# קורס ריענון במתמטיקה

# תוכן העניינים


1. מבוא מתמטי לקורס ..... 1
2. טורים עם איברים קבועים ..... 28
3. מבוא לאלגברה ..... 42
4. משוואות אלגבריות ..... 88
5. מבוא לפונקציות ..... (ללא ספר)
6. הפונקציה הקווית ..... (ללא ספר)
7. הפונקציה הריבועית ..... (ללא ספר)
8. אי שוויונים אלגבריים ..... 105
9. חוקי החזקות והשורשים ..... 121
10. משוואות ואי-שוויונים מעריכיים ..... 131
11. חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים ..... 140
12. סדרות ..... 156
13. מבוא להסתברות ..... (ללא ספר)
14. הסתברות של מאורע בודד ..... (ללא ספר)
15. הסתברות של שני מאורעות ..... (ללא ספר)
16. טריגונומטריה במשולש ישר זווית ..... 180
17. זהויות טריגונומטריות ..... 185
18. טריגונומטריה במישור ..... 206
19. חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים ..... 239
20. חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית פולינום ..... 254
21. חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית מנה ושורש ..... 267
22. חשבון דיפרנציאלי - פונקציות מעריכיות ..... 305
23. חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות ..... 321

# תוכן העניינים

24. חשבון אינטגרלי - האינטגרל הכללי ..... 337
25. חשבון אינטגרלי - האינטגרל המסוים וחישובי שטחים ..... 344
26. חשבון אינטגרלי - פונקציה מעריכית, לוגריתמית וחזקה ..... 372

# קורס ריענון במתמטיקה

## פרק 1 - מבוא מתמטי לקורס

### תוכן העניינים


1. מבוא לתורת הקבוצות ..... 1
2. המספרים האי-רציונליים ..... 7
3. קבוצות חסומות וקבוצות לא חסומות ..... 8
4. סימן הסכימה ..... 15
5. אינדוקציה ..... 18
6. אי שוויונים מפורסמים ..... 20
7. פתרון אי שוויונים ..... 21
8. עצרת, המקדם הבינומי, הבינום של ניוטון ..... 23
9. שדות ..... 26

# מבוא לתורת הקבוצות

## שאלות

**1)** רשמו את הטענות הבאות במילים ובדקו האם הן נכונות:

א. $\forall x \forall y : (x+y)^2 > 0$

ב. $\forall x \exists y : (x+y)^2 > 0$

ג. $\forall x \forall y \exists z : xz = \frac{y}{4}$

ד. $\forall x > 0, \forall y > 0 , \sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$

ה. $\forall n \exists k, n^3 - n = 6k$ ( $k$ ו- $n$ טבעיים).

הערה: בסעיף זה הטבעיים כוללים את $0$.

**2)** רשמו כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון אי־השוויון $x^2 > 4$, הוא $x > 2$ או $x < -2$.

ב. אי השוויון $x^2 + 4 > 0$, מתקיים לכל $x$.

ג. לכל מספר טבעי $n$, המספר $n^3 - n$ מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר $x$, $|x| < 1$ אם ורק אם $-1 < x < 1$.

**3)** רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים, ואת מספר איברי הקבוצה:

א. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}$

ב. $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16\}$

ג. $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16\}$

ד. $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+4)(x-1) < 0\}$

ה. $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 + x^2 - 2x = 0\}$

ו. $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \le 4\}$

**4)** הגדירו את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן בצורה: $A = \{x \mid$ מקיים תכונה מסוימת $x\}$

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האי־זוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 4, 3, 2, 1.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** ציינו אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו:

א. $A=\{11,13,17,19\}$

ב. $B=\{x \mid 10<x<20,\ x$ מספר ראשוני$\}$

ג. $C=\{11,11,17,13,19\}$

ד. $D=\{x \mid x=4k,\ k\in\mathbb{Z}\}$

ה. $E=\{x \mid x=2m,\ m$ שלם זוגי$\}$

**6)** נתונה הקבוצה הבאה $A=\{1,2,\{2\},\{2,5\},4,\{2,4\}\}$.

מי מבין הטענות הבאות נכונה:

| | | |
|---|---|---|
| א. $5\in A$ | ב. $2\in A$ | ג. $\{2\}\in A$ |
| ד. $\{2\}\subseteq A$ | ה. $\{\{2\}\}\subseteq A$ | ו. $\phi\in A$ |
| ז. $\phi\subseteq A$ | ח. $\{2,\{2\}\}\subseteq A$ | ט. $\{2,4\}\subseteq A$ |
| י. $\{2,4\}\in A$ | יא. $\{\{2,4\}\}\in A$ | יב. $\{2,5\}\subseteq A$ |
| יג. $\{2,5\}\in A$ | יד. $\{1,4\}\in A$ | |

**7)** מצאו שתי קבוצות, $A$ ו-$B$, המקיימות:

א. $A\in B$

ב. $A\subseteq B$

**8)** נתונות הקבוצות הבאות:

$A=\{3,4,5,6,7,8,9\}$ , $B=\{4,6,8,10\}$ , $C=\{3,5,7,9\}$ , $D=\{6,7,8\}$ , $E=\{7,8\}$

קבעו איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה $X$:

א. $X\subseteq A$ וגם $X\not\subseteq D$.

ב. $X\subseteq D$ וגם $X\not\subseteq C$.

ג. $X\subseteq E$ וגם $X\not\subseteq A$.

**9)** הוכיחו: $A\subseteq B \wedge B\subseteq C \Rightarrow A\subseteq C$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** נתונות הקבוצות הבאות:

$A=\{3,4,5,6,7,8,9\}$ , $B=\{4,6,8,10\}$ , $C=\{3,5,7,9\}$ , $D=\{6,7,8\}$ .

רשמו את:

א. $A\cup B$

ב. $A\cap B$

ג. $(A\cup B)\cap C$

ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)$

ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)$

**11)** נתונות הקבוצות הבאות:

$A=[1,4)$ , $B=(-2,1)$ , $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,0\le x\le 4\}$ , $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,2^x=0\}$

רשמו את:

א. $A\cup B$

ב. $A\cap B$

ג. $(A\cup B)\cap C$

ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)$

ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)$

**12)** נתונות 3 קבוצות:

$A=\{4,5,6,7,8\}$ , $B=\{5,6,7,8,9\}$ , $C=\{4,5,6,10\}$

א. חשבו את $(A-B)-C$.

ב. חשבו את $A-(B-C)$.

**13)** נתון: $B=\{13,15,17\}$ , $A=\{12,15,18\}$ , $U=\{11,12,13,14,15,16,17,18\}$.

הדגימו את כלל דה מורגן $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

**14)** הוכיחו את כלל דה מורגן הראשון $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

**15)** מצאו את הקבוצה המשלימה, ביחס ל- $\mathbb{R}$, של הקבוצות הבאות:

א. $A=[1,\infty)$

ב. $B=(-\infty,1)\cup(4,\infty)$

ג. $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2-5x+4>0\}$

ד. $D=\{x\in\mathbb{R}\,||x-1|<2\ \vee\ x>4\}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**16)** הציגו באמצעות דיאגרמת ון את הקבוצות הבאות:

| | |
|---|---|
| א. $A\cap B$ | ב. $A\cup B$ |
| ג. $A^c$ | ד. $A\cap B^c$ |
| ה. $A^c\cap B$ | ו. $A\cup B^c$ |
| ז. $A^c\cup B$ | ח. $A^c\cup B^c=(A\cap B)^c$ |
| ט. $A^c\cap B^c=(A\cup B)^c$ | |

**17)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $A\setminus B=A\cap B^C$.
הראו זאת גם בעזרת דיאגרמת ון.

ב. נסמן: $X=C\setminus(A\cap B),\ Y=(C\setminus A)\cup(C\setminus B)$.
הוכיחו כי $X=Y$.

ג. נסמן: $X=A\setminus(B\cup C),\ Y=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.
הוכיחו כי $X=Y$.

**18)** תהיינה $X,Y,Z$ קבוצות כלשהן.

טענה א': $X\cap Y\cap Z=(X\setminus Y)\cup(Y\setminus Z)\cup(Z\setminus X)$.

טענה ב': $((X\cap Y)\cup Z)^C=(X^C\cup Y^C)\cap Z^C$.

טענה ג': $X\setminus(Y\setminus Z)=(X\setminus Y)\setminus Z$.

איזו טענה נכונה לכל בחירה של $X,Y,Z$?

**19)** הוכיחו כי אם הנקודה $x_1$ שייכת לסביבת $\varepsilon$ של הנקודה $x_0$,
אז קיימת סביבת $\delta$ של $x_1$ שמוכלת בסביבת $\varepsilon$ של הנקודה $x_0$.

**20)** הוכיחו שלכל שתי נקודות שונות קיימות סביבות זרות.

**21)** הוכיחו כי אם $x_0$ לא שייכת לקטע הסגור $[a,b]$, אז קיימת סביבה
של הנקודה $x_0$ אשר לא מכילה שום נקודה מהקטע $[a,b]$.

**22)** הוכיחו כי אם $|x-x_0|<\varepsilon,\ |y-y_0|<\varepsilon$, אז $|xy-x_0y_0|<\varepsilon(|x_0|+|y_0|+\varepsilon)$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. לכל $x$ ולכל $y$ מתקיים $(x+y)^2>0$. הטענו אינה נכונה.

ב. לכל $x$ קיים $y$, כך ש- $(x+y)^2>0$. הטענו אינה נכונה.

ג. לכל $x$ ולכל $y$ קיים $z$ כך ש- $xz=\frac{y}{4}$. הטענו אינה נכונה.

ד. לכל $x$ חיובי ולכל $y$ חיובי מתקיים $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$. הטענו נכונה.

ה. לכל $n$ טבעי המספר $n^3-n$ מתחלק ב-6. הטענו נכונה.

**2)** א. $x^2>4\Rightarrow x>2\vee x<-2$ ב. $\forall x: x^2+4>0$

ג. $\forall n\exists k: n^3-n=6k$ ד. $\forall x: |x|<1\Leftrightarrow -1<x<1$

**3)** א. $A=(-4,4)$, בקבוצה אינסוף איברים.

ב. $B=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$, בקבוצה 7 איברים.

ג. $C=\{1,2,3\}$, בקבוצה 3 איברים. ד. $D=\{-3,-2,-1,0\}$, בקבוצה 4 איברים.

ה. $E=\{0,1\}$, בקבוצה 2 איברים.

ו. $F=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$, בקבוצה 9 איברים.

**4)** א. $A=\{x\,|\,x=2n-1,\ n\in\mathbb{N}\}$ ב. $B=\{11,13,17,19\}$

ג. $C=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=4^2\ ,\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\}$ ד. $D=\{1,4,9,16\}$

**5)** הקבוצות $A$, $B$ ו- $C$ שוות זו לזו, והקבוצות $D$ ו- $E$ שוות זו לזו.

**6)** א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.
ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.
יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.

**7)** $B=\{\{1,2\},1,2\}$ $A=\{1,2\}$

**8)** א. $A, C$ ב. $E, D$ ג. לא קיימת קבוצה כזאת.

**9)** שאלת הוכחה.

**10)** $1)\ A\cup B=\{3,4,5,6,7,8,910\}$, $2)A\cap B=\{4,6,8\}$, $3)(A\cup B)\cap C=\{3,5,7,9\}$

$4)(B\cup C)\cap(B\cup D)=\{4,6,7,8,10\}$, $5)(B\cap C)\cup(B\cap D)=\{6,8\}$

**11)** $1)\ A\cup B=(-2,4)$, $2)A\cap B=\phi$, $3)(A\cup B)\cap C=(0,4)$,

$4)(B\cup C)\cap(B\cup D)=(-2,1)$, $5)(B\cap C)\cup(B\cap D)=[0,1)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**12)** א. $\phi$ ב. $\{4,5,6\}$

**13)** ללא פתרון.

**14)** שאלת הוכחה.

**15)** א. $A^C=(-\infty,1)$ ב. $B^C=[1,4]$ ג. $C^C=[1,4]$

ד. $D^C=(-\infty,1]\cup[3,4]$

**16)** ראו בסרטון.

**17)** שאלת הוכחה.

**18)** טענו ב.

**19)** שאלת הוכחה.

**20)** שאלת הוכחה.

**21)** שאלת הוכחה.

**22)** שאלת הוכחה.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# המספרים האי-רציונליים

## שאלות

**1)** א. ידוע כי מספר טבעי בריבוע הוא זוגי. הוכיחו שהמספר זוגי.
ב. הוכיחו כי $\sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.

**2)** א. ידוע כי מספר בריבוע מתחלק ב-3. הוכיחו שהמספר מתחלק ב-3.
ב. הוכיחו כי $\sqrt{3}$ הוא מספר אי-רציונלי.

**3)** א. ידוע כי מספר בשלישית הוא זוגי. הוכיחו שהמספר זוגי.
ב. הוכיחו כי $\sqrt[3]{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.

**4)** הוכיחו כי $\sqrt{n}$ הוא מספר אי-רציונלי (בהנחה ש- $n$ טבעי שאינו ריבוע של מספר).

**5)** הוכיחו או הפריכו:
א. מכפלת מספרים אי-רציונליים היא מספר אי-רציונלי.
ב. סכום מספרים אי-רציונליים הוא מספר אי-רציונלי.
ג. מנה של שני מספרים אי-רציונליים היא מספר אי-רציונלי.
ד. סכום של מספר רציונלי ומספר אי-רציונלי הוא מספר אי-רציונלי.

**6)** א. הוכיחו כי $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.
ב. הוכיחו כי $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ הוא מספר אי-רציונלי.
ג. הוכיחו כי $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ הוא מספר אי-רציונלי.

**7)** א. יהי $p$ מספר ראשוני ויהיו $a,k$ מספרים טבעיים.
הוכיחו כי $p\,|\,a \Leftarrow p\,|\,a^k$.
ב. הוכיחו: אם $n \neq N^k$, אז $\sqrt[k]{n}$ הוא מספר אי-רציונלי $(n,k,N \in \mathbb{N})$.

הערת סימון: אם מספר $a$ מתחלק במספר $b$ נסמן $b\,|\,a$,
ונאמר גם "$b$ מחלק את $a$".

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# קבוצות חסומות וקבוצות לא חסומות

## שאלות

**1)** נתונה הקבוצה $A=\left\{\frac{n-1}{n}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}$.

א. בדקו האם הקבוצה חסומה.

ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

**2)** נתונה הקבוצה $A=\left\{\frac{1}{n^4+2n+1}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}$.

א. בדקו האם הקבוצה חסומה.

ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

**3)** נתונה הקבוצה $A=\left\{\frac{n^4+n^2+3}{2n^4+2n^2+8}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}$.

א. בדקו האם הקבוצה חסומה.

ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

**4)** נתונה הקבוצה $A=\left\{\frac{[cn]}{n}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\ ,\ 0<c\in\mathbb{R}\right\}$.

א. הוכיחו שהקבוצה חסומה מלמעלה ומצאו את $\sup A$.

ב. הוכיחו שהקבוצה חסומה מלמטה ומצאו את $\inf A$.

**5)** נתונה הקבוצה $A=\left\{n^5-n+4\,|\,n\in\mathbb{N}\right\}$.

א. בדקו האם הקבוצה חסומה.

ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה במידה והם קיימים.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**6)** נתונה הקבוצה $A=\{11-4^n \mid n\in\mathbb{N}\}$.

א. בדקו האם הקבוצה חסומה.

ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

**7)** נתונה הקבוצה $A=\left\{\frac{4n-1}{5n} \mid n\in\mathbb{N}\right\}$.

א. בדקו האם הקבוצה חסומה.

ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

**8)** מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצות הבאות, במידה והם קיימים:

א. $A=\left\{(-1)^n+\frac{1}{n^2} \mid n\in\mathbb{N}\right\}$

ב. $B=\{x\in\mathbb{Z} \mid |x-1|\le 1\}$

ג. $C=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, \frac{x^2-4}{(x-2)^2}\le 0\right\}$

ד. $D=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x=1+\frac{n+1}{n+4}\sin\frac{n\pi}{2},\ n\in\mathbb{N}\right\}$

**9)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונה קבוצה של מספרים ממשיים $S$.
הוכיחו שאם קיים לקבוצה חסם עליון אז הוא יחיד.

ב. הוכיחו שלקבוצה הריקה אין חסם עליון.

**10)** הוכיחו את הטענות הבאות:

א. אם $\alpha$ הוא הסופרמום של הקבוצה $A$, אז לכל מספר ממשי $\varepsilon>0$, קיים איבר $x\in A$, כך ש- $\alpha-\varepsilon<x\le\alpha$.

ב. אם $\beta$ הוא האינפימום של הקבוצה $A$, אז לכל מספר ממשי $\varepsilon>0$, קיים איבר $x\in A$, כך ש- $\beta\le x<\beta+\varepsilon$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** הוכיחו את הטענות הבאות:

א. בין כל שני מספרים ממשיים קיים מספר ממשי.
(משפט הצפיפות של הממשיים)

ב. עבור קטעים מהטיפוס $(a,b),[a,b),(-\infty,b)$, לא קיים מקסימום.

ג. עבור קטעים מהטיפוס $[a,\infty),(a,\infty),(-\infty,\infty)$, לא קיים מקסימום.

ד. עבור קטעים מהטיפוס $(a,b),[a,b),(-\infty,b)$, הקצה הימני של הקטע הוא החסם העליון.

ה. אם $S$ היא קבוצה בעלת מקסימום, אז ל- $S$ יש חסם עליון, ומתקיים $\max S = \sup S$.

**12)** תהי $A$ תת-קבוצה לא ריקה של $\mathbb{R}$, ויהי $x \in \mathbb{R}$.

נגדיר את המרחק בין $x$ ל- $A$ על ידי: $d(x,A) = \inf\{|x-a| \mid a \in A\}$.

אם $\alpha \in \mathbb{R}$ הוא החסם העליון של $A$, הראו כי $d(\alpha,A)=0$.

**13)** הוכיחו שקבוצת המספרים הטבעיים אינה חסומה מלמעלה.

**14)** הוכיחו שקיימת קבוצה של מספרים רציונליים, אשר חסומה מלמעלה אך אין לה סופרמום רציונלי.

**15)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. נניח ש- $K$ קבוצה של מספרים ממשיים החסומה מלמטה.
נתבונן בקבוצה $-K = \{-x \mid x \in K\}$.
הוכיחו שהקבוצה $-K$ חסומה מלמעלה.

ב. הוכיחו שלכל קבוצה לא-ריקה של מספרים ממשיים, החסומה מלמטה, קיים חסם תחתון.

**16)** תהי $T$ קבוצה חסומה מלעיל של מספרים ממשיים.
תהי $S$ קבוצה חלקית לא ריקה של $T$.
הוכיחו כי:

א. ל- $T$ יש חסם עליון $\sup T$.

ב. ל- $S$ יש חסם עליון $\sup S$.

ג. $\sup S \le \sup T$.

ד. אם $S$ ו- $T$ בעלות מקסימום, אז $\max S \le \max T$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**17)** יהיו $A$ ו- $B$ שתי קבוצות לא ריקות, חסומות מלעיל, של מספרים ממשיים.

א. נניח כי לכל $x \in A$ קיים $y \in B$, כך ש- $x < y$.
הוכיחו כי $\sup A \le \sup B$.
האם יהיה נכון לומר ש- $\sup A < \sup B$?

ב. נניח שבנוסף לנתון בסעיף א', נתון כי לכל $y \in B$ קיים $x \in A$, כך ש- $y < x$.
הוכיחו כי $\sup A = \sup B$.

**18)** נניח ש- $A$ ו- $B$ הן שתי קבוצות לא ריקות וחסומות של מספרים ממשיים,
כך ש- $\sup A = \inf B$.
הוכיחו שלכל מספר $\delta > 0$, קיים מספר $x$ ב- $A$, ומספר $y$ ב- $B$, כך ש-
$x + \delta > y$.

**19)** נניח ש- $A$ ו- $B$ הן שתי קבוצות לא ריקות וחסומות של מספרים ממשיים,
כך ש- $\sup A \le \inf B$.
נניח שלכל מספר $\delta > 0$ קיים מספר $x$ ב- $A$, ומספר $y$ ב- $B$, כך ש- $x + \delta > y$.
הוכיחו כי $\sup A = \inf B$.

**20)** נניח ש- $A$ קבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים, שאין לה מקסימום,
ונניח כי $x < \sup A$.
הוכיחו שיש לפחות שני איברים בקבוצה $A$, שנמצאים בין $x$ ל- $\sup A$.

**21)** תהי $S$ קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל של מספרים ממשיים.
הוכיחו כי אם $c \ge 0$, אז ל- $c \cdot S$ יש חסם עליון, ומתקיים $\sup(c \cdot S) = c \cdot \sup S$.

**22)** יהיו $S$ ו- $T$ קבוצות לא ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.
הוכיחו כי הקבוצה $S + T$ היא בעלת חסם עליון ומתקיים:
$\sup(S + T) = \sup S + \sup T$.

**23)** יהיו $S$ ו- $T$ קבוצות לא ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.

א. הוכיחו כי הקבוצה $S \cup T$ היא בעלת חסם עליון.

ב. הוכיחו כי $\sup(S \cup T) = \max\{\sup S, \sup T\}$.

**24)** תהיינה $U, T, S$ קבוצות לא-ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.
נניח כי לכל $s \in S$ ולכל $t \in T$ קיים $u \in U$, המקיים את התנאי: $u \ge s + t$.
הוכיחו כי $\sup U \ge \sup T + \sup S$.

**25)** הוכיחו את הטענות הבאות:

א. אם $S$ ו- $T$ הן שתי קבוצות לא ריקות של מספרים ממשיים,
כך שכל איבר של $S$ אינו גדול משום איבר של $T$,
אז קיימים $\sup S, \inf T$, ומתקיים: $\sup S \le \inf T$.

ב. לכל קבוצה לא-ריקה וחסומה S מתקיים: $\inf S \le \sup S$.
האם ייתכן שוויון ביניהן? באילו תנאים?

**26)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. נסחו והוכיחו את משפט ארכימדס.

ב. נסחו והוכיחו את תכונת ארכימדס.

ג. הוכיחו שלכל מספר ממשי $\varepsilon > 0$ קיים מספר טבעי $n$, כך ש- $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

ד. הוכיחו שלכל שני מספרים ממשיים $\alpha, \beta$, המקיימים $\alpha < \beta$, קיים
מספר טבעי $n$, כך ש- $\alpha < \alpha + \frac{1}{n} < \beta$ וגם $\alpha < \beta - \frac{1}{n} < \beta$.

**27)** תהי $A$ תת-קבוצה לא ריקה של $\mathbb{R}$ ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$ חסם מלעיל של $A$.
נניח שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $a_n \in A$, כך ש- $a_n > \alpha - \frac{1}{n}$.
הוכיחו כי $\alpha$ הוא הסופרמום של $A$.

**28)** הוכיחו שלכל מס' ממשי $c$ **קיים** מספר שלם **יחיד** $m \in \mathbb{Z}$, כך ש- $m \le c < m+1$.
למספר $m$ קוראים הערך השלם של $c$, ומסמנים $m = [c]$.

**29)** יהיו $a$ ו- $b$ שני מספרים ממשיים המקיימים $|a-b| < \frac{1}{n}$, לכל מספר טבעי $n$.
הוכיחו כי $a = b$.

**30)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. לכל $n$ טבעי נגדיר $I_n = [n, \infty)$.
הוכיחו כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \phi$.

ב. לכל $n$ טבעי נגדיר $J_n = \left[-\frac{1}{n}, \infty\right)$.
הוכיחו כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n \ne \phi$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**31)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. לכל $n$ טבעי נגדיר $I_n=[a_n,b_n]$.

נניח כי $I_{n+1}\subset I_n$ לכל $n$.

הוכיחו כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \phi$.

ב. לכל $n$ טבעי נגדיר $I_n=\left(0,\frac{1}{n}\right)$.

הוכיחו כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \phi$.

ג. בסעיף ב' התקיים כי $I_{n+1}\subset I_n$ לכל $n$, וכן $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \phi$.

האם תוצאת סעיף ב' סותרת את תוצאת סעיף א'?

**32)** לכל $n$ טבעי נגדיר $I_n=\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$.

הוכיחו כי $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. הקבוצה חסומה. ב. $\min A = \inf A = 0,\ \sup A = 1$

**2)** א. הקבוצה חסומה. ב. $\max A = \sup A = \frac{1}{4},\ \inf A = 0$

**3)** א. הקבוצה חסומה. ב. $\min A = \inf A = \frac{5}{12},\ \sup A = \frac{1}{2}$

**4)** א. הקבוצה חסומה. ב. $\sup A = c,\ \inf A = [c]$

**5)** א. הקבוצה לא חסומה מלמעלה וחסומה מלמטה על ידי 4. ב. $\min A = 4$

**6)** א. הקבוצה חסומה מלמעלה על ידי 7. הקבוצה לא חסומה מלמטה.

ב. $\max A = 7$

**7)** א. הקבוצה חסומה מלמעלה על ידי $\frac{4}{5}$, וחסומה מלמטה על ידי $\frac{3}{5}$;

לכן, הקבוצה חסומה. ב. $\sup A = \frac{4}{5},\ \min A = \frac{3}{5}$

**8)** א. $\max A = \frac{5}{4},\quad \inf A = -1$ ב. $\min B = 0,\ \max B = 2$

ג. $\min C = -2,\quad \sup C = 2$ ד. $\inf D = 0,\ \sup D = 2$

שאלות **9-32** הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# סימן הסכימה

## שאלות

**1)** כתבו בפירוט את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{n=0}^{10} 4^n$ ב. $\sum_{k=1}^{4} 2k$ ג. $\sum_{n=4}^{10} na_n$

ד. $\sum_{i=7}^{11} 4i^2 a_i$ ה. $\sum_{t=1}^{8} tx^t$ ו. $\sum_{k=4}^{10} na_{k+1}$

ז. $\sum_{k=1}^{10} 4n$ ח. $\sum_{k=-1}^{3} \left(k^2+1\right)$ ט. $\sum_{\ell=1}^{3} \left(\ell^2 - x_{2\ell} - 4\right)$

**2)** כתבו את הסכומים הבאים בעזרת סימן הסכימה:

א. $1+2+4+8+16+32+64+128$

ב. $2+4+6+8+10+12+14+16+18+20$

ג. $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$

ד. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6+6\cdot 7+7\cdot 8$

ה. $1\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 6+\ldots+43\cdot 44$

ו. $3\cdot 2+6\cdot 3+9\cdot 4+12\cdot 5+15\cdot 6+18\cdot 7+21\cdot 8$

ז. $5^2+7^2+\ldots+27^2$

ח. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{10\cdot 11}$

ט. $\frac{2}{3}+\frac{6}{9}+\frac{10}{27}+\frac{14}{81}+\frac{18}{243}$

י. $4+\frac{8}{5}+\frac{12}{25}+\frac{16}{125}+\frac{20}{625}$

**3)** חשבו את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{k=1}^{10} 4k$ ב. $\sum_{k=1}^{10} \left(2k+4k^2\right)$ ג. $\sum_{k=10}^{24} k(k-1)$

ד. $\sum_{k=10}^{24} \frac{k^3-k}{k+1}$ ה. $\sum_{k=4}^{10} (k-2)(k+2)$ ו. $\sum_{k=1}^{10} \left(2k^2+1\right)(k-2)$

* תוכלו להיעזר בנוסחאות הבאות (שמוכחות בפרק זה תחת הנושא 'אינדוקציה'):

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**4)** חשבו את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{k=1}^{20}\frac{5\cdot 4^k+8^k}{2^k}$ ב. $\sum_{k=1}^{11}\frac{2\cdot 4^{k+2}+10^k}{0.4^k}$ ג. $\sum_{k=10}^{20}2^{2k+10}$

* תוכלו להיעזר בנוסחה הבאה: $\sum_{k=1}^{n}a^k=\frac{a\left(a^n-1\right)}{a-1}\ (a\neq 1)$.

**5)** חשבו את הסכומים הבאים:

א. $1^2+2^2+3^2+...+20^2$

ב. $4^2+5^2+6^2+...+24^2$

ג. $2^2+4^2+6^2+...+22^2$

ד. $1^2+3^2+5^2+...+17^2$

**6)** הוכיחו כי:

א. $\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2k+4}}{k+2}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^{2k+6}}{k+3}$

ב. $\sum_{k=4}^{n-3}\frac{4k+17+2^{2k}}{k+1}=\sum_{k=8}^{n+1}\frac{4k+1+2^{2k-8}}{k-3}$

**7)** חשבו את הסכומים הבאים ללא פיצול הסכום:

א. $\sum_{4}^{11}k^2$ ב. $\sum_{10}^{20}4^{2k}$

## תשובות סופיות

1) א. $4^0+4^1+4^2+4^3+4^4+4^5+4^6+4^7+4^8+4^9+4^{10}$

ב. $2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+2\cdot4$

ג. $4a_4+4a_5+4a_6+4a_7+4a_8+4a_9+4a_{10}$

ד. $4\cdot7^2a_7+4\cdot8^2a_8+4\cdot9^2a_9+4\cdot10^2a_{10}+4\cdot11^2a_{11}+4\cdot7^2a_7$

ה. $1x^1+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5+6x^6+7x^7+8x^8$

ו. $na_5+na_6+na_7+na_8+na_9+na_{10}+na_{11}$

ז. $4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n$

ח. $\left((-1)^2+1\right)+\left(0^2+1\right)+\left(1^2+1\right)+\left(2^2+1\right)+\left(3^2+1\right)$

ט. $\left(1^2-x_2-4\right)+\left(2^2-x_4-4\right)+\left(3^2-x_6-4\right)$

2) א. $\sum_{k=0}^{7}2^k$ ב. $\sum_{k=1}^{10}2k$ ג. $\sum_{k=0}^{9}(2k+1)$ ד. $\sum_{k=1}^{7}k(k+1)$

ה. $\sum_{k=1}^{22}(2k-1)2k$ ו. $\sum_{k=1}^{7}3k(k+1)$ ז. $\sum_{n=3}^{14}(2n-1)^2$

ח. $\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n(n+1)}$ ט. $\sum_{k=1}^{5}\frac{4k-2}{3^k}$ י. $\sum_{k=1}^{4}\frac{4k}{5^{k-1}}$

3) א. 220 ב. 1650 ג. 4360

ד. 4360 ה. 28 ו. 4545

4) א. $5\cdot\left(2^{21}-2\right)+\frac{4}{3}\left(4^{20}-1\right)$ ב. $32\cdot\frac{10\left(10^{11}-1\right)}{10-1}+\frac{25\left(25^{11}-1\right)}{25-1}$

ג. $2^{10}\left[\frac{4\left(4^{20}-1\right)}{4-1}-\frac{4\left(4^{9}-1\right)}{4-1}\right]$

5) א. 2870 ב. 4886 ג. 2024 ד. 969

6) שאלת הוכחה.

7) א. $\frac{8(8+1)(2\cdot8+1)}{6}+6\cdot\frac{8(8+1)}{2}+9\cdot8$ ב. $4^{18}\cdot\frac{16\left(16^{11}-1\right)}{16-1}$

# אינדוקציה

## שאלות

**1)** הוכיחו באינדוקציה כי $4\cdot 10^n+14\cdot 19^n$ מתחלק ב-9 לכל $n$ טבעי.

**2)** הוכיחו באינדוקציה כי $\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$ . $(k,n\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{R})$

**3)** מצאו את ה- $n$ הטבעי הקטן ביותר עבורו מתקיים $2^n\ge n^2$ ,
והוכיחו באינדוקציה שעבור כל $n$ טבעי החל ממנו מתקיים אי-השוויון הנ"ל.

**4)** הוכיחו את הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו באינדוקציה כי $(1+x)^n\ge 1+nx$ , לכל $n$ טבעי ולכל $x\ge -1$ ממשי.
הערה: אי השוויון הנ"ל נקרא אי שוויון ברנולי.

ב. הוכיחו כי $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ , לכל $n$ טבעי.
רמז: היעזרו בתוצאת סעיף א'.

**5)** הוכיחו באינדוקציה כי $(1-x)^n<\frac{1}{1+xn}$ לכל $0<x<1,\ n\in\mathbb{N}$ .

**6)** הוכיחו באינדוקציה כי $n!\le\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ לכל $n\in\mathbb{N}$ .
רמז: היעזרו במהלך הפתרון באי-שוויון ברנולי.

**7)** נתון כי $a_1=\sqrt{2}$ , $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$ .
הוכיחו באינדוקציה שלכל $n$ טבעי מתקיים:

א. $a_n\le 2$

ב. $a_n\le a_{n+1}$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו מהי סדרה רקורסיביות.

**8)** הוכיחו באינדוקציה שלכל $n$ טבעי,
אם $a_1=-1,\ a_2=0$ , $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$ ,
אז $a_n=n^2-2n$ .
הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו מהי סדרה רקורסיבית.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**9)** הוכיחו באינדוקציה שלכל $n$ טבעי,
אם $a_1=1,\ a_2=1$ , $a_{n+1}=2a_n+3a_{n-1}$ ,
אז $a_n=\frac{1}{6}\cdot 3^n-\frac{1}{2}(-1)^n$ .
הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו מהי סדרה רקורסיביות.

**10)** הוכיחו באינדוקציה כי $4^n-1$ מתחלק ב-15, לכל $n$ טבעי **זוגי**.

**11)** הוכיחו באינדוקציה כי $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & a^n\end{pmatrix}$ $(n\in\mathbb{N},a\in\mathbb{R})$ .
הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו כפל מטריצות (אלגברה לינארית).

**הערה**: תרגילים נוספים באינדוקציה תמצאו תחת הנושא "אי שוויונים מפורסמים"
בפרק זה, בשאלה 1 ובשאלה 3 סעיף ו'.

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר GooL.co.il

# אי שוויונים מפורסמים

## שאלות

**1)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שלכל שני מספרים ממשיים $x, y$ המקיימים $x<1, y>1$, מתקיים $x+y>xy+1$.

ב. הוכיחו באינדוקציה שלכל $n\geq 2$ טבעי:
אם $a_1\cdot a_2\cdot\dots\cdot a_n=1$, אז $a_1+a_2+\dots+a_n\geq n$ $(0<a_i\in\mathbb{R})$.

**2)** נסחו והוכיחו את **אי שוויון הממוצעים**.

**3)** הוכיחו שלכל $a,b\in\mathbb{R}$ מתקיים:

א. $|a+b|\leq|a|+|b|$ **(אי שוויון המשולש)**

ב. $|a-b|\leq|a|+|b|$

ג. $|a-b|\geq|a|-|b|,\ \ |a-b|\geq|b|-|a|$

ד. $|a-b|\geq\big||a|-|b|\big|$

ה. $|a+b|\geq\big||a|-|b|\big|$

ו. $|a_1+a_2+\dots+a_n|\leq|a_1|+|a_2|+\dots+|a_n|$ $(a_i\in\mathbb{R})$

**4)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. נסחו והוכיחו את **אי שוויון קושי-שוורץ**.

ב. הוכיחו כי אם $a_1+..+a_n=1$ אז $a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2\geq\frac{1}{n}$ $(n\in\mathbb{N},\ a_i\in\mathbb{R})$.

הערה: **אי שוויון ברנולי** מוכח בפרק זה תחת הנושא "אינדוקציה".
נוכיח שם גם כמה מסקנות מעניינות ממנו.

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר GooL.co.il

# פתרון אי שוויונים

## שאלות

פתרו את אי השוויונים הבאים:

1) $x^2-12x>-32$

2) $(x-3)(x-7)\ge 8x-56$

3) $2x^2+2x+24\ge 0$

4) $\frac{x-1}{x^2-9}>0$

5) $\frac{2x-1}{x-5}\le 0$

6) $\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7}\ge 0$

7) $|x+2|<3$

8) $|6-2x|<x$

9) $|2x+3|<8<|5-x|$

10) $x^2-6|x+1|-1>0$

11) $|2x-6|+|x+5|>14-|1-x|$

12) $\sqrt{x+3}<7$

13) $\frac{4}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x}<2$

14) $\sqrt{x^2+x-6}<x-3$

הערה: לא מומלץ להתעכב יותר מידי זמן על פתרון אי שוויונים.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $x>8$ או $x<4$

2) $x\geq 11$ או $x\leq 7$

3) כל $x$

4) $x>3$ או $-3<x<1$

5) $\frac{1}{2}\leq x<5$

6) $1\leq x\leq 6$

7) $-5<x<-1$

8) $2<x<6$

9) $-5\frac{1}{2}<x<-3$

10) $x>7$ או $x<-5$

11) $x>4$ או $x<-1$

12) $-3\leq x<46$

13) $x<0.472$

14) אין פתרון.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# עצרת, המקדם הבינומי, הבינום של ניוטון

## שאלות

**1)** חשבו, ללא מחשבון:

א. $\frac{4!\cdot 7!}{0!\cdot 10!}$

ב. $\frac{14!\cdot 20!}{10!\cdot 17!}$

**2)** הוכיחו את הזהויות הבאות:

א. $(n-2)!(n^2-n)=n!$

ב. $(n-1)!n^2+n!=(n+1)!$

ג. $\frac{1}{(n-1)!}=\frac{(n+2)^2}{(n+2)!}+\frac{n^2-2}{(n+1)!}$

**3)** חשבו:

א. $\binom{5}{3}$ ב. $\binom{4}{1}$ ג. $\binom{10}{0}$ ד. $\binom{14}{11}$

**4)** הוכיחו את הזהויות הבאות:

א. $\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=1$ ב. $\frac{k}{n}\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}$ ג. $\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$

**5)** הוכיחו באינדוקציה שלכל $n\geq 2$ טבעי מתקיים:

$$\binom{1}{0}+\binom{2}{1}+\binom{3}{2}+\ldots+\binom{n-1}{n-2}=\binom{n}{2}$$

**6)** רשמו את פיתוח הבינום בכל אחד מהסעיפים הבאים:

א. $(a+b)^4$ ב. $(x+2)^5$ ג. $(x-4)^3$

**7)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו $\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$ לכל $0\leq k\leq n$, $k,n\in\mathbb{N}$.

ב. נסחו והוכיחו (באינדוקציה) את נוסחת הבינום.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**8)** הוכיחו שלכל $n \geq 1$ טבעי מתקיים:

א. $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$

ב. $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$

ג. $\binom{n}{0}+3\binom{n}{1}+9\binom{n}{2}-\ldots+3^n\binom{n}{n}=4^n$

**9)** מצאו את האיבר הרביעי בפיתוח הבינום $\left(\frac{1}{2a}+2a^2\right)^{10}$.

**10)** בפיתוח של $\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt{a}\right)^{12}$, ישנו איבר שאחד מגורמיו הוא $a^7$.
מצאו את מקום האיבר ואת ערכו.

**11)** מצאו, בפיתוח של $\left(\frac{1}{x^2}+\sqrt{x}\right)^{10}$, איבר שאינו מכיל את $x$, וחשבו את ערכו.

**12)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו, בפיתוח של $\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{a}+\frac{b}{\sqrt[4]{x}}\right)^{18}$, את המקדם של $\frac{1}{x}$.

ב. חשבו את סכום כל המקדמים בפיתוח, אם $a=b=1$.

**13)** המקדם של האיבר השלישי בפיתוח הבינום $(a+b)^n$, הוא 15.
מצאו את $n$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) א. $\frac{1}{30}$ ב. $\frac{1001}{285}$

2) שאלת הוכחה.

3) א. 10 ב. 4 ג. 1 ד. 364

4) שאלת הוכחה.

5) שאלת הוכחה.

6) א. $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

ב. $(x+2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$

ג. $(x-4)^3 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

9) $T_4 = \frac{15}{2a}$

10) $T_7 = 924a^7$

11) $T_9 = 45$

12) א. $\frac{18564 \cdot b^{12}}{a^6}$ ב. $2^{18}$

13) $n = 6$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שדות

## שאלות

**1)** בכל אחד מהסעיפים הבאים מוגדרות פעולות חיבור $(\oplus)$ וכפל $(\otimes)$ על $R$.
בדקו, בכל אחד מהסעיפים, אילו מבין אקסיומות השדה מתקיימות.

א. $x \oplus y = x + y + 4$
$x \otimes y = 2xy$

ב. $x \oplus y = x + y$
$x \otimes y = 2xy$

ג. $x \oplus y = y$
$x \otimes y = y^2$

**2)** נתונה הקבוצה $Q[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a,b \in Q\}$.
על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)+\left(c+d\sqrt{2}\right)=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$$

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)\cdot\left(c+d\sqrt{2}\right)=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}$$

הוכיחו שהקבוצה $Q[\sqrt{2}]$, עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה.

**3)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שבשדה, האיבר 0 הוא יחיד.
ב. הוכיחו שבשדה, האיבר 1 הוא יחיד.
ג. הוכיחו שבשדה, האיבר הנגדי הוא יחיד.
ד. הוכיחו שבשדה, האיבר ההופכי הוא יחיד.

**4)** יהיו $a,b$ איברים בשדה.

א. הוכיחו כי $a + a = a \Leftarrow a = 0$.
ב. הוכיחו כי $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.
ג. הוכיחו כי $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** יהיו $a$ ו- $b$ איברים של שדה.
הוכיחו כי:

א. $(-1)\cdot a=-a$

ב. $(-a)b=a(-b)=-ab$

**6)** הוכיחו שבשדה, מתקיים חוק הצמצום.
כלומר, הוכיחו כי $ab=cb \Rightarrow a=c$, לכל $a,b,c$, בשדה $(b\neq 0)$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

# קורס ריענון במתמטיקה

## פרק 2 - טורים עם איברים קבועים

### תוכן העניינים


1. טורים מתכנסים וטורים מתבדרים ..... 28
2. מבחן ההתבדרות של טורים ..... 31
3. מבחני התכנסות לטורים חיוביים ..... 32
4. מבחני התכנסות לטורים כלליים ..... 34
5. התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי ..... 36
6. תרגילי תיאוריה ..... 37

# טורים מתכנסים וטורים מתבדרים

## שאלות

### טור גיאומטרי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **1-6**.
במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

**1)** $\sum_{n=1}^{\infty}(0.44)^n$

**2)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{7^{n+1}}$

**3)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{4^{n+2}}$

**4)** $\sum_{n=0}^{\infty}(-4)\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}$

**5)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+(-5)^n}{7^n}$

**6)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n}}{3^{2n}}$

### טור טלסקופי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **7-11**.
במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

**7)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

**8)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+3)(4n-1)}$

**9)** $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

**10)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)(\ln(n+1))}$

**11)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}$

### טור הרמוני מוכלל

**12)** בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{5n}$

ד. $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2/3}$

ה. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{\sqrt[3]{n^4}}$

ו. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^e}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**תכונות אלגבריות של טורים**

**13)** בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4^n}{7^{n+1}}+n^{-1.5}\right)$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{n^2}$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

**14)** חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)^2}$, אם ידוע כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

**15)** מצאו את השבר הרציונלי, שהצגתו העשרונית היא $0.123123123...+0.141414...$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) מתכנס ל- $\frac{11}{14}$.
2) מתכנס ל- $\frac{1}{3}$.
3) מתבדר.
4) מתכנס ל- $-\frac{64}{7}$.
5) מתכנס ל- $\frac{11}{12}$.
6) מתכנס ל- $8$.
7) מתכנס ל- $\frac{1}{2}$.
8) מתכנס ל- $\frac{1}{12}$.
9) מתבדר.
10) $S=\frac{1}{\ln 2}$
11) $\frac{1}{12}$
12) א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתבדר.
ד. מתבדר. ה. מתכנס. ו. מתכנס.
13) א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתבדר.
14) $\frac{\pi^2}{6}-\frac{5}{4}$
15) $\frac{323}{1221}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מבחן ההתבדרות של טורים

## שאלות

**1)** בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$

ד. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^2+2}$ ה. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$ ו. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^n$

## תשובות סופיות

**1)** א-ו: מתבדר.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מבחני התכנסות לטורים חיוביים

## שאלות

### מבחן האינטגרל

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **1-5** (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

**1)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$ **2)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+5}}$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan n}{n^2+1}$

**4)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\ (p>1)$ **5)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\ (p\le 1)$

**6)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n^3}$.

ב. מצאו את הגבול $\lim_{n\to\infty}n^2e^{-n^3}$.

### מבחן ההשוואה ומבחן ההשוואה הגבולי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **7-15** (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

**7)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+10n+1}$ **8)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)}$ **9)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4n+1}{\sqrt{n^{10}+n+1}}$

**10)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+5}{\sqrt{n^4+n+1}}$ **11)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-2}{3^n+2n}$ **12)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\sin^2 n}{n!}$

**13)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ **14)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ **15)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**מבחן המנה, מבחן השורש ומבחן רַאבֶּה**

בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n+2)}$

18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!(2n)^n}$

19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{n!\cdot3^n}$

20) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}$

21) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{1000}e^{-n}$

22) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

23) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(1+n^2)}{n!}$

24) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

25) $\sum\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}$

26) $\sum\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$

## תשובות סופיות

1) מתבדר.
2) מתבדר.
3) מתכנס.
4) מתכנס.
5) מתבדר.
6) א. מתכנס. ב. 0
7) מתכנס.
8) מתבדר.
9) מתכנס.
10) מתבדר.
11) מתכנס.
12) מתכנס.
13) מתבדר.
14) מתכנס.
15) מתכנס.
16) מתבדר.
17) מתכנס.
18) מתכנס.
19) מתכנס.
20) מתכנס.
21) מתכנס.
22) מתכנס.
23) מתכנס.
24) מתכנס.
25) מתבדר.
26) מתבדר.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מבחני התכנסות לטורים כלליים

**מבחן לייבניץ**

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **1-3**:

**1)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n+1}$ **2)** $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+n}$

**מבחן דיריכלה**

בשאלות **4** ו-**5**, קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר:

**4)** $1+\frac{1}{4}-\frac{2}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{13}-\frac{2}{16}+\ldots$

**5)** $\sum\frac{\sin n\cdot\sin n^2}{n+1}$

**6)** הוכיחו שהטורים $\sum\cos n\theta,\ \sum\sin n\theta$, כאשר $\theta\neq 2\pi k$, חסומים.

**7)** הוכיחו את התכנסות הטורים הבאים:
$\sum\frac{\sin n\theta}{\sqrt{n+4}},\quad \sum\frac{\cos n\theta}{n+1},\quad \sum\frac{\sin n\theta}{n}\ (\theta\neq 2\pi k)$.

**8)** בדקו התכנסות הטור $\sum\frac{\sin^2 n}{n}$.

**9)** הוכיחו שאם הסדרה $b_n$ יורדת ושואפת לאפס, אז הטור $\sum b_n\sin n$ מתכנס.

**10)** ענו על שני הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}(3-n)(\bmod 7)$ הוא טור חסום.

ב. בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3-n)(\bmod 7)}{\sqrt{n+1}}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**מבחן אבל**

קבעו האם הטור מתכנס או מתבדר:

**11)** $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+4}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

**12)** $\sum \frac{(-1)^n n}{4^n - 4^{2n}}$

**13)** $\sum \frac{(-1)^n \ln\left(1+n^{-1}\right)}{n}$

**14)** $\sum \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{n^2}$

## תשובות סופיות

**1)** מתכנס. **2)** מתכנס. **3)** מתכנס.

**4)** מתכנס. **5)** מתכנס. **6)** הוכחה.

**7)** הוכחה. **8)** מתבדר. **9)** הוכחה.

**10)** א. הוכחה. ב. מתכנס. **11)** מתכנס.

**12)** מתכנס. **13)** מתכנס. **14)** מתכנס.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

## שאלות

בשאלות הבאות, קבעו אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{n^2}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}$

4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^3}$

6) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1+n\ln n}{n^2}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+n}$

## תשובות סופיות

1) מתבדר.
2) מתכנס בהחלט.
3) מתכנס בתנאי.
4) מתכנס בתנאי.
5) מתכנס בהחלט.
6) מתכנס בהחלט.
7) מתכנס בתנאי.
8) מתכנס בתנאי.
9) מתכנס בתנאי.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# תרגילי תיאוריה

**1)** להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n$ מתכנס ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum(a_n+b_n)$ מתבדר.

ב. אם $\sum a_n$ מתבדר ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum(a_n+b_n)$ מתבדר.

**2)** להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n^2$ מתכנס, אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.

ב. אם $\sum a_n$ חיובי ומתכנס, אז $\sum \frac{1}{a_n}$ מתבדר.

ג. אם $\sum a_n$ מתכנס, אז $\sum a_n^2$ מתכנס.

**3)** הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+(-1)^n\right)$ מתבדר.

**4)** הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ומתכנס, אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס.

**5)** נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum\left(1-\frac{\sin(a_n)}{a_n}\right)$ מתכנס.

**6)** א. נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ מתבדר.

ב. נתון טור מתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו ש- $\sum |a_n|$ מתבדר אם $\sum a_n^2$ מתבדר.

הערה: אין קשר בין הסעיפים

**7)** תהי $(a_n)$ סדרה חיובית השואפת לאינסוף.

הוכיחו כי $\sum \frac{1}{(a_n)^n}$ מתכנס.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**8)** $\sum a_n$ הוא טור אי-שלילי ומתכנס.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n+4^n}{a_n+10^n}$ מתכנס.

**9)** הוכיחו או הפריכו:

אם הסדרה $(a_n)_{n\geq 1}$ מקיימת $0\leq a_n\leq \frac{1}{n}$ לכל $n$, אז $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ מתכנס.

**10)** נניח כי $a_n\geq 0$.

הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

**11)** הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס והסדרה $b_n$ חסומה, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

**12)** הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי, אז $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ מתבדר.

**13)** הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי ואם $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$, אז $\sum b_n$ מתכנס בתנאי.

**14)** נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ לכל $n$, אז הטור מתכנס.

ב. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ לכל $n$, אז הטור מתבדר.

**15)** נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**16)** נתונים שני טורים חיוביים $\sum a_n, \sum b_n$.

א. נתון שהטורים $\sum a_n^2, \sum b_n^2$ מתכנסים.

1. הוכיחו כי $\sum a_n b_n$ מתכנס.

2. הוכיחו כי $\sum (a_n + b_n)^2$ מתכנס.

ב. נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ מתכנס.

**17)** הוכיחו:

א. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\lim_{n\to\infty}(na_n) = k \neq 0$, אז הטור מתבדר.

ב. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\sum (na_n - k)$ מתכנס (כאשר $k \neq 0$),

אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

**18)** הוכיחו כי אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\lim_{n\to\infty}(n^2 a_n) = k$, אז הטור מתכנס.

**19)** נתון $a_n \geq 0$ לכל $n$.

א. נתון כי $\lim_{n\to\infty} n^3 a_n^2 = k > 0$.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

ב. נתון כי $\sum (n^3 a_n^2 - k)$ מתכנס (כאשר $k > 0$).

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

**20)** הסדרה $(a_n)$ מוגדרת על ידי $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{21}{20}$, כאשר $(n \geq 1)$.

האם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס?


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**21)** הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מוגדר כך: $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n = k^2 \\ \frac{1}{n^2} & n \neq k^2 \end{cases}$.

הוכיחו כי הטור מתכנס.

**22)** נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$,

ונתון כי לכל $n$ מתקיים $a_{n+1} \le a_n$.

הוכיחו כי $\sum n(a_n - a_{n+1})$ מתכנס.

**23)** נתון $\forall n \ge 1:\ 0 < a_n < 1\ ,\ 4a_n(1-a_{n+1}) > 1$.

האם $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 - 1\right)$ מתכנס?

**24)** נניח כי $(a_n)$ סדרה המקיימת $a_n > 0\ ,\ a_n \le a_{2n} + a_{2n+1}$ לכל $n$ טבעי.

הוכיחו כי $\sum a_n$ מתבדר.

**25)** $(a_n)$ היא סדרה חשבונית שכל איבריה שונים מאפס.

הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ מתבדר.

**26)** נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם הטור מתכנס לפי מבחן השורש, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן המנה.

ב. אם הטור מתכנס לפי מבחן המנה, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן השורש.

**27)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי הסדרה $a_n$ מתכנסת אם ורק אם $\sum_{n=2}^{\infty}\left(a_n - a_{n-1}\right)$ מתכנס.

ב. בדקו האם הסדרה $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ מתכנסת.

ג. בדקו האם הסדרה $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ מתכנסת.

הערה: סעיף ג' מיועד רק למי שלמדו את הנושא **טורי מקלורן עם שארית לגראנז'**.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**28)** פונקציה $f$ מוגדרת לכל $x$, גזירה ב- $0$ ומקיימת $f(0)=0$.
הוכיחו כי אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, אז $\sum f(a_n)$ מתכנס בהחלט.

**29)** נתון $p(x)$ פולינום.
$\sum a_n$ מתכנס בהחלט.
הוכיחו כי $\sum P(a_n)$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $p(0)=0$.

**30)** יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים חיוביים.
נתון כי:
(1) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.(2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$ לכל $n$ טבעי.
הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

פתרונות לכל שאלות התיאוריה תוכלו למצוא באתר: GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# קורס ריענון במתמטיקה

## פרק 3 - מבוא לאלגברה

### תוכן העניינים

1. מספרים מכוונים ..... 42
2. חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים ..... 46
3. סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים ..... 48
4. שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים ..... 49
5. כפל וחילוק שברים ..... 55
6. חיבור וחיסור שברים ..... 57
7. בעיות יסודיות באחוזים ..... 61
8. חזרה על תבניות מספר ..... 63
9. כינוס איברים ..... 65
10. פישוט ביטויים על ידי פתיחת סוגריים ..... 67
11. פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר ..... 69
12. פירוק לגורמים של ביטויים אלגברים ..... 71
13. פירוק הטרינום ..... 74
14. שברים אלגברים ..... 76
15. כפל וחילוק של שברים אלגברים ..... 80
16. חיבור וחיסור של שברים אלגברים ..... 82
17. שברים כפולים ..... 86

# מספרים מכוונים:

## סיכום כללי:

מספרים מכוונים הם מספרים שיכולים לקבל סימן חיובי או שלילי, כגון:

- בקניון גדול ישנן קומות 1, 2, 3, 4, וכן חניונים הממוקמים בקומות 1-, 2- ו-3-.
- גובה פני הים מוגדר להיות 0 מטרים. העיר חיפה נמצאת כ-103 מטרים מעל פני הים בעוד שים המלח נמצא בגובה 426- מטרים.

**כללים:**

- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים זהים, מחברים את המספרים עצמם והסימן נשאר.
- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים מנוגדים, מחסירים את המספרים זה מזה (הקטן מהגדול) וסימן התוצאה כסימן המספר הגדול מביניהם.
- כפל וחילוק יתבצע בשני חלקים:
  - ביצוע הפעולה על המספרים עצמם.
  - קביעת הסימן של התוצאה באופן הבא:
    - כפל או חילוק של שני מספרים בעלי אותו סימן - התוצאה תהיה חיובית.
    - כפל או חילוק של שני מספרים שוני סימן - התוצאה תהיה שלילית.

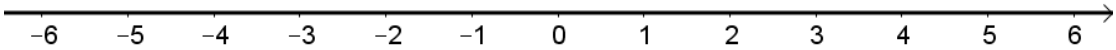
**הערה:**

אם יש רצף של מכפלות (או חילוקים), סימן התוצאה תלוי במספר הפעמים שבהם מופיע סימן שלילי (-). אם הסימן מופיע מספר זוגי של פעמים התוצאה חיובית, ואם הוא מופיע מספר אי-זוגי של פעמים אזי התוצאה שלילית.

## שאלות:

**1)** סמנו את המספרים הבאים על ציר המספרים בהתאמה:

$-3\frac{1}{2}$ , $4$ , $1\frac{1}{3}$ , $-5$ , $-\frac{1}{2}$ , $2$ , $0$ , $\frac{1}{2}$ , $-2$




**2)** חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

| | |
|---|---|
| א. $3+2$ | ב. $-3-2$ |
| ג. $3-2$ | ד. $-3+2$ |
| ה. $-1-4$ | ו. $7+10$ |
| ז. $-6+5$ | ח. $-7+3$ |

**3)** חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

| | |
|---|---|
| א. $5+7-23+1$ | ב. $5-8-12+17$ |
| ג. $3-14+2+6$ | ד. $-4-11+2+9$ |
| ה. $6-21+3-7$ | ו. $-7-13+5-3$ |

**4)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

| | |
|---|---|
| א. $4\cdot 9$ | ב. $4\cdot(-7)$ |
| ג. $(-6)\cdot(-5)$ | ד. $(-5)\cdot(-3)$ |
| ה. $(-2)\cdot 8$ | ו. $(-8)\cdot 5$ |
| ז. $(-2)\cdot(-3)\cdot(-3)$ | ח. $2\cdot 3\cdot 3$ |
| ט. $(-2)\cdot 3\cdot(-3)$ | י. $(-2)\cdot(-3)\cdot 3$ |
| יא. $2\cdot 3\cdot(-3)$ | יב. $(-2)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-2)$ |
| יג. $(-1)\cdot(-2)\cdot(-4)\cdot 2$ | יד. $1\cdot(-2)\cdot(-4)\cdot 2$ |

**5)** מהו הסימן של תוצאת המכפלה בכל מקרה:

א. $(-2)\cdot(-4)\cdot(-3)\cdot(-10)\cdot(-6)\cdot(-5)$

ב. $(-1)\cdot 2\cdot 4\cdot(-3)\cdot(-10)\cdot 6\cdot(-5)$

ג. $(-1)\cdot 2\cdot 4\cdot(-3)\cdot(-10)\cdot(-6)\cdot(-5)$

ד. $(-1)\cdot 2\cdot 4\cdot(-3)\cdot(-10)\cdot 6\cdot 5$

**6)** חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(-25):(-5)$

ב. $(-30):3$

ג. $40:(-10)$

ד. $(-32):(-4)$

ה. $(-6):18$

ו. $4:(-16)$

**7)** חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{-60}{12}$

ב. $\frac{42}{-6}$

ג. $\frac{32}{-4}$

ד. $\frac{-12}{-3}$

**8)** מה התוצאה של כל אחת מהפעולות הבאות:

א. $0:5$

ב. $(-2)\cdot 0$

ג. $0\cdot(-3)\cdot 4$

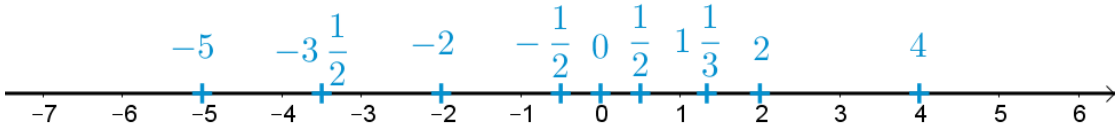
ד. $6:0$

ה. $0+4$

ו. $0-4$

## תשובות סופיות:

**1)** להלן מערכת הצירים:




**2)** א. 5 ב. -5 ג. 1 ד. -1 ה. -5
ו. 17 ז. -1 ח. -4.

**3)** א. -10 ב. 2 ג. -3 ד. -4 ה. -19 ו. -18.

**4)** א. 36 ב. -28 ג. 30 ד. 15 ה. -16
ו. -40 ז. -18 ח. 18 ט. 18 י. 18
יא. -18 יב. 36 יג. -16 יד. 16.

**5)** א. + ב. + ג. - ד. -.

**6)** א. 5 ב. -10 ג. -4 ד. 8 ה. $-\frac{1}{3}$ ו. $-\frac{1}{4}$.

**7)** א. -5 ב. -7 ג. -8 ד. 4.

**8)** א. 0 ב. 0 ג. 0 ד. לא מוגדר ה. 4 ו. -4.

# חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים:

## סיכום כללי:

**הגדרה:**

פעולת החזקה היא צורה מקוצרת שמייצגת פעולת כפל של אותו מספר בעצמו מספר פעמים. סימון החזקה הוא באופן הבא:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$$

כאשר $a$ נקרא הבסיס ו- $n$ נקראת החזקה.

**הערות:**

- כאשר הבסיס חיובי, התוצאה תמיד תהיה חיובית ללא קשר האם החזקה היא זוגית או אי-זוגית.
- כאשר הבסיס שלילי, התוצאה תהיה חיובית אם החזקה היא זוגית ושלילית אם החזקה היא אי-זוגית.

**הגדרה:**

פעולת השורש היא הפוכה לפעולת החזקה והיא מאפשרת למצוא את בסיס החזקה. סימון השורש הוא באופן הבא:

$$\sqrt[n]{a}$$

כאשר $a$ נקרא הבסיס ו- $n$ נקרא סדר השורש.

**הערות:**

- שורש למספר חיובי יכול להיות מסדר זוגי או אי-זוגי.
- שורש למספר שלילי יכול להיות מסדר אי-זוגי בלבד.

## שאלות:

**1)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $3^2$
ב. $3^3$
ג. $(-3)^3$
ד. $(-2)^3$
ה. $4^3$
ו. $3^4$
ז. $(-5)^3$
ח. $10^4$
ט. $-(-3)^4$
י. $-5^4$
יא. $-4^3$
יב. $-(-2)^6$

**2)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sqrt[3]{-27}$
ב. $\sqrt[4]{625}$
ג. $\sqrt[4]{-16}$
ד. $\sqrt[5]{-32}$
ה. $-\sqrt[4]{81}$
ו. $-\sqrt[3]{1000}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. 9 ב. 27 ג. -27 ד. -8 ה. 64 ו. 81
ז. -125 ח. 10000 ט. -81 י. -625 יא. -64 יב. -64

**2)** א.-3 ב. 5 ג. לא מוגדר ד. -2 ה. -3 ו. -10

# סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים:

## סיכום כללי:

**סדר פעולות חשבון:**

- פעולות כפל וחילוק קודמות לפעולות חיבור וחיסור.
- פעולות חזקה ושורש קודמות לפעולות כפל וחילוק.
- סוגריים קודמים לכל.

## שאלות:

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

**1)** $\sqrt{81}+3\cdot 2^3-40:8$

**2)** $(-3)^2:9-2\cdot(-4^2)$

**3)** $\sqrt{144}-20:4+3\cdot(-2)^2$

**4)** $3+4\cdot[-3+4\cdot(-2)]+\sqrt{10+6}$

**5)** $(-3)^4:(-9)-5\cdot(-2)^3$

**6)** $-\sqrt{9}+5^2:(-4-1)-24:12\cdot 3$

**7)** $-2^5:(-8)+4^2-3\cdot 5$

**8)** $\sqrt[3]{-27}+4\cdot 3^2-2\cdot 3^3$

**9)** $\left[6\cdot(-1)^4-10\cdot(-1)^3\right]\cdot(-1)^5$

**10)** $\left(8-\sqrt[3]{64}\right)\cdot\left(2\cdot(-4)-\sqrt[5]{243}\right)$

**11)** $\dfrac{3^2\cdot(8-2\cdot 3)^3}{(5^2\cdot 3-72)\cdot(-4)}+2\cdot\{15-20:(4+3\cdot 2)\}$

## תשובות סופיות:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1)** 28 | **2)** 33 | **3)** 19 | **4)** -37 |
| **5)** 31 | **6)** -14 | **7)** 5 | **8)** -21 |
| **9)** -16 | **10)** -44 | **11)** 20 | |

# שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים:

## סיכום כללי:

**הגדרה כללית:**

השבר הוא חלק מתוך השלם. מקובל לסמן שבר באמצעות קו שבר המפריד בין המונה (החלק העליון) למכנה (החלק התחתון) באופן הבא:

$$\frac{\text{מונה}}{\text{מכנה}}$$

**ישנם שלושה סוגים אפשריים של שברים:**

- שבר פשוט – בו המונה קטן מהמכנה (ולכן תמיד יהיה קטן מ-1).
- שבר מדומה – בו המונה גדול מהמכנה (יהיה גדול בערכו מ-1).
- שבר מעורב – המכיל שילוב של מספר שלם ושבר כלשהו.

**שבר עשרוני:**

שבר שהמכנה שלו הוא מספר המהווה כפולות של 10 כגון: 10, 100, 1000 ...
שבר עשרוני מיוצג ע"י נקודה עשרונית אשר מבדילה בין החלק שלם לחלק השברי באופן הבא:

$$\underbrace{XX}_{\text{שלמים}}.\underbrace{YYY}_{\text{שברים}}$$

כדי להמיר שבר פשוט לשבר עשרוני המכנה צריך להיות בכפולות של 10.

**אחוזים - הגדרה:**

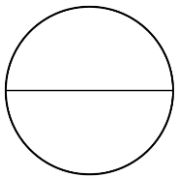
השבר $\frac{1}{100}$ מוגדר להיות אחוז אחד ומסומן באופן הבא: 1%.

באופן זה השבר $\frac{45}{100}$ יכתב: 45% , והשבר $\frac{145}{100}$ יכתב: 145%.

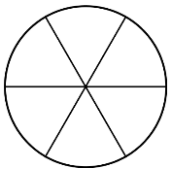
## שאלות:

**1)** צבע את החלקים המתאימים בכל עיגול:

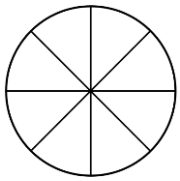
א. צבע $\frac{1}{2}$ מהעיגול



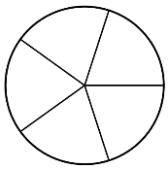
ב. צבע $\frac{1}{6}$ מהעיגול



ג. צבע $\frac{3}{8}$ מהעיגול

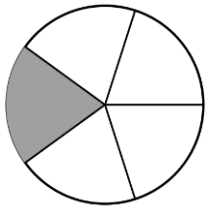


ד. צבע $\frac{2}{5}$ מהעיגול

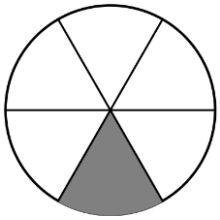


**2)** כתוב את השבר המתאים לחלקים הצבועים בכל אחד מהמקרים הבאים:

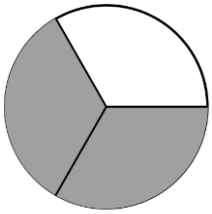
א. שבר:



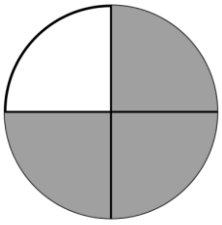
ב. שבר:



ג. שבר:



ד. שבר:



**3)** הרחב את השברים הבאים:

א. השבר $\frac{1}{2}$ לפי בסיס 4, לפי בסיס 18, לפי בסיס 40.

ב. השבר $\frac{3}{5}$ לפי בסיס 10, לפי בסיס 25, לפי בסיס 60.

ג. השבר $\frac{5}{8}$ לפי בסיס 16, לפי בסיס 32, לפי בסיס 88.

**4)** צמצם את השברים הבאים ככל הניתן:

א. $\frac{25}{30}$ ב. $\frac{10}{30}$ ג. $\frac{6}{24}$ ד. $\frac{4}{20}$

ה. $\frac{35}{56}$ ו. $\frac{24}{42}$ ז. $\frac{36}{48}$ ח. $\frac{33}{121}$

**5)** המר את השברים המדומים הבאים לשברים מעורבים:

א. $-\frac{20}{3}$ ב. $\frac{19}{4}$ ג. $\frac{12}{5}$ ד. $\frac{22}{5}$

ה. $-\frac{34}{6}$ ו. $-\frac{50}{7}$ ז. $\frac{47}{8}$ ח. $\frac{60}{9}$

**6)** המר את השברים המעורבים הבאים לשברים מדומים:

א. $1\frac{2}{3}$ ב. $3\frac{5}{6}$ ג. $4\frac{1}{2}$ ד. $6\frac{1}{4}$

ה. $11\frac{3}{4}$ ו. $-2\frac{5}{8}$ ז. $-6\frac{2}{7}$ ח. $12\frac{7}{9}$

**7)** קבע איזה שבר גדול יותר בכל אחד מהמקרים הבאים:

א. $\frac{3}{10}$ או $\frac{4}{10}$ ב. $\frac{7}{8}$ או $\frac{7}{6}$

ג. $\frac{2}{3}$ או $\frac{5}{6}$ ד. $\frac{5}{18}$ או $\frac{7}{12}$

**8)** המר את השברים העשרוניים הבאים לשברים פשוטים מצומצמים או מעורבים:

א. 0.7 ב. 0.07 ג. 0.007 ד. 0.34

ה. 0.304 ו. 0.65 ז. 1.2 ח. 1.02

ט. 1.42 י. 3.5 יא. 6.03 יב. 5.125

**9)** המר את השברים הבאים לשברים עשרוניים:

| | | | |
|---|---|---|---|
| א. $\frac{3}{10}$ | ב. $\frac{3}{100}$ | ג. $\frac{3}{1000}$ | ד. $\frac{23}{1000}$ |
| ה. $\frac{1}{2}$ | ו. $\frac{3}{4}$ | ז. $\frac{2}{5}$ | ח. $\frac{4}{25}$ |
| ט. $\frac{7}{50}$ | י. $\frac{3}{20}$ | יא. $\frac{7}{8}$ | יב. $\frac{9}{16}$ |
| יג. $9\frac{1}{10}$ | יד. $3\frac{1}{5}$ | טו. $4\frac{7}{8}$ | טז. $-4\frac{1}{16}$ |

**10)** כתוב את השברים הבאים בצורתם העשרונית
(היעזר במחשבון וכתוב עד 3 ספרות אחרי הנקודה העשרונית):

| | | | |
|---|---|---|---|
| א. $\frac{2}{3}$ | ב. $\frac{5}{6}$ | ג. $\frac{3}{7}$ | ד. $\frac{2}{11}$ |

**11)** המר מאחוזים לשברים פשוטים:

| | | | |
|---|---|---|---|
| א. 25% | ב. 32% | ג. 64% | ד. 80% |
| ה. 120% | ו. 5% | ז. 300% | ח. 150% |

**12)** המר משברים פשוטים לאחוזים:

| | | | |
|---|---|---|---|
| א. $\frac{3}{4}$ | ב. $\frac{1}{8}$ | ג. $\frac{4}{5}$ | ד. $\frac{7}{20}$ |
| ה. $\frac{11}{40}$ | ו. $\frac{70}{125}$ | ז. $\frac{5}{6}$ | ח. $\frac{4}{9}$ |

## תשובות סופיות:

**1)** תשובה מודגמת בסרטון.

**2)** א. $\frac{1}{5}$ ב. $\frac{1}{6}$ ג. $\frac{2}{3}$ ד. $\frac{3}{4}$

**3)** א. $\frac{40}{80},\frac{18}{36},\frac{4}{8}$ ב. $\frac{180}{300},\frac{75}{125},\frac{30}{50}$ ג. $\frac{440}{700},\frac{160}{256},\frac{80}{128}$

**4)** א. $\frac{5}{6}$ ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. $\frac{1}{5}$ ה. $\frac{5}{8}$ ו. $\frac{4}{7}$

ז. $\frac{3}{4}$ ח. $\frac{3}{11}$

**5)** א. $-6\frac{2}{3}$ ב. $4\frac{3}{4}$ ג. $2\frac{2}{5}$ ד. $4\frac{2}{5}$ ה. $-5\frac{4}{6}$ ו. $-7\frac{1}{7}$

ז. $5\frac{7}{8}$ ח. $6\frac{2}{3}$

**6)** א. $\frac{5}{3}$ ב. $\frac{23}{6}$ ג. $\frac{9}{2}$ ד. $\frac{25}{4}$ ה. $\frac{47}{4}$ ו. $-\frac{21}{8}$

ז. $-\frac{44}{7}$ ח. $\frac{115}{9}$

**7)** א. $\frac{4}{10}$ ב. $\frac{7}{6}$ ג. $\frac{5}{6}$ ד. $\frac{7}{12}$

**8)** א. $\frac{7}{10}$ ב. $\frac{7}{100}$ ג. $\frac{7}{1000}$ ד. $\frac{17}{50}$ ה. $\frac{38}{125}$ ו. $\frac{13}{20}$

ז. $1\frac{1}{5}$ ח. $1\frac{1}{50}$ ט. $1\frac{21}{50}$ י. $3\frac{1}{2}$ יא. $6\frac{3}{100}$ יב. $5\frac{1}{8}$

**9)** א. 0.3 ב. 0.03 ג. 0.003 ד. 0.023 ה. 0.5 ו. 0.75

ז. 0.4 ח. 0.16 ט. 0.14 י. 0.15 יא. 0.875

יב. 0.5625 יג. 9.1 יד. 3.2 טו. 4.875 טז. -4.0625

**10)** א. $0.\overline{6}$ ב. $0.8\overline{3}$ ג. 0.428 ד. $0.1\overline{8}$

**11)** א. $\frac{1}{4}$ ב. $\frac{8}{25}$ ג. $\frac{16}{25}$ ד. $\frac{4}{5}$ ה. $1\frac{1}{5}$ ו. $\frac{1}{20}$

ז. 3 ח. $1\frac{1}{2}$

**12)** א. 75% ב. 12.5% ג. 80% ד. 35% ה. 27.5% ו. 56%

ז. 83.333% ח. 44.444%

# כפל וחילוק שברים:

## סיכום כללי:

- כשכופלים שני שברים יש לכפול מונה במונה ומכנה במכנה.
  - במידה ומדובר במספר שלם הכופל שבר, יש לכפול אותו במונה.
  - במידה ומדובר בשברים מעורבים, יש להפוך אותם תחילה לשברים מדומים ורק אז לבצע את פעולת הכפל.
- כדי לחלק שברים, יש לכפול את השבר הראשון בהופכי של השבר השני.
  - הופכי של שבר מסוים מתקבל ע"י החלפת המונה במכנה.

## שאלות:

**1)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}$ ב. $\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}$ ג. $\frac{2}{9}\cdot\frac{8}{10}$

ד. $3\cdot\frac{4}{5}$ ה. $6\cdot\frac{2}{3}$ ו. $\frac{12}{25}\cdot 5$

ז. $1\frac{3}{5}\cdot 2\frac{1}{4}$ ח. $3\frac{1}{2}\cdot 4\frac{2}{5}$ ט. $3\frac{3}{7}\cdot 2\frac{2}{5}$

י. $\left(\frac{4}{5}\right)^3$ יא. $\frac{4}{5^3}$ יב. $\frac{4^3}{5}$

**2)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{2}{5}:\frac{4}{9}$ ב. $\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$ ג. $\frac{3}{25}:\frac{7}{10}$

ד. $8:\frac{2}{9}$ ה. $10:\frac{2}{3}$ ו. $\frac{5}{6}:3$

ז. $\frac{2}{5}:5$ ח. $3\frac{3}{4}:5\frac{5}{8}$ ט. $2\frac{2}{5}:1\frac{3}{15}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $\frac{9}{20}$ ב. $\frac{5}{21}$ ג. $\frac{8}{45}$ ד. $2\frac{2}{5}$ ה. $4$ ו. $2\frac{2}{5}$

ז. $3\frac{3}{5}$ ח. $15\frac{2}{5}$ ט. $8\frac{8}{35}$ י. $\frac{64}{125}$ יא. $\frac{4}{125}$ יב. $12\frac{4}{5}$

**2)** א. $\frac{9}{10}$ ב. $1\frac{1}{2}$ ג. $\frac{6}{35}$ ד. $36$ ה. $15$ ו. $\frac{5}{18}$

ז. $\frac{2}{25}$ ח. $\frac{2}{3}$ ט. $2$

# חיבור וחיסור שברים:

## סיכום כללי:

**כפולה משותפת מינימלית:**

בהינתן זוג מספרים $a$ ו- $b$, המספר הקטן ביותר אשר תוצאת חלוקתו במספרים הנ"ל מניבה מספר שלם נקרא הכפולה המינימלית שלהם.

**הערות:**

- כפולה מינימלית יכולה להיות גם עבור יותר משני מספרים.
- הכפולה המינימלית תהיה המכנה המשותף בעת פעולות חיבור וחיסור של שברים.

**כללי החיבור והחיסור של שברים:**

- חיבור וחיסור של שברים בעלי אותו המכנה מתבצע על המספרים שבמונה בלבד כאשר המכנה נשאר כפי שהוא.

  דוגמא: $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$ , $\frac{2}{7}-\frac{3}{7}=\frac{2-3}{7}=\frac{-1}{7}$.

- חיבור וחיסור של שברים בעלי מכנים שונים מתבצע ע"י פעולת מכנה משותף.

  דוגמא: $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{6+5}{15}=\frac{11}{15}$ , $\frac{1}{4}-\frac{5}{6}=\frac{3}{12}-\frac{10}{12}=\frac{3-10}{12}=-\frac{7}{12}$.

- חיבור של שבר עם מספר שלם יתבצע באופן ישיר.

  דוגמא: $3+\frac{1}{4}=3\frac{1}{4}$.

  חיסור של שבר ממספר שלם יתבצע ע"י הוצאת שלמים מהשבר.

  דוגמא: $3-\frac{1}{4}=2\frac{4}{4}-\frac{1}{4}=2\frac{3}{4}$.

  דרך נוספת היא ע"י העברת המספר השלם לשבר מדומה: $3-\frac{1}{4}=\frac{12}{4}-\frac{1}{4}=\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$.

- חיבור וחיסור של שברים מעורבים יתבצע ע"י העברתם לשברים מדומים תחילה.

דוגמא: $3\frac{2}{5}+2\frac{1}{6}=\frac{17}{5}+\frac{13}{6}=\frac{17\cdot 6}{30}+\frac{13\cdot 5}{30}=\frac{102+65}{30}=\frac{167}{30}=5\frac{17}{30}$.

ניתן גם לפצל ולבצע את פעולת החיבור (או החיסור) של המספרים השלמים תחילה, ולאחר מכן לבצע את הפעולה עבור השברים.

דוגמא: $2\frac{3}{4}-5\frac{1}{3}=(2-5)+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)=-3+\left(\frac{9}{12}-\frac{4}{12}\right)=-3+\frac{5}{12}=-2\frac{7}{12}$.

