. חקירת פונקציות טריגונומטריות הפוכות
131	10. חקירת פונקציה – שאלות כלליות
136	11. הוכחת אי שוויונות בעזרת חקירת פונקציה

## הערות

1. בשאלות החקירה בפרק זה יש לחקור לפי השלבים הבאים:
  - תחום הגדרה ורציפות.
  - נקודות חיתוך עם הצירים.
  - זוגיות ואי-זוגיות.
  - אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות.
  - תחומי עלייה וירידה.
  - נקודות קיצון.
  - תחומי קמירות וקעירות.
  - נקודות פיתול.
  - שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
2. יש האומרים על פונקציה קמורה שהיא קעורה כלפי מעלה ועל פונקציה קעורה שהיא קעורה כלפי מטה. אלה מינוחים שמקובלים בדרך כלל בתיכון.
3. ברוב המוסדות האקדמיים לומדים למצוא אסימפטוטה משופעת, שכוללת בתוכה גם את האפשרות לאסימפטוטה אופקית. יחד עם זאת, בחלק מהמוסדות לומדים רק אסימפטוטה אופקית, ולכן בכל חקירה אני מוצא גם אסימפטוטה משופעת וגם אופקית. צפו בפתרון רק בחלק ברלוונטי עבורכם.
4. בחלק מהחקירות אציין בשאלה שאין צורך לעבור על כל שלבי החקירה. שימו לב לזה.
5. אני ממליץ על תוכנה חינמית בשם Graph, שניתן להוריד [מכאן](#). בעזרתה תוכלו לשרטט כל פונקציה בקלות ולבדוק את תשובותיכם.

## חקירת פולינום

## שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 \quad (2)$$

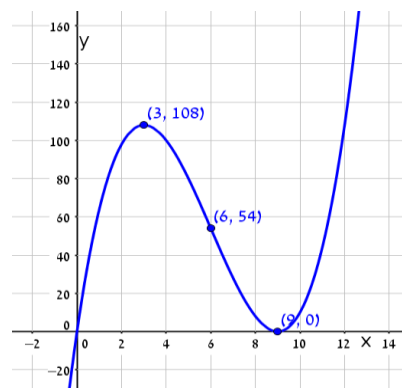
$$f(x) = x(x-9)^2 \quad (1)$$

## תשובות סופיות

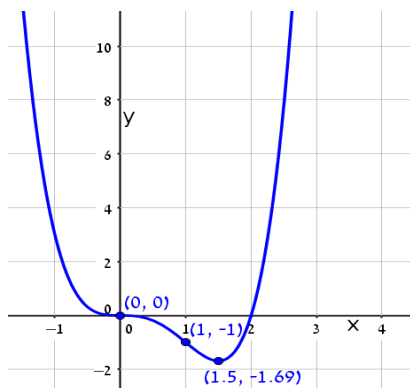
- (1) תחום הגדרה: כל  $x$ . נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ , עם ציר ה- $x$ :  $0$  ו- $9$ .  
 נקודות קיצון: מינימום:  $(9, 0)$ , מקסימום:  $(3, 108)$ .  
 תחום עלייה:  $x < 3$  or  $x > 9$ , ירידה:  $3 < x < 9$ .  
 תחום קמירות:  $x > 6$ , קעירות:  $x < 6$ .  
 נקודת פיתול:  $(6, 54)$ .
- (2) תחום הגדרה: כל  $x$ . נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ , עם ציר ה- $x$ :  $0$  ו- $1$ .  
 נקודות קיצון: מינימום:  $(1.5, \frac{-27}{16})$ .  
 תחום עלייה:  $x > 1.5$ , ירידה:  $x < 1.5$ .  
 תחום קמירות:  $x < 0$  or  $x > 1$ , קעירות:  $0 < x < 1$ .  
 נקודות פיתול:  $(0, 0)$ ,  $(1, -1)$ .

## גרפים

(1)



(2)



## חקירת פונקציה רציונלית

### שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)} \quad (6)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1} \quad (8)$$

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad (7)$$

### הערות

1. בשאלה 6 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואה ממעלה שלישית.
2. בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.
3. בשאלה 8 מצאתי רק אסימפטוטה אופקית ולא משופעת. מומלץ למצוא גם אסימפטוטה משופעת. פונקציה כמעט זהה יש בסרטון ההסבר על אסימפטוטה משופעת. בכל אופן מקבלים שם אסימפטוטה משופעת  $y = x - 1$ .

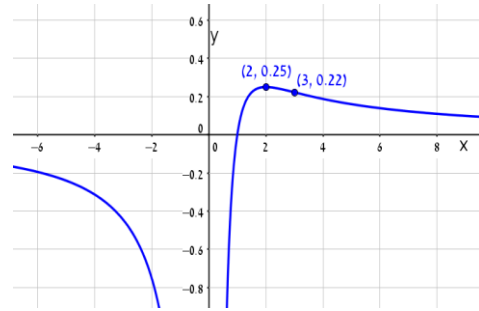
## תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 0$ . זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : 1.  
אסימפטוטה אנכית: הישר  $x=0$ , משופעת ואופקית: הישר  $y=0$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: מקסימום:  $(2, 0.25)$ . נקודת פיתול:  $\left(3, \frac{2}{9}\right)$ .  
תחום עלייה:  $0 < x < 2$ , ירידה:  $x > 2$  or  $x < 0$ .  
תחום קמירות:  $x > 3$ , קעירות:  $0 < x < 3$  or  $x < 0$ .
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq -1$ . זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : 0, עם ציר ה- $x$ : 0.  
אסימפטוטה אנכית: הישר  $x=-1$ , משופעת ואופקית: הישר  $y=2$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: מינימום:  $(0, 0)$ . נקודת פיתול:  $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{9}\right)$ .  
תחום עלייה:  $x < -1$  or  $x > 0$ , ירידה:  $-1 < x < 0$ .  
תחום קמירות:  $-1 < x < \frac{1}{2}$  or  $x < -1$ , קעירות:  $x > \frac{1}{2}$ .
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq \pm 2$ . זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : 0, עם ציר ה- $x$ : 0.  
אסימפטוטה אנכית: הישרים  $x=2$ ,  $x=-2$ , משופעת: הישר  $y=x$  ב- $\pm\infty$ ,  
אופקית: אין.  
נקודות קיצון: מינימום:  $(-\sqrt{12}, -\sqrt{27})$ , מקסימום:  $(\sqrt{12}, \sqrt{27})$ .  
תחום עלייה:  $x < -\sqrt{12}$  or  $x > \sqrt{12}$ , ירידה:  $-\sqrt{12} < x < \sqrt{12}$ ,  $x \neq \pm 2$ .  
נקודת פיתול:  $(0, 0)$ .  
תחום קמירות:  $-2 < x < 0$  or  $x > 2$ , קעירות:  $x < -2$  or  $0 < x < 2$ .
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq -1$ . זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : 0, עם ציר ה- $x$ : 0.  
אסימפטוטה אנכית: הישר  $x=-1$ , משופעת: הישר  $y=x-2$  ב- $\pm\infty$ ,  
אופקית: אין, כי הפונקציה רציונלית, שבה מעלת המונה גדולה ממעלת המכנה.  
נקודות קיצון: מקסימום:  $\left(-3, -\frac{27}{4}\right)$ .  
תחום עלייה:  $x > -1$  or  $x < -3$ , ירידה:  $-3 < x < -1$ .  
נקודת פיתול:  $(0, 0)$ .  
תחום קמירות:  $x > 0$ , קעירות:  $-1 < x < 0$  or  $x < -1$ .

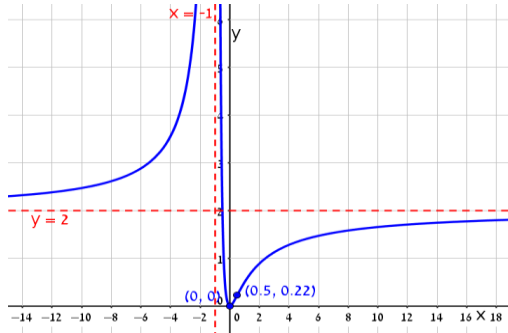
- (5) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 1$ . זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $-1$ , עם ציר ה- $x$ :  $-1$ .  
אסימפטוטה אנכית: הישר  $x=1$ , משופעת ואופקית: הישר  $y=1$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: אין; הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.  
נקודות פיתול:  $(-1,0)$ ,  $\left(-3, \frac{1}{8}\right)$ .
- תחום קמירות:  $-3 < x < -1$  &  $x > 1$ , קעירות:  $-1 < x < 1$  or  $x < -3$ .  
(6) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 2$ ,  $x \neq 5$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $y = -\frac{1}{10}$ , עם ציר ה- $x$ :  $\pm 1$ .  
אסימפטוטה אנכית: הישרים  $x=2$ ,  $x=5$ , משופעת ואופקית: הישר  $y=1$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: מקסימום:  $(2.78, -3.88)$ , מינימום:  $(0.36, -0.11)$ .  
תחום עלייה:  $0.36 < x < 2$  or  $2 < x < 2.78$ ,  
ירידה:  $x < 0.36$  or  $2.78 < x < 5$  or  $x > 5$ . נקודת פיתול:  $(-1,0)$ .  
תחום קמירות:  $-1 < x < 2$  or  $x > 5$ , קעירות:  $2 < x < 5$  or  $x < -1$ .  
(7) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq \pm 2$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $y = -\frac{3}{4}$ , עם ציר ה- $x$ :  $x=1$ ,  $x=3$ .  
אסימפטוטה אנכית: הישרים  $x=2$ ,  $x=-2$ , משופעת ואופקית: הישר  $y=1$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: אין; כי למשוואה הריבועית שקיבלנו אין פתרון.  
תחום עלייה: הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.  
נקודת פיתול:  $(0.85, -0.09)$ .  
תחום קמירות:  $0.85 < x < 2$  or  $x < -2$ , קעירות:  $-2 < x < 0.85$  or  $x > 2$ .  
(8) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 1$ ,  $x \neq -1$ .  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ , עם ציר ה- $x$ :  $0$ .  
אסימפטוטה אופקית: אין, אנכית: הישר  $x=-1$ .  
נקודות קיצון: מקסימום:  $(-2, -4)$ , מינימום:  $(0, 0)$ .  
תחום עלייה:  $x < -2$  or  $0 < x < 1$  or  $x > 1$ , ירידה:  $-1 < x < 0$  or  $-2 < x < -1$ .  
נקודת פיתול: אין.  
תחום קמירות:  $-1 < x < 1$  or  $x > 1$ , קעירות:  $x < -1$ .

גרפים

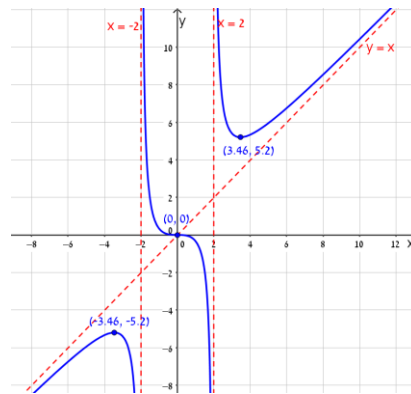
(1)



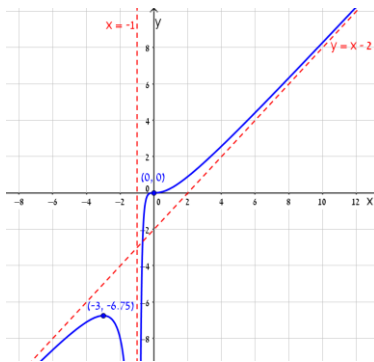
(2)



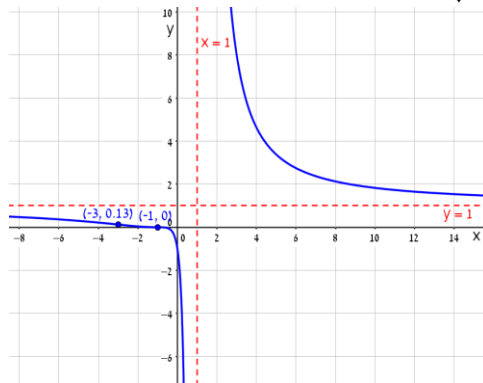
(3)



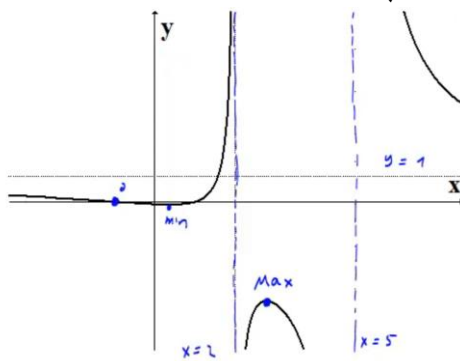
(4)



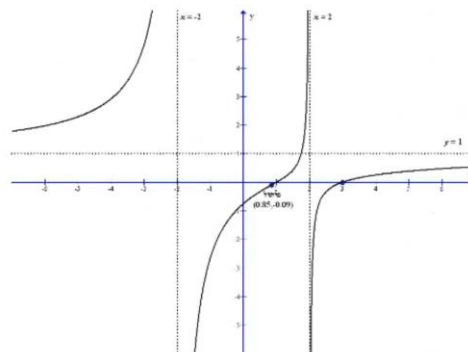
(5)



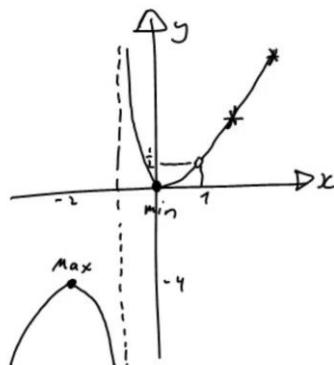
(6)



(7)



(8)



## חקירת פונקציה מעריכית

### שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = x - e^x \quad (1)$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (2)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (3)$$

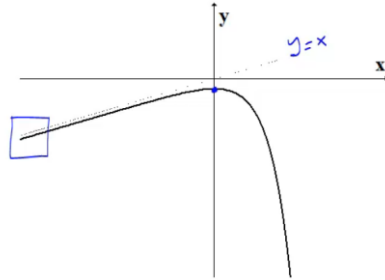
$$f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (4)$$

## תשובות סופיות

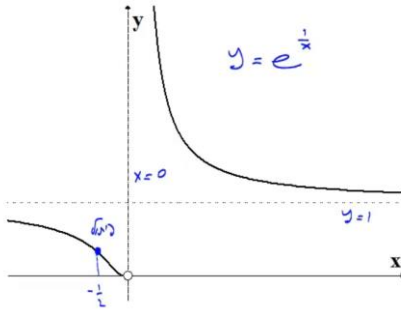
- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $-1$ , עם ציר ה- $x$ : אין (ראו בהרחבה בסרטון).  
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: הישר  $y=x$  ב- $-\infty$  בלבד.  
נקודות קיצון: מקסימום:  $(0, -1)$ . תחום עלייה:  $x < 0$ , ירידה:  $x > 0$ .  
נקודת פיתול: אין. תחום קמירות: קעורה לכל  $x$ .
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 0$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : אין.  
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית):  $x=0$ , משופעת ואופקית: הישר  $y=1$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: אין.  
תחום עלייה וירידה: הפונקציה יורדת בתחום הגדרתה.  
נקודת פיתול:  $(-0.5, e^{-2})$ .  
תחום קמירות:  $x > 0$  or  $-0.5 < x < 0$ , תחום קעירות:  $x < -0.5$ .
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 0$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ :  $-2$ .  
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית):  $x=0$ , משופעת: הישר  $y=x+3$  ב- $\pm\infty$ .  
אופקית: אין. נקודות קיצון: מקסימום:  $(-1, e^{-1})$ , מינימום:  $(2, 4e^{\frac{1}{2}})$ .  
תחום עלייה:  $x > 2$  or  $x < -1$ , ירידה:  $-1 < x < 0$  or  $0 < x < 2$ .  
נקודת פיתול:  $(-0.4, 1.6e^{-2.5})$ .  
תחום קמירות:  $x > 0$  or  $-0.4 < x < 0$ , תחום קעירות:  $x < -0.4$ .
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ . זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ , עם ציר ה- $x$ :  $0$ .  
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת (אופקית): הישר  $y=0$  ב- $\pm\infty$ .  
נקודות קיצון: מקסימום:  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$ , מינימום:  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$ .  
תחום עלייה:  $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ , ירידה:  $x > \frac{1}{2}$  or  $x < -\frac{1}{2}$ .  
נקודות פיתול:  $(0, 0)$ ,  $(-\sqrt{\frac{3}{4}}, -\sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5})$ ,  $(\sqrt{\frac{3}{4}}, \sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5})$ .  
תחום קמירות:  $x > \sqrt{\frac{3}{4}}$  or  $-\sqrt{\frac{3}{4}} < x < 0$ , תחום קעירות:  
 $x < -\sqrt{\frac{3}{4}}$  or  $0 < x < \sqrt{\frac{3}{4}}$ .

## גרפים

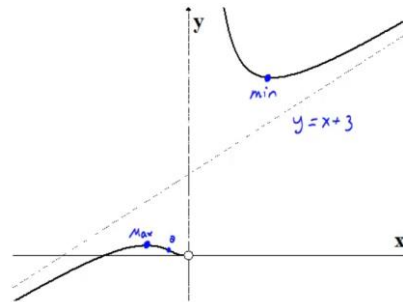
(1)



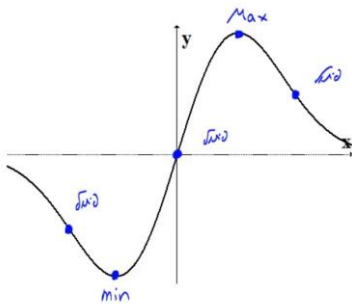
(2)



(3)



(4)



## חקירת פונקציה לוגריתמית

### שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (3)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (4)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (5)$$

$$f(x) = 4 \ln^2 x - 4 \ln x - 3 \quad (6)$$

$$f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (7)$$

### הערה

בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.

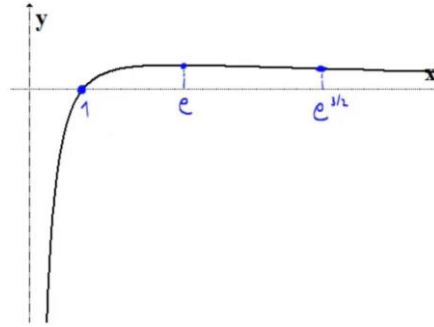
## תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x > 0$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : 1.  
אסימפטוטה אנכית: הישר  $x = 0$ , משופעת ואופקית: הישר  $y = 0$  ב- $\infty$ .  
נקודות קיצון: מקסימום:  $\left(e, \frac{1}{e}\right)$ .  
תחום עלייה:  $0 < x < e$ , ירידה:  $x > e$ .  
נקודת פיתול:  $\left(e^{1.5}, \frac{1.5}{e^{1.5}}\right)$ .  
תחום קמירות:  $x > e^{1.5}$ , קעירות:  $0 < x < e^{1.5}$ .
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x > 0$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : 1.  
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): הישר  $x = 0$ ,  
משופעת ואופקית: הישר  $y = 0$  ב- $\infty$ .  
נקודות קיצון: מקסימום:  $\left(e^2, \frac{2}{e}\right)$ .  
תחום עלייה:  $0 < x < e^2$ , ירידה:  $x > e^2$ .  
נקודת פיתול:  $\left(e^{\frac{8}{3}}, \frac{\frac{8}{3}}{\sqrt{e^{\frac{8}{3}}}}\right)$ .  
תחום קמירות:  $0 < x < e^{\frac{8}{3}}$ , קעירות:  $x > e^{\frac{8}{3}}$ .
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x < 2$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $y = -\frac{1}{2} \ln 2$ , עם ציר ה- $x$ : 1.  
אסימפטוטה אנכית: הישר  $x = 2$ , משופעת: אין.  
נקודות קיצון: אין.  
תחום עלייה: עולה בכל תחום הגדרתה.  
נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x > 0$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : 1.  
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: אין.  
נקודות קיצון: מינימום:  $(e^{-1}, -e^{-1})$ .  
תחום עלייה:  $x > e^{-1}$ , ירידה:  $0 < x < e^{-1}$ .  
נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.

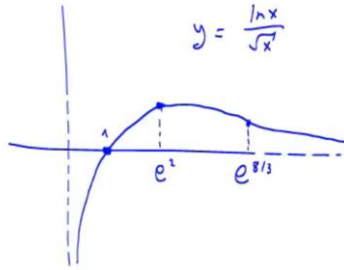
- (5) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x > 0$ . זוגיות: כללית.  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ :  $x = e^1$ ,  $x = e^{-3}$ .  
 אסימפטוטה אנכית:  $x = 0$ , משופעת ואופקית: אין.  
 נקודות קיצון: מינימום:  $(e^{-1}, -4)$ .  
 תחום עלייה:  $x > e^{-1}$ , ירידה:  $0 < x < e^{-1}$ .  
 נקודת פיתול:  $(1, -3)$ . תחום קמירות:  $x > 1$ , קעירות:  $0 < x < 1$ .
- (6) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x > 0$ . זוגיות: כללית.  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ :  $x = e^{1.5}$ ,  $x = e^{-0.5}$ .  
 אסימפטוטה אנכית:  $x = 0$ , משופעת ואופקית: אין.  
 נקודות קיצון: מינימום:  $(e^{\frac{1}{2}}, -4)$ .  
 תחום עלייה:  $x > e^{\frac{1}{2}}$ , ירידה:  $0 < x < e^{\frac{1}{2}}$ .  
 נקודת פיתול:  $(e^{1.5}, 0)$ . תחום קמירות:  $0 < x < 1.5$ , קעירות:  $x > 1.5$ .
- (7) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ . זוגיות: כללית.  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : אין, עם ציר ה- $x$ : אין.  
 אסימפטוטה אנכית:  $x = 1$ , משופעת ואופקית: אין.  
 נקודות קיצון: מינימום:  $(e^{-1}, 2)$ ,  $(e, 2)$ .  
 תחום עלייה:  $x > e$  or  $e^{-1} < x < 1$ , ירידה:  $1 < x < e$  or  $x < e^{-1}$ .  
 נקודת פיתול:  $(5.15, 3.06)$ .  
 תחום קמירות:  $1 < x < 5.15$  or  $0 < x < 1$ , קעירות:  $x > 5.15$ .

## גרפים

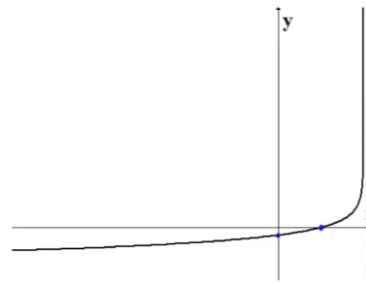
(1)



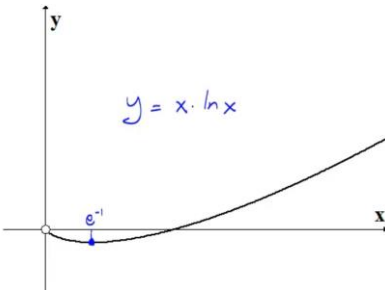
(2)



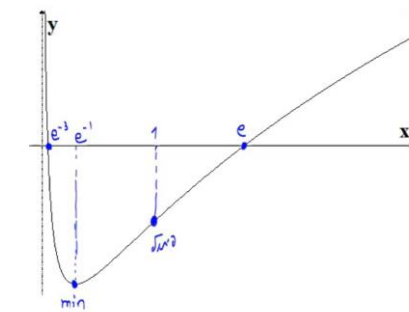
(3)



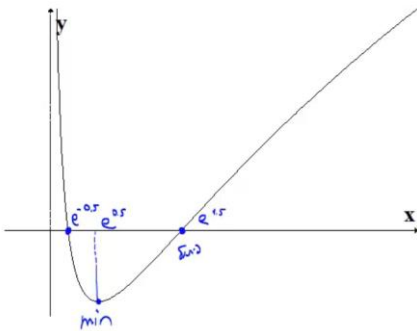
(4)



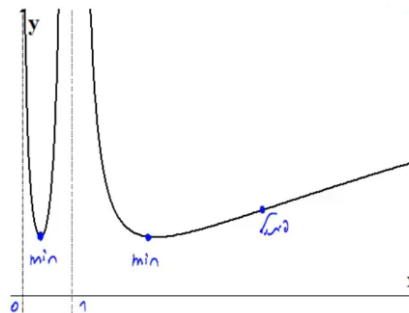
(5)



(6)



(7)



## חקירת פונקציה עם שורשים

### שאלה

(1) חקור את הפונקציה הבאה חקירה מלאה:  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ .

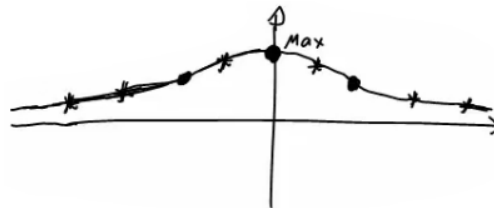
### תשובה

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ .  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ : 1, עם ציר ה- $x$ : אין.  
 אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית:  $y = 0$ .  
 נקודות קיצון: מקסימום:  $(0,1)$ . תחום עלייה:  $x < 0$ , ירידה:  $x > 0$ .

