

# קורס מבוא למתמטיקה לכלכלנים



## תוכן העניינים

|           |                                                                                 |     |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1.        | מבוא לאלגברה.....                                                               | 1   |
| 2.        | משוואות ממעלה ראשונה..... (ללא ספר)                                             | 2   |
| 3.        | משוואות ממעלה שנייה..... (ללא ספר)                                              | 3   |
| 4.        | משוואות ממעלה שלישית ומעלה..... (ללא ספר)                                       | 4   |
| 47.       | משוואות אלגבריות - חזרה ומשוואות נוספות.....                                    | 47  |
| 64.       | אי שיוויונים אלגבריים.....                                                      | 64  |
| 73.       | חשבון דיפרנציאלי - הפונקציה הממשית.....                                         | 73  |
| 82.       | חשבון דיפרנציאלי - הפונקציה הממשית - תכונות מתקדמות.....                        | 82  |
| 96.       | חשבון דיפרנציאלי - גבול של פונקציה.....                                         | 96  |
| 107.      | חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים.....                                          | 107 |
| 122.      | חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית פולינום.....                                   | 122 |
| 135.      | חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית מנה ושורש.....                                 | 135 |
| (ללא ספר) | חשבון דיפרנציאלי - הקשר שבין גרף הפונקציה וגרף הנגזרת.....                      |     |
| 173.      | חשבון דיפרנציאלי - פונקציות מעריכיות.....                                       | 173 |
| 189.      | חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות.....                                     | 189 |
| 205.      | חשבון אינטגרלי - האינטגרל הכללי.....                                            | 205 |
| 212.      | חשבון אינטגרלי - האינטגרל המסוים וחישובי שטחים.....                             | 212 |
| 240.      | חשבון אינטגרלי - פונקציה מעריכית, לוגריתמית וחזקה.....                          | 240 |
| 258.      | חשבון אינטגרלי - חזרה על מושג האינטגרל ואינטגרלים בשיטת *הנגזרת כבר בפנים*..... | 258 |
| 264.      | חשבון אינטגרלי - אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים.....                          | 264 |
| 266.      | חשבון אינטגרלי - אינטגרלים בשיטת ההצבה.....                                     | 266 |
| 268.      | אלגברה ליניארית - פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות.....                     | 268 |
| 279.      | אלגברה ליניארית - מטריצות.....                                                  | 279 |

# תוכן העניינים

|     |                              |     |
|-----|------------------------------|-----|
| 24. | אלגברה ליניארית - דטרמיננטות | 305 |
|-----|------------------------------|-----|

# קורס מבוא למתמטיקה לכלכלנים

## פרק 1 - מבוא לאלגברה

### תוכן העניינים

|     |                                           |    |
|-----|-------------------------------------------|----|
| 1.  | מספרים מכוונים                            | 1  |
| 2.  | חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים           | 5  |
| 3.  | סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים        | 7  |
| 4.  | אחוזים                                    | 8  |
| 5.  | כפל וחילוק שברים                          | 14 |
| 6.  | חיבור וחסור שברים                         | 16 |
| 7.  | בעיות יסודיות באחוזים                     | 20 |
| 8.  | חזרה על תבניות מספר                       | 22 |
| 9.  | כינוס איברים                              | 24 |
| 10. | פישוט ביטויים על ידי פתיחת סוגריים        | 26 |
| 11. | פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר | 29 |
| 12. | פירוק לגורמים של ביטויים אלגברים          | 31 |
| 13. | פירוק הטרינום                             | 34 |
| 14. | שברים אלגברים                             | 36 |
| 15. | כפל וחילוק של שברים אלגברים               | 40 |
| 16. | חיבור וחסור של שברים אלגברים              | 42 |
| 17. | שברים כפולים                              | 46 |



## מספרים מכוונים:

### סיכום כללי:

מספרים מכוונים הם מספרים שיכולים לקבל סימן חיובי או שלילי, כגון:

- בקניון גדול ישנן קומות 1, 2, 3, 4, וכן חניונים הממוקמים בקומות 1-, 2-, ו-3-.
- גובה פני הים מוגדר להיות 0 מטרים. העיר חיפה נמצאת כ-103 מטרים מעל פני הים בעוד שים המלח נמצא בגובה 426- מטרים.

### כללים:

- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים זהים, מחברים את המספרים עצמם והסימן נשאר.
- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים מנוגדים, מחסירים את המספרים זה מזה (הקטן מהגדול) וסימן התוצאה כסימן המספר הגדול מביניהם.
- כפל וחילוק יתבצע בשני חלקים:
  - ביצוע הפעולה על המספרים עצמם.
  - קביעת הסימן של התוצאה באופן הבא:
    - כפל או חילוק של שני מספרים בעלי אותו סימן - התוצאה תהיה חיובית.
    - כפל או חילוק של שני מספרים שונים סימן - התוצאה תהיה שלילית.

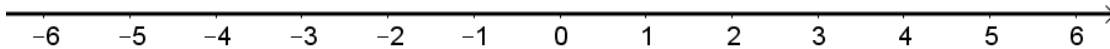
### הערה:

אם יש רצף של מכפלות (או חילוקים), סימן התוצאה תלוי במספר הפעמים שבהם מופיע סימן שלילי (-). אם הסימן מופיע מספר זוגי של פעמים התוצאה חיובית, ואם הוא מופיע מספר אי-זוגי של פעמים אזי התוצאה שלילית.

## שאלות:

(1) סמנו את המספרים הבאים על ציר המספרים בהתאמה:

$$-3\frac{1}{2}, 4, 1\frac{1}{3}, -5, -\frac{1}{2}, 2, 0, \frac{1}{2}, -2$$



(2) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

ב.  $-3-2$

א.  $3+2$

ד.  $-3+2$

ג.  $3-2$

ו.  $7+10$

ה.  $-1-4$

ח.  $-7+3$

ז.  $-6+5$

(3) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

ב.  $5-8-12+17$

א.  $5+7-23+1$

ד.  $-4-11+2+9$

ג.  $3-14+2+6$

ו.  $-7-13+5-3$

ה.  $6-21+3-7$

(4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

ב.  $4 \cdot (-7)$

א.  $4 \cdot 9$

ד.  $(-5) \cdot (-3)$

ג.  $(-6) \cdot (-5)$

ו.  $(-8) \cdot 5$

ה.  $(-2) \cdot 8$

ח.  $2 \cdot 3 \cdot 3$

ז.  $(-2) \cdot (-3) \cdot (-3)$

י.  $(-2) \cdot (-3) \cdot 3$

ט.  $(-2) \cdot 3 \cdot (-3)$

יב.  $(-2) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-2)$

יא.  $2 \cdot 3 \cdot (-3)$

יד.  $1 \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot 2$

יג.  $(-1) \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot 2$

5) מהו הסימן של תוצאת המכפלה בכל מקרה :

א.  $(-2) \cdot (-4) \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot (-6) \cdot (-5)$

ב.  $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot 6 \cdot (-5)$

ג.  $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot (-6) \cdot (-5)$

ד.  $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot 6 \cdot 5$

6) חשבו את ערכי הביטויים הבאים :

ב.  $(-30) : 3$

א.  $(-25) : (-5)$

ד.  $(-32) : (-4)$

ג.  $40 : (-10)$

ו.  $4 : (-16)$

ה.  $(-6) : 18$

7) חשבו את ערכי הביטויים הבאים :

ב.  $\frac{42}{-6}$

א.  $\frac{-60}{12}$

ד.  $\frac{-12}{-3}$

ג.  $\frac{32}{-4}$

8) מה התוצאה של כל אחת מהפעולות הבאות :

ב.  $(-2) \cdot 0$

א.  $0 : 5$

ד.  $6 : 0$

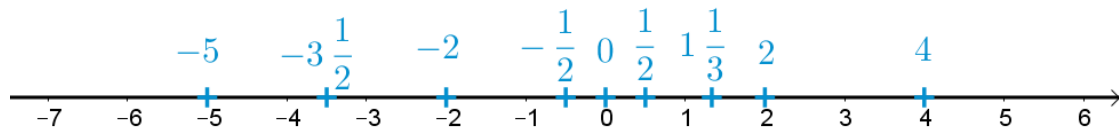
ג.  $0 \cdot (-3) \cdot 4$

ו.  $0 - 4$

ה.  $0 + 4$

## תשובות סופיות:

(1) להלן מערכת הצירים:



- (2) א. 5    ב. -5    ג. 1    ד. -1    ה. -5
- ו. 17    ז. -1    ח. -4
- (3) א. -10    ב. 2    ג. -3    ד. -4    ה. -19    ו. -18
- (4) א. 36    ב. -28    ג. 30    ד. 15    ה. -16
- ו. -40    ז. -18    ח. 18    ט. 18    י. 18
- יא. -18    יב. 36    יג. -16    יד. 16    טו. -
- (5) א. +    ב. +    ג. -    ד. -
- (6) א. 5    ב. -10    ג. -4    ד. 8    ה.  $-\frac{1}{3}$     ו.  $-\frac{1}{4}$
- (7) א. -5    ב. -7    ג. -8    ד. 4
- (8) א. 0    ב. 0    ג. 0    ד. לא מוגדר    ה. 4    ו. -4

## חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

פעולת החזקה היא צורה מקוצרת שמייצגת פעולת כפל של אותו מספר בעצמו מספר פעמים. סימון החזקה הוא באופן הבא:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

כאשר  $a$  נקרא הבסיס ו- $n$  נקראת החזקה.

#### הערות:

- כאשר הבסיס חיובי, התוצאה תמיד תהיה חיובית ללא קשר האם החזקה היא זוגית או אי-זוגית.
- כאשר הבסיס שלילי, התוצאה תהיה חיובית אם החזקה היא זוגית ושלילית אם החזקה היא אי-זוגית.

#### הגדרה:

פעולת השורש היא הפוכה לפעולת החזקה והיא מאפשרת למצוא את בסיס החזקה. סימון השורש הוא באופן הבא:

$$\sqrt[n]{a}$$

כאשר  $a$  נקרא הבסיס ו- $n$  נקרא סדר השורש.

#### הערות:

- שורש למספר זוגי יכול להיות מסדר זוגי או אי-זוגי.
- שורש למספר שלילי יכול להיות מסדר אי-זוגי בלבד.

## שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- |              |               |
|--------------|---------------|
| א. $3^2$     | ב. $3^3$      |
| ג. $(-3)^3$  | ד. $(-2)^3$   |
| ה. $4^3$     | ו. $3^4$      |
| ז. $(-5)^3$  | ח. $10^4$     |
| ט. $-(-3)^4$ | י. $-5^4$     |
| יא. $-4^3$   | יב. $-(-2)^6$ |

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- |                    |                      |
|--------------------|----------------------|
| א. $\sqrt[3]{-27}$ | ב. $\sqrt[4]{625}$   |
| ג. $\sqrt[4]{-16}$ | ד. $\sqrt[5]{-32}$   |
| ה. $-\sqrt[4]{81}$ | ו. $-\sqrt[3]{1000}$ |

## תשובות סופיות:

- |           |          |              |         |         |         |
|-----------|----------|--------------|---------|---------|---------|
| (1) א. 9  | ב. 27    | ג. -27       | ד. -8   | ה. 64   | ו. 81   |
| ז. -125   | ח. 10000 | ט. -81       | י. -625 | יא. -64 | יב. -64 |
| (2) א. -3 | ב. 5     | ג. לא מוגדר. | ד. -2   | ה. -3   | ו. -10  |

## סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים:

### סיכום כללי:

### סדר פעולות חשבון:

- פעולות כפל וחילוק קודמות לפעולות חיבור וחיסור.
- פעולות חזקה ושורש קודמות לפעולות כפל וחילוק.
- סוגריים קודמים לכל.

### שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- א.  $\sqrt{81} + 3 \cdot 2^3 - 40 : 8$       ב.  $(-3)^2 : 9 - 2 \cdot (-4^2)$
- ג.  $\sqrt{144} - 20 : 4 + 3 \cdot (-2)^2$       ד.  $3 + 4 \cdot [-3 + 4 \cdot (-2)] + \sqrt{10 + 6}$
- ה.  $(-3)^4 : (-9) - 5 \cdot (-2)^3$       ו.  $-\sqrt{9} + 5^2 : (-4 - 1) - 24 : 12 \cdot 3$
- ז.  $-2^5 : (-8) + 4^2 - 3 \cdot 5$       ח.  $\sqrt[3]{-27} + 4 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3^3$
- ט.  $[6 \cdot (-1)^4 - 10 \cdot (-1)^3] \cdot (-1)^5$       י.  $(8 - \sqrt[3]{64}) \cdot (2 \cdot (-4) - \sqrt[5]{243})$
- יא.  $\frac{3^2 \cdot (8 - 2 \cdot 3)^3}{(5^2 \cdot 3 - 72) \cdot (-4)} + 2 \cdot \{15 - 20 : (4 + 3 \cdot 2)\}$

### תשובות סופיות:

- (1) א. 28      ב. 33      ג. 19      ד. -37      ה. 31      ו. -14
- ז. 5      ח. -21      ט. -16      י. -44      יא. 20

## אחוזים:

### סיכום כללי:

#### הגדרה כללית - שבר:

השבר הוא חלק מתוך השלם. מקובל לסמן שבר באמצעות קו שבר המפריד בין המונה (החלק העליון) למכנה (החלק התחתון) באופן הבא:

$$\frac{\text{מונה}}{\text{מכנה}}$$

#### ישנם שלושה סוגים אפשריים של שברים:

- שבר פשוט – בו המונה קטן מהמכנה (ולכן תמיד יהיה קטן מ-1).
- שבר מדומה – בו המונה גדול מהמכנה (יהיה גדול בערכו מ-1).
- שבר מעורב – המכיל שילוב של מספר שלם ושבר כלשהו.

#### שבר עשרוני:

שבר שהמכנה שלו הוא מספר המהווה כפולות של 10 כגון: 10, 100, 1000 ... שבר עשרוני מיוצג ע"י נקודה עשרונית אשר מבדילה בין החלק שלם לחלק השברי באופן הבא:

$$\underbrace{XX}_{\text{שברים שלמים}}.\underbrace{YYY}_{\text{שברים שלמים}}$$

כדי להמיר שבר פשוט לשבר עשרוני המכנה צריך להיות בכפולות של 10.

#### הגדרה - אחוז:

השבר  $\frac{1}{100}$  מוגדר להיות אחוז אחד ומסומן באופן הבא: 1%.

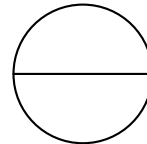
באופן זה השבר  $\frac{45}{100}$  יכתב: 45%, והשבר  $\frac{145}{100}$  יכתב: 145%.



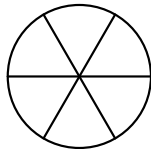
## שאלות:

**(12)** צבע את החלקים המתאימים בכל עיגול:

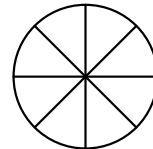
א. צבע  $\frac{1}{2}$  מהעיגול



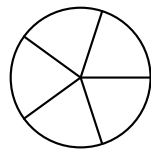
ב. צבע  $\frac{1}{6}$  מהעיגול



ג. צבע  $\frac{3}{8}$  מהעיגול

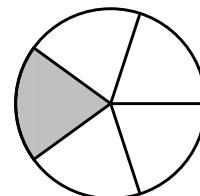


ד. צבע  $\frac{2}{5}$  מהעיגול

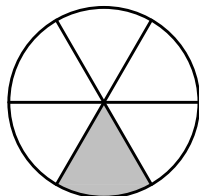


**(13)** כתוב את השבר המתאים לחלקים הצבועים בכל אחד מהמקרים הבאים:

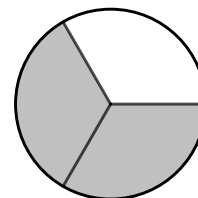
א. שבר:



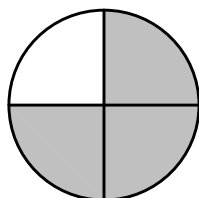
ב. שבר:



ג. שבר:



ד. שבר:



14) הרחב את השברים הבאים :

א. השבר  $\frac{1}{2}$  לפי מכנה 4, לפי מכנה 18, לפי מכנה 40.

ב. השבר  $\frac{3}{5}$  לפי מכנה 10, לפי מכנה 25, לפי מכנה 60.

ג. השבר  $\frac{5}{8}$  לפי מכנה 16, לפי מכנה 32, לפי מכנה 88.

15) צמצם את השברים הבאים ככל הניתן :

|                    |                    |                    |                     |
|--------------------|--------------------|--------------------|---------------------|
| א. $\frac{25}{30}$ | ב. $\frac{10}{30}$ | ג. $\frac{6}{24}$  | ד. $\frac{4}{20}$   |
| ה. $\frac{35}{56}$ | ו. $\frac{24}{42}$ | ז. $\frac{36}{48}$ | ח. $\frac{33}{121}$ |

16) המר את השברים המדומים הבאים לשברים מעורבים :

|                    |                    |                   |                   |
|--------------------|--------------------|-------------------|-------------------|
| א. $-\frac{20}{3}$ | ב. $\frac{19}{4}$  | ג. $\frac{12}{5}$ | ד. $\frac{22}{5}$ |
| ה. $-\frac{34}{6}$ | ו. $-\frac{50}{7}$ | ז. $\frac{47}{8}$ | ח. $\frac{60}{9}$ |

17) המר את השברים המעורבים הבאים לשברים מדומים :

|                    |                    |                    |                    |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| א. $1\frac{2}{3}$  | ב. $3\frac{5}{6}$  | ג. $4\frac{1}{2}$  | ד. $6\frac{1}{4}$  |
| ה. $11\frac{3}{4}$ | ו. $-2\frac{5}{8}$ | ז. $-6\frac{2}{7}$ | ח. $12\frac{7}{9}$ |

18) קבע איזה שבר גדול יותר בכל אחד מהמקרים הבאים :

|                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| א. $\frac{4}{10}$ או $\frac{3}{10}$ | ב. $\frac{7}{6}$ או $\frac{7}{8}$   |
| ג. $\frac{5}{6}$ או $\frac{2}{3}$   | ד. $\frac{7}{12}$ או $\frac{5}{18}$ |

**(19)** המר את השברים העשרוניים הבאים לשברים פשוטים מצומצמים או מעורבים :

|          |         |          |           |
|----------|---------|----------|-----------|
| א. 0.7   | ב. 0.07 | ג. 0.007 | ד. 0.34   |
| ה. 0.304 | ו. 0.65 | ז. 1.2   | ח. 1.02   |
| ט. 1.42  | י. 3.5  | יא. 6.03 | יב. 5.125 |

**(20)** המר את השברים הבאים לשברים עשרוניים :

|                     |                    |                     |                      |
|---------------------|--------------------|---------------------|----------------------|
| א. $\frac{3}{10}$   | ב. $\frac{3}{100}$ | ג. $\frac{3}{1000}$ | ד. $\frac{23}{1000}$ |
| ה. $\frac{1}{2}$    | ו. $\frac{3}{4}$   | ז. $\frac{2}{5}$    | ח. $\frac{4}{25}$    |
| ט. $\frac{7}{50}$   | י. $\frac{3}{20}$  | יא. $\frac{7}{8}$   | יב. $\frac{9}{16}$   |
| יג. $9\frac{1}{10}$ | יד. $3\frac{1}{5}$ | טו. $4\frac{7}{8}$  | טז. $-4\frac{1}{16}$ |

**(21)** כתוב את השברים הבאים בצורתם העשרונית (היעזר במחשבון וכתוב עד 3 ספרות אחרי הנקודה העשרונית) :

|                  |                  |                  |                   |
|------------------|------------------|------------------|-------------------|
| א. $\frac{2}{3}$ | ב. $\frac{5}{6}$ | ג. $\frac{3}{7}$ | ד. $\frac{2}{11}$ |
|------------------|------------------|------------------|-------------------|

**(22)** המר מאחוזים לשברים פשוטים :

|         |        |         |         |
|---------|--------|---------|---------|
| א. 25%  | ב. 32% | ג. 64%  | ד. 80%  |
| ה. 120% | ו. 5%  | ז. 300% | ח. 150% |

**(23)** המר משברים פשוטים לאחוזים :

|                    |                     |                  |                   |
|--------------------|---------------------|------------------|-------------------|
| א. $\frac{3}{4}$   | ב. $\frac{1}{8}$    | ג. $\frac{4}{5}$ | ד. $\frac{7}{20}$ |
| ה. $\frac{11}{40}$ | ו. $\frac{70}{125}$ | ז. $\frac{5}{6}$ | ח. $\frac{4}{9}$  |

## תשובות סופיות:

**(12) תשובה מודגמת בסרטון.**

$$\frac{3}{4} \cdot 7 \qquad \frac{2}{3} \cdot 2 \qquad \frac{1}{6} \cdot 6 \qquad \frac{1}{5} \cdot 8 \quad (13)$$

$$\frac{80}{128}, \frac{160}{256}, \frac{440}{700} \text{ .ג} \quad \frac{30}{50}, \frac{75}{125}, \frac{180}{300} \text{ .ב} \quad \frac{4}{8}, \frac{18}{36}, \frac{40}{80} \text{ .א (14)}$$

ה.  $\frac{5}{8}$       ז.  $\frac{1}{5}$       ח.  $\frac{1}{4}$       ט.  $\frac{1}{3}$       י.  $\frac{5}{6}$       (15)

$$\frac{3}{11} \cdot 11 \qquad \frac{3}{4} \cdot 4$$

$$-7\frac{1}{7} .\text{ا} \qquad -5\frac{4}{6} .\text{ه} \qquad 4\frac{2}{5} .\text{ز} \qquad 2\frac{2}{5} .\text{ح} \qquad 4\frac{3}{4} .\text{ب} \qquad -6\frac{2}{3} .\text{ن} \quad (16)$$

$$6\frac{2}{3} \cdot n \qquad 5\frac{7}{8} \cdot r$$

$$-\frac{21}{8} \text{ .ג} \quad \frac{47}{4} \text{ .ה} \quad \frac{25}{4} \text{ .ד} \quad \frac{9}{2} \text{ .א} \quad \frac{23}{6} \text{ .ב} \quad \frac{5}{3} \text{ .ז (17)}$$

$$\frac{115}{9} \cdot n \qquad -\frac{44}{7} \cdot r$$

$$\frac{7}{12} \cdot \text{ד} \quad \frac{5}{6} \cdot \text{ה} \quad \frac{7}{6} \cdot \text{ו} \quad \frac{4}{10} \cdot \text{ז} \quad (18)$$

$$\frac{13}{20} \text{ א.} \quad \frac{38}{125} \text{ ה.} \quad \frac{17}{50} \text{ ד.} \quad \frac{7}{1000} \text{ ג.} \quad \frac{7}{100} \text{ ב.} \quad \frac{7}{10} \text{ ז. (19)}$$

$$5\frac{1}{8} \text{ יב.} \quad 6\frac{3}{100} \text{ יא.} \quad 3\frac{1}{2} \text{ י.} \quad 1\frac{21}{50} \text{ ט.} \quad 1\frac{1}{50} \text{ ח.} \quad 1\frac{1}{5} \text{ ז.}$$

0.75 .א      0.5 .ב      0.023 .ג      0.003 .ד      0.03 .ה      0.3 .ו (20

0.875 .א'      0.15 .י'      0.14 .ט      0.16 .ח      0.4 .ז

יב. 0.5625      יג. 9.1      יד. 3.2      טו. 4.875      טז. -4.0625

$$0.1\bar{8} \cdot \tau \quad 0.428 \cdot \lambda \quad 0.8\bar{3} \cdot \mu \quad 0.\bar{6} \cdot \kappa \quad (21)$$

$$\frac{1}{20} \text{ .א} \quad \frac{1}{15} \text{ .ה} \quad \frac{4}{5} \text{ .ד} \quad \frac{16}{25} \text{ .ג} \quad \frac{8}{25} \text{ .ב} \quad \frac{1}{4} \text{ .א} \quad (22)$$

$$1\frac{1}{2} \cdot n = 3 \cdot n$$

23 א. 75% ב. 12.5% ג. 80% ד. 35% ה. 27.5% ו. 56%  
ז. 83.333% ח. 44.444%

## כפל וחילוק שברים:

### סיכום כללי:

- כשכופלים שני שברים יש לכפול מונה במונה ומכנה במכנה.
  - במידה ומדובר במספר שלם הכופל שבר, יש לכפול אותו במונה.
  - במידה ומדובר בשברים מעורבים, יש להפוך אותם תחילה לשברים מדומים ורק אז לבצע את פעולת הכפל.
- כדי לחלק שברים, יש לכפול את השבר הראשון בהופכי של השבר השני.
  - הופכי של שבר מסוים מתקבל ע"י החלפת המונה במכנה.

### שאלות:

#### (1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

|                                      |                                      |                                      |
|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| א. $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4}$   | ב. $\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6}$   | ג. $\frac{2}{9} \cdot \frac{8}{10}$  |
| ד. $3 \cdot \frac{4}{5}$             | ה. $6 \cdot \frac{2}{3}$             | ו. $\frac{12}{25} \cdot 5$           |
| ז. $1\frac{3}{5} \cdot 2\frac{1}{4}$ | ח. $3\frac{1}{2} \cdot 4\frac{2}{5}$ | ט. $3\frac{3}{7} \cdot 2\frac{2}{5}$ |
| י. $\left(\frac{4}{5}\right)^3$      | יא. $\frac{4}{5^3}$                  | יב. $\frac{4^3}{5}$                  |

#### (2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

|                                |                                  |                                   |
|--------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|
| א. $\frac{2}{5} : \frac{4}{9}$ | ב. $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$   | ג. $\frac{3}{25} : \frac{7}{10}$  |
| ד. $8 : \frac{2}{9}$           | ה. $10 : \frac{2}{3}$            | ו. $\frac{5}{6} : 3$              |
| ז. $\frac{2}{5} : 5$           | ח. $3\frac{3}{4} : 5\frac{5}{8}$ | ט. $2\frac{2}{5} : 1\frac{3}{15}$ |

## תשובות סופיות:

|                   |                    |                    |                     |                     |                     |
|-------------------|--------------------|--------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| א. $\frac{9}{20}$ | ב. $\frac{5}{21}$  | ג. $\frac{8}{45}$  | ד. $2\frac{2}{5}$   | ה. 4                | ו. $2\frac{2}{5}$   |
| ז. $3\frac{3}{5}$ | ח. $15\frac{2}{5}$ | ט. $8\frac{8}{35}$ | י. $\frac{64}{125}$ | יא. $\frac{4}{125}$ | יב. $12\frac{4}{5}$ |
| א. $\frac{9}{10}$ | ב. $1\frac{1}{2}$  | ג. $\frac{6}{35}$  | ד. 36               | ה. 15               | ו. $\frac{5}{18}$   |
| ז. $\frac{2}{25}$ | ח. $\frac{2}{3}$   | ט. 2               |                     |                     |                     |

## חיבור וחיסור שברים:

### סיכום כללי:

#### כפולה משותפת מינימלית:

בהינתן זוג מספרים  $a$  ו- $b$ , המספר הקטן ביותר אשר תוצאת חלוקתו במספרים הנ"ל מניבה מספר שלם נקרא הכפולה המינימלית שלהם.

#### הערות:

- כפולה מינימלית יכולה להיות גם עבור יותר משני מספרים.
- הכפולה המינימלית תהיה המכנה המשותף בעת פעולות חיבור וחיסור של שברים.

