

במתמטיקה לתלמידים מנהל עסקים, כלכלה ומנהל, כלכלה



תוכן העניינים

1.	מבוא לאלגברה	1
2.	משוואות אלגבריות	47
3.	אי שוויונים אלגבריים	64
4.	מבוא לפונקציות	(ללא ספר)
5.	הפונקציה הקווית (ליניארית)	(ללא ספר)
6.	הפונקציה הריבועית	(ללא ספר)
7.	סדרות	(ללא ספר)
8.	חוקי החזקות והשורשים	73
9.	משוואות ואי-שוויונים מעריכיים	83
10.	חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים	93
11.	בעיות מילוליות יסודיות	(ללא ספר)
12.	בעיות מילוליות בשני נעלמים	(ללא ספר)
13.	בעיות מילוליות עם אחוזים	(ללא ספר)
14.	קריאת גרפים והסקה מתוך גרפים	(ללא ספר)
15.	הסתברות קלאסית	109
16.	קומבינטוריקה - כלל המכפלה	121
17.	קומבינטוריקה - תמורה - סידור עצמים בשורה	125
18.	קומבינטוריקה - תמורה עם עצמים זהים	128
19.	קומבינטוריקה - סידור עצמים במעגל	130
20.	קומבינטוריקה - דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה	133
21.	קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר וללא החזרה	135
22.	קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר ועם החזרה	138
23.	כלל ההכלה וההפרדה	142

תוכן העניינים

קורס קדם במתמטיקה לתלמידים מנהל עסקים, כלכלה ומנהל, כלכלה וחשבונאות

פרק 1 - מבוא לאלגברה

תוכן העניינים

1	מספרים מכוונים
5	חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים
7	סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים
8	אחוזים
14	כפל וחילוק שברים
16	חיבור וחסור שברים
20	בעיות יסודיות באחוזים
22	חזרה על תבניות מספר
24	כינוס איברים
26	פישוט ביטויים על ידי פתיחת סוגריים
29	פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר
31	פירוק לגורמים של ביטויים אלגברים
34	פירוק הטרינום
36	שברים אלגברים
40	כפל וחילוק של שברים אלגברים
42	חיבור וחסור של שברים אלגברים
46	שברים כפולים

מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

מספרים מכוונים הם מספרים שיכולים לקבל סימן חיובי או שלילי, כגון:

- בקניון גדול ישנן קומות 1, 2, 3, 4, וכן חניונים הממוקמים בקומות 1-, 2-, ו-3-.
- גובה פני הים מוגדר להיות 0 מטרים. העיר חיפה נמצאת כ-103 מטרים מעל פני הים בעוד שים המלח נמצא בגובה 426- מטרים.

כללים:

- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים זהים, מחברים את המספרים עצמם והסימן נשאר.
- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים מנוגדים, מחסירים את המספרים זה מזה (הקטן מהגדול) וסימן התוצאה כסימן המספר הגדול מביניהם.
- כפל וחילוק יתבצע בשני חלקים:
 - ביצוע הפעולה על המספרים עצמם.
 - קביעת הסימן של התוצאה באופן הבא:
 - כפל או חילוק של שני מספרים בעלי אותו סימן - התוצאה תהיה חיובית.
 - כפל או חילוק של שני מספרים שונים סימן - התוצאה תהיה שלילית.

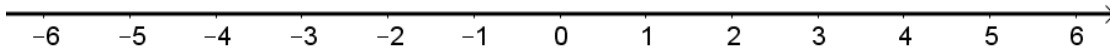
הערה:

אם יש רצף של מכפלות (או חילוקים), סימן התוצאה תלוי במספר הפעמים שבהם מופיע סימן שלילי (-). אם הסימן מופיע מספר זוגי של פעמים התוצאה חיובית, ואם הוא מופיע מספר אי-זוגי של פעמים אזי התוצאה שלילית.

שאלות:

(1) סמנו את המספרים הבאים על ציר המספרים בהתאמה:

$$-3\frac{1}{2}, 4, 1\frac{1}{3}, -5, -\frac{1}{2}, 2, 0, \frac{1}{2}, -2$$



(2) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

ב. $-3-2$

א. $3+2$

ד. $-3+2$

ג. $3-2$

ו. $7+10$

ה. $-1-4$

ח. $-7+3$

ז. $-6+5$

(3) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

ב. $5-8-12+17$

א. $5+7-23+1$

ד. $-4-11+2+9$

ג. $3-14+2+6$

ו. $-7-13+5-3$

ה. $6-21+3-7$

(4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

ב. $4 \cdot (-7)$

א. $4 \cdot 9$

ד. $(-5) \cdot (-3)$

ג. $(-6) \cdot (-5)$

ו. $(-8) \cdot 5$

ה. $(-2) \cdot 8$

ח. $2 \cdot 3 \cdot 3$

ז. $(-2) \cdot (-3) \cdot (-3)$

י. $(-2) \cdot (-3) \cdot 3$

ט. $(-2) \cdot 3 \cdot (-3)$

יב. $(-2) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-2)$

יא. $2 \cdot 3 \cdot (-3)$

יד. $1 \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot 2$

יג. $(-1) \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot 2$

5) מהו הסימן של תוצאת המכפלה בכל מקרה :

א. $(-2) \cdot (-4) \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot (-6) \cdot (-5)$

ב. $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot 6 \cdot (-5)$

ג. $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot (-6) \cdot (-5)$

ד. $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot 6 \cdot 5$

6) חשבו את ערכי הביטויים הבאים :

ב. $(-30) : 3$

א. $(-25) : (-5)$

ד. $(-32) : (-4)$

ג. $40 : (-10)$

ו. $4 : (-16)$

ה. $(-6) : 18$

7) חשבו את ערכי הביטויים הבאים :

ב. $\frac{42}{-6}$

א. $\frac{-60}{12}$

ד. $\frac{-12}{-3}$

ג. $\frac{32}{-4}$

8) מה התוצאה של כל אחת מהפעולות הבאות :

ב. $(-2) \cdot 0$

א. $0 : 5$

ד. $6 : 0$

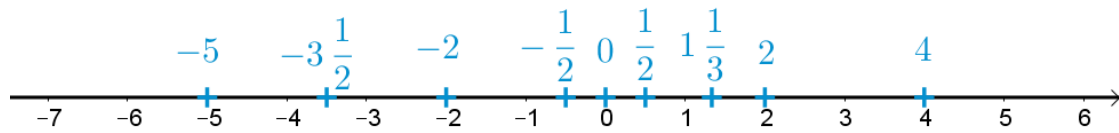
ג. $0 \cdot (-3) \cdot 4$

ו. $0 - 4$

ה. $0 + 4$

תשובות סופיות:

(1) להלן מערכת הצירים:



- (2) א. 5 ב. -5 ג. 1 ד. -1 ה. -5
- ו. 17 ז. -1 ח. -4
- (3) א. -10 ב. 2 ג. -3 ד. -4 ה. -19 ו. -18
- (4) א. 36 ב. -28 ג. 30 ד. 15 ה. -16
- ו. -40 ז. -18 ח. 18 ט. 18 י. 18
- יא. -18 יב. 36 יג. -16 יד. 16 יו. -
- (5) א. + ב. + ג. - ד. -
- (6) א. 5 ב. -10 ג. -4 ד. 8 ה. $-\frac{1}{3}$ ו. $-\frac{1}{4}$
- (7) א. -5 ב. -7 ג. -8 ד. 4
- (8) א. 0 ב. 0 ג. 0 ד. לא מוגדר ה. 4 ו. -4

חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

הגדרה:

פעולת החזקה היא צורה מקוצרת שמייצגת פעולת כפל של אותו מספר בעצמו מספר פעמים. סימון החזקה הוא באופן הבא:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

כאשר a נקרא הבסיס ו- n נקראת החזקה.

הערות:

- כאשר הבסיס חיובי, התוצאה תמיד תהיה חיובית ללא קשר האם החזקה היא זוגית או אי-זוגית.
- כאשר הבסיס שלילי, התוצאה תהיה חיובית אם החזקה היא זוגית ושלילית אם החזקה היא אי-זוגית.

הגדרה:

פעולת השורש היא הפוכה לפעולת החזקה והיא מאפשרת למצוא את בסיס החזקה. סימון השורש הוא באופן הבא:

$$\sqrt[n]{a}$$

כאשר a נקרא הבסיס ו- n נקרא סדר השורש.

הערות:

- שורש למספר זוגי יכול להיות מסדר זוגי או אי-זוגי.
- שורש למספר שלילי יכול להיות מסדר אי-זוגי בלבד.

שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- | | |
|--------------|---------------|
| א. 3^2 | ב. 3^3 |
| ג. $(-3)^3$ | ד. $(-2)^3$ |
| ה. 4^3 | ו. 3^4 |
| ז. $(-5)^3$ | ח. 10^4 |
| ט. $-(-3)^4$ | י. -5^4 |
| יא. -4^3 | יב. $-(-2)^6$ |

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- | | |
|--------------------|----------------------|
| א. $\sqrt[3]{-27}$ | ב. $\sqrt[4]{625}$ |
| ג. $\sqrt[4]{-16}$ | ד. $\sqrt[5]{-32}$ |
| ה. $-\sqrt[4]{81}$ | ו. $-\sqrt[3]{1000}$ |

תשובות סופיות:

- | | | | | | |
|-----------|----------|--------------|---------|---------|---------|
| (1) א. 9 | ב. 27 | ג. -27 | ד. -8 | ה. 64 | ו. 81 |
| ז. -125 | ח. 10000 | ט. -81 | י. -625 | יא. -64 | יב. -64 |
| (2) א. -3 | ב. 5 | ג. לא מוגדר. | ד. -2 | ה. -3 | ו. -10 |

סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

סדר פעולות חשבון:

- פעולות כפל וחילוק קודמות לפעולות חיבור וחיסור.
- פעולות חזקה ושורש קודמות לפעולות כפל וחילוק.
- סוגריים קודמים לכל.

שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- א. $\sqrt{81} + 3 \cdot 2^3 - 40 : 8$ ב. $(-3)^2 : 9 - 2 \cdot (-4^2)$
- ג. $\sqrt{144} - 20 : 4 + 3 \cdot (-2)^2$ ד. $3 + 4 \cdot [-3 + 4 \cdot (-2)] + \sqrt{10 + 6}$
- ה. $(-3)^4 : (-9) - 5 \cdot (-2)^3$ ו. $-\sqrt{9} + 5^2 : (-4 - 1) - 24 : 12 \cdot 3$
- ז. $-2^5 : (-8) + 4^2 - 3 \cdot 5$ ח. $\sqrt[3]{-27} + 4 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3^3$
- ט. $[6 \cdot (-1)^4 - 10 \cdot (-1)^3] \cdot (-1)^5$ י. $(8 - \sqrt[3]{64}) \cdot (2 \cdot (-4) - \sqrt[5]{243})$
- יא. $\frac{3^2 \cdot (8 - 2 \cdot 3)^3}{(5^2 \cdot 3 - 72) \cdot (-4)} + 2 \cdot \{15 - 20 : (4 + 3 \cdot 2)\}$

תשובות סופיות:

- (1) א. 28 ב. 33 ג. 19 ד. -37 ה. 31 ו. -14
- ז. 5 ח. -21 ט. -16 י. -44 יא. 20

אחוזים:

סיכום כללי:

הגדרה כללית - שבר:

השבר הוא חלק מתוך השלם. מקובל לסמן שבר באמצעות קו שבר המפריד בין המונה (החלק העליון) למכנה (החלק התחתון) באופן הבא:

$$\frac{\text{מונה}}{\text{מכנה}}$$

ישנם שלושה סוגים אפשריים של שברים:

- שבר פשוט – בו המונה קטן מהמכנה (ולכן תמיד יהיה קטן מ-1).
- שבר מדומה – בו המונה גדול מהמכנה (יהיה גדול בערכו מ-1).
- שבר מעורב – המכיל שילוב של מספר שלם ושבר כלשהו.

שבר עשרוני:

שבר שהמכנה שלו הוא מספר המהווה כפולות של 10 כגון: 10, 100, 1000 ... שבר עשרוני מיוצג ע"י נקודה עשרונית אשר מבדילה בין החלק שלם לחלק השברי באופן הבא:

$$\underbrace{XX}_{\text{שברים שלמים}}.\underbrace{YYY}_{\text{שברים שלמים}}$$

כדי להמיר שבר פשוט לשבר עשרוני המכנה צריך להיות בכפולות של 10.

הגדרה - אחוז:

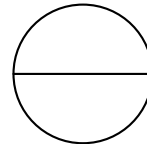
השבר $\frac{1}{100}$ מוגדר להיות אחוז אחד ומסומן באופן הבא: 1%.

באופן זה השבר $\frac{45}{100}$ יכתב: 45%, והשבר $\frac{145}{100}$ יכתב: 145%.

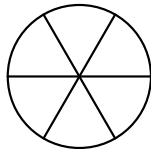
שאלות:

(12) צבע את החלקים המתאימים בכל עיגול:

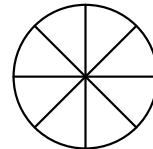
א. צבע $\frac{1}{2}$ מהעיגול



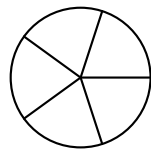
ב. צבע $\frac{1}{6}$ מהעיגול



ג. צבע $\frac{3}{8}$ מהעיגול

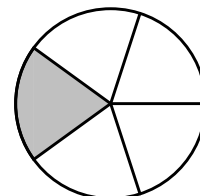


ד. צבע $\frac{2}{5}$ מהעיגול

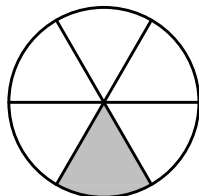


(13) כתוב את השבר המתאים לחלקים הצבועים בכל אחד מהמקרים הבאים:

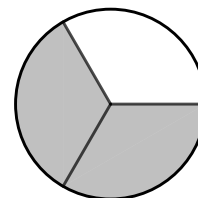
א. שבר:



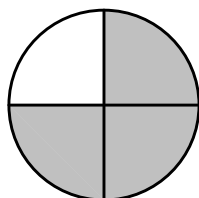
ב. שבר:



ג. שבר:



ד. שבר:



14) הרחב את השברים הבאים :

א. השבר $\frac{1}{2}$ לפי מכנה 4, לפי מכנה 18, לפי מכנה 40.

ב. השבר $\frac{3}{5}$ לפי מכנה 10, לפי מכנה 25, לפי מכנה 60.

ג. השבר $\frac{5}{8}$ לפי מכנה 16, לפי מכנה 32, לפי מכנה 88.

15) צמצם את השברים הבאים ככל הניתן :

א. $\frac{25}{30}$ ב. $\frac{10}{30}$ ג. $\frac{6}{24}$ ד. $\frac{4}{20}$

ה. $\frac{35}{56}$ ו. $\frac{24}{42}$ ז. $\frac{36}{48}$ ח. $\frac{33}{121}$

16) המר את השברים המדומים הבאים לשברים מעורבים :

א. $-\frac{20}{3}$ ב. $\frac{19}{4}$ ג. $\frac{12}{5}$ ד. $\frac{22}{5}$

ה. $-\frac{34}{6}$ ו. $-\frac{50}{7}$ ז. $\frac{47}{8}$ ח. $\frac{60}{9}$

17) המר את השברים המעורבים הבאים לשברים מדומים :

א. $1\frac{2}{3}$ ב. $3\frac{5}{6}$ ג. $4\frac{1}{2}$ ד. $6\frac{1}{4}$

ה. $11\frac{3}{4}$ ו. $-2\frac{5}{8}$ ז. $-6\frac{2}{7}$ ח. $12\frac{7}{9}$

18) קבע איזה שבר גדול יותר בכל אחד מהמקרים הבאים :

א. $\frac{4}{10}$ או $\frac{3}{10}$ ב. $\frac{7}{6}$ או $\frac{7}{8}$

ג. $\frac{5}{6}$ או $\frac{2}{3}$ ד. $\frac{7}{12}$ או $\frac{5}{18}$

(19) המר את השברים העשרוניים הבאים לשברים פשוטים מצומצמים או מעורבים :

א. 0.7	ב. 0.07	ג. 0.007	ד. 0.34
ה. 0.304	ו. 0.65	ז. 1.2	ח. 1.02
ט. 1.42	י. 3.5	יא. 6.03	יב. 5.125

(20) המר את השברים הבאים לשברים עשרוניים :

א. $\frac{3}{10}$	ב. $\frac{3}{100}$	ג. $\frac{3}{1000}$	ד. $\frac{23}{1000}$
ה. $\frac{1}{2}$	ו. $\frac{3}{4}$	ז. $\frac{2}{5}$	ח. $\frac{4}{25}$
ט. $\frac{7}{50}$	י. $\frac{3}{20}$	יא. $\frac{7}{8}$	יב. $\frac{9}{16}$
יג. $9\frac{1}{10}$	יד. $3\frac{1}{5}$	טו. $4\frac{7}{8}$	טז. $-4\frac{1}{16}$

(21) כתוב את השברים הבאים בצורתם העשרונית (היעזר במחשבון וכתוב עד 3 ספרות אחרי הנקודה העשרונית) :

א. $\frac{2}{3}$	ב. $\frac{5}{6}$	ג. $\frac{3}{7}$	ד. $\frac{2}{11}$
------------------	------------------	------------------	-------------------

(22) המר מאחוזים לשברים פשוטים :

א. 25%	ב. 32%	ג. 64%	ד. 80%
ה. 120%	ו. 5%	ז. 300%	ח. 150%

(23) המר משברים פשוטים לאחוזים :

א. $\frac{3}{4}$	ב. $\frac{1}{8}$	ג. $\frac{4}{5}$	ד. $\frac{7}{20}$
ה. $\frac{11}{40}$	ו. $\frac{70}{125}$	ז. $\frac{5}{6}$	ח. $\frac{4}{9}$

תשובות סופיות:

(12) תשובה מודגמת בסרטון.

- (13) א. $\frac{1}{5}$ ב. $\frac{1}{6}$ ג. $\frac{2}{3}$ ד. $\frac{3}{4}$
- (14) א. $\frac{4}{8}, \frac{18}{36}, \frac{40}{80}$ ב. $\frac{30}{50}, \frac{75}{125}, \frac{180}{300}$ ג. $\frac{80}{128}, \frac{160}{256}, \frac{440}{700}$
- (15) א. $\frac{5}{6}$ ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. $\frac{1}{5}$ ה. $\frac{5}{8}$ ו. $\frac{4}{7}$
- (16) א. $-6\frac{2}{3}$ ב. $4\frac{3}{4}$ ג. $2\frac{2}{5}$ ד. $4\frac{2}{5}$ ה. $-5\frac{4}{6}$ ו. $-7\frac{1}{7}$
- (17) א. $\frac{5}{3}$ ב. $\frac{23}{6}$ ג. $\frac{9}{2}$ ד. $\frac{25}{4}$ ה. $\frac{47}{4}$ ו. $-\frac{21}{8}$
- (18) א. $\frac{4}{10}$ ב. $\frac{7}{6}$ ג. $\frac{5}{6}$ ד. $\frac{7}{12}$
- (19) א. $\frac{7}{10}$ ב. $\frac{7}{100}$ ג. $\frac{7}{1000}$ ד. $\frac{17}{50}$ ה. $\frac{38}{125}$ ו. $\frac{13}{20}$
- (20) א. 0.3 ב. 0.03 ג. 0.003 ד. 0.023 ה. 0.5 ו. 0.75
- (21) א. 0.6 ב. 0.83 ג. 0.428 ד. 0.18
- (22) א. $\frac{1}{4}$ ב. $\frac{8}{25}$ ג. $\frac{16}{25}$ ד. $\frac{4}{5}$ ה. $1\frac{1}{5}$ ו. $\frac{1}{20}$
- ז. $\frac{3}{4}$ ח. $\frac{3}{11}$ ט. $5\frac{7}{8}$ י. $1\frac{1}{5}$ יא. $6\frac{3}{100}$ יב. $5\frac{1}{8}$ יג. 9.1 יד. 3.2 יו. 4.875 יז. -4.0625 יח. $1\frac{1}{2}$ יט. 3

23 א. 75% ב. 12.5% ג. 80% ד. 35% ה. 27.5% ו. 56%
ז. 83.333% ח. 44.444%

כפל וחילוק שברים:

סיכום כללי:

- כשכופלים שני שברים יש לכפול מונה במונה ומכנה במכנה.
 - במידה ומדובר במספר שלם הכופל שבר, יש לכפול אותו במונה.
 - במידה ומדובר בשברים מעורבים, יש להפוך אותם תחילה לשברים מדומים ורק אז לבצע את פעולת הכפל.
- כדי לחלק שברים, יש לכפול את השבר הראשון בהופכי של השבר השני.
 - הופכי של שבר מסוים מתקבל ע"י החלפת המונה במכנה.

שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4}$	ב. $\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6}$	ג. $\frac{2}{9} \cdot \frac{8}{10}$
ד. $3 \cdot \frac{4}{5}$	ה. $6 \cdot \frac{2}{3}$	ו. $\frac{12}{25} \cdot 5$
ז. $1\frac{3}{5} \cdot 2\frac{1}{4}$	ח. $3\frac{1}{2} \cdot 4\frac{2}{5}$	ט. $3\frac{3}{7} \cdot 2\frac{2}{5}$
י. $\left(\frac{4}{5}\right)^3$	יא. $\frac{4}{5^3}$	יב. $\frac{4^3}{5}$

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{2}{5} : \frac{4}{9}$	ב. $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$	ג. $\frac{3}{25} : \frac{7}{10}$
ד. $8 : \frac{2}{9}$	ה. $10 : \frac{2}{3}$	ו. $\frac{5}{6} : 3$
ז. $\frac{2}{5} : 5$	ח. $3\frac{3}{4} : 5\frac{5}{8}$	ט. $2\frac{2}{5} : 1\frac{3}{15}$

תשובות סופיות:

א. $\frac{9}{20}$	ב. $\frac{5}{21}$	ג. $\frac{8}{45}$	ד. $2\frac{2}{5}$	ה. 4	ו. $2\frac{2}{5}$
ז. $3\frac{3}{5}$	ח. $15\frac{2}{5}$	ט. $8\frac{8}{35}$	י. $\frac{64}{125}$	יא. $\frac{4}{125}$	יב. $12\frac{4}{5}$
א. $\frac{9}{10}$	ב. $1\frac{1}{2}$	ג. $\frac{6}{35}$	ד. 36	ה. 15	ו. $\frac{5}{18}$
ז. $\frac{2}{25}$	ח. $\frac{2}{3}$	ט. 2			

חיבור וחיסור שברים:

סיכום כללי:

כפולה משותפת מינימלית:

בהינתן זוג מספרים a ו- b , המספר הקטן ביותר אשר תוצאת חלוקתו במספרים הנ"ל מניבה מספר שלם נקרא הכפולה המינימלית שלהם.

הערות:

- כפולה מינימלית יכולה להיות גם עבור יותר משני מספרים.
- הכפולה המינימלית תהיה המכנה המשותף בעת פעולות חיבור וחיסור של שברים.

כללי החיבור והחיסור של שברים:

- חיבור וחיסור של שברים בעלי אותו המכנה מתבצע על המספרים שבמונה בלבד כאשר המכנה נשאר כפי שהוא.
דוגמא: $\frac{2}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2-3}{7} = \frac{-1}{7}$, $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$
- חיבור וחיסור של שברים בעלי מכנים שונים מתבצע ע"י פעולת מכנה משותף.
דוגמא: $\frac{1}{4} - \frac{5}{6} = \frac{3}{12} - \frac{10}{12} = \frac{3-10}{12} = \frac{-7}{12}$, $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{6+5}{15} = \frac{11}{15}$
- חיבור של שבר עם מספר שלם יתבצע באופן ישיר.
דוגמא: $3 + \frac{1}{4} = 3\frac{1}{4}$
חיסור של שבר ממספר שלם יתבצע ע"י הוצאת שלמים מהשבר.
דוגמא: $3 - \frac{1}{4} = 2\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = 2\frac{3}{4}$
דרך נוספת היא ע"י העברת המספר השלם לשבר מדומה: $3 - \frac{1}{4} = \frac{12}{4} - \frac{1}{4} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$
- חיבור וחיסור של שברים מעורבים יתבצע ע"י העברתם לשברים מדומים תחילה.
דוגמא: $3\frac{2}{5} + 2\frac{1}{6} = \frac{17}{5} + \frac{13}{6} = \frac{17 \cdot 6}{30} + \frac{13 \cdot 5}{30} = \frac{102+65}{30} = \frac{167}{30} = 5\frac{17}{30}$
ניתן גם לפצל ולבצע את פעולת החיבור (או החיסור) של המספרים השלמים תחילה,

ולאחר מכן לבצע את הפעולה עבור השברים.

$$\text{דוגמא: } 2\frac{3}{4} - 5\frac{1}{3} = (2-5) + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) = -3 + \left(\frac{9}{12} - \frac{4}{12}\right) = -3 + \frac{5}{12} = -2\frac{7}{12}$$

שאלות:

(1) מצא את הכפולה המשותפת המינימלית של המספרים הבאים:

- | | | | |
|-----------|----------|--------------|-------------|
| א. 2 ו-3 | ב. 2 ו-4 | ג. 3 ו-5 | ד. 6 ו-10 |
| ה. 4 ו-10 | ו. 4 ו-6 | ז. 3, 5 ו-10 | ח. 2, 3 ו-8 |

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- | | |
|--|---|
| א. $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}$ | ב. $\frac{5}{9} + \frac{2}{9}$ |
| ג. $\frac{4}{13} + \frac{9}{13}$ | ד. $\frac{7}{8} + \frac{7}{8}$ |
| ה. $\frac{7}{8} - \frac{3}{8}$ | ו. $\frac{8}{9} - \frac{7}{9}$ |
| ז. $\frac{2}{12} - \frac{5}{12}$ | ח. $\frac{2}{5} - \frac{6}{5}$ |
| ט. $\frac{2}{8} + \frac{5}{8} + \frac{6}{8}$ | י. $\frac{7}{15} + \frac{8}{15} - \frac{6}{15}$ |

(3) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- | | |
|--|---|
| א. $\frac{1}{2} + \frac{4}{3}$ | ב. $\frac{3}{5} + \frac{1}{10}$ |
| ג. $\frac{4}{6} - \frac{1}{12}$ | ד. $\frac{3}{6} - \frac{5}{8}$ |
| ה. $\frac{5}{4} + \frac{7}{2} + \frac{2}{8}$ | ו. $\frac{7}{3} + \frac{6}{5} + \frac{3}{10}$ |
| ז. $\frac{4}{7} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$ | ח. $\frac{1}{4} + \frac{2}{8} - \frac{3}{5}$ |

(4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2 + \frac{5}{6}$

ב. $2 - \frac{5}{6}$

ג. $2\frac{1}{4} + \frac{5}{6}$

ד. $2\frac{1}{4} - \frac{5}{6}$

ה. $3\frac{2}{3} + 4\frac{1}{4}$

ו. $5\frac{7}{8} - 6\frac{1}{2}$

ז. $2 + \frac{5}{6} - \frac{1}{9}$

ח. $\frac{3}{4} - 1\frac{1}{5} + \frac{8}{20}$

(5) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) + 2\frac{1}{3}$

ב. $\frac{3}{14} : \frac{2}{7} + \frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{4} - \frac{2}{5}$

ג. $\frac{5}{11} \cdot 2\frac{3}{4} - 6 : \frac{2}{5}$

ד. $2\frac{4}{5} : \frac{9}{10} \cdot \frac{6}{7} + \frac{1}{6}$

ה. $\frac{5}{6} : \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot 3\frac{1}{4}$

תשובות סופיות:

12. ו.	20. ה.	30. ד.	15. ג.	4. ב.	6. א. (1
				24. ח.	30. ז.
$\frac{1}{9}$. ו.	$\frac{1}{2}$. ה.	$1\frac{3}{4}$. ד.	1. ג.	$\frac{7}{9}$. ב.	$\frac{4}{5}$. א. (2
		$\frac{3}{5}$. י.	$1\frac{5}{8}$. ט.	$-\frac{4}{5}$. ח.	$-\frac{1}{4}$. ז.
$3\frac{5}{6}$. ו.	5. ה.	$-\frac{1}{8}$. ד.	$\frac{7}{12}$. ג.	$\frac{7}{10}$. ב.	$1\frac{5}{6}$. א. (3
				$-\frac{1}{10}$. ח.	$\frac{19}{21}$. ז.
$-\frac{5}{8}$. ו.	$7\frac{11}{12}$. ה.	$1\frac{5}{12}$. ד.	$3\frac{1}{12}$. ג.	$1\frac{1}{6}$. ב.	$2\frac{5}{6}$. א. (4
				$-\frac{1}{20}$. ח.	$2\frac{13}{18}$. ז.
	$3\frac{5}{18}$. ה.	$2\frac{5}{6}$. ד.	$-13\frac{3}{4}$. ג.	$1\frac{1}{10}$. ב.	$2\frac{11}{24}$. א. (5

בעיות יסודיות באחוזים:

סיכום כללי:

נוסחה לביצוע חישובים עם אחוזים:

$$\text{תמורת האחוז} = \text{שלם} \cdot \frac{\text{אחוז}}{100}$$

למשל, בהינתן גודל שלם 120, אשר יש לחשב כמה הם 40 אחוזים ממנו, נקבל לפי

$$\text{הנוסחה: } 48 = 120 \cdot \frac{40}{100}, \text{ כלומר: תמורת האחוז 40 מהגודל 120 היא 48.}$$

שאלות:

- (1) בכיתה 30 תלמידים. 60% מתוכם בנות.
 - א. כמה בנות בכיתה?
 - ב. כמה בנים בכיתה?
- (2) בכיתה 28 בנות המהוות 70% מכלל התלמידים בכיתה.
 - א. כמה תלמידים בכיתה?
 - ב. כמה בנים בכיתה?
- (3) מחיר בגד-ים הוא 300 ₪. בסוף העונה הוא נמכר ב-20% הנחה.
 - א. מהו מחירו בסוף העונה?
 - ב. מה גודל ההנחה?
- (4) מחיר ההשקה של בושם מסוים הוא 500 ₪. לאחר מכן מועלה מחירו ב-8%.
 - א. מה מחירו הסופי?
 - ב. מה גודל ההתייקרות?
- (5) מחיר ליטר דלק הוא 5 ₪ לליטר. בחנוכה מוזל מחירו ב-7%.
 - א. מה מחירו בסוף השנה?
 - ב. מה גודל המוזל?