נקודות פיתול:  $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right), \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$

תחום קמירות:  $x < -\sqrt{\frac{1}{2}}$  or  $x < \sqrt{\frac{1}{2}}$ , קעירות:  $-\sqrt{\frac{1}{2}} < x < \sqrt{\frac{1}{2}}$

גרף:



## חקירת פונקציה לא גזירה – שורש וערך מוחלט

### שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x) = x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}} \quad (1)$$

$$f(x) = (\sqrt[3]{x^2} - 1)^2 \quad (2)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (3)$$

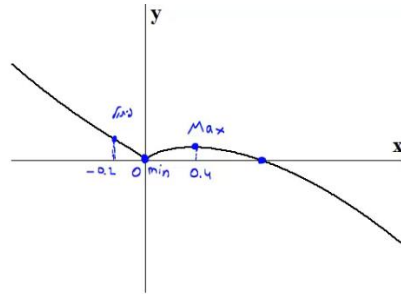
$$f(x) = \frac{|x-3|}{x-2} \quad (4)$$

## תשובות סופיות

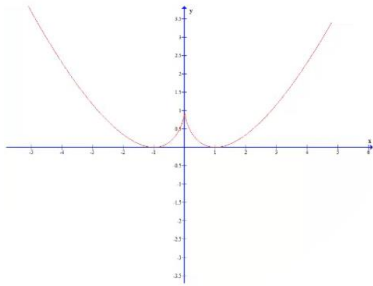
- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ , עם ציר ה- $x$ :  $0$  או  $1$ .  
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.  
נקודות קיצון: מקסימום:  $\left(\frac{2}{5}, 0.326\right)$ , מינימום:  $(0, 0)$ .  
תחום עלייה:  $0 < x < \frac{2}{5}$ , ירידה:  $x < 0$  or  $x > \frac{2}{5}$ .  
נקודות פיתול:  $(-0.2, 0.41)$ .  
תחום קמירות:  $x < -0.2$ , קעירות:  $-0.2 < x < 0$  or  $x > 0$ .
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ .  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $1$ , עם ציר ה- $x$ :  $-1$  או  $1$ .  
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.  
נקודות קיצון: מקסימום:  $(0, 1)$ , מינימום:  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$ .  
תחום עלייה:  $-1 < x < 0$  or  $x > 1$ , ירידה:  $x < -1$  or  $0 < x < 1$ .  
נקודות פיתול: אין.  
תחום קמירות: קמורה לכל  $x$ .  
תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ . זוגיות: זוגית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $-1$ , עם ציר ה- $x$ :  $\pm 1$ .  
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.  
נקודות קיצון: מינימום:  $(0, -1)$ .  
תחום עלייה:  $0 < x < 1$  or  $x > 1$ , ירידה:  $x < -1$  or  $-1 < x < 0$ .  
נקודות פיתול:  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$ .  
תחום קמירות:  $-1 < x < 1$ , קעירות:  $x > 1$  or  $x < -1$ .
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x \neq 2$ . זוגיות: כללית.  
נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $-1.5$ , עם ציר ה- $x$ :  $3$ .  
אסימפטוטה אנכית: הישר  $x = 2$ ,  
משופעת ואופקית: הישר  $y = 1$  ב- $\infty$ , ו- $y = -1$  ב- $-\infty$ .  
נקודות קיצון: מינימום:  $(3, 0)$ .  
תחום עלייה:  $x > 3$ , ירידה:  $2 < x < 3$  or  $x < 2$ .  
נקודות פיתול:  $(3, 0)$ .  
תחום קמירות:  $2 < x < 3$ , קעירות:  $x > 3$  or  $x < 2$ .

## גרפים

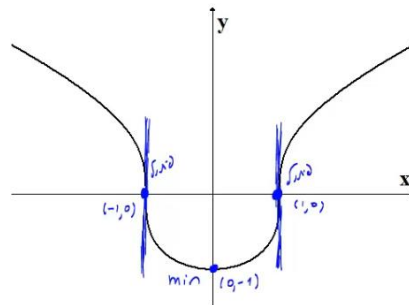
(1)



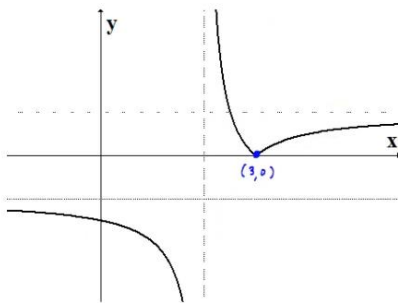
(2)



(3)



(4)



## חקירת פונקציה טריגונומטרית

### שאלות

(1) נתונה הפונקציה:  $f(x) = x + 2\cos x$  בתחום  $[0, 2\pi]$ .  
חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- מציאת נקודות פיתול.
- מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(2) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 4x - 3\tan x$  בתחום  $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ .

- חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
  - מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
  - תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
  - מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
  - מציאת אסימפטוטות אנכיות.
  - מציאת נקודות פיתול.
  - מציאת תחומי קעירות כלפי מעלה ומטה.
  - שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(3) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$  בתחום  $[0, \pi]$ .  
חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  בתחום הנתון.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(4) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \cos^2 x - \cos x - 2$  בתחום:  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(5) נתונה הפונקציה הבאה:  $y = (\sin x + 1) \cdot \cos x$  בתחום:  $0 \leq x \leq 1.5\pi$ .

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- כמה פתרונות יש למשוואה:  $\cos x \cdot (\sin x + 1) = 1$  בתחום הנתון?

(6) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$ .

- מצא את נקודות החיתוך עם הצירים ואת נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום  $[0, \pi]$ .
- הוכח שהפונקציה זוגית.
- שרטט את הפונקציה בתחום  $[-\pi, \pi]$ .

(7) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \tan 2x - 8 \sin 2x$  בתחום:  $-0.25\pi < x < 0.25\pi$ .

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
- כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה בתחום הנתון.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$[0, 2\pi], \quad f(x) = 8 \cos x + 2 \cos 2x - 3 \quad (8)$$

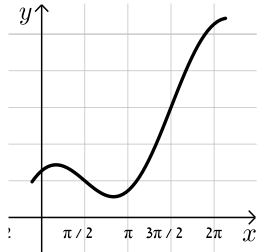
$$[0, \pi], \quad f(x) = 2 \cos^2 x - \sin 2x \quad (9)$$

תשובות סופיות

1 א.  $0 < x < 2\pi$ .

ב.  $\max(2\pi, 2\pi + 2)$  קצה,  $\min\left(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}\right)$ ,  $\max\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)$ ,  $\min(0, 2)$  קצה.

ג. תחומי עלייה:  $\frac{5\pi}{6} < x < 2\pi$  או  $0 < x < \frac{\pi}{6}$ , תחומי ירידה:  $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ .



ד.  $(0, 2)$ . ה. אין. ו.  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ .

ז. קעירות כלפי מעלה:  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ .

קעירות כלפי מטה:  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  או  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ .

2 א.  $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$  וגם  $x \neq \frac{\pi}{2}$ .

ב.  $\min\left(\frac{2}{3}\pi, 13.57\right)$  קצה,  $\max\left(\frac{\pi}{6}, 0.36\right)$ ,  $\min\left(-\frac{\pi}{6}, -0.36\right)$  קצה.

ג. תחומי עלייה:  $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ , תחומי ירידה:  $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$  וגם  $x \neq \frac{\pi}{2}$ .



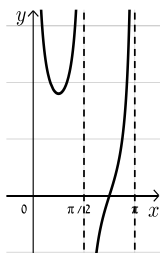
ד.  $(0, 0)$ . ה. אנכית:  $x = \frac{\pi}{2}$ . ו.  $(0, 0)$ .

ז. קעירות כלפי מעלה:  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$  או  $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq 0$ .

קעירות כלפי מטה:  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .

3 א.  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ;  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ . ב.  $\min\left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right)$ .

ג. תחומי עלייה:  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ,  $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ , תחומי ירידה:  $0 < x < \frac{\pi}{4}$ .

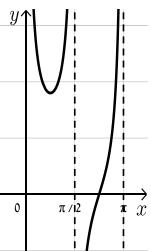


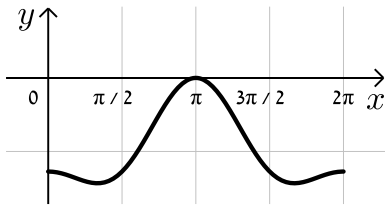
ד.  $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$ . ה. אנכית:  $x = \pi, x = \frac{\pi}{2}, x = 0$ .

4 א.  $(\pi, 0), (0, -2)$ .

ב.  $\max\left(1\frac{2}{3}\pi, -2.25\right), \max(2\pi, -2), \max(0, -2), \min\left(\frac{\pi}{3}, -2.25\right), \max(\pi, 0)$ .

ג. עולה:  $1\frac{2}{3}\pi < x < 2\pi$ ,  $\frac{\pi}{3} < x < \pi$ , יורדת:  $\pi < x < 1\frac{2}{3}\pi$ , גרף:  $0 < x < \frac{\pi}{3}$ .

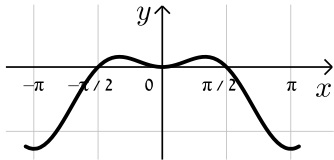




5 א.  $(\frac{\pi}{2}, 0)$ ,  $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ ,  $(0, 1)$

ב.  $(0, 1)$ ,  $(\frac{\pi}{6}, 1.29)$ ,  $(\frac{5\pi}{6}, -1.29)$ ,  $(1.5\pi, 0)$

ד. 2 פתרונות.

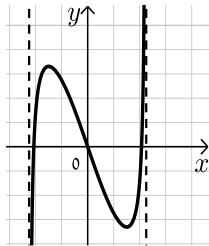


6 א. חיתוך:  $(0, 0)$ ,  $(\frac{\pi}{2}, 0)$ ; קיצון:  $\min(\pi, -2)$  קצה,

$\min(0, 0)$ ,  $\max(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4})$  קצה.

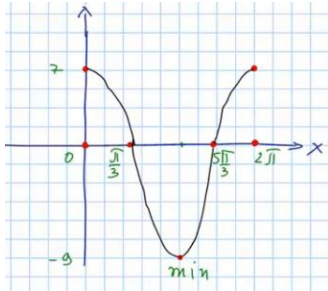
7 א.  $(0, 0)$ ,  $(\pm 0.23\pi, 0)$  ב.  $x = \pm 0.25\pi$

ג.  $\min(\frac{\pi}{6}, -\sqrt{27})$ ,  $\max(-\frac{\pi}{6}, \sqrt{27})$



8 נקודות חיתוך עם ציר ה-y: 7, עם ציר ה-x:  $x = \frac{\pi}{3}$ ,  $x = \frac{5\pi}{3}$ ,  $x = 7$

נקודות קיצון: מינימום:  $(\pi, -9)$ , מקסימום:  $(0, 7)$ ,  $(2\pi, 7)$



נקודות פיתול:  $x = \frac{\pi}{3}$ ,  $x = \frac{5\pi}{3}$

תחום קמירות:  $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$

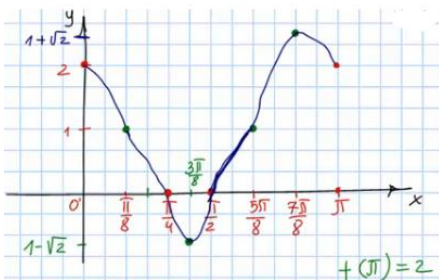
קעירות:  $0 < x < \frac{\pi}{3}$  or  $\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$

תחום עלייה:  $x > 3$ , ירידה:  $x < 2$  or  $2 < x < 3$

9 נקודות חיתוך עם ציר ה-y: 2, עם ציר ה-x:  $x = \frac{\pi}{4}$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$

נקודות קיצון: מינימום:  $(\frac{3\pi}{8}, 1 - \sqrt{2})$ , מקסימום:  $(\frac{7\pi}{8}, 1 + \sqrt{2})$

תחום עלייה:  $\frac{3\pi}{8} < x < \frac{7\pi}{8}$ , ירידה:  $0 < x < \frac{3\pi}{8}$  or  $\frac{7\pi}{8} < x < \pi$



נקודות פיתול:  $(\frac{\pi}{8}, 1)$ ,  $(\frac{5\pi}{8}, 1)$

תחום קמירות:  $\frac{\pi}{8} < x < \frac{5\pi}{8}$

קעירות:  $0 < x < \frac{\pi}{8}$  or  $\frac{5\pi}{8} < x < \pi$

## חקירת פונקציות טריגונומטריות הפוכות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

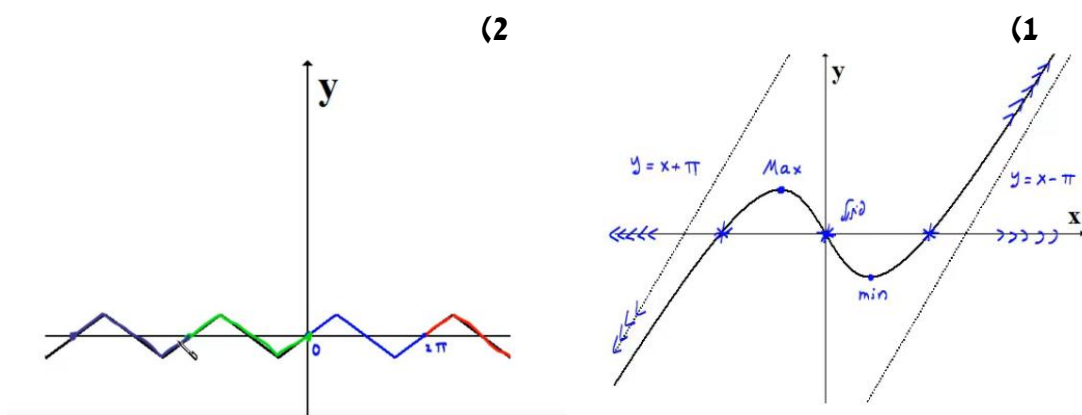
$$f(x) = \arcsin(\sin x) \quad (2)$$

$$f(x) = x - 2 \arctan x \quad (1)$$

## תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ . זוגיות: אי-זוגית.  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ .  
 אסימפטוטה אנכית: אין,  
 משופעת: הישר  $y = x + \pi$  ב- $-\infty$ , אופקית: אין.  
 נקודות קיצון: מקסימום:  $(-1, 0.575)$ , מינימום:  $(1, -0.575)$ .  
 תחום עלייה:  $x < -1$  or  $x > 1$ , ירידה:  $-1 < x < 1$ .  
 נקודות פיתול:  $(0, 0)$ .  
 תחום קמירות:  $x > 0$ , קעירות:  $x < 0$ .
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל  $x$ . זוגיות: אי-זוגית.  
 מחזוריות: כן, ממחזור  $2\pi$ .  
 נקודות חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $0$ , עם ציר ה- $x$ :  $x = 0, \pi, 2\pi$ .  
 אסימפטוטה אנכית: אין,  
 משופעת: הישר  $y = x + \pi$  ב- $-\infty$ , אופקית: אין.  
 נקודות קיצון: מקסימום:  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , מינימום:  $(\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ .  
 תחום עלייה:  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  or  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ , ירידה:  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ .  
 נקודות פיתול: אין.

## גרפים



## חקירת פונקציה – שאלות כלליות

### שאלות

(1) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + x^2$ , וידוע שהנקודה  $x = 1$  נקודת קיצון. מצאו את הקבוע  $a$ .

(2) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + bx^2$ , וידוע שהנקודה  $(1, 2)$  נקודת קיצון. מצאו את הקבועים  $a, b$ .

(3) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + x^2$ , וידוע שהנקודה  $x = 1$  נקודת פיתול. מצאו את הקבוע  $a$ .

(4) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + bx^2$ , וידוע שהנקודה  $(1, 2)$  נקודת פיתול. מצאו את הקבועים  $a, b$ .

(5) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + x^2$ . שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $x = 3$  הוא 33. מצאו את  $a$ .

(6) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + bx^2$ . שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $(3, 9)$  הוא 12. מצאו את  $a, b$ .

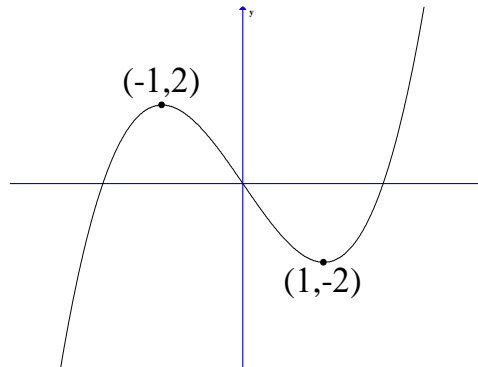
(7) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{ax^3 + x^2}{2x^3 + x + 6}$ . ידוע שהישר  $y = 4$  אסימפטוטה לגרף הפונקציה. מצאו את  $a$ .

(8) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 4}{x}$ . ידוע שהישר  $y = 0.5x + 1$  אסימפטוטה לגרף הפונקציה. מצאו את  $a$  ואת  $b$ .

9 נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + ax + 6}$

ידוע שהישר  $x=1$  אסימפטוטה לגרף הפונקציה.  
מצאו את  $a$ .

שאלות 10-17 מתייחסות לגרף הפונקציה  $f(x) = x^3 - 3x$ :



10 מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $f(x) = 5$ ?

11 מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $f(x) = 2$ ?

12 מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $f(x) = 0.5$ ?

13 עבור איזה ערך של  $k$ , למשוואה  $f(x) = k$  יש בדיוק פתרון אחד?

14 עבור איזה ערך של  $k$ , למשוואה  $f(x) = k$  יש בדיוק שני פתרונות?

15 עבור איזה ערך של  $k$ , למשוואה  $f(x) = k$  יש בדיוק שלושה פתרונות?

16 האם קיים ערך של  $k$ , עבורו למשוואה  $f(x) = k$  אין פתרון?

17 מצאו את התחומים בהם הפונקציה חח"ע.

18 נתונה פונקציה  $f(x)$  המקיימת  $f'(2) = 4$ .

נגדיר פונקציה חדשה  $z(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ .

א. חשבו  $z'(0.5)$ .

ב. נתון בנוסף כי  $f$  עולה. הוכיחו כי  $z$  יורדת.

**19** נתונה פונקציה  $f(x)$  המקיימת  $f(1) = 2, f'(1) = e$ .

$$z(x) = f^2(\ln x) + \frac{1}{x}$$

- א. האם  $z$  עולה או יורדת בנקודה  $x = e$ ?  
 ב. נתון בנוסף כי  $f$  שלילית ועולה.  
 מה ניתן לומר על תחומי העלייה והירידה של  $z$ ?

**20** נתונה פונקציה  $f(x)$  חיובית ויורדת.

$$z(x) = \sqrt{f(x^2) + 4}$$

מי מהבאים בהכרח נכון?

- א.  $z$  עולה לכל  $x$ .  
 ב.  $z$  יורדת לכל  $x$ .  
 ג.  $z$  עולה לכל  $x > 0$ .  
 ד.  $z$  יורדת לכל  $x > 0$ .

**21** נתונה פונקציה  $f(x)$ , המקיימת  $f'(1) = e$ .

$$g(x) = x^2 + f(\ln x)$$

- א. חשבו את  $g'(e)$ .  
 ב. הוכיחו שהפונקציה  $g$  עולה בנקודה  $x = e$ .

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(e+h) - g(e)}{h}$$

**22** הפונקציה  $f(x)$  היא אי-זוגית.

- ידוע שנקודת החיתוך היחידה של  $f(x)$  עם ציר ה- $x$  היא ב- $x = 0$ .  
 נגדיר  $g(x) = (f(x))^2$ . איזו מבין הטענות הבאות בהכרח לא נכונה:  
 א. אם  $f$  עולה בכל תחום הגדרתה אז ל- $g$  יש נקודת מינימום.  
 ב. אם  $f$  יורדת בכל תחום הגדרתה אז ל- $g$  יש נקודת מינימום.  
 ג. אם  $f$  עולה בכל תחום הגדרתה אז ל- $g$  אין נקודת קיצון.

**(23)** הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת וגזירה פעמיים לכל  $x$  ומקיימת  $f''(x) = a \cdot f(x)$ , כאשר  $a < 0$ .

איזו מבין הטענות הבאות בהכרח לא נכונה:

- א. בתחום בו  $f(x)$  שלילית,  $f(x)$  קמורה (קעורה כלפי מעלה).
- ב. אם  $f(x)$  חיובית בתחום מסוים אז  $f'(x)$  יורדת באותו התחום.
- ג. אם בתחום מסוים  $f(x)$  עולה וחותכת את ציר  $x$  בנקודה  $(n, 0)$ , אז שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $x = n$  הוא המקסימלי באותו התחום.
- ד. אם לפונקציה  $f(x)$  יש נקודת פיתול אז  $f(x)$  שלילית בכל תחום הגדרתה.

**תשובות סופיות**

$$a = -\frac{2}{3} \quad (1)$$

$$a = -4, b = 6 \quad (2)$$

$$a = -\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$a = -1, b = 3 \quad (4)$$

$$a = 1 \quad (5)$$

$$a = \frac{2}{3}, b = -1 \quad (6)$$

$$a = 8 \quad (7)$$

$$a = \frac{1}{2}, b = 1 \quad (8)$$

$$a = -7 \quad (9)$$

$$1 \quad (10)$$

$$2 \quad (11)$$

$$3 \quad (12)$$

$$k < -2, k > 2 \quad (13)$$

$$k = \pm 2 \quad (14)$$

$$-2 < k < 2 \quad (15)$$

$$\text{לא} \quad (16)$$

$$x < -1, -1 < x < 1, x > 1 \quad (17)$$

$$z'(0.5) = -16 \quad \text{א.} \quad \text{ב. שאלת הוכחה.} \quad (18)$$

$$\text{א. עולה.} \quad \text{ב. יורדת.} \quad (19)$$

$$\text{ד} \quad (20)$$

$$2e+1 \quad \text{א.} \quad \text{ב. שאלת הוכחה.} \quad \text{ג.} \quad 2e+1 \quad (21)$$

$$\text{ג} \quad (22)$$

$$\text{ד} \quad (23)$$

## הוכחת אי שוויונות בעזרת חקירת פונקציה

### שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים לגבי התחום הרשום לידם:

$$(-\infty < x < \infty), \quad 8x^3 \leq 3x^4 + 6x^2 \quad (1)$$

$$\left(0 < x < \frac{\pi}{3}\right), \quad x < 2 \sin x \quad (2)$$

$$(x > 0), \quad \sqrt{x+1} < 1 + \frac{x}{2} \quad (3)$$

$$(x \geq 0), \quad \ln(x+1) \leq x \quad (4)$$

(5) נתון כי  $f$  רציפה לכל  $x \geq 0$ ,  $f'(x) > 0$  לכל  $x > 0$ , וכן  $f(0) = 0$ .

הוכיחו כי לכל  $x > 0$  מתקיים  $f(x) - \frac{1}{2}(f(x))^2 < \ln(1 + f(x))$ .

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

# קלקולוס 1

פרק 10 - מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה

תוכן העניינים

1. מציאת מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה ..... 137
2. שאלות המשלבות קיצון מוחלט עם קיצון מקומי ..... 140
3. הוכחת אי שוויונים ..... 141

## מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה

---

### שאלות

בשאלות 7-1 מצאו את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציות, בתחומים הרשומים לידן (אם יש כאלה):

$$(-1 \leq x \leq 3) \quad f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x \quad (1)$$

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5} \quad (2)$$

$$(-1 \leq x \leq 20) \quad f(x) = x^{\frac{2}{3}}(20 - x) \quad (3)$$

$$\left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right] \quad f(x) = \begin{cases} 4x - 2 & x < 1 \\ (x - 2)(x - 3) & x \geq 1 \end{cases} \quad (4)$$

$$(-5 \leq x \leq 1) \quad f(x) = 1 + |9 - x^2| \quad (5)$$

$$(-5 < x < -1) \quad f(x) = \frac{x^2}{x + 1} \quad (6)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad f(x) = x^3 - 9x + 1 \quad (7)$$

$$\text{נתונה הפונקציה } f(x) = x^x \text{ בתחום } x > 0. \quad (8)$$

א. מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של הפונקציה בתחום הנתון.

ב. דני טוען שהפונקציה הפיכה בקטע  $(0, 0.5)$ . הוכיחו שדני טועה.

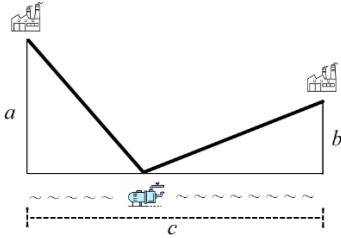
$$\text{מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של הפונקציה } f(x) = x^2 + |\ln x| \quad (9)$$

(10) מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של  $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$  ב- $\mathbb{R}$ . הערה: אין להשתמש בנגזרות בתרגיל זה.

**11** מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של  $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ ,

ב-  $\mathbb{R}$  וב-  $[1, 3]$ .

הערה: אין להשתמש בנגזרות בתרגיל זה.



**12** לחברת מי עדן יש שני מפעלים.

האחד מרוחק  $a$  ק"מ מהמעיין.

השני מרוחק  $b$  ק"מ מהמעיין.

המרחק האופקי בין המפעלים הוא  $c$  ק"מ.

החברה מעוניינת להקים תחנת שאיבה במעיין

בין שני המפעלים. התחנה מחוברת למפעלים.

מהו האורך המינימלי של צינורות שאיבה שהחברה תצטרך?

הראו שהאורך המינימלי מתקבל כאשר הזווית בין כל צינור למעיין שוות.

**13** גליל חסום בכדור.

הוכיחו, מבין כל הגלילים האפשריים הגדול ביותר בנפחו הוא זה שגובהו פי

$\sqrt{2}$  מרדיוס הבסיס שלו.

## תשובות סופיות

- (1)  $(-1, -7)$  מינימום מוחלט,  $(3, 9)$  מקסימום מוחלט.
- (2)  $(-1, 0)$  מינימום מוחלט,  $(5, 0)$  מינימום מוחלט,  $(2, 3)$  מקסימום מוחלט.
- (3)  $(0, 0)$  מינימום מוחלט,  $(20, 0)$  מינימום מוחלט,  $(8, 48)$  מקסימום מוחלט.
- (4)  $(2.5, -0.25)$  מינימום מוחלט,  $(1, 2)$  מקסימום מוחלט.
- (5)  $(-3, 1)$  מינימום מוחלט,  $(-5, 17)$  מקסימום מוחלט.
- (6)  $(-2, -4)$  מקסימום מוחלט. אין מינימום מוחלט.
- (7) אין מקסימום ואין מינימום מוחלטים.
- (8) א. אין מקסימום מוחלט. מינימום מוחלט הוא  $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ . ב. שאלת הוכחה.
- (9) אין מקסימום מוחלט. מינימום מוחלט  $0.5(1 + \ln 2)$ .
- (10) מקסימום מוחלט 1, מינימום מוחלט  $\frac{1}{2}$ .
- (11) ב-  $\mathbb{R}$ :  $(3, 0)$ ,  $(1, 0)$  מינימום מוחלט, מקסימום מוחלט לא קיים.
- ב-  $[1, 3]$ :  $(3, 0)$ ,  $(1, 0)$  מינימום מוחלט,  $(2, 1)$  מקסימום מוחלט.
- (12) האורך המינימלי של צינורות שאיבה שהחברה תצטרך הוא  $\sqrt{(a+b)^2 + c^2}$ .
- (13) שאלת הוכחה.