#### כללי החיבור והחיסור של שברים:

- חיבור וחיסור של שברים בעלי אותו המכנה מתבצע על המספרים שבמונה בלבד כאשר המכנה נשאר כפי שהוא.  
דוגמא:  $\frac{2}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2-3}{7} = \frac{-1}{7}$ ,  $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$
- חיבור וחיסור של שברים בעלי מכנים שונים מתבצע ע"י פעולת מכנה משותף.  
דוגמא:  $\frac{1}{4} - \frac{5}{6} = \frac{3}{12} - \frac{10}{12} = \frac{3-10}{12} = \frac{-7}{12}$ ,  $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{6+5}{15} = \frac{11}{15}$
- חיבור של שבר עם מספר שלם יתבצע באופן ישיר.  
דוגמא:  $3 + \frac{1}{4} = 3\frac{1}{4}$   
חיסור של שבר ממספר שלם יתבצע ע"י הוצאת שלמים מהשבר.  
דוגמא:  $3 - \frac{1}{4} = 2\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = 2\frac{3}{4}$   
דרך נוספת היא ע"י העברת המספר השלם לשבר מדומה:  $3 - \frac{1}{4} = \frac{12}{4} - \frac{1}{4} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$
- חיבור וחיסור של שברים מעורבים יתבצע ע"י העברתם לשברים מדומים תחילה.  
דוגמא:  $3\frac{2}{5} + 2\frac{1}{6} = \frac{17}{5} + \frac{13}{6} = \frac{17 \cdot 6}{30} + \frac{13 \cdot 5}{30} = \frac{102+65}{30} = \frac{167}{30} = 5\frac{17}{30}$   
ניתן גם לפצל ולבצע את פעולת החיבור (או החיסור) של המספרים השלמים תחילה,



ולאחר מכן לבצע את הפעולה עבור השברים.

$$\text{דוגמא: } 2\frac{3}{4} - 5\frac{1}{3} = (2-5) + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) = -3 + \left(\frac{9}{12} - \frac{4}{12}\right) = -3 + \frac{5}{12} = -2\frac{7}{12}$$

## שאלות:

(1) מצא את הכפולה המשותפת המינימלית של המספרים הבאים:

- |           |          |              |             |
|-----------|----------|--------------|-------------|
| א. 2 ו-3  | ב. 2 ו-4 | ג. 3 ו-5     | ד. 6 ו-10   |
| ה. 4 ו-10 | ו. 4 ו-6 | ז. 3, 5 ו-10 | ח. 2, 3 ו-8 |

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- |                                              |                                                 |
|----------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| א. $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}$               | ב. $\frac{5}{9} + \frac{2}{9}$                  |
| ג. $\frac{4}{13} + \frac{9}{13}$             | ד. $\frac{7}{8} + \frac{7}{8}$                  |
| ה. $\frac{7}{8} - \frac{3}{8}$               | ו. $\frac{8}{9} - \frac{7}{9}$                  |
| ז. $\frac{2}{12} - \frac{5}{12}$             | ח. $\frac{2}{5} - \frac{6}{5}$                  |
| ט. $\frac{2}{8} + \frac{5}{8} + \frac{6}{8}$ | י. $\frac{7}{15} + \frac{8}{15} - \frac{6}{15}$ |

(3) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- |                                              |                                               |
|----------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| א. $\frac{1}{2} + \frac{4}{3}$               | ב. $\frac{3}{5} + \frac{1}{10}$               |
| ג. $\frac{4}{6} - \frac{1}{12}$              | ד. $\frac{3}{6} - \frac{5}{8}$                |
| ה. $\frac{5}{4} + \frac{7}{2} + \frac{2}{8}$ | ו. $\frac{7}{3} + \frac{6}{5} + \frac{3}{10}$ |
| ז. $\frac{4}{7} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$ | ח. $\frac{1}{4} + \frac{2}{8} - \frac{3}{5}$  |

(4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $2 + \frac{5}{6}$

ב.  $2 - \frac{5}{6}$

ג.  $2\frac{1}{4} + \frac{5}{6}$

ד.  $2\frac{1}{4} - \frac{5}{6}$

ה.  $3\frac{2}{3} + 4\frac{1}{4}$

ו.  $5\frac{7}{8} - 6\frac{1}{2}$

ז.  $2 + \frac{5}{6} - \frac{1}{9}$

ח.  $\frac{3}{4} - 1\frac{1}{5} + \frac{8}{20}$

(5) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) + 2\frac{1}{3}$

ב.  $\frac{3}{14} : \frac{2}{7} + \frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{4} - \frac{2}{5}$

ג.  $\frac{5}{11} \cdot 2\frac{3}{4} - 6 : \frac{2}{5}$

ד.  $2\frac{4}{5} : \frac{9}{10} \cdot \frac{6}{7} + \frac{1}{6}$

ה.  $\frac{5}{6} : \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot 3\frac{1}{4}$

## תשובות סופיות:

|                     |                       |                      |                       |                      |                          |
|---------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|--------------------------|
| 12. ו.              | 20. ה.                | 30. ד.               | 15. ג.                | 4. ב.                | 6. א. (1                 |
|                     |                       |                      |                       | 24. ח.               | 30. ז.                   |
| $\frac{1}{9}$ . ו.  | $\frac{1}{2}$ . ה.    | $1\frac{3}{4}$ . ד.  | 1. ג.                 | $\frac{7}{9}$ . ב.   | $\frac{4}{5}$ . א. (2    |
|                     |                       | $\frac{3}{5}$ . י.   | $1\frac{5}{8}$ . ט.   | $-\frac{4}{5}$ . ח.  | $-\frac{1}{4}$ . ז.      |
| $3\frac{5}{6}$ . ו. | 5. ה.                 | $-\frac{1}{8}$ . ד.  | $\frac{7}{12}$ . ג.   | $\frac{7}{10}$ . ב.  | $1\frac{5}{6}$ . א. (3   |
|                     |                       |                      |                       | $-\frac{1}{10}$ . ח. | $\frac{19}{21}$ . ז.     |
| $-\frac{5}{8}$ . ו. | $7\frac{11}{12}$ . ה. | $1\frac{5}{12}$ . ד. | $3\frac{1}{12}$ . ג.  | $1\frac{1}{6}$ . ב.  | $2\frac{5}{6}$ . א. (4   |
|                     |                       |                      |                       | $-\frac{1}{20}$ . ח. | $2\frac{13}{18}$ . ז.    |
|                     | $3\frac{5}{18}$ . ה.  | $2\frac{5}{6}$ . ד.  | $-13\frac{3}{4}$ . ג. | $1\frac{1}{10}$ . ב. | $2\frac{11}{24}$ . א. (5 |

## בעיות יסודיות באחוזים:

### סיכום כללי:

נוסחה לביצוע חישובים עם אחוזים:

$$\text{תמורת האחוז} = \text{שלם} \cdot \frac{\text{אחוז}}{100}$$

למשל, בהינתן גודל שלם 120, אשר יש לחשב כמה הם 40 אחוזים ממנו, נקבל לפי

$$\text{הנוסחה: } 48 = 120 \cdot \frac{40}{100}, \text{ כלומר: תמורת האחוז 40 מהגודל 120 היא 48.}$$

### שאלות:

- (1) בכיתה 30 תלמידים. 60% מתוכם בנות.
  - א. כמה בנות בכיתה?
  - ב. כמה בנים בכיתה?
- (2) בכיתה 28 בנות המהוות 70% מכלל התלמידים בכיתה.
  - א. כמה תלמידים בכיתה?
  - ב. כמה בנים בכיתה?
- (3) מחיר בגד-ים הוא 300 ₪. בסוף העונה הוא נמכר ב-20% הנחה.
  - א. מהו מחירו בסוף העונה?
  - ב. מה גודל ההנחה?
- (4) מחיר ההשקה של בושם מסוים הוא 500 ₪. לאחר מכן מועלה מחירו ב-8%.
  - א. מה מחירו הסופי?
  - ב. מה גודל ההתייקרות?
- (5) מחיר ליטר דלק הוא 5 ₪ לליטר. בחנוכה מוזל מחירו ב-7%.
  - א. מה מחירו בסוף השנה?
  - ב. מה גודל התייקרות?

6) מוצר מסויים מתייקר בסוכות ב-12%. בפורים מוזל המוצר ב-12%. מחירו בסוף השנה הוא 394.24 ₪. מה מחירו בתחילת השנה?

7) ענה על השאלות הבאות:

- א. באולם קולנוע 200 צופים, מתוכם 176 בנים. מה אחוז הבנים בקהל?
- ב. בכיתה 30 תלמידים, מתוכם 18 בנות. מה אחוז הבנות בכיתה?
- ג. מחיר מוצר התייקר מ-80 ₪ ל-120 ₪. בכמה אחוזים התייקר המוצר?
- ד. מחיר מוצר הוזל מ-120 ₪ ל-80 ₪. בכמה אחוזים הוזל המוצר?
- ה. מחיר מוצר התייקר מ-150 ₪ ל-200 ₪. בכמה אחוזים התייקר המוצר?
- ו. מחיר מוצר מוזל הוזל מ-200 ₪ ל-150 ₪. בכמה אחוזים הוזל המוצר?

### תשובות סופיות:

- |                   |             |
|-------------------|-------------|
| 1) א. 18 בנות.    | ב. 12 בנים. |
| 2) א. 40 תלמידים. | ב. 12 בנים. |
| 3) א. 240 ₪       | ב. 60 ₪     |
| 4) א. 540 ₪       | ב. 40 ₪     |
| 5) 4.9755 ₪       |             |
| 6) 400 ₪          |             |
| 7) א. 88%         | ב. 60%      |
|                   | ג. 50%      |
|                   | ד. 33.33%   |
|                   | ה. 33.33%   |
|                   | ו. 25%      |

## חזרה על תבניות מספר:

### סיכום כללי:

משתנה הוא סמל המתאר כמות או גודל כלשהם אשר אינם ידועים ועשויים להשתנות.

תבנית מספר היא ביטוי אלגברי אשר מכיל משתנה (או משתנים).

ניתן להציב במשתנים ערכים מספריים שונים ולקבל תוצאות שונות עבור תבנית המספר עצמה.

במתמטיקה, תפקידה של תבנית המספר הוא להביע גודל מסוים אשר לערכו יש משמעויות שונות. דוגמא לכך היא: קנייה של  $x$  פריטים, אשר כל אחד עולה 3 שקלים, יניבו תבנית מספר של  $3 \cdot x$  אשר מייצגת את הסכום הכולל של הפריטים.

### שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- $x$  הנתון:

- |                            |                           |
|----------------------------|---------------------------|
| א. $2x+5$ כאשר $x=3$       | ב. $x^2+3x$ כאשר $x=2$    |
| ג. $-x^2+2x+3$ כאשר $x=5$  | ד. $-x^2-9x+5$ כאשר $x=5$ |
| ה. $x^3+1$ כאשר $x=-2$     | ו. $4-x^3$ כאשר $x=-1$    |
| ז. $(x+1)(2-x)$ כאשר $x=4$ | ח. $x^2(3x-4)$ כאשר $x=3$ |

(2) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- $x$  הנתון:

- |                                        |                                                          |
|----------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| א. $27x^5-2x^3+x$ כאשר $x=\frac{1}{3}$ | ב. $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+6$ כאשר $x=-\frac{2}{3}$ |
|----------------------------------------|----------------------------------------------------------|

(3) הצב את הערכים המספריים במקום הפרמטרים וחשב את ערך תבנית המספר:

- |                                |                                                 |
|--------------------------------|-------------------------------------------------|
| א. $a^2+2ab+b^2$               | עבור: $a=3, b=-5$                               |
| ב. $(x-3)^2+3x^2b$             | עבור: $x=5, b=-1$                               |
| ג. $-x^3-2xy+y^4$              | עבור: $x=-2, y=-1$                              |
| ד. $\frac{(a-2c)^4}{a}-a^2$    | עבור: $a=2, c=-2$                               |
| ה. $\frac{4a^2-3b}{c}$         | עבור: $a=-1, b=2, c=-4$                         |
| ו. $\sqrt{c-3a}$               | עבור: $c=13, a=-1$ ועבור: $c=82, a=\frac{1}{3}$ |
| ז. $\frac{p^3+2\sqrt{q+1}}{m}$ | עבור: $p=-5, q=48, m=3$                         |

**תשובות סופיות:**

- (1) א. 11      ב. 10      ג. -12      ד. -65      ה. -7      ו. 5  
                     ז. -10      ח. 45
- (2) א.  $\frac{10}{27}$       ב.  $5\frac{22}{27}$
- (3) א. 4      ב. -71      ג. 5      ד. 644      ה.  $\frac{1}{2}$   
                     ז. -37      ו. הצבה ראשונה : 4, הצבה שניה : 9

## כינוס איברים:

### סיכום כללי:

תבניות אלגבריות יכולות להכיל איברים רבים ולכן נרצה לכנס אותם על מנת לפשט את התבנית. כדי לכנס איברים ניקח את כל קבוצת האיברים מאותו הסוג ונחבר את המקדמים שלהם. דוגמא:  $3x + 6x - 5x = (3 + 6 - 5)x = 4x$ .  
 איברים שונים נבדלים זה מזה בערך התבנית האלגברית שלהם.  
 כך:  $3x$  שונה מ- $4y$  ושונה מ- $2xy$ . באותו האופן, האיברים  $x$  ו- $x^2$  הם שונים.

### שאלות:

#### (1) כנס איברים דומים:

- |                                                                                              |                                               |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| א. $5x + 7x - 4x$                                                                            | ב. $9x^2 - 2x^2 - 3x^2 - 2x^2$                |
| ג. $-10xy + 15xy + xy - 2yx$                                                                 | ד. $x^2y - 3yx^2 + x^2y$                      |
| ה. $8a^2 + 10a - 5a^2 - 11a + a^2$                                                           | ו. $2x^2 - 3m^2 - x^2 + 3m^2$                 |
| ז. $3xy + y - 30y + 6yx - 7y$                                                                | ח. $mn^2 + 4m^2n + 6n^2m - 10nm^2 + mn^2$     |
| ט. $-6 + x^3 + 4 - 3x^3 + 17x^3 - 17$                                                        | י. $y^2 + x^2 - 5x^2 + 5y^2 + 4x^2 - 6y^2$    |
| יא. $7x^2 - 3x - 4x + 2$                                                                     | יב. $5xy + 2x - 3yx - x + 1$                  |
| יג. $3 - x - x^2 + 4x + 5x^2 - 12$                                                           | יד. $x + xy + y - 6yx - 6y - 6x$              |
| טו. $mn + n - 5m + 5nm - 14n + 3m$                                                           | טז. $ab^2 + 6ba^2 - 6b + 16a^2b + 3b - 6b^2a$ |
| יז. $z^3 - 4z^2 + 7 - z^3 - 8 + 8z^2$                                                        | יח. $4x^2z + 6xz^2 - 6 - xz^2 + 12 + 10zx^2$  |
| יט. $2 - x^3 - 3 - 4x^2 + 2x + x^3 + x^2 - 2x^3$                                             | כ. $x^3 - 3x - 4x^2 + 2x + x^3 + x^2 - 2x^3$  |
| כא. $2a^2b + 3x^2y + 5a^2b + 10x^2y$                                                         | כב. $12x^2y^3 + 13a^2 - 20x^2y^3 + 2a^2$      |
| כג. $2y^2 - 4x^3y^2 - 10y^2 - x^3y^2$                                                        | כד. $-2x^3y + 5x^2 - 4yx^3 - 6x^2$            |
| כה. $2a^2b + 2b + 3a^2 + 5b$                                                                 | כו. $5a^2b - 8ab^2 + 20a^2b - 14ab^2$         |
| כז. $-12x^2 + 2y^2 + 3x^2y + 14xy^2 - 5xy^2 - 6y^2 + 2xy + 11x^2 + x^2y - 9xy$               |                                               |
| כח. $21x^3y^3 + x^2y^2 - 3xy^3 + x^3y - 15x^2y^2 - 7x^3y + 12x^3y^3 - 4xy^3 + 4xy^3 - 6x^3y$ |                                               |



## תשובות סופיות:

|                                           |                            |                                         |
|-------------------------------------------|----------------------------|-----------------------------------------|
| א. $8x$                                   | ב. $2x^2$                  | ג. $4xy$                                |
| ד. $-x^2y$                                | ה. $4a^2 - a$              | ו. $x^2$                                |
| ז. $9xy - 36y$                            | ח. $8mn^2 - 6nm^2$         | ט. $15x^3 - 19$                         |
| י. $-13n - 2m + 6mn$                      | יא. $-5ab^2 + 22a^2b - 3b$ | יב. $0$                                 |
| יג. $7x^2 - 7x + 2$                       | יד. $2xy + x + 1$          | יז. $4x^2 + 3x - 9$                     |
| יח. $-5x - 5y - 5xy$                      | יט. $4z^2 - 1$             | כ. $14x^2z + 5xz^2 + 6$                 |
| כא. $-3x^2 + 2x - 3$                      | כב. $-3x^2 - x$            | כג. $7a^2b + 13x^2y$                    |
| כד. $-8x^2y^3 + 15a^2$                    | כה. $-8y^2 - 5x^3y^2$      | כו. $-6x^3y - x^2$                      |
| כז. $2a^2b + 3a^2 + 7b$                   | כח. $25a^2b - 22ab^2$      | כט. $-x^2 - 4y^2 + 4x^2y + 9xy^2 - 7xy$ |
| ל. $33x^3y^3 - 14x^2y^2 - 3xy^3 - 12x^3y$ |                            |                                         |

## פישוט ביטויים ע"י פתיחת סוגריים:

### סיכום כללי:

בעת ביצוע כפל בין שני איברים יש לכפול את המקדמים בנפרד ואת האותיות (משתנים) בנפרד.

כלל הפילוג:

$$\bullet a(b+c) = ab+ac$$

$$\bullet (a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$

### שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

|                      |                         |                                        |
|----------------------|-------------------------|----------------------------------------|
| א. $2x \cdot 3x$     | ב. $-4x \cdot (-7x)$    | ג. $-2x \cdot (-4x) \cdot (-3)$        |
| ד. $8m^2 \cdot 4m^3$ | ה. $3a^3 \cdot (-2a^2)$ | ו. $-b \cdot 4b^2 \cdot \frac{b^2}{2}$ |
| ז. $a \cdot 3b$      | ח. $4a^2 \cdot 7b^2$    | ט. $ab \cdot (-2a^2b)$                 |

(2) פשט את הביטויים הבאים ע"י פתיחת סוגריים:

|                     |                            |
|---------------------|----------------------------|
| א. $2(3x-4)$        | ב. $2(-3x^2+5x-1)$         |
| ג. $(7x-2)4$        | ד. $(1-2x)(-2)$            |
| ה. $a(3a-1)$        | ו. $b(b^2-3b+4)$           |
| ז. $2x(5x+3)$       | ח. $5x(x^2+2x-3)$          |
| ט. $3t^2(4t-t^2+6)$ | י. $\frac{5}{2}(4d^4-3d)d$ |

**(3) פשט את הביטויים הבאים :**

א.  $5x + (3x - 2) + (-4 - 2x)$       ב.  $7x + (-4x - 5) + 3x + (-1 + 7x)$

ג.  $8 - (2x - 5) - (4x + 2)$       ד.  $-6x - (-3x - 1) - (-7 - 4x) + 1$

ה.  $(3 - 2x^2 + 4)2 + 3(x - x^2) - 6(7 - 5x) + 4x^2$

ו.  $3y^2 - (y + 1 - 2y^2) + 6(5y - 6) - (-y - 4)3 + 5(y^2 + 1) - 7$

**(4) פשט את הביטויים הבאים :**

א.  $(x - 1)(x + 2)$       ב.  $(x + 3)(x - 7)$

ג.  $(3 - x)(x + 4)$       ד.  $(3x + 4)(5x + 1)$

ה.  $3(4x + 1)(2x - 3)$       ו.  $-2(3x - 1)(5 - 2x)$

**(5) פשט את ערכי הביטויים הבאים :**

א.  $(x - 1)(x + 3) + 2(3 - x)$

ב.  $(a + 4)(a - 2) - (a + 5)(a - 3)$

ג.  $(2m - 3)(4m + 3) + 5(2m^2 - 6)$

ד.  $-x^2y^2(x^3y + x^2) + 2xy(2x^3y - x^4y^2)$

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $6x^2$     ב.  $28x^2$     ג.  $-24x^2$     ד.  $32m^5$     ה.  $-6a^5$     ו.  $-2b^5$   
 ז.  $3ab$     ח.  $28a^2b^2$     ט.  $-2a^3b^2$
- (2) א.  $6x-8$     ב.  $-6x^2+10x-2$     ג.  $28x-8$     ד.  $-2+4x$   
 ה.  $3a^2-a$     ו.  $b^3-3b^2+4b$     ז.  $10x^2+6x$     ח.  $5x^3+10x^2-15x$   
 ט.  $12t^3-3t^4+18t^2$     י.  $10d^5-7.5d^2$
- (3) א.  $6x-6$     ב.  $13x-6$     ג.  $-6x+11$     ד.  $x+9$     ה.  $-3x^2+33x-28$   
 ו.  $10y^2+32y-27$
- (4) א.  $x^2+x-2$     ב.  $x^2-4x-21$     ג.  $-x^2-x+12$   
 ד.  $15x^2+23x+4$     ה.  $24x^2-30x-9$     ו.  $12x^2-34x+10$   
 א.  $x^2+3$     ב. 7    ג.  $18m^2-6m-39$     ד.  $-3x^5y^3+3x^4y^2$
- (5)

## פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר:

### סיכום כללי:

- נוסחת ריבוע של סכום/הפרש:  $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ .
- נוסחה להפרש ריבועים:  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ .

### שאלות:

#### (1) פשט את הביטויים הבאים:

|                |                  |                    |
|----------------|------------------|--------------------|
| א. $(x+5)^2$   | ב. $(x+2)^2$     | ג. $(4x+5)^2$      |
| ד. $(6x+2)^2$  | ה. $(7x+y)^2$    | ו. $(5x+2y)^2$     |
| ז. $(x^2+7)^2$ | ח. $(x^2+y^2)^2$ | ט. $(x^3+2y^2x)^2$ |

#### (2) פשט את הביטויים הבאים:

|                |                                      |                                    |
|----------------|--------------------------------------|------------------------------------|
| א. $(x-6)^2$   | ב. $(x-2)^2$                         | ג. $(5-x)^2$                       |
| ד. $(6x-1)^2$  | ה. $\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2$   | ו. $\left(\frac{1}{3}x-5\right)^2$ |
| ז. $(3m-2n)^2$ | ח. $\left(x^2-\frac{3}{5}y\right)^2$ | ט. $(x^2y^2-7)^2$                  |

#### (3) פשט את הביטויים הבאים:

|                                                             |                                                               |
|-------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| א. $(x-5)(x+5)$                                             | ב. $(3+x)(x-3)$                                               |
| ג. $(3x-1)(3x+1)$                                           | ד. $(5-7x)(7x+5)$                                             |
| ה. $\left(\frac{1}{2}x+6\right)\left(\frac{1}{2}x-6\right)$ | ו. $\left(5y-\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{1}{4}x+5y\right)$ |
| ז. $(x^2+y)(x^2-y)$                                         | ח. $(3a^2b^3-4)(3a^2b^3+4)$                                   |

(4) פשט את הביטויים הבאים:

א.  $(x+1)(x+2)-3x$       ב.  $(x-5)(5x-1)+2(4+x)$   
 ג.  $x(2x-1)(2x+1)-4x^2(x+1)$       ד.  $-(y+3x)(y-3x)+(y-3x)^2$   
 ה.  $x(x+3)-(6+x)(6x+2)-(x+2)^2$   
 ו.  $-5(x+7)(x-7)+3(2x+5)(5-x)+(x+1)^2$

## תשובות סופיות:

(1) א.  $x^2+10x+25$       ב.  $x^2+4x+4$       ג.  $16x^2+40x+25$   
 ד.  $36x^2+24x+4$       ה.  $49x^2+14xy+y^2$       ו.  $25x^2+20xy+4y^2$   
 ז.  $x^4+14x+49$       ח.  $x^4+2x^2y^2+y^4$       ט.  $x^6+4x^4y^2+4y^4x^2$   
 (2) א.  $x^2-12x+36$       ב.  $x^2-4x+4$       ג.  $25-10x+x^2$   
 ד.  $36x^2-12x+1$       ה.  $9x^2-3x+\frac{1}{4}$       ו.  $\frac{1}{9}x^2-3\frac{1}{3}x+25$   
 ז.  $9m^2-12mn+4n^2$       ח.  $x^4-\frac{6}{5}x^2y+\frac{9}{25}y^2$       ט.  $x^4y^4-14x^2y^2+49$   
 (3) א.  $x^2-25$       ב.  $x^2-9$       ג.  $9x^2-1$       ד.  $25-49x^2$   
 ה.  $\frac{1}{4}x^2-36$       ו.  $25y^2-\frac{1}{16}x^2$       ז.  $x^4-y^2$       ח.  $9a^4b^6-16$   
 (4) א.  $x^2+2$       ב.  $5x^2-24x+13$       ג.  $-4x^2-x$   
 ד.  $18x^2-6xy$       ה.  $-6x^2-39x-16$       ו.  $-10x^2+17x+321$

## פירוק לגורמים של ביטויים אלגבריים:

### סיכום כללי:

פירוק לגורמים הוא פעולה הפוכה לפתיחת סוגריים – נרצה להוציא את הגורמים המשותפים לאיברים מחוץ לסוגריים.

- פירוק לגורמים ע"י הוצאת איבר אחד משותף:

○ הוצאת מספר משותף:  $2x - 8 = 2(x - 4)$

○ הוצאת אות משותפת:  $x^2 - 12x = x(x - 12)$

○ הוצאת מספר ואות יחד:  $3x^2 - 21x = 3x(x - 7)$

- פירוק לגורמים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר:

○ נוסחת הבינום של ניוטון:  $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

○ נוסחה להפרש ריבועים:  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

### שאלות:

- (1) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א.  $3x - 12$       ב.  $6y - 4$

ג.  $20 - 8a$       ד.  $4a^3 + 8b$

ה.  $75m^2 + 25m + 15$       ו.  $40a^2 - 8b^2 + 64c^2$

- (2) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א.  $y^2 + 5y$       ב.  $3x - 11x^3$

ג.  $6y^2 + 5y^3 + 4y$       ד.  $\frac{1}{2}a^7 - \frac{1}{4}a^5 + a^3$

(3) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף :

|                                |                           |
|--------------------------------|---------------------------|
| א. $2x^2 - 8x$                 | ב. $3t^2 + 12t$           |
| ג. $5n^3 - 20n^2 + 50n$        | ד. $8y^2 + 6y^3 - 2y^4$   |
| ה. $4x^2y^2 + 16x^2y - 20xy^2$ | ו. $27mn - 3n^2m + 9n^3m$ |

(4) פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר :

|                      |                       |
|----------------------|-----------------------|
| א. $x^2 + 10x + 25$  | ב. $x^2 + 12x + 36$   |
| ג. $y^2 - 18y + 81$  | ד. $y^2 - 22y + 121$  |
| ה. $4x^2 + 4x + 1$   | ו. $16y^2 - 8y + 1$   |
| ז. $9x^2 - 24x + 16$ | ח. $25x^2 + 70x + 49$ |

(5) פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר :

|                 |                    |
|-----------------|--------------------|
| א. $r^2 - 25$   | ב. $x^2 - 81$      |
| ג. $25y^2 - 49$ | ד. $121x^2 - 1$    |
| ה. $x^2y^2 - 4$ | ו. $9y^4 - 169x^4$ |

(6) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף ונוסחאות הכפל המקוצר :

|              |                              |
|--------------|------------------------------|
| א. $y - y^3$ | ב. $x^3 - 10x^2 + 25x$       |
| ג. $m^4 - 1$ | ד. $196x^4 - 140x^3 + 25x^2$ |



## תשובות סופיות:

- (1) א.  $3(x-4)$  ב.  $2(3y-2)$  ג.  $4(5-2a)$
- ד.  $4(a^3+2b)$  ה.  $5(15m^2+5m+3)$  ו.  $8(5a^2-b^2+8c^2)$
- (2) א.  $y(y+5)$  ב.  $x(3-11x^2)$  ג.  $y(6y+5y^2+4)$
- ד.  $a^3\left(\frac{1}{2}a^4-\frac{1}{4}a^2+1\right)$
- (3) א.  $2x(x-4)$  ב.  $3t(t+4)$  ג.  $5n(n^2-4n+10)$
- ד.  $2y^2(4+3y-y^2)$  ה.  $4xy(xy+4x-5y)$  ו.  $3mn(9-n-3n^2)$
- (4) א.  $(x+5)^2$  ב.  $(x+6)^2$  ג.  $(y-9)^2$  ד.  $(y-11)^2$
- ה.  $(2x+1)^2$  ו.  $(4y-1)^2$  ז.  $(3x-4)^2$  ח.  $(5x+7)^2$
- (5) א.  $(r+5)(r-5)$  ב.  $(x+9)(x-9)$  ג.  $(5y+7)(5y-7)$
- ד.  $(11x+1)(11x-1)$  ה.  $(xy+2)(xy-2)$  ו.  $(3y^2+13x^2)(3y^2-13x^2)$
- (6) א.  $y(1+y)(1-y)$  ב.  $x(x-5)^2$  ג.  $(m^2+1)(m+1)(m-1)$
- ד.  $x^2(14x-5)^2$

## פירוק הטרינום:

### סיכום כללי:

טרינום משמעו תלת איבר מהצורה:  $ax^2 + bx + c$  כאשר  $a, b$  ו- $c$  הם מספרים כלשהם.

שיטת הטרינום מאפשרת לפרק את תלת האיבר ל-4 איברים ע"י פיצול האיבר  $bx$  לשני איברים באופן כזה שמאפשר להוציא גורם משותף.

הכלל הוא למצוא שני מספרים,  $m_1$  ו- $m_2$ , שמקיימים:  $m_1 \cdot m_2 = ac$  ו- $m_1 + m_2 = b$ .  
לאחר מכן ניתן לפרק את הטרינום:  $ax^2 + bx + c = ax^2 + m_1x + m_2x + c$ .  
השלב האחרון הוא הוצאת גורם משותף מכל זוג:  $\underline{ax^2 + m_1x} + \underline{m_2x + c}$ .

### הערה:

במקרה שנוסחת השורשים ידועה, ניתן להיעזר בה כדי למצוא את המספרים  $m_1$  ו- $m_2$  באופן

הבא:  $m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ,  $m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  ולאחר מכן ניתן לכתוב את הטרינום

כמכפלה:  $ax^2 + bx + c = a(x - m_1)(x - m_2)$ . אם קיים פתרון (שורש) אחד  $m_1 = m_2 = \frac{-b}{2a}$

אז נכתוב:  $ax^2 + bx + c = a(x - m_1)^2$  ואם לא קיימים פתרונות אז לא קיים פירוק כלל.

### שאלות:

(1) פרק את הביטויים הבאים לפי פירוק טרינום:

|                     |                     |                     |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| א. $x^2 + 5x + 4$   | ב. $x^2 - 8x + 15$  | ג. $x^2 - 33x + 62$ |
| ד. $2x^2 + 7x - 15$ | ה. $3x^2 - 11x + 6$ | ו. $6x^2 + 5x + 1$  |
| ז. $2x^2 + x - 6$   | ח. $x^2 - 18x + 81$ | ט. $x^2 + 2x + 8$   |

(2) פרק את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחת השורשים.  
הערה: במידה ולא למדת על נוסחת השורשים התעלם משאלה זו.

|                      |                    |
|----------------------|--------------------|
| א. $6x^2 + 5x + 1$   | ב. $x^2 + 5x + 4$  |
| ג. $4x^2 + 20x + 25$ | ד. $3x^2 - x + 20$ |

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $(x+1)(x+4)$     ב.  $(x-3)(x-5)$     ג.  $(x-2)(x-31)$
- ד.  $(2x-3)(x+5)$     ה.  $(3x-2)(x-3)$     ו.  $(3x+1)(2x+1)$
- ז.  $(x+2)(2x-3)$     ח.  $(x-9)^2$     ט. אין פירוק.
- (2) א.  $6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$     ב.  $(x+1)(x+4)$     ג.  $(2x+5)^2$     ד. אין פירוק.

## שברים אלגבריים:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

שבר אלגברי מורכב משתי תבניות, אשר אחת מחלקת את השנייה.

$$\text{דוגמא לשברים אלגבריים: } \frac{x+1}{x+2}, \frac{3x}{x^2+1}, \frac{4}{x-x^3}$$

במקרה בו המכנה הוא מספר, לא מדובר בשבר אלגברי מכיוון שניתן לכתוב את

$$\text{הביטוי ללא צורך בחילוק בין ביטויים שונים כגון: } \frac{3x+5}{4} = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$

#### תחום הגדרה של שבר:

היות ושבר אלגברי הוא תבנית אשר יכולה לקבל ערכים שונים בעת הצבות שונות, חשוב להגביל את המספרים שניתן להציב באופן כזה שלא תתקבל חלוקה באפס.

$$\text{דוגמא: השבר } \frac{1}{x+4} \text{ לא מוגדר כאשר } x = -4 \text{ מכיוון שמתקבל: } \frac{1}{0}$$

במקרים אלו נדרוש **תנאי** על המשתנה אשר יכתב באופן הבא:  $x \neq -4$  ומשמעו היא ש- $x$  יכול לקבל על ערך מספרי אפשרי למעט -4, מכיוון שבמקרה זה השבר לא מוגדר.