6) מוצר מסויים מתייקר בסוכות ב-12%. בפורים מוזל המוצר ב-12%. מחירו בסוף השנה הוא 394.24 ₪. מה מחירו בתחילת השנה?

7) ענה על השאלות הבאות:

- א. באולם קולנוע 200 צופים, מתוכם 176 בנים. מה אחוז הבנים בקהל?
- ב. בכיתה 30 תלמידים, מתוכם 18 בנות. מה אחוז הבנות בכיתה?
- ג. מחיר מוצר התייקר מ-80 ₪ ל-120 ₪. בכמה אחוזים התייקר המוצר?
- ד. מחיר מוצר הוזל מ-120 ₪ ל-80 ₪. בכמה אחוזים הוזל המוצר?
- ה. מחיר מוצר התייקר מ-150 ₪ ל-200 ₪. בכמה אחוזים התייקר המוצר?
- ו. מחיר מוצר מוזל הוזל מ-200 ₪ ל-150 ₪. בכמה אחוזים הוזל המוצר?

תשובות סופיות:

- | | |
|-------------------|-------------|
| 1) א. 18 בנות. | ב. 12 בנים. |
| 2) א. 40 תלמידים. | ב. 12 בנים. |
| 3) א. 240 ₪ | ב. 60 ₪ |
| 4) א. 540 ₪ | ב. 40 ₪ |
| 5) 4.9755 ₪ | |
| 6) 400 ₪ | |
| 7) א. 88% | ב. 60% |
| | ג. 50% |
| | ד. 33.33% |
| | ה. 33.33% |
| | ו. 25% |

חזרה על תבניות מספר:

סיכום כללי:

משתנה הוא סמל המתאר כמות או גודל כלשהם אשר אינם ידועים ועשויים להשתנות.

תבנית מספר היא ביטוי אלגברי אשר מכיל משתנה (או משתנים).

ניתן להציב במשתנים ערכים מספריים שונים ולקבל תוצאות שונות עבור תבנית המספר עצמה.

במתמטיקה, תפקידה של תבנית המספר הוא להביע גודל מסוים אשר לערכו יש משמעויות שונות. דוגמא לכך היא: קנייה של x פריטים, אשר כל אחד עולה 3 שקלים, יניבו תבנית מספר של $3 \cdot x$ אשר מייצגת את הסכום הכולל של הפריטים.

שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- x הנתון:

- | | |
|----------------------------|---------------------------|
| א. $2x+5$ כאשר $x=3$ | ב. x^2+3x כאשר $x=2$ |
| ג. $-x^2+2x+3$ כאשר $x=5$ | ד. $-x^2-9x+5$ כאשר $x=5$ |
| ה. x^3+1 כאשר $x=-2$ | ו. $4-x^3$ כאשר $x=-1$ |
| ז. $(x+1)(2-x)$ כאשר $x=4$ | ח. $x^2(3x-4)$ כאשר $x=3$ |

(2) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- x הנתון:

- | | |
|--|--|
| א. $27x^5-2x^3+x$ כאשר $x=\frac{1}{3}$ | ב. $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+6$ כאשר $x=-\frac{2}{3}$ |
|--|--|

(3) הצב את הערכים המספריים במקום הפרמטרים וחשב את ערך תבנית המספר:

- | | |
|--------------------------------|---|
| א. $a^2+2ab+b^2$ | עבור: $a=3, b=-5$ |
| ב. $(x-3)^2+3x^2b$ | עבור: $x=5, b=-1$ |
| ג. $-x^3-2xy+y^4$ | עבור: $x=-2, y=-1$ |
| ד. $\frac{(a-2c)^4}{a}-a^2$ | עבור: $a=2, c=-2$ |
| ה. $\frac{4a^2-3b}{c}$ | עבור: $a=-1, b=2, c=-4$ |
| ו. $\sqrt{c-3a}$ | עבור: $c=13, a=-1$ ועבור: $c=82, a=\frac{1}{3}$ |
| ז. $\frac{p^3+2\sqrt{q+1}}{m}$ | עבור: $p=-5, q=48, m=3$ |

תשובות סופיות:

- (1) א. 11 ב. 10 ג. -12 ד. -65 ה. -7 ו. 5
 ז. -10 ח. 45
- (2) א. $\frac{10}{27}$ ב. $5\frac{22}{27}$
- (3) א. 4 ב. -71 ג. 5 ד. 644 ה. $\frac{1}{2}$
 ז. -37 ו. הצבה ראשונה : 4, הצבה שניה : 9

כינוס איברים:

סיכום כללי:

תבניות אלגבריות יכולות להכיל איברים רבים ולכן נרצה לכנס אותם על מנת לפשט את התבנית. כדי לכנס איברים ניקח את כל קבוצת האיברים מאותו הסוג ונחבר את המקדמים שלהם. דוגמא: $3x + 6x - 5x = (3 + 6 - 5)x = 4x$.
 איברים שונים נבדלים זה מזה בערך התבנית האלגברית שלהם.
 כך: $3x$ שונה מ- $4y$ ושונה מ- $2xy$. באותו האופן, האיברים x ו- x^2 הם שונים.

שאלות:

(1) כנס איברים דומים:

- | | |
|--|---|
| א. $5x + 7x - 4x$ | ב. $9x^2 - 2x^2 - 3x^2 - 2x^2$ |
| ג. $-10xy + 15xy + xy - 2yx$ | ד. $x^2y - 3yx^2 + x^2y$ |
| ה. $8a^2 + 10a - 5a^2 - 11a + a^2$ | ו. $2x^2 - 3m^2 - x^2 + 3m^2$ |
| ז. $3xy + y - 30y + 6yx - 7y$ | ח. $mn^2 + 4m^2n + 6n^2m - 10nm^2 + mn^2$ |
| ט. $-6 + x^3 + 4 - 3x^3 + 17x^3 - 17$ | י. $y^2 + x^2 - 5x^2 + 5y^2 + 4x^2 - 6y^2$ |
| יא. $7x^2 - 3x - 4x + 2$ | יב. $5xy + 2x - 3yx - x + 1$ |
| יג. $3 - x - x^2 + 4x + 5x^2 - 12$ | יד. $x + xy + y - 6yx - 6y - 6x$ |
| טו. $mn + n - 5m + 5nm - 14n + 3m$ | טז. $ab^2 + 6ba^2 - 6b + 16a^2b + 3b - 6b^2a$ |
| יז. $z^3 - 4z^2 + 7 - z^3 - 8 + 8z^2$ | יח. $4x^2z + 6xz^2 - 6 - xz^2 + 12 + 10zx^2$ |
| יט. $2 - x^3 - 3 - 4x^2 + 2x + x^3 + x^2 - 2x^3$ | כ. $x^3 - 3x - 4x^2 + 2x + x^3 + x^2 - 2x^3$ |
| כא. $2a^2b + 3x^2y + 5a^2b + 10x^2y$ | כב. $12x^2y^3 + 13a^2 - 20x^2y^3 + 2a^2$ |
| כג. $2y^2 - 4x^3y^2 - 10y^2 - x^3y^2$ | כד. $-2x^3y + 5x^2 - 4yx^3 - 6x^2$ |
| כה. $2a^2b + 2b + 3a^2 + 5b$ | כו. $5a^2b - 8ab^2 + 20a^2b - 14ab^2$ |
| כז. $-12x^2 + 2y^2 + 3x^2y + 14xy^2 - 5xy^2 - 6y^2 + 2xy + 11x^2 + x^2y - 9xy$ | |
| כח. $21x^3y^3 + x^2y^2 - 3xy^3 + x^3y - 15x^2y^2 - 7x^3y + 12x^3y^3 - 4xy^3 + 4xy^3 - 6x^3y$ | |

תשובות סופיות:

א. $8x$	ב. $2x^2$	ג. $4xy$
ד. $-x^2y$	ה. $4a^2 - a$	ו. x^2
ז. $9xy - 36y$	ח. $8mn^2 - 6nm^2$	ט. $15x^3 - 19$
י. $-13n - 2m + 6mn$	יא. $-5ab^2 + 22a^2b - 3b$	יב. 0
יג. $7x^2 - 7x + 2$	יד. $2xy + x + 1$	יז. $4x^2 + 3x - 9$
יח. $-5x - 5y - 5xy$	יט. $4z^2 - 1$	כ. $14x^2z + 5xz^2 + 6$
כא. $-3x^2 + 2x - 3$	כב. $-3x^2 - x$	כג. $7a^2b + 13x^2y$
כד. $-8x^2y^3 + 15a^2$	כה. $-8y^2 - 5x^3y^2$	כו. $-6x^3y - x^2$
כז. $2a^2b + 3a^2 + 7b$	כח. $25a^2b - 22ab^2$	כט. $-x^2 - 4y^2 + 4x^2y + 9xy^2 - 7xy$
ל. $33x^3y^3 - 14x^2y^2 - 3xy^3 - 12x^3y$		

פישוט ביטויים ע"י פתיחת סוגריים:

סיכום כללי:

בעת ביצוע כפל בין שני איברים יש לכפול את המקדמים בנפרד ואת האותיות (משתנים) בנפרד.

כלל הפילוג:

$$\bullet a(b+c) = ab+ac$$

$$\bullet (a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $2x \cdot 3x$	ב. $-4x \cdot (-7x)$	ג. $-2x \cdot (-4x) \cdot (-3)$
ד. $8m^2 \cdot 4m^3$	ה. $3a^3 \cdot (-2a^2)$	ו. $-b \cdot 4b^2 \cdot \frac{b^2}{2}$
ז. $a \cdot 3b$	ח. $4a^2 \cdot 7b^2$	ט. $ab \cdot (-2a^2b)$

(2) פשט את הביטויים הבאים ע"י פתיחת סוגריים:

א. $2(3x-4)$	ב. $2(-3x^2+5x-1)$
ג. $(7x-2)4$	ד. $(1-2x)(-2)$
ה. $a(3a-1)$	ו. $b(b^2-3b+4)$
ז. $2x(5x+3)$	ח. $5x(x^2+2x-3)$
ט. $3t^2(4t-t^2+6)$	י. $\frac{5}{2}(4d^4-3d)d$

(3) פשט את הביטויים הבאים :

א. $5x + (3x - 2) + (-4 - 2x)$ ב. $7x + (-4x - 5) + 3x + (-1 + 7x)$

ג. $8 - (2x - 5) - (4x + 2)$ ד. $-6x - (-3x - 1) - (-7 - 4x) + 1$

ה. $(3 - 2x^2 + 4)2 + 3(x - x^2) - 6(7 - 5x) + 4x^2$

ו. $3y^2 - (y + 1 - 2y^2) + 6(5y - 6) - (-y - 4)3 + 5(y^2 + 1) - 7$

(4) פשט את הביטויים הבאים :

א. $(x - 1)(x + 2)$ ב. $(x + 3)(x - 7)$

ג. $(3 - x)(x + 4)$ ד. $(3x + 4)(5x + 1)$

ה. $3(4x + 1)(2x - 3)$ ו. $-2(3x - 1)(5 - 2x)$

(5) פשט את ערכי הביטויים הבאים :

א. $(x - 1)(x + 3) + 2(3 - x)$

ב. $(a + 4)(a - 2) - (a + 5)(a - 3)$

ג. $(2m - 3)(4m + 3) + 5(2m^2 - 6)$

ד. $-x^2y^2(x^3y + x^2) + 2xy(2x^3y - x^4y^2)$

תשובות סופיות:

- (1) א. $6x^2$ ב. $28x^2$ ג. $-24x^2$ ד. $32m^5$ ה. $-6a^5$ ו. $-2b^5$
 ז. $3ab$ ח. $28a^2b^2$ ט. $-2a^3b^2$
- (2) א. $6x-8$ ב. $-6x^2+10x-2$ ג. $28x-8$ ד. $-2+4x$
 ה. $3a^2-a$ ו. b^3-3b^2+4b ז. $10x^2+6x$ ח. $5x^3+10x^2-15x$
 ט. $12t^3-3t^4+18t^2$ י. $10d^5-7.5d^2$
- (3) א. $6x-6$ ב. $13x-6$ ג. $-6x+11$ ד. $x+9$ ה. $-3x^2+33x-28$
 ו. $10y^2+32y-27$
- (4) א. x^2+x-2 ב. $x^2-4x-21$ ג. $-x^2-x+12$
 ד. $15x^2+23x+4$ ה. $24x^2-30x-9$ ו. $12x^2-34x+10$
 א. x^2+3 ב. 7 ג. $18m^2-6m-39$ ד. $-3x^5y^3+3x^4y^2$
- (5)

פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר:

סיכום כללי:

- נוסחת ריבוע של סכום/הפרש: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
- נוסחה להפרש ריבועים: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+5)^2$	ב. $(x+2)^2$	ג. $(4x+5)^2$
ד. $(6x+2)^2$	ה. $(7x+y)^2$	ו. $(5x+2y)^2$
ז. $(x^2+7)^2$	ח. $(x^2+y^2)^2$	ט. $(x^3+2y^2x)^2$

(2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-6)^2$	ב. $(x-2)^2$	ג. $(5-x)^2$
ד. $(6x-1)^2$	ה. $\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2$	ו. $\left(\frac{1}{3}x-5\right)^2$
ז. $(3m-2n)^2$	ח. $\left(x^2-\frac{3}{5}y\right)^2$	ט. $(x^2y^2-7)^2$

(3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-5)(x+5)$	ב. $(3+x)(x-3)$
ג. $(3x-1)(3x+1)$	ד. $(5-7x)(7x+5)$
ה. $\left(\frac{1}{2}x+6\right)\left(\frac{1}{2}x-6\right)$	ו. $\left(5y-\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{1}{4}x+5y\right)$
ז. $(x^2+y)(x^2-y)$	ח. $(3a^2b^3-4)(3a^2b^3+4)$

(4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+1)(x+2)-3x$ ב. $(x-5)(5x-1)+2(4+x)$
 ג. $x(2x-1)(2x+1)-4x^2(x+1)$ ד. $-(y+3x)(y-3x)+(y-3x)^2$
 ה. $x(x+3)-(6+x)(6x+2)-(x+2)^2$
 ו. $-5(x+7)(x-7)+3(2x+5)(5-x)+(x+1)^2$

תשובות סופיות:

(1) א. $x^2+10x+25$ ב. x^2+4x+4 ג. $16x^2+40x+25$
 ד. $36x^2+24x+4$ ה. $49x^2+14xy+y^2$ ו. $25x^2+20xy+4y^2$
 ז. $x^4+14x+49$ ח. $x^4+2x^2y^2+y^4$ ט. $x^6+4x^4y^2+4y^4x^2$
 (2) א. $x^2-12x+36$ ב. x^2-4x+4 ג. $25-10x+x^2$
 ד. $36x^2-12x+1$ ה. $9x^2-3x+\frac{1}{4}$ ו. $\frac{1}{9}x^2-3\frac{1}{3}x+25$
 ז. $9m^2-12mn+4n^2$ ח. $x^4-\frac{6}{5}x^2y+\frac{9}{25}y^2$ ט. $x^4y^4-14x^2y^2+49$
 (3) א. x^2-25 ב. x^2-9 ג. $9x^2-1$ ד. $25-49x^2$
 ה. $\frac{1}{4}x^2-36$ ו. $25y^2-\frac{1}{16}x^2$ ז. x^4-y^2 ח. $9a^4b^6-16$
 (4) א. x^2+2 ב. $5x^2-24x+13$ ג. $-4x^2-x$
 ד. $18x^2-6xy$ ה. $-6x^2-39x-16$ ו. $-10x^2+17x+321$

פירוק לגורמים של ביטויים אלגבריים:

סיכום כללי:

פירוק לגורמים הוא פעולה הפוכה לפתיחת סוגריים – נרצה להוציא את הגורמים המשותפים לאיברים מחוץ לסוגריים.

- פירוק לגורמים ע"י הוצאת איבר אחד משותף:

○ הוצאת מספר משותף: $2x - 8 = 2(x - 4)$

○ הוצאת אות משותפת: $x^2 - 12x = x(x - 12)$

○ הוצאת מספר ואות יחד: $3x^2 - 21x = 3x(x - 7)$

- פירוק לגורמים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר:

○ נוסחת הבינום של ניוטון: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

○ נוסחה להפרש ריבועים: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

שאלות:

- (1) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $3x - 12$ ב. $6y - 4$

ג. $20 - 8a$ ד. $4a^3 + 8b$

ה. $75m^2 + 25m + 15$ ו. $40a^2 - 8b^2 + 64c^2$

- (2) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $y^2 + 5y$ ב. $3x - 11x^3$

ג. $6y^2 + 5y^3 + 4y$ ד. $\frac{1}{2}a^7 - \frac{1}{4}a^5 + a^3$

(3) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף :

א. $2x^2 - 8x$	ב. $3t^2 + 12t$
ג. $5n^3 - 20n^2 + 50n$	ד. $8y^2 + 6y^3 - 2y^4$
ה. $4x^2y^2 + 16x^2y - 20xy^2$	ו. $27mn - 3n^2m + 9n^3m$

(4) פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר :

א. $x^2 + 10x + 25$	ב. $x^2 + 12x + 36$
ג. $y^2 - 18y + 81$	ד. $y^2 - 22y + 121$
ה. $4x^2 + 4x + 1$	ו. $16y^2 - 8y + 1$
ז. $9x^2 - 24x + 16$	ח. $25x^2 + 70x + 49$

(5) פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר :

א. $r^2 - 25$	ב. $x^2 - 81$
ג. $25y^2 - 49$	ד. $121x^2 - 1$
ה. $x^2y^2 - 4$	ו. $9y^4 - 169x^4$

(6) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף ונוסחאות הכפל המקוצר :

א. $y - y^3$	ב. $x^3 - 10x^2 + 25x$
ג. $m^4 - 1$	ד. $196x^4 - 140x^3 + 25x^2$

תשובות סופיות:

- (1) א. $3(x-4)$ ב. $2(3y-2)$ ג. $4(5-2a)$
- ד. $4(a^3+2b)$ ה. $5(15m^2+5m+3)$ ו. $8(5a^2-b^2+8c^2)$
- (2) א. $y(y+5)$ ב. $x(3-11x^2)$ ג. $y(6y+5y^2+4)$
- ד. $a^3\left(\frac{1}{2}a^4-\frac{1}{4}a^2+1\right)$
- (3) א. $2x(x-4)$ ב. $3t(t+4)$ ג. $5n(n^2-4n+10)$
- ד. $2y^2(4+3y-y^2)$ ה. $4xy(xy+4x-5y)$ ו. $3mn(9-n-3n^2)$
- (4) א. $(x+5)^2$ ב. $(x+6)^2$ ג. $(y-9)^2$ ד. $(y-11)^2$
- ה. $(2x+1)^2$ ו. $(4y-1)^2$ ז. $(3x-4)^2$ ח. $(5x+7)^2$
- (5) א. $(r+5)(r-5)$ ב. $(x+9)(x-9)$ ג. $(5y+7)(5y-7)$
- ד. $(11x+1)(11x-1)$ ה. $(xy+2)(xy-2)$ ו. $(3y^2+13x^2)(3y^2-13x^2)$
- (6) א. $y(1+y)(1-y)$ ב. $x(x-5)^2$ ג. $(m^2+1)(m+1)(m-1)$
- ד. $x^2(14x-5)^2$

פירוק הטרינום:

סיכום כללי:

טרינום משמעו תלת איבר מהצורה: $ax^2 + bx + c$ כאשר a, b ו- c הם מספרים כלשהם.

שיטת הטרינום מאפשרת לפרק את תלת האיבר ל-4 איברים ע"י פיצול האיבר bx לשני איברים באופן כזה שמאפשר להוציא גורם משותף.

הכלל הוא למצוא שני מספרים, m_1 ו- m_2 , שמקיימים: $m_1 \cdot m_2 = ac$ ו- $m_1 + m_2 = b$.
לאחר מכן ניתן לפרק את הטרינום: $ax^2 + bx + c = ax^2 + m_1x + m_2x + c$.
השלב האחרון הוא הוצאת גורם משותף מכל זוג: $\underline{ax^2 + m_1x} + \underline{m_2x + c}$.

הערה:

במקרה שנוסחת השורשים ידועה, ניתן להיעזר בה כדי למצוא את המספרים m_1 ו- m_2 באופן

הבא: $m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ולאחר מכן ניתן לכתוב את הטרינום

כמכפלה: $ax^2 + bx + c = a(x - m_1)(x - m_2)$. אם קיים פתרון (שורש) אחד $m_1 = m_2 = \frac{-b}{2a}$

אז נכתוב: $ax^2 + bx + c = a(x - m_1)^2$ ואם לא קיימים פתרונות אז לא קיים פירוק כלל.

שאלות:

(1) פרק את הביטויים הבאים לפי פירוק טרינום:

א. $x^2 + 5x + 4$	ב. $x^2 - 8x + 15$	ג. $x^2 - 33x + 62$
ד. $2x^2 + 7x - 15$	ה. $3x^2 - 11x + 6$	ו. $6x^2 + 5x + 1$
ז. $2x^2 + x - 6$	ח. $x^2 - 18x + 81$	ט. $x^2 + 2x + 8$

(2) פרק את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחת השורשים.
הערה: במידה ולא למדת על נוסחת השורשים התעלם משאלה זו.

א. $6x^2 + 5x + 1$	ב. $x^2 + 5x + 4$
ג. $4x^2 + 20x + 25$	ד. $3x^2 - x + 20$

תשובות סופיות:

- (1) א. $(x+1)(x+4)$ ב. $(x-3)(x-5)$ ג. $(x-2)(x-31)$
- ד. $(2x-3)(x+5)$ ה. $(3x-2)(x-3)$ ו. $(3x+1)(2x+1)$
- ז. $(x+2)(2x-3)$ ח. $(x-9)^2$ ט. אין פירוק.
- (2) א. $6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ ב. $(x+1)(x+4)$ ג. $(2x+5)^2$ ד. אין פירוק.

שברים אלגבריים:

סיכום כללי:

הגדרה:

שבר אלגברי מורכב משתי תבניות, אשר אחת מחלקת את השנייה.

$$\text{דוגמא לשברים אלגבריים: } \frac{x+1}{x+2}, \frac{3x}{x^2+1}, \frac{4}{x-x^3}$$

במקרה בו המכנה הוא מספר, לא מדובר בשבר אלגברי מכיוון שניתן לכתוב את

$$\text{הביטוי ללא צורך בחילוק בין ביטויים שונים כגון: } \frac{3x+5}{4} = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$

תחום הגדרה של שבר:

היות ושבר אלגברי הוא תבנית אשר יכולה לקבל ערכים שונים בעת הצבות שונות, חשוב להגביל את המספרים שניתן להציב באופן כזה שלא תתקבל חלוקה באפס.

$$\text{דוגמא: השבר } \frac{1}{x+4} \text{ לא מוגדר כאשר } x = -4 \text{ מכיוון שמתקבל: } \frac{1}{0}$$

במקרים אלו נדרוש **תנאי** על המשתנה אשר יכתב באופן הבא: $x \neq -4$ ומשמעו היא ש- x יכול לקבל על ערך מספרי אפשרי למעט -4, מכיוון שבמקרה זה השבר לא מוגדר.

כלל צמצום שברים אלגבריים:

ניתן לצמצם שברים אלגבריים ע"י הבאת המונה והמכנה למכפלה של ביטויים. במידה וקיימות פעולות החיבור והחיסור בין איברים שונים לא ניתן לבצע צמצום של איברים דומים בין המונה והמכנה. להלן מספר דוגמאות הנוגעות לצמצומים:

$$\bullet \text{ צמצום ע"י הוצאת גורם משותף: } \frac{2x+8}{x+4} = \frac{2(\cancel{x+4})}{\cancel{x+4}} = \frac{2 \cdot 1}{1} = 2$$

$$\bullet \text{ צמצום ע"י נוסחת כפל מקוצר: } \frac{3x-15}{x^2-10x+25} = \frac{3(\cancel{x-5})}{(\cancel{x-5})^2} = \frac{3 \cdot 1}{x-5} = \frac{3}{x-5}$$

$$\bullet \text{ צמצום ע"י פירוק טרינום: } \frac{x^2-2x-3}{x^2-3x-4} = \frac{(\cancel{x+1})(x-3)}{(\cancel{x+1})(x-4)} = \frac{x-3}{x-4}$$

שאלות:

(1) מצא את תחום ההגדרה של השברים האלגבריים הבאים :

א. $\frac{x+4}{x+3}$	ב. $\frac{5}{x-6}$
ג. $\frac{x+7}{2x-8}$	ד. $\frac{x^2+1}{x^2-4x}$
ה. $\frac{3}{x^2+2x+1}$	ו. $\frac{x^2}{x^2-4}$
ז. $\frac{6}{y^4-y^2}$	ח. $\frac{8x-2}{3x^3-15x^2+12x}$

(2) צמצם את השברים הבאים (במידה ולא ניתן צמצם הסבר מדוע) :

א. $\frac{ax}{a}$	ב. $\frac{a-x}{a}$
ג. $\frac{a-ax}{a}$	ד. $\frac{x+1}{y+1}$
ה. $\frac{x}{x+y}$	ו. $\frac{6x}{6y}$
ז. $\frac{x^2y}{xy^2}$	ח. $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$
ט. $\frac{4x^2y}{xy}$	י. $\frac{3x^2}{x^2+3}$

(3) צמצם את השברים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף וכתוב את תחום הגדרתם :

א. $\frac{3x+12}{x+4}$	ב. $\frac{m^2+4m}{4m+16}$
ג. $\frac{2a-12}{a^2-6a}$	ד. $\frac{x^2-5x}{15-3x}$
ה. $\frac{3-18y^2}{6y^2-1}$	ו. $\frac{4x^3-2x^2}{6x-3}$
ז. $\frac{3y}{y^3-3y^2}$	ח. $\frac{3z^3-12z^2+4z}{z^2+5z}$

(4) צמצם את השברים הבאים ע"י פירוק לגורמים וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x^2 + 10x + 25}{2x + 10}$	ב. $\frac{8n - n^2}{n^2 - 16n + 64}$
ג. $\frac{z^3 - 4z^2}{2z^2 - 16z + 32}$	ד. $\frac{4m^2 + 20m + 25}{4m^2 + 10m}$
ה. $\frac{18y^2 - 24y + 8}{2y - 3y^2}$	ו. $\frac{a^3 + 4a^2b + 4ab^2}{3ab + 6b^2}$

(5) צמצם את השברים הבאים ע"י טרינום ריבועי וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x + 2}{x^2 - 3x - 10}$	ב. $\frac{m^2 - 12m + 32}{m - 4}$
ג. $\frac{4y - 10}{2y^2 + y - 15}$	ד. $\frac{3z^2 + 26z + 16}{3z + 2}$
ה. $\frac{x^2 + 5x - 36}{x^3 + 9x^2}$	ו. $\frac{9n^2 - 12n}{4 + 5n - 6n^2}$
ז. $\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 5x + 6}$	ח. $\frac{x^2 - 14x + 49}{x^2 + x - 56}$
ט. $\frac{3a^2b - 10ab^2 + 3b^3}{-3a^3b + 11a^2b^2 - 6ab^3}$	י. $\frac{m^3n - m^2n^2 - m^2 + mn}{2m^2n^3 + mn^2 - 3n}$

תשובות סופיות:

- (1) א. $x \neq -3$ ב. $x \neq 6$ ג. $x \neq 4$ ד. $x \neq 0, x \neq 4$
 ה. $x \neq -1$ ו. $x \neq -2, x \neq 2$ ז. $y \neq 0, y \neq -1, y \neq 1$ ח. $x \neq 0, x \neq 1, x \neq 4$
- (2) א. x ב. לא ניתן לצמצם. ג. $1-x$ ד. לא ניתן לצמצם.
 ה. לא ניתן לצמצם. ו. $\frac{x}{y}$ ז. $\frac{x}{y}$ ח. לא ניתן לצמצם.
 ט. $4x$ י. לא ניתן לצמצם.
- (3) א. $x \neq -4, 3$ ב. $\frac{m}{4}, m \neq -4$ ג. $\frac{2}{a}, a \neq 0, 6$ ד. $-\frac{x}{3}, x \neq 5$
 ה. $-3, y \neq \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$ ו. $\frac{2x^2}{3}, x \neq \frac{1}{2}$ ז. $\frac{3z^2-12z+4}{z+5}, z \neq 0, -5$ ח. $\frac{3}{y(y-3)}, y \neq 0, 3$
- (4) א. $\frac{x+5}{2}, x \neq -5$ ב. $\frac{n}{8-n}, n \neq 8$ ג. $\frac{z^2}{2(z-4)}, z \neq 4$ ד. $\frac{2m+5}{2m}, m \neq 0, -\frac{5}{2}$
 ה. $\frac{2(2-3y)}{y}, y \neq 0, \frac{2}{3}$ ו. $\frac{a(a+2b)}{3b}, b \neq 0, a \neq -2b$ ז. $\frac{2}{y+3}, x \neq -3, \frac{5}{2}$ ח. $\frac{1}{x-5}, x \neq 5, -2$
 ט. $m-8, m \neq 4$ י. $\frac{-3n}{2n+1}, n \neq -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}$ יא. $\frac{x-4}{x^2}, x \neq 0, -9$ יב. $z+8, z \neq -\frac{2}{3}$
 יג. $\frac{x-7}{x+8}, x \neq 7, -8$ יד. $\frac{x+2}{x+3}, x \neq -2, -3$ יו. $\frac{3a-b}{a(2b-3a)}, a \neq 0, b \neq 0, a \neq 3b, 2b \neq 3a$ יז. $\frac{m(m-n)}{n(2mn+3)}, mn \neq 1, -\frac{3}{2}, n \neq 0$

כפל וחילוק של שברים אלגבריים:

סיכום כללי:

כפל שברים יתבצע ע"י הכפלת כל מונה בנפרד והכפלת כל מכנה בנפרד.
חילוק שברים יתבצע ע"י לקיחת ההופכי של שבר המחלק וביצוע פעולת כפל.