## שאלות:

**1)** מצא את הכפולה המשותפת המינימלית של המספרים הבאים:

א. 2 ו-3 ב. 2 ו-4 ג. 3 ו-5 ד. 6 ו-10

ה. 4 ו-10 ו. 4 ו-6 ז. 3, 5 ו-10 ח. 2, 3 ו-8

**2)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}$ ב. $\frac{5}{9}+\frac{2}{9}$

ג. $\frac{4}{13}+\frac{9}{13}$ ד. $\frac{7}{8}+\frac{7}{8}$

ה. $\frac{7}{8}-\frac{3}{8}$ ו. $\frac{8}{9}-\frac{7}{9}$

ז. $\frac{2}{12}-\frac{5}{12}$ ח. $\frac{2}{5}-\frac{6}{5}$

ט. $\frac{2}{8}+\frac{5}{8}+\frac{6}{8}$ י. $\frac{7}{15}+\frac{8}{15}-\frac{6}{15}$

**3)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2}+\frac{4}{3}$

ב. $\frac{3}{5}+\frac{1}{10}$

ג. $\frac{4}{6}-\frac{1}{12}$

ד. $\frac{3}{6}-\frac{5}{8}$

ה. $\frac{5}{4}+\frac{7}{2}+\frac{2}{8}$

ו. $\frac{7}{3}+\frac{6}{5}+\frac{3}{10}$

ז. $\frac{4}{7}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}$

ח. $\frac{1}{4}+\frac{2}{8}-\frac{3}{5}$

**4)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2+\frac{5}{6}$

ב. $2-\frac{5}{6}$

ג. $2\frac{1}{4}+\frac{5}{6}$

ד. $2\frac{1}{4}-\frac{5}{6}$

ה. $3\frac{2}{3}+4\frac{1}{4}$

ו. $5\frac{7}{8}-6\frac{1}{2}$

ז. $2+\frac{5}{6}-\frac{1}{9}$

ח. $\frac{3}{4}-1\frac{1}{5}+\frac{8}{20}$

**5)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)+2\frac{1}{3}$

ב. $\frac{3}{14}:\frac{2}{7}+\frac{1}{3}\cdot 2\frac{1}{4}-\frac{2}{5}$

ג. $\frac{5}{11}\cdot 2\frac{3}{4}-6:\frac{2}{5}$

ד. $2\frac{4}{5}:\frac{9}{10}\cdot\frac{6}{7}+\frac{1}{6}$

ה. $\frac{5}{6}:\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\cdot 3\frac{1}{4}$

## תשובות סופיות:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1) | א. 6 | ב. 4 | ג. 15 | ד. 30 | ה. 20 | ו. 12 |
| | ז. 30 | ח. 24 | | | | |
| 2) | א. $\frac{4}{5}$ | ב. $\frac{7}{9}$ | ג. 1 | ד. $1\frac{3}{4}$ | ה. $\frac{1}{2}$ | ו. $\frac{1}{9}$ |
| | ז. $-\frac{1}{4}$ | ח. $-\frac{4}{5}$ | ט. $1\frac{5}{8}$ | י. $\frac{3}{5}$ | | |
| 3) | א. $1\frac{5}{6}$ | ב. $\frac{7}{10}$ | ג. $\frac{7}{12}$ | ד. $-\frac{1}{8}$ | ה. 5 | ו. $3\frac{5}{6}$ |
| | ז. $\frac{19}{21}$ | ח. $-\frac{1}{10}$ | | | | |
| 4) | א. $2\frac{5}{6}$ | ב. $1\frac{1}{6}$ | ג. $3\frac{1}{12}$ | ד. $1\frac{5}{12}$ | ה. $7\frac{11}{12}$ | ו. $-\frac{5}{8}$ |
| | ז. $2\frac{13}{18}$ | ח. $-\frac{1}{20}$ | | | | |
| 5) | א. $2\frac{11}{24}$ | ב. $1\frac{1}{10}$ | ג. $-13\frac{3}{4}$ | ד. $2\frac{5}{6}$ | ה. $3\frac{5}{18}$ | |

# בעיות יסודיות באחוזים:

## סיכום כללי:

נוסחה לביצוע חישובים עם אחוזים:

$$\text{תמורת האחוז} = \text{שלם} \cdot \frac{\text{אחוז}}{100}$$

למשל, בהינתן גודל שלם 120, אשר יש לחשב כמה הם 40 אחוזים ממנו, נקבל לפי הנוסחה: $\frac{40}{100}\cdot 120 = 48$, כלומר: **תמורת האחוז 40 מהגודל 120 היא 48**.

## שאלות:

**1)** בכיתה 30 תלמידים. 60% מתוכם בנות.
א. כמה בנות בכיתה?
ב. כמה בנים בכיתה?

**2)** בכיתה 28 בנות המהוות 70% מכלל התלמידים בכיתה.
א. כמה תלמידים בכיתה?
ב. כמה בנים בכיתה?

**3)** מחיר בגד-ים הוא 300 ₪. בסוף העונה הוא נמכר ב-20% הנחה.
א. מהו מחירו בסוף העונה?
ב. מה גודל ההנחה?

**4)** מחיר ההשקה של בושם מסוים הוא 500 ₪. לאחר מכן מועלה מחירו ב-8%.
א. מה מחירו הסופי?
ב. מה גודל ההתייקרות?

**5)** מחיר ליטר דלק הוא 5 ₪ לליטר. בחנוכה מוזל מחירו ב-7%.
בפסח מועלה מחירו ב-7%. מה מחירו בסוף השנה?

**6)** מוצר מסויים מתייקר בסוכות ב-12%. בפורים מוזל המוצר ב-12%.
מחירו בסוף השנה הוא 394.24 ₪. מה מחירו בתחילת השנה?

**7)** ענה על השאלות הבאות:

א. באולם קולנוע 200 צופים, מתוכם 176 בנים.
מה אחוז הבנים בקהל?

ב. בכיתה 30 תלמידים, מתוכם 18 בנות.
מה אחוז הבנות בכיתה?

ג. מחיר מוצר התייקר מ-80 ₪ ל-120 ₪.
בכמה אחוזים התייקר המוצר?

ד. מחיר מוצר הוזל מ-120 ₪ ל-80 ₪.
בכמה אחוזים הוזל המוצר?

ה. מחיר מוצר התייקר מ-150 ₪ ל-200 ₪.
בכמה אחוזים התייקר המוצר?

ו. מחיר מוצר מוזל הוזל מ-200 ₪ ל-150 ₪.
בכמה אחוזים הוזל המוצר?

## תשובות סופיות:

**1)** א. 18 בנות. ב. 12 בנים.

**2)** א. 40 תלמידים. ב. 12 בנים.

**3)** א. 240 ₪ ב. 60 ₪

**4)** א. 540 ₪ ב. 40 ₪

**5)** 4.9755 ₪

**6)** 400 ₪

**7)** א. 88% ב. 60% ג. 50% ד. 33.33% ה. 33.33% ו. 25%

# חזרה על תבניות מספר:

## סיכום כללי:

משתנה הוא סמל המתאר כמות או גודל כלשהם אשר אינם ידועים ועשויים להשתנות.

תבנית מספר היא ביטוי אלגברי אשר מכיל משתנה (או משתנים).
ניתן להציב במשתנים ערכים מספריים שונים ולקבל תוצאות שונות עבור תבנית המספר עצמה.

במתמטיקה, תפקידה של תבנית המספר הוא להביע גודל מסוים אשר לערכו יש משמעויות שונות. דוגמא לכך היא: קנייה של $x$ פריטים, אשר כל אחד עולה 3 שקלים, יניבו תבנית מספר של $3\cdot x$ אשר מייצגת את הסכום הכולל של הפריטים.

## שאלות:

**1)** חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- $x$ הנתון:

א. $2x+5$ כאשר $x=3$

ב. $x^2+3x$ כאשר $x=2$

ג. $-x^2+2x+3$ כאשר $x=5$

ד. $-x^2-9x+5$ כאשר $x=5$

ה. $x^3+1$ כאשר $x=-2$

ו. $4-x^3$ כאשר $x=-1$

ז. $(x+1)(2-x)$ כאשר $x=4$

ח. $x^2(3x-4)$ כאשר $x=3$

**2)** חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- $x$ הנתון:

א. $27x^5-2x^3+x$ כאשר $x=\frac{1}{3}$.

ב. $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+6$ כאשר $x=-\frac{2}{3}$.

**3)** הצב את הערכים המספריים במקום הפרמטרים וחשב את ערך תבנית המספר:

א. $a^2+2ab+b^2$ עבור: $a=3\,,\,b=-5$.

ב. $(x-3)^2+3x^2b$ עבור: $x=5\,,\,b=-1$.

ג. $-x^3-2xy+y^4$ עבור: $x=-2\,,\,y=-1$.

ד. $\frac{(a-2c)^4}{a}-a^2$ עבור: $a=2\,,\,c=-2$.

ה. $\frac{4a^2-3b}{c}$ עבור: $a=-1\,,\,b=2\,,\,c=-4$.

ו. $\sqrt{c-3a}$ עבור: $a=-1\,,\,c=13$ ועבור: $a=\frac{1}{3}\,,\,c=82$.

ז. $\frac{p^3+2\sqrt{q+1}}{m}$ עבור: $m=3\,,\,q=48\,,\,p=-5$.

## תשובות סופיות:

**1)** א. 11 ב. 10 ג. -12 ד. -65 ה. -7 ו. 5
ז. -10 ח. 45

**2)** א. $\frac{10}{27}$ ב. $5\frac{22}{27}$

**3)** א. 4 ב. -71 ג. 5 ד. 644 ה. $\frac{1}{2}$
ו. הצבה ראשונה: 4, הצבה שניה: 9 ז. -37

# כינוס איברים:

## סיכום כללי:

תבניות אלגבריות יכולות להכיל איברים רבים ולכן נרצה לכנס אותם על מנת לפשט את התבנית. כדי לכנס איברים ניקח את כל קבוצת האיברים מאותו הסוג ונחבר את המקדמים שלהם. דוגמא: $3x+6x-5x=(3+6-5)x=4x$.

איברים שונים נבדלים זה מזה בערך התבנית האלגברית שלהם.

כך: $3x$ שונה מ- $4y$ ושונה מ- $2xy$. באותו האופן, האיברים $x$ ו- $x^2$ הם שונים.

## שאלות:

כנס איברים דומים:

1) $5x+7x-4x$

2) $9x^2-2x^2-3x^2-2x^2$

3) $-10xy+15xy+xy-2yx$

4) $x^2y-3yx^2+x^2y$

5) $8a^2+10a-5a^2-11a+a^2$

6) $2x^2-3m^2-x^2+3m^2$

7) $3xy+y-30y+6yx-7y$

8) $mn^2+4m^2n+6n^2m-10nm^2+mn^2$

9) $-6+x^3+4-3x^3+17x^3-17$

10) $y^2+x^2-5x^2+5y^2+4x^2-6y^2$

11) $7x^2-3x-4x+2$

12) $5xy+2x-3yx-x+1$

13) $3-x-x^2+4x+5x^2-12$

14) $x+xy+y-6yx-6y-6x$

15) $mn+n-5m+5nm-14n+3m$

16) $ab^2+6ba^2-6b+16a^2b+3b-6b^2a$

17) $z^3-4z^2+7-z^3-8+8z^2$

18) $4x^2z+6xz^2-6-xz^2+12+10zx^2$

19) $2-x^3-3-4x^2+2x+x^3+x^2-2$

20) $x^3-3x-4x^2+2x+x^3+x^2-2x^3$

21) $2a^2b+3x^2y+5a^2b+10x^2y$

22) $12x^2y^3+13a^2-20x^2y^3+2a^2$

23) $2y^2-4x^3y^2-10y^2-x^3y^2$

24) $-2x^3y+5x^2-4yx^3-6x^2$

25) $2a^2b+2b+3a^2+5b$

26) $5a^2b-8ab^2+20a^2b-14ab^2$

27) $-12x^2+2y^2+3x^2y+14xy^2-5xy^2-6y^2+2xy+11x^2+x^2y-9xy$

28) $21x^3y^3+x^2y^2-3xy^3+x^3y-15x^2y^2-7x^3y+12x^3y^3-4xy^3+4xy^3-6x^3y$

## תשובות סופיות:

1) $8x$
2) $2x^2$
3) $4xy$
4) $-x^2y$
5) $4a^2-a$
6) $x^2$
7) $9xy-36y$
8) $8mn^2-6nm^2$
9) $15x^3-19$
10) 0
11) $7x^2-7x+2$
12) $2xy+x+1$
13) $4x^2+3x-9$
14) $-5x-5y-5xy$
15) $-13n-2m+6mn$
16) $-5ab^2+22a^2b-3b$
17) $4z^2-1$
18) $14x^2z+5xz^2+6$
19) $-3x^2+2x-3$
20) $-3x^2-x$
21) $7a^2b+13x^2y$
22) $-8x^2y^3+15a^2$
23) $-8y^2-5x^3y^2$
24) $-6x^3y-x^2$
25) $2a^2b+3a^2+7b$
26) $25a^2b-22ab^2$
27) $-x^2-4y^2+4x^2y+9xy^2-7xy$
28) $33x^3y^3-14x^2y^2-3xy^3-12x^3y$

# פישוט ביטויים ע"י פתיחת סוגריים:

## סיכום כללי:

בעת ביצוע כפל בין שני איברים יש לכפול את המקדמים בנפרד ואת האותיות (משתנים) בנפרד.

כלל הפילוג:

- $a(b+c)=ab+ac$.
- $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$.

## שאלות:

**1)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $2x\cdot 3x$ ב. $-4x\cdot(-7x)$ ג. $-2x\cdot(-4x)\cdot(-3)$

ד. $8m^2\cdot 4m^3$ ה. $3a^3\cdot(-2a^2)$ ו. $-b\cdot 4b^2\cdot\frac{b^2}{2}$

ז. $a\cdot 3b$ ח. $4a^2\cdot 7b^2$ ט. $ab\cdot(-2a^2b)$

**2)** פשט את הביטויים הבאים ע"י פתיחת סוגריים:

א. $2(3x-4)$ ב. $2(-3x^2+5x-1)$

ג. $(7x-2)4$ ד. $(1-2x)(-2)$

ה. $a(3a-1)$ ו. $b(b^2-3b+4)$

ז. $2x(5x+3)$ ח. $5x(x^2+2x-3)$

ט. $3t^2(4t-t^2+6)$ י. $\frac{5}{2}(4d^4-3d)d$

**3)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $5x+(3x-2)+(-4-2x)$ ב. $7x+(-4x-5)+3x+(-1+7x)$

ג. $8-(2x-5)-(4x+2)$ ד. $-6x-(-3x-1)-(-7-4x)+1$

ה. $(3-2x^2+4)2+3(x-x^2)-6(7-5x)+4x^2$

ו. $3y^2-(y+1-2y^2)+6(5y-6)-(-y-4)3+5(y^2+1)-7$

**4)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-1)(x+2)$ ב. $(x+3)(x-7)$

ג. $(3-x)(x+4)$ ד. $(3x+4)(5x+1)$

ה. $3(4x+1)(2x-3)$ ו. $-2(3x-1)(5-2x)$

**5)** פשט את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(x-1)(x+3)+2(3-x)$

ב. $(a+4)(a-2)-(a+5)(a-3)$

ג. $(2m-3)(4m+3)+5(2m^2-6)$

ד. $-x^2y^2(x^3y+x^2)+2xy(2x^3y-x^4y^2)$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $6x^2$ ב. $28x^2$ ג. $-24x^2$ ד. $32m^5$ ה. $-6a^5$ ו. $-2b^5$

ז. $3ab$ ח. $28a^2b^2$ ט. $-2a^3b^2$

**2)** א. $6x-8$ ב. $-6x^2+10x-2$ ג. $28x-8$ ד. $-2+4x$

ה. $3a^2-a$ ו. $b^3-3b^2+4b$ ז. $10x^2+6x$ ח. $5x^3+10x^2-15x$

ט. $12t^3-3t^4+18t^2$ י. $10d^5-7.5d^2$

**3)** א. $6x-6$ ב. $13x-6$ ג. $-6x+11$ ד. $x+9$ ה. $-3x^2+33x-28$

ו. $10y^2+32y-27$

**4)** א. $x^2+x-2$ ב. $x^2-4x-21$ ג. $-x^2-x+12$

ד. $15x^2+23x+4$ ה. $24x^2-30x-9$ ו. $12x^2-34x+10$

**5)** א. $x^2+3$ ב. $7$ ג. $18m^2-6m-39$ ד. $-3x^5y^3+3x^4y^2$

# פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר:

## סיכום כללי:

- נוסחת ריבוע של סכום/הפרש: $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.
- נוסחה להפרש ריבועים: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

## שאלות:

**1)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+5)^2$ ב. $(x+2)^2$ ג. $(4x+5)^2$

ד. $(6x+2)^2$ ה. $(7x+y)^2$ ו. $(5x+2y)^2$

ז. $(x^2+7)^2$ ח. $(x^2+y^2)^2$ ט. $(x^3+2y^2x)^2$

**2)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-6)^2$ ב. $(x-2)^2$ ג. $(5-x)^2$

ד. $(6x-1)^2$ ה. $\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2$ ו. $\left(\frac{1}{3}x-5\right)^2$

ז. $(3m-2n)^2$ ח. $\left(x^2-\frac{3}{5}y\right)^2$ ט. $(x^2y^2-7)^2$

**3)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-5)(x+5)$ ב. $(3+x)(x-3)$

ג. $(3x-1)(3x+1)$ ד. $(5-7x)(7x+5)$

ה. $\left(\frac{1}{2}x+6\right)\left(\frac{1}{2}x-6\right)$ ו. $\left(5y-\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{1}{4}x+5y\right)$

ז. $(x^2+y)(x^2-y)$ ח. $(3a^2b^3-4)(3a^2b^3+4)$

4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+1)(x+2)-3x$

ב. $(x-5)(5x-1)+2(4+x)$

ג. $x(2x-1)(2x+1)-4x^2(x+1)$

ד. $-(y+3x)(y-3x)+(y-3x)^2$

ה. $x(x+3)-(6+x)(6x+2)-(x+2)^2$

ו. $-5(x+7)(x-7)+3(2x+5)(5-x)+(x+1)^2$

## תשובות סופיות:

1) א. $x^2+10x+25$ ב. $x^2+4x+4$ ג. $16x^2+40x+25$

ד. $36x^2+24x+4$ ה. $49x^2+14xy+y^2$ ו. $25x^2+20xy+4y^2$

ז. $x^4+14x+49$ ח. $x^4+2x^2y^2+y^4$ ט. $x^6+4x^4y^2+4y^4x^2$

2) א. $x^2-12x+36$ ב. $x^2-4x+4$ ג. $25-10x+x^2$

ד. $36x^2-12x+1$ ה. $9x^2-3x+\frac{1}{4}$ ו. $\frac{1}{9}x^2-3\frac{1}{3}x+25$

ז. $9m^2-12mn+4n^2$ ח. $x^4-\frac{6}{5}x^2y+\frac{9}{25}y^2$ ט. $x^4y^4-14x^2y^2+49$

3) א. $x^2-25$ ב. $x^2-9$ ג. $9x^2-1$ ד. $25-49x^2$

ה. $\frac{1}{4}x^2-36$ ו. $25y^2-\frac{1}{16}x^2$ ז. $x^4-y^2$ ח. $9a^4b^6-16$

4) א. $x^2+2$ ב. $5x^2-24x+13$ ג. $-4x^2-x$

ד. $18x^2-6xy$ ה. $-6x^2-39x-16$ ו. $-10x^2+17x+321$

# פירוק לגורמים של ביטויים אלגברים:

## סיכום כללי:

פירוק לגורמים הוא פעולה הפוכה לפתיחת סוגריים – נרצה להוציא את הגורמים המשותפים לאיברים מחוץ לסוגריים.

- פירוק לגורמים ע"י הוצאת איבר אחד משותף:
  - הוצאת מספר משותף: $2x-8=2(x-4)$.
  - הוצאת אות משותפת: $x^2-12x=x(x-12)$.
  - הוצאת מספר ואות יחד: $3x^2-21x=3x(x-7)$.
- פירוק לגורמים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר:
  - נוסחת הבינום של ניוטון: $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$.
  - נוסחה להפרש ריבועים: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

## שאלות:

**1)** פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $3x-12$ ב. $6y-4$

ג. $20-8a$ ד. $4a^3+8b$

ה. $75m^2+25m+15$ ו. $40a^2-8b^2+64c^2$

**2)** פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $y^2+5y$ ב. $3x-11x^3$

ג. $6y^2+5y^3+4y$ ד. $\frac{1}{2}a^7-\frac{1}{4}a^5+a^3$

**3)** פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $2x^2-8x$
ב. $3t^2+12t$
ג. $5n^3-20n^2+50n$
ד. $8y^2+6y^3-2y^4$
ה. $4x^2y^2+16x^2y-20xy^2$
ו. $27mn-3n^2m+9n^3m$

**4)** פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר:

א. $x^2+10x+25$
ב. $x^2+12x+36$
ג. $y^2-18y+81$
ד. $y^2-22y+121$
ה. $4x^2+4x+1$
ו. $16y^2-8y+1$
ז. $9x^2-24x+16$
ח. $25x^2+70x+49$

**5)** פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר:

א. $r^2-25$
ב. $x^2-81$
ג. $25y^2-49$
ד. $121x^2-1$
ה. $x^2y^2-4$
ו. $9y^4-169x^4$

**6)** פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף ונוסחאות הכפל המקוצר:

א. $y-y^3$
ב. $x^3-10x^2+25x$
ג. $m^4-1$
ד. $196x^4-140x^3+25x^2$

## תשובות סופיות:

1) א. $3(x-4)$ ב. $2(3y-2)$ ג. $4(5-2a)$

ד. $4(a^3+2b)$ ה. $5(15m^2+5m+3)$ ו. $8(5a^2-b^2+8c^2)$

2) א. $y(y+5)$ ב. $x(3-11x^2)$ ג. $y(6y+5y^2+4)$

ד. $a^3\left(\frac{1}{2}a^4-\frac{1}{4}a^2+1\right)$

3) א. $2x(x-4)$ ב. $3t(t+4)$ ג. $5n(n^2-4n+10)$

ד. $2y^2(4+3y-y^2)$ ה. $4xy(xy+4x-5y)$ ו. $3mn(9-n-3n^2)$

4) א. $(x+5)^2$ ב. $(x+6)^2$ ג. $(y-9)^2$ ד. $(y-11)^2$

ה. $(2x+1)^2$ ו. $(4y-1)^2$ ז. $(3x-4)^2$ ח. $(5x+7)^2$

5) א. $(r+5)(r-5)$ ב. $(x+9)(x-9)$ ג. $(5y+7)(5y-7)$

ד. $(11x+1)(11x-1)$ ה. $(xy+2)(xy-2)$ ו. $(3y^2+13x^2)(3y^2-13x^2)$

6) א. $y(1+y)(1-y)$ ב. $x(x-5)^2$ ג. $(m^2+1)(m+1)(m-1)$

ד. $x^2(14x-5)^2$ .

# פירוק הטרינום:

## סיכום כללי:

טרינום משמעו תלת איבר מהצורה: $ax^2+bx+c$ כאשר $a$, $b$ ו-$c$ הם מספרים כלשהם.

שיטת הטרינום מאפשרת לפרק את תלת האיבר ל-4 איברים ע"י פיצול האיבר $bx$ לשני איברים באופן כזה שמאפשר להוציא גורם משותף.

הכלל הוא למצוא שני מספרים, $m_1$ ו-$m_2$, שמקיימים: $m_1\cdot m_2=ac$ ו-$m_1+m_2=b$.

לאחר מכן ניתן לפרק את הטרינום: $ax^2+bx+c=ax^2+m_1x+m_2x+c$.

השלב האחרון הוא הוצאת גורם משותף מכל זוג: $\underbrace{ax^2+m_1x}+\underbrace{m_2x+c}$.

**הערה:**

במקרה שנוסחת השורשים ידועה, ניתן להיעזר בה כדי למצוא את המספרים $m_1$ ו-$m_2$ באופן הבא: $m_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ , $m_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ולאחר מכן ניתן לכתוב את הטרינום כמכפלה: $ax^2+bx+c=a(x-m_1)(x-m_2)$. אם קיים פתרון (שורש) אחד $m_1=m_2=\frac{-b}{2a}$ אז נכתוב: $ax^2+bx+c=a(x-m_1)^2$ ואם לא קיימים פתרונות אז לא קיים פירוק כלל.

## שאלות:

**1)** פרק את הביטויים הבאים לפי פירוק טרינום:

| | | |
|---|---|---|
| א. $x^2+5x+4$ | ב. $x^2-8x+15$ | ג. $x^2-33x+62$ |
| ד. $2x^2+7x-15$ | ה. $3x^2-11x+6$ | ו. $6x^2+5x+1$ |
| ז. $2x^2+x-6$ | ח. $x^2-18x+81$ | ט. $x^2+2x+8$ |

**2)** פרק את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחת השורשים.
**הערה: במידה ולא למדת על נוסחת השורשים התעלם משאלה זו.**

| | |
|---|---|
| א. $6x^2+5x+1$ | ב. $x^2+5x+4$ |
| ג. $4x^2+20x+25$ | ד. $3x^2-x+20$ |

## תשובות סופיות:

**1)** א. $(x+1)(x+4)$ ב. $(x-3)(x-5)$ ג. $(x-2)(x-31)$

ד. $(2x-3)(x+5)$ ה. $(3x-2)(x-3)$ ו. $(3x+1)(2x+1)$

ז. $(x+2)(2x-3)$ ח. $(x-9)^2$ ט. אין פירוק.

**2)** א. $6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ ב. $(x+1)(x+4)$ ג. $(2x+5)^2$ ד. אין פירוק.

# שברים אלגבריים:

## סיכום כללי:

### הגדרה:

שבר אלגברי מורכב משתי תבניות, אשר אחת מחלקת את השנייה.

דוגמא לשברים אלגבריים: $\frac{4}{x-x^3}$ , $\frac{3x}{x^2+1}$ , $\frac{x+1}{x+2}$.

במקרה בו המכנה הוא מספר, לא מדובר בשבר אלגברי מכיוון שניתן לכתוב את הביטוי ללא צורך בחילוק בין ביטויים שונים כגון: $\frac{3x+5}{4}=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$.

### תחום הגדרה של שבר:

היות ושבר אלגברי הוא תבנית אשר יכולה לקבל ערכים שונים בעת הצבות שונות, חשוב להגביל את המספרים שניתן להציב באופן כזה שלא תתקבל חלוקה באפס.

דוגמא: השבר $\frac{1}{x+4}$ לא מוגדר כאשר $x=-4$ מכיוון שמתקבל: $\frac{1}{0}$.

במקרים אלו נדרוש **תנאי** על המשתנה אשר יכתב באופן הבא: $x\neq -4$ ומשמעו היא ש-$x$ יכול לקבל על ערך מספרי אפשרי למעט 4-, מכיוון שבמקרה זה השבר לא מוגדר.

### כלל צמצום שברים אלגבריים:

ניתן לצמצם שברים אלגבריים ע"י הבאת המונה והמכנה למכפלה של ביטויים.
במידה וקיימות פעולות החיבור והחיסור בין איברים שונים לא ניתן לבצע צמצום של איברים דומים בין המונה והמכנה. להלן מספר דוגמאות הנוגעות לצמצומים:

- צמצום ע"י הוצאת גורם משותף: $\frac{2x+8}{x+4}=\frac{2\cancel{(x+4)}}{\cancel{x+4}}=\frac{2\cdot 1}{1}=2$.
- צמצום ע"י נוסחת כפל מקוצר: $\frac{3x-15}{x^2-10x+25}=\frac{3\cancel{(x-5)}}{(x-5)^{\cancel{2}}}=\frac{3\cdot 1}{x-5}=\frac{3}{x-5}$.
- צמצום ע"י פירוק טרינום: $\frac{x^2-2x-3}{x^2-3x-4}=\frac{\cancel{(x+1)}(x-3)}{\cancel{(x+1)}(x-4)}=\frac{x-3}{x-4}$.

## שאלות:

**1)** מצא את תחום ההגדרה של השברים האלגבריים הבאים:

א. $\frac{x+4}{x+3}$

ב. $\frac{5}{x-6}$

ג. $\frac{x+7}{2x-8}$

ד. $\frac{x^2+1}{x^2-4x}$

ה. $\frac{3}{x^2+2x+1}$

ו. $\frac{x^2}{x^2-4}$

ז. $\frac{6}{y^4-y^2}$

ח. $\frac{8x-2}{3x^3-15x^2+12x}$

**2)** צמצם את השברים הבאים (במידה ולא ניתן צמצם הסבר מדוע):

א. $\frac{ax}{a}$

ב. $\frac{a-x}{a}$

ג. $\frac{a-ax}{a}$

ד. $\frac{x+1}{y+1}$

ה. $\frac{x}{x+y}$

ו. $\frac{6x}{6y}$

ז. $\frac{x^2y}{xy^2}$

ח. $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$

ט. $\frac{4x^2y}{xy}$

י. $\frac{3x^2}{x^2+3}$

**3)** צמצם את השברים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{3x+12}{x+4}$

ב. $\frac{m^2+4m}{4m+16}$

ג. $\frac{2a-12}{a^2-6a}$

ד. $\frac{x^2-5x}{15-3x}$

ה. $\frac{3-18y^2}{6y^2-1}$

ו. $\frac{4x^3-2x^2}{6x-3}$

ז. $\frac{3y}{y^3-3y^2}$

ח. $\frac{3z^3-12z^2+4z}{z^2+5z}$

**4)** צמצם את השברים הבאים ע"י פירוק לגורמים וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x^2+10x+25}{2x+10}$

ב. $\frac{8n-n^2}{n^2-16n+64}$

ג. $\frac{z^3-4z^2}{2z^2-16z+32}$

ד. $\frac{4m^2+20m+25}{4m^2+10m}$

ה. $\frac{18y^2-24y+8}{2y-3y^2}$

ו. $\frac{a^3+4a^2b+4ab^2}{3ab+6b^2}$

**5)** צמצם את השברים הבאים ע"י טרינום ריבועי וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x+2}{x^2-3x-10}$

ב. $\frac{m^2-12m+32}{m-4}$

ג. $\frac{4y-10}{2y^2+y-15}$

ד. $\frac{3z^2+26z+16}{3z+2}$

ה. $\frac{x^2+5x-36}{x^3+9x^2}$

ו. $\frac{9n^2-12n}{4+5n-6n^2}$

ז. $\frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}$

ח. $\frac{x^2-14x+49}{x^2+x-56}$

ט. $\frac{3a^2b-10ab^2+3b^3}{-3a^3b+11a^2b^2-6ab^3}$

י. $\frac{m^3n-m^2n^2-m^2+mn}{2m^2n^3+mn^2-3n}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $x \neq -3$ ב. $x \neq 6$ ג. $x \neq 4$ ד. $x \neq 0 , x \neq 4$

ה. $x \neq -1$ ו. $x \neq -2 , x \neq 2$ ז. $y \neq 0 , y \neq -1 , y \neq 1$

ח. $x \neq 0 , x \neq 1 , x \neq 4$

**2)** א. $x$ ב. לא ניתן לצמצם ג. $1-x$

ד. לא ניתן לצמצם ה. לא ניתן לצמצם ו. $\frac{x}{y}$ ז. $\frac{x}{y}$

ח. לא ניתן לצמצם ט. $4x$ י. לא ניתן לצמצם

**3)** א. $3 , x \neq -4$ ב. $\frac{m}{4} , m \neq -4$ ג. $\frac{2}{a} , a \neq 0,6$

ד. $-\frac{x}{3} , x \neq 5$ ה. $-3 , y \neq \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ ו. $\frac{2x^2}{3} , x \neq \frac{1}{2}$

ז. $\frac{3}{y(y-3)} , y \neq 0,3$ ח. $\frac{3z^2-12z+4}{z+5} , z \neq 0,-5$

**4)** א. $\frac{x+5}{2} , x \neq -5$ ב. $\frac{n}{8-n} , n \neq 8$ ג. $\frac{z^2}{2(z-4)} , z \neq 4$

ד. $\frac{2m+5}{2m} , m \neq 0,-\frac{5}{2}$ ה. $\frac{2(2-3y)}{y} , y \neq 0,\frac{2}{3}$ ו. $\frac{a(a+2b)}{3b} , b \neq 0, a \neq -2b$

**5)** א. $\frac{1}{x-5} , x \neq 5,-2$ ב. $m-8 , m \neq 4$ ג. $\frac{2}{y+3} , x \neq -3,\frac{5}{2}$

ד. $z+8 , z \neq -\frac{2}{3}$ ה. $\frac{x-4}{x^2} , x \neq 0,-9$ ו. $\frac{-3n}{2n+1} , n \neq -\frac{1}{2},\frac{4}{3}$

ז. $\frac{x+2}{x+3} , x \neq -2,-3$ ח. $\frac{x-7}{x+8} , x \neq 7,-8$

ט. $\frac{3a-b}{a(2b-3a)} , a \neq 0 , b \neq 0, a \neq 3b , 2b \neq 3a$ י. $\frac{m(m-n)}{n(2mn+3)} , mn \neq 1,-\frac{3}{2},n \neq 0$

# כפל וחילוק של שברים אלגברים:

## סיכום כללי:

כפל שברים יתבצע ע"י הכפלת כל מונה בנפרד והכפלת כל מכנה בנפרד.

חילוק שברים יתבצע ע"י לקיחת ההופכי של שבר המחלק וביצוע פעולת כפל.

- דוגמא לכפל שברים: $\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{x}{3x+3}=\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{x}{3(x+1)}=\frac{\cancel{x}\cancel{(x+1)}}{3x^{\cancel{2}}\cancel{(x+1)}}=\frac{1}{3x}$.

- דוגמא לחילוק שברים: $\frac{4x}{y}:\frac{12}{y^2+y}=\frac{4x}{y}\cdot\frac{y^2+y}{12}=\frac{\cancel{4}^{1}x}{\cancel{y}}\cdot\frac{\cancel{y}(y+1)}{\cancel{12}_{3}}=\frac{x(y+1)}{3}$.

## שאלות:

**1)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{8}$

ב. $\frac{x}{3}\cdot\frac{9}{x^2}$

ג. $7y\cdot\frac{5}{y^2}$

ד. $6x^2\cdot\frac{3}{40x}$

ה. $(x^2+3x)\cdot\frac{2}{3x+9}$

ו. $(a^2-25)\cdot\frac{20}{5a+25}$

ז. $\frac{w^2-9}{w}\cdot\frac{w^2}{2w+6}$

ח. $\frac{y+4}{y^2+16}\cdot\frac{y^2-16}{2y+8}$

ט. $\frac{z^2+30z+225}{6z+90}\cdot\frac{12}{2z-10}$

י. $\frac{5n^2}{n^2-121}\cdot\frac{2n^2+44n+242}{n+2}\cdot\frac{n^2+4n+4}{n}$

**2)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{x}{8}:\frac{x}{6}$

ב. $\frac{y}{25}:\frac{5}{y}$

ג. $a^2:\frac{1}{6a}$

ד. $\frac{5}{6a}:a^2$

ה. $\left(d^2-3d\right):\frac{5d-15}{5d}$

ו. $\frac{t}{t+4}:\frac{3t}{t+4}$

ז. $\frac{y^2+8y+16}{8y^2}:\frac{y^2-16}{7y^2}$

ח. $\frac{a^2-64}{a^2-36}:\frac{a+8}{a+6}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $\frac{x^2}{24}$ ב. $\frac{3}{x}$ ג. $\frac{35}{y}$ ד. $\frac{9x}{20}$ ה. $\frac{2x}{3}$

ו. $4(a-5)$ ז. $\frac{w(w-3)}{2}$ ח. $\frac{y^2-16}{2y^2+32}$ ט. $\frac{z+15}{z-5}$ י. $\frac{10n(n+11)(n+2)}{n-11}$

**2)** א. $\frac{3}{4}$ ב. $\frac{y^2}{125}$ ג. $6a^3$ ד. $\frac{5}{6a^3}$ ה. $d^2$ ו. $\frac{1}{3}$

ז. $\frac{7(y+4)}{8(y-4)}$ ח. $\frac{a-8}{a-6}$

# חיבור וחיסור של שברים אלגברים:

## סיכום כללי:

ביצוע פעולת החיבור והחיסור תתבצע באופן זהה לשברים מספריים.

נרצה להרחיב את השברים כך שהמכנה של שניהם יהיה זהה, ולאחר מכן נחבר את המונים.

כדי להרחיב את השברים נעזר בפעולת מציאת מכנה משותף.
לשם כך נעזר בפירוקים השונים כדי להביא את הביטויים שבכל מכנה לצורתם המופשטת.

דוגמא לחיבור שברים בעלי אותו מכנה:

$$\frac{1}{x}+\frac{x+1}{x}=\frac{1+(x+1)}{x}=\frac{x+2}{x}$$

דוגמא לחיבור מספר לשבר אלגברי:

$$2+\frac{3}{x+2}=\frac{2(x+2)}{x+2}+\frac{3}{x+2}=\frac{2(x+2)+3}{x+2}=\frac{2x+7}{x+2}$$

דוגמא לחיבור שברים עם מכנים שונים (ע"י פעולת מכנה משותף):

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}=\frac{x}{x(x+1)}+\frac{x+1}{x(x+1)}=\frac{x+x+1}{x(x+1)}=\frac{2x+1}{x(x+1)}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י שימוש בפירוק לגורמים (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{1}{x^2-3x}+\frac{3}{x-3}=\frac{1}{x^2-3x}+\frac{3x}{x^2-3x}=\frac{1+3x}{x^2-3x}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{3}{x^2-6x+9}-\frac{2}{x^2-9}=\frac{3}{(x-3)^2}-\frac{2}{(x-3)(x+3)}=\frac{3(x+3)-2(x-3)}{(x-3)^2(x+3)}=\frac{x+15}{(x-3)^2(x+3)}$$

## שאלות:

**1)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{a}{6}+\frac{a-5}{6}$

ב. $\frac{5}{x}+\frac{4x+3}{x}$

ג. $\frac{x-2}{x+1}+\frac{3+4x}{x+1}$

ד. $\frac{7z}{2z-3}-\frac{4z}{2z-3}-\frac{z+3}{2z-3}$

**2)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{ab}-\frac{5}{bc}$

ב. $\frac{1}{xy}+\frac{5}{yz}+\frac{4}{xz}$

ג. $\frac{c}{ab}-\frac{ad}{bc}+\frac{2b}{cd}$

ד. $-\frac{5}{x}+\frac{x+1}{xy^2}$

ה. $\frac{1}{(y+1)^2}+\frac{3}{y+1}$

ו. $\frac{3}{z(z-3)}-\frac{2}{z(z-2)}$

**3)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $1-\frac{2}{x}$

ב. $1+\frac{3}{y^2}$

ג. $2+\frac{2}{x+1}$

ד. $3-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x}$

ה. $\frac{a+1}{a^2}-\frac{3-a}{4a}-3$

ו. $\frac{x}{9yz}+\frac{z}{3y^2x}+\frac{3-y}{12xz}-3\frac{1}{2}$

**4)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{x+1}+\frac{1}{x}$

ב. $\frac{4}{y+2}-\frac{3}{y}$

ג. $\frac{a+1}{a+2}+\frac{3}{a}$

ד. $\frac{1}{z+3}+\frac{2}{3z}-\frac{3}{z}$

**5)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{24}{a^2-9}+\frac{4}{a+3}$

ב. $\frac{3}{x^2-16}+\frac{2}{(x+4)^2}$

ג. $\frac{y}{(y-2)^2}+\frac{3y}{4-y^2}$

ד. $\frac{3z}{z^2+4z+3}-\frac{z+0.5}{z^2+2z+1}$

ה. $\frac{x-1}{x^2+3x-40}+\frac{2}{-x^2+8x-15}$

ו. $\frac{2a+3}{2a^2+15a+7}+\frac{a+3}{a^2+14a+49}$

ז. $\frac{x}{x-3}+\frac{9-x}{x^2-8x+15}$

ח. $\frac{1}{a-b}+\frac{2}{a+2b}-\frac{3b}{a^2+ab-2b^2}$

**6)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{4}{x}\cdot\frac{x^2}{8}+\frac{9}{x+1}\cdot\frac{x+1}{18}$

ב. $\left(\frac{2}{x}+1\right)\cdot\frac{x^2}{7x+14}$

ג. $\frac{7}{y^2}:\frac{6}{y^3}-\frac{y-4}{63}\cdot\frac{3y-4}{y^2-8y+16}$

ד. $\left(3x-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}\right):\frac{6x^3+2x-4}{x^2}$

ה. $\left(\frac{2x+1}{20x^2-28x-3}-\frac{3x+1}{30x^2-17x-2}\right):\frac{18x+3}{6x^2-13x+6}$

## תשובות סופיות:

1) א. $\frac{2a-5}{6}$ ב. $\frac{4x+8}{x}$ ג. $\frac{5x+1}{x+1}$ ד. $1$

2) א. $\frac{c-5a}{abc}$ ב. $\frac{z+5x+4y}{xyz}$ ג. $\frac{c^2d-a^2d^2+2ab^2}{abcd}$

ד. $\frac{-5y^2+x+1}{xy^2}$ ה. $\frac{3y+4}{(y+1)^2}$ ו. $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$

3) א. $\frac{x-2}{x}$ ב. $\frac{y^2+3}{y^2}$ ג. $\frac{2x+4}{x+1}$

ד. $\frac{9x-2}{3x}$ ה. $\frac{-11a^2+a+4}{4a^2}$ ו. $\frac{4x^2y+12z^2+9y^2-3y^3-126xy^2z}{36xy^2z}$

4) א. $\frac{4x+1}{x(x+1)}$ ב. $\frac{y-6}{y(y+2)}$ ג. $\frac{a^2+4a+6}{a(a+2)}$

ד. $-\frac{4z+21}{3z(z+3)}$

5) א. $\frac{4}{a-3}$ ב. $\frac{5x+4}{(x-4)(x+4)^2}$ ג. $\frac{2y(4-y)}{(y-2)^2(y+2)}$

ד. $\frac{(4z+3)(z-1)}{2(z+1)^2(z+3)}$ ה. $\frac{x^2-6x-13}{(x+8)(x-5)(x-3)}$ ו. $\frac{4(a^2+6a+6)}{(a+7)^2(2a+1)}$

ז. $\frac{x-3}{x-5}$ ח. $\frac{3}{a+2b}$

6) א. $\frac{x+1}{2}$ ב. $\frac{x}{7}$ ג. $\frac{147y^2-594y+8}{126(y-4)}$ ד. $\frac{1}{2}$ ה. $\frac{1}{3(10x+1)}$

# שברים כפולים:

## סיכום כללי:

שבר כפול מורכב באופן הבא: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ כאשר מתקיים: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$.

נובע מכאן כי ניתן לצמצם ביטויים בין שני המכנים או שני המונים בלבד.

## שאלות:

פשט את הביטויים הבאים:

1) $\frac{\frac{4x}{12}}{x}$

2) $\frac{\frac{y+1}{2y+2}}{5}$

3) $\frac{\frac{5}{t}}{30t^2}$

4) $\frac{\frac{t^2-81}{9t^2}}{6t+54}$

5) $\frac{\frac{3y^3-y^2}{25}}{\frac{y^2}{3-y}}$

6) $\frac{\frac{4x}{x+1}}{\frac{8}{x^2+2x+1}}$

7) $\frac{\frac{8c^2}{3c^3-9c^2-12c}}{\frac{40}{15c+15}}$

8) $\frac{\frac{t^2-t-20}{16t+8}}{\frac{25-t^2}{2t+1}}$

9) $\frac{\frac{1}{x}-4+\frac{x}{x+1}}{\frac{1-3x(x+1)}{5x+5}}$

## תשובות סופיות:

1) $\frac{x^2}{3}$

2) $2.5$

3) $\frac{1}{6t^3}$

4) $\frac{t-9}{54t^2}$

5) $\frac{(3y-1)(3-y)}{25}$

6) $\frac{x(x+1)}{2}$

7) $\frac{c}{c-4}$

8) $\frac{t+4}{-8(t+5)}$

9) $\frac{5}{x}$

# קורס ריענון במתמטיקה

## פרק 4 - משוואות אלגבריות

### תוכן העניינים

1. משוואות ממעלה ראשונה ..... 88
2. מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה ..... 90
3. משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון ..... 93
4. משוואה ממעלה שנייה ..... 94
5. משוואות דו-ריבועיות ..... 96
6. משוואות עם פרמטרים ..... 98
7. משוואות עם שורשים ..... 100
8. משוואות עם ערך מוחלט ..... 102
9. מערכת משוואות ממעלה שנייה ..... 103

# משוואה ממעלה ראשונה:

## סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה היא מהצורה: $ax=b$ (כלומר, החזקה של הנעלם היא 1).

פתרון של משוואה ממעלה ראשונה הוא $x=\frac{b}{a}$ כאשר $a\neq 0$.

שלבי הפתרון הם:

1. ביצוע מכנה משותף (במידה וצריך).
2. פתיחת סוגריים אם ישנם.
3. העברת אגפים וכינוס אברים דומים (בידוד הנעלם באגף אחד והמספרים באגף שני).
4. בידוד הנעלם ומציאתו ע"י חילוק במקדם שלו.

## שאלות:

**1)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות ממעלה ראשונה):

א. $6x+2=8$

ב. $7-2x=7$

ג. $2x+x=24$

ד. $2x+6=8+x$

ה. $-7x+5+2x=4x-13$

ו. $6x-3+5-7x=x-5x-7$

ז. $2-5x+7=-3x+8$

ח. $x-2+5x=4-3x-5+7x+7$

**2)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פתיחת סוגריים):

א. $3(x-1)-4=2$

ב. $7x-4(3-4x)=-x$

ג. $6(4-x)-(6-x)=3x$

ד. $5x-(3x-7)4=21$

ה. $x(x-5)=x^2-7x+8$

ו. $(7-x)(1-x)-(x-3)^2=0$

**3)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה מספרי):

א. $\frac{x}{3}-\frac{x}{9}=-4$

ב. $\frac{4x}{15}-\frac{3x}{10}=1$

ג. $\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}x=x-\frac{7}{15}$

ד. $\frac{5x+1}{6}-\frac{6x-1}{5}=\frac{3x+1}{4}-1$

ה. $\frac{2}{5}(x-3)-\frac{3}{15}(4-x)=x+2$

ו. $5\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{7}\right)-x=1$

**4)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם נעלם במכנה):

א. $\frac{1}{4}-\frac{2}{x}=0$

ב. $\frac{1}{2}-\frac{x}{x-1}=0$

ג. $\frac{3}{x}=\frac{1}{x+2}$

ד. $\frac{5}{2x-1}=\frac{4}{3x+2}$

ה. $\frac{x+5}{3x^2}-\frac{1}{6x}=\frac{1}{x}$

ו. $\frac{1}{4x}+\frac{3}{x}=\frac{13}{2}$

**5)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה משותף ע"י פירוק לגורמים):

א. $\frac{x^2+2}{3x^2+5x}=\frac{3x-1}{9x+15}$

ב. $\frac{7}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}+\frac{3}{2-2x}=0$

ג. $\frac{3}{(2-x)^2}+\frac{5}{12-3x^2}=0$

ד. $\frac{4x^2-24x+36}{x-3}=12$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $x=1$ ב. $x=0$ ג. $x=8$ ד. $x=2$ ה. $x=2$ ו. $x=-3$

ז. $x=\frac{1}{2}$ ח. $x=4$.

**2)** א. $x=3$ ב. $x=\frac{1}{2}$ ג. $x=2\frac{1}{4}$ ד. $x=1$ ה. $x=4$ ו. $x=-1$.

**3)** א. $x=-18$ ב. $x=-30$ ג. $x=-1$ ד. $x=1$ ה. $x=-10$ ו. $x=-21$.

**4)** א. $x=8$ ב. $x=-1$ ג. $x=-3$ ד. $x=-2$ ה. $x=2$ ו. $x=\frac{1}{2}$.

**5)** א. $x=-6$ ב. $x=-7$ ג. $x=-7$ ד. $x=6\ ,\ x\neq 3$.

# מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:

## סיכום כללי:

**הגדרה:**

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (ליניאריות) היא מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

כאשר $a_1$ , $b_1$ , $c_1$ ו- $a_2$ , $b_2$ , $c_2$ הם מקדמים מספריים.

דוגמאות למערכות של משוואות: $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ , $\begin{cases} y=3x-1 \\ \frac{x+3}{2}=y+6 \end{cases}$.

**פתרון של מערכת משוואות:**

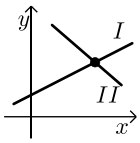
פתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור המקיים את כל המשוואות שבמערכת.

**הצגה גרפית של מערכת משוואות:**

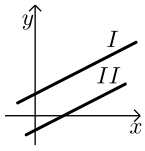
פתרון גרפי של מערכת משוואות הוא נקודת החיתוך של הישרים המייצגים כל משוואה.

יתכנו שלושה מצבים הדדיים בין שני ישרים:

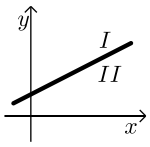
- הישרים נחתכים:
במקרה זה נקודת החיתוך תהיה פתרון המערכת.




- הישרים מקבילים:
במקרה זה לא יהיה פתרון למערכת.




- הישרים מתלכדים:
במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות למערכת המשוואות.



**פתרון אלגברי של מערכת משוואות:**

- פתרון ע"י שיטת ההצבה:
נבודד את אחד הנעלמים ממשוואה אחת ונציב אותו במשוואה השנייה.
נבחר בשיטה זו במקרים בהם קל לבודד נעלם באחת המשוואות.

- פתרון ע"י השוואת מקדמים:

1. כופלים (או מחלקים) משוואה אחת (או שתיהן) במספר השונה מאפס כך שתתקבלנה משוואות שקולות בעלות מקדמים נגדיים או זהים עבור אחד המשתנים.
2. מחברים (או מחסרים) את המשוואות ומקבלים משוואה חדשה עם נעלם אחד.
3. מוצאים את ערך הנעלם מהמשוואה החדשה ומציבים אותו באחת המשוואות המקוריות למציאת ערך הנעלם השני.

**הערה:**

נוח להשתמש בשיטת השוואת המקדמים ע"י כך שמעבירים את המערכת הנתונה למערכת שקולה שבה המשתנים באגף אחד והמספר החופשי באגף השני.

## שאלות:

**1)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} 3x+y=11 \\ y=5 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} y=x-3 \\ y=2x+4 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} -3x+2y=-16 \\ x=5y+14 \end{cases}$

ד. $\begin{cases} 5x-2y=-2 \\ x+4y=4 \end{cases}$

ה. $\begin{cases} -5x+7y=-26 \\ x+3y=-8 \end{cases}$

ו. $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 5x+7y=11 \end{cases}$

**2)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x+3y=5 \\ x-3y=3 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} 5x+2y=14 \\ 5x+3y=23 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 5y=2x \\ 4x=5y+8 \end{cases}$

ד. $\begin{cases} 4x=3y-29 \\ 5y=9-13x \end{cases}$

**3)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x+2y=1 \\ 4x+8y=5 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} 2(x-y)+4y=1+x \\ 2-7y+x=3(x-y) \end{cases}$.

4) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} 3y-x+2=4x+2-3y \\ 2x-3-y=5y-4x+3 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} \frac{x-3}{8}-\frac{x+y}{16}=\frac{y-1}{4} \\ 3(2x-y)-4x-11=0 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} \frac{3x-1}{4}-\frac{2}{5}(x-y)=\frac{3}{10}(x+3) \\ \frac{x+1}{4}-\frac{y}{2}=1 \end{cases}$.

5) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=4 \\ \frac{5}{x}-\frac{1}{y}=4 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{3}{y}=2 \\ \frac{9}{x}-\frac{4}{y}=-7 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 4x-\frac{7}{y}=-3 \\ 5x+\frac{2}{y}=7 \end{cases}$

6) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x(y+2)+y=xy-5 \\ x-y=2 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} xy=20 \\ y(3x-4)=20 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 5x-4xy=22 \\ 6x+xy=-20 \end{cases}$

## תשובות סופיות:

1) א. $(2,5)$ ב. $(-7,-10)$ ג. $(4,-2)$ ד. $(0,1)$ ה. $(1,-3)$ ו. $(-2,3)$.

2) א. $\left(4,\frac{1}{3}\right)$ ב. $\left(-\frac{4}{5},9\right)$ ג. $(4,1.6)$ ד. $(-2,7)$.

3) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות.

4) א. $(6,5)$ ב. $(7,1)$ ג. $(7,2)$.

5) א. $(1,1)$ ב. $(-3,1)$ ג. $(1,1)$.

6) א. $(-1,-3)$ ב. $(2,10)$ ג. $(-2,4)$.

# משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:

## סיכום כללי:

**משוואה ממעלה ראשונה:**

למשוואה ממעלה ראשונה מהצורה: $ax=b$ יתכן פתרון יחיד אם ורק אם $a\neq 0$ מכיוון שניתן לחלק ולכתוב: $x=\frac{b}{a}$.

כאשר $a=0$ מתקבלת המשוואה $0\cdot x=b$ ויתכנו שני מצבים:

1. אם $b=0$ את המשוואה היא $0x=0$ ויש אינסוף פתרונות המקיימים אותה.
2. אם $b\neq 0$ את המשוואה היא $0x=b\neq 0$ ואין אף ערך של $x$ המקיים אותה.

## שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $x+4=6+x$

2) $3x+6-x=4+2x+2$

3) $6(x-2)=2x+5+4x$

4) $5x-3+x=4x+2x-3$

5) נתונה המשוואה: $3-2(x+2)=5x+\square$.

א. איזה מספר יש להציב ב-$\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 1?

ב. איזה מספר יש להציב ב-$\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 0?

ג. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב-$\square$ על מנת שלמשוואה יהיו אינסוף פתרונות.

ד. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב-$\square$ על מנת שלמשוואה לא יהיה פתרון.

## תשובות סופיות:

1) אף פתרון.

2) אינסוף פתרונות.

3) אין פתרון.

4) אינסוף פתרונות.

5) א. 8- ב. 1- ג. $-7x-1$

ד. $-7x+k$ כאשר $k$ הוא מספר כלשהו השונה מ- 1-.

# משוואה ממעלה שנייה:

## סיכום כללי:

משוואה מהצורה: $ax^2+bx+c=0$ , $(a\neq 0)$ נקראת משוואה ריבועית.

פתרונות המשוואה יסומנו ב- $x_1$ ו- $x_2$ ויחושבו לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

למשוואה ריבועית יתכנו שלושה סוגים של פתרונות:

1. **משוואה עם שני פתרונות ממשיים שונים.**
אם מתקבל מספר חיובי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים.
דוגמא: $x^2+5x-4=0$.

2. **משוואה עם פתרון ממשי אחד בלבד.**
אם מתקבל אפס בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד בלבד.
דוגמא: $x^2+4x+4=0$.

3. **משוואה ללא פתרונות ממשיים כלל.**
אם מתקבל מספר שלילי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה לא יהיו פתרונות ממשיים כלל.
דוגמא: $x^2+x+4=0$.

## שאלות:

**1)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $x^2+3x-10=0$

ב. $-x^2+10x-16=0$

ג. $25x^2-20x+4=0$

ד. $2x^2-6x+5=0$

**2)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $4x^2-5x+7=4-x^2+13$

ב. $-x(x-5)=(1-3x)(1-x)+4$

ג. $2(x-5)^2-(2x-3)^2=10x+21$

ד. $(2x-1)^2+x(2x+3)=(x-1)(x-7)$

**3)** פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת $b$):

א. $x^2-36=0$

ב. $32x^2-18=0$

ג. $4x-x(x+2)=3(x-1)-x-6$

ד. $(2x-1)^2+(2x+1)^2=10$

**4)** פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת $c$):

א. $-7x^2-14x=0$

ב. $5x^2-x=0$

ג. $6x(x-2)-1=4x-3(x+1)+2$

ד. $(5x-2)^2=(x-2)(x+3)+10$

**5)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $\frac{4x+1}{3}-\frac{x+2}{2}=\frac{2}{x}$

ב. $\frac{x^2-9}{x+3}+x=x^2-18$

ג. $\frac{3}{2x+2}-\frac{2x-5}{2(x-1)^2}-\frac{4}{1-x^2}=0$

ד. $\frac{x}{2x^2-72}+\frac{2}{x^2+12x+36}=\frac{8x-15}{24-4x}+2$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $x_1=2\ ,\ x_2=-5$ ב. $x_1=2\ ,\ x_2=8$ ג. $x=\frac{2}{5}$ ד. אין פתרון.

**2)** א. $x_1=2\ ,\ x_2=-1$ ב. $x_1=1\ ,\ x_2=1\frac{1}{4}$ ג. $x_1=1\ ,\ x_2=-10$

ד. $x_1=0.6\ ,\ x_2=-2$.

**3)** א. $x=\pm 6$ ב. $x=\pm\frac{3}{4}$ ג. $x=\pm 3$ ד. $x=\pm 1$

**4)** א. $x_1=0\ ,\ x_2=-2$ ב. $x_1=0\ ,\ x_2=\frac{1}{5}$ ג. $x_1=0\ ,\ x_2=2\frac{1}{6}$

ד. $x_1=0\ ,\ x_2=\frac{7}{8}$.

**5)** א. $x_1=2\ ,\ x_2=-1.2$ ב. $x=5\ ,\ x\neq -3$ ג. $x_1=0\ ,\ x_2=-5$

ד. $x_1=-7.6\ ,\ x_2=-4\frac{2}{7}$.

# משוואות דו-ריבועיות:

## סיכום כללי:

משוואה דו-ריבועית היא משוואה מהצורה: $ax^4+bx^2+c=0$ כאשר הנעלם הוא $x$.
פתרון המשוואה יבוצע ע"י מעבר לפרמטר: $x^2=t \to at^2+bt+c=0$ ומציאתו.
לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה ולמצוא את ערכי $x$.

ניתן להביא משוואות לצורה זו ולהגדיר ביטוי המופיע בחזקות 2 ו-4
כגון: $\left(x^2-1\right)^2+3\left(x^2-1\right)-2=0$ באמצעות פרמטר: $t=x^2-1$
ובכך לפתור משוואה: $t^2+3t-2=0$ ולהחזיר את ההצבה עבור מציאת $x$.
דרך הפתרון תקפה לכל משוואה בה הנעלם מופיע בחזקות כפולות כגון 3 ו-6, או 4 ו-8.

## שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $5x^4+3x^2-8=0$

2) $x^4-3x^2+2=0$

3) $13x^2\left(3x^2-1\right)-2=3\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)$

4) $x^2\left(x^2+1\right)=10\left(3x^2-10\right)$

5) $x^6+x^3=56$

6) $x^3+4=\frac{32}{x^3}$

7) $x-9\sqrt{x}+14=0$

8) $x^8-4x^4-50=31x^4-84$

9) $125x^6-1=124\left(x^6+x^3+1\right)$

10) $\left(2x^2-x\right)^2-4\left(2x^2-x\right)+3=0$

11) $\left(x^2+2x\right)^2+7x^2+14x=-6$

12) $\frac{21}{x^2-4x+10}=6+x^2-4x$

13) $\frac{12}{x^2+2x-8}=1+\frac{7.5}{x^2+2x-3}$

14) $\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\frac{7}{6}-\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}$

15) $\frac{3}{3x^2-15}+\frac{1}{x^2+5}=\frac{10}{x^4-25}$

16) $\frac{x^2-1}{4x^2-28}+2=\frac{9}{x^4-8x^2+7}+\frac{x^2}{2x^2-2}$

17) $\left(2x+\frac{3}{x}\right)^2+35=12\left(2x+\frac{3}{x}\right)$

18) $\frac{3x^4}{(x+2)^2}+\frac{3x^2}{x+2}=6$

19) $\left(2x-x^2+3\right)\left(2x-x^2-2\right)=0$

20) $\left(x^2-5x+6\right)\left(x^2-5x-8\right)=-24$

## תשובות סופיות:

1) $x=\pm 1$

2) $x=\pm 1,\pm\sqrt{2}$

3) $x=\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{3}$

4) $x=\pm 2,\pm 5$

5) $x_1=\sqrt[3]{7}\ ,\ x_2=-2$

6) $x=-2,\sqrt[3]{4}$

7) $x_1=4\ ,\ x_2=49$

8) $x_{1,2}=\pm\sqrt[4]{34}\ ,\ x_{3,4}=\pm 1$

9) $x=5,-1$

10) $x_1=1.5\ ,\ x_2=-1\ ,\ x_3=1\ ,\ x_4=-\frac{1}{2}$

11) $x=-1$

12) $x_{1,2}=1,3$

13) $x_1=0\ ,\ x_2=-2\ ,\ x_3=3.06\ ,\ x_4=-5.06$

14) $x_1=0\ ,\ x_2=-2$

15) אין פתרונות.

16) $x=\pm\sqrt{\frac{3}{7}}$

17) $x=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},3$

18) $x=-1,2$

19) $x=3,-1$

20) $x=\pm 1,4,6$

# משוואות עם פרמטרים:

## סיכום כללי:

משוואה עם פרמטר הינה משוואה שמכילה שני סוגים של גדלים – משתנים ופרמטרים.
את המשתנים מקובל לסמן באותיות $x$ , $y$ , $z$ ואת הפרמטרים מסמנים בשאר האותיות.
פתרון המשוואה יתקבל ע"י בידוד המשתנה כך שיבוטא באמצעות הפרמטר/ים שבמשוואה.

למשל פתרון המשוואה: $mx=4$ (כאשר $x$ הוא הנעלם ו- $m$ הוא פרמטר) הוא $x=\frac{4}{m}$

אשר מבוטא באמצאות הפרמטר $m$.

בכתיבת פתרון של משוואה עם פרמטרים יש לציין את תחום ההגדרה של הפרמטר עבורו הפתרון הוא בעל משמעות. בדוגמא הנ"ל תחום ההגדרה הוא $m\neq 0$.

## שאלות:

**1)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $3x-b=(b+1)x-6$

ב. $\frac{1}{3}(a-3x)=\frac{1}{a}(ax-3)$

ג. $(x-2a)(x-2b)=x^2-2(a^2+b^2)$

ד. $\frac{m+1}{x-1}=\frac{m-1}{x+1}$

ה. $\frac{x}{a^2-a}-\frac{1}{2a}=\frac{ax+x}{2a^3-4a^2+2a}-\frac{2}{a^3-2a^2+a}$

**2)** פתור את מערכות המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x+my=1 \\ x+y=m \end{cases}$

ב. $\begin{cases} ax+y=2 \\ x+ay=4 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} \frac{x}{m}+y=m \\ x-m^2y=1 \end{cases}$

ד. $\begin{cases} (m-1)x-(2m+3)y=5 \\ (m+2)x-(2m-1)y=10m \end{cases}$

ה. $\begin{cases} (2a+b)x-(2a-b)y=8ab \\ (2a-b)x+(2a+b)y=8a^2-2b^2 \end{cases}$

**3)** פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

א. $x^2-2mx+m^2-1=0$

ב. $x^2-2x+4a=a^2+3$

ג. $x^2+m(x+10)=2m^2-5x$

ד. $\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+x}=0$

ה. $(m^2+1)x^2-m^2x-1=0$

ו. $\frac{a}{x}+\frac{1}{b}=\frac{x}{a}+b$

ז. $x+\frac{1}{x}=\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $x=\frac{b-6}{2-b}\ ,\ b\neq 2$ ב. $x=\frac{a^2+9}{6a}\ ,\ a\neq 0$ ג. $x=a+b$ ד. $x=-m$ ה. $x=a+1$

**2)** א. $m\neq 1\ ,\ (m+1,-1)$ ב. $a\neq \pm 1\ ,\ \left(\frac{2a-4}{a^2-1},\frac{4a-2}{a^2-1}\right)$

ג. $m\neq 0-1\ ,\ \left(m^2-m+1,\frac{m-1}{m}\right)$ ד. $m\neq 1,-2\ ,\ (2m+1,m-2)$

ה. $b\neq \pm 2a\ ,\ (2a+b,2a-b)$

**3)** א. $x=m+1,\mathrm{m}-1$ ב. $x=a-1,3-a$ ג. $x=m-5,-2m$

ד. $a\neq 0\ ,\ x\neq \pm a\ ,\ x=\pm a\sqrt{3}$ ה. $x=1,-\frac{1}{m^2+1}$

ו. $a,b\neq 0\ ,\ x=\frac{a}{b},-ab$ ז. $a\neq \pm b\ ,\ x=\frac{a+b}{a-b},\frac{a-b}{a+b}$.

# משוואות עם שורשים:

## סיכום כללי:

פתרון משוואה מהצורה: $\sqrt{x}=a$ יתקבל ע"י העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה באופן הבא: $\left(\sqrt{x}\right)^2=\left(a\right)^2 \quad \rightarrow \quad x=a^2$.

**הערות:**

1) יש לזכור בעת העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה יש לבדוק את כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבתם במשוואה המקורית.
2) למשוואה מהצורה $\sqrt{x}=a$ שבה $a<0$ אין פתרון.
3) יש לסדר תחילה משוואות שבהן הביטוי עם שורש אינו מבודד.
4) במשוואות שבהן יותר מביטוי אחד עם שורש יש לבודד תחילה את אחד הביטויים, להעלות בריבוע ולאחר מכן לחזור על התהליך ולבצע העלאה בריבוע פעם נוספת.

## שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $\sqrt{2x+5}=7$
2) $\sqrt{x+2}=x$
3) $\sqrt{3x+1}+x=13$
4) $\sqrt{2x+7}+4=x$
5) $\sqrt{x-1}+3=x$
6) $\sqrt{10x+6}+9=x$
7) $\sqrt{x+6}-2=2x$
8) $\sqrt{24-x}+3=2x$
9) $\sqrt{x+16}+4=2x$
10) $2x=16-3\sqrt{x-1}$
11) $\sqrt{3x+5}=\sqrt{x+17}$
12) $\sqrt{x^2-5x+12}=2\sqrt{6-x}$
13) $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x-5}=\sqrt{11-x^2}$
14) $\sqrt{2x-1}+3=\sqrt{7x+1}$
15) $\sqrt{9x-8}-3\sqrt{x+4}=-2$
16) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{3-x}=2$
17) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{4x+1}$
18) $\sqrt{2x-2}+\sqrt{5x-4}=\sqrt{3x-2}$
19) $3\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-3}=2\sqrt{x+2}$

## תשובות סופיות:

1) $x=22$

2) $x=2$

3) $x=8$

4) $x=9$

5) $x=5$

6) $x=25$

7) $x=0.25$

8) $x=3.75$

9) $x=4.25$

10) $x=5$

11) $x=6$

12) $x=4,-3$

13) $x=3$

14) $x=5$

15) $x=12$

16) $x=2,2\frac{8}{9}$

17) $x=6$

18) $x=1$

19) $x=2$

# משוואות עם ערך מוחלט:

## סיכום כללי:

**הגדרה:**

ערך מוחלט הינו המרחק של מספר מ-0 ומוגדר באופן הבא: $|x|=\begin{cases} x & x\ge 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$.

**משוואה עם ערך מוחלט:**

משוואה עם ערך מוחלט היא מהצורה: $|x|=a$.

כדי לפתור משוואה עם ערכים מוחלטים יש למצוא את נקודות האפס של כל ערך מוחלט (קרי: הנקודות בהן הביטוי שבתוך הערך המוחלט מתאפס) ולפצל את המשואה הנתונה לתחומים עבור כל תחום.

## שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $|3x+14|=7$

2) $|3x-24|=x$

3) $|12-x|=3x$

4) $2x-|8-x|=10$

5) $|4x-5|=|2x+13|$

6) $|14-3x|=2|x+5|$

7) $|x|+7=|2x|$

8) $|x+2|+6=|2x-4|$

9) $|x+2|+|2x-6|=|4x+8|$

10) $|10-3x|-|x+4|=|2x-6|$

## תשובות סופיות:

1) $x=-\frac{7}{3},\ -7$

2) $x=6,12$

3) $x=3$

4) $x=6$

5) $x=9,-1\frac{1}{3}$

6) $x=24,\frac{4}{5}$

7) $x=\pm 7$

8) $x=12,-1\frac{1}{3}$

9) $x=0,-12$

10) $x=0$

# מערכת משוואות ממעלה שנייה:

## סיכום כללי:

מערכת משוואות ריבועיות מיוחסת למערכת של שתי משוואות (לפחות) שאחת מהן מכילה את אחד מהנעלמים בריבוע. למערכת משוואות ריבועיות יכולים להתקבל עד 4 פתרונות שונים. יש לפתור את המערכת לפי הטכניקות הרגילות של בידוד והצבה או השוואת מקדמים.

## שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ x+y=6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2+y^2=36 \\ x^2+3y=10 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x^2+4y^2=16 \\ 5x^2-3y^2=17 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2-2y^2=17 \\ xy=-10 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2-xy-20y^2=0 \\ x+6y=1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2-2xy+8y^2=8 \\ 3xy-2y^2=4 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2-y^2=33 \\ x+y=11 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 16x^2-y^2=391 \\ 4x-y=23 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 4xy+x=-15 \\ \frac{3}{y}-2x=16 \end{cases}$

10) $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=5 \\ \frac{4}{y}-\frac{1}{x}=-19 \end{cases}$

11) $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{5}{y}=21 \\ \frac{8}{x}-\frac{1}{y}=13 \end{cases}$

12) $\begin{cases} xy=24 \\ (y-x)^2-7(y-x)+10=0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x^2y-xy^2=84 \\ x^2-2xy+y^2+5x-5y=24 \end{cases}$

14) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{10}{3} \\ x^2+y^2=9xy+25 \end{cases}$

## תשובות סופיות:

1) $(2,4),(4,2)$

2) $(\pm 4,-2)$

3) $(\pm 2,\pm 1)$

4) $(5,-2),(-5,2)$

5) $\left(-2,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{5}{11},\frac{1}{11}\right)$

6) $\left(3,\frac{1}{2}\right),\left(-3,-\frac{1}{2}\right),(2,1),(-2,-1)$

7) $(7,4)$

8) $(5,-3)$

9) $\left(-5,\frac{1}{2}\right)$ , $\left(-24,-\frac{3}{32}\right)$

10) $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{4}\right)$

11) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

12) $(4,6)$ , $(-6,-4)$ , $(3,8)$ , $(-8,-3)$

13) $(-1.65,6.35)$ , $(-6.35,1.65)$ , $(7,4)$ , $(-4,-7)$

14) $(5,45)$ , $(-5,-45)$ , $(45,5)$ , $(-45,-5)$

# קורס ריענון במתמטיקה

## פרק 5 - מבוא לפונקציות

### תוכן העניינים


1. מהי פונקציה ..... (ללא ספר)
2. מערכת הצירים ..... (ללא ספר)
3. אורכי קטעים ושטחים יסודיים ..... (ללא ספר)
4. השתנות של פונקציה ..... (ללא ספר)
5. קצב השתנות של פונקציה ..... (ללא ספר)

# קורס ריענון במתמטיקה

## פרק 6 - הפונקציה הקווית

### תוכן העניינים

1. ייצוג גרפי של פונקצית הקו הישר ..... (ללא ספר)
2. שיפוע ישר ..... (ללא ספר)
3. הקו הישר הכללי ..... (ללא ספר)
4. שיפוע דרך שתי נקודות ..... (ללא ספר)
5. משוואת ישר עם שיפוע ונקודה ..... (ללא ספר)
6. משוואת ישר המקביל לישר נתון ..... (ללא ספר)
7. משוואת ישר דרך שתי נקודות ..... (ללא ספר)
8. ישרים המקבילים לצירים ..... (ללא ספר)
9. חיתוך של ישר עם הצירים ..... (ללא ספר)
10. חיוביות ושליליות של קו ישר ..... (ללא ספר)
11. חישובי שטחים עם הפונקציה הקווית ..... (ללא ספר)

# קורס ריענון במתמטיקה

## פרק 7 - הפונקציה הריבועית

### תוכן העניינים

1. הפונקציה הריבועית היסודית y=x^2 ..... (ללא ספר)
2. משפחת הפרבולות מהצורה y=x^2+c ..... (ללא ספר)
3. משפחת הפרבולות מהצורה y=(x-p)^2 ..... (ללא ספר)
4. משפחת הפרבולות מהצורה y=(x-p)^2+k ..... (ללא ספר)
5. משפחת הפרבולות עם מקדם a כללי ..... (ללא ספר)
6. משפחת הפרבולות מהצורה y=a(x-p)^2+k ..... (ללא ספר)
7. הצגה סטנדרטית של הפונקציה הריבועית ..... (ללא ספר)
8. סרטוט של גרף הפונקציה הריבועית הכללית ..... (ללא ספר)
9. מציאת נקודות האפס של פונקציה ריבועית עם a כללי ..... (ללא ספר)
10. ייצוגים שונים של פונקציה ריבועית ..... (ללא ספר)
11. חיתוך בין ישר ופרבולה ..... (ללא ספר)
12. חיתוך בין שתי פרבולות ..... (ללא ספר)
13. שאלות מסכמות ..... (ללא ספר)

# קורס ריענון במתמטיקה

## פרק 8 - אי שוויונים אלגבריים

תוכן העניינים

1. אי שוויונים ממעלה ראשונה ..... 105
2. אי שוויונים ממעלה שנייה ..... 107
3. אי שוויונים ממעלה שלישית ..... 108
4. אי שוויונים עם מנה ..... 109
5. אי שוויונים כפולים מערכות וגם ואו ..... 111
6. שאלות מסכמות ..... 112
7. מציאת תחום הגדרה ..... 114
8. אי שוויונים עם ערך מוחלט ..... 116
9. אי שוויונים עם שורשים ..... 119

# אי-שוויונים ממעלה ראשונה:

## סיכום כללי:

**פעולות המותרות לביצוע בפתרון אי-שוויון:**

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

**פעולות אסורות לביצוע בפתרון אי-שוויון:**

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

## שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $45x-26>109$

2) $6x>2(3x-1)$

3) $2(x-5)\geq\frac{1}{2}(4x+6)$

4) $(x-2)^2+4<(x+2)^2+20$

5) $\frac{8x-4}{2}<\frac{9(x+1)}{3}$

6) $4(6x-8)<8(3x-4)$

7) $\frac{x-6}{3}-\frac{x-4}{4}\geq 12-x$

8) $\frac{7-x}{10}-\frac{3x-1}{5}+\frac{x+4}{3}<7$

## תשובות סופיות:

1) $x>3$
2) כל $x$
3) אף $x$
4) $x>-2$
5) $x<5$
6) אף $x$
7) $x\geq 12$
8) $x>-13$

# אי-שוויונים ממעלה שנייה:

## סיכום כללי:

אי שוויון ריבועי הוא מהצורה: $ax^2+bx+c \gtrless 0$ כאשר $a \neq 0$.

כדי לפתור אי שוויון ריבועי יש למצוא את נקודות האפס של הביטוי הריבועי ולאחר מכן למצוא את תחום ההצבה עבורו הביטוי מקיים את אי השוויון עצמו.

## שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $x^2<144$

2) $x^2-12x>-32$

3) $(x+2)(x+5)<0$

4) $(x+2)(x+4)<35$

5) $-x^2+13x+30<0$

6) $(x-3)(x-7)\geq 8x-56$

7) $(x-5)^2+x(x+2)<89$

8) $(5x+6)^2\leq 4(x-3)^2$

9) $-3x^2+12x>0$

10) $x^2-10x+25>0$

11) $(x-3)^2>(x-1)(x+6)-x^2-3x$

12) $2x^2+2x+24\geq 0$

## תשובות סופיות:

1) $-12<x<12$

2) $x<4\ ,\ x>8$

3) $-5<x<-2$

4) $-9<x<3$

5) $x<-2\ ,\ x>15$

6) $x\leq 7\ ,\ x\geq 11$

7) $-4<x<8$

8) $-4\leq x\leq 0$

9) $0<x<4$

10) $x>5\ ,\ x<5$

11) $x<3\ ,\ x>5$

12) כל $x$

# אי-שוויונים ממעלה שלישית:

## סיכום כללי:

אי שוויונים ממעלה גבוהה מיוחסים לכאלה שניתן לכתוב אותם בצורה של פולינומים, כגון: $x^3-4x^2+4x+1>0$ , $x^4+2x^2+1<0$ וכו'.

בפועל נפתור אותם ע"י פירוק לגורמים ומציאת נקודות האפס של כל גורם.

לאחר מכן נבדוק את כל אחד מתחומי המספרים המתקבלים עבור הנעלם ונראה באלו מהם מתקבל פסוק אמת.

## שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $(x-1)(x-2)(x-3)>0$

2) $x(x^2+x+1)>0$

3) $(-2x^2-3x+2)(x+1)\le 0$

4) $x^3-25x\ge 0$

5) $(x^2+3x+5)(x-2)>0$

6) $(x^2+8x+20)(3x-5)\le 0$

7) $(x^2-x-6)(x-1)<0$

8) $x^3-6x^2+9x\le 0$

9) $(x^2+6)(x+3)>0$

10) $(x-2)(x-4)(x-1)<0$

## תשובות סופיות:

1) $1<x<2\ ,\ x>3$

2) $x>0$

3) $-2\le x\le -1\ ,\ x\ge \frac{1}{2}$

4) $-5\le x\le 0\ ,\ x\ge 5$

5) $x>2$

6) $x\le 1\frac{2}{3}$

7) $x<-2\ ,\ 1<x<3$

8) $x\le 0\ ,\ x=3$

9) $x>-3$

10) $x<1\ ,\ 2<x<4$

# אי-שוויונים עם מנה:

## סיכום כללי:

אי שוויון מהצורה: $\frac{f(x)}{g(x)}>0$ (או $\frac{f(x)}{g(x)}<0$) נקרא אי-שוויון עם מנה, בו $f(x)$ ו-$g(x)$ הם פולינומים כלשהם.

למשל: $\frac{2x+4}{x^2-3x+4}<0$ בו: $f(x)=2x+4$ ו-$g(x)=x^2-3x+4$.

כדי לפתור אי שוויון עם מנה נמצא את נקודות האפס של $f(x)$ ושל $g(x)$ ונציב מספרים בתחומים המתקבלים. אלו שיתנו פסוק אמת יהוו את פתרון אי השוויון.

**הערות:**

- ניתן לבצע כפל של המכנה בריבוע בכדי להעביר את אי השוויון לצורה של מכפלות.
- ניתן להעביר אי שוויון המכיל מספר מנות ומספרים שלמים לצורה הנ"ל ע"י פעולות אלגבריות מתאימות תחילה.

## שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $\frac{x-1}{x^2-9}>0$

2) $\frac{x-1}{3x+2}\geq -3$

3) $\frac{1}{x^2-16}>0$

4) $\frac{x-3}{2x^2-10x+12}>0$

5) $\frac{2x-1}{x-5}\leq 0$

6) $\frac{1}{-3(x-1)}<0$

7) $\frac{x-1}{x+2}\leq 1$

8) $\frac{1}{x^2-5x+6}<0$

9) $\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7}\geq 0$

10) $\frac{1}{x^2-8x+12}\geq 0$

## תשובות סופיות:

1) $-3<x<1\,,\,x>3$

2) $x<-\frac{2}{3}\,,\,x\geq-\frac{1}{2}$

3) $x<-4\,,\,x>4$

4) $2<x<3\,,\,x>3$

5) $\frac{1}{2}\leq x<5$

6) $x>1$

7) $x>-2$

8) $2<x<3$

9) $1\leq x\leq 6$

10) $x<2\,,\,x>6$

# אי-שוויונים כפולים - מערכת וגם:

## סיכום כללי:

אי-שוויון כפול הוא צורה מקוצרת להציג שני אי-שיווינים אשר יש לפתור יחד (קרי: כמערכת 'וגם'). למשל במקום לכתוב: $a<b$ וגם $b<c$ , ניתן לכתוב: $a<b<c$.