#### כלל צמצום שברים אלגבריים:

ניתן לצמצם שברים אלגבריים ע"י הבאת המונה והמכנה למכפלה של ביטויים. במידה וקיימות פעולות החיבור והחיסור בין איברים שונים לא ניתן לבצע צמצום של איברים דומים בין המונה והמכנה. להלן מספר דוגמאות הנוגעות לצמצומים:

$$\bullet \text{ צמצום ע"י הוצאת גורם משותף: } \frac{2x+8}{x+4} = \frac{2(\cancel{x+4})}{\cancel{x+4}} = \frac{2 \cdot 1}{1} = 2$$

$$\bullet \text{ צמצום ע"י נוסחת כפל מקוצר: } \frac{3x-15}{x^2-10x+25} = \frac{3(\cancel{x-5})}{(\cancel{x-5})^2} = \frac{3 \cdot 1}{x-5} = \frac{3}{x-5}$$

$$\bullet \text{ צמצום ע"י פירוק טרינום: } \frac{x^2-2x-3}{x^2-3x-4} = \frac{(\cancel{x+1})(x-3)}{(\cancel{x+1})(x-4)} = \frac{x-3}{x-4}$$

## שאלות:

(1) מצא את תחום ההגדרה של השברים האלגבריים הבאים :

|                         |                                  |
|-------------------------|----------------------------------|
| א. $\frac{x+4}{x+3}$    | ב. $\frac{5}{x-6}$               |
| ג. $\frac{x+7}{2x-8}$   | ד. $\frac{x^2+1}{x^2-4x}$        |
| ה. $\frac{3}{x^2+2x+1}$ | ו. $\frac{x^2}{x^2-4}$           |
| ז. $\frac{6}{y^4-y^2}$  | ח. $\frac{8x-2}{3x^3-15x^2+12x}$ |

(2) צמצם את השברים הבאים (במידה ולא ניתן צמצם הסבר מדוע) :

|                        |                             |
|------------------------|-----------------------------|
| א. $\frac{ax}{a}$      | ב. $\frac{a-x}{a}$          |
| ג. $\frac{a-ax}{a}$    | ד. $\frac{x+1}{y+1}$        |
| ה. $\frac{x}{x+y}$     | ו. $\frac{6x}{6y}$          |
| ז. $\frac{x^2y}{xy^2}$ | ח. $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$ |
| ט. $\frac{4x^2y}{xy}$  | י. $\frac{3x^2}{x^2+3}$     |

(3) צמצם את השברים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף וכתוב את תחום הגדרתם :

|                             |                                   |
|-----------------------------|-----------------------------------|
| א. $\frac{3x+12}{x+4}$      | ב. $\frac{m^2+4m}{4m+16}$         |
| ג. $\frac{2a-12}{a^2-6a}$   | ד. $\frac{x^2-5x}{15-3x}$         |
| ה. $\frac{3-18y^2}{6y^2-1}$ | ו. $\frac{4x^3-2x^2}{6x-3}$       |
| ז. $\frac{3y}{y^3-3y^2}$    | ח. $\frac{3z^3-12z^2+4z}{z^2+5z}$ |

(4) צמצם את השברים הבאים ע"י פירוק לגורמים וכתוב את תחום הגדרתם:

|                                         |                                             |
|-----------------------------------------|---------------------------------------------|
| א. $\frac{x^2 + 10x + 25}{2x + 10}$     | ב. $\frac{8n - n^2}{n^2 - 16n + 64}$        |
| ג. $\frac{z^3 - 4z^2}{2z^2 - 16z + 32}$ | ד. $\frac{4m^2 + 20m + 25}{4m^2 + 10m}$     |
| ה. $\frac{18y^2 - 24y + 8}{2y - 3y^2}$  | ו. $\frac{a^3 + 4a^2b + 4ab^2}{3ab + 6b^2}$ |

(5) צמצם את השברים הבאים ע"י טרינום ריבועי וכתוב את תחום הגדרתם:

|                                                              |                                                           |
|--------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| א. $\frac{x + 2}{x^2 - 3x - 10}$                             | ב. $\frac{m^2 - 12m + 32}{m - 4}$                         |
| ג. $\frac{4y - 10}{2y^2 + y - 15}$                           | ד. $\frac{3z^2 + 26z + 16}{3z + 2}$                       |
| ה. $\frac{x^2 + 5x - 36}{x^3 + 9x^2}$                        | ו. $\frac{9n^2 - 12n}{4 + 5n - 6n^2}$                     |
| ז. $\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 5x + 6}$                       | ח. $\frac{x^2 - 14x + 49}{x^2 + x - 56}$                  |
| ט. $\frac{3a^2b - 10ab^2 + 3b^3}{-3a^3b + 11a^2b^2 - 6ab^3}$ | י. $\frac{m^3n - m^2n^2 - m^2 + mn}{2m^2n^3 + mn^2 - 3n}$ |

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $x \neq -3$     ב.  $x \neq 6$     ג.  $x \neq 4$     ד.  $x \neq 0, x \neq 4$   
 ה.  $x \neq -1$     ו.  $x \neq -2, x \neq 2$     ז.  $y \neq 0, y \neq -1, y \neq 1$     ח.  $x \neq 0, x \neq 1, x \neq 4$
- (2) א.  $x$     ב. לא ניתן לצמצם.    ג.  $1-x$     ד. לא ניתן לצמצם.  
 ה. לא ניתן לצמצם.    ו.  $\frac{x}{y}$     ז.  $\frac{x}{y}$     ח. לא ניתן לצמצם.  
 ט.  $4x$     י. לא ניתן לצמצם.
- (3) א.  $x \neq -4, 3$     ב.  $\frac{m}{4}, m \neq -4$     ג.  $\frac{2}{a}, a \neq 0, 6$     ד.  $-\frac{x}{3}, x \neq 5$   
 ה.  $-3, y \neq \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$     ו.  $\frac{2x^2}{3}, x \neq \frac{1}{2}$     ז.  $\frac{3z^2-12z+4}{z+5}, z \neq 0, -5$     ח.  $\frac{3}{y(y-3)}, y \neq 0, 3$
- (4) א.  $\frac{x+5}{2}, x \neq -5$     ב.  $\frac{n}{8-n}, n \neq 8$     ג.  $\frac{z^2}{2(z-4)}, z \neq 4$     ד.  $\frac{2m+5}{2m}, m \neq 0, -\frac{5}{2}$   
 ה.  $\frac{2(2-3y)}{y}, y \neq 0, \frac{2}{3}$     ו.  $\frac{a(a+2b)}{3b}, b \neq 0, a \neq -2b$     ז.  $\frac{2}{y+3}, x \neq -3, \frac{5}{2}$     ח.  $\frac{1}{x-5}, x \neq 5, -2$   
 ט.  $m-8, m \neq 4$     י.  $\frac{-3n}{2n+1}, n \neq -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}$     יא.  $\frac{x-4}{x^2}, x \neq 0, -9$     יב.  $z+8, z \neq -\frac{2}{3}$   
 יג.  $\frac{x-7}{x+8}, x \neq 7, -8$     יד.  $\frac{x+2}{x+3}, x \neq -2, -3$     יו.  $\frac{3a-b}{a(2b-3a)}, a \neq 0, b \neq 0, a \neq 3b, 2b \neq 3a$     יז.  $\frac{m(m-n)}{n(2mn+3)}, mn \neq 1, -\frac{3}{2}, n \neq 0$

## כפל וחילוק של שברים אלגבריים:

### סיכום כללי:

כפל שברים יתבצע ע"י הכפלת כל מונה בנפרד והכפלת כל מכנה בנפרד.  
חילוק שברים יתבצע ע"י לקיחת ההופכי של שבר המחלק וביצוע פעולת כפל.

- דוגמא לכפל שברים:  $\frac{x+1}{x^2} \cdot \frac{x}{3x+3} = \frac{x+1}{x^2} \cdot \frac{x}{3(x+1)} = \frac{\cancel{x}(x+1)}{3x^{\cancel{2}}(x+1)} = \frac{1}{3x}$
- דוגמא לחילוק שברים:  $\frac{4x}{y} : \frac{12}{y^2+y} = \frac{4x}{y} \cdot \frac{y^2+y}{12} = \frac{\cancel{4}x}{\cancel{y}} \cdot \frac{\cancel{y}(y+1)}{\cancel{12}_3} = \frac{x(y+1)}{3}$

### שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

- |                                                       |                                                                                   |
|-------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| א. $\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{8}$                    | ב. $\frac{x}{3} \cdot \frac{9}{x^2}$                                              |
| ג. $7y \cdot \frac{5}{y^2}$                           | ד. $6x^2 \cdot \frac{3}{40x}$                                                     |
| ה. $(x^2+3x) \cdot \frac{2}{3x+9}$                    | ו. $(a^2-25) \cdot \frac{20}{5a+25}$                                              |
| ז. $\frac{w^2-9}{w} \cdot \frac{w^2}{2w+6}$           | ח. $\frac{y+4}{y^2+16} \cdot \frac{y^2-16}{2y+8}$                                 |
| ט. $\frac{z^2+30z+225}{6z+90} \cdot \frac{12}{2z-10}$ | י. $\frac{5n^2}{n^2-121} \cdot \frac{2n^2+44n+242}{n+2} \cdot \frac{n^2+4n+4}{n}$ |

(2) פשט את הביטויים הבאים:

- |                                                   |                                              |
|---------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| א. $\frac{x}{8} : \frac{x}{6}$                    | ב. $\frac{y}{25} : \frac{5}{y}$              |
| ג. $a^2 : \frac{1}{6a}$                           | ד. $\frac{5}{6a} : a^2$                      |
| ה. $(d^2-3d) : \frac{5d-15}{5d}$                  | ו. $\frac{t}{t+4} : \frac{3t}{t+4}$          |
| ז. $\frac{y^2+8y+16}{8y^2} : \frac{y^2-16}{7y^2}$ | ח. $\frac{a^2-64}{a^2-36} : \frac{a+8}{a+6}$ |



## תשובות סופיות:

(1) א.  $\frac{x^2}{24}$     ב.  $\frac{3}{x}$     ג.  $\frac{35}{y}$     ד.  $\frac{9x}{20}$     ה.  $\frac{2x}{3}$

ו.  $4(a-5)$     ז.  $\frac{w(w-3)}{2}$     ח.  $\frac{y^2-16}{2y^2+32}$     ט.  $\frac{z+15}{z-5}$     י.  $\frac{10n(n+11)(n+2)}{n-11}$

(2) א.  $\frac{3}{4}$     ב.  $\frac{y^2}{125}$     ג.  $6a^3$     ד.  $\frac{5}{6a^3}$     ה.  $d^2$     ו.  $\frac{1}{3}$

ז.  $\frac{7(y+4)}{8(y-4)}$     ח.  $\frac{a-8}{a-6}$

## חיבור וחיסור של שברים אלגברים:

### סיכום כללי:

ביצוע פעולת החיבור והחיסור תתבצע באופן זהה לשברים מספריים. נרצה להרחיב את השברים כך שהמכנה של שניהם יהיה זהה, ולאחר מכן נחבר את המונים. כדי להרחיב את השברים נעזר בפעולת מציאת מכנה משותף. לשם כך נעזר בפירוקים השונים כדי להביא את הביטויים שבכל מכנה לצורתם המופשטת. דוגמא לחיבור שברים בעלי אותו מכנה:

$$\frac{1}{x} + \frac{x+1}{x} = \frac{1+(x+1)}{x} = \frac{x+2}{x}$$

דוגמא לחיבור מספר לשבר אלגברי:

$$2 + \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+2)}{x+2} + \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+2)+3}{x+2} = \frac{2x+7}{x+2}$$

דוגמא לחיבור שברים עם מכנים שונים (ע"י פעולת מכנה משותף):

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{x}{x(x+1)} + \frac{x+1}{x(x+1)} = \frac{x+x+1}{x(x+1)} = \frac{2x+1}{x(x+1)}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י שימוש בפירוק לגורמים (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{1}{x^2-3x} + \frac{3}{x-3} = \frac{1}{x^2-3x} + \frac{3x}{x^2-3x} = \frac{1+3x}{x^2-3x}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{3}{x^2-6x+9} - \frac{2}{x^2-9} = \frac{3}{(x-3)^2} - \frac{2}{(x-3)(x+3)} = \frac{3(x+3)-2(x-3)}{(x-3)^2(x+3)} = \frac{x+15}{(x-3)^2(x+3)}$$

## שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

א.  $\frac{a}{6} + \frac{a-5}{6}$

ג.  $\frac{x-2}{x+1} + \frac{3+4x}{x+1}$

ב.  $\frac{5}{x} + \frac{4x+3}{x}$

ד.  $\frac{7z}{2z-3} - \frac{4z}{2z-3} - \frac{z+3}{2z-3}$

(2) פשט את הביטויים הבאים:

א.  $\frac{1}{ab} - \frac{5}{bc}$

ג.  $\frac{c}{ab} - \frac{ad}{bc} + \frac{2b}{cd}$

ה.  $\frac{1}{(y+1)^2} + \frac{3}{y+1}$

ב.  $\frac{1}{xy} + \frac{5}{yz} + \frac{4}{xz}$

ד.  $-\frac{5}{x} + \frac{x+1}{xy^2}$

ו.  $\frac{3}{z(z-3)} - \frac{2}{z(z-2)}$

(3) פשט את הביטויים הבאים:

א.  $1 - \frac{2}{x}$

ג.  $2 + \frac{2}{x+1}$

ה.  $\frac{a+1}{a^2} - \frac{3-a}{4a} - 3$

ב.  $1 + \frac{3}{y^2}$

ד.  $3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x}$

ו.  $\frac{x}{9yz} + \frac{z}{3y^2x} + \frac{3-y}{12xz} - 3\frac{1}{2}$

(4) פשט את הביטויים הבאים:

א.  $\frac{3}{x+1} + \frac{1}{x}$

ג.  $\frac{a+1}{a+2} + \frac{3}{a}$

ב.  $\frac{4}{y+2} - \frac{3}{y}$

ד.  $\frac{1}{z+3} + \frac{2}{3z} - \frac{3}{z}$

(5) פשט את הביטויים הבאים:

$$\text{א. } \frac{24}{a^2-9} + \frac{4}{a+3}$$

$$\text{ג. } \frac{y}{(y-2)^2} + \frac{3y}{4-y^2}$$

$$\text{ה. } \frac{x-1}{x^2+3x-40} + \frac{2}{-x^2+8x-15}$$

$$\text{ז. } \frac{x}{x-3} + \frac{9-x}{x^2-8x+15}$$

$$\text{ב. } \frac{3}{x^2-16} + \frac{2}{(x+4)^2}$$

$$\text{ד. } \frac{3z}{z^2+4z+3} - \frac{z+0.5}{z^2+2z+1}$$

$$\text{ו. } \frac{2a+3}{2a^2+15a+7} + \frac{a+3}{a^2+14a+49}$$

$$\text{ח. } \frac{1}{a-b} + \frac{2}{a+2b} - \frac{3b}{a^2+ab-2b^2}$$

(6) פשט את הביטויים הבאים:

$$\text{א. } \frac{4}{x} \cdot \frac{x^2}{8} + \frac{9}{x+1} \cdot \frac{x+1}{18}$$

$$\text{ג. } \frac{7}{y^2} : \frac{6}{y^3} - \frac{y-4}{63} \cdot \frac{3y-4}{y^2-8y+16}$$

$$\text{ה. } \left( \frac{2x+1}{20x^2-28x-3} - \frac{3x+1}{30x^2-17x-2} \right) : \frac{18x+3}{6x^2-13x+6}$$

$$\text{ב. } \left( \frac{2}{x} + 1 \right) \cdot \frac{x^2}{7x+14}$$

$$\text{ד. } \left( 3x - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} \right) : \frac{6x^3+2x-4}{x^2}$$

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $\frac{2a-5}{6}$  ב.  $\frac{4x+8}{x}$  ג.  $\frac{5x+1}{x+1}$  ד. 1
- (2) א.  $\frac{c-5a}{abc}$  ב.  $\frac{z+5x+4y}{xyz}$  ג.  $\frac{c^2d - a^2d^2 + 2ab^2}{abcd}$
- ד.  $\frac{-5y^2 + x + 1}{xy^2}$  ה.  $\frac{3y+4}{(y+1)^2}$  ו.  $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$
- (3) א.  $\frac{x-2}{x}$  ב.  $\frac{y^2+3}{y^2}$  ג.  $\frac{2x+4}{x+1}$
- ד.  $\frac{9x-2}{3x}$  ה.  $\frac{-11a^2 + a + 4}{4a^2}$  ו.  $\frac{4x^2y + 12z^2 + 9y^2 - 3y^3 - 126xy^2z}{36xy^2z}$
- (4) א.  $\frac{4x+1}{x(x+1)}$  ב.  $\frac{y-6}{y(y+2)}$  ג.  $\frac{a^2+4a+6}{a(a+2)}$  ד.  $-\frac{4z+21}{3z(z+3)}$
- (5) א.  $\frac{4}{a-3}$  ב.  $\frac{5x+4}{(x-4)(x+4)^2}$  ג.  $\frac{2y(4-y)}{(y-2)^2(y+2)}$
- ד.  $\frac{(4z+3)(z-1)}{2(z+1)^2(z+3)}$  ה.  $\frac{x^2-6x-13}{(x+8)(x-5)(x-3)}$  ו.  $\frac{4(a^2+6a+6)}{(a+7)^2(2a+1)}$
- ז.  $\frac{x-3}{x-5}$  ח.  $\frac{3}{a+2b}$
- (6) א.  $\frac{x+1}{2}$  ב.  $\frac{x}{7}$  ג.  $\frac{147y^2 - 594y + 8}{126(y-4)}$  ד.  $\frac{1}{2}$
- ה.  $\frac{1}{3(10x+1)}$

## שברים כפולים:

### סיכום כללי:

שבר כפול מורכב באופן הבא:  $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$  כאשר מתקיים:  $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

נובע מכאן כי ניתן לצמצם ביטויים בין שני המכנים או שני המונים בלבד.

### שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

|                                 |                             |                                      |
|---------------------------------|-----------------------------|--------------------------------------|
| א. $\frac{4x}{12}$              | ב. $\frac{y+1}{2y+2}$       | ג. $\frac{5}{30t^2}$                 |
| ד. $\frac{t^2-81}{9t^2}$        | ה. $\frac{3y^3-y^2}{25}$    | ו. $\frac{4x}{x+1}$                  |
| ז. $\frac{8c^2}{3c^3-9c^2-12c}$ | ח. $\frac{t^2-t-20}{16t+8}$ | ט. $\frac{1}{x} - 4 + \frac{x}{x+1}$ |
|                                 |                             |                                      |
|                                 |                             |                                      |
|                                 |                             |                                      |

### תשובות סופיות:

|                       |                    |                          |                        |                             |
|-----------------------|--------------------|--------------------------|------------------------|-----------------------------|
| א. $\frac{x^2}{3}$    | ב. 2.5             | ג. $\frac{1}{6t^3}$      | ד. $\frac{t-9}{54t^2}$ | ה. $\frac{(3y-1)(3-y)}{25}$ |
| ו. $\frac{x(x+1)}{2}$ | ז. $\frac{c}{c-4}$ | ח. $\frac{t+4}{-8(t+5)}$ | ט. $\frac{5}{x}$       |                             |

# קורס מבוא למתמטיקה לכלכלנים

## פרק 2 - משוואות ממעלה ראשונה

### תוכן העניינים

1. מבוא למשוואות ..... (ללא ספר)
2. משוואות שקולות ..... (ללא ספר)
3. פתרון של משוואה ..... (ללא ספר)
4. משוואות מסוגים נוספים ..... (ללא ספר)
5. משוואות מיוחדות ..... (ללא ספר)
6. משוואות עם מכנה מספרי ..... (ללא ספר)
7. משוואות עם משתנה במכנה ..... (ללא ספר)
8. משוואות שונות ..... (ללא ספר)
9. מבוא למשוואות ליניאריות בשני נעלמים ..... (ללא ספר)
10. פתרון מערכת משוואות ליניאריות בדרך גרפית ..... (ללא ספר)
11. פתרון אלגברי של מערכת שתי משוואות ליניאריות ..... (ללא ספר)
12. פתרון שאלות מילוליות בעזרת מערכת משוואות ליניאריות ..... (ללא ספר)

# קורס מבוא למתמטיקה לכלכלנים

פרק 3 - משוואות ממעלה שנייה

תוכן העניינים

1. משוואות ריבועיות יסודיות ..... (ללא ספר)
2. משוואות ריבועיות חסרות ..... (ללא ספר)
3. משוואות ריבועיות לא מסודרות ..... (ללא ספר)
4. משוואות ריבועיות עם שברים ..... (ללא ספר)
5. מערכת משוואות ריבועיות ..... (ללא ספר)



# קורס מבוא למתמטיקה לכלכלנים

פרק 4 - משוואות ממעלה שלישית ומעלה

תוכן העניינים

1. משוואות הנפתרות עם הוצאת שורש מסדר גבוה ..... (ללא ספר)
2. משוואות מהצורה  $AB=0$  ..... (ללא ספר)

# קורס מבוא למתמטיקה לכלכלנים

פרק 5 - משוואות אלגבריות - חזרה ומשוואות נוספות

תוכן העניינים

1. משוואה ממעלה ראשונה ..... 47
2. מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה ..... 49
3. משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון ..... 52
4. משוואה ממעלה שנייה ..... 53
5. משוואות דו-ריבועיות ..... 55
6. משוואות עם פרמטרים ..... 57
7. משוואות עם שורשים ..... 59
8. משוואות עם ערך מוחלט ..... 61
9. מערכת משוואות ממעלה שנייה ..... 62

## משוואה ממעלה ראשונה:

### סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה היא מהצורה:  $ax = b$  (כלומר, החזקה של הנעלם היא 1).

פתרון של משוואה ממעלה ראשונה הוא:  $x = \frac{b}{a}$  כאשר  $a \neq 0$ .

שלבי הפתרון הם:

1. ביצוע מכנה משותף (במידה וצריך).
2. פתיחת סוגריים אם ישנם.
3. העברת אגפים וכינוס אברים דומים (בידוד הנעלם באגף אחד והמספרים באגף שני).
4. בידוד הנעלם ומציאתו ע"י חילוק במקדם שלו.

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות ממעלה ראשונה):

- |                             |                                       |
|-----------------------------|---------------------------------------|
| א. $6x + 2 = 8$             | ב. $7 - 2x = 7$                       |
| ג. $2x + x = 24$            | ד. $2x + 6 = 8 + x$                   |
| ה. $-7x + 5 + 2x = 4x - 13$ | ו. $6x - 3 + 5 - 7x = x - 5x - 7$     |
| ז. $2 - 5x + 7 = -3x + 8$   | ח. $x - 2 + 5x = 4 - 3x - 5 + 7x + 7$ |

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פתיחת סוגריים):

- |                              |                                     |
|------------------------------|-------------------------------------|
| א. $3(x - 1) - 4 = 2$        | ב. $7x - 4(3 - 4x) = -x$            |
| ג. $6(4 - x) - (6 - x) = 3x$ | ד. $5x - (3x - 7)4 = 21$            |
| ה. $x(x - 5) = x^2 - 7x + 8$ | ו. $(7 - x)(1 - x) - (x - 3)^2 = 0$ |

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה מספרי):

$$\text{א. } \frac{x}{3} - \frac{x}{9} = -4 \quad \text{ב. } \frac{4x}{15} - \frac{3x}{10} = 1$$

$$\text{ג. } \frac{2}{3}x + \frac{4}{5}x = x - \frac{7}{15} \quad \text{ד. } \frac{5x+1}{6} - \frac{6x-1}{5} = \frac{3x+1}{4} - 1$$

$$\text{ה. } \frac{2}{5}(x-3) - \frac{3}{15}(4-x) = x+2 \quad \text{ו. } 5\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{7}\right) - x = 1$$

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם נעלם במכנה):

$$\text{א. } \frac{1}{4} - \frac{2}{x} = 0 \quad \text{ב. } \frac{1}{2} - \frac{x}{x-1} = 0$$

$$\text{ג. } \frac{3}{x} = \frac{1}{x+2} \quad \text{ד. } \frac{5}{2x-1} = \frac{4}{3x+2}$$

$$\text{ה. } \frac{x+5}{3x^2} - \frac{1}{6x} = \frac{1}{x} \quad \text{ו. } \frac{1}{4x} + \frac{3}{x} = \frac{13}{2}$$

(5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה משותף ע"י פירוק לגורמים):

$$\text{א. } \frac{x^2+2}{3x^2+5x} = \frac{3x-1}{9x+15} \quad \text{ב. } \frac{7}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{2-2x} = 0$$

$$\text{ג. } \frac{3}{(2-x)^2} + \frac{5}{12-3x^2} = 0 \quad \text{ד. } \frac{4x^2-24x+36}{x-3} = 12$$

## תשובות סופיות:

$$(1) \text{ א. } x=1 \quad \text{ב. } x=0 \quad \text{ג. } x=8 \quad \text{ד. } x=2 \quad \text{ה. } x=2 \quad \text{ו. } x=-3$$

$$\text{ז. } x = \frac{1}{2} \quad \text{ח. } x=4$$

$$(2) \text{ א. } x=3 \quad \text{ב. } x = \frac{1}{2} \quad \text{ג. } x = 2\frac{1}{4} \quad \text{ד. } x=1 \quad \text{ה. } x=4 \quad \text{ו. } x=-1$$

$$(3) \text{ א. } x=-18 \quad \text{ב. } x=-30 \quad \text{ג. } x=-1 \quad \text{ד. } x=1 \quad \text{ה. } x=-10 \quad \text{ו. } x=-21$$

$$(4) \text{ א. } x=8 \quad \text{ב. } x=-1 \quad \text{ג. } x=-3 \quad \text{ד. } x=-2 \quad \text{ה. } x=2 \quad \text{ו. } x = \frac{1}{2}$$

$$(5) \text{ א. } x=-6 \quad \text{ב. } x=-7 \quad \text{ג. } x=-7 \quad \text{ד. } x=6, x \neq 3$$

## מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (ליניאריות) היא מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

כאשר  $a_1, b_1, c_1$  ו-  $a_2, b_2, c_2$  הם מקדמים מספריים.

$$\cdot \begin{cases} y = 3x - 1 \\ \frac{x+3}{2} = y + 6 \end{cases}, \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} : \text{דוגמאות למערכות של משוואות}$$

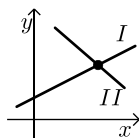
#### פתרון של מערכת משוואות:

פתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור המקיים את כל המשוואות שבמערכת.

#### הצגה גרפית של מערכת משוואות:

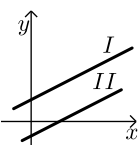
פתרון גרפי של מערכת משוואות הוא נקודת החיתוך של הישרים המייצגים כל משוואה.

יתכנו שלושה מצבים הדדיים בין שני ישרים:



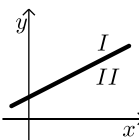
- הישרים נחתכים:

במקרה זה נקודת החיתוך תהיה פתרון המערכת.



- הישרים מקבילים:

במקרה זה לא יהיה פתרון למערכת.



- הישרים מתלכדים:

במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות למערכת המשוואות.

### פתרון אלגברי של מערכת משוואות:

- פתרון ע"י שיטת ההצבה:

נבודד את אחד הנעלמים ממשוואה אחת ונציב אותו במשוואה השנייה.  
נבחר בשיטה זו במקרים בהם קל לבודד נעלם באחת המשוואות.

- פתרון ע"י השוואת מקדמים:

1. כופלים (או מחלקים) משוואה אחת (או שתיהן) במספר השונה מאפס כך שתתקבלנה משוואות שקולות בעלות מקדמים נגדיים או זהים עבור אחד המשתנים.
2. מחברים (או מחסרים) את המשוואות ומקבלים משוואה חדשה עם נעלם אחד.
3. מוצאים את ערך הנעלם מהמשוואה החדשה ומציבים אותו באחת המשוואות המקוריות למציאת ערך הנעלם השני.

### הערה:

נוח להשתמש בשיטת השוואת המקדמים ע"י כך שמעבירים את המערכת הנתונה למערכת שקולה שבה המשתנים באגף אחד והמספר החופשי באגף השני.

### שאלות:

#### 1) פתור את המשוואות הבאות:

|                                                                           |                                                                           |                                                                        |
|---------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{cases} -3x + 2y = -16 \\ x = 5y + 14 \end{cases} \quad \text{ג.}$ | $\begin{cases} y = x - 3 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \quad \text{ב.}$       | $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ y = 5 \end{cases} \quad \text{א.}$       |
| $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 7y = 11 \end{cases} \quad \text{ו.}$   | $\begin{cases} -5x + 7y = -26 \\ x + 3y = -8 \end{cases} \quad \text{ה.}$ | $\begin{cases} 5x - 2y = -2 \\ x + 4y = 4 \end{cases} \quad \text{ד.}$ |

#### 2) פתור את המשוואות הבאות:

|                                                                          |                                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| $\begin{cases} 5x + 2y = 14 \\ 5x + 3y = 23 \end{cases} \quad \text{ב.}$ | $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x - 3y = 3 \end{cases} \quad \text{א.}$ |
| $\begin{cases} 4x = 3y - 29 \\ 5y = 9 - 13x \end{cases} \quad \text{ד.}$ | $\begin{cases} 5y = 2x \\ 4x = 5y + 8 \end{cases} \quad \text{ג.}$   |

(3) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \begin{cases} x+2y=1 \\ 4x+8y=5 \end{cases} \\ \text{ב.} & \begin{cases} 2(x-y)+4y=1+x \\ 2-7y+x=3(x-y) \end{cases} \end{array}$$

(4) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \begin{cases} 3y-x+2=4x+2-3y \\ 2x-3-y=5y-4x+3 \end{cases} \\ \text{ב.} & \begin{cases} \frac{x-3}{8}-\frac{x+y}{16}=\frac{y-1}{4} \\ 3(2x-y)-4x-11=0 \end{cases} \\ \text{ג.} & \begin{cases} \frac{3x-1}{4}-\frac{2}{5}(x-y)=\frac{3}{10}(x+3) \\ \frac{x+1}{4}-\frac{y}{2}=1 \end{cases} \end{array}$$

(5) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=4 \\ \frac{5}{x}-\frac{1}{y}=4 \end{cases} & \text{ב.} & \begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{3}{y}=2 \\ \frac{9}{x}-\frac{4}{y}=-7 \end{cases} & \text{ג.} & \begin{cases} 4x-\frac{7}{y}=-3 \\ 5x+\frac{2}{y}=7 \end{cases} \end{array}$$

(6) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \begin{cases} x(y+2)+y=xy-5 \\ x-y=2 \end{cases} \\ \text{ב.} & \begin{cases} xy=20 \\ y(3x-4)=20 \end{cases} \\ \text{ג.} & \begin{cases} 5x-4xy=22 \\ 6x+xy=-20 \end{cases} \end{array}$$

## תשובות סופיות:

- (1) א. (2,5) ב. (-7,-10) ג. (4,-2) ד. (0,1) ה. (1,-3) ו. (-2,3).
- (2) א.  $(4, \frac{1}{3})$  ב.  $(-\frac{4}{5}, 9)$  ג. (4,1.6) ד. (-2,7).
- (3) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות.
- (4) א. (6,5) ב. (7,1) ג. (7,2).
- (5) א. (1,1) ב. (-3,1) ג. (1,1).
- (6) א. (-1,-3) ב. (2,10) ג. (-2,4).

## משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:

### סיכום כללי:

#### משוואה ממעלה ראשונה:

למשוואה ממעלה ראשונה מהצורה:  $ax = b$  יתכן פתרון יחיד אם ורק אם  $a \neq 0$

מכיוון שניתן לחלק ולכתוב:  $x = \frac{b}{a}$ .