## שאלות המשלבות קיצון מוחלט עם קיצון מקומי

### שאלות

- (1) תהי  $f$  פונקציה רציפה ב- $[a, b]$  וגזירה ב- $(a, b)$ .  
 נניח שקיימת נקודה  $c \in (a, b)$ , כך ש- $(f(c) - f(a))(f(b) - f(c)) < 0$ .  
 הוכיחו כי קיימת נקודה  $d \in (a, b)$ , כך ש- $f'(d) = 0$ .
- (2) פונקציה  $f(x)$  גזירה פעמיים בקטע  $[a, b]$ .  
 וידוע כי  $f(x)$  מקיימת  $f''(x) = f(x) - f'(x)$  לכל  $x$ , וכן  $f(a) = f(b) = 0$ .  
 הוכיחו כי  $f(x) = 0$  לכל  $x$  בקטע.
- (3) הפונקציה  $f$  גזירה פעמיים ומקיימת  $f''(x) + f'(x)g(x) - f(x) = 0$  עבור פונקציה  $g$  מסוימת.  
 הוכיחו: אם הפונקציה  $f$  מקבלת את הערך 0 בשתי נקודות, אז היא שווה אפס בכל הקטע בין הנקודות.
- (4) תהי  $f$  פונקציה רציפה בקטע  $[a, b]$  וגזירה פעמיים בקטע  $(a, b)$ , כך ש-  
 $f''(x) < 0$  בקטע זה.  
 נתון כי  $f(a) = f(b) = 0$ .  
 א. הוכיחו כי  $f(x) > 0$  בקטע  $(a, b)$ .  
 ב. האם סעיף א' נשאר נכון אם מורידים את דרישת הרציפות? הוכיחו או הפריכו.

### תשובות סופיות

- (1) שאלת הוכחה.  
 (2) שאלת הוכחה.  
 (3) שאלת הוכחה.  
 (4) שאלת הוכחה.

## הוכחת אי שוויונים

---

### שאלות

בשאלות 1-3 הוכיחו את אי-השוויונים שמימין, לגבי התחום שבסוגריים משמאל:

$$(1) \quad x^3 e^{-x} \leq \frac{27}{e^3} \quad (x \text{ לכל } x)$$

$$(2) \quad x e^{-\sqrt{x}} \leq 1 \quad (x \geq 0)$$

$$(3) \quad 0 \leq x^2 e^{x-1} \leq 1 \quad (x \leq 1)$$

(4) יהיו  $a$  ו- $b$  מספרים חיוביים. הוכיחו שאי-השוויונים הבאים לא יכולים להתקיים בעת ובעונה אחת:

$$(1) \quad a(1-b) > \frac{1}{4}, \quad (2) \quad b(1-a) > \frac{1}{4}$$

**הערת סימון:**  $[a, b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b$  ;  $(a, b) \Leftrightarrow a < x < b$  ;  $[a, b) \Leftrightarrow a \leq x < b$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

# קלקולוס 1

פרק 11 - בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון)

תוכן העניינים

142	1. הסבר כללי על בעיות קיצון
143	2. בעיות קיצון יסודיות עם מספרים
144	3. בעיות קיצון בהנדסת המישור
148	4. בעיות קיצון בפונקציות וגרפים
152	5. בעיות קיצון בהנדסת המרחב
154	6. בעיות קיצון עם תשובה נתונה
155	7. בעיות קיצון כלכליות מסוג ראשון
160	8. בעיות קיצון כלכליות מסוג שני

## שלבי עבודה

- נגדיר את אחד הגדלים בשאלה כ- $x$ .
- נבטא את שאר הגדלים בשאלה באמצעות  $x$ .
- נבנה פונקציה שמבטאת את מה שרצינו שיהיה מינימלי/מקסימלי.
- נגזור את הפונקציה, נשווה לאפס ונחלץ ערך/ערכי ה- $x$ .
- נוודא שערך ה- $x$  מסעיף 4 הוא אכן מינימום/מקסימום באמצעות "  $y$  (או טבלה).
- ננסח את התשובה לשאלה המקורית.

## בעיות קיצון יסודיות עם מספרים

### שאלות

- (1) נתונים שלושה מספרים שסכומם 24. המספר הראשון שווה למספר השני. מצאו מהם המספרים, אם ידוע שמכפלתם מקסימלית.
- (2) מצאו את המספר החיובי, שאם נוסיף לו את המספר ההופכי לו, הסכום המתקבל יהיה מינימלי.
- (3) נתונים שלושה מספרים שסכומם הוא 36. ידוע שמספר אחד זהה לשני.  
 א. מה צריכים להיות שלושת המספרים כדי שמכפלתם תהיה מקסימלית?  
 ב. כיצד תשתנה התוצאה, אם מספר אחד יהיה גדול פי 2 מהשני במקום שווה לו?  
 ג. באיזה מקרה תהיה מכפלה גדולה יותר?
- (4)  $x$  ו- $y$  הם שני מספרים המקיימים:  $x + 6y = 60$ .  
 א. הביעו את  $y$  באמצעות  $x$ .  
 ב. מה צריכים להיות המספרים  $x$  ו- $y$ , כדי שמכפלת ריבועיהם תהיה מקסימלית?  
 ג. מהי המכפלה הנ"ל?

### תשובות סופיות

- (1) 8, 8, 8
- (2) 1
- (3) א. 12, 12, 12      ב. 8, 12, 16      ג. מקרה א'
- (4) א.  $y = 10 - \frac{x}{6}$       ב.  $x = 30, y = 5$       ג.  $M = 22500$

## בעיות קיצון בהנדסת המישור

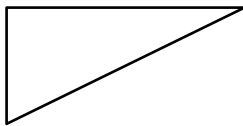
### שאלות

(1) מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם 24 ס"מ, מצאו את אורך בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

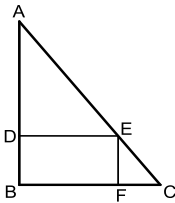
(2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם  $a$ , מצאו את בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

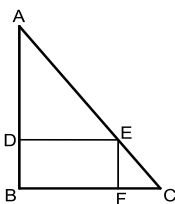
ב. הוכיחו: מבין כל המשולשים שווי השוקיים בעלי אותו היקף, המשולש בעל השטח הגדול ביותר הוא משולש שווה צלעות.



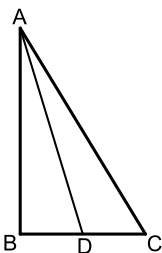
(3) במשולש ישר זווית סכום אורכי הניצבים הוא 12 ס"מ. מה צריך להיות אורך כל ניצב, כדי ששטח המשולש יהיה מקסימלי?



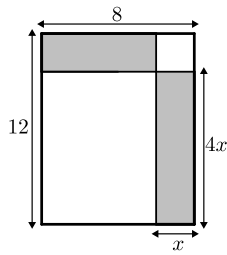
(4) במשולש ישר זווית  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ) הנקודה  $E$  נמצאת על היתר  $AC$ , כך שהמרובע  $EDBF$  הוא מלבן. נתון:  $AB = 20$  ס"מ,  $BC = 16$  ס"מ. מצאו את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.



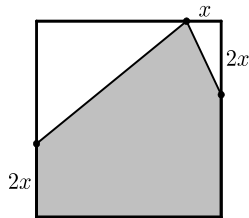
(5) במשולש ישר זווית  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ), הנקודה  $E$  נמצאת על היתר  $AC$ , כך שהמרובע  $EDBF$  הוא מלבן. נתון:  $AB = a$ ,  $BC = b$ . מצאו את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.



(6) במשולש ישר הזווית  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ),  $AD$  הוא תיכון לניצב  $BC$ . ידוע כי סכום אורכי הניצבים הוא 20 ס"מ. מצאו מה צריכים להיות אורכי הניצבים, עבורם אורך התיכון  $AD$  יהיה מינימלי.

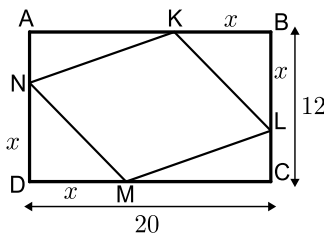


- 7) נתון מלבן שאורכי צלעותיו הם 8 ס"מ ו-12 ס"מ, כמתואר באיור.  
מקצים קטעים באורכים של  $x$  ו- $4x$  על צלעות המלבן, כך שנוצרים המלבנים המקווקוים. מצאו את  $x$ , עבורו סכום שטחי המלבנים הוא מינימלי.

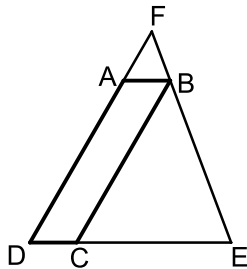


- 8) נתון ריבוע בעל אורך צלע של 16 ס"מ. מקצים קטע שאורכו  $x$  על הצלע העליונה, ושני קטעים שאורכם  $2x$  על הצלעות הצדדיות, כמתואר באיור, כך שנוצר המחומש המקווקו. מצאו מה צריך להיות ערכו של  $x$ , עבורו שטח המחומש יהיה מקסימלי.

- 9) הנקודות  $K, L, M, N$  מקצות קטעים שווים במלבן  $ABCD$ , כך ש:

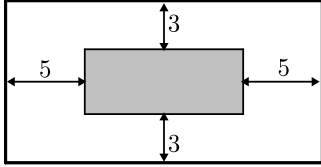


- א.  $BK = BL = DM = DN = x$ .  
צלעותיו של המלבן הן 20 ס"מ ו-12 ס"מ.  
א. הביעו באמצעות  $x$  את סכום שטחי המשולשים  $\triangle AKN + \triangle KBL + \triangle CLM + \triangle DNM$ .  
ב. מצאו מה צריך להיות  $x$ , כדי ששטח המרובע  $LKNM$  יהיה מקסימלי.  
ג. מהו השטח של המרובע  $LKNM$ , במקרה זה?



- 10) המרובע  $ABCD$  הוא מקבילית.  
מהקודקוד  $B$  מעבירים את הצלע  $EF$ , הנפגשת עם המשכי הצלעות  $DC$  ו- $AD$ . ידוע כי מידות המקבילית הן:  
 $AD = 8$  ס"מ,  $AB = m$  ס"מ.  
נסמן את אורך הצלע  $DE$  ב- $x$ .  
א. הביעו באמצעות  $x$  את אורך הצלע  $DF$ .  
ב. מצאו את  $x$ , עבורו סכום הצלעות  $DE$  ו- $DF$  הוא מינימלי.  
ג. מה הוא הסכום המינימלי?

- 11) חיים הוא אחד מעובדי חברת 'דפוס יהלום בע"מ'. תפקידו של חיים הוא להדביק גלויות על משטחי קרטון בעלי שטח מינימלי, כך שיישארו רווחים של 3 ס"מ מקצות הקרטון העליון והתחתון, ו-5 ס"מ מצדי הקרטון (ראה איור).

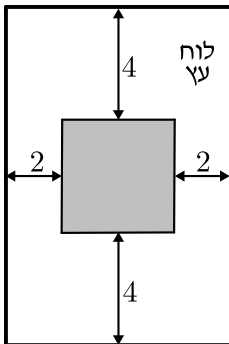


יום אחד קיבל חיים שיחת טלפון מלקוח אנונימי, ששאל אותו את השאלה הבאה: "יש לי מגוון גדול של גלויות במידות שונות, אשר שטחן זהה והוא 60 סמ"ר.

מה הן המידות של גלויה, אשר שטח משטח הקרטון שלה יהיה מינימלי?"

א. עזרו לחיים לענות ללקוח על שאלתו והראו דרך חישוב.

ב. מה יהיו מידות הקרטון עבור הגלויה המסוימת?



- 12) אלינה קיבלה משימה בשיעור מלאכה:

יש להכין מסגרת לתמונה מלוח עץ,

ששטחו הכולל הוא 242 סמ"ר,

כך שעובי המסגרת בצדדים יהיה 2 ס"מ,

ובקצוות העליון והתחתון – 4 ס"מ (ראה איור).

כדי לבחור את מידות לוח העץ,

אלינה צריכה לדעת את השטח המקסימלי

שעליה לנסר עבור המקום לתמונה (השטח המסומן).

א. מה יהיו מידות לוח העץ שאלינה צריכה להזמין עבור המשימה?

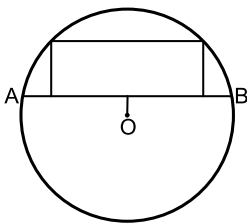
ב. מה יהיה השטח המקסימלי לתמונה עבור המידות שאלינה בחרה?

- 13) במעגל שמרכזו O ורדיוסו  $10\sqrt{5}$  ס"מ העבירו

מיתר AB שמרחקו ממרכז המעגל הוא 4 ס"מ.

במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט.

מצאו את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.



- 14) במעגל שמרכזו O ורדיוסו R העבירו מיתר AB

שמרחקו ממרכז המעגל הוא a.

במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט.

מצאו את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.



- 15) שני רוכבים יוצאים בו זמנית לדרכם:

האחד מעיר A מערבה לעיר B, והשני מעיר B דרומה לעיר C.

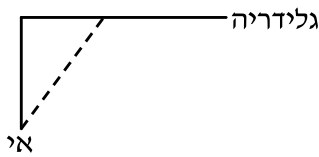
המרחק בין הערים A ו-B הוא 20 ק"מ.

מהירות הרוכב שיצא מ-A היא 4 קמ"ש

ומהירות הרוכב השני 2 קמ"ש.

כעבור כמה זמן מיציאת הרוכבים יהיה המרחק ביניהם מינימלי?

מצאו גם את המרחק המינימלי.



16) אדם נמצא על אי במרחק 0.5 ק"מ מהחוף. על החוף, במרחק של 3 ק"מ מהנקודה הקרובה ביותר לאי, נמצאת גלידריה. האדם שוחה במהירות של 8 קמ"ש ורץ על החוף במהירות של 10 קמ"ש. לאיזה מרחק מהגלידריה עליו לשחות, כדי להגיע לגלידריה בזמן הקצר ביותר?



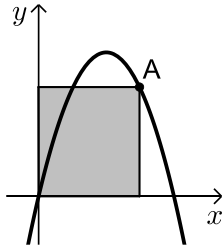
17) אדם מתכנן לבנות מרפסת בביתו ורוצה להציב מעקה סביב המרפסת. שטח המרפסת המתוכנן הוא 24 מ"ר. מחיר מעקה בחזית המרפסת (BC) הוא 120 ₪ למטר, ומחיר מעקה בצדי המרפסת הוא 40 ₪ למטר. מה צריכים להיות ממדי המרפסת, כדי שמחיר המעקה יהיה מינימלי?

### תשובות סופיות

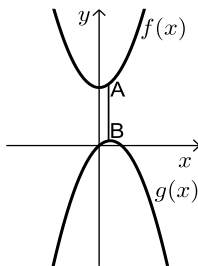
- 1)  $4\sqrt{3}$  ס"מ.
- 2) א. 2.5 ס"מ.
- 3) א. 6 ס"מ ו-6 ס"מ ב. 18 סמ"ר. ג.  $6\sqrt{2} \approx 8.48$  ס"מ.
- 4) 80 סמ"ר  $S =$ .
- 5)  $\frac{ab}{4}$  יחידות שטח.
- 6) 4 ס"מ, 16 ס"מ.
- 7)  $x = 2.75$
- 8)  $x = 6$
- 9) א.  $2x^2 - 32x + 240$  ב.  $x = 8$  ג. 128 סמ"ר  $S =$ .
- 10) א.  $DF = \frac{8x}{x-2}$  ב.  $x = 6, L = \frac{x^2 + 6x}{x-2}$  ג.  $L = 18$
- 11) א. 6 ס"מ על 10 ס"מ. ב. 12 ס"מ על 20 ס"מ.
- 12) א. 11 ס"מ על 22 ס"מ. ב.  $S = 98$
- 13) 92 ס"מ.
- 14)  $2\sqrt{5}R - 2a$  יחידות אורך.
- 15) 4 שעות, המרחק:  $\sqrt{80}$  ק"מ.
- 16)  $2\frac{1}{3}$  ק"מ.
- 17) 4.6

## בעיות קיצון בפונקציות וגרפים

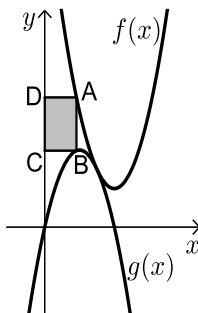
### שאלות



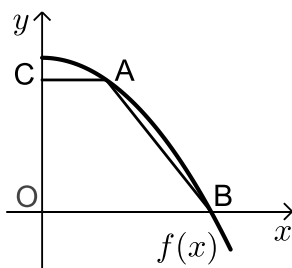
- (1) נתונה הפונקציה  $f(x) = 6x - x^2$ . מנקודה A שעל הפונקציה ברביע הראשון הורידו אנכים לצירי השיעורים כך שנוצר מלבן כמתואר בשרטוט. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



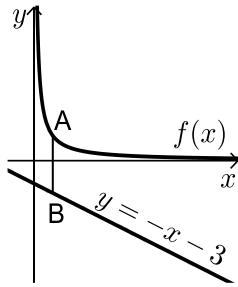
- (2) נתונות הפונקציות  $f(x) = x^2 + 12$  ו-  $g(x) = 2x - x^2$ , כמתואר באיור. הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו-  $g(x)$ , בהתאמה, כך שהקטע AB מקביל לציר ה-  $y$ . מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.



- (3) באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות  $f(x) = x^2 - 8x + 18$  ו-  $g(x) = -x^2 + 4x$ . הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$  והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה  $g(x)$ , כך שהקטע AB מקביל לציר ה-  $y$ . נעביר אנכים מהנקודות A ו-B לציר ה-  $y$ , כך שנוצר מלבן (מסומן באיור). נסמן את שיעור ה-  $x$  של הנקודה A ב-  $t$ .  
 א. הביעו באמצעות  $t$  את שטח המלבן המסומן.  
 ב. מצאו את ערכו של  $t$ , עבורו שטח המלבן הוא מקסימלי.  
 ג. מה יהיה שטח המלבן במקרה זה?

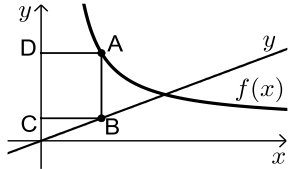


- (4) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 36 - x^2$ . על גרף הפונקציה ברביע הראשון מסמנים נקודה A. מהנקודה A מעבירים ישר, המקביל לציר ה-  $x$ , שחותך את ציר ה-  $y$  בנקודה C. הנקודה B היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-  $x$ , ו-O ראשית הצירים.  
 א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי ששטח הטרפז ABOC יהיה מקסימלי?  
 ב. מה יהיה שטח הטרפז במקרה זה?



(5) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{4}{x}$ , ונתון הישר:  $y = -x - 3$ .

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$   
והנקודה B נמצאת על גרף הישר, כך שהקטע AB  
מקביל לציר ה- $y$ .  
מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A,  
כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.



(6) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

הפונקציה:  $f(x) = \frac{x+8}{x-1}$  והישר:  $y = \frac{9x}{25}$ .

הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים של הפונקציות,  
כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$ .

מהנקודות A ו-B מותחים אנכים לציר ה- $y$ , כך שנוצר המלבן ABCD.

נסמן את שיעור ה- $x$  של הנקודה A ב- $t$ .

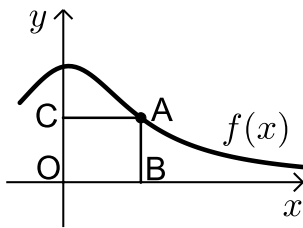
א. הביעו באמצעות  $t$  את היקף המלבן ABCD.

ב. מצאו את  $t$ , עבורו היקף המלבן הוא מינימלי.

ג. מה יהיה ההיקף במקרה זה?

(7) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{2}{x-1}$  ונתון הישר  $y = 2x$ .

בין הישר והפונקציה ברביע הראשון חסמו מלבן.  
מצאו את מידות המלבן שהיקפו מינימלי.

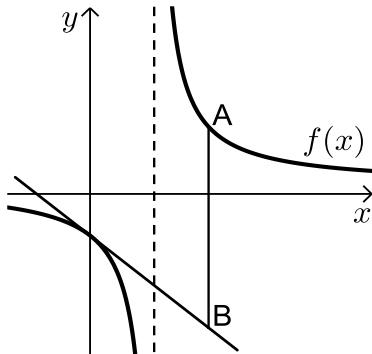


(8) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x+12}{x^2+3}$ , בתחום:  $x \geq 0$ .

מקצים נקודה A על גרף הפונקציה וממנה מורידים  
אנכים לצירים, כך שנוצר המלבן ABCO,  
כמתואר באיור.

א. מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A,  
עבורם שטח המלבן יהיה מקסימלי.

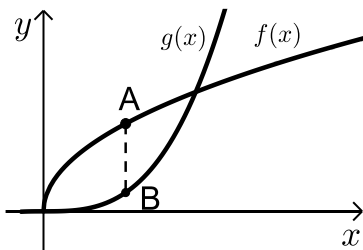
ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, עבורם  
שטח המלבן יהיה מינימלי בתחום הנ"ל?



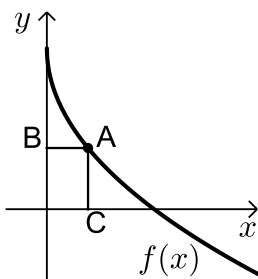
- 9** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x+10}{x-2}$ . מעבירים משיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ .
- א. מצאו את משוואת המשיק.  
מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה  $f(x)$  ברביע הראשון ו-B על גרף המשיק, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$ .
- ב. מצאו את שיעורי הנקודה A, עבורן אורך הקטע AB הוא מינימלי.
- ג. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?

**10** נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x^3}$ .

מצאו שיעורי נקודה על הפונקציה ברביע הראשון, שסכום הקטעים שהמשיק בה מקצה על הצירים הוא מינימלי.



- 11** נתונות הפונקציות  $f(x) = 2\sqrt{x}$  ו- $g(x) = \frac{1}{3}x^3$ .
- את הנקודה A שעל  $f(x)$  חיברו עם הנקודה B, שנמצאת מתחתיה, על  $g(x)$ , כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$ .
- מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?



- 12** באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה  $f(x) = 6 - 3\sqrt{x}$ .
- הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה ברביע הראשון. מהנקודה A מותחים אנכים לצירים אשר חותכים אותם בנקודות B ו-C, כמתואר באיור.
- נסמן את שיעור ה- $x$  של הנקודה A ב- $t$ .
- א. הביעו באמצעות  $t$  את סכום הקטעים  $AB + AC$ .

ב. מצאו את ערכו של  $t$ , עבורו סכום הקטעים הנ"ל יהיה מינימלי.

**13** נתונות הפונקציות  $f(x) = 1 - x^2$  ו- $g(x) = bx^2$  ( $b > 0$ ).

הפונקציות נחתכות בנקודות A ו-B. מצאו את ערכו של  $b$ , שבעבורו הקטע AO מינימלי (O ראשית הצירים).

## תשובות סופיות

(1)  $A(4,8)$

(2)  $A(0.5,12.25)$

ג.  $S = 8$       ב.  $t = 1$       א.  $S = 2t^3 - 12t^2 + 18t$  (3)

ב.  $S = 128$       א.  $A(2,32)$  (4)

(5)  $A(2,2)$

ג.  $P = 12.88$  ס"מ      ב.  $t = 4\frac{3}{4}$       א.  $P = \frac{1.28t^2 + 0.72t + 16}{t-1}$  (6)

(7) 1.2

ב.  $A(0,4)$       א.  $A(2,2)$  (8)

ג.  $AB = 24$       ב.  $A(4,7)$       א.  $y = -3x - 5$  (9)

(10)  $\left(\sqrt{3}, \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$

(11)  $A(1,2)$

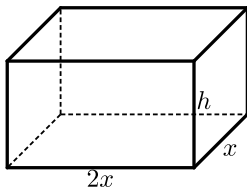
ב.  $t = 2.25$       א.  $l = t + 6 - 3\sqrt{t}$  (12)

(13)  $b = 1$

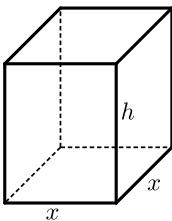
## בעיות קיצון בהנדסת המרחב

### שאלות

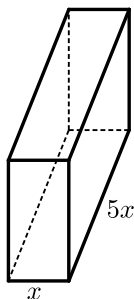
- (1) נתונה תיבה שבסיסה ריבוע ושטח הפנים שלה הוא 96 סמ"ר. מצאו את מידות התיבה שנפחה מקסימלי.



- (2) נתונה תיבה שבסיסה הוא מלבן, שבו צלע אחת גדולה פי 2 מהצלע הסמוכה לה, כמתואר באיור. ידוע כי גובה התיבה  $h$  וצלע המלבן הקטנה  $x$  מקיימים:  $x+h=9$ . מצאו מה צריכים להיות מידות בסיס התיבה כדי שנפחה יהיה מקסימלי.



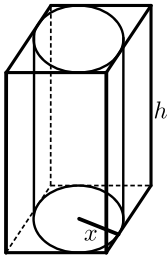
- (3) נתונה תיבה שגובהה הוא  $h$  ובסיסה הוא ריבוע שאורך צלעו היא  $x$ . נתון כי צלע הריבוע וגובה התיבה מקיימים  $4x+h=63$ .
- הביעו את  $h$  באמצעות  $x$ .
  - הביעו את שטח הפנים של התיבה באמצעות  $x$ .
  - מה צריך להיות ערכו של  $x$ , כדי ששטח הפנים יהיה מקסימלי?



- (4) ליוסי משטח פח אשר הוא רוצה לבנות תיבה ממנו שנפחה הכולל הוא 225 סמ"ק. יוסי רוצה שאורך הבסיס יהיה גדול פי 5 מרוחבו, כמתואר באיור הסמוך. כמות הפח שיש בידי יוסי מוגבלת, ולכן הוא רוצה לדעת מה היא הכמות המינימלית של פח שעליו להשתמש, כדי להשיג את מבוקשו. מצאו את כמות הפח המינימלית.