- דוגמא לכפל שברים: $\frac{x+1}{x^2} \cdot \frac{x}{3x+3} = \frac{x+1}{x^2} \cdot \frac{x}{3(x+1)} = \frac{\cancel{x}(x+1)}{3x^{\cancel{2}}(x+1)} = \frac{1}{3x}$
- דוגמא לחילוק שברים: $\frac{4x}{y} : \frac{12}{y^2+y} = \frac{4x}{y} \cdot \frac{y^2+y}{12} = \frac{\cancel{4}x}{\cancel{y}} \cdot \frac{\cancel{y}(y+1)}{\cancel{12}_3} = \frac{x(y+1)}{3}$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

- | | |
|---|---|
| א. $\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{8}$ | ב. $\frac{x}{3} \cdot \frac{9}{x^2}$ |
| ג. $7y \cdot \frac{5}{y^2}$ | ד. $6x^2 \cdot \frac{3}{40x}$ |
| ה. $(x^2+3x) \cdot \frac{2}{3x+9}$ | ו. $(a^2-25) \cdot \frac{20}{5a+25}$ |
| ז. $\frac{w^2-9}{w} \cdot \frac{w^2}{2w+6}$ | ח. $\frac{y+4}{y^2+16} \cdot \frac{y^2-16}{2y+8}$ |
| ט. $\frac{z^2+30z+225}{6z+90} \cdot \frac{12}{2z-10}$ | י. $\frac{5n^2}{n^2-121} \cdot \frac{2n^2+44n+242}{n+2} \cdot \frac{n^2+4n+4}{n}$ |

(2) פשט את הביטויים הבאים:

- | | |
|---|--|
| א. $\frac{x}{8} : \frac{x}{6}$ | ב. $\frac{y}{25} : \frac{5}{y}$ |
| ג. $a^2 : \frac{1}{6a}$ | ד. $\frac{5}{6a} : a^2$ |
| ה. $(d^2-3d) : \frac{5d-15}{5d}$ | ו. $\frac{t}{t+4} : \frac{3t}{t+4}$ |
| ז. $\frac{y^2+8y+16}{8y^2} : \frac{y^2-16}{7y^2}$ | ח. $\frac{a^2-64}{a^2-36} : \frac{a+8}{a+6}$ |

תשובות סופיות:

(1) א. $\frac{x^2}{24}$ ב. $\frac{3}{x}$ ג. $\frac{35}{y}$ ד. $\frac{9x}{20}$ ה. $\frac{2x}{3}$

ו. $4(a-5)$ ז. $\frac{w(w-3)}{2}$ ח. $\frac{y^2-16}{2y^2+32}$ ט. $\frac{z+15}{z-5}$ י. $\frac{10n(n+11)(n+2)}{n-11}$

(2) א. $\frac{3}{4}$ ב. $\frac{y^2}{125}$ ג. $6a^3$ ד. $\frac{5}{6a^3}$ ה. d^2 ו. $\frac{1}{3}$

ז. $\frac{7(y+4)}{8(y-4)}$ ח. $\frac{a-8}{a-6}$

חיבור וחיסור של שברים אלגברים:

סיכום כללי:

ביצוע פעולת החיבור והחיסור תתבצע באופן זהה לשברים מספריים. נרצה להרחיב את השברים כך שהמכנה של שניהם יהיה זהה, ולאחר מכן נחבר את המונים. כדי להרחיב את השברים נעזר בפעולת מציאת מכנה משותף. לשם כך נעזר בפירוקים השונים כדי להביא את הביטויים שבכל מכנה לצורתם המופשטת. דוגמא לחיבור שברים בעלי אותו מכנה:

$$\frac{1}{x} + \frac{x+1}{x} = \frac{1+(x+1)}{x} = \frac{x+2}{x}$$

דוגמא לחיבור מספר לשבר אלגברי:

$$2 + \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+2)}{x+2} + \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+2)+3}{x+2} = \frac{2x+7}{x+2}$$

דוגמא לחיבור שברים עם מכנים שונים (ע"י פעולת מכנה משותף):

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{x}{x(x+1)} + \frac{x+1}{x(x+1)} = \frac{x+x+1}{x(x+1)} = \frac{2x+1}{x(x+1)}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י שימוש בפירוק לגורמים (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{1}{x^2-3x} + \frac{3}{x-3} = \frac{1}{x^2-3x} + \frac{3x}{x^2-3x} = \frac{1+3x}{x^2-3x}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{3}{x^2-6x+9} - \frac{2}{x^2-9} = \frac{3}{(x-3)^2} - \frac{2}{(x-3)(x+3)} = \frac{3(x+3)-2(x-3)}{(x-3)^2(x+3)} = \frac{x+15}{(x-3)^2(x+3)}$$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{a}{6} + \frac{a-5}{6}$

ג. $\frac{x-2}{x+1} + \frac{3+4x}{x+1}$

ב. $\frac{5}{x} + \frac{4x+3}{x}$

ד. $\frac{7z}{2z-3} - \frac{4z}{2z-3} - \frac{z+3}{2z-3}$

(2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{ab} - \frac{5}{bc}$

ג. $\frac{c}{ab} - \frac{ad}{bc} + \frac{2b}{cd}$

ב. $\frac{1}{xy} + \frac{5}{yz} + \frac{4}{xz}$

ד. $-\frac{5}{x} + \frac{x+1}{xy^2}$

ה. $\frac{1}{(y+1)^2} + \frac{3}{y+1}$

ו. $\frac{3}{z(z-3)} - \frac{2}{z(z-2)}$

(3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $1 - \frac{2}{x}$

ג. $2 + \frac{2}{x+1}$

ב. $1 + \frac{3}{y^2}$

ד. $3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x}$

ה. $\frac{a+1}{a^2} - \frac{3-a}{4a} - 3$

ו. $\frac{x}{9yz} + \frac{z}{3y^2x} + \frac{3-y}{12xz} - 3\frac{1}{2}$

(4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{x+1} + \frac{1}{x}$

ג. $\frac{a+1}{a+2} + \frac{3}{a}$

ב. $\frac{4}{y+2} - \frac{3}{y}$

ד. $\frac{1}{z+3} + \frac{2}{3z} - \frac{3}{z}$

(5) פשט את הביטויים הבאים:

$$\text{א. } \frac{24}{a^2-9} + \frac{4}{a+3}$$

$$\text{ג. } \frac{y}{(y-2)^2} + \frac{3y}{4-y^2}$$

$$\text{ה. } \frac{x-1}{x^2+3x-40} + \frac{2}{-x^2+8x-15}$$

$$\text{ז. } \frac{x}{x-3} + \frac{9-x}{x^2-8x+15}$$

$$\text{ב. } \frac{3}{x^2-16} + \frac{2}{(x+4)^2}$$

$$\text{ד. } \frac{3z}{z^2+4z+3} - \frac{z+0.5}{z^2+2z+1}$$

$$\text{ו. } \frac{2a+3}{2a^2+15a+7} + \frac{a+3}{a^2+14a+49}$$

$$\text{ח. } \frac{1}{a-b} + \frac{2}{a+2b} - \frac{3b}{a^2+ab-2b^2}$$

(6) פשט את הביטויים הבאים:

$$\text{א. } \frac{4}{x} \cdot \frac{x^2}{8} + \frac{9}{x+1} \cdot \frac{x+1}{18}$$

$$\text{ג. } \frac{7}{y^2} : \frac{6}{y^3} - \frac{y-4}{63} \cdot \frac{3y-4}{y^2-8y+16}$$

$$\text{ה. } \left(\frac{2x+1}{20x^2-28x-3} - \frac{3x+1}{30x^2-17x-2} \right) : \frac{18x+3}{6x^2-13x+6}$$

$$\text{ב. } \left(\frac{2}{x} + 1 \right) \cdot \frac{x^2}{7x+14}$$

$$\text{ד. } \left(3x - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} \right) : \frac{6x^3+2x-4}{x^2}$$

תשובות סופיות:

- (1) א. $\frac{2a-5}{6}$ ב. $\frac{4x+8}{x}$ ג. $\frac{5x+1}{x+1}$ ד. 1
- (2) א. $\frac{c-5a}{abc}$ ב. $\frac{z+5x+4y}{xyz}$ ג. $\frac{c^2d - a^2d^2 + 2ab^2}{abcd}$
- ד. $\frac{-5y^2 + x + 1}{xy^2}$ ה. $\frac{3y+4}{(y+1)^2}$ ו. $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$
- (3) א. $\frac{x-2}{x}$ ב. $\frac{y^2+3}{y^2}$ ג. $\frac{2x+4}{x+1}$
- ד. $\frac{9x-2}{3x}$ ה. $\frac{-11a^2 + a + 4}{4a^2}$ ו. $\frac{4x^2y + 12z^2 + 9y^2 - 3y^3 - 126xy^2z}{36xy^2z}$
- (4) א. $\frac{4x+1}{x(x+1)}$ ב. $\frac{y-6}{y(y+2)}$ ג. $\frac{a^2+4a+6}{a(a+2)}$ ד. $-\frac{4z+21}{3z(z+3)}$
- (5) א. $\frac{4}{a-3}$ ב. $\frac{5x+4}{(x-4)(x+4)^2}$ ג. $\frac{2y(4-y)}{(y-2)^2(y+2)}$
- ד. $\frac{(4z+3)(z-1)}{2(z+1)^2(z+3)}$ ה. $\frac{x^2-6x-13}{(x+8)(x-5)(x-3)}$ ו. $\frac{4(a^2+6a+6)}{(a+7)^2(2a+1)}$
- ז. $\frac{x-3}{x-5}$ ח. $\frac{3}{a+2b}$
- (6) א. $\frac{x+1}{2}$ ב. $\frac{x}{7}$ ג. $\frac{147y^2 - 594y + 8}{126(y-4)}$ ד. $\frac{1}{2}$
- ה. $\frac{1}{3(10x+1)}$

שברים כפולים:

סיכום כללי:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad \text{שבר כפול מורכב באופן הבא:} \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \quad \text{כאשר מתקיים:} \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

נובע מכאן כי ניתן לצמצם ביטויים בין שני המכנים או שני המונים בלבד.

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{4x}{12}$	ב. $\frac{y+1}{2y+2}$	ג. $\frac{5}{30t^2}$
ד. $\frac{t^2-81}{9t^2}$	ה. $\frac{3y^3-y^2}{25}$	ו. $\frac{4x}{x+1}$
ז. $\frac{8c^2}{3c^3-9c^2-12c}$	ח. $\frac{t^2-t-20}{16t+8}$	ט. $\frac{1}{x} - 4 + \frac{x}{x+1}$

תשובות סופיות:

א. $\frac{x^2}{3}$	ב. 2.5	ג. $\frac{1}{6t^3}$	ד. $\frac{t-9}{54t^2}$	ה. $\frac{(3y-1)(3-y)}{25}$
ו. $\frac{x(x+1)}{2}$	ז. $\frac{c}{c-4}$	ח. $\frac{t+4}{-8(t+5)}$	ט. $\frac{5}{x}$	

קורס קדם במתמטיקה לתלמידים מנהל עסקים, כלכלה ומנהל, כלכלה וחשבונאות

פרק 2 - משוואות אלגבריות

תוכן העניינים

47	1. משוואה ממעלה ראשונה
49	2. מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה
52	3. משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון
53	4. משוואה ממעלה שנייה
55	5. משוואות דו-ריבועיות
57	6. משוואות עם פרמטרים
59	7. משוואות עם שורשים
61	8. משוואות עם ערך מוחלט
62	9. מערכת משוואות ממעלה שנייה

משוואה ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה היא מהצורה: $ax = b$ (כלומר, החזקה של הנעלם היא 1).

פתרון של משוואה ממעלה ראשונה הוא: $x = \frac{b}{a}$ כאשר $a \neq 0$.

שלבי הפתרון הם:

1. ביצוע מכנה משותף (במידה וצריך).
2. פתיחת סוגריים אם ישנם.
3. העברת אגפים וכינוס אברים דומים (בידוד הנעלם באגף אחד והמספרים באגף שני).
4. בידוד הנעלם ומציאתו ע"י חילוק במקדם שלו.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות ממעלה ראשונה):

- | | |
|-----------------------------|---------------------------------------|
| א. $6x + 2 = 8$ | ב. $7 - 2x = 7$ |
| ג. $2x + x = 24$ | ד. $2x + 6 = 8 + x$ |
| ה. $-7x + 5 + 2x = 4x - 13$ | ו. $6x - 3 + 5 - 7x = x - 5x - 7$ |
| ז. $2 - 5x + 7 = -3x + 8$ | ח. $x - 2 + 5x = 4 - 3x - 5 + 7x + 7$ |

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פתיחת סוגריים):

- | | |
|------------------------------|-------------------------------------|
| א. $3(x - 1) - 4 = 2$ | ב. $7x - 4(3 - 4x) = -x$ |
| ג. $6(4 - x) - (6 - x) = 3x$ | ד. $5x - (3x - 7)4 = 21$ |
| ה. $x(x - 5) = x^2 - 7x + 8$ | ו. $(7 - x)(1 - x) - (x - 3)^2 = 0$ |

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה מספרי):

$$\begin{array}{ll}
 \text{א. } \frac{x}{3} - \frac{x}{9} = -4 & \text{ב. } \frac{4x}{15} - \frac{3x}{10} = 1 \\
 \text{ג. } \frac{2}{3}x + \frac{4}{5}x = x - \frac{7}{15} & \text{ד. } \frac{5x+1}{6} - \frac{6x-1}{5} = \frac{3x+1}{4} - 1 \\
 \text{ה. } \frac{2}{5}(x-3) - \frac{3}{15}(4-x) = x+2 & \text{ו. } 5\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{7}\right) - x = 1
 \end{array}$$

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם נעלם במכנה):

$$\begin{array}{ll}
 \text{א. } \frac{1}{4} - \frac{2}{x} = 0 & \text{ב. } \frac{1}{2} - \frac{x}{x-1} = 0 \\
 \text{ג. } \frac{3}{x} = \frac{1}{x+2} & \text{ד. } \frac{5}{2x-1} = \frac{4}{3x+2} \\
 \text{ה. } \frac{x+5}{3x^2} - \frac{1}{6x} = \frac{1}{x} & \text{ו. } \frac{1}{4x} + \frac{3}{x} = \frac{13}{2}
 \end{array}$$

(5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה משותף ע"י פירוק לגורמים):

$$\begin{array}{ll}
 \text{א. } \frac{x^2+2}{3x^2+5x} = \frac{3x-1}{9x+15} & \text{ב. } \frac{7}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{2-2x} = 0 \\
 \text{ג. } \frac{3}{(2-x)^2} + \frac{5}{12-3x^2} = 0 & \text{ד. } \frac{4x^2-24x+36}{x-3} = 12
 \end{array}$$

תשובות סופיות:

- (1) א. $x=1$ ב. $x=0$ ג. $x=8$ ד. $x=2$ ה. $x=2$ ו. $x=-3$
- ז. $x=\frac{1}{2}$ ח. $x=4$
- (2) א. $x=3$ ב. $x=\frac{1}{2}$ ג. $x=2\frac{1}{4}$ ד. $x=1$ ה. $x=4$ ו. $x=-1$
- (3) א. $x=-18$ ב. $x=-30$ ג. $x=-1$ ד. $x=1$ ה. $x=-10$ ו. $x=-21$
- (4) א. $x=8$ ב. $x=-1$ ג. $x=-3$ ד. $x=-2$ ה. $x=2$ ו. $x=\frac{1}{2}$
- (5) א. $x=-6$ ב. $x=-7$ ג. $x=-7$ ד. $x=6, x \neq 3$

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

הגדרה:

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (ליניאריות) היא מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

כאשר a_1, b_1, c_1 ו- a_2, b_2, c_2 הם מקדמים מספריים.

$$\cdot \begin{cases} y = 3x - 1 \\ \frac{x+3}{2} = y + 6 \end{cases}, \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} : \text{דוגמאות למערכות של משוואות}$$

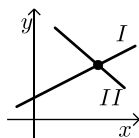
פתרון של מערכת משוואות:

פתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור המקיים את כל המשוואות שבמערכת.

הצגה גרפית של מערכת משוואות:

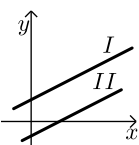
פתרון גרפי של מערכת משוואות הוא נקודת החיתוך של הישרים המייצגים כל משוואה.

יתכנו שלושה מצבים הדדיים בין שני ישרים:



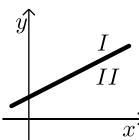
- הישרים נחתכים:

במקרה זה נקודת החיתוך תהיה פתרון המערכת.



- הישרים מקבילים:

במקרה זה לא יהיה פתרון למערכת.



- הישרים מתלכדים:

במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות למערכת המשוואות.

פתרון אלגברי של מערכת משוואות:

- פתרון ע"י שיטת ההצבה :
נבודד את אחד הנעלמים ממשוואה אחת ונציב אותו במשוואה השנייה.
נבחר בשיטה זו במקרים בהם קל לבודד נעלם באחת המשוואות.
- פתרון ע"י השוואת מקדמים :
1. כופלים (או מחלקים) משוואה אחת (או שתיהן) במספר השונה מאפס כך שתתקבלנה משוואות שקולות בעלות מקדמים נגדיים או זהים עבור אחד המשתנים.
2. מחברים (או מחסרים) את המשוואות ומקבלים משוואה חדשה עם נעלם אחד.
3. מוצאים את ערך הנעלם מהמשוואה החדשה ומציבים אותו באחת המשוואות המקוריות למציאת ערך הנעלם השני.

הערה:

נוח להשתמש בשיטת השוואת המקדמים ע"י כך שמעבירים את המערכת הנתונה למערכת שקולה שבה המשתנים באגף אחד והמספר החופשי באגף השני.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות :

א. $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ y = 5 \end{cases}$	ב. $\begin{cases} y = x - 3 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$	ג. $\begin{cases} -3x + 2y = -16 \\ x = 5y + 14 \end{cases}$
ד. $\begin{cases} 5x - 2y = -2 \\ x + 4y = 4 \end{cases}$	ה. $\begin{cases} -5x + 7y = -26 \\ x + 3y = -8 \end{cases}$	ו. $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 7y = 11 \end{cases}$

2) פתור את המשוואות הבאות :

א. $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x - 3y = 3 \end{cases}$	ב. $\begin{cases} 5x + 2y = 14 \\ 5x + 3y = 23 \end{cases}$
ג. $\begin{cases} 5y = 2x \\ 4x = 5y + 8 \end{cases}$	ד. $\begin{cases} 4x = 3y - 29 \\ 5y = 9 - 13x \end{cases}$

(3) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \begin{cases} x+2y=1 \\ 4x+8y=5 \end{cases} \\ \text{ב.} & \begin{cases} 2(x-y)+4y=1+x \\ 2-7y+x=3(x-y) \end{cases} \end{array}$$

(4) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \begin{cases} 3y-x+2=4x+2-3y \\ 2x-3-y=5y-4x+3 \end{cases} \\ \text{ב.} & \begin{cases} \frac{x-3}{8}-\frac{x+y}{16}=\frac{y-1}{4} \\ 3(2x-y)-4x-11=0 \end{cases} \\ \text{ג.} & \begin{cases} \frac{3x-1}{4}-\frac{2}{5}(x-y)=\frac{3}{10}(x+3) \\ \frac{x+1}{4}-\frac{y}{2}=1 \end{cases} \end{array}$$

(5) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=4 \\ \frac{5}{x}-\frac{1}{y}=4 \end{cases} & \text{ב.} & \begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{3}{y}=2 \\ \frac{9}{x}-\frac{4}{y}=-7 \end{cases} & \text{ג.} & \begin{cases} 4x-\frac{7}{y}=-3 \\ 5x+\frac{2}{y}=7 \end{cases} \end{array}$$

(6) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \begin{cases} x(y+2)+y=xy-5 \\ x-y=2 \end{cases} \\ \text{ב.} & \begin{cases} xy=20 \\ y(3x-4)=20 \end{cases} \\ \text{ג.} & \begin{cases} 5x-4xy=22 \\ 6x+xy=-20 \end{cases} \end{array}$$

תשובות סופיות:

- (1) א. (2,5) ב. (-7,-10) ג. (4,-2) ד. (0,1) ה. (1,-3) ו. (-2,3).
- (2) א. $(4, \frac{1}{3})$ ב. $(-\frac{4}{5}, 9)$ ג. (4,1.6) ד. (-2,7).
- (3) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות.
- (4) א. (6,5) ב. (7,1) ג. (7,2).
- (5) א. (1,1) ב. (-3,1) ג. (1,1).
- (6) א. (-1,-3) ב. (2,10) ג. (-2,4).

משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה:

למשוואה ממעלה ראשונה מהצורה: $ax = b$ יתכן פתרון יחיד אם ורק אם $a \neq 0$

מכיוון שניתן לחלק ולכתוב: $x = \frac{b}{a}$.

כאשר $a = 0$ מתקבלת המשוואה $0x = b$ ויתכנו שני מצבים:

1. אם $b = 0$ את המשוואה היא $0x = 0$ ויש אינסוף פתרונות המקיימים אותה.

2. אם $b \neq 0$ את המשוואה היא $0x = b \neq 0$ ואין אף ערך של x המקיים אותה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$(1) \quad x + 4 = 6 + x \quad (2) \quad 3x + 6 - x = 4 + 2x + 2$$

$$(3) \quad 6(x - 2) = 2x + 5 + 4x \quad (4) \quad 5x - 3 + x = 4x + 2x - 3$$

$$(5) \quad \text{נתונה המשוואה: } 3 - 2(x + 2) = 5x + \square$$

א. איזה מספר יש להציב ב- $\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 1?

ב. איזה מספר יש להציב ב- $\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 0?

ג. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- $\square$ על מנת שלמשוואה יהיו אינסוף פתרונות.

ד. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- $\square$ על מנת שלמשוואה לא יהיה פתרון.

תשובות סופיות:

(1) אף פתרון.

(2) אינסוף פתרונות.

(3) אין פתרון.

(4) אינסוף פתרונות.

(5) א. -8 ב. -1 ג. $-7x - 1$

ד. $-7x + k$ (כאשר k הוא מספר כלשהו חוץ מ-1).

משוואה ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

משוואה מהצורה: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) נקראת משוואה ריבועית. פתרונות המשוואה יסומנו ב- x_1 ו- x_2 ויחושבו לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

למשוואה ריבועית יתכנו שלושה סוגים של פתרונות:

- משוואה עם שני פתרונות ממשיים שונים.**
אם מתקבל מספר חיובי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים.
דוגמא: $x^2 + 5x - 4 = 0$
- משוואה עם פתרון ממשי אחד בלבד.**
אם מתקבל אפס בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד בלבד.
דוגמא: $x^2 + 4x + 4 = 0$
- משוואה ללא פתרונות ממשיים כלל.**
אם מתקבל מספר שלילי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה לא יהיו פתרונות ממשיים כלל.
דוגמא: $x^2 + x + 4 = 0$

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

ב. $-x^2 + 10x - 16 = 0$

א. $x^2 + 3x - 10 = 0$

ד. $2x^2 - 6x + 5 = 0$

ג. $25x^2 - 20x + 4 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות:

ב. $-x(x-5) = (1-3x)(1-x) + 4$

א. $4x^2 - 5x + 7 = 4 - x^2 + 13$

ד. $(2x-1)^2 + x(2x+3) = (x-1)(x-7)$

ג. $2(x-5)^2 - (2x-3)^2 = 10x + 21$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת b):

$$\text{א. } x^2 - 36 = 0 \quad \text{ב. } 32x^2 - 18 = 0$$

$$\text{ג. } 4x - x(x+2) = 3(x-1) - x - 6 \quad \text{ד. } (2x-1)^2 + (2x+1)^2 = 10$$

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת c):

$$\text{א. } -7x^2 - 14x = 0 \quad \text{ב. } 5x^2 - x = 0$$

$$\text{ג. } 6x(x-2) - 1 = 4x - 3(x+1) + 2 \quad \text{ד. } (5x-2)^2 = (x-2)(x+3) + 10$$

(5) פתור את המשוואות הבאות:

$$\text{א. } \frac{4x+1}{3} - \frac{x+2}{2} = \frac{2}{x} \quad \text{ב. } \frac{x^2-9}{x+3} + x = x^2 - 18$$

$$\text{ג. } \frac{3}{2x+2} - \frac{2x-5}{2(x-1)^2} - \frac{4}{1-x^2} = 0 \quad \text{ד. } \frac{x}{2x^2-72} + \frac{2}{x^2+12x+36} = \frac{8x-15}{24-4x} + 2$$

תשובות סופיות:

$$(1) \text{ א. } x_1 = 2, x_2 = -5 \quad \text{ב. } x_1 = 2, x_2 = 8 \quad \text{ג. } x = \frac{2}{5} \quad \text{ד. אין פתרון.}$$

$$(2) \text{ א. } x_1 = 2, x_2 = -1 \quad \text{ב. } x_1 = 1, x_2 = 1\frac{1}{4} \quad \text{ג. } x_1 = 1, x_2 = -10 \quad \text{ד. } x_1 = 0.6, x_2 = -2$$

$$(3) \text{ א. } x = \pm 6 \quad \text{ב. } x = \pm \frac{3}{4} \quad \text{ג. } x = \pm 3 \quad \text{ד. } x = \pm 1$$

$$(4) \text{ א. } x_1 = 0, x_2 = -2 \quad \text{ב. } x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{5} \quad \text{ג. } x_1 = 0, x_2 = 2\frac{1}{6} \quad \text{ד. } x_1 = 0, x_2 = \frac{7}{8}$$

$$(5) \text{ א. } x_1 = 2, x_2 = -1.2 \quad \text{ב. } x = 5, x \neq -3 \quad \text{ג. } x_1 = 0, x_2 = -5 \quad \text{ד. } x_1 = -7.6, x_2 = -4\frac{2}{7}$$

משוואות דו-ריבועיות:

סיכום כללי:

משוואה דו-ריבועית היא משוואה מהצורה: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ כאשר הנעלם הוא x .
פתרון המשוואה יבוצע ע"י מעבר לפרמטר: $x^2 = t \rightarrow at^2 + bt + c = 0$ ומציאתו.
לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה ולמצוא את ערכי x .