כאשר  $a = 0$  מתקבלת המשוואה  $0x = b$  ויתכנו שני מצבים:

1. אם  $b = 0$  את המשוואה היא  $0x = 0$  ויש אינסוף פתרונות המקיימים אותה.

2. אם  $b \neq 0$  את המשוואה היא  $0x = b \neq 0$  ואין אף ערך של  $x$  המקיים אותה.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$(1) \quad x + 4 = 6 + x \quad (2) \quad 3x + 6 - x = 4 + 2x + 2$$

$$(3) \quad 6(x - 2) = 2x + 5 + 4x \quad (4) \quad 5x - 3 + x = 4x + 2x - 3$$

$$(5) \quad \text{נתונה המשוואה: } 3 - 2(x + 2) = 5x + \square$$

א. איזה מספר יש להציב ב- $\square$  על מנת שפתרון המשוואה יהיה 1?

ב. איזה מספר יש להציב ב- $\square$  על מנת שפתרון המשוואה יהיה 0?

ג. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- $\square$  על מנת שלמשוואה יהיו אינסוף פתרונות.

ד. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- $\square$  על מנת שלמשוואה לא יהיה פתרון.

### תשובות סופיות:

(1) אף פתרון.

(2) אינסוף פתרונות.

(3) אין פתרון.

(4) אינסוף פתרונות.

(5) א. -8      ב. -1      ג.  $-7x - 1$

ד.  $-7x + k$  (כאשר  $k$  הוא מספר כלשהו חוץ מ-1).



## משוואה ממעלה שנייה:

### סיכום כללי:

משוואה מהצורה:  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) נקראת משוואה ריבועית. פתרונות המשוואה יסומנו ב-  $x_1$  ו-  $x_2$  ויחושבו לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

למשוואה ריבועית יתכנו שלושה סוגים של פתרונות:

- משוואה עם שני פתרונות ממשיים שונים.**  
אם מתקבל מספר חיובי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים.  
דוגמא:  $x^2 + 5x - 4 = 0$
- משוואה עם פתרון ממשי אחד בלבד.**  
אם מתקבל אפס בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד בלבד.  
דוגמא:  $x^2 + 4x + 4 = 0$
- משוואה ללא פתרונות ממשיים כלל.**  
אם מתקבל מספר שלילי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה לא יהיו פתרונות ממשיים כלל.  
דוגמא:  $x^2 + x + 4 = 0$

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

ב.  $-x^2 + 10x - 16 = 0$

א.  $x^2 + 3x - 10 = 0$

ד.  $2x^2 - 6x + 5 = 0$

ג.  $25x^2 - 20x + 4 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות:

ב.  $-x(x-5) = (1-3x)(1-x) + 4$

א.  $4x^2 - 5x + 7 = 4 - x^2 + 13$

ד.  $(2x-1)^2 + x(2x+3) = (x-1)(x-7)$

ג.  $2(x-5)^2 - (2x-3)^2 = 10x + 21$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת  $b$ ):

$$\text{א. } x^2 - 36 = 0 \quad \text{ב. } 32x^2 - 18 = 0$$

$$\text{ג. } 4x - x(x+2) = 3(x-1) - x - 6 \quad \text{ד. } (2x-1)^2 + (2x+1)^2 = 10$$

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת  $c$ ):

$$\text{א. } -7x^2 - 14x = 0 \quad \text{ב. } 5x^2 - x = 0$$

$$\text{ג. } 6x(x-2) - 1 = 4x - 3(x+1) + 2 \quad \text{ד. } (5x-2)^2 = (x-2)(x+3) + 10$$

(5) פתור את המשוואות הבאות:

$$\text{א. } \frac{4x+1}{3} - \frac{x+2}{2} = \frac{2}{x} \quad \text{ב. } \frac{x^2-9}{x+3} + x = x^2 - 18$$

$$\text{ג. } \frac{3}{2x+2} - \frac{2x-5}{2(x-1)^2} - \frac{4}{1-x^2} = 0 \quad \text{ד. } \frac{x}{2x^2-72} + \frac{2}{x^2+12x+36} = \frac{8x-15}{24-4x} + 2$$

## תשובות סופיות:

$$(1) \text{ א. } x_1 = 2, x_2 = -5 \quad \text{ב. } x_1 = 2, x_2 = 8 \quad \text{ג. } x = \frac{2}{5} \quad \text{ד. אין פתרון.}$$

$$(2) \text{ א. } x_1 = 2, x_2 = -1 \quad \text{ב. } x_1 = 1, x_2 = 1\frac{1}{4} \quad \text{ג. } x_1 = 1, x_2 = -10 \quad \text{ד. } x_1 = 0.6, x_2 = -2$$

$$(3) \text{ א. } x = \pm 6 \quad \text{ב. } x = \pm \frac{3}{4} \quad \text{ג. } x = \pm 3 \quad \text{ד. } x = \pm 1$$

$$(4) \text{ א. } x_1 = 0, x_2 = -2 \quad \text{ב. } x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{5} \quad \text{ג. } x_1 = 0, x_2 = 2\frac{1}{6} \quad \text{ד. } x_1 = 0, x_2 = \frac{7}{8}$$

$$(5) \text{ א. } x_1 = 2, x_2 = -1.2 \quad \text{ב. } x = 5, x \neq -3 \quad \text{ג. } x_1 = 0, x_2 = -5 \quad \text{ד. } x_1 = -7.6, x_2 = -4\frac{2}{7}$$

## משוואות דו-ריבועיות:

### סיכום כללי:

משוואה דו-ריבועית היא משוואה מהצורה:  $ax^4 + bx^2 + c = 0$  כאשר הנעלם הוא  $x$ .  
פתרון המשוואה יבוצע ע"י מעבר לפרמטר:  $x^2 = t \rightarrow at^2 + bt + c = 0$  ומציאתו.  
לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה ולמצוא את ערכי  $x$ .

ניתן להביא משוואות לצורה זו ולהגדיר ביטוי המופיע בחזקות 2 ו-4 כגון:  $(x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1) - 2 = 0$  באמצעות פרמטר:  $t = x^2 - 1$   
ובכך לפתור משוואה:  $t^2 + 3t - 2 = 0$  ולהחזיר את ההצבה עבור מציאת  $x$ .  
דרך הפתרון תקפה לכל משוואה בה הנעלם מופיע בחזקות כפולות כגון 3 ו-6, או 4 ו-8.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$5x^4 + 3x^2 - 8 = 0 \quad (1) \quad x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \quad (2)$$

$$13x^2(3x^2 - 1) - 2 = 3(x^2 - 1)(x^2 + 1) \quad (3) \quad x^2(x^2 + 1) = 10(3x^2 - 10) \quad (4)$$

$$x^6 + x^3 = 56 \quad (5) \quad x^3 + 4 = \frac{32}{x^3} \quad (6)$$

$$x - 9\sqrt{x} + 14 = 0 \quad (7) \quad x^8 - 4x^4 - 50 = 31x^4 - 84 \quad (8)$$

$$125x^6 - 1 = 124(x^6 + x^3 + 1) \quad (9) \quad (2x^2 - x)^2 - 4(2x^2 - x) + 3 = 0 \quad (10)$$

$$(x^2 + 2x)^2 + 7x^2 + 14x = -6 \quad (11) \quad \frac{21}{x^2 - 4x + 10} = 6 + x^2 - 4x \quad (12)$$

$$\frac{12}{x^2 + 2x - 8} = 1 + \frac{7.5}{x^2 + 2x - 3} \quad (13) \quad \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{7}{6} - \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2} \quad (14)$$

$$\frac{3}{3x^2 - 15} + \frac{1}{x^2 + 5} = \frac{10}{x^4 - 25} \quad (15) \quad \frac{x^2 - 1}{4x^2 - 28} + 2 = \frac{9}{x^4 - 8x^2 + 7} + \frac{x^2}{2x^2 - 2} \quad (16)$$

$$\left(2x + \frac{3}{x}\right)^2 + 35 = 12\left(2x + \frac{3}{x}\right) \quad (17) \quad \frac{3x^4}{(x+2)^2} + \frac{3x^2}{x+2} = 6 \quad (18)$$

$$(2x - x^2 + 3)(2x - x^2 - 2) = 0 \quad (19) \quad (x^2 - 5x + 6)(x^2 - 5x - 8) = -24 \quad (20)$$

### תשובות סופיות:

$$x = \pm 1 \quad (1)$$

$$x = \pm 1, \pm \sqrt{2} \quad (2)$$

$$x = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3} \quad (3)$$

$$x = \pm 2, \pm 5 \quad (4)$$

$$x_1 = \sqrt[3]{7}, x_2 = -2 \quad (5)$$

$$x = -2, \sqrt[3]{4} \quad (6)$$

$$x = 49 \quad (7)$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{34}, x_{3,4} = \pm 1 \quad (8)$$

$$x = 5, -1 \quad (9)$$

$$x_1 = 1.5, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = -\frac{1}{2} \quad (10)$$

$$x = -1 \quad (11)$$

$$x_{1,2} = 1, 3 \quad (12)$$

$$x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 3.06, x_4 = -5.06 \quad (13)$$

$$x_1 = 0, x_2 = -2 \quad (14)$$

$$(15) \text{ אין פתרונות.}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{3}{7}} \quad (16)$$

$$x = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 3 \quad (17)$$

$$x = -1, 2 \quad (18)$$

$$x = 3, -1 \quad (19)$$

$$x = \pm 1, 4, 6 \quad (20)$$

## משוואות עם פרמטרים:

### סיכום כללי:

משוואה עם פרמטר הינה משוואה שמכילה שני סוגים של גדלים – משתנים ופרמטרים. את המשתנים מקובל לסמן באותיות  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ואת הפרמטרים מסמנים בשאר האותיות. פתרון המשוואה יתקבל ע"י בידוד המשתנה כך שיבוטא באמצעות הפרמטר/ים שבמשוואה.

למשל פתרון המשוואה:  $mx = 4$  (כאשר  $x$  הוא הנעלם ו- $m$  הוא פרמטר) הוא:  $x = \frac{4}{m}$

אשר מבוטא באמצעות הפרמטר  $m$ .

בכתיבת פתרון של משוואה עם פרמטרים יש לציין את תחום ההגדרה של הפרמטר עבורו הפתרון הוא בעל משמעות.

בדוגמא הנ"ל תחום ההגדרה הוא:  $m \neq 0$ .

### שאלות:

#### 1) פתור את המשוואות הבאות:

$$\text{א. } 3x - b = (b+1)x - 6 \quad \text{ב. } \frac{1}{3}(a - 3x) = \frac{1}{a}(ax - 3)$$

$$\text{ג. } (x - 2a)(x - 2b) = x^2 - 2(a^2 + b^2) \quad \text{ד. } \frac{m+1}{x-1} = \frac{m-1}{x+1}$$

$$\text{ה. } \frac{x}{a^2 - a} - \frac{1}{2a} = \frac{ax + x}{2a^3 - 4a^2 + 2a} - \frac{2}{a^3 - 2a^2 + a}$$

#### 2) פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\text{א. } \begin{cases} x + my = 1 \\ x + y = m \end{cases} \quad \text{ב. } \begin{cases} ax + y = 2 \\ x + ay = 4 \end{cases}$$

$$\text{ג. } \begin{cases} \frac{x}{m} + y = m \\ x - m^2 y = 1 \end{cases} \quad \text{ד. } \begin{cases} (m-1)x - (2m+3)y = 5 \\ (m+2)x - (2m-1)y = 10m \end{cases}$$

$$\text{ה. } \begin{cases} (2a+b)x - (2a-b)y = 8ab \\ (2a-b)x + (2a+b)y = 8a^2 - 2b^2 \end{cases}$$

**(3) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות :**

$$\text{א. } x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \quad \text{ב. } x^2 - 2x + 4a = a^2 + 3$$

$$\text{ג. } x^2 + m(x+10) = 2m^2 - 5x \quad \text{ד. } \frac{1}{a-x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+x} = 0$$

$$\text{ה. } (m^2 + 1)x^2 - m^2x - 1 = 0 \quad \text{ו. } \frac{a}{x} + \frac{1}{b} = \frac{x}{a} + b$$

$$\text{ז. } x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$$

**תשובות סופיות:**

$$\text{(1) א. } x = \frac{b-6}{2-b}, b \neq 2 \quad \text{ב. } x = \frac{a^2+9}{6a}, a \neq 0 \quad \text{ג. } x = a+b \quad \text{ד. } x = -m \quad \text{ה. } x = a+1$$

$$\text{(2) א. } m \neq 1, (m+1, -1) \quad \text{ב. } a \neq \pm 1, \left( \frac{2a-4}{a^2-1}, \frac{4a-2}{a^2-1} \right)$$

$$\text{ג. } m \neq 0-1, \left( m^2 - m + 1, \frac{m-1}{m} \right) \quad \text{ד. } m \neq 1, -2, (2m+1, m-2)$$

$$\text{ה. } b \neq \pm 2a, (2a+b, 2a-b)$$

$$\text{(3) א. } x = m+1, m-1 \quad \text{ב. } x = a-1, 3-a \quad \text{ג. } x = m-5, -2m$$

$$\text{ד. } a \neq 0, x \neq \pm a, x = \pm a\sqrt{3} \quad \text{ה. } x = 1, -\frac{1}{m^2+1}$$

$$\text{ו. } a, b \neq 0, x = \frac{a}{b}, -ab \quad \text{ז. } a \neq \pm b, x = \frac{a+b}{a-b}, \frac{a-b}{a+b}$$

## משוואות עם שורשים:

### סיכום כללי:

פתרון משוואה מהצורה:  $\sqrt{x} = a$  יתקבל ע"י העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה באופן הבא:  $x = a^2 \rightarrow (\sqrt{x})^2 = (a)^2$ .

### הערות:

- (1) יש לזכור בעת העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה יש לבדוק את כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבתם במשוואה המקורית.
- (2) למשוואה מהצורה  $\sqrt{x} = a$  שבה  $a < 0$  אין פתרון.
- (3) יש לסדר תחילה משוואות שבהן הביטוי עם שורש אינו מבודד.
- (4) במשוואות שבהן יותר מביטוי אחד עם שורש יש לבודד תחילה את אחד הביטויים, להעלות בריבוע ולאחר מכן לחזור על התהליך ולבצע העלאה בריבוע פעם נוספת.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- |                                                |                                                     |
|------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| (2) $\sqrt{x+2} = x$                           | (1) $\sqrt{2x+5} = 7$                               |
| (4) $\sqrt{2x+7} + 4 = x$                      | (3) $\sqrt{3x+1} + x = 13$                          |
| (6) $\sqrt{10x+6} + 9 = x$                     | (5) $\sqrt{x-1} + 3 = x$                            |
| (8) $\sqrt{24-x} + 3 = 2x$                     | (7) $\sqrt{x+6} - 2 = 2x$                           |
| (10) $2x = 16 - 3\sqrt{x-1}$                   | (9) $\sqrt{x+16} + 4 = 2x$                          |
| (12) $\sqrt{x^2 - 5x + 12} = 2\sqrt{6-x}$      | (11) $\sqrt{3x+5} = \sqrt{x+17}$                    |
| (14) $\sqrt{2x-1} + 3 = \sqrt{7x+1}$           | (13) $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2x-5} = \sqrt{11-x^2}$ |
| (16) $\sqrt{2x-3} + \sqrt{3-x} = 2$            | (15) $\sqrt{9x-8} - 3\sqrt{x+4} = -2$               |
| (18) $\sqrt{2x-2} + \sqrt{5x-4} = \sqrt{3x-2}$ | (17) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4x+1}$        |
|                                                | (19) $3\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} = 2\sqrt{x+2}$      |

## תשובות סופיות:

- |                           |               |
|---------------------------|---------------|
| $x = 2$ (2                | $x = 22$ (1   |
| $x = 9$ (4                | $x = 8$ (3    |
| $x = 25$ (6               | $x = 5$ (5    |
| $x = 3.75$ (8             | $x = 0.25$ (7 |
| $x = 5$ (10               | $x = 4.25$ (9 |
| $x = 4, -3$ (12           | $x = 6$ (11   |
| $x = 5$ (14               | $x = 3$ (13   |
| $x = 2, 2\frac{8}{9}$ (16 | $x = 12$ (15  |
| $x = 1$ (18               | $x = 6$ (17   |
|                           | $x = 2$ (19   |



## משוואות עם ערך מוחלט:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

ערך מוחלט הינו המרחק של מספר מ-0 ומוגדר באופן הבא:  $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

### משוואה עם ערך מוחלט:

משוואה עם ערך מוחלט היא מהצורה:  $|x| = a$ .

כדי לפתור משוואה עם ערכים מוחלטים יש למצוא את נקודות האפס של כל ערך מוחלט (קרי: הנקודות בהן הביטוי שבתוך הערך המוחלט מתאפס) ולפצל את המשוואה הנתונה לתחומים עבור כל תחום.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- |                                       |                                     |
|---------------------------------------|-------------------------------------|
| $ 3x - 24  = x$ (2)                   | $ 3x + 14  = 7$ (1)                 |
| $2x -  8 - x  = 10$ (4)               | $ 12 - x  = 3x$ (3)                 |
| $ 14 - 3x  = 2 x + 5 $ (6)            | $ 4x - 5  =  2x + 13 $ (5)          |
| $ x + 2  + 6 =  2x - 4 $ (8)          | $ x  + 7 =  2x $ (7)                |
| $ 10 - 3x  -  x + 4  =  2x - 6 $ (10) | $ x + 2  +  2x - 6  =  4x + 8 $ (9) |

### תשובות סופיות:

- |                             |                 |                           |                            |
|-----------------------------|-----------------|---------------------------|----------------------------|
| $x = 6$ (4)                 | $x = 3$ (3)     | $x = 6, 12$ (2)           | $x = -\frac{7}{3}, -7$ (1) |
| $x = 12, -1\frac{1}{3}$ (8) | $x = \pm 7$ (7) | $x = 24, \frac{4}{5}$ (6) | $x = 9, -1\frac{1}{3}$ (5) |
|                             |                 | $x = 0$ (10)              | $x = 0, -12$ (9)           |

## מערכת משוואות ממעלה שנייה:

### סיכום כללי:

מערכת משוואות ריבועיות מיוחסת למערכת של שתי משוואות (לפחות) שאחת מהן מכילה את אחד מהנעלמים בריבוע. למערכת משוואות ריבועיות יכולים להתקבל עד 4 פתרונות שונים. יש לפתור את המערכת לפי הטכניקות הרגילות של בידוד והצבה או השוואת מקדמים.

### שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 36 \\ x^2 + 3y = 10 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 17 \\ xy = -10 \end{cases} \quad (4) \qquad \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 16 \\ 5x^2 - 3y^2 = 17 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 8y^2 = 8 \\ 3xy - 2y^2 = 4 \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} x^2 - xy - 20y^2 = 0 \\ x + 6y = 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} 16x^2 - y^2 = 391 \\ 4x - y = 23 \end{cases} \quad (8) \qquad \begin{cases} x^2 - y^2 = 33 \\ x + y = 11 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{4}{y} - \frac{1}{x} = -19 \end{cases} \quad (10) \qquad \begin{cases} 4xy + x = -15 \\ \frac{3}{y} - 2x = 16 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} xy = 24 \\ (y-x)^2 - 7(y-x) + 10 = 0 \end{cases} \quad (12) \qquad \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 21 \\ \frac{8}{x} - \frac{1}{y} = 13 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{10}{3} \\ x^2 + y^2 = 9xy + 25 \end{cases} \quad (14) \qquad \begin{cases} x^2y - xy^2 = 84 \\ x^2 - 2xy + y^2 + 5x - 5y = 24 \end{cases} \quad (13)$$

## תשובות סופיות:

- (2, 4) , (4, 2) **1**
- (±4, -2) **2**
- (±2, ±1) **3**
- (5, -2) , (-5, 2) **4**
- $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$  ,  $\left(\frac{5}{11}, \frac{1}{11}\right)$  **5**
- $\left(3, \frac{1}{2}\right)$  ,  $\left(-3, -\frac{1}{2}\right)$  , (2, 1) , (-2, -1) **6**
- (5, -3) **8**
- (7, 4) **7**
- $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right)$  **10**
- $\left(-5, \frac{1}{2}\right)$  ,  $\left(-24, -\frac{3}{32}\right)$  **9**
- (4, 6) , (-6, -4) , (3, 8) , (-8, -3) **12**
- $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$  **11**
- (-1.65, 6.35) , (-6.35, 1.65) , (7, 4) , (-4, -7) **13**
- (5, 45) , (-5, -45) , (45, 5) , (-45, -5) **14**

# קורס מבוא למתמטיקה לכלכלנים

פרק 6 - אי שוויונים אלגבריים

תוכן העניינים

1. אי-שוויונים ממעלה ראשונה. .... 64
2. אי-שוויונים ממעלה שנייה. .... 65
3. אי-שוויונים ממעלה שלישית. .... 66
4. אי-שוויונים עם מנה. .... 67
5. אי-שוויונים כפולים מערכות או, וגם. .... 68
6. שאלות מסכמות – אי-שוויונים. .... 69
7. תחום הגדרה. .... 71

## אי-שוויונים ממעלה ראשונה:

### סיכום כללי:

#### מה מותר?

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

#### מה אסור?

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$45x - 26 > 109 \quad (1) \qquad 6x > 2(3x - 1) \quad (2)$$

$$2(x - 5) \geq \frac{1}{2}(4x + 6) \quad (3) \qquad (x - 2)^2 + 4 < (x + 2)^2 + 20 \quad (4)$$

$$\frac{8x - 4}{2} < \frac{9(x + 1)}{3} \quad (5) \qquad 4(6x - 8) < 8(3x - 4) \quad (6)$$

$$\frac{x - 6}{3} - \frac{x - 4}{4} \geq 12 - x \quad (7) \qquad \frac{7 - x}{10} - \frac{3x - 1}{5} + \frac{x + 4}{3} < 7 \quad (8)$$

### תשובות סופיות:

- |                       |                          |                          |
|-----------------------|--------------------------|--------------------------|
| $x > 3 \quad (1)$     | $x \text{ כל} \quad (2)$ | $x \text{ אף} \quad (3)$ |
| $x > -2 \quad (4)$    | $x < 5 \quad (5)$        | $x \text{ אף} \quad (6)$ |
| $x \geq 12 \quad (7)$ | $x > -13 \quad (8)$      |                          |

## אי-שוויונים ממעלה שנייה:

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$x^2 - 12x > -32 \quad (10) \qquad x^2 < 144 \quad (9)$$

$$(x+2)(x+4) < 35 \quad (12) \qquad (x+2)(x+5) < 0 \quad (11)$$

$$(x-3)(x-7) \geq 8x-56 \quad (14) \qquad -x^2 + 13x + 30 < 0 \quad (13)$$

$$(5x+6)^2 \leq 4(x-3)^2 \quad (16) \qquad (x-5)^2 + x(x+2) < 89 \quad (15)$$

$$x^2 - 10x + 25 > 0 \quad (18) \qquad -3x^2 + 12x > 0 \quad (17)$$

$$2x^2 + 2x + 24 \geq 0 \quad (20) \qquad (x-3)^2 > (x-1)(x+6) - x^2 - 3x \quad (19)$$

### תשובות סופיות:

$$-5 < x < -2 \quad (11) \qquad x < 4, x > 8 \quad (10) \qquad -12 < x < 12 \quad (9)$$

$$x \leq 7, x \geq 11 \quad (14) \qquad x < -2, x > 15 \quad (13) \qquad -9 < x < 3 \quad (12)$$

$$0 < x < 4 \quad (17) \qquad -4 \leq x \leq 0 \quad (16) \qquad -4 < x < 8 \quad (15)$$

$$x \text{ כל} \quad (20) \qquad x < 3, x > 5 \quad (19) \qquad x > 5, x < 5 \quad (18)$$

## אי-שוויונים ממעלה שלישית:

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- |                                       |                                     |
|---------------------------------------|-------------------------------------|
| $x(x^2 + x + 1) > 0$ (22)             | $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$ (21)          |
| $x^3 - 25x \geq 0$ (24)               | $(-2x^2 - 3x + 2)(x+1) \leq 0$ (23) |
| $(x^2 + 8x + 20)(3x - 5) \leq 0$ (26) | $(x^2 + 3x + 5)(x - 2) > 0$ (25)    |
| $x^3 - 6x^2 + 9x \leq 0$ (28)         | $(x^2 - x - 6)(x - 1) < 0$ (27)     |
| $(x-2)(x-4)(x-1) < 0$ (30)            | $(x^2 + 6)(x + 3) > 0$ (29)         |

### תשובות סופיות:

- |                                              |                        |                                   |
|----------------------------------------------|------------------------|-----------------------------------|
| $-2 \leq x \leq -1, x \geq \frac{1}{2}$ (23) | $x > 0$ (22)           | $1 < x < 2, x > 3$ (21)           |
| $x \leq 1\frac{2}{3}$ (26)                   | $x > 2$ (25)           | $-5 \leq x \leq 0, x \geq 5$ (24) |
| $x > -3$ (29)                                | $x \leq 0, x = 3$ (28) | $x < -2, 1 < x < 3$ (27)          |
|                                              |                        | $x < 1, 2 < x < 4$ (30)           |

## אי-שוויונים עם מנה:

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

|                                    |                                          |
|------------------------------------|------------------------------------------|
| $\frac{x-1}{3x+2} \geq -3$ (32)    | $\frac{x-1}{x^2-9} > 0$ (31)             |
| $\frac{x-3}{2x^2-10x+12} > 0$ (34) | $\frac{1}{x^2-16} > 0$ (33)              |
| $\frac{1}{-3(x-1)} < 0$ (36)       | $\frac{2x-1}{x-5} \leq 0$ (35)           |
| $\frac{1}{x^2-5x+6} < 0$ (38)      | $\frac{x-1}{x+2} \leq 1$ (37)            |
| $\frac{1}{x^2-8x+12} \geq 0$ (40)  | $\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7} \geq 0$ (39) |

### תשובות סופיות:

|                        |                                              |                          |
|------------------------|----------------------------------------------|--------------------------|
| $x < -4, x > 4$ (33)   | $x < -\frac{2}{3}, x \geq -\frac{1}{2}$ (32) | $-3 < x < 1, x > 3$ (31) |
| $x > 1$ (36)           | $\frac{1}{2} \leq x < 5$ (35)                | $2 < x < 3, x > 3$ (34)  |
| $1 \leq x \leq 6$ (39) | $2 < x < 3$ (38)                             | $x > -2$ (37)            |
|                        |                                              | $x < 2, x > 6$ (40)      |



## אי-שוויונים כפולים מערכות או, וגם:

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$0 < \frac{1}{x+4} < 2 \quad (42)$$

$$3 < x+1 < 5 \quad (41)$$

$$0 < \frac{8-3x}{5-2x} < 4 \quad (44)$$

$$-1 < \frac{x-1}{x+1} < 1 \quad (43)$$

$$6 < \frac{2x+10}{3} \leq \frac{7x-20}{5} \quad (46)$$

$$6x-38 \leq x-3 \leq 5x+7 \quad (45)$$

$$\frac{4x+5}{15} > \frac{3x-8}{5} + \frac{9-x}{3} > 11 \quad (48)$$

$$-1 \leq \frac{2x-6}{4} < \frac{x+2}{3} \quad (47)$$

### תשובות סופיות:

$$x > 0 \quad (43) \qquad x > -3\frac{1}{2} \quad (42)$$

$$2 < x < 4 \quad (41)$$

$$x \geq 10 \quad (46) \qquad -2.5 \leq x \leq 7 \quad (45)$$

$$x < 2\frac{2}{5}, x > 2\frac{2}{3} \quad (44)$$

$$\emptyset \quad (48)$$

$$1 \leq x < 13 \quad (47)$$

## שאלות מסכמות – אי-שוויונים:

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$(1) \quad x \leq -\frac{3}{4} \cap \{-2 < x \leq 5 \cup 0 < x < 8\}$$

$$(3) \quad \frac{(x-3)(x+4)}{2-x} \leq 0 \quad (2) \quad x(x+5) - 3x + 12 \leq 2x - 1 - x(4-x)$$

$$(5) \quad \frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)} \geq 0 \quad (4) \quad \frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)} < 0$$

$$(7) \quad \frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2} > 0 \quad (6) \quad x(x+3)(2x-5) < 0$$

$$(9) \quad \frac{x-3}{x^2+2} > 0 \quad (8) \quad \frac{5-2x}{(x-8)^2} \leq 0$$

$$(11) \quad \frac{x^2-6x+9}{x^3-x} > 0 \quad (10) \quad \frac{x^2-4x}{x^2+2x-3} > 0$$

$$(13) \quad \frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2} \quad (12) \quad \frac{x-7}{x^2+x+3} > 0$$

$$(15) \quad 6 < 5x - x^2 \cap x^2 > 3x + 10 \quad (14) \quad \frac{2x^2}{x^2-6x+8} \geq \frac{x}{x-4} - \frac{x}{x-2}$$

$$(17) \quad 1 < \frac{x-1}{x-4} \leq 2 \quad (16) \quad \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x} > 0 \cup \frac{1}{x-3} < \frac{1}{1-x}$$

$$(18) \quad \text{לאילו ערכי } x \text{ נמצאת הפונקציה } f(x) = \frac{x}{x-3} \text{ מעל הפונקציה } g(x) = \frac{x+1}{x+3} ?$$

## תשובות סופיות:

- |                                           |                                      |
|-------------------------------------------|--------------------------------------|
| $x \leq -4$ (2)                           | $-2 < x \leq -\frac{3}{4}$ (1)       |
| $x < -7, -\frac{1}{3} < x < 2, x > 5$ (4) | $-4 \leq x < 2, x \geq 3$ (3)        |
| $x < -3, 0 < x < 2.5$ (6)                 | $-1 < x \leq 1.5, 4 < x \leq 12$ (5) |
| $2.5 \leq x < 8, x > 8$ (8)               | $x < -1, 2 < x < 6, x > 6$ (7)       |
| $x < -3, 0 < x < 1, x > 4$ (10)           | $x > 3$ (9)                          |
| $x > 7$ (12)                              | $-1 < x < 0, 1 < x < 3, x > 3$ (11)  |
| $x \leq 0, 1 \leq x < 2, x > 4$ (14)      | $x < -2, 2 < x < 4$ (13)             |
| $x \neq 1$ (16)                           | $x$ אף $x$ (15)                      |
| $-3 < x < -\frac{3}{5}, x > 3$ (18)       | $x \geq 7$ (17)                      |

## תחום הגדרה:

### שאלות:

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \sqrt{3x-4} \quad \text{ב. } f(x) = \sqrt{x^2-5x-6}$$

$$\text{ג. } f(x) = \sqrt{12x-x^2-x^3} \quad \text{ד. } f(x) = \sqrt{\frac{x+5}{x^2-4}}$$

$$\text{ה. } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}-x} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{\sqrt{3x^2-2x-1}}{2x-3}$$

(2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \sqrt{\sqrt{x+2}-3} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$$

$$\text{ג. } f(x) = \sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}} \quad \text{ד. } f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$$

(3) תחום ההגדרה של הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{ax-x^2-4}$  הוא  $1 \leq x \leq 4$ . מצא את ערכו של הפרמטר  $a$ .