- (5) לבניית תיבה שנפחה 144 סמ"ק ואורך בסיסה גדול פי 2 מרוחב בסיסה, דרושים שני חומרים, ולהם שני מחירים שונים: החומר לבסיס התחתון יקר פי 3 מהחומר לפאות הצדדיות והבסיס העליון. מהן מידות התיבה הזולה ביותר שניתן לבנות?

- (6) מכל הגלילים הישרים, שהיקף פרישת המעטפת שלהם הוא  $k$ , מצאו את נפחו של הגליל בעל הנפח המקסימלי.



(7) באיור שלפניך מתוארים תיבה שבסיסה ריבוע, וגליל החסום בתוך התיבה. רדיוס הגליל יסומן ב- $x$  וגובהו ב- $h$ .

ידוע כי הסכום של  $x$  ו- $h$  הוא 12 ס"מ.

א. הביעו באמצעות  $x$  את אורך מקצוע הבסיס של התיבה.

ב. הביעו באמצעות  $x$

1. את נפח הגליל.

2. את נפח התיבה.

ג. מצאו את  $x$ , עבורו הנפח הכלוא בין התיבה לגליל יהיה מקסימלי.

(8) נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה.

אורך מקצוע צדדי בפירמידה הוא  $k$  ושטח המעטפת שלה הוא  $S$ .

הוכיחו כי  $S < 2k^2$ .

### תשובות סופיות

(1) 4·4·4 ס"מ.

(2) בסיס: 6 ס"מ, 12 ס"מ. גובה: 3 ס"מ.

(3) א.  $h = 63 - 4x$       ב.  $p = -14x^2 + 252x$       ג.  $x = 9$

(4) 3 ס"מ, 15 ס"מ ו-5 ס"מ.

(5) 8·6·3 ס"מ.

(6) יחידות נפח =  $\frac{k^3}{216\pi}$ .

(7) א.  $2x$       ב. 1.  $V = 12\pi x^2 - \pi x^3$       2.  $V = 48x^2 - 4x^3$       ג.  $x = 8$

(8) שאלת הוכחה.

## בעיות קיצון עם תשובה נתונה

### בעיות קיצון בהנדסת המרחב

(1) נתונים שני מספרים חיוביים,  $p$  ו- $q$ , שסכומם  $a$ .  
 הראו, שכאשר מתקיים  $\frac{p}{q} = \frac{n}{m}$ , ערך הביטוי  $p^n q^m$  מקסימלי (כאשר  $n$  ו- $m$  טבעיים).

(2) הוכיחו שמכל החרוטים הישרים שנפחם  $\pi k$  סמ"ק, החרוט בעל שטח המעטפת המינימלי הוא זה שגובהו  $\sqrt[3]{6k}$  ס"מ.  
 (שטח מעטפת של חרוט הוא  $\pi Rl$ , כאשר  $l$  הוא הקו היוצר של החרוט)

### בעיית קיצון עם תנועה

(3) מהירותו של רכב היא  $v$  קמ"ש ועליו לנסוע דרך של  $S$  ק"מ.  
 לרכב יש הוצאות נסיעה של  $\frac{v}{400}$  ₪ לכל ק"מ נסיעה ו- $\frac{v^2}{200} + 48$  ₪ לכל שעת נסיעה.  
 הראו שכדי שהוצאותיו יהיו מינימליות, על הרכב לנסוע במהירות של 80 קמ"ש.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## בעיות קיצון כלכליות מסוג ראשון

### שאלות

1) כאשר חברת 'יוטבתה' מוכרת  $x$  ליטר שוקו ליום, היא יכולה לקבל מחיר של  $p(x) = -\frac{1}{4}x + 10$  שקל לליטר.

- מהו מחיר ליטר אחד, אם הכמות שנמכרת ביום היא 4 ליטר?
- מהו מחיר ליטר אחד, אם הכמות שנמכרת ביום היא 12 ליטר?
- מהי הכמות הנמכרת ביום, אם המחיר הוא 6 ש"ח לליטר?
- שרטטו את הגרף של פונקציית הביקוש, ומצאו את תחום ההגדרה שלה.
- פונקציית הביקוש הנתונה מתארת את מחיר המוצר, כפונקציה של הכמות הנמכרת ממנו. שנו את נוסחת הפונקציה, כך שהיא תתאר את הכמות הנמכרת מהמוצר, כפונקציה של מחירו.

2) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא  $p(x) = -0.6x + 120$ .

- מצאו את פונקציית הפדיון ואת התחום שלה.
- אם  $x = 20$ , מהו מחיר המוצר ומהו הפדיון?
- אם המחיר הוא 12 ש"ח, מהו הפדיון?

3) פונקציית הפדיון של מוצר מסוים היא  $R(x) = -0.08x^2 + 40x$ .

- מהו התחום של פונקציית הפדיון?
- שרטטו את הגרף של פונקציית הפדיון.
- מצאו את פונקציית הביקוש ושרטטו את הגרף שלה.

4) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא  $p(x) = -0.4x + 100$ .

- מצאו את תחום הפונקציה.
- מצאו את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון הממוצע.
- מצאו את פונקציית הפדיון השולי.
- לאיזה ערך של  $x$  יתקבל פדיון מקסימלי, ומהו?

5) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא  $p(x) = -6x^2 + 240x + 1800$ .

- מצאו את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון השולי.
- אם  $x = 40$ , האם כדאי להגדיל את הייצור?
- מתי יהיה הפדיון מקסימלי, ומהו?

6 פונקציית הביקוש של מוצר מסוים נתונה ע"י  $Q(x) = 10x - \frac{x^2}{5}$ .

- א. מצאו את המחיר הנותן את הפדיון המקסימלי.  
 ב. מהו הביקוש במקרה זה?  
 ג. מהו הביקוש השולי בנקודת מחיר זו? מה משמעותו?

7 פונקציית ההוצאות של יצרן, המייצר  $x$  קפה ביום, היא  $C(x) = 5x + 150$ .

- א. שרטטו גרף של פונקציית ההוצאות. מהן ההוצאות הקבועות?  
 ב. מצאו כמה ק"ג קפה מייצר היצרן, אם ההוצאות הן 1,000 ₪.  
 ג. מהן ההוצאות, אם מייצרים 20 ק"ג קפה ביום?  
 ד. מצאו את פונקציית ההוצאה השולית.

8 פונקציית העלות, של יצרן כובעים, היא  $TC(x) = 0.04x^2 + 10x + 400$  שקל ליום.

- א. חשבו את העלות הממוצעת ליום, אם הוא מייצר 40 כובעים.  
 ב. כמה כובעים עליו לייצר, כדי שהעלות הממוצעת תהיה מינימלית?  
 ג. חשבו את העלות השולית ליום, עבור  $x = 100$ .  
 איזו מסקנה ניתן להסיק?

9 פונקציית העלות של מוצר מסוים היא  $C(x) = 0.004x^2 + 10x + 200$ .

- א. חשבו את העלות, כאשר  $x = 100$  וכאשר  $x = 101$ .  
 ב. חשבו את העלות השולית, כאשר  $x = 100$ .  
 ג. חשבו כמה תעלה יחידת מוצר נוספת, כאשר הייצור יעבור מ- $x = 100$  ל- $x = 101$ , והשוו עם התוצאה של סעיף ב. מהי המסקנה?  
 ד. מצאו האם קצב השינוי של העלות גדל או קטן.

10 ליצרן פונקציית ביקוש  $P(Q) = 100 - 0.06Q$ ,

ופונקציית עלות כוללת  $TC(Q) = 200 + 4Q$ .

- מהי הכמות  $Q$  שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?  
 מהו המקסימום במקרה זה?

11 ליצרן פונקציית ביקוש  $P(Q) = 20$ , ופונקציית עלות  $TC(Q) = 300 + 2Q^2$

- מהי הכמות שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?  
 מהו המקסימום במקרה זה?

**12** ליצרן פונקציית ביקוש  $P(Q) = -0.15Q + 50$ ,  
 ופונקציית עלות שולית  $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$ .  
 מהי הכמות שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?

**13** ליצרן פונקציית ביקוש  $Q = \frac{5000 - 50P}{3}$ ,  
 ופונקציית עלות  $TC(Q) = 200 + 4Q$ .  
 מהי הכמות  $Q$  שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?  
 מהו המקסימום במקרה זה?

**14** ליצרן פונקציית עלות שולית  $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$ .  
 מצאו את פונקציית העלות, אם ידוע שכאשר הכמות המיוצרת היא  $Q = 10$ ,  
 העלות הכוללת היא 225 ₪.

**15** הוכיחו:

- א. שהרווח המקסימלי מתקבל כאשר הפדיון השולי שווה להוצאה השולית.  
 הסבירו את המשמעות הגרפית.  
 ב. שאם מחיר המוצר קבוע, אז הרווח המקסימלי מתקבל כאשר ההוצאה  
 השולית שווה למחיר המוצר.

**16**  $C(x)$  – פונקציית הוצאות,  $C'(x)$  – הוצאות שוליות,  $\frac{C(x)}{x}$  – הוצאות ממוצעות.

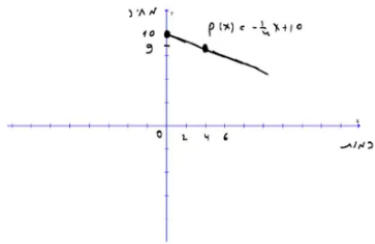
- א. האם יתכן שהוצאה שולית קבועה, למרות שהוצאה ממוצעת משתנה?  
 ב. האם יתכן להפך?  
 ג. הוכיחו כי ההוצאה הממוצעת היא פונקציה עולה אם ורק אם  
 ההוצאה השולית גדולה מן ההוצאה הממוצעת.

**17** מפעל המייצר מוצר מסוים משתמש בשני גורמי ייצור.  
 נסמן את מחירי גורמי הייצור, ליחידה, ב- $p_1$  וב- $p_2$ , בהתאמה.  
 אם משתמשים ב- $x$  יחידות מג"י 1 וב- $y$  יחידות מג"י 2,  
 המפעל מייצר  $\sqrt{x} + \sqrt{y}$  יחידות. תקציב המפעל  $A$  ₪.  
 א. הוכיחו כי באילוץ התקציב, הייצור מקסימלי

$$\text{כאשר מתקיימת הנוסחה } \frac{x}{y} = \frac{p_2^2}{p_1^2}$$

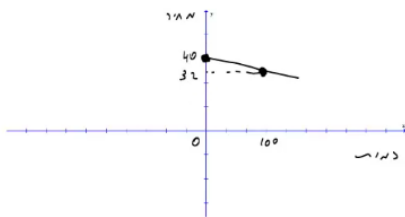
- ב. חשבו את  $x$  ו- $y$  עבורם הייצור מקסימלי, אם נתון:  
 $p_1 = 3,000$  ₪,  $p_2 = 100$  ₪,  $A = 372,000$  ₪.

**תשובות סופיות**

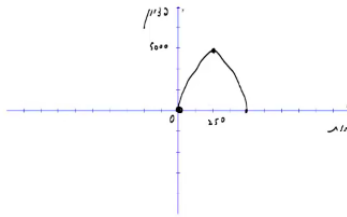


1) א. 9 ב. 7 ג. 16 ה.  $x(p) = 40 - 4p$  ד.

2) א.  $R(x) = -0.6x^2 + 120x$ , בתחום:  $x \geq 0$  ב. 2,160 ג. 2,160



3) א.  $x \geq 0$  ב. ג.



4) א.  $x \geq 0$  ב. פונקציית הפדיון:  $R(x) = -0.04x^2 + 100x$

הפדיון הממוצע:  $AR(x) = -0.4x + 100$ ,  $x > 0$  ג.  $R'(x) = -0.08x + 100$  ד. 1,250 ; הפדיון המקסימלי: 62,500

5) א. פונקציית הפדיון:  $R(x) = -6x^3 + 240x^2 + 1800x$

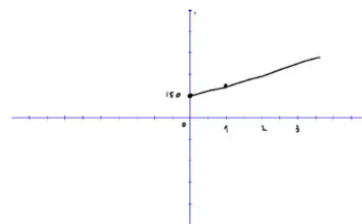
הפדיון השולי:  $R'(x) = -18x^2 + 480x + 1800$  ב. לא ג. 30 ; הפדיון המקסימלי: 108,000

6) א.  $33\frac{1}{3}$  ב.  $Q\left(33\frac{1}{3}\right) = 10 \cdot 33\frac{1}{3} - \frac{33\frac{1}{3}^2}{5}$

ג.  $-3\frac{1}{3}$  ; העלאת המחיר ביחידה אחת – תקטין את הביקוש ב-3.33 יח', בערך.

7) א. ההוצאות הקבועות הן הוצאות המפעל, גם כאשר הוא אינו מייצר. ב. 170

ג. 250 ד.  $MC(x) = 5$



8) א. 21.6 ב. 100 ג. 18 ש; אם המפעל יעלה את הייצור ביחידה אחת, מ-100 ל-101, העלות הכוללת שלו תגדל ב-18 ש בערך.

9) א.  $C(100) = 1240$ ,  $C(101) = 1250.804$  ב. 10.8

ג. בערך הסכום שיעלה למפעל לייצר יחידה נוספת. ד. גדל.

10) הכמות: 800, המקסימום: 38,200

11) הכמות: 5, המקסימום: -250.

12) 25

13) הכמות: 800, המקסימום: 38,200

$$TC(Q) = 0.02Q^3 + 20Q + 5 \quad (14)$$

(15) שאלת הוכחה.

(16) א. כן. ב. לא. ג. שאלת הוכחה.

(17) א. שאלת הוכחה. ב.  $x = 4, y = 3600$ .

## בעיות קיצון כלכליות מסוג שני

### שאלות

- (1) יצרן מכונות כביסה מוכר 500 מכונות בשבוע, במחיר של \$225 למכונה. עלות הייצור למכונת כביסה אחת היא \$125. סקר שוק מראה, שעל כל הוזלה של \$5 במחיר – מספר המכונות הנמכרות בשבוע עולה ב-50.

א. מהו המחיר שהיצרן צריך לקבוע למכשיר, על מנת להגיע לרווח מקסימלי?  
 ב. מהן ההוצאות במצב זה? האם בהכרח אלו ההוצאות המינימליות? נמקו.
- (2) מחיר חבילת זמן אוויר בחברת סלולר הוא 100 ₪ ל-200 דקות. בסקר שוק שערכה החברה התגלה, כי על כל הוזלה של 2 ₪ בתשלום, לקוחות מנצלים 10 דקות זמן אוויר נוספות. לאור תוצאות הסקר, איזו חבילה כדאי לחברה להציע ללקוחותיה, כדי להגיע להכנסה מקסימלית (כלומר, מה המחיר שיש לקבוע ולכמה דקות)?
- (3) אמן מייצר תכשיטים בעלות של 30 ₪ עבור כל תכשיט. הוא מצליח למכור 100 תכשיטים, כאשר מחירם 40 ₪ לתכשיט. על כל עלייה של 2 ₪ במחיר, הוא מוכר 4 תכשיטים פחות.

א. מצאו כמה תכשיטים האמן צריך לייצר, כדי שהרווח שלו יהיה מקסימלי.  
 ב. באיזה מחיר ימכור האמן כל תכשיט במצב זה?  
 ג. מהי עלות הייצור של האמן במצב זה (עבור כל התכשיטים)?
- (4) חברת 'טיול נעים' משכירה אוטובוס ל-30 תיירים, שכל אחד מהם משלם 100 דולר. על כל תייר נוסף שמצטרף, החברה מסכימה להוריד את התשלום לכל אחד מהתיירים, בשני דולר. מה צריך להיות מספר התיירים, כדי שלחברה יהיה הרווח הגדול ביותר?
- (5) מחיר שליחת SMS ברשת 'סלקום' הוא 50 אג', ומספר ה-SMSים החודשי הממוצע הוא 200. על כל 5 אג' ש'סלקום' מעלה – יורד מספר ה-SMSים החודשי הממוצע בעשר. מצאו מה צריך להיות מחיר שליחת SMS, כדי שהכנסתה של 'סלקום' תהיה מקסימלית.

- 6) קולנוע יחן' מוכר כל שבוע 60 כרטיסים לסרטי תלת-מימד במחיר של 45 ₪ לכרטיס. כל הורדה של מחיר הכרטיס בחצי שקל גורמת למכירת שני כרטיסים נוספים בשבוע.  
מה צריך להיות מחיר הכרטיס, כדי שהכנסתו של בית הקולנוע תהיה הגדולה ביותר? מצאו גם מהי ההכנסה המקסימלית.
- 7) הייצור של בובת 'בוב ספוג' עולה לחברת 'ניקולדיאון' 25 ₪. אם החברה מוכרת את הבובה ב-45 ₪, היא מצליחה למכור 200 בובות ליום. על כל חצי שקל שהחברה מורידה ממחיר הבובה, היא מצליחה למכור 10 בובות נוספות ליום.  
מהו הרווח היומי המקסימלי של החברה?
- 8) חברת 'אופיס דיפו' רוכשת מספר מסוים של מוצרים ב-800 ₪. 5 מהמוצרים היא מוכרת ברווח של 20% לכל מוצר, ואת שאר המוצרים היא מוכרת ברווח של 2 ₪ לכל מוצר. הוכיחו שהרווח של החברה, בעסקה כזו, הוא לפחות 70 ₪.
- 9) חברת BMX מוכרת 300 זוגות אופניים במחיר של 500 ₪ לזוג אופניים. לכל  $x$  זוגות אופניים נוספים שהיא מוכרת, היא מורידה – את מחירם בלבד – ב- $2x$  ₪ לזוג אופניים, ואילו את מחירם של 300 הזוגות הראשונים היא מורידה רק ב- $x$  ₪ לזוג אופניים.  
מה מספר זוגות האופניים שעל החברה למכור, על מנת שהכנסתה תהיה מקסימלית?

## תשובות סופיות

- 1) א. 200 ב. \$93,750 ; לא, כי תמיד ניתן לייצר פחות וכך להקטין הוצאות.
- 2) 70 ₪ ל-350 דקות.
- 3) א. 60 ב. 60 ₪ ג. 1,800 ₪
- 4) 40
- 5) 75 אג'.
- 6) מחיר הכרטיס: 30 ₪, ההכנסה המקסימלית: 3,600 ₪.
- 7) 4,500 ₪.
- 8) שאלת הוכחה.
- 9) 350

# קלקולוס 1

פרק 12 - אינטגרלים מידיים

תוכן העניינים

162	.....	1. אינטגרלים מידיים
165	.....	2. מציאת פונקציה קדומה

## אינטגרלים מיידיים

## שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-12 (פתירה על ידי הכלל:  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ ):

$$\int 4dx \quad (1) \qquad \int x^4 dx \quad (2) \qquad \int \frac{1}{x^2} dx \quad (3)$$

$$\int \sqrt{x} dx \quad (4) \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5) \qquad \int 4x^{10} dx \quad (6)$$

$$\int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7) \qquad \int \left( \frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x} \right) dx \quad (8) \qquad \int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9)$$

$$\int (x^2 + 1)(x + 2) dx \quad (10) \qquad \int \frac{1 + 2x^2 + x^4}{x^2} dx \quad (11) \qquad \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 13-20:

(פתירה על ידי הכלל:  $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c$ ):

$$\int (4x+1)^{10} dx \quad (13) \qquad \int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14) \qquad \int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15)$$

$$\int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16) \qquad \int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17) \qquad \int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} \quad (19) \qquad \int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad (20)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 21-26:

(פתירה על ידי הכלל:  $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$ ):

$$\int \frac{1}{4x} dx \quad (21) \qquad \int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22) \qquad \int \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^2 dx \quad (23)$$

$$\int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24) \qquad \int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25) \qquad \int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 27-29 :

$$(\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c : \text{פתירה על ידי הכלל})$$

$$\int \left( 4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx \quad (29)$$

$$\int (e^{x+1})^2 dx \quad (28)$$

$$\int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27)$$

$$\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx : \text{חשבו את האינטגרל} \quad (30)$$

$$(\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + c : \text{פתירה על ידי הכלל})$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 31-33 :

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad (33)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (32)$$

$$\int \frac{1}{1+4x^2} dx \quad (31)$$

## תשובות סופיות

- $$-\frac{1}{x} + c \quad (3) \qquad \frac{x^5}{5} + c \quad (2) \qquad 4x + c \quad (1)$$
- $$\frac{4x^{11}}{11} + c \quad (6) \qquad -\frac{2}{\sqrt{x}} + c \quad (5) \qquad \frac{x^{1.5}}{1.5} + c \quad (4)$$
- $$\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c \quad (9) \qquad -\frac{1}{x^3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2} + c \quad (8) \qquad \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c \quad (7)$$
- $$\frac{x^{1.5}}{1.5} + \frac{x^{0.5}}{0.5} + c \quad (12) \qquad -\frac{1}{x} + 2x + \frac{x^3}{3} + c \quad (11) \qquad \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c \quad (10)$$
- $$-\frac{1}{(x-2)^4} + c \quad (15) \qquad \frac{(x-1)^{21}}{21} + c \quad (14) \qquad \frac{(4x+11)^{11}}{44} + c \quad (13)$$
- $$10\sqrt{2x+4} + c \quad (17) \qquad \frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4} + c \quad (16)$$
- $$-\frac{2}{3}\left((x-1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) + c \quad (19) \qquad -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + c \quad (18)$$
- $$\ln|x| + x + \frac{x^2}{2} + c \quad (22) \qquad \frac{\ln|x|}{4} + c \quad (21) \qquad \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - x + c \quad (20)$$
- $$x + \ln|x+2| + c \quad (25) \qquad \frac{\ln|4x-1|}{4} + c \quad (24) \qquad x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c \quad (23)$$
- $$\frac{e^{2x+2}}{2} + c \quad (28) \qquad \frac{e^{4x}}{4} - e^{-x} + c \quad (27) \qquad 4(x - 1.75\ln|x+2|) + c \quad (26)$$
- $$\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)} + \frac{(200)^x}{\ln(200)} + c \quad (30) \qquad 8e^{\frac{x}{2}} - \frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4} + c \quad (29)$$
- $$-\left(x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + c \quad (33) \qquad \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + c \quad (32) \qquad \frac{1}{2}\arctan(2x) + c \quad (31)$$

## מציאת פונקציה קדומה

### שאלות

- (1) נתונה הנגזרת הבאה:  $f'(x) = 2x - \sqrt[3]{4x}$ .  
 ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה  $(2,3)$ .  
 מצאו את הפונקציה.
- (2) נתונה הנגזרת הבאה:  $f'(x) = \sqrt[3]{5x+7}$ .  
 ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x=4$ .  
 מצאו את הפונקציה.
- (3) נתונה הנגזרת הבאה:  $f'(x) = \frac{10}{\sqrt[3]{x+1}} + (x-1)^2$ .  
 ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y=-6$ .  
 מצאו את הפונקציה.
- (4) נתונה נגזרת של פונקציה:  $f'(x) = 2x - 6$ .  
 ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.  
 מצאו את הפונקציה.
- (5) נתונה נגזרת של פונקציה:  $f'(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} + 2$ .  
 שיפוע המשיק לפונקציה, בנקודה שבה  $y = 5\frac{2}{3}$ , הוא 3.  
 מצאו את הפונקציה.
- (6) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה:  $f''(x) = 6x + 6$ .  
 שיפוע הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא -12,  
 וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1.  
 מצאו את הפונקציה.
- (7) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה:  $f''(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$ .  
 המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא הישר  $y = -4$ .  
 מצאו את הפונקציה.

- (8) נתונה פונקציה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $f(0) = 0$ , ונתון בנוסף כי לכל  $x_0$  ממשי:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = |x_0|$ .
- א. מצאו את תחומי הרציפות של הפונקציה.  
 ב. חשבו את הגבול הבא או קבעו שהוא אינו קיים  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .  
 ג. מצאו כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
 ד. מצאו את כל נקודות הפיתול של הפונקציה.  
 ה. תהי  $G(x)$  פונקציה קדומה של  $|x|$ .  
 חשבו את הנגזרת  $(G(x) - f(x))'$ .