מכאן כי כדי לפתור אי שוויון כפול יש לפצל אותו תחילה לשני אי-שיווינים ולפתור כל אחד בנפרד. לאחר מכן יש לקחת את חיתוך הפתרונות.

## שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $3<x+1<5$

2) $0<\frac{1}{x+4}<2$

3) $-1<\frac{x-1}{x+1}<1$

4) $0<\frac{8-3x}{5-2x}<4$

5) $6x-38\le x-3\le 5x+7$

6) $6<\frac{2x+10}{3}\le\frac{7x-20}{5}$

7) $-1\le\frac{2x-6}{4}<\frac{x+2}{3}$

8) $\frac{4x+5}{15}>\frac{3x-8}{5}+\frac{9-x}{3}>11$

## תשובות סופיות:

1) $2<x<4$

2) $x>-3\frac{1}{2}$

3) $x>0$

4) $x<2\frac{2}{5}\ ,\ x>2\frac{2}{3}$

5) $-2.5\le x\le 7$

6) $x\ge 10$

7) $1\le x<13$

8) $\phi$

# שאלות מסכמות – אי-שוויונים:

## שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $x \le -\frac{3}{4} \cap \{-2 < x \le 5 \cup 0 < x < 8\}$

2) $x(x+5)-3x+15 \le 2x-1-x(4-x)$

3) $\frac{(x-3)(x+4)}{2-x} \le 0$

4) $\frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)} < 0$

5) $\frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)} \ge 0$

6) $x(x+3)(2x-5) < 0$

7) $\frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2} > 0$

8) $\frac{5-2x}{(x-8)^2} \le 0$

9) $\frac{x-3}{x^2+2} > 0$

10) $\frac{x^2-4x}{x^2+2x-3} > 0$

11) $\frac{x^2-6x+9}{x^3-x} > 0$

12) $\frac{x-7}{x^2+x+3} > 0$

13) $\frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2}$

14) $\frac{2x^2}{x^2-6x+8} \ge \frac{x}{x-4} - \frac{x}{x-2}$

15) $6 < 5x - x^2 \cap x^2 > 3x+10$

16) $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x} > 0 \cup \frac{1}{x-3} < \frac{1}{1-x}$

17) $1 < \frac{x-1}{x-4} \le 2$

18) לאלו ערכי $x$ נמצאת הפונקציה $f(x) = \frac{x}{x-3}$ מעל הפונקציה: $g(x) = \frac{x+1}{x+3}$?

## תשובות סופיות:

1) $-2 < x \le -\frac{3}{4}$

2) $x \le -4$

3) $-4 \le x < 2 \, , \, 3 \le x$

4) $x < -7 \, , \, -\frac{1}{3} < x < 2 \, , \, x > 5$

5) $-1 < x \le 1.5 \, , \, 4 < x \le 12$

6) $x < -3 \, , \, 0 < x < 2.5$

7) $x < -1 \, , \, 2 < x < 6 \, , \, x > 6$

8) $2.5 \le x < 8 \, , \, x > 8$

9) $x > 3$

10) $x < -3 \, , \, 0 < x < 1 \, , \, x > 4$

11) $-1 < x < 0 \, , \, 1 < x < 3 \, , \, x > 3$

12) $x > 7$

13) $x < -2 \, , \, 2 < x < 4$

14) $x \le 0 \, , \, 1 \le x < 2 \, , \, x > 4$

15) אף $x$

16) $x \ne 1$

17) $x \ge 7$

18) $-3 < x < -\frac{3}{5} \, , \, x > 3$

# תחום הגדרה:

## שאלות:

**1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{3x-4}$

ב. $f(x)=\sqrt{x^2-5x-6}$

ג. $f(x)=\sqrt{12x-x^2-x^3}$

ד. $f(x)=\sqrt{\frac{x+5}{x^2-4}}$

ה. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+2}-x}$

ו. $f(x)=\frac{\sqrt{3x^2-2x-1}}{2x-3}$

**2)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+2}-3}$

ב. $f(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$

ג. $f(x)=\sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}}$

ד. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$

**3)** תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x)=\sqrt{ax-x^2-4}$ הוא $1\le x\le 4$.
מצא את ערכו של הפרמטר $a$.

**4)** תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$ הוא $x\le -2\ ,\ x>2$.
מצא את ערכו של הפרמטר $a$.

**5)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+6}-a}$ , ($a$ פרמטר חיובי).

א. הבע באמצעות $a$ את תחום הגדרתה.

ב. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=\sqrt{\frac{2x}{x+5}}$.
ידוע כי תחום ההגדרה של שתי הפונקציות מכסה את כל ציר המספרים.
מצא את תחום הערכים האפשרי של הפרמטר $a$.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $x \geq 1\frac{1}{3}$ ב. $x \leq -1 , x \geq 6$ ג. $x \leq -4 , 0 \leq x \leq 3$

ד. $-5 \leq x < -2 , x > 2$ ה. $-2 \leq x < 2 , x > 2$ ו. $x \leq -\frac{1}{3} , 1 \leq x < \frac{3}{2} , x > \frac{3}{2}$

**2)** א. $x \geq 7$ ב. $-6 \leq x \neq -2$ ג. $x \leq -1\frac{1}{2} , x \geq 1$

ד. $x \leq -3 , -2 \leq x \neq 1$.

**3)** $a = 5$.

**4)** $a = 2$.

**5)** א. $x \geq a^2 - 6$ ב. $0 < a \leq 1$.

# אי שוויונים עם ערך מוחלט:

## סיכום כללי:

**כללים לפתרון אי שוויון עם ערך מוחלט יחיד:**

| מקרה | $\lvert x\rvert < a$ | $\lvert x\rvert > a$ |
|---|---|---|
| פתרון | $-a < x < a$ | $x < -a \cap x > a$ |

**כללים לפתרון אי שוויון עם מספר ערכים מוחלטים:**

- נמצא את הנקודות המאפסות כל ביטוי עם ערך מוחלט.
- מחלקים את אי השוויון לתחומים לפי נקודות האפס.
- פותרים את אי השוויון לכל תחום בנפרד.
- כותבים פתרון כללי (מערכת או) לכל התחומים יחדיו.

## שאלות:

**1)** פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $\lvert x+2\rvert < 3$

ב. $\lvert 2x+1\rvert > 7$

ג. $\lvert 6-2x\rvert < x$

ד. $\lvert 2x+1\rvert - 3x > 4$

**2)** פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $1 < \lvert 4-3x\rvert < 7$

ב. $\lvert 2x+3\rvert < 8 < \lvert 5-x\rvert$

**3)** פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $\lvert x^2+6x-4\rvert < 12$

ב. $\lvert x^2+x-10\rvert > 3x-2$

ג. $\lvert x^2-3x\rvert < 4$

ד. $\lvert 6x^2-7x-4\rvert > 1$

ה. $x^2-6\lvert x\rvert+5 \le 0$

ו. $x^2-6\lvert x+1\rvert-1 > 0$

**4)** פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $|x-3|+|2x+2|>7$

ב. $|x+8|<11-|1-3x|$

ג. $|3-2x|-11>4-|6+x|$

ד. $|2x-6|+|x+5|>14-|1-x|$

ה. $|5+4x|-|3-x|+\left|4-\frac{1}{2}x\right|\le 22$

ו. $|x+3|+|x^2-5x+4|<19$

**5)** פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $\left|\frac{3x-1}{x-2}\right|\ge 3$

ב. $1\le\left|\frac{x+2}{x-2}\right|\le 2$

ג. $\frac{|x-6|+8x}{x-12}\le 12$

ד. $\left|\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}\right|>5$

**6)** פתור את אי-השוויונים הבאים (ערך מוחלט ושורשים):

א. $\sqrt{x^2-|x-12|}<x$

ב. $2-\sqrt{1-x}\le|x+2|-3$

ג. $\sqrt{|2x+1|-x-1}\le 4-|3x|$

ד. $\frac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}}>0$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $-5<x<1$ ב. $3<x$ או $x<-4$

ג. $2<x<6$ ד. $x<-1$.

**2)** א. $1\frac{2}{3}<x<3\frac{2}{3}$ או $-1<x<1$ ב. $-5\frac{1}{2}<x<-3$

**3)** א. $-2<x<2$ או $-8<x<-4$ ב. $4<x$ או $x<2$

ג. $-1<x<4$ ד. $x<-\frac{1}{2}\ ,\ -\frac{1}{3}<x<\frac{3}{2}\ ,\ x>\frac{5}{3}$

ה. $1\le x\le 5$ או $-5\le x\le -1$ ו. $x<-5\ ,\ x>7$

**4)** א. $2<x$ או $x<-2$ ב. $-1<x<1$

ג. $4<x$ או $x<-6$ ד. $4<x$ או $x<-1$

ה. $-7\frac{3}{7}\le x\le 4$ ו. $-2<x<6$.

**5)** א. $\frac{7}{6}\le x<2\ ,\ x>2$ ב. $0\le x\le\frac{2}{3}\ ,\ x\ge 6$

ג. $x<12\ ,\ x\ge 46$ ד. $\frac{1}{2}<x<1\ ,\ 1<x<2\ ,\ 2<x\le 4$

**6)** א. $x=-1\ ,\ x\ge 3\ ,\ x\ne 12$ ב. $x\le\frac{-15+\sqrt{33}}{2}$

ג. $0\le x\le 1\ ,\ -1\le x\le -\frac{2}{3}$ ד. $-1<x<\sqrt[3]{4}$

# אי שוויונים עם שורשים:

## סיכום כללי:

**מקרים בפתרון אי-שוויונות עם שורשים:**

| מקרה | אי השוויון | פתרון |
|---|---|---|
| $a \geq 0$ | $\sqrt{f(x)} < a$ | $0 \leq f(x) < a^2$ |
| $a < 0$ | $\sqrt{f(x)} < a$ | אין פתרון |
| | $\sqrt{f(x)} > a$ | כל $x$ בת.ה. של $f(x)$ |

## שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

1) $\sqrt{x+3} < 7$

2) $\sqrt{2x-5} \geq 1$

3) $\sqrt{2x^2+5x-6} > 2-x$

4) $\sqrt{x^2+x-6} < x-3$

5) $\sqrt{x^2+3x+2} - 1 < \sqrt{x^2-x+1}$

6) $\sqrt{x^2+5x+6} - \sqrt{x^2-x+1} < 1$

7) $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} > \frac{3}{2}$

8) $\frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2$

9) $\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{4}} < \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$

10) $\sqrt{2-\sqrt{3+x}} < \sqrt{4+x}$

11) $\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}$

12) $\sqrt{1+\frac{9}{x}} + 5\sqrt{\frac{x}{x+9}} \geq 4$

## תשובות סופיות:

1) $-3 \le x < 46$.

2) $x \ge 3$.

3) $x < -10$ , $x > 1$.

4) $\varnothing$.

5) $-1 \le x < \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$ , $x \le -2$.

6) $-2 \le x < \frac{-13+\sqrt{73}}{16}$ , $x \le -3$.

7) $\frac{12}{25} < x \le \frac{1}{2}$.

8) $x < 2\sqrt{5} - 4$.

9) $1 < x \le \frac{2}{\sqrt{3}}$.

10) $-\frac{3+\sqrt{5}}{2} < x \le 1$ שזה: $-2.618 < x \le 1$.

11) $2.5 \le x < 3$.

12) $x < -9$ , $x > 0$.

# קורס ריענון במתמטיקה

## פרק 9 - חוקי החזקות והשורשים

### תוכן העניינים

1. חוקי החזקות ..... 121
2. חוקי השורשים ..... 126
3. כתיבה מדעית של מספרים ..... 130

# חוקי החזקות:

## סיכום כללי:

### סיכום חוקי החזקות:

1. $a^0=1$
2. $a^1=a$
3. $a^n\cdot a^m=a^{m+n}$
4. $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$
5. $\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$
6. $a^m\cdot b^m=\left(a\cdot b\right)^m$
7. $\frac{a^m}{b^m}=\left(\frac{a}{b}\right)^m$
8. $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$
9. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}=\left(\frac{b}{a}\right)^m$

## שאלות:

**1)** פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^na^m=a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$.

א. $a^2a^6$ ב. $t^3t^5t^7$ ג. $b^2b^5b^{12}b^3$

ד. $\frac{k^8}{k^3}$ ה. $\frac{n^{14}}{n^9}$ ו. $\frac{c^6}{c^2}$

ז. $\frac{a^3a^{19}}{a^{15}}$ ח. $\frac{x^{30}}{x^9x^{18}}$ ט. $\frac{y^3y^{15}}{y^4y^{14}}$

י. $3^23^33^4$ יא. $\frac{2^{16}2^2}{2^{10}}$ יב. $\frac{5^{20}5^35^{16}}{5^45^{22}5^8}$

**2)** פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^na^m=a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$.

א. $\frac{3^42^7}{2^63^2}$ ב. $\frac{a^{10}b^{13}a^3}{b^4b^6b^2a^{12}}$ ג. $\frac{x^8y^5y^9x^2}{y^4x^4}$

**3)** לפניך הביטוי הבא: $\frac{3^62^{17}3^32^4}{3^42^32^2}$.

מצא $n$ כך שיתקיים שוויון בין הביטוי $243\cdot 2^n$ לבין הביטוי הנתון.

**4)** חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{2^3\cdot 2^7}{2^4\cdot 2^5}$ ב. $\frac{9^3\cdot 27^2}{3^9\cdot 81}$

ג. $\frac{10^9\cdot 25^5\cdot 8^{-1}}{40^3\cdot 125^5}$ ד. $2^3+2^5$

**5)** פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוק: $\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$.

א. $\left(a^2\right)^4$ ב. $\left(c^3\right)^{10}$ ג. $\left(x^3x^{10}\right)^2$

ד. $\frac{\left(b^2\right)^3}{b^2b^3}$ ה. $\frac{n^7n^8}{\left(n^3\right)^4}$ ו. $\frac{d^{20}\left(d^4\right)^2}{d^{12}\left(d^3\right)^2}$

ז. $\frac{2^5\left(2^4\right)^2 2^3}{\left(2^32^2\right)^3}$ ח. $\frac{3^6\left(3^33^2\right)^6}{3^{28}\left(3^2\right)^3}$ ט. $\frac{\left(8^3\right)^8 8^{11}}{\left(8^28\right)^3 8^8}$

י. $\frac{\left(2^4\right)^5\left(3^6\right)^7 2^{20}}{3^{35}2^{40}}$ יא. $\frac{\left(3^2\right)^6 5^{31}3^7}{\left(5^2\right)^{10} 5^{11}3^{18}}$ יב. $\frac{\left(3^2\right)^7 5^{10}\left(5^3\right)^2}{3^95^{16}}$

**6)** לפניך הביטויים הבאים: $\left(\left(3^2\right)^3\right)^4$ ו- $\left(\left(3^6\right)^n\right)^2$.
מצא $n$ כך שיתקיים שוויון בין שני הביטויים.

**7)** חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים:

א. $\frac{2^33^5}{2^{\,2}3^4}$ ב. $\frac{5^{20}3^{14}3^8}{3^{20}5^{12}5^8}$ ג. $\frac{7^{12}2^22^6}{2^57^{10}7}$

**8)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $3^29\cdot 81^2$ ב. $64^22^38^2$ ג. $125\cdot 25\cdot 5^5$

ד. $\frac{2^4\cdot 16^5}{8\cdot 512}$ ה. $\frac{\left(4^2\right)^3 16}{64\cdot 2^3}$ ו. $\frac{\left(\left(3^4\right)^4\right)^5}{81^327^43^5}$

**9)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\dfrac{\left(2a^2b\right)^3\cdot\left(ab^{-3}\right)^2}{4ab^{-2}\cdot\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^4}$

ב. $\dfrac{\left(k^2\right)^{m+2}\cdot k^{1-3m}}{\left(k^{2m}\right)^3\cdot\dfrac{1}{k^{7m-4}}}$

ג. $\dfrac{4^{b+3}}{4^{b+1}+4^{b+2}}$

ד. $\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{x^{n+3}+x^{n+5}}{x^{n+2}}$

**10)** פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $\left(ab\right)^n=a^nb^n$ ו- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$

א. $\left(a^2b\right)^3$

ב. $\left(m^4n^3\right)^5$

ג. $\left(x^{12}y^3\right)^3$

ד. $\left(\dfrac{a^3}{b^2}\right)^4$

ה. $\left(\dfrac{i^4}{k^3}\right)^7$

ו. $\left(\dfrac{a^{14}b^4}{a^6ab^3}\right)^3$

ז. $\left(\dfrac{x^3y^5y^2x^6}{y^4x^7}\right)^6$

ח. $\left(\dfrac{t^7r^{20}t^3}{r^2r^{12}t^8}\right)^2$

ט. $\left(\dfrac{\left(b^{12}c\right)^2c^{14}}{c\left(c^3b^5\right)^4b^3}\right)^2$

**11)** חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים:

א. $\left(\dfrac{3^92^62^2}{3^62^53^2}\right)^2$

ב. $\left(\dfrac{\left(5^4\right)^2\cdot3^6}{3^55^7}\right)^2$

ג. $\left(\dfrac{7^3\cdot16\cdot128\cdot49}{\left(2^27\right)^5}\right)^3$

**12)** בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה שלילית:

א. $\dfrac{1}{4^6}$

ב. $\dfrac{1}{5^3}$

ג. $\dfrac{1}{2^{10}}$

ד. $\dfrac{1}{8}$

ה. $\dfrac{1}{81}$

ו. $\dfrac{1}{125}$

**13)** בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה חיובית וחשב את ערכם:

א. $\dfrac{1}{4^{-3}}$

ב. $\dfrac{1}{3^{-2}}$

ג. $\dfrac{1}{5^{-3}}$

**14)** חשב את הביטויים הבאים:

א. $3^2\cdot 3^{-5}\cdot 3^7$

ב. $2^{-8}\cdot 512\cdot 2^2$

ג. $5^6\cdot 5^{-3}\cdot 5^{-2}$

ד. $2^{14}\cdot 3^{-6}\cdot 2^{16}\cdot 3^4\cdot 2^{-30}$

ה. $\frac{2^{-5}\cdot 5^3\cdot 2^{14}}{5^2\cdot 5^{-10}\cdot 5^8\cdot 2^6}$

ו. $\frac{3^{-6}\cdot 7^7\cdot 7^{-4}}{3^{-4}\cdot 3^{-3}\cdot 7^3}$

**15)** פשט את הביטויים הבאים לצורה ללא חזקות שליליות.

א. $\left(\frac{5^{-4}}{3^2}\right)^{-6}$

ב. $\frac{\left(4^4\right)^{-4}3^{-11}}{\left(3^{-2}4^3\right)^{-6}}$

ג. $\frac{2^{-3}5^4}{5^4\cdot 125\cdot\left(5^2 2\right)^{-3}\cdot 2^{-4}}$

**16)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{a^{n+2}\cdot a^{2-3n}}{\left(a^3\right)^{n+1}}$

ב. $\frac{\left(k^2\right)^{m+2}\cdot k^{1-3m}}{\left(k^{2m}\right)^3\cdot\frac{1}{k^{7m-4}}}$

ג. $\frac{\left(m^{n+2}\right)^3\cdot m^{-4n-2}}{\frac{1}{m^{6n+2}}\cdot\left(m^3\right)^{n-2}}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $a^8$ ב. $t^{15}$ ג. $b^{22}$ ד. $k^5$ ה. $n^5$ ו. $c^4$

ז. $a^7$ ח. $x^3$ ט. $1$ י. $3^9$ יא. $2^8$ יב. $5^5$.

**2)** א. $18$ ב. $ab$ ג. $x^6y^{10}$.

**3)** $n=16$.

**4)** א. $2$ ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{5}{8}$ ד. $40$.

**5)** א. $a^8$ ב. $c^{30}$ ג. $x^{26}$ ד. $b$ ה. $n^3$ ו. $d^{10}$

ז. $2$ ח. $9$ ט. $8^{18}$ י. $3^7$ יא. $3$ יב. $3^5$.

**6)** $n=2$.

**7)** א. $6$ ב. $9$ ג. $56$.

**8)** א. $3^{12}$ ב. $2^{21}$ ג. $5^{10}$ ד. $2^{12}$ ה. $2^7$ ו. $3^{51}$.

**9)** א. $\frac{2b^3}{a}$ ב. $k$ ג. $3\frac{1}{5}$ ד. $\frac{1}{x}+x$.

**10)** א. $a^6b^3$ ב. $m^{20}n^{15}$ ג. $x^{36}y^9$ ד. $\frac{a^{12}}{b^8}$ ה. $\frac{i^{28}}{k^{21}}$ ו. $a^{21}b^3$

ז. $x^{12}y^{18}$ ח. $t^4r^{12}$ ט. $b^2c^6$.

**11)** א. $576$ ב. $225$ ג. $8$

**12)** א. $4^{-6}$ ב. $5^{-3}$ ג. $2^{-10}$ ד. $2^{-3}$ ה. $3^{-4}$ ו. $5^{-3}$.

**13)** א. $64$ ב. $9$ ג. $125$.

**14)** א. $81$ ב. $8$ ג. $5$ ד. $\frac{1}{9}$ ה. $1000$ ו. $3$.

**15)** א. $5^{24}\cdot 3^{12}$ ב. $\frac{4^2}{3^{23}}$ ג. $5^3\cdot 2^4$.

**16)** א. $a^{1-5n}$ ב. $k$ ג. $m^{2n+12}$.

# חוקי השורשים:

## סיכום כללי:

### סיכום חוקי השורשים:

1. $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$
2. $\sqrt[m]{a}=a^{\frac{1}{m}}$
3. $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$
4. $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{a\cdot b}$
5. $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$
6. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$

## שאלות:

**17)** הבא את הביטויים הבאים לצורה: $\sqrt[n]{a^m}$ .

א. $3^{\frac{1}{4}}$ ב. $2^{\frac{3}{5}}$ ג. $6^{\frac{5}{6}}$

ד. $-12^{\frac{2}{7}}$ ה. $-(-4)^{\frac{1}{3}}$ ו. $-(-3)^{\frac{3}{4}}$

ז. $5^{-\frac{1}{4}}$ ח. $27^{-\frac{1}{3}}$ ט. $64^{-\frac{5}{6}}$

**18)** חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{49}$ ב. $-\sqrt{25}$ ג. $\sqrt[3]{8}$

ד. $-\sqrt[7]{128}$ ה. $\sqrt[3]{(-2)^6}$ ו. $\left(\sqrt[5]{1024}\right)^2$

ז. $\left(\sqrt[5]{-243}\right)^3$ ח. $\sqrt[4]{-16}$ ט. $\sqrt[4]{-25^2}$

י. $\sqrt[4]{(-25)^2}$

**19)** חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

א. $8^{\frac{2}{3}}$ ב. $32^{-\frac{3}{5}}$ ג. $128^{-\frac{2}{7}}$

ד. $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$ ה. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2.5}$ ו. $\left(\frac{64}{343}\right)^{-\frac{2}{3}}$

ז. $81^{\frac{3}{4}}\cdot 64^{-\frac{1}{3}}$ ח. $343^{-\frac{2}{3}}\cdot 100^{\frac{1}{2}}$ ט. $16^{\frac{1}{4}}\cdot 8^{-\frac{1}{3}}\cdot 4^{-\frac{1}{2}}$

**20)** חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$.

**21)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ ב. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$ ג. $\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}$

ד. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ ה. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$ ו. $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$

ז. $\frac{\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$ ח. $\frac{\sqrt[3]{500}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt[4]{25^2}\cdot\sqrt[3]{4}}$ ט. $\frac{\sqrt[3]{8^2}\sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{400}\sqrt{2}}$

**22)** הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים:

א. $3\sqrt{2}$ ב. $5\sqrt{3}$ ג. $\frac{\sqrt{36}}{2}$

ד. $2\sqrt[3]{3}$ ה. $x\sqrt{x}$

**23)** הכנס את כל המקדמים בביטויים הבאים לתוך השורש:

א. $2\sqrt{5}$ ב. $4\sqrt[3]{2}$ ג. $2\sqrt[5]{3}$

ד. $\frac{\sqrt{24}}{2}$ ה. $\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$ ו. $\frac{3\sqrt[4]{5000}}{10}$

ז. $-5\sqrt[3]{2}$ ח. $-5\sqrt[4]{2}$ ט. $-5\sqrt[5]{-2}$

**24)** הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר:

א. $\sqrt{12}$ ב. $\sqrt{48}$ ג. $\sqrt{63}$

ד. $\sqrt[3]{54}$ ה. $\sqrt{x^5}$

**25)** חלץ מן הביטויים הבאים את המקדם הגבוה ביותר ככל הניתן:

א. $\sqrt{40}$ ב. $\sqrt{50}$ ג. $\sqrt{320}$

ד. $\sqrt[3]{108}$ ה. $\sqrt[3]{56}$ ו. $\sqrt[5]{160}$

ז. $\sqrt[4]{162}$ ח. $\sqrt[5]{972}$ ט. $\sqrt[6]{192}$

**26)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{18}-\sqrt{8}$ ב. $\sqrt{7}+\sqrt{63}$ ג. $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{128}$

ד. $\sqrt[4]{405}-\sqrt[4]{80}$ ה. $\frac{20}{\sqrt{5}}$ ו. $\frac{\sqrt{8}}{2}$

ז. $\frac{16}{\sqrt{2}}$ ח. $\frac{6}{\sqrt{3}+\sqrt{12}}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[5]{160}-\sqrt[5]{5}}$

**27)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $3^{\frac{1}{4}}\cdot 9^{-2.5}\cdot 27^{\frac{3}{2}}$ ב. $2^{\frac{3}{4}}\cdot 16^{\frac{1}{2}}\cdot 64^{-3}$ ג. $125^{\frac{1}{6}}\cdot 5^{2}\cdot 5^{-\frac{2}{3}}$

ד. $\frac{27^{\frac{4}{3}}\cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}$ ה. $\frac{49^{\frac{2}{5}}\cdot 7^{-\frac{6}{5}}}{343^{\frac{1}{5}}}$ ו. $\frac{512^{\frac{1}{4}}\cdot 64^{-\frac{3}{4}}}{128^{-\frac{1}{8}}\cdot 2^{-2}}$

## תשובות סופיות:

**17)** א. $\sqrt[4]{3}$ ב. $\sqrt[5]{2^3}$ ג. $\sqrt[6]{6^5}$ ד. $-\sqrt[7]{12^2}$ ה. $-\sqrt[3]{-4}$ ו. $\phi$

ז. $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ ח. $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$ או $\frac{1}{3}$ ט. $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}}$ או $\frac{1}{2^5}$.

**18)** א. 7 ב. $-5$ ג. 2 ד. $-2$ ה. 4 ו. 16

ז. $-27$ ח. $\phi$ ט. $\phi$ י. 5.

**19)** א. 4 ב. $\frac{1}{8}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. 125 ה. $\frac{32}{243}$ ו. $\frac{49}{16}$

ז. $\frac{27}{4}$ ח. $\frac{10}{49}$ ט. $\frac{1}{2}$.

**20)** $\sqrt{2}$.

**21)** א. 4 ב. 9 ג. 20 ד. 6 ה. 3 ו. 2

ז. $\sqrt{2}$ ח. $\sqrt{5}$ ט. $\sqrt{2}$.

**22)** א. $\sqrt{18}$ ב. $\sqrt{75}$ ג. $\sqrt{9}$ ד. $\sqrt[3]{24}$ ה. $\sqrt{x^3}$.

**23)** א. $\sqrt{20}$ ב. $\sqrt[3]{128}$ ג. $\sqrt[5]{96}$ ד. $\sqrt{6}$ ה. $\sqrt[3]{3}$

ו. $\sqrt[4]{40\frac{1}{2}}$ ז. $\sqrt[3]{-250}$ ח. $-\sqrt[4]{1250}$ ט. $\sqrt[5]{5^5\cdot 2}$.

**24)** א. $2\sqrt{3}$ ב. $4\sqrt{3}$ ג. $3\sqrt{7}$ ד. $3\sqrt[3]{2}$ ה. $x^2\sqrt{x}$.

**25)** א. $2\sqrt{10}$ ב. $5\sqrt{2}$ ג. $8\sqrt{5}$ ד. $3\sqrt[3]{4}$ ה. $2\sqrt[3]{7}$ ו. $2\sqrt[5]{5}$

ז. $3\sqrt[4]{2}$ ח. $3\sqrt[5]{4}$ ט. $2\sqrt[6]{3}$.

**26)** א. $\sqrt{2}$ ב. $4\sqrt{7}$ ג. $6\sqrt[3]{2}$ ד. $\sqrt[4]{5}$ ה. $4\sqrt{5}$ ו. $\sqrt{2}$

ז. $8\sqrt{2}$ ח. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ או $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[5]{5}}$ או $2\sqrt[5]{5^4}$.

**27)** א. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ ב. $\frac{1}{\sqrt[4]{2^{61}}}$ ג. $\sqrt[6]{5^{11}}$ ד. 27 ה. $\frac{1}{7}$ ו. $\sqrt[8]{2^5}$.

# כתיבה מדעית של מספרים:

## שאלות:

**28)** בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. 15,000,000
ב. 1,500,000
ג. 150,000,000,000
ד. 23,400,000
ה. 0.0003
ו. 0.00000042
ז. 0.000000042
ח. 0.00000000042

**29)** בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. $(3,000,000)^2$
ב. $(2,000,000)^2$
ג. $(5,000)^3$
ד. $(50,000)^3$
ה. $(0.0002)^4$
ו. $(0.00004)^3$
ז. $(0.000005)^3$
ח. $(0.000000007)^3$

## תשובות סופיות:

**28)** א. $1.5\cdot10^{7}$ ב. $1.5\cdot10^{6}$ ג. $1.5\cdot10^{11}$ ד. $2.34\cdot10^{7}$ ה. $3\cdot10^{-4}$
ו. $4.2\cdot10^{-7}$ ז. $4.2\cdot10^{-8}$ ח. $4.2\cdot10^{-10}$.

**29)** א. $9\cdot10^{12}$ ב. $4\cdot10^{12}$ ג. $1.25\cdot10^{11}$ ד. $1.25\cdot10^{14}$ ה. $1.6\cdot10^{-15}$
ו. $6.4\cdot10^{-14}$ ז. $1.25\cdot10^{-16}$ ח. $3.43\cdot10^{-25}$.

# קורס ריענון במתמטיקה

## פרק 10 - משוואות ואי-שוויונים מעריכיים

### תוכן העניינים

1. משוואות מעריכיות יסודיות ..... 131
2. משוואות עם חיבור וחיסור איברים ..... 133
3. משוואות עם קבוע אוילר ..... 135
4. משוואות בהן המשתנה גם בבסיס ..... 136
5. מערכת משוואות מעריכיות ..... 137
6. אי שוויונים מעריכיים ..... 138
7. אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך ..... 139

# משוואות מעריכיות יסודיות:

## סיכום כללי:

- פתרון כללי של משוואת מעריכית מהצורה: $a^x = a^y$ הוא: $x = y$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = 1$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = 1 = a^0$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = b^x$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = b^x = 1$ ללא תלות בבסיסים.

## שאלות:

**1)** פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי החזקות היסודיים):

א. $2^x = 16$

ב. $5^x \cdot 25^{x+2} = 125$

ג. $10^{x-2} = 10000^{x+1}$

ד. $9^x \cdot 3^{x^2} = 81^{3x-4}$

ה. $\left(2^x \cdot 32\right)^3 = 8$

ו. $\left(5^{x^2}\right)^5 \cdot \frac{1}{5^5} = 625^{x-1}$

ז. $\frac{7^x}{343^3} = 1$

ח. $\left(25 \cdot 0.2^{2x}\right)^2 = \left(\frac{1}{125}\right)^{1-x}$

**2)** פתור את המשוואות הבאות (הבסיס הוא שבר):

א. $27 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{5x+2} = 8$

ב. $\left(\frac{3}{4}\right)^{2-x} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{9}{16}\right)^{7+x}$

ג. $25\left(\frac{7}{5}\right)^{x^2-2x} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{4-x} = 49$

**3)** פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי השורשים):

א. $\sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3}$

ב. $\sqrt{3^{x+7}} = 81$

ג. $\left(9\sqrt{27}\right)^{3x} \cdot 3^{2-x} = \frac{1}{9}$

ד. $\sqrt[x]{16} \cdot \left(\frac{1}{2^x}\right)^3 = \frac{1}{16}$

ה. $2^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2^x}} = 8\left(\sqrt{8}\right)^{-\sqrt{x}}$

ו. $5^x \frac{1}{25^5} = 125^{\sqrt{x}}$

**4)** פתור את המשוואות הבאות (מכפלת בסיסים שונים):

א. $2^x = 7^x$

ב. $3^x \cdot \frac{625}{\sqrt{25^x}} = 81$

ג. $2^{3x} \cdot 5^{3x} = 1000000$

ד. $2^{x+1} \cdot 3^{x-2} \cdot 7^x = 392$

ה. $243 \cdot 2^{x-1} \cdot 18^{x-9} = \frac{1}{3^{x-2}}$

ו. $108 \cdot \frac{1}{2^{1-2x}} = 72^x \cdot \sqrt{0.5}$

ז. $2^{2x+2} \cdot 5^{x+1} = \left(2\sqrt{5}\right)^{4-x}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $x=4$ ב. $x=-\frac{1}{3}$ ג. $x=-2$ ד. $x=2,8$ ה. $x=-4$

ו. $x=1,-\frac{1}{5}$ ז. $x=9$ ח. $x=1$ .

**2)** א. $x=-1$ ב. $x=-2$ ג. $x=3,-2$ .

**3)** א. $x=-\frac{1}{2}$ ב. $x=1$ ג. $x=-\frac{8}{19}$ ד. $x=2,-\frac{2}{3}$ ה. $x=4,9$ ו. $x=25$ .

**4)** א. $x=0$ ב. $x=4$ ג. $x=2$ ד. $x=2$ ה. $x=5$

ו. $x=1.5$ ז. $x=\frac{2}{3}$ .

# משוואות עם חיבור וחיסור איברים:

## סיכום כללי:

במשוואות הכוללות חיבור וחיסור של איברים, נאתר את הבסיס עם המעריך הקטן ביותר ונסמן אותו ב-$t$, למשל במשוואה: $4^x-3\cdot 2^x=4$ נסמן: $2^x=t$.

נבטא את כל איברים המשוואה באמצעות $t$ ונפתור אותה עבורו.
לאחר מכן נחזיר את ההצבה למציאת ערכי ה-$x$ המתאימים.

## שאלות:

**1)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם חיבור וחיסור ממעלה ראשונה):

א. $2^x+6\cdot 2^x=56$

ב. $8^x+3\cdot 8^x=256$

ג. $5\cdot 3^x-3^{x+1}=162$

ד. $2\cdot 6^x+6^{x+2}-6^{x-1}=227$

**2)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם חיבור וחיסור ממעלה ראשונה):

א. $81^{x+1}+18\cdot 3^{4x-3}=735$

ב. $5^{3x+2}+4\cdot 125^x=29$

ג. $\left(2^{3x+1}\right)^2-64^{x-\frac{1}{3}}=15$

ד. $\sqrt{10000^{x+1}}-\sqrt[4]{10^{8x+1}}=\sqrt[4]{1000}\cdot\left(\sqrt[4]{10^7}-1\right)$

ה. $6^{-x}-5\cdot 36^{-\left(\frac{x}{2}+1\right)}=186$

ו. $5^{-x}+25^{\frac{1}{2}-\frac{x}{2}}-5^{-x-1}=145$

ז. $2\cdot 10^{x+1}+10^{x+2}=3\cdot 5^{x+1}$

ח. $4^{x+2}-6\cdot 4^x=7\cdot 12^{x+1}+6\cdot 12^x$

**3)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחיסור ממעלה שנייה):

א. $9^x-36\cdot 3^x+243=0$

ב. $16^{x+1}-65\cdot 4^x+4=0$

ג. $6^x-4\cdot 6^{-x}+3=0$

ד. $4^{-x}-3\cdot 4^x+2=0$

ה. $\left(\frac{4}{9}\right)^x-\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1}=-\frac{2}{3}$

ו. $\left(2^{\frac{1}{3}x+2}\right)^2-5\cdot 2^{\frac{1}{3}x+1}+1=0$

**4)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות):

א. $\frac{20}{9^x+1}=3-\frac{8}{9^x-1}$

ב. $\frac{7^x}{7^x-4}+\frac{8}{7^x+5}=3$

**5)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות מסכמות):

א. $\frac{1}{25^{1-x}}-6\cdot 5^{x-1.5}+1=0$

ב. $3^x-\sqrt{16\cdot 3^{x+1}}=-9$

ג. $36^x-6^{x+1}\cdot 3^x+8\cdot 9^x=0$

ד. $4\cdot 9^x-10\cdot 6^x+6\cdot 4^x=0$

ה. $25\cdot 5^{2x}+16\cdot 15^x=9^{x+1}$

ו. $9^x+4^x-6^x=\frac{7}{6^{1-x}}$

ז. $\frac{8^{2x}-8}{7}=4^x-2$

ח. $2^{3x}-2^{2x+2}-2^x+4=0$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $x=3$ ב. $x=2$ ג. $x=4$ ד. $x=1$.

**2)** א. $x=\frac{1}{2}$ ב. $x=0$ ג. $x=\frac{1}{3}$ ד. $x=\frac{1}{4}$

ה. $x=-3$ ו. $x=-2$ ז. $x=-3$ ח. $x=-2$

**3)** א. $x=2,3$ ב. $x=1,-2$ ג. $x=0$ ד. $x=0$

ה. $x=0,1$ ו. $x=-6,-9$.

**4)** א. $x=1,-\frac{1}{2}$ ב. $x=1$.

**5)** א. $x=\frac{1}{2},1\frac{1}{2}$ ב. $x=1,3$ ג. $x=1,2$ ד. $x=1,0$

ה. $x=-2$ ו. $x=1,-1$ ז. $x=0,\frac{1}{2}$ ח. $x=0,2$.

# משוואות עם קבוע אוילר:

## סיכום כללי:

קבוע אוילר מסומן באות $e$ וערכו שווה (בערך) ל-2.71828.
למספר זה משמעויות רבות במתמטיקה ובמדעים ועל כן הוחלט לסמן אותו באות משלו ולשלב אותו במשוואות מתמטיות ועוד.

דרך הפתרון של משוואה שבה הבסיס הוא $e$ זהה לחלוטין לשל משוואה מעריכית רגילה כפי שנלמד בפרק זה.

## שאלות:

**1)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם קבוע אוילר):

א. $e^{3x}=e^{2x-1}$ ב. $e^{5x-1}=e\cdot e^{6x+1}$

ג. $e^{x-5}=\left(e^{1-x}\right)^3$ ד. $e^x\cdot\sqrt{e^{3x-1}}=\left(\frac{1}{e^x}\right)^{1-3x}$

**2)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחיסור):

א. $e^2\cdot e^x-e^{x+1}=e-1$ ב. $\sqrt[3]{e^{x+1}}\cdot e^2=e^x\sqrt{e}$

ג. $e^{2x}+e^x-2=0$ ד. $e^{1+x}+e^{1-x}=e^2+1$

**3)** פתור את המשוואות הבאות (המשתנה גם בבסיס):

א. $xe^x=\sqrt[4]{e}\cdot x$ ב. $e^{3x}=x\cdot e^{3x}$

ג. $xe^{x^2}=\frac{x}{\sqrt{e^x}}$ ד. $\sqrt[3]{e^{3x-1}}\cdot x=xe^x$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $x=-1$ ב. $x=-3$ ג. $x=2$ ד. $x=1\,,\ \frac{1}{6}$.

**2)** א. $x=-1$ ב. $x=\frac{11}{4}$ ג. $x=0$ ד. $x=1\,,\ -1$.

**3)** א. $x=0\,,\ \frac{1}{4}$ ב. $x=1$ ג. $x=0\,,\ -\frac{1}{2}$ ד. $x=0$.

# משוואות בהן המשתנה גם בבסיס:

## סיכום כללי:

במשוואות עם משתנה בבסיס יש לדרוש תנאי עבורו הבסיס חיובי.
יש לקחת את חיתוך תחומי ההגדרה (במידה וקיימים ביטויים עם שורשים או שברים) יחד עם תוצאת השוואת המעריכים.

**הערה:**

יש לבדוק את ערכי ה- $x$ עבורם הבסיס שווה ל-1 ולראות האם מתקבל פסוק אמת או פסוק שקר. בהתאם יש להוסיף או להוריד אותו מתחום המספרים המהווים את פתרון המשוואה.

## שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

**1)** $\left(\sqrt{3-x}\right)^{\sqrt{x}}=\left(\sqrt[3]{3-x}\right)^{x}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{3-x}}$.

**2)** $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2+x}=1$.

**3)** $\frac{|x-3|^{x^2-2}}{|x-3|^{x-1}}=|x-3|^{-1}$.

## תשובות סופיות:

**1)** $x=\frac{1}{4}\ ,\ 1\ ,\ 2$

**2)** אין פתרון.

**3)** $x=0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,4$

# מערכת משוואות מעריכיות:

## שאלות:

1) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} y=3^x \\ y=18-3^x \end{cases}$.

2) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 5^{2x}-5^y=5^x-25 \\ y-x=2 \end{cases}$.

3) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} \frac{1}{3^y-4}+\frac{3}{3^x-2}-\frac{1}{3^x+2}=3 \\ 4^y=\sqrt{256^x} \end{cases}$.

4) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 5^x+2^y=13 \\ 2\cdot 5^x-2^y=2 \end{cases}$.

5) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 2\cdot 3^x-3\cdot 2^y=42 \\ 3^{x+1}-2^{y+1}=73 \end{cases}$.

6) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 5^{2x+1}+8\cdot 10^x-2^{2y+4}=0 \\ \left(\sqrt{3}\right)^y=27^{\frac{x-1}{6}} \end{cases}$.

7) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 6\cdot 4^x-7\cdot 6^{y-1}+2\cdot 3^{x+y}=6^y \\ \sqrt[4]{5^x}\cdot\sqrt{\left(5\sqrt{5}\right)^y}=\sqrt[4]{125}\cdot 5^x \end{cases}$.

## תשובות סופיות:

1) $(2,9)$ 2) $(0,2)$ , $(2,4)$ 3) $(1,2)$ 4) $(1,3)$

5) $(3,2)$ 6) $(-1,-2)$ 7) $(1,2)$ , $(-1,0)$

# אי שוויונים מעריכיים:

## סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $a^x > a^y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

## שאלות:

פתור את אי השיוויונים הבאים:

1) $3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x}$

2) $\sqrt{2^x} \le 4^{x^2-1\frac{1}{4}}$

3) $e^{\sqrt{x}+1} > e^{2x}$

4) $\left(\frac{1}{7}\right)^{5x} \ge \left(\frac{1}{7}\right)^{1-3x}$

5) $25^x + 5 < 6 \cdot 5^x$

6) $e^{2x} - 2e^x + 1 \le 0$

**הערה:**

השאלות הבאות דורשות הכרות עם מושג הלוגריתם הטבעי (ln) וכן חוקי הלוגריתמים אשר ילמדו בהמשך.

7) $e^x > 3$

8) $e^{2x} - 5e^x + 4 > 0$

## תשובות סופיות:

1) $x < \frac{2}{3}$

2) $x \ge 1\frac{1}{4}$ או $x \le -1$

3) $0 \le x < 1$

4) $x \le \frac{1}{8}$

5) $0 < x < 1$

6) $x = 0$

7) $x > \ln 3$

8) $x > \ln 4$ או $x < 0$

# אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך:

## סיכום כללי:

דרך הפתרון של אי שוויון עם משתנה בבסיס ובמעריך:

- יש לדרוש בסיס חיובי ולחבר אי-שוויון בהתאם.
- יש לפתור את אי השוויון לפי השוואת מעריכים.
- יש למצוא את חיתוך הפתרונות.

נתון: $f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)}$ נדרוש: $f(x)>0$.

דרך הפתרון: אם: $f(x)>1$ אז: $g(x)>h(x)$.

אם: $0<f(x)<1$ אז: $g(x)<h(x)$.

לבסוף נמצא את חיתוך התחומים.

## שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

1) $x^{2x-1} > x^{x+2}$

2) $(x-2)^{2x-5} < (x-2)^{x+1}$

3) $x^{2x-6} < 1$

4) $x^{2x^2+2} < x^{5x}$

5) $(x^2-6x+13)^{x^2-2x} \geq (x^2-6x+13)^3$

6) $(x+1)^{|x|} < x^2+2x+1$

## תשובות סופיות:

1) $0<x<1\ ,\ x>3$.

2) $3<x<6$.

3) $1<x<3$.

4) $0<x<0.5\ ,\ 1<x<2$.

5) $x\leq -1\ ,\ x\geq 3$.

6) $0<x<2$.

# קורס ריענון במתמטיקה

## פרק 11 - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים

תוכן העניינים


1. הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות ..... 140
2. חוקי הלוגריתמים ..... 143
3. חישובים עם חזקה לוגריתמית ..... 147
4. מעבר בין בסיסים ..... 148
5. הלוגריתם הטבעי ..... 150
6. משוואות עם בסיסים שונים ..... 152
7. מערכת משוואות לוגריתמיות ..... 153
8. מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות ..... 154
9. אי-שוויונים לוגריתמים ..... 155

# הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות:

## סיכום כללי:

**הגדרה:**

הלוגריתם מוגדר באופן הבא: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ כאשר: $a \neq 1$ , $b > 0$ , $a$.

**הסבר:**

לוגריתם על בסיס $a$ של $b$ מוגדר בתור החזקה שיש להעלות את $a$ על מנת שיהיה שווה ל- $b$. ערך חזקה זו הוא $x$. ערך לוגריתם יכול להיות חיובי, שלילי או אפס. נחשב ערכי לוגריתמים ונפתור משוואות לוגריתמיות ע"י מעבר לפי ההגדרה למשוואה מעריכית מתאימה.

**כללים יסודיים בלוגריתמים:**

מהגדרת הלוגריתם נובע כי: $\log_a a = 1$ וכן: $\log_a 1 = 0$ לכל $a > 0$ , $a \neq 1$.

## שאלות:

**1)** חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמים הבאים:

א. $\log_2 32$ ב. $\log 1000$ ג. $\log_{25} 5$

ד. $\log_8 4$ ה. $\log_4 \frac{1}{16}$ ו. $\log_a a^4$

ז. $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$

**2)** פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (יסודי - שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\log_{36} 6 = x$ ב. $\log_2 x = 16$

ג. $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$ ד. $\log_x 64 = 3$

ה. $\log_x 25 = 2$ ו. $\log_x (3x+4) = 2$

**3)** פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (כללי - שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\log_6(4x-2)=1$

ב. $\log_4(4-x)=\frac{1}{2}$

ג. $\log_8(x^4-73)=1$

ד. $\log_3\frac{x+3}{3-3x}=-2$

ה. $\log_x(2x^2+x-12)=2$

ו. $\log_{\sqrt{x+1}}(2x^2-5)=2$

**4)** פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג מספר פעמים):

א. $\log_4(\log_3 x)=1$

ב. $3\log_{27}(\log_2(x+3))=1$

ג. $\log_{\frac{1}{16}}(\log_3(5x^2+1))=-\frac{1}{2}$

ד. $\log_6(3+\log_2(6+\log_4(x^2+15)))=1$

**5)** פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א. $\log_2(3^x+37)=6$

ב. $\log_3(3\cdot 2^x-303)=4$

ג. $\log_5(126\cdot 5^x-25)=2x+1$

ד. $3\log_2\left(3\cdot 4^{1+\frac{1}{3}x}-11\cdot 2^{\frac{x}{3}}+3\right)=12+2x$

**6)** פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הצבה):

א. $(\log_2 x)^4=10000$

ב. $2(\log_3 x)^2+\log_3 x=10$

ג. $\frac{3\cdot\log_{14}x+1}{(\log_{14}x)^2}=4$

ד. $\sqrt{\log_{\frac{1}{81}}x}+\sqrt{\log_{\frac{1}{81}}x+2}=2$

## תשובות סופיות:

1) א. 5 ב. 3 ג. $\frac{1}{2}$ ד. $\frac{2}{3}$ ה. -2
ו. 4 ז. -1.5

2) א. $x=\frac{1}{2}$ ב. $x=65,536$ ג. $x=27$ ד. $x=4$
ה. $x=5$ ו. $x=4$

3) א. $x=2$ ב. $x=2$ ג. $x=\pm 3$ ד. $x=-2$ ה. $x=3$ ו. $x=2$

4) א. $x=81$ ב. $x=5$ ג. $x=\pm 4$ ד. $x=\pm 1$

5) א. $x=3$ ב. $x=7$ ג. $x=-1,\ 2$ ד. $x=-6$

6) א. $x=1024,\ \frac{1}{1024}$ ב. $x=9,\ \frac{1}{9\sqrt{3}}$
ג. $x=14,\ \frac{1}{\sqrt[4]{14}}$ ד. $x=\frac{1}{3}$

# חוקי הלוגריתמים:

## סיכום כללי:

להלן 3 חוקי הלוגריתמים עבור בסיס $a>0\neq 1$ וארגומנטים $x$ ו- $y$ חיוביים:

- מכפלה לסכום: $\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$.
- מנה להפרש: $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$.
- מקדם למעריך: $\log_a b^n=n\log_a b$ (כאשר $b>0$ ו- $n$ מספר ממשי כלשהו).

## שאלות:

### שאלות חישוב כלליות:

**1)** חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

א. $\log_3 12+\log_3 2.25$

ב. $\log_{\frac{1}{5}} 40+\log_{\frac{1}{5}} 12.5+\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{4}$

ג. $\log_2 200-\log_2 100$

ד. $\log_3 60-\log_3 540$

ה. $\log_4 8+\log_4 12-\log_4 6$

ו. $\log_7 1.5-\log_7 147+\log_7 2$

ז. $3\log_5 2-\log_5 1.6$

ח. $\log_{\sqrt{4}} 6.4+2\log_{\sqrt{4}}\sqrt{10}$

ט. $\frac{1}{2}\left(\log_7\frac{7}{2}+\log_7 2\right)+\log_7 14-\frac{1}{3}\log_7 8$

י. $\frac{1}{4}\log 81-\log 1.5-\frac{1}{2}\log 40$

**2)** חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

א. $\frac{\log_5 16}{\log_5 8}$

ב. $\frac{\log_9 62.5+\log_9 2}{\log_9 0.2}$

ג. $\frac{\log_3 5-\log_3 2+\log_3 50}{\log_3 225-2}$

ד. $\frac{2-2\log_3 4+\log_3 8\frac{8}{9}}{4-\log_3 0.01-2\log_3 18}$

**משוואות לוגריתמיות:**

**3)** פתור את המשוואות הבאות (שימוש ישיר בחוקי הלוגריתמים):

א. $\log_2 x+\log_2(x-6)=4$

ב. $\log_3 x+\log_3(x+2)=1$

ג. $\log_2(x+30)-\log_2 x=4$

ד. $\log_5(x+146)-\log_5(x+2)=2$

ה. $2\log_3(2x-1)-\log_3(22x+9)=-1$

ו. $2\log_5(x-2)=\log_5(4x-15)+\log_5 x$

**4)** פתור את המשוואות הבאות (פתרון בשיטת לוג שווה לוג):

א. $\log_5(4x-3)=\log_5 7$.

ב. $2\log_2(2x-2)-\log_2(16-x)=\log_2(x-1)+1$.

**5)** פתור את המשוואות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א. $\log_3(3\cdot 5^x+39)=3+\log_3(5^x-3)$.

ב. $\log_2(3-4^{x+1})-\log_2 11=x$.

**6)** פתור את המשוואות הבאות (שימוש הפוך בחוקי הלוגריתמים):

א. $\log_4 x\cdot\log_4(16x)=8$.

ב. $\log_2\left(\frac{x}{4}\right)\cdot\log_2(1024x)=-11$.

ג. $\log_2 x^2\log_2\left(\frac{x}{16}\right)=-\log_2(64x)$.

ד. $(\log_4 4x)^2=\log_4 4x^2+1$.

ה. $\log_3(9x^2)\cdot\log_3(9x^3)=\log_3\left(\frac{81}{x}\right)+2$.

ו. $\frac{\log_2\left(\frac{x^3}{32}\right)}{(\log_2 x)^2}+\frac{\log_2(2x)}{\log_2 x}=1\frac{7}{9}$.

**שאלות הבעה:**

**7)** נתון: $\log_3 2 = a$. הבע באמצעות $a$ את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_3 16$ ב. $\log_3 6$

ג. $\log_3 24$ ד. $\log_3 1.5$

**8)** נתון: $\log_2 5 = b$ , $\log_2 3 = a$. הבע באמצעות $a$ ו- $b$ את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_2 45$ ב. $\log_2 60$ ג. $\log_2 \sqrt{7.5}$

**9)** נתון: $\log_{18} 2 + \log_{18} 3 = a$.

הבע באמצעות $a$ את $\log_{18} 27$ ואת $\log_{18} 16$.

**שאלות נוספות:**

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

**10)** $\log 4 \log 40 + \log 5 \log 16 = \log 64$.

**11)** $2\log^2 2 + \log 25 \cdot \log 20 = 2$.

**12)** $\log_{12} 16 \cdot \log_{12} 4 + \log_{12} 9 \cdot \log_{12} 48 = 2$

**13)** $\log_5 10 \cdot \log_5 75 - \log_5 3 \cdot \log_5 2 - \log_5 3 - \log_5 4 = 2$.

## תשובות סופיות:

1) א. 3 ב. -3 ג. 1 ד. -2 ה. 2
ו. -2 ז. 1 ח. 6 ט. 1.5 י. -0.5.

2) א. $\frac{4}{3}$ ב. -3 ג. 1.5 ד. 0.5.

3) א. $x=8$ ב. $x=3,\frac{1}{27}$ ג. $x=2$ ד. $x=4$ ה. $x=3$ ו. $x=4$.

4) א. $x=2.5$ ב. $x=6$.

5) א. $x=1$ ב. $x=-2$.

6) א. $x=16,\frac{1}{256}$ ב. $x=2,\frac{1}{512}$ ג. $x=4,\ 2\sqrt{2}$ ד. $x=4,\frac{1}{4}$
ה. $x=\frac{1}{9},\sqrt[6]{3}$ ו. $x=8,\ \sqrt[7]{2^{15}}$.

7) א. $4a$ ב. $a+1$ ג. $3a+1$ ד. $1-a$.

8) א. $2a+b$ ב. $2+a+b$ ג. $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}$.

9) $4(2a-1)\ ,\ 3(1-a)$.

10) הוכחה.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

13) הוכחה.

# חישובים עם חזקה לוגריתמית:

## סיכום כללי:

מהגדרת הלוגריתם ניתן לנסח את הקשר הבא: $a^{\log_a x}=x$ כאשר $a>0\neq 1$.

## שאלות:

**1)** חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א. $6^{\log_6 8}$ ב. $4^{\log_2 5}$

**2)** נתונה התבנית: $3\cdot 4^x$. חשב את ערכה עבור:

א. $x=\log_4 7$ ב. $x=\log_4\sqrt{3}$

ג. $x=2\log_4 0.1$ ד. $x=\sqrt{\log_2 5}$

**3)** נתונה התבנית: $\frac{1}{6}\cdot 9^x-2\cdot 3^x+1$. חשב את ערכה עבור:

א. $x=-1$ ב. $x=\log_3 5$

ג. $x=\log_3\sqrt{6}$

**4)** חשב:

א. $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_{\sqrt{36}}81}$ ב. $\sqrt[3]{2^{3-\log_{\sqrt{8}}5}}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. 8 ב. 25.

**2)** א. 21 ב. $3\sqrt{3}$ ג. 0.03 ד. 15.

**3)** א. $\frac{19}{54}$ ב. $-4\frac{5}{6}$ ג. $2-2\sqrt{6}$.

**4)** א. $\frac{1}{81}$ ב. $\frac{2}{\sqrt[9]{25}}$.

# מעבר בין בסיסים:

## סיכום כללי:

מעבר מבסיס $a$ לבסיס $m$ (כאשר: $a>0\ \neq 1$ ו-$m>0\neq 1$, וכן: $b>0$)
יתבצע באופן הבא: $\log_a b=\frac{\log_m b}{\log_m a}$.

## שאלות:

### שאלות חישוב כלליות:

**1)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_4 7\cdot\log_7 4$

ב. $\log_{0.1} 3\cdot\log_9 1000$

ג. $\log_{\sqrt{3}} 5\cdot\log_{\sqrt{125}} 9$

ד. $\log_4 169\cdot\log_{25} 64\cdot\log_{13} 625$

**2)** הוכח את השוויונים הבאים:

א. $\log_2 25\cdot\log_5 3\cdot\log_9 2=1$.

ב. $\log_{16} 9\cdot\log_5 4\cdot\log_3 5=1$

### משוואות לוגריתמיות:

**3)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $\log_2 x+\log_{32} x=6$

ב. $\log_3 x\cdot\log_{27} x=3$

ג. $\log_2 4x\cdot\log_8\frac{x}{16}=-\frac{5}{3}$

ד. $\log_x 5-6\log_{125} x=1$

### שאלות הבעה:

**4)** נתון: $\log_4 6=a$. הבע באמצעות $a$ את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_2 3$

ב. $\log_{32} 36$

ג. $\log_{216} 96$.

**5)** נתון: $\log_3 5=b$ , $\log_2 3=a$. הבע באמצעות $a$ ו- $b$ את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_3 50$

ב. $\log_2\sqrt{30}$

ג. $\log_5 22.5$

**6)** נתון $\log 9 = 2b$ , $\log_3 7 = a$ . הבע באמצעות $a$ ו- $b$ את:

א. $\log 21$.

ב. $\log_3\left(\frac{10}{7}\right)$.

ג. $\log_7 10$.

ד. $\log_{30} 63$.

**שאלות נוספות:**

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

**7)** $\log_6 9 \cdot \log_{15} 30 + \log_6 5 \cdot \log_{15} 4 = 2$.

**8)** $\log\sqrt{3} \cdot \log_6 50 + \log\sqrt{2} \cdot \log_6 300 = 1$.

## תשובות סופיות:

**1)** א. 1 ב. -1.5 ג. $2\frac{2}{3}$ ד. 12.

**2)** א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

**3)** א. $x = 32$ ב. $x = 27, \frac{1}{27}$ ג. $x = 8, \frac{1}{2}$ ד. $x = \frac{1}{5}, \sqrt{5}$.

**4)** א. $2a - 1$ ב. $0.8a$ ג. $\frac{a+2}{3a}$.

**5)** א. $2b + \frac{1}{a}$ ב. $\frac{a}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{1}{2}$ ג. $\frac{2}{b} + 1 - \frac{1}{ab}$.

**6)** א. $b + ab$ ב. $\frac{1}{b} - a$ ג. $\frac{1}{ab}$ ד. $\frac{ab+2b}{b+1}$.

**7)** הוכחה.

**8)** הוכחה.

# הלוגריתם הטבעי:

## סיכום כללי:

לוגריתם על בסיס $e$ (קבוע אוילר) מסומן: $\log_e \Rightarrow \ln$ והוא נקרא הלוגריתם הטבעי.

למשל: $\ln 3 = \log_e 3$ או $\ln\frac{1}{4} = \log_e \frac{1}{4}$. לוג זה נקרא בשם לן.

מהגדרת הלוגריתם מתקיים: $\ln a = b \to e^b = a$ כאשר $a > 0$ ו- $b$ מספרים כלשהם.

## שאלות:

**1)** חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הטבעיים הבאים:

א. $\ln e^2$ ב. $\ln\frac{1}{e^4}$ ג. $\ln\frac{1}{e\sqrt{e}}$

**2)** פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\ln x = 2$ ב. $\ln x = -\frac{1}{2}$

**3)** פתור את המשוואות הבאות (הצבה וחוקי הלוגריתמים):

א. $\ln\left(e^{2x} - \frac{1}{2}\right) + \ln 2 = x$

ב. $3\ln^2 x + \ln x = 2$

ג. $\ln\left(e^2 x^3\right) \cdot \ln\frac{1}{x} = \ln\left(ex^2\right)$

**4)** פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הוצאת לוג משני אגפי המשוואה)

א. $x^{\ln x} = e^6 x$ ב. $\left(\frac{1}{x}\right)^{2-3\ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x}$

**5)** חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א. $e^{\ln 3}$ ב. $e^{2\ln 3}$

## תשובות סופיות:

1) א. 2 ב. -4 ג. -1.5.

2) א. $x=e^2$ ב. $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

3) א. $x=0$ ב. $x=\sqrt[3]{e^2},\frac{1}{e}$ ג. $x=\frac{1}{\sqrt[3]{e}},\frac{1}{e}$.

4) א. $x=e^3,\frac{1}{e^2}$ ב. $x=\sqrt{e},e$.

5) א. 3 ב. 9.

# משוואות עם בסיסים שונים:

## סיכום כללי:

לעיתים תתקבל משוואה מעריכית שבה לא ניתן למצוא חזקה שלמה, כגון: $3^x = 4$.
במקרים אלו נעזר בהגדרת הלוג כדי לבטא את ערך המעריך: $x = \log_3 4$.

את ערך הביטוי $\log_3 4$ ניתן לחשב ע"י מחשבון או ע"י מעבר לבסיס 10: $\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3}$.

## שאלות:

**1)** פתור את המשוואות הבאות (בסיסים שונים):

א. $3^x = 6$ ב. $2^x - 9 = 0$

ג. $49^x - 8 \cdot 7^x + 15 = 0$ ד. $2 \cdot 3^{\frac{2x}{3}} + 5 \cdot 3^{\frac{x}{3}} + 2 = 0$

**2)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם בסיס ולוגריתם טבעי):

א. $e^{3x} = 3$ ב. $4 + 3e^x = 9$

ג. $3e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$ ד. $e\left(e^x + 1\right) = 2\sqrt{e^{x+2}} + 9e$

**3)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם פתרונות לא שלמים):

א. $\log_2\left(7 - 5^x\right) = \log_2 \frac{10}{5^x}$ ב. $\log_2\left(4e^{2x} + 6\right) - 1 = \log_2\left(7e^x\right)$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $x = \log_3 6 = 1.63$ ב. $x = \log_2 9 = 3.17$

ג. $x = \log_7 3 = 0.564$ , $x = \log_7 5 = 0.827$ ד. אין פתרון.

**2)** א. $x = \frac{1}{3}\ln 3 = 0.36$ ב. $x = \ln\frac{5}{3} = 0.51$ ג. $x = 0$ , $x = -\ln 3 = -1.09$

ד. $x = \ln 16 = 2.7725$.

**3)** א. $x = 1$ , $x = \log_5 2 = 0.43$ ב. $x_1 = \ln\frac{1}{2} = -0.693$ , $x = \ln 3 = 1.098$

# מערכת משוואות לוגריתמיות:

## שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

1) $\begin{cases} y=\log_2 x \\ y=6-\log_2 x \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_6^2 x-\log_6(2y-2)=2 \\ \frac{1}{2}x=y-1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_3(x+y)=\log_3(4x+y)-2 \\ \log_5(5x+3y)=2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_2(\log_3(x-y))=1 \\ \log_5(x+y-11)=\log_{25}x+\frac{1}{2}\log_5(y+2) \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_5 x+6\log_4 y=11 \\ 10\log_5 x-2\log_4 y=17 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \log_2 x^2+\log_3\frac{1}{y}=9 \\ \log_2\sqrt{x}+\log_{\sqrt[3]{3}} y=-1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \log_5 x+2^{\log_2 y}=6 \\ x^y=5^8 \end{cases}$

8) $\begin{cases} xy=27 \\ x^{\log_3 y}=9 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2^{\log_{\frac{1}{2}}(2x-y)}=7^{\log_7\frac{2x+y}{15}} \\ \log_3 x+\log_3 y=\frac{1}{\log_{28}3} \end{cases}$

## תשובות סופיות:

1) $(8,3)$

2) $(36,19),\left(\frac{1}{6},1\frac{1}{12}\right)$

3) $(8,-5)$

4) $(16,7)$

5) $(25,8)$

6) $\left(16,\frac{1}{3}\right)$

7) $(25,4),(625,2)$

8) $(3,9),(9,3)$

9) $(4,7)$

# מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות:

## שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

1) $\begin{cases} y=\log_2\left(4^x-2\right) \\ y=2x-1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 25^y=\left(5\sqrt{5}\right)^{x+1} \\ \log_5\sqrt{x}+\log_5\sqrt{y}=\log_5 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3y+5\log_6 x=1 \\ 216\cdot x^{2-y}=6^{1-4y} \end{cases}$

4) $\begin{cases} x\cdot\log_2 3=\dfrac{y}{\log_9 2} \\ \log_3\left(9^x+27\right)=2y+\log_3 12 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \left(2^x-1\right)^2-4y+3=0 \\ x=\log_2\left(y+1\right) \end{cases}$

6) $\begin{cases} x=\log_4\left(5-9^y\right) \\ \log_2\left(2^x+3\right)=\log_4\left(29-\left(3^y-3\right)^2\right) \end{cases}$

## תשובות סופיות:

1) $(1,1)$

2) $(3,3)$

3) $(36,-3),\left(6,-1\frac{1}{3}\right)$

4) $\left(1,\frac{1}{2}\right),(2,1)$

5) $(1,1),(2,3)$

6) $(1,0)$

# אי-שוויונים לוגריתמים:

## סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $\log_a x > \log_a y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

## שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $\log_2 x < \log_2 (5x - 20)$

2) $\log_6 (x^2 - 5x) < 1$

3) $\log_3 x > \log_9 (15 - 2x)$

4) $\log_{\frac{1}{2}} (1 - 3x) \geq \log_{\frac{1}{2}} (7 - x)$

5) $\ln x \geq \ln (x^2 - 12)$

6) $\ln x < 3$

7) $\ln^2 x - 6 \ln x < 7$

8) $\frac{6}{\ln^2 x} \geq 2 - \frac{1}{\ln x}$

## תשובות סופיות:

1) $x > 5$

2) $-1 < x < 0 \ , \ 5 < x < 6$

3) $3 < x < 7\frac{1}{2}$

4) $-3 \leq x \leq \frac{1}{3}$

5) $2\sqrt{3} < x \leq 4$

6) $0 < x < e^3$

7) $\frac{1}{e} < x < e^7$

8) $\frac{1}{\sqrt{e^3}} \leq x \leq e^2$ וגם $x \neq 1$

# קורס ריענון במתמטיקה

## פרק 12 - סדרות

### תוכן העניינים


1. הקדמה כללית ..... (ללא ספר)
2. סדרה חשבונית ..... 156
3. סדרה הנדסית ..... 163
4. סדרות מעורבות ..... 168
5. סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת ..... 170
6. סדרת נסיגה ..... 176

# סדרה חשבונית:

## סיכום כללי:

- **נוסחת האיבר הכללי:**

נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית המתחילה באיבר $a_1$ והפרשה הוא $d$

נתונה ע"י: $a_n = a_1 + d(n-1)$, כאשר: $n$ הוא מיקום האיבר שערכו $a_n$ בסדרה.

- **כלל נסיגה של סדרה חשבונית:**

כלל נסיגה של סדרה חשבונית $a_n$ שהפרשה הוא $d$ ואיברה הראשון הוא $a_1$

נתון ע"י: $a_{n+1} - a_n = d$.

- **נוסחת הסכום של סדרה חשבונית:**

סכום $n$ האיברים הראשונים של סדרה חשבונית $a_n$ שהפרשה הוא $d$ ואיברה הראשון הוא $a_1$ נתון ע"י: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$.

בהצבת נוסחת האיבר הכללי מקבלים: $S_n = \frac{n(2a_1 + d(n-1))}{2}$.

## שאלות:

**1)** נתונה הסדרה החשבונית: $17, 11, 5, -1, -7...$.
מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 43 איברים.

**2)** בסדרה חשבונית האיבר השישי הוא 15 והאיבר העשירי הוא 31.
מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהו הפרש הסדרה.

**3)** מצא כמה איברים יש בסדרה החשבונית: $2, 4.5, 7, 9.5, 12, 14.5, ..., 49.5$.

4) בסדרה חשבונית סכום האיברים השני, החמישי והשמיני הוא 87 וההפרש בין האיבר השנים-עשר לאיבר השישי הוא 24.
מצא כמה איברים בסדרה אם ידוע שהאיבר האחרון בה הוא 201.

5) תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 3 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 46 קפיצות?

6) כמה מספרים תלת ספרתיים שמתחלקים ב-6 יש בין 201 ל-550?

7) כמה איברים חיוביים ישנם בסדרה החשבונית: $91, 88, 85, 82, \ldots$.

8) מצא את ערכו של $x$ אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית: $x-3, 3x-4, x^2-1$.

9) נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 3 \\ a_1 = 5 \end{cases}$.
הוכח שהסדרה חשבונית ומצא מהו האיבר התשעה-עשר שלה.

10) בסדרה חשבונית $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ידוע כי סכום ארבעת האיברים הראשונים וסכום האיברים ה-6 עד ה-9 הם מספרים נגדיים.

א. הוכח: $a_5 = 0$.

ב. נתון: $a_3 - a_{11} = 24$. מצא את $a_1$ ואת $d$.

ג. מגדירים סדרה חשבונית חדשה $b_n$ המקיימת: $b_n = 2a_n - 3$.
מצא את ערך האיבר השלילי הראשון בסדרה ואת מיקומו הסידורי.

11) מצא את סכום ארבעה-עשר האיברים הראשונים בסדרה החשבונית: $-3, 2, 7, 12, \ldots$.

**12)** נתונה הסדרה החשבונית: $-13, -7, -1, 5, \ldots$.
כמה איברים יש לחבר בסדרה (החל מהראשון) כדי להגיע לסכום של 987?

**13)** תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגה של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 11 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 2 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 416 קפיצות?

**14)** נתונה הסדרה החשבונית: $-71, -67, -63, \ldots$.
כמה איברים לכל הפחות יש לחבר בסדרה כדי שהסכום המתקבל יהיה חיובי?

**15)** נתונה הסדרה החשבונית: $4, 13, 22, 31, \ldots$.
בסדרה יש 36 איברים. חשב את סכום ארבעה-עשר האיברים האחרונים בסדרה.

**16)** נתונה הסדרה החשבונית: $4, 9, 14, 19, \ldots, 599$.
מחקו כל איבר שלישי בסדרה. מצא את סכום האיברים שנותרו.

**17)** סכום $n$ האיברים האחרונים בסדרה חשבונית בת $3n$ איברים גדול ב- 1024 מסכום $n$ האיברים הראשונים שבה.

א. בטא את $n$ באמצעות הפרש הסדרה, $d$.

ב. נתון כי הפרש הסדרה הוא 8. כמה איברים בסדרה?

**18)** נתונה סדרה שבה $S_n = 2n^2 + 4n$.

א. מצא את ערכם של שלושת האיברים הראשונים בסדרה.

ב. הוכח כי הסדרה חשבונית ומצא את הפרשה.

**19)** בסדרה חשבונית ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות ה-5 , ה-7 וה- 16 הוא אפס. כמו כן ידוע כי סכום שלושת האיברים הראשונים הוא 132.

א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת הפרש הסדרה.

ב. מצא את האיבר השלילי הראשון בסדרה.

ג. מצא כמה איברים יש לחבר (החל מהאיבר הראשון) כדי לקבל סכום 210.

**20)** נתונים שני טורים חשבוניים: $\begin{cases} 150, 144, 138, \ldots \\ 90, 93, 96, \ldots \end{cases}$.

לשני הטורים אותו מספר איברים. ידוע כי סכום האיברים האחרונים של שני הטורים (האיבר האחרון מהטור הראשון והאיבר אחרון מהטור השני) הוא אפס.

א. מצא את מספר האיברים שבכל טור.

ב. מחברים את $n$ האיברים הראשונים מהטור הראשון יחד עם $n$ האיברים הראשונים מהטור השני. ידוע כי חיבור הסכומים הוא 3480.
מצא את $n$ אם ידוע שהוא קטן מ-20.

**21)** נתונות שתי סדרות החשבוניות הבאות: $a_n$ שהפרשה הוא $d_1$ ו- $b_n$ שהפרשה הוא $d_2$. ידוע כי: $d_1 = -2d_2$.
סכום 50 האיברים הראשונים של שתי הסדרות שווה והאיבר העומד במקום ה-20 בסדרה $a_n$ גדול ב-1 מהאיבר העומד במקום ה-37 בסדרה $b_n$.

א. מצא את הפרש הסדרה $a_n$ - $d_1$.

ב. ידוע כי האיבר $a_{10}$ קטן ב-1 מ-5 פעמים האיבר $b_{50}$.
מצא את $a_1$ ואת $b_1$.

**22)** נתונה הסדרה החשבונית: $-21, -17, -13, \ldots$.
בסדרה יש 18 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

**23)** בסדרה חשבונית שהפרשה $d$ ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות האי-זוגיים הוא 552 וסכום האיברים במקומות הזוגיים הוא 612.
הוכח כי $nd = 60$.

**24)** בסדרה חשבונית עולה, שכל איבריה חיוביים ובה מספר אי-זוגי של איברים, גדול סכום כל איברי הסדרה פי $1\frac{14}{15}$ מסכום איברי הסדרה הנמצאים במקומות האי-זוגיים. כמה איברים יש בסדרה?

**25)** לפניך שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית: $x-5$ , $x-16$ , $2x+23$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את $x$.

ii. מצא את הפרש הסדרה.

ב. ידוע כי: $a_{12}=0$. מצא את $a_1$.

ג. האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n=308$.

מצא את סכום כל האיברים החיוביים העומדים במקומות האי-זוגיים.

**26)** בסדרה חשבונית שבה מספר זוגי של איברים נתון כי סכום ריבועי האיברים העומדים במקומות ה-4 וה-5 שווה לריבוע האיבר העומד במקום ה-6.
האיבר הראשון אינו אפס.

א. הוכח את הטענות הבאות:

i. $a_1=-4d$.

ii. $S_9=0$.

ב. האיבר העומד במקום ה-6 גדול ב-2 מהאיבר העומד במקום ה-5.
מצא את $a_1$ ואת $d$.

ג. מצא את מספר איברי הסדרה אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים הוא 504.

**27)** בסדרה חשבונית שבה $2n$ איברים ידוע כי סכום כל האיברים גדול ב-66 מפעמיים סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

א. הוכח כי $nd=66$.

ב. ידוע כי הפרש הסדרה הוא 3. הבע באמצעות $a_1$ את סכום $n$ האיברים הראשונים.

ג. סכום $n$ האיברים הראשונים הוא 187. מצא את האיבר החיובי הקטן ביותר בסדרה ואת מיקומו הסידורי בסדרה.

**28)** אדם המעוניין לקנות רכב קיבל שתי הצעות מחיר.
ההצעה הראשונה:
לשלם בתשלום הראשון 1000 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הגדול ב-500 ₪ מהתשלום הקודם.
ההצעה השנייה:
לשלם בתשלום הראשון 7200 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הקטן ב-450 ₪ מהתשלום הקודם.
ידוע כי מספר התשלומים בהצעה השנייה קטן ב-4 ממספר התשלומים שבהצעה הראשונה.

א. כמה תשלומים יצטרך לשלם לפי כל הצעה.

ב. מה מחיר הרכב?

## תשובות סופיות:

1) $a_{43}=-235$.

2) $d=4\,,\,a_1=-5$.

3) 20 איברים.

4) 48 איברים.

5) 15 קפיצות.

6) 58 מספרים.

7) 31 איברים חיוביים.

8) $x=4\,,\,x=1$.

9) $a_{19}=59$.

10) א. הוכחה. ב. $a_1=12\,,\,d=-3$ ג. $b_5=-3$.

11) $S_{14}=413$.

12) 21 איברים.

13) 16 דקות.

14) 37 איברים.

15) 3647.

16) 23920.

17) א. $n=\sqrt{\frac{512}{d}}$ ב. 24 איברים.

18) א. $a_1=6\,,\,a_2=10\,,\,a_3=14$ ב. $d=4$.

19) א. $a_1=50\,,\,d=-6$ ב. $a_{10}=-4$ ג. $n=6$.

20) א. $n=81$ ב. $n=16$.

21) א. $d_1=4$ ב. $a_1=-52\,,\,b_1=95$.

22) אי-זוגיים: $S=99$ זוגיים: $S=135$.

23) שאלת הוכחה.

24) 29 איברים.

25) א. i. $x=-50$ ii. $d=11$ א. ב. $a_1=-121$ ג. $S=2156$.

26) א. הוכחה. ב. $a_1=-8\,,\,d=2$ ג. $n=36$.

27) א. הוכחה. ב. $S=22a_1+693$ ג. $a_9=1$.

28) א. 12 לפי ההצעה הראשונה ו-8 לפי ההצעה השנייה. ב. 45000 ₪.

# סדרה הנדסית:

## סיכום כללי:

- **נוסחת האיבר הכללי:**

נוסחת האיבר הכללי של סדרה הנדסית המתחילה באיבר $a_1$ ומנתה היא $q$
נתונה ע"י הנוסחה: $a_n = a_1 q^{n-1}$, כאשר: $n$ הוא מיקום האיבר שערכו $a_n$ בסדרה.

- **כלל נסיגה של סדרה הנדסית:**

כלל נסיגה של סדרה הנדסית $a_n$ שמנתה היא $q$ ואיברה הראשון הוא $a_1$
נתון ע"י הקשר הבא: $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

- **נוסחת הסכום של סדרה הנדסית:**

סכום $n$ האיברים הראשונים של סדרה הנדסית $a_n$ שמנתה היא $q$ ואיברה הראשון הוא $a_1$ נתון ע"י: $S_n = \frac{a_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}$.

## שאלות:

**1)** נתונה הסדרה ההנדסית: $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, \ldots$.
מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 9 איברים.

**2)** מצא כמה איברים יש בסדרה ההנדסית: $\frac{9}{64}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{64}{81}$.

**3)** בסדרה הנדסית האיבר השישי הוא 8 והאיבר העשירי הוא 128.
מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

**4)** בסדרה הנדסית ההפרש בין האיבר השביעי לאיבר החמישי הוא 432 וההפרש בין האיבר החמישי לשלישי הוא 48. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

**5)** בסדרה הנדסית עולה ההפרש בין האיבר השמיני לאיבר הרביעי הוא 3120 וסכום האיברים השני והרביעי הוא 5.2.
מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

**6)** תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 3 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 324 קפיצות?

**7)** מצא את ערכו של $x$ אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה הנדסית: $x-6,\ x+4,\ 4x+1$. מצא גם את מנת הסדרה.

**8)** נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1}=2a_n \\ a_1=3 \end{cases}$.
הוכח שהסדרה הנדסית ומצא מהו האיבר השמיני בה.

**9)** מצא את סכום תשעת האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית: $5, 10, 20, 40, \ldots$.

**10)** תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגה של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 2 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 5 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 1562 קפיצות?

**11)** סכום $n$ האיברים האחרונים בסדרה הנדסית בת $3n$ איברים שמנתה 2, גדול פי 256 מסכום $n$ האיברים הראשונים בה. כמה איברים בסדרה?