(4) תחום ההגדרה של הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$  הוא  $x \leq -2, x > 2$ . מצא את ערכו של הפרמטר  $a$ .

(5) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+6}-a}$ , ( $a$  פרמטר חיובי).

א. הבע באמצעות  $a$  את תחום הגדרתה.

ב. מגדירים פונקציה נוספת:  $g(x) = \sqrt{\frac{2x}{x+5}}$ .

ידוע כי תחום ההגדרה של שתי הפונקציות מכסה את כל ציר המספרים. מצא את תחום הערכים האפשרי של הפרמטר  $a$ .

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $x \geq 1\frac{1}{3}$     ב.  $x \leq -1, x \geq 6$     ג.  $x \leq -4, 0 \leq x \leq 3$
- ד.  $-5 \leq x < -2, x > 2$     ה.  $-2 \leq x < 2, x > 2$     ו.  $x \leq -\frac{1}{3}, 1 \leq x < \frac{3}{2}, x > \frac{3}{2}$
- (2) א.  $x \geq 7$     ב.  $-6 \leq x \neq -2$     ג.  $x \leq -1\frac{1}{2}, x \geq 1$
- ד.  $x \leq -3, -2 \leq x \neq 1$
- (3)  $a = 5$
- (4)  $a = 2$
- (5) א.  $x \geq a^2 - 6$     ב.  $0 < a \leq 1$

# קורס מבוא למתמטיקה לכלכלנים

פרק 7 - חשבון דיפרנציאלי - הפונקציה הממשית

תוכן העניינים

1. פונקציה - הגדרה ותכונות בסיסיות ..... (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית ..... (ללא ספר)
3. הפונקציה הריבועית ..... (ללא ספר)
4. הפונקציה המעריכית ..... (ללא ספר)
5. הפונקציה הלוגריתמית ..... (ללא ספר)
6. פונקציות מפורסמות נוספות ..... (ללא ספר)
7. הזזות שיקופים מתיחות וכיווצים של פונקציה ..... (ללא ספר)
8. תחום הגדרה של פונקציה ..... 73
9. הרכבת פונקציות ..... 75
10. הפונקציה ההפוכה ..... 78

## תחום הגדרה של פונקציה

### שאלות

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות :

$$(1) \quad y = x^3 - x^2 - 4x + 1$$

$$(2) \quad y = \frac{1}{x^2 - 4}$$

$$(3) \quad y = \frac{4x + 1}{x^2 + 1}$$

$$(4) \quad y = \frac{1}{x^3 - x}$$

$$(5) \quad y = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$$

$$(6) \quad y = \sqrt{x - 4}$$

$$(7) \quad y = \sqrt{x^2 + x - 2}$$

$$(8) \quad y = \sqrt[3]{x^2 + x - 1}$$

$$(9) \quad y = \frac{1}{\sqrt{1 - |x|}}$$

$$(10) \quad y = \ln(x^2 + x - 2)$$

$$(11) \quad y = \log x + \frac{1}{\log x}$$

$$(12) \quad y = e^{x^2 + x + 1}$$

$$y = \log_x (x + 4) \quad (13)$$

### תשובות סופיות

- (1) כל  $x$ .
- (2)  $x \neq \pm 2$
- (3) כל  $x$ .
- (4)  $x \neq 0, 1, -1$
- (5)  $x \neq 2, -1$
- (6)  $x \geq 4$
- (7)  $x \leq -2, x \geq 1$
- (8) כל  $x$ .
- (9)  $-1 < x < 1$
- (10)  $x < -2, x > 1$
- (11)  $x > 0, x \neq 1$
- (12) כל  $x$ .
- (13)  $x > 0, x \neq 1$



## הרכבת פונקציות

### שאלות

(1) נתונות הפונקציות  $h(x) = \frac{4}{x}$ ,  $g(x) = x^2$ ,  $f(x) = x - 4$

חשבו את הפונקציות המורכבות הבאות:

א.  $f(g(1))$       ב.  $h(g(f(5)))$       ג.  $f(g(x))$   
 ד.  $h(f(x))$       ה.  $f(f(x))$       ו.  $h(h(x))$

(2) נתון  $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$

חשבו את  $f(f(x))$  עבור  $x=3$ .

(3) נתון  $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ ,  $g(x) = \frac{5-x}{x-7}$

חשבו את  $f(g(x)) + g(f(x))$  עבור  $x=8$ .

(4) נתון  $f(x) = x^2 - 7x$ ,  $g(x) = \ln x$

חשבו את  $f(g(x))$  עבור  $x = e^2$ .

(5) נתון  $f(x) = e^{2x}$ ,  $g(x) = \ln x$

חשבו את  $f(g(x))$  עבור  $x=2$ .

(6) נתון  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$ ,  $g(x) = \begin{cases} x+3 & x > 4 \\ 3x & x \leq 4 \end{cases}$

חשבו את  $f(g(x))$ ,  $g(f(x))$

### נתונות הפונקציות

א.  $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases}$       ב.  $g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 1 \\ -x^2-2x-1 & x \geq 1 \end{cases}$

מצאו נוסחה עבור ההרכבה  $z(x) = g(f(x))$ .

## 8) נתונות הפונקציות

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases} \quad \text{ו-} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 1 \\ -x^2 - 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

א. מצאו נוסחה עבור ההרכבה  $h(x) = f(g(x))$ .

ב. נתון ש- $n \in \mathbb{Z}$  ו- $h(n) \notin \mathbb{Z}$ .

מה ניתן להסיק בוודאות?

1.  $n \leq -3$

2.  $n \geq 1$

3.  $n$  אי-זוגי שלילי.

4. אף תשובה אינה נכונה.

9) נתון  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ .

מצאו את  $f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\dots(f(x))))}_{n \text{ Times}}$ .

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } -3 \quad \text{ב. } 4 \quad \text{ג. } x^2 - 4 \quad \text{ד. } \frac{4}{x-4} \quad \text{ה. } x-8 \quad \text{ו. } x$$

$$(2) \quad 3$$

$$(3) \quad 69/13$$

$$(4) \quad -10$$

$$(5) \quad 4$$

$$(6) \quad f(g(x)) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & x > 4 \\ \frac{1}{3x} & 0 < x \leq 4 \\ (3x)^2 & x \leq 0 \end{cases}, g(f(x)) = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 2 \\ 3x^2 & -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{x} + 3 & 0 < x < \frac{1}{4} \\ 3\frac{1}{x} & x \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$(7) \quad z(x) = \begin{cases} 4x^2 + 16x + 12 & x < -1.5 \\ -4x^2 - 20x - 25 & -1.5 \leq x \leq -1 \\ x - 3 & -1 < x < 0 \\ -x - 2 - 2\sqrt{x+1} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(8) \quad \text{א. } h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3} & x < -\sqrt{3} \\ 2x^2 - 4 & -\sqrt{3} \leq x < 1 \\ -2x^2 - 4x + 2 & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{ב. } n \leq -3$$

$$(9) \quad f^n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$$

## הפונקציה ההפוכה

### שאלות

בשאלות 1-4 הוכיחו שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצאו את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{3} \quad (1)$$

$$(x \geq 0) \quad f(x) = x^2 - 4 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad (3)$$

בשאלות 5-7, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (7)$$

$$f(x) = x^2 - x \quad (6)$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad (5)$$

בשאלות 8-10, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע, אם כן, מצאו את הפונקציה ההפוכה ואת התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \left( \frac{2x-1}{2x+1} \right)^3 \quad (10)$$

$$y = \frac{x^2+3}{2x-1} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (8)$$

$$(11) \text{ נתונה } f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x-1}}.$$

האם הפונקציה היא חח"ע?  
מצאו את התמונה של הפונקציה.

(12) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו את תחום ההגדרה, הטווח והתמונה וקבעו האם היא פונקציה על:

$$f(x) = \frac{x-1}{3}; \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x}; \quad f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2}; \quad f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = x^2 - 4; \quad f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ד.}$$

**13** עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו תחום הגדרה, טווח ותמונה. בנוסף, קבעו האם הפונקציה הנתונה היא על.

א.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

ב.  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, 1]$   $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

ג.  $f: (1, \infty) \rightarrow (0, 1]$   $h(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

**14** תהיינה שתי פונקציות  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ . תהי  $h: A \rightarrow C$  ההרכבה, המוגדרת על ידי  $h(x) = g(f(x))$ . הוכיחו או הפריכו:

- א. אם  $f$  ו- $g$  חח"ע אז  $h$  חח"ע.
- ב. אם  $f$  ו- $g$  חח"ע אז  $h$  על.
- ג. אם  $f$  ו- $g$  על אז  $h$  על.
- ד. אם  $f$  ו- $g$  על אז  $h$  חח"ע.
- ה. אם  $f$  חח"ע ו- $g$  על אז  $h$  חח"ע.
- ו. אם  $f$  חח"ע ו- $g$  על אז  $h$  על.
- ז. אם  $f$  על ו- $g$  חח"ע אז  $h$  חח"ע.
- ח. אם  $f$  על ו- $g$  חח"ע אז  $h$  על.

**15** תהיינה שתי פונקציות  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ . תהי  $h: A \rightarrow C$  ההרכבה, המוגדרת על ידי  $h(x) = g(f(x))$ . נתון כי  $h$  על. הוכיחו או הפריכו:

- א.  $f$  חח"ע.
- ב.  $f$  על.
- ג.  $g$  חח"ע.
- ד.  $g$  על.

**16)** תהיינה שתי פונקציות  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ .

תהי  $h: A \rightarrow C$  ההרכבה, המוגדרת על ידי  $h(x) = g(f(x))$ .

נתון כי  $h$  חח"ע.

הוכיחו או הפריכו:

א.  $g$  על.

ב.  $f$  על.

ג.  $g$  חח"ע.

ד.  $f$  חח"ע.

## תשובות סופיות

- (1)  $f^{-1}(x) = 3x + 1$ , כל  $y$ .
- (2)  $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$ ,  $y \neq 1$ .
- (3)  $f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{x-3}$ ,  $y \neq 3$ .
- (4)  $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$ ,  $y \geq -4$ .
- (5) לא חח"ע. תמונה:  $y \leq -2$  או  $y \geq 2$ .
- (6) לא חח"ע. תמונה:  $y \geq -\frac{1}{4}$ .
- (7) לא חח"ע. תמונה:  $0 \leq y \leq 1$ .
- (8) כן חח"ע. תמונה:  $y > 0$ . פונקציה הפוכה:  $x > 0$ ,  $f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ .
- (9) לא חח"ע. תמונה:  $y \geq 2.3$  או  $y \leq -1.3$ .
- (10) כן חח"ע. תמונה:  $y \neq 1$ . פונקציה הפוכה:  $f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2}$ .
- (11) לא חח"ע. תמונה:  $y \geq \frac{6}{\sqrt{3}}$ .
- (12) א. תחום הגדרה, טווח ותמונה:  $\mathbb{R}$ ; על.  
 ב. תחום הגדרה  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , טווח  $\mathbb{R}$ , תמונה:  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; לא על.  
 ג. תחום הגדרה  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ , טווח ותמונה:  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ ; על.  
 ד. תחום הגדרה  $[0, \infty)$ , טווח  $\mathbb{R}$ , תמונה:  $[-4, \infty)$ ; לא על.
- (13) א. תחום הגדרה וטווח:  $\mathbb{R}$ , תמונה:  $(0, 1]$ ; לא על.  
 ב. תחום הגדרה  $\mathbb{R}$ , טווח ותמונה:  $(0, 1]$ ; על.  
 ג. תחום הגדרה  $(1, \infty]$ , טווח  $(0, 1]$ , תמונה:  $(0, 0.5)$ ; לא על.
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.
- (16) שאלת הוכחה.

# קורס מבוא למתמטיקה לכלכלנים

פרק 8 - חשבון דיפרנציאלי - הפונקציה הממשית - תכונות מתקדמות

תוכן העניינים

1. תחום הגדרה של פונקציה ..... 82
2. הרכבת פונקציות ..... 84
3. הפונקציה ההפוכה ..... 87
4. פונקציה זוגית ופונקציה אי זוגית ..... 91



## תחום הגדרה של פונקציה

### שאלות

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$y = \frac{1}{x^2 - 4} \quad (2)$$

$$y = x^3 - x^2 - 4x + 1 \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{x^3 - x} \quad (4)$$

$$y = \frac{4x+1}{x^2+1} \quad (3)$$

$$y = \sqrt{x-4} \quad (6)$$

$$y = \frac{x^2}{x^2 - x - 2} \quad (5)$$

$$y = \sqrt[3]{x^2 + x - 1} \quad (8)$$

$$y = \sqrt{x^2 + x - 2} \quad (7)$$

$$y = \ln(x^2 + x - 2) \quad (10)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-|x|}} \quad (9)$$

$$y = e^{x^2+x+1} \quad (12)$$

$$y = \log x + \frac{1}{\log x} \quad (11)$$

$$y = \tan(10x) \quad (14)$$

$$y = \log_x(x+4) \quad (13)$$

$$y = \arctan(x+4) \quad (16)$$

$$y = \cot(4x) \quad (15)$$

$$y = \arccos(x+1) \quad (18)$$

$$y = \arcsin(x-4) \quad (17)$$

**תשובות סופיות**

**(1)** כל  $x$ .

**(2)**  $x \neq \pm 2$

**(3)** כל  $x$ .

**(4)**  $x \neq 0, 1, -1$

**(5)**  $x \neq 2, -1$

**(6)**  $x \geq 4$

**(7)**  $x \leq -2, x \geq 1$

**(8)** כל  $x$ .

**(9)**  $-1 < x < 1$

**(10)**  $x < -2, x > 1$

**(11)**  $x > 0, x \neq 1$

**(12)** כל  $x$ .

**(13)**  $x > 0, x \neq 1$

**(14)**  $x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}$

**(15)**  $x \neq \frac{\pi k}{4}$

**(16)** כל  $x$ .

**(17)**  $3 < x < 5$

**(18)**  $-2 < x < 0$

## הרכבת פונקציות

### שאלות

1 נתונות הפונקציות הבאות:  $h(x) = \frac{4}{x}$ ,  $g(x) = x^2$ ,  $f(x) = x - 4$

חשבו את הפונקציות המורכבות הבאות:

א.  $f(g(1))$       ב.  $h(g(f(5)))$       ג.  $f(g(x))$   
 ד.  $h(f(x))$       ה.  $f(f(x))$       ו.  $h(h(x))$

2 נתון:  $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$

חשבו  $f(f(x))$  עבור  $x = 3$ .

3 נתון:  $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ ,  $g(x) = \frac{5-x}{x-7}$

חשבו  $f(g(x)) + g(f(x))$  עבור  $x = 8$ .

4 נתון:  $f(x) = x^2 - 7x$ ,  $g(x) = \ln x$

חשבו  $f(g(x))$  עבור  $x = e^2$ .

5 נתון:  $f(x) = e^{2x}$ ,  $g(x) = \ln x$

חשבו  $f(g(x))$  עבור  $x = 2$ .

6 נתון:  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$ ,  $g(x) = \begin{cases} x+3 & x > 4 \\ 3x & x \leq 4 \end{cases}$

חשבו  $f(g(x))$ ,  $g(f(x))$

7 נתונות הפונקציות:

$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases}$  ו-  $g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 1 \\ -x^2-2x-1 & x \geq 1 \end{cases}$

מצאו נוסחה עבור ההרכבה  $z(x) = g(f(x))$ .

(8) נתונות הפונקציות :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases} \quad \text{ו-} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 1 \\ -x^2 - 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

א. מצאו נוסחה עבור ההרכבה  $h(x) = f(g(x))$ .ב. נתון ש- $n \in \mathbb{Z}$  ו- $h(n) \notin \mathbb{Z}$ .

מה ניתן להסיק בוודאות?

$$1. n \leq -3$$

$$2. n \geq 1$$

3.  $n$  אי-זוגי שלילי.

4. אף תשובה אינה נכונה.

$$(9) \quad \text{נתון} \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\dots(f(x))))}_{n \text{ times}}$$

מצא את

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } -3 \quad \text{ב. } 4 \quad \text{ג. } x^2 - 4 \quad \text{ד. } \frac{4}{x-4} \quad \text{ה. } x-8 \quad \text{ו. } x$$

$$(2) \quad 3$$

$$(3) \quad \frac{69}{13}$$

$$(4) \quad -10$$

$$(5) \quad 4$$

$$f(g(x)) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & x > 4 \\ \frac{1}{3x} & 0 < x \leq 4 \\ (3x)^2 & x \leq 0 \end{cases}, g(f(x)) = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 2 \\ 3x^2 & -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{x} + 3 & 0 < x < \frac{1}{4} \\ 3\frac{1}{x} & x \geq \frac{1}{4} \end{cases} \quad (6)$$

$$z(x) = \begin{cases} 4x^2 + 16x + 12 & x < -1.5 \\ -4x^2 - 20x - 25 & -1.5 \leq x \leq -1 \\ x - 3 & -1 < x < 0 \\ -x - 2 - 2\sqrt{x+1} & x \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{ב. } n \leq -3 \quad h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3} & x < -\sqrt{3} \\ 2x^2 - 4 & -\sqrt{3} \leq x < 1 \\ -2x^2 - 4x + 2 & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{א. } (8)$$

$$f^n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}} \quad (9)$$

## הפונקציה ההפוכה

### שאלות

בתרגילים 1-4 הוכיחו שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצאו את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{3} \quad (1)$$

$$(x \geq 0) \quad f(x) = x^2 - 4 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad (3)$$

בתרגילים 5-7, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (7)$$

$$f(x) = x^2 - x \quad (6)$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad (5)$$

בתרגילים 8-10, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע, אם כן, מצאו את הפונקציה ההפוכה ואת התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \left( \frac{2x-1}{2x+1} \right)^3 \quad (10)$$

$$y = \frac{x^2+3}{2x-1} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (8)$$

$$(11) \text{ נתונה } f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x-1}}.$$

האם הפונקציה היא חח"ע?  
מצאו את התמונה של הפונקציה.

(12) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו את תחום ההגדרה, הטווח והתמונה וקבעו האם היא פונקציה על:

$$f(x) = \frac{x-1}{3} \quad \text{א. } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad \text{ב. } f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad \text{ג. } f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$f(x) = x^2 - 4 \quad \text{ד. } f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

**13** עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו תחום הגדרה, טווח ותמונה. בנוסף, קבעו האם הפונקציה הנתונה היא על.

א.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

ב.  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, 1]$   $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

ג.  $f: (1, \infty) \rightarrow (0, 1]$   $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

**14** תהיינה שתי פונקציות  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ , ותהי  $h: A \rightarrow C$  ההרכבה המוגדרת על ידי  $h(x) = g(f(x))$ . הוכיחו או הפריכו:

א. אם  $f$  ו- $g$  חח"ע, אז  $h$  חח"ע.

ב. אם  $f$  ו- $g$  חח"ע, אז  $h$  על.

ג. אם  $f$  ו- $g$  על, אז  $h$  על.

ד. אם  $f$  ו- $g$  על, אז  $h$  חח"ע.

ה. אם  $f$  חח"ע ו- $g$  על, אז  $h$  חח"ע.

ו. אם  $f$  חח"ע ו- $g$  על, אז  $h$  על.

ז. אם  $f$  על ו- $g$  חח"ע, אז  $h$  חח"ע.

ח. אם  $f$  על ו- $g$  חח"ע, אז  $h$  על.

**15** תהיינה שתי פונקציות  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ , ותהי  $h: A \rightarrow C$  ההרכבה המוגדרת על ידי  $h(x) = g(f(x))$ . נתון כי  $h$  על. הוכיחו או הפריכו:

א.  $f$  חח"ע.

ב.  $f$  על.

ג.  $g$  חח"ע.

ד.  $g$  על.

- 16)** תהיינה שתי פונקציות  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$  ותהי  $h: A \rightarrow C$  ההרכבה המוגדרת על ידי  $h(x) = g(f(x))$ . נתון כי  $h$  חח"ע. הוכיחו או הפריכו:
- $g$  על.
  - $f$  על.
  - $g$  חח"ע.
  - $f$  חח"ע.



## תשובות סופיות

- (1)  $f^{-1}(x) = 3x + 1$ , כל  $y$ .
- (2)  $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$ ,  $y \neq 1$ .
- (3)  $f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{x-3}$ ,  $y \neq 3$ .
- (4)  $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$ ,  $y \geq -4$ .
- (5) לא חח"ע. תמונה:  $y \leq -2$  או  $y \geq 2$ .
- (6) לא חח"ע. תמונה:  $y \geq -\frac{1}{4}$ .
- (7) לא חח"ע. תמונה  $0 \leq y \leq 1$ .
- (8) כן חח"ע. תמונה:  $y > 0$ . פונקציה הפוכה:  $x > 0$ ,  $f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ .
- (9) לא חח"ע. תמונה:  $y \geq 2.3$  או  $y \leq -1.3$ .
- (10) כן חח"ע. תמונה:  $y \neq 1$ . פונקציה הפוכה:  $f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2}$ .
- (11) לא חח"ע. תמונה:  $y \geq \frac{6}{\sqrt{3}}$ .
- (12) א. תחום הגדרה, טווח ותמונה:  $\mathbb{R}$ ; על.  
 ב. תחום הגדרה  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , טווח  $\mathbb{R}$ , תמונה:  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; לא על.  
 ג. תחום הגדרה  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ , טווח ותמונה:  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ ; על.  
 ד. תחום הגדרה  $[0, \infty)$ , טווח  $\mathbb{R}$ , תמונה:  $[-4, \infty)$ ; לא על.
- (13) א. תחום הגדרה וטווח:  $\mathbb{R}$ , תמונה:  $(0, 1]$ ; לא על.  
 ב. תחום הגדרה  $\mathbb{R}$ , טווח ותמונה:  $(0, 1]$ ; על.  
 ג. תחום הגדרה  $(1, \infty]$ , טווח  $(0, 1]$ , תמונה:  $(0, 0.5)$ ; לא על.
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.
- (16) שאלת הוכחה.

## פונקציה זוגית ואי זוגית

## שאלות

מצאו אילו מבין הפונקציות בשאלות 1-8 הן אי-זוגיות ואיזה זוגיות:

$$(1) \quad y = 4x^3 \quad (2) \quad y = x^4 + x^{10} \quad (3) \quad y = 1$$

$$(4) \quad y = \frac{1}{x} \quad (5) \quad y = x^2 + \sin^2 x \quad (6) \quad y = 2^x$$

$$(7) \quad y = \ln x + x^2 \quad (8) \quad y = \sin x \cdot \cos x$$

(9) נתונה פונקציה אי-זוגית  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\text{נסמן: } k(x) = -f(x), \quad z(x) = f(x^2).$$

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות  $k, z$ , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(10) נתונה פונקציה אי-זוגית  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ופונקציה זוגית  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\text{נסמן: } k(x) = -f(x^3) \text{ ו- } z(x) = -g(x^3).$$

טענה א':  $z(x)$  אי-זוגית.

טענה ב':  $k(x)$  אי-זוגית.

איזו טענה נכונה?

(11) נתונה פונקציה אי-זוגית  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ונתונה פונקציה זוגית  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\text{נסמן: } z(x) = -g(-4x) \cdot f(x^4), \quad k(x) = f(-x) + x^{11}g(|x|).$$

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות  $z, k$ , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(12) נתון כי  $f(x)$  פונקציה אי-זוגית ב- $\mathbb{R}$  ומקיימת  $|f(x)| < 1$ .

נתון כי  $g(x)$  פונקציה זוגית ב- $\mathbb{R}$ .

$$\text{הוכיחו שהפונקציה } z(x) = g(x) \ln \left( \frac{1-f(x)}{1+f(x)} \right) \text{ היא אי-זוגית ב- } \mathbb{R}.$$

**(13) הוכיחו כי :**

- א. סכום פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית
- ב. מכפלת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ג. מנת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ד. הרכבה של פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ה. הרכבה של פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה אי-זוגית.

**(14) הוכיחו כי :**

- א. סכום פונקציות אי-זוגיות הוא פונקציה אי-זוגית.
- ב. מכפלת פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ג. מנת פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.
- ד. מכפלה של פונקציה זוגית בפונקציה אי-זוגית היא פונקציה אי-זוגית.
- ה. הרכבה של פונקציה זוגית על פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.
- ו. הרכבה של פונקציה אי-זוגית על פונקציה זוגית היא פונקציה זוגית.
- ז. הפונקציה היחידה שהיא גם זוגית וגם אי-זוגית לכל  $x$  היא פונקציית האפס.

**(15) הפונקציה  $f(x)$  היא אי-זוגית.**

- נגדיר  $z(x) = (f(x))^n$  כאשר  $n > 1$  טבעי.  
קבעו האם הפונקציה  $z$  היא זוגית, אי-זוגית או כללית.

**(16) נתונה הפונקציה  $f(x)$  המוגדרת לכל  $x$ .**

$$f_{\text{odd}}(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad f_{\text{even}}(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{נגדיר:}$$

- א. הוכיחו כי  $f_{\text{odd}}(x)$  היא פונקציה אי-זוגית ו- $f_{\text{even}}(x)$  היא פונקציה זוגית.
- ב. הוכיחו כי  $f(x) = f_{\text{odd}}(x) + f_{\text{even}}(x)$  והסבירו במילים את התוצאה שקיבלת.
- ג. הציגו את הפונקציה  $f(x) = x^2 + x + 1$  כסכום של פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית.

**(17) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות :**

- א. אם  $f$  פונקציה אי-זוגית אז  $f(0) = 0$ .
- ב. אם  $f$  פונקציה אי-זוגית המוגדרת ב-  $x = 0$  אז  $f(0) = 0$ .

**(18)** הוכיחו את הטענות הבאות :

- א. הפונקציה  $f(x) = \cos x$  היא זוגית.  
 ב. הפונקציה  $f(x) = \sin x$  היא אי-זוגית.  
 ג. הפונקציה  $f(x) = \tan x$  היא אי-זוגית.  
 ד. הפונקציה  $f(x) = \cot x$  היא אי-זוגית.

**(19)** נתון כי  $f(x)$  פונקציה אי-זוגית וחד-חד ערכית המוגדרת בקטע

$$(-a, a) \quad (a > 0).$$

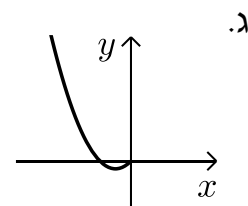
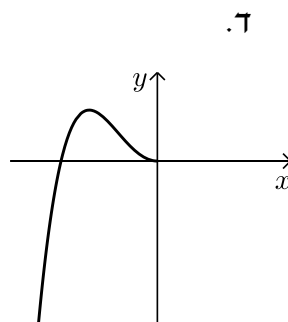
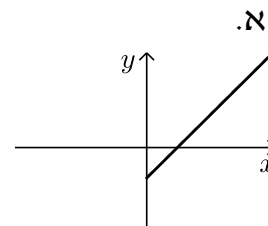
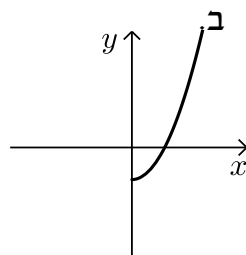
הוכיחו כי גם  $f^{-1}$  פונקציה אי-זוגית.

**(20)** הוכיחו שהפונקציות הבאות הן אי זוגיות :

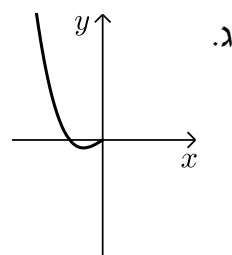
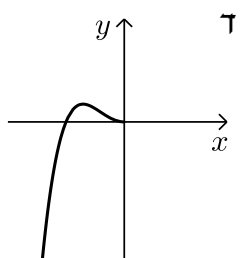
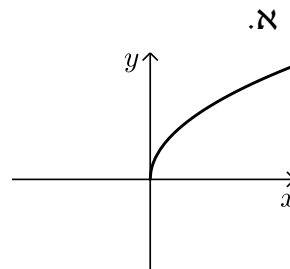
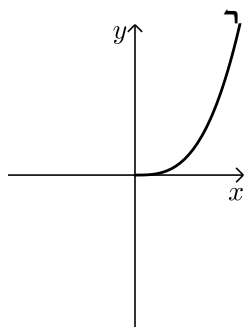
א.  $y = \arctan x$

ב.  $y = \arcsin x$

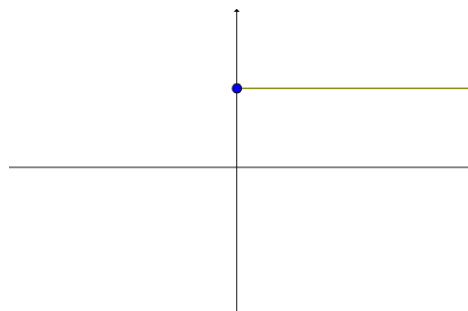
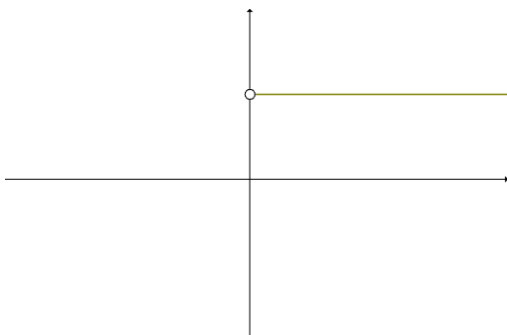
**(21)** הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל  $x$ . השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה זוגית :



**22** הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל  $x$ .  
השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתקבל פונקציה אי-זוגית:



**23** השלימו (אם ניתן) את גרף הפונקציות הבאות לפונקציה זוגית ולפונקציה אי-זוגית.



## תשובות סופיות

שאלות 1-8 : זוגית : 2,3,5,8 ; אי-זוגית : 1,4 ; כללית : 6,7.

(9)  $k$  אי-זוגית,  $z$  זוגית.

(10) טענה ב'.

(11)  $k$  אי-זוגית,  $z$  זוגית.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) כאשר  $n$  זוגי – זוגית, וכאשר  $n$  אי-זוגי – אי-זוגית.

(16) א.ב. שאלת הוכחה. ג.  $f(x) = \underbrace{x}_{\text{odd}} + \underbrace{x^2 + 1}_{\text{even}}$

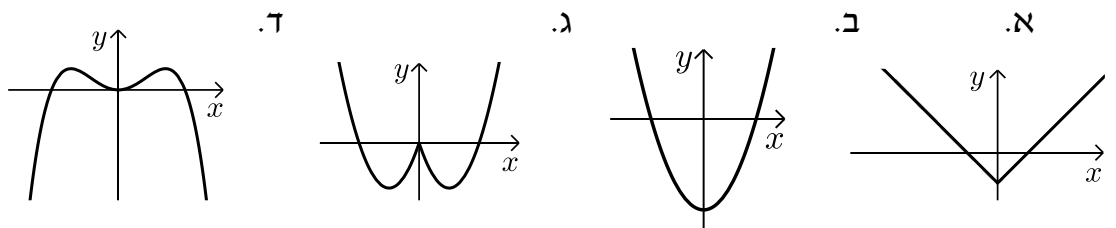
(17) שאלת הוכחה.