### תשובות סופיות

- (1)  $f(x) = x^2 - \frac{3}{16} \sqrt[3]{(4x)^4} + 2$
- (2)  $f(x) = \frac{3}{20} \sqrt[3]{(5x+7)^4} - 12 \frac{3}{20}$
- (3)  $f(x) = 12 \frac{1}{2} \sqrt[5]{(x+1)^4} + \frac{1}{3} (x-1)^3 - 18 \frac{1}{6}$
- (4)  $f(x) = x^2 - 6x + 14$
- (5)  $f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{(x+2)^3} - \frac{2}{3} \sqrt{(x-1)^3} + 2x - 3$
- (6)  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$
- (7)  $f(x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{4}{x} + 3x + 2$
- (8) א. רציפה לכל  $x$ . ב.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ . ג. נקודת חיתוך אחת  $(0,0)$ .  
 ד. נקודת פיתול אחת  $(0,0)$ . ה. 0

# קלקולוס 1

פרק 13 - אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת הנגזרת כבר בפנים ..... 167

## אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

### שאלות

הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx \quad (3) \qquad \int \cot x dx \quad (2) \qquad \int \frac{2x}{x^2+1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (5) \qquad \int \tan x dx \quad (4)$$

$$\int e^{-2x^2} x dx \quad (9) \qquad \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \quad (8) \qquad \int e^{x^2} 2x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \quad (12) \qquad \int \cos(\sin x) \cdot \cos x dx \quad (11) \qquad \int \cos(2x^2+1) \cdot 4x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (15) \qquad \int \sin(x^2+1) x dx \quad (14) \qquad \int \cos(10x^4+1) x^3 dx \quad (13)$$

$$\int \frac{(\tan x)}{\cos^2 x} dx \quad (18) \qquad \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \quad (17) \qquad \int \frac{\ln x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int 2x\sqrt{x^2+1} dx \quad (21) \qquad \int \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x}} dx \quad (20) \qquad \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx \quad (24) \qquad \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \quad (23) \qquad \int x^2 \sqrt{x^3+4} dx \quad (22)$$

## תשובות סופיות

- |   |   |   |
|---|---|---|
| $\frac{1}{3} \ln x^3+1 +c$ (3)                | $\ln \sin x +c$ (2)                       | $\ln x^2+1 +c$ (1)                        |
| $e^2 \ln e^x+1 +c$ (6)                        | $\ln \ln x  +c$ (5)                       | $-\ln \cos x +c$ (4)                      |
| $-\frac{e^{-2x^2}}{4}+c$ (9)                  | $e^{\tan x}+c$ (8)                        | $e^{x^2}+c$ (7)                           |
| $\sin(\ln x)+c$ (12)                          | $\sin(\sin x)+c$ (11)                     | $\sin(2x^2+1)+c$ (10)                     |
| $-2\cos(\sqrt{x})+c$ (15)                     | $-\frac{1}{2}\cos(x^2+1)+c$ (14)          | $\frac{1}{40}\sin(10x^4+1)+c$ (13)        |
| $\frac{1}{2}(\tan x)^2+c$ (18)                | $\frac{1}{2}(\arctan x)^2+c$ (17)         | $\frac{1}{2}(\ln x)^2+c$ (16)             |
| $\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+c$ (21)     | $\sqrt{2\sin x}+c$ (20)                   | $2\sqrt{x^2+1}+c$ (19)                    |
| $\frac{2}{3}(\arctan x)^{\frac{3}{2}}+c$ (24) | $\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}+c$ (23) | $\frac{2}{9}(x^3+4)^{\frac{3}{2}}+c$ (22) |

# קלקולוס 1

פרק 14 - אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים.....169

## אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

---

### שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-23 :

$$\int x \sin x dx \quad (3) \qquad \int x^4 \ln x dx \quad (2) \qquad \int x e^x dx \quad (1)$$

$$\int x^2 e^{-4x} dx \quad (6) \qquad \int x^2 \sin 4x dx \quad (5) \qquad \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (4)$$

$$\int \arctan x dx \quad (9) \qquad \int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \qquad \int \ln x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad (12) \qquad \int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (11) \qquad \int \arcsin x dx \quad (10)$$

$$\int x^2 \ln(x^2 + 1) dx \quad (15) \qquad \int x \arctan x dx \quad (14) \qquad \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (13)$$

$$\int e^x \cos x dx \quad (18) \qquad \int \left( \frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (17) \qquad \int \ln^2 x dx \quad (16)$$

$$\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx \quad (21) \qquad \int \sqrt{1-x^2} dx \quad (20) \qquad \int e^{2x} \sin 4x dx \quad (19)$$

$$\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx \quad (23) \qquad \int x \tan^2 x dx \quad (22)$$

(24) מצאו נוסחת נסיגה עבור  $\int x^n e^x dx$  כאשר  $n$  טבעי.

(25) חשבו את  $\int x^4 e^x dx$ .

(26) מצאו נוסחת נסיגה עבור  $\int \cos^n x dx$  כאשר  $n$  טבעי.

(27) חשבו את  $\int \cos^4 x dx$ .

(28) מצאו נוסחת נסיגה עבור  $\int \sin^n x dx$  באשר  $n$  טבעי.

(29) חשבו את  $\int \sin^4 x dx$ .

(30) מצאו נוסחת נסיגה עבור  $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$  באשר  $n$  טבעי.

(31) חשבו את  $\int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$ .

(32) חשבו את האינטגרלים  $\int e^{ax} \cos bxdx$ ,  $\int e^{ax} \sin bxdx$ .

## תשובות סופיות

$$xe^x - e^x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^5}{5} \left( \ln x - \frac{1}{5} \right) + c \quad (2)$$

$$x \cos x + \sin x + c \quad (3)$$

$$\left( \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c \quad (4)$$

$$-\frac{x^2}{4} \cos 4x + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{4} \sin x + \frac{1}{16} \cos 4x \right) + c \quad (5)$$

$$-\frac{x^2}{4} e^{-4x} + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{4} x e^{-4x} - \frac{1}{16} e^{-4x} \right) + c \quad (6)$$

$$x \ln x - x + c \quad (7)$$

$$-\frac{1}{3} (x \ln x - x) + c \quad (8)$$

$$x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + c \quad (9)$$

$$x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{5} \left( \frac{x^2}{2} \ln(x-2) - \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2} + 2x + 4x \ln |x-2| \right) \right) + c \quad (11)$$

$$x \tan x + \ln |\cos x| + c \quad (12)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + c \quad (13)$$

$$\arctan x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} (x - \arctan x) + c \quad (14)$$

$$\frac{x^3}{3} \ln(x^2 + 1) - \frac{2}{3} \left( \frac{x^3}{3} - x + \arctan x \right) + c \quad (15)$$

$$x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + c \quad (16)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{2}{x} (\ln x - 1) + c \quad (17)$$

$$-e^x \cos x + \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + c \quad (18)$$

$$\frac{e^{2x} \left( -\cos 4x + \frac{1}{2} \sin 4x \right)}{5} + c \quad (19)$$

$$\frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + c \quad (20)$$

$$\frac{e^x}{x+1} + c \quad (21)$$

$$x(\tan x - x) + \ln |\cos x| + \frac{x^2}{2} + c \quad (22)$$

$$\frac{2}{9}(x+1)(x+2)^{\frac{9}{2}} - \frac{4}{99}(x+2)^{\frac{11}{2}} + c \quad (23)$$

$$x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \quad (24)$$

$$e^x (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + c \quad (25)$$

$$\frac{1}{n} \left\{ (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} dx \right\} \quad (26)$$

$$\frac{1}{4} (\cos^3 x \sin x + 3 \cdot 5 (\cos x \sin x + x)) + c \quad (27)$$

$$\frac{1}{n} \left( -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} dx \right) \quad (28)$$

$$\frac{1}{4} (-\sin^3 x \cos x + 3 \cdot 5 (x - \sin x \cos x)) + c \quad (29)$$

$$\frac{1}{2n} \left( \frac{x}{(1+x^2)^n} + \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} (2n-1) \right) \quad (30)$$

$$\frac{1}{6} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{1}{4} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{x}{1+x^2} + \arctan x \right\} \right\} \right\} \quad (31)$$

$$\int e^{ax} \cos bxdx = e^{ax} \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2}, \quad \int e^{ax} \sin bxdx = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} \quad (32)$$

# קלקולוס 1

פרק 15 - אינטגרלים בשיטת ההצבה

תוכן העניינים

173 ..... 1. אינטגרלים בשיטת ההצבה

## אינטגרלים בשיטת ההצבה

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3) \quad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (2) \quad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx \quad (6) \quad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (5) \quad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx \quad (9) \quad \int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \quad \int e^{x^2} x^3 dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x} dx \quad (12) \quad \int x^3 (3x^2-1)^{14} dx \quad (11) \quad \int 2x^3 \cos(x^2+1) dx \quad (10)$$

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8+2} \quad (15) \quad \int \ln^3 x dx \quad (14) \quad \int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (18) \quad \int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx \quad (17) \quad \int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} \quad (21) \quad \int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad (20) \quad \int \arctan \sqrt{x} dx \quad (19)$$

$$\int x^5 \sqrt[3]{x^3+1} dx \quad (24) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx \quad (23) \quad \int \cos(\ln x) dx \quad (22)$$

## תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x^2+1} + c \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \left( \frac{(\sqrt{x^3+4})^5}{5} - \frac{4}{3} (\sqrt{x^3+4})^3 \right) + c \quad (2)$$

$$2 \left( \frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3} - \sqrt{x^2+1} \right) + c \quad (3)$$

$$\arctan(e^x) + c \quad (4)$$

$$-\frac{1}{3(\ln x)^3} + c \quad (5)$$

$$\arcsin(\ln x) + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} (x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) + c \quad (7)$$

$$3e^{\sqrt[3]{x}} (\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2) + c \quad (8)$$

$$\ln \left| \left( x + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left( x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}} \right| + c \quad (9)$$

$$x^2 \sin(x^2+1) + \cos(x^2+1) + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{18} \left( \frac{(3x^2-1)^{16}}{16} + \frac{(3x^2-1)^{15}}{15} \right) + c \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} \left( \ln x + \frac{1}{2} \sin(2 \ln x) \right) + c \quad (12)$$

$$\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right| + c \quad (13)$$

$$x(\ln^3 x - 3 \ln^2 x + 6 \ln x - 6) + c \quad (14)$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{x^4}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (15)$$

$$\frac{(\ln x)^5}{5} + c \quad (16)$$

$$\frac{(\arctan x)^3}{3} + c \quad (17)$$

$$\ln |\ln(\ln x)| + c \quad (18)$$

$$x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + c \quad (19)$$

$$-\frac{1}{4} \left( -\frac{1}{1-x^4} - \ln |1-x^4| \right) + c \quad (20)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^{2x}} - 1}{\sqrt{1+e^{2x}} + 1} \right| + c \quad (21)$$

$$\frac{x}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + c \quad (22)$$

$$6(\sqrt[6]{x} - \arctan \sqrt[6]{x}) + c \quad (23)$$

$$\frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^7}{7} - \frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^4}{4} + c \quad (24)$$

# קלקולוס 1

פרק 16 - אינטגרלים של פונקציות רציונליות

תוכן העניינים

- 176 ..... 1. אינטגרלים של פונקציה רציונלית.
- 178 ..... 2. חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית.
- 179 ..... 3. אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית.

## אינטגרלים של פונקציה רציונלית

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{2-x}{x^2+5x} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4} \quad (3)$$

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{x}{x^2+5x+6} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36} dx \quad (8)$$

$$\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{5-x}{x^3+x^2} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)} \quad (12)$$

$$\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x} dx \quad (11)$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} dx \quad (14)$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{2x^2+x-1}{(x^2+1)(x-3)} dx \quad (15)$$

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2+4)^2} dx \quad (19)$$

## תשובות סופיות

$$\ln|x-4| - \frac{5}{x-4} + c \quad (1)$$

$$-\frac{1}{3(x-6)^6} - \frac{1}{(x-1)^7} + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c \quad (3)$$

$$\frac{2}{5} \ln|x| - \frac{7}{5}|x+5| + c \quad (4)$$

$$3 \ln|x+3| - 2 \ln|x+2| + c \quad (5)$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2}|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + c \quad (6)$$

$$\ln|x+1| + 2 \ln|x+2| + 3 \ln|x-3| + c \quad (7)$$

$$\ln|x+3| + \ln|x-3| - \ln|x+2| - \ln|x-2| + c \quad (8)$$

$$\ln|x-2| - \frac{4}{x-2} - \ln|x+2| + c \quad (9)$$

$$6 \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{5}{x} + c \quad (10)$$

$$4 \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + \frac{3}{x+3} + c \quad (11)$$

$$2 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + c \quad (12)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (13)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3/4}} \arctan \left( \frac{x+0.5}{\sqrt{3/4}} \right) + c \quad (14)$$

$$\arctan x + 2 \ln|x-3| + c \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \ln|x+2| + c \quad (16)$$

$$\arctan x - \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{x}{2} \right) + c \quad (17)$$

$$\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + c \quad (18)$$

$$\frac{1}{16} \left( \arctan \left( \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin \left( \arctan \left( \frac{x}{2} \right) \right) \right) + c \quad (19)$$

## חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{3x^3 - 5x^2 + 4x - 2}{x-1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 8x}{x+4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{12x^3 - 11x^2 + 6x - 1}{4x-1} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + x}{(x-1)^2} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{x^4 - 4x^2 + x + 1}{x^2 - 4} dx \quad (5)$$

### תשובות סופיות

$$x^3 - x^2 + 2x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - x^2 + c \quad (2)$$

$$x^3 - x^2 + x + c \quad (3)$$

$$\frac{x^3}{3} + \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c \quad (4)$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{3}{4} \ln|x-2| + \frac{1}{4} \ln|x+2| + c \quad (5)$$

## אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-x}}$$
 (1)

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$$
 (2)

$$\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x-1}} dx$$
 (3)

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1} dx$$
 (4)

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx$$
 (5)

$$\int \sqrt{1+e^x} dx$$
 (6)

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx$$
 (7)

## תשובות סופיות

$$-1.5 \ln |1 - \sqrt[3]{x^2}| + c \quad (1)$$

$$6 \left( \frac{(1 + \sqrt[6]{x})^3}{3} - \frac{3(1 + \sqrt[6]{x})}{2} + 3(1 + \sqrt[6]{x}) - \ln |1 + \sqrt[6]{x}| \right) + c \quad (2)$$

$$4 \left( \frac{(1 + \sqrt[4]{x-1})^2}{3} - \frac{3(1 + \sqrt[4]{x-1})^2}{2} + 3(1 + \sqrt[4]{x-1}) - \ln |1 + \sqrt[4]{x-1}| \right) + c \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} \sqrt[3]{x} + \ln |\sqrt[3]{x} + 1| - \frac{1}{2} \ln \left( (\sqrt[3]{x} - 0.5)^2 + 0.75 \right) - \sqrt{3} \arctan \left( \frac{2\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{3}} \right) + c \quad (4)$$

$$-\ln |1 + e^x| + x + c \quad (5)$$

$$2\sqrt{1 + e^x} + \ln \left| \frac{\sqrt{1 + e^x} - 1}{\sqrt{1 + e^x} + 1} \right| + c \quad (6)$$

$$\ln \left| \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} \right| + c \quad (7)$$

## נוסחאות

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

# קלקולוס 1

פרק 17 - אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים טריגונומטריים - מבוא ..... (ללא ספר)
2. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי זהויות ..... 181
3. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבות פשוטות ..... 183
4. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבה כללית ..... 184
5. הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים ..... 185
6. חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות ..... 188

## אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי זהויות

$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$
$\int \tan x dx = -\ln  \cos x  + c$	$\int \tan(ax+b)dx = -\frac{1}{a} \ln  \cos(ax+b)  + c$
$\int \cot x dx = \ln  \sin x  + c$	$\int \cot(ax+b)dx = \frac{1}{a} \ln  \sin(ax+b)  + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$

זכרו כי :

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

- |  |   |
|--|---|
| $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$ <b>(2)</b>                           | $\int \left( \sin 2x - 4 \cos \frac{x}{3} \right) dx$ <b>(1)</b>          |
| $\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$ <b>(4)</b>                       | $\int \frac{dx}{\sin^2 10x}$ <b>(3)</b>                                   |
| $\int (\sin x + \cos x)^2 dx$ <b>(6)</b>                         | $\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx$ <b>(5)</b>                                |
| $\int \tan^2 x dx$ <b>(8)</b>                                    | $\int \sin x \cos x \cos 2x dx$ <b>(7)</b>                                |
| $\int \sin 7x \cos 5x dx$ <b>(10)</b>                            | $\int \frac{dx}{(\sin x \cos x)^2}$ <b>(9)</b>                            |
| $\int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx$ <b>(12)</b>                      | $\int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x) dx$ <b>(11)</b>                   |
| $\int \sin^2 4x dx$ <b>(14)</b>                                  | $\int \cos^2 x dx$ <b>(13)</b>  |
| $\int \sin^3 4x dx$ <b>(16)</b>                                  | $\int \cos^3 x dx$ <b>(15)</b>  |
| $\int \sin^4 4x dx$ <b>(18)</b>                                  | $\int \cos^4 x dx$ <b>(17)</b>  |
| $\int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x} dx$ <b>(20)</b> | $\int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx$ <b>(19)</b>                     |
| $\int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx$ <b>(22)</b>                | $\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1} dx$ <b>(21)</b> |
| $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$ <b>(24)</b>                          | $\int \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx$ <b>(23)</b>             |

## תשובות סופיות

$$\frac{1}{4} \tan 4x + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x + c \quad (4)$$

$$x - \frac{1}{2} \cos 2x + c \quad (6)$$

$$\tan x - x + c \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} \left( -\frac{1}{12} \cos 12x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) + c \quad (10)$$

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{16} \sin 4x + c \quad (12)$$

$$\frac{x}{2} - \frac{\sin 8x}{16} + c \quad (14)$$

$$-\frac{3}{16} \cos 4x + \frac{1}{48} \cos 12x + c \quad (16)$$

$$\frac{3}{8}x - \frac{1}{16} \sin 8x + \frac{1}{128} \sin 16x + c \quad (18)$$

$$2 \sin x + c \quad (20)$$

$$-\cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + c \quad (22)$$

$$-\frac{1}{2} \cos 2x - 12 \sin \frac{x}{3} + c \quad (1)$$

$$-10 \cot 10x + c \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x + c \quad (5)$$

$$-\frac{1}{16} \cos 4x + c \quad (7)$$

$$\tan x - \cot x + c \quad (9)$$

$$\sin x + c \quad (11)$$

$$\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c \quad (13)$$

$$\frac{3}{4} \sin x + \frac{1}{12} \sin 3x + c \quad (15)$$

$$\frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \quad (17)$$

$$-\cot x - x + c \quad (19)$$

$$\ln |\cos x| + c \quad (21)$$

$$3x + \frac{1}{2} \sin 2x - 2 \sin x + c \quad (23)$$

$$\frac{1}{8} \left( \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x - \frac{1}{24} \sin 6x \right) + c \quad (24)$$

## אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבות פשוטות

$$\int f(\sin x) \cdot \cos x dx = \int f(t) dt \quad \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ (x = \arcsin t) \end{array} \right.$$

$$\int f(\cos x) \cdot \sin x dx = \int f(t) (-dt) \quad \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ (x = \arccos t) \end{array} \right.$$

זכרו כי :

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int (\cos^3 x + \cos x - 2) \sin x dx \quad (2)$$

$$\int (\sin^2 x + \sin x + 2) \cos x dx \quad (1)$$

$$\int \sin^3 2x dx \quad (4)$$

$$\int \cos^3 x dx \quad (3)$$

$$\int \sin^5 x \cos^4 x dx \quad (6)$$

$$\int \sin^4 x \cos^5 x dx \quad (5)$$

$$\int \tan^5 x dx \quad (8)$$

$$\int \cos^5 x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} \quad (10)$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{2 \sin x}{\cos 2x + 4 \cos x + 7} dx \quad (12)$$

$$\int \sin 2x \cdot e^{\cos x} dx \quad (11)$$

### תשובות סופיות

$$\frac{-\cos^4 x}{4} - \frac{\cos^2 x}{2} + 2 \cos x + c \quad (2)$$

$$\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^2 x}{2} + 2 \sin x + c \quad (1)$$

$$-\frac{1}{2} \left( \cos 2x - \frac{\cos^3 2x}{3} \right) + c \quad (4)$$

$$\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c \quad (3)$$

$$-\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{2}{7} \cos^7 x - \frac{1}{9} \cos^9 x + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{5} \sin 5x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + c \quad (5)$$

$$\frac{1}{4 \cos^4 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \ln |\cos x| + c \quad (8)$$

$$\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{\sin^5 x}{5} + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + c \quad (9)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{\cos x + 1}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (12)$$

$$-2e^{\cos x} (\cos x - 1) + c \quad (11)$$

## אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבה כללית

$$\int f(\sin x, \cos x) dx = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt \quad \text{זכרו כי:}$$

$$\left. \begin{array}{l} t = \tan \frac{x}{2} \\ (x = 2 \arctan t) \end{array} \right\}$$

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x} \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} \quad (2)$$

$$\int \frac{\cos x}{2 - \cos x} dx \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$-\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1} + c \quad (1)$$

$$\ln \left| 1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right| + c \quad (2)$$

$$-x + 2 \left( \frac{2}{3\sqrt{1/3}} \arctan \left( \frac{\tan(x/2)}{\sqrt{1/3}} \right) \right) + c \quad (3)$$

## הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים

$$\int f(\sqrt{a^2 - x^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = a \sin t \\ (t = \arcsin \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f(a \cos t) \cdot (a \cos t dt)$$

$$\int f(\sqrt{a^2 + x^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = a \tan t \\ (t = \arctan \frac{x}{a}) \end{array} \right| = \int f\left(\frac{a}{\cos t}\right) \cdot \left(\frac{a}{\cos^2 t} dt\right)$$

$$\int f(\sqrt{x^2 - a^2}) dx = \left. \begin{array}{l} x = \frac{a}{\cos t} \\ (t = \arccos \frac{a}{x}) \end{array} \right| = \int f(a \tan t) \cdot \left(\frac{-a \sin t}{\cos^2 t} dt\right)$$

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4-x^2}} \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} dx \quad (2)$$

$$\int \sqrt{4x^2-1} dx \quad (3)$$

הערה: כדי לפתור את השאלה צריך לדעת "אינטגרלים של פונקציות רציונליות".

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}} \quad (4)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (5)$$

$$\int \sqrt{x^2+2x-3} dx \quad (6)$$

$$\int \sqrt{-6x - x^2} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{(4+x^2)^2} \quad (8)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^{3/2}} \quad (9)$$

$$\int \sqrt{x^2+1} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx \quad (11)$$

## תשובות סופיות

$$-\frac{1}{4} \cot\left(\arcsin \frac{x}{2}\right) + c \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1 - \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)} \right| + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{8} \left[ \ln \left| 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \right| + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} - \ln \left| 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \right| - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} \right] + c \quad (3)$$

$$\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right) + c \quad (4)$$

$$2 \left\{ \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(2 \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \right\} + c \quad (5)$$

$$\ln \left| 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}} \right| + \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}}} - \ln \left| 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}} \right| - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(x+1)^2}}} + c \quad (6)$$

$$\frac{9}{2} \left\{ \arcsin \frac{x+3}{3} + \frac{1}{2} \sin\left(2 \arcsin \frac{x+3}{3}\right) \right\} + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{16} \left\{ \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(2 \arctan \frac{x}{2}\right) \right\} + c \quad (8)$$

$$\frac{1}{4} \sin\left(\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) + c \quad (9)$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \ln \left| \sqrt{1+x^2} + x \right| + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2+1} \right\} \quad (10)$$

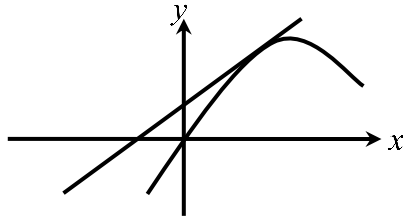
$$\ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| + c \quad (11)$$

## חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות

### שאלות

(1) נתונה הפונקציה  $f(x) = x + 2\sin x$ .

בתחום שבין ראשית הצירים לנקודת המקסימום הראשונה מימינה העבירו לפונקציה משיק ששיפועו 1.

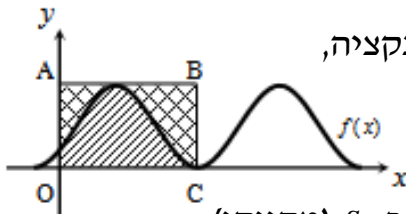


א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- $x$ , ברביע הראשון והשני.

(2) באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה  $f(x) = \frac{\sin 2x + 1}{2}$ ,

בתחום  $-0.25\pi \leq x \leq 1.75\pi$ .



נעביר משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה, ונעלה אנך לציר ה- $x$  מנקודת החיתוך הראשונה של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  בתחום הנתון, המסומנת ב-C, כך שנוצר המלבן ABCO.

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים יסומן ב- $S_1$  (מקווקו).

השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה- $y$  יסומן ב- $S_2$ .

א. מצאו את משוואת הצלע AB של המלבן.

ב. חשבו את היחס  $\frac{S_1}{S_2}$ .

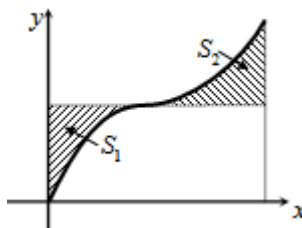
(3) באיור שלהלן נתונה הפונקציה  $y = \sin x + x$ , בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

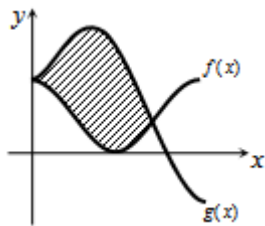
א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות בתחום הנתון? הוכיחו זאת.

ב. נוריד אנך מגרף הפונקציה לציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 2\pi$ ,

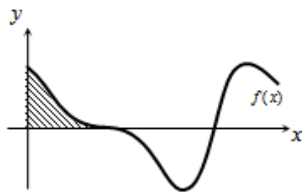
ונעביר ישר המקביל לציר ה- $x$  מהנקודה שמאפסת את הנגזרת.

הראו כי השטחים המסומנים בשרטוט,  $S_1$  ו- $S_2$ , שווים.

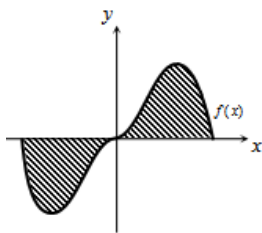




- 4** באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות  
 $f(x) = \cos^2 x$  ו- $g(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$ , בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ .  
 א. מצאו את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.  
 ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים.  
 השתמשו בזהות  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ .



- 5** הנגזרת של פונקציה  $f(x)$  היא  $f'(x) = -\cos 2x - \sin x$ .  
 א. מצאו את שיעורי ה- $x$  של הנקודות המקיימות  
 $f'(x) = 0$ , בתחום  $0 < x < 2\pi$ .  
 ידוע כי הנקודה המקיימת  $f'(x) = 0$ , אשר אינה קיצון,  
 נמצאת על ציר ה- $x$ .  
 ב. מצאו את הפונקציה  $f(x)$ .  
 ג. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה בתחום הנתון.  
 חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.



- 6** נתונה הפונקציה  $y = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$ .  
 א. הוכיחו כי נגזרת הפונקציה היא  $y' = x^2 \sin x$ .  
 באיור שלהלן נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2 \sin x$ ,  
 בתחום  $-\pi \leq x \leq \pi$ .  
 ב. הראו כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.  
 ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$  בתחום הנתון.

- 7** נתונה הפונקציה  $f(x) = a \cos x + b \sin x$ , כאשר  $a, b$  פרמטרים.

הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = \frac{\pi}{4}$ ,

והיא חיובית בתחום  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ .

גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה בתחום  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  הוא  $2\sqrt{2} - 2$ .