ניתן להביא משוואות לצורה זו ולהגדיר ביטוי המופיע בחזקות 2 ו-4
כגון: $(x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1) - 2 = 0$ באמצעות פרמטר: $t = x^2 - 1$
ובכך לפתור משוואה: $t^2 + 3t - 2 = 0$ ולהחזיר את ההצבה עבור מציאת x .
דרך הפתרון תקפה לכל משוואה בה הנעלם מופיע בחזקות כפולות כגון 3 ו-6, או 4 ו-8.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- (1) $5x^4 + 3x^2 - 8 = 0$
- (2) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$
- (3) $13x^2(3x^2 - 1) - 2 = 3(x^2 - 1)(x^2 + 1)$
- (4) $x^2(x^2 + 1) = 10(3x^2 - 10)$
- (5) $x^6 + x^3 = 56$
- (6) $x^3 + 4 = \frac{32}{x^3}$
- (7) $x - 9\sqrt{x} + 14 = 0$
- (8) $x^8 - 4x^4 - 50 = 31x^4 - 84$
- (9) $125x^6 - 1 = 124(x^6 + x^3 + 1)$
- (10) $(2x^2 - x)^2 - 4(2x^2 - x) + 3 = 0$
- (11) $(x^2 + 2x)^2 + 7x^2 + 14x = -6$
- (12) $\frac{21}{x^2 - 4x + 10} = 6 + x^2 - 4x$
- (13) $\frac{12}{x^2 + 2x - 8} = 1 + \frac{7.5}{x^2 + 2x - 3}$
- (14) $\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{7}{6} - \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2}$
- (15) $\frac{3}{3x^2 - 15} + \frac{1}{x^2 + 5} = \frac{10}{x^4 - 25}$
- (16) $\frac{x^2 - 1}{4x^2 - 28} + 2 = \frac{9}{x^4 - 8x^2 + 7} + \frac{x^2}{2x^2 - 2}$
- (17) $\left(2x + \frac{3}{x}\right)^2 + 35 = 12\left(2x + \frac{3}{x}\right)$
- (18) $\frac{3x^4}{(x+2)^2} + \frac{3x^2}{x+2} = 6$
- (19) $(2x - x^2 + 3)(2x - x^2 - 2) = 0$
- (20) $(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 5x - 8) = -24$

תשובות סופיות:

$$x = \pm 1 \quad (1)$$

$$x = \pm 1, \pm \sqrt{2} \quad (2)$$

$$x = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3} \quad (3)$$

$$x = \pm 2, \pm 5 \quad (4)$$

$$x_1 = \sqrt[3]{7}, x_2 = -2 \quad (5)$$

$$x = -2, \sqrt[3]{4} \quad (6)$$

$$x = 49 \quad (7)$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{34}, x_{3,4} = \pm 1 \quad (8)$$

$$x = 5, -1 \quad (9)$$

$$x_1 = 1.5, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = -\frac{1}{2} \quad (10)$$

$$x = -1 \quad (11)$$

$$x_{1,2} = 1, 3 \quad (12)$$

$$x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 3.06, x_4 = -5.06 \quad (13)$$

$$x_1 = 0, x_2 = -2 \quad (14)$$

$$(15) \text{ אין פתרונות.}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{3}{7}} \quad (16)$$

$$x = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 3 \quad (17)$$

$$x = -1, 2 \quad (18)$$

$$x = 3, -1 \quad (19)$$

$$x = \pm 1, 4, 6 \quad (20)$$

משוואות עם פרמטרים:

סיכום כללי:

משוואה עם פרמטר הינה משוואה שמכילה שני סוגים של גדלים – משתנים ופרמטרים. את המשתנים מקובל לסמן באותיות x , y , z ואת הפרמטרים מסמנים בשאר האותיות. פתרון המשוואה יתקבל ע"י בידוד המשתנה כך שיבוטא באמצעות הפרמטר/ים שבמשוואה.

למשל פתרון המשוואה: $mx = 4$ (כאשר x הוא הנעלם ו- m הוא פרמטר) הוא: $x = \frac{4}{m}$

אשר מבוטא באמצעות הפרמטר m .

בכתיבת פתרון של משוואה עם פרמטרים יש לציין את תחום ההגדרה של הפרמטר עבורו הפתרון הוא בעל משמעות.

בדוגמא הנ"ל תחום ההגדרה הוא: $m \neq 0$.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות:

$$\text{א. } 3x - b = (b+1)x - 6 \quad \text{ב. } \frac{1}{3}(a - 3x) = \frac{1}{a}(ax - 3)$$

$$\text{ג. } (x - 2a)(x - 2b) = x^2 - 2(a^2 + b^2) \quad \text{ד. } \frac{m+1}{x-1} = \frac{m-1}{x+1}$$

$$\text{ה. } \frac{x}{a^2 - a} - \frac{1}{2a} = \frac{ax + x}{2a^3 - 4a^2 + 2a} - \frac{2}{a^3 - 2a^2 + a}$$

2) פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\text{א. } \begin{cases} x + my = 1 \\ x + y = m \end{cases} \quad \text{ב. } \begin{cases} ax + y = 2 \\ x + ay = 4 \end{cases}$$

$$\text{ג. } \begin{cases} \frac{x}{m} + y = m \\ x - m^2 y = 1 \end{cases} \quad \text{ד. } \begin{cases} (m-1)x - (2m+3)y = 5 \\ (m+2)x - (2m-1)y = 10m \end{cases}$$

$$\text{ה. } \begin{cases} (2a+b)x - (2a-b)y = 8ab \\ (2a-b)x + (2a+b)y = 8a^2 - 2b^2 \end{cases}$$

(3) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות :

$$\text{א. } x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \quad \text{ב. } x^2 - 2x + 4a = a^2 + 3$$

$$\text{ג. } x^2 + m(x+10) = 2m^2 - 5x \quad \text{ד. } \frac{1}{a-x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+x} = 0$$

$$\text{ה. } (m^2 + 1)x^2 - m^2x - 1 = 0 \quad \text{ו. } \frac{a}{x} + \frac{1}{b} = \frac{x}{a} + b$$

$$\text{ז. } x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$$

תשובות סופיות:

$$(1) \text{ א. } x = \frac{b-6}{2-b}, b \neq 2 \quad \text{ב. } x = \frac{a^2+9}{6a}, a \neq 0 \quad \text{ג. } x = a+b \quad \text{ד. } x = -m \quad \text{ה. } x = a+1$$

$$(2) \text{ א. } m \neq 1, (m+1, -1) \quad \text{ב. } a \neq \pm 1, \left(\frac{2a-4}{a^2-1}, \frac{4a-2}{a^2-1} \right)$$

$$\text{ג. } m \neq 0-1, \left(m^2 - m + 1, \frac{m-1}{m} \right) \quad \text{ד. } m \neq 1, -2, (2m+1, m-2)$$

$$\text{ה. } b \neq \pm 2a, (2a+b, 2a-b)$$

$$(3) \text{ א. } x = m+1, m-1 \quad \text{ב. } x = a-1, 3-a \quad \text{ג. } x = m-5, -2m$$

$$\text{ד. } a \neq 0, x \neq \pm a, x = \pm a\sqrt{3} \quad \text{ה. } x = 1, -\frac{1}{m^2+1}$$

$$\text{ו. } a, b \neq 0, x = \frac{a}{b}, -ab \quad \text{ז. } a \neq \pm b, x = \frac{a+b}{a-b}, \frac{a-b}{a+b}$$

משוואות עם שורשים:

סיכום כללי:

פתרון משוואה מהצורה: $\sqrt{x} = a$ יתקבל ע"י העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה באופן הבא: $x = a^2 \rightarrow (\sqrt{x})^2 = (a)^2$.

הערות:

- (1) יש לזכור בעת העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה יש לבדוק את כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבתם במשוואה המקורית.
- (2) למשוואה מהצורה $\sqrt{x} = a$ שבה $a < 0$ אין פתרון.
- (3) יש לסדר תחילה משוואות שבהן הביטוי עם שורש אינו מבודד.
- (4) במשוואות שבהן יותר מביטוי אחד עם שורש יש לבודד תחילה את אחד הביטויים, להעלות בריבוע ולאחר מכן לחזור על התהליך ולבצע העלאה בריבוע פעם נוספת.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- | | |
|--|---|
| (2) $\sqrt{x+2} = x$ | (1) $\sqrt{2x+5} = 7$ |
| (4) $\sqrt{2x+7} + 4 = x$ | (3) $\sqrt{3x+1} + x = 13$ |
| (6) $\sqrt{10x+6} + 9 = x$ | (5) $\sqrt{x-1} + 3 = x$ |
| (8) $\sqrt{24-x} + 3 = 2x$ | (7) $\sqrt{x+6} - 2 = 2x$ |
| (10) $2x = 16 - 3\sqrt{x-1}$ | (9) $\sqrt{x+16} + 4 = 2x$ |
| (12) $\sqrt{x^2 - 5x + 12} = 2\sqrt{6-x}$ | (11) $\sqrt{3x+5} = \sqrt{x+17}$ |
| (14) $\sqrt{2x-1} + 3 = \sqrt{7x+1}$ | (13) $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2x-5} = \sqrt{11-x^2}$ |
| (16) $\sqrt{2x-3} + \sqrt{3-x} = 2$ | (15) $\sqrt{9x-8} - 3\sqrt{x+4} = -2$ |
| (18) $\sqrt{2x-2} + \sqrt{5x-4} = \sqrt{3x-2}$ | (17) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4x+1}$ |
| | (19) $3\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} = 2\sqrt{x+2}$ |

תשובות סופיות:

- | | |
|---------------------------|---------------|
| $x = 2$ (2 | $x = 22$ (1 |
| $x = 9$ (4 | $x = 8$ (3 |
| $x = 25$ (6 | $x = 5$ (5 |
| $x = 3.75$ (8 | $x = 0.25$ (7 |
| $x = 5$ (10 | $x = 4.25$ (9 |
| $x = 4, -3$ (12 | $x = 6$ (11 |
| $x = 5$ (14 | $x = 3$ (13 |
| $x = 2, 2\frac{8}{9}$ (16 | $x = 12$ (15 |
| $x = 1$ (18 | $x = 6$ (17 |
| | $x = 2$ (19 |

משוואות עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

הגדרה:

ערך מוחלט הינו המרחק של מספר מ-0 ומוגדר באופן הבא: $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

משוואה עם ערך מוחלט:

משוואה עם ערך מוחלט היא מהצורה: $|x| = a$.

כדי לפתור משוואה עם ערכים מוחלטים יש למצוא את נקודות האפס של כל ערך מוחלט (קרי: הנקודות בהן הביטוי שבתוך הערך המוחלט מתאפס) ולפצל את המשוואה הנתונה לתחומים עבור כל תחום.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- | | |
|---------------------------------------|-------------------------------------|
| $ 3x - 24 = x$ (2) | $ 3x + 14 = 7$ (1) |
| $2x - 8 - x = 10$ (4) | $ 12 - x = 3x$ (3) |
| $ 14 - 3x = 2 x + 5 $ (6) | $ 4x - 5 = 2x + 13 $ (5) |
| $ x + 2 + 6 = 2x - 4 $ (8) | $ x + 7 = 2x $ (7) |
| $ 10 - 3x - x + 4 = 2x - 6 $ (10) | $ x + 2 + 2x - 6 = 4x + 8 $ (9) |

תשובות סופיות:

- | | | | |
|-----------------------------|-----------------|---------------------------|----------------------------|
| $x = 6$ (4) | $x = 3$ (3) | $x = 6, 12$ (2) | $x = -\frac{7}{3}, -7$ (1) |
| $x = 12, -1\frac{1}{3}$ (8) | $x = \pm 7$ (7) | $x = 24, \frac{4}{5}$ (6) | $x = 9, -1\frac{1}{3}$ (5) |
| | | $x = 0$ (10) | $x = 0, -12$ (9) |

מערכת משוואות ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

מערכת משוואות ריבועיות מיוחסת למערכת של שתי משוואות (לפחות) שאחת מהן מכילה את אחד מהנעלמים בריבוע. למערכת משוואות ריבועיות יכולים להתקבל עד 4 פתרונות שונים. יש לפתור את המערכת לפי הטכניקות הרגילות של בידוד והצבה או השוואת מקדמים.

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 36 \\ x^2 + 3y = 10 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 17 \\ xy = -10 \end{cases} \quad (4) \qquad \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 16 \\ 5x^2 - 3y^2 = 17 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 8y^2 = 8 \\ 3xy - 2y^2 = 4 \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} x^2 - xy - 20y^2 = 0 \\ x + 6y = 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} 16x^2 - y^2 = 391 \\ 4x - y = 23 \end{cases} \quad (8) \qquad \begin{cases} x^2 - y^2 = 33 \\ x + y = 11 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{4}{y} - \frac{1}{x} = -19 \end{cases} \quad (10) \qquad \begin{cases} 4xy + x = -15 \\ \frac{3}{y} - 2x = 16 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} xy = 24 \\ (y-x)^2 - 7(y-x) + 10 = 0 \end{cases} \quad (12) \qquad \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 21 \\ \frac{8}{x} - \frac{1}{y} = 13 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{10}{3} \\ x^2 + y^2 = 9xy + 25 \end{cases} \quad (14) \qquad \begin{cases} x^2y - xy^2 = 84 \\ x^2 - 2xy + y^2 + 5x - 5y = 24 \end{cases} \quad (13)$$

תשובות סופיות:

- (2, 4) , (4, 2) **1**
- (±4, -2) **2**
- (±2, ±1) **3**
- (5, -2) , (-5, 2) **4**
- $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{11}, \frac{1}{11}\right)$ **5**
- $\left(3, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-3, -\frac{1}{2}\right)$, (2, 1) , (-2, -1) **6**
- (5, -3) **8**
- (7, 4) **7**
- $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right)$ **10**
- $\left(-5, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-24, -\frac{3}{32}\right)$ **9**
- (4, 6) , (-6, -4) , (3, 8) , (-8, -3) **12**
- $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ **11**
- (-1.65, 6.35) , (-6.35, 1.65) , (7, 4) , (-4, -7) **13**
- (5, 45) , (-5, -45) , (45, 5) , (-45, -5) **14**

קורס קדם במתמטיקה לתלמידים מנהל עסקים, כלכלה ומנהל, כלכלה וחשבונאות

פרק 3 - אי שוויונים אלגבריים

תוכן העניינים

64	1. אי-שוויונים ממעלה ראשונה.....
65	2. אי-שוויונים ממעלה שנייה.....
66	3. אי-שוויונים ממעלה שלישית.....
67	4. אי-שוויונים עם מנה.....
68	5. אי-שוויונים כפולים מערכות או, וגם.....
69	6. שאלות מסכמות – אי-שוויונים.....
71	7. תחום הגדרה.....

אי-שוויונים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

מה מותר?

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

מה אסור?

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$45x - 26 > 109 \quad (1) \qquad 6x > 2(3x - 1) \quad (2)$$

$$2(x - 5) \geq \frac{1}{2}(4x + 6) \quad (3) \qquad (x - 2)^2 + 4 < (x + 2)^2 + 20 \quad (4)$$

$$\frac{8x - 4}{2} < \frac{9(x + 1)}{3} \quad (5) \qquad 4(6x - 8) < 8(3x - 4) \quad (6)$$

$$\frac{x - 6}{3} - \frac{x - 4}{4} \geq 12 - x \quad (7) \qquad \frac{7 - x}{10} - \frac{3x - 1}{5} + \frac{x + 4}{3} < 7 \quad (8)$$

תשובות סופיות:

- | | | |
|-----------------------|--------------------------|--------------------------|
| $x > 3 \quad (1)$ | $x \text{ כל} \quad (2)$ | $x \text{ אף} \quad (3)$ |
| $x > -2 \quad (4)$ | $x < 5 \quad (5)$ | $x \text{ אף} \quad (6)$ |
| $x \geq 12 \quad (7)$ | $x > -13 \quad (8)$ | |

אי-שוויונים ממעלה שנייה:

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$x^2 - 12x > -32 \quad (10) \qquad x^2 < 144 \quad (9)$$

$$(x+2)(x+4) < 35 \quad (12) \qquad (x+2)(x+5) < 0 \quad (11)$$

$$(x-3)(x-7) \geq 8x-56 \quad (14) \qquad -x^2 + 13x + 30 < 0 \quad (13)$$

$$(5x+6)^2 \leq 4(x-3)^2 \quad (16) \qquad (x-5)^2 + x(x+2) < 89 \quad (15)$$

$$x^2 - 10x + 25 > 0 \quad (18) \qquad -3x^2 + 12x > 0 \quad (17)$$

$$2x^2 + 2x + 24 \geq 0 \quad (20) \qquad (x-3)^2 > (x-1)(x+6) - x^2 - 3x \quad (19)$$

תשובות סופיות:

$$-5 < x < -2 \quad (11) \qquad x < 4, x > 8 \quad (10) \qquad -12 < x < 12 \quad (9)$$

$$x \leq 7, x \geq 11 \quad (14) \qquad x < -2, x > 15 \quad (13) \qquad -9 < x < 3 \quad (12)$$

$$0 < x < 4 \quad (17) \qquad -4 \leq x \leq 0 \quad (16) \qquad -4 < x < 8 \quad (15)$$

$$x \text{ כל} \quad (20) \qquad x < 3, x > 5 \quad (19) \qquad x > 5, x < 5 \quad (18)$$

אי-שוויונים ממעלה שלישית:

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- | | |
|---------------------------------------|-------------------------------------|
| $x(x^2 + x + 1) > 0$ (22) | $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$ (21) |
| $x^3 - 25x \geq 0$ (24) | $(-2x^2 - 3x + 2)(x+1) \leq 0$ (23) |
| $(x^2 + 8x + 20)(3x - 5) \leq 0$ (26) | $(x^2 + 3x + 5)(x - 2) > 0$ (25) |
| $x^3 - 6x^2 + 9x \leq 0$ (28) | $(x^2 - x - 6)(x - 1) < 0$ (27) |
| $(x-2)(x-4)(x-1) < 0$ (30) | $(x^2 + 6)(x+3) > 0$ (29) |

תשובות סופיות:

- | | | |
|--|------------------------|-----------------------------------|
| $-2 \leq x \leq -1, x \geq \frac{1}{2}$ (23) | $x > 0$ (22) | $1 < x < 2, x > 3$ (21) |
| $x \leq 1\frac{2}{3}$ (26) | $x > 2$ (25) | $-5 \leq x \leq 0, x \geq 5$ (24) |
| $x > -3$ (29) | $x \leq 0, x = 3$ (28) | $x < -2, 1 < x < 3$ (27) |
| | | $x < 1, 2 < x < 4$ (30) |

אי-שוויונים עם מנה:

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$\frac{x-1}{3x+2} \geq -3$ (32)	$\frac{x-1}{x^2-9} > 0$ (31)
$\frac{x-3}{2x^2-10x+12} > 0$ (34)	$\frac{1}{x^2-16} > 0$ (33)
$\frac{1}{-3(x-1)} < 0$ (36)	$\frac{2x-1}{x-5} \leq 0$ (35)
$\frac{1}{x^2-5x+6} < 0$ (38)	$\frac{x-1}{x+2} \leq 1$ (37)
$\frac{1}{x^2-8x+12} \geq 0$ (40)	$\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7} \geq 0$ (39)

תשובות סופיות:

$x < -4, x > 4$ (33)	$x < -\frac{2}{3}, x \geq -\frac{1}{2}$ (32)	$-3 < x < 1, x > 3$ (31)
$x > 1$ (36)	$\frac{1}{2} \leq x < 5$ (35)	$2 < x < 3, x > 3$ (34)
$1 \leq x \leq 6$ (39)	$2 < x < 3$ (38)	$x > -2$ (37)
		$x < 2, x > 6$ (40)

אי-שוויונים כפולים מערכות או, וגם:

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$0 < \frac{1}{x+4} < 2 \quad (42)$$

$$3 < x+1 < 5 \quad (41)$$

$$0 < \frac{8-3x}{5-2x} < 4 \quad (44)$$

$$-1 < \frac{x-1}{x+1} < 1 \quad (43)$$

$$6 < \frac{2x+10}{3} \leq \frac{7x-20}{5} \quad (46)$$

$$6x-38 \leq x-3 \leq 5x+7 \quad (45)$$

$$\frac{4x+5}{15} > \frac{3x-8}{5} + \frac{9-x}{3} > 11 \quad (48)$$

$$-1 \leq \frac{2x-6}{4} < \frac{x+2}{3} \quad (47)$$

תשובות סופיות:

$$x > 0 \quad (43) \qquad x > -3\frac{1}{2} \quad (42)$$

$$2 < x < 4 \quad (41)$$

$$x \geq 10 \quad (46) \qquad -2.5 \leq x \leq 7 \quad (45)$$

$$x < 2\frac{2}{5}, x > 2\frac{2}{3} \quad (44)$$

$$\emptyset \quad (48)$$

$$1 \leq x < 13 \quad (47)$$

שאלות מסכמות – אי-שוויונים:

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$(1) \quad x \leq -\frac{3}{4} \cap \{-2 < x \leq 5 \cup 0 < x < 8\}$$

$$(3) \quad \frac{(x-3)(x+4)}{2-x} \leq 0 \quad (2) \quad x(x+5) - 3x + 12 \leq 2x - 1 - x(4-x)$$

$$(5) \quad \frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)} \geq 0 \quad (4) \quad \frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)} < 0$$

$$(7) \quad \frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2} > 0 \quad (6) \quad x(x+3)(2x-5) < 0$$

$$(9) \quad \frac{x-3}{x^2+2} > 0 \quad (8) \quad \frac{5-2x}{(x-8)^2} \leq 0$$

$$(11) \quad \frac{x^2-6x+9}{x^3-x} > 0 \quad (10) \quad \frac{x^2-4x}{x^2+2x-3} > 0$$

$$(13) \quad \frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2} \quad (12) \quad \frac{x-7}{x^2+x+3} > 0$$

$$(15) \quad 6 < 5x - x^2 \cap x^2 > 3x + 10 \quad (14) \quad \frac{2x^2}{x^2-6x+8} \geq \frac{x}{x-4} - \frac{x}{x-2}$$

$$(17) \quad 1 < \frac{x-1}{x-4} \leq 2 \quad (16) \quad \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x} > 0 \cup \frac{1}{x-3} < \frac{1}{1-x}$$

$$(18) \quad \text{לאילו ערכי } x \text{ נמצאת הפונקציה } f(x) = \frac{x}{x-3} \text{ מעל הפונקציה } g(x) = \frac{x+1}{x+3}?$$

תשובות סופיות:

- | | |
|---|--------------------------------------|
| $x \leq -4$ (2) | $-2 < x \leq -\frac{3}{4}$ (1) |
| $x < -7, -\frac{1}{3} < x < 2, x > 5$ (4) | $-4 \leq x < 2, x \geq 3$ (3) |
| $x < -3, 0 < x < 2.5$ (6) | $-1 < x \leq 1.5, 4 < x \leq 12$ (5) |
| $2.5 \leq x < 8, x > 8$ (8) | $x < -1, 2 < x < 6, x > 6$ (7) |
| $x < -3, 0 < x < 1, x > 4$ (10) | $x > 3$ (9) |
| $x > 7$ (12) | $-1 < x < 0, 1 < x < 3, x > 3$ (11) |
| $x \leq 0, 1 \leq x < 2, x > 4$ (14) | $x < -2, 2 < x < 4$ (13) |
| $x \neq 1$ (16) | x אף x (15) |
| $-3 < x < -\frac{3}{5}, x > 3$ (18) | $x \geq 7$ (17) |

תחום הגדרה:

שאלות:

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \sqrt{3x-4} \quad \text{ב. } f(x) = \sqrt{x^2-5x-6}$$

$$\text{ג. } f(x) = \sqrt{12x-x^2-x^3} \quad \text{ד. } f(x) = \sqrt{\frac{x+5}{x^2-4}}$$

$$\text{ה. } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}-x} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{\sqrt{3x^2-2x-1}}{2x-3}$$

(2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \sqrt{\sqrt{x+2}-3} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$$

$$\text{ג. } f(x) = \sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}} \quad \text{ד. } f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$$

(3) תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x) = \sqrt{ax-x^2-4}$ הוא $1 \leq x \leq 4$. מצא את ערכו של הפרמטר a .

(4) תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x) = \sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$ הוא $x \leq -2, x > 2$. מצא את ערכו של הפרמטר a .

(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+6}-a}$, (a פרמטר חיובי).

א. הבע באמצעות a את תחום הגדרתה.

ב. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = \sqrt{\frac{2x}{x+5}}$.

ידוע כי תחום ההגדרה של שתי הפונקציות מכסה את כל ציר המספרים. מצא את תחום הערכים האפשרי של הפרמטר a .

תשובות סופיות:

- (1) א. $x \geq 1\frac{1}{3}$ ב. $x \leq -1, x \geq 6$ ג. $x \leq -4, 0 \leq x \leq 3$
- ד. $-5 \leq x < -2, x > 2$ ה. $-2 \leq x < 2, x > 2$ ו. $x \leq -\frac{1}{3}, 1 \leq x < \frac{3}{2}, x > \frac{3}{2}$
- (2) א. $x \geq 7$ ב. $-6 \leq x \neq -2$ ג. $x \leq -1\frac{1}{2}, x \geq 1$
- ד. $x \leq -3, -2 \leq x \neq 1$
- (3) $a = 5$
- (4) $a = 2$
- (5) א. $x \geq a^2 - 6$ ב. $0 < a \leq 1$

קורס קדם במתמטיקה לתלמידים מנהל עסקים, כלכלה ומנהל, כלכלה וחשבונאות

פרק 4 - מבוא לפונקציות

תוכן העניינים

1. מהי פונקציה (ללא ספר)
2. מערכת הצירים (ללא ספר)
3. אורכי קטעים ושטחים יסודיים (ללא ספר)
4. השתנות של פונקציה (ללא ספר)
5. קצב השתנות של פונקציה (ללא ספר)

קורס קדם במתמטיקה לתלמידים מנהל עסקים, כלכלה ומנהל, כלכלה וחשבונאות

פרק 5 - הפונקציה הקווית (ליניארית)

תוכן העניינים

1. ייצוג גרפי של פונקצית הקו הישר (ללא ספר)
2. שיפוע ישר (ללא ספר)
3. הקו הישר הכללי (ללא ספר)
4. שיפוע דרך שתי נקודות (ללא ספר)
5. משוואת ישר עם שיפוע ונקודה (ללא ספר)
6. משוואת ישר המקביל לישר נתון (ללא ספר)
7. משוואת ישר דרך שתי נקודות (ללא ספר)
8. ישרים המקבילים לצירים (ללא ספר)
9. חיתוך של ישר עם הצירים (ללא ספר)
10. חיוביות ושליליות של קו ישר (ללא ספר)
11. חישובי שטחים עם הפונקציה הקווית (ללא ספר)

קורס קדם במתמטיקה לתלמידים מנהל עסקים, כלכלה ומנהל, כלכלה וחשבונאות

פרק 6 - הפונקציה הריבועית

תוכן העניינים

1. הפונקציה הריבועית היסודית $y=x^2$ (ללא ספר)
2. משפחת הפרבולות מהצורה $y=x^2+c$ (ללא ספר)
3. משפחת הפרבולות מהצורה $y=(x-p)^2$ (ללא ספר)
4. משפחת הפרבולות מהצורה $y=(x-p)^2+k$ (ללא ספר)
5. משפחת הפרבולות עם מקדם a כללי (ללא ספר)
6. משפחת הפרבולות מהצורה $y=a(x-p)^2+k$ (ללא ספר)
7. הצגה סטנדרטית של הפונקציה הריבועית (ללא ספר)
8. סרטוט של גרף הפונקציה הריבועית הכללית (ללא ספר)
9. מציאת נקודות האפס של פונקציה ריבועית עם a כללי (ללא ספר)
10. ייצוגים שונים של פונקציה ריבועית (ללא ספר)
11. חיתוך בין ישר ופרבולה (ללא ספר)
12. חיתוך בין שתי פרבולות (ללא ספר)
13. שאלות מסכמות (ללא ספר)

קורס קדם במתמטיקה לתלמידים מנהל עסקים, כלכלה ומנהל, כלכלה וחשבונאות

פרק 7 - סדרות

תוכן העניינים

1. סדרה חשבונית (ללא ספר)
2. סדרה הנדסית (ללא ספר)
3. סדרות מעורבות (ללא ספר)
4. סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת (ללא ספר)
5. סדרות כלליות וסדרות נסיגה (ללא ספר)

קורס קדם במתמטיקה לתלמידים מנהל עסקים, כלכלה ומנהל, כלכלה וחשבונאות

פרק 8 - חוקי החזקות והשורשים

תוכן העניינים

73	1. חוקי החזקות.....
78	2. חוקי השורשים.....
82	3. כתיבה מדעית של מספרים.....