**12)** בסדרה הנדסית עולה שבה $n$ איברים, סכום $n-3$ האיברים האחרונים גדול פי 8 מסכום $n-3$ האיברים הראשונים בה. מצא את מנת הסדרה.

**13)** סכום כל האיברים בסדרה הנדסית הוא 252. האיבר האחרון בסדרה גדול ב- 120 מהאיבר השני בה. מצא כמה איברים יש בסדרה אם ידוע שמנתה 2.

**14)** המספרים: $x-13\ ,\ x-9\ ,\ 2x-3$ הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית עולה שכל איבריה חיוביים.

א. מצא את $x$.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. כתוב את נוסחת האיבר הכללי בסדרה זו.

ii. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 18750.

ג. ידוע כי האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n = 5^{11}$.
מצא את סכום 7 האיברים האחרונים בסדרה.

**15)** נתונה הסדרה ההנדסית הבאה: $4\ ,\ 12\ ,\ 36\ ,\ldots,\ a_{n+1}$. מוסיפים לכל איבר בסדרה זו שישית מהאיבר הבא אחריו ויוצרים סדרה חדשה $b_n$ באופן הבא:

$$b_1 = a_1 + \frac{a_2}{6}\ ,\ b_2 = a_2 + \frac{a_3}{6}\ ,\ b_3 = a_3 + \frac{a_4}{6}\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ b_n = a_n + \frac{a_{n+1}}{6}.$$

א. הוכח כי הסדרה $b_n$ היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.

ב. הראה כי היחס בין סכום $n$ האיברים הראשונים של הסדרה $a_n$ ובין סכום $n$ האיברים הראשונים של הסדרה $b_n$ הוא $\frac{2}{3}$.

ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה $b_n$ שסכומם מהווה $\frac{2}{9}$ מ- $a_8$.

**16)** נתונה הסדרה ההנדסית: $7, 14, 28, \ldots$.
בסדרה יש 8 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

**17)** בסדרה הנדסית ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות הזוגיים גדול פי 4 מסכום האיברים במקומות האי-זוגיים. חשב את מנת הסדרה.

**18)** נתונה סדרה הנדסית שמנתה $q$ ובה מספר זוגי של איברים.
בטא באמצעות $q$ את היחס בין סכום איברי הסדרה כולה לסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים שבה.

**19)** בסדרה הנדסית שבה $2n+1$ איברים, סכום $n$ האיברים הראשונים קטן פי 9 מסכום $n$ האיברים הבאים אחריהם. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-30 מהאיבר הראשון שבה. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

**20)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. הראה כי בסדרה הנדסית שבה $2n$ איברים היחס בין סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים לבין סכום כל איברי הסדרה תלוי במנת בסדרה.

בסדרה הנדסית שבה מספר זוגי של איברים ידוע כי סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים קטן פי 4 מסכום כל איברי הסדרה. האיבר הראשון בסדרה זו קטן ב-2 ממנת הסדרה.

ב. כתוב נוסחה לאיבר כללי של סדרה זו.

ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 324.

**21)** בסדרה הנדסית שבה 12 איברים סכום כל איברי הסדרה גדול פי 3 מסכום האיברים כאשר מחליפים את סימני כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

א. מצא את מנת הסדרה.

ב. ידוע כי ההפרש בין האיבר החמישי לאיבר הרביעי בסדרה הוא 8. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

ג. חשב את סכום כל האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה.

**22)** באחת ממדינות המזרח היה מלך שאהב משחקי חשיבה. לכבוד יום הולדתו הכין לו השר הבכיר שבממלכתו משחק מיוחד המכיל 25 משבצות ו-2 חיילי משחק. המלך, מרוב התלהבות ושמחה לא ידע כיצד לגמול לשר החכם ושאל אותו מה ירצה בתמורה. השר סרב לקבל דבר על מתנתו עד שלבסוף החליט המלך לתת לשר מחצית מכל אוצרות הממלכה המונים כ-40 מיליון אבנים יקרות. לאחר ששמע על כך השר, הוא החליט לאתגר את המלך והעלה את ההצעה הבאה:

תן לי אבן יקרה אחת והכפל אותה בכל משבצת שבמשבצות המשחק באופן הבא: כנגד המשבצת הראשונה - אבן אחת,
כנגד השנייה - שתי אבנים,
כנגד השלישית - ארבע אבנים וכן הלאה...
המלך הסכים להצעה.

א. כמה אבנים המלך ייתן לשר כנגד המשבצת האחרונה במשחק?

ב. העזר בכמות האבנים שברשותו של השר וקבע האם הצעתו שוות-ערך יותר מהחלטת המלך לתת לו מחצית מאוצרות הממלכה.

ג. סמוך לפני שנתן המלך את האבנים לשר, הציעה בתו של המלך הצעה נוספת והיא: תן עבור כל משבצת זוגית $2^n$ אבנים, כאשר $n$ הוא מספר המשבצת. האם כדאי למלך לקבל את הצעת בתו או להישאר עם ההצעה המקורית של השר?

## תשובות סופיות:

1) $a_9 = 729$.

2) $n = 7$.

3) $a_1 = \pm\frac{1}{4}, q = \pm 2$.

4) $a_1 = \frac{2}{3}, q = \pm 3$.

5) $a_1 = \frac{1}{25}, q = 5$.

6) 5 דקות.

7) $x = 11 \to q = 3$ , $x = -\frac{2}{3} \to q = -\frac{1}{2}$.

8) $a_8 = 384$.

9) $S_9 = 2555$.

10) 5 דקות.

11) $n = 4$, יש 12 איברים בסדרה.

12) $q = 2$.

13) $n = 6$.

14) א. $x = 14$ ב.i. $a_n = 5^{n-1}$ ב.ii. $a_7$ , $a_6$ ג. $S_7^* = 61,034,375$.

15) א. $q = 3$. ג. $b_6$ , $b_5$

16) אי-זוגיים: $S = 595$ , זוגיים: $S = 1190$.

17) $q = 4$.

18) $\frac{q+1}{q}$.

19) $a_1 = \frac{3}{8}$.

20) א. $\frac{S_{n(o)}}{S_{2n}} = \frac{1}{q+1}$ ב. $a_n = 3^{n-1}$ ג. $a_6$ , $a_5$.

21) א. $q = 2$ ב. $a_1 = 1$ ג. $S_{6(p)} = 2730$.

22) א. $a_{25} = 16,777,216$

ב. לפי הצעת השר יהיו לו 33,554,431 אבנים ולפי הצעת המלך יהיו לו 20,000,000 אבנים. ג. $4,16,64,...,2^{24}$ , $S_n = 22,369,620$.

# סדרות מעורבות:

## שאלות:

**1)** נתונים שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית שמנתה 3.
אם נכפול את המספר הראשון ב-3, נוסיף למספר השני 4 ונחסיר מהמספר השלישי 4 תתקבל סדרה חשבונית. מצא את המספרים.

**2)** נתונות שתי סדרות שמתחילות במספר 2 ובשתיהן 3 איברים.
סדרה אחת היא חשבונית והשנייה הנדסית. האיבר השלישי בשתי הסדרות זהה והאיבר השני בסדרה ההנדסית קטן ב-4 מהאיבר השני בסדרה החשבונית.
מצא את מנת הסדרה ההנדסית.

**3)** נתונים ארבעה מספרים בעלי התכונות הבאות:
הראשון, השני והרביעי מהווים שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית שמנתה 2.
הראשון, השלישי והרביעי מהווים שלושה איברים עוקבים בסדרה חשבונית
וסכומם $22\frac{1}{2}$. מצא את ארבעת המספרים.

**4)** ההפרש של סדרה חשבונית שווה למנה של סדרה הנדסית עולה.
האיבר הראשון בסדרה ההנדסית הוא 6 וידוע כי סכום 2 האיברים הראשונים בסדרה החשבונית שווה לסכום שני האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית.
האיבר השלישי בסדרה ההנדסית גדול פי 2 מהאיבר השלישי בסדרה החשבונית.

א. מצא את שלושת האיברים של הסדרה החשבונית.

ב. מצא כמה איברים יש לחבר בסדרה החשבונית החל מהאיבר הראשון כדי לקבל את הסכום 60.

ג. מצא את מיקומו הסידורי של איבר בסדרה ההנדסית הגדול פי 12 מהאיבר האחרון שחובר בסכום הסדרה החשבונית שחישבת בסעיף הקודם.

**5)** נתונות שתי הסדרות הבאות: סדרה חשבונית: $a_1 , a_2 , a_3 , ....$
וסדרה הנדסית: $b_1 , b_2 , b_3 , ...$. ידוע כי האיבר הראשון בשתי הסדרות שווה.
האיבר השלישי בסדרה ההנדסית גדול פי 4 מהאיבר הראשון בסדרה החשבונית.

א. מצא את מנת הסדרה ההנדסית אם ידוע כי היא אינה עולה.

ב. נתון גם כי האיבר החמישי בסדרה ההנדסית שווה לאיבר הרביעי בסדרה החשבונית. הוכח כי הפרש הסדרה החשבונית גדול פי 5 מהאיבר הראשון.

ג. בכל סדרה יש 10 איברים. הסכום של כל האיברים של שתי הסדרות יחד הוא 212-. מצא את האיבר הראשון של שתי הסדרות.

## תשובות סופיות:

1) המספרים הם: 18, 6, 2.

2) $q=-1$ או $q=3$.

3) המספרים הם: 12 , 7.5 , 6 , 3.

4) א. 12, 10, 8 ב. 5 ג. 6.

5) א. $q=-2$ ג. $a_1=2$.

# סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

## סיכום כללי:

- **הגדרה:**

סדרה הנדסית $a_n$ המקיימת: $|q|<1$ , $(q\neq 0)$ נקראת סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת.

- **נוסחת הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:**

הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת $a_n$ ניתן לחישוב ע"י שימוש בכלל: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ והצבתו בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית.

מתקבל הכלל הבא: $S=\frac{a_1}{1-q}$.

- **סכום סופי של איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:**

  - כאשר מתבקשים לחשב סכום של $n$ איברים ראשונים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה: $S_n=\frac{a_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$.

  - כאשר מתבקשים לחשב סכום של $n$ איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת המתחילים באיבר $a_k$ יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה באופן הבא: $S_n=\frac{a_k\left(q^n-1\right)}{q-1}$.

## שאלות:

**1)** מצא את סכום כל איברי הסדרה ההנדסית הבאה: $12\ ,\ 4\ ,\ 1\frac{1}{3}\ ,\ \ldots$.

**2)** סכום כל איברי סדרה הנדסית אינסופית שמנתה $\frac{1}{4}$ הוא 32.
מצא את האיבר הראשון בסדרה.

**3)** נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 62.5. ידוע כי האיבר השני בסדרה הוא 10. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה (שתי אפשרויות).

**4)** האיבר הראשון בסדרה הנדסית אינסופית יורדת הוא 14. סכום האיברים במקומות הזוגיים הוא $9\frac{1}{3}$. מצא את סכום האיברים במקומות האי-זוגיים.

***הערה: שתי השאלות הבאות מסכמות את סוגי הסכומים וייצוג סדרות שונות באמצעות סדרה נתונה כפי שמקובל בנושא זה ואינן מייצגות אורך של שאלת בגרות.**

**5)** נתונה סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת $a_n$ שמנתה $q$ , $\left(q\neq 0\ ,\ |q|<1\right)$
מגדירים שלוש סדרות חדשות: $b_n$ , $c_n$ ו- $d_n$ באופן הבא:

| הסדרה: | $b_n$ | $c_n$ | $d_n$ |
|---|---|---|---|
| הכלל: | $b_1=a_1$<br>$b_2=a_1+a_2$<br>$b_3=a_1+a_2+a_3$<br>$\vdots$<br>$b_n=a_1+a_2+a_3+..+a_n=S_{a(n)}$ | $c_1=a_2^2-a_1^2$<br>$c_2=a_3^2-a_2^2$<br>$c_3=a_4^2-a_3^2$<br>$\vdots$<br>$c_n=a_{n+1}^2-a_n^2$ | $d_1=S_a+a_1$<br>$d_2=S_a+a_2$<br>$d_3=S_a+a_3$<br>$\vdots$<br>$d_n=S_a+a_n$ |

הסכום $S_a$ הוא סכום הסדרה $a_n$ , והסכום: $S_{a(n)}$ הוא סכום $n$ האיברים הראשונים של הסדרה $a_n$.

א. קבע אלו מבין הסדרות $b_n$ , $c_n$ ו- $d_n$ הן הנדסיות והבע את מנתן ע"י $q$ .

ב. הבע באמצעות $a_1$ בלבד את סכום הסדרה ההנדסית שמצאת בסעיף הקודם.

ג. מסמנים את סכום ריבועי האיברים של הסדרה ההנדסית שמצאת בסעיף א' ב- $S_{(S)}$ . הוכח כי לא קיים ערך של $q$ עבורו סכום ריבועי האיברים $S_{(S)}$, שווה לסכום הסדרה הנ"ל בריבוע.

**6)** נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת: $a_n$ שמנתה $q$ .
מגדירים סדרה חדשה $b_n$ באופן הבא:

$$..,\ a_n = S_n^* = \frac{a_n}{1-q},\ ...,\ b_3 = S_3^* = \frac{a_3}{1-q},\ b_2 = S_2^* = \frac{a_2}{1-q},\ b_1 = S_1^* = \frac{a_1}{1-q}.$$

כאשר: $S_n^*$ מייצג את סכום הסדרה $a_n$ החל מהאיבר $a_n$ (ועד אינסוף).

א. הוכח כי הסדרה $b_n$ היא גם הנדסית אינסופית יורדת וכתוב את נוסחת האיבר הכללי שלה באמצעות $a_1$ ו- $q$ .

ב. ידוע כי סכום הסדרה $b_n$ הוא 126 וכי סכום 8 האיברים הראשונים בסדרה $a_n$ גדול פי 6560 מהאיבר התשיעי בסדרה $b_n$ . מצא את $a_1$ ו- $q$ .

ג. היעזר בסעיף הקודם והוכח כי מתקיים: $b_2 + b_3 + ... + b_n + ... = 42$ .

ד. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה $b_n$ .

ה. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה $b_n$ .

ו. מחליפים את סימני האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה $b_n$ כך שנוצרת הסדרה: $b_n^*$ . חשב את סכום הסדרה $b_n^*$ .

ז. מחליפים את סימני האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה $b_n$ כך שנוצרת הסדרה: $b_n^{**}$ . חשב את סכום הסדרה $b_n^{**}$ .

ח. מעלים בריבוע את כל איברי הסדרה $b_n$ . מסמנים את הסכום המתקבל ב- $S_{(S)}$ (מלשון: square). כמו כן, מסמנים את סכום הסדרה המקורית $b_n$ ב- $S_b$ .
הראה כי: $S_b^2 \neq S_{(S)}$ .

ט. הוכח כי היחס בין סכום איברי הסדרה $a_n$ וסכום איברי הסדרה $b_n$ הוא $\frac{2}{3}$ .

**7)** נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 24. מאיברי הסדרה הנתונה יצרו את סדרה חדשה באופן הבא: $a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_4, a_4+a_5, \ldots$.

א. הוכח שהסדרה החדשה היא הנדסית אינסופית יורדת.

ב. ידוע שסכום כל איברי הסדרה החדשה הוא 32.
מצא את האיבר הראשון והמנה של הסדרה המקורית.

**8)** בסדרה הנדסית אינסופית יורדת $a_n$ ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים גדול פי $1\frac{2}{3}$ מסכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.

א. מצא את מנת הסדרה.

מחברים כל שני איברים סמוכים בסדרה הנתונה ויוצרים סדרה חדשה $b_n$.

ב. הוכח כי הסדרה $b_n$ גם היא הנדסית יורדת ומצא את מנתה.

ג. הראה כי סכום הסדרה $b_n$ שווה לסכום הסדרה $a_n$.

ד. סכום שתי הסדרות יחד הוא 1000. מצא את האיבר הראשון בסדרה $a_n$.

**9)** נתונה סדרה הנדסית אינסופית $a_1, a_2, a_3, \ldots$ שמנתה היא $q$, $(0<q<1)$.
נגדיר את הסכומים הבאים: $V=a_3+a_7+a_{11}+\ldots$, $T=a_1+a_2+a_5+a_6+a_9+a_{10}, \ldots$.
נתון כי: $T=6V$.

א. מצא את מנת הסדרה $q$.

ב. פי כמה קטן $V$ מסכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה?

ג. מצא את האיבר הראשון אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים הוא $1365\frac{1}{3}$.

**10)** נתונה הסדרה ההנדסית הבאה: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2n}$ שמנתה היא $q$.
בונים סדרה חדשה מריבועי כל האיברים הסדרה באופן הבא: $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots, a_{2n}^2$.

א. הוכח כי היחס בין סכום $n$ האיברים הראשונים בסדרת הריבועים ובין סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה הנתונה תלוי רק באיבר הראשון של הסדרה.
בסדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 640 ידוע כי סכום 10 האיברים הראשונים כאשר מעלים אותם בריבוע גדול פי 320 מסכום 10 האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.

ב. מצא את מנת הסדרה.

ג. מחברים את כל איברי הסדרה החל מאיבר $a_n$ כלשהו.
ידוע כי סכום זה קטן פי 16 מסכום הסדרה המקורי. מצא את האיבר $a_n$.

**11)** נתונה סדרה הנדסית אינסופית $a_1 , a_2 , a_3 , .....$ שמנתה היא $q$ , $(q \neq 0 , |q| < 1)$.

נגדיר את הסכומים הבאים: $V = a_2 + a_7 + a_{12} + ... , .. , T = a_1 + a_3 + a_6 + a_8 + a_{11} + a_{13}$ .

נתון כי: $V = 0.3T$.

א. מצא את מנת הסדרה $q$.

מחליפים את הסימנים של כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים ומתקבלת סדרה חדשה שסכומה הוא 12.

ב. מצא את האיבר הראשון בסדרה המקורית.

ג. מעלים את כל איברי הסדרה בריבוע. חשב את סכום הסדרה כעת.

## תשובות סופיות:

1) $S=18$.

2) $a_1=24$.

3) $a_1=50$ , $q=\frac{1}{5}$ או $a_1=12\frac{1}{2}$ , $q=\frac{4}{5}$.

4) $S=18\frac{2}{3}$.

5) א. הסדרה $b_n$ : $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{\frac{a_{n+1}\left(q^{n+1}-1\right)}{q-1}}{\frac{a_n\left(q^n-1\right)}{q-1}}=\frac{a_{n+1}\left(q^{n+1}-1\right)}{a_n\left(q^n-1\right)}=q\cdot\frac{q^{n+1}-1}{q^n-1}$

היות והיא תלויה ב- $n$ היא אינה הנדסית.

הסדרה $c_n$ הנדסית : $\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{a_{n+2}^2-a_{n+1}^2}{a_{n+1}^2-a_n^2}=\frac{a_n^2q^4-a_n^2q^2}{a_n^2q^2-a_n^2}=\frac{a_n^2q^2\left(q^2-1\right)}{a_n^2\left(q^2-1\right)}=q^2$.

הסדרה $d_n$ : $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{S+a_{n+1}}{S+a_n}=\frac{\frac{a_1}{1-q}+a_{n+1}}{\frac{a_1}{1-q}+a_n}=\frac{a_1+(1-q)a_{n+1}}{a_1+(1-q)a_n}=\frac{a_1\left(1+(1-q)q^n\right)}{a_1\left(1+(1-q)q^{n-1}\right)}=\frac{q^n-q^{n+1}+1}{q^{n-1}-q^n+1}$

היות והיא תלויה ב- $n$ היא אינה הנדסית. ב. $S_{(c_n)}=\frac{c_1}{1-q_c}=\frac{a_2^2-a_1^2}{1-q^2}=\frac{a_1^2\left(q^2-1\right)}{1-q^2}=-a_1^2$.

ג. מההשוואה : $S_{(s)}=S^2$ מקבלים כי פתרון המשוואה הוא : $q=0,\pm1$.

כולם נפסלים מכיוון שמנת הסדרה הנתונה $a_n$ היא שבר.

עבור $|q|>1$ הסדרות אינן מתכנסות ולכן לא קיים ערך של $q$ עבורו השוויון יתקיים. מש"ל.

6) א. $b_n=\frac{a_1}{1-q}q^{n-1}$ ב. $a_1=56$ , $q=\frac{1}{3}$ ג. הוכחה. ד. 31.5

ה. 94.5 ו. -63 ז. 63 ח. 7938

ט. הסכום : $S^2$ משמעו : $\left(b_1+b_2+...+b_n+..\right)^2$.

הסכום : $S_{(s)}$ משמעו : $b_1^2+b_2^2+...+b_n^2+..$. ברור כי הביטויים אינם שווים.

7) א. הוכחה. ב. $a_1=16$ , $q=\frac{1}{3}$.

8) א. $q=0.6$ ב. $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{2n+1}+a_{2n+2}}{a_{2n-1}+a_{2n}}=q^2$ ד. $a_1=200$

9) א. $q=\frac{1}{2}$ ב. פי 5 ג. $a_1=1024$

10) א. הוכחה. ב. $q=0.5$ ג. $a_5=20$.

11) א. $q=\frac{1}{3}$ ב. $a_1=-16$ ג. $S=288$.

# סדרת נסיגה:

## שאלות:

**1)** נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2n - 11 \\ a_1 = -6 \end{cases}$.

א. מצא את האיבר השלישי בסדרה.

ב. נתון כי האיבר השלושה-עשר בסדרה הוא 18. מצא את $a_{14}$ ו- $a_{12}$.

ג. נתון כי האיבר השלושים ואחת בסדרה הוא $k$.
הבע באמצעות $k$ את $a_{32}$ ו- $a_{30}$.

ד. מצא את מיקומם של שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 133.

ה. הסבר מדוע אין שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 62.

**2)** נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2n \\ a_1 = 0 \end{cases}$.

נתון כי $a_k = 72$. הבע באמצעות $k$ את $a_{k+2}$.

**3)** נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + n^2 - 31 \\ a_7 = t \end{cases}$

מצא את ערכו של $t$ שבעבורו האיברים $a_7, a_8, a_9$ הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית.

**4)** סדרה שהאיבר הכללי בה הוא $a_n$ מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1} = a_n + 6n - 2$
מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא $b_n$ באופן הבא: $b_n = a_{n+1} - a_n$.

א. הוכח שהסדרה $b_n$ היא סדרה חשבונית ומצא את הפרשה.

ב. חשב את $b_1$.

**5)** סדרה שהאיבר הכללי בה הוא $a_n$ מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1} = 3a_n + 4$.
מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא $b_n$ באופן הבא: $b_n = a_n + 2$.

א. הוכח שהסדרה $b_n$ היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.

ב. נתון: $b_5 = 162$. חשב את $a_1$.

6) סדרה מוגדרת ע"י הכלל: $a_1=3\ ,\ a_{n+1}=3a_n+10n-5$.
מגדירים סדרה חדשה המקיימת לכל $n$ טבעי: $b_n=a_n+5n$.

א. הוכח כי הסדרה $b_n$ היא סדרה הנדסית.

ב. חשב את האיבר $b_5$.

ג. חשב את הסכום: $b_2+b_4+b_6+.....+b_{12}$.

7) סדרה מוגדרת לכל $n$ טבעי ע"י הנוסחה: $a_1=k\ ,\ a_{n+1}=8n-a_n+3$.

א. הבע באמצעות $k$ את ארבעת האיברים הראשונים בסדרה.

ב. הוכח כי סדרת האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים וסדרת האיברים העומדים במקומות הזוגיים הן חשבוניות ומצא את הפרשן.

ג. חשב את סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה.

8) סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה הבא: $a_1=2\ ,\ a_{n+1}=\dfrac{3a_n}{2a_n+3}$.
מגדירים סדרה חדשה לפי: $b_n=\dfrac{4-7a_n}{a_n}$.

א. הוכח כי הסדרה $b_n$ היא חשבונית ומצא את הפרשה.

ב. חשב את הסכום הבא: $b_2+b_4+b_6+.....+b_{22}$.

9) סדרה מקיימת את כלל הנסיגה: $a_1=1\ ,\ a_{n+1}=3n-a_n-7$.

א. חשב את 5 האיברים הראשונים וקבע האם הסדרה היא חשבונית.

ב. הוכח כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $a_{n+2}=a_n+3$.

ג. כתוב נוסחה לסכום $n$ האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.

ד. חשב את הסכום הבא: $a_1+a_3+a_5+.....+a_{17}$.

**10)** סדרה מוגדרת לפי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1}=a_n+2\cdot 3^n+2$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הבע את $a_{n+2}$ באמצעות $a_n$.

ii. מצא את מיקומו הסידורי של איבר הגדול ב-652 מהאיבר העומד שני מקומות לפניו.

ב. הנוסחה לסכום $n$ האיברים הראשונים של אחת מהסדרות המיוצגות ע"י כלל הנסיגה הנ"ל היא: $S_n=1.5\cdot 3^n+n^2+n-1.5$.

חשב את הסכום הבא: $a_6+a_7+a_8+....+a_{11}$.

ג. מהו האיבר הראשון של הסדרה המיוצגת ע"י כלל הנסיגה ונוסחת הסכום הנ"ל?

**11)** סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה: $a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+5}$ , $a_1=6$.

מגדירים סדרה חדשה $b_n$ המקיימת לכל $n$ טבעי: $b_n=\frac{a_n+3}{a_n}$.

א. הוכח כי הסדרה $b_n$ היא הנדסית ומצא את מנתה.

ב. כתוב נוסחה ל- $b_n$ באמצעות $n$ בלבד.

ג. חשב את הסכום הבא: $b_1-b_2+b_3-b_4+.....-b_{10}$.

## תשובות סופיות:

1) א. $a_3=-22$ ב. $a_{12}=5\ ,a_{14}=33$ ג. $a_{30}=k-49\ ,a_{32}=k+51$

ד. $a_{62},a_{63}$

2) $a_{k+2}=74+4k$

3) $t=-33$

4) א. $d=6$ ב. $b_1=4$

5) א. $q=3$ ב. $a_1=0$

6) א. $b_{n+1}=3b_n$ ב. $b_5=648$ ג. $S=1594320$

7) א. $a_1=k\ ,a_2=11-k\ ,a_3=k+8\ ,a_4=19-k$ ב. 8

ג. 830

8) ב. $S_{11(p)}=267\frac{2}{3}$

9) א. $a_1=1\ ,a_2=-5\ ,a_3=4\ ,a_4=-2\ ,a_5=7$ ג. $S_{n(o)}=1.5n^2-0.5n$

ד. $S_{9(o)}=117$

10) א. i. $a_{n+2}=a_n+8\cdot 3^n+4$ ii. $a_4$

ב. $S_{6-11}=265458$ ג. $a_1=5$.

11) א. $q=2.5$ ב. $b_n=1.5\cdot 2.5^{n-1}$ ג. $S_{10}^{*}=-4086.74$

# קורס ריענון במתמטיקה

## פרק 13 - מבוא להסתברות

### תוכן העניינים

1. הסתברות על ציר המספרים ..... (ללא ספר)
2. ניסויים ותוצאות ..... (ללא ספר)
3. שכיחות יחסית והסתברות ..... (ללא ספר)
4. תכונות ההסתברות ..... (ללא ספר)

# קורס ריענון במתמטיקה

## פרק 14 - הסתברות של מאורע בודד

### תוכן העניינים


1. הקדמה כללית ..... (ללא ספר)
2. שאלות עם בחירת כדור ..... (ללא ספר)
3. שאלות עם הגרלות ..... (ללא ספר)
4. שאלות עם הטלת קובייה ..... (ללא ספר)
5. שאלות עם ילדים במשפחה ..... (ללא ספר)
6. שאלות עם משחק דומינו ..... (ללא ספר)
7. שאלות עם ציונים בכיתה ..... (ללא ספר)

# קורס ריענון במתמטיקה

## פרק 15 - הסתברות של שני מאורעות

### תוכן העניינים

1. הסתברות של שני מאורעות ..... (ללא ספר)

# קורס ריענון במתמטיקה

## פרק 16 - טריגונומטריה במשולש ישר זווית

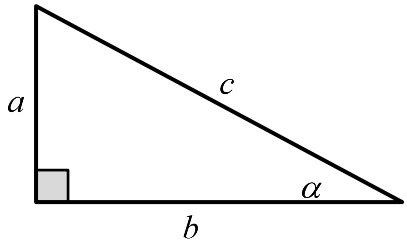
### תוכן העניינים

1. משולש ישר זווית ..... 180

# משולש ישר זווית:

## סיכום כללי:

### הגדרות הפונקציות הטריגונומטריות:




$$\sin\alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{b}{c}$$

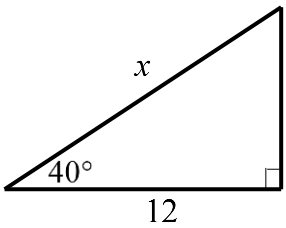
$$\tan\alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{הניצב שליד הזווית}} = \frac{a}{b}$$

משפט פיתגורס: $a^2+b^2=c^2$

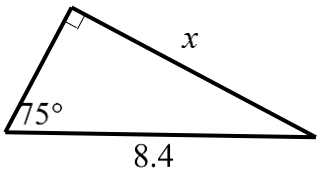
## שאלות:

**1)** מצא את ערכו של $x$ / $\alpha$ במשולשים ישרי הזווית הבאים:

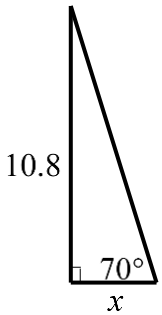
א.



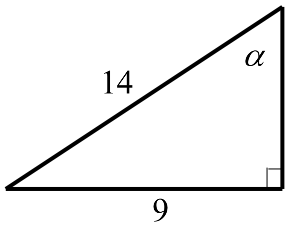

ב.



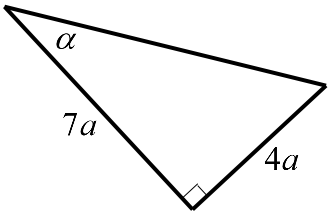

ג.




ד.




ה.

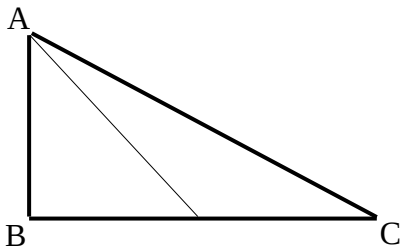



**2)** המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle B=90°)$.

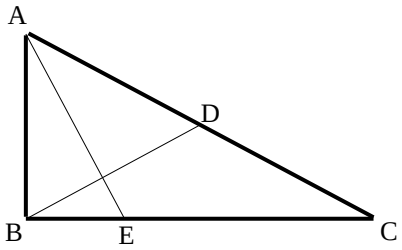
AD הוא התיכון לניצב BC.

נתון: $\sphericalangle C=28°$ , 6 ס"מ = AB.

מצא את AD ואת $\sphericalangle BAD$.

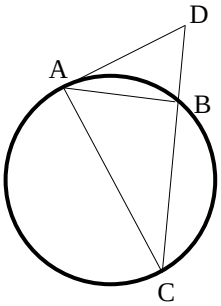


**3)** המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle B=90^\circ)$. BD הוא התיכון ליתר ו-AE הוא חוצה הזווית $\sphericalangle A$.
נתון: BD = 5.6 ס"מ , BC = 8 ס"מ.
מצא את BE ואת $\sphericalangle BAE$.



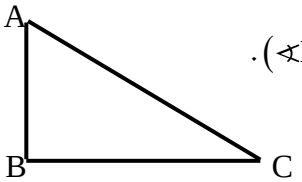

**4)** מצא את זוויותיו של מעוין שאורכי אלכסוניו 24 ס"מ ו-18 ס"מ.

**5)** המשולש ABC חסום במעגל כך שהצלע AC היא קוטר המעגל.
המשיק למעגל בנקודה A והמשך הצלע CB נפגשים בנקודה D.
נתון: BD=4 ס"מ , $\sphericalangle DAB=32^\circ$.
מצא את אורכו של רדיוס המעגל.

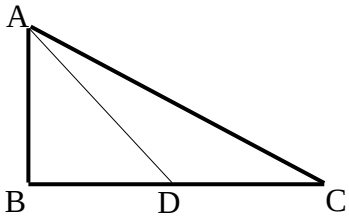



**6)** במשולש שווה שוקיים שבו השוק ארוכה ב-4 ס"מ מהבסיס נתון כי זווית הראש היא $34.92^\circ$. מצא את שטח המשולש.

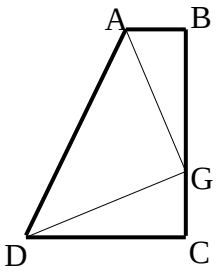
**7)** המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle B=90^\circ)$.
נתון: $\sphericalangle A=\alpha$ , $AB=a$.
הבע באמצעות $\alpha$ ו-$a$ את היקף המשולש.



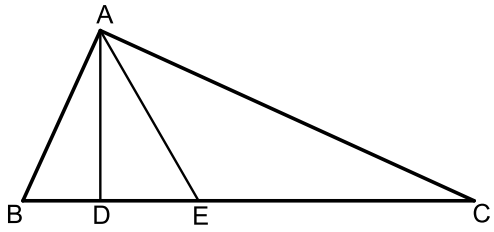

**8)** המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle B=90^\circ)$.
AD הוא התיכון לניצב BC.
נתון: $\sphericalangle C=\alpha$ , $AB=b$.
הבע באמצעות $\alpha$ ו-$b$ את אורכי הקטעים BD ו-AD.




**9)** במשולש ישר זווית אחת הזוויות החדות היא $\alpha$ ואורך חוצה זווית זו הוא $k$.
הבע באמצעות $\alpha$ ו-$k$ את שטח המשולש ואת אורך היתר.



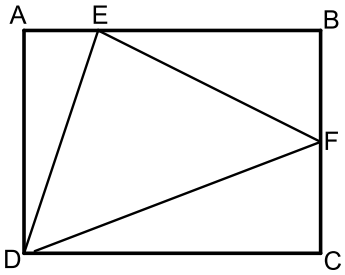

**10)** טרפז ABCD הוא טרפז ישר זווית $(\sphericalangle B=\sphericalangle C=90^\circ)$.
הנקודה G נמצאת על השוק BC כך ש- $AG \perp DG$.
נתון: $AG=DG=m$ , $\sphericalangle BAG=\beta$.
הבע באמצעות $\beta$ ו- $m$ את שטח הטרפז.




**11)** המשולש ABC הוא ישר זווית $(\sphericalangle A=90^\circ)$.
הקטעים AD ו-AE הם בהתאמה גובה ליתר וחוצה זווית.
מסמנים: $DE=k$ , $\sphericalangle DAE=\alpha$.

א. הבע באמצעות $k$ ו- $\alpha$ את שטח המשולש ABC.

ב. חשב את שטח המשולש ABC
אם ידוע כי: $\alpha=30$ ו- $k=2$.




**12)** במלבן ABCD מסמנים את הנקודות E ו-F
הנמצאות על הצלעות AB ו-BC בהתאמה כך ש-E
מקיימת: $3AE=BE$ ו-F היא אמצע הצלע BC.
אורך הצלע AD שווה לאורך הקטע BE.
מעבירים את הקטעים DF , EF ו-DE כך
שנוצר במשולש DEF.

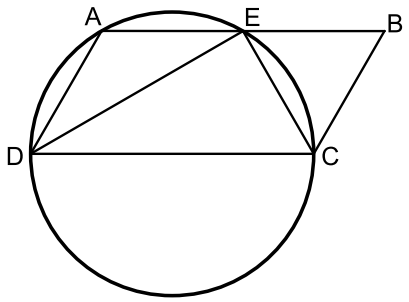
א. סמן ב- $t$ את אורך הקטע AE והבע
באמצעות $t$ את אורכי צלעות המשולש DEF.

ב. חשב את זוויות המשולש EDF.

**13)** משולש שווה שוקיים שאורך שוקו $k$ וזווית הבסיס שלו היא $\beta$ חוסם מעגל.
הבע באמצעות $\beta$ ו- $k$ את רדיוס המעגל.

**14)** בטרפז ישר זווית חסום מעגל. אורך השוק הארוכה בטרפז היא $b$ והזווית
שהיא יוצרת עם הבסיס הגדול היא $\alpha$.
הבע באמצעות $\alpha$ ו- $b$ את אורכו של הבסיס הגדול בטרפז ואת שטחו.

**הערה: השאלות הבאות משלבות ידע בגיאומטריה ובטריגונומטריה יחד:**

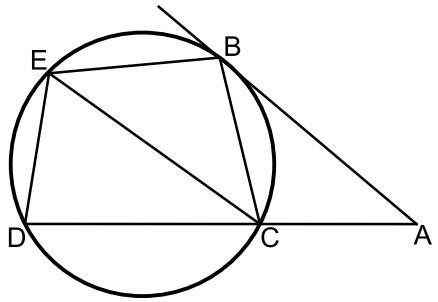



**15)** דרך הקודקודים A , C ו-D של המקבילית ABCD מעבירים מעגל. היקף המעגל חוצה את הצלע AB בנקודה E, $(AE = BE)$.
נתון כי DC הוא קוטר במעגל וכי המיתר DE חוצה את זווית D.

א. הוכח כי המיתר CE חוצה את זוויות C.

ב. רדיוס המעגל יסומן ב- $R$.
הבע באמצעות $R$ את היקף המקבילית.

ג. מצא את רדיוס המעגל אם ידוע כי שטח המקבילית הוא $16\sqrt{3}$סמ"ר.




**16)** מהנקודה A שמחוץ למעגל מעבירים משיק AB וישר חותך ACD.
מעבירים את המיתרים BC ו-BE אשר זהים באורכם.
כמו כן מעבירים את המיתר DE.
אורך המיתר CE שונה מאורך המשיק AB.

א. הוכח כי המרובע ABEC הוא טרפז.

ב. הוכח כי: $2\cdot\sphericalangle BEC = \sphericalangle EDC$.

ג. נתונים: $\sphericalangle A = 40°$ , AC = 6 ס"מ, AB = 9 ס"מ , CE = 8 ס"מ.
חשב את שטח המרובע ABEC.

## תשובות סופיות:

1) א. $x=15.665$ ב. $x=8.114$ ג. $x=3.931$ ד. $\alpha=40.005°$ ה. $\alpha=29.745°$.

2) $\sphericalangle BAD=43.24°$ , 8.236 ס"מ = AD.

3) $\sphericalangle BAE=22.792°$ , 3.294 ס"מ = BE.

4) $106.26°$ , $106.26°$ , $73.74°$ , $73.74°$.

5) 6.04 ס"מ = $R$.

6) 28.618 סמ"ר = $S$.

7) $P=a\left(1+\tan\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}\right)$.

8) $BD=\frac{b}{2\tan\alpha}$ , $AD=\sqrt{b^2+\frac{b^2}{4\tan^2\alpha}}$.

9) $S=\frac{k^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\tan\alpha}{2}$ , $AC=\frac{k\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.

10) $\frac{(m\sin\beta+m\cos\beta)^2}{2}$.

11) א. $S=\frac{k^2}{\cos 2\alpha\tan^2\alpha}$ ב. 24 סמ"ר.

12) א. $DF=t\sqrt{18.25}$ , $EF=t\sqrt{11.25}$ , $DE=t\sqrt{10}$ ב. $47.14°$ , $51°$ , $81.86°$.

13) $R=k\cos\beta\tan\frac{\beta}{2}$.

14) $S=\frac{1}{2}b^2\sin\alpha(1+\sin\alpha)$ , $\frac{1}{2}b\sin\alpha+\frac{\frac{1}{2}b\sin\alpha}{\tan\frac{\alpha}{2}}$.

15) א. שאלת הוכחה. ב. $6R$ ג. 4 ס"מ.

16) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. 32.78 סמ"ר.

# קורס ריענון במתמטיקה

## פרק 17 - זהויות טריגונומטריות

### תוכן העניינים


1. זהויות יסוד ..... 185
2. ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות ..... 189
3. מעגל היחידה ..... 191
4. סכום והפרש זוויות ..... 194
5. זווית כפולה ..... 198
6. סכום והפרש פונקציות ..... 201
7. מכפלת פונקציות ..... 204

# זהויות יסוד:

## סיכום כללי:

| | | |
|---|---|---|
| קשרים בין פונקציות | $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ , $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ | $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$<br>$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$ |
| זוויות משלימות ל- $90°$ | $\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)$ | $\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$ |
| | $\cot\alpha=\tan(90°-\alpha)$ | $\tan\alpha=\cot(90°-\alpha)$ |
| קשרים בין פונקציות | $\cot^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}$ | $\tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ |

## שאלות:

### הוכחת זהויות יסודית:

הוכח את הזהויות הבאות תוך שימוש בזהויות היסוד:

1) $\tan\alpha\cdot\cos\alpha=\sin\alpha$

2) $\frac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=1$

3) $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\tan\alpha$

4) $\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha=1+\cos^2\alpha$

5) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}=2$

6) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$

7) $\frac{\cos(90°-\alpha)}{\cos\alpha}=\tan\alpha$

8) $\sin^2(\alpha+45°)+\sin^2(45°-\alpha)=1$

9) $\sqrt{1+\tan^2\alpha}\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\tan\alpha$

10) $\frac{\sin\alpha(1-\cos^2\alpha)}{\cos^3\alpha}=\tan^3\alpha$

11) $\frac{\sin(90°-\alpha)-\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha}=\cot\alpha$

12) $\cos^2\alpha(1+\tan^2\alpha)=1$

13) $\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\cot\alpha$

14) $\frac{\sin^3\alpha}{\sin(90°-\alpha)-\cos^3\alpha}=\tan\alpha$

15) $\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\tan^2\alpha\sin^2\alpha$

16) $\frac{1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha+\cot^2\alpha$

**הוכחות מתקדמות:**

**17)** הוכח את הזהות הבאה: $\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}+\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=2+4\cot^2\alpha$.

**18)** הוכח את הזהות הבאה: $\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}+\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{2}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$.

**19)** הוכח את הזהות הבאה: $(\cot\alpha-\tan\alpha)(\cot\alpha+\tan\alpha)=(1+\cot^2\alpha)(1+\tan\alpha)(1-\tan\alpha)$.

**20)** הוכח את הזהות הבאה: $\frac{\sin^4\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\cot^4\alpha$.

**21)** הוכח את הזהות הבאה: $1-\sin^2\alpha(1+\cos^2\alpha)=\cos^4\alpha$.

**22)** הוכח את הזהות הבאה: $\left(\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\right)^2=4+4\cot^2\alpha$.

**23)** הוכח את הזהות הבאה: $\sin^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\beta\cos^2\alpha=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

**24)** הוכח את הזהות הבאה: $\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}=\tan\alpha\tan\beta$.

**הבעת ביטויים וחישובים באמצעות זהויות יסוד:**

**25)** נתון כי: $\sin\alpha+\cos\alpha=k$.

הבע באמצעות $k$ את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

ב. $\sin\alpha-\cos\alpha$.

ג. $\tan\alpha+\cot\alpha$.

ד. $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$.

**26)** נתון כי: $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

מבלי למצוא את $\alpha$ חשב את: $\tan^2\alpha-2\cot^2\alpha$.

**27)** נתון כי: $\tan\alpha=\sqrt{7}$.

מבלי למצוא את $\alpha$ חשב את: $\dfrac{\sqrt{7}\sin\alpha+6\cos\alpha}{\sqrt{28}\sin\alpha-\cos\alpha}$.

**28)** חשב את ערך המכפלה הבאה: $\tan 1^\circ\cdot\tan 2^\circ\cdot\tan 3^\circ\cdot\cdots\cdot\tan 88^\circ\cdot\tan 89^\circ$.

## תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.
11) שאלת הוכחה.
12) שאלת הוכחה.
13) שאלת הוכחה.
14) שאלת הוכחה.
15) שאלת הוכחה.
16) שאלת הוכחה.
17) שאלת הוכחה.
18) שאלת הוכחה.
19) שאלת הוכחה.
20) שאלת הוכחה.
21) שאלת הוכחה.
22) שאלת הוכחה.
23) שאלת הוכחה.
24) שאלת הוכחה.
25) א. $\frac{k^2-1}{2}$ ב. $\pm\sqrt{2-k^2}$ ג. $\frac{2}{k^2-1}$ ד. $\frac{k}{2}\left(3-k^2\right)$
26) -7.75
27) 1
28) 1

# ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות:

## סיכום כללי:

| | $\alpha=0°$ | $\alpha=30°$ | $\alpha=45°$ | $\alpha=60°$ | $\alpha=90°$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
| $\cos\alpha$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\tan\alpha$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $\phi$ |
| $\cot\alpha$ | $\phi$ | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ |

**הערות:**

- ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות של $0°$ ו-$90°$ תִּלמדנה בהמשך אך ניתנו כעת כדי להשלים את תמונת ערכי הזוויות.
- ניתן לזכור את הטבלה ע"י כתיבה של שורת הסינוס לפי: $\frac{\sqrt{0}}{2},\frac{\sqrt{1}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{4}}{2}$
  אשר נותנים את הערכים של השורה הראשונה לאחר פישוט קל.
  עבור שורת ה-$\cos\alpha$ יש להפוך את הערכים ולבסוף יש לחלק כל זוג ביטויים כדי לכתוב את ערכי $\tan\alpha$ ולסובב עבור ערכי $\cot\alpha$.

## שאלות:

חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בערכי הפונקציות הטריגונומטריות של זוויות מיוחדות:

**1)** $\sin 30° + \cos 30°$.

**2)** $\frac{\sin 30° \cdot \cos 30°}{\sin 60°}$.

**3)** $\tan 45° + \frac{\sin 45°}{\cos 45°}$.

4) $\frac{1+\cos 60^\circ}{2\sin 60^\circ}$.

5) $\cos^2 45^\circ + \sin^2 30^\circ$.

6) $\frac{\tan^2 60^\circ \cdot \cos^2 30^\circ}{\cos^2 60^\circ}$.

7) $\frac{\tan 30^\circ \cdot \cot 60^\circ - \cot 45^\circ \cdot \tan 45^\circ}{4\left(\sin^2 60^\circ - \frac{1}{4}\right)}$.

8) $\frac{27\cot^4 60^\circ}{\sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot \tan 60^\circ}$.

## תשובות סופיות:

1) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

2) $\frac{1}{2}$

3) $2$

4) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$

5) $\frac{3}{4}$

6) $9$

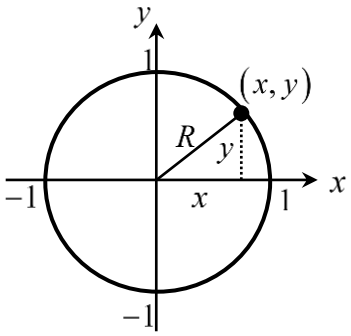
7) $-\frac{1}{3}$

8) $2\sqrt{6}$

# מעגל היחידה – הגדרה וזהויות:

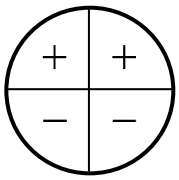
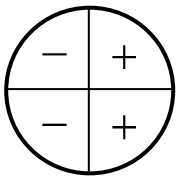
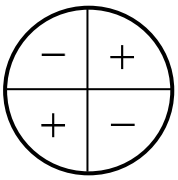
## סיכום כללי:

### הגדרת מעגל היחידה:




- מעגל קנוני שרדיוסו 1 מוגדר להיות המעגל הטריגונומטרי.
- הנקודות $(1,0)$ , $(0,1)$ , $(-1,0)$ , $(0,-1)$ מתאימות לזוויות של $0°$ , $90°$ , $180°$ , $270°$.

### הזהויות של המעגל הטריגונומטרי:

| רביע | סינוס | קוסינוס | טנגנס |
|---|---|---|---|
| II<br>III<br>VI | $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$<br>$\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha$<br>$\sin(-a)=-\sin\alpha$ | $\cos(180^o-\alpha)=-\cos\alpha$<br>$\cos(180^o+\alpha)=-\cos\alpha$<br>$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ | $\tan(180^o-\alpha)=-\tan\alpha$<br>$\tan(180^o+\alpha)=\tan\alpha$<br>$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$ |
| סימנים |  |  |  |

### זהויות עבור זווית הגדולות מ-360 מעלות:

ניתן להוסיף או להוריד 'סיבובים' שלמים לזווית לפי:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha+360°k)&=\sin\alpha\\ \cos(\alpha+360°k)&=\cos\alpha\end{aligned}}\quad,\quad\boxed{\begin{aligned}\tan(\alpha+180°k)&=\tan\alpha\\ \cot(\alpha+180°k)&=\cot\alpha\end{aligned}}$$

כאשר $k$ הוא מספר שלם מציין את מספר הסיבובים.

## שאלות:

**1)** העבר את הביטויים הבאים לביטויים עם זווית ברביע הראשון.
אין צורך לחשב את ערך הביטוי:

| | |
|---|---|
| א. $\sin 120°$ | ב. $\cos 150°$ |
| ג. $\tan 160°$ | ד. $\cot 130°$ |
| ה. $\sin 215°$ | ו. $\cos 245°$ |
| ז. $\tan 230°$ | ח. $\cot 200°$ |
| ט. $\sin 300°$ | י. $\cos 310°$ |

**2)** חשב את ערכי הביטויים הבאים ע"י שימוש בזהויות המעגל הטריגונומטרי:

| | | |
|---|---|---|
| א. $\sin 150°$ | ב. $\cos 210°$ | ג. $\tan 120°$ |
| ד. $\sin 330°$ | ה. $\tan 225°$ | ו. $\sin 315°$ |
| ז. $\cos 120°$ | ח. $\tan(-30°)$ | ט. $\cos(-45°)$ |
| י. $\sin 510°$ | יא. $\cos 930°$ | יב. $\tan(-225°)$ |

**3)** חשב את ערכי הביטויים הבאים ללא שימוש במחשבון:

א. $\left(\sin 240° \cdot \tan 150° + \cos(-60°)\right)^2$.

ב. $8\sin^2 150° \cdot \tan 135° - 2 \cdot \sin 135° \cdot \cos(-135°)$.

ג. $\dfrac{\cot 225°}{\sin(-225°) - \cos 135°} + \tan^2 210°$.

**4)** הוכח כי אם $\alpha$, $\beta$ ו- $\gamma$ הן זוויות במשולש, אז מתקיים:

א. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\gamma$.

ב. $\sin\left(\dfrac{\gamma + \beta}{2}\right) = \cos\dfrac{\alpha}{2}$.

## תשובות סופיות:

1) א. $\sin 60°$ ב. $-\cos 30°$ ג. $-\tan 20°$ ד. $-\cot 50°$
ה. $-\sin 35°$ ו. $-\cos 65°$ ז. $\tan 50°$ ח. $\cot 20°$
ט. $-\sin 60°$ י. $\cos 50°$

2) א. $\frac{1}{2}$ ב. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ג. $-\sqrt{3}$ ד. $-\frac{1}{2}$
ה. $1$ ו. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ז. $-\frac{1}{2}$ ח. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
ט. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ י. $\frac{1}{2}$ יא. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ יב. $-1$

3) א. $1$ ב. $-1$ ג. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3}$.

4) שאלת הוכחה.

# סכום והפרש זוויות:

## סיכום כללי:

סכום והפרש עבור $\sin(\alpha\pm\beta)$ ו- $\cos(\alpha\pm\beta)$ יחושב לפי:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha\pm\beta)&=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha\\ \cos(\alpha\pm\beta)&=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}}.$$

סכום והפרש עבור $\tan(\alpha\pm\beta)$ ו- $\cot(\alpha\pm\beta)$

$$\boxed{\begin{aligned}\tan(\alpha\pm\beta)&=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}\\ \cot(\alpha\pm\beta)&=\frac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}\end{aligned}}.$$

**הערה:**

בסרטון התיאוריה אין התייחסות מיוחדת לזהויות עבור $\tan(\alpha\pm\beta)$ ו- $\cot(\alpha\pm\beta)$.

## שאלות:

**1)** חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בזהויות של סכום והפרש זוויות וללא שימוש במחשבון:

| | | |
|---|---|---|
| א. $\sin 75°$ | ב. $\sin 15°$ | ג. $\sin 105°$ |
| ד. $\sin(-15°)$ | ה. $\cos 75°$ | ו. $\cos 15°$ |
| ז. $\cos(-105°)$ | ח. $\cos 165°$ | ט. $\cos(-195°)$ |

**2)** חשב ללא שימוש במחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sin 65°\cos 25°+\sin 25°\cos 65°$.

ב. $5\cos 50°\cos 20°+5\sin 50°\sin 20°$.

3) הוכח את הזהויות הבאות:

א. $\sin(60°+\alpha)+\sin(60°-\alpha)=\sqrt{3}\cos\alpha$.

ב. $\cos(45°-\alpha)-\cos(45°+\alpha)=\sqrt{2}\sin\alpha$.

ג. $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

ד. $\tan\alpha-\tan\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

4) נתון: $\cos\beta=\dfrac{8}{17}$ , $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$ ו- $\alpha,\beta$ זוויות חדות.

מבלי למצוא את הערכים של $\alpha$ ו- $\beta$ חשב:

א. $\sin(\alpha+\beta)$.

ב. $\cos(\alpha+\beta)$.

ג. $\tan(\alpha+\beta)$.

5) הוכח את הזהות: $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\sin\beta\cos\alpha$.

6) הוכח את הזהות: $(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin2\alpha+\cos2\alpha)=\sin3\alpha+\cos\alpha$.

7) הוכח את הזהות: $\tan7\alpha-\tan5\alpha-\tan2\alpha=\tan7\alpha\tan5\alpha\tan2\alpha$.

8) הוכח את הזהות: $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$.

9) הוכח את הזהות: $\cot\alpha-\cot\beta=\dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

10) הוכח את הזהות הבאה:

$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta+\gamma)$.

**11)** הוכח כי מתקיים: $\sin 65^\circ \cos 25^\circ + \sin 25^\circ \cos 65^\circ = 1$.

**12)** הוכח כי מתקיים: $\tan 18^\circ \tan 27^\circ + \tan 18^\circ + \tan 27^\circ = 1$.

**13)** נתון כי: $\sin 76^\circ = m$. הבע את $\sin 31^\circ$ באמצעות $m$.

**14)** הזוויות $\alpha$ ו- $\beta$ הן זוויות חדות.

נתון כי: $\tan\alpha = \frac{(2-k)\sqrt{3}}{3k}$ ו- $\tan\beta = \frac{(2k-1)\sqrt{3}}{3}$.

הראה כי מתקיים: $\alpha + \beta = 60^\circ$.

**15)** היעזר בנוסחה: $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \tan\beta}$ ומצא את $\tan x$ ו- $\tan y$

אם ידוע כי: $\tan(x+y) = -3$ ו- $\tan(x-y) = \frac{1}{3}$. הבחן בין שני מקרים.

## תשובות סופיות:

1) א. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ב. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ג. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ד. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ ה. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

ו. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ז. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ ח. $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ט. $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2) א. $1$ ב. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

3) שאלת הוכחה.

4) א. $\frac{84}{85}$ ב. $-\frac{13}{85}$ ג. $-6\frac{6}{13}$

5) שאלת הוכחה.

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(m-\sqrt{1-m^2}\right)$.

15) שאלת הוכחה.

16) 1 ו-2 או $-\frac{1}{2}$ ו- 1-.

# זווית כפולה:

## סיכום כללי:

נפתח זווית כפולה לפי הצורות הבאות:

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha\end{array}}$$

## שאלות:

**1)** הוכח את הזהויות הבאות:

א. $4\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha = \sin 4\alpha$

ב. $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$

ג. $(\sin 3\alpha - \cos 3\alpha)^2 = 1 - \sin 6\alpha$

ד. $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$

ה. $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2\cot 2\alpha$

ו. $\frac{\cos 2\alpha - 2\sin^2\alpha\cos 2\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{1}{2}\cot 2\alpha$

ז. $\cos^2 2\alpha = 4\sin^4\alpha - 4\sin^2\alpha + 1$

ח. $\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$

**2)** הוכח את הזהות: $\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}$ ע"י כתיבה של $\sin 3\alpha$

לפי: $\sin(\alpha + 2\alpha)$ ושימוש בזהויות שנלמדו.

**3)** הוכח את הזהות: $\cos^3\alpha = \frac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4}$ ע"י כתיבה של $\cos 3\alpha$

לפי: $\cos(\alpha + 2\alpha)$ ושימשו בזהויות שנלמדו.

**4)** נתונה זווית חדה $\alpha$ המקיימת: $\sin\alpha = \frac{40}{41}$. מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א. $\cos\alpha$.

ב. $\tan\alpha$.

ג. $\sin 2\alpha$.

ד. $\cos 2\alpha$.

ה. $\tan 2\alpha$.

**5)** נתונה זווית חדה $\alpha$ המקיימת: $\tan\alpha=\frac{5}{12}$. מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א. $\sin\alpha$.

ב. $\cos\alpha$.

ג. $\sin 2\alpha$.

ד. $\cos 2\alpha$.

**6)** נתונה זווית $\alpha$ ברביע הראשון וזווית $\beta$ ברביע השני המקיימות: $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ ו- $\cos\beta=-0.8$. מבלי למצוא את $\alpha$ ו- $\beta$ חשב את הביטויים הבאים:

א. $\sin(\alpha+\beta)$.

ב. $\cos(\alpha+\beta)$.

ג. $\sin(2\alpha+\beta)$.

**7)** נתון כי $\sin\alpha+\cos\alpha=1.2$ עבור $0°<\alpha<90°$. חשב את $\sin 2\alpha$.

**8)** פשט את הביטוי הבא: $\sqrt{\frac{1+\cos 8\alpha}{2}}$.

**9)** ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sin 16°\cos 16°}{3-6\sin^2 29°}$.

**10)** ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sin^2 78°-\cos^2 78°}{\sin 66°}$.

**11)** ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא: $\frac{5\tan 15°\left(1-2\cos^2 15°\right)}{1-\tan^2 15°}$.

## תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) א. $\frac{9}{41}$ ב. $4\frac{4}{9}$ ג. $\frac{720}{1681}$ ד. $-\frac{1519}{1681}$
ה. $-\frac{720}{1519}$
5) א. $\frac{5}{13}$ ב. $\frac{12}{13}$ ג. $\frac{120}{169}$ ד. $\frac{119}{169}$
6) א. $\frac{16}{65}$ ב. $-\frac{63}{65}$ ג. $-\frac{123}{845}$
7) 0.44.
8) $\cos 4\alpha$.
9) $\frac{1}{6}$.
10) 1.
11) -1.25.

# סכום והפרש פונקציות טריגונומטריות:

## סיכום כללי:

להלן נוסחאות הסכום וההפרש של פונקציות טריגונומטריות:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

**הערה:**

בסרטון התיאוריה אין התייחסות לזהויות הסכום וההפרש של טנגנס ושל קוטנגנס עקב חוסר השימוש בהן בפתרון שאלות.

## שאלות:

1) הוכח את הזהות הבאה: $\sin 5\alpha+\sin 3\alpha=2\sin 4\alpha\cos\alpha$.

2) הוכח את הזהות הבאה: $\sin 7\alpha-\sin 2\alpha=2\sin 2.5\alpha\cos 4.5\alpha$.

3) הוכח את הזהות הבאה: $\cos\alpha+\cos 5\alpha=2\sin 2\alpha\cos 3\alpha$.

4) הוכח את הזהות הבאה: $\cos 5\alpha-\cos 2\alpha=-2\sin 3.5\alpha\cos 1.5\alpha$.

5) הוכח את הזהות הבאה: $\sin 3\alpha=2\sin 2\alpha\cos\alpha-\sin\alpha$.

6) הוכח את הזהות הבאה: $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

7) הוכח את הזהות הבאה: $\sin(2\alpha+\beta)-2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\sin\beta$.

8) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{\sin 5\alpha-\sin\alpha}{\sin 4\alpha-\sin 2\alpha}=2\cos\alpha$.

9) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{\sin 7\alpha - \sin 3\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 6\alpha} = 2\sin\alpha$.

10) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \tan 2\alpha$.

11) הוכח את הזהות הבאה: $\tan\alpha + \tan 3\alpha = \frac{2\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha}$.

12) פשט את הביטוי: $\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1}$ ומצא את ערכו מבלי להיעזר במחשבון אם ידוע כי $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{6}$.

13) נתון כי $\alpha$ ו- $\beta$ הן זוויות חדות המקיימות: $\sin\alpha = \frac{2mn}{m^2+n^2}$ ו- $\sin\beta = \frac{n^2-m^2}{m^2+n^2}$.
הראה כי: $\alpha + \beta = 90°$.

14) היעזר במעבר מכפל לסכום או הפרש
והוכח כי: $\cos 6\alpha\cos 2\alpha - \cos 5\alpha\cos\alpha = -\sin 7\alpha\sin\alpha$.

15) היעזר במעבר מכפל לסכום או הפרש
והוכח כי: $\sin 4\alpha\sin 2\alpha - \sin 5\alpha\sin\alpha + \cos 3\alpha\cos\alpha = \cos 2\alpha$.

16) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\sin 52.5° \cdot \sin 7.5°$.

17) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sin 35°\sin 55°}{\cos 40°\cos 20° - 0.25}$.

18) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\cos 20°\cos 40°\cos 80°$.

19) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\sin 5°\cdot\sin 25°\cdot\sin 35°\cdot\sin 55°\cdot\sin 65°\cdot\sin 85°$.

## תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.
11) שאלת הוכחה.
12) $-\frac{7}{9}$.
13) שאלת הוכחה.
14) שאלת הוכחה.
15) שאלת הוכחה.
16) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$.
17) 1.
18) $\frac{1}{8}$.
19) $\frac{1}{64}$.

# מכפלת פונקציות:

## סיכום כללי:

להלן נוסחאות המעבר מסכום למכפלה וממכפלה לסכום:

$$\begin{cases} \sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right] \\ \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right] \\ \sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \end{cases}$$

## שאלות:

1) הוכח את הזהות הבאה: $\sin 7\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}(\sin 8\alpha+\sin 6\alpha)$.

2) הוכח את הזהות הבאה: $\cos 11\alpha\sin 3\alpha=\frac{1}{2}(\sin 14\alpha-\sin 8\alpha)$.

3) הוכח את הזהות הבאה: $\cos 4\alpha\cos 10\alpha=\frac{1}{2}(\cos 6\alpha+\cos 14\alpha)$.

4) הוכח את הזהות הבאה: $\sin 3\alpha\sin 7\alpha=\frac{1}{2}(\cos 4\alpha-\cos 10\alpha)$.

5) הוכח את הזהות הבאה: $2\sin 7\alpha\sin 2\alpha+\cos 9\alpha=\cos 5\alpha$.

6) הוכח את הזהות הבאה: $\sin 7\alpha\cos 4\alpha-\sin 4\alpha\cos\alpha=\sin 3\alpha\cos 8\alpha$.

7) הוכח את הזהות הבאה: $\sin\alpha\sin 3\alpha=\cos 2\alpha-\cos 3\alpha\cos\alpha$.

8) הוכח את הזהות הבאה: $2\left(\sin^2\beta-\sin^2\alpha\right)=\cos 2\alpha-\cos 2\beta$.

9) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{2}{\cot\beta-\tan\alpha}=\tan(\alpha+\beta)-\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$.

## תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.
7) הוכחה.
8) הוכחה.
9) הוכחה.

# קורס ריענון במתמטיקה

## פרק 18 - טריגונומטריה במישור

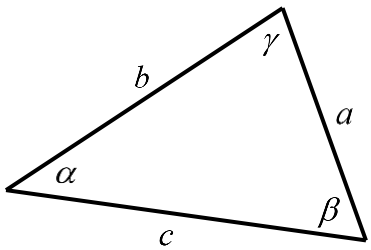
### תוכן העניינים

1. שאלות יסודיות עם משפט הסינוסים והקוסינוסים ..... 206
2. שאלות העוסקות בנוסחת שטח משולש ..... 214
3. שאלות המשלבות ידע בגיאומטריה ..... 223
4. שאלות מסכמות ..... 227

# שאלות יסודיות עם משפט הסינוסים והקוסינוסים:

## סיכום כללי:

**משפט הסינוסים:**




במשולש, צלע חלקי סינוס הזווית שמולה הוא גודל קבוע והוא שווה לפעמיים רדיוס המעגל החוסם.

בצורה מתמטית: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$ .

**משפט הקוסינוסים:**

במשולש, ריבוע צלע אחת שווה לסכום ריבועי שתי הצלעות האחרות פחות מכפלתן בקוסינוס הזווית שביניהן: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ או $\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ .

**מתי נשתמש בכל משפט:**

- נשתמש במשפט הסינוסים כאשר:
  - א. נתונות שתי זוויות וצלע.
  - ב. נתונות שתי צלעות והזווית מול אחת מהן.
  - ג. נתון רדיוס המעגל החוסם וצלע/זווית נוספת.

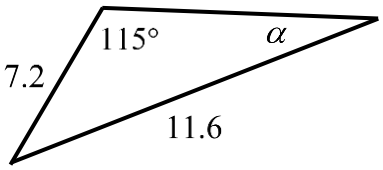
- נשתמש במשפט הקוסינוסים כאשר:
  - א. נתונות שתי צלעות והזווית ביניהן.
  - ב. נתונות שלוש צלעות.

- כאשר ישנם יותר נתונים מאשר בסעיפים שלהלן ייתכן שנוכל להשתמש בשני המשפטים. בבחירת המשפט שבו נשתמש כדאי לזכור שבמשפט הסינוסים ייתכנו שתי תשובות לזווית, גם אם בפועל רק אחת נכונה, ובמשפט הקוסינוסים תתקבל בוודאות הזווית הנכונה.

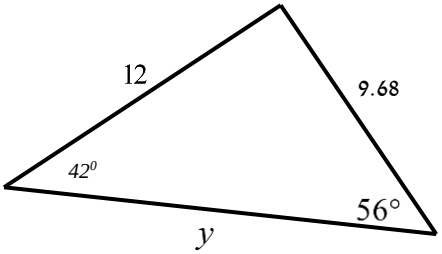
## שאלות:

**1)** מצא את ערכו של $a/x/y$ במשולשים הבאים
($R$ הוא רדיוס המעגל החוסם, נתוני הצלעות בס"מ):

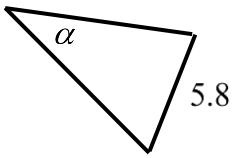
א.



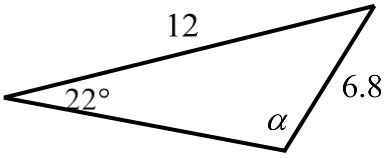

ב.



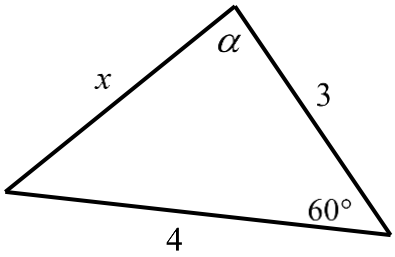

ג. רדיוס המעגל: $R=7$.




ד.

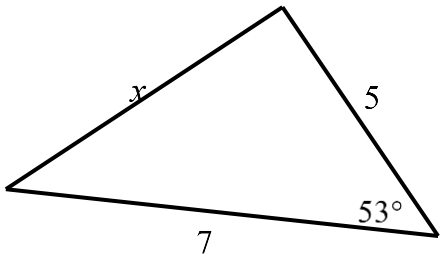



ה.

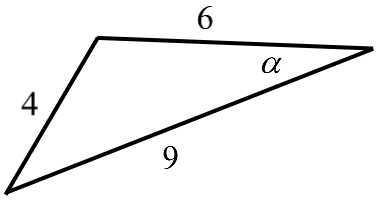



**2)** מצא את ערכו של $\alpha/x$ במשולשים הבאים:

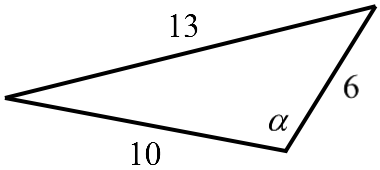
א.



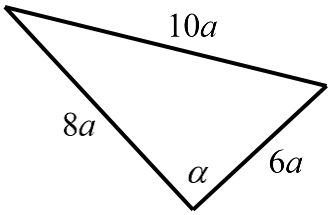

ב.



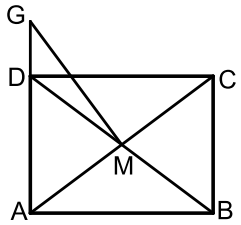

ג.




ד.

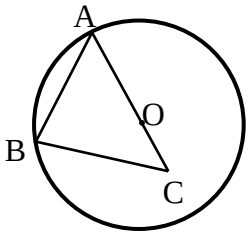


3) נתון משולש שווה שוקיים ABC (AB=AC) שאורך השוק שלו הוא 22 ס"מ
וגודלה של זווית הבסיס בו הוא 70°. CD הוא חוצה זווית הבסיס ∢C.
מצא את אורכו של הקטע AD.



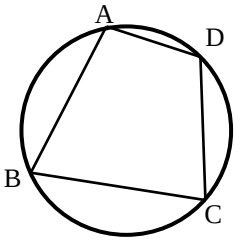

4) אלכסוני המלבן ABCD נפגשים בנקודה M.
הנקודה G נמצאת על המשך הצלע AD.
נתון: AD = 3 ס"מ , AB = 4 ס"מ , DG = 1.2 ס"מ.
מצא את גודלו של הקטע GM.

5) מרובע שאורכי אלכסוניו 8 ס"מ ו-11 ס"מ חסום במעגל
שאורך רדיוסו הוא 6 ס"מ.
חשב את זוויות המרובע.



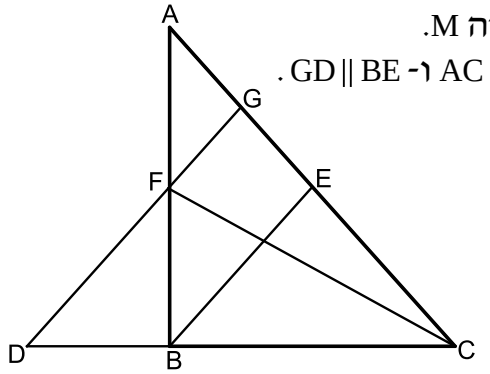

6) הצלע AB במשולש ABC היא מיתר במעגל שמרכזו O.
הצלע AC עוברת במרכז המעגל כמתואר בשרטוט.
נתון: BC = 9 ס"מ , OC = 3 ס"מ , $\sphericalangle BAC = 38°$.
מצא את אורכם של רדיוס המעגל ושל הצלע AB.

7) אחד האלכסונים במקבילית יוצר זווית של 30° עם
צלע אחת של המקבילית וזווית של 61.05° עם הצלע הסמוכה לה.
אחת מצלעות המקבילית גדולה ב-3 ס"מ מהצלע הסמוכה לה.
חשב את היקף המקבילית.




8) המרובע ABCD חסום במעגל.
נתון: AB = 6 ס"מ , BC = 9 ס"מ , CD = 10 ס"מ
ו-AD = 4 ס"מ.
מצא את אורכם של האלכסון AC ושל רדיוס המעגל.

**9)** BE ו-CF הם תיכונים במשולש ABC הנפגשים בנקודה M.
מהנקודה F מעבירים קטע GD כך שמתקיים: $AC = DC$ ו- $GD \parallel BE$.

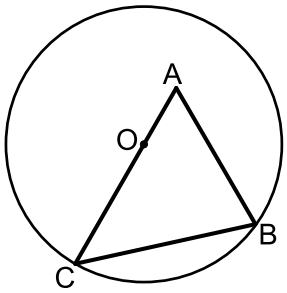



א. הוכח: $\frac{AG}{BD} = \frac{3}{4}$.

ב. נתון כי: $ME = 4$ ס"מ.
חשב את אורך הקטע DG.

ג. נתון כי: $\sphericalangle ACD = 48.189°$
הוכח כי המשולש DGC הוא שווה-שוקיים.

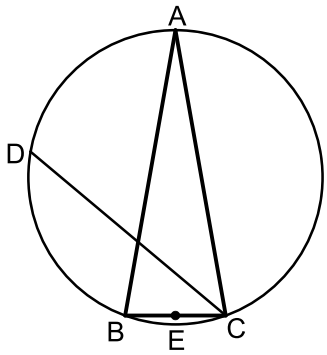
**10)** נתון משולש ABC. הקודקודים B ו-C של המשולש ABC נמצאים על מעגל שמרכזו O. מרכז המעגל O מונח על הצלע AC. אורך הצלע AB הוא 12 ס"מ ואורך הקטע AO הוא 4.5 ס"מ. זווית BAC היא $60°$.




א. חשב את רדיוס המעגל.

ב. מעבירים את הקוטר BD ואת הקטע AD כך שנוצר המשולש ADB.
חשב את זווית ADB.

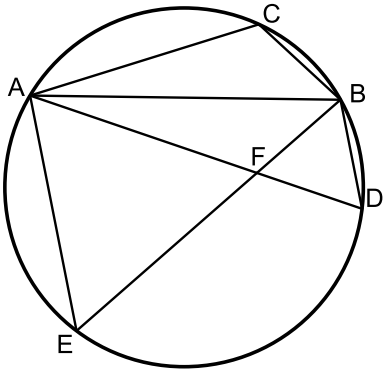
**11)** המשולש ABC הוא שווה שוקיים $(AB = AC)$ החסום במעגל שרדיוסו $R$.
הנקודה E היא אמצע הבסיס BC והנקודה D היא אמצע הקשת $\overset{\frown}{AB}$.
ידוע כי זווית הבסיס של המשולש היא $80°$.




א. הבע באמצעות $R$ את הקטעים CD ו-DE.

ב. $r$ הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש CED.
הבע באמצעות $R$ את $r$.

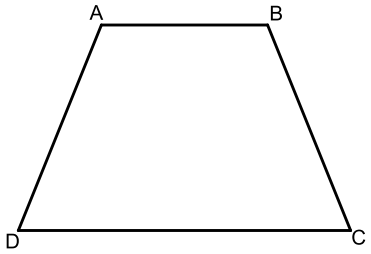
**12)** AB, AC ו-AD הם מיתרים במעגל המקיימים: $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD}$.
מהנקודה E שעל המעגל מעבירים את המיתרים AE ו-BE.
המיתרים BE ו-AD נחתכים בנקודה F.
נתון כי: $AC = AF = EF$.




א. הוכח: $\Delta ABF \cong \Delta ABC$.

ב. נתון גם: $3 \cdot \sphericalangle CAB = \sphericalangle DAE$.
הוכח כי המשולש AFE הוא שווה צלעות.

**13)** המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים $(AB \parallel CD\ ,\ AD = BC)$.




מידות הטרפז הן:

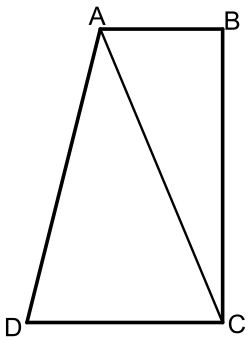
12 ס"מ = CD , 8 ס"מ= BC , 6 ס"מ = AB.

א. מצא את זווית C (עגל למספר שלם).

ב. מצא את אורך אלכסון הטרפז.

ג. חשב את רדיוס המעגל החוסם את הטרפז.

**14)** המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית $(AB \parallel CD\ ,\ \sphericalangle B = 90°)$.




מסמנים את הבסיס: $AB = t$ וידוע כי: $DC = 1.6t$ , $AD = 3t$.

היקף הטרפז הוא: 40 ס"מ.

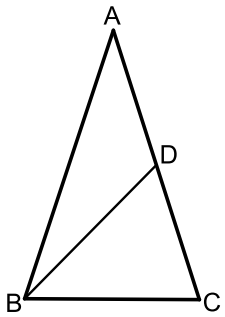
א. הבע באמצעות $t$ את אורך האלכסון AC.

ב. ידוע גם כי: $\sphericalangle D = 60°$.

i. חשב את אורך הקטע AC.

ii. חשב את שטח הטרפז.

**15)** המשולש ABC הוא שווה שוקיים (AB = AC) בעל זווית ראש 36° החסום במעגל שקוטרו 16 ס"מ. מעבירים תיכון לשוק BD.




א. מצא את אורך הבסיס BC במשולש.

ב. חשב את אורך התיכון BD.

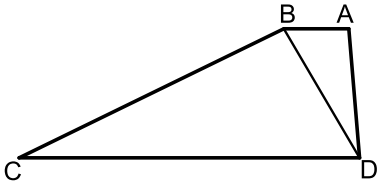
ג. מסמנים:

$r_1$ - רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD.

$r_2$ - רדיוס המעגל החוסם את המשולש BCD.

הוכח את היחס הבא: $\frac{r_1}{r_2} = 2\cos 36$.

**16)** המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.




מעבירים את האלכסון BD המקיים: $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ADB$.

נתון כי: 20 ס"מ = CD , 10 ס"מ = AD , 5 ס"מ = AB.

כמו כן ידוע כי השוק BC גדולה פי 2 מהאלכסון BD.

א. הראה כי השוק BC שווה לבסיס CD.

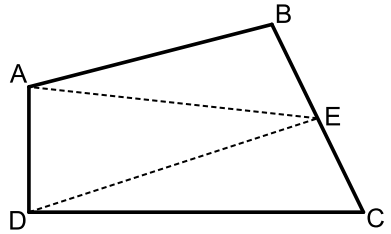
ב. חשב את זווית C.

ג. ממשיכים את שוקי הטרפז AD ו-BC עד לנקודה E שמחוץ לטרפז.
חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש CDE.

**17)** באיור שלפניך נתון המרובע ABCD.
ידוע כי: $\sphericalangle D = 90°$.
נסמן את הצלעות באופן הבא: $AD = 3x$ , $CD = 8x$ , $BC = 5x$ , $AB = 6x$.

א. חשב את זווית BCD.

ב. E היא נקודה הנמצאת על אמצע הצלע BC.
מעבירים את הקטעים AE ו-DE כך
ש-DE מקביל ל-AB.
חשב את היחס הבא: $\frac{S_{ABE}}{S_{BCD}}$.

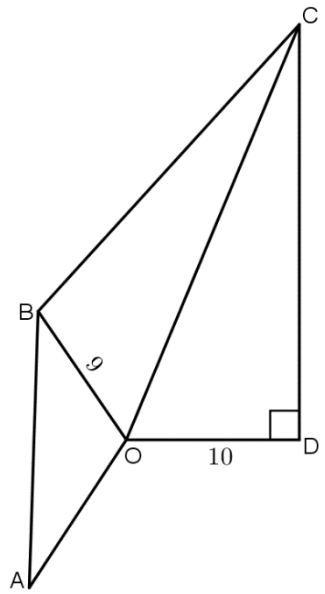



**18)** מהנקודה O מעבירים את הקטעים OA , OB , OC ו-OD.
ידוע כי זווית AOB שווה לזווית COD והיא מסומנת ב- $\alpha$.
המשולש COD הוא ישר זווית $\sphericalangle CDO = 90°$.
נתונים האורכים: $DO = 10$ , $BO = 9$.
מסמנים: $CD = 1.5m$ , $BC = 1.4m$.