מצאו את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

### תשובות סופיות

א.  $y = x + 2$       ב.  $\pi$  יח"ש.      (1)

א.  $y = 1$       ב.  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 2}{3\pi - 2} = 1.538$       (1)

א. אין נקודת קיצון, הנקודה  $(\pi, \pi)$  היא נקודת פיתול.      (2)

ב.  $S = 0.5\pi^2 - 2 = 2.934$

א.  $(0, 1)$ ,  $(\frac{2\pi}{3}, \frac{1}{4})$       ב.  $S = 1.5 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.299$       (3)

א.  $x = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$       ב.  $f(x) = -\frac{1}{2} \sin 2x + \cos x$       ג.  $\frac{1}{2}$  יח"ש.      (4)

א. שאלת הוכחה.      ב. שאלת הוכחה.      ג.  $S = 2(\pi^2 - 4) \approx 11.74$       (5)

$b = -2, a = 2$       (6)

## נספח – זהויות בטריגו

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \end{cases}$$

# קלקולוס 1

פרק 18 - האינטגרל המסוים, אינטגרביליות לפי רימן ולפי דארבו

תוכן העניינים

- 192 ..... 1. האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדו"א
- 198 ..... 2. מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים
- 201 ..... 3. האינטגרל המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות

## האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדו"א

### שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-9:

$$\int_1^4 (x^2 - 4x + 1) dx \quad (1)$$

$$\int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5} dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 x e^{-x} dx \quad (3)$$

$$\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (4)$$

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx \quad (5)$$

$$\int_0^\pi \cos^2 10x dx \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases} \text{ כאשר } \int_0^4 f(x) dx \quad (7)$$

$$\int_{-1}^4 \sqrt{4+|x-1|} dx \quad (8)$$

$$\int_0^2 \max\{x, x^2\} dx \quad (9)$$

(10) הוכיחו כי :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx \quad \text{א.}$$

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx \quad \text{ב.}$$

(11) הוכיחו שלכל פונקציה רציפה  $f$  :

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx \quad \text{א.}$$

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx \quad \text{ב.}$$

(12) תהי  $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  מוגדרת על ידי  $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt$ .

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 2$$

פתרו את המשוואה

(13) ללא חישוב האינטגרלים, חשבו את הערך של  $\int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_1^{1/x} \frac{1}{1+t^2} dt$ 

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[4]{\sin x}}{\sqrt[4]{\sin x} + \sqrt[4]{\cos x}} dx \quad \text{חשבו: (14)}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \quad \text{חשבו: (15)}$$

(16) נתונה פונקציה רציפה  $f$ . הוכיחו :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \quad \text{א. אם } f \text{ זוגית, אזי}$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0 \quad \text{ב. אם } f \text{ אי-זוגית, אזי}$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 17-18 :

$$\int_{-1}^1 (x^3 + x^5) \cos x dx \quad (17)$$

$$\int_{-4}^4 \frac{\sin x + 1}{x^2 + 1} dx \quad (18)$$

(19) נתון כי  $f(x)$  פונקציה רציפה ואי-זוגית לכל  $x$ , ונתון כי  $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$ .

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln \left( \frac{1-f(x)}{1+f(x)} \right) dx$$

חשבו את האינטגרל

(20) חשבו את ערך האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx \quad \text{א.}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{f(\cos x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx \quad \text{ב.}$$

$$(n \in \mathbb{N}) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \tan^n x} dx \quad \text{ג.}$$

(21) (אזהרה לגבי שיטת ההצבה)

$$\text{א. חשבו את האינטגרל } \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx \text{ , בעזרת ההצבה } t = \frac{1}{x}$$

$$\text{ב. חשבו את האינטגרל } \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx \text{ ישירות.}$$

ג. בסעיפים א' ו-ב' קיבלנו תשובות שונות. הסבירו את הסתירה.

$$(22) \text{ הוכיחו כי } \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx$$

(23) ענו על הסעיפים הבאים :

$$\text{א. בעזרת ההצבה } t = \tan x \text{ חשבו את האינטגרל } \int \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$\text{ב. חשבו את ערך האינטגרל } \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$(24) \text{ חשבו את ערך האינטגרל } \int_0^{\pi} \frac{x}{1 + \cos^2 x} dx$$

(25) תהי  $f(x)$  פונקציה גזירה פעמיים בקטע  $[a, b]$ .

נניח כי הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $x = a$  יוצר זווית  $\frac{\pi}{3}$  עם הכיוון

החיובי של ציר  $x$  והישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $x = b$  יוצר זווית  $\frac{\pi}{4}$  עם הכיוון החיובי של ציר  $x$ .

$$\text{חשבו את ערך האינטגרל } \int_{e^a}^{e^b} \frac{f''(\ln x)}{x} dx$$

(26) הוכיחו:

אם  $f$  פונקציה רציפה ומחזורית על כל הישר ואם  $T$  המחזור של  $f$

$$\text{אז לכל מספר ממשי } a \text{ מתקיים } \int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

(27) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם  $f$  ו- $g$  פונקציות רציפות ב- $[a, b]$ , ואם  $\int_a^b f(t) dt = 0$  וגם

$$\int_a^b g(t) dt = 0, \text{ אז } \int_a^b f(t) g(t) dt = 0$$

ב. אם  $f$  זוגית ואינטגרבילית בכל קטע,

$$\text{אז הפונקציה } g(x) = \int_0^x f(t) dt \text{ אי-זוגית.}$$

## תשובות סופיות

(1)  $-6$

(2)  $\ln\left(\frac{15}{8}\right)$

(3)  $-2e^{-1} + 1$

(4)  $\frac{1}{5}$

(5)  $\arctan 6 - \arctan 3$

(6)  $\frac{\pi}{2}$

(7)  $\frac{17}{12}$

(8)  $\frac{2}{3}(-16 + 6^{1.5} + 7^{1.5})$

(9)  $\frac{17}{6}$

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12)  $x = e^2$

(13)  $0$

(14)  $\frac{\pi}{4}$

(15)  $\frac{\pi^2}{4}$

(16) שאלת הוכחה.

(17)  $0$

(18)  $2 \arctan 4$

(19)  $0$

(20) א, ב, ג.  $\frac{\pi}{4}$

(21) א.  $0$  ב.  $\frac{\pi}{2}$  ג. ראו בסרטון.

(22) שאלת הוכחה.

(23) א.  $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + c$  ב.  $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

(24)  $\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$

(25)  $1 - \sqrt{3}$

**(26)** שאלת הוכחה.

**(27)** שאלת הוכחה.

## מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים

### שאלות

- (1) תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה אינטגרבילית, ונניח כי  $m \leq f(x) \leq M$  לכל  $x$  בקטע  $[a, b]$ . הוכיחו כי  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$ .

הוכיחו את אי-השוויונים בשאלות 10-2:

$$\frac{2}{41} \leq \int_{-1}^3 \frac{dx}{1+x^4} \leq 4 \quad (2)$$

$$6 \leq \int_{-4}^2 \sqrt{1+x^2} dx \leq 6\sqrt{17} \quad (3)$$

$$2 \leq \int_0^2 e^{x^2} dx \leq 2e^4 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} e^{-10} \leq \int_0^{10} \frac{e^{-x}}{x+10} dx \leq 1 \quad (5)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 4}} \leq \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{\ln 3}} \quad (6)$$

$$\frac{\pi}{14} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+4\sin^2 x} \leq \frac{\pi}{6} \quad (7)$$

$$\frac{2}{9} \leq \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3} \leq \frac{2}{7} \quad (8)$$

$$-\frac{1}{2} \leq \int_0^1 x \cdot \sin\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) dx \leq \frac{1}{2} \quad (9)$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \arctan\left(\frac{\sin x}{x+4}\right) dx \leq \frac{\pi^4}{6} \quad (10)$$

**(11)** תהי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה אינטגרבילית. בהסתמך על המשפט, שטוען כי גם  $|f|$  אינטגרבילית בקטע,

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

הוכיחו כי

**(12)** תהי  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה המקיימת  $|f(x)| \leq \int_0^x f(t) dt$  לכל  $x \in [0, 1]$ . הוכיחו כי  $f(x) = 0$  לכל  $x \in [0, 1]$ .

**(13)** תהי  $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ , כך ש- $f''(x) > 0$  לכל  $x \in [0, a]$ .

$$\int_0^a f(x) dx > af\left(\frac{a}{2}\right)$$

הוכיחו כי

תנו משמעות גיאומטרית לתוצאה שהתקבלה.

**(14)** תהי  $g$  פונקציה רציפה ב- $[a, b]$ , המקיימת  $\int_a^b |g(t)| dt = 0$ .

הוכיחו כי לכל  $x$  בקטע  $(a, b)$ , מתקיים  $g(x) = 0$ .

**(15)** תהי  $f$  פונקציה אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$ , המקיימת  $\int_a^b f(x) dx > 1$ .

הוכיחו שקיים  $x_0$  בקטע  $[a, b]$ , עבורו  $f(x_0) > \frac{1}{b-a}$ .

**(16)** יהי  $n$  מספר טבעי, ותהי  $f$  פונקציה מונוטונית עולה ואינטגרבילית בקטע  $[1, n]$ .

הוכיחו כי  $f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) \leq \int_1^n f(x) dx \leq f(2) + f(3) + \dots + f(n)$

**(17)** חשבו את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln k$

**(18)** הוכיחו שאם הפונקציה  $f$  רציפה בקטע  $[a, b]$ , גזירה בקטע  $(a, b)$

$$\text{וגם } f'(x) \leq M \text{ לכל } x \text{ בקטע זה, וכן } f(a) = 0, \text{ אז } \int_a^b f(x) dx \leq \frac{M(b-a)^2}{2}$$

**(19)** יהיו  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות אינטגרביליות.

נניח כי  $f$  עולה ו- $g$  אי-שלילית.

$$\text{הוכיחו שקיים } c \in [a, b], \text{ כך ש-} \int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_a^c g(x)dx + f(a)\int_c^b g(x)dx$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## האינטגרל המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-7:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + \dots + n^4}{n^5} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n} + \sin \frac{2}{n} + \dots + \sin \frac{n}{n}}{n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right\} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right\} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right\} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \dots + \sqrt{2n}}{n^{3/2}} \right\} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \dots + \frac{n}{(n+n)^2} \right] \quad (7)$$

$$\text{חשבו: } \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \right) \quad (8)$$

\* תרגיל זה רלוונטי רק למי שלמד אינטגרלים לא-אמיתיים.

חשבו את האינטגרלים בשאלות 9-12 על פי ההגדרה (של רימן):

תוכלו להיעזר בזהויות הבאות:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = 0.5n(n+1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha = \frac{\sin \frac{n}{2}\alpha \sin \frac{n+1}{2}\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\int_0^{\pi} \sin x dx \quad (12)$$

$$\int_0^1 x^3 dx \quad (11)$$

$$\int_0^1 x^2 dx \quad (10)$$

$$\int_0^1 x dx \quad (9)$$

$$(13) \text{ חשבו לפי ההגדרה של רימן את } \int_1^4 x^2 dx$$

$$(14) \text{ חשבו לפי ההגדרה של רימן את } \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

$$. P = \left\{ 1 = 2^{\frac{0}{n}}, 2^{\frac{1}{n}}, 2^{\frac{2}{n}}, 2^{\frac{3}{n}}, \dots, 2^{\frac{n}{n}} = 2 \right\} \text{ רמז: השתמשו בחלוקה הבאה של הקטע}$$

**תשובות סופיות**

$$\frac{1}{5} \quad (1)$$

$$1 - \cos 1 \quad (2)$$

$$\ln 2 \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{4} \quad (4)$$

$$\ln(1 + \sqrt{2}) \quad (5)$$

$$\frac{2^{1.5}}{1.5} - \frac{2}{3} \quad (6)$$

$$\ln 2 \quad (7)$$

$$-1 \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} \quad (9)$$

$$\frac{1}{3} \quad (10)$$

$$\frac{1}{4} \quad (11)$$

$$2 \quad (12)$$

$$21 \quad (13)$$

$$0.5 \quad (14)$$

# קלקולוס 1

פרק 19 - שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)

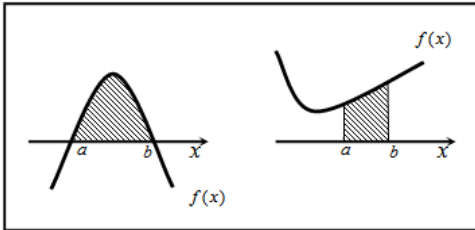
תוכן העניינים

204	.....	1. חישוב שטחים
224	.....	2. חישוב שטחים ביחס לציר ה-y
225	.....	3. אורך קשת

## חישוב שטחים

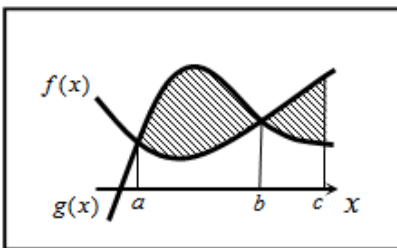
## חישוב שטחים באמצעות אינטגרל (מקרים פרטיים)

1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- $x$  :



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

2. שטח הכלוא בין שני גרפים, כך שגרף אחד כולו מעל השני :

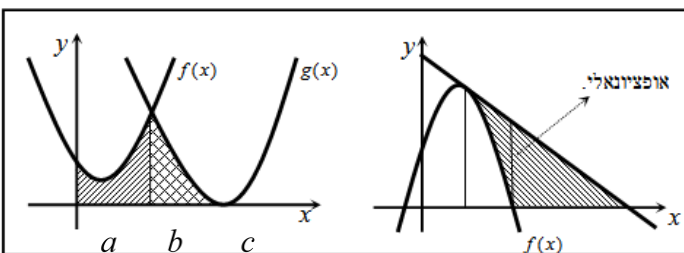


$$S_1 = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$

$$S_2 = \int_b^c (f(x) - g(x)) dx$$

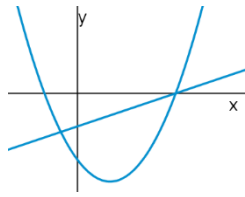
$$S = S_1 + S_2$$

3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- $x$  :

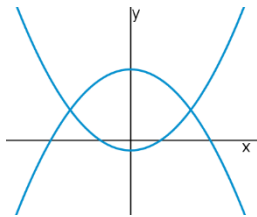


$$S = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c g(x) dx$$

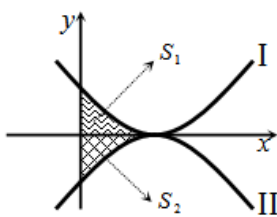
## שאלות



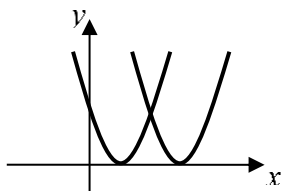
- (1) נתונות הפונקציות  $f(x) = x^2 - 4x - 12$  ו-  $g(x) = x - 6$ .  
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של  $f$  ו-  $g$ .



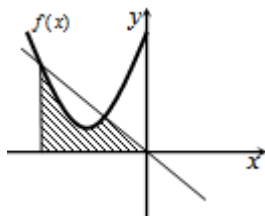
- (2) נתונות הפונקציות  $f(x) = x^2 - 1$ ,  $g(x) = 7 - x^2$ .  
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של  $f$  ו-  $g$ .



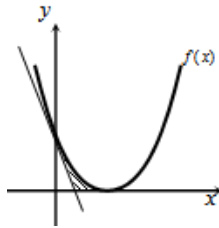
- (3) נתונות הפונקציות  $f(x) = (x-2)^2$  ו-  $g(x) = -(x-2)^2$ ,  
 כמתואר באיור.  
 א. התאימו בין הפונקציות לגרפים I ו-II.  
 ב. נסמן את השטחים שבין כל פונקציה והצירים  
 ב-  $S_1$  ו-  $S_2$ , כמתואר באיור.  
 הראו כי השטחים  $S_1$  ו-  $S_2$  שווים זה לזה.



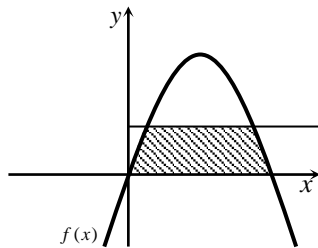
- (4) נתונות הפונקציות  $f(x) = x^2 - 2x + 1$ ,  $g(x) = x^2 - 6x + 9$ .  
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- $x$ .



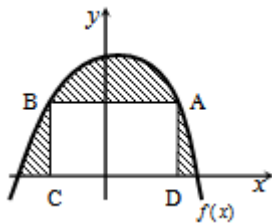
- (5) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2 + 6x + 12$ .  
 ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה  
 בנקודה שבה  $x = -4$ , כמתואר באיור.  
 א. מצאו את משוואת הישר.  
 ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.  
 ג. מצאו את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  והישר  $x = -4$ .



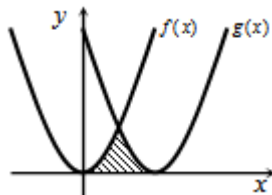
- (6) נתונה הפונקציה  $f(x) = (x-2)^2$ .  
 בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$  נעביר משיק.  
 א. מצאו את משוואת המשיק.  
 ב. מצאו את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$ .  
 ג. חשבו את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- $x$  (השטח המסומן).



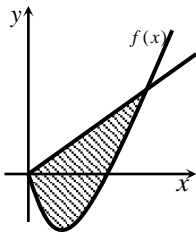
- (7) נתונה הפונקציה  $f(x) = kx - x^2$ .  
 הישר  $y = 9$  חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.  
 ידוע כי שיעור ה- $x$  של אחת מנקודות אלה הוא  $x = 9$ .  
 א. מצאו את ערך הפרמטר  $k$ .  
 ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.  
 ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- $x$  (השטח המסומן).



- (8) הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$ , המתוארת באיור שלהלן, היא  $f'(x) = 3 - 2x$ . ישר  $AB$ , שמשוואתו  $y = 6$ , חותך את גרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודות  $A$  ו- $B$ . מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- $x$ , כך שנוצר מלבן  $ABCD$ . ידוע ששיעור ה- $x$  של הנקודה  $A$  הוא  $x = 4$ .  
 א. מצאו את הפונקציה  $f(x)$ .  
 ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- $x$  (השטח המסומן).



- (9) באיור שלהלן חותך גרף הפונקציה  $f(x) = x^2$  את גרף הפונקציה  $g(x)$ , בנקודה שבה  $x = 2$ . הנגזרת של הפונקציה  $g(x)$  היא  $g'(x) = 2x - 8$ .  
 א. מצאו את הפונקציה  $g(x)$ .  
 ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- $x$  (השטח המסומן).



10 באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה  $f(x)$  והישר  $y = 2x$ .

נגזרת הפונקציה  $f(x)$  היא  $f'(x) = 2x - 6$ ,

וידוע כי הישר חותך את הפונקציה

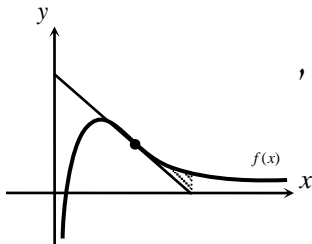
בנקודה שבה ערך ה- $y$  הוא  $y = 16$ .

א. מצאו את הפונקציה  $f(x)$ .

ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן, מצאו אותן.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.

11 ענו על הסעיפים הבאים:



א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ ,

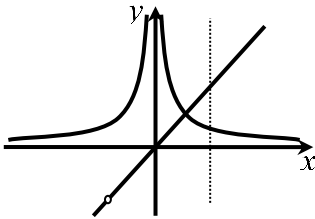
מצאו את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.

ב. באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציה

והמשיק שמצאת בסעיף א'.

חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק, ואנך לציר ה- $x$ ,

היוצא מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$ .

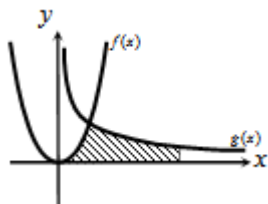


12 נתונות שתי פונקציות  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $g(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + 2}$ .

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,

הישר  $x = 2$  וציר ה- $x$ .

13 באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות



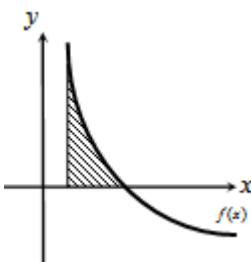
$f(x) = 2x^2$  ו- $g(x) = \frac{a}{x^2}$  (קבוע,  $a > 0$ ), בתחום  $x > 0$ .

ידוע כי הגרפים נחתכים ברביע הראשון,

בנקודה הנמצאת על הישר  $y = 4x$ .

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים ואת  $a$ .

ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- $x$  והישר  $x = 4$ .



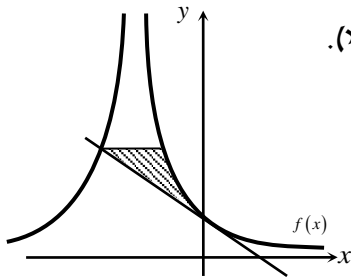
14 גרף הפונקציה  $f(x) = \frac{a - x^2}{x^2}$  (קבוע  $a$ )

חותך את ציר ה- $x$  בנקודה  $(6, 0)$ .

א. מצאו את  $a$  וכתבו את הפונקציה.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,

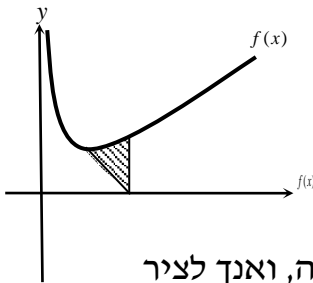
ציר ה- $x$  והישר  $x = 2$ .



15 נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{A}{(2x+A)^2}$  (פרמטר חיובי).

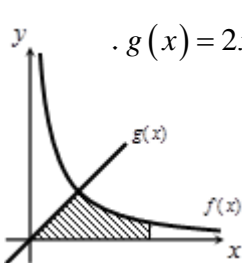
ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ , הוא  $-\frac{1}{9}$ .

- א. מצאו את ערך הפרמטר  $A$ .
- ב. כתבו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך עם ציר ה- $y$ .
- ג. הראו כי המשיק חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = -4.5$ .
- ד. העבירו ישר אופקי מנקודת החיתוך של המשיק וגרף הפונקציה מהסעיף הקודם, ומצאו את נקודת החיתוך הנוספת של ישר זה עם גרף הפונקציה.
- ה. חשבו את השטח כלוא בין המשיק, הישר וגרף הפונקציה (היעזרו באיור).



16 באיור שלהלן נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + x$ .

- א. מצאו את נקודת המינימום שלה.
- ב. מנקודת המינימום של הפונקציה נעביר ישר לנקודה  $(2,0)$ , שעל ציר ה- $x$ .
- מצאו את השטח הכלוא בין ישר זה, גרף הפונקציה, ואנך לציר ה- $x$ , היוצא מהנקודה  $(2,0)$  עד לנקודת החיתוך עם גרף הפונקציה.

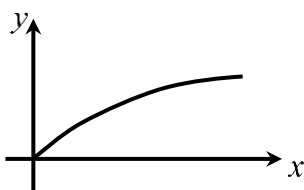


17 באיור הבא מתוארים גרפים של הפונקציות  $f(x) = \frac{16}{\sqrt{x}}$  ו- $g(x) = 2x - 1$ .

- א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.
- ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- $x$  והישר  $x = 9$ .

18 נתונה הפונקציה  $f(x) = (x-6)\sqrt{x}$ .

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודת המינימום שלה וציר ה- $y$ .



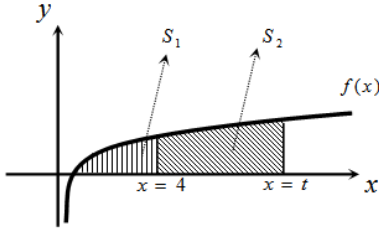
19 נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$  ברביע הראשון.

לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים, חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק והישר  $x = \sqrt{3}$ .

**(20)** באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה  $f(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

נעביר שני אנכים לציר ה- $x$ ,  $x = 4$  ו- $x = t$  (כאשר  $t > 4$ ).  
 נסמן את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$  ב- $S_1$ ,  
 ואת השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  והאנכים ב- $S_2$ .

ידוע כי  $8S_1 = S_2$ .  
 מצאו את  $t$ .



**(21)** נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x\sqrt{x} - 8}{\sqrt{x}}$ .

א. ענו על הסעיפים הבאים:

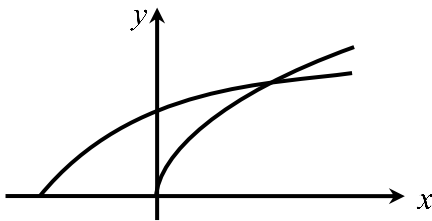
- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- הראו כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. נעביר משיק לגרף הפונקציה ששיפועו הוא  $m = \frac{17}{16}$ .

מצאו את נקודת ההשקה.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  ואנך לציר ה- $x$  מנקודת ההשקה שמצאת בסעיף הקודם.

**(22)** נתונות שתי פונקציות  $f(x) = \sqrt{x+b}$ ,  $g(x) = \sqrt{2x}$ , כאשר  $(b > 0)$ .



גודל השטח הכלוא בין הפונקציות

וציר ה- $x$  הוא  $2\frac{2}{3}$  יחידות שטח.

מצאו את ערכו של הפרמטר  $b$ .

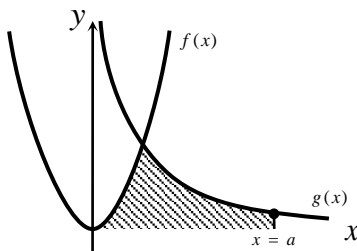
**(23)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות  $f(x) = x^2$  ו- $g(x) = \frac{32}{\sqrt{x}}$ .

ברביע הראשון.

נעביר ישר  $x = a$ , החותך את גרף הפונקציה  $g(x)$   
 ויוצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים,  
 ציר ה- $x$  והישר (השטח המסומן).

ידוע כי שטח זה שווה ל- $85\frac{1}{3}$ .

מצאו את  $a$ .



**(24)** באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$  ו-  $g(x) = -\frac{3}{\sqrt{x}}$ .

נעביר שני ישרים  $x = k$  ו-  $x = t$ , אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.

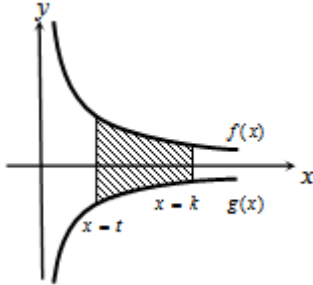
ידוע כי  $AB = 2CD$ .

א. הראו כי  $k = 4t$ .