(18) שאלת הוכחה.

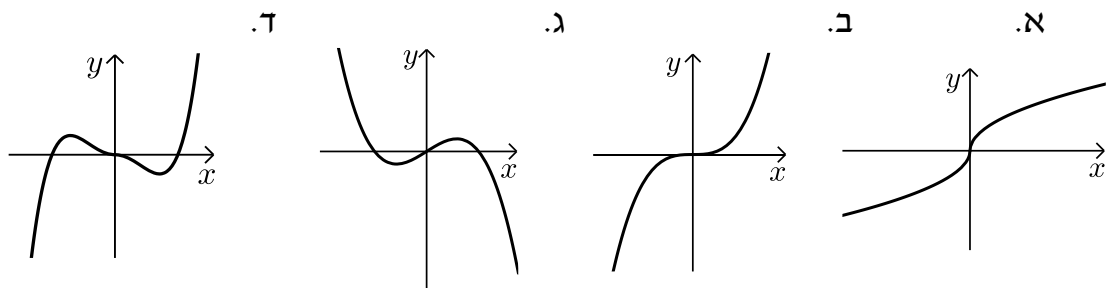
(19) שאלת הוכחה.

(20) שאלת הוכחה.

(21) להלן הגרפים :



(22) להלן הגרפים :



(23) ראו בסרטון.

# קורס מבוא למתמטיקה לכלכלנים

פרק 9 - חשבון דיפרנציאלי - גבול של פונקציה

תוכן העניינים

|           |                           |
|-----------|---------------------------|
| 96        | 1. הצבה                   |
| 97        | 2. צמצום                  |
| 98        | 3. הכפלה בצמוד            |
| 99        | 4. פונקציה שואפת לאינסוף  |
| 100       | 5. $x$ שואף לאינסוף       |
| 102       | 6. הגבול של אוילר         |
| 103       | 7. כלל הסנדוויץ'          |
| 104       | 8. גבול של פונקציה מפוצלת |
| 105       | 9. גבול לפי הגדרה         |
| (ללא ספר) | 10. הסבר כללי             |

## הצבה

### שאלה

חשבו את הגבולות הבאים:

א.  $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1$

ב.  $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2}$

ג.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3}$

ד.  $\lim_{x \rightarrow 100} 20$

### תשובה

א. 21      ב.  $\frac{11}{12}$       ג. 2      ד. 20



## צמצום

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x - 1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad (9)$$

## תשובות סופיות

|        |                    |        |                      |                   |
|--------|--------------------|--------|----------------------|-------------------|
| (5) -3 | (4) $n-1$          | (3) 6  | (2) $\frac{10}{8.5}$ | (1) $\frac{5}{6}$ |
|        | (9) $\frac{8}{17}$ | (8) 27 | (7) 3                | (6) 32            |

## הכפלה בצמוד

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x+6}}{2x-6} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{3x+1}}{1 - \sqrt{2x-1}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x} \quad (8)$$

## תשובות סופיות

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{6} \quad (5)$$

$$4 \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (6)$$

$$-\frac{1}{12} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (7)$$

$$\frac{3}{8} \quad (4)$$

$$-\frac{8}{3} \quad (8)$$

## פונקציה שואפת לאינסוף

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( (\ln x)^2 + 2 \ln x - 3 \right) \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (11)$$

## תשובות סופיות

|            |               |              |               |
|------------|---------------|--------------|---------------|
| $\phi$ (4) | $-\infty$ (3) | $\phi$ (2)   | $\phi$ (1)    |
| $\phi$ (8) | $\infty$ (7)  | $\infty$ (6) | $-\infty$ (5) |
|            | $\phi$ (11)   | 1 (10)       | 0 (9)         |

## x שואף לאינסוף

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{x+\frac{1}{2}}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx} - x) \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad (23)$$

## תשובות סופיות

- (1) 0 (2) 4 (3)  $-\infty$  (4) 0  
 (5) -5 (6) 1 (7) -1 (8) -3  
 (9) 1.5 (10)  $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$  (11)  $\frac{1}{4}$  (12) 0  
 (13) 4 (14)  $\frac{1}{9}$  (15) 2 (16)  $\ln 3$   
 (17)  $e^{\frac{1}{3}}$  (18) 0  
 (19) אם  $b \neq 0$  :  $\lim = \sqrt[5]{\frac{a}{b}}$  אם  $b=0, a>0$  :  $\infty$  אם  $b=0, a<0$  :  $-\infty$   
 (20) 2.5 (21)  $\frac{k}{2}$  (22)  $\frac{1}{2}$  (23)  $-\frac{1}{2}$   
 (24)  $\frac{1}{2}$

## הגבול של אוילר

### שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

(היעזרו בגבול של אוילר :  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ )

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x^2+x+4}\right)^{4x^2} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+4x+1}{x^2+x+2}\right)^{10x} \quad (7)$$

### תשובות סופיות

|              |              |               |                       |
|--------------|--------------|---------------|-----------------------|
| $e^{-1}$ (4) | $e^2$ (3)    | 1 (2)         | $e^{\frac{1}{2}}$ (1) |
|              | $e^{30}$ (7) | $e^{-12}$ (6) | $e^3$ (5)             |

## כלל הסנדוויץ'

## שאלות

בשאלות 1-3 חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2^x + 3^x + 4^x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [x] \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} [x] \quad (3)$$

$$(4) \quad \text{נתונה פונקציה } z: R \rightarrow R, \text{ המקיימת } \lim_{x \rightarrow 2} z(x) = 4,$$

ונתונה פונקציה  $f: R \rightarrow R$ , המקיימת  $4z(x) \leq f(x) \leq (z(x))^2$ , לכל  $x$ .

$$\text{חשבו את הגבולות } \lim_{x \rightarrow 2} f(x), \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2)$$

## תשובות סופיות

(3) 0

(2) 1

(1) 4

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2) = 2, \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 16 \quad (4)$$

## גבול של פונקציה מפוצלת

### שאלות

חשבו את הגבול  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  של הפונקציות הבאות:

$$(a=1), f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & x > 1 \\ \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} & x < 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$(a=0), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (2)$$

$$(a=\infty), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (3)$$

$$(a=-\infty), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|1-x|}{x^2 + x - 2} \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|1-x|}{x^2 + x - 2} \quad \text{ב.}$$

### תשובות סופיות

- (1)  $\emptyset$       (2)  $\emptyset$       (3) 1      (4) -1
- (5) א. אין גבול.      ב.  $\frac{1}{6}$



## גבול לפי הגדרה

### שאלות

בשאלות 1-5, על פי הגדרת הגבול, הוכיחו:

$$\lim_{x \rightarrow 24} \sqrt{x+1} = 5 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x = 20 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 7x + 14 = 28 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x}{x^2 - 2} = 1 \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4} \quad (4)$$

$$(6) \quad \text{חשבו על פי הגדרת הגבול: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-1}$$

הוכיחו על פי הגדרת הגבול, את המקרים 7-10:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+7}{x+2} = 1 \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+x}{x^2+1} = 1 \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-1}{x^2+x+1} = 3 \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-4x}{2x+1} = -2 \quad (9)$$

$$(11) \quad \text{נתונה פונקציה } f(x) \text{ המקיימת: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -5$$

הוכיחו כי קיים  $M > 0$  ממשי כלשהו כך שעבור כל  $x > M$ , מתקיים  $f(x) < -4$ .

$$(12) \quad \text{נתונה פונקציה } f(x) \text{ המקיימת: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$$

הוכיחו כי קיים  $M > 0$  ממשי כלשהו כך שעבור כל  $x > M$ , מתקיים  $f^2(x) > 16$ .

$$(13) \quad \text{נניח } f \text{ פונקציה ממשית וחיובית בתחום } [a, \infty) \text{ המקיימת } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\text{הוכיחו שמתקיים } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{f(x)} = 0$$

$$(14) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 3x + 2} = 1 \quad \text{נתון הגבול הבא:}$$

מצאו ערך של  $M > 0$  עבורו לכל  $x > M$  הביטוי שבגבול קרוב לערך הגבול

עד כדי 0.1. במילים אחרות, מצאו  $M$ , כך ש- $|f(x) - L| < 0.1$   $\forall x > M$ .

$$(15) \quad \text{מגדירים את הפונקציה הבאה: } f(x) = \begin{cases} 2 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \in \mathbb{R} / \mathbb{Z} \end{cases}$$

האם הגבולות קיימים? הוכיחו זאת בהסתמך על הגדרת הגבול.

$$\text{א. } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{ב. } \lim_{x \rightarrow 2.5} f(x) \quad \text{ג. } \lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$$

$$(16) \quad \text{בהינתן הגבול } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+4}{x+11} = \frac{1}{2} \text{ מצאו } \delta > 0 \text{ כך שלכל } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{המקיים } |x-1| < \delta, \text{ מתקיים אי-השוויון } \left| \frac{2x+4}{x+11} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{100}$$

(17) הוכיחו או הפריכו:

$$\text{א. אם: } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0, \text{ אז } \lim_{x \rightarrow \infty} (f^2(x) - g^2(x)) = 0$$

$$\text{ב. אם: } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = 0, \text{ אז } \lim_{x \rightarrow x_0} (f^2(x) - g^2(x)) = 0$$

$$\text{ג. אם: } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = L, \text{ אז: הגבול } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ קיים ושווה ל-} L \text{ או } -L.$$

$$\text{ד. אם הגבולות: } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) \text{ ו-} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ קיימים,}$$

$$\text{אז גם הגבול } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ קיים.}$$

## תשובות סופיות

(6)  $\pm \infty$

תשובות לשאר השאלות נמצאות באתר [GOOL.co.il](http://GOOL.co.il)

# קורס מבוא למתמטיקה לכלכלנים

פרק 10 - חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים

תוכן העניינים

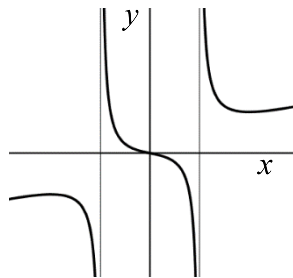
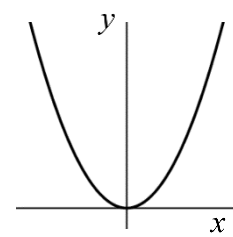
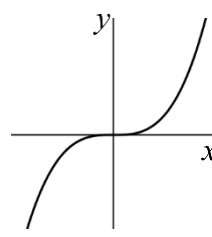
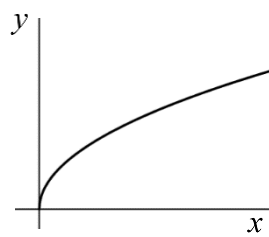
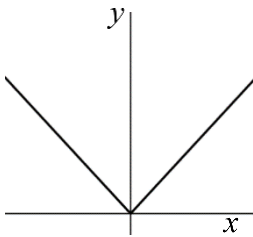
|     |                                                    |
|-----|----------------------------------------------------|
| 107 | 1. הקדמה כללית                                     |
| 108 | 2. גזירת פונקציות                                  |
| 114 | 3. מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה                 |
| 115 | 4. מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה                |
| 118 | 5. שאלות עם פרמטרים                                |
| 120 | 6. שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית |

## הקדמה כללית:

### סיכום כללי:

#### פונקציות נפוצות:

הפונקציה  $f(x) = x^2$  : הפונקציה  $f(x) = x^3$  : הפונקציה  $f(x) = \sqrt{x}$  : הפונקציה  $f(x) = |x|$  :



פונקציה עם מכנה, למשל:  $f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1}$  :

#### שיפוע של פונקציה:

- השיפוע  $m$  של פונקציה  $f(x)$  בנקודה  $A(x_1, y_1)$  שעל הפונקציה הוא ערך הנגזרת בנקודה  $A(x_1, y_1)$ , כלומר:  $m = f'(x_1)$ .
- השיפוע של המשיק לפונקציה  $f(x)$  בנקודה  $A(x_1, y_1)$  שעל הפונקציה שווה לשיפוע הפונקציה בנקודה  $A(x_1, y_1)$ .
- משוואת המשיק לפונקציה  $f(x)$  בנקודה  $A(x_1, y_1)$  שעליה מתקבלת על ידי הנוסחה למציאת ישר:  $y - y_1 = m(x - x_1)$ .

#### הנגזרת:

לכל פונקציה  $f(x)$  קיימת פונקציה, הנקראת פונקציית הנגזרת (או רק "הנגזרת") ומסומנת  $f'(x)$ , המתקבלת ממנה על פי כללי הגזירה.

## גזירת פונקציות:

### סיכום כללי:

#### כללי הגזירה:

- כלל גזירה מס' 1:  $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
- כלל גזירה מס' 2 (כפל בקבוע):  $f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$
- כלל גזירה מס' 3 (נגזרת של קבוע):  $f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$
- כלל גזירה מס' 4 (סכום והפרש):  $f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$
- כלל גזירה מס' 5 (פונקציה מורכבת):  $f(x) = u^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
- כלל גזירה מס' 6 (נגזרת של  $\frac{1}{x}$ ):  $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
- כלל גזירה מס' 7 (מכפלה):  $f(x) = u \cdot v \Rightarrow f'(x) = u'v + v'u$
- כלל גזירה מס' 8 (מנה):  $f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- כלל גזירה מס' 9 (שורש):  $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

### שאלות:

#### 1) גזור את הפונקציות הבאות:

- |                             |                             |                             |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| א. $f(x) = x^3$             | ב. $f(x) = x^7$             | ג. $f(x) = x^2$             |
| ד. $f(x) = x$               | ה. $f(x) = x^{-3}$          | ו. $f(x) = x^{-1}$          |
| ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ | ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ | ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ |

#### 2) גזור את הפונקציות הבאות:

- |                           |                              |                                       |
|---------------------------|------------------------------|---------------------------------------|
| א. $f(x) = 2x^3$          | ב. $f(x) = 3x^7$             | ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$            |
| ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$ | ה. $f(x) = 8x$               | ו. $f(x) = 3x^{-2}$                   |
| ז. $f(x) = \frac{4}{x}$   | ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$ | ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$ |

(3) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = 12 \quad \text{ב. } f(x) = \frac{7}{8}$$

(4) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5 \quad \text{ב. } f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$$

$$\text{ג. } f(x) = 7x^2 + 23x - 6 \quad \text{ד. } f(x) = 6x^2 + 8x + 4$$

$$\text{ה. } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^3 \quad \text{ו. } f(x) = \frac{x^4}{8} + 67$$

(5) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = (5x - 2)^3 \quad \text{ב. } f(x) = (x^3 + 6)^5 \quad \text{ג. } f(x) = 3(x - x^2)^2$$

$$\text{ד. } f(x) = \frac{(5-x)^3}{4} \quad \text{ה. } f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3}$$

(6) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \frac{3}{x} \quad \text{ב. } f(x) = -\frac{2}{x} \quad \text{ג. } f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\text{ד. } f(x) = \frac{3}{x^3} \quad \text{ה. } f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{2}{3-x}$$

$$\text{ז. } f(x) = \frac{6}{x+5}$$

(7) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = (5x+1)(x-3) \quad \text{ב. } f(x) = (5x+1)^3(x-3)$$

$$\text{ג. } f(x) = x^3(6-x)^4 \quad \text{ד. } f(x) = 3x^2 \cdot x$$

$$\text{ה. } f(x) = x^2 \cdot x^3 \quad \text{ו. } f(x) = x(3x+7)$$

$$\text{ז. } f(x) = 3x^3(3x-1) \quad \text{ח. } f(x) = (x-2)(2x^2+3)$$

$$\text{ט. } f(x) = (3x-2)(x^2+10x) \quad \text{י. } f(x) = (3x^4-4x)(2x^2+5x+2)$$

$$\text{יא. } f(x) = x(x-2)(3x-4)$$

(8) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = (x^2 - 4)^2 & \text{ב. } f(x) = 2x^3(3x + 5)^2 \\ \text{ג. } f(x) = (x^3 + 2)^2(x - 1)^3 & \text{ד. } f(x) = (x^2 + 1)^3(2x - 1)^2 \end{array}$$

(9) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\begin{array}{lll} \text{א. } f(x) = \frac{3x - 1}{1 + 2x} & \text{ב. } f(x) = \frac{x^2 + 1}{5x - 12} & \text{ג. } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3} \\ \text{ד. } f(x) = \frac{x^2 + 8}{x - 1} & \text{ה. } f(x) = \frac{1}{x} & \text{ו. } f(x) = \frac{3}{x^3} \\ \text{ז. } f(x) = \frac{(x - 1)^2}{x + 1} & \text{ח. } f(x) = \frac{(x^2 + 3)^2}{x^2 - 2} & \text{ט. } f(x) = \frac{x^3 - x^2}{2(1 - x)} \\ \text{י. } f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 4} \end{array}$$

(10) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\begin{array}{lll} \text{א. } f(x) = \sqrt{x} & \text{ב. } f(x) = 4\sqrt{x + 1} & \text{ג. } f(x) = \sqrt{x^3 - 1} \\ \text{ד. } f(x) = (3x + 1)\sqrt{x} & \text{ה. } f(x) = x^2\sqrt{x + 3} & \text{ו. } f(x) = \frac{x + 3}{\sqrt{x}} \end{array}$$

(11) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = \sqrt{x + 1} & \text{ב. } f(x) = \sqrt{2x} \\ \text{ג. } f(x) = \sqrt{3x^2 + 1} & \text{ד. } f(x) = \sqrt{10 - 3x} \\ \text{ה. } f(x) = \sqrt{2x^2 + 7x} & \text{ו. } f(x) = 3x^2 - 8\sqrt{x} \\ \text{ז. } f(x) = x^2\sqrt{1 - 2x} & \text{ח. } f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} \\ \text{ט. } f(x) = \frac{x\sqrt{x^2 + 4}}{2} & \text{י. } f(x) = \frac{x + 3}{\sqrt{1 - x^2}} \\ \text{יא. } f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + x - 5\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} & \text{יב. } f(x) = \sqrt{\frac{3 - x}{x}} \\ \text{יג. } f(x) = \sqrt{\frac{1 + x^2}{1 - x}} & \text{יד. } f(x) = \frac{x^2 + 7}{\sqrt{x^2 - 5}} \end{array}$$

$$\text{טו. } f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$$

$$\text{טז. } f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$$

**(12)** גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = ax^4 - bx$$

$$\text{ב. } f(x) = \frac{ax^2}{3} - \frac{x}{b} + c$$

$$\text{ג. } f(x) = \frac{x-2a}{x-4a}$$

$$\text{ד. } f(x) = a\sqrt{bx^2 + c}$$

**(13)** גזור פעמיים את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x}$$

$$\text{ג. } f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2}$$

$$\text{ה. } f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$$

$$\text{ב. } f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10}$$

$$\text{ד. } f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

$$\text{ו. } f(x) = \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^3$$



## תשובות סופיות:

- (1) א.  $3x^2$  ב.  $7x^6$  ג.  $2x$  ד. 1 ה.  $-\frac{3}{x^4}$  ו.  $-\frac{1}{x^2}$
- ז.  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$  ח.  $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$  ט.  $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$
- (2) א.  $6x^2$  ב.  $21x^6$  ג.  $2x^3$  ד.  $\frac{6x^5}{7}$  ה. 8
- ו.  $-\frac{6}{x^3}$  ז.  $-\frac{4}{x^2}$  ח.  $\frac{3}{\sqrt{x}}$  ט.  $\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$
- (3) א. 0 ב. 0
- (4) א.  $3x^2 + 4x - 3$  ב.  $x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}$  ג.  $14x + 23$  ד.  $12x + 8$  ה.  $x - 3x^2$  ו.  $0.5x^3$
- (5) א.  $15(5x - 2)^2$  ב.  $15x^2(x^3 + 6)^4$  ג.  $6(x - x^2)(1 - 2x)$
- ד.  $-\frac{3}{4}(5 - x)^2$  ה.  $\frac{8(x + 1)^3}{3}$
- (6) א.  $-\frac{3}{x^2}$  ב.  $\frac{2}{x^2}$  ג.  $-\frac{2}{x^3}$  ד.  $-\frac{9}{x^4}$  ה.  $-\frac{2x - 3}{(x^2 - 3x)^2}$
- ו.  $\frac{2}{(3 - x)^2}$  ז.  $-\frac{6}{(x + 5)^2}$
- (7) א.  $10x - 14$  ב.  $(5x + 1)^2(20x - 44)$  ג.  $x^2(6 - x)^3(18 - 7x)$
- ד.  $9x^2$  ה.  $5x^4$  ו.  $6x + 7$  ז.  $36x^3 - 9x^2$  ח.  $6x^2 - 8x + 3$
- ט.  $9x^2 + 56x - 20$  י.  $36x^5 + 75x^4 + 24x^3 - 24x^2 - 40x - 8$  יא.  $9x^2 - 20x + 8$
- (8) א.  $4x(x^2 - 4)$  ב.  $30x^2(x + 1)(3x + 5)$  ג.  $3(x - 1)^2(x^3 + 2)(3x^3 - 2x^2 + 2)$
- ד.  $2(2x - 1)(x^2 + 1)^2(8x^2 - 3x + 2)$
- (9) א.  $\frac{5}{(1 + 2x)^2}$  ב.  $\frac{5x^2 - 24x - 5}{(5x - 12)^2}$  ג.  $\frac{8x}{(x^2 + 3)^2}$  ד.  $\frac{(x - 4)(x + 2)}{(x - 1)^2}$
- ה.  $-\frac{1}{x^2}$  ו.  $-\frac{9}{x^4}$  ז.  $\frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}$
- ח.  $\frac{2x(x^2 + 3)(x^2 - 7)}{(x^2 - 2)^2}$  ט.  $-x$  י.  $-\frac{1}{(x + 2)^2}$

$$(10) \quad \text{א. } \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ב. } \frac{2}{\sqrt{x+1}} \quad \text{ג. } \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}} \quad \text{ד. } \frac{9x+1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ה. } \frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}}$$

$$\text{ו. } \frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$$

$$(11) \quad \text{א. } \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \quad \text{ב. } \frac{1}{\sqrt{2x}} \quad \text{ג. } \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}} \quad \text{ד. } -\frac{3}{2\sqrt{10-3x}} \quad \text{ה. } \frac{4x+7}{2\sqrt{2x^2+7x}}$$

$$\text{ו. } 6x - \frac{4}{\sqrt{x}} \quad \text{ז. } \frac{2x-5x^2}{\sqrt{1-2x}} \quad \text{ח. } -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \quad \text{ט. } \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+4}} \quad \text{י. } \frac{1-3x}{(1-x^2)^{1.5}}$$

$$\text{יא. } 3\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{5}{x^2} \quad \text{יב. } -\frac{3}{2x\sqrt{3x-x^2}} \quad \text{יג. } \frac{-x^2+2x+1}{2(1-x)^{1.5}\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{יד. } \frac{x^3-17x}{(x^2-5)^{1.5}} \quad \text{טו. } -\frac{x+1}{2\sqrt{x}(x-1)^2} \quad \text{טז. } -\frac{x+3}{2(x-1)^2\sqrt{x+1}}$$

$$(12) \quad \text{א. } 4ax^3 - b \quad \text{ב. } \frac{2ax}{3} - \frac{1}{b} \quad \text{ג. } \frac{-2a}{(x-4a)^2} \quad \text{ד. } \frac{abx}{\sqrt{bx^2+c}}$$

$$(13) \quad \text{א. } f'(x) = \frac{2x^2-8}{4x^2}, f''(x) = \frac{4}{x^3}$$

$$\text{ב. } f'(x) = \frac{2x^2+20x-62}{(2x+10)^2}, f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3}$$

$$\text{ג. } f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$$

$$\text{ד. } f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}, f''(x) = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

$$\text{ה. } f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4}$$

$$\text{ו. } f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, f''(x) = \frac{12(x+1)(x+3)}{(x-1)^5}$$

## מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה:

### שאלות:

(14) מצא את שיפוע הפונקציה  $f(x) = 2x^3 - 7x$  בנקודה  $(2, 2)$ .

(15) מצא את שיפוע הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$  בנקודה בה  $x = -2$ .

(16) מצא את שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = 4\sqrt{x}$  בנקודה בה  $x = 1$ .

### תשובות סופיות:

$$m = 17 \quad (14)$$

$$m = 4 \quad (15)$$

$$m = 2 \quad (16)$$

## מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה:

### שאלות:

(17) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = 2(4x+3)^3$  בנקודה בה  $x = -1$ .

(18) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{8}{x+1}$  בנקודה בה  $y = 2$ .

(19) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה  $f(x) = x^2 - 2x - 8$  בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ .

(20) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = x^4 - 2x$  ששיפועו 2.

(21) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2 - 2}$  בנקודה שבה  $x = 1$ .

(22) נתון כי הישר  $2y - 3x = 3$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = 3\sqrt{x}$ . מצא את נקודת ההשקה.

(23) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$  בנקודה בה  $x = 1$ .

(24) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = 3x^2 - 8\sqrt{x}$  בנקודה בה  $x = 4$ .

(25) נתונה הפונקציה הבאה  $f(x) = 4x - 2\sqrt{x}$ .

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המקביל לישר  $f(x) = 3x - \frac{1}{2}$ .

ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$ .

(26) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}-1}$  ששיפועו -2.

(27) מצא את משוואות המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$  בנקודה שבה  $x=2$ .

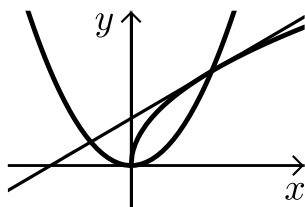
(28) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה  $f(x) = \frac{1}{3x^3}$  היוצרים עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$  זווית של  $135^\circ$ .

(29) מצא את משוואות המשיקים המשותפים לפונקציות הבאות:  $y = x^2$ ,  $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$ .

(30) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$  ונתון הישר:  $y = 2x$ .

- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר הנמצאת ברביע הראשון.
- מצא את משוואות המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שמצאת בסעיף הקודם.
- חשב את השטח שנוצר בין המשיק והצירים.

(31) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = x^2$ .



- מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.
- מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  העובר דרך נקודת החיתוך שמצאת הנמצאת ברביע הראשון.
- מצא את נקודת החיתוך הנוספת של המשיק שמצאת עם גרף הפונקציה  $g(x)$ .

**תשובות סופיות:**

$$y = 24x + 22 \quad (17)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2} \quad (18)$$

$$y = 6x - 24, y = -6x - 12 \quad (19)$$

$$y = 2x - 3 \quad (20)$$

$$y = -12x + 9 \quad (21)$$

$$(1, 3) \quad (22)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2} \quad (23)$$

$$y = 22x - 56 \quad (24)$$

$$(25) \quad y = 3x - 1 \quad \text{א.} \quad \text{ב.} \quad \left(\frac{1}{3}, 0\right)$$

$$y = -2x + 8 \quad (26)$$

$$y = \frac{11}{16}x - \frac{15}{8} \quad (27)$$

$$y = -x + 1\frac{1}{3}, y = -x - 1\frac{1}{3} \quad (28)$$

$$y = 2x - 1, y = -2x - 1 \quad (29)$$

$$\text{ג.} \quad S = 4\frac{1}{12}$$

$$(30) \quad \text{א.} \quad (1, 2) \quad \text{ב.} \quad y = -1.5x + 3.5$$

$$(31) \quad \text{א.} \quad (0, 0), (1, 1) \quad \text{ב.} \quad y = 0.5x + 0.5 \quad \text{ג.} \quad (-0.5, 0.25)$$

## שאלות עם פרמטרים:

### שאלות:

(32) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = ax^2 - 4x$  בנקודה שבה  $x = 3$  הוא 8. מצא את ערכו של הפרמטר  $a$  ואת משוואת המשיק.

(33) נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt{ax}$ ,  $(a > 0)$ .

המשיק לפונקציה בנקודה שבה  $x = \frac{1}{2}$  הוא בעל שיפוע 1. מצא את ערך הפרמטר  $a$ .

(34) נתונה הפונקציה:  $y = x^3 + a\sqrt{x}$  ( $a$  פרמטר). שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 1$  הוא 5. מצא את ערך הפרמטר  $a$ .

(35) נתונה הפונקציה:  $y = 2\sqrt{x} - \frac{A}{x}$  ( $A$  פרמטר). שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 1$  הוא 2. מצא את ערך הפרמטר  $A$ .

(36) הישר  $y = 4x + b$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$ . מצא את  $b$  ואת נקודת ההשקה.

(37) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{2}{ax+3}$  בנקודה שבה  $y = 2$  הוא -4. מצא את ערכו של הפרמטר  $a$  ואת משוואת המשיק.

(38) הישר  $y = ax + \frac{1}{2}$  משיק לגרף הפונקציה  $g(x) = \frac{2}{x+c}$  בנקודה  $x = 0$ . מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $c$ .

(39) הישר  $y = 3x$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = x\sqrt{x} + b$ . מצא את  $b$  ואת נקודת ההשקה.

(40) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{a}{\sqrt{bx-1}}$  בנקודה  $(1, 6)$  הוא  $-6$ .

מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$  ואת משוואת המשיק.

(41) לאילו ערכי  $k$  ישיק הישר  $y = -5x + 6$  לגרף הפונקציה  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + k$ ?  
לכל ערך כזה של  $k$  מצא את נקודת ההשקה.

(42) הפונקציות  $y = \frac{1}{x}$  ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$  משיקות זו לזו.  
מצא את  $k$  ואת נקודת ההשקה.

### תשובות סופיות:

$$a = 2, y = 8x - 18 \quad (32)$$

$$a = 2 \quad (33)$$

$$a = 4 \quad (34)$$

$$A = 1 \quad (35)$$

$$(-1, 5), y = 4x + 9 \quad (36)$$

$$a = 2, y = -4x - 2 \quad (37)$$

$$a = -\frac{1}{8}, c = 4 \quad (38)$$

$$b = 4, (4, 12) \quad (39)$$

$$b = 2, a = 6, y = -6x + 12 \quad (40)$$

$$k = \frac{158}{27} : \left(\frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right) \text{ או } k = 6 : (1, 1) \quad (41)$$

$$(1, 1), k = 1.5 \quad (42)$$



## שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית:

### שאלות:

(43) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. בטא באמצעות  $t$  את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = x^2 + 1$  בנקודה שבה  $x = t$ .
- ב. מצא את ערכיו של  $t$  אם נתון שהמשיק עובר בנקודה  $(-1, 1)$ .

(44) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה:  $f(x) = 5x - x^2$  העוברים דרך הנקודה  $(3, 7)$ .

(45) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה:  $f(x) = x^2 + 5x - 6$  העוברים דרך הנקודה  $(0, -10)$ .