א. הבע באמצעות $m$ את $\sin\alpha$.
(העזר במשולש COD ובטא תחילה את CO).

ב. נתון גם כי: $AB = m$.
מצא את $m$ אם ידוע כי רדיוס המעגל החוסם
את המשולש AOB הוא $8\frac{2}{3}$.

ג. חשב את זווית BOC.




**19)** במשולש ABC הזווית A היא בת $60°$.
מעבירים את הקטע AD כך שנוצרת זווית: $\sphericalangle ADB = 60°$.
ידוע כי $AB = \sqrt{28}$ וכי הצלע AD במשולש ABD
גדולה פי 1.5 מהצלע BD.

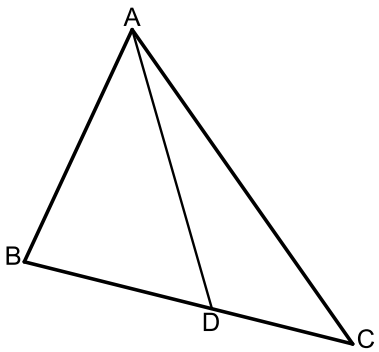
א. מצא את אורך הצלע BD.

ב. היקף המשולש ABC הוא: $P = 5\sqrt{7} + 7$.

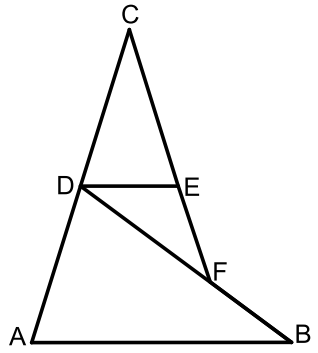
i. סמן: $DC = t$ והבע באמצעות $t$
את אורך הצלע AC.

ii. מצא את $t$.

ג. חשב את שטח המשולש ABC.

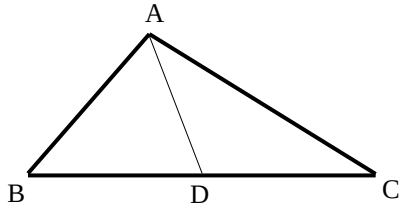


**20)** מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB ו-AC.
הנקודה D היא אמצע AC וממנה מעבירים את DE המקביל ל-AB.
הנקודות C , E ו-F נמצאות על אותו הישר.
ידוע כי המשולשים ABD , DEF ו-DCE הם
שווי שוקיים (AB = BD , DC = CE , EF = DE).
נתון כי : AD = 8.

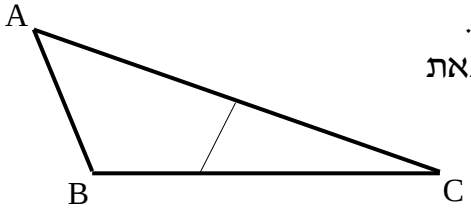



א. חשב את אורך הקטע BF.
ב. מחברים את הנקודות B ו-C.
חשב את אורך הצלע BC.

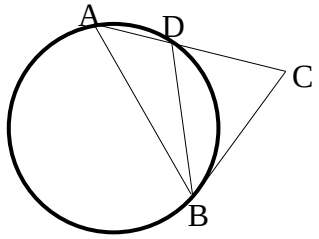
**21)** בשרטוט נתון : 6 ס"מ = AB , 8 ס"מ = AC ,
5 ס"מ = AD. הנקודה D היא אמצע הצלע BC.
חשב את אורך הקטע BC.



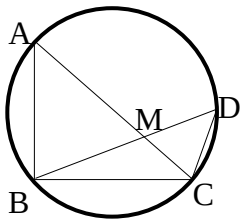

**22)** הצלע AC במשולש ABC גדולה פי 4 מהצלע AB.
הנקודה E היא אמצע הצלע AC והנקודה D נמצאת
על הצלע BC כך שמתקיים $DC = 2BD$ .
נתון : $AB = a$ , $BC = b$ .
הבע באמצעות $a$ ו- $b$ את אורך הקטע DE.




**23)** המשולש ABD חסום במעגל שרדיוסו $R$ .
המשך הצלע AD והמשיק למעגל בנקודה B
נפגשים בנקודה C. נתון : $\sphericalangle C = \alpha$ , $\sphericalangle ADB = \beta$ .
הבע באמצעות $R$ , $\alpha$ ו- $\beta$ את אורך הקטע BC.




**24)** AC ו-BD הם מיתרים במעגל שרדיוסו $R$ ,
שנפגשים בנקודה M. זווית $\sphericalangle B$ היא זווית ישרה.
נתון : $AB = k$ , $DM = p$ , $DC = q$ .
הבע באמצעות $R$ , $k$ , $p$ ו- $q$ את אורך הקטע MC.



## תשובות סופיות:

1) א. $\alpha=34.231°$ ב. $y=$ 14.33 ס"מ ג. $\alpha=155.526°$ או $\alpha=24.474°$
ד. $\alpha=41.382°$ או $\alpha=138.618°$ ה. $x=$ 3.606 ס"מ , $\alpha=73.898°$

2) א. $x=$ 5.646 ס"מ ב. $\alpha=20.742°$ ג. $\alpha=105.962°$ ד. $\alpha=90°$

3) AD = 13.064 ס"מ

4) GM = 3.360 ס"מ

5) 138.190° , 41.810° , 113.556° , 66.444°

6) AB = 14.56 ס"מ , $R=$ 9.242 ס"מ

7) $P=$ 22 ס"מ

8) AC = 10.790 ס"מ , $R=$ 5.395 ס"מ

9) DG = 18

10) $R=$ 10.5 ס"מ ב. 24.32°

11) א. $CD=R\sqrt{3}$ , $DE=1.48R$ ב. $r=1.15R$

13) א. 68° ב. 11.66 ס"מ ג. $R=$ 6.29 ס"מ

14) א. $AC=\sqrt{32.36t^2-448t+1600}$ ב.i. 13 ס"מ ב.ii. 78 סמ"ר

15) א. 9.4 ס"מ ב.i. 10 ס"מ

16) ב. $\sphericalangle C=28.9°$ ג. $R=13.77$

17) א. 64.04° ב. $\frac{S_{ABE}}{S_{ECD}}=0.817$

18) א. $\sin\alpha=\frac{1.5m}{\sqrt{100+2.25m^2}}$ ב. $m=16$ ג. 56.94°

19) א. 4 ב.i. $1.5\sqrt{28}+3-t$ ב.ii. 3 ג. $S=18.18$

20) א. 4.94 ס"מ ב. 17.19 ס"מ

21) BC = 10 ס"מ

22) $DE=\sqrt{\frac{1}{9}b^2-a^2}$

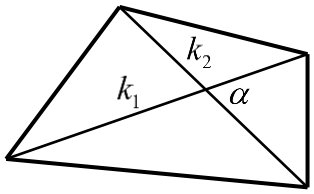
23) $BC=\frac{2R\sin\beta\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha}$

24) $MC=\sqrt{p^2+q^2-\frac{pqk}{R}}$

# שאלות העוסקות בנוסחת שטח משולש:

## סיכום כללי:

**שטחים של משולשים ומרובעים:**

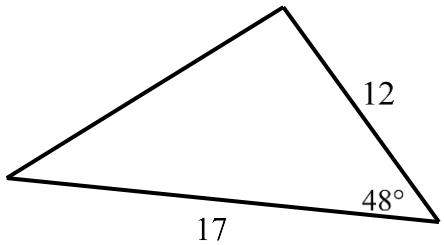



- שטח משולש ניתן לחישוב ע"י: $S=\frac{a\cdot h}{2}=\frac{ab\sin\gamma}{2}=\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}$.
- שטח מרובע ניתן לחישוב ע"י אלכסוניו: $S=\frac{k_1k_2\sin\alpha}{2}$.

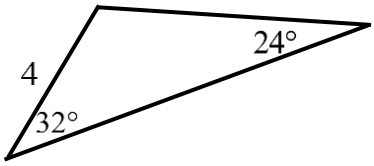
## שאלות:

**25)** חשב את שטחי המשולשים הבאים:

א.



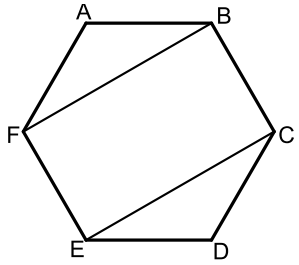

ב.




**26)** חשב את שטחו של טרפז שווה שוקיים שאורך האלכסון שלו 8 ס"מ והוא יוצר זווית של $15°$ עם הבסיסים.

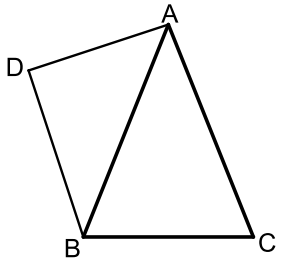
**27)** אורכו של מלבן הוא $m$ ורוחבו $n$. הזווית שבין אלכסוני המלבן היא $\theta$.
הוכח כי מתקיים: $\sin\theta=\frac{2mn}{m^2+n^2}$.

**28)** במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle B=90°$), BD חוצה את הזווית $\sphericalangle B$.
נתון: $AB=m$ , $\sphericalangle A=\alpha$.
הבע באמצעות $\alpha$ ו-$m$ את שטח המשולש BCD.



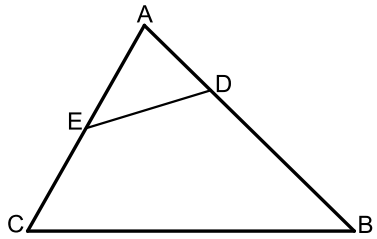

**29)** באיור שלפניך נתון משושה משוכלל ששטחו הכולל הוא $S$.
א. הבע באמצעות $S$ את אורך צלע המשושה.
ב. מעבירים אלכסונים במשושה כך שנוצר המלבן BFEC.
הבע באמצעות $S$ את שטח המלבן.

**30)** המשולש ABC הוא שווה שוקיים בעל זווית ראש $\alpha$, (AB = AC).
אורך הבסיס BC הוא $k$.
על השוק AB בונים משולש ישר זווית ABD ובו $\sphericalangle D = 90°$.



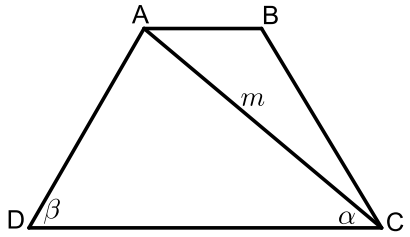

א. הבע באמצעות $k$ ו- $\alpha$ את אורך שוק המשולש ABC.
ב. הניצב AD במשולש ABD שווה ל- $0.85k$
וכי: $\sphericalangle ABD = 40°$. מצא את זוויות המשולש ABC.
ג. חשב את שטח המרובע ACBD אם ידוע כי $k = 6$.

**31)** במשולש ABC אורך הצלע AC הוא 8 ס"מ ואורך הצלע AB הוא 10 ס"מ.
הנקודה E היא אמצע הצלע AC
והנקודה D מקיימת: AD = 3 ס"מ.
ידוע כי: $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{5}$.



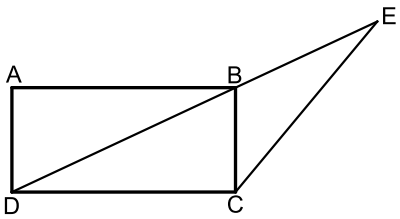

א. מצא את אורך הקטע DE.
ב. חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ADE.
ג. חשב את שטח המרובע BCED.

**32)** המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$. הקטע AC הוא אלכסון בטרפז.
מסמנים: $\sphericalangle ADC = \beta$, $\sphericalangle ACD = \alpha$, $AC = m$.

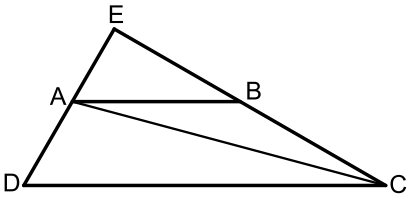



א. הבע באמצעות $\alpha$, $\beta$ ו- $m$ את אורך הבסיס הגדול DC.
ב. נתון כי האלכסון AC מקיים: $\frac{S_{ADC}}{S_{ABC}} = 3$.
הבע באמצעות $\alpha$, $\beta$ ו- $m$ את הבסיס AB.
ג. חשב את שטח הטרפז אם ידוע כי: $\beta = 60°$, $\alpha = 40°$ ו- $m = 8$.

**33)** המרובע ABCD הוא מלבן. מעבירים את האלכסון BD וממשיכים אותו עד לנקודה E שמחוץ למלבן.
מחברים את הנקודה E עם הקודקוד C.
ידוע כי אורך הצלע AD של המלבן הוא 6 ס"מ וכי אורך הקטע BE הוא 9 ס"מ. הזווית CBE היא $115°$.




א. מצא את אורך הקטע CE.
ב. מצא את אורך האלכסון BD.
ג. חשב את שטח המשולש DCE.

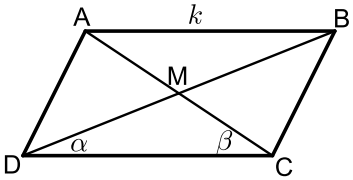



**34)** המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.
ממשיכים את השוקיים AD ו-BC עד לפגישתם
בנקודה E.ידוע כי: $DE \perp CE$.
מעבירים את האלכסון AC אשר חוצה את זווית C.
מסמנים את הבסיס הגדול DC ב- $k$ ואת: $\sphericalangle ACD = \alpha$.

א. הבע באמצעות $k$ ו- $\alpha$ את הבסיס הקטן AB.

ב. הבע באמצעות $k$ ו- $\alpha$ את שטח המשולש ABC.

ג. חשב את שטח המשולש ABC כאשר: $\alpha = 15°$ , 12 ס"מ $= k$.




**35)** נתונה מקבילית ABCD ובה מעבירים
את האלכסונים AC ו-BD אשר נחתכים
בנקודה M כמתואר באיור.
מסמנים: $\sphericalangle ACD = \beta$ , $\sphericalangle BDC = \alpha$ , $AB = k$.

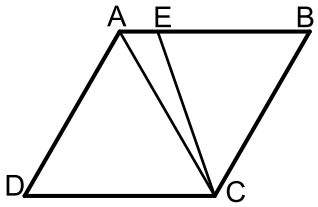
א. הוכח כי אלכסוני המקבילית מקיימים: $\frac{AC}{BD} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

ב. ענה על השאלות הבאות:

i. הבע באמצעות $\alpha$ , $\beta$ ו- $k$ את שטח המשולש DMC.

ii. הבע באמצעות $\alpha$ , $\beta$ ו- $k$ את שטח המקבילית ABCD.

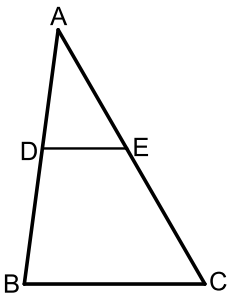
ג. נתון כי: $\frac{AC}{BD} = 2$. הראה כי שטח המקבילית הוא: $\frac{4k^2\sin^2\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.




**36)** המרובע ABCD הוא מעוין ובו $\sphericalangle D = 60°$.
מעבירים את האלכסון AC ואת הקטע CE
כך שהנקודה E נמצאת על הצלע AB ומחלקת
אותה ביחס: $\frac{BE}{AE} = 4$.

א. חשב את זווית AEC.

ב. נתון כי שטח המשולש AEC הוא 8.66 סמ"ר. חשב את שטח המעוין.



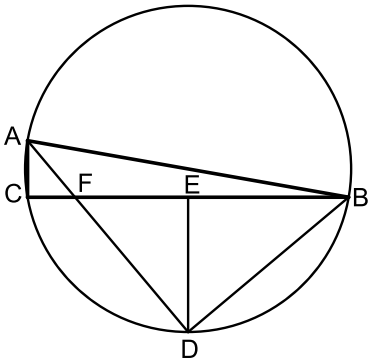

**37)** הקטע DE מקביל לצלע BC במשולש ABC כמתואר באיור.
נתון כי: $CE = 13$ , $BC = 15$ , $BD = \sqrt{129}$.
ידוע כי זווית AED היא $60°$.

א. חשב את אורך הקטע DE אם ידוע

ב. כי הוא קטן מ-10 ס"מ.

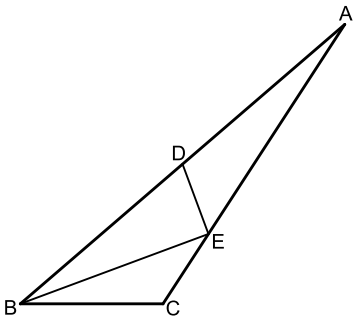
ג. חשב את שטח המשולש ADE.

**38)** המשולש ABC חסום במעגל כך ש-AB הוא קוטר.
הנקודה D היא אמצע הקשת BC וממנה מעבירים את המיתרים AD ו-BD ומעלים גובה DE לצלע BC .
מסמנים: $DE = k$ ונתון כי: $\sphericalangle ABC = 10°$ .



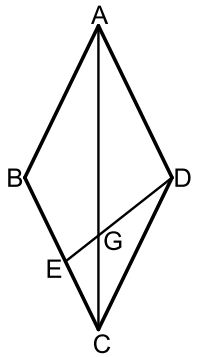

א. הבע באמצעות $k$ את רדיוס המעגל.
ב. הבע באמצעות $k$ את שטח המשולש ABF.
ג. מצא את $k$ אם ידוע כי שטח המשולש ABF הוא 15.363 סמ"ר.

**39)** במשולש ABC הקטע BE חוצה את זווית B.
הנקודה D היא אמצע הצלע AB ומקיימת: DE = CE .
ידוע כי: BC = 6 , BE = 8 , BD = 9 .



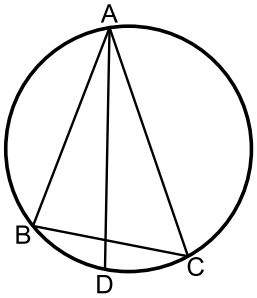

א. מצא את זווית B.
ב. חשב את שטח המשולש ADE.

**40)** נתון המעוין ABCD. אורך האלכסון הגדול במעוין AC גדול פי 1.8 מצלע המעוין.



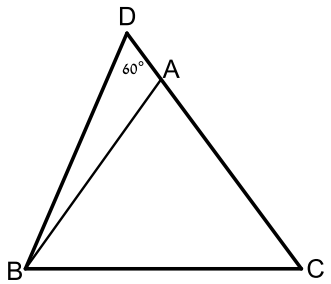

א. חשב את זוויות המעוין.
ב. מהקודקוד D מעבירים את הקטע DE שאורכו הוא $m$ .
הקטע DE חותך את האלכסון AC בנקודה G.
הזווית EDC תסומן ב- $\alpha$ .
i. הבע באמצעות $m$ ו- $\alpha$ את אורך הקטע CE.
ii. הבע באמצעות $m$ ו- $\alpha$ את שטח המשולש EGC.

**41)** המשולש ABC חסום במעגל כמתואר באיור.
מעבירים את המיתר AD החוצה את זווית BAC.
ידוע כי: $\sphericalangle ACB = 60°$ , $\sphericalangle BAC = 40°$ .
מסמנים: $AD = k$ .



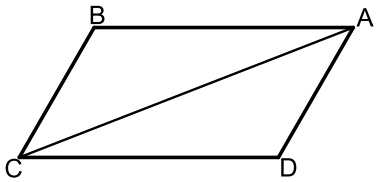

א. הבע באמצעות $k$ את אורך המיתר BD.
ב. ידוע כי שטח המשולש ABD הוא 7.368 סמ"ר.
מצא את $k$ (עגל למספר שלם).

**42)** המשולש ABC הוא שווה שוקיים (AB = AC).
ממשיכים את הצלע AC עד לנקודה D כך
שאורך שוק המשולש גדולה פי 3.8 מהקטע AD.
ידוע כי: $\sphericalangle D = 60°$.
אורך הקטע BD הוא 21 ס"מ.



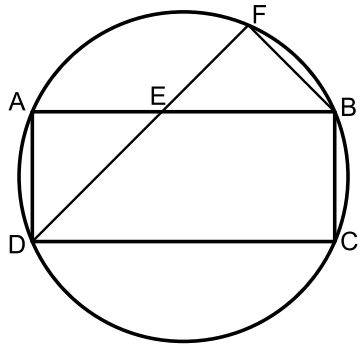

א. מצא את אורך הקטע AD.
ב. חשב את שטח המשולש ABC.

**43)** במקבילית ABCD אורך האלכסון AC הוא $\sqrt{79}$ ס"מ.
היקף המקבילית הוא 20 ס"מ וידוע כי: $\sphericalangle B = 120°$.



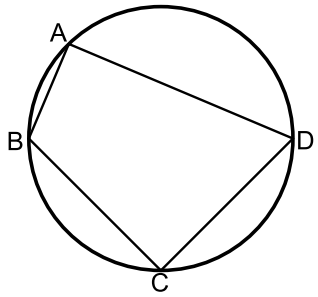

א. מצא את אורכי צלעות המקבילית.
ב. חשב את שטח המקבילית.
ג. מסמנים נקודה E על האלכסון AC כך שהמרובע CBED הוא בר חסימה.
חשב את רדיוס המעגל החוסם את המרובע CBED.

**44)** המרובע ABCD הוא מלבן החסום במעגל.
מהקודקוד D מעבירים את המיתר DF
החותך את הצלע AB בנקודה E.
ידוע כי: $\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{CF}$.
הצלע AD של המלבן תסומן ב-$a$.



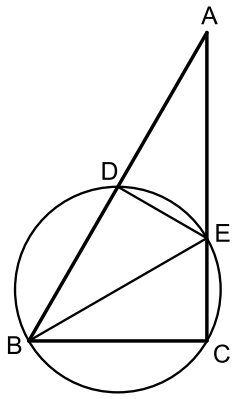

א. הוכח כי המשולש DAE הוא שווה שוקיים.
ב. נתון גם כי: BC = BF.
i. הבע באמצעות $a$ את רדיוס המעגל.
ii. חשב את הזוויות המרכזיות של הקשתות: $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$
(אין צורך לסרטט אותן).

**45)** המרובע ABCD חסום במעגל כמתואר באיור.
ידוע כי: $AB = b$ , $BC = a$ , $CD = a$ , $AD = 3b$.




א. הבע באמצעות $a$ ו-$b$ את $\cos\sphericalangle BCD$.
ב. הוכח כי אם BD קוטר אז מתקיים: $a = b\sqrt{5}$.
ג. נתון כי רדיוס המעגל הוא 3 ס"מ.
הסתמך על סעיף ב' וחשב את שטח המרובע ABCD.

**46)** המשולש ABC הוא ישר זווית $\sphericalangle C=90^\circ$ ובו: $\sphericalangle B=2\alpha$.
מעבירים מעגל שרדיוסו $R$ דרך הקודקודים B ו-C
אשר חותך את צלעות המשולש בנקודות D ו-E.
המיתר BE חוצה את זווית B.



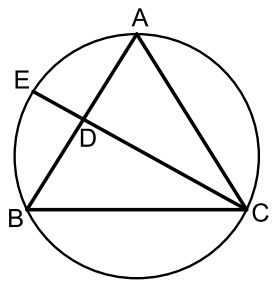

א. הבע באמצעות $R$ ו- $\alpha$ את שטח המשולש ABE.

ב. ידוע כי המשולש ABE הוא שווה שוקיים
וכי אורך המיתר CE הוא 6 ס"מ.
חשב את שטח המשולש ABE.

**47)** במשולש שווה שוקיים ABC (AB = AC) שאורך השוק בו הוא $k$ וזווית הבסיס שלו היא $\beta$, BE חוצה את זווית $\sphericalangle B$ ו- CD הוא הגובה לשוק AB.

הוכח כי שטח המשולש ADE הוא: $S_{ADE}=-\dfrac{k^2\sin\frac{\beta}{2}\sin 4\beta}{4\sin\frac{3\beta}{2}}$.

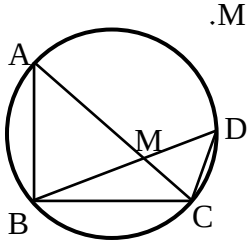
**48)** נתון משולש שווה שוקיים ABC (AB = AC) החסום במעגל.
מהקודקוד C מעבירים את המיתר CE החותך את השוק AB בנקודה D.
ידוע כי E היא אמצע הקשת $\overset{\frown}{AB}$ והיחס בין
הקטעים BD ו-CD הוא 4:7.
מסמנים: $\sphericalangle ACD=\alpha$.




א. מצא את זוויות המשולש ABC
(עגל למספרים שלמים).

ב. חשב את אורך המיתר BE אם ידוע כי
רדיוס המעגל החוסם שווה ל-8 ס"מ.

**49)** AC ו-BD הם מיתרים במעגל שרדיוסו $R$, שנפגשים בנקודה M.
זווית $\sphericalangle B$ היא זווית ישרה.
נתון: $\sphericalangle MBC=\alpha$, $\sphericalangle MCB=\beta$.



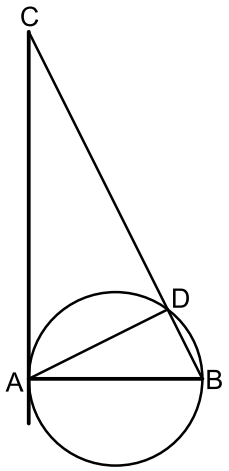

א. הבע באמצעות $R$, $\alpha$ ו- $\beta$ את שטח המשולש BDC.

ב. נתון: $\beta=2\alpha$, $S_{BDC}=\frac{1}{2}R^2$.
חשב את $\alpha$.

**50)** בטרפז שווה שוקיים, שאורך השוק שבו הוא $b$ והזווית שליד הבסיס הגדול היא $\gamma$ נתון שהאלכסונים מאונכים זה לזה.

א. הבע באמצעות $\gamma$ ו- $b$ את אורכי בסיסי הטרפז.

ב. חשב את $\gamma$ אם ידוע שהבסיס הגדול ארוך פי $\sqrt{3}$ מהבסיס הקטן.

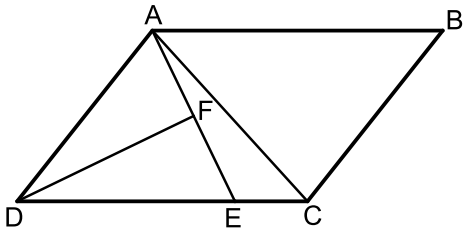



**51)** המיתר AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו $R$ ו-AD הוא מיתר.
ממשיכים את המיתר BD ומעבירים משיק מהנקודה A.
המשיק והמשך המיתר נפגשים בנקודה C.
מסמנים: $\sphericalangle BAD = \alpha$.

א. הבע באמצעות $\alpha$ ו- $R$ את שטח המשולש ABD.

ב. הבע באמצעות $\alpha$ ו- $R$ את שטח המשולש ACD.

ג. מצא את $\alpha$ אם ידוע כי שטח המשולש ABD קטן פי 4 משטח המשולש ACD.




**52)** המרובע ABCD הוא מקבילית.
הקטע AE מקצה על הצלע DC קטעים
המקיימים: $3CE = DE$.
מעבירים תיכון DF לצלע AE במשולש ADE.
ידוע כי: $\sphericalangle ADF = \sphericalangle CDF = \alpha$.
מסמנים: $CE = k$.

א. הבע באמצעות $k$ ו- $\alpha$ את אורך הקטע AE.

ב. מעבירים את האלכסון AC.
הבע באמצעות $k$ ו- $\alpha$ את היקף המשולש ACE.

ג. היקף המשולש ACE הוא $4.5k$. מצא את $\alpha$.

## תשובות סופיות:

**25)** א. $S=$ 75.801 סמ"ר ב. $S=$ 8.641 סמ"ר

**26)** $S=$ 16 סמ"ר

**27)** $S_{\Delta BCD}=\dfrac{m^2\tan^2\alpha\sin 45^\circ\cos\alpha}{2\sin(\alpha+45^\circ)}$

**28)** א. $\sqrt{\dfrac{2S}{\sqrt{27}}}\approx 0.62S$ ב. $\dfrac{2}{3}S$

**29)** א. $\dfrac{k}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ ב. $67.78^\circ$ , $67.78^\circ$ , $44.4^\circ$ ג. $S=37.18$

**30)** א. $DE=\sqrt{1.6}=1.26$ ב. $R=2$ ג. $S=21.48$

**31)** א. $DC=\dfrac{m\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$ ב. $AB=\dfrac{m\sin(\alpha+\beta)}{3\sin\beta}$ ג. $S_{ABCD}=31.2$

**32)** א. 12.75 ס"מ ב. 14.19 ס"מ ג. 63.05 ס"מ

**33)** א. $\dfrac{k\tan\alpha}{\tan 2\alpha}$ ב. $\dfrac{k^2\tan\alpha\sin 2\alpha}{2\tan^2 2\alpha}$ ג. $S=$ 7.754 ס"מ

**34)** ב.i. $\dfrac{k^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$ ב.ii. $\dfrac{2k^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

**35)** א. $109.1^\circ$ ב. $S=86.6$

**36)** א. 7 ס"מ ב. 34.48 סמ"ר

**37)** א. $R=\dfrac{k}{2\sin^2 40}=1.21k$ ב. $S=\dfrac{k^2\sin 10}{2\sin 50\sin^3 40}$ ג. $k=6$

**38)** א. $40.72^\circ$ ב. $S=12.52$

**39)** א. $128.32^\circ$ ; $51.68^\circ$ ב. $1.27m\sin\alpha$ ג. $\dfrac{0.35m^2\sin^2\alpha\sin(128.32-\alpha)}{\sin(25.84+\alpha)}$

**40)** א. $BD=\dfrac{k\sin 20}{\sin 100}$ ב. $k=7$

**41)** א. 5 ס"מ ב. $S=172.77$

**42)** א. BC = 3 ס"מ ו-AB = 7 ס"מ ב. $S=$ 18.18 סמ"ר ג. $R=\sqrt{\dfrac{37}{3}}$

**43)** ב.i. $R = a\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 1.3a$ ב.ii. $45^\circ$ , $135^\circ$

**44)** א. $\cos\sphericalangle BCD = \frac{a^2-5b^2}{a^2+3b^2}$ ג. 14.4 סמ"ר $= S$.

**45)** א. $S = R^2 \tan 2\alpha$ ב. $36\sqrt{3}$ סמ"ר $= S$.

**48)** א. $58^\circ$ , $58^\circ$ , $64^\circ$ ב. $BE = 7.75$.

**49)** א. $S = 2R^2 \sin\alpha \cos\beta \sin(90^\circ - \alpha + \beta)$ ב. $\alpha = 22.5^\circ$.

**50)** א. $\frac{b\sin(\gamma - 45^\circ)}{\sin 45^\circ}$ , $\frac{b\sin(135^\circ - \gamma)}{\sin 45^\circ}$ ב. $\gamma = 75^\circ$.

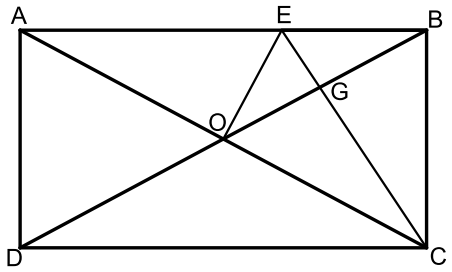
**51)** א. $S = R^2 \sin 2\alpha$ ב. $S = \frac{2R^2\cos^3\alpha}{\sin\alpha}$ ג. $\alpha = 26.56^\circ$.

**52)** א. $AE = 6k\sin\alpha$ ב. $P_{ACE} = k + 6k\sin\alpha + k\sqrt{25 - 24\cos 2\alpha}$

ג. $\alpha = 14.47^\circ$.

# שאלות המשלבות ידע בגיאומטריה:

## שאלות:

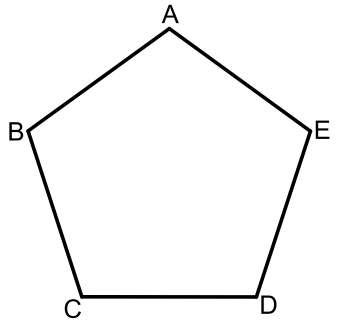



**53)** המרובע ABCD הוא מלבן.
מעבירים את האלכסונים AC ו-BD .
הנקודה E נמצאת על הצלע AB של המלבן
ומחלקת אותה כך ש- 2BE = AE .
ידוע כי הקטע OE מאונך לאלכסון AC
ושווה ל-BE.
הקטע CE חותך את האלכסון BD בנקודה G.

א. הוכח כי הקטע CE מאונך לאלכסון BD.

ב. הוכח כי מתקיים : 4GE = AE .

ג. נתון כי שטח המשולש BEG הוא 5 סמ"ר.
חשב את שטח המלבן ABCD.



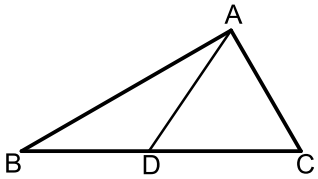

**54)** באיור שלפניך נתון מחומש משוכלל ACBDE
(כל זוויותיו הן $108°$) בעל אורך צלע $\alpha$ .

א. הבע באמצעות $\alpha$ את אלכסון המחומש AD.

ב. הבע באמצעות $\alpha$ את רדיוס המעגל
החוסם את המחומש.

ג. הבע באמצעות $\alpha$ את שטח המחומש.

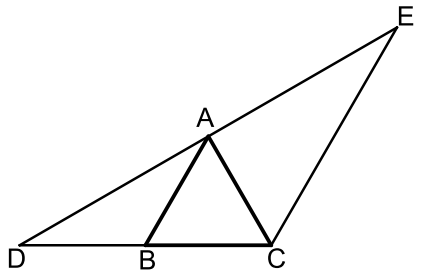
ד. אורך רדיוס המעגל החוסם את המחומש הוא 6 ס"מ.
חשב את שטח המחומש.




**55)** במשולש ABC הזווית C היא $60°$ .
מעבירים את הקטע AD כך שנוצרים
המשולשים ACD ו-ABD.
ידוע כי רדיוס המעגל החוסם את
המשולש ACD הוא : $R_1 = \sqrt{3}$ ס"מ .
כמו כן רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא : $R_2 =$ 3 ס"מ .

א. הוכח כי המשולש ABC הוא ישר זווית.

ב. היקף המשולש ABC הוא : $12+4\sqrt{3}$ ס"מ = P .
חשב את שטח המשולש.




**56)** המשולש ABC הוא שווה צלעות.
הקטע DE עובר דרך הקודקוד A כך שנוצרים שני משולשים ABD ו-ACE .
ידוע כי AC חוצה את זווית DCE במשולש DCE.

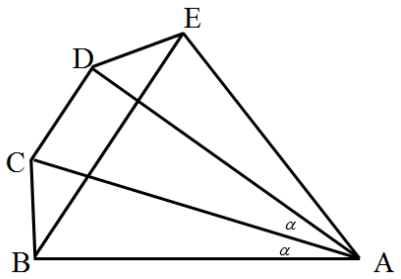
א. הוכח: $AB \parallel CE$ .

ב. הוכח: $BC \cdot DE = DC \cdot AE$ .

ג. נתון: $DC =$ 8 ס"מ
וכי: $AC \perp DE$ .

i. חשב את שטח המשולש DCE .

ii. חשב את שטח המשולש ABD.




**57)** מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB , AC , AD ו-AE
כך שמתקיים: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD = \alpha$ ו- $AB = AE$ .
מעבירים את האלכסון BE במחומש ABCDE.
מתקיים: $BE \parallel CD$ .
ידוע כי המרובע BCDE הוא בר חסימה.

א. הוכח כי המרובע BCDE הוא טרפז שווה שוקיים.

ב. נתון כי המשולש ACD הוא ש"ש ($AC = AD$).
הוכח כי: $\Delta ABD \cong \Delta ACE$ .

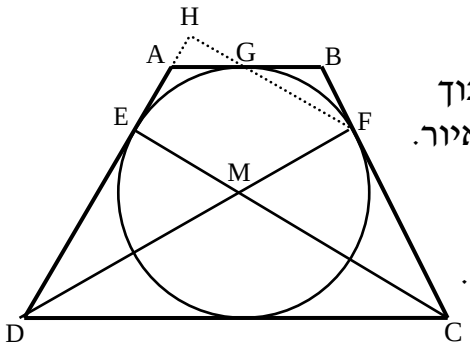
ג. ידוע כי: $\sphericalangle ADC = 3\alpha + 2.5$ ו- $\sphericalangle ADE = 3\alpha - 10$ .
הוכח כי משולש ADE הוא ישר זווית.

ד. נסמן: $AB = m$ .

i. הבע באמצעות $m$ את צלעות הטרפז BCDE.

ii. הבע באמצעות $m$ את שטח המחומש ABCDE.

iii. מצא את $m$ אם ידוע כי שטח המחומש ABCDE הוא 46.284 סמ"ר. (עגל למספר שלם).

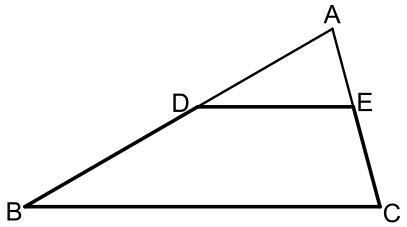



**58)** הטרפז ABCD הוא שווה שוקיים. חוסמים מעגל בתוך הטרפז אשר משיק לו בנקודות E, F ו-G כמתואר באיור.
הקטעים DF ו-CE חוצים את זוויות הטרפז ונחתכים בנקודה M.

א. הוכח כי הנקודה M היא מרכז המעגל החסום.

ב. חשב את זוויות הטרפז.

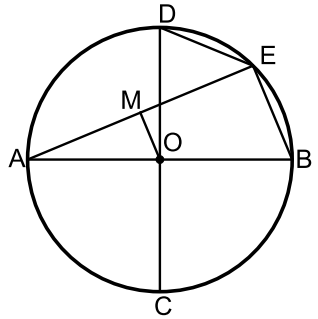
ג. ממשיכים את GF ואת AD כך שהם נפגשים בנקודה H.
חשב את היחס $\frac{EM}{FH}$ .




**59)** המרובע BDEC הוא טרפז $BC \parallel DE$.
המשכי השוקיים BD ו-CE נפגשים בנקודה A
כך שהמשולש ABC הוא שווה שוקיים (AB = BC).
נתון: 18 ס"מ = AB, $\sphericalangle ADE = 30°$.

א. סמן את אורך הבסיס DE ב-$x$
ואת שטח הטרפז BDEC ב-$S$.
הבע את $S$ באמצעות $x$.

ב. על הקטע AD בונים ריבוע.
ידוע כי שטחו קטן ב-1 סמ"ר משטח הטרפז BDEC.
חשב את היחס: $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}$.



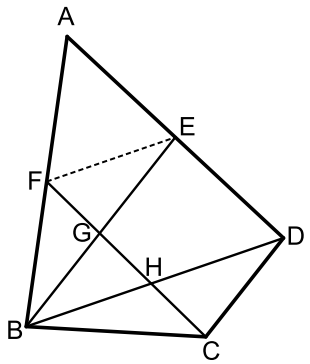

**60)** במעגל שמרכזו O מעבירים את הקטרים AB ו- CD
המאונכים זה לזה. E היא נקודה על היקף
המעגל המקיימת: 15 ס"מ = BE + DE.
מעבירים את המיתר AE.
הקטע OM מאונך למיתר AE ושווה למיתר DE.

א. הוכח כי המרובע OMEB הוא טרפז ישר זווית.

ב. מצא את אורך המיתר BE.
נתון כי שטח הטרפז הוא 90 סמ"ר.

ג. מצא את רדיוס המעגל.

ד. חשב את זווית B.




**61)** BD הוא אלכסון במרובע הבר-חסימה ABCD.
הנקודות E ו- F הן בהתאמה אמצעי
הצלעות AD ו- AB במרובע.
מעבירים את הקטעים BE ו-CF כך ש- $BE \parallel CD$.
נתון כי הזוויות $\sphericalangle A$ ו- $\sphericalangle BFE$ משלימות ל- $180°$.

א. הוכח: $\Delta BCD \sim \Delta BFE$.

ב. נתון כי: BE = 7.5 וכי: $GE - HD = 17\frac{1}{15}$.
חשב את אורך הקטע FE.

ג. נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש BED
הוא: 4.001 ס"מ = $R$. מצא את זווית $\sphericalangle EBD$.

## תשובות סופיות:

**53)** ג. 120 סמ"ר

**54)** א. $1.618\alpha$ ב. $0.85\alpha$ ג. $1.72\alpha^2$ ד. $S=85.57$

**55)** ב. $S=8\sqrt{3}$

**56)** ג.i. $S_{CDE}=16\sqrt{3}$ ג.ii. $S_{ABD}=4\sqrt{3}$

**57)** ד.i. $BE=1.2175m$ , $CD=0.4776m$ , $DE=0.4663m$ , $BC=0.4663m$

**62)** ד.ii. $0.7232m^2$ ד.iii. 8 ס"מ $=m$

**58)** ב. $120°$ , $60°$ ג. $\frac{2}{3}$

**59)** א. $S=81-0.25x^2$ ב. $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=\frac{16}{81}$

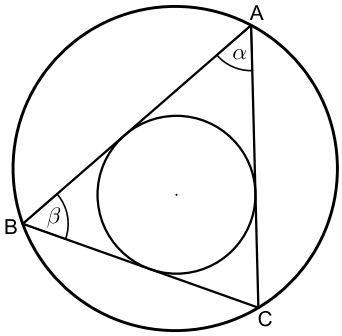
**60)** ב. BE = 10 ג. R = 13 ד. $\sphericalangle B=67.38°$

**61)** ב. FE = 4 ג. $16.73°$

# שאלות מסכמות:

## שאלות:

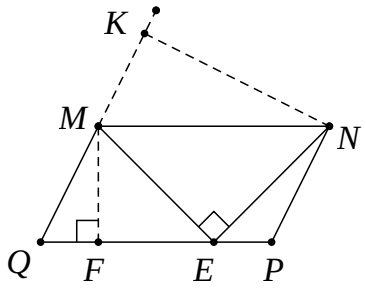
**1)** המשולש ABC חסום מעגל שרדיוסו $R$.
נתון כי $\sphericalangle B=\beta$ , $\sphericalangle A=\alpha$.



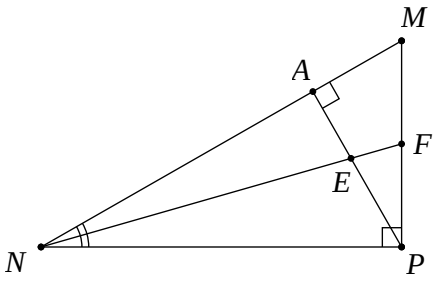

א. הבע את רדיוס המעגל החסום במשולש בעזרת $R$ , $\beta$ , $\alpha$.

ב. נתון כי: $\alpha=\beta=60°$.
חשב את רדיוס המעגל החסום במשולש בעזרת $R$.

**2)** במקבילית MNQP נקודה E נמצאת על הצלע PQ כך ש- $\sphericalangle MEN=90°$ (ראה ציור).
נתון: MQ = 12 ס"מ , $\sphericalangle MQP=70°$ , $\sphericalangle MNE=40°$.
מצא את הגובה MF, ואת הגובה NK.



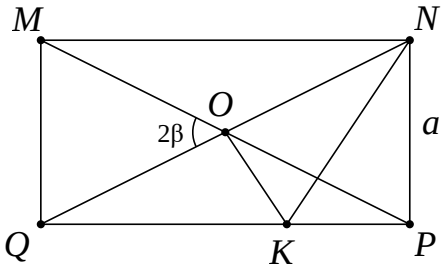

**3)** במשולש ישר-זווית MNP, $(\sphericalangle P=90°)$
PA הוא גובה ליתר ו-NF חוצה את הזווית $\sphericalangle MNP$.
PA ו-NF נחתכים בנקודה E (ראה ציור).
נתון: NP = 24 ס"מ , $\sphericalangle MNP=40°$.




א. מצא את אורך הקטע NA.

ב. מצא את אורך הקטע EF.

**4)** אלכסוני המלבן MNPQ נחתכים בנקודה O.
מנקודה O מעלים אנך ל-QN החותך את QP בנקודה K (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle MOQ=2\beta$ , NP = $a$.



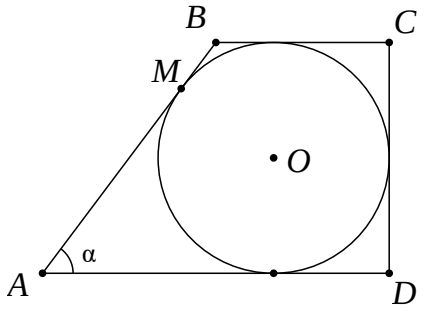

א. הבע את אורך הקטע OK באמצעות $\beta$ ו- $a$.

ב. הבע את היקף המשולש NOK באמצעות $\beta$ ו- $a$.

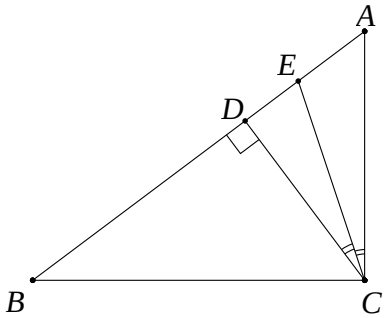
**5)** בטרפז ישר-זווית ABCD חסום מעגל שמרכזו O.
הנקודה M היא נקודת ההשקה של המעגל עם השוק AB.
נתון: AM = 12 ס"מ , $\sphericalangle BAD = \alpha$ .

א. הבע את רדיוס המעגל בעזרת $\alpha$ .

ב. הבע את היקף הטרפז בעזרת $\alpha$ .




**6)** במשולש ישר-זווית ABC (ראה ציור) נתון:
BC = 8 ס"מ , $\sphericalangle ACB = 90°$ , $\sphericalangle ABC = \beta$ .
CD הוא הגובה ליתר.
CE הוא חוצה-הזווית $\sphericalangle ACD$ .
הבע את אורך הקטע AE באמצעות $\beta$ .




**7)** נתון מעגל שרדיוסו $R$ . מצולע משוכלל בעל 9 צלעות חוסם את המעגל הזה.
מצולע משוכלל אחר בעל 9 צלעות חסום בתוך מעגל זה.
חשב את היחס בין שטח המצולע החוסם את המעגל לשטח המצולע החסום במעגל זה.

**8)** $\Delta ABC$ הוא משולש שווה-שוקיים (AB = AC) שאורך בסיסו 12 ס"מ.
AD הוא הגובה לבסיס BC ו-CE הוא הגובה לשוק AB.
שני הגבהים נחתכים בנקודה O. נתון: $\sphericalangle ABC = \alpha$ $(\alpha > 45°)$.

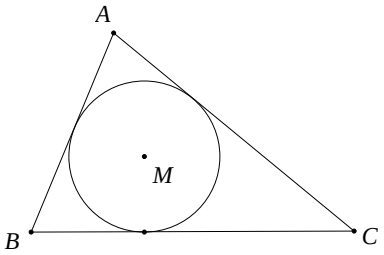
א. הבע את היחס AO : DO באמצעות $\alpha$ .

ב. הראה כי בעבור $\alpha = 60°$ הביטוי שמצאת בסעיף א' מתאים לתכונות הגאומטריות של משולש שווה-צלעות.

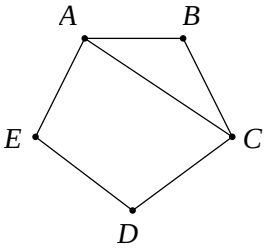
**9)** במשולש ABC חסום מעגל שמרכזו M ורדיוסו $r$ (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle C = 46°$ , $\sphericalangle B = 62°$ .

א. הבע באמצעות $r$ את אורך הצלע BC .

ב. נתון: BC = 16 ס"מ. מצא את $r$ .

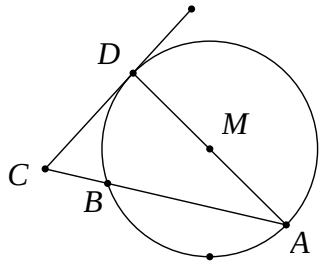



**10)** במחומש משוכלל ABCDE (ראה ציור)
אורך האלכסון AC הוא 15 ס"מ.
חשב את שטח המחומש.



**11)** מנקודה C הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו M ורדיוסו $R$ מעבירים משיק CD וחותך CBA למעגל (ראה ציור).

נתון: $CD=\frac{3}{5}R$.

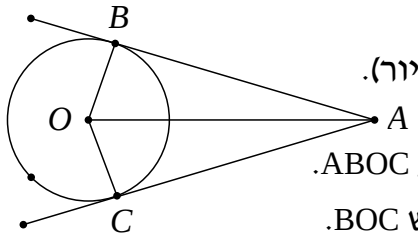



א. מצא את זוויות המשולש CAD.

ב. הבע באמצעות $R$ את שטח המשולש BCD.

**12)** מנקודה A, הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו O, יוצאים שני משיקים למעגל, AB ו-AC (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle BAC=2\alpha$, 10 ס"מ = AO.




א. הבע באמצעות $\alpha$ את $S_1$, שטח המרובע ABOC.

ב. הבע באמצעות $\alpha$ את $S_2$, שטח המשולש BOC.

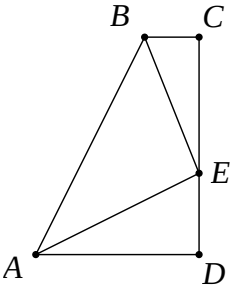
ג. הראה שאם $\alpha=30°$, אזי: $S_1=4\cdot S_2$.

**13)** ABCD הוא טרפז ישר-זווית $(\sphericalangle C=\sphericalangle D=90°)$.

נקודה E נמצאת על הצלע DC (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle AEB=90°$, $AE=BE=k$ ו- $\sphericalangle CBE=\beta$.

הבע באמצעות $k$ ו- $\beta$ את שטח הטרפז.

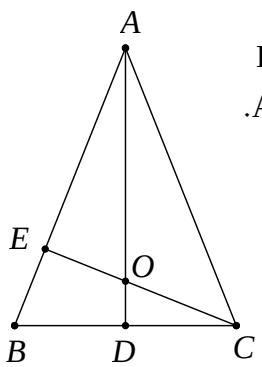



**14)** ענה על השאלות הבאות:

א. במעושר משוכלל, ששטחו 100 סמ"ר, חוסמים מעגל. מצא את רדיוס המעגל החסום במעושר.

ב. מעושר משוכלל חסום במעגל, שאת רדיוסו מצאת בסעיף א'. מצא את שטח המעושר המשוכלל הזה.

**15)** ABC הוא משולש שווה-שוקיים (AB = AC) שבו זווית הראש היא זווית חדה. נתון כי זווית הבסיס היא $\beta$ ואורך הבסיס BC הוא $2\alpha$. AD הוא הגובה לבסיס BC ו-CE הוא הגובה לשוק AB. הגבהים AD ו-CE נפגשים בנקודה O (ראה ציור).

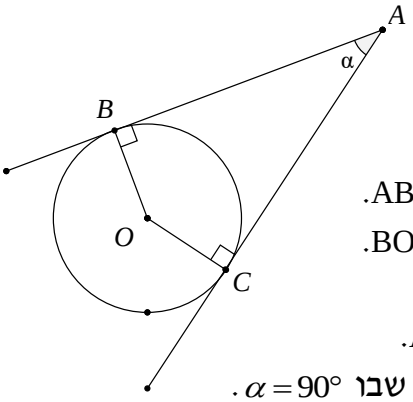



א. הבע באמצעות $\alpha$ ו- $\beta$ את אורכי הקטעים CO ו-CE.

ב. הבע באמצעות $\beta$ את היחס $\frac{CO}{CE}$.

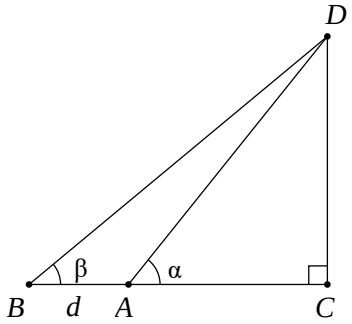
ג. חשב את היחס שמצאת בסעיף ב' כאשר $\beta=60°$, והסבר מהי המשמעות הגאומטרית של התוצאה שקיבלת.

**16)** מנקודה A יוצאים שני משיקים למעגל שמרכזו O, שאורכם $m$ (כלומר: $AB = AC = m$).
נקודות ההשקה הן B ו-C, והזווית שבין המשיקים היא $\sphericalangle BAC = \alpha$ (ראה ציור).

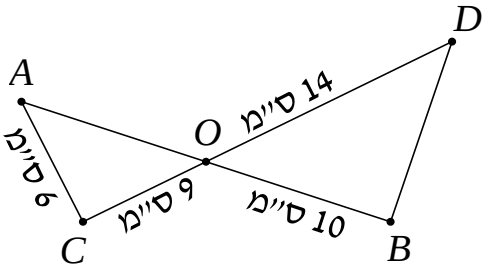



א. הבע באמצעות $m$ ו- $\alpha$ את שטח המשולש ABC.
ב. הבע באמצעות $m$ ו- $\alpha$ את שטח המשולש BOC.
ג. הבע באמצעות $\alpha$ את היחס שבין שטחו של המשולש BOC לבין שטחו של המשולש ABC.
ד. בדוק את תשובתך לסעיף ג' למקרה המיוחד שבו $\alpha = 90°$.

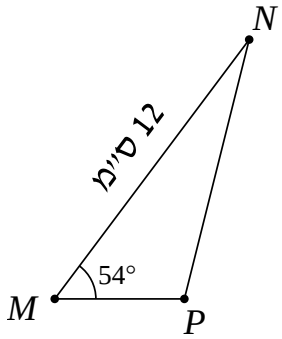
**17)** במשולש ישר-זווית DAC נתון $\sphericalangle DAC = \alpha$.
מאריכים את הניצב AC כך ש- $AB = d$.
נתון כי: $\sphericalangle DBA = \beta$ (ראה ציור).
סמן: $AC = x$.
הבע את $x$ באמצעות $d$, $\alpha$ ו- $\beta$.




**18)** הקטעים AB ו-CD נחתכים בנקודה O.
נתון כי: $\sphericalangle OAC = 60°$,
9 ס"מ = CO, 6 ס"מ = AC,
14 ס"מ = OD, 10 ס"מ = OB.
חשב את $\sphericalangle ODB$.

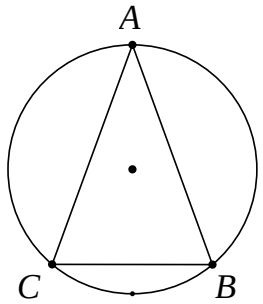



**19)** במשולש MNP גודל הזווית M הוא $54°$.
נתון כי אורך הצלע MN הוא 12 ס"מ (ראה ציור), והצלע NP ארוכה ב-7 ס"מ מהצלע MP.




א. חשב את אורך הצלע NP.
ב. PA הוא תיכון לצלע MN.
חשב את שטח המשולש PAN.

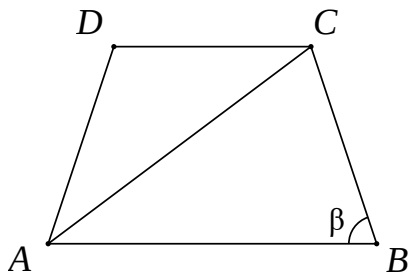
**20)** המשולש השווה-שוקיים ABC (AB = AC) חסום במעגל (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle ABC = \beta$.
כמו כן ידוע שאורך רדיוס המעגל הוא 20 ס"מ.




א. הבע בעזרת $\beta$ את שטח המשולש ABC.
ב. חשב את שטח המשולש ABC בעבור $\beta = 45°$.

**21)** במשולש ABC הזווית $\sphericalangle C$ היא בת $60°$, אורך הצלע AB הוא $\sqrt{13}$ ס"מ, והיקף המשולש הוא $7+\sqrt{13}$ ס"מ. חשב את שטח המשולש.

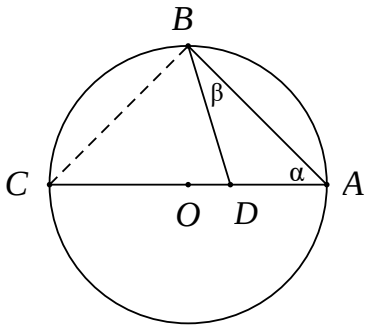
**22)** בטרפז שווה-שוקיים ABCD (AD = BC) אורך הבסיס הגדול AB שווה לאורך האלכסון. זווית הבסיס היא $\beta$ $(\beta > 60°)$, (ראה ציור). הבע באמצעות $\beta$ את היחס שבין שטח המשולש ACD לשטח המשולש ABC.



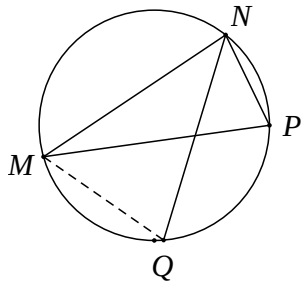

**23)** הקודקודים A ו- B של המשולש ABD נמצאים על היקף מעגל שאורך רדיוסו 12 ס"מ ומרכזו O. הקודקוד D של המשולש ABD נמצא על הרדיוס OA.

א. הבע בעזרת $\alpha$ ו- $\beta$ את שטח המשולש ABD.

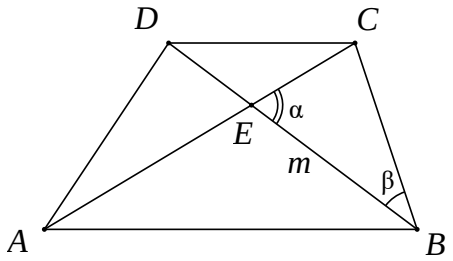
ב. הבע בעזרת $\alpha$ ו- $\beta$ את היחס שבין שטח המשולש ABC לשטח המשולש ABD.



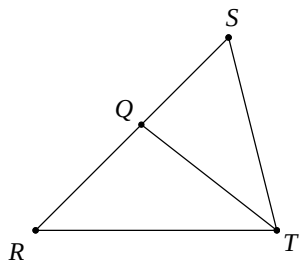

**24)** משולש MNP חסום במעגל.
המיתר NQ חוצה את הזווית $\sphericalangle MNP$.
נתון: $\sphericalangle MNP = 80°$, $\sphericalangle MPN = 70°$,
NP = 12 ס"מ.
חשב את אורך המיתר MQ.




**25)** נתון טרפז ABCD $(AB \| CD)$.
הנקודה E היא נקודת המפגש של אלכסוני הטרפז.
נתון: $DC = BC$, $BE = m$,
$\sphericalangle CEB = \alpha$, $\sphericalangle CBD = \beta$ (ראה ציור).
הבע את אורכי בסיס הטרפז:
AB ו- CD באמצעות $m$, $\alpha$ ו- $\beta$.



**26)** במשולש RST נתון: QT הוא חוצה-הזווית $\sphericalangle RTS$
(ראה ציור), $QS = m$ , $RQ = \sqrt{2}$ ,
$\sphericalangle RST = \alpha$ , $\sphericalangle TRQ = 45°$ .




א. הבע את $\sin\alpha$ באמצעות $m$ .

ב. נתון כי: $m = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

חשב את זוויות המשולש RST.

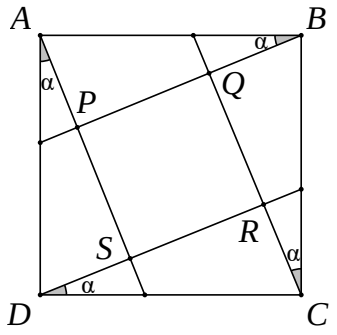
**27)** במשולש שווה שוקיים ABC (AB = AC) התיכון לשוק שווה באורכו לרדיוס המעגל החוסם את המשולש. חשב את זווית הבסיס של המשולש.

**28)** נתון משולש שצלעותיו $t$ , $2t$ , $kt$ .

א. לאיזה ערכים של הקבוע $k$ המשולש הוא קהה זווית?

ב. נתון $k = \sqrt{7}$ . הבע ע"י $t$ את אורך חוצה הזווית הקהה.

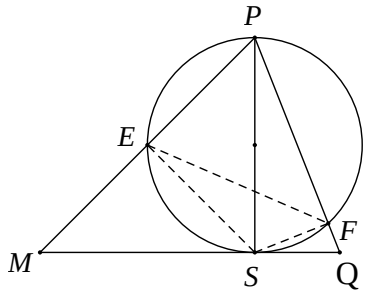
**29)** בתוך הריבוע ABCD נתון, העבירו ארבעה קטעים היוצרים את אותה זווית $\alpha$ עם צלעות הריבוע כך שהתקבל ריבוע פנימי PQRS.




א. הוכח כי: $\frac{PQ}{AB} = \cos\alpha - \sin\alpha$ .

ב. לאיזו זווית $\alpha$ מתקיים: $PR = AB$ ?

**30)** PS הוא גובה במשולש PMQ (ראה ציור).
נתון $\sphericalangle SPQ = \beta$ , $\sphericalangle MPS = \alpha$ , $PS = h$ .




א. הבע את שטח המשולש PMQ באמצעות $h$ , $\alpha$ ו- $\beta$ .

ב. מעגל שקוטרו PS חותך את הצלעות PM ו-PQ בנקודות E ו-F בהתאמה (ראה ציור).

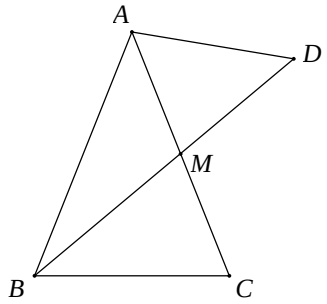
i. הבע באמצעות $\alpha$ ו- $\beta$ את $\sphericalangle ESF$ .

ii. הבע באמצעות $\alpha$ ו- $\beta$ את היחס בין שטח המשולש ESF לשטח המשולש PMQ.

**31)** במשולש ABC הצלעות הן $a$ , $b$ ו- $c$ והזוויות שמונחות מולן הן: $\alpha$ , $\beta$ ו- $\gamma$ בהתאמה.

א. הבע את אורך התיכון $m_a$ (התיכון לצלע $a$) באמצעות הצלעות $b$ ו- $c$ והזווית $\alpha$.

ב. בדוק את הנוסחה שמצאת למקרה שבו המשולש ABC הוא שווה צלעות.

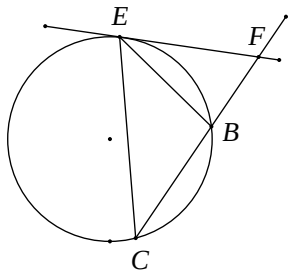



**32)** במשולש שווה שוקיים ABC (AB = AC),
BM הוא תיכון לשוק (ראה ציור).
נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא 10 ס"מ וכן נתון ש- $\sphericalangle BAC = 50°$.

א. מצא את גודל הזווית $\sphericalangle BMC$.

ב. ממשיכים את BM עד לנקודה D,
כך שרדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא 14 ס"מ.
מצא את שטח המשולש AMD.

**33)** משולש שווה שוקיים BCE (BC = BE) חסום במעגל שרדיוסו $R$.
זווית הבסיס של המשולש BCE היא $\alpha$.
בנקודה E העבירו משיק למעגל החותך את המשך השוק BC בנקודה F (ראה ציור).

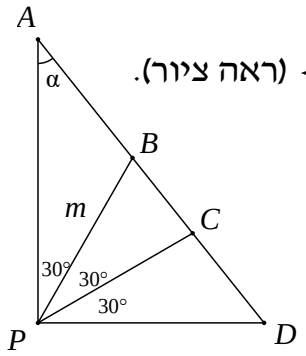



א. בטא את שטח המשולש BEF באמצעות $R$ ו- $\alpha$.

ב. מצא את הערך של $\alpha$ שבעבורו שטח המשולש BCE שווה לשטח המשולש BEF.

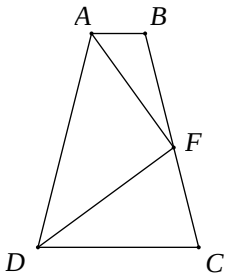
**34)** בטרפז BCDE $(BC \| ED)$ אורך הבסיס BC הוא 12 ס"מ.
הזווית שבין הבסיס BC לשוק DC היא $80°$.
אורך האלכסון BD הוא 16 ס"מ, והוא חוצה את הזווית $\sphericalangle CBE$.
חשב את היקף הטרפז.

**35)** במשולש ישר-זווית APD מחלקים את הזווית הישרה $\sphericalangle P$ לשלוש זוויות שוות, כלומר $\sphericalangle APB = \sphericalangle BPC = \sphericalangle CPD = 30°$ (ראה ציור).
נתון כי: $PB = m$ , $\sphericalangle PAD = \alpha$.

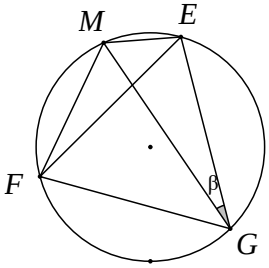



א. היעזר במשפט הסינוסים,
והבע את AB , AC , BD ו- CD באמצעות $m$ ו- $\alpha$.

ב. הוכח כי: $\frac{AC \cdot BD}{AB \cdot CD} = 3$.



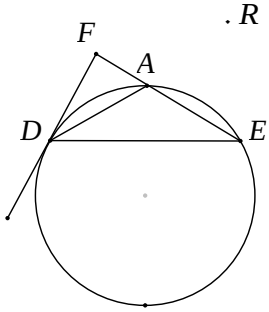

**36)** בטרפז שווה שוקיים ABCD $(AD = BC\ ,\ AB \| DC)$,
F היא נקודה על השוק BC, כך ש-DF חוצה את
הזווית $\sphericalangle CDA$ ו-AF חוצה את הזווית $\sphericalangle DAB$ (ראה ציור).
נתון: $AB = \beta$ , $\sphericalangle FAB = \beta$.
הבע באמצעות $b$ ו- $\beta$ את אורך הבסיס DC.




**37)** משולש שווה צלעות EFG חסום במעגל שרדיוסו $R$.
M היא נקודה על המעגל. נתון: $\sphericalangle MGE = \beta$ (ראה ציור).

א. הוכח כי: $ME + MF = MG$.

ב. אם $ME = R$ מה תוכל לומר על MG?

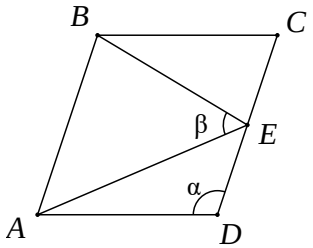



**38)** משולש שווה שוקיים ADE (AD = AE) חסום במעגל שרדיוסו $R$.
ישר המשיק למעגל בנקודה D חותך את המשך
הצלע AE בנקודה F (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle AE = \alpha$ $(60° < \alpha < 180°)$.

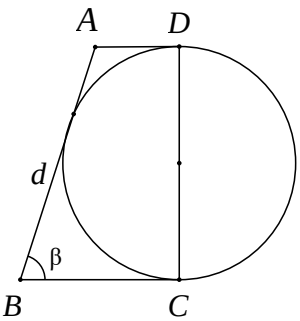
א. הבע את שטח המשולש ADF באמצעות $R$ ו- $\alpha$.

ב. הבע באמצעות $\alpha$ את היחס שבין שטח
המשולש ADE ובין שטח המשולש ADF.

ג. חשב את $\alpha$ אם שטח המשולש ADE שווה לשטח המשולש ADF.




**39)** במעוין ABCD הנקודה E היא אמצע הצלע CD.
נתון: $\sphericalangle ADC = \alpha$ , $\sphericalangle AEB = \beta$ (ראה ציור).
הוכח כי: $\cos\beta = \dfrac{3}{\sqrt{25 - 16\cos^2\alpha}}$.

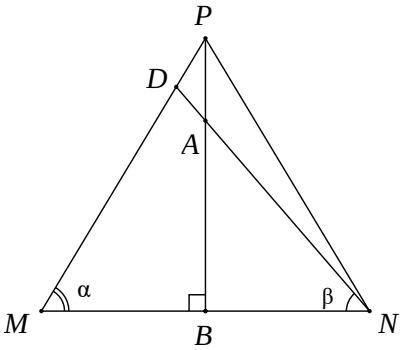



**40)** נתון טרפז ABCD ונתון מעגל. השוק DC הוא קוטר המעגל.
השוק AB משיקה למעגל, והבסיסים AD ו- BC
משיקים גם הם למעגל בנקודות D ו- C בהתאמה (ראה ציור).
נתון כי: $\sphericalangle B = \beta$ , $AB = d$.

א. הבע באמצעות $d$ את סכום בסיסיו של הטרפז.

ב. הבע באמצעות $d$ ו- $\beta$ את היקף הטרפז ואת השטח
של הטרפז.

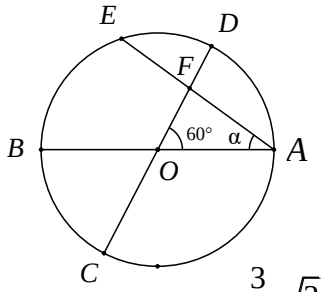
ג. נתון שהיקף הטרפז 25 ס"מ ושטחו 25 סמ"ר.
חשב את הזווית החדה $\beta$.




**41)** במשולש שווה שוקיים PMN (PM = PN),
A היא נקודה על הגובה PB, כך ש- $PA = \frac{1}{5} \cdot PB$.
הישר NA חותך את השוק PM בנקודה D (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle DNM = \alpha$ , $\sphericalangle DNB = \beta$ ו- $BN = \alpha$.

א. חשב את היחס $\tan\beta : \tan\alpha$.

ב. חשב את היחס PM:DM.




**42)** במעגל שמרכזו O ורדיוסו R מעבירים שני
קטרים AB ו- CD הנחתכים בזווית של $60°$.
מיתר AE, היוצר זווית $\alpha$ עם הקוטר AB,
חותך את הקוטר CD בנקודה F (ראה ציור).

א. הבע את שטח המשולש ACF באמצעות $R$ ו- $\alpha$.

ב. הוכח שכאשר $\alpha = 30°$, שטח המשולש ACF הוא $\frac{3}{8} \cdot \sqrt{3} \cdot R^2$.

## תשובות סופיות:

1) א. $r=\frac{2R\sin(\alpha+\beta)\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\alpha}{2}}{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}=4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ ב. $\frac{1}{2}R$

2) MF = 11.28 ס"מ , KN = 21.52 ס"מ

3) א. NA = 18.385 ס"מ ב. EF = 5.975 ס"מ

4) א. $OK=\frac{a}{2\cos\beta}$ ב. $\frac{a}{2\sin\beta}\cdot\left[1+\tan\beta+\frac{1}{\cos\beta}\right]$

5) א. $12\cdot\tan\frac{\alpha}{2}$ ב. $24\cdot\left(1+\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2$

6) $AE=8\sin\beta\cdot\left[\tan\beta-\tan\left(\frac{1}{2}\beta\right)\right]=8\tan\beta\cdot\tan\left(\frac{1}{2}\beta\right)$

7) $2\cdot\frac{\tan 20^\circ}{\sin 40^\circ}=\frac{1}{\cos^2 20^\circ}\approx 1.132$

8) א. $-2\cdot\frac{\tan\alpha}{\tan 2\alpha}=-\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha-1$

ב. מתקיים: $AO=2\cdot DO$ (מפגש הגבהים הוא גם מפגש התיכונים).

9) א. $BC=r\cdot(\tan 59^\circ+\tan 67^\circ)\approx 4.02\cdot r$ ב. $r=\frac{16}{\tan 59^\circ+\tan 67^\circ}\approx 3.98$

10) $S=$ 147.86 סמ"ר

11) א. $\sphericalangle A=16.7^\circ$ , $\sphericalangle D=90^\circ$ , $\sphericalangle C=73.3^\circ$ ב. $S\approx 0.0495\cdot R^2$

12) א. $S_1=100\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=50\cdot\sin 2\alpha$

ב. $S_2=50\cdot\sin^2\alpha\cdot\sin(180^\circ-2\alpha)=50\cdot\sin^2\alpha\cdot\sin 2\alpha$

13) א. $S=\frac{1}{2}k^2\cdot(1+2\sin\beta\cos\beta)$ (או כל תשובה שקולה). ב. 27 יח"ש.

14) א. $r\approx$ 5.548 ס"מ ב. $S\approx$ 90.45 סמ"ר

15) א. $CO=\frac{a}{\sin\beta}$ , $CE=2a\cdot\sin\beta$ ב. $\frac{CO}{CE}=\frac{1}{2\sin^2\beta}$

ג. היחס הוא: $\frac{2}{3}$ (בדומה למפגש התיכונים במשולש)

16) א. $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}m^2\cdot\sin\alpha$ ב. $S_{\Delta BOC}=\frac{1}{2}m^2\cdot\sin\alpha\cdot\tan^2\frac{\alpha}{2}$

ג. יחס השטחים: $\tan^2\frac{\alpha}{2}$

ד. במקרה זה ABOC הוא ריבוע, ויחס השטחים שווה ל-1 $\left(\tan^2 45^\circ=1\right)$.

17) $AC=x=d\cdot\frac{\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$

18) $\sphericalangle ODB\approx 44.7^\circ$

19) א. $NP=$ 10.38 ס"מ ב. $S_{\Delta PAN}=$ 8.2 סמ"ר

20) א. $S=800\cdot\sin^2\beta\cdot\sin 2\beta$ ב. 400 סמ"ר

21) $S_{\Delta ABC}=3\cdot\sqrt{3}\approx$ 5.196 סמ"ר

22) יחס השטחים הוא: $\left(-\frac{\sin 3\beta}{\sin\beta}\right)=1-4\cos^2\beta$ או כל תשובה שקולה.

23) א. $S_{\Delta ABD}=288\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ ב. $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta\cdot\cos\alpha}$

24) $MQ\approx$ 15.43 ס"מ

25) $AB=m\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$ , $DC=m\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

26) א. $\sin\alpha=\frac{1}{m}$ ב. $15^\circ$ , $120^\circ$ , $45^\circ$ או $75^\circ$ , $60^\circ$ , $45^\circ$

27) $\alpha\approx 20.7$

28) א. $\sqrt{5}<k<3$ או $1<k<\sqrt{3}$ ב. $\frac{2}{3}\cdot t\approx 0.667t$

29) $\alpha=15^\circ$

30) א. $S_{\Delta MPQ}=\frac{1}{2}\cdot h^2\cdot(\tan\alpha+\tan\beta)$ ב. i. $\sphericalangle ESF=180^\circ-(\alpha+\beta)$

ב. ii. $S_{\Delta EFS}:S_{\Delta MPQ}=\frac{1}{4}\cdot\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta$

31) א. $m_a=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{b^2+c^2+2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha}$ ב. $m_a=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot b$

32) א. $\sphericalangle BMC=79.5^\circ$ ב. $S_{\Delta AMD}=$ 54.1 סמ"ר

33) א. $S_{\Delta BEF}=\frac{2R^2\cdot\sin^3\alpha\cdot\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}$ ב. $\alpha=45°$

34) $P_{BCDE}=51.09$

35) א. $AC=\frac{\sqrt{3}\cdot m\cdot\sin(30°+\alpha)}{2\cdot\sin(60°+\alpha)\cdot\sin\alpha}$ , $AB=\frac{m}{2\cdot\sin\alpha}$ , $BD=\frac{\sqrt{3}\cdot m}{2\cdot\cos\alpha}$ ,

$CD=\frac{m\cdot\sin(30°+\alpha)}{2\cdot\sin(60°+\alpha)\cdot\cos\alpha}$ ב. הוכחה.

36) $DC=\frac{-b\cdot\tan\beta}{\tan 3\beta}$

37) ב. MG הוא קוטר במעגל.

38) א. $S_{\Delta ADF}=\frac{-2R^2\cdot\cos^3\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\alpha}{\cos(1.5\alpha)}$ ב. $\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ADF}}=-\frac{\cos(1.5\alpha)}{\cos(0.5\alpha)}$

ג. $\alpha=90°$

40) א. $AD+BC=d$ ב. $P=2d+d\sin\beta$ , $S=\frac{1}{2}d^2\cdot\sin\beta$

ג. $\beta=30°$

41) א. $\tan\beta:\tan\alpha=\frac{4}{5}=0.8$ ב. $PM:DM=\frac{9}{8}=1.125$

42) א. $S=\frac{3R^2\cdot\sin(30°+\alpha)}{4\cdot\sin(60°+\alpha)}$ .

# קורס ריענון במתמטיקה

## פרק 19 - חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים

תוכן העניינים

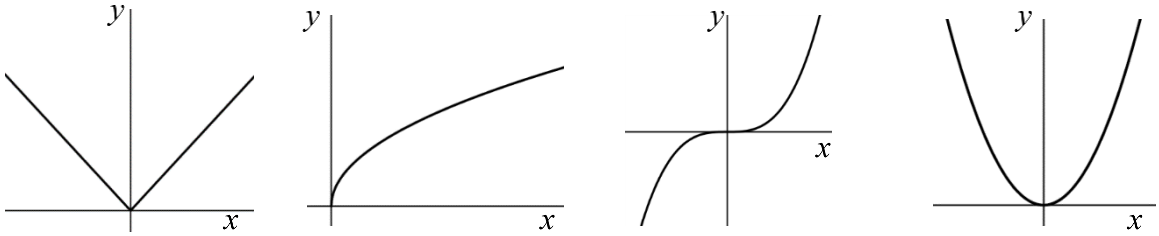

1. הקדמה כללית ..... 239
2. גזירת פונקציות ..... 240
3. מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה ..... 246
4. מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה ..... 247
5. שאלות עם פרמטרים ..... 250
6. שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית ..... 252

# הקדמה כללית:

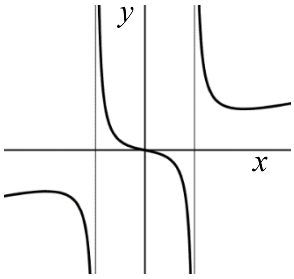
## סיכום כללי:

**פונקציות נפוצות:**

הפונקציה $f(x)=x^2$ : הפונקציה $f(x)=x^3$ : הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$ : הפונקציה $f(x)=|x|$ :




פונקציה עם מכנה, למשל: $f(x)=\dfrac{5x^3+4x}{x^2-1}$ :




**שיפוע של פונקציה:**

- השיפוע $m$ של פונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1,y_1)$ שעל הפונקציה הוא ערך הנגזרת בנקודה $A(x_1,y_1)$, כלומר: $m=f'(x_1)$.
- השיפוע של המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1,y_1)$ שעל הפונקציה שווה לשיפוע הפונקציה בנקודה $A(x_1,y_1)$.
- משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1,y_1)$ שעליה מתקבלת על ידי הנוסחה למציאת ישר: $y-y_1=m(x-x_1)$.