ב. השטח הכלוא בין הפונקציות

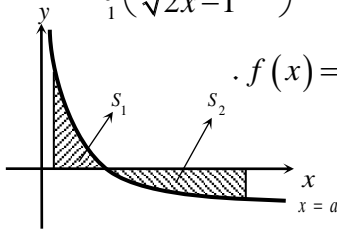
לבין הישרים  $x = k$  ו-  $x = t$ , הוא  $S = 12$ .

מצאו את  $t$ .



**(25)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו עבור איזה ערך של  $a$ ,  $(a > 1)$  יתקיים  $\int_1^a \left( \frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1 \right) dx = 0$ .



ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1$ .

נעביר שני אנכים לציר ה- $x$ ,  $x = 1$  ו-  $x = 13$ ,

כך שנוצרים השטחים  $S_1$  ו-  $S_2$ .

מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

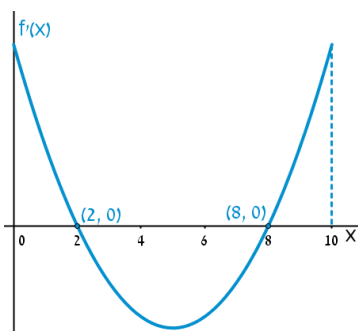
ג. ענו על תתי-הסעיפים הבאים:

1. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,

ציר ה- $x$  והאנך  $x = 1$ , כלומר את  $S_1$ .

2. היעזרו בתוצאה שהתקבלה ובסעיף א' וקבעו ל כמה שווה השטח  $S_2$ .

נמקו.



**(26)** הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת בתחום  $0 \leq x \leq 10$ .

בציור מתואר גרף הנגזרת  $f'(x)$ .

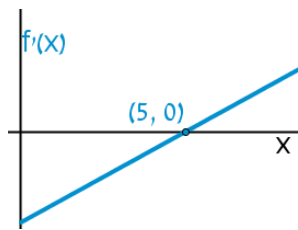
א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ ,

אם  $f(2) = 6$ ,  $f(0) = -4$ ,  $f(5) = 0$ ,

וכן  $f(10) > 0$ .

ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י גרף הנגזרת והצירים

ברביע הראשון, עד לנקודה שבה  $x = 2$ .



**(27)** להלן גרף הפונקציה  $f'(x)$ , אשר חותך את

ציר ה- $x$  בנקודה אחת בלבד,  $(5, 0)$ .

א. מצאו את התחומים שבהם  $f'(x)$  חיובית,

ואת התחומים שבהם היא שלילית.

ב. קבעו מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .

ג. כתבו את נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , אם ידוע כי שיעור ה- $y$

שלה הוא  $y = -2$ .

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ , אם ידוע כי גרף הפונקציה

חותך את ציר ה- $y$  כאשר  $y = 8$ .

ה. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת  $f'(x)$  והצירים.

**(28)** באיור שלהלן מתוארת הנגזרת  $f'(x)$ .

א. האם לפונקציה  $f(x)$  יש נקודות קיצון? נמקו.

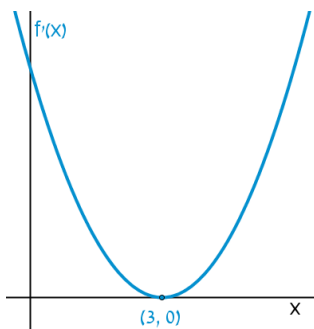
ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ ,

אם ידוע כי  $f(3) = 4$ , וכי היא חותכת את

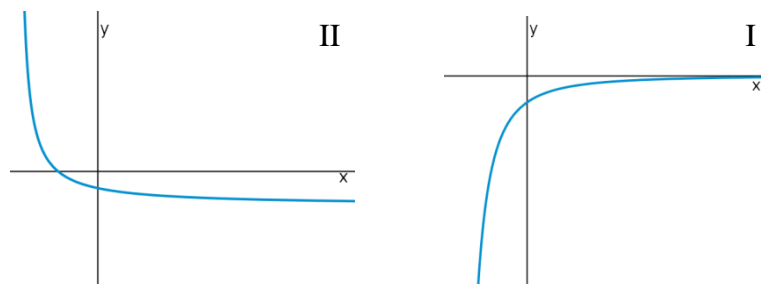
ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = -5$ .

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת  $f'(x)$

והצירים ברביע הראשון.



**(29)** באיורים שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו- $f'(x)$ :

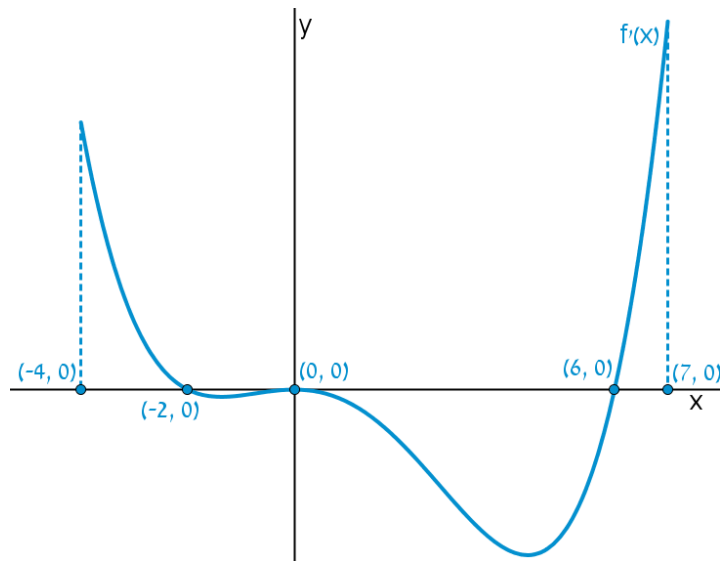


א. זהו איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמקו.

ב. נתון  $f(10) = -3$ , וכי  $f(x)$  חותכת את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = -2$ .

מהו השטח המוגבל בין גרף הנגזרת  $f'(x)$ , הצירים והישר  $x = 10$ ?

30 נתון גרף הנגזרת  $f'(x)$  :

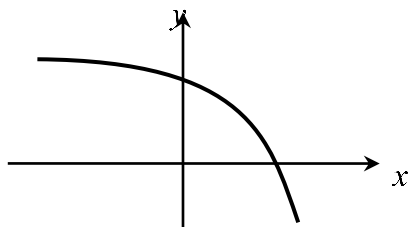


- א. שרטטו את גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום  $-4 \leq x \leq 7$ , לפי הנתונים  $f(0) = -2$ ,  $f(-2) = 7.6$  ו-  $f(6) = -606.8$ .
- ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- $x$  ברביע השלישי.
- ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- $x$  ברביע הרביעי.

## פונקציות מעריכיות

## אינטגרלים מייזים של פונקציות מעריכיות

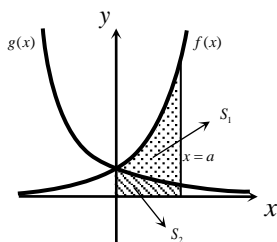
אינטגרלים יסודיים	אינטגרלים של פונקציות מורכבות
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$



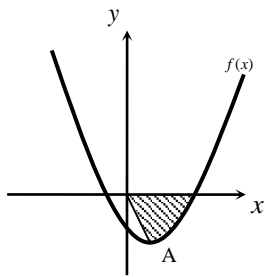
- (31)** נתונה הפונקציה  $f(x) = 5 - e^x$ .  
 העבירו לפונקציה משיק ששיפועו  $-e$ .  
 חשבו את גודל השטח הכלוא בין  
 הפונקציה, המשיק וציר ה- $x$ .  
 ניתן להשאיר  $e$  ו- $\ln$  בתשובה.

- (32)** נתונה הפונקציה  $f(x) = e^{bx}$ , כאשר  $b > 0$ .  
 גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר בראשית הצירים  
 וציר ה- $y$  הוא  $\frac{e-2}{4}$ .  
 מצאו את ערכו של הפרמטר  $b$ .

- (33)** נתונות הפונקציות  $f(x) = e^{-x}$  ו- $g(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ .  
 מנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה  $g(x)$  ברביע הראשון הורידו אנך לשני  
 הצירים. המשך האנך לציר ה- $y$  חותך את הפונקציה  $f(x)$ ,  
 ומנקודת החיתוך יורד אנך נוסף לציר ה- $x$ , כך שנוצר מלבן.  
 הוכיחו כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא  $\frac{3}{e}$ .

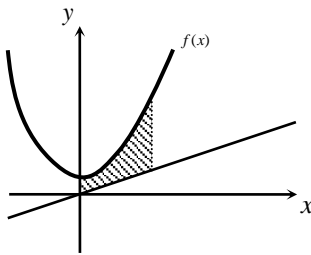


- (34)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות  
 $f(x) = e^{2x}$  ו- $g(x) = e^{-2x}$ .  
 נעביר אנך לציר ה- $x$  את הישר  $x = a$ ,  
 כאשר  $a > 0$ , כמתואר באיור.  
 אנך זה יוצר את השטחים  $S_1$  ו- $S_2$ .  
 ידוע כי השטח  $S_1$  גדול פי 3 מהשטח  $S_2$ .  
 מצאו את  $a$ .



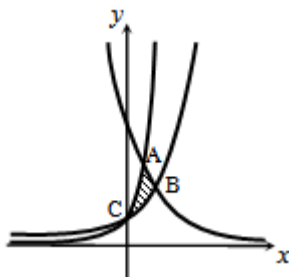
**(35)** נתונה הפונקציה  $f(x) = e^{2x-1} - 2ex - 2$ .

- הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה.
- א. מצאו את שיעורי הנקודה A.  
 מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים.
- ב. כתבו את משוואת הישר המחבר את הנקודה A עם הראשית.
- ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה-x, אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה-x בנקודה שבה  $x = 1.7$ .



**(36)** נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{e^x + e^{ax}}{4}$ .

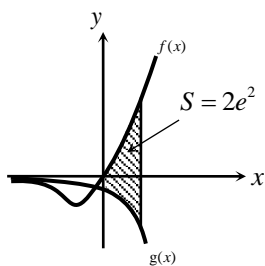
- ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה  $(1, \frac{e^3 + 1}{4e^2})$ .
- א. מצאו את a וכתבו את הפונקציה.
- ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה  $f(x)$ , והישר  $y = 0.1x$ .  
 חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר ה-y והאנך  $x = 2$ .



**(37)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של שלוש פונקציות:

$$1. f(x) = 2^x \quad 2. g(x) = 4^x \quad 3. h(x) = 2^{4-2x}$$

- א. קבעו איזה גרף מתאר כל פונקציה.
- ב. מצאו את שיעורי הנקודות A, B ו-C (נקודות החיתוך בין הגרפים).
- ג. חשבו את השטח המסומן באיור.



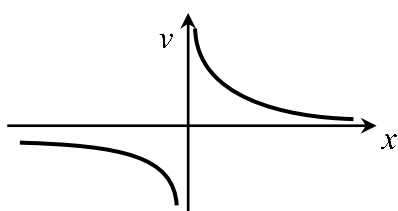
**(38)** ענו על הסעיפים הבאים:

- א. גזרו את הפונקציה  $y = e^x(x-1)$ .
- ב. באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות  $f(x) = xe^x - 1$  ו-  $g(x) = -e^x$ .  
 נעביר ישר  $x = a$ , כאשר  $a > 0$ , החותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה-y והישר (מקווקו).  
 ידוע כי שטח זה שווה ל-  $2e^2$ .  
 מצאו את a.

## פונקציות לוגריתמיות

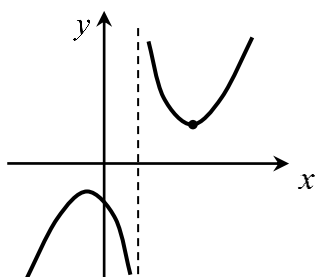
## אינטגרלים מייזים של פונקציות לוגריתמיות

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + c$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b  + c$



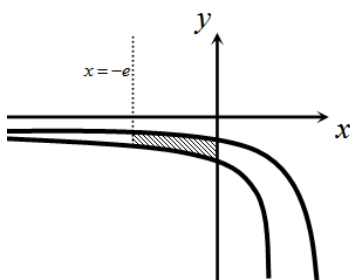
39) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים  $x = -1$  ו- $x = -4$  וציר ה- $x$ . ניתן להשאיר  $\ln$  בתשובה.



40) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ .

חשבו את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודה שבה  $x = 2$ , ואנך לציר ה- $x$  העובר בנקודת המינימום שלה. אפשר להשאיר ביטוי עם  $\ln$  בתשובה.

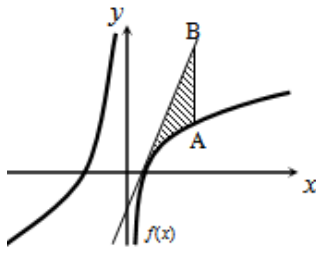


41) באיור שלהלן נתונות הפונקציות  $f(x) = \frac{a}{x-1}$

$$\text{ו-} g(x) = \frac{a-1}{x-2}, \text{ בתחום } x < 0.$$

ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה  $x = 3$ .

- מצאו את  $a$  וכתבו את שתי הפונקציות.
- חשבו את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- $y$  והישר  $x = -e$ .

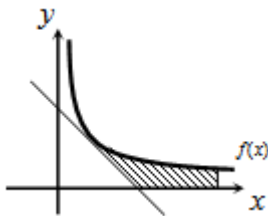


(42) נתונה הפונקציה  $f(x) = 7 + ax + \frac{b}{x}$ .

ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$  היא  $y = 18x - 9$ .  
 א. מצאו את  $a$  ו- $b$  וכתבו את הפונקציה.

נעביר ישר המקביל לציר ה- $y$ , שחותך את גרף הפונקציה בנקודה A, ואת משוואת המשיק בנקודה B. אורך הקטע AB הוא 18.

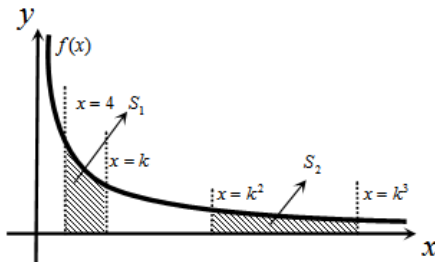
- ב. מצאו את משוואת הישר הנ"ל, אם ידוע כי הנקודה A נמצאת מימין לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
 ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.



(43) נגזרת הפונקציה  $f(x)$  היא  $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$ .

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 2$  היא  $y = 4 - x$ .  
 א. מצאו את  $f(x)$ .

- ב. באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה  $f(x)$  ומשיק, בתחום  $x > 0$ .  
 חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה- $x$  והישר  $x = e^2$ .



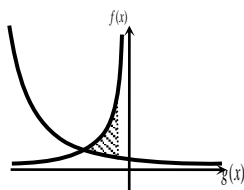
(44) באיור שלהלן נתונה הפונקציה

$$f(x) = \frac{2}{x}, \quad x > 0$$

נעביר את הישרים  $x = k$ ,  $x = k^2$ ,  $x = k^3$  ו- $x = 4$  (כמתואר באיור  $x > 4$ ).

א. הביעו באמצעות  $k$  את השטחים  $S_1$  ו- $S_2$ .

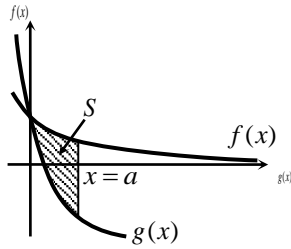
- ב. הראו כי ההפרש  $S_2 - S_1$  אינו תלוי ב- $k$ , וחשבו את ערכו.  
 ג. נתון כי השטח  $S_2$  גדול פי 3 מהשטח  $S_1$ . מצאו את  $k$ .



(45) נתונות הפונקציות  $f(x) = -\frac{4}{x}$  ו- $g(x) = \frac{k}{2x+5}$ .

גרף  $g(x)$  חותך את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = 0.4$ .  
 א. מצאו את הפונקציה  $g(x)$ .

- ב. מצאו את נקודת החיתוך של שני הגרפים.  
 ג. חשבו את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר  $x = -1$ .



**46** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות  
 $f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$  ו-  $g(x) = \ln(e^{-2x} + e^{-3x})$   
 בתחום  $x \geq 0$ .

א. הראו כי הגרפים נחתכים על ציר ה- $y$ .

ב. נעביר ישר  $x = a$  ( $a > 1$ ), המאונך

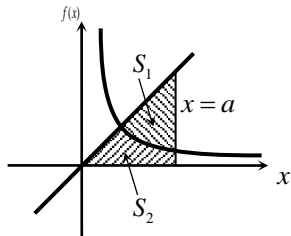
לציר ה- $x$ , חותך את הגרפים של שתי

הפונקציות ויוצר את השטח  $S$  (ראה איור).

מצאו את ערכו של  $a$ , עבורו מתקיים  $S = 4$ .

**47** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציה  $f(x) = \frac{2}{3x-1}$  והישר  $y = x$ .

א. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר, ברביע הראשון.



נעביר אנך לציר ה- $x$ ,  $x = a$ , הנמצאו מימין

לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.

האנך חותך את הגרפים ויוצר את השטחים

$S_1$  ו- $S_2$ , המתוארים באיור.

ב. מצאו את הערך של  $a$ , עבורו השטח  $S_2$

$$\text{יהיה שווה ל-} \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \ln 7.$$

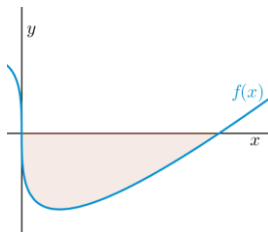
ג. עבור ערך ה- $a$  שנמצא בסעיף הקודם, חשבו את יחס השטחים  $\frac{S_1}{S_2}$ .

## פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

אינטגרלים מייזים של פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

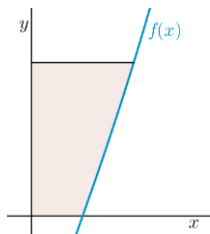
אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \sqrt[n]{x^m} dx = \int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + c$	$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx = \int (ax+b)^{\frac{m}{n}} dx = \frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a \cdot \left(\frac{m}{n}+1\right)} + c$

תנאי לקיום האינטגרציה  $\frac{m}{n} \neq -1$ .



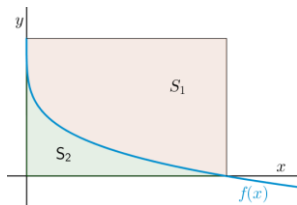
(48) באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה  $f(x) = x - 4\sqrt[3]{x}$ .

- א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
 ב. חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.



(49) באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}$ .

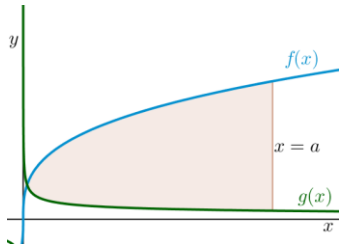
- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?  
 ב. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
 ג. נעביר אנך לציר ה- $y$  מהנקודה  $(4, 6)$ .  
 חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והצירים, ברביע הראשון.



(50) באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה  $f(x) = 2 - \sqrt[4]{x}$ .

- נעביר אנכים לצירים מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים, כך שנוצר מלבן, ונסמן את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים ב- $S_1$ , ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב- $S_2$ .

מצאו את היחס  $\frac{S_1}{S_2}$ .



51) באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות

$$f(x) = 4\sqrt[3]{x} \quad \text{ו-} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים

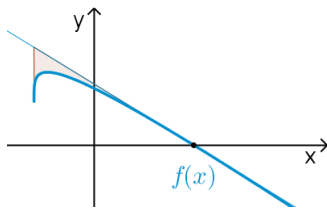
בתחום  $x > 0$ .

ב. נעביר אנך לציר ה- $x$ ,  $x = a$  (פרמטר).

ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים, מנקודת החיתוך שלהם ועד לאנך,

הוא  $\frac{3}{16} \cdot 42$  יח"ש.

מצאו את  $a$ .



52) נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - ax$ , פרמטר  $a$ .

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$  בנקודה

שבה  $x = 2$ .

א. מצאו את הפרמטר  $a$  וכתבו את הפונקציה.

ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. מצאו את נקודת קיצון בקצה של הפונקציה.

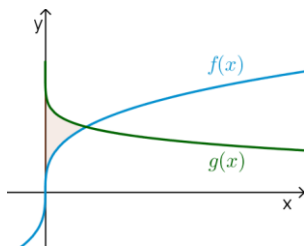
ד. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה, העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ .

ה. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה  $f(x)$  והמשיק שמצאנו בסעיף

הקודם. נוריד אנך מהמשיק אל נקודת הקיצון בקצה של הפונקציה

שמצאנו בסעיף ג'.

חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה  $f(x)$  והמשיק.



53) באיור שלהלן נתונים גרפים של הפונקציות

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad \text{ו-} \quad g(x) = 2 - \sqrt{x}$$

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים

וציר ה- $y$ .

54) הנגזרת של  $f(x)$  היא  $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$

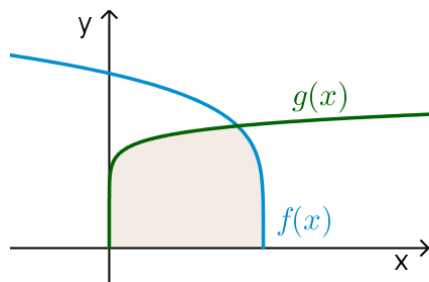
בנקודה שבה  $x = 1.2$ .

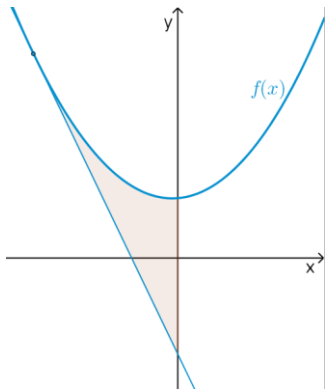
א. מצאו את  $f(x)$ .

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף

הפונקציה  $f(x)$ , גרף הפונקציה

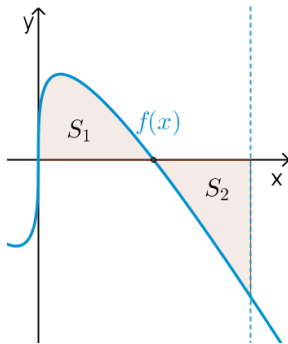
$g(x) = \sqrt[10]{x}$  וציר ה- $x$ .





55) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{5-x}} + \frac{1}{2}x^2$ .

- א. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = -3$ .  
 ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $f(x)$ , המשיק וציר ה- $y$ .



56) נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt[3]{x} - 4x$ .

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?  
 ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
 ג. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה ברביע הראשון. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$  יסומן ב- $S_1$ .  
 נעביר ישר  $x = k$ , אשר יוצר את השטח  $S_2$ , כמתואר באיור.  
 מצאו את  $k$ , אם ידוע כי  $S_1 = S_2$ .

## תשובות סופיות

- (1)  $57\frac{1}{6}$  יח"ש.
- (2)  $21\frac{1}{3}$  יח"ש.
- (3) א.  $f(x) = I$ ,  $g(x) = II$  ב. שאלת הוכחה.
- (4)  $\frac{2}{3}$  יח"ש.
- (5) א.  $y = -x$  ב.  $(-3, 3)$  ג.  $7\frac{5}{6}$  יח"ש.
- (6) א.  $y = -4x + 4$  ב.  $(1, 0)$  ג.  $\frac{2}{3}$  יח"ש.
- (7) א.  $k = 10$  ב.  $(1, 9)$  ג.  $81\frac{1}{3}$  יח"ש.
- (8) א.  $f(x) = -x^2 + 3x + 10$  ב.  $27\frac{1}{6}$  יח"ש.
- (9) א.  $g(x) = (x-4)^2$  ב.  $5\frac{1}{3}$  יח"ש.
- (10) א.  $f(x) = x^2 - 6x$  ב.  $(0, 0)$  ג.  $85\frac{1}{3}$  יח"ש.
- (11) א.  $y = -x + 2$  ב.  $\frac{1}{8}$  יח"ש.
- (12) 1 יח"ש.
- (13) א.  $a = 32$ ,  $(2, 8)$  ב.  $13\frac{1}{3}$  יח"ש.
- (14) א.  $a = 36$ ,  $f(x) = \frac{36-x^2}{x^2}$  ב. 8 יח"ש.
- (15) א.  $A = 6$  ב.  $y = -\frac{1}{9}x + \frac{1}{6}$  ג. הוכחה. ד.  $(-1.5, \frac{2}{3})$  ה.  $\frac{5}{8}$  יח"ש.
- (16) א.  $\min(0.5, 1.5)$  ב. 1.75 יח"ש.
- (17) א.  $(4, 8)$  ב. 48 יח"ש.
- (18) 2.26 יח"ש.
- (19) 0.5 יח"ש.
- (20)  $t = 16$
- (21) א. i.  $x > 0$  ii.  $(4, 0)$  iii.  $f'(x) = 1 + \frac{4}{x\sqrt{x}} > 0$  ב.  $(16, 14)$  ג. 88 יח"ש.
- (22)  $b = 2$
- (23)  $a = 9$

- (24) א. שאלת הוכחה. ב.  $t=1$ .
- (25) א.  $a=13$ . ב.  $(5,0)$ . ג. i.  $S_1=2$ . ii.  $S_2=|-S_1|=2$ .
- (26) ב. 10 יח"ש.
- (27) א. חיובית:  $x>5$ , שלילית:  $x<5$ . ב. עולה:  $x>5$ , יורדת:  $x<5$ . ג.  $\min(5,-2)$ . ד. שאלת הוכחה. ה. 10 יח"ש.
- (28) א. לא. הנקודה  $(3,0)$  היא פיתול, מכיוון שהפונקציה עולה לפנייה ואחריה. ב. שאלת הוכחה. ג. 9 יח"ש.
- (29) א.  $f(x): \mathbb{R}, f'(x): \mathbb{I}$ . ב. 1 יח"ש.
- (30) א. שאלת הוכחה. ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.
- (31)  $S=0.192$  יח"ש.
- (32)  $b=2$ .
- (33) שאלת הוכחה.
- (34)  $a=\ln 2$ .
- (35) א.  $A(1,-e-2)$ . ב.  $y=-(e+2)x$ . ג.  $S=4.744$  יח"ש.
- (36) א.  $f(x)=\frac{e^x+e^{-2x}}{4}, a=-2$ . ב. 1.52.
- (37) א.  $A(1,4), B\left(1\frac{1}{3}, 2.52\right), C(0,1)$ . ב.  $S=1.03$  יח"ש.
- (38) א.  $y'=xe^x$ . ב.  $a=2$ .
- (39)  $S=\ln 4$  יח"ש.
- (40)  $S=4\ln 2-2$  יח"ש.
- (41) א.  $f(x)=\frac{2}{x-1}, g(x)=\frac{1}{x-2}, a=2$ . ב.  $S=1.76$  יח"ש.
- (42) א.  $f(x)=7+2x-\frac{4}{x}, a=2, b=-4$ . ב.  $x=2$ . ג.  $S=6+\ln 256 \approx 11.54$  יח"ש.
- (43) א.  $f(x)=\frac{4}{x}$ . ב.  $S=6-4\ln 2$  יח"ש.
- (44) א.  $S_1=2\ln k - \ln 16, S_2=2\ln k$ . ב.  $S_2-S_1=\ln 16$ . ג.  $k=8$ .
- (45) א.  $g(x)=\frac{2}{2x+5}$ . ב.  $(-2,2)$ . ג.  $S=\ln 5\frac{1}{3} \approx 1.674$  יח"ש.
- (46) ב.  $a=2$ .
- (47) א.  $(1,1)$ . ב.  $a=5$ . ג.  $\frac{S_1}{S_2}=5.955$ .
- (48) א.  $(0,0), (8,0)$ . ב.  $S=16$  יח"ש.
- (49) א.  $x>0$ . ב.  $(2,0)$ . ג.  $S=18.149$  יח"ש.

$$\frac{S_1}{S_2} = 4 \quad (50)$$

$$a = 8 \quad \text{ב.} \quad \left(\frac{1}{8}, 2\right) \quad \text{א.} \quad (51)$$

$$(-1.2, 1.2) \quad \text{ג.} \quad x \geq -1.2 \quad \text{ב.} \quad f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - x, \quad a=1 \quad \text{א.} \quad (52)$$

$$S = 4.56 \quad \text{ה.} \quad \text{יח"ש.} \quad y = -\frac{27}{32}x + \frac{27}{16} \quad \text{ד.} \quad (53)$$

$$S = \frac{11}{28} \quad \text{ב.} \quad \text{יח"ש.} \quad (1, 1) \quad \text{א.} \quad (54)$$

$$S = 1\frac{5}{66} \quad \text{ב.} \quad \text{יח"ש.} \quad f(x) = (6-5x)^{\frac{1}{5}} \quad \text{א.} \quad (55)$$

$$S = 4.56 \quad \text{ב.} \quad \text{יח"ש.} \quad y = -2\frac{15}{16}x - \frac{45}{16} \quad \text{א.} \quad (56)$$

$$k = \left(\frac{3}{8}\right)^{1.5} = 0.2296\dots \quad \text{ג.} \quad (0, 0), \left(\frac{1}{8}, 0\right), \left(-\frac{1}{8}, 0\right) \quad \text{ב.} \quad \text{א.} \quad \text{כל } x \quad (57)$$

## חישוב שטחים ביחס לציר ה- $y$

### שאלות

(1) חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה  $y^2 = -x$  והישר  $y = x + 6$ .