חוקי החזקות:

סיכום כללי:

סיכום חוקי החזקות:

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad a^0 = 1 & 2. \quad a^1 = a & 3. \quad a^n \cdot a^m = a^{m+n} \\
 4. \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} & 5. \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m} & 6. \quad a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m \\
 7. \quad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m & 8. \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m} & 9. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m
 \end{array}$$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^n a^m = a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} \quad a^2 a^6 & \text{ב.} \quad t^3 t^5 t^7 & \text{ג.} \quad b^2 b^5 b^{12} b^3 \\
 \text{ד.} \quad \frac{k^8}{k^3} & \text{ה.} \quad \frac{n^{14}}{n^9} & \text{ו.} \quad \frac{c^6}{c^2} \\
 \text{ז.} \quad \frac{a^3 a^{19}}{a^{15}} & \text{ח.} \quad \frac{x^{30}}{x^9 x^{18}} & \text{ט.} \quad \frac{y^3 y^{15}}{y^4 y^{14}} \\
 \text{י.} \quad 3^2 3^3 3^4 & \text{יא.} \quad \frac{2^{16} 2^2}{2^{10}} & \text{יב.} \quad \frac{5^{20} 5^3 5^{16}}{5^4 5^{22} 5^8}
 \end{array}$$

(2) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^n a^m = a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} \quad \frac{3^4 2^7}{2^6 3^2} & \text{ב.} \quad \frac{a^{10} b^{13} a^3}{b^4 b^6 b^2 a^{12}} & \text{ג.} \quad \frac{x^8 y^5 y^9 x^2}{y^4 x^4}
 \end{array}$$

(3) לפניך הביטוי הבא: $\frac{3^6 2^{17} 3^3 2^4}{3^4 2^3 2^2}$.

מצא n כך שיתקיים שוויון בין הביטוי $243 \cdot 2^n$ לבין הביטוי הנתון.

(4) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים :

א. $\frac{2^3 \cdot 2^7}{2^4 \cdot 2^5}$	ב. $\frac{9^3 \cdot 27^2}{3^9 \cdot 81}$
ג. $\frac{10^9 \cdot 25^5 \cdot 8^{-1}}{40^3 \cdot 125^5}$	ד. $2^3 + 2^5$

(5) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוק : $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

א. $(a^2)^4$	ב. $(c^3)^{10}$	ג. $(x^3 x^{10})^2$
ד. $\frac{(b^2)^3}{b^2 b^3}$	ה. $\frac{n^7 n^8}{(n^3)^4}$	ו. $\frac{d^{20} (d^4)^2}{d^{12} (d^3)^2}$
ז. $\frac{2^5 (2^4)^2 2^3}{(2^3 2^2)^3}$	ח. $\frac{3^6 (3^3 3^2)^6}{3^{28} (3^2)^3}$	ט. $\frac{(8^3)^8 8^{11}}{(8^2 8)^3 8^8}$
י. $\frac{(2^4)^5 (3^6)^7 2^{20}}{3^{35} 2^{40}}$	יא. $\frac{(3^2)^6 5^{31} 3^7}{(5^2)^{10} 5^{11} 3^{18}}$	יב. $\frac{(3^2)^7 5^{10} (5^3)^2}{3^9 5^{16}}$

(6) לפניך הביטויים הבאים : $\left((3^2)^3\right)^4$ ו- $\left((3^6)^n\right)^2$. מצא n כך שיתקיים שוויון בין שני הביטויים.

(7) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים :

א. $\frac{2^3 3^5}{2^2 3^4}$	ב. $\frac{5^{20} 3^{14} 3^8}{3^{20} 5^{12} 5^8}$	ג. $\frac{7^{12} 2^2 2^6}{2^5 7^{10} 7}$
------------------------------	--	--

(8) פשט את הביטויים הבאים :

א. $3^2 9 \cdot 81^2$	ב. $64^2 2^3 8^2$	ג. $125 \cdot 25 \cdot 5^5$
ד. $\frac{2^4 \cdot 16^5}{8 \cdot 512}$	ה. $\frac{(4^2)^3 16}{64 \cdot 2^3}$	ו. $\frac{\left((3^4)^4\right)^5}{81^3 27^4 3^5}$

(9) פשט את הביטויים הבאים :

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \frac{(2a^2b)^3 \cdot (ab^{-3})^2}{4ab^{-2} \cdot \left(\frac{a^2}{b}\right)^4} \\ \text{ב.} & \frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}} \\ \text{ג.} & \frac{4^{b+3}}{4^{b+1} + 4^{b+2}} \\ \text{ד.} & \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^{n+3} + x^{n+5}}{x^{n+2}} \end{array}$$

(10) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים : $(ab)^n = a^n b^n$ ו- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & (a^2b)^3 & \text{ב.} & (m^4n^3)^5 & \text{ג.} & (x^{12}y^3)^3 \\ \text{ד.} & \left(\frac{a^3}{b^2}\right)^4 & \text{ה.} & \left(\frac{i^4}{k^3}\right)^7 & \text{ו.} & \left(\frac{a^{14}b^4}{a^6ab^3}\right)^3 \\ \text{ז.} & \left(\frac{x^3y^5y^2x^6}{y^4x^7}\right)^6 & \text{ח.} & \left(\frac{t^7r^{20}t^3}{r^2r^{12}t^8}\right)^2 & \text{ט.} & \left(\frac{(b^{12}c)^2c^{14}}{c(c^3b^5)^4b^3}\right)^2 \end{array}$$

(11) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים :

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \left(\frac{3^9 2^6 2^2}{3^6 2^5 3^2}\right)^2 & \text{ב.} & \left(\frac{(5^4)^2 3^6}{3^5 5^7}\right)^2 & \text{ג.} & \left(\frac{7^3 \cdot 16 \cdot 128 \cdot 49}{(2^2 7)^5}\right)^3 \end{array}$$

(12) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה שלילית :

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{1}{4^6} & \text{ב.} & \frac{1}{5^3} & \text{ג.} & \frac{1}{2^{10}} \\ \text{ד.} & \frac{1}{8} & \text{ה.} & \frac{1}{81} & \text{ו.} & \frac{1}{125} \end{array}$$

(13) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה חיובית וחשב את ערכם :

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{1}{4^{-3}} & \text{ב.} & \frac{1}{3^{-2}} & \text{ג.} & \frac{1}{5^{-3}} \end{array}$$

(14) חשב את הביטויים הבאים :

ג. $5^6 \cdot 5^{-3} \cdot 5^{-2}$

ב. $2^{-8} \cdot 512 \cdot 2^2$

א. $3^2 \cdot 3^{-5} \cdot 3^7$

ו. $\frac{3^{-6} \cdot 7^7 \cdot 7^{-4}}{3^{-4} \cdot 3^{-3} \cdot 7^3}$

ה. $\frac{2^{-5} \cdot 5^3 \cdot 2^{14}}{5^2 \cdot 5^{-10} \cdot 5^8 \cdot 2^6}$

ד. $2^{14} \cdot 3^{-6} \cdot 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 2^{-30}$

(15) פשט את הביטויים הבאים לצורה ללא חזקות שליליות.

ג. $\frac{2^{-3} 5^4}{5^4 \cdot 125 \cdot (5^2 2)^{-3} \cdot 2^{-4}}$

ב. $\frac{(4^4)^{-4} 3^{-11}}{(3^{-2} 4^3)^{-6}}$

א. $\left(\frac{5^{-4}}{3^2}\right)^{-6}$

(16) פשט את הביטויים הבאים :

ג. $\frac{(m^{n+2})^3 \cdot m^{-4n-2}}{\frac{1}{m^{6n+2}} \cdot (m^3)^{n-2}}$

ב. $\frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}}$

א. $\frac{a^{n+2} \cdot a^{2-3n}}{(a^3)^{n+1}}$

תשובות סופיות:

- (1) א. a^8 ב. t^{15} ג. b^{22} ד. k^5 ה. n^5 ו. c^4
 ז. a^7 ח. x^3 ט. 1 י. 3^9 יא. 2^8 יב. 5^5
- (2) א. 18 ב. ab ג. $x^6 y^{10}$
- (3) $n=16$
- (4) א. 2 ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{5}{8}$ ד. 40
- (5) א. a^8 ב. c^{30} ג. x^{26} ד. b ה. n^3 ו. d^{10}
 ז. 2 ח. 9 ט. 8^{18} י. 3^7 יא. 3 יב. 3^5
- (6) $n=2$
- (7) א. 6 ב. 9 ג. 56
- (8) א. 3^{12} ב. 2^{21} ג. 5^{10} ד. 2^{12} ה. 2^7 ו. 3^{51}
- (9) א. $\frac{2b^3}{a}$ ב. k ג. $3\frac{1}{5}$ ד. $\frac{1}{x} + x$
- (10) א. $a^6 b^3$ ב. $m^{20} n^{15}$ ג. $x^{36} y^9$ ד. $\frac{a^{12}}{b^8}$ ה. $\frac{i^{28}}{k^{21}}$ ו. $a^{21} b^3$
- ז. $x^{12} y^{18}$ ח. $t^4 r^{12}$ ט. $b^2 c^6$
- (11) א. 576 ב. 225 ג. 8
- (12) א. 4^{-6} ב. 5^{-3} ג. 2^{-10} ד. 2^{-3} ה. 3^{-4} ו. 5^{-3}
- (13) א. 64 ב. 9 ג. 125
- (14) א. 81 ב. 8 ג. 5 ד. $\frac{1}{9}$ ה. 1000 ו. 3
- (15) א. $5^{24} \cdot 3^{12}$ ב. $\frac{4^2}{3^{23}}$ ג. $5^3 \cdot 2^4$
- (16) א. a^{1-5n} ב. k ג. m^{2n+12}

חוקי השורשים:

סיכום כללי:

סיכום חוקי השורשים:

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} & 2. \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} & 3. \quad \sqrt[n]{a^n} = a \\
 4. \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} & 5. \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} & 6. \quad \sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot n]{a}
 \end{array}$$

שאלות:

17) הבא את הביטויים הבאים לצורה: $\sqrt[n]{a^m}$.

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } 3^{\frac{1}{4}} & \text{ב. } 2^{\frac{3}{5}} & \text{ג. } 6^{\frac{5}{6}} \\
 \text{ד. } -12^{\frac{2}{7}} & \text{ה. } -(-4)^{\frac{1}{3}} & \text{ו. } -(-3)^{\frac{3}{4}} \\
 \text{ז. } 5^{-\frac{1}{4}} & \text{ח. } 27^{-\frac{1}{3}} & \text{ט. } 64^{-\frac{5}{6}}
 \end{array}$$

18) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } \sqrt{49} & \text{ב. } -\sqrt{25} & \text{ג. } \sqrt[3]{8} \\
 \text{ד. } -\sqrt[3]{128} & \text{ה. } \sqrt[3]{(-2)^6} & \text{ו. } (\sqrt[5]{1024})^2 \\
 \text{ז. } (\sqrt[5]{-243})^3 & \text{ח. } \sqrt[4]{-16} & \text{ט. } \sqrt[4]{-25^2} \\
 \text{י. } \sqrt[4]{(-25)^2} & &
 \end{array}$$

(19) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

- | | | |
|---|--|---|
| א. $8^{\frac{2}{3}}$ | ב. $32^{\frac{3}{5}}$ | ג. $128^{-\frac{2}{7}}$ |
| ד. $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$ | ה. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2.5}$ | ו. $\left(\frac{64}{343}\right)^{-\frac{2}{3}}$ |
| ז. $81^{\frac{3}{4}} \cdot 64^{-\frac{1}{3}}$ | ח. $343^{\frac{2}{3}} \cdot 100^{\frac{1}{2}}$ | ט. $16^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{-\frac{1}{3}} \cdot 4^{-\frac{1}{2}}$ |

(20) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$

(21) פשט את הביטויים הבאים:

- | | | |
|---|--|--|
| א. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ | ב. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$ | ג. $\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$ |
| ד. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ | ה. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$ | ו. $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$ |
| ז. $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$ | ח. $\frac{\sqrt[3]{500} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[4]{25^2} \cdot \sqrt[3]{4}}$ | ט. $\frac{\sqrt[3]{8^2} \sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{400} \sqrt{2}}$ |

(22) הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים:

- | | | |
|-------------------|----------------|--------------------------|
| א. $3\sqrt{2}$ | ב. $5\sqrt{3}$ | ג. $\frac{\sqrt{36}}{2}$ |
| ד. $2\sqrt[3]{3}$ | ה. $x\sqrt{x}$ | |

(23) הכנס את כל המקדמים בביטויים הבאים לתוך השורש:

- | | | |
|--------------------------|-----------------------------|---------------------------------|
| א. $2\sqrt{5}$ | ב. $4\sqrt[3]{2}$ | ג. $2\sqrt[5]{3}$ |
| ד. $\frac{\sqrt{24}}{2}$ | ה. $\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$ | ו. $\frac{3\sqrt[4]{5000}}{10}$ |
| ז. $-5\sqrt[3]{2}$ | ח. $-5\sqrt[4]{2}$ | ט. $-5\sqrt[5]{-2}$ |

(24) הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר :

- א. $\sqrt{12}$ ב. $\sqrt{48}$ ג. $\sqrt{63}$
- ד. $\sqrt[3]{54}$ ה. $\sqrt{x^5}$

(25) חלץ מן הביטויים הבאים את המקדם הגבוה ביותר ככל הניתן :

- א. $\sqrt{40}$ ב. $\sqrt{50}$ ג. $\sqrt{320}$
- ד. $\sqrt[3]{108}$ ה. $\sqrt[3]{56}$ ו. $\sqrt[5]{160}$
- ז. $\sqrt[4]{162}$ ח. $\sqrt[5]{972}$ ט. $\sqrt[6]{192}$

(26) פשט את הביטויים הבאים :

- א. $\sqrt{18} - \sqrt{8}$ ב. $\sqrt{7} + \sqrt{63}$ ג. $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128}$
- ד. $\sqrt[4]{405} - \sqrt[4]{80}$ ה. $\frac{20}{\sqrt{5}}$ ו. $\frac{\sqrt{8}}{2}$
- ז. $\frac{16}{\sqrt{2}}$ ח. $\frac{6}{\sqrt{3} + \sqrt{12}}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[5]{160} - \sqrt[5]{5}}$

(27) פשט את הביטויים הבאים :

- א. $3^{\frac{1}{4}} \cdot 9^{-2.5} \cdot 27^{\frac{3}{2}}$ ב. $2^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{\frac{1}{2}} \cdot 64^{-3}$ ג. $125^{\frac{1}{6}} \cdot 5^2 \cdot 5^{-\frac{2}{3}}$
- ד. $\frac{27^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}$ ה. $\frac{49^{\frac{2}{5}} \cdot 7^{-\frac{6}{5}}}{343^{\frac{1}{5}}}$ ו. $\frac{512^{\frac{1}{4}} \cdot 64^{-\frac{3}{4}}}{128^{\frac{1}{8}} \cdot 2^{-2}}$

תשובות סופיות:

- (17) א. $\sqrt[4]{3}$ ב. $\sqrt[5]{2^3}$ ג. $\sqrt[6]{6^5}$ ד. $-\sqrt[7]{12^2}$ ה. $-\sqrt[3]{-4}$ ו. ϕ
- ז. $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ ח. $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$ או $\frac{1}{3}$ ט. $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}}$ או $\frac{1}{2^5}$
- (18) א. 7 ב. -5 ג. 2 ד. -2 ה. 4 ו. 16
- ז. -27 ח. ϕ ט. ϕ י. 5
- (19) א. 4 ב. $\frac{1}{8}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. 125 ה. $\frac{32}{243}$ ו. $\frac{49}{16}$
- ז. $\frac{27}{4}$ ח. $\frac{10}{49}$ ט. $\frac{1}{2}$
- (20) $\sqrt{2}$
- (21) א. 4 ב. 9 ג. 20 ד. 6 ה. 3 ו. 2
- ז. $\sqrt{2}$ ח. $\sqrt{5}$ ט. $\sqrt{2}$
- (22) א. $\sqrt{18}$ ב. $\sqrt{75}$ ג. $\sqrt{9}$ ד. $\sqrt[3]{24}$ ה. $\sqrt{x^3}$
- (23) א. $\sqrt{20}$ ב. $\sqrt[3]{128}$ ג. $\sqrt[5]{96}$ ד. $\sqrt{6}$ ה. $\sqrt[3]{3}$
- ו. $\sqrt[4]{40\frac{1}{2}}$ ז. $\sqrt[3]{-250}$ ח. $-\sqrt[4]{1250}$ ט. $\sqrt[5]{5^5 \cdot 2}$
- (24) א. $2\sqrt{3}$ ב. $4\sqrt{3}$ ג. $3\sqrt{7}$ ד. $3\sqrt[3]{2}$ ה. $x^2\sqrt{x}$
- (25) א. $2\sqrt{10}$ ב. $5\sqrt{2}$ ג. $8\sqrt{5}$ ד. $3\sqrt[3]{4}$ ה. $2\sqrt[3]{7}$ ו. $2\sqrt[5]{5}$
- ז. $3\sqrt[4]{2}$ ח. $3\sqrt[5]{4}$ ט. $2\sqrt[8]{3}$
- (26) א. $\sqrt{2}$ ב. $4\sqrt{7}$ ג. $6\sqrt[3]{2}$ ד. $\sqrt[4]{5}$ ה. $4\sqrt{5}$ ו. $\sqrt{2}$
- ז. $8\sqrt{2}$ ח. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ או $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[5]{5}}$ או $2\sqrt[5]{5^4}$
- (27) א. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ ב. $\frac{1}{\sqrt[4]{2^{61}}}$ ג. $\sqrt[6]{5^{11}}$ ד. 27 ה. $\frac{1}{7}$ ו. $\sqrt[8]{2^5}$

כתיבה מדעית של מספרים:

שאלות:

(28) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. 15,000,000	ב. 1,500,000
ג. 150,000,000,000	ד. 23,400,000
ה. 0.0003	ו. 0.00000042
ז. 0.000000042	ח. 0.00000000042

(29) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. $(3,000,000)^2$	ב. $(2,000,000)^2$
ג. $(5,000)^3$	ד. $(50,000)^3$
ה. $(0.0002)^4$	ו. $(0.00004)^3$
ז. $(0.000005)^3$	ח. $(0.000000007)^3$

תשובות סופיות:

(28) א. $1.5 \cdot 10^7$	ב. $1.5 \cdot 10^6$	ג. $1.5 \cdot 10^{11}$	ד. $2.34 \cdot 10^7$	ה. $3 \cdot 10^{-4}$
ו. $4.2 \cdot 10^{-7}$	ז. $4.2 \cdot 10^{-8}$	ח. $4.2 \cdot 10^{-10}$		
(29) א. $9 \cdot 10^{12}$	ב. $4 \cdot 10^{12}$	ג. $1.25 \cdot 10^{11}$	ד. $1.25 \cdot 10^{14}$	ה. $1.6 \cdot 10^{-15}$
ו. $6.4 \cdot 10^{-14}$	ז. $1.25 \cdot 10^{-16}$	ח. $3.43 \cdot 10^{-25}$		

קורס קדם במתמטיקה לתלמידים מנהל עסקים, כלכלה ומנהל, כלכלה וחשבונאות

פרק 9 - משוואות ואי-שוויונים מעריכיים

תוכן העניינים

83	1. משוואות מעריכיות יסודיות.....
85	2. משוואות עם חיבור וחסור איברים.....
87	3. משוואות בהן המשתנה גם בבסיס.....
88	4. משוואות מסכמות שונות.....
89	5. משוואות עם קבוע אוילר.....
90	6. מערכת משוואות מעריכיות.....
91	7. אי שוויונים מעריכיים.....
92	8. אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך.....

משוואות מעריכיות יסודיות:

סיכום כללי:

- פתרון כללי של משוואת מעריכית מהצורה: $a^x = a^y$ הוא: $x = y$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = 1$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = 1 = a^0$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = b^x$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = b^x = 1$ ללא תלות בבסיסים.

שאלות:

1 פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי החזקות היסודיים):

א. $2^x = 16$ ב. $5^x \cdot 25^{x+2} = 125$

ג. $10^{x-2} = 10000^{x+1}$ ד. $9^x \cdot 3^{x^2} = 81^{3x-4}$

ה. $(2^x \cdot 32)^3 = 8$ ו. $(5^{x^2})^5 \cdot \frac{1}{5^5} = 625^{x-1}$

ז. $\frac{7^x}{343^3} = 1$ ח. $(25 \cdot 0.2^{2x})^2 = \left(\frac{1}{125}\right)^{1-x}$

2 פתור את המשוואות הבאות (הבסיס הוא שבר):

א. $27 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{5x+2} = 8$ ב. $\left(\frac{3}{4}\right)^{2-x} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{9}{16}\right)^{7+x}$

ג. $25 \left(\frac{7}{5}\right)^{x^2-2x} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{4-x} = 49$

3 פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי השורשים):

א. $\sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3}$ ב. $\sqrt{3^{x+7}} = 81$

ג. $(9\sqrt{27})^{3x} \cdot 3^{2-x} = \frac{1}{9}$ ד. $\sqrt[3]{16} \cdot \left(\frac{1}{2^x}\right)^3 = \frac{1}{16}$

ה. $2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^x}} = 8(\sqrt{8})^{-\sqrt{x}}$ ו. $5^x \cdot \frac{1}{25^5} = 125^{\sqrt{x}}$

(4) פתור את המשוואות הבאות (מכפלת בסיסים שונים):

א. $2^x = 7^x$	ב. $3^x \cdot \frac{625}{\sqrt{25^x}} = 81$
ג. $2^{3x} \cdot 5^{3x} = 1000000$	ד. $2^{x+1} \cdot 3^{x-2} \cdot 7^x = 392$
ה. $243 \cdot 2^{x-1} \cdot 18^{x-9} = \frac{1}{3^{x-2}}$	ו. $108 \cdot \frac{1}{2^{1-2x}} = 72^x \cdot \sqrt{0.5}$
ז. $2^{2x+2} \cdot 5^{x+1} = (2\sqrt{5})^{4-x}$	

תשובות סופיות:

א. $x = 4$	ב. $x = -\frac{1}{3}$	ג. $x = -2$	ד. $x = 2, 8$	ה. $x = -4$
ו. $x = 1, -\frac{1}{5}$	ז. $x = 9$	ח. $x = 1$		
א. $x = -1$	ב. $x = -2$	ג. $x = 3, -2$		
א. $x = -\frac{1}{2}$	ב. $x = 1$	ג. $x = -\frac{8}{19}$	ד. $x = 2, -\frac{2}{3}$	ה. $x = 4, 9$
א. $x = 0$	ב. $x = 4$	ג. $x = 2$	ד. $x = 2$	ה. $x = 5$
ו. $x = 1.5$	ז. $x = \frac{2}{3}$			

משוואות עם חיבור וחסור איברים:

סיכום כללי:

במשוואות הכוללות חיבור וחסור של איברים, נאתר את הבסיס עם המעריך הקטן ביותר ונסמן אותו ב- t , למשל במשוואה: $4^x - 3 \cdot 2^x = 4$ נסמן: $2^x = t$.
נבטא את כל איברים המשוואה באמצעות t ונפתור אותה עבורו.
לאחר מכן נחזיר את ההצבה למציאת ערכי ה- x המתאימים.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם חיבור וחסור ממעלה ראשונה):

ב. $8^x + 3 \cdot 8^x = 256$

א. $2^x + 6 \cdot 2^x = 56$

ד. $2 \cdot 6^x + 6^{x+2} - 6^{x-1} = 227$

ג. $5 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 162$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם חיבור וחסור ממעלה ראשונה):

ב. $5^{3x+2} + 4 \cdot 125^x = 29$

א. $81^{x+1} + 18 \cdot 3^{4x-3} = 735$

ד. $\sqrt{10000^{x+1}} - \sqrt[4]{10^{8x+1}} = \sqrt[4]{1000} \cdot (\sqrt[4]{10^7} - 1)$

ג. $(2^{3x+1})^2 - 64^{x-\frac{1}{3}} = 15$

ו. $5^{-x} + 25^{\frac{1-x}{2}} - 5^{-x-1} = 145$

ה. $6^{-x} - 5 \cdot 36^{-\left(\frac{x}{2}+1\right)} = 186$

ח. $4^{x+2} - 6 \cdot 4^x = 7 \cdot 12^{x+1} + 6 \cdot 12^x$

ז. $2 \cdot 10^{x+1} + 10^{x+2} = 3 \cdot 5^{x+1}$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחסור ממעלה שנייה):

ב. $16^{x+1} - 65 \cdot 4^x + 4 = 0$

א. $9^x - 36 \cdot 3^x + 243 = 0$

ד. $4^{-x} - 3 \cdot 4^x + 2 = 0$

ג. $6^x - 4 \cdot 6^{-x} + 3 = 0$

ו. $\left(2^{\frac{1}{3}x+2}\right)^2 - 5 \cdot 2^{\frac{1}{3}x+1} + 1 = 0$

ה. $\left(\frac{4}{9}\right)^x - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1} = -\frac{2}{3}$

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות):

ב. $\frac{7^x}{7^x-4} + \frac{8}{7^x+5} = 3$

א. $\frac{20}{9^x+1} = 3 - \frac{8}{9^x-1}$

(5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות מסכמות):

א. $\frac{1}{25^{1-x}} - 6 \cdot 5^{x-1.5} + 1 = 0$	ב. $3^x - \sqrt{16 \cdot 3^{x+1}} = -9$
ג. $36^x - 6^{x+1} \cdot 3^x + 8 \cdot 9^x = 0$	ד. $4 \cdot 9^x - 10 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0$
ה. $25 \cdot 5^{2x} + 16 \cdot 15^x = 9^{x+1}$	ו. $9^x + 4^x - 6^x = \frac{7}{6^{1-x}}$
ז. $\frac{8^{2x} - 8}{7} = 4^x - 2$	ח. $2^{3x} - 2^{2x+2} - 2^x + 4 = 0$

תשובות סופיות:

א. $x = 3$	ב. $x = 2$	ג. $x = 4$	ד. $x = 1$
א. $x = \frac{1}{2}$	ב. $x = 0$	ג. $x = \frac{1}{3}$	ד. $x = \frac{1}{4}$
ה. $x = -3$	ו. $x = -2$	ז. $x = -3$	ח. $x = -2$
א. $x = 2, 3$	ב. $x = 1, -2$	ג. $x = 0$	ד. $x = 0$
ה. $x = 0, 1$	ו. $x = -6, -9$		
א. $x = 1, -\frac{1}{2}$	ב. $x = 1$		
א. $x = \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$	ב. $x = 1, 3$	ג. $x = 1, 2$	ד. $x = 1, 0$
ה. $x = -2$	ו. $x = 1, -1$	ז. $x = 0, \frac{1}{2}$	ח. $x = 0, 2$

משוואות בהן המשתנה גם בבסיס:

סיכום כללי:

במשוואות עם משתנה בבסיס יש לדרוש תנאי עבורו הבסיס חיובי.
יש לקחת את חיתוך תחומי ההגדרה (במידה וקיימים ביטויים עם שורשים או שברים) יחד עם תוצאת השוואת המעריכים.