(46) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה:  $f(x) = 12x - x^3$  העוברים דרך הנקודה  $(2, 24)$ .

(47) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  העובר בנקודה  $(3, 0)$ .

(48) מצא משוואת המשיק לפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  אם ידוע ששטח המשולש שהוא יוצר עם הצירים הוא 4.5 יחידות שטח.

(49) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-2}}$  העוברים דרך הנקודה  $(2, 3)$ .

**תשובות סופיות:**

ב.  $t = 0, -2$ . (43)  $y = 2tx - t^2 + 1$  א.

(44)  $y = x + 4$ ,  $y = -3x + 16$

(45)  $y = 9x - 10$ ,  $y = x - 10$

(46)  $y = 12x$ ,  $y = -15x + 54$

(47)  $y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$

(48)  $y = -\frac{1}{16}x + \frac{3}{4}$

(49)  $y = -x + 5$

# קורס מבוא למתמטיקה לכלכלנים

פרק 11 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית פולינום

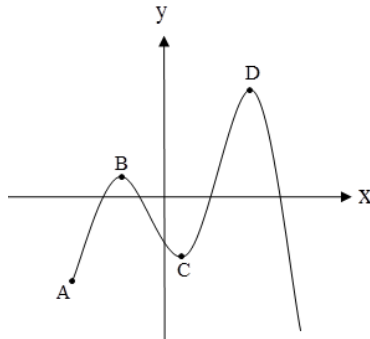
תוכן העניינים

1. נקודות קיצון של פונקציות ..... 122
2. חקירת פונקציה פולינומית ..... 125
3. פונקציה זוגית ואי-זוגית ..... 129

## נקודות קיצון של פונקציות:

### סיכום כללי:

#### נקודות קיצון (נקודות מינימום/מקסימום):



- מינימום או מקסימום מקומי (פנימי) – B, C, D.
- מינימום או מקסימום קצה – A.
- מינימום או מקסימום מוחלט – D.

#### נקודות קיצון מקומיות:

- שיפוע המשיק לפונקציה בנקודות קיצון מקומיות הוא אפס.
- בנקודה שבה שיפוע המשיק לפונקציה הוא אפס תיתכן נקודת קיצון מקומית.
- נקודה כזו נקראת נקודה חשודה כקיצון. ניתן לבדוק אם היא אכן נקודת קיצון.

#### שלבים למציאת נקודות קיצון מקומיות:

- נגזור את הפונקציה.
- נשווה את הנגזרת לאפס ונחלץ את ערכי ה- $x$  של הנקודות החשודות כקיצון.
- נציב את ערכי ה- $x$  מסעיף ב' בפונקציה המקורית לקבלת ערכי ה- $y$ .
- נקבע אם הנקודה היא נקודת קיצון ונסווג את סוג הקיצון על ידי טבלה.

### שאלות:

1) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x) = 10x - x^2$ .

2) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^3 - 12x$ .

- מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
- מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

- (3) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ .  
 א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?  
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- (4) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$ .  
 א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?  
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- (5) לפונקציה  $f(x) = ax - x^3 - 5$  יש נקודת קיצון בנקודה שבה  $x = -1$ .  
 מצא את ערכו של הפרמטר  $a$ .
- (6) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + x^2$ . ידוע שהנקודה  $x = 1$  נקודת קיצון.  
 מצא את הקבוע  $a$ .
- (7) לפונקציה  $f(x) = Ax^3 + Bx^2 - 1$  יש נקודת קיצון ששיעוריה:  $(2, 3)$ .  
 מצא את ערכי הפרמטרים  $A, B$ .
- (8) לפונקציה  $f(x) = Ax^3 + Bx^2 - 4x$  יש נקודת קיצון ב- $x = -1$  ו- $x = 4$ .  
 מצא את הפרמטרים ואת שיעור ה- $y$  של שתי נקודות הקיצון.
- (9) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + bx^2$ . ידוע שהנקודה  $(1, 2)$  נקודת קיצון.  
 מצא את הפרמטרים  $a, b$ .
- (10) לפונקציה  $f(x) = ax^4 + bx^2 + 35$  יש נקודת קיצון ששיעוריה  $(2, 3)$ .  
 מצא את ערכי הפרמטרים  $a, b$ .

## תשובות סופיות:

(1)  $\max(5, 25)$

(2) א.  $\min(2, -16)$ ,  $\max(-2, 16)$  ב. עולה:  $x > 2$ ,  $x < -2$  יורדת:  $-2 < x < 2$

(3) א.  $\max(0, 9)$ ,  $\min(\sqrt{5}, -16)$ ,  $\min(-\sqrt{5}, -16)$

ב. עולה:  $-\sqrt{5} < x < 0$ ,  $x > \sqrt{5}$  יורדת:  $0 < x < \sqrt{5}$ ,  $x < -\sqrt{5}$

(4) א.  $\min(3, 5)$  ב. עולה:  $x > 3$  יורדת:  $x < 3$

(5)  $a = 3$

(6)  $a = -\frac{2}{3}$

(7)  $A = -1$ ,  $B = 3$

(8)  $A = \frac{1}{3}$ ,  $B = -\frac{3}{2}$ ,  $\left(-1, 2\frac{1}{6}\right)$ ,  $\left(4, -18\frac{2}{3}\right)$

(9)  $b = 6$ ,  $a = -4$

(10)  $a = 2$ ,  $b = -16$

## חקירת פונקציה פולינומית:

### שאלות:

(11) נתונה הפונקציה  $f(x) = 10x - x^2$ .

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(12) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^3 - 12x$ .

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(13) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ .

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(14) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$  חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**15** נתונה הפונקציה  $f(x) = x^3$  חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

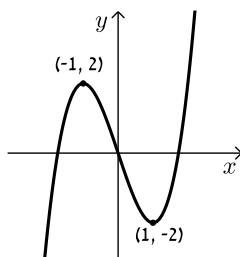
**16** נתונה הפונקציה:  $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 54x - 50$ .

- לאילו ערכים של הפרמטר  $a$  עולה הפונקציה בכל תחום הגדרתה?
- הצב בפונקציה  $a = 6$  וחקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:  
תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודת חיתוך עם ציר ה- $y$ , סרטוט.

**17** נתונה הפונקציה:  $y = -3x^3 + 6x^2 - 4x + d$  ( $d$  פרמטר).

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה:  $x = 2$ .

- מצא את  $d$ .
- האם יש לפונקציה נקודות קיצון?
- כתוב את תחומי העלייה וירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.



**18** לפי גרף הפונקציה  $f(x) = x^3 - 3x$ :

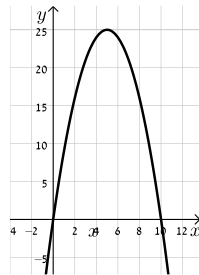
- מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $f(x) = 5$ ?
- מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $f(x) = 2$ ?
- מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $f(x) = 0.5$ ?
- עבור איזה ערך של  $k$  למשוואה  $f(x) = k$  יש בדיוק פתרון אחד?
- עבור איזה ערך של  $k$  למשוואה  $f(x) = k$  יש בדיוק שני פתרונות?
- עבור איזה ערך של  $k$  למשוואה  $f(x) = k$  יש בדיוק שלושה פתרונות?
- האם קיים ערך של  $k$  עבורו למשוואה  $f(x) = k$  אין פתרון?



## תשובות סופיות:

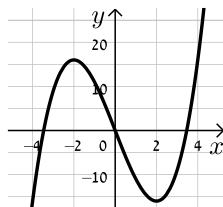
11) א. כל  $x$  ב.  $\max(5, 25)$  ג. עלייה:  $x < 5$ , ירידה:  $x > 5$

ד.  $(0, 0)$ ,  $(10, 0)$  .



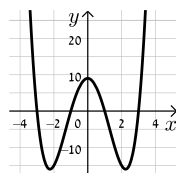
12) א. כל  $x$  ב.  $\min(2, -16)$ ,  $\max(-2, 16)$  ג. עלייה:  $x > 2$ ,  $x < -2$ , ירידה:  $-2 < x < 2$

ד.  $(0, 0)$ ,  $(\sqrt{12}, 0)$ ,  $(-\sqrt{12}, 0)$  .



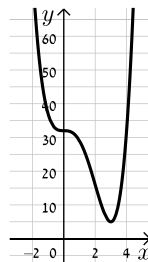
13) א. כל  $x$  ב.  $\max(0, 9)$ ,  $\min(\sqrt{5}, -16)$ ,  $\min(-\sqrt{5}, -16)$  ג. עלייה:  $-\sqrt{5} < x < 0$ ,  $x > \sqrt{5}$ , ירידה:  $x < -\sqrt{5}$ ,  $0 < x < \sqrt{5}$

ד.  $(0, 9)$ ,  $(\pm 1, 0)$ ,  $(\pm 3, 0)$  .



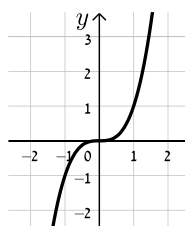
14) א. כל  $x$  ב.  $\min(3, 5)$  ג. תחומי עלייה:  $x > 3$ , תחומי ירידה:  $x < 3$

ד.  $(0, 32)$  .



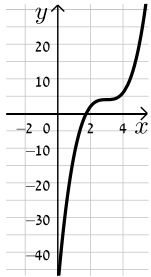
15) א. כל  $x$  ב. אין. ג. עולה לכל  $x$

ד.  $(0, 0)$  .



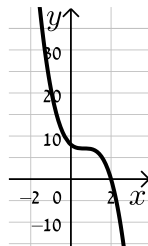
16) א.  $-6 < a < 6$  ב. תחום הגדרה: כל  $x$ , נקודות קיצון: אין, תחומי עלייה: כל  $x$ ,

תחומי ירידה: אין, נקודת חיתוך עם הצירים:  $(0, -50)$ , להלן גרף:



17) א.  $d = 8$  ב. לא. ג. יורדת בתחום  $x \neq \frac{2}{3}$

ד.  $(0, 8)$  ה. להלן גרף:



18) א. 1. ב. 2. ג. 3. ד.  $k > 2, k < -2$

ה.  $k = \pm 2$  ו.  $-2 < k < 2$  ז. לא.

## פונקציה זוגית ואי-זוגית:

### סיכום כללי:

#### הגדרות:

- פונקציה  $f(x)$  תיקרא זוגית אם לכל  $x$  בתחום הגדרתה מתקיים:  $f(x) = f(-x)$ .
- פונקציה  $f(x)$  תיקרא אי-זוגית אם לכל  $x$  בתחום הגדרתה מתקיים:  $f(-x) = -f(x)$ .

#### שאלות:

(1) קבע אלו מהפונקציות הבאות הן זוגיות/אי-זוגיות לא זו ולא זו:

א.  $f(x) = 3x - 5$

ב.  $f(x) = 3x^2$

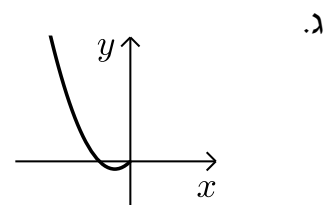
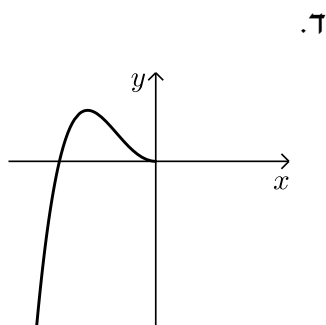
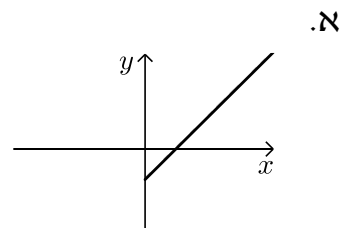
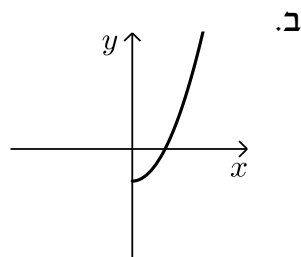
ג.  $f(x) = 2x^3$

ד.  $f(x) = x^3 - 2x^2$

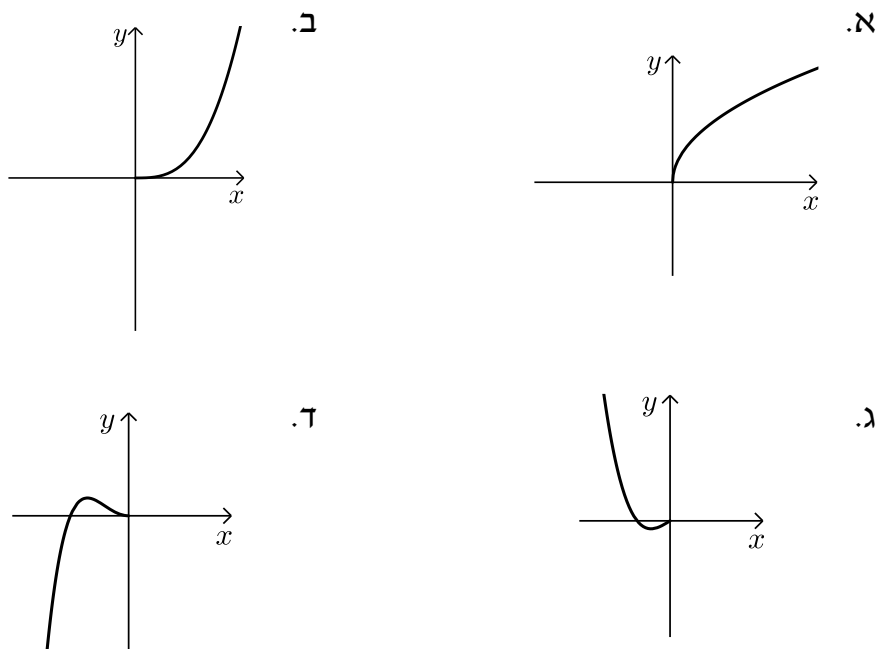
ה.  $f(x) = 4x^4 - 3x^2 + 1$

ו.  $f(x) = 4x^5 - 3x^3 - 1$

(2) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל  $x$ . השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתקבל פונקציה זוגית:



(3) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל  $x$ .  
השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתקבל פונקציה אי-זוגית:



- (4) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = x^4 - 4x^2$  בתחום:  $[0:3]$ .
- תחום הגדרה.
  - מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
  - מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
  - כתיבת תחומי עלייה וירידה.
  - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ב. הוכח כי הפונקציה  $f(x)$  היא פונקציה זוגית.
- ג. התבסס על ממצאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום:  $[-3:3]$  (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום  $[-3:0]$  לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

(5) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = x^6 - 3x^2 + 3$ .

- א. חקור את הפונקציה בתחום:  $[0:4]$  לפי הסעיפים הבאים:  
תחום הגדרה, מציאת חיתוך עם ציר ה- $y$ , מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה בתחום הנ"ל.
- ב. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זו ולא זו?  
נמק באמצעות חישוב מתאים.
- ג. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שסרטטת בסעיף א', את עקום הפונקציה בתחום  $[-4:0]$ .
- ד. הוכח כי הפונקציה חיובית לכל  $x$  בתחום הגדרתה.

(6) לפניך הפונקציה:  $f(x) = -2x^6 + 3x^4 + a$ , פרמטר  $a$ .

ידוע כי לפונקציה ערך מירבי של 1.

- א. מצא את  $a$  וכתוב את הפונקציה  $f(x)$ .
- ב. חקור את הפונקציה בתחום:  $[-2:0]$  לפי הסעיפים הבאים:  
כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים, מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.
- ג. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זה ולא זה?  
נמק באמצעות חישוב מתאים.
- ד. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את גרף הפונקציה בתחום:  $[-2:2]$ .

(7) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = 3x^3 - 9x$ .

- א. חקור את הפונקציה בתחום:  $[0:5]$  לפי הסעיפים הבאים:  
כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים, מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.
- ב. הוכח כי הפונקציה היא אי-זוגית.
- ג. התבסס על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום:  $[-5:5]$  (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום  $[-5:0]$  לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

- (8) לפניך הפונקציה הבאה:  $f(x) = 5x^3 - 3x^5 + b$ ,  $b$  פרמטר. ידוע כי הישר  $y = 2x$  עובר דרך כל הנקודות על גרף הפונקציה שמקיימות:  $f'(x) = 0$ .
- מצא את  $b$  וכתוב את הפונקציה  $f(x)$ .
  - חקור את הפונקציה בתחום:  $[0:2]$  לפי הסעיפים הבאים:
    - תחום הגדרה.
    - מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
    - מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
    - כתיבת תחומי עלייה וירידה.
    - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
  - בדוק האם הפונקציה היא זוגית/אי-זוגית או לא זו ולא זו. נמק את קביעתך באמצעות חישוב מתאים.
  - הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה של גרף הפונקציה את הגרף בתחום  $[-2:0]$ .

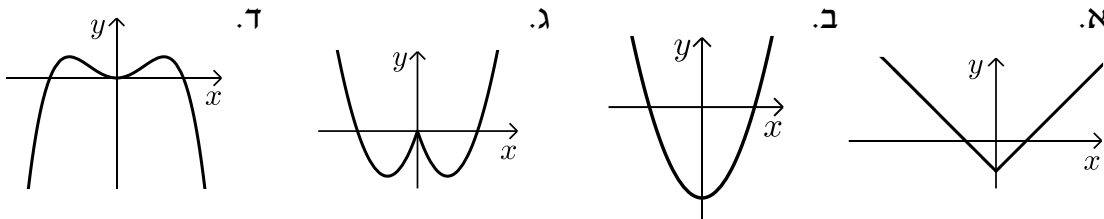
(9) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^7 - x}{3}$ .

- חקור את הפונקציה בתחום:  $[-4:0]$  לפי הסעיפים הבאים:
  - תחום הגדרה.
  - מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
  - מציאת נקודות קיצון וסיווגן (בתשובתך השאר עד 2 ספרות לאחר הנקודה העשרונית).
  - כתיבת תחומי עלייה וירידה.
  - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? או לא זו ולא זו? נמק ע"י חישוב מתאים.
- הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שעשית את גרף הפונקציה בתחום  $[0:4]$ .

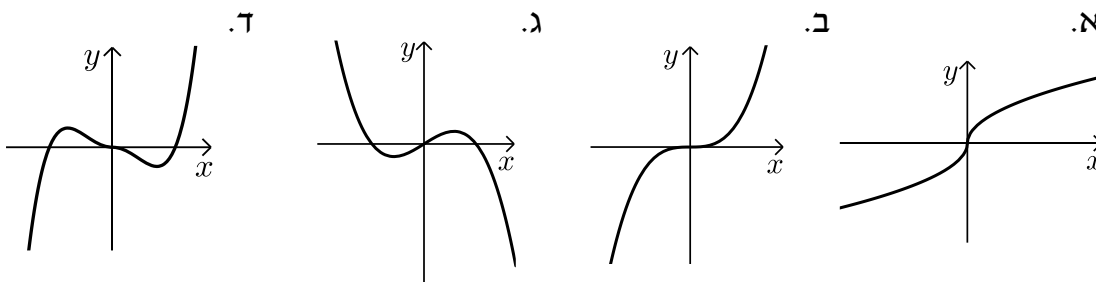
## תשובות סופיות:

(1) זוגית: ב', ה'. אי-זוגית: ג', לא זו ולא זו: א', ד', ו'.

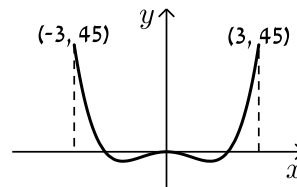
(2) להלן הגרפים:



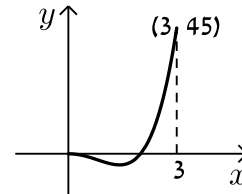
(3) להלן הגרפים:

(4) א. i.  $0 \leq x \leq 3$  ii.  $(0,0), (2,0)$  iii.  $\max(3,45)$  קצה,  $\min(\sqrt{2}, -4)$ .iv. עולה:  $\sqrt{2} < x < 3$ , יורדת:  $0 < x < \sqrt{2}$  ב. סעיף הוכחה.  $\max(0,0)$  קצה.

סרטוט עבור סעיף ג:

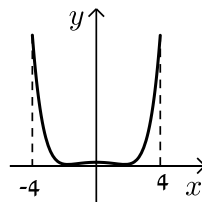


סרטוט עבור חלק v:

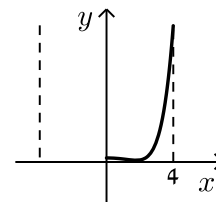
(5) א. תחום הגדרה:  $0 \leq x \leq 4$ , חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $(0,3)$ ,נקודות קיצון:  $\max(4,4051)$  קצה,  $\min(1,1)$ ,  $\max(0,3)$  קצה,עולה:  $1 < x < 4$ , יורדת:  $0 < x < 1$  ב. זוגית.

ד. הוכחה עפ"י הסרטוט.

סרטוט עבור סעיף ג:



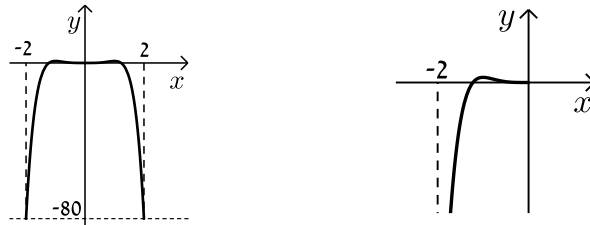
סרטוט עבור סעיף א:



6) א.  $a=0$  ב. תחום הגדרה:  $-2 \leq x \leq 0$ , חיתוך עם הצירים:  
 נקודות קיצון:  $(-1.225, 0)$ ,  $(0, 0)$ ,  $\min(-2, -80)$  קצה,  $\max(-1, 1)$  קצה,  $\min(0, 0)$  קצה,

עולה:  $-1 < x < -2$ , יורדת:  $-1 < x < 0$ . ג. זוגית.

סרטוט עבור סעיף א: סרטוט עבור סעיף ד:

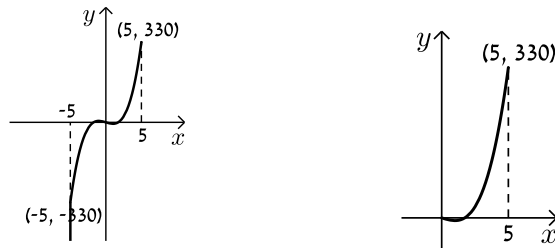


7) א. תחום הגדרה:  $0 \leq x \leq 5$ , חיתוך עם הצירים:  $(0, 0)$ ,  $(\sqrt{3}, 0)$ ,

נקודות קיצון:  $\max(5, 330)$  קצה,  $\min(1, -6)$  קצה,  $\max(0, 0)$  קצה,

עולה:  $1 < x < 5$ , יורדת:  $0 < x < 1$ . ב. אי-זוגית.

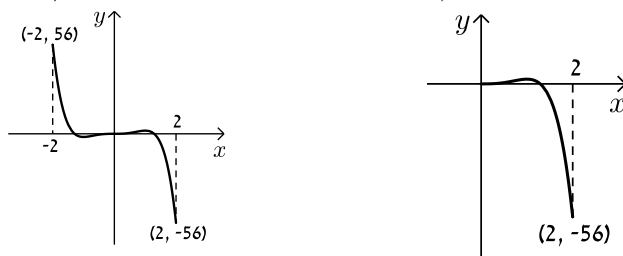
סרטוט עבור סעיף א: סרטוט עבור סעיף ג:



8) א.  $b=0$  ב.  $0 \leq x \leq 2$  ii.  $(0, 0)$ ,  $(1.29, 0)$  iii.  $\min(2, -56)$  קצה,

$\max(1, 2)$  קצה. iv. עולה:  $0 < x < 1$ , יורדת:  $1 < x < 2$ .

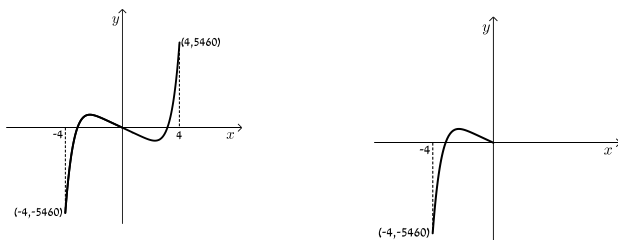
ג. אי-זוגית. סרטוט עבור חלק v: סרטוט עבור סעיף ד:



9) א.  $-4 \leq x \leq 0$  ii.  $(-1, 0)$ ,  $(0, 0)$  iii.  $\min(0, 0)$  קצה,  $\max(-0.723, 0.207)$  קצה,

$\min(-4, -5460)$  קצה. iv. עולה:  $-4 < x < -0.723$ , יורדת:  $-0.723 < x < 0$ .

ג. אי-זוגית. סרטוט עבור חלק v: סרטוט עבור סעיף ד:





# קורס מבוא למתמטיקה לכלכלנים

פרק 12 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית מנה ושורש

תוכן העניינים

1. מציאת תחום הגדרה ..... 135
2. מציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה ..... 137
3. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים ..... 138
4. חקירת פונקצית מנה ..... 143
5. חקירת פונקצית שורש ..... 152
6. תחומי קעירות ונקודות פיתול ..... 160
7. חקירת פונקציה עם פרמטר ..... 166
8. פונקציות ללא תבנית מפורשת ..... 169

## מציאת תחום הגדרה:

### סיכום כללי:

- כל פולינום מוגדר לכל  $x$ .
- בפונקציה עם מכנה, אסור שיתקבל אפס במכנה.
- בפונקציה עם שורש זוגי, אסור שיתקבל מספר שלילי בתוך השורש.

### שאלות:

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

|                                     |                                          |
|-------------------------------------|------------------------------------------|
| א. $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x$      | ב. $f(x) = 4x^3 - x^2 + \frac{x}{2} + 1$ |
| ג. $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 1$      | ד. $f(x) = \frac{2x}{x-3}$               |
| ה. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$       | ו. $f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1}$    |
| ז. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$ | ח. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x - 8}$ |
| ט. $f(x) = \frac{6}{x^2 + 1}$       | י. $f(x) = \frac{4x + 1}{x^2 + 1}$       |
| יא. $f(x) = \frac{1}{x^3 - x}$      | יב. $f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 4x}$        |

(2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

|                                                      |                                             |
|------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| א. $f(x) = \sqrt{x}$                                 | ב. $f(x) = 2\sqrt{x-3}$                     |
| ג. $f(x) = \sqrt{x-4}$                               | ד. $f(x) = 3x\sqrt{1-2x}$                   |
| ה. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 10}$                     | ו. $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$              |
| ז. $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x+4}}$                    | ח. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 5x + 6}}{x-1}$ |
| ט. $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + 5x + 9}}$ | י. $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^3 - 9x}}$     |
| יא. $f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x+6}}$                | יב. $f(x) = \frac{x+1}{x - \sqrt{2-x}}$     |
| יג. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1- x }}$                  | יד. $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+2} - 3}$          |

## תשובות סופיות:

- (1) א. כל  $x$     ב. כל  $x$     ג. כל  $x$     ד.  $x \neq 3$     ה.  $x \neq \pm 2$     ו.  $x \neq \pm 1$   
 ז.  $x \neq -1, 2$     ח.  $x \neq -2, 4$     ט. כל  $x$     י. כל  $x$     יא.  $x \neq \pm 1, 0$     יב.  $x \neq \pm 2, 0$
- (2) א.  $x \geq 0$     ב.  $x \geq 3$     ג.  $x \geq 4$     ד.  $x \leq \frac{1}{2}$     ה.  $x \leq -5, x \geq 2$   
 ו.  $x \leq -2, x \geq 1$     ז.  $x > -4$     ח.  $x \leq -3, -2 \leq x < 1, x > 1$     ט.  $x \leq -1.5, x \geq 1$   
 י.  $-3 < x < 0, x > 3$     יא.  $-6 \leq x < -2, x > -2$     יב.  $x < 1, 1 < x \leq 2$   
 יג.  $-1 < x < 1$     יד.  $x \geq 7$

## מציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה:

שאלות:

(3) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{6x}{x^2 - 10x + 9}$ .

- א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?  
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

תשובות סופיות:

(3) א.  $\min\left(-3, -\frac{3}{8}\right), \max\left(3, -1\frac{1}{2}\right)$ .

ב. עולה:  $-3 < x < 3$ ,  $x \neq 1$ , יורדת:  $3 < x \neq 9$ ,  $x < -3$ .

## מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים:

### סיכום כללי:

#### אסימפטוטה אנכית:

הגדרה: הישר:  $x = k$  הוא אסימפטוטה אנכית של פונקציה מהצורה:  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

אם הוא מקיים:  $g(k) = 0$  וגם:  $f(k) \neq 0$ . בצורה מתמטית: אם:  $\lim_{x \rightarrow k^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$

או:  $\lim_{x \rightarrow k^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$  או שניהם אז הישר:  $x = k$  הוא אסימפטוטה אנכית לפונקציה  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ .

### הסבר כללי:

בעבור ערכי  $x$  שמאפסים את המכנה, אבל לא את המונה יש אסימפטוטה אנכית. כאשר ערך  $x$  מאפס את המכנה וגם את המונה יש לפרק את המונה והמכנה (על ידי נוסחאות כפל מקוצר או טרינום למשל) ולצמצם. אם אחרי הצמצום אותו ערך של  $x$  עדיין מאפס את המכנה תתקבל אסימפטוטה אנכית, אך אם ערך  $x$  זה לא מאפס את המכנה אחרי שצומצם אין אסימפטוטה אנכית אלא נקודת אי הגדרה.

#### אסימפטוטה אופקית:

הגדרה: ישר מהצורה:  $y = n$  הוא אסימפטוטה אופקית לפונקציה מהצורה:  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

אם מתקיים:  $\lim_{x \rightarrow \infty^+} \frac{f(x)}{g(x)} = n$  או:  $\lim_{x \rightarrow \infty^-} \frac{f(x)}{g(x)} = n$  או שניהם.

אופן החישוב הכללי:

נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{ax^m + \dots}{bx^n + \dots}$  (יש בפונקציה קו שבר אחד!)

- אם  $m > n$ , לפונקציה אין אסימפטוטה אופקית.
- אם  $m = n$ , לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה  $y = \frac{a}{b}$ .
- אם  $m < n$ , לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה  $y = 0$ .

### חוקי גבולות לאינסוף:

במקרים רבים נרצה לדעת האם פונקציה מסוימת מתכנסת לערך כלשהו כאשר  $x$  שואף לערכים ההולכים וגדלים (לאינסוף, או למינוס אינסוף). עבור ערכי  $x$  שהולכים וגדלים (או קטנים) נרשום:  $x = \infty$  או  $x = -\infty$  בהתאמה.

ישנם 4 מצבים בהם ערך הפונקציה בשאיפת  $x$  לאחד הקצוות ניתן לחישוב ישיר:

- הגבול:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$
- הגבול:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$  ניתן לפיצול לשני מקרים:
  - אם:  $x \rightarrow 0^+$  (מתקרב ל-0 מהכיוון החיובי) אז:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$
  - אם:  $x \rightarrow 0^-$  (מתקרב ל-0 מהכיוון השלילי) אז:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$
- הגבול מהצורה  $\infty \cdot \infty$  (מכפלת שני ביטויים של  $x$  אשר כל אחד מהם שואף לאינסוף בפני עצמו) מקיים:  $\infty \cdot \infty = \infty$
- הגבול מהצורה  $\infty + \infty$  (סכום שני ביטויים של  $x$  אשר כל אחד מהם שואף לאינסוף בפני עצמו) מקיים:  $\infty + \infty = \infty$

ישנם 3 מקרים בהם לא ניתן לדעת מהו ערך הפונקציה בלקיחת הגבול בצורה ישירה והם:

- הגבול מהצורה:  $\frac{\infty}{\infty}$  (מנת שני ביטויים שהולכים וגדלים עם שאיפת  $x$ ).
- הגבול מהצורה:  $\frac{0}{0}$  (מנת שני ביטויים שהולכים וקטנים עם שאיפת  $x$ ).
- הגבול מהצורה:  $\infty - \infty$  (הפרש של שני ביטויים שהולכים וגדלים עם שאיפת  $x$ ). במקרים אלו נעזר בפישוטים שהוצגו לעיל על מנת למצוא את ערך הגבול עצמו.

## שאלות:

(4) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$

(5) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{5x^2+1}{x^2-9}$

(6) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{2x^2-5x+2}{1+3x^2}$

(7) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{3x}{x^2-2x-15}$

(8) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{6x^3-5x+1}{1+2x^2}$

(9) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{ax+b}{x-b}$

(10) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$   
ואת נקודת אי הרציפות שלה.

(11) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2}{2x^2-4x}$   
ואת נקודת אי הרציפות שלה.

(12) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$

(13) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x}}$

14) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

15) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{2x}{x-\sqrt{x}}$

16) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+5}}$

17) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2-16}}$

18) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{4x^2+1}{ax^2-x+b}$

האסימפטוטה האופקית של הפונקציה ואחת האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה

נפגשות בנקודה  $(-1, 2)$ .

מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

19) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{ax+8}{x+b\sqrt{x}}$

הפונקציה חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה בנקודה  $(16, 2)$ .

מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .



### תשובות סופיות:

$$(4) \quad x = 2, y = 3$$

$$(5) \quad x = \pm 3, y = 5$$

$$(6) \quad y = \frac{2}{3}$$

$$(7) \quad x = -3, x = 5, y = 0$$

$$(8) \quad \text{אין.}$$

$$(9) \quad x = b, y = a$$

$$(10) \quad \text{נקודת אי-הגדרה: } (2, 4), x = 1, y = 1$$

$$(11) \quad \text{נקודת אי-הגדרה: } (0, 0), x = 2, y = \frac{1}{2}$$

$$(12) \quad x = 2, y = 0$$

$$(13) \quad x = 4$$

$$(14) \quad x = 1, y = -1$$

$$(15) \quad x = 1, y = 2$$

$$(16) \quad y = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) = 3, y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = -3$$

$$(17) \quad x = 4, x = -4, y = 5, y = -5$$

$$(18) \quad b = -3, a = 2$$

$$(19) \quad b = 1, a = 2$$

## חקירת פונקצית מנה:

### שאלות:

(20) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{6x^2 - 10x + 6}{3x^2 - 10x + 3}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(21) נתונה הפונקציה:  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(22) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(23) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{6x}{x^2 - 5x + 4}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(24) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 3}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(25) נתונה הפונקציה הבאה:  $y = \frac{2x^2 - 5x + 2}{4x}$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה.
- ב. נקודות קיצון.
- ג. קביעת סוג הקיצון ותחומי עלייה וירידה.
- ד. חיתוך עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטה אנכית.
- ו. שרטוט סקיצה.

(26) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(27) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום הגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(28) לגרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{ax + 4}{x^2}$  יש נקודת קיצון שבה  $x = -8$ .

- מצא את  $a$  וכתוב את הפונקציה.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(29) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{3x^2}{2x^2 - 8}$ .

- מהו תחום הגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- קבע את סוג הקיצון ותחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה.
- מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(30) נתונה הפונקציה:  $y = \frac{a^2x - 4}{2x^2 - 1}$ ,  $(a$  קבוע).

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה:  $x = 1$  הוא:  $m = 4$ .

- מצא את כל הערכים האפשריים עבור  $a$ .
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודת החיתוך בין המשיק הנתון ומשיק העובר דרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .

**(31)** נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = 1.5x - \frac{5x+1}{x+5}$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה.
- ב. נקודות קיצון וסוגן.
- ג. תחומי עלייה וירידה.
- ד. חיתוך עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה.

**(32)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x-a}{x-1}$ ,  $(a \neq 1)$ .

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
- ג. הבע באמצעות  $a$  את השיעורים של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  ועם ציר ה- $y$ .
- ד. ענה על הסעיפים הבאים:
  - i. מצא עבור אילו ערכים של  $a$  הפונקציה  $f(x)$  עולה לכל  $x$  בתחום ההגדרה.
  - ii. ישר המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה שבה  $x=a$  מקביל לישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה:  $x=2$ . מצא את הערך של  $a$  אם נתון כי הפונקציה עולה לכל  $x$ .

**(33)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 + ax + 6}{x-2}$ ,  $(a \text{ פרמטר})$ .

- ידוע שאחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- $y$ .
- א. מצא את הערך של  $a$ .
  - ב. הצב את הערך של  $a$  שמצאת בסעיף א' ומצא:
    - i. את תחום ההגדרה של הפונקציה.
    - ii. את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
    - iii. את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
    - iv. את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).
  - ג. עבור אלו ערכי  $x$  הפונקציה שלילית?
  - ד. נתון הישר:  $y=k$ . עבור אלו ערכי  $k$  אין נקודות משותפות לישר ולגרף הפונקציה? נמק.

(34) נתונה הפונקציה:  $y = \frac{x+3}{x-2} + A$ ,  $A$  (פרמטר). גרף הפונקציה עובר בנקודה  $(3A, A)$ .

- מצא את ערך הפרמטר  $A$ .
  - כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
  - הוכח כי גרף הפונקציה יורד לכל  $x$ .
  - מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
  - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
  - נתון הישר:  $y = k$ .
- האם קיים ערך של  $k$  עבורו הישר חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות שונות? נמק.

(35) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{ax^2 - 20x + 28}{x^2 + 2a}$ .

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את האסימפטוטה האופקית שלו בנקודה  $(3, 0.5)$ .

- מצא את ערך הפרמטר  $a$  וכתוב את הפונקציה ואת תחום הגדרתה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- העזר בגרף הפונקציה וקבע עבור אלו ערכים של  $k$  הישר:  $y = k$  יחתוך את גרף הפונקציה בנקודה אחת בלבד.

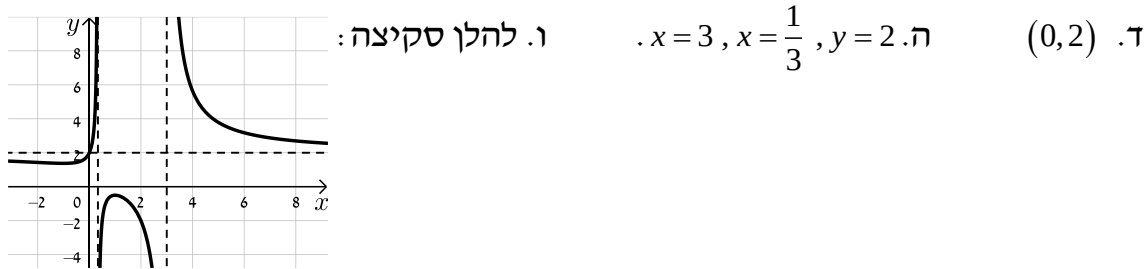
(36) ענה על הסעיפים הבאים:

- הוכח כי לגרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{9-x^2}{x^2-k}$  יש נקודת קיצון שנמצאת על ציר ה- $y$ .
- הוכח כי הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת לכל  $x$  אם ידוע כי שיעור ה- $y$  של נקודת הקיצון הוא 3.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה וקבע בכמה נקודות יחתוך אותו הישר  $y = -1$ . נמק את תשובתך.

## תשובות סופיות:

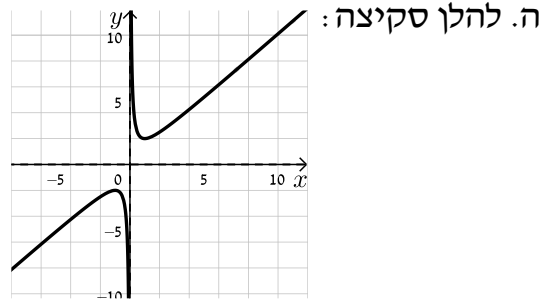
(20) א.  $x \neq 3, x \neq \frac{1}{3}$  ב.  $\min\left(-1, 1\frac{3}{8}\right), \max\left(1, -\frac{1}{2}\right)$

ג. תחומי עלייה:  $-1 < x < 1$  וגם  $x \neq \frac{1}{3}$ , תחומי ירידה:  $1 < x \neq 3$  או  $x < -1$ .



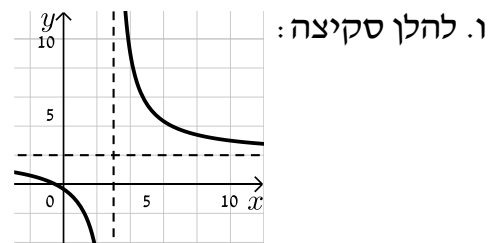
(21) א.  $x \neq 0$  ב.  $\min(1, 2), \max(-1, -2)$

ג. עולה:  $x > 1$  או  $x < -1$ , יורדת:  $-1 < x < 1, x \neq 0$  ד. אין



(22) א.  $x \neq 3$  ב. אין ג. הפונקציה יורדת בכל ת.

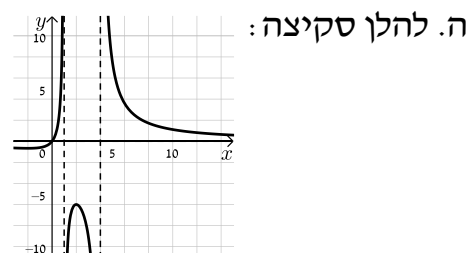
ד.  $\left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(0, -\frac{1}{3}\right)$  ה.  $y = 2, x = 3$



(23) א.  $x \neq 1, x \neq 4$  ב.  $\min\left(-2, -\frac{2}{3}\right), \max(2, -6)$

ג. תחומי עלייה:  $-2 < x < 2, x \neq 1$ , תחומי ירידה:  $x < -2$  או  $x > 2, x \neq 4$

ד.  $(0, 0)$  (אסימפטוטות:  $x = 1, x = 4, y = 0$ ).

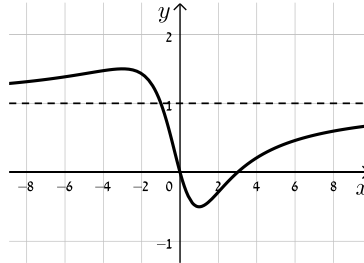


(24) א. כל  $x$  ב.  $\min\left(1, -\frac{1}{2}\right), \max\left(-3, 1\frac{1}{2}\right)$

ג. עולה:  $x > 1$  או  $x < -3$ , יורדת:  $-3 < x < 1$

ד.  $(0,0), (3,0)$  (אסימפטוטה:  $y = 1$ ).

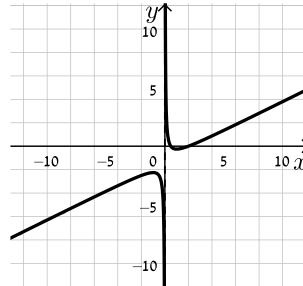
ה. להלן סקיצה:



(25) א.  $x \neq 0$  ב.  $\min(1, -0.25), \max(-1, -2.25)$

ג. עולה:  $x > 1, x < -1$ , יורדת:  $-1 < x < 1, x \neq 0$  ד.  $(0.5, 0), (2, 0)$  ה.  $x = 0$

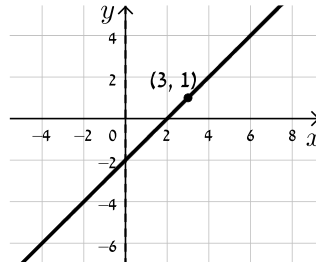
ו. להלן סקיצה:



(26) א.  $x \neq 3$  ב. אין ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה

ד.  $(0, -2), (2, 0)$  ה. אין, יש נקודת אי הגדרה ששיעוריה  $(3, 1)$ .

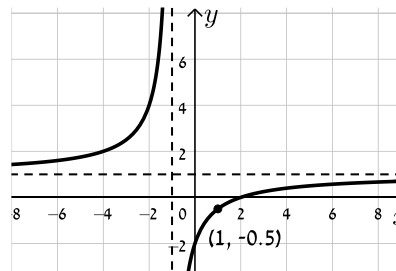
ו. להלן סקיצה:



(27) א.  $x \neq \pm 1$  ב. אין ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה

ד.  $(0, -2), (2, 0)$  ה.  $x = -1, y = 1$ , יש נקודת אי הגדרה:  $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$

ו. להלן סקיצה:

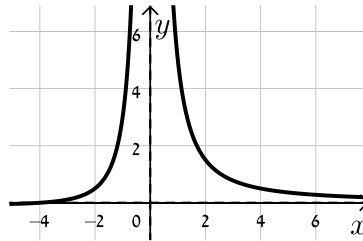




28) א.  $f(x) = \frac{x+4}{x^2}$ ,  $a=1$  ב. עולה:  $-8 < x < 0$  יורדת:  $x < -8$ ,  $x > 0$

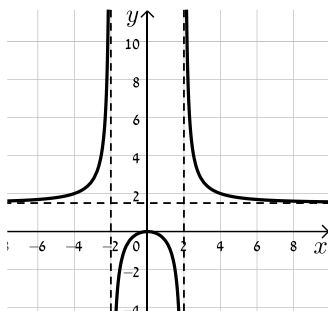
ג.  $(-4, 0)$  ד.  $x=0$ ,  $y=0$

ה. להלן סקיצה:



29) א.  $x \neq \pm 2$  ב.  $\max(0, 0)$  ג. יורדת:  $x > 0$ ,  $x \neq 2$  עולה:  $x < 0$ ,  $x \neq -2$

ד.  $(0, 0)$  ה.  $x = \pm 2$ ,  $y = 1.5$  ו. להלן סקיצה:



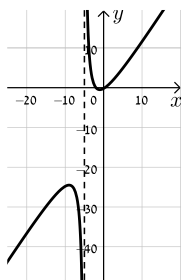
30) א.  $a = \pm 2$  ב.  $(1, 0)$ ,  $(0, 4)$

ג. המשיק:  $y = -4x + 4$  אשר עובר בנקודה  $(1, 0)$ . נקודת החיתוך:  $(1, 0)$ .

31) א.  $x \neq -5$  ב.  $\min(-1, -0.5)$ ,  $\max(-9, -24.5)$

ג. עולה:  $x > -1$ ,  $x < -9$  יורדת:  $-9 < x < -1$ ,  $x \neq -5$

ד.  $(-2, 0)$ ,  $(\frac{1}{3}, 0)$ ,  $(0, -0.2)$  ה.  $x = -5$  ו. להלן סקיצה:



32) א.  $x \neq 1$  ב.  $x=1$ ,  $y=1$  ג.  $(a, 0)$ ,  $(0, a)$  ד. i.  $a > 1$  ii.  $a=2$

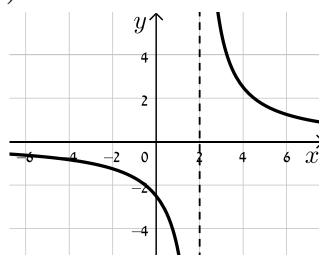
33) א.  $a = -3$  ב. i.  $x \neq 2$  ii.  $(0, -3)$  iii.  $\max(0, -3)$ ,  $\min(4, 5)$

iv.  $x=2$  ג.  $x < 2$  ד.  $-3 < k < 5$

34) א.  $A = -1$  ב.  $x \neq 2$  ד.  $(0, -2.5)$

ו. לא

ה. להלן סקיצה:



35 א.  $a = 3$ ,  $f(x) = \frac{3x^2 - 20x + 28}{x^2 + 6}$ , כל  $x$ .

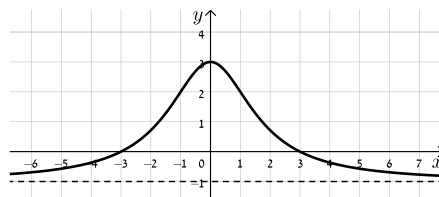
ב.  $\min\left(3, -\frac{1}{3}\right)$ ,  $\max(-2, 8)$

ד.  $(2, 0)$ ,  $\left(0, 4\frac{2}{3}\right)$ ,  $\left(4\frac{2}{3}, 0\right)$

ו.  $k = 8$ ,  $-\frac{1}{3}$ ,  $3$

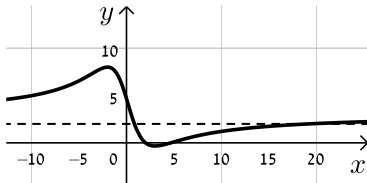
36 ב.  $k = -3$  ג.  $(3, 0)$ ,  $(-3, 0)$  ד.  $y = -1$

ו. להלן סקיצה:



ג. עולה:  $x > 3$ ,  $x < -2$ , יורדת:  $-2 < x < 3$

ה. להלן סקיצה:



ה. באף נקודה.

## חקירת פונקצית שורש:

### שאלות:

(37) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{x-3}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(38) נתונה הפונקציה:  $f(x) = (x-4)\sqrt{x-1}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(39) נתונה הפונקציה:  $f(x) = x\sqrt{6-x}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(40)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{4\sqrt{x}}{x^2 + 3}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(41)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(42)** נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x^2}$ .

- א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות קיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(43)** נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}$ .

- א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- ב. האם ניתן להעביר משיק לגרף הפונקציה המקביל לציר ה- $x$ ? נמק והראה חישוב מתאים.
- ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ .
- ד. חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק והצירים.

(44) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}-1}$ .

- מהו תחום הגדרה של הפונקציה?
- כמה נקודות יש לגרף הפונקציה שהמשיק העובר דרכן מקביל לציר ה- $x$ ? מצא אותן.
- כתוב את משוואות המשיקים בנקודות שמצאת בסעיף הקודם.

(45) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום הגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(46) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{ax+6}{\sqrt{9-x^2}}$ , פרמטר  $a$ .

- מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ .  
ידוע כי הוא מקביל לישר:  $3y - x = 0$ .
- מצא את ערך הפרמטר  $a$ .
  - כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
  - מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
  - כתוב את התחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(47) נתונות שתי הפונקציות הבאות:  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+k}}$ ,  $g(x) = \frac{\sqrt{x-k}}{x}$  ( $k$  פרמטר חיובי).

- ידוע כי הפונקציות חותכות זו את זו בנקודה שבה:  $x = 0.8$ .
- מצא את  $k$ .
  - האם הפונקציות נחתכות בנקודה נוספת מלבד לנקודה הנתונה?  
אם כן מצא אותה.
  - מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה שבה:  $x = 0.52$ .

(48) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{kx}{\sqrt{k-x^2}}$ , פרמטר חיובי.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

- i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה? (בטא באמצעות  $k$ ).
- ii. מהן האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה?
- ב. הראה כי הפונקציה עולה עבור כל ערך של  $k$  בתחום הגדרתה.
- ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ . (בטא באמצעות  $k$ ).
- ד. המשיק אשר מצאת בסעיף הקודם חותך את אחת האסימפטוטות של הפונקציה בנקודה  $A$ . ידוע כי שטח המשולש הכלוא בין המשיק, ציר ה- $x$  והאסימפטוטה הנ"ל הוא:  $S = 4$  יח"ש. מצא את ערך הפרמטר  $k$ .

(49) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x+2}{x+4}$ . מגדירים פונקציה נוספת:  $g(x) = \sqrt{f(x)}$ .

- א. כתוב בצורה מפורשת את הפונקציה  $g(x)$ .
- ב. לפניך מספר טענות המתייחסות לפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$ . קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:
  - i. לפונקציות תחום הגדרה זהה.
  - ii. שתי הפונקציות עולות בכל תחום הגדרתן.
  - iii. שתי הפונקציות חותכות את ציר ה- $x$  באותה נקודה.
  - iv. לשתי הפונקציות יש אסימפטוטה משותפת.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של כל פונקציה עם ציר ה- $y$ . אסף פתר את סעיפים א' ו-ב' והחליט לטעון את הטענה הבאה: היות והפונקציה  $g(x)$  מוגדרת להיות:  $g(x) = \sqrt{f(x)}$  אזי ניתן למצוא את שיעור ה- $y$  של כל נקודה שעל גרף הפונקציה  $f(x)$  ע"י כך שנמצא תחילה את שיעור ה- $y$  של הנקודה בעלת אותו שיעור  $x$  על הגרף של  $g(x)$  ונעלה אותה בריבוע.
- ד. האם אסף צודק? נמק בצורה איכותית (חישובים אינם נדרשים) את שיקולך.

**50** לפניך הפונקציות הבאות:  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}-1}$ ,  $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x}-1}$ .

א. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

i. לשתי הפונקציות יש את אותו תחום ההגדרה.

ii. לשתי הפונקציות יש נקודות קיצון הנמצאות על הישר:  $y = x$ .

iii. הפונקציות לא חותכות זו את זו.

מגדירים פונקציה נוספת והיא:  $h(x) = (g(x))^2$ .

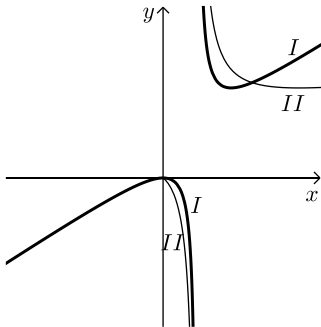
ב. כתוב באופן מפורש את הפונקציה החדשה:  $h(x)$ .

ג. האם תחום ההגדרה של הפונקציה  $h(x)$  זהה לשל  $g(x)$ ?

ד. באיור הסמוך ישנם שני גרפים.

קבע על סמך הסעיפים הקודמים איזו פונקציה כל גרף

מתאר מבין הפונקציות:  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$ . נמק את בחירותיך.



**51** לפניך שלוש פונקציות:  $f(x) = x^2 \sqrt{k-x^2}$ ,  $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{k-x^2}}$ ,  $h(x) = \frac{\sqrt{k-x^2}}{x^2}$ . ( $k > 0$ ).

א. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

i. לפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$  תחום הגדרה זהה, השונה מתחום ההגדרה של  $h(x)$ .

ii. קיימת פונקציה אשר אינה חותכת את ציר ה- $x$  כלל.

iii. הפונקציות:  $h(x)$  ו- $g(x)$  הפוכות זו מזו בתחומי העלייה והירידה שלהן (כאשר אחת עולה השנייה יורדת).

iv. לפונקציה:  $f(x)$  יש נקודת קיצון אחת בלבד.

מסמנים נקודה  $A(0, \sqrt{12})$  על ציר ה- $y$ . ידוע כי מרחקה מאחת מנקודות החיתוך

של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה- $x$  שאינה בראשית הוא:  $d = 6$ .

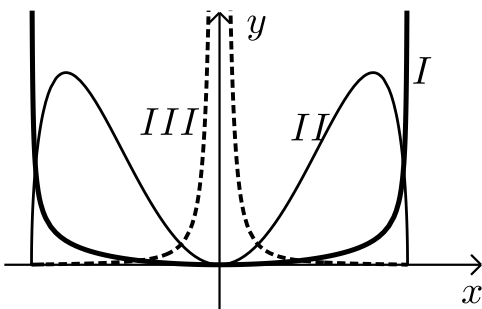
ב. מצא את  $k$ .

ג. מצא את נקודות הקיצון של גרף

הפונקציה  $f(x)$  וקבע את סוגן.

ד. לפניך איור ובו מסורטטות הסקיצות של שלושת הפונקציות.

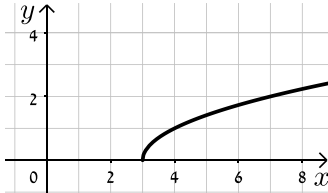
קבע עפ"י הסעיפים הקודמים איזה גרף שייך לכל פונקציה.



## תשובות סופיות:

(37) א.  $x \geq 3$     ב.  $\min(3,0)$  קצה    ג. הפונקציה עולה בכל ת.ה.

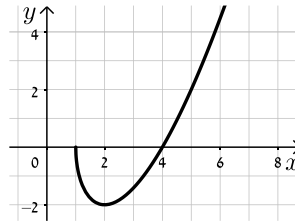
ד.  $(3,0)$     ה. אין.    ו. להלן סקיצה:



(38) א.  $x \geq 1$     ב.  $\max(1,0)$ ,  $\min(2,-2)$  קצה

ג. עולה:  $x > 2$ , יורדת:  $1 < x < 2$     ד.  $(1,0), (4,0)$     ה. אין.

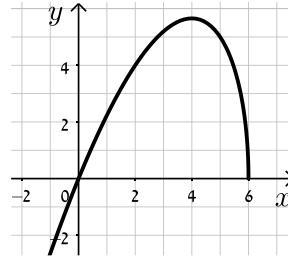
ו. להלן סקיצה:



(39) א.  $x \leq 6$     ב.  $\min(6,0)$ ,  $\max(4,4\sqrt{2})$  קצה

ג. עלייה:  $x < 4$ , ירידה:  $4 < x < 6$     ד.  $(6,0), (0,0)$

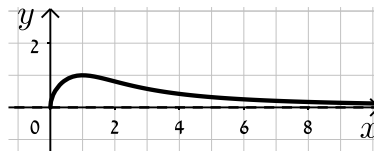
ה. להלן סקיצה:



(40) א.  $x \geq 0$     ב.  $\min(0,0)$ ,  $\max(1,1)$  קצה

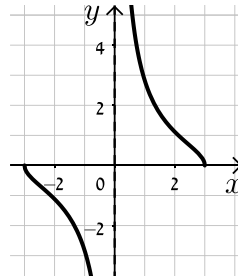
ג. עולה:  $0 < x < 1$ , יורדת:  $x > 1$     ד.  $(0,0)$     ה.  $y = 0$ .

ו. להלן סקיצה:



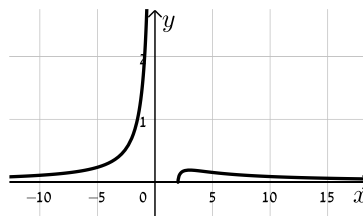


- (41) א.  $-3 \leq x \leq 3$  וגם  $x \neq 0$  ב.  $\max(-3, 0)$  קצה,  $\min(3, 0)$  קצה ג. עולה: אף  $x$ , יורדת:  $-3 \leq x \leq 3$ ,  $x \neq 0$  ד.  $(-3, 0), (3, 0)$

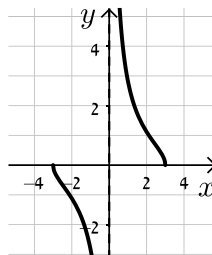


ה.  $x = 0$ . ו. להלן סקיצה:

- (42) א.  $x < 0$ ,  $x \geq 2$  ב.  $\min(2, 0)$ ,  $\max\left(3, \frac{1}{\sqrt{27}}\right)$  ג.  $(2, 0)$  ד. להלן סקיצה:



- (43) א.  $(2, 0)$  ב. לא ג.  $y = 2\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}$  ד.  $S = 4\sqrt{2}$
- (44) א.  $x \neq 1$ ,  $x \geq 0$  ב.  $(9, 6)$  ג.  $y = 6$
- (45) א.  $-3 \leq x \leq 3$  וגם  $x \neq 0$  ב.  $\max(-3, 0)$  קצה,  $\min(3, 0)$  קצה ג. עולה: אף  $x$ , יורדת:  $-3 \leq x \leq 3$ ,  $x \neq 0$  ד.  $(-3, 0), (3, 0)$



ה.  $x = 0$ . ו. להלן סקיצה:

- (46) א.  $a = 1$  ב.  $-3 < x < 3$  ג.  $(-1.5, \sqrt{3})$  ד. יורדת:  $-3 < x < -1.5$ , עולה:  $-1.5 < x < 3$

- (47) א.  $k = 0.48$  ב. כן,  $(0.6, 0.57)$  ג.  $y = 0.74x + 0.1352$

- (48) א. i.  $-\sqrt{k} < x < \sqrt{k}$  ii.  $x = \pm\sqrt{k}$  ב.  $f'(x) = \frac{k^2}{(k-x^2)^{1.5}} > 0$

- ג.  $y = \sqrt{k}x$  ד.  $k = 4$

$$(49) \text{ א. } g(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x+4}}$$

ב. i. לא נכון ii. נכון

$$\text{ג. } f(x) : \left(0, \frac{1}{2}\right), g(x) : \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

iii. נכון iv. נכון

ד. אסף צודק.

$$\text{ב. } h(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

iii. נכון

(50) א. i. לא נכון ii. נכון

$$\text{ד. } I = h(x), II = f(x)$$

$$\text{ג. לא, } h(x) : x \neq 1$$

iv. נכון

iii. נכון

ii. לא נכון

(51) א. i. לא נכון

$$\text{ב. } k = 24 \quad \text{ג. } \min(0,0), \max(\pm 4, 32\sqrt{2})$$

$$\text{ד. } I = g(x), II = f(x), III = h(x)$$

## תחומי קעירות ונקודות פיתול:

### סיכום כללי:

#### תחומי קעירות – הגדרה:

- פונקציה  $f(x)$  קעורה כלפי מטה (קמורה) בתחום  $[x_0, x_1]$  אם לכל  $x$  בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מעל לגרף הפונקציה.  
כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מטה יש למצוא תחום שבו:  $f''(x) < 0$ .
- פונקציה  $f(x)$  קעורה כלפי מעלה (קעורה) בתחום  $[x_0, x_1]$  אם לכל  $x$  בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מתחת לגרף הפונקציה.  
כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מעלה יש למצוא תחום שבו:  $f''(x) > 0$ .

#### נקודת פיתול – הגדרות:

- נקודת פיתול היא נקודה שבה הפונקציה עוברת מתחום קעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה ולהיפך.
- נקודת פיתול מקיימת:  $f''(x) = 0$  כאשר ערך הנגזרת השנייה משנה את סימנו בתחום שלפני ואחרי הנקודה המאפסת אותו.
- בנקודת פיתול המשיק לגרף הפונקציה חותך אותה ולא רק משיק לה מכיוון אחד.

### שאלות:

(52) מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה:  $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2$ .

(53) מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה:  $