**הנגזרת:**

לכל פונקציה $f(x)$ קיימת פונקציה, הנקראת פונקציית הנגזרת (או רק "הנגזרת") ומסומנת $f'(x)$, המתקבלת ממנה על פי כללי הגזירה.

# גזירת פונקציות:

## סיכום כללי:

### כללי הגזירה:

- כלל גזירה מס' 1: $f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot x^{n-1}$.
- כלל גזירה מס' 2 (כפל בקבוע): $f(x)=ax^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot ax^{n-1}$.
- כלל גזירה מס' 3 (נגזרת של קבוע): $f(x)=a \Rightarrow f'(x)=0$.
- כלל גזירה מס' 4 (סכום והפרש): $f(x)=u\pm v \Rightarrow f'(x)=u'\pm v'$.
- כלל גזירה מס' 5 (פונקציה מורכבת): $f(x)=u^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$.
- כלל גזירה מס' 6 (נגזרת של $\frac{1}{x}$): $f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.
- כלל גזירה מס' 7 (מכפלה): $f(x)=u\cdot v \Rightarrow f'(x)=u'v+v'u$.
- כלל גזירה מס' 8 (מנה): $f(x)=\frac{u}{v} \Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.
- כלל גזירה מס' 9 (שורש): $f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

## שאלות:

**1)** גזור את הפונקציות הבאות:

| | | |
|---|---|---|
| א. $f(x)=x^3$ | ב. $f(x)=x^7$ | ג. $f(x)=x^2$ |
| ד. $f(x)=x$ | ה. $f(x)=x^{-3}$ | ו. $f(x)=x^{-1}$ |
| ז. $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ | ח. $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ | ט. $f(x)=x^{\frac{3}{4}}$ |

**2)** גזור את הפונקציות הבאות:

| | | |
|---|---|---|
| א. $f(x)=2x^3$ | ב. $f(x)=3x^7$ | ג. $f(x)=\frac{1}{2}x^4$ |
| ד. $f(x)=\frac{x^6}{7}$ | ה. $f(x)=8x$ | ו. $f(x)=3x^{-2}$ |
| ז. $f(x)=\frac{4}{x}$ | ח. $f(x)=6x^{\frac{1}{2}}$ | ט. $f(x)=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$ |

3) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=12$

ב. $f(x)=\frac{7}{8}$

4) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3+2x^2-3x+5$

ב. $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{x^3}{6}+\frac{3x}{4}-\frac{2}{5}$

ג. $f(x)=7x^2+23x-6$

ד. $f(x)=6x^2+8x+4$

ה. $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x^3$

ו. $f(x)=\frac{x^4}{8}+67$

5) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x-2)^3$

ב. $f(x)=(x^3+6)^5$

ג. $f(x)=3(x-x^2)^2$

ד. $f(x)=\frac{(5-x)^3}{4}$

ה. $f(x)=\frac{2(x+1)^4}{3}$

6) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3}{x}$

ב. $f(x)=-\frac{2}{x}$

ג. $f(x)=\frac{1}{x^2}$

ד. $f(x)=\frac{3}{x^3}$

ה. $f(x)=\frac{1}{x^2-3x}$

ו. $f(x)=\frac{2}{3-x}$

ז. $f(x)=\frac{6}{x+5}$

7) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x+1)(x-3)$

ב. $f(x)=(5x+1)^3(x-3)$

ג. $f(x)=x^3(6-x)^4$

ד. $f(x)=3x^2\cdot x$

ה. $f(x)=x^2\cdot x^3$

ו. $f(x)=x(3x+7)$

ז. $f(x)=3x^3(3x-1)$

ח. $f(x)=(x-2)(2x^2+3)$

ט. $f(x)=(3x-2)(x^2+10x)$

י. $f(x)=(3x^4-4x)(2x^2+5x+2)$

יא. $f(x)=x(x-2)(3x-4)$

**8)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(x^2-4)^2$

ב. $f(x)=2x^3(3x+5)^2$

ג. $f(x)=(x^3+2)^2(x-1)^3$

ד. $f(x)=(x^2+1)^3(2x-1)^2$

**9)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3x-1}{1+2x}$

ב. $f(x)=\frac{x^2+1}{5x-12}$

ג. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+3}$

ד. $f(x)=\frac{x^2+8}{x-1}$

ה. $f(x)=\frac{1}{x}$

ו. $f(x)=\frac{3}{x^3}$

ז. $f(x)=\frac{(x-1)^2}{x+1}$

ח. $f(x)=\frac{(x^2+3)^2}{x^2-2}$

ט. $f(x)=\frac{x^3-x^2}{2(1-x)}$

י. $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$

**10)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x}$

ב. $f(x)=4\sqrt{x+1}$

ג. $f(x)=\sqrt{x^3-1}$

ד. $f(x)=(3x+1)\sqrt{x}$

ה. $f(x)=x^2\sqrt{x+3}$

ו. $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x}}$

**11)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x+1}$

ב. $f(x)=\sqrt{2x}$

ג. $f(x)=\sqrt{3x^2+1}$

ד. $f(x)=\sqrt{10-3x}$

ה. $f(x)=\sqrt{2x^2+7x}$

ו. $f(x)=3x^2-8\sqrt{x}$

ז. $f(x)=x^2\sqrt{1-2x}$

ח. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x}$

ט. $f(x)=\frac{x\sqrt{x^2+4}}{2}$

י. $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}}$

יא. $f(x)=\frac{2x^3-x^2+x-5\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$

יב. $f(x)=\sqrt{\frac{3-x}{x}}$

יג. $f(x)=\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x}}$

יד. $f(x)=\frac{x^2+7}{\sqrt{x^2-5}}$

טו. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-1}$

טז. $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$

**12)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=ax^4-bx$

ב. $f(x)=\frac{ax^2}{3}-\frac{x}{b}+c$

ג. $f(x)=\frac{x-2a}{x-4a}$

ד. $f(x)=a\sqrt{bx^2+c}$

**13)** גזור פעמיים את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{x^2+2x+4}{2x}$

ב. $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{2x+10}$

ג. $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$

ד. $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

ה. $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

ו. $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

## תשובות סופיות:

1) א. $3x^2$ ב. $7x^6$ ג. $2x$ ד. $1$ ה. $-\frac{3}{x^4}$ ו. $-\frac{1}{x^2}$

ז. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ח. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ט. $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$.

2) א. $6x^2$ ב. $21x^6$ ג. $2x^3$ ד. $\frac{6x^5}{7}$ ה. $8$.

ו. $-\frac{6}{x^3}$ ז. $-\frac{4}{x^2}$ ח. $\frac{3}{\sqrt{x}}$ ט. $\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$.

3) א. $0$ ב. $0$.

4) א. $3x^2+4x-3$ ב. $x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{4}$ ג. $14x+23$ ד. $12x+8$ ה. $x-3x^2$ ו. $0.5x^3$.

5) א. $15(5x-2)^2$ ב. $15x^2(x^3+6)^4$ ג. $6(x-x^2)(1-2x)$

ד. $-\frac{3}{4}(5-x)^2$ ה. $\frac{8(x+1)^3}{3}$.

6) א. $-\frac{3}{x^2}$ ב. $\frac{2}{x^2}$ ג. $-\frac{2}{x^3}$ ד. $-\frac{9}{x^4}$ ה. $-\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2}$

ו. $\frac{2}{(3-x)^2}$ ז. $-\frac{6}{(x+5)^2}$.

7) א. $10x-14$ ב. $(5x+1)^2(20x-44)$ ג. $x^2(6-x)^3(18-7x)$.

ד. $9x^2$ ה. $5x^4$ ו. $6x+7$ ז. $36x^3-9x^2$ ח. $6x^2-8x+3$

ט. $9x^2+56x-20$ י. $36x^5+75x^4+24x^3-24x^2-40x-8$

יא. $9x^2-20x+8$.

8) א. $4x(x^2-4)$ ב. $30x^2(x+1)(3x+5)$ ג. $3(x-1)^2(x^3+2)(3x^3-2x^2+2)$

ד. $2(2x-1)(x^2+1)^2(8x^2-3x+2)$.

9) א. $\frac{5}{(1+2x)^2}$ ב. $\frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2}$ ג. $\frac{8x}{(x^2+3)^2}$ ד. $\frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$

ה. $-\frac{1}{x^2}$ ו. $-\frac{9}{x^4}$ ז. $\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$

ח. $\frac{2x(x^2+3)(x^2-7)}{(x^2-2)^2}$ ט. $-x$ י. $-\frac{1}{(x+2)^2}$.

**10)** א. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ב. $\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ ג. $\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$ ד. $\frac{9x+1}{2\sqrt{x}}$ ה. $\frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}}$

ו. $\frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$

**11)** א. $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ ב. $\frac{1}{\sqrt{2x}}$ ג. $\frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}$ ד. $-\frac{3}{2\sqrt{10-3x}}$ ה. $\frac{4x+7}{2\sqrt{2x^2+7x}}$

ו. $6x-\frac{4}{\sqrt{x}}$ ז. $\frac{2x-5x^2}{\sqrt{1-2x}}$ ח. $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$ ט. $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+4}}$ י. $\frac{1-3x}{(1-x^2)^{1.5}}$

יא. $3\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}+\frac{5}{x^2}$ יב. $-\frac{3}{2x\sqrt{3x-x^2}}$ יג. $\frac{-x^2+2x+1}{2(1-x)^{1.5}\sqrt{1+x^2}}$

יד. $\frac{x^3-17x}{(x^2-5)^{1.5}}$ טו $-\frac{x+1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$ טז. $-\frac{x+3}{2(x-1)^2\sqrt{x+1}}$.

**12)** א. $4ax^3-b$ ב. $\frac{2ax}{3}-\frac{1}{b}$ ג. $\frac{-2a}{(x-4a)^2}$ ד. $\frac{abx}{\sqrt{bx^2+c}}$.

**13)** א. $f''(x)=\frac{4}{x^3}$, $f'(x)=\frac{2x^2-8}{4x^2}$.

ב. $f''(x)=\frac{448}{(2x+10)^3}$, $f'(x)=\frac{2x^2+20x-62}{(2x+10)^2}$.

ג. $f''(x)=\frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$, $f'(x)=\frac{4x}{(x+1)^3}$.

ד. $f''(x)=\frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$, $f'(x)=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$.

ה. $f''(x)=\frac{6x}{(x+1)^4}$, $f'(x)=\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$.

ו. $f''(x)=\frac{12(x+1)(x+3)}{(x-1)^5}$, $f'(x)=-\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}$

# מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה:

## שאלות:

**14)** מצא את שיפוע הפונקציה $f(x)=2x^3-7x$ בנקודה $(2\ ,\ 2)$.

**15)** מצא את שיפוע הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^2-3}$ בנקודה בה $x=-2$.

**16)** מצא את שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=4\sqrt{x}$ בנקודה בה $x=1$.

## תשובות סופיות:

**14)** $m=17$
**15)** $m=4$
**16)** $m=2$

# מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה:

**שאלות:**

**17)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=2(4x+3)^3$ בנקודה בה $x=-1$.

**18)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{8}{x+1}$ בנקודה בה $y=2$.

**19)** מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x)=x^2-2x-8$ בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה-$x$.

**20)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=x^4-2x$ ששיפועו 2.

**21)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{x^3+3x-1}{x^2-2}$ בנקודה שבה $x=1$.

**22)** נתון כי הישר $2y-3x=3$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=3\sqrt{x}$.
מצא את נקודת ההשקה.

**23)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{x}$ בנקודה בה $x=1$.

**24)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=3x^2-8\sqrt{x}$ בנקודה בה $x=4$.

**25)** נתונה הפונקציה הבאה $f(x)=4x-2\sqrt{x}$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המקביל לישר $f(x)=3x-\frac{1}{2}$.

ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה-$x$.

**26)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{4}{\sqrt{x-1}}$ ששיפועו 2-.

**27)** מצא את משוואות המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$ בנקודה שבה $x=2$.

**28)** מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x)=\frac{1}{3x^3}$ היוצרים עם הכיוון החיובי של ציר ה-$x$ זווית של $135°$.

**29)** מצא את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות הבאות: $y=-\frac{1}{4}x^2-5$ , $y=x^2$.

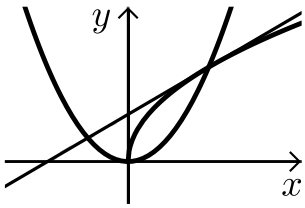
**30)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$ ונתון הישר: $y=2x$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר הנמצאת ברביע הראשון.

ב. מצא את משוואות המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שמצאת בסעיף הקודם.

ג. חשב את השטח שנוצר בין המשיק והצירים.

**31)** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=\sqrt{x}$ , $g(x)=x^2$.




א. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ העובר דרך נקודת החיתוך שמצאת הנמצאת ברביע הראשון.

ג. מצא את נקודת החיתוך הנוספת של המשיק שמצאת עם גרף הפונקציה $g(x)$.

## תשובות סופיות:

**17)** $y=24x+22$

**18)** $y=-\frac{1}{2}x+3\frac{1}{2}$

**19)** $y=6x-24\ ,\ y=-6x-12$

**20)** $y=2x-3$

**21)** $y=-12x+9$

**22)** $(1\ ,\ 3)$

**23)** $y=-\frac{1}{2}x+2\frac{1}{2}$

**24)** $y=22x-56$

**25)** א. $y=3x-1$ ב. $\left(\frac{1}{3}\ ,\ 0\right)$

**26)** $y=-2x+8$

**27)** $y=\frac{11}{16}x-\frac{15}{8}$

**28)** $y=-x+1\frac{1}{3}\ ,\ y=-x-1\frac{1}{3}$

**29)** $y=2x-1\ ,\ y=-2x-1$

**30)** א. $(1\ ,\ 2)$ ב. $y=-1.5x+3.5$ ג. $S=4\frac{1}{12}$.

**31)** א. $(1\ ,\ 1)\ ,\ (0\ ,\ 0)$ ב. $y=0.5x+0.5$ ג. $(-0.5\ ,\ 0.25)$.

## שאלות עם פרמטרים:

### שאלות:

**32)** שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=ax^2-4x$ בנקודה שבה $x=3$ הוא 8.
מצא את ערכו של הפרמטר $a$ ואת משוואת המשיק.

**33)** נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{ax}$ , $(a>0)$.
המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=\frac{1}{2}$ הוא בעל שיפוע 1.
מצא את ערך הפרמטר $a$.

**34)** נתונה הפונקציה: $y=x^3+a\sqrt{x}$ ($a$ פרמטר).
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$ הוא 5.
מצא את ערך הפרמטר $a$.

**35)** נתונה הפונקציה: $y=2\sqrt{x}-\frac{A}{x}$ (A פרמטר).
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$ הוא 2.
מצא את ערך הפרמטר A.

**36)** הישר $y=4x+b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x^2}+3$.
מצא את $b$ ואת נקודת ההשקה.

**37)** שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{2}{ax+3}$ בנקודה שבה $y=2$ הוא -4.
מצא את ערכו של הפרמטר $a$ ואת משוואת המשיק.

**38)** הישר $y=ax+\frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x)=\frac{2}{x+c}$ בנקודה $x=0$.
מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו-$c$.

**39)** הישר $y=3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=x\sqrt{x}+b$.
מצא את $b$ ואת נקודת ההשקה.

**40)** שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{a}{\sqrt{bx-1}}$ בנקודה $(1\ ,\ 6)$ הוא -6.
מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$ ואת משוואת המשיק.

**41)** לאילו ערכי $k$ ישיק הישר $y=-5x+6$ לגרף הפונקציה $f(x)=x^3-2x^2-4x+k$ ?
לכל ערך כזה של $k$ מצא את נקודת ההשקה.

**42)** הפונקציות $y=\frac{1}{x}$ ו- $y=-\frac{1}{2}x^2+k$ משיקות זו לזו.
מצא את $k$ ואת נקודת ההשקה.

## תשובות סופיות:

**32)** $a=2\ ,\ y=8x-18$

**33)** $a=2$

**34)** $a=4$

**35)** $\mathrm{A}=1$

**36)** $(-1\ ,\ 5)\ ,\ y=4x+9$

**37)** $a=2\ ,\ y=-4x-2$

**38)** $a=-\frac{1}{8}\ ,\ c=4$

**39)** $b=4\ ,\ (4\ ,\ 12)$

**40)** $b=2\ ,\ a=6\ ,\ y=-6x+12$

**41)** $k=6:(1\ ,\ 1)$ או: $\left(\frac{1}{3}\ ,\ \frac{13}{3}\right):k=\frac{158}{27}$.

**42)** $(1\ ,\ 1)\ ,\ k=1.5$

# שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית:

## שאלות:

**43)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. בטא באמצעות $t$ את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=x^2+1$ בנקודה שבה $x=t$.

ב. מצא את ערכיו של $t$ אם נתון שהמשיק עובר בנקודה $(-1\ ,\ 1)$.

**44)** מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=5x-x^2$ העוברים דרך הנקודה $(3\ ,\ 7)$.

**45)** מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=x^2+5x-6$ העוברים דרך הנקודה $(0\ ,-10)$.

**46)** מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=12x-x^3$ העוברים דרך הנקודה $(2\ ,\ 24)$.

**47)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ העובר בנקודה $(3\ ,\ 0)$.

**48)** מצא משוואת המשיק לפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ אם ידוע ששטח המשולש שהוא יוצר עם הצירים הוא 4.5 יחידות שטח.

**49)** מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x-2}}$ העוברים דרך הנקודה $(2\ ,\ 3)$.

## תשובות סופיות:

43) א. $y=2tx-t^2+1$ ב. $t=0,-2$.

44) $y=-3x+16$ , $y=x+4$

45) $y=x-10$ , $y=9x-10$

46) $y=-15x+54$ , $y=12x$

47) $y=-\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2}$

48) $y=-\frac{1}{16}x+\frac{3}{4}$

49) $y=-x+5$

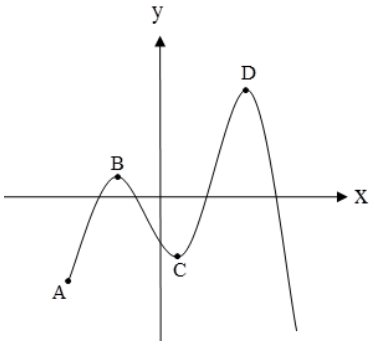
# קורס ריענון במתמטיקה

## פרק 20 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית פולינום

תוכן העניינים

1. נקודות קיצון של פונקציות ..... 254
2. חקירת פונקציה פולינומית ..... 257
3. פונקציה זוגית ואי-זוגית ..... 261

# נקודות קיצון של פונקציות:




## סיכום כללי:

**נקודות קיצון (נקודות מינימום/מקסימום):**

- מינימום או מקסימום מקומי (פנימי) – B , C , D.
- מינימום או מקסימום קצה – A.
- מינימום או מקסימום מוחלט – D.

**נקודות קיצון מקומיות:**

- שיפוע המשיק לפונקציה בנקודות קיצון מקומיות הוא אפס.
- בנקודה שבה שיפוע המשיק לפונקציה הוא אפס תיתכן נקודת קיצון מקומית. נקודה כזו נקראת נקודה חשודה כקיצון. ניתן לבדוק אם היא אכן נקודת קיצון.

**שלבים למציאת נקודות קיצון מקומיות:**

- נגזור את הפונקציה.
- נשווה את הנגזרת לאפס ונחלץ את ערכי ה- $x$ של הנקודות החשודות כקיצון.
- נציב את ערכי ה- $x$ מסעיף ב' בפונקציה המקורית לקבלת ערכי ה- $y$ .
- נקבע אם הנקודה היא נקודת קיצון ונסווג את סוג הקיצון על ידי טבלה.

## שאלות:

**1)** מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)=10x-x^2$ .

**2)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-12x$ .

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

**3)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-10x^2+9$ .

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

**4)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-4x^3+32$ .

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

**5)** לפונקציה $f(x)=ax-x^3-5$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=-1$ .
מצא את ערכו של הפרמטר $a$ .

**6)** נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+x^2$ . ידוע שהנקודה $x=1$ נקודת קיצון.
מצא את הקבוע $a$

**7)** לפונקציה $f(x)=\mathrm{A}x^3+\mathrm{B}x^2-1$ יש נקודת קיצון ששיעוריה : $(2,3)$ .
מצא את ערכי הפרמטרים A , B.

**8)** לפונקציה $f(x)=\mathrm{A}x^3+\mathrm{B}x^2-4x$ יש נקודת קיצון ב- $x=-1$ ו- $x=4$ .
מצא את הפרמטרים ואת שיעור ה- $y$ של שתי נקודות הקיצון.

**9)** נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+bx^2$ . ידוע שהנקודה $(1,2)$ נקודת קיצון.
מצא את הפרמטרים $a$ , $b$ .

**10)** לפונקציה $f(x)=ax^4+bx^2+35$ יש נקודת קיצון ששיעוריה $(2,3)$ .
מצא את ערכי הפרמטרים $a$ , $b$ .

## תשובות סופיות:

1) $\max(5,25)$.

2) א. $\max(-2,16)$ , $\min(2,-16)$ ב. עולה: $x>2$ , $x<-2$ יורדת: $-2<x<2$.

3) א. $\min(-\sqrt{5},-16)$ , $\min(\sqrt{5},-16)$ , $\max(0,9)$

ב. עולה: $-\sqrt{5}<x<0$ , $x>\sqrt{5}$ יורדת: $0<x<\sqrt{5}$ , $x<-\sqrt{5}$.

4) א. $\min(3,5)$ ב. עולה: $x>3$ יורדת: $x<3$.

5) $a=3$.

6) $a=-\frac{2}{3}$.

7) $A=-1$ , $B=3$.

8) $\left(4,-18\frac{2}{3}\right)$ , $\left(-1,2\frac{1}{6}\right)$ , $B=-\frac{3}{2}$ , $A=\frac{1}{3}$.

9) $a=-4$ , $b=6$.

10) $b=-16$ , $a=2$.

# חקירת פונקציה פולינומית:

## שאלות:

**11)** נתונה הפונקציה $f(x)=10x-x^2$ .

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**12)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-12x$ .

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**13)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-10x^2+9$ .

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**14)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-4x^3+32$ חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**15)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^3$ חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**16)** נתונה הפונקציה: $f(x)=2x^3-3ax^2+54x-50$.

א. לאלו ערכים של הפרמטר $a$ עולה הפונקציה בכל תחום הגדרתה?

ב. הצב בפונקציה $a=6$ וחקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודת חיתוך עם ציר ה- $y$, סרטוט.

**17)** נתונה הפונקציה: $y=-3x^3+6x^2-4x+d$ ($d$ פרמטר).
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$ בנקודה שבה: $x=2$.

א. מצא את $d$.

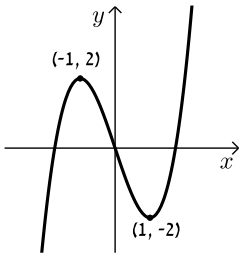
ב. האם יש לפונקציה נקודות קיצון?

ג. כתוב את תחומי העלייה וירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $y$.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**18)** לפניך גרף הפונקציה $f(x)=x^3-3x$:




א. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=5$?

ב. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=2$?

ג. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=0.5$?

ד. עבור איזה ערך של $k$ למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק פתרון אחד?

ה. עבור איזה ערך של $k$ למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק שני פתרונות?

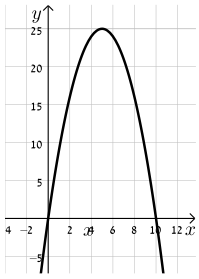
ו. עבור איזה ערך של $k$ למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק שלושה פתרונות?

ז. האם קיים ערך של $k$ עבורו למשוואה $f(x)=k$ אין פתרון?

## תשובות סופיות:

**11)** א. כל $x$ ב. $\max(5,25)$ ג. עלייה: $x<5$ , ירידה: $x>5$

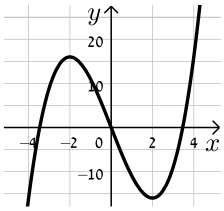
ד. $(10,0)$ , $(0,0)$. ה. להלן גרף:



**12)** א. כל $x$ ב. $\max(-2,16)$ , $\min(2,-16)$

ג. עלייה: $x>2$ , $x<-2$ , ירידה: $-2<x<2$

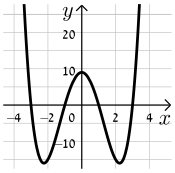
ד. $(-\sqrt{12},0)$ , $(\sqrt{12},0)$ , $(0,0)$. ה. להלן גרף:



**13)** א. כל $x$ ב. $\min(-\sqrt{5},-16)$ , $\min(\sqrt{5},-16)$ , $\max(0,9)$

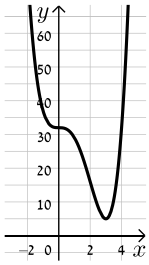
ג. עלייה: $-\sqrt{5}<x<0$ , $x>\sqrt{5}$ , ירידה: $x<-\sqrt{5}$ , $0<x<\sqrt{5}$.

ד. $(\pm3,0)$ , $(\pm1,0)$ , $(0,9)$. ה. להלן גרף:



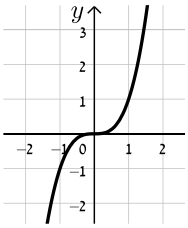
**14)** א. כל $x$ ב. $\min(3,5)$ ג. תחומי עלייה: $x>3$ , תחומי ירידה: $x<3$

ד. $(0,32)$. ה. להלן גרף:

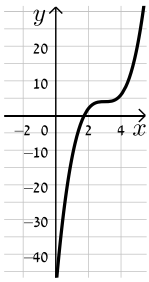


**15)** א. כל $x$ ב. אין. ג. עולה לכל $x$

ד. $(0,0)$. ה. להלן גרף:

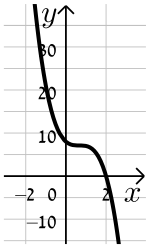


**16)** א. $-6<a<6$ ב. תחום הגדרה: כל $x$, נקודות קיצון: אין, תחומי עלייה: כל $x$, תחומי ירידה: אין, נקודת חיתוך עם הצירים: $(0,-50)$, להלן גרף:




**17)** א. $d=8$ ב. לא. ג. יורדת בתחום $x\neq\frac{2}{3}$

ד. $(0,8)$. ה. להלן גרף:




**18)** א. 1. ב. 2. ג. 3. ד. $k>2\ ,\ k<-2$

ה. $k=\pm 2$ ו. $-2<k<2$ ז. לא.

# פונקציה זוגית ואי-זוגית:

## סיכום כללי:

**הגדרות:**

- פונקציה $f(x)$ תיקרא זוגית אם לכל $x$ בתחום הגדרתה מתקיים: $f(x)=f(-x)$.
- פונקציה $f(x)$ תיקרא אי-זוגית אם לכל $x$ בתחום הגדרתה מתקיים: $f(-x)=-f(x)$.

## שאלות:

**1)** קבע אלו מהפונקציות הבאות הן זוגיות/אי-זוגיות לא זו ולא זו:

א. $f(x)=3x-5$

ב. $f(x)=3x^2$

ג. $f(x)=2x^3$

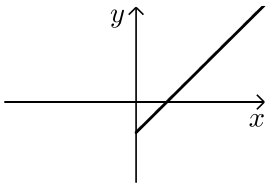
ד. $f(x)=x^3-2x^2$

ה. $f(x)=4x^4-3x^2+1$

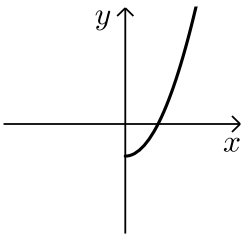
ו. $f(x)=4x^5-3x^3-1$

**2)** הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל $x$.
השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה זוגית:

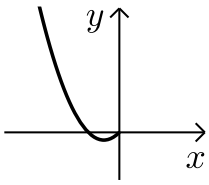
א.



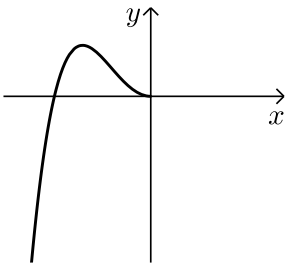

ב.




ג.

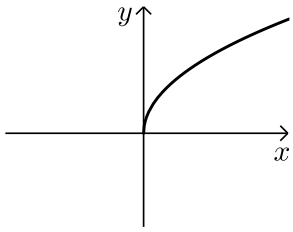



ד.

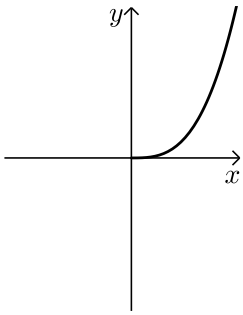


**3)** הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל $x$.
השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה אי-זוגית:

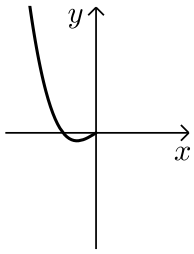
א.



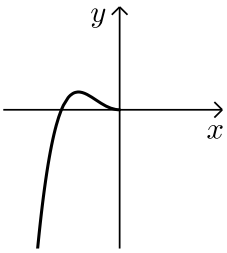

ב.




ג.




ד.




**4)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=x^4-4x^2$ בתחום: $[0:3]$.

א. חקור את הפונקציה בתחום הנ"ל לפי הסעיפים הבאים:

i. תחום הגדרה.

ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.

iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן.

iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.

v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. הוכח כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.

ג. התבסס על ממצאיך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום: $[-3:3]$ (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-3:0]$ לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

**5)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=x^6-3x^2+3$.

א. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:4]$ לפי הסעיפים הבאים:
תחום הגדרה, מציאת חיתוך עם ציר ה- $y$, מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה בתחום הנ"ל.

ב. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זו ולא זו?
נמק באמצעות חישוב מתאים.

ג. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שסרטטת בסעיף א', את עקום הפונקציה בתחום $[-4:0]$.

ד. הוכח כי הפונקציה חיובית לכל $x$ בתחום הגדרתה.

**6)** לפניך הפונקציה: $f(x)=-2x^6+3x^4+a$, $a$ פרמטר.
ידוע כי לפונקציה ערך מירבי של 1.

א. מצא את $a$ וכתוב את הפונקציה $f(x)$.

ב. חקור את הפונקציה בתחום: $[-2:0]$ לפי הסעיפים הבאים:
כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים,
מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.

ג. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זה ולא זה?
נמק באמצעות חישוב מתאים.

ד. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את גרף הפונקציה בתחום: $[-2:2]$.

**7)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=3x^3-9x$.

א. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:5]$ לפי הסעיפים הבאים:
כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים,
מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.

ב. הוכח כי הפונקציה היא אי-זוגית.

ג. התבסס על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום: $[-5:5]$ (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-5:0]$ לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

**8)** לפניך הפונקציה הבאה: $f(x)=5x^3-3x^5+b$ , $b$ פרמטר.
ידוע כי הישר $y=2x$ עובר דרך כל הנקודות על גרף הפונקציה שמקיימות: $f'(x)=0$.

א. מצא את $b$ וכתוב את הפונקציה $f(x)$.

ב. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:2]$ לפי הסעיפים הבאים:

i. תחום הגדרה.

ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.

iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן.

iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.

v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. בדוק האם הפונקציה היא זוגית/אי-זוגית או לא זו ולא זו.
נמק את קביעתך באמצעות חישוב מתאים.

ד. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה של גרף הפונקציה את הגרף בתחום $[-2:0]$.

**9)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^7-x}{3}$.

א. חקור את הפונקציה בתחום: $[-4:0]$ לפי הסעיפים הבאים:

i. תחום הגדרה.

ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.

iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן
(בתשובתך השאר עד 2 ספרות לאחר הנקודה העשרונית).

iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.

v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

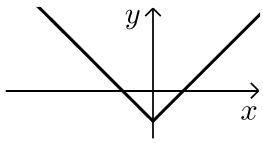
ב. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? או לא זו ולא זו?
נמק ע"י חישוב מתאים.

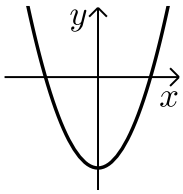
ג. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שעשית את גרף הפונקציה בתחום $[0:4]$.

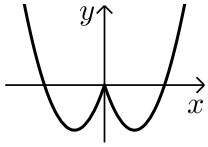
## תשובות סופיות:

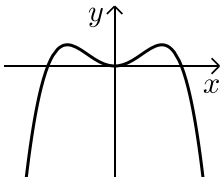
**1)** זוגית: ב', ה'. אי-זוגית: ג', לא זו ולא זו: א', ד', ו'.

**2)** להלן הגרפים:

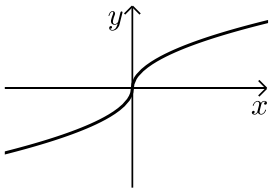
א.


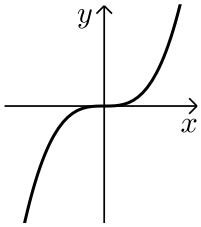

ב.


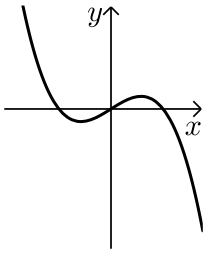

ג.


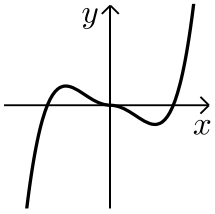

ד.



**3)** להלן הגרפים:

א.



ב.


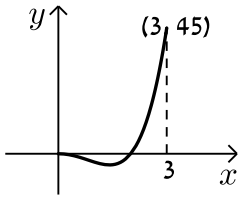

ג.



ד.


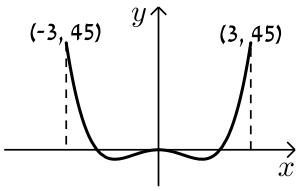

**4)** א. i. $0 \le x \le 3$ ii. $(0,0),(2,0)$ iii. $\max(3,45)$ קצה, $\min\left(\sqrt{2},-4\right)$,

$\max(0,0)$ קצה. iv. עולה: $\sqrt{2} < x < 3$, יורדת: $0 < x < \sqrt{2}$ ב. סעיף הוכחה.

**סרטוט עבור חלק v:**




**סרטוט עבור סעיף ג:**



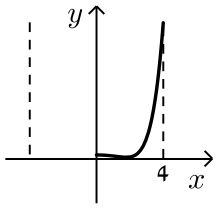

**5)** א. תחום הגדרה: $0 \le x \le 4$, חיתוך עם ציר ה- $y$: $(0,3)$,

נקודות קיצון: $\max(4,4051)$ קצה, $\min(1,1)$, $\max(0,3)$ קצה,

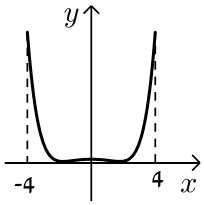
עולה: $1 < x < 4$, יורדת: $0 < x < 1$ ב. זוגית.

ד. הוכחה עפ"י הסרטוט.

**סרטוט עבור סעיף א:**

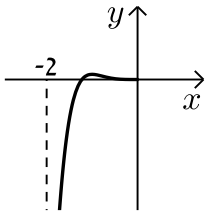



**סרטוט עבור סעיף ג:**

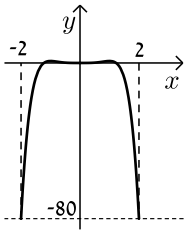


**6)** א. $a=0$ ב. תחום הגדרה: $-2\le x\le 0$, חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, $(-1.225,0)$, נקודות קיצון: $\min(-2,-80)$ קצה, $\max(-1,1)$, $\min(0,0)$ קצה,
עולה: $-2<x<-1$, יורדת: $-1<x<0$. ג. זוגית.

**סרטוט עבור סעיף א:**

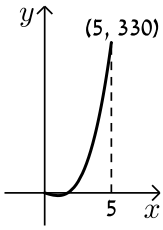



**סרטוט עבור סעיף ד:**

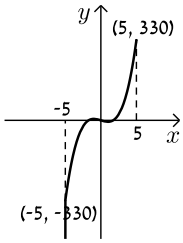



**7)** א. תחום הגדרה: $0\le x\le 5$, חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, $(\sqrt{3},0)$,
נקודות קיצון: $\max(5,330)$ קצה, $\min(1,-6)$, $\max(0,0)$ קצה,
עולה: $1<x<5$, יורדת: $0<x<1$, ב. אי-זוגית.

**סרטוט עבור סעיף א:**

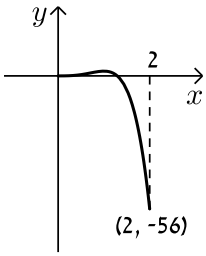



**סרטוט עבור סעיף ג:**

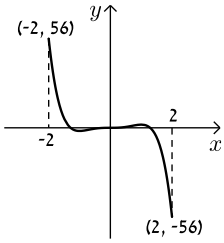



**8)** א. $b=0$ ב. i. $0\le x\le 2$ ii. $(0,0)$, $(1.29,0)$ iii. $\min(2,-56)$ קצה,
$\max(1,2)$, $\min(0,0)$ קצה. iv. עולה: $0<x<1$, יורדת: $1<x<2$
ג. אי-זוגית.

**סרטוט עבור חלק v:**

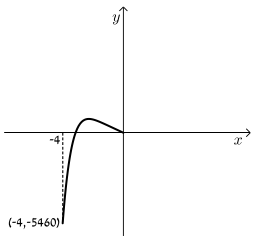



**סרטוט עבור סעיף ד:**

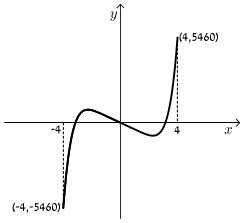



**9)** א. i. $-4\le x\le 0$ ii. $(0,0)$, $(-1,0)$ iii. $\min(0,0)$ קצה, $\max(-0.723,0.207)$,
$\min(-4,-5460)$ קצה. iv. עולה: $-4<x<-0.723$,
יורדת: $-0.723<x<0$ ג. אי-זוגית.

**סרטוט עבור חלק v:**




**סרטוט עבור סעיף ד:**



# קורס ריענון במתמטיקה

## פרק 21 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית מנה ושורש

תוכן העניינים


1. מציאת תחום הגדרה ..... 267
2. מציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה ..... 269
3. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים ..... 270
4. חקירת פונקצית מנה ..... 275
5. חקירת פונקצית שורש ..... 284
6. תחומי קעירות ונקודות פיתול ..... 292
7. חקירת פונקציה עם פרמטר ..... 298
8. פונקציות ללא תבנית מפורשת ..... 301

# מציאת תחום הגדרה:

## סיכום כללי:

- כל פולינום מוגדר לכל $x$.
- בפונקציה עם מכנה, אסור שיתקבל אפס במכנה.
- בפונקציה עם שורש זוגי, אסור שיתקבל מספר שלילי בתוך השורש.

## שאלות:

**1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^2+\frac{1}{2}x$

ב. $f(x)=4x^3-x^2+\frac{x}{2}+1$

ג. $f(x)=x^3-x^2-4x+1$

ד. $f(x)=\frac{2x}{x-3}$

ה. $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$

ו. $f(x)=\frac{5x^3+4x}{x^2-1}$

ז. $f(x)=\frac{x^2}{x^2-x-2}$

ח. $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-2x-8}$

ט. $f(x)=\frac{6}{x^2+1}$

י. $f(x)=\frac{4x+1}{x^2+1}$

יא. $f(x)=\frac{1}{x^3-x}$

יב. $f(x)=\frac{x^2}{x^3-4x}$

**2)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x}$

ב. $f(x)=2\sqrt{x-3}$

ג. $f(x)=\sqrt{x-4}$

ד. $f(x)=3x\sqrt{1-2x}$

ה. $f(x)=\sqrt{x^2+3x-10}$

ו. $f(x)=\sqrt{x^2+x-2}$

ז. $f(x)=\frac{5x}{\sqrt{x+4}}$

ח. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$

ט. $f(x)=\sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}}$

י. $f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^3-9x}}$

יא. $f(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$

יב. $f(x)=\frac{x+1}{x-\sqrt{2-x}}$

יג. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-|x|}}$

יד. $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+2}-3}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. כל $x$ ב. כל $x$ ג. כל $x$ ד. $x \neq 3$ ה. $x \neq \pm 2$ ו. $x \neq \pm 1$
ז. $x \neq -1, 2$ ח. $x \neq 4, -2$ ט. כל $x$ י. כל $x$ יא. $x \neq \pm 1, 0$ יב. $x \neq \pm 2, 0$.

**2)** א. $x \geq 0$ ב. $x \geq 3$ ג. $x \geq 4$ ד. $x \leq \frac{1}{2}$ ה. $x \leq -5 , x \geq 2$
ו. $x \leq -2 , x \geq 1$ ז. $x > -4$ ח. $x \leq -3 , -2 \leq x < 1 , x > 1$ ט. $x \leq -1.5 , x \geq 1$
י. $-3 < x < 0 , x > 3$ יא. $-6 \leq x < -2 , x > -2$ יב. $x < 1 , 1 < x \leq 2$
יג. $-1 < x < 1$ יד. $x \geq 7$.

# מציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה:

## שאלות:

**3)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{6x}{x^2-10x+9}$.

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

## תשובות סופיות:

**3)** א. $\max\left(3,-1\frac{1}{2}\right)$ , $\min\left(-3,-\frac{3}{8}\right)$.

ב. עולה: $-3<x<3$ , $x\neq 1$, יורדת: $3<x\neq 9$ , $x<-3$.

# מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים:

## סיכום כללי:

### אסימפטוטה אנכית:

הגדרה: הישר: $x=k$ הוא אסימפטוטה אנכית של פונקציה מהצורה: $y=\frac{f(x)}{g(x)}$

אם הוא מקיים: $g(k)=0$ וגם: $f(k)\neq 0$. בצורה מתמטית: אם: $\lim_{x\to k^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$

או: $\lim_{x\to k^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$ או שניהם אז הישר: $x=k$ הוא אסימפטוטה אנכית לפונקציה $y=\frac{f(x)}{g(x)}$.

### הסבר כללי:

בעבור ערכי $x$ שמאפסים את המכנה, אבל לא את המונה יש אסימפטוטה אנכית.
כאשר ערך $x$ מאפס את המכנה וגם את המונה יש לפרק את המונה והמכנה
(על ידי נוסחאות כפל מקוצר או טרינום למשל) ולצמצם.
אם אחרי הצמצום אותו ערך של $x$ עדיין מאפס את המכנה תתקבל אסימפטוטה אנכית,
אך אם ערך $x$ זה לא מאפס את המכנה אחרי שצומצם אין אסימפטוטה אנכית אלא
נקודת אי הגדרה.

### אסימפטוטה אופקית:

הגדרה: ישר מהצורה: $y=n$ הוא אסימפטוטה אופקית לפונקציה מהצורה: $y=\frac{f(x)}{g(x)}$

אם מתקיים: $\lim_{x\to\infty^+}\frac{f(x)}{g(x)}=n$ או: $\lim_{x\to\infty^-}\frac{f(x)}{g(x)}=n$ או שניהם.

אופן החישוב הכללי:

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{ax^m+\ldots}{bx^n+\ldots}$ (יש בפונקציה קו שבר אחד!)

- אם $m>n$, לפונקציה אין אסימפטוטה אופקית.
- אם $m=n$, לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y=\frac{a}{b}$.
- אם $m<n$, לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y=0$.

**חוקי גבולות לאינסוף:**

במקרים רבים נרצה לדעת האם פונקציה מסוימת מתכנסת לערך כלשהו כאשר $x$ שואף לערכים ההולכים וגדלים (לאינסוף, או למינוס אינסוף).
עבור ערכי $x$ שהולכים וגדלים (או קטנים) נרשום: $x=\infty$ או $x=-\infty$ בהתאמה.

ישנם 4 מצבים בהם ערך הפונקציה בשאיפת $x$ לאחד הקצוות ניתן לחישוב ישיר:

- הגבול: $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}="\frac{1}{\infty}"=0$.
- הגבול: $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ ניתן לפיצול לשני מקרים:
  - אם: $x\to 0^+$ (מתקרב ל- 0 מהכיוון החיובי) אז: $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}="\frac{1}{0^+}"=+\infty$.
  - אם: $x\to 0^-$ (מתקרב ל- 0 מהכיוון השלילי) אז: $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}="\frac{1}{0^-}"=-\infty$.
- הגבול מהצורה $\infty\cdot\infty$ (מכפלת שני ביטויים של $x$ אשר כל אחד מהם שואף לאינסוף בפני עצמו) מקיים: $\infty\cdot\infty=\infty$.
- הגבול מהצורה $\infty+\infty$ (סכום שני ביטויים של $x$ אשר כל אחד מהם שואף לאינסוף בפני עצמו) מקיים: $\infty+\infty=\infty$.

ישנם 3 מקרים בהם לא ניתן לדעת מהו ערך הפונקציה בלקיחת הגבול בצורה ישירה והם:

- הגבול מהצורה: $\frac{\infty}{\infty}$ (מנת שני ביטויים שהולכים וגדלים עם שאיפת $x$).
- הגבול מהצורה: $\frac{0}{0}$ (מנת שני ביטויים שהולכים וקטנים עם שאיפת $x$).
- הגבול מהצורה: $\infty-\infty$ (הפרש של שני ביטויים שהולכים וגדלים עם שאיפת $x$).
במקרים אלו נעזר בפישוטים שהוצגו לעיל על מנת למצוא את ערך הגבול עצמו.

## שאלות:

4) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{x-2}+3$.

5) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{5x^2+1}{x^2-9}$.

6) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{2x^2-5x+2}{1+3x^2}$.

7) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{3x}{x^2-2x-15}$.

8) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{6x^3-5x+1}{1+2x^2}$.

9) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{ax+b}{x-b}$.

10) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$
ואת נקודת אי הרציפות שלה.

11) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2}{2x^2-4x}$
ואת נקודת אי הרציפות שלה.

12) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$.

13) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{x}{\sqrt{4-x}}$.

**14)** מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

**15)** מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{2x}{x-\sqrt{x}}$.

**16)** מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{3x}{\sqrt{x^2+5}}$.

**17)** מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{5x}{\sqrt{x^2-16}}$.

**18)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{4x^2+1}{ax^2-x+b}$.
האסימפטוטה האופקית של הפונקציה ואחת האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה נפגשות בנקודה $(-1,2)$.
מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.

**19)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{ax+8}{x+b\sqrt{x}}$.
הפונקציה חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה בנקודה $(16,2)$.
מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.

## תשובות סופיות:

4) $x=2\ ,\ y=3$ .

5) $x=\pm 3\ ,\ y=5$ .

6) $y=\frac{2}{3}$ .

7) $x=-3\ ,\ x=5\ ,\ y=0$ .

8) אין.

9) $x=b\ ,\ y=a$ .

10) $x=1\ ,\ y=1$ , נקודת אי-הגדרה: $(2,4)$.

11) $x=2\ ,\ y=\frac{1}{2}$ , נקודת אי-הגדרה: $(0,0)$.

12) $x=2\ ,\ y=0$ .

13) $x=4$ .

14) $x=1\ ,\ y=-1$ .

15) $x=1\ ,\ y=2$ .

16) $y=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)\right)=3\ ,\ y=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)\right)=-3$ .

17) $x=4\ ,\ x=-4\ ,\ y=5\ ,\ y=-5$ .

18) $b=-3\ ,\ a=2$ .

19) $b=1\ ,\ a=2$ .

# חקירת פונקצית מנה:

## שאלות:

**20)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{6x^2-10x+6}{3x^2-10x+3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**21)** נתונה הפונקציה: $f(x)=x+\frac{1}{x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**22)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

23) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{6x}{x^2-5x+4}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

24) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-3x}{x^2+3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

25) נתונה הפונקציה הבאה: $y=\frac{2x^2-5x+2}{4x}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה.
ב. נקודות קיצון.
ג. קביעת סוג הקיצון ותחומי עלייה וירידה.
ד. חיתוך עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטה אנכית.
ו. סרטוט סקיצה.

26) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום הגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**27)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום הגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**28)** לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{ax+4}{x^2}$ יש נקודת קיצון שבה $x=-8$.

א. מצא את $a$ וכתוב את הפונקציה.

ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**29)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{3x^2}{2x^2-8}$.

א. מהו תחום הגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. קבע את סוג הקיצון ותחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה.

ה. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.

ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**30)** נתונה הפונקציה: $y=\frac{a^2x-4}{2x^2-1}$, ($a$ קבוע).

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=1$ הוא: $m=4$.

א. מצא את כל הערכים האפשריים עבור $a$.

ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ג. מצא את נקודת החיתוך בין המשיק הנתון ומשיק העובר דרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$.

**31)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=1.5x-\frac{5x+1}{x+5}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה.

ב. נקודות קיצון וסוגן.

ג. תחומי עלייה וירידה.

ד. חיתוך עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. סרטוט סקיצה.

**32)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x-a}{x-1}$, $(a\neq 1)$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ג. הבע באמצעות $a$ את השיעורים של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ ועם ציר ה- $y$.

ד. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא עבור אילו ערכים של $a$ הפונקציה $f(x)$ עולה לכל $x$ בתחום ההגדרה.

ii. ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=a$ מקביל לישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=2$.
מצא את הערך של $a$ אם נתון כי הפונקציה עולה לכל $x$.

**33)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2+ax+6}{x-2}$, ($a$ פרמטר).
ידוע שאחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- $y$.

א. מצא את הערך של $a$.

ב. הצב את הערך של $a$ שמצאת בסעיף א' ומצא:

i. את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

iii. את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

iv. את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).

ג. עבור אלו ערכי $x$ הפונקציה שלילית?

ד. נתון הישר: $y=k$. עבור אלו ערכי $k$ אין נקודות משותפות לישר ולגרף הפונקציה? נמק.

**34)** נתונה הפונקציה: $y=\frac{x+3}{x-2}+A$ , (A פרמטר). גרף הפונקציה עובר בנקודה $(3A\ ,\ A)$.

א. מצא את ערך הפרמטר A.

ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. הוכח כי גרף הפונקציה יורד לכל $x$.

ד. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. נתון הישר: $y=k$.
האם קיים ערך של $k$ עבורו הישר חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות שונות? נמק.

**35)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{ax^2-20x+28}{x^2+2a}$.

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את האסימפטוטה האופקית שלו בנקודה $(0.5\ ,\ 3)$.

א. מצא את ערך הפרמטר $a$ וכתוב את הפונקציה ואת תחום הגדרתה.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. העזר בגרף הפונקציה וקבע עבור אלו ערכים של $k$ הישר: $y=k$ יחתוך את גרף הפונקציה בנקודה אחת בלבד.

**36)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{9-x^2}{x^2-k}$ יש נקודת קיצון שנמצאת על ציר ה- $y$.

ב. הוכח כי הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל $x$ אם ידוע כי שיעור ה- $y$ של נקודת הקיצון הוא 3.

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$.

ד. מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.

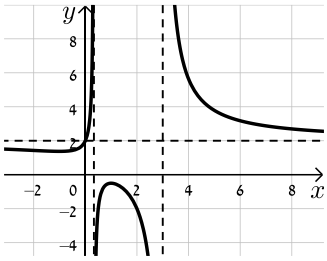
ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה וקבע בכמה נקודות יחתוך אותו הישר $y=-1$.
נמק את תשובתך.

## תשובות סופיות:

**20)** א. $x \neq 3 , x \neq \frac{1}{3}$ ב. $\max\left(1,-\frac{1}{2}\right) , \min\left(-1,1\frac{3}{8}\right)$.

ג. תחומי עלייה: $-1<x<1$ וגם $x \neq \frac{1}{3}$, תחומי ירידה: $1<x\neq 3$ או $x<-1$.

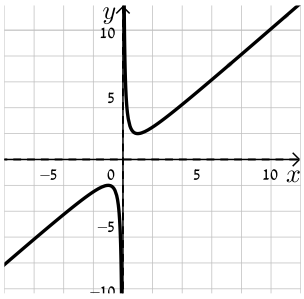
ד. $(0,2)$ ה. $y=2 , x=\frac{1}{3} , x=3$. ו. להלן סקיצה:



**21)** א. $x \neq 0$ ב. $\max(-1,-2) , \min(1,2)$

ג. עולה: $x>1$ או $x<-1$, יורדת: $-1<x<1 , x\neq 0$ ד. אין

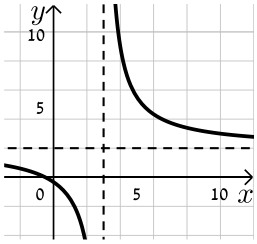
ה. להלן סקיצה:



**22)** א. $x \neq 3$ ב. אין. ג. הפונקציה יורדת בכל ת.ה

ד. $\left(0,-\frac{1}{3}\right) , \left(-\frac{1}{2},0\right)$ ה. $x=3 , y=2$.

ו. להלן סקיצה:

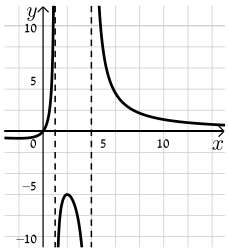


**23)** א. $x \neq 1 , x \neq 4$ ב. $\max(2,-6) , \min\left(-2,-\frac{2}{3}\right)$

ג. תחומי עלייה: $-2<x<2 , x\neq 1$, תחומי ירידה: $x>2 , x\neq 4$ או $x<-2$

ד. $(0,0)$ (אסימפטוטות: $x=4 , x=1 , y=0$).

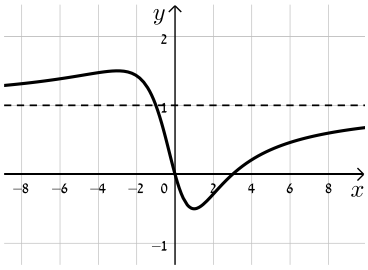
ה. להלן סקיצה:



**24)** א. כל $x$ ב. $\min\left(1,-\frac{1}{2}\right)$ , $\max\left(-3,1\frac{1}{2}\right)$

ג. עולה: $x>1$ או $x<-3$ , יורדת: $-3<x<1$ ד. $(3,0),(0,0)$ (אסימפטוטה: $y=1$).

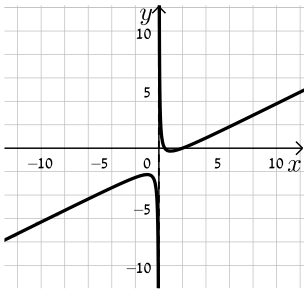
ה. להלן סקיצה:




**25)** א. $x\neq 0$ ב. $\min(1,-0.25)$ , $\max(-1,-2.25)$

ג. עולה: $x>1$ , $x<-1$ , יורדת: $-1<x<1$ , $x\neq 0$ ד. $(0.5,0),(2,0)$ ה. $x=0$.

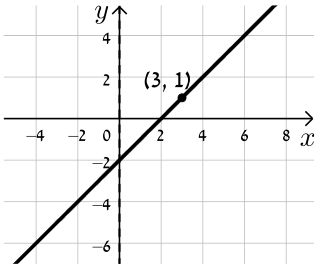
ו. להלן סקיצה:




**26)** א. $x\neq 3$ ב. אין ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה

ד. $(0,-2),(2,0)$ ה. אין, יש נקודת אי הגדרה ששיעוריה $(3,1)$.

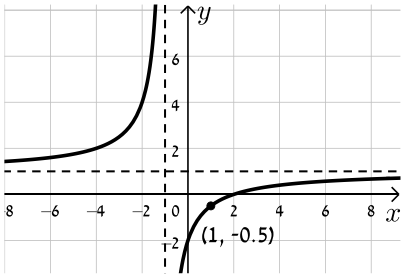
ו. להלן סקיצה:




**27)** א. $x\neq \pm 1$ ב. אין ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה

ד. $(0,-2),(2,0)$ ה. $x=-1$ , $y=1$ , יש נקודת אי הגדרה: $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$.

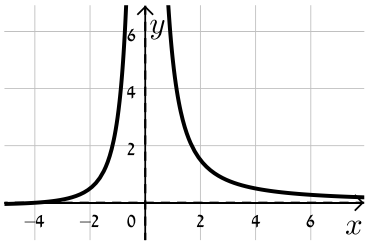
ו. להלן סקיצה:



**28)** א. $a=1$ , $f(x)=\frac{x+4}{x^2}$ ב. עולה: $-8<x<0$ יורדת: $x<-8$ , $x>0$

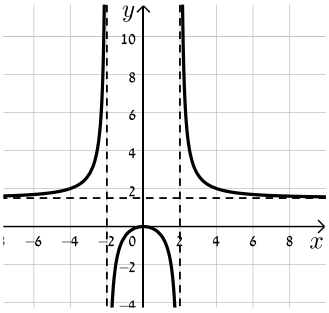
ג. $(-4,0)$ ד. $x=0$ , $y=0$.

ה. להלן סקיצה:



**29)** א. $x\neq\pm2$ ב. $\max(0,0)$ ג. יורדת: $x>0$ , $x\neq2$ , עולה: $x<0$ , $x\neq-2$

ד. $(0,0)$ ה. $x=\pm2$ , $y=1.5$. ו. להלן סקיצה:



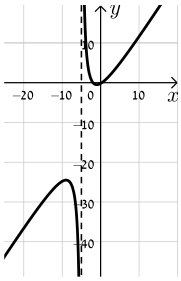
**30)** א. $a=\pm2$ ב. $(0,4)$ , $(1,0)$

ג. המשיק: $y=-4x+4$ אשר עובר בנקודה $(1,0)$. נקודת החיתוך: $(1,0)$.

**31)** א. $x\neq-5$ ב. $\max(-9,-24.5)$ , $\min(-1,-0.5)$

ג. עולה: $x>-1$ , $x<-9$ , יורדת: $-9<x<-1$ , $x\neq-5$

ד. $(0,-0.2)$, $\left(\frac{1}{3},0\right)$, $(-2,0)$ ה. $x=-5$. ו. להלן סקיצה:



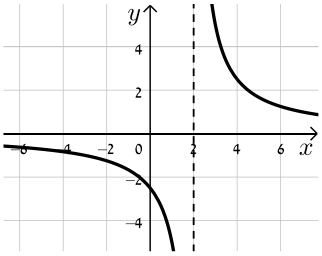
**32)** א. $x\neq1$ ב. $x=1$ , $y=1$ ג. $(a,0),(0,a)$ ד. i. $a>1$ ii. $a=2$.

**33)** א. $a=-3$ ב. i. $x\neq2$ ii. $(0,-3)$ iii. $\max(0,-3)$ , $\min(4,5)$

iv. $x=2$ ג. $x<2$ ד. $-3<k<5$.

**34)** א. $A=-1$ ב. $x\neq2$ ד. $(0,-2.5)$

ה. להלן סקיצה:



ו. לא

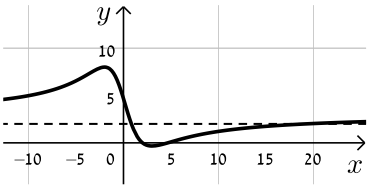
**35)** א. $a=3$ , $f(x)=\dfrac{3x^2-20x+28}{x^2+6}$ , כל $x$.

ב. $\min\left(3,-\dfrac{1}{3}\right)$ , $\max(-2,8)$

ג. עולה: $x>3$ , $x<-2$ , יורדת: $-2<x<3$

ד. $(2,0),\left(0,4\dfrac{2}{3}\right),\left(4\dfrac{2}{3},0\right)$

ה. להלן סקיצה:




ו. $3$ , $-\dfrac{1}{3}$ , $k=8$.

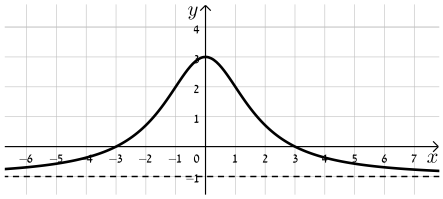
**36)** ב. $k=-3$

ג. $(3,0),(-3,0)$

ד. $y=-1$

ה. באף נקודה.

ו. להלן סקיצה:



# חקירת פונקצית שורש:

## שאלות:

**37)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x-3}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**38)** נתונה הפונקציה: $f(x)=(x-4)\sqrt{x-1}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**39)** נתונה הפונקציה: $f(x)=x\sqrt{6-x}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**40)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{4\sqrt{x}}{x^2+3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**41)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**42)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x^2}$.

א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודות קיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**43)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ב. האם ניתן להעביר משיק לגרף הפונקציה המקביל לציר ה-$x$? נמק והראה חישוב מתאים.

ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה-$x$.

ד. חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק והצירים.

**44)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x}-1}$.

א. מהו תחום הגדרה של הפונקציה?

ב. כמה נקודות יש לגרף הפונקציה שהמשיק העובר דרכן מקביל לציר ה-$x$? מצא אותן.

ג. כתוב את משוואות המשיקים בנקודות שמצאת בסעיף הקודם.

**45)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום הגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**46)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{ax+6}{\sqrt{9-x^2}}$, $a$ פרמטר.

מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-$y$.

ידוע כי הוא מקביל לישר: $3y-x=0$.

א. מצא את ערך הפרמטר $a$.

ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.

ד. כתוב את התחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

**47)** נתונות שתי הפונקציות הבאות: $g(x)=\frac{\sqrt{x-k}}{x}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+k}}$, ($k$ פרמטר חיובי).

ידוע כי הפונקציות חותכות זו את זו בנקודה שבה: $x=0.8$.

א. מצא את $k$.

ב. האם הפונקציות נחתכות בנקודה נוספת מלבד לנקודה הנתונה? אם כן מצא אותה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x=0.52$.

**48)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{kx}{\sqrt{k-x^2}}$ , $k$ פרמטר חיובי.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה? (בטא באמצעות $k$).

ii. מהן האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה?

ב. הראה כי הפונקציה עולה עבור כל ערך של $k$ בתחום הגדרתה.

ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-$x$. (בטא באמצעות $k$).

ד. המשיק אשר מצאת בסעיף הקודם חותך את אחת האסימפטוטות של הפונקציה בנקודה A. ידוע כי שטח המשולש הכלוא בין המשיק, ציר ה-$x$ והאסימפטוטה הנ"ל הוא: 4 יח"ש $S=$. מצא את ערך הפרמטר $k$.

**49)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+2}{x+4}$. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

א. כתוב בצורה מפורשת את הפונקציה $g(x)$.

ב. לפניך מספר טענות המתייחסות לפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$.
קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות.
הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

i. לפונקציות תחום הגדרה זהה.

ii. שתי הפונקציות עולות בכל תחום הגדרתן.

iii. שתי הפונקציות חותכות את ציר ה-$x$ באותה נקודה.

iv. לשתי הפונקציות יש אסימפטוטה משותפת.

ג. מצא את נקודות החיתוך של כל פונקציה עם ציר ה-$y$.

אסף פתר את סעיפים א' ו-ב' והחליט לטעון את הטענה הבאה:

היות והפונקציה $g(x)$ מוגדרת להיות: $g(x)=\sqrt{f(x)}$ אזי ניתן למצוא את שיעור ה-$y$ של כל נקודה שעל גרף הפונקציה $f(x)$ ע"י כך שנמצא תחילה את שיעור ה-$y$ של הנקודה בעלת אותו שיעור $x$ על הגרף של $g(x)$ ונעלה אותה בריבוע.

ד. האם אסף צודק? נמק בצורה איכותית (חישובים אינם נדרשים) את שיקולך.

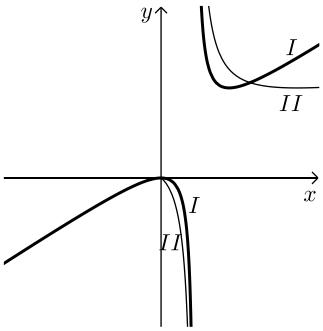
**50)** לפניך הפונקציות הבאות: $g(x)=\frac{x}{\sqrt{x-1}}$ , $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x}-1}$ .

א. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות.
הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

i. לשתי הפונקציות יש את אותו תחום ההגדרה.

ii. לשתי הפונקציות יש נקודות קיצון הנמצאות על הישר: $y=x$ .

iii. הפונקציות לא חותכות זו את זו.




מגדירים פונקציה נוספת והיא: $h(x)=(g(x))^2$ .

ב. כתוב באופן מפורש את הפונקציה החדשה: $h(x)$ .

ג. האם תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$ זהה לשל $g(x)$ ?

ד. באיור הסמוך ישנם שני גרפים.
קבע על סמך הסעיפים הקודמים איזו פונקציה כל גרף
מתאר מבין הפונקציות: $h(x)$ , $g(x)$ , $f(x)$ . נמק את בחירותיך.

**51)** לפניך שלוש פונקציות: $h(x)=\frac{\sqrt{k-x^2}}{x^2}$ , $g(x)=\frac{x^2}{\sqrt{k-x^2}}$ , $f(x)=x^2\sqrt{k-x^2}$ , $(k>0)$ .

א. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך
באמצעות חישוב מתאים:

i. לפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ תחום הגדרה זהה, השונה מתחום ההגדרה של $h(x)$ .

ii. קיימת פונקציה אשר אינה חותכת את ציר ה-$x$ כלל.

iii. הפונקציות: $h(x)$ ו-$g(x)$ הפוכות זו מזו בתחומי העלייה והירידה שלהן
(כאשר אחת עולה השנייה יורדת).

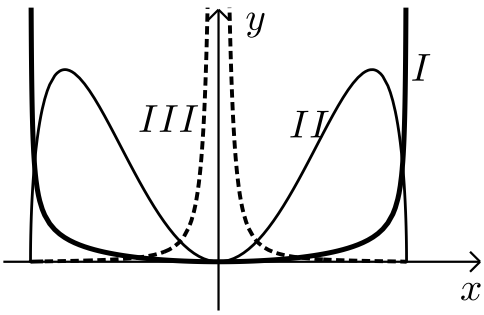
iv. לפונקציה: $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד.

מסמנים נקודה $A(0,\sqrt{12})$ על ציר ה-$y$ . ידוע כי מרחקה מאחת מנקודות החיתוך
של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-$x$ שאינה בראשית הוא: $d=6$ .

ב. מצא את $k$ .

ג. מצא את נקודות הקיצון של גרף
הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.

ד. לפניך איור ובו מסורטטות הסקיצות של
שלושת הפונקציות.
קבע עפ"י הסעיפים הקודמים איזה גרף
שייך לכל פונקציה.



## תשובות סופיות:

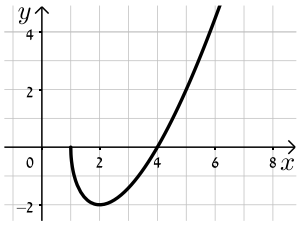
**37)** א. $x \geq 3$ ב. $\min(3,0)$ קצה ג. הפונקציה עולה בכל ת.ה.

ד. $(3,0)$ ה. אין. ו. להלן סקיצה:

**38)** א. $x \geq 1$ ב. $\min(2,-2)$ , $\max(1,0)$ קצה

ג. עולה: $x > 2$ , יורדת: $1 < x < 2$. ד. $(1,0),(4,0)$ ה. אין.

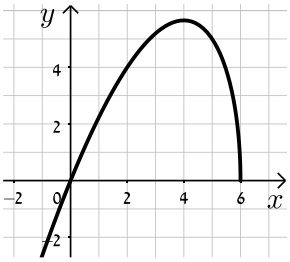
ו. להלן סקיצה:



**39)** א. $x \leq 6$ ב. $\max(4,4\sqrt{2})$ , $\min(6,0)$ קצה

ג. עלייה: $x < 4$ , ירידה: $4 < x < 6$ ד. $(6,0),(0,0)$.

ה. להלן סקיצה:



**40)** א. $x \geq 0$ ב. $\max(1,1)$ , $\min(0,0)$ קצה

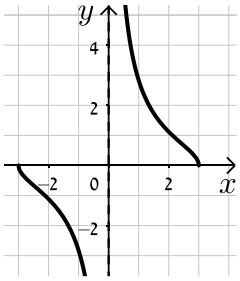
ג. עולה: $0 < x < 1$ , יורדת: $x > 1$ ד. $(0,0)$ ה. $y = 0$.

ו. להלן סקיצה:

**41)** א. $-3\le x\le 3$ וגם $x\ne 0$ ב. $\max(-3,0)$ קצה, $\min(3,0)$ קצה

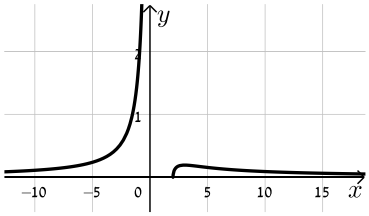
ג. עולה: אף $x$, יורדת: $-3\le x\le 3$ , $x\ne 0$ ד. $(-3,0),(3,0)$

ה. $x=0$. ו. להלן סקיצה:




**42)** א. $x<0$ , $x\ge 2$ ב. $\max\left(3,\frac{1}{\sqrt{27}}\right)$ , $\min(2,0)$ ג. $(2,0)$.

ד. להלן סקיצה:



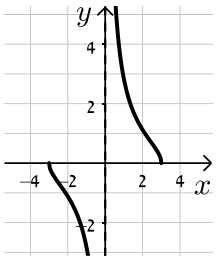

**43)** א. $(2,0)$ ב. לא ג. $y=2\sqrt{2}x-4\sqrt{2}$ ד. $S=4\sqrt{2}$.

**44)** א. $x\ge 0$ , $x\ne 1$ ב. $(9,6)$ ג. $y=6$.

**45)** א. $-3\le x\le 3$ וגם $x\ne 0$ ב. $\max(-3,0)$ קצה, $\min(3,0)$ קצה

ג. עולה: אף $x$, יורדת: $-3\le x\le 3$ וגם $x\ne 0$ ד. $(-3,0),(3,0)$

ה. $x=0$ ו. להלן סקיצה:




**46)** א. $a=1$ ב. $-3<x<3$ ג. $\left(-1.5,\sqrt{3}\right)$

ד. יורדת: $-3<x<-1.5$ , עולה: $-1.5<x<3$.

**47)** א. $k=0.48$ ב. כן, $(0.6,0.57)$ ג. $y=0.74x+0.1352$.

**48)** א. i. $-\sqrt{k}<x<\sqrt{k}$ ii. $x=\pm\sqrt{k}$ ב. $f'(x)=\frac{k^2}{\left(k-x^2\right)^{1.5}}>0$

ג. $y=\sqrt{k}x$ ד. $k=4$.

**49)** א. $g(x)=\sqrt{\frac{x+2}{x+4}}$ ב. i. לא נכון ii. נכון

iii. נכון iv. נכון ג. $f(x):\left(0,\frac{1}{2}\right)$ , $g(x):\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

ד. אסף צודק.

**50)** א. i. לא נכון ii. נכון iii. נכון ב. $h(x)=\frac{x^2}{x-1}$

ג. לא, $h(x):x\neq 1$ ד. $\mathrm{I}=h(x)$ , $\mathrm{II}=f(x)$.

**51)** א. i. לא נכון ii. לא נכון iii. נכון iv. נכון

ב. $k=24$ ג. $\min(0,0)$ , $\max\left(\pm 4,32\sqrt{2}\right)$

ד. $\mathrm{I}=g(x)$ , $\mathrm{II}=f(x)$ , $\mathrm{III}=h(x)$.

# תחומי קעירות ונקודות פיתול:

## סיכום כללי:

**תחומי קעירות – הגדרה:**

- פונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה (קמורה) בתחום $[x_0, x_1]$ אם לכל $x$ בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מעל לגרף הפונקציה.
  כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מטה יש למצוא תחום שבו: $f''(x) < 0$.
- פונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה (קעורה) בתחום $[x_0, x_1]$ אם לכל $x$ בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מתחת לגרף הפונקציה.
  כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מעלה יש למצוא תחום שבו: $f''(x) > 0$.

**נקודת פיתול – הגדרות:**

- נקודת פיתול היא נקודה שבה הפונקציה עוברת מתחום קעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה ולהיפך.
- נקודת פיתול מקיימת: $f''(x) = 0$ כאשר ערך הנגזרת השנייה משנה את סימנו בתחום שלפני ואחרי הנקודה המאפסת אותו.
- בנקודת פיתול המשיק לגרף הפונקציה חותך אותה ולא רק משיק לה מכיוון אחד.

## שאלות:

**52)** מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה: $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2$.

**53)** מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה: $f(x) = \frac{3x-2}{x^2}$.

**54)** מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x-1}}$.

**55)** מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה: $f(x) = x(x-2)^3$.

**56)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{a}{x^2+b}$ , $a,b$ פרמטרים.

הנקודה $(-1\,,\,1)$ היא נקודת פיתול של הפונקציה.

מצא את ערכי הפרמטרים $a,b$.

**57)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+2$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום הגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. מציאת נקודות פיתול.
ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**58)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2x}{x-\sqrt{x}}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום הגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. מציאת נקודות פיתול.
ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**59)** חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים:

i. מציאת תחום הגדרה.
ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
iii. מציאת נקודות קיצון וקביעת סוגן.
iv. מציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
v. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
vi. מציאת נקודות הפיתול של הפונקציה.
vii. מציאת תחומי הקעירות של הפונקציה.
viii. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

א. $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$

ב. $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$

ג. $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

ד. $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

ה. $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

ו. $f(x)=\frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)}$

ז. $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2-4}$

ח. $f(x)=\frac{x^3-x^2}{x^2-1}$

**הערה: בסעיפים ו ו-ז יש לבצע חקירה ללא סעיפים vi ו-vii.**

## תשובות סופיות:

**52)** $(2,16),(1,7)$ , קעירות כלפי מעלה: $x>2$ או $x<1$ , קעירות כלפי מטה: $1<x<2$.

**53)** $(2,1)$ , קעירות כלפי מעלה: $x>2$ , קעירות כלפי מטה: $0\neq x<2$.

**54)** קיצון: $\min(2,4)$ , פיתול: $\left(4,\frac{8}{\sqrt{3}}\right)$.

**55)** קיצון: $\min\left(\frac{1}{2},-\frac{27}{16}\right)$ , פיתול: $(1,-1),(2,0)$.

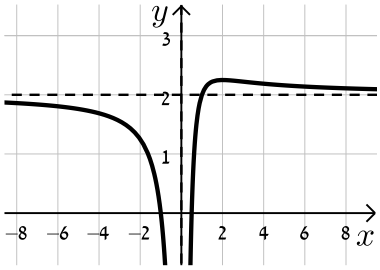
**56)** $a=4$ , $b=3$.

**57)** א. $x\neq 0$ ב. $\max\left(2,2\frac{1}{4}\right)$ ג. עולה: $0<x<2$ יורדת: $x>2$ , $x<0$

ד. $\left(\frac{1}{2},0\right),(-1,0)$ ה. $x=0$ , $y=2$ ו. $\left(3,2\frac{2}{9}\right)$.

ז. קעירות כלפי מעלה: $x>3$ , קעירות כלפי מטה: $0\neq x<3$.

ח. להלן סקיצה:

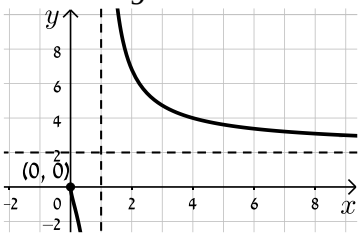



**58)** א. $1\neq x>0$ ב. אין. ג. יורדת בכל תחום הגדרתה.

ד. אין. ה. $x=1$ , $y=2$ נקודת אי הגדרה: $(0,0)$. ו. $\left(\frac{1}{9},-1\right)$

ז. קעירות כלפי מעלה: $x>1$ או $0<x<\frac{1}{9}$ , קעירות כלפי מטה: $\frac{1}{9}<x<1$.

ח. להלן סקיצה:




**59)** א. i. $x\neq 0$ ii. $(1,0)$ iii. $x=0$ , $y=0$ iv. $\max(2,0.25)$

v. עולה: $0<x<2$ , יורדת: $x<0$ , $x>2$ vi. $\left(3,\frac{2}{9}\right)$

vii. קעורה כלפי מעלה: $x>3$ , קעורה כלפי מטה: $0<x<3$ , $x<0$.

ב. i. $x\neq -1$ ii. $(0,0)$ iii. $x=-1$ , $y=2$ iv. $\min(0,0)$

v. עולה: $x<-1$ , $x>0$ , יורדת: $-1<x<0$ vi. $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{9}\right)$

vii. קעורה כלפי מעלה: $-1<x<\frac{1}{2}$ , $x<-1$ , קעורה כלפי מטה: $x<\frac{1}{2}$ .

ג. i. $x\neq\pm2$ ii. $(0,0)$ iii. $x=\pm2$

iv. $\max\left(-\sqrt{12},-5.2\right)$ , $\min\left(\sqrt{12},5.2\right)$ .

v. עולה: $x>\sqrt{12}$ , $x<-\sqrt{12}$ , יורדת: $2<x<\sqrt{12}$ , $-2<x<2$ , $-\sqrt{12}<x<-2$

vi. $(0,0)$ .

vii. קעורה כלפי מעלה: $x>2$ , $-2<x<0$ , קעורה כלפי מטה: $0<x<2$ , $x<-2$ .

ד. i. $x\neq-1$ ii. $(0,0)$ iii. $x=-1$ iv. $\max(-3,-6.75)$

v. עולה: $x>-1$ , $x<-3$ , יורדת: $-3<x<-1$ vi. $(0,0)$

vii. קעורה כלפי מעלה: $x>0$ , קעורה כלפי מטה: $-1<x<0$ , $x<-1$ .

ה. i. $x\neq1$ ii. $(-1,0),(0,-1)$ iii. $x=1$ , $y=1$ iv. אין.

v. יורדת בכל ת.ה. vi. $\left(-3,\frac{1}{8}\right),(-1,0)$

vii. קעורה כלפי מעלה: $-3<x<-1$ , $x>1$ , קעורה כלפי מטה: $-1<x<1$ , $x<-3$ .

ו. i. $x\neq2,5$ ii. $(0,-0.1),(-1,0),(1,0)$ iii. $x=2$ , $x=5$ , $y=1$

iv. $\max(2.78,-3.89)$ , $\min(0.359,-0.11)$

v. עולה: $2<x<2.78$ , $0.359<x<2$ , יורדת: $x>5$ , $2.78<x<5$ , $x<0.359$ .

ז. i. $x\neq\pm2$ ii. $(3,0),(1,0),(0,-0.75)$ iii. $x=\pm2$ , $y=1$

iv. אין. v. יורדת בכל ת.ה.