הערה:

יש לבדוק את ערכי ה- x עבורם הבסיס שווה ל-1 ולראות האם מתקבל פסוק אמת או פסוק שקר. בהתאם יש להוסיף או להוריד אותו מתחום המספרים המהווים את פתרון המשוואה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$(\sqrt{3-x})^{\sqrt{x}} = (\sqrt[3]{3-x})^x \cdot \sqrt{\sqrt[3]{3-x}} \quad (1)$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2+x} = 1 \quad (2)$$

$$\frac{|x-3|^{x^2-2}}{|x-3|^{x-1}} = |x-3|^{-1} \quad (3)$$

תשובות סופיות:

$$x = \frac{1}{4}, 1, 2 \quad (1)$$

$$\text{אין פתרון.} \quad (2)$$

$$x = 0, 1, 2, 4 \quad (3)$$

משוואות מסכמות שונות:

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$5(2^x - 2) + 2 = 4^x - 2^x \quad (1)$$

$$\frac{6}{4^{x-1} - 1} + \frac{2^{x+1}}{2^x + 2} = \frac{2^x + 4}{2^x - 2} \quad (2)$$

$$\frac{4^x}{4^x - 10} - \frac{4}{2^{2x-1} - 3} = \frac{32}{16^x - 4^{x+2} + 60} \quad (3)$$

$$3^{2x^2+2} - 3^{x^2+3} + 9 = 3^{x^2+1} \quad (4)$$

$$\sqrt{x}10 = 4 \cdot \sqrt[2]{x}10 + 60 \quad (5)$$

$$\sqrt[x-1]{8 \cdot 2^{x+1}} = (\sqrt{x}2)^2 \cdot \sqrt[x-1]{x}32 \quad (6)$$

$$10 \cdot 4^{x+2} - 16 \cdot 10^x - 90 \cdot 6^x + 36 \cdot 15^x = 0 \quad (7)$$

תשובות סופיות:

$$x = 1, 2 \quad (1)$$

$$x = 3 \quad (2)$$

$$x = 1.5 \quad (3)$$

$$x = 1, -1 \quad (4)$$

$$x = \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$x = -3 \quad (6)$$

$$x = 1, -2 \quad (7)$$

משוואות עם קבוע אוילר:

סיכום כללי:

קבוע אוילר מסומן באות e וערכו שווה (בערך) ל-2.71828. למספר זה משמעויות רבות במתמטיקה ובמדעים ועל כן הוחלט לסמן אותו באות משלו ולשלב אותו במשוואות מתמטיות ועוד.

דרך הפתרון של משוואה שבה הבסיס הוא e זהה לחלוטין לשל משוואה מעריכית רגילה כפי שנלמד בפרק זה.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם קבוע אוילר):

$$\text{א. } e^{3x} = e^{2x-1} \quad \text{ב. } e^{5x-1} = e \cdot e^{6x+1}$$

$$\text{ג. } e^{x-5} = (e^{1-x})^3 \quad \text{ד. } e^x \cdot \sqrt{e^{3x-1}} = \left(\frac{1}{e^x}\right)^{1-3x}$$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחסור):

$$\text{א. } e^2 \cdot e^x - e^{x+1} = e - 1 \quad \text{ב. } \sqrt[3]{e^{x+1}} \cdot e^2 = e^x \sqrt{e}$$

$$\text{ג. } e^{2x} + e^x - 2 = 0 \quad \text{ד. } e^{1+x} + e^{1-x} = e^2 + 1$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (המשתנה גם בבסיס):

$$\text{א. } xe^x = \sqrt[4]{e} \cdot x \quad \text{ב. } e^{3x} = x \cdot e^{3x}$$

$$\text{ג. } xe^{x^2} = \frac{x}{\sqrt{e^x}} \quad \text{ד. } \sqrt[3]{e^{3x-1}} \cdot x = xe^x$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x = -1 \quad \text{ב. } x = -3 \quad \text{ג. } x = 2 \quad \text{ד. } x = 1, \frac{1}{6}$$

$$(2) \quad \text{א. } x = -1 \quad \text{ב. } x = \frac{11}{4} \quad \text{ג. } x = 0 \quad \text{ד. } x = 1, -1$$

$$(3) \quad \text{א. } x = 0, \frac{1}{4} \quad \text{ב. } x = 1 \quad \text{ג. } x = 0, -\frac{1}{2} \quad \text{ד. } x = 0$$

מערכת משוואות מעריכיות:

שאלות:

$$(1) \quad \begin{cases} y = 3^x \\ y = 18 - 3^x \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 5^{2x} - 5^y = 5^x - 25 \\ y - x = 2 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{1}{3^y - 4} + \frac{3}{3^x - 2} - \frac{1}{3^x + 2} = 3 \\ 4^y = \sqrt{256^x} \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(4) \quad \begin{cases} 5^x + 2^y = 13 \\ 2 \cdot 5^x - 2^y = 2 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(5) \quad \begin{cases} 2 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^y = 42 \\ 3^{x+1} - 2^{y+1} = 73 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(6) \quad \begin{cases} 5^{2x+1} + 8 \cdot 10^x - 2^{2y+4} = 0 \\ (\sqrt{3})^y = 27^{\frac{x-1}{6}} \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(7) \quad \begin{cases} 6 \cdot 4^x - 7 \cdot 6^{y-1} + 2 \cdot 3^{x+y} = 6^y \\ \sqrt[4]{5^x} \cdot \sqrt{(5\sqrt{5})^y} = \sqrt[4]{125} \cdot 5^x \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

תשובות סופיות:

(1,3) (4	(1,2) (3	(0,2) , (2,4) (2	(2,9) (1
(1,2) , (-1,0) (7	(-1,-2) (6	(3,2) (5	

אי שוויונים מעריכיים:

סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $a^x > a^y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$\begin{array}{ll} \sqrt{2^x} \leq 4^{x^2-1\frac{1}{4}} & (2) \\ 3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x} & (1) \\ \left(\frac{1}{7}\right)^{5x} \geq \left(\frac{1}{7}\right)^{1-3x} & (4) \\ e^{\sqrt{x+1}} > e^{2x} & (3) \\ e^{2x} - 2e^x + 1 \leq 0 & (6) \\ 25^x + 5 < 6 \cdot 5^x & (5) \end{array}$$

הערה:

השאלות הבאות דורשות הכרות עם מושג הלוגריתם הטבעי ($\ln$) וכן חוקי הלוגריתמים אשר ילמדו בהמשך.

$$\begin{array}{ll} e^{2x} - 5e^x + 4 > 0 & (8) \\ e^x > 3 & (7) \end{array}$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{ll} x \leq -1 \text{ או } x \geq 1\frac{1}{4} & (2) \\ x < \frac{2}{3} & (1) \\ x \leq \frac{1}{8} & (4) \\ 0 \leq x < 1 & (3) \\ x = 0 & (6) \\ 0 < x < 1 & (5) \\ x < 0 \text{ או } x > \ln 4 & (8) \\ x > \ln 3 & (7) \end{array}$$

אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך:

סיכום כללי:

דרך הפתרון של אי שוויון עם משתנה בבסיס ובמעריך:

- יש לדרוש בסיס חיובי ולחבר אי-שוויון בהתאם.
- יש לפתור את אי השוויון לפי השוואת מעריכים.
- יש למצוא את חיתוך הפתרונות.

נתון: $f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)}$ נדרוש: $f(x) > 0$.

דרך הפתרון: אם $f(x) > 1$ אז $g(x) > h(x)$.

אם $0 < f(x) < 1$ אז $g(x) < h(x)$.

לבסוף נמצא את חיתוך התחומים.

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$(x-2)^{2x-5} < (x-2)^{x+1} \quad (2) \qquad x^{2x-1} > x^{x+2} \quad (1)$$

$$x^{2x^2+2} < x^{5x} \quad (4) \qquad x^{2x-6} < 1 \quad (3)$$

$$(x+1)^{|x|} < x^2 + 2x + 1 \quad (6) \qquad (x^2 - 6x + 13)^{x^2-2x} \geq (x^2 - 6x + 13)^3 \quad (5)$$

תשובות סופיות:

$$0 < x < 1, x > 3 \quad (1)$$

$$3 < x < 6 \quad (2)$$

$$1 < x < 3 \quad (3)$$

$$0 < x < 0.5, 1 < x < 2 \quad (4)$$

$$x \leq -1, x \geq 3 \quad (5)$$

$$0 < x < 2 \quad (6)$$

קורס קדם במתמטיקה לתלמידים מנהל עסקים, כלכלה ומנהל, כלכלה וחשבונאות

פרק 10 - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים

תוכן העניינים

93	1. הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות
96	2. חוקי הלוגריתמים
100	3. חישובים עם חזקה לוגריתמית
101	4. מעבר בין בסיסים
103	5. הלוגריתם הטבעי
105	6. משוואות עם בסיסים שונים
106	7. מערכת משוואות לוגריתמיות
107	8. מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות
108	9. אי-שוויונים לוגריתמים

הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות:

סיכום כללי:

הגדרה:

הלוגריתם מוגדר באופן הבא: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ כאשר: $a, b > 0, a \neq 1$.

הסבר:

לוגריתם על בסיס a של b מוגדר בתור החזקה שיש להעלות את a על מנת שיהיה שווה ל- b .
 ערך חזקה זו הוא x . ערך לוגריתם יכול להיות חיובי, שלילי או אפס. נחשב ערכי לוגריתמים
 ונפתור משוואות לוגריתמיות ע"י מעבר לפי ההגדרה למשוואה מעריכית מתאימה.

כללים יסודיים בלוגריתמים:

מהגדרת הלוגריתם נובע כי: $\log_a a = 1$ וכן: $\log_a 1 = 0$ לכל $a > 0, a \neq 1$.

שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמים הבאים:

א. $\log_2 32$ ב. $\log 1000$ ג. $\log_{25} 5$

ד. $\log_8 4$ ה. $\log_4 \frac{1}{16}$ ו. $\log_a a^4$

ז. $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (יסודי - שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\log_{36} 6 = x$ ב. $\log_2 x = 16$

ג. $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$ ד. $\log_x 64 = 3$

ה. $\log_x 25 = 2$ ו. $\log_x (3x+4) = 2$

(3) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (כללי - שימוש בהגדרת הלוג):

$$\text{א. } \log_6(4x-2)=1 \quad \text{ב. } \log_4(4-x)=\frac{1}{2}$$

$$\text{ג. } \log_8(x^4-73)=1 \quad \text{ד. } \log_3 \frac{x+3}{3-3x}=-2$$

$$\text{ה. } \log_x(2x^2+x-12)=2 \quad \text{ו. } \log_{\sqrt{x+1}}(2x^2-5)=2$$

(4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג מספר פעמים):

$$\text{א. } \log_4(\log_3 x)=1 \quad \text{ב. } 3\log_{27}(\log_2(x+3))=1$$

$$\text{ג. } \log_{\frac{1}{16}}(\log_3(5x^2+1))=-\frac{1}{2} \quad \text{ד. } \log_6(3+\log_2(6+\log_4(x^2+15)))=1$$

(5) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

$$\text{א. } \log_2(3^x+37)=6 \quad \text{ב. } \log_3(3 \cdot 2^x-303)=4$$

$$\text{ג. } \log_5(126 \cdot 5^x-25)=2x+1 \quad \text{ד. } 3\log_2\left(3 \cdot 4^{1+\frac{1}{3}x}-11 \cdot 2^{\frac{x}{3}}+3\right)=12+2x$$

(6) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הצבה):

$$\text{א. } (\log_2 x)^4=10000 \quad \text{ב. } 2(\log_3 x)^2+\log_3 x=10$$

$$\text{ג. } \frac{3 \cdot \log_{14} x + 1}{(\log_{14} x)^2} = 4 \quad \text{ד. } \sqrt{\log_{\frac{1}{81}} x} + \sqrt{\log_{\frac{1}{81}} x + 2} = 2$$

תשובות סופיות:

- (1) א. 5 ב. 3 ג. $\frac{1}{2}$ ד. $\frac{2}{3}$ ה. -2
 ו. 4 ז. -1.5
- (2) א. $x = \frac{1}{2}$ ב. $x = 65,536$ ג. $x = 27$ ד. $x = 4$
 ה. $x = 5$ ו. $x = 4$
- (3) א. $x = 2$ ב. $x = 2$ ג. $x = \pm 3$ ד. $x = -2$ ה. $x = 3$ ו. $x = 2$
- (4) א. $x = 81$ ב. $x = 5$ ג. $x = \pm 4$ ד. $x = \pm 1$
- (5) א. $x = 3$ ב. $x = 7$ ג. $x = -1, 2$ ד. $x = -6$
- (6) א. $x = 1024, \frac{1}{1024}$ ב. $x = 9, \frac{1}{9\sqrt{3}}$
 ג. $x = 14, \frac{1}{\sqrt[4]{14}}$ ד. $x = \frac{1}{3}$

חוקי הלוגריתמים:

סיכום כללי:

- להלן 3 חוקי הלוגריתמים עבור בסיס $a > 0 \neq 1$ וארגומנטים x ו- y חיוביים:
- מכפלה לסכום: $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.
 - מנה להפרש: $\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$.
 - מקדם למעריך: $\log_a b^n = n \log_a b$ (כאשר $b > 0$ ו- n מספר ממשי כלשהו).

שאלות:

שאלות חישוב כלליות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

- | | |
|--|---|
| א. $\log_3 12 + \log_3 2.25$ | ב. $\log_{\frac{1}{5}} 40 + \log_{\frac{1}{5}} 12.5 + \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{4}$ |
| ג. $\log_2 200 - \log_2 100$ | ד. $\log_3 60 - \log_3 540$ |
| ה. $\log_4 8 + \log_4 12 - \log_4 6$ | ו. $\log_7 1.5 - \log_7 147 + \log_7 2$ |
| ז. $3 \log_5 2 - \log_5 1.6$ | ח. $\log_{\sqrt{4}} 6.4 + 2 \log_{\sqrt{4}} \sqrt{10}$ |
| ט. $\frac{1}{2} \left(\log_7 \frac{7}{2} + \log_7 2 \right) + \log_7 14 - \frac{1}{3} \log_7 8$ | י. $\frac{1}{4} \log 81 - \log 1.5 - \frac{1}{2} \log 40$ |

(2) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

- | | |
|---|--|
| א. $\frac{\log_5 16}{\log_5 8}$ | ב. $\frac{\log_9 62.5 + \log_9 2}{\log_9 0.2}$ |
| ג. $\frac{\log_3 5 - \log_3 2 + \log_3 50}{\log_3 225 - 2}$ | ד. $\frac{2 - 2 \log_3 4 + \log_3 8 \frac{8}{9}}{4 - \log_3 0.01 - 2 \log_3 18}$ |

משוואות לוגריתמיות:

(3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש ישיר בחוקי הלוגריתמים):

א. $\log_2 x + \log_2 (x-6) = 4$ ב. $\log_3 x + \log_3 (x+2) = 1$

ג. $\log_2 (x+30) - \log_2 x = 4$ ד. $\log_5 (x+146) - \log_5 (x+2) = 2$

ה. $2\log_3 (2x-1) - \log_3 (22x+9) = -1$

ו. $2\log_5 (x-2) = \log_5 (4x-15) + \log_5 x$

(4) פתור את המשוואות הבאות (פתרון בשיטת לוג שווה לוג):

א. $\log_5 (4x-3) = \log_5 7$

ב. $2\log_2 (2x-2) - \log_2 (16-x) = \log_2 (x-1) + 1$

(5) פתור את המשוואות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א. $\log_3 (3 \cdot 5^x + 39) = 3 + \log_3 (5^x - 3)$

ב. $\log_2 (3 - 4^{x+1}) - \log_2 11 = x$

(6) פתור את המשוואות הבאות (שימוש הפוך בחוקי הלוגריתמים):

א. $\log_4 x \cdot \log_4 (16x) = 8$

ב. $\log_2 \left(\frac{x}{4} \right) \cdot \log_2 (1024x) = -11$

ג. $\log_2 x^2 \log_2 \left(\frac{x}{16} \right) = -\log_2 (64x)$

ד. $(\log_4 4x)^2 = \log_4 4x^2 + 1$

ה. $\log_3 (9x^2) \cdot \log_3 (9x^3) = \log_3 \left(\frac{81}{x} \right) + 2$

ו. $\frac{\log_2 \left(\frac{x^3}{32} \right)}{(\log_2 x)^2} + \frac{\log_2 (2x)}{\log_2 x} = 1\frac{7}{9}$

שאלות הבעה:

(7) נתון: $\log_3 2 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_3 16$ ב. $\log_3 6$

ג. $\log_3 24$ ד. $\log_3 1.5$

(8) נתון: $\log_2 3 = a$, $\log_2 5 = b$. הבע באמצעות a ו- b את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_2 45$ ב. $\log_2 60$ ג. $\log_2 \sqrt{7.5}$

(9) נתון: $\log_{18} 2 + \log_{18} 3 = a$.

הבע באמצעות a את $\log_{18} 27$ ואת $\log_{18} 16$.

שאלות נוספות:

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

(10) $\log 4 \log 40 + \log 5 \log 16 = \log 64$

(11) $2 \log^2 2 + \log 25 \cdot \log 20 = 2$

(12) $\log_{12} 16 \cdot \log_{12} 4 + \log_{12} 9 \cdot \log_{12} 48 = 2$

(13) $\log_5 10 \cdot \log_5 75 - \log_5 3 \cdot \log_5 2 - \log_5 3 - \log_5 4 = 2$

תשובות סופיות:

- (1) א. 3 ב. -3 ג. 1 ד. -2 ה. 2
ו. -2 ז. 1 ח. 6 ט. 1.5 י. -0.5
- (2) א. $\frac{4}{3}$ ב. -3 ג. 1.5 ד. 0.5
- (3) א. $x=8$ ב. $x=3, \frac{1}{27}$ ג. $x=2$ ד. $x=4$ ה. $x=3$ ו. $x=4$
- (4) א. $x=2.5$ ב. $x=6$
- (5) א. $x=1$ ב. $x=-2$
- (6) א. $x=16, \frac{1}{256}$ ב. $x=2, \frac{1}{512}$ ג. $x=4, 2\sqrt{2}$ ד. $x=4, \frac{1}{4}$
- ה. $x=\frac{1}{9}, \sqrt[6]{3}$ ו. $x=8, \sqrt[7]{2^{15}}$
- (7) א. $4a$ ב. $a+1$ ג. $3a+1$ ד. $1-a$
- (8) א. $2a+b$ ב. $2+a+b$ ג. $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}$
- (9) $4(2a-1), 3(1-a)$
- (10) הוכחה.
- (11) הוכחה.
- (12) הוכחה.
- (13) הוכחה.

חישובים עם חזקה לוגריתמית:

סיכום כללי:

מהגדרת הלוגריתם ניתן לנסח את הקשר הבא: $a^{\log_a x} = x$ כאשר $a > 0 \neq 1$.

שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א. $6^{\log_6 8}$ ב. $4^{\log_2 5}$

(2) נתונה התבנית: $3 \cdot 4^x$. חשב את ערכה עבור:

א. $x = \log_4 7$ ב. $x = \log_4 \sqrt{3}$
ג. $x = 2\log_4 0.1$ ד. $x = \sqrt{\log_2 5}$

(3) נתונה התבנית: $\frac{1}{6} \cdot 9^x - 2 \cdot 3^x + 1$. חשב את ערכה עבור:

א. $x = -1$ ב. $x = \log_3 5$
ג. $x = \log_3 \sqrt{6}$

(4) חשב:

א. $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_{\sqrt{6}} 81}$ ב. $\sqrt[3]{2^{3-\log_{\sqrt{6}} 5}}$

תשובות סופיות:

(1) א. 8 ב. 25

(2) א. 21 ב. $3\sqrt{3}$ ג. 0.03 ד. 15

(3) א. $\frac{19}{54}$ ב. $-4\frac{5}{6}$ ג. $2 - 2\sqrt{6}$

(4) א. $\frac{1}{81}$ ב. $\frac{2}{\sqrt[9]{25}}$

מעבר בין בסיסים:

סיכום כללי:

מעבר מבסיס a לבסיס m (כאשר: $a > 0 \neq 1$ ו- $m > 0 \neq 1$, וכן: $b > 0$)

$$\log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a} \quad \text{יתבצע באופן הבא:}$$

שאלות:

שאלות חישוב כלליות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \log_4 7 \cdot \log_7 4 \\ \text{ב.} & \log_{0.1} 3 \cdot \log_9 1000 \\ \text{ג.} & \log_{\sqrt{3}} 5 \cdot \log_{\sqrt{125}} 9 \\ \text{ד.} & \log_4 169 \cdot \log_{25} 64 \cdot \log_{13} 625 \end{array}$$

(2) הוכח את השוויונים הבאים:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \log_2 25 \cdot \log_5 3 \cdot \log_9 2 = 1 \\ \text{ב.} & \log_{16} 9 \cdot \log_5 4 \cdot \log_3 5 = 1 \end{array}$$

משוואות לוגריתמיות:

(3) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \log_2 x + \log_{32} x = 6 \\ \text{ב.} & \log_3 x \cdot \log_{27} x = 3 \\ \text{ג.} & \log_2 4x \cdot \log_8 \frac{x}{16} = -\frac{5}{3} \\ \text{ד.} & \log_x 5 - 6 \log_{125} x = 1 \end{array}$$

שאלות הבעה:

(4) נתון: $\log_4 6 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

$$\text{א.} \log_2 3 \quad \text{ב.} \log_{32} 36 \quad \text{ג.} \log_{216} 96$$

(5) נתון: $\log_2 3 = a$, $\log_3 5 = b$. הבע באמצעות a ו- b את ערכי הביטויים הבאים:

$$\text{א.} \log_3 50 \quad \text{ב.} \log_2 \sqrt{30} \quad \text{ג.} \log_5 22.5$$

(6) נתון $\log_3 7 = a$, $\log 9 = 2b$. הבע באמצעות a ו- b את:

א. $\log 21$.

ב. $\log_3 \left(\frac{10}{7} \right)$.

ג. $\log_7 10$.

ד. $\log_{30} 63$.

שאלות נוספות:

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

(7) $\log_6 9 \cdot \log_{15} 30 + \log_6 5 \cdot \log_{15} 4 = 2$

(8) $\log \sqrt{3} \cdot \log_6 50 + \log \sqrt{2} \cdot \log_6 300 = 1$

תשובות סופיות:

(1) א. 1 ב. -1.5 ג. $2\frac{2}{3}$ ד. 12.

(2) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

(3) א. $x = 32$ ב. $x = 27, \frac{1}{27}$ ג. $x = 8, \frac{1}{2}$ ד. $x = \frac{1}{5}, \sqrt{5}$.

(4) א. $2a - 1$ ב. $0.8a$ ג. $\frac{a+2}{3a}$

(5) א. $2b + \frac{1}{a}$ ב. $\frac{a}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{1}{2}$ ג. $\frac{2}{b} + 1 - \frac{1}{ab}$

(6) א. $b + ab$ ב. $\frac{1}{b} - a$ ג. $\frac{1}{ab}$ ד. $\frac{ab+2b}{b+1}$.

(7) הוכחה.

(8) הוכחה.

הלוגריתם הטבעי:

סיכום כללי:

לוגריתם על בסיס e (קבוע אוילר) מסומן: $\log_e \Rightarrow \ln$ והוא נקרא הלוגריתם הטבעי.
 למשל: $\ln 3 = \log_e 3$ או $\ln \frac{1}{4} = \log_e \frac{1}{4}$. לוג זה נקרא בשם לן.
 מהגדרת הלוגריתם מתקיים: $\ln a = b \rightarrow e^b = a$ כאשר $a > 0$ ו- b מספרים כלשהם.

שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הטבעיים הבאים:

$$\ln e^2 \quad \text{א.} \quad \ln \frac{1}{e^4} \quad \text{ב.} \quad \ln \frac{1}{e\sqrt{e}} \quad \text{ג.}$$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג):

$$\ln x = 2 \quad \text{א.} \quad \ln x = -\frac{1}{2} \quad \text{ב.}$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (הצבה וחוקי הלוגריתמים):

$$\begin{aligned} \ln \left(e^{2x} - \frac{1}{2} \right) + \ln 2 &= x \quad \text{א.} \\ 3 \ln^2 x + \ln x &= 2 \quad \text{ב.} \\ \ln(e^2 x^3) \cdot \ln \frac{1}{x} &= \ln(ex^2) \quad \text{ג.} \end{aligned}$$

(4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הוצאת לוג משני אגפי המשוואה)

$$\left(\frac{1}{x} \right)^{2-3\ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x} \quad \text{ב.} \quad x^{\ln x} = e^6 x \quad \text{א.}$$

(5) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

$$e^{\ln 3} \quad \text{א.} \quad e^{2\ln 3} \quad \text{ב.}$$

תשובות סופיות:

- (1) א. 2 ב. -4 ג. -1.5
- (2) א. $x = e^2$ ב. $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$
- (3) א. $x = 0$ ב. $x = \sqrt[3]{e^2}, \frac{1}{e}$ ג. $x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \frac{1}{e}$
- (4) א. $x = e^3, \frac{1}{e^2}$ ב. $x = \sqrt{e}, e$
- (5) א. 3 ב. 9

משוואות עם בסיסים שונים:

סיכום כללי:

לעיתים תתקבל משוואה מעריכית שבה לא ניתן למצוא חזקה שלמה, כגון: $3^x = 4$. במקרים אלו נעזר בהגדרת הלוג כדי לבטא את ערך המעריך: $x = \log_3 4$. את ערך הביטוי $\log_3 4$ ניתן לחשב ע"י מחשבון או ע"י מעבר לבסיס 10: $\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3}$.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (בסיסים שונים):

א. $3^x = 6$ ב. $2^x - 9 = 0$

ג. $49^x - 8 \cdot 7^x + 15 = 0$ ד. $2 \cdot 3^{\frac{2x}{3}} + 5 \cdot 3^{\frac{x}{3}} + 2 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם בסיס ולוגריתם טבעי):

א. $e^{3x} = 3$ ב. $4 + 3e^x = 9$

ג. $3e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$ ד. $e(e^x + 1) = 2\sqrt{e^{x+2}} + 9e$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם פתרונות לא שלמים):

א. $\log_2(7 - 5^x) = \log_2 \frac{10}{5^x}$ ב. $\log_2(4e^{2x} + 6) - 1 = \log_2(7e^x)$

תשובות סופיות:

(1) א. $x = \log_3 6 = 1.63$ ב. $x = \log_2 9 = 3.17$

ג. $x = \log_7 3 = 0.564$, $x = \log_7 5 = 0.827$ ד. אין פתרון.