(2) חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה  $x = y^2 + 2$  והישר  $y = x - 8$ .

### תשובות סופיות

(1)  $20\frac{5}{6}$

(2)  $20\frac{5}{6}$

## אורך קשת

### שאלות

חשבו את אורך העקום הנתון:

$$(1 \leq x \leq 8), y = x^{2/3} \quad \text{(2)}$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2} \quad \text{(1)}$$

$$(0 \leq x \leq 3), y = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} \quad \text{(4)}$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = \frac{x^5}{15} + \frac{1}{4x^3} \quad \text{(3)}$$

$$(1 \leq x \leq 8), x^{2/3} + y^{2/3} = 4 \quad \text{(6)}$$

$$(0 \leq x \leq 3), y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x) \quad \text{(5)}$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = \ln x \quad \text{(8)}$$

$$(0 \leq y \leq 4), x = 3y^{3/2} - 1 \quad \text{(7)}$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = x^2 \quad \text{(9)}$$

### תשובות סופיות

$$\frac{33}{16} \quad \text{(1)}$$

$$\frac{1}{9} \left\{ \frac{40^{1.5}}{3} - \frac{13^{1.5}}{3} \right\} \quad \text{(2)}$$

$$\frac{1097}{480} \quad \text{(3)}$$

$$21 \quad \text{(4)}$$

$$\frac{1}{2} \left\{ 2\sqrt{3} + \frac{2}{3}3^{1.5} \right\} \quad \text{(5)}$$

$$9 \quad \text{(6)}$$

$$\frac{8}{243} \{82^{1.5} - 1\} \quad \text{(7)}$$

$$\left\{ \sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \right| \right\} - \left\{ \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right| \right\} \quad \text{(8)}$$

$$\sqrt{17} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(\sqrt{17}+4) - \frac{1}{4} \ln(\sqrt{5}+2) \quad (\text{Decimal: } 3.16784) \quad \text{(9)}$$

# קלקולוס 1

פרק 20 - אינטגרלים לא אמיתיים

תוכן העניינים

226	1. אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון
228	2. אינטגרל לא אמיתי מסוג שני
229	3. אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי
230	4. שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים
231	5. מבחני השוואה
233	6. התכנסות בהחלט
234	7. מבחן דיריכלה
235	8. התכנסות בתנאי

## אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון

### שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-5 :

$$\int_1^{\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)^2} \quad (1)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} xe^{-x^2} dx \quad (3)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+5} dx \quad (4)$$

$$\int_1^{\infty} x^2 e^{-2x} dx \quad (5)$$

$$(6) \text{ הוכיחו כי } \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\alpha \cos x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}} \text{ עבור } |\alpha| < 1.$$

$$(7) \text{ הוכיחו כי } \int_0^{\pi} \frac{1}{\alpha - \cos x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \text{ עבור } |\alpha| > 1.$$

**תשובות סופיות**

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2e} \quad (3)$$

(4) מתבדר :  $\infty$ .

$$\frac{5}{4e^2} \quad (5)$$

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

## אינטגרל לא אמיתי מסוג שני

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2} \quad (1)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \quad (2)$$

### תשובות סופיות

(1) מתבדר :  $\infty$ .

(2) מתבדר :  $\infty$ .

## אינטגרל לא אמיתי מסוג שלישי

שאלה

(1) חשבו את האינטגרל  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ .

תשובה

(1) מתבדר:  $\infty$ .

## שימושים של אינטגרלים לא אמיתיים

## שאלות

(1) חשבו את השטח בין גרף הפונקציה  $y = e^{2x}$ , הישר  $x=1$  וציר ה- $x$ , עבור  $x \leq 1$ .

(2) חשבו את השטח בין גרף הפונקציה  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ , ציר ה- $y$ , ציר ה- $x$  והישר  $x=5$ .

(3) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2}{e^{x^3}}$ .

ידוע כי השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- $x$ , בתחום  $0 \leq x \leq k$ , שווה לשטח הכלוא בין גרף הפונקציה לבין ציר ה- $x$ , בתחום  $x \geq k$ . מצאו את הקבוע  $k$ .

## תשובות סופיות

$$\frac{1}{2}e^2 \quad (1)$$

$$2\sqrt{5} \quad (2)$$

$$k = \sqrt[3]{\ln 2} \quad (3)$$

## מבחני השוואה

### שאלות

בדקו את התכנסות או התבדרות האינטגרלים הבאים:

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 4x^2 + 5} dx \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^4 + 4x^2 + 5} dx \quad (1)$$

$$\int_3^{\infty} \frac{\sin x \cdot \ln x}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}} dx \quad (4)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{1 + x^4} dx \quad (3)$$

$$\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x} dx \quad (6)$$

$$\int_1^{\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) dx \quad (5)$$

$$\int_{-\infty}^2 \frac{e^{3x}}{1 + x^2} dx \quad (8)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + x^4} dx \quad (7)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \quad (10)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{1 + x} dx \quad (9)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}-1)} dx \quad (12)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad (11)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}-1)} dx \quad (14)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x^2}-1)} dx \quad (13)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{\sqrt[4]{(x-1)^5} \sqrt{(1+x)^5}} dx \quad (16)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2(x+\sqrt{x})} dx \quad (15)$$

**תשובות סופיות**

- |             |             |
|-------------|-------------|
| (1) מתכנס.  | (2) מתבדר.  |
| (3) מתכנס.  | (4) מתכנס.  |
| (5) מתבדר.  | (6) מתבדר.  |
| (7) מתכנס.  | (8) מתכנס.  |
| (9) מתבדר.  | (10) מתכנס. |
| (11) מתכנס. | (12) מתבדר. |
| (13) מתכנס. | (14) מתבדר. |
| (15) מתכנס. | (16) מתכנס. |

## התכנסות בהחלט

### שאלות

בשאלות 1-3 בדקו האם האינטגרלים מתכנסים:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 + 1} dx \quad (1)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-10x} \sin 4x dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \quad (3)$$

$$(4) \text{ הוכיחו: אם } \int_a^{\infty} |f(x)| dx \text{ מתכנס, אז } \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ מתכנס.}$$

### תשובות סופיות

- (1) מתכנס.
- (2) מתכנס.
- (3) מתכנס.
- (4) שאלת הוכחה.

## מבחן דיריכלה

### שאלות

הוכיחו כי האינטגרלים הבאים מתכנסים:

$$\int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^p \cos x}{x} dx \quad (1)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 0) \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$\int_1^{\infty} \sin(x^2) dx \quad \text{ב.}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{\sin x} \sin x \cos x}{x^p} dx \quad (p > 0) \quad (3)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## התכנסות בתנאי

### שאלות

קבעו האם האינטגרלים הבאים מתכנסים בהחלט, בתנאי או מתבדרים:

$$(1) \text{ א. } \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1)$$

$$\text{ב. } \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1)$$

$$\text{ג. } \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (p > 1)$$

$$(2) \text{ א. } \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1)$$

$$\text{ב. } \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1)$$

$$\text{ג. } \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (0 < p \leq 1)$$

$$(3) \text{ א. } \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx$$

$$\text{ב. } \int_0^\infty \frac{\sin(x^4)}{x^p} dx$$

$$(4) \int_2^\infty \frac{\sin 4x}{\sqrt{x}-1} dx$$

$$(5) \int_0^{\pi/2} \frac{x \sin(\tan x)}{\cos x} dx$$

### תשובות סופיות

- (1) א. מתכנס בהחלט עבור  $1 < p < 2$  ומתבדר עבור  $p \geq 2$ .  
 ב. מתכנס בהחלט.  
 ג. מתכנס בהחלט עבור  $1 < p < 2$  ומתבדר עבור  $p \geq 2$ .
- (2) א. מתכנס בהחלט. ב. מתכנס בתנאי. ג. מתכנס בתנאי.
- (3) א. מתכנס בתנאי עבור  $0 < p \leq 1$ , מתכנס בהחלט עבור  $1 < p < 2$ ,  
 מתבדר עבור  $p \geq 2$ .  
 ב. מתכנס בתנאי עבור  $-3 < p \leq 1$ , מתכנס בהחלט עבור  $1 < p < 5$ ,  
 מתבדר עבור  $p \geq 5$ .
- (4) מתכנס בתנאי.
- (5) מתכנס בתנאי.

# קלקולוס 1

פרק 21 - בעיות מינימום ומקסימום כלכליות

תוכן העניינים

1. כללי ..... 237

## בעיות מינימום ומקסימום כלכליות

### שאלות

(1) כאשר חברת "יוטבתה" מוכרת  $x$  ליטר שוקו ליום היא יכולה לקבל מחיר של:  $p(x) = -\frac{1}{4}x + 10$  שקל לליטר.

- מהו מחיר ליטר אחד אם הכמות שנמכרת ביום היא 4 ליטר?
- מהו מחיר ליטר אחד אם הכמות שנמכרת ביום היא 12 ליטר?
- מהי הכמות הנמכרת ביום אם המחיר הוא 6 ₪ לליטר?
- שרטט את הגרף של פונקציית הביקוש ומצא את תחום ההגדרה שלה.
- פונקציית הביקוש הנתונה מתארת את מחיר המוצר כפונקציה של הכמות הנמכרת ממנו. שנה את נוסחת הפונקציה כך שהיא תתאר את הכמות הנמכרת מהמוצר כפונקציה של מחירו.

(2) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא:  $p(x) = -0.6x + 120$ .

- מצא את פונקציית הפדיון ואת התחום שלה.
- אם  $x = 20$  מהו מחיר המוצר ומהו הפדיון?
- אם המחיר הוא 12 ₪, מהו הפדיון?

(3) פונקציית הפדיון של מוצר מסוים היא:  $R(x) = -0.08x^2 + 40x$ .

- מהו התחום של פונקציית הפדיון?
- שרטט את הגרף של פונקציית הפדיון.
- מצא את פונקציית הביקוש ושרטט את הגרף שלה.

(4) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא:  $p(x) = -0.4x + 100$  שקל ליחידה.

- מצא את תחום הפונקציה.
- מצא את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון הממוצע.
- מצא את פונקציית הפדיון השולי.
- לאיזה ערך של  $x$  יתקבל פדיון מקסימלי ומהו?

(5) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא:  $p(x) = -6x^2 + 240x + 1,800$ .

- מצא את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון השולי.
- אם  $x = 40$  האם כדאי להגדיל את הייצור?
- מתי יהיה הפדיון מקסימלי ומהו?

6 פונקציית הביקוש למוצר מסוים נתונה ע"י:  $Q(x) = 10x - \frac{x^2}{5}$ .

- א. מצא את המחיר הנותן את הפדיון המקסימלי.  
 ב. מהו הביקוש במקרה זה?  
 ג. מהו הביקוש השולי בנקודת המחיר שמצאת? מה משמעותו?

7 פונקציית ההוצאות של יצרן המייצר  $x$  ק"ג קפה ביום היא:  $C(x) = 5x + 150$ .

- א. שרטט גרף של פונקציית ההוצאות. מהן ההוצאות הקבועות?  
 ב. מצא כמה ק"ג קפה מייצר היצרן אם ההוצאות הם 1,000 ₪.  
 ג. מהן ההוצאות אם מייצרים 20 ק"ג קפה?  
 ד. מצא את פונקציית ההוצאה השולית.

8 פונקציית העלות של יצרן כובעים היא:  $TC(x) = 0.04x^2 + 10x + 400$  שקל ליום.

- א. חשב את העלות הממוצעת ליום אם הוא מייצר 40 כובעים.  
 ב. כמה כובעים עליו לייצר כדי שהעלות הממוצעת תהיה מינימלית?  
 ג. חשב את העלות השולית ליום עבור  $x = 100$ . איזו מסקנה ניתן להסיק?

9 פונקציית העלות של מוצר מסוים היא:  $C(x) = 0.004x^2 + 10x + 200$ .

- א. חשב את העלות כאשר  $x = 100$  וכאשר  $x = 101$ .  
 ב. חשב את העלות השולית כאשר  $x = 100$ .  
 ג. חשב כמה תעלה יחידת מוצר נוספת כאשר היצור יעבור מ- $x = 100$  ל- $x = 101$  והשווה עם התוצאה של סעיף ב. מהי המסקנה?  
 ד. מצא האם קצב השינוי של העלות גדל או קטן?

10 ליצרן פונקציית ביקוש:  $P(Q) = 100 - 0.06Q$ ,

ופונקציית עלות כוללת:  $TC(Q) = 200 + 4Q$ .

- מהי הכמות  $Q$  שעל היצרן לייצר על מנת להביא למקסימום את רווחיו?  
 מהו המקסימום במקרה זה?

11 ליצרן פונקציית ביקוש:  $P(Q) = 20$  ופונקציית עלות:  $TC(Q) = 300 + 2Q^2$ .

- מהי הכמות שעל היצרן לייצר על מנת להביא למקסימום את רווחיו?  
 מהו המקסימום במקרה זה?

12 ליצרן פונקציית ביקוש:  $P(Q) = -0.15Q + 50$ ,

ופונקציית עלות שולית:  $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$ .

- מהי הכמות שעל היצרן לייצר על מנת להביא למקסימום את רווחיו?

$$(13) \text{ ליצרן פונקציית ביקוש: } Q = \frac{5,000 - 50P}{3}$$

$$\text{ופונקציית עלות: } TC(Q) = 200 + 4Q$$

מהי הכמות  $Q$  שעל היצרן לייצר על מנת להביא למקסימום את רווחיו?  
מהו המקסימום במקרה זה?

$$(14) \text{ ליצרן פונקציית עלות שולית: } MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$$

מצא את פונקציית העלות אם ידוע שכאשר הכמות המיוצרת היא  $Q = 10$   
אז העלות הכוללת היא 225 ₪.

(15) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. הוכח שהרווח המקסימלי מתקבל כאשר הפדיון השולי שווה להוצאה השולית. הסבר את המשמעות הגרפית.  
ב. הוכח שאם מחיר המוצר קבוע אז הרווח המקסימלי מתקבל כאשר ההוצאה השולית שווה למחיר המוצר.

(16) יעל נוהגת לעשות שופינג בכל יום בכיכר המדינה. לאחרונה החליטה יעל לשכור דירה לחודש (30 יום). אם הדירה נמצאת במרחק  $x$  ק"מ מכיכר

$$\text{המדינה דמי השכירות החודשיים הינם: } P(x) = 60 - 4x$$

בכל יום יעל נוסעת הלוך ושוב לכיכר המדינה.

$$\text{הוצאות הנסיעה לק"מ אחד נתונות על ידי: } D(x) = \frac{x^2}{180} + \frac{2}{3x}$$

א. רשום את ההוצאה הכוללת של יעל,  $TC(x)$ .

ב. באיזה מרחק מכיכר המדינה על יעל לשכור את דירתה?

ג. שרטט גרף איכותי של  $TC(x)$ . הדגש את שיעורי נקודת הקיצון.

## תשובות סופיות

- (1) א. 9 ₪      ב. 7 ₪      ג.  $x = 16$   
 ד. ראה סרטון.      ה.  $x(p) = 40 - 4p$
- (2) א.  $x \geq 0, R(x) = -0.6x^2 + 120x$       ב. 2,160 ₪      ג.  $x = 180$
- (3) א.  $x \geq 0$       ב. ראה סרטון.      ג.  $p(x) = \frac{R(x)}{x} = -0.08x + 40$
- (4) א.  $x \geq 0$       ב.  $x > 0, R(x) = -0.04x^2 + 100x, AR(x) = -0.4x + 100$
- ג.  $R'(x) = -0.08x + 100$       ד.  $R_{\max} = 62,500, x = 1,250$
- (5) א.  $R(x) = -6x^3 + 240x^2 + 1,800x, R'(x) = -18x^2 + 480x + 1,800$       ב. לא כדאי להגדיל את הייצור.  
 ג.  $R_{\max} = 108,000$
- (6) א.  $x = 33\frac{1}{3}$       ב.  $Q\left(33\frac{1}{3}\right) = 10 \cdot 33\frac{1}{3} - \frac{33\frac{1}{3}^2}{5}$       ג.  $Q'\left(33\frac{1}{3}\right) = -3\frac{1}{3}$
- (7) א.  $C(0) = 150$       ב.  $x = 170$       ג.  $C(20) = 250$       ד.  $MC(x) = 5$
- (8) א.  $AC(40) = 21.6$       ב.  $x = 100$       ג.  $TC'(100) = 18$
- (9) א.  $C(101) = 1,250.804, C(100) = 1,240$       ב.  $C'(100) = 10.8$       ג. 10.804 ₪.      ד.  $C'(x) = 0.008 > 0$ , גדל.
- (10)  $\pi_{\max} = 38,200, Q = 800$
- (11)  $\pi_{\max} = -250, Q = 5$
- (12)  $Q = 25$
- (13)  $\pi_{\max} = 38,200, Q = 800$
- (14)  $TC(Q) = 0.02Q^3 + 20Q + 5$
- (15) א. הוכחה.      ב. הוכחה.
- (16) א.  $TC(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 100, x > 0$       ב. יעל תעדיף לשכור בכיכר המדינה.  
 ג. ראה סרטון.

# קלקולוס 1

פרק 22 - המשפט היסודי של החדו"א, משפטי הערך הממוצע לאינטגרלים

תוכן העניינים

1. המשפט היסודי של החדו"א - תרגילי חישוב ..... 241

## המשפט היסודי של החדו"א – תרגילי חישוב

### שאלות

בשאלות 1 ו-2, על סמך המשפט היסודי של החדו"א, הוכיחו כי אם  $f(x)$  רציפה וגם  $a(x)$  ו- $b(x)$  גזירות, אזי:

$$I(x) = \int_a^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x) \quad (1)$$

$$I(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x) \quad (2)$$

גזרו את הפונקציות בשאלות 3-6:

$$I(x) = \int_1^{x^3} \frac{\ln t}{t^2} dt \quad (4)$$

$$I(x) = \int_2^x e^{-t^2} dt \quad (3)$$

$$I(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \quad (6)$$

$$I(x) = \int_2^{x^3+x} t \ln t dt \quad (5)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 7-9:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x-4} \int_4^x e^{t^2} dt \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} \int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{t dt}{\cos t}}{\sin^2 x} \quad (7)$$

$$(10) \text{ חשבו את הגבול } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left( \int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$$

**(11)** חקרו את הפונקציה  $F(x) = \int_0^x (t+1)^4 (t-1)^{10} dt$ , לפי הפירוט הבא:

תחום הגדרה, נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה, נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות.

**(12)** נתונה הפונקציה  $g(t) = \int_0^{t^2-1} f(x) dx$ , כאשר  $f(x) = 2 + \int_0^x (e^{y^2} + 2)^2 dy$ .

חשבו את  $g'(1)$  (הניחו כי  $f$  רציפה).

**(13)** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה.

נגדיר  $g(x) = \int_0^x (x-t)f(t) dt$  לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

הוכיחו כי  $g''(x) = f(x)$  לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

**(14)** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה, ויהי  $\alpha \neq 0$ .

נגדיר  $g(x) = \frac{1}{\alpha} \int_0^x f(t) \sin[\alpha(x-t)] dt$  לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

הוכיחו כי  $f(x) = g''(x) + \alpha^2 g(x)$  לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

**(15)** תהי  $f$  פונקציה רציפה וחיובית לכל  $x \geq 0$ .

הוכיחו כי הפונקציה  $z(x) = \frac{\int_0^x f(t) dt}{\int_0^x t f(t) dt}$  מונוטונית יורדת בקטע  $[0, \infty)$ .

**(16)** מצאו את  $\int_e^4 f(x) dx$ , אם נתון כי  $\int_2^x \frac{1}{t-1} dt + 2 \int_2^x f(t) dt = \int_2^x \frac{t^3 - t + 2}{t^2 - t} dt$ .

**(17)** מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $F(x) = \int_0^{\sin x} e^{t^2} dt$ , בנקודה  $x_0 = 2\pi$ .

### תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3)  $I'(x) = e^{-x^2}$

(4)  $I'(x) = \frac{\ln(x)^3}{(x^3)^2} \cdot 3x^2$

(5)  $I'(x) = (x^3 + x)(3x^2 + 1)\ln(x^3 + x)$

(6)  $I'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}} - \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}$

(7)  $\frac{1}{2}$

(8)  $\frac{2}{3}$

(9)  $4e^{16}$

(10) 0

(11) תחום הגדרה: כל  $x$ .נקודות קיצון: אין קיצון, עולה לכל  $x$ .

נקודות פיתול:  $x = -1, 1, -\frac{3}{7}$ .

תחומי קמירות:  $x > 1, -1 < x < -\frac{3}{7}$ .

תחומי קעירות:  $-\frac{3}{7} < x < 1, x < -1$ .

(12) 40

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16)  $14 - 2\ln 4 - \frac{1}{2}e^2 - e$

(17)  $y = x - 2\pi$

# קלקולוס 1

פרק 23 - הוכחות של משפטים נבחרים בקורס

תוכן העניינים

1. הוכחות של משפטים נבחרים ..... 244

## הוכחות של משפטים נבחרים

הוכיחו את המשפטים הבאים:

### גזירות גוררת רציפות

אם הפונקציה  $f(x)$  גזירה בנקודה  $x_0$ , אזי היא רציפה בנקודה זו.

### כלל השרשרת

תהי  $y = g(x)$  פונקציה גזירה בנקודה  $x$ , ותהי  $f(g(x))$  גזירה בנקודה  $g(x)$ . אזי הפונקציה המורכבת  $f(g(x))$  גזירה בנקודה  $x$ , ומתקיים

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

### כלל לופיטל

נניח ש- $g$  ו- $f$  פונקציות גזירות ובעלות נגזרות רציפות בנקודה  $x_0$ ,

ונניח כי  $f(x_0) = g(x_0) = 0$  וכן  $g'(x_0) \neq 0$ , אז  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

### משפט לגראנז'

אם הפונקציה  $f(x)$

א. רציפה בקטע הסגור  $[a, b]$ ,

ב. גזירה בקטע הפתוח  $(a, b)$ ,

אז קיימת נקודה  $a < b < c$ , כך ש- $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

**משפט פרמה**

נניח ש- $f$  פונקציה המוגדרת בתחום המכיל את הנקודה  $x_0$ .  
אם  $f$  גזירה בנקודה  $x_0$  וגם  $x_0$  נקודת מקסימום מקומית, אז  $f'(x_0) = 0$ .

**משפט רול**

אם הפונקציה  $f(x)$

א. רציפה בקטע הסגור  $[a, b]$ ,

ב. גזירה בקטע הפתוח  $(a, b)$ ,

ג. מקיימת  $f(a) = f(b)$ ,

אז קיימת נקודה  $a < b < c$ , כך ש- $f'(c)$ .

**נגזרת הפונקציה ההפוכה**

תהי  $y = f(x)$  פונקציה הפיכה ורציפה בסביבת הנקודה  $x_0$ .

אם  $f(x)$  גזירה בנקודה  $x_0$  וגם  $f'(x_0) \neq 0$ , אז גם הפונקציה ההפוכה שלה,

$x = g(y)$ , פונקציה גזירה בנקודה  $y_0 = f(x_0)$ , ומתקיים השוויון  $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ .

להוכחות המלאות היכנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)