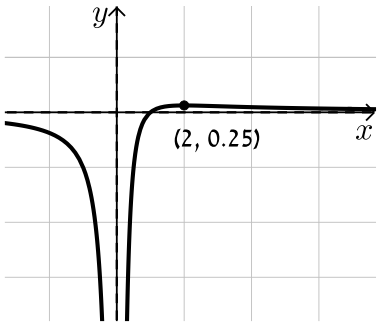
ח. i. $x\neq\pm1$ ii. $(0,0)$ iii. $x=-1$ iv. $\max(-2,-4)$ , $\min(0,0)$ .

v. עולה: $x>0$ , $x<-2$ , $x\neq1$ , יורדת: $-1<x<0$ , $-2<x<-1$

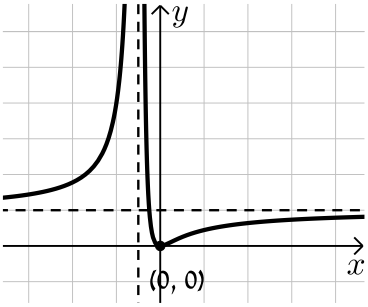
vi. אין. vii. קעורה כלפי מעלה: $x>-1$ , $x\neq1$ , קעורה כלפי מטה: $x<-1$ .

**סקיצות:**

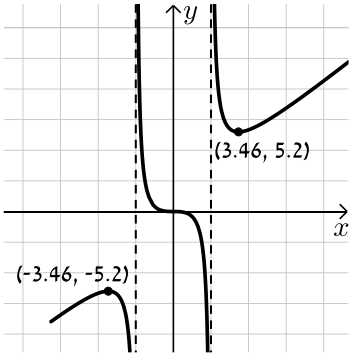
א.



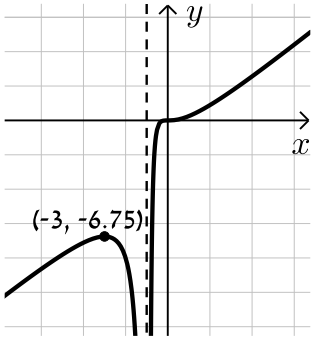

ב.



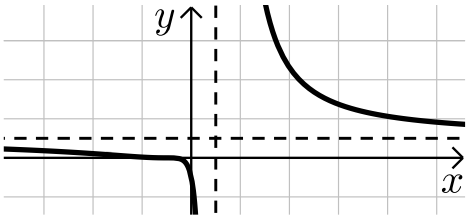

ג.



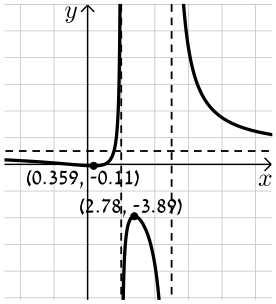

ד.



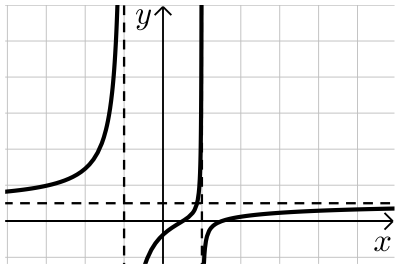

ה.



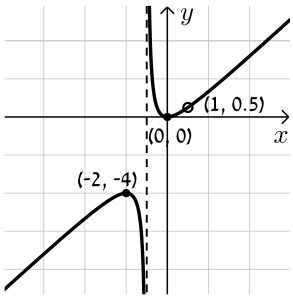

ו.




ז.




ח.



# חקירת פונקציה עם פרמטר:

## סיכום כללי:

סיווג נקודות קיצון באמצעות "$y$ :

אם הנקודה $A(x_1, y_1)$ היא נקודת קיצון אז:

- אם $f''(x_1) > 0$ הנקודה $A(x_1, y_1)$ היא נקודת מינימום.
- אם $f''(x_1) < 0$ הנקודה $A(x_1, y_1)$ היא נקודת מקסימום.

## שאלות:

**1)** מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = x^3 - 12x$ .

**2)** מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = x^2 - 6x - 16$ .

**3)** מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = x^3 - 3b^2x$ , $b > 0$ פרמטר.
שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**4)** נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{a^2 + x^2}$ $(a > 0)$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**5)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1-x^2}{(x-b)^2}$ , $(b>1)$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**6)** נתונה הפונקציה: $f(x)=4x\sqrt{b^2-x^2}$ , $(b>0)$.

חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**7)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-m}{ax-4}$ , $a,m$ פרמטרים קבועים כאשר: $a>0$.

ידוע כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- $y$.

א. מצא את הערך של הפרמטר $m$.

ב. הצב את הערך של $m$ שמצאת בסעיף א' והבא באמצעות $a$ את:

i. תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

iii. האסימפטוטות לגרף הפונקציה המקבילות לצירים.

ג. סרטט סקיצה וסמן בה את נקודות הקיצון ואת משוואות האסימפטוטות שהבעת באמצעות $a$ בסעיף הקודם.

ד. ידוע כי נקודת הקיצון שאינה על ציר ה- $y$ נמצאת במרחקים שווים מהצירים. מצא את הערך של הפרמטר $a$.

ה. נתון הישר: $y=k$. מצא עבור אילו ערכים של $k$ אין לישר ולגרף הפונקציה נקודות משותפות כלל.

## תשובות סופיות:

1) $\max(-2,16)$ , $\min(2,-16)$

2) $\min(3,-25)$

3) $\max(-b,2b^3)$ , $\min(b,-2b^3)$

4) א. כל $x$ ב. $\min\left(-a,-\frac{1}{a}\right)$ , $\max\left(a,\frac{1}{a}\right)$.

ג. עולה: $-a<x<a$ יורדת: $x>a$ , $x<-a$.

ד. $(0,0)$ ה. אסימפטוטה אופקית: $y=0$

5) א. $x\neq b$ ב. $\max\left(\frac{1}{b},\frac{1}{b^2-1}\right)$ ג. עולה: $x>b$ , $x<\frac{1}{b}$ יורדת: $\frac{1}{b}<x<b$.

ד. $\left(0,\frac{1}{b^2}\right)$ , $(-1,0)$ , $(1,0)$ ה. $x=b$ , $y=-1$.

6) א. $-b\le x\le b$ ב. $\min\left(-\frac{b}{\sqrt{2}},-2b^2\right)$ , $\max\left(\frac{b}{\sqrt{2}},2b^2\right)$ , $\min(-b,0)$ קצה,

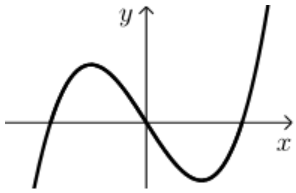
$\min(b,0)$ קצה. ג. עולה: $-\frac{b}{\sqrt{2}}<x<\frac{b}{\sqrt{2}}$ , יורדת: $\frac{b}{\sqrt{2}}<x<b$ , $-b<x<-\frac{b}{\sqrt{2}}$.

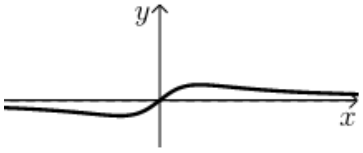
ד. $(0,0)$ , $(-b,0)$ , $(b,0)$.

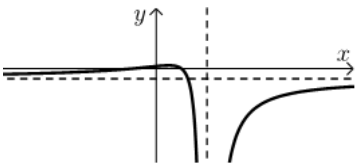
7) א. $m=0$ ב. i. $x\neq\frac{4}{a}$ ב. ii. $\min\left(\frac{8}{a},\frac{16}{a^2}\right)$ , $\max(0,0)$

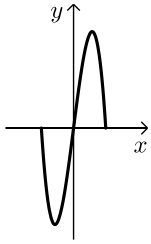
ב. iii. $x=\frac{4}{a}$ ד. $a=2$ ה. $0<k<4$.

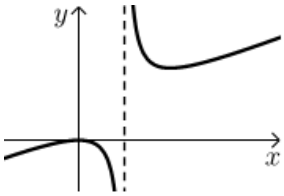
## סקיצות לשאלות:

3)



4)



5)



6)



7)


# פונקציות ללא תבנית מפורשת:

## סיכום כללי:

**הגדרת פונקציה:**

פונקציה $f$ היא התאמה בין ערך $x$ לערך $y$ ומסומנת באופן הבא: $f: x \to y$.
כך שלכל $x$ מתאים ערך אחד בלבד של $y$. סימון אחר: $y = f(x)$.
הנגזרת של פונקציה $f(x)$ מסומנת $f'(x)$.

**כללי הגזירה לפי כלל השרשרת:**

- סימון הנגזרת: $(f(x))' = f'(x)$.
- גזירה של פונקציה בחזקה: $(f^2(x))' = 2f(x)f'(x)$.
- גזירה של הרכבת פונקציות: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

## שאלות:

**1)** הפונקציה $f(x)$ מקיימת: $f(1) = 3$ ו- $f'(1) = -2$.
חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $f(1) + 4$.

ב. $f'(1) + 4$.

ג. $\frac{f(1)+1}{f'(1)-1}$.

ד. $\sqrt{f(1) + f'(1)}$.

**2)** נתונה פונקציה $f$ המקיימת: $f(4) = 0$ ו- $f'(4) = 1$.
מגדירים: $g(x) = 2x + f(2x)$.
חשב את $g(2)$ ואת $g'(2)$.

3) נתונה פונקציה המקיימת: $f(8)=-1$ ו- $f'(8)=1$.

א. נתון: $g(x)=x^2\sqrt{f(4x)+f'(x+6)}$. חשב את $g(2)$.

ב. נתון: $h(x)=\dfrac{f(x+2)+x+2}{f'(14-x)-14+x}$. חשב את $h(6)$.

4) נתונה פונקציה המקיימת: $f(9)=-4$, $f'(9)=3$.

מגדירים: $g(x)=f^2(3x)+f'(x^2)$. חשב את $g(3)$.

5) פונקציה $f$ מקיימת: $f(4)=2$, $f'(4)=1$.

מגדירים: $g(x)=f^2(x)+f(x)+x$.

חשב את $g(4)$ ואת $g'(4)$.

6) פונקציה $f$ מקיימת: $f(1)=-3$, $f'(1)=3$. מגדירים: $g(x)=\dfrac{x\cdot f(x)}{x+f(x)}$.

חשב את $g(1)$ ואת $g'(1)$.

7) פונקציה $f$ מקיימת: $f(-2)=6$, $f'(-2)=2$. מגדירים: $g(x)=\sqrt{f^2(x)+1}$.

חשב את $g(-2)$ ואת $g'(-2)$.

8) פונקציה $f$ מקיימת: $f\left(\frac{1}{2}\right)=3$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3}$. מגדירים: $g(x)=3x\cdot f(2x)$.

חשב את $g\left(\frac{1}{4}\right)$ ואת $g'\left(\frac{1}{4}\right)$.

9) פונקציה $f$ מקיימת: $f(6)=\frac{2}{3}$, $f'(6)=-\frac{3}{2}$. מגדירים: $g(x)=\dfrac{x+3+f(x+3)}{f(2x)+3}$.

חשב את $g(3)$ ואת $g'(3)$.

**10)** נתונה פונקציה המקיימת: $f(8)=-3$. מגדירים: $g(x)=\frac{f(4x)+1}{f(x+6)+2}$.

א. חשב את $g(2)$.

ב. חשב את $f'(8)$ אם ידוע כי: $g'(2)=1$.

ג. חשב את $f'(8)$ אם ידוע כי: $g'(2)=\left(f'(8)\right)^2$ וכי $f'(8)<0$.

**11)** נתונה פונקציה המקיימת: $f(3)=-2$.

מגדירים: $g(x)=\frac{x^2\cdot f(x-2)}{f(2x-7)}$ וידוע כי $g'(5)=-15$.

חשב את $g(5)$ ואת $f'(3)$.

**12)** נתונה פונקציה שמקיימת: $f(4)=\frac{1}{2}$.

מגדירים: $g(x)=x^2\cdot f(x^2)+f'^2(x^2)$.

א. הבע את $g'(x)$ באמצעות $f$.

ב. חשב את $g(-2)$ ואת $g(2)$ אם ידוע כי $f'(4)=1$.

ג. חשב את $f'(4)$ אם ידוע כי $g'(2)=11$ ו- $f''(4)=\frac{1}{4}$.

## תשובות סופיות:

1) א. 7 ב. 2 ג. $-\frac{4}{3}$ ד. 1.

2) $g(2)=4\,,\,g'(2)=4$.

3) א. $g(2)=0$ ב. $h(6)=-1$.

4) $g(3)=19$.

5) $g(4)=10\,,\,g'(4)=6$.

6) $g(1)=1.5\,,\,g'(1)=3$.

7) $g(-2)=\sqrt{37}\,,\,g'(2)=\frac{12}{\sqrt{37}}$.

8) $g\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{4}\,,\,g'\left(\frac{1}{4}\right)=11$.

9) $g(3)=1\frac{9}{11}\,,\,g'(3)=\frac{327}{242}=1.351$.

10) א. $g(2)=2$ ב. $f'(8)=-\frac{1}{2}$ ג. $f'(8)=-2$.

11) $g(5)=25\,,\,f'(3)=-2$.

12) א. $g'(x)=2x\,f\left(x^2\right)+2x^3 f'\left(x^2\right)+4x\,f'\left(x^2\right)f''\left(x^2\right)$

ב. $g(2)=3\,,\,g'(-2)=3$ ג. $f'(4)=\frac{1}{2}$.

# קורס ריענון במתמטיקה

## פרק 22 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות מעריכיות

### תוכן העניינים

1. הנגזרת של פונקציה מעריכית ..... 305
2. שימושי הנגזרת ..... 309
3. חקירה של פונקציה מעריכית ..... 310

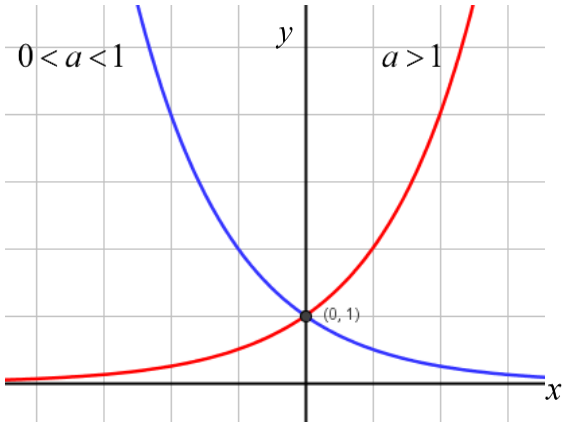
# הנגזרת של פונקציה מעריכית:

## סיכום כללי:

### הגדרות כלליות:

להלן תיאורים גרפיים של פונקציה מעריכית כללית מהצורה: $f(x)=a^x$

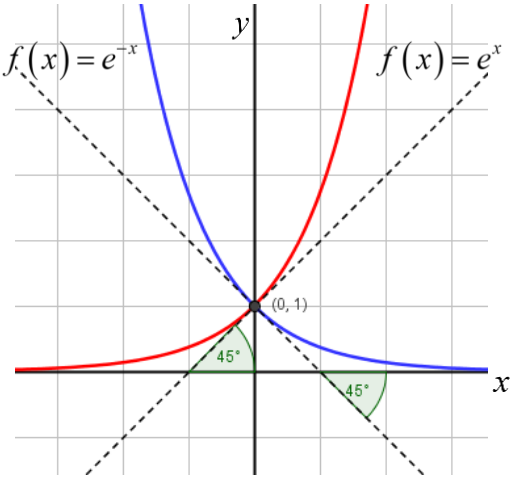
עבור: $a>1$ ו-$0<a<1$:




### תכונות כלליות:

1. הפונקציות מוגדרות לכל $x$.
2. הפונקציות תמיד חיוביות.
3. הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- $y$ בנקודה: $(0,1)$.
4. עבור: $a>1$ הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור: $0<a<1$ הפונקציה יורדת בכל ת.ה.

עבור הפונקציות $f(x)=e^x$ ו- $f(x)=e^{-x}$ נקבל:



**תכונות נוספות:**

1. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=e^x$ בנקודת החיתוך עם ציר ה- $y$ הוא 1.
2. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=e^{-x}$ בנקודת החיתוך עם ציר ה- $y$ הוא 1-.

**נגזרות של פונקציות מעריכיות:**

| הפונקציה | הנגזרת |
|---|---|
| $y=a^x$ | $y'=a^x\cdot\ln a$ |
| $y=a^{f(x)}$ | $y'=a^{f(x)}\cdot f'(x)\cdot\ln a$ |
| $y=e^x$ | $y'=e^x$ |
| $y=e^{f(x)}$ | $y'=e^{f(x)}\cdot f'(x)$ |

**תזכורת - כללי הגזירה:**

| מספר כלל | הפונקציה | תיאור | הנגזרת |
|---|---|---|---|
| .1 | $y=a\cdot f(x)$ | מכפלה בקבוע | $y'=a\cdot f'(x)$ |
| .2 | $y=f(x)+g(x)$ | סכום פונקציות | $y'=f'(x)+g'(x)$ |
| .3 | $y=f(x)\cdot g(x)$ | מכפלת פונקציות | $y'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$ |
| .4 | $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ | מנת פונקציות | $y'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ |
| .5 | $y=f(g(x))$ | פונקציה מורכבת | $y'=f'(g(x))\cdot g'(x)$ |

## שאלות:

**1)** גזור את הפונקציות הבאות (סכום פונקציות):

א. $f(x)=3e^{x}+e^{2x}+e^{-x}+2x+1$

ב. $f(x)=e^{x^2-3x}+ex$

ג. $f(x)=2^{3x}$

ד. $f(x)=3^{x^2}+4^{-x}$

**2)** גזור את הפונקציות הבאות (מכפלת פונקציות):

א. $f(x)=x\cdot e^{x}$

ב. $f(x)=x^2\cdot e^{4x}$

ג. $f(x)=(x+1)\cdot 2^{x}$

**3)** גזור את הפונקציות הבאות (מנת פונקציות):

א. $f(x)=\frac{x^2}{e^{x}}$

ב. $f(x)=\frac{e^{x}}{e^{x}+1}$

**4)** גזור את הפונקציות הבאות (פונקציה מורכבת):

א. $f(x)=5\left(e^{2x}-1\right)^3$

ב. $f(x)=\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}}$

ג. $f(x)=\frac{e^{3x}}{\sqrt{e^{x}+1}}$

**5)** גזור את הפונקציות הבאות (שאלות שונות):

א. $f(x)=e^{2x}$

ב. $f(x)=e^{x}+1$

ג. $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

ד. $f(x)=\left(x^2+1\right)e^{x}$

ה. $f(x)=e^{-x}\left(x^2+4x+1\right)$

ו. $f(x)=e^{3x-2}$

ז. $f(x)=e^{x}\cdot\frac{1}{x}$

ח. $f(x)=x^3e^{2x}$

ט. $f(x)=e^{-2x}(x+4)$

י. $f(x)=e^{2x+1}(1-x)$

יא. $f(x)=\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}$

יב. $f(x)=\frac{x^3}{e^{3x}}$

יג. $f(x)=\frac{2+x^2}{e^{x^2}}$

יד. $f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{-x}+e^{x}}$

טו. $f(x)=\frac{x^2+1}{e^{-x}}$

טז. $f(x)=\frac{e^{x}}{1-e^{x+1}}$

## תשובות סופיות:

1) א. $3e^{x}+2e^{2x}-e^{-x}+2$ ב. $(2x-3)e^{x^2-3x}+e$ ג. $3\ln 2\cdot 2^{3x}$ ד. $2x\ln 3\cdot 3^{x^2}-\ln 4\cdot 4^{-x}$

2) א. $(1+x)e^{x}$ ב. $2xe^{4x}(1+2x)$ ג. $2^{x}(1+x\ln 2+\ln 2)$

3) א. $\frac{x(2-x)}{e^{x}}$ ב. $\frac{e^{x}}{(e^{x}+1)^{2}}$

4) א. $30e^{2x}(e^{2x}-1)^{2}$ ב. $\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}}}$ ג. $\frac{5e^{4x}+6e^{3x}}{2\sqrt{(e^{x}+1)^{3}}}$

5) א. $2e^{2x}$ ב. $e^{x}$ ג. $-\frac{e^{1/x}}{x^{2}}$ ד. $(x+1)^{2}e^{x}$

ה. $e^{-x}(-x^{2}-2x+3)$ ו. $3e^{3x-2}$

ז. $\frac{e^{x}(x-1)}{x^{2}}$ ח. $x^{2}e^{2x}(3+2x)$ ט. $-e^{-2x}(2x+7)$

י. $e^{2x+1}(1-2x)$

יא. $\frac{e^{-1/x}}{x^{2}}$ יב. $\frac{3x^{2}(1-x)}{e^{3x}}$ יג. $\frac{-2x(x^{2}+1)}{e^{x^2}}$

יד. $\frac{4}{(e^{x}+e^{-x})^{2}}$ טו. $\frac{(x+1)^{2}}{e^{-x}}$ טז. $\frac{e^{x}}{(1-e^{x+1})^{2}}$

# שימושי הנגזרת:

## שאלות:

**6)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=e^x$ בנקודה $A(1,e)$.

**7)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=e^{2x}+xe^{-x}$ בנקודה שבה $x=0$.

**8)** מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x)=(e+1)e^x-e^{2x}$ בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y=e$.

**9)** נתונה הפונקציה: $y=e^{2x}+3ex$.
לפונקציה העבירו משיק דרך הנקודה שבה: $x=2$.
מצא את משוואת המשיק.

**10)** שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=a\cdot 3^{2x-1}+3^{x-b}$ בנקודה $(1,15)$ הוא $21\ln 3$.
מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.

## תשובות סופיות:

**6)** $y=ex$

**7)** $y=3x+1$

**8)** $y=(e-1)x+e$ , $y=(-e^2+e)x+e^2$

**9)** $y=2e^4x+3ex-3e^4$

**10)** $a=2$ , $b=-1$

## חקירה של פונקציה מעריכית:

### שאלות:

**11)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{2x-1}{e^x}$ ב. $f(x)=\frac{3}{e^x-1}$ ג. $f(x)=\frac{x+1}{e^x-5}$

ד. $f(x)=\frac{1}{e^{2x}-3e^x+2}$ ה. $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^x}$ ו. $f(x)=\frac{\sqrt{e^x-1}}{5x-2}$

ז. $f(x)=\sqrt{e^{2x}-4e^x+3}$

**12)** מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x)=x^2e^x$ .

**13)** מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{e^x}{x-2}$ .

**14)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{ax^2+bx+9}{e^x}$ .
הפונקציה משיקה לציר ה-$x$ בנקודה שבה $x=1.5$ .
מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו-$b$ ואת נקודות הקיצון של הפונקציה.

**15)** נתונה הפונקציה: $f(x)=8^x+p\cdot 2^x+q$ . לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה $(\log_2 3,-19)$ . מצא את ערכי הפרמטרים $p$ ו-$q$ .

**16)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=e^{2x}+e^x$ .

**17)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^{2x}}$ .

**18)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{e^x+5}{e^x-1}$ .

**19)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{e^{2x}+1}{e^{x}-5}$ .

**20)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$ .

**21)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{e^{x}-2}{e^{2x}-5e^{x}+6}$ .

**22)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{e^{x}}{x^{2}}$ .

**23)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{x^{3}-1}{e^{x}}$ .

**24)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{x-1}{e^{3x}-e}$ .

**25)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=(x-3)e^{x}$ .

**26)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$ .

**27)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^{2}+a}{be^{x}}$ . לפונקציה יש נקודת פיתול בנקודה $\left(1,\frac{2}{e}\right)$.
מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$ ואת נקודת הפיתול השנייה של הפונקציה.

**28)** חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים הבאים:

1. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
2. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
3. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
4. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

א. $f(x)=(x-1)e^x$

ב. $f(x)=(x^2+1)e^x$

ג. $f(x)=x^2e^{-\frac{1}{4}x^2}$

ד. $f(x)=e^{x^2-x}$

ה. $f(x)=\frac{2}{e^{x^2}+1}$

ו. $f(x)=\frac{e^{2x}+1}{e^{x+1}}$

**29)** נתונה הפונקציה $f(x)=(x-3)e^x$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**30)** נתונה הפונקציה $f(x)=e^{2x}-8e^x+6x+10$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$.
ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**31)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{4x}{e^{0.5x^2}}$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**32)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^3}{e^x}$ . חקור על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**33)** נתונה הפונקציה $f(x)=2x\cdot 3^x$ . חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**34)** נתונה הפונקציה $f(x)=2e^{\frac{x}{x^2+1}}$ . חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
ז. לאלו ערכי $m$ יש למשוואה $f(x)=m$ בדיוק פתרון אחד?

**35)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^2e^{\frac{1}{x}}$ . חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. מציאת נקודות פיתול של הפונקציה.
ז. כתיבת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.

ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**36)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{e^{3x}}{12x^2+1}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**37)** שיפוע המשיק לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{e^{3x^2+6x+k}}$ בנקודה שבה $x=1$ הוא $-\frac{12}{e^{10}}$.

א. מצא את ערך הפרמטר $k$ וכתוב את הפונקציה.

ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. הוכח על סמך הסקיצה את אי-השוויון הבא: $0<\frac{1}{e^{3x^2+6x+1}}\le e^2$.

**38)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=e^{2x}+ae^x+b$. גוזרים את הפונקציה פעמיים

וידוע כי כאשר $x=\ln\frac{2}{3}$ הנגזרות מקיימות: $f'(x)+f''(x)=8$.

א. מצא את $a$.

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא: $y=16x+7-16\ln 2$.

ב. מצא את שיעור ה-$x$ של נקודת ההשקה.

ג. מצא את $b$.

ד. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.

**39)** נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=6x-e^x$ ו- $g(x)=ae^x-e^{2x}+b$.

ידוע כי לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה אותו שיעור $x$ וכי שתיהן נפגשות על ציר ה-$y$.

א. מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו-$b$.

ב. הראה כי לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה משותפים.

**40)** לגרף הפונקציה: $f(x)=ax^2\cdot e^{-bx^2}$ יש נקודת קיצון: $\left(2,\frac{4}{e}\right)$ , $a,b\neq 0$ .

א. מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$ וכתוב את הפונקציה.

ב. מצא את נקודות הקיצון הנוספות של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. מעבירים ישר: $y=k$ . באיזה תחום ערכים צריך להימצא $k$ כדי שהישר יחתוך את גרף הפונקציה ב-4 נקודות שונות?

**41)** לפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-6x-7}{e^{ax-1}}$ יש קיצון בנקודה שבה: $x=1$ .

א. מצא את ערך הפרמטר $a$ .

ב. האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון נוספות? אם כן מצא אותן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**42)** הישר $x=\sqrt{6}$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה: $f(x)=\frac{e^{2x}}{x^2+m}$ .

א. מצא את ערך הפרמטר $m$ וכתוב את הפונקציה.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**43)** נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3\cdot e^{2x}$ .

א. מצא את הנקודות המקיימות: $f'(x)=0$ וקבע כמה מהן הן נקודות קיצון.

ב. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. בכמה נקודות חותך הישר $y=-0.01$ את גרף הפונקציה?

**44)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=e^{2x}+ae^{x}+b$ . גוזרים את הפונקציה פעמיים

וידוע כי כאשר $x=\ln\frac{2}{3}$ הנגזרות מקיימות: $f'(x)+f''(x)=12$ .

א. מצא את $a$ .

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא: $y=22x+28-22\ln 2$ .

ב. מצא את שיעור ה-$x$ של נקודת ההשקה.

ג. מצא את $b$ .

ד. האם הפונקציה חותכת את ציר ה-$x$ ? אם כן מצא את הנקודות.

**45)** נתונה הפונקציה: $f(x)=x\cdot a^{x}$ , $(a>0)$ .

לפונקציה יש נקודת קיצון שבה: $x=-\frac{1}{\ln 2}$ .

א. מצא את $a$ .

ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

הנקודה שבה $x=2$ היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$

עם גרף הפונקציה: $g(x)=x^{2}\cdot 2^{x}-kx\cdot 2^{x}$ .

ג. מצא את $k$ .

ד. מצא נקודה נוספת שבה הגרפים נחתכים.

**46)** נתונה הפונקציה: $f(x)=3^{2x}+2\cdot 3^{1-x}$ .

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-$y$ .

ב. הוכח כי גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה-$x$ .

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

## תשובות סופיות:

**11)** א. כל $x$ ב. $x\neq 0$ ג. $x\neq \ln 5$ ד. $x\neq 0$ , $x\neq \ln 2$ ה. כל $x$

ו. $0\le x\neq \frac{2}{5}$ ז. $x\le 0$ , $x\ge \ln 3$

**12)** $\min(0,0)$ , $\max\left(-2,\frac{4}{e^2}\right)$

**13)** $\min\left(3,e^3\right)$

**14)** $a=4$ , $b=-12$ , $\max(3.5,0.483)$ , $\min(1.5,0)$

**15)** $q=35$ , $p=-27$

**16)** $y=0$

**17)** $y=0$

**18)** $y=1$ , $y=-5$ , $x=0$

**19)** $y=-\frac{1}{5}$ , $x=\ln 5$

**20)** $y=1$ , $y=-1$

**21)** $y=0$ , $y=-\frac{1}{3}$ , $x=\ln 3$ , נקודת אי הגדרה: $(\ln 2,-1)$

**22)** $y=0$ , $x=0$

**23)** $y=0$

**24)** $y=0$ , $x=\frac{1}{3}$

**25)** $y=0$

**26)** $x=0$ , נקודת אי הגדרה: $(0,0)$

**27)** $b=1$ , $a=1$ , $\left(3,\frac{10}{e^3}\right)$

**28)** א.1. כל $x$ 2. $(0,-1)$ , $(1,0)$ 3. $\min(0,-1)$ 4. עולה: $x>0$ יורדת: $x<0$

ב.1. כל $x$ 2. $(0,1)$ 3. $\left(-1,\frac{2}{e}\right)$ פיתול 4. עולה: $x>-1$ , $x<-1$

ג.1. כל $x$ 2. $(0,0)$ 3. $\max\left(-2,\frac{4}{e}\right)$ , $\min(0,0)$ , $\max\left(2,\frac{4}{e}\right)$

4. עולה: $0<x<2$ , $x<-2$ יורדת: $-2<x<0$ , $x>2$

ד.1. כל $x$ 2. $(0,1)$ 3. $\min\left(0.5,e^{-0.25}\right)$ 4. עולה: $x>0.5$ יורדת: $x<0.5$

ה.1. כל $x$ 2. $(0,1)$ 3. $\max(0,1)$ 4. עולה: $x<0$ יורדת: $x>0$

ו.1. כל $x$ 2. $(0,2e^{-1})$ 3. $\min(0,2e^{-1})$ 4. עולה: $x>0$ יורדת: $x<0$

**29)** א. כל $x$ ב. $\min(2,-e^2)$ ג. תחומי עלייה: $x>2$ תחומי ירידה: $x<2$

ד. $(0,-3)$ , $(3,0)$

**30)** א. כל $x$ ב. $\min(\ln 3,1.59)$ , $\max(0,3)$

ג. תחומי עלייה: $x>\ln 3$ או $x<0$ תחומי ירידה: $0<x<\ln 3$ ד. $(0,3)$

**31)** א. כל $x$ ב. $\max\left(1,\frac{4}{e^{0.5}}\right)$ , $\min\left(-1,-\frac{4}{e^{0.5}}\right)$

ג. תחומי עלייה: $-1<x<1$ תחומי ירידה: $x>1$ או $x<-1$ ד. $(0,0)$

**32)** א. כל $x$ ב. $\max\left(3,\frac{27}{e^3}\right)$ ג. עולה: $x<3$ , יורדת: $x>3$

ד. $(0,0)$

**33)** א. כל $x$ ב. $\min(-0.91,-0.67)$ ג. עולה: $x>-0.91$ יורדת: $x<-0.91$

ד. $(0,0)$

**34)** א. כל $x$ ב. $\min\left(-1,\frac{2}{\sqrt{e}}\right)$ , $\max(1,2\sqrt{e})$ ג. עולה: $-1<x<1$ יורדת:

$x<-1$ , $x>1$ ד. $(0,2)$ ה. $y=2$ ז. $m=\frac{2}{\sqrt{e}}$ , $m=2\sqrt{e}$ , $m=2$

**35)** א. $x\neq 0$ ב. $\min\left(\frac{1}{2},\frac{e^2}{4}\right)$ ג. עולה: $x>\frac{1}{2}$ , יורדת: $0\neq x<\frac{1}{2}$

ד. אין

**36)** א. כל $x$ ב. $\min\left(\frac{1}{2},\frac{e^{1.5}}{4}\right)$ , $\max\left(\frac{1}{6},\frac{3\sqrt{e}}{4}\right)$ ג. עולה: $x>\frac{1}{2}$ , יורדת: $x<\frac{1}{6}$

$\frac{1}{6}<x<\frac{1}{2}$ ד. $(0,1)$

**37)** א. $k=1$ , $f(x)=\frac{1}{e^{3x^2+6x+1}}$ ב. $(-1,e^2)$

ד. ניתן לראות עפ"י הגרף כי ערך הפונקציה $f(x)$ נמצא בתחום $0<f(x)\le e^2$

**38)** א. $a=4$ ב. $x=\ln 2$ ג. $b=-5$ ד. $(0,0)$

**39)** א. $a=12$ , $b=-12$ ב. עולות: $x<\ln 6$ יורדות: $x>\ln 6$

**40)** א. $a=1$ , $b=0.25$ , $f(x)=x^2e^{-\frac{1}{4}x^2}$ ב. $\max\left(-2,\frac{4}{e}\right)$ , $\min(0,0)$

ג. $(0,0)$ ה. $0<k<\frac{4}{e}$

**41)** א. $a=\frac{1}{3}$ ב. כן: $\left(11,\frac{48}{e^{2\frac{2}{3}}}\right)$ ג. עולה: $1<x<11$ יורדת: $x<1$ , $x>11$

ד. $(-1,0)$ , $(7,0)$ , $(0,-7e)$

**42)** א. $m=-6$ , $f(x)=\frac{e^{2x}}{x^2-6}$ ב. $\min\left(3,\frac{e^6}{3}\right)$ , $\max\left(-2,-\frac{1}{2e^4}\right)$ ג. $\left(0,-\frac{1}{6}\right)$

**43)** א. $x=0,-1.5$ . נקודת הקיצון היא: $\min\left(-1.5,-3\frac{3}{8}e^{-3}\right)$ ב. $y=0$

ד. 2 נקודות.

**44)** א. $a=7$ ב. $x=\ln 2$ ג. $b=10$ ד. לא.

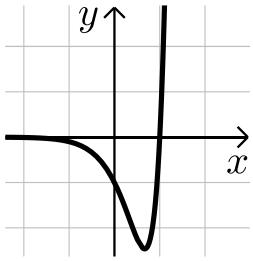
**45)** א. $a=2$ ב. עולה: $x>-\frac{1}{\ln 2}$ יורדת: $x<-\frac{1}{\ln 2}$ ג. $k=1$

ד. $(0,0)$

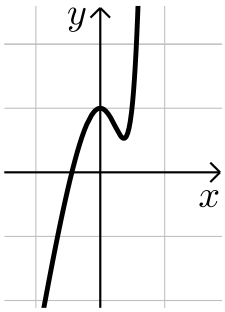
**46)** א. $y=-x\ln 81+7$ ג. $\min\left(\frac{1}{3},\sqrt[3]{243}\right)$

**סקיצות לשאלות החקירה:**

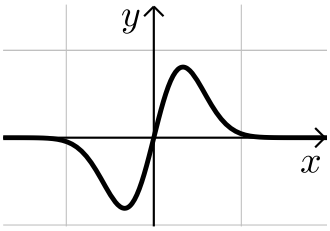
**29)**



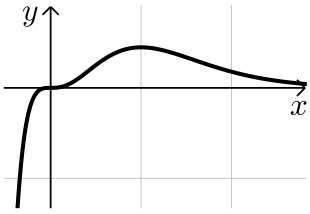

**30)**



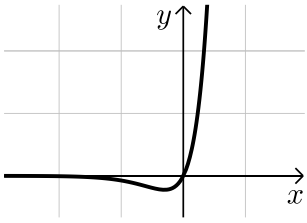

**31)**



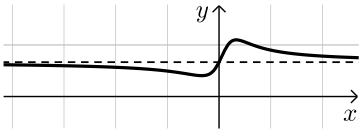

**32)**



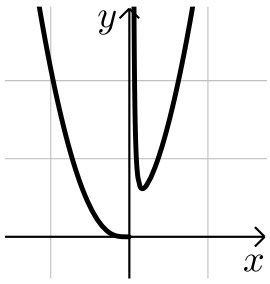

**33)**



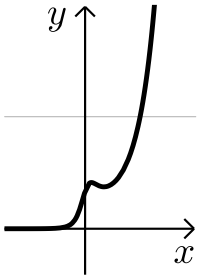

**34)**



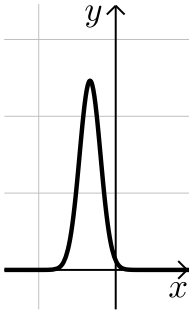
(35



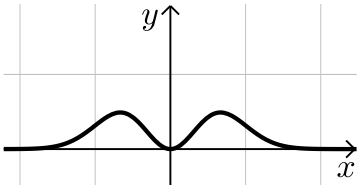

(36



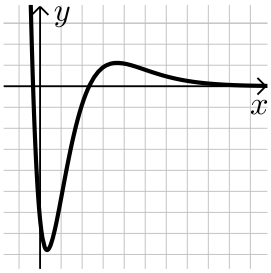

(37



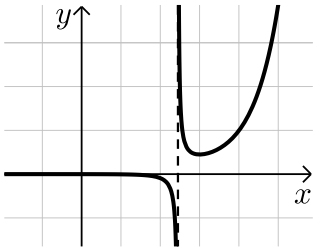

(40



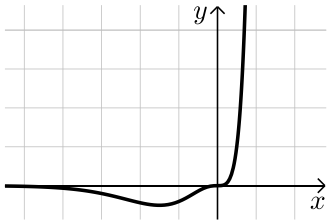

(41




(42




(43



# קורס ריענון במתמטיקה

## פרק 23 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות

### תוכן העניינים

1. הנגזרת של פונקציה לוגריתמית ..... 321
2. שימושי הנגזרת ..... 326
3. חקירה של פונקציה לוגריתמית ..... 327

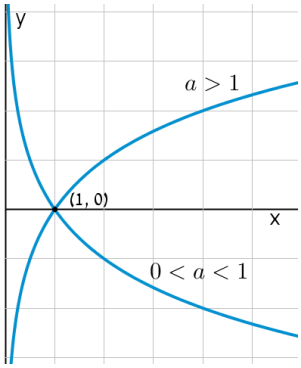
# הנגזרת של פונקציה לוגריתמית:

## סיכום כללי:

**הגדרות כלליות:**

להלן תיאורים גרפיים של פונקציה לוגריתמית

כללית מהצורה: $f(x)=\log_a x$ עבור $a>1$ ו- $0<a<1$:



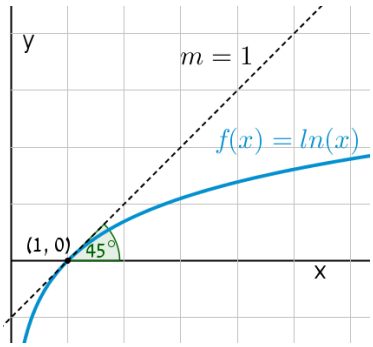

**תכונות כלליות:**

- לפונקציות תחום הגדרה $x>0$.
- הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- $x$ בנקודה $(1,0)$.
- עבור $a>1$ הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור $0<a<1$ הפונקציה יורדת בכל ת.ה.

עבור הפונקציות $f(x)=\ln x=\log_e x$ נקבל

כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת

החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ הוא 1:




**תחום הגדרה של פונקציה לוגריתמית:**

תחום ההגדרה של פונקציה לוגריתמית מהצורה: $y=\log(f(x))$ הוא: $f(x)>0$.

**נגזרות של פונקציות לוגריתמיות:**

| הפונקציה | הנגזרת |
|---|---|
| $y=\log_a x$ | $y'=\frac{1}{x\ln a}$ |
| $y=\log_a f(x)$ | $y'=\frac{f'(x)}{f(x)\ln a}$ |
| $y=\ln x$ | $y'=\frac{1}{x}$ |
| $y=\ln f(x)$ | $y'=\frac{f'(x)}{f(x)}$ |

## שאלות:

**1)** גזור את הפונקציות הבאות (גזירה לוגריתמית יסודית עם ביטויים פנימיים שונים):

א. $f(x)=3\ln x+4\ln(x+2)-\ln(5x-1)$ ב. $f(x)=\ln(x^2-3x)$

ג. $f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$ ד. $f(x)=\ln(e^x+1)$

ה. $f(x)=\ln(\cos x)$ ו. $f(x)=\log_2 x+5\log_3(2x-1)$

**2)** גזור את הפונקציות הבאות (מכפלה ומנה של פונקציות):

א. $f(x)=x\ln x$ ב. $f(x)=(3x+1)^2\ln x$ ג. $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

ד. $f(x)=\frac{\ln x-2}{\ln x+2}$ ה. $f(x)=\sqrt{\ln x+x}$

**3)** גזור את הפונקציות הבאות (פונקציות מורכבות):

א. $f(x)=\ln^3 x$ ב. $f(x)=3\ln^2 x$

ג. $f(x)=x^2\ln^2 x$ ד. $f(x)=\frac{\ln^2 x+1}{(\ln x+1)^2}$

4) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות שונות):

א. $f(x)=\ln(x+2)$

ב. $f(x)=\ln^2 x+2\ln x-3$

ג. $f(x)=x^2\ln x$

ד. $f(x)=x^3\ln x$

ה. $f(x)=\ln e^{2x}$

ו. $f(x)=e^x\ln x$

ז. $f(x)=e^{-x^2}\ln x$

ח. $f(x)=x^2(2\ln x-1)$

ט. $f(x)=\ln(x^2)$

י. $f(x)=\ln(x^4)$

יא. $f(x)=(\ln x)^4$

יב. $f(x)=x\ln x-\ln x^2$

יג. $f(x)=\frac{(\ln x)^2}{x}$

יד. $f(x)=\ln\sqrt{x}$

טו. $f(x)=\sqrt{\ln x}$

טז. $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

5) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות אתגר):

א. $f(x)=\ln\frac{x+2}{x}$

ב. $f(x)=\ln\frac{x-1}{x+1}$

ג. $f(x)=\ln\frac{x-3}{x+3}$

ד. $f(x)=\ln\frac{(x-5)^3}{(x+1)^2}$

ה. $f(x)=\ln\sqrt{x^2-1}$

ו. $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$

ז. $f(x)=e^{\sqrt{\ln x}}$

ח. $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1}{2-x}}$

ט. $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

י. $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1+5x}{1-5x}}$

יא. $f(x)=\frac{\ln\sqrt[3]{x}}{x}$

יב. $f(x)=\frac{(\ln x)^3}{x}$

יג. $f(x)=\frac{x}{\ln(x^2)}$

יד. $f(x)=\ln^2 x+\frac{1}{\ln^2 x}$

טו. $f(x)=\frac{x}{\ln^4 x}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $f'(x)=\frac{3}{x}+\frac{4}{x+2}-\frac{5}{5x-1}$ ב. $f'(x)=\frac{2x-3}{x^2-3x}$ ג. $f'(x)=\frac{-2}{(x-1)(x+1)}$

ד. $f'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$ ה. $f'(x)=-\tan x$ ו. $f'(x)=\frac{1}{x\ln 2}+\frac{10}{(2x-1)\ln 3}$

**2)** א. $f'(x)=\ln x+1$ ב. $f'(x)=(3x+1)\left(6\ln x+\frac{3x+1}{x}\right)$ ג. $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

ד. $f'(x)=\frac{4}{x(\ln x+2)^2}$ ה. $f'(x)=\frac{1+x}{2x\sqrt{\ln x+x}}$.

**3)** א. $f'(x)=\frac{3\ln^2 x}{x}$ ב. $f'(x)=\frac{6\ln x}{x}$ ג. $f'(x)=2x\ln x(\ln x+1)$

ד. $f'(x)=\frac{2(\ln x-1)}{x(\ln x+1)^3}$.

**4)** א. $\frac{1}{x+2}$ ב. $\frac{2\ln x+2}{x}$ ג. $x(2\ln x+1)$

ד. $x^2(3\ln x+1)$ ה. 2 ו. $e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$

ז. $e^{-x^2}\left(\frac{1}{x}-2x\ln x\right)$ ח. $4x\ln x$ ט. $\frac{2}{x}$ י. $\frac{4}{x}$

יא. $\frac{4(\ln x)^3}{x}$ יב. $\ln x+1-\frac{2}{x}$ יג. $\frac{2\ln x-\ln^2 x}{x^2}$

יד. $\frac{1}{2x}$ טו. $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$ טז. $\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$

**5)** א. $-\frac{2}{x(x+2)}$ ב. $\frac{2}{x^2-1}$ ג. $\frac{6}{x^2-9}$

ד. $\frac{3}{x-5}-\frac{2}{x+1}$ ה. $\frac{x}{x^2-1}$ ו. $\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{x\sqrt{x^2+a^2}+x^2+a^2}$

ז. $\frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}$ ח. $\frac{1}{4-2x}$ ט. $\frac{1}{x^2-1}$

י. $\frac{5}{1-25x^2}$

יא. $\frac{1-3\ln\sqrt[3]{x}}{3x^2}$

יב. $\frac{3\ln^2 x-\ln^3 x}{x^2}$

יג. $\frac{\ln\left(x^2\right)-2}{\ln^2\left(x^2\right)}$

יד. $\frac{2\left(\ln^4 x-1\right)}{x\ln^3 x}$

טו. $\frac{\ln x-4}{\ln^5 x}$.

# שימושי הנגזרת:

## שאלות:

**6)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\ln x$ בנקודה $A(e,1)$.

**7)** שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{\ln^2 x+a}{\ln x+b}$ בנקודה $\left(\frac{1}{e},-1\right)$ הוא $\frac{e}{3}$.
מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.

**8)** הגרפים של הפונקציות $f(x)=\ln x$ ו-$g(x)=1$ נחתכים בנקודה A ברביע הראשון.
בנקודה A העבירו משיק ל-$f(x)$.
מצא את משוואת המשיק והוכח שמשיק זה עובר דרך הראשית.

**9)** לפונקציה $g(x)=\frac{\ln x^2}{x}$ העבירו משיק בנקודה שבה $x=e^2$.
מצא את משוואת המשיק.

**10)** מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y=x\ln\left(x^2+1\right)$ בנקודה שבה $x=1$.

## תשובות סופיות:

**6)** $y=\frac{1}{e}x$.

**7)** $a=2\ ,\ b=-2$.

**8)** $y=\frac{1}{e}x$.

**9)** $y=-\frac{2}{e^4}x+\frac{6}{e^2}$.

**10)** $y=\ln 2\cdot x+x-1$.

# חקירה של פונקציה לוגריתמית:

## שאלות:

**11)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\ln x$

ב. $f(x)=\ln(x^2)$

ג. $f(x)=\log_3(x^2-8x-20)$

ד. $f(x)=\ln(e^x-4)$

ה. $f(x)=\dfrac{x-1}{\ln x-1}$

ו. $f(x)=\dfrac{1}{\ln^2 x-2\ln x-3}$

ז. $f(x)=\sqrt{\ln x-1}$

**12)** מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x)=2\ln x-x^2$.

**13)** מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x)=x^2\ln x$.

**14)** מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x)=\dfrac{\sqrt{2\ln x-1}}{x}$.

**15)** מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x)=\log_4^2 x-\log_2 x$.

**16)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{a\ln x+b}{x}$. הנקודה $\left(e^2,\dfrac{1}{e^2}\right)$ היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.

**17)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{a\ln^2 x+b\ln x}{(\ln x+1)^2}$. הנקודה $\left(\sqrt[3]{e},-\dfrac{1}{8}\right)$ היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.

**18)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\ln(x-3)$.

**19)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\dfrac{1}{\ln x-1}$.

**20)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{2\ln x-1}{\ln x+1}$.

**21)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{\ln x-2}{\ln^2 x-4}$.

**22)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

**23)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{x^2-1}{\ln^2 x+1}$.

**24)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=x\ln x+2$.

**25)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. מצא את נקודת הפיתול של הפונקציה.

**26)** חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים הבאים:

i. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

iii. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.

iv. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

א. $y=\frac{1}{2}x^2-4x+3\ln x$

ב. $y=x\ln x$

ג. $y=x\ln x-x$

ד. $y=\sqrt{x}\ln x$

ה. $y=x^2\ln x$

ו. $y=\ln\left(x^2+1\right)$

**27)** נתונה הפונקציה $f(x)=2x\ln^2 x$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**28)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\ln x-1}$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. מצא לאלו ערכי $k$ הישר $y=k$ חותך את הפונקציה בשתי נקודות.

**29)** נתונה הפונקציה $f(x)=\log_4^2 x-\log_2 x$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**30)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\ln x}$ .

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. הוכח כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.

מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=\ln x$ .

ג. מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

ד. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ . ידוע כי לנקודות A ו-B אותו שיעור $x$ , $(x_A=x_B)$ .
מצא את שיעור ה- $x$ של שתי הנקודות אם ידוע כי המשיקים לגרפים של הפונקציות בנקודות אלו מקבילים.

**31)** נתונה שתי הפונקציות הבאות: $g(x)=\frac{\ln x}{x}$ , $f(x)=\frac{x}{\ln x}$ .

א. קבע אילו מהמשפטים הבאים נכונים ואלו שגויים.
נמק זאת ע"י חישוב מתאים ותקן במשפטים השגויים את הטעות.

i. לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.

ii. לשתי הפונקציות יש נקודת קיצון מאותו סוג ובעלות שיעור $x$ זהה.

iii. לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה זהים.

iv. לשתי הפונקציות יש אסימפטוטות אנכיות.

ב. בוחרים באקראי שתי נקודות, אחת על כל גרף, כך ששיעור ה- $x$ שלהן זהה.
הוכח כי מכפלת שיעורי ה- $y$ של כל זוג נקודות כאלו שווה ל-1.

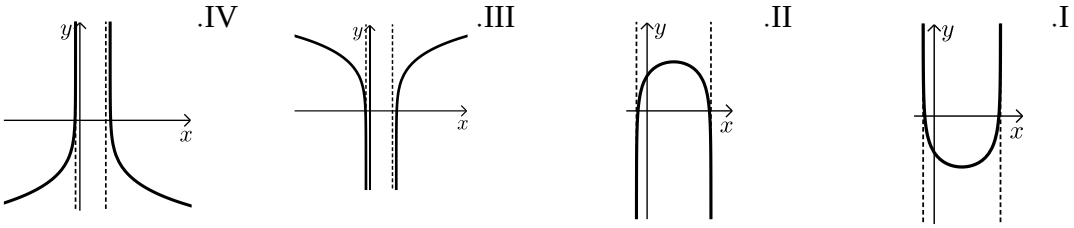
**32)** נתונה הפונקציה הבאה: $y=\ln\left(x^2-6x-7\right)$ .

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מהן האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לציר ה- $y$ ?

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. לפניך 4 גרפים: I , II , III , ו-IV.
איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.



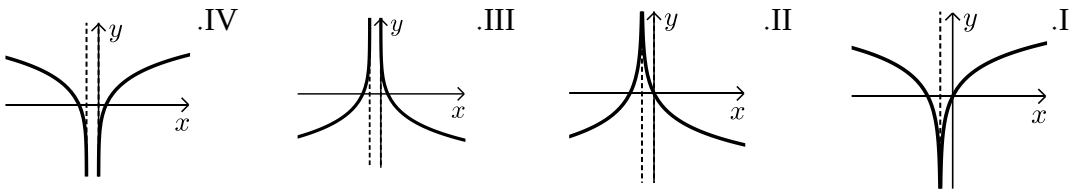

**33)** נתונה הפונקציה: $y=\ln\left(x^2+2x+1\right)$ .

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מהי האסימפטוטה של הפונקציה המקבילה לציר ה- $y$ ?

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. לפניך 4 גרפים: I , II , III , ו-IV.
איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.




ה. העזר בגרף שבחרת וכתוב את תחומי השליליות של הפונקציה.

**34)** לפניך הפונקציה הבאה: $f(x)=\ln(1-\ln x)$.

א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. הוכח כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**35)** נתונה הפונקציה הבאה: $y=\ln\frac{2x+1}{x-1}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ד. הראה כי גרף הפונקציה יורד בכל תחום הגדרתו.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**36)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=x\left(\ln^3 x+2\ln^2 x\right)$.

א. הראה כי נגזרת הפונקציה היא: $f'(x)=\ln^3 x+5\ln^2 x+4\ln x$.

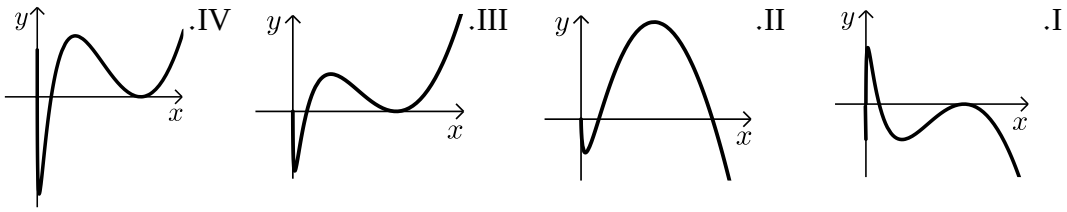
ב. מצא את התחום בו הפונקציה עולה.

ג. ענה על השאלות הבאות:

i. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ii. מצא את התחום בו הפונקציה חיובית.

ד. לפניך 4 גרפים. קבע איזה מהם מתאר את הפונקציה $f(x)$ ונמק את בחירתך.




**37)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\ln^3 x-3\ln x$.

א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הפונקציה: $g(x)=\ln x$.

**38)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. פתור את המשוואה הבאה: $\ln(x+e)-\ln(x\sqrt{e})=\ln 2-0.5$.

נתונה הפונקציה: $f(x)=\ln(x+e)-\ln(x\sqrt{e})$.

ב. הראה כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=e$.

**39)** נתונה הפונקציה הבאה: $y=\dfrac{x+a}{\ln(x+a)}$ , $a$ פרמטר חיובי, $a\neq 1$.

א. הבע באמצעות $a$ את:

i. תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. הנקודה המקיימת $y'=0$.

iii. נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

iv. האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.

ב. ידוע כי גרף הפונקציה עולה רק בתחום: $x>e-2$. מצא את $a$.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום $x>-1$.

ד. נתון הישר: $y=k$. מצא בסקיצה את תחום הערכים של $k$ עבורו לישר ולגרף הפונקציה לא תהיה אף נקודה משותפת.

**40)** נתונה הפונקציה הבאה: $y=\ln x+\dfrac{1}{x}$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ii. יש לגרף הפונקציה אסימפטוטה מקבילה לציר $y$?
אם כן מצא אותה.

ב. מצא את נקודת הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגה.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של גרף הפונקציה.

## תשובות סופיות:

**11)** א. $x>0$ ב. $x\neq 0$ ג. $x>10$ או $x<-2$ ד. $x>\ln 4$
ה. $0<x\neq e$ ו. $x>0$ וגם $x\neq e^{3},e^{-1}$ ז. $x\geq e$.

**12)** $\max(1,-1)$.

**13)** $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}},-\frac{1}{2e}\right)$.

**14)** $\min(\sqrt{e},0)$ קצה, $\max\left(e,\frac{1}{e}\right)$.

**15)** $\min(4,-1)$.

**16)** $a=1$ , $b=-1$.

**17)** $a=1$ , $b=-1$.

**18)** $x=3$.

**19)** נקודת אי הגדרה $(0,0)$ , $x=e$ , $y=0$.

**20)** נקודת אי הגדרה $(0,2)$ , $x=\frac{1}{e}$ , $y=2$.

**21)** נקודת אי הגדרה $\left(e^{2},\frac{1}{4}\right)$ ; $(0,0)$ , $x=\frac{1}{e^{2}}$ , $y=0$.

**22)** $x=0$ , $y=0$.

**23)** נקודת אי הגדרה $(0,0)$.

**24)** נקודת אי הגדרה $(0,2)$.

**25)** $\left(\sqrt{e^{3}},\frac{3}{2\sqrt{e^{3}}}\right)$.

**26)** א. i. $x>0$ iii. $\max(1,-3.5)$ , $\min(3,\ln 27-7.5)$
iv. עולה: $0<x<1$ , $x>3$ יורדת: $1<x<3$.
ב. i. $x>0$ ii. $(1,0)$
iii. $\min(e^{-1},-e^{-1})$ iv. עולה: $x>e^{-1}$ יורדת: $0<x<e^{-1}$.
ג. i. $x>0$ ii. $(e,0)$ iii. $\min(1,-1)$ iv. עולה: $x>1$ יורדת: $0<x<1$
ד. i. $x>0$ ii. $(1,0)$ iii. $\min\left(e^{-2},-\frac{2}{e}\right)$ iv. עולה: $x>e^{-2}$ יורדת: $0<x<e^{-2}$

ה. i. $x>0$ ii. $(1,0)$ iii. $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}},-\frac{1}{2e}\right)$ iv. עולה: $x>\frac{1}{\sqrt{e}}$ יורדת: $0<x<\frac{1}{\sqrt{e}}$

ו. i. כל $x$ ii. $(0,0)$ iii. $\min(0,0)$ iv. עולה: $x>0$ יורדת: $x<0$.

**27)** א. $x>0$ ב. $\min(1,0)$ , $\max\left(\frac{1}{e^2},\frac{8}{e^2}\right)$

ג. עלייה: $x>1$ או $0<x<\frac{1}{e^2}$ , ירידה: $\frac{1}{e^2}<x<1$. ד. $(1,0)$.

**28)** א. $0<x\neq e$ ב. $\min(e^2,e^2)$ ג. עלייה: $x>e^2$ , ירידה:

$0<x<e^2$ וגם $x\neq e$ ד. אין. ו. $k>e^2$.

**29)** א. $x>0$ ב. $\min(4,-1)$ ג. עלייה: $x>4$ , ירידה: $0<x<4$

ד. $(16,0)$ , $(1,0)$.

**30)** א. $x\geq 1$ ב. מתקבל: $f'(x)=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}>0$ ג. $(e,1)$ , $(1,0)$.

ד. $x=\sqrt[4]{e}$.

**31)** א. i. לא נכון. תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא: $x>0$ , $x\neq 1$ ותחום ההגדרה של $g(x)$ הוא: $x>0$.

ii. לא נכון. לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה $x=e$ אך עבור $f(x)$ מדובר במינימום ועבור $g(x)$ מדובר במקסימום.

iii. לא נכון. עבור $f(x)$ : עולה: $x>e$ יורדת: $0<x<e$ , $x\neq 1$.

ועבור $g(x)$ : עולה: $0<x<e$ יורדת: $x>e$. iv. נכון.

ב. לגבי כל נקודה נאמר כי שיעור ה- $y$ שלה הוא: $y=\frac{x}{\ln x}$ ו- $y=\frac{\ln x}{x}$.

נכפול: $y=\frac{x}{\ln x}\cdot\frac{\ln x}{x}=1$.

**32)** א. $x<-1$ , $x>7$ ב. $x=-1,7$ ג. עולה: $x>7$ יורדת: $x<-1$.

ד. III. <u>הסבר</u>: באיורים I ו-II גרף הפונקציה לא בתחום.
באיור IV תחומי העלייה והירידה הפוכים.

**33)** א. $x\neq -1$ ב. $x=-1$ ג. עולה: $x>-1$ יורדת: $x<-1$

ד. I. <u>הסבר</u>: באיור II תחומי העלייה והירידה הפוכים.
באיורים III ו-IV יש אסימפטוטה מיותרת. ה. $x\neq -1$ , $-2<x<0$.

**34)** א. $0<x<e$. (שימו לב כי תנאי ת.ה. הם: $1-\ln x>0$ וגם $x>0$).

ב. $f'(x)=\frac{-\frac{1}{x}}{1-\ln x}=-\frac{1}{x(1-\ln x)}<0$ - ולכן הפונקציה יורדת בת.ה.

ג. $(1,0)$.

**35)** א. $x>1$ , $x<-\frac{1}{2}$ ב. $x=-\frac{1}{2},1$ ג. $(-2,0)$

ד. מתקבל: $y'=\frac{-3}{(2x+1)(x-1)}<0$.

**36)** ב. $e^{-4}<x<e^{-1}$ , $x>1$.

ג. i. 2 נקודות והן: $(e^{-2},0)$ , $(1,0)$. הנקודה שבה: $x=0$ לא קיימת עקב ת.ה.

ii. $x>e^{-2}$ , $x\neq 1$. ד. III – בראשית הצירים יש חור ולא אסימפטוטה.

שאר הנתונים כפי שהתקבלו בסעיפים הקודמים.

**37)** א. $x>0$ ב. $(e^{-\sqrt{3}},0)$ , $(e^{\sqrt{3}},0)$ , $(1,0)$ ג. $\max(e^{-1},2)$ , $\min(e,-2)$

ה. $(e^{-2},-2)$ , $(e^{2},2)$ , $(1,0)$.

**38)** א. $x=e$ ב. מתקבל: $y'=\frac{-e}{x(x+e)}<0$ ג. $y=-\frac{1}{2e}x+\ln 2$.

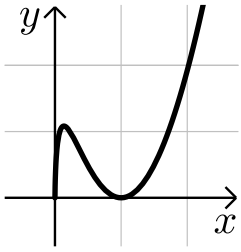
**39)** א. i. $x\neq 1-a$ , $x>-a$ ii. $(e-a,e)$ iii. $\left(0,\frac{a}{\ln a}\right)$

iv. $x=1-a$ ב. $a=2$ ד. $k<e$.

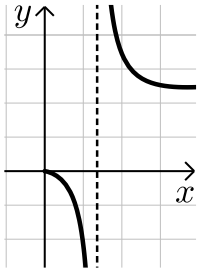
**40)** א. i. $x>0$ ii. $x=0$ ב. $\min(1,1)$ ג. עולה: $x>1$ , יורדת: $0<x<1$.

**סקיצות לשאלות:**

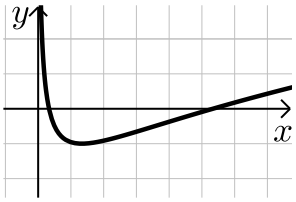
27)



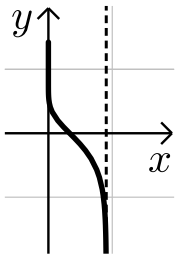

28)



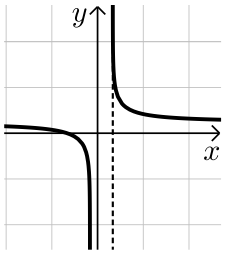

29)



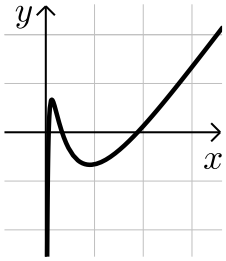

34)



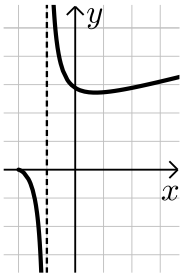

35)




37)




39)



# קורס ריענון במתמטיקה

## פרק 24 - חשבון אינטגרלי - האינטגרל הכללי

תוכן העניינים

1. חישובי אינטגרלים ..... 337
2. מציאת פונקציה קדומה ..... 342

# חישובי אינטגרלים:

## סיכום כללי:

### הגדרה וכללי האינטגרציה:

- כלל האינטגרציה של פונקציה פולינומית: $\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \ , \ (n \neq -1)}$.
- עבור מקדם קבוע $a$ נקבל: $\boxed{\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c \ , \ (n \neq -1)}$.
- כללי האינטגרציה של פונקציות טריגונומטריות:

$\boxed{\int \sin x dx = -\cos x + c}$ , $\boxed{\int \cos x dx = \sin x + c}$ , $\boxed{\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c}$ , $\boxed{\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c}$

## שאלות:

**1)** מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int x^3 dx$

ב. $\int 12x^5 dx$

ג. $\int x^4 dx$

ד. $\int 2x^3 dx$

ה. $\int \frac{2}{3} x^5 dx$

ו. $\int 7 dx$

ז. $\int \left( \frac{5}{6} x^4 + 16x^3 - \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{1}{3} \right) dx$

ח. $\int \left( \frac{4x^3}{5} - ax^2 - \frac{2ax}{b} + b \right) dx$

**2)** מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int x^{-3} dx$

ב. $\int \frac{1}{x^3} dx$

ג. $\int \left( \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \frac{a}{x^3} + \frac{x}{a} \right) dx$

ד. $\int \frac{2x^3 + x - 2}{x^3} dx$

3) מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int x^{\frac{1}{2}}dx$

ב. $\int \sqrt{x}dx$

ג. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

ד. $\int \left(\frac{4}{\sqrt{x}}+3\sqrt{x}\right)dx$

4) מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int (5x-1)^3 dx$

ב. $\int 3(2-7x)^4 dx$

ג. $\int \frac{18}{(6x+5)^2}dx$

ד. $\int \frac{1}{\sqrt{6x-3}}dx$

ה. $\int \sqrt{ax+b}dx$

5) מצא את תוצאת החילוק:

א. $\frac{x^2-5x-14}{x+2}=$

ב. $\frac{x^3+x^2+3x-5}{x-1}=$

ג. $\frac{x^4+x^3-x^2+14x-3}{x+3}=$

ד. $\frac{x^3-4x^2+9}{x-3}=$

ה. $\frac{x^3+5x^2-4x-20}{x+5}=$

6) מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \frac{x^2-5x-14}{x+2}dx$

ב. $\int \frac{x^3+x^2+3x-5}{x-1}dx$

ג. $\int \frac{x^4+x^3-x^2+14x-3}{x+3}dx$

ד. $\int \frac{x^3-4x^2+9}{x-3}dx$

ה. $\int \frac{x^3+5x^2-4x-20}{x+5}dx$

ו. $\int \frac{2x^5+x^4-4x^2+1}{2x+1}dx$

7) מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int -\frac{2x}{(x^2-1)^2}dx$

ב. $\int \frac{x^2}{(x^3+6)^2}dx$

ג. $\int \frac{x-2}{(x^2-4x+1)^2}dx$

ד. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx$

ה. $\int \frac{6x-3}{\sqrt{x-x^2}}dx$

ו. $\int 8x(x^2+1)^3 dx$

ז. $\int (2-x^2)(6x-x^3)^2 dx$

**8)** חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\left(\sin x-3\cos x+\frac{4}{\cos^2 x}+5\right)dx$

ב. $\int\left(\cos 3x-2\sin 4x+\frac{4}{\cos^2 3x}\right)dx$

ג. $\int\left(\sin(\pi-x)+\frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)dx$

**9)** חשב את האינטגרלים הבאים (שימוש בזהויות):

א. $\int(2\sin x\cos x)dx$

ב. $\int(\sin 3x\cos 3x)dx$

ג. $\int(\sin^4 x-\cos^4 x)dx$

ד. $\int(\sin^2 x)dx$

**10)** חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\left(\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\right)dx$

ב. $\int\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx$

ג. $\int(\cos x\sin^2 x)dx$

**11)** חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\left(\sin 2x-4\cos\frac{x}{3}\right)dx$

ב. $\int\frac{1}{\cos^2 4x}dx$

ג. $\int\frac{1}{\sin^2 10x}dx$

ד. $\int(\cos^2 x-\sin^2 x)dx$

ה. $\int(\cos^4 x-\sin^4 x)dx$

ו. $\int(\cos x+\sin x)^2 dx$

ז. $\int(\sin x\cos x\cos(2x))dx$

ח. $\int\tan^2 xdx$

ט. $\int\frac{1}{(\sin x\cos x)^2}dx$

י. $\int\cos^2 xdx$

יא. $\int\sin^2 4xdx$

**12)** חשב את ערכי האינטגרלים הבאים (שאלות אתגר):

א. $\int\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)dx$

ב. $\int\cos^4 x dx$

ג. $\int\sin^4 4x dx$

ד. $\int\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}dx$

ה. $\int\frac{\sin^3 x}{1-\cos x}dx$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $\frac{x^4}{4}+c$ ב. $2x^6+c$ ג. $\frac{x^5}{5}+c$ ד. $\frac{x^4}{2}+c$ ה. $\frac{x^6}{9}+c$ ו. $7x+c$

ז. $\frac{x^5}{6}+4x^4-\frac{x^3}{6}+2x^2-\frac{1}{3}x+c$ ח. $\frac{x^4}{5}-\frac{ax^3}{3}-\frac{ax^2}{b}+bx+c$.

**2)** א. $-\frac{x^{-2}}{2}+c$ ב. $-\frac{1}{2x^2}+c$ ג. $-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}+\frac{a}{2x^2}+\frac{x^2}{2a}+c$ ד. $2x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+c$.

**3)** א. $\frac{x^{1.5}}{1.5}+c$ ב. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+c$ ג. $2\sqrt{x}+c$ ד. $8\sqrt{x}+2\sqrt{x^3}+c$.

**4)** א. $\frac{(5x-1)^4}{20}+c$ ב. $-\frac{3(2-7x)^5}{35}+c$ ג. $-\frac{3}{6x+5}+c$

ד. $\frac{\sqrt{6x-3}}{3}+c$ ה. $\frac{2\sqrt{(ax+b)^3}}{3a}+c$.

**5)** א. $x-7$ ב. $x^2+2x+5$ ג. $x^3-2x^2+5x-1$

ד. $x^2-x-3$ ה. $x^2-4$

**6)** א. $\frac{x^2}{2}-7x+c$ ב. $\frac{x^3}{3}+x^2+5x+c$ ג. $\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-x+c$

ד. $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-3x+c$ ה. $\frac{x^3}{3}-4x+c$ ו. $\frac{x^5}{5}-x^2+x+c$.

**7)** א. $\frac{1}{x^2-1}+c$ ב. $-\frac{1}{3\left(x^3+6\right)}+c$ ג. $-\frac{1}{2\left(x^2-4x+1\right)}+c$

ד. $\sqrt{x^2+2}+c$ ה. $-6\sqrt{x-x^2}+c$ ו. $\left(x^2+1\right)^4+c$

ז. $\frac{\left(6x-x^3\right)^3}{9}+c$.

**8)** א. $-\cos x-3\sin x+4\tan x+5x+c$ ב. $\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\cos 4x}{2}+\frac{4\tan 3x}{3}+c$

ג. $\cos\left(\pi-x\right)+\tan x+x+c$.

**9)** א. $-\frac{1}{2}\cos 2x+c$ ב. $-\frac{\cos 6x}{12}+c$ ג. $-\frac{\sin 2x}{2}+c$

ד. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+c$.

**10)** א. $2\sqrt{\sin x}+c$ ב. $\frac{1}{\cos x}+c$ ג. $\frac{1}{3}\sin^3 x+c$.

**11)** א. $-\frac{1}{2}\cos 2x-12\sin\frac{x}{3}+c$ ב. $\frac{1}{4}\tan 4x+c$ ג. $-\frac{1}{10}\cot 10x+c$

ד. $\frac{1}{2}\sin 2x+c$ ה. $\frac{1}{2}\sin 2x+c$ ו. $x-\frac{1}{2}\cos 2x+c$

ז. $-\frac{1}{16}\cos 4x+c$ ח. $\tan x-x+c$ ט. $\tan x-\cot x+c$

י. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+c$ יא. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{16}\sin 8x+c$

**12)** א. $\frac{3}{4}x+\frac{1}{16}\sin 4x+c$ ב. $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$

ג. $\frac{3}{8}x-\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{128}\sin 16x+c$ ד. $-\cot x-x+c$

ה. $-\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x+c$

# מציאת פונקציה קדומה:

## שאלות:

**1)** נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=3x^2-7$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(2,-1)$.

**2)** נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=2x-6$.

ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.

מצא את הפונקציה.

**3)** הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=x^2-8x+2$. נתון: $f(-2)=1$.

א. מצא את $f(x)$.

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$.

**4)** נתונה הנגזרת של פונקציה $f(x)$: $f'(x)=9x^2-4$.

ערך הפונקציה בנקודה $x=1$ הוא 3.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=1$.

ב. מצא את $f(x)$.

ג. מצא את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.

**5)** הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=2x-3$.

לפונקציה משיק ששיפועו הוא 3-.

א. מצא את שיעור ה- $x$ של נקודת ההשקה.

ב. מצא את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא 7.

**6)** הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=-6x-5$.

המשיק לפונקציה בנקודה A יוצר זווית של $45^\circ$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$.

א. מצא את שיעור ה- $x$ של הנקודה A.

ב. מצא את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא 6-.

ג. מצא את משוואת המשיק.

7) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=3x-4$.
הישר $y=2x+5$ משיק לגרף הפונקציה. מצא את $f(x)$.

## תשובות סופיות:

1) $f(x)=x^3-7x+5$.

2) $f(x)=x^2-6x+14$.

3) א. $f(x)=\frac{x^3}{3}-4x^2+2x+23\frac{2}{3}$ ב. $y=-5x+27$.

4) א. $y=5x-2$ ב. $f(x)=3x^3-4x+4$ ג. $(0.4,0)$ , $(0,-2)$.

5) א. $x=0$ ב. $f(x)=x^2-3x+7$.

6) א. $x=-1$ ב. $f(x)=-3x^2-5x-8$ ג. $y=x-5$.

7) $f(x)=\frac{3x^2}{2}-4x+11$.

# קורס ריענון במתמטיקה

## פרק 25 - חשבון אינטגרלי - האינטגרל המסוים וחישובי שטחים

תוכן העניינים


1. האינטגרל המסוים ..... 344
2. חישובי שטחים יסודיים ..... 346
3. חישובי שטחים יסודיים עם פרמטרים ..... 352
4. חישובי שטחים כאשר נתונה נגזרת הפונקציה ..... 354
5. חישובי שטחים עם פונקציה רציונאלית ..... 357
6. חישובי שטחים עם פונקצית שורש ..... 359
7. חישובי שטחים עם פונקציות טריגונומטריות ..... 363
8. חישובי שטחים בין גרף הנגזרת והצירים ..... 366

# האינטגרל המסוים:

## סיכום כללי:

תהא פונקציה $f(x)$ שנגזרתה היא $f'(x)$ ($f(x)$ מוגדרת בתחום $a \le x \le b$).

הקשר שבין האינטגרל המסוים לפונקציה קדומה הוא: $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$.

**הערה:**

יש להשתמש בכל כללי האינטגרציה המיידיים של הפונקציות השונות אשר נלמדו.

## שאלות:

**1)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\int_2^5 (x^2+5x)dx$

ב. $\int_{-4}^{-1} x^2(x-3)dx$

ג. $\int_{-3}^{3} (x^3+4x)dx$

ד. $\int_{-1}^{1} 3(2x-1)^5 dx$

ה. $\int_1^2 \frac{2}{(x-3)^2}dx$

ו. $\int_1^4 \frac{x-1}{x^3}dx$

ז. $\int_{-3}^{0} \frac{2x^2+7x-4}{x+4}dx$

ח. $\int_3^4 \frac{3x^2-7x+2}{x-2}dx$

ט. $\int_1^2 \sqrt{3x-1}dx$

י. $\int_{-5}^{0} \frac{3}{\sqrt{4-x}}dx$

**2)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\int_0^{\pi} (\cos x)dx$

ב. $\int_0^{\pi} (\sin 2x+1)dx$

ג. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x - 3\cos 2x)dx$

ד. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{3}{\cos^2 x}+2\right)dx$

**3)** לפניך האינטגרל הבא: $\int_{1}^{a}(4x-7)\,dx$.

מצא עבור אלו ערכים של $a$ ערך האינטגרל יהיה שווה ל-1-.

**4)** לפניך האינטגרל הבא: $\int_{a}^{2}(x-3x^2)\,dx$.

א. כתוב ביטוי לערך האינטגרל כתלות ב- $a$.

ב. מצא עבור אלו ערכים של $a$ ערך האינטגרל יהיה שווה ל- $\frac{a-12}{2}$.

**5)** לפניך האינטגרל הבא: $\int_{a}^{a+4}\left(\frac{1}{\sqrt{x-a}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx$.

א. כתוב את ערך האינטגרל כתלות ב- $a$.

ב. מצא את ערכו של $a$ עבורו ערך האינטגרל יהיה שווה ל-2.

**6)** לפניך האינטגרל הבא: $\int_{0}^{a}(\sin x+2\cos 2x)\,dx$, $0<a<3$.

מצא עבור אלו ערכים של $a$ ערך האינטגרל יהיה שווה ל-1.

## תשובות סופיות:

**1)** א. 91.5 ב. -126.75 ג. 0 ד. -182 ה. 1

ו. $\frac{9}{32}$ ז. -12 ח. 9.5 ט. 1.856 י. 6.

**2)** א. 0 ב. $\pi$ ג. 0 ד. $3\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi\approx 7.29$.

**3)** $a=2\,,\,1.5$.

**4)** א. $a^3-\frac{1}{2}a^2-6$ ב. $a=0\,,\,1\,,\,-\frac{1}{2}$.

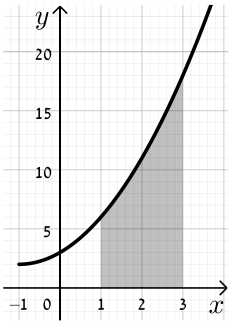
**5)** א. $4+2\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a+5}\right)$ ב. $a=1\frac{1}{4}$.

**6)** $a=\frac{\pi}{6}\,,\,\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{5\pi}{6}$.

# חישובי שטחים יסודיים:

## שאלות:

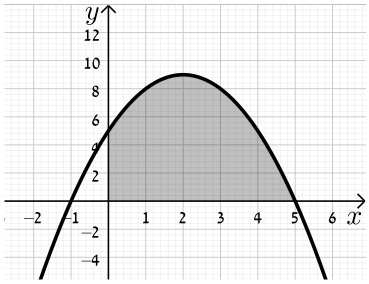
**1)** חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)=x^2+2x+3$, ציר ה-$x$ והישרים $x=1$ ו-$x=3$.



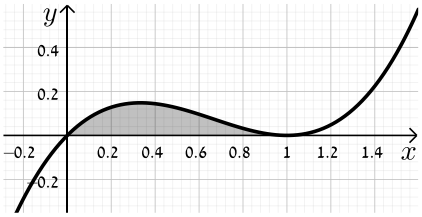

**2)** נתונה הפונקציה $y=-x^2+4x+5$.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ב. מצא את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה-$x$ וציר ה-$y$.



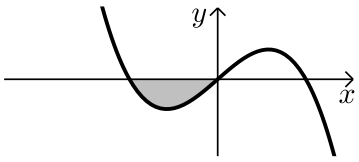

**3)** מצא את השטח המוגבל תחת הפונקציה $f(x)=x^3-2x^2+x$ וציר ה-$x$ כמתואר באיור.




## שאלות עם שטח מתחת לציר ה-$x$:

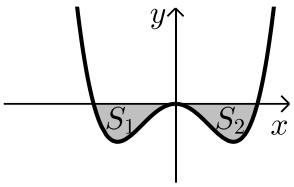
**4)** נתונה הפונקציה $f(x)=x(4-x^2)$.