(2) א. $x = \frac{1}{3} \ln 3 = 0.36$ ב. $x = \ln \frac{5}{3} = 0.51$ ג. $x = 0$, $x = -\ln 3 = -1.09$

ד. $x = \ln 16 = 2.7725$

(3) א. $x = 1$, $x = \log_5 2 = 0.43$ ב. $x_1 = \ln \frac{1}{2} = -0.693$, $x = \ln 3 = 1.098$

מערכת משוואות לוגריתמיות:

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \log_6^2 x - \log_6(2y-2) = 2 \\ \frac{1}{2}x = y-1 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} y = \log_2 x \\ y = 6 - \log_2 x \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \log_3(x+y) = \log_3(4x+y) - 2 \\ \log_5(5x+3y) = 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \log_2(\log_3(x-y)) = 1 \\ \log_5(x+y-11) = \log_{25} x + \frac{1}{2}\log_5(y+2) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \log_2 x^2 + \log_3 \frac{1}{y} = 9 \\ \log_2 \sqrt{x} + \log_{\sqrt[3]{3}} y = -1 \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 6\log_4 y = 11 \\ 10\log_5 x - 2\log_4 y = 17 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} xy = 27 \\ x^{\log_3 y} = 9 \end{cases} \quad (8) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 2^{\log_2 y} = 6 \\ x^y = 5^8 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} 2^{\frac{\log_1(2x-y)}{2}} = 7^{\log_7 \frac{2x+y}{15}} \\ \log_3 x + \log_3 y = \frac{1}{\log_{28} 3} \end{cases} \quad (9)$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{lll} (8, -5) & (3) & (36, 19), \left(\frac{1}{6}, 1\frac{1}{12}\right) & (2) & (8, 3) & (1) \\ \left(16, \frac{1}{3}\right) & (6) & (25, 8) & (5) & (16, 7) & (4) \\ (4, 7) & (9) & (3, 9), (9, 3) & (8) & (25, 4), (625, 2) & (7) \end{array}$$

מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות:

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 25^y = (5\sqrt{5})^{x+1} \\ \log_5 \sqrt{x} + \log_5 \sqrt{y} = \log_5 3 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} y = \log_2 (4^x - 2) \\ y = 2x - 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x \cdot \log_2 3 = \frac{y}{\log_9 2} \\ \log_3 (9^x + 27) = 2y + \log_3 12 \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} 3y + 5 \log_6 x = 1 \\ 216 \cdot x^{2-y} = 6^{1-4y} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x = \log_4 (5 - 9^y) \\ \log_2 (2^x + 3) = \log_4 (29 - (3^y - 3)^2) \end{cases} \quad (6) \quad \begin{cases} (2^x - 1)^2 - 4y + 3 = 0 \\ x = \log_2 (y + 1) \end{cases} \quad (5)$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{lll} (36, -3), \left(6, -1\frac{1}{3}\right) & (3, 3) & (1, 1) \\ (1, 0) & (1, 1), (2, 3) & \left(1, \frac{1}{2}\right), (2, 1) \end{array}$$

אי-שוויונים לוגריתמים:

סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $\log_a x > \log_a y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- | | |
|---|----------------------------------|
| $\log_6(x^2 - 5x) < 1$ (2) | $\log_2 x < \log_2(5x - 20)$ (1) |
| $\log_{\frac{1}{2}}(1 - 3x) \geq \log_{\frac{1}{2}}(7 - x)$ (4) | $\log_3 x > \log_9(15 - 2x)$ (3) |
| $\ln x < 3$ (6) | $\ln x \geq \ln(x^2 - 12)$ (5) |
| $\frac{6}{\ln^2 x} \geq 2 - \frac{1}{\ln x}$ (8) | $\ln^2 x - 6 \ln x < 7$ (7) |

תשובות סופיות:

- | | |
|---|-----------------------------|
| $-1 < x < 0, 5 < x < 6$ (2) | $x > 5$ (1) |
| $-3 \leq x \leq \frac{1}{3}$ (4) | $3 < x < 7\frac{1}{2}$ (3) |
| $0 < x < e^3$ (6) | $2\sqrt{3} < x \leq 4$ (5) |
| $x \neq 1$ וגם $\frac{1}{\sqrt{e^3}} \leq x \leq e^2$ (8) | $\frac{1}{e} < x < e^7$ (7) |

קורס קדם במתמטיקה לתלמידים מנהל עסקים, כלכלה ומנהל, כלכלה וחשבונאות

פרק 11 - בעיות מילוליות יסודיות

תוכן העניינים

1. מבוא לבעיות מילוליות (ללא ספר)
2. כתיבה נכונה של משוואה עבור בעיה מילולית כללית (ללא ספר)
3. בעיות מתקדמות (ללא ספר)
4. בעיות גילים (ללא ספר)
5. בעיות קנייה ומכירה (ללא ספר)
6. בעיות תנועה (ללא ספר)
7. בעיות בהנדסת המישור (ללא ספר)

קורס קדם במתמטיקה לתלמידים מנהל עסקים, כלכלה ומנהל, כלכלה וחשבונאות

פרק 12 - בעיות מילוליות בשני נעלמים

תוכן העניינים

1. בעיות קנייה ומכירה (ללא ספר)
2. בעיות תנועה (ללא ספר)
3. בעיות בהנדסת המישור (ללא ספר)

קורס קדם במתמטיקה לתלמידים מנהל עסקים, כלכלה ומנהל, כלכלה וחשבונאות

פרק 13 - בעיות מילוליות עם אחוזים

תוכן העניינים

1. הגדרת האחוז והמרות יסודיות (ללא ספר)
2. הקשר שבין הכמות הכללית, האחוז וערך האחוז (ללא ספר)
3. שתי התייקרויות והוזלות (ללא ספר)
4. בעיות עם אחוזים בנעלם אחד (ללא ספר)
5. בעיות עם אחוזים בשני נעלמים (ללא ספר)

קורס קדם במתמטיקה לתלמידים מנהל עסקים, כלכלה ומנהל, כלכלה וחשבונאות

פרק 14 - קריאת גרפים והסקה מתוך גרפים

תוכן העניינים

1. כללי (ללא ספר)

קורס קדם במתמטיקה לתלמידים מנהל עסקים, כלכלה ומנהל, כלכלה וחשבונאות

פרק 15 - הסתברות קלאסית

תוכן העניינים

109	1. שאלות יסודיות.....
111	2. שאלות עם שני ניסויים.....
113	3. שאלות עם הסתברות מותנית.....
115	4. שאלות עם נעלמים.....
116	5. שאלות הנפתרות על ידי טבלה דו-מימדית.....
118	6. התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות יסודיות.....
119	7. התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות עם הסתברות מותנית.....
120	8. התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות עם נעלמים.....

שאלות יסודיות:

סיכום כללי:

הגדרות כלליות:

1. ההסתברות להתרחשות מאורע A : $P(A) = \frac{\text{מספר האפשרויות הרצוי}}{\text{מספר האפשרויות הכולל}}$
2. המאורע המשלים למאורע A : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
3. חיתוך ואיחוד מאורעות A ו- B : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
4. מאורעות זרים הם מאורעות שלא יכולים להתקיים בו זמנית.
5. עבור מאורעות זרים A ו- B מתקיים: $P(A \cap B) = 0$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
6. מאורעות נקראים בלתי תלויים אם קיום האחד מהם לא משפיע על ההסתברות לקיומו של השני.
7. עבור מאורעות בלתי תלויים A ו- B מתקיים: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
8. אם מתקיים: $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ המאורעות תלויים.
9. הסתברות מותנית של מאורע A בהינתן מאורע B מוגדרת: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
10. צורה כללית של טבלת ההסתברויות עבור מאורעות A ו- B :

	$\bar{A}$	A		קשרים מידיים מהטבלה:
$P(B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(A \cap B)$	B	$P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(B)$ •
$P(\bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(A \cap \bar{B})$	$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{B})$ •
1	$P(\bar{A})$	$P(A)$		$P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A)$ •
				$P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})$ •

9. התפלגות בינומית: חישוב k הצלחות מתוך n ניסיונות בלתי תלויים כאשר ההסתברות להצלחה בניסיון בודד היא p נתונה ע"י: $P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

שאלות:

- (1) בכד 3 כדורים כחולים ו-7 כדורים לבנים.
מה ההסתברות להוצאת כדור כחול בהוצאה אקראית של כדור מהכד?
- (2) בכד 2 כדורים כחולים, 3 כדורים אדומים ו-7 כדורים לבנים.
מה ההסתברות שבהוצאה אקראית של כדור מהכד לא ייצא כדור אדום?
- (3) מהי ההסתברות שבסיבוב סביבון לא יתקבל "נס"?
- (4) עבור שני מאורעות, A ו-B נתון: $P(A) = 0.6$, $P(\bar{B}) = 0.3$, $P(A \cap B) = 0.4$.
מצא את $P(A \cup B)$.
- (5) עבור שני מאורעות, A ו-B נתון: $P(\bar{A}) = 0.2$, $P(\bar{B}) = 0.5$, $P(A \cup B) = 0.95$.
מצא את $P(A \cap B)$.
- (6) עבור שני מאורעות, A ו-B נתון: $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.25$, $P(A \cup B) = 0.65$.
קבע האם המאורעות זרים והאם הם תלויים.
- (7) נתון כי שני מאורעות, A ו-B בלתי תלויים.
בנוסף נתון: $P(A) = 0.75$, $P(B) = 0.4$. מצא את $P(A \cup B)$.

תשובות סופיות:

- | | | | | | |
|-----|----------------------|-----|----------------------|-----|-----------------|
| (1) | $\frac{3}{10}$ | (2) | $\frac{3}{4}$ | (3) | $\frac{3}{4}$ |
| (4) | $P(A \cup B) = 0.9$ | (5) | $P(A \cap B) = 0.35$ | (6) | לא זרים ותלויים |
| (7) | $P(A \cup B) = 0.85$ | | | | |

שאלות עם שני ניסויים:

שאלות:

(8) בכד 3 כדורים כחולים ו-7 כדורים אדומים. אדם מוציא באקראי כדור מהכד, ולאחריו מוציא עוד כדור (ללא החזרה של הכדור הראשון).

- א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?
- ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?
- ג. מה ההסתברות ששני הכדורים אינם באותו צבע?

(9) בכד 3 כדורים כחולים, 2 כדורים אדומים ו-5 כדורים ירוקים. אדם מוציא באקראי כדור מהכד, מחזיר אותו לכד ואז מוציא עוד כדור.

- א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?
- ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?
- ג. מה ההסתברות ששני הכדורים אינם באותו צבע?

(10) בחדר 4 גברים ו-5 נשים. מוציאים באקראי שלושה אנשים מהחדר (בלי החזרה). מה ההסתברות שמתוך השלושה יש יותר גברים מנשים?

(11) נתונים שני כדים: בכד א' שלושה כדורים כחולים ואחד לבן ובכד ב' שני כדורים כחולים ושלושה לבנים. לואיזה מטילה מטבע לא הוגנת שבה הסיכוי לקבלת "עץ" כפול מהסיכוי לקבלת "פלי". אם יוצא "עץ" היא מוציאה כדור מכד א' ואם יוצא "פלי" היא מוציאה שני כדורים מכד ב'. מה ההסתברות שלא ייצא ללואיזה אף כדור לבן?

(12) ליואב יש בכיסו הימני 3 גולות כחולות ו-5 שחורות ובכיסו השמאלי 4 גולות כחולות ו-4 שחורות. יואב מוציא גולה מכיסו הימני. אם היא כחולה הוא מחזיר אותה לכיס הימני ואם היא שחורה הוא מעביר אותה לכיס השמאלי. אחר כך הוא מוציא גולה מכיסו השמאלי. מה ההסתברות ששתי הגולות שהוציא באותו צבע?

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{lll} \text{ג. } \frac{7}{15} & \text{ב. } \frac{8}{15} & \text{א. } \frac{1}{15} \quad (8) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{ג. } \frac{31}{50} & \text{ב. } \frac{19}{50} & \text{א. } \frac{9}{100} \quad (9) \end{array}$$

$$\frac{17}{42} \quad (10)$$

$$\frac{8}{15} \quad (11)$$

$$\frac{77}{144} \quad (12)$$

שאלות עם הסתברות מותנית:

שאלות:

- 13** בכד 3 כדורים כחולים ו-7 כדורים אדומים.
אדם מוציא באקראי כדור מהכד, ולאחריו מוציא עוד כדור.
א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?
ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?
ג. ידוע ששני הכדורים באותו צבע. מה ההסתברות ששניהם כחולים?

- 14** בכד 3 כדורים כחולים, 2 כדורים אדומים ו-5 כדורים ירוקים.
אדם מוציא באקראי כדור מהכד, מחזיר אותו לכד ואז מוציא עוד כדור.
א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?
ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?
ג. ידוע ששני הכדורים באותו צבע. מה ההסתברות ששניהם כחולים?

- 15** בחדר 4 גברים ו-5 נשים.
מוציאים באקראי שלושה אנשים מהחדר (בלי החזרה).
ידוע שמתוך השלושה יש יותר גברים מנשים.
מה ההסתברות שכולם גברים?

- 16** נתונים שני כדים: בכד א' שלושה כדורים כחולים ואחד לבן ובכד ב' שני כדורים כחולים ושלושה לבנים. לואיזה מטילה מטבע לא הוגנת שבה הסיכוי לקבלת "עץ" כפול מהסיכוי לקבלת "פלי". אם יוצא "עץ" היא מוציאה כדור מכד א' ואם יוצא "פלי" היא מוציאה שני כדורים מכד ב'.
א. מה ההסתברות שלא ייצא ללואיזה אף כדור לבן?
ב. ידוע שללואיזה לא יצא אף כדור לבן, מה ההסתברות שבהטלת המטבע יצא "עץ"?

- 17** במשחק מזל הסיכוי להרוויח 10 ₪ הוא 0.3 והסיכוי להרוויח 20 ₪ הוא 0.2.
ישנו סיכוי של 0.5 לא להרוויח כלל. אדם שיחק במשחק פעמיים וידוע שהרוויח יותר מ-20 ₪. מה הסיכוי שהרוויח 40 ₪?

- 18** בכד מספר מסוים של כדורים. 3 כחולים והשאר אדומים.
הסיכוי להוציא שני כדורים אדומים מהכד (בלי החזרה) הוא $\frac{5}{14}$.
כמה כדורים בכד?

תשובות סופיות:

- (13) א. $\frac{1}{15}$ ב. $\frac{8}{15}$ ג. $\frac{1}{8}$
- (14) א. $\frac{9}{100}$ ב. $\frac{19}{50}$ ג. $\frac{9}{38}$
- (15) $\frac{2}{17}$
- (16) א. $\frac{8}{15}$ ב. $\frac{15}{16}$
- (17) $\frac{1}{4}$
- (18) 8 כדורים.

שאלות עם נעלמים:

שאלות:

- 19** ההסתברות של צלף לפגוע במטרה בירייה הראשונה היא p והיא גדולה מההסתברות שלו להחטיא. אם הוא פוגע, עולה ההסתברות שלו לפגוע בירייה הבאה ב-0.1 ואם הוא מחטיא היא יורדת ב-0.1. הצלף ירה למטרה פעמיים. ההסתברות שפגע במטרה בדיוק בירייה אחת היא 0.38.
- א. מצא את p .
- ב. מה ההסתברות שהצלף פגע פעמיים במטרה אם ידוע שהוא פגע בה לפחות פעם אחת?

תשובות סופיות:

- 19** א. $p = 0.6$ ב. $\frac{21}{40}$

שאלות הנפתרות על ידי טבלה דו-מימדית:

שאלות:

- (20)** 70% מאוהדי מכבי ת"א הם גברים והשאר נשים. 40% מהאוהדים מעשנים. נתון כי 45% מהאוהדים הם גברים שאינם מעשנים.
א. מהו אחוז הנשים המעשנות מבין אוהדי מכבי?
ב. בוחרים באקראי אוהד מכבי. מה ההסתברות שהוא גבר או שהוא מעשן?
ג. בוחרים באקראי אישה שאוהדת מכבי. מה ההסתברות שהיא מעשנת?
ד. האם מין האוהד והעובדה שהוא מעשן הם מאורעות תלויים?
- (21)** 65% מהפחיות המיוצרות במפעל משקאות הן רגילות והשאר דיאט. 80% מהפחיות המיוצרות תקינות והשאר פגומות. נתון כי 7% מהפחיות הן פחיות דיאט פגומות.
א. בוחרים באקראי פחית. מה ההסתברות שהיא פחית רגילה ותקינה?
ב. בוחרים באקראי פחית דיאט. מה ההסתברות שהיא פגומה?
ג. בוחרים באקראי פחית פגומה. מה ההסתברות שהיא דיאט?
ד. האם סוג הפחית ותקינותה הם מאורעות תלויים?
- (22)** 80% מהתלמידים בכיתה עברו את המבחן בתנ"ך ו-70% עברו את המבחן בהיסטוריה. 75% מבין התלמידים שעברו את המבחן בתנ"ך עברו גם את המבחן בהיסטוריה.
א. בוחרים באקראי תלמיד. מה ההסתברות שהוא נכשל בשתי הבחינות?
ב. תלמיד נכשל במבחן בהיסטוריה. מה ההסתברות שהוא עבר את המבחן בתנ"ך?
ג. ידוע שתלמיד עבר בדיוק מבחן אחד. מה ההסתברות שזה המבחן בתנ"ך?
- (23)** בעיר גדולה ל-80% מהתושבים יש רישיון נהיגה. מבין בעלי רישיון הנהיגה 30% הם גברים. 60% מהגברים הם בעלי רישיון נהיגה. בחרו באקראי שתי נשים מהעיר. מה ההסתברות שלשתיהן אין רישיון נהיגה?
- (24)** 10% מהאנשים באוכלוסייה עיוורי צבעים. קיימת בדיקה הבוחנת אם אדם הוא עיוור צבעים. אם עיוור צבעים ניגש לבדיקה ישנו סיכוי של 80% שהבדיקה תקבע שהוא עיוור צבעים. אם אדם שאינו עיוור צבעים ניגש לבדיקה ישנו סיכוי של 5% שהבדיקה תקבע שהוא עיוור צבעים. מהם אחוזי האמינות של הבדיקה (אחוז המקרים בהם הבדיקה מאבחנת נכונה את הנבדק)?

(25) בסניף "תנו לחיות לחיות" בירושלים יש כלבים וחתולים בלבד, בעלי פרווה כהה או פרווה בהירה. 55% מהחיות בסניף הם כלבים. אחוז החתולים בעלי הפרווה הכהה גדול פי 3 מאחוז הכלבים בעלי הפרווה הבהירה. מבין בעלי הפרווה הכהה 60% הם כלבים. בוחרים באקראי חתול מהסניף. מה ההסתברות שהוא בהיר פרווה?

(26) בית ספר תיכון מציע לתלמידיו 3 מגמות ריאליות לבחירה: פיזיקה, כימיה ומחשבים. 40% מתלמידי מגמות אלה הם בנים. הבנים מהווים $\frac{2}{5}$ מתלמידי הפיזיקה, $\frac{5}{12}$ מתלמידי הכימיה ו- $\frac{1}{3}$ מתלמידי המחשבים. $\frac{1}{4}$ מהבנים הם תלמידי פיזיקה.

- א. האם יש תלות בין העובדה שתלמיד לומד פיזיקה למין התלמיד?
 ב. מהו אחוז לומדי המחשבים מקרב הבנים?

תשובות סופיות:

- (20)** א. 15% ב. 0.85 ג. 0.5 ד. כן.
(21) א. 0.52 ב. 0.2 ג. 0.35 ד. בלתי תלויים.
(22) א. 0.1 ב. $\frac{2}{3}$ ג. $\frac{2}{3}$
(23) $\frac{1}{225}$
(24) 93.5%
(25) $\frac{1}{3}$
(26) א. בלתי תלויים. ב. 12.5%

התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות יסודיות:

שאלות:

- (27) אדם מסובב חמש פעמים סביבון. מה ההסתברות שיקבל פעמיים "נס"?
- (28) מה ההסתברות לקבלת 5 פעמים "נס" בשמונה סיבובי סביבון?
- (29) הסיכוי לעבור את מבחן התיאוריה הוא 0.7. עשרה אנשים ניגשים למבחן התיאוריה. מהי ההסתברות שבדיוק שישה מהם יעברו?
- (30) בכד 6 כדורים כחולים ו-4 לבנים. אדם מוציא מהכד כדור, מסתכל על צבעו ומחזיר אותו לכד. הוא חוזר על הפעולה 4 פעמים נוספות. מה ההסתברות שמתוך חמשת הכדורים הוציא:
- בדיוק ארבע יהיו כחולים?
 - חמישה יהיו כחולים?
 - לפחות ארבעה יהיו כחולים?
 - הרוב יהיו כחולים?
 - לפחות אחד יהיה כחול?
 - הראשון והאחרון בלבד יהיו כחולים?

תשובות סופיות:

- (27) 0.264
- (28) 0.023
- (29) 0.2001
- (30) א. 0.259 ב. 0.078 ג. 0.337 ד. 0.683 ה. 0.98976 ו. 0.023

התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות עם הסתברות מותנית:

שאלות:

(31) בכד 6 כדורים כחולים ו-4 לבנים. אדם מוציא מהכד כדור, מסתכל על צבעו ומחזיר אותו לכד. הוא חוזר על הפעולה 4 פעמים נוספות. ידוע שרוב הכדורים שהוציא כחולים. מה ההסתברות שכולם כחולים?

(32) יערה מצליחה לקלוע לסל בשלושה מכל ארבעה ניסיונות. כדי להתקבל לנבחרת הכדורסל של בית הספר עליה להצליח לקלוע ברוב הפעמים מתוך 6 ניסיונות קליעה לסל. ידוע שיערה התקבלה לנבחרת הכדורסל. מה ההסתברות שהצליחה לקלוע את כל הקליעות?

(33) בוחרים שלושה גברים באקראי מעיר גדולה. ההסתברות שכולם מעשנים היא 0.027. מה ההסתברות שרובם מעשנים?

(34) בוחרים שלוש נשים מעיר גדולה. ההסתברות ששתיים מהן מעשנות קטנה פי 4 מההסתברות ששתיים מהן לא מעשנות. מה ההסתברות שכולן מעשנות?

(35) בכד 10 כדורים, חלקם לבנים והשאר שחורים. נמרוד מוציא 9 פעמים כדור מהכד (עם החזרה). הסיכוי שיצאו פי 2 כדורים שחורים מלבנים גדול פי $3\frac{3}{8}$ מהסיכוי שיצאו פי 2 כדורים לבנים משחורים. מצא כמה כדורים מכל צבע בכד.

תשובות סופיות:

(31) 0.114 (32) 0.214 (33) 0.216

(34) 0.008 (35) 4 לבנים, 6 שחורים.

התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות עם נעלמים:

שאלות:

- (36) בחדר x גברים ו- $3x$ נשים. מוציאים באקראי שני אנשים מהחדר. ההסתברות שהם יהיו מאותו מין היא 0.6.
 א. מצא את גודלו של x .
 ב. חוזרים על התהליך 4 פעמים.
 מה הסיכוי שבשלוש מתוך 4 הפעמים ייצאו מהחדר שתי נשים?

- (37) במבחן רב ברירה עם 5 שאלות שוות ניקוד, לכל שאלה יש n תשובות מהן רק אחת נכונה. ישנו סיכוי של 50% ששי יידע את התשובה הנכונה לשאלה במבחן. אם שי לא יודע את התשובה לשאלה הוא מנחש.
 ההסתברות ששי יקבל במבחן 60 גדולה פי $1\frac{1}{3}$ מההסתברות שיקבל 80.
 מצא את ערכו של n .

- (38) כדי להתקבל לקורס טיס יש לעבור גיבוש וראיון. כל המועמדים ניגשים גם לראיון וגם לגיבוש. 40% מהניגשים לגיבוש עוברים אותו ו-35% מהניגשים לראיון עוברים אותו. $\frac{5}{17}$ מאלה שלא התקבלו לקורס טיס לא התקבלו בגלל הריאיון בלבד. שלושה חברים ניסו להתקבל לקורס טיס. ידוע שרובם התקבלו. מה ההסתברות שכולם התקבלו?

תשובות סופיות:

- (36) א. $x = 4$ ב. 0.299
 (37) $n = 5$
 (38) $\frac{1}{18}$

קורס קדם במתמטיקה לתלמידים מנהל עסקים, כלכלה ומנהל, כלכלה וחשבונאות

פרק 16 - קומבינטוריקה - כלל המכפלה

תוכן העניינים

1. כללי 121

קומבינטוריקה – כלל המכפלה:

רקע:

כלל המכפלה:

כלל המכפלה הוא כלל שבאמצעותו אפשר לחשב את גודל המאורע או גודל מרחב המדגם.

אם לתהליך יש k שלבים: n_1 אפשרויות לשלב הראשון, n_2 אפשרויות לשלב השני... n_k אפשרויות לשלב k :

מספר האפשרויות לתהליך כולו יהיה: $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$

למשל, כמה אפשרויות יש למשחק בו מטיילים קובייה וגם מטבע? (הסבר בהקלטה)

$$n_1 = 6, n_2 = 2$$

$$n_1 \cdot n_2 = 6 \cdot 2 = 12$$

למשל, כמה לוחיות רישוי בני 5 תווים ניתן ליצור כאשר התו הראשון הוא אות אנגלית והיתר ספרות? (הסבר בהקלטה)

$$n_1 = 26, n_2 = 10, n_3 = 10, n_4 = 10, n_5 = 10$$

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5 = 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 260,000$$

שאלות:

- (1) חשבו את מספר האפשרויות לתהליכים הבאים :
 - א. הטלת קובייה פעמים.
 - ב. מספר תלת ספרתי.
 - ג. בחירת בן ובת מכתה שיש בה שבעה בנים ועשר בנות.
 - ד. חלוקת שני פרסים שונים לעשרה אנשים שונים כאשר אדם לא יכול לקבל יותר מפרס אחד.
- (2) במסעדה מציעים ארוחה עסקית.
 - א. בארוחה עסקית יש לבחור מנה ראשונה, מנה עיקרית ושתייה. האופציות למנה ראשונה הן : סלט ירקות, סלט אנטיפסטי ומרק היום. האופציות למנה עיקרית הן : סטייק אנטריקוט, חזה עוף בגריל, לזניה בשרית ולזניה צמחונית. האופציות לשתייה הן : קפה, תה ולימונדה.
 - ב. כמה ארוחות שונות ניתן להרכיב בעזרת התפריט הזה?
 - i. בארוחה סלט ירקות, לזניה בשרית ולימונדה.
 - ii. בארוחה סלט, לזניה ותה.
- (3) בוחרים באקראי מספר בין חמש ספרות. חשבו את ההסתברויות הבאות :
 - א. המספר הוא זוגי.
 - ב. במספר כל הספרות שונות.
 - ג. במספר כל הספרות זהות.
 - ד. במספר לפחות שתי ספרות שונות.
 - ה. במספר לפחות שתי ספרות זהות.
 - ו. המספר הוא פלינדרום (מספר הנקרא מימין ומשמאל באות הצורה).
- (4) חישה אנשים אקראיים נכנסו למעלית בבניין בן 8 קומות. חשבו את ההסתברויות הבאות :
 - א. כולם ירו בקומה החמישית.
 - ב. כולם ירדו באותה קומה.
 - ג. כולם ירדו בקומה אחרת.
 - ד. ערן ודני ירדו בקומה השישית והיתר בשאר הקומות.

- (5) במפלגה חמישה עשר חברי כנסת. יש לבחור שלושה חברי כנסת לשלושה תפקידים שונים. בכמה דרכים ניתן לחלק את התפקידים הבאים אם:
- א. חבר כנסת יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
 - ב. חבר כנסת לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
- (6) מטילים קובייה 4 פעמים.
- א. מה ההסתברות שכל התוצאות תהינה זהות?
 - ב. מה ההסתברות שכל התוצאות תהינה שונות?
 - ג. מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהינה זהות?
 - ד. מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהינה שונות?
- (7) יש ליצור מילה בת חמש אותיות, לא בהכרח עם משמעות מאותיות ה-ABC (26 אותיות).
- א. מה ההסתברות שבמילה שנוצרה אין האותיות A, D ו-L?
 - ב. מה ההסתברות שבמילה שנוצרה כל האותיות זהות?
 - ג. מה ההסתברות שבמילה שנוצרה לפחות שתי אותיות שונות זו מזו?
 - ד. מה ההסתברות שהמילה היא פלינדרום? (מילה אשר משמאל לימין, ומימין לשמאל נקראת אותו הדבר).
- (8) יוצרים קוד עם a ספרות (מותר לחזור על אותה ספרה בקוד). חשבו את ההסתברויות הבאות: (בטאו את תשובותיכם באמצעות a).
- א. בקוד אין את הספרה 5.
 - ב. בקוד מופיעה הספרה 3.
 - ג. בקוד לא מופיעות ספרות אי זוגיות.
- (9) במשחק מזל יש למלא טופס בו n משבצות. כל משבצת מסומנת בסימן V או X. בכמה דרכים שונות ניתן למלא את טופס המשחק המזל?

תשובות סופיות:

- | | | | | |
|----|------------------------|----------------------|-------------------------|--------------------------------------|
| (1 | א. 36 | ב. 900 | ג. 70 | ד. 90 |
| (2 | א. 36 | ב. i. $\frac{1}{36}$ | ב. ii. $\frac{1}{9}$ | |
| (3 | א. 0.5 | ב. 0.3024 | ג. 0.0001 | ד. 0.9999 |
| (4 | א. $\frac{1}{8^5}$ | ב. $\frac{1}{8^4}$ | ג. 0.205 | ד. $\frac{1 \cdot 1 \cdot 7^3}{8^5}$ |
| (5 | א. 3375 | ב. 2730 | | |
| (6 | א. $\frac{1}{216}$ | ב. $\frac{5}{18}$ | ג. $\frac{13}{18}$ | ד. $\frac{215}{216}$ |
| (7 | א. $\frac{23^5}{26^5}$ | ב. $\frac{1}{26^4}$ | ג. $1 - \frac{1}{26^4}$ | ד. $\frac{1}{26^2}$ |
| (8 | א. 0.9^a | ב. $1 - 0.9^a$ | ג. 0.5^a | |
| (9 | 2^n | | | |

קורס קדם במתמטיקה לתלמידים מנהל עסקים, כלכלה ומנהל, כלכלה וחשבונאות

פרק 17 - קומבינטוריקה- תמורה - סידור עצמים בשורה

תוכן העניינים

1. כללי.....125

קומבינטוריקה – תמורה – סידור עצמים בשורה:

רקע:

תמורה:

מספר האפשרויות לסדר n עצמים שונים בשורה: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$.

הערה: $0! = 1$.

דוגמאות (הפתרונות בהקלטה):

- בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות: a, b, c, d ?
- בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות: a, b, c, d , כך שהאותיות: a, b יהיו ברצף?
- בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות: a, b, c, d , כך שהאותיות: a, b יופיעו בתור הרצף ba ?