חשב את השטח המוגבל שמתחת הפונקציה וציר ה-$x$ שברביע השלישי.

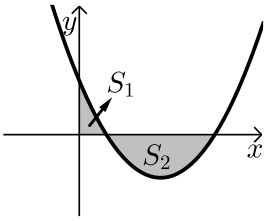



**5)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{2}x^4-2x^2$.

חשב את השטח המוגבל שבין הפונקציה לציר ה-$x$.



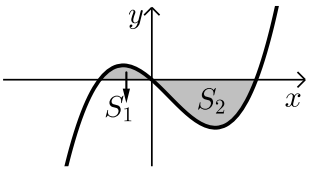
**6)** חשב את האינטגרל המסוים של
הפונקציה $y=x^2-6x+5$ בין 0 ל-5.
האם התוצאה מייצגת את סכום השטחים: $S_1+S_2$?
אם כן, הסבר. אם לא, נמק וחשב את סכום זה.




**7)** נתונה הפונקציה $y=x^3-x^2-2x$.
יוצרים את השטחים $S_1$ ו-$S_2$ בין גרף הפונקציה וציר ה-$x$ כמתואר באיור.

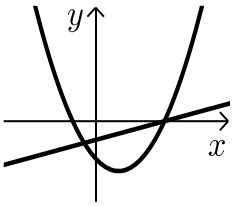
א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה-$x$.

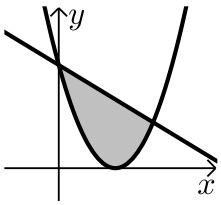



**שאלות עם שטחים בין שתי פונקציות:**

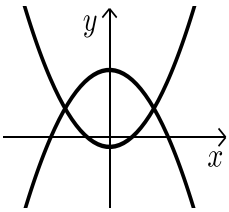
**8)** נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=x^2-4x-12$ ו- $g(x)=x-6$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות הנ"ל.




**9)** נתונות הפונקציות: $y=(x-3)^2$, $y=-x+9$.
חשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות.



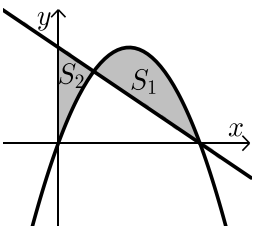

**10)** נתונות הפונקציות: $f(x)=x^2-1$, $g(x)=7-x^2$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של
הפונקציות הנ"ל.



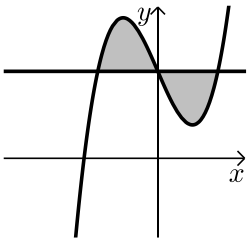

**11)** נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=-x^2+4x$ ו- $g(x)=-x+4$.
מסמנים את השטח הכלוא בין שני הגרפים ב-$S_1$
ואת השטח הכלוא בין הגרפים וציר ה-$y$ ב-$S_2$
כמתואר באיור.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות.

ב. חשב את היחס שבין השטחים: $\frac{S_1}{S_2}$.



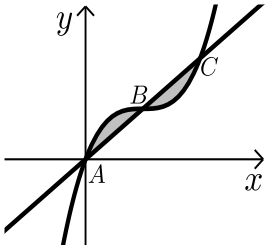
**12)** נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3-4x+5$ והישר $y=5$.




א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה והישר.

ב. חשב את השטח המוגבל ביניהן.

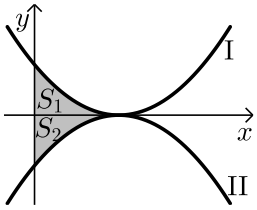
**13)** נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3-3x^2+3x$.




הישר AC חותך את גרף הפונקציה בנקודות הבאות: $A(0,0)$ , $B(1,1)$ , $C(2,2)$.

חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה לישר AC.

**14)** נתונות הפונקציות $f(x)=(x-2)^2$ ו- $g(x)=-(x-2)^2$ כמתואר באיור.



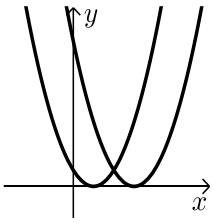

א. התאם בין הפונקציות לגרפים I ו-II.

ב. מסמנים את השטחים שבין כל פונקציה והצירים ב- $S_1$ ו- $S_2$ כמתואר באיור.

הראה כי השטחים $S_1$ ו- $S_2$ שווים זה לזה.

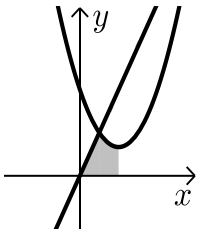
**שאלות עם שטחים מורכבים:**

**15)** נתונות הפונקציות: $f(x)=x^2-2x+1$ , $g(x)=x^2-6x+9$.




חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- $x$.

**16)** נתונות הפונקציות: $y=x^2-4x+6$ , $y=3x$.

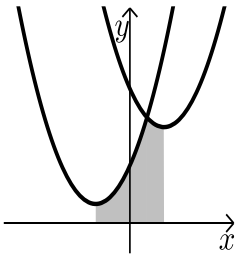



א. מצא את קדקוד הפרבולה.

ב. מצא נקודת חיתוך של הפרבולה עם הישר שמשמאל לקדקוד הפרבולה.

ג. חשב את השטח המסומן שבשרטוט.

**17)** נתונות הפונקציות: $y=x^2+4x+6$ , $y=x^2-4x+14$.

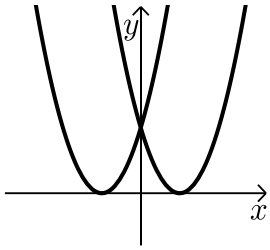



א. מצא את שיעורי ה- $x$ של קודקודי הפרבולות.

ב. חשב את נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות.

ג. חשב את השטח המסומן בשרטוט.

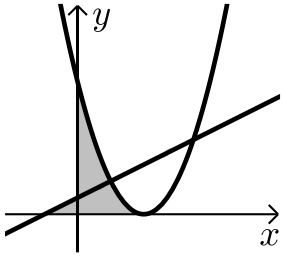
**18)** נתונות הפונקציות: $g(x)=(x+3)^2$ , $f(x)=(x-3)^2$ .
חשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות וציר ה-$x$ .



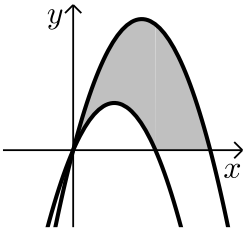

**19)** נתונות שתי הפונקציות: $y=(x-2)^2$ , $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ .

א. מצא את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות לציר ה-$x$ .

ב. מצא את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות לציר ה-$y$ .




**20)** נתונות הפרבולות הבאות: $f(x)=-x^2+5x$ ו- $g(x)=-x^2+3x$ .
חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של הפרבולות וציר ה-$x$ .

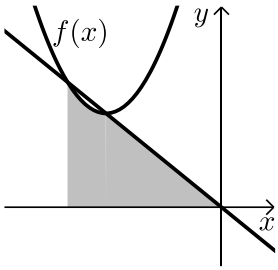



**21)** נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2+6x+12$ .
ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-4$ כמתואר באיור.

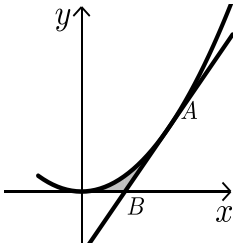
א. מצא את משוואת הישר.

ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.

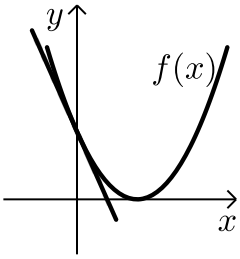
ג. מצא את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה-$x$ והישר $x=-4$ .




**22)** נתונה הפונקציה: $y=2x^2$ .
מעבירים משיק לגרף הפונקציה מהנקודה: $A(1,2)$ .
המשיק חותך את ציר ה-$x$ בנקודה B.
חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה, המשיק וציר ה-$x$ .

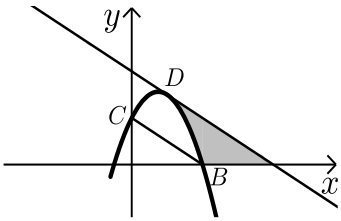


**23)** נתונה הפונקציה: $f(x)=(x-2)^2$.
מנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$
מעבירים משיק.




א. מצא את משוואת המשיק.
ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$
ג. חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- $x$.

**24)** משוואת הפרבולה היא: $f(x)=-2x^2+3x+2$.
הנקודות $C(0,2)$ , $B(2,0)$ הן נקודות חיתוך
של הפרבולה עם הצירים.
המשיק לפרבולה בנקודה D מקביל לישר BC.




א. מצא את משוואת המשיק.
ב. מצא את השטח המוגבל בין הפרבולה, המשיק וציר ה- $x$.
ג. מצא את השטח המוגבל בין הפרבולה, המשיק וציר ה- $y$.

## תשובות סופיות:

**1)** $22\frac{2}{3}$ יח"ש.

**2)** א. $(5,0)$ , $(-1,0)$ ב. $33\frac{1}{3}$ יח"ש.

**3)** $\frac{1}{12}$ יח"ש.

**4)** 4 יח"ש.

**5)** $4\frac{4}{15}$ יח"ש.

**6)** לא. השטח הוא: 13 יח"ש.

**7)** א. $(2,0)$ , $(0,0)$ , $(-1,0)$ ב. $3\frac{1}{12}$ יח"ש.

**8)** $57\frac{1}{6}$ יח"ש.

**9)** $20\frac{5}{6}$ יח"ש.

**10)** $21\frac{1}{3}$ יח"ש.

**11)** א. $(4,0)$ , $(1,3)$ ב. $2\frac{5}{11}$.

**12)** א. $(2,5)$ , $(0,5)$ , $(-2,5)$ ב. 8 יח"ש.

**13)** 0.5 יח"ש.

**14)** א. $f(x)=\text{I}$ , $g(x)=\text{II}$ ב. הוכחה.

**15)** $\frac{2}{3}$ יח"ש.

**16)** א. $(2,2)$ ב. $(1,3)$ ג. $3\frac{5}{6}$ יח"ש.

**17)** א. $x=2$ , $x=-2$ ב. $(1,11)$ ג. $25\frac{1}{3}$ יח"ש.

**18)** 18 יח"ש.

**19)** א. $\frac{4}{3}$ יח"ש ב. $1\frac{7}{12}$ יח"ש.

**20)** $16\frac{1}{3}$ יח"ש.

**21)** א. $y=-x$ ב. $(-3,3)$ ג. $7\frac{5}{6}$ יח"ש.

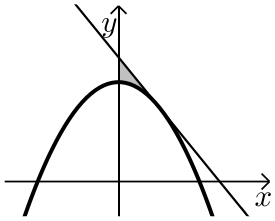
**22)** $\frac{1}{6}$ יח"ש.

**23)** א. $y=-4x+4$ ב. $(1,0)$ ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.

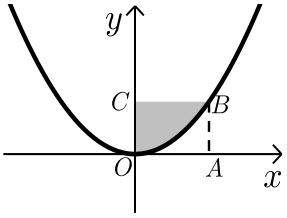
**24)** א. $y=-x+4$ ב. $2\frac{2}{3}$ יח"ש. ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.

# חישובי שטחים יסודיים עם פרמטרים:

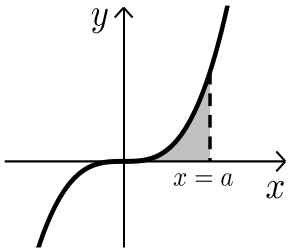
## שאלות:



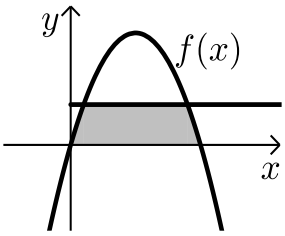

**25)** נתונה הפרבולה: $y=ax^2+8$.
שיפוע המשיק לגרף הפרבולה בנקודה שבה $x=2$ הוא 2-.
א. חשב את $a$.
ב. חשב את השטח המוגבל על ידי המשיק, הפרבולה וציר $y$.




**26)** הפונקציה המתוארת בשרטוט היא: $y=ax^2$, ($a$ פרמטר).
המרובע ABCO הוא ריבוע.
הקדקוד B נמצא על גרף הפונקציה.
ידוע כי אורך צלע הריבוע היא 2 יחידות.
מצא את ערך הפרמטר $a$ ואת השטח המסומן בסרטוט.




**27)** נתונה הפונקציה $y=x^3$.
מעבירים אנך לציר ה-$x$: $x=a$ ($a$ פרמטר חיובי)
כך שנוצר שטח הכלוא בין האנך, גרף הפונקציה וציר ה-$x$.
א. הבע באמצעות $a$ את השטח המקווקו בציור.
ב. חשב את $a$ אם ידוע כי שטח זה שווה ל-$a^2$.




**28)** נתונה הפונקציה: $f(x)=kx-x^2$.
הישר $y=9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.
ידוע כי שיעור ה-$x$ של אחת מנקודות החיתוך הוא $x=9$.
א. מצא את ערך הפרמטר $k$.
ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.
ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה-$x$ (השטח המסומן).

## תשובות סופיות:

**25)** א. $a=-\frac{1}{2}$ ב. $\frac{4}{3}$ יח"ש.

**26)** $a=\frac{1}{2}$ , $2\frac{2}{3}$ יח"ש.

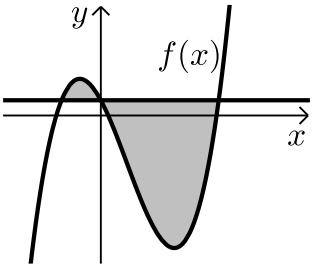
**27)** א. $\frac{a^4}{4}$ ב. $a=2$ .

**28)** א. $k=10$ ב. $(1,9)$ ג. $81\frac{1}{3}$ יח"ש.

## חישובי שטחים כאשר נתונה נגזרת הפונקציה:

### שאלות:

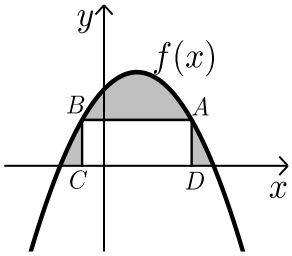
**29)** נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=3x^2-8x-12$.
הישר $y=5$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$
על ציר ה- $y$.




א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את השטח המוגבל בין הישר והפונקציה.

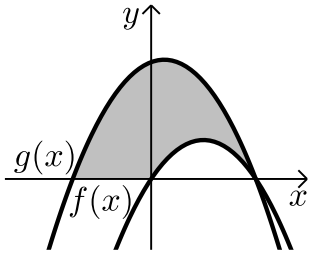
**30)** הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ המתוארת באיור שלפניך היא: $f'(x)=3-2x$.
ישר AB שמשוואתו: $y=6$ חותך את גרף
הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו-B.
מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- $x$
כך שנוצר מלבן ABCD.
ידוע ששיעור ה- $x$ של הנקודה A הוא 4.




א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- $x$.

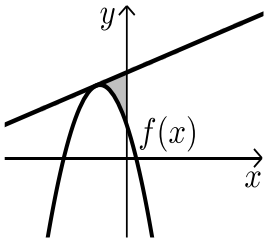
**31)** באיור שלפניך מתוארות הפונקציות שנגזרותיהן: $f'(x)=4-2x$ , $g'(x)=-2x+1$.
ידוע ששתי הפונקציות חותכות את ציר ה- $x$ כאשר: $x=4$.




א. מצא את הפונקציות.

ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות וציר ה- $x$ (המסומן).

**32)** נתונה פונקציה $f(x)$.
משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x=-2$ היא: $y=x+13$.
הנגזרת של הפונקציה היא: $f'(x)=-4x-7$.




א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- $y$.

**33)** נתונה פונקציה $f(x)$ שנגזרתה היא: $f'(x)=3x^2-6x-9$.
ישר ששיפועו 15 משיק לפונקציה ברביע הרביעי בנקודה שבה: $y=-20$.

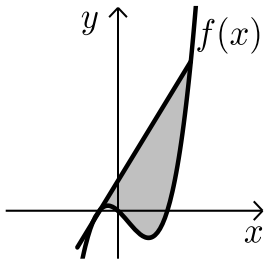
א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש עוד משיקים לגרף הפונקציה בעלי שיפוע 15?
אם כן- מצא אותם.

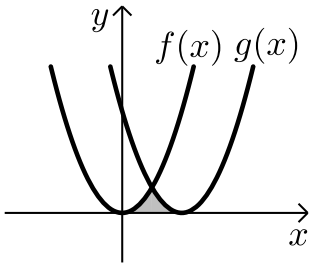
ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הראה כי הנקודה שבה $x=7$ משותפת למשיק שמצאת בסעיף הקודם ולפונקציה $f(x)$.

ii. מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והמשיק שמצאת בסעיף הקודם (ראה איור).



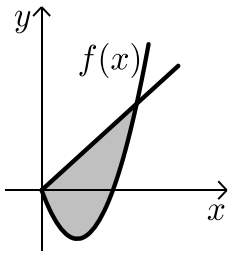

**34)** באיור שלפניך חותך גרף הפונקציה: $f(x)=x^2$
את גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x=2$.
הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ היא: $g'(x)=2x-8$.




א. מצא את הפונקציה $g(x)$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה-$x$ (המסומן).

**35)** באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y=2x$.
נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=2x-6$
וידוע כי הישר חותך את הפונקציה בנקודה שבה ערך ה-$y$ הוא 16.




א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן מצא אותן.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.

## תשובות סופיות:

**29)** א. $f(x)=x^3-4x^2-12x+5$ ב. $189\frac{1}{3}$ יח"ש.

**30)** א. $f(x)=-x^2+3x+10$ ב. $27\frac{1}{6}$ יח"ש.

**31)** א. $f(x)=4x-x^2$ , $g(x)=-x^2+x+12$ ב. 46.5 יח"ש.

**32)** א. $f(x)=-2x^2-7x+5$ ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.

**33)** א. $f(x)=x^3-3x^2-9x$ ב. $y=15x+28$

ג. i. $(7,133)$ ג. ii. 546.75 יח"ש.

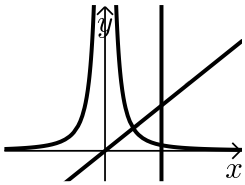
**34)** א. $g(x)=(x-4)^2$ ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.

**35)** א. $f(x)=x^2-6x$ ב. $(0,0)$ ג. $85\frac{1}{3}$ יח"ש.

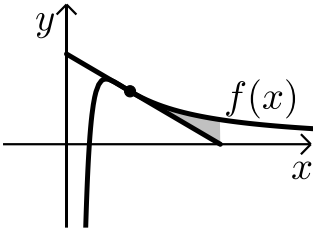
# חישובי שטחים עם פונקציה רציונאלית:

## שאלות:

**1)** נתונות שתי פונקציות: $g(x)=x$ , $f(x)=\frac{1}{x^2}$ .
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,
הישר $x=2$ וציר ה-$x$ .



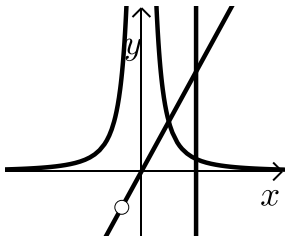

**2)** ענה על הסעיפים הבאים:



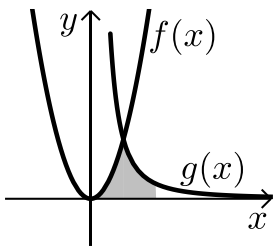

א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}$
מצא את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה
והמשיק שמצאת בסעיף א'.
חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,
המשיק ואנך לציר ה-$x$ היוצא מנקודת החיתוך
של המשיק עם ציר ה-$x$ .

**3)** נתונות שתי פונקציות: $g(x)=\frac{x^2+2x}{x+2}$ , $f(x)=\frac{1}{x^2}$ .
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,
הישר $x=2$ וציר ה-$x$ .



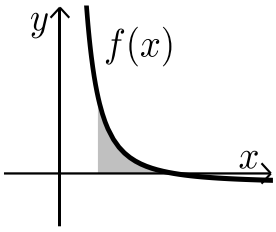

**4)** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=2x^2$ ו- $g(x)=\frac{a}{x^2}$
($a$ קבוע) בתחום: $x>0$ .
ידוע כי הגרפים נחתכים ברביע הראשון בנקודה
הנמצאת על הישר: $y=4x$ .




א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים ואת $a$ .

ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה-$x$
והישר: $x=4$ .

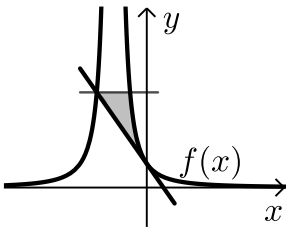
**5)** גרף הפונקציה: $f(x)=\frac{a-x^2}{x^2}$ ($a$ קבוע) חותך את ציר ה-$x$ בנקודה $(6,0)$.




א. מצא את $a$ וכתוב את הפונקציה.

ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה-$x$ והישר: $x=2$.

**6)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{A}{(2x+A)^2}$ ($A$ פרמטר חיובי).




ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-$y$ הוא: $-\frac{1}{9}$.

א. מצא את ערך הפרמטר $A$.

ב. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך עם ציר ה-$y$.

ג. הראה כי המשיק חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=-4.5$.

ד. העבר ישר אופקי מנקודת החיתוך של המשיק וגרף הפונקציה מהסעיף הקודם. מצא את נקודת החיתוך הנוספת של ישר זה עם גרף הפונקציה.

ה. חשב את השטח כלוא בין המשיק, הישר וגרף הפונקציה (היעזר באיור).

## תשובות סופיות:

**1)** 1 יח"ש.

**2)** א. $y=-x+2$ ב. $\frac{1}{8}$ יח"ש.

**3)** 1 יח"ש.

**4)** א. $a=32$ , $(2,8)$ ב. $13\frac{1}{3}$ יח"ש.

**5)** א. $a=36$ , $f(x)=\frac{36-x^2}{x^2}$ ב. 8 יח"ש.

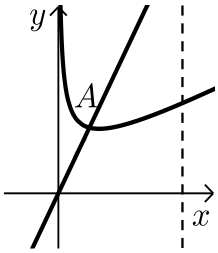
**6)** א. $A=6$ ב. $y=-\frac{1}{9}x+\frac{1}{6}$ ג. הוכחה.

ד. $\left(-1.5,\frac{2}{3}\right)$ ה. $\frac{5}{8}$ יח"ש.

# חישובי שטחים עם פונקצית שורש:

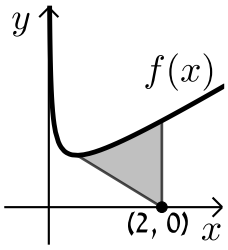
## שאלות:

**1)** באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}+x$.
מעבירים ישר: $y=4x$ החותך את גרף הפונקציה בנקודה A המסומנת באיור.



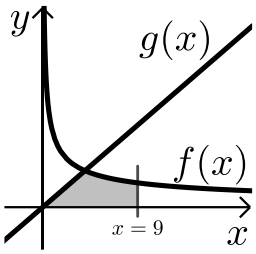

א. מצא את שיעורי הנקודה A.
ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, הישר $y=4x$, ציר ה-$x$ ואנך לציר ה-$x$: $x=4$.

**2)** באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x}}+x$.




א. מצא את נקודת המינימום שלה.
ב. מנקודת המינימום של הפונקציה מעבירים ישר לנקודה $(2,0)$ שעל ציר ה-$x$.
מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר ואנך לציר ה-$x$ היוצא מהנקודה $(2,0)$ עד לנקודת החיתוך עם גרף הפונקציה.

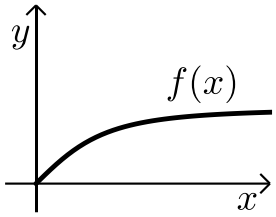
**3)** באיור הבא מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=\frac{16}{\sqrt{x}}$ ו-$g(x)=2x$.



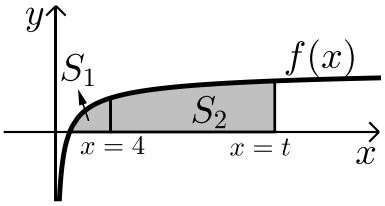

א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.
ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה-$x$ והישר $x=9$.

**4)** נתונה הפונקציה: $f(x)=(x-6)\sqrt{x}$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודת המינימום שלה וציר ה-$y$.

**5)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ברביע הראשון.
לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,
המשיק והישר $x=\sqrt{3}$.




**6)** באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x}}$.
מעבירים שני אנכים לציר ה-$x$ והם: $x=4$
ו-$x=t$ $(t>4)$. נסמן:
$S_1$ - השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה-$x$.
$S_2$ - השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה-$x$ והאנכים.
ידוע כי: $8S_1=S_2$. מצא את $t$.



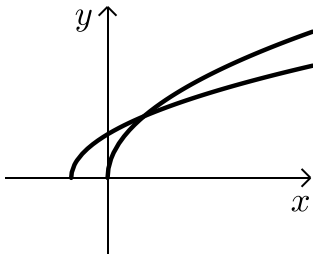

**7)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:
i. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ii. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.
iii. הראה כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

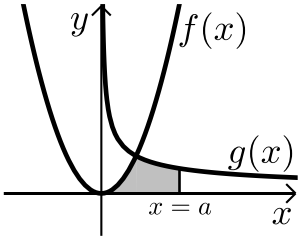
ב. מעבירים משיק לגרף הפונקציה ששיפועו הוא: $m=\frac{17}{16}$. מצא את נקודת ההשקה.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה-$x$ ואנך לציר ה-$x$ מנקודת ההשקה שמצאת בסעיף הקודם.

**8)** נתונות שתי פונקציות: $g(x)=\sqrt{2x}$, $f(x)=\sqrt{x+b}$ $(b>0)$
גודל השטח הכלוא בין הפונקציות וציר ה-$x$ הוא $2\frac{2}{3}$ יח"ש.
מצא את ערכו של הפרמטר $b$.



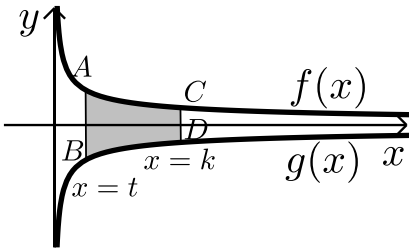
**9)** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=x^2$
ו- $g(x)=\frac{32}{\sqrt{x}}$ ברביע הראשון.
מעבירים ישר $x=a$ החותך את גרף הפונקציה $g(x)$
ויוצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים, ציר ה- $x$ והישר.
ידוע כי שטח זה שווה ל- $S=85\frac{1}{3}$.
מצא את $a$.




**10)** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x)=-\frac{3}{\sqrt{x}}$.
מעבירים שני ישרים: $x=k$ ו- $x=t$ אשר חותכים את הגרפים
של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.
ידוע כי: 2CD=AB.

א. הראה כי: $k=4t$.

ב. השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות
והישרים: $x=k$ ו- $x=t$ הוא: $S=12$.
מצא את $t$.




**11)** ענה על הסעיפים הבאים:

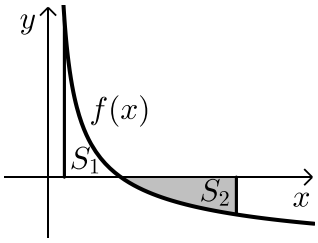
א. מצא עבור איזה ערך של $a$, $(a>1)$ יתקיים: $\int_1^a\left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}}-1\right)dx=0$.

ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=\frac{3}{\sqrt{2x-1}}-1$.
מעבירים שני אנכים לציר ה- $x$ והם: $x=1$ ו- $x=13$
כך שנוצרים השטחים $S_1$ ו- $S_2$.
מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,
ציר ה- $x$ והאנך $x=1$, $(S_1)$.

ii. היעזר בתוצאה שקיבלת ובסעיף א' וקבע לכמה שווה השטח $S_2$.
נמק את טענתך.

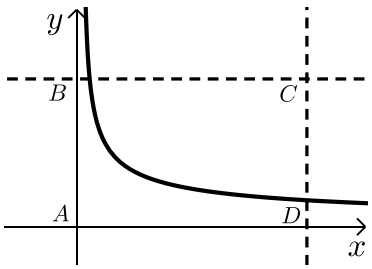


**12)** באיור שלפניך מתוארת הפונקציה: $f(x)=\frac{9}{\sqrt{2x-1}}$

מעבירים את הישרים המקבילים לצירים: $x=13$

ו- $y=3$ כך שנוצר המלבן ABCD כמתואר באיור.

הישר $y=3$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה M.




א. מצא את שיעורי הנקודה M.

ב. מסמנים את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והישרים ב- $S_1$ ואת שטח המלבן ב- $S_2$.

הראה כי: $\frac{S_1}{S_2}=\frac{2}{13}$.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $A(1,4)$ ב. 15.5 יח"ש.

**2)** א. $\min(0.5,1.5)$ ב. 1.75 יח"ש.

**3)** א. $(4,8)$ ב. 48 יח"ש.

**4)** 2.26 יח"ש.

**5)** 0.5 יח"ש

**6)** $t=16$.

**7)** א. i. $x>0$ ii. $(4,0)$ iii. $f'(x)=1+\frac{4}{x\sqrt{x}}>0$

ב. $(16,14)$ ג. 88 יח"ש.

**8)** $b=2$.

**9)** $a=9$.

**10)** א. הוכחה ב. $t=1$.

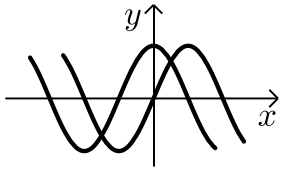
**11)** א. $a=13$ ב. $(5,0)$ ג. i. $S_1=2$ ii. $S_2=|-S_1|=2$.

**12)** א. $M(5,3)$.

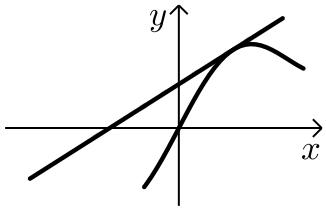
# חישובי שטחים עם פונקציות טריגונומטריות:

## שאלות:

**1)** נתונות הפונקציות: $f(x)=\sin x$ , $g(x)=\cos x$ .
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות לציר ה- $y$ ברביע הראשון.



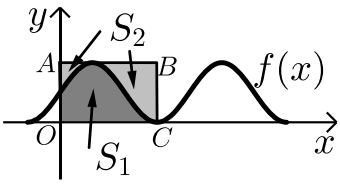

**2)** נתונה הפונקציה: $f(x)=x+2\sin x$ .
בתחום שבין ראשית הצירים לנקודת המקסימום הראשונה מימינה העבירו לפונקציה משיק ששיפועו 1.




א. מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- $x$ ברביעים הראשון והשני.

**3)** באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=\frac{\sin 2x+1}{2}$
בתחום: $-0.25\pi \le x \le 1.75\pi$ מעבירים משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה ומעלים אנך לציר ה- $x$ מנקודת החיתוך הראשונה של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ בתחום הנתון המסומנת ב-C כך שנוצר המלבן ABCO.
השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים יסומן ב- $S_1$ (ראה סימון בציור).
השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה- $y$ יסומן ב- $S_2$ .



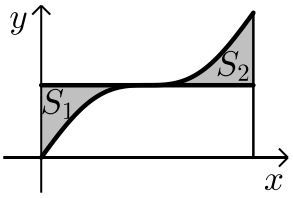

א. מצא את משוואת הצלע AB של המלבן.

ב. חשב את היחס: $\frac{S_1}{S_2}$ .

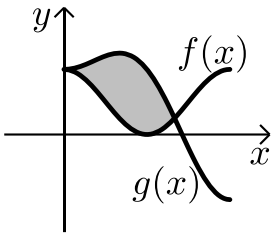
**4)** באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $y=\sin x+x$ בתחום: $0\le x\le 2\pi$ .

א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות בתחום הנתון?

ב. מורידים אנך מגרף הפונקציה לציר ה- $x$ בנקודה שבה: $x=2\pi$ .
מעבירים ישר המקביל לציר ה- $x$ מהנקודה שמאפסת את הנגזרת.
הראה כי השטחים $S_1$ ו- $S_2$ המסומנים בסרטוט שווים.

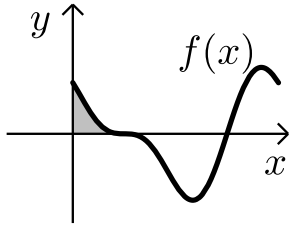


**5)** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה
הבאות: $f(x)=\cos^2 x$ ו- $g(x)=\sin^2 x+\cos x$
בתחום: $0\le x\le \pi$.



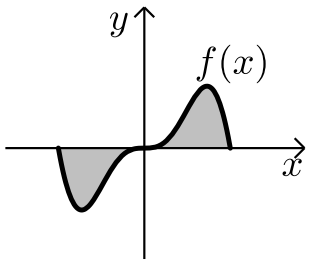

א. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.
ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים.
השתמש בזהות: $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

**6)** הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=-\cos 2x-\sin x$.




א. מצא את שיעורי ה-$x$ של הנקודות
המקיימות: $f'(x)=0$ בתחום: $0<x<2\pi$.
ידוע כי הנקודה המקיימת $f'(x)=0$ אשר אינה
קיצון נמצאת על ציר ה-$x$.
ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.
ג. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה בתחום הנתון.
חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.

**7)** ענה על הסעיפים הבאים:




א. נתונה הפונקציה: $y=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x$
הוכח כי הנגזרת של הפונקציה היא: $y'=x^2\sin x$
באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2\sin x$
בתחום: $-\pi\le x\le \pi$.
ב. הראה כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.
ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה
וציר ה-$x$ בתחום הנתון.

**8)** נתונה הפונקציה: $f(x)=a\cos x+b\sin x$ , $a,b$ פרמטרים.
הפונקציה חותכת את ציר ה-$x$ בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{4}$ והיא חיובית בתחום $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.
גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה בתחום $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ הוא $2\sqrt{2}-2$.
מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.

## תשובות סופיות:

1) 0.41 יח"ש.

2) א. $y=x+2$ ב. $\pi$ יח"ש.

3) א. $y=1$ ב. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi+2}{3\pi-2}=1.538$.

4) א. אין נקודת קיצון, הנקודה $(\pi,\pi)$ היא נקודת פיתול.

ב. $S=0.5\pi^2-2=2.934$.

5) א. $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{1}{4}\right)$ , $(0,1)$ ב. $S=1.5\frac{\sqrt{3}}{2}=1.299$.

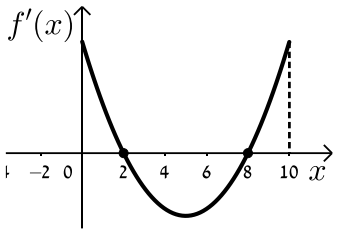
6) א. $x=\frac{\pi}{2}$ , $\frac{7\pi}{6}$ , $\frac{11\pi}{6}$ ב. $f(x)=-\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x$ ג. $\frac{1}{2}$ יח"ש.

7) א. הוכחה ב. הוכחה ג. $S=2(\pi^2-4)\approx 11.74$.

8) $a=2$ , $b=-2$.

# חישובי שטחים בין גרף הנגזרת והצירים:

## שאלות:



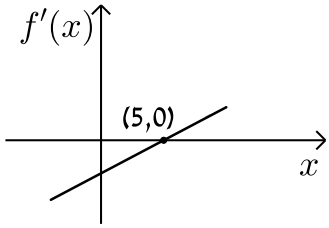

**1)** הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0 \le x \le 10$.

בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.

א. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$

אם: $f(2)=6$, $f(0)=-4$, $f(5)=0$ וכן: $f(10)>0$.

ב. חשב את השטח המוגבל ע"י **<u>גרף הנגזרת</u>** **<u>והצירים</u>** ברביע הראשון עד לנקודה שבה $x=2$.




**2)** לפניך הגרף של הפונקציה $f'(x)$.

הגרף המתואר חותך את ציר ה-$x$ בנקודה אחת בלבד והיא $(5,0)$.

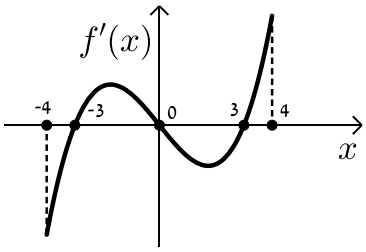
א. מצא את התחומים שבהם $f'(x)$ היא חיובית ואת התחומים שבהם היא שלילית.

ב. קבע מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ג. כתוב את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ אם ידוע כי שיעור ה-$y$ שלה הוא 2-.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה-$y$ כאשר $y=8$.

ה. חשב את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים.




**3)** בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$.

א. רשום את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

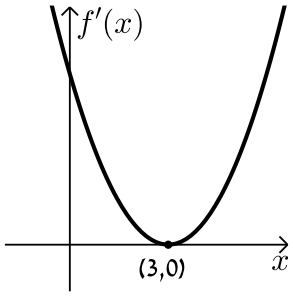
ב. מצא את שיעורי ה-$x$ של נקודות הקיצון של $f(x)$ וקבע את סוגן.

ג. נתון כי הפונקציה $f(x)$ עוברת בראשית הצירים וגם מקיימת: $f(-3)=f(3)=m$.

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנ"ל (הבע באמצעות $m$).

ד. השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ וציר ה-$x$ ברביעים השני והרביעי הוא 16 יח"ש. מצא את $m$.

**4)** הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$ מתוארת באיור הבא.

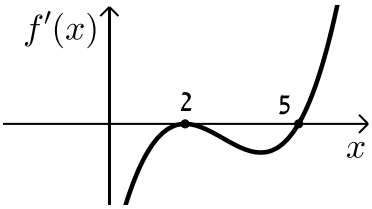



א. האם ל-$f(x)$ יש נקודות קיצון? נמק.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$
אם ידוע כי $f(3)=4$ וכי היא חותכת את ציר ה-$y$ בנקודה שבה $y=-5$.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים ברביע הראשון.

**5)** באיור שלפניך מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$.




ידוע כי הנקודות $A(5,-4.75)$, $B(2,2)$
ו-$C(0,14)$ נמצאות על $f(x)$.

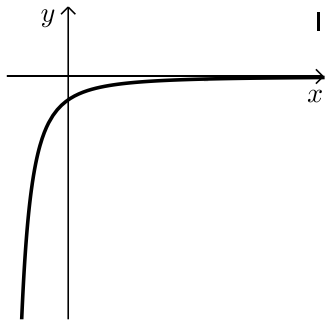
א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$.

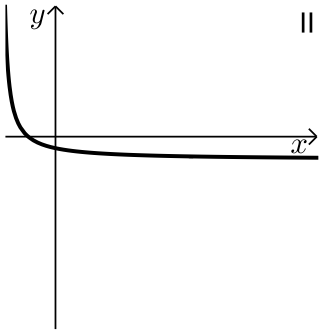
ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. חשב את השטח מוגבל בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים בתחום $0\le x\le 5$.

**6)** באיורים שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$f'(x)$:

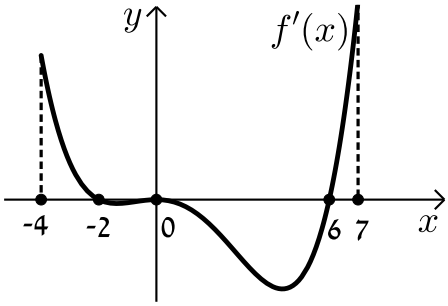



א. זהה איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמק.

ב. נתון כי $f(10)=-3$ וכי $f(x)$ חותכת את ציר ה-$y$ בנקודה שבה $y=-2$.
מהו השטח המוגבל בין גרף הנגזרת $f'(x)$, הצירים והישר $x=10$?

**7)** נתון גרף הנגזרת $f'(x)$ הבא:

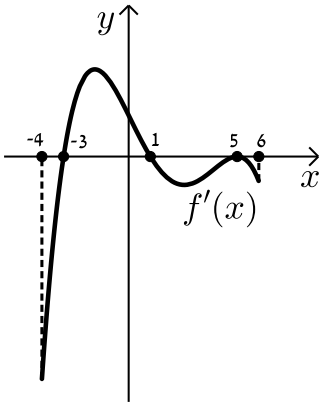



א. סרטט את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \le x \le 7$ לפי הנתונים: $f(0)=-2$ , $f(-2)=7.6$ ו- $f(6)=-606.8$ .

ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- $x$ ברביע השלישי.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- $x$ ברביע הרביעי.

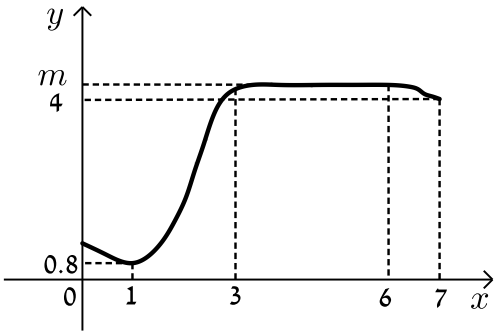
**8)** נתון גרף הנגזרת $f'(x)$ הבא:




א. סרטט את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \le x \le 6$ עבור הנתונים: $f(5)=-83\frac{1}{3}$ , $f(1)=36\frac{2}{15}$ , $f(-3)=-356\frac{2}{5}$ .

ב. חשב את כלל השטח הכלוא בין גרף הנגזרת וציר ה- $x$ בתחום: $-3 \le x \le 5$ .

**9)** בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $0<x<7$ :




הסתמך על הגרף של $f(x)$ ועל הערכים הרשומים על הצירים וענה על השאלות הבאות:

א. מצא עבור אילו ערכים של $x$ השונים מ-6 מתקיים:

i. $f'(x)>0$

ii. $f'(x)=0$

iii. $f'(x)<0$

ב. נתון כי: $\int_3^6 m\,dx=15$, כאשר $m$ הוא פרמטר המסומן על ציר ה-$y$.

מצא את $f(5)$.

ג. סרטט סקיצה של גרף פונקצית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $0<x<3$.

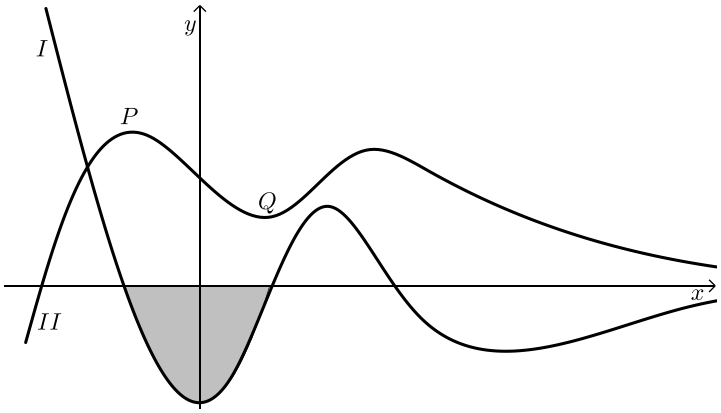
ד. מצא את השטח המוגבל בין הגרף של פונקצית הנגזרת $f'(x)$ וציר ה-$x$ בתחום $1<x<3$.

**10)** בסרטוט נתונים הגרפים של פונקציה ושל נגזרתה.

א. קבע איזה מהגרפים, I או II, שייך לפונקציה ואיזה שייך לנגזרת. נמק.

ב. כמה נקודות פיתול יש לפונקציה? נמק וסמן אותן על הסרטוט.

ג. נתון: $P(-2,4)$ , $Q(2,1)$. מצא את גודלו של השטח הכלוא בין גרף I לציר ה-$x$ (השטח המסומן בסרטוט).



## תשובות סופיות:

**הערה: סרטוטי הסקיצות מופיעות במרוכז בעמוד הבא.**

**1)** ב. 10 יח"ש.

**2)** א. חיובית: $x>5$ , שלילית: $x<5$ . ב. עולה: $x>5$ , יורדת: $x<5$

ג. $\min(5,-2)$ ד. הוכחה. ה. 10 יח"ש.

**3)** א. עולה: $3<x\le 4$ , $-3<x<0$ , יורדת: $0<x<3$ , $-4\le x<-3$

ב. $x_{\min}=3$ , $x_{\max}=0$ , $x_{\min}=-3$ . ג. הוכחה. ד. $m=-8$

**4)** א. לא. הנקודה $(3,0)$ היא פיתול מכיוון שהפונקציה עולה לפניה ואחריה.

ב. הוכחה. ג. 9 יח"ש.

**5)** א. $\min(5,-4.75)$ . ב. עולה: $x>5$ , יורדת: $x<5$ .

ג. הוכחה. ד. 18.75 יח"ש.

**6)** א. I: $f'(x)$ , II: $f(x)$ ב. 1 יח"ש.

**7)** א. הוכחה. ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.

**8)** א. הוכחה. ב. 512 יח"ש.

**9)** א. i. $f'(x)>0: 1<x<3$ א. ii. $f'(x)=0:\ x=1\ ,\ 3\le x<6$

א. iii. $f'(x)<0:\ 6<x<7\ ,\ 0<x<1$

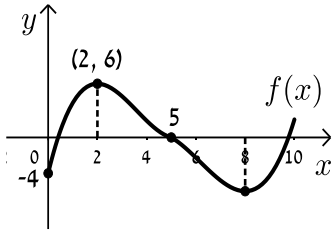
ב. $f(5)=5\ ,\ m=5$ ד. 4.2 יח"ש.

**10)** א. גרף I - $f'(x)$ וגרף II - $f(x)$ . ב. 3 נקודות פיתול.

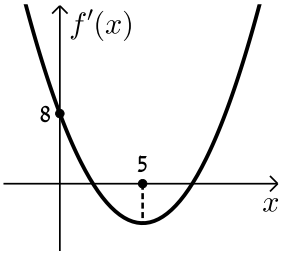
ג. 3 יח"ש.

**סרטוטי גרפים לפי מספרי שאלות:**

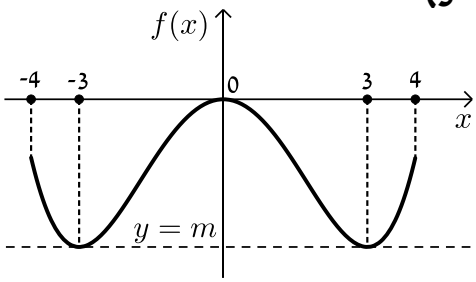
**(1**



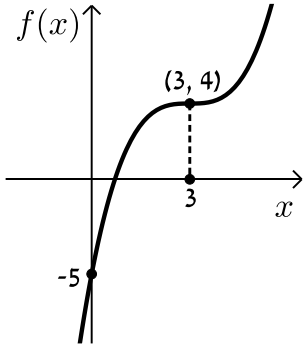

**(2**



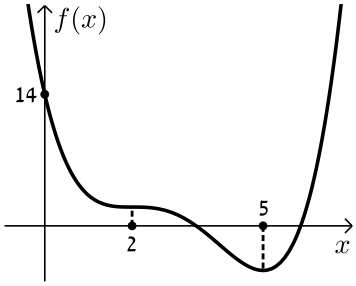

**(3**



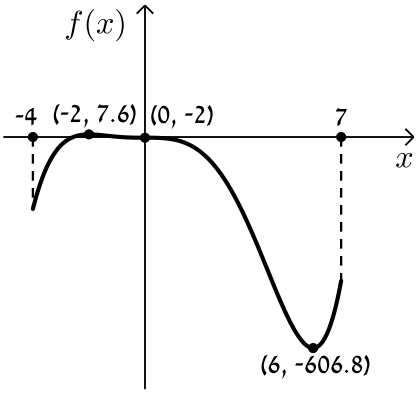

**(4**



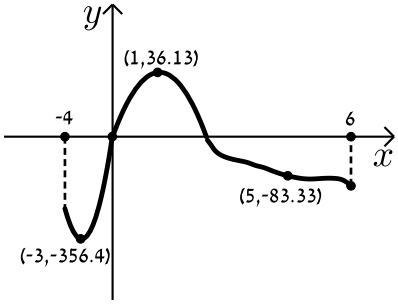

**(5**



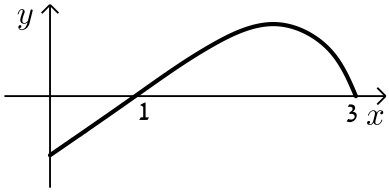

**(7**




**(8**




**(9**



# קורס ריענון במתמטיקה

## פרק 26 - חשבון אינטגרלי - פונקציה מעריכית, לוגריתמית וחזקה

תוכן העניינים


1. פונקציה מעריכית ..... 372
2. פונקציה לוגריתמית ..... 378
3. פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי ..... 384

# פונקציה מעריכית:

## סיכום כללי:

### אינטגרלים מיידים של פונקציות מעריכיות:

| אינטגרלים של פונקציות מורכבות | אינטגרלים יסודיים |
|---|---|
| $\int a^{mx+n}dx=\frac{a^{mx+n}}{m\cdot\ln a}+c$ | $\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+c$ |
| $\int e^{mx+n}dx=\frac{e^{mx+n}}{m}+c$ | $\int e^{x}dx=e^{x}+c$ |

## שאלות:

### אינטגרל כללי:

**1)** חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\left(5e^{x}-e^{3x}+e^{-x}+1\right)dx$

ב. $\int\left(3^{x}+5^{2x}\right)dx$

ג. $\int\left(6\sqrt{e^{4x-1}}\right)dx$

ד. $\int\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}dx$

**2)** חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\frac{e^{2x}-1}{e^{x}-1}dx$

ב. $\int\frac{3e^{3x}-5e^{2x}+4e^{x}-2}{e^{x}-1}dx$

**3)** חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\left(e^{4x}+e^{-x}\right)dx$

ב. $\int\left(e^{x+1}\right)^{2}dx$

ג. $\int\frac{2^{x}+4^{2x}+10^{3x}}{5^{x}}dx$

ד. $\int\left(4\sqrt{e^{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}}\right)dx$

4) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\left(\frac{e^x}{\sqrt{e^x+3}}\right)dx$ ב. $\int\left(\frac{3-e^x}{\left(e^x-3x\right)^2}\right)dx$ ג. $\int\left(xe^{x^2}\right)dx$

**אינטגרל מסוים:**

5) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=2e^x-\frac{1}{e^x}$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $\left(\ln 2,3\frac{1}{4}\right)$.

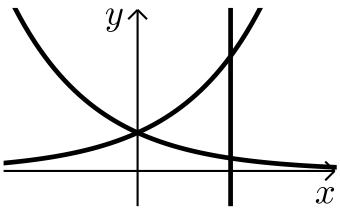
6) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=e^{2x}+e^x-2$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שערך הפונקציה בנקודת המינימום שלה הוא $\frac{1}{2}$.

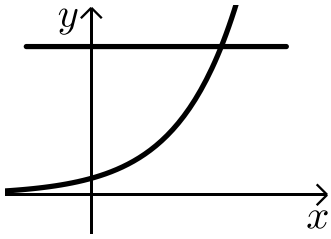
7) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=6x^2e^{x^3}-\frac{1}{x^2}$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $\left(-1,\frac{2}{e}\right)$.

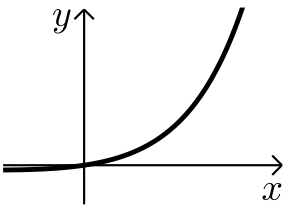
**חישובי שטחים:**



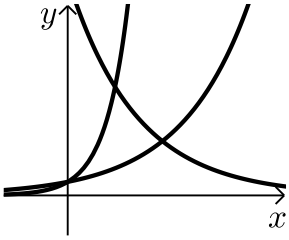

8) נתונות הפונקציות: $f(x)=e^x$, $g(x)=e^{-x}$.
מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות
לישר $x=\ln 3$.



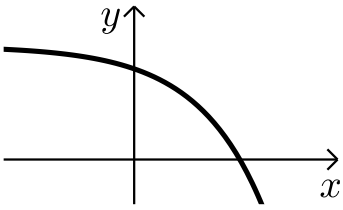

9) נתונה הפונקציה: $f(x)=3^x$.
מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,
הישר $y=9$ וציר ה- $y$.




**10)** נתונה הפונקציה: $f(x)=e^{2x}-e^{x}$.
לפונקציה העבירו משיק בראשית הצירים.
מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,
המשיק והישר $x=2$.




**11)** נתונות הפונקציות:
$f(x)=e^{x}$ , $g(x)=e^{3x}$ , $h(x)=16e^{-x}$.
חשב את גודל השטח הכלוא שבין שלוש הפונקציות.

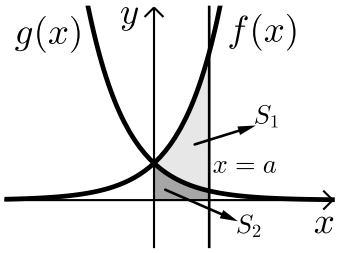



**12)** נתונה הפונקציה: $f(x)=5-e^{x}$.
העבירו לפונקציה משיק ששיפועו $-e$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין
הפונקציה, המשיק וציר ה- $x$.
ניתן להשאיר $e$ ו-ln בתשובה.

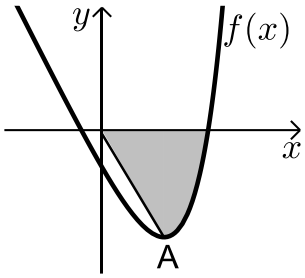
**13)** נתונה הפונקציה: $f(x)=e^{bx}$ , $(0<b)$.
גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר
בראשית הצירים וציר ה- $y$ הוא $\frac{e-2}{4}$.
מצא את ערכו של הפרמטר $b$.

**14)** נתונות הפונקציות: $g(x)=e^{-x}$ , $f(x)=e^{\frac{1}{2}x}$.
מנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ ברביע הראשון הורידו אנך לשני
הצירים. המשך האנך לציר ה- $y$ חותך את הפונקציה $f(x)$ ומנקודת החיתוך
יורד אנך נוסף לציר ה- $x$ כך שנוצר מלבן.
הוכח כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא $\frac{3}{e}$.

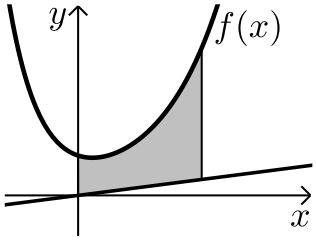
**15)** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=e^{2x}$ ו- $g(x)=e^{-2x}$.
מעבירים אנך לציר ה- $x$ את הישר $x=a$ , $a>0$ כמתואר באיור.
אנך זה יוצר את השטחים $S_1$ ו- $S_2$.
ידוע כי השטח $S_1$ גדול פי 3 מהשטח $S_2$.
מצא את $a$.



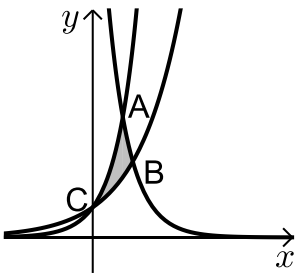

**16)** נתונה הפונקציה: $f(x)=e^{2x-1}-2ex-2$.
הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה.
א. מצא את שיעורי הנקודה A.
מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים.
ב. כתוב את משוואת הישר המחבר את הנקודה A עם הראשית.
ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- $x$, אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$ בנקודה שבה $x=1.7$.




**17)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{e^x+e^{ax}}{4}$.
ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה: $\left(1,\frac{e^3+1}{4e^2}\right)$.
א. מצא את $a$ וכתוב את הפונקציה.
ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והישר: $y=0.1x$.
חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר $y$ והאנך: $x=2$.




**18)** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של שלוש פונקציות:
I. $f(x)=2^x$ II. $g(x)=4^x$ II. $h(x)=2^{4-2x}$
א. קבע איזה גרף מתאר כל פונקציה.
ב. מצא את שיעורי הנקודות A , B ו-C (נקודות החיתוך שבין הגרפים).
ג. חשב את השטח המסומן באיור.



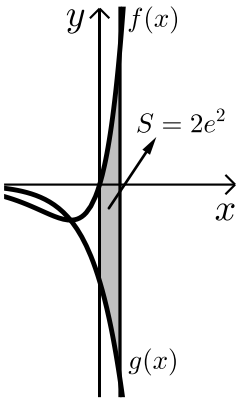
**19)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. גזור את הפונקציה הבאה: $y=e^x(x-1)$.

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $g(x)=-e^x$ , $f(x)=xe^x$.

מעבירים ישר $x=a$ , $(a>0)$ החותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח המתואר הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- $y$ והישר.

ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$. מצא את $a$.

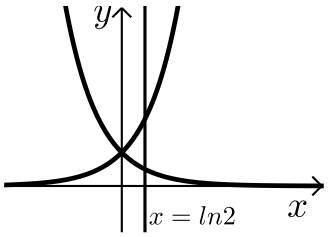



**חישובי נפחים:**

**20)** נתונות הפונקציות: $g(x)=e^{-x}$ , $f(x)=e^x$.

השטח הכלוא בין הפונקציות והישר: $x=\ln 2$ מסתובב סביב ציר ה- $x$.

חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.



## תשובות סופיות:

1) א. $5e^x-\frac{e^{3x}}{3}-e^{-x}+x+c$ ב. $\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{5^{2x}}{2\ln 5}+c$

ג. $3e^{2x-\frac{1}{2}}+c$ ד. $\frac{1}{2}e^{2x}+2x-\frac{1}{2}e^{-2x}+c$

2) א. $e^x+x+c$ ב. $\frac{3e^{2x}}{2}-2e^x+2x+c$

3) א. $\frac{1}{4}e^{4x}-e^{-x}+c$ ב. $\frac{1}{2}e^{2x+2}+c$

ג. $\frac{0.4^x}{\ln 0.4}+\frac{3.2^x}{\ln 3.2}+\frac{200^x}{\ln 200}+c$ ד. $8\sqrt{e^x}-\frac{3}{4}e^{\frac{-4x}{3}}+c$

4) א. $2\sqrt{e^x+3}+c$ ב. $\frac{1}{e^x-3x}+c$ ג. $\frac{1}{2}e^{x^2}+c$

5) $f(x)=2e^x+e^{-x}-1.25$

6) $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+e^x-2x-1$

7) $f(x)=2e^{x^3}+\frac{1}{x}+1$

8) $S=$ יח"ש $1\frac{1}{3}$

9) $S=$ יח"ש $10.72$

10) $S=$ יח"ש $18.41$

11) $S=$ יח"ש $3\frac{1}{3}$

12) $S=$ יח"ש $0.192$

13) $b=2$

15) $a=\ln 2$

16) א. $A(1,-e-2)$ ב. $y=-(e+2)x$ ג. $S=$ יח"ש $4.744$

17) א. $a=-2$ , $f(x)=\frac{e^x+e^{-2x}}{4}$ ב. $1.52$

18) ב. $C(0,1)$ , $A(1,4)$ , $B\left(1\frac{1}{3},2.52\right)$ ג. $S=$ יח"ש $1.03$

19) א. $y'=xe^x$ ב. $a=2$

20) $1\frac{1}{8}\pi$ יח"נ.

# פונקציה לוגריתמית:

## סיכום כללי:

**אינטגרלים מיידים של פונקציות לוגריתמיות:**

| אינטגרל של פונקציה מורכבת | אינטגרל יסודי |
|---|---|
| $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + c$ | $\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + c$ |

## שאלות:

**אינטגרל כללי:**

**1)** חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x+1}-\frac{4}{3x-1}\right)dx$ ב. $\int \frac{x^2+3x-4}{x}dx$ ג. $\int \frac{x+3}{x^2-9}dx$

**2)** חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \frac{x^2+3x+5}{x+1}dx$ ב. $\int \frac{x^3-x^2+5x-6}{x-2}dx$ ג. $\int \frac{x^4+3}{x+1}dx$

**3)** חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \frac{2x}{x^2-3}dx$ ב. $\int \frac{x-1}{x^2-2x}dx$ ג. $\int \frac{e^x}{e^x+5}dx$

ד. $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$ ה. $\int \frac{\cos x}{\sin x}dx$

**אינטגרל מסוים:**

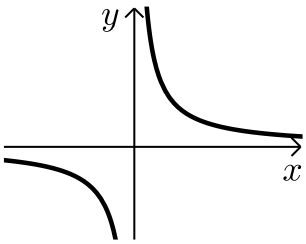
**4)** נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=2x-\frac{1}{x-4}$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(5,28)$.

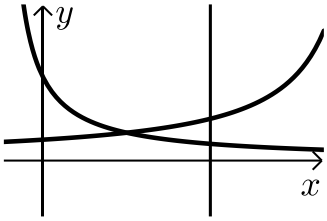
5) נתונה נגזרת שנייה של פונקציה: $f''(x)=6x-\frac{1}{x^2}$. מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(1,-2)$ וששיפועה בנקודה זו הוא 3.

**חישובי שטחים:**

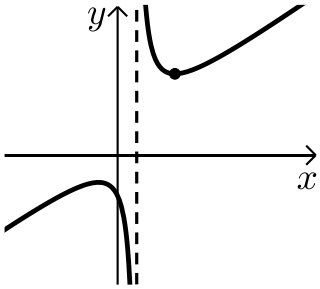
6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{x}$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x=-1$ ו-$x=-4$ וציר ה-$x$.
ניתן להשאיר ln בתשובה.




7) נתונות הפונקציות: $f(x)=\frac{4}{8-x}$ , $f(x)=\frac{2}{x+1}$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות, הישר $x=4$ והצירים.



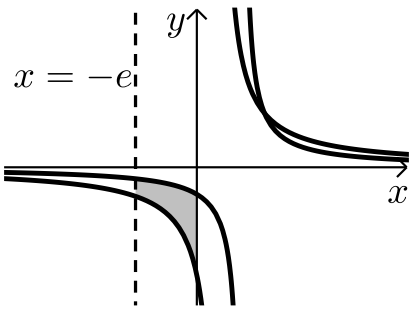

8) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=2$ ואנך לציר ה-$x$ העובר בנקודת המינימום של הפונקציה.
אפשר להשאיר ביטוי עם ln בתשובה.



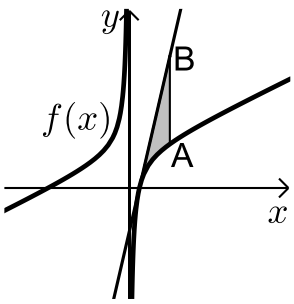

9) באיור שלפניך נתונות הפונקציות: $f(x)=\frac{a}{x-1}$
ו-$g(x)=\frac{a-1}{x-2}$ בתחום: $x<0$.
ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x=3$.

א. מצא את $a$ וכתוב את שתי הפונקציות.

ב. חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה-$y$ והישר $x=-e$



**10)** נתונה הפונקציה: $f(x)=7+ax+\frac{b}{x}$.




ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-$x$ היא: $y=18x-9$.

א. מצא את $a$ ו-$b$ וכתוב את הפונקציה.

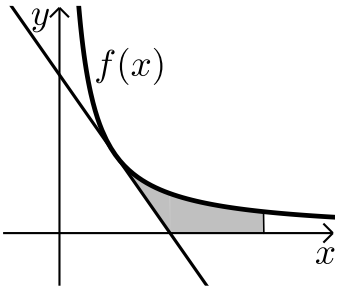
מעבירים ישר המקביל לציר ה-$y$ שחותך את גרף הפונקציה בנקודה A ואת משוואת המשיק בנקודה B.

אורך הקטע AB הוא 18.

ב. מצא את משוואת הישר הנ"ל אם ידוע כי הנקודה A נמצאת מימין לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.

**11)** הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$.



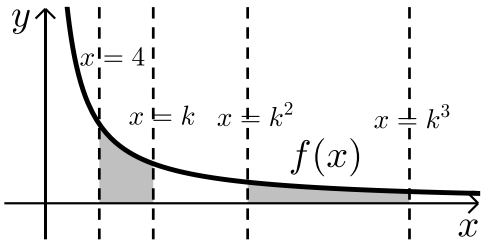

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=2$ היא: $y=4-x$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק בתחום: $x>0$.

חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה-$x$ והישר $x=e^2$.

**12)** באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2}{x}$




בתחום: $x>0$. מעבירים את הישרים:

$x=4$ , $x=k$ , $x=k^2$ , $x=k^3$

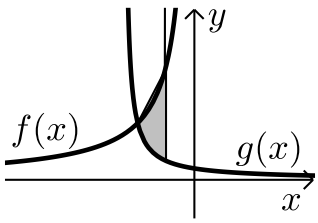
כמתואר $x>4$.

א. הבע באמצעות $k$ את השטחים: $S_1$ ו-$S_2$.

ב. הראה כי ההפרש: $S_2-S_1$ אינו תלוי ב-$k$ וחשב את ערכו.

ג. נתון כי השטח $S_2$ גדול פי 3 מהשטח $S_1$. מצא את $k$.

**13)** נתונות הפונקציות: $f(x)=-\frac{4}{x}$ ו- $g(x)=\frac{k}{2x+5}$.




גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה- $y$ בנקודה שבה $y=0.4$.

א. מצא את הפונקציה $g(x)$.

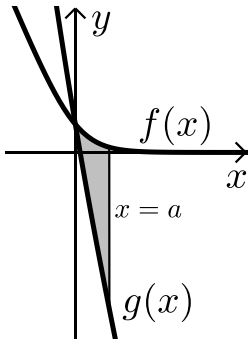
ב. מצא את נקודת החיתוך של שני הגרפים.

ג. חשב את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר $x=-1$.

**14)** באיור מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$f(x)=\ln\left(e^{-x}+1\right)$ ו- $g(x)=\ln\left(e^{-2x}+e^{-3x}\right)$

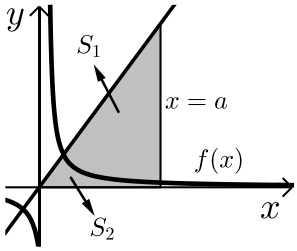
בתחום: $(x\ge 0)$.




א. הראה כי הגרפים נחתכים על ציר ה- $y$.

ב. מעבירים ישר $x=a$ , $(a>1)$ המאונך לציר ה- $x$ אשר חותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח $S$ (ראה איור).
מצא את ערכו של $a$ עבורו מתקיים: $S=4$.

**15)** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה: $f(x)=\frac{2}{3x-1}$ והישר: $y=x$.




א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציות הנמצאת ברביע הראשון.

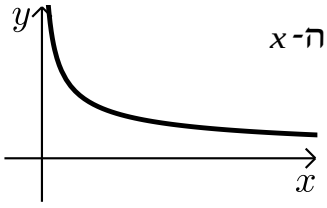
מעבירים אנך לציר ה- $x$ - $x=a$ הנמצא מימין לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.
האנך החותך את הגרפים ויוצר את השטחים $S_1$ ו- $S_2$ המתוארים האיור.

ב. מצא את הערך של $a$ עבורו השטח $S_2$ יהיה שווה ל- $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\ln 7$.

ג. עבור ערך ה- $a$ שמצאת בסעיף הקודם חשב את יחס השטחים: $\frac{S_1}{S_2}$.

**חישובי נפחים:**

**16)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$.




השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x=1$ ו-$x=3$ וציר ה-$x$ מסתובב סביב ציר ה-$x$.
מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר באופן זה.
אפשר להשאיר ln בתשובה.

**17)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}$.

השטח הכלוא בין הפונקציה, הצירים והישר $x=\ln\sqrt{3}$ מסתובב סביב ציר ה-$x$. חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

**18)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}$.

השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x=a$ ו-$x=a+3$ , $(a>0)$
וציר ה-$x$ מסתובב סביב ציר ה-$x$.
חשב את נפח גוף הסיבוב המינימלי שנוצר באופן הזה.

## תשובות סופיות:

1) א. $3\ln|x|+2\ln|x+1|-\frac{4\ln|3x-1|}{3}+c$ ב. $\frac{x^2}{2}+3x-4\ln|x|+c$ ג. $\ln|x-3|+c$

2) א. $\frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x+1|+c$ ב. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+7x+8\ln|x-2|+c$

ג. $\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+4\ln|x+1|+c$

3) א. $\ln|x^2-3|+c$ ב. $\frac{1}{2}\ln|x^2-2x|+c$ ג. $\ln|e^x+5|+c$

ד. $\ln|e^x+e^{-x}|+c$ ה. $\ln|\sin x|+c$

4) $f(x)=x^2-\ln|x-4|+3$

5) $f(x)=x^3+\ln|x|-x-2$

6) $S=$ יח"ש $\ln 4$

7) $S=$ יח"ש $2.17$

8) $S=$ יח"ש $4\ln 2-2$

9) א. $a=2$ , $g(x)=\frac{1}{x-2}$ , $f(x)=\frac{2}{x-1}$ ב. $S=$ יח"ש $1.76$

10) א. $b=-4$ , $a=2$ , $f(x)=7+2x-\frac{4}{x}$ ב. $x=2$

ג. $S=6+\ln 256\approx$ יח"ש $11.54$

11) א. $f(x)=\frac{4}{x}$ ב. $S=$ יח"ש $6-4\ln 2$

12) א. $S_2=2\ln k$ , $S_1=2\ln k-\ln 16$ ב. $S_2-S_1=\ln 16$ ג. $k=8$

13) א. $g(x)=\frac{2}{2x+5}$ ב. $(-2,2)$ ג. $S=$ יח"ש $\ln 5\frac{1}{3}\approx 1.674$

14) ב. $a=2$

15) א. $(1,1)$ ב. $a=5$ ג. $\frac{S_1}{S_2}=5.955$

16) $V=$ יח"נ $\pi\ln 3$

17) $V=$ יח"נ $\frac{\pi}{2}\ln 2$

18) $V=$ יח"נ $\pi\left(19\frac{1}{2}+4\ln 4\right)$

# פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי:

## סיכום כללי:

**אינטגרלים מיידים של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי:**

| אינטגרל יסודי | אינטגרל של פונקציה מורכבת |
|---|---|
| $\int \sqrt[n]{x^m}\,dx = \int x^{\frac{m}{n}}\,dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + c$ | $\int \sqrt[n]{(ax+b)^m}\,dx = \int (ax+b)^{\frac{m}{n}}\,dx = \frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a\cdot\left(\frac{m}{n}+1\right)} + c$ |

תנאי לקיום האינטגרציה: $\frac{m}{n} \neq -1$ .

## שאלות:

**אינטגרל של פונקצית חזקה:**

**1)** חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \sqrt[3]{x}\,dx$

ב. $\int \left(4x - 2\sqrt[4]{x}\right)dx$

ג. $\int \left(x\cdot\sqrt[5]{x}\right)dx$

ד. $\int \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

ה. $\int \frac{x+4}{\sqrt[4]{x}}\,dx$

ו. $\int \frac{x^3-3x+5}{\sqrt{x}}\,dx$

ז. $\int \sqrt[3]{2x-3}\,dx$

ח. $\int \sqrt[4]{5-x}\,dx$

ט. $\int \frac{3}{\sqrt[8]{7x+12}}\,dx$

י. $\int \frac{7}{\sqrt[5]{14-2x}}\,dx$

**2)** חשב את ערכי האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^8 \left(x+\sqrt[5]{4x}\right)dx$

ב. $\int_3^{16} \left(\sqrt[4]{5x+1}\right)dx$

ג. $\int_{-10}^{5} \frac{2}{\sqrt[4]{6-x}}\,dx$

**אינטגרל מסוים:**

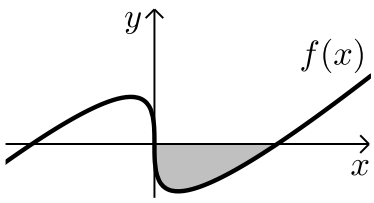
**3)** נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=2x-\sqrt[3]{4x}$.
ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(2,3)$.
מצא את הפונקציה.

**4)** נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=\sqrt[3]{5x+7}$.
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה-$x$ בנקודה שבה $x=4$.
מצא את הפונקציה.

**5)** נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=\frac{10}{\sqrt[5]{x+1}}+(x-1)^2$.
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה-$y$ בנקודה שבה $y=-6$.
מצא את הפונקציה.

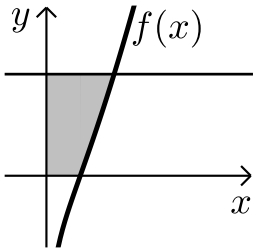
**חישובי שטחים:**

**6)** באיור שלפניך מופיע גרף הפונקציה: $f(x)=x-4\sqrt[3]{x}$.



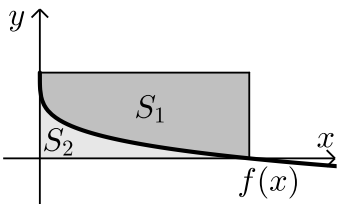

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.
ב. חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.

**7)** באיור שלפניך מצויר גרף הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$.



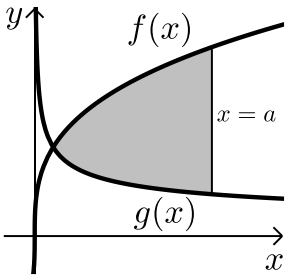

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
ב. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.
ג. מעבירים אנך לציר ה-$y$ מהנקודה $(4,6)$.
חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והצירים.

**8)** באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=2-\sqrt[4]{x}$.
מעבירים אנכים לצירים מנקודות החיתוך של
גרף הפונקציה עם הצירים כך שנוצר מלבן.
מסמנים את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים:
ב- $S_1$ ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב- $S_2$.



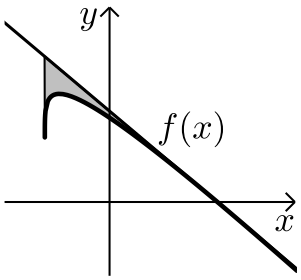

מצא את היחס: $\frac{S_1}{S_2}$.

**9)** באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות
הבאות: $f(x)=4\sqrt[3]{x}$ , $g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.



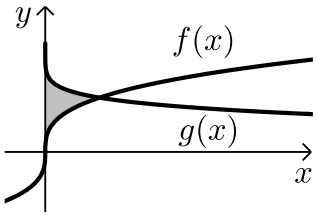

א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים בתחום: $x>0$.
ב. מעבירים אנך לציר ה- $x$ , $x=a$ , ($a$ פרמטר).
ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים מנקודת
החיתוך שלהם ועד לאנך הוא: $42\frac{3}{16}$ סמ"ר.
מצא את $a$.

**10)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt[4]{5x+6}-ax$ , ($a$ פרמטר).
ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$ בנקודה שבה $x=2$.



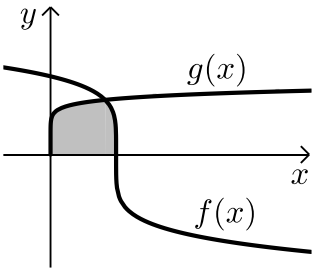

א. מצא את הפרמטר $a$ וכתוב את הפונקציה.
ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
ג. מצא את נקודת קיצון הקצה של הפונקציה.
ד. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר
דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$.
ה. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$
והמשיק שמצאת בסעיף הקודם. מורידים אנך
מהמשיק אל נקודת קיצון הקצה של הפונקציה שמצאת בסעיף ג'.
חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק.

**11)** באיור שלפניך נתונים הגרפים של
הפונקציות: $f(x)=\sqrt[3]{x}$ , $g(x)=2-\sqrt[6]{x}$ .



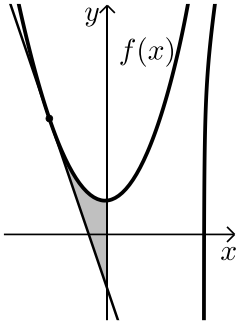

א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.
ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- $y$ .

**12)** הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$ .
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$ בנקודה שבה: $x=1.2$ .



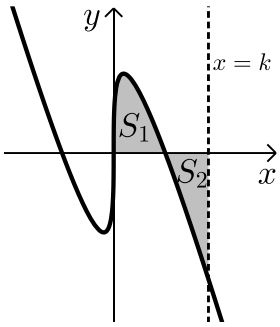

א. מצא את הפונקציה $f(x)$ .
ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$ ,
גרף הפונקציה: $g(x)=\sqrt[10]{x}$ וציר ה- $x$ .

**13)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{3}{\sqrt[3]{5-x}}+\frac{1}{2}x^2$ .




א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה
בנקודה שבה $x=-3$ .
ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$ ,
המשיק וציר ה- $y$ .

**14)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt[3]{x}-4x$ .




א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
ג. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה ברביע
הראשון. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה
וציר ה- $x$ יסומן ב- $S_1$ .
מעבירים ישר $x=k$ אשר יוצר את השטח $S_2$ כמתואר.
מצא את $k$ אם ידוע כי: $S_1=S_2$ .

## תשובות סופיות:

1) א. $0.75\sqrt[3]{x^4}+c$ ב. $2x^2-1.6\sqrt[4]{x^5}+c$ ג. $\frac{5}{11}\sqrt[5]{x^{11}}+c$

ד. $4.5\sqrt[3]{x^2}+c$ ה. $\frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7}+\frac{16}{3}\sqrt[4]{x^3}+c$ ו. $\frac{2}{7}\sqrt{x^7}-2\sqrt{x^3}+10\sqrt{x}+c$

ז. $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(2x-3)^4}+c$ ח. $-0.8\sqrt[4]{(5-x)^5}+c$ ט. $\frac{24}{49}\sqrt[8]{(7x+12)^7}+c$

י. $-\frac{35}{8}\sqrt[5]{(14-2x)^4}+c$

2) א. $45\frac{1}{3}$ ב. $33.76$ ג. $18\frac{2}{3}$

3) $f(x)=x^2-\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x)^4}+2$

4) $f(x)=\frac{3}{20}\sqrt[3]{(5x+7)^4}-12.15$

5) $f(x)=12.5\sqrt[5]{(x+1)^4}+\frac{1}{3}(x-1)^3-18\frac{1}{6}$

6) א. $(0,0)\ ;\ (8,0)$ ב. $S=16$ יח"ש

7) א. $x>0$ ב. $(2,0)$ ג. $S=18.149$ יח"ש

8) $\frac{S_1}{S_2}=4$

9) א. $\left(\frac{1}{8},2\right)$ ב. $a=8$

10) א. $a=1$ , $f(x)=\sqrt[4]{5x+6}-x$ ב. $x\geq -1.2$ ג. $(-1.2,1.2)$

ד. $y=-\frac{27}{32}x+\frac{27}{16}$ ה. $S=0.48$ יח"ש

11) א. $(1,1)$ ב. $S=\frac{11}{28}$ יח"ש

12) א. $f(x)=(6-5x)^{\frac{1}{5}}$ ב. $S=1\frac{5}{66}$ יח"ש

**13)** א. $y=-2\frac{15}{16}x-\frac{45}{16}$ ב. $S=$ 4.56 יח"ש

**14)** א. כל $x$ ב. $\left(-\frac{1}{8},0\right)$ , $\left(\frac{1}{8},0\right)$ , $(0,0)$ ג. $k=\left(\frac{3}{8}\right)^{1.5}=0.2296..$