שאלות:

- (1) חשבו : בכמה אופנים
א. אפשר לסדר 4 ספרים שונים על מדף?
ב. אפשר לסדר חמישה חיילים בטור?
- (2) סידרו באקראי 10 דיסקים שונים על מדף שמתוכם שניים בשפה העברית.
א. מה ההסתברות שהדיסקים בעברית יהיו צמודים זה לזה?
ב. מה ההסתברות שהדיסקים בעברית לא יהיו צמודים זה לזה?
ג. מה ההסתברות ששני הדיסקים בעברית יהיו כל אחד בקצה השני של המדף?
- (3) בוחנים 5 בנים ו-4 בנות בכיתה ומדרגים אותם לפי הציון שלהם בבחינה. נניח שאין תלמידים בעלי אותו ציון.
א. מהו מספר הדירוגים האפשריים?
ב. מהו מספר הדירוגים האפשריים אם מדרגים בנים ובנות בנפרד?
- (4) מסדרים 10 ספרים שונים על מדף.
א. בכמה אופנים ניתן לסדר את הספרים על המדף?
שני ספרים מתוך ה-10 הם ספרים בסטטיסטיקה.
ב. מה ההסתברות שאם נסדר את הספרים באקראי, הספרים בסטטיסטיקה יהיו צמודים זה לזה?
ג. מה ההסתברות שהספרים בסטטיסטיקה לא יהיו צמודים זה לזה?
ד. מה ההסתברות שהספרים בסטטיסטיקה יהיו בקצות המדף (כל ספר בקצה אחר)?
- (5) אדם יצר בנגן שלו פלייליסט (רשימת השמעה) של 12 שירים שונים. 4 בשפה העברית, 5 באנגלית ו-3 בצרפתית. האדם הריץ את הפלייליסט באקראי.
א. מה ההסתברות שכל השירים באנגלית יופיעו כשירים הראשונים כמקשה אחת?
ב. מה ההסתברות שכל השירים באנגלית יופיעו ברצף (לא חובה ראשונים)?
ג. מה ההסתברות ששירים באותה השפה יופיעו ברצף (כלומר כל השירים באנגלית ברצף, כל השירים בעברית ברצף וכך גם השירים בצרפתית)?

- 6) 4 בנים ו-4 בנות התיישבו באקראי בשורת כיסאות 1-8 בקולנוע.
- א. מה ההסתברות שיוסי ומיכל לא ישבו זה לצד זה?
- ב. מה ההסתברות שהבנים יתיישבו במקומות האי-זוגיים?
- ג. מה ההסתברות שכל הבנים ישבו זה לצד זה?
- ד. מה ההסתברות שהבנים ישבו זה לצד זה והבנות תשבנה זו לצד זו?

תשובות סופיות:

- 1) א. 0.24 ב. 0.120
- 2) א. 0.2 ב. 0.8 ג. 0.022
- 3) א. 0.362880 ב. 0.2880
- 4) א. 0.3628800 ב. 0.2 ג. 0.8 ד. $\frac{1}{45}$
- 5) א. $\frac{1}{792}$ ב. $\frac{1}{99}$ ג. $\frac{1}{4620}$
- 6) א. 0.75 ב. 0.014 ג. $\frac{1}{14}$ ד. $\frac{1}{35}$

קורס קדם במתמטיקה לתלמידים מנהל עסקים, כלכלה ומנהל, כלכלה וחשבונאות

פרק 18 - קומבינטוריקה - תמורה עם עצמים זהים

תוכן העניינים

1. כללי 128

קומבינטוריקה – תמורה עם עצמים זהים:

רקע:

תמורה עם חזרות:

אם יש בין העצמים שיש לסדר עצמים זהים, יש לבטל את הסידור הפנימי שלהם על ידי חלוקה בסידורים הפנימיים שלהם.

מספר האופנים לסדר n עצמים בשורה, ש- n_1 מהם זהים מסוג 1, n_2 זהים מסוג 2

$$\text{ו-} n_r \text{ זהים מסוג } r : \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_r!}$$

דוגמה (תשובה בהקלטה):

כמה מילים ניתן ליצור מכל האותיות הבאות: W, W, T, T, K, K

שאלות:

- (1) במשחק יש לצבוע שתי משבצות מתוך המשבצות הבאות:

--	--	--	--	--

בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את הצביעה?

- (2) בכמה אופנים שונים אפשר לסדר בשורה את האותיות: ב, ע, ב, ע, ג?
- (3) בבית נורות מקום ל-6 נורות. בחרו שתי נורות אדומות, שתי נורות צהובות ושתי נורות כחולות. כמה דרכים שונות יש לסדר את הנורות?
- (4) נרצה ליצור מספר מכל הספרות הבאות: 1, 2, 2, 2, 6. כמה מספרים כאלה אפשר ליצור?
- (5) במשחק בול פגיעה יש 10 משבצות, אדם צובע 4 משבצות מתוך ה-10. המשתתף השני צריך לנחש אילו 4 משבצות נצבעו. מה ההסתברות שבניחוש אחד יהיה בול פגיעה?
- (6) כמה אותות שונים, שכל אחד מורכב מ-10 דגלים שונים, ניתן ליצור, אם 4 דגלים הם לבנים, 3 כחולים, 2 אדומים ואחד שחור. דגלים שווי צבע זהים זה לזה לחלוטין.

תשובות סופיות:

- (1) 10.
 (2) 60.
 (3) 90.
 (4) 20.
 (5) $\frac{1}{210}$.
 (6) 12600.

קורס קדם במתמטיקה לתלמידים מנהל עסקים, כלכלה ומנהל, כלכלה וחשבונאות

פרק 19 - קומבינטוריקה- סידור עצמים במעגל

תוכן העניינים

1. סידור עצמים במעגל 130

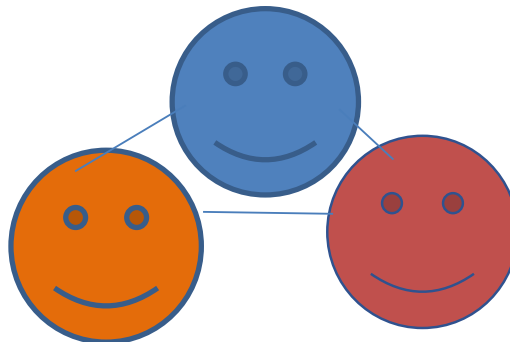
קומבינטוריקה – סידור עצמים במעגל:

רקע:

מספר האפשרויות לסדר n עצמים שונים במעגל בו אין מקומות מסומנים הוא: $(n-1)!$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

דנה, רמה ושדה רוצות ליצור מעגל ריקוד. בכמה דרכים שונות הן יכולות להחזיק אחת לשנייה את הידיים, כדי ליצור את המעגל?



שאלות:

- (1) מעצב פנים יצר ללקחותיו מניפת צבעים המוצגת במעגל. במניפה 12 צבעים שונים מתוכם 3 בגווני אפור, 3 בגווני לבן, 3 בגווני ירוק ו-3 בגווני צהוב. כמה מניפות שונות ניתן ליצור כאשר:
- א. גווני האפור צמודים זה לזה.
 - ב. צבעים באותו גוון צמודים זה לזה.



- (2) דני יוצר שרשרת חרוזים הבנויה מעשרה חרוזים בצבעים שונים. הוא משחיל את עשרת החרוזים באקראי. חשבו את ההסתברויות הבאות:
- א. הסידור יהיה בדיוק כמוראה בציור.
 - ב. החרוז הלבן והכתום יהיו בסמוך זה לזה.



- (3) אבא הכין עוגת יומולדת עגולה. הוא סידר 7 נרות כמוראה בשרטוט. הנרות זהים ונבדלים זה בזה בצבע: 2 כחולים זהים, 2 אדומים זהים, 2 צהובים זהים ו-1 כתום. סידור הנרות נעשה באקראי. חשבו את ההסתברויות הבאות:
- א. הנרות הצהובים סמוכים זה לזה.
 - ב. נרות באותו צבע סמוכים זה לזה.



- (4) n בנים ו- n בנות הסתדרו במעגל באקראי.
- א. מה הסיכוי שכל הבנים יסתדרו זה לצד זה בלי להתפצל?
 - ב. מה הסיכוי שכל הבנים יסתדרו זה לצד זה בלי להתפצל וגם כל הבנות יסתדרו זו לצד זו בלי להתפצל?
 - ג. מה הסיכוי שהסידור יהיה שמימין ומשמאל לכל בן תהיה בת?

תשובות סופיות:

(1) א. 2177280 ב. 7776

(2) א. $\frac{1}{9!}$ ב. $\frac{2}{9}$

(3) א. $\frac{1}{3}$ ב. $\frac{1}{15}$

(4) א. $\frac{(n!)^2}{(2n-1)!}$ ב. $\frac{(n!)^2}{(2n-1)!}$ ג. $\frac{(n-1)!(n!)}{(2n-1)!}$

קורס קדם במתמטיקה לתלמידים מנהל עסקים, כלכלה ומנהל, כלכלה וחשבונאות

פרק 20 - קומבינטוריקה - דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה

תוכן העניינים

1. כללי 133

קומבינטוריקה – דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה:

רקע:

מדגם סידור בדגימה עם החזרה:

מספר האפשרויות בדגימת k עצמים מתוך n עצמים שונים כאשר הדגימה היא עם החזרה והמדגם סדור הוא: n^k .

דוגמה:

בוחרים שלושה תלמידים מתוך עשרה לייצג ועד בו תפקידים שונים, תלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

כמה ועדים שונים ניתן להרכיב? $10^3 = 1,000$, $k = 3$, $n = 10$.

מדגם סידור ללא החזרה:

מספר האפשרויות בדגימת k עצמים שונים מתוך n עצמים שונים ($n \geq k$) כאשר המדגם סדור ואין החזרה של עצמים נדגמים הינו:

$$(n)_k = n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

דוגמה:

שלושה תלמידים נבחרים מתוך 10 לייצג וועד בו תפקידים שונים.

תלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד: $\frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

שאלות:

- (1) במפלגה 20 חברי כנסת, מעוניינים לבחור שלושה חברי כנסת לשלושה תפקידים שונים.
- א. חבר כנסת יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
כמה קומבינציות ישנן לחלוקת התפקידים?
- ב. חבר כנסת לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
כמה קומבינציות יש לחלוקת התפקידים?
- (2) במשחק מזל יש 4 משבצות ממוספרות מ-A (עד D). בכל משבצת יש למלא סיפרה (0-9). הזוכה הוא זה שניחש נכונה את כל הספרות בכל המשבצות בהתאמה.
- א. מה ההסתברות לזכות במשחק?
- ב. מה ההסתברות שבאף משבצת לא תהיה את הספרה 3 במספר הזוכה?
- ג. מה ההסתברות שהתוצאה 4 תופיע לפחות פעם אחת במספר הזוכה?
- (3) קבוצה מונה 22 אנשים, מה ההסתברות שלפחות לשניים מהם יהיה יום הולדת באותו התאריך?
- (4) שלושה אנשים קבעו להיפגש במלון הילטון בסינגפור. הבעיה היא שבסינגפור ישנם 5 מלונות הילטון.
- א. מה ההסתברות שכל השלושה ייפגשו?
- ב. מה ההסתברות שכל אחד יגיע לבית מלון אחר?
- (5) בכיתה 40 תלמידים. מעוניינים לבחור חמישה מהם לוועד כיתה. בכמה דרכים ניתן להרכיב את הוועד אם:
- א. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
- ב. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

תשובות סופיות:

- (1) א. 8000 ב. 6840
- (2) א. 0.0001 ב. 0.6561 ג. 0.3439
- (3) 0.476
- (4) א. 0.04 ב. 0.48
- (5) א. 40^5 ב. 78,960,960

קורס קדם במתמטיקה לתלמידים מנהל עסקים, כלכלה ומנהל, כלכלה וחשבונאות

פרק 21 - קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר וללא החזרה

תוכן העניינים

1. כללי 135

קומבינטוריקה – דגימה ללא סדר וללא החזרה:

רקע:

מדגם לא סדור בדגימה ללא החזרה:

מספר האפשרויות לדגום k עצמים שונים מתוך n עצמים שונים כאשר אין

משמעות לסדר העצמים הנדגמים ואין החזרה: $\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$

דוגמה:

מתוך 10 תלמידים יש לבחור שלושה נציגים לוועד ללא תפקידים מוגדרים:

$$\cdot \binom{10}{3} = \frac{10!}{7!3!} = 120$$

הערות:

$$\cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (1)$$

$$\cdot \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n \quad (2)$$

$$\cdot \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1 \quad (3)$$

שאלות:

- (1) בכיתה 15 בנות ו-10 בנים. יש לבחור 5 תלמידים שונים מהכיתה לנציגות הכיתה. בכמה דרכים אפשר להרכיב את הנציגות, אם:
- אין שום הגבלה לבחירה.
 - מעוניינים ש-3 בנות ו-2 בנים ירכיבו את המשלחת.
 - לא יהיו בנים במשלחת.
- (2) סטודנט מעוניין לבחור 5 קורסי בחירה בסמסטר זה. לפניו רשימה של 10 קורסים לבחירה: 5 במדעי הרוח, 3 במדעי החברה, 2 במתמטיקה.
- כמה בחירות שונות הוא יכול ליצור לעצמו?
 - כמה בחירות יש לו בהן 3 קורסים הם ממדעי הרוח?
 - כמה בחירות יש לו אם 2 מהן לא ממדעי הרוח?
 - כמה בחירות יש לו אם 2 ממדעי הרוח, 2 ממדעי החברה ו-1 ממתמטיקה?
- (3) בכיתה 30 תלמידים מתוכם 12 תלמידים ו-18 תלמידות.
- יש לבחור למשלחת 4 תלמידים מהכיתה. התלמידים נבחרים באקראי.
- מה ההסתברות שהמשלחת תורכב רק מבנות?
 - מה ההסתברות שבמשלחת תהיה רק בת אחת?
 - מה ההסתברות שבמשלחת תהיה לפחות בת אחת?
- (4) במשחק הלוטו יש לבחור 5 מספרים מתוך 45. המספרים הם 1-45.
- מה ההסתברות שבמשחק הזוכה כל המספרים הם זוגיים?
 - מה ההסתברות שבמספר הזוכה יש לכל היותר מספר זוגי אחד?
 - מה ההסתברות שבמספר הזוכה לפחות פעם אחת יש מספר זוגי?
 - מה ההסתברות שבמספר הזוכה כל המספרים גדולים מ-30?
- (5) בחפיסת קלפים ישנם 52 קלפים: 13 בצבע שחור בצורת עלה, 13 בצבע אדום בצורת לב, 13 בצבע אדום בצורת יהלום ו-13 בצבע שחור בצורת תלתן. מכל צורה (מתוך ה-4) יש 9 קלפים שמספרם 2-10, שאר הקלפים הם: נסיך, מלכה, מלך ואס (בעצם מדובר בקופסת קלפים רגילה ללא ג'וקר). שני אנשים משחקים פוקר. כל אחד מקבל באקראי 5 קלפים (ללא החזרה).
- מה ההסתברות שעודד יקבל את כל המלכים וערן את כל המלכות?
 - מה ההסתברות שאחד השחקנים יקבל את הקלף אס-לב?
 - מה ההסתברות שערן יקבל קלפים שחורים בלבד ועודד יקבל שני קלפים שחורים בדיוק?
 - מה ההסתברות שערן יקבל לפחות 3 קלפים שהם מספר (אס אינו מספר)?

(6) במכללה 4 מסלולי לימוד. בכל מסלול לימוד 5 מזכירות. יש ליצור וועד של 5 מזכירות מתוך כלל המזכירות במכללה. יוצרים וועד באופן אקראי. חשבו את ההסתברויות הבאות:

- א. כל המזכירות בוועד יהיו ממסלול "מדעי ההתנהגות".
 ב. כל המזכירות בוועד יהיו מאותו המסלול.
 ג. מכל מסלול תבחר לפחות מזכירה אחת.

(7) הוכיחו כי:
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

(8) $2n$ בנים ו- $2n$ בנות מתחלקים ל-2 קבוצות.
 א. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את החלוקה אם שתי הקבוצות צריכות להיות שוות בגודלן ויש בכל קבוצה מספר שווה של בנים ובנות?
 ב. בכמה דרכים ניתן לבצע את החלוקה אם יש מספר שווה של בנים ובנות בכל קבוצה אבל הקבוצות לא בהכרח בגודל שווה.

תשובות סופיות:

- | | | | |
|-----|-------------------------|-------------------------|------------|
| (1) | א. 53130 | ב. 20475 | ג. 3003 |
| (2) | א. 252 | ב. 100 | ג. 100 |
| | | | ד. 60 |
| (3) | א. 0.1117 | ב. 0.1445 | ג. 0.9819 |
| (4) | א. 0.02 | ב. 0.187 | ג. 0.972 |
| | | | ד. 0.00246 |
| (5) | א. 0 | ב. 0.1923 | ג. 0.009 |
| | | | ד. 0.837 |
| (6) | א. $6.45 \cdot 10^{-5}$ | ב. $2.58 \cdot 10^{-4}$ | ג. 0.3225 |
| (7) | שאלת הוכחה. | | |

(8) א. $\binom{2n}{n}^2$ ב. $\sum_{i=1}^n \binom{2n}{i}^2$

קורס קדם במתמטיקה לתלמידים מנהל עסקים, כלכלה ומנהל, כלכלה וחשבונאות

פרק 22 - קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר ועם החזרה

תוכן העניינים

1. כללי 138

קומבינטוריקה – דגימה ללא סדר ועם החזרה:

רקע:

מספר האפשרויות לבחור k עצמים (לא בהכרח שונים) מתוך n עצמים שונים, ללא חשיבות לסדר העצמים הנדגמים, ועצם יכול להיבחר יותר מפעם אחת:

$$\cdot \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

דוגמה:

בכמה דרכים שונות ניתן לחלק 4 כדורים זהים לשלושה תאים שבכל תא יש מקום ליותר מכדור אחד? (פתרון והסבר הרעיון בהקלטה)

סיכום כללי של המצבים האפשריים לדגימה:

מספר האפשרויות לבחירת k עצמים מתוך אוכלוסייה של n עצמים שונים		
ביצוע הדגימה	עם התחשבות בסדר הבחירה	ללא התחשבות בסדר הבחירה
עם החזרה	n^k	$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$
ללא החזרה	$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

שאלות:

- (1) בכמה דרכים יש להכניס 8 כדורים זהים לחמישה תאים כאשר תא יכול להכיל יותר מכדור אחד?
- (2) בכמה אופנים ניתן להכניס 5 מחברות זהות ל-3 תיקים שונים?
- (3) בכמה אופנים ניתן להכניס 8 כדורים לתוך 3 תאים שונים כאשר:
 - א. הכדורים זהים.
 - ב. הכדורים שונים זה מזה.
- (4) בכמה דרכים יש לסדר 10 משחקים ב-4 מגירות כאשר:
 - א. המשחקים שונים זה מזה.
 - ב. במשחקים זהים זה לזה.
- (5) מהו מספר הפתרונות השלמים האי שליליים למשוואה הבאה: $X_1 + X_2 = 3$.
- (6) מהו מספר הפתרונות השלמים האי-שליליים למשוואה הבאה: $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 20$.
- (7) במכירה פומבית הוצגו 4 פמוטי זהב זהים לחלוטין. על קניית היצירות התחרו 3 אספנים. אספן יכול היה לרכוש יותר מפמוט אחד. בהנחה וכל הפמוטים נמכרו, כמה אפשרויות מכירה לאספנים השונים ישנן?
- (8) נתונות האותיות: A, B, C ו-D. נרצה לבחור שתי אותיות מתוך קבוצת האותיות הללו כאשר מותר לבחור אותה אות יותר מפעם אחת אבל אין חשיבות לסדר האותיות שנבחרו. כמה דרכים ישנן לבחירה?
- (9) במשחק הלוטו החדש יש לבחור ארבעה מספרים מתוך המספרים 1-20. אין חשיבות לסדר הפנימי של המספרים, אלא רק לגלות אילו מספרים עלו בגורל. מה הסיכוי לגלות את המספרים שעלו בגורל אם:
 - א. אסור לבחור את אותו מספר יותר מפעם אחת.
 - ב. מותר לחזור על אותו מספר יותר מפעם אחת.

(10) ישנם 5 כדורים להכניס ל-6 תאים.

חשבו את מספר האפשרויות להכנסת הכדורים כאשר:

- א. הכדורים שונים ותא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
- ב. הכדורים זהים ותא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
- ג. הכדורים שונים ותא לא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
- ד. הכדורים זהים ותא לא יכול להכיל יותר מכדור אחד.

(11) ישנם k כדורים להכניס ל- n תאים ($n > k$).

חשבו את מספר האפשרויות להכנסת הכדורים כאשר:

- א. הכדורים שונים ותא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
- ב. הכדורים זהים ותא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
- ג. הכדורים שונים ותא לא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
- ד. הכדורים זהים ותא לא יכול להכיל יותר מכדור אחד.

תשובות סופיות:

(1) 495.

(2) 21.

(3) א. 45. ב. 6561.

(4) א. 4^{10} . ב. 286.

(5) 4.

(6) 1771.

(7) 15.

(8) 10.

(9) א. $\frac{1}{4845}$. ב. $\frac{1}{8855}$.

(10) א. 7776. ב. 252. ג. 720. ד. 6.

(11) א. n^k . ב. $\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$. ג. $(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

ד. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

קורס קדם במתמטיקה לתלמידים מנהל עסקים, כלכלה ומנהל, כלכלה וחשבונאות

פרק 23 - כלל ההכלה וההפרדה

תוכן העניינים

1. כלל ההכלה וההפרדה 142

כלל ההכלה וההפרדה:

רקע:

אנו מעוניינים בנוסחה לחישוב הסתברות של איחוד מאורעות. אם קיימים n מאורעות זרים בזוגות, הסיכוי לאיחוד המאורעות הוא סכום ההסתברויות של כלל המאורעות.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n p(A_i)$$

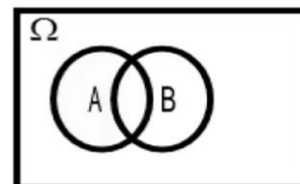


אם דנים במאורעות שאינם בהכרח זרים בזוגות, סכימת ההסתברויות של כלל המאורעות תוביל לספירה כפולה של חלק מהמאורעות. למשל: אדם מטיל קובייה. מה הסיכוי לקבל תוצאה זוגית או את התוצאה 2 לכל היותר?

בדוגמה שהוצגה לעיל מדובר בהסתברות לאיחוד שני מאורעות ומתקיים:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

אפשר להמחיש זאת באמצעות דיאגרמת ון:

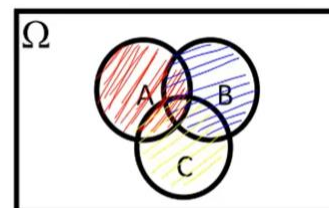


נוסחה זו היא נוסחת ההכלה וההפרדה לשני מאורעות.

במקרה של שלושה מאורעות נוסחת ההכלה וההפרדה תיראה כך:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

אפשר להמחיש זאת באמצעות דיאגרמת ון:



כעת נכליל את הנוסחה ל- n מאורעות:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \dots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)$$

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

מטילים חמש קוביות. מה ההסתברות שלפחות אחת מהתוצאות הבאות לא תתקבל באף אחת מהקוביות: 1, 2, 3, 4?

שאלות:

(1) רני קיבלה ליום הולדתה חמש מתנות וסידרה אותן בשורה מימין לשמאל.



- א. מה ההסתברות שהמתנה העטופה בנייר מנוקד לא תהיה הראשונה בשורה והמתנה העטופה בסרט ירוק לא תהיה האחרונה בשורה?
 ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהמאורעות הבאים יתרחש?
 i. המתנה העטופה בנייר מנוקד לא תהיה השנייה בשורה.
 ii. המתנה הקטנה ביותר לא תהיה השנייה בשורה.
 iii. המתנה העטופה בנייר חום לא תהיה השלישית בשורה.

(2) אדם הטיל קובייה ארבע פעמים. נגדיר את המאורעות הבאים:



- A : התוצאה 1 התקבלה לפחות פעם אחת.
 B : התוצאה 2 התקבלה לפחות פעם אחת.
 C : התוצאה 3 התקבלה לפחות פעם אחת.

חשבו את ההסתברויות הבאות:

- א. $P(A \cap B)$
 ב. $P(A \cap B \cap C)$

(3) מפזרים באופן מקרי חמישה כדורים בעשרה תאים. הכדורים ממוספרים מ-1 עד 5. אין הגבלה על מספר הכדורים בכל תא.



חשבו את ההסתברויות הבאות:

- א. לפחות אחד משני התאים השמאליים ריק.
 ב. לפחות אחד משלושת התאים השמאליים ריק.
 ג. שני התאים השמאליים תפוסים.
 ד. ארבעת התאים השמאליים תפוסים.

(4) בוחרים מספר אקראי מהמספרים: $\Omega = \{1, 2, \dots, 1000\}$.
 מה ההסתברות שהמספר שנבחר יתחלק לפחות באחד מהמספרים: 2, 3, 5?



- (5) עשרה ילדי גן נתבקשו לבחור גיבור-על מרשימה של 14 גיבורי-על. אם כל ילד בוחר באקראי מתוך הרשימה ללא תלות בילדים אחרים, מה ההסתברות שבדיוק שישה גיבורי-על ייבחרו?

- (6) ניסוי מקרי הוא בעל מרחב המדגם: $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$.
 $P(n)$ הוא ההסתברות לקבל את התוצאה n ממרחב המדגם.
 נתון ש: $P(n) = A \cdot 0.5^n$. כמו כן נתון ש- A הוא קבוע חיובי.
 א. מצאו את ערכו של הפרמטר A .
 ב. חשבו את: $P(n > 6)$.
 ג. חשבו את הסיכוי שהתוצאה שתתקבל בניסוי תהיה אי-זוגית.

- (7) יוצרים מספר בן 8 ספרות מהספרות: $1, 2, \dots, 8$. במספר שיוצרים כל ספרה מופיעה בדיוק פעם אחת.
 א. מה ההסתברות שבמספר לא מופיעים הרצפים: $12, 34, 56$?
 ב. מה ההסתברות שבמספר מופיע לפחות אחד מהרצפים: $123, 234, 567$?



- (8) מסדרים בשורה שמונה נעליים שהן ארבעה זוגות.
 מה ההסתברות שלפחות שתי נעליים שהן זוג יהיו זו לצד זו בשורה?

- (9) מפזרים באופן מקרי m כדורים ל- n תאים שונים ($m \geq n$). תא יכול להכיל גם יותר מכדור אחד. מצאו ביטוי להסתברות שבכל תא יהיה לפחות כדור אחד. אין צורך לפשט את הביטוי שקיבלתם.



- (10) בכיתה יש n תלמידים, ולכל תלמיד יומן אישי. המורה אסף את היומנים של כל התלמידים. יום למחרת חילק לכל תלמיד יומן מהיומנים שאסף, אך החלוקה הייתה אקראית (תלמיד לא בהכרח קיבל את היומן האישי שלו).
 א. מה ההסתברות שאף תלמיד לא קיבל את היומן האישי שלו?
 ב. למה שואפת ההסתברות מהסעיף הקודם אם: $n \rightarrow \infty$?



11 על השולחן עשרה מסמכים. מכניסים כל מסמך לאחת משמונה תיקיות ריקות באופן אקראי. לכל תיקייה צבע אחר. אין הגבלה על מספר המסמכים שיכולים להימצא בכל אחת מהתיקיות.

א. מה ההסתברות שבתיקייה האדומה יהיו בדיוק שני מסמכים?

ב. מה ההסתברות שהתיקייה הצהובה תישאר ריקה וגם בתיקייה הירוקה יהיה לפחות מסמך אחד?

ג. מה ההסתברות שיהיו לפחות שש תיקיות ריקות?

ד. מה ההסתברות שיהיו בדיוק שתי תיקיות ריקות?

תשובות סופיות:

(1) א. 0.65 ב. $\frac{59}{60}$

(2) א. 0.233 ב. $\frac{1}{12}$

(3) א. 0.8533 ב. 0.9565 ג. 0.1467 ד. 0.0096

(4) 0.734

(5) 0.1706

(6) א. 1 ב. 0.015625 ג. $\frac{2}{3}$

(7) א. 0.6756 ב. 0.0496

(8) 0.6571

(9)
$$1 - \frac{\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (n-i)^m \cdot (-1)^{i-1}}{n^m}$$

(10) א. $\sum_{i=2}^n \frac{(-1)^i}{i!}$ ב. 0.3679

(11) א. 0.2416 ב. 0.2068 ג. 0.00003 ד. 0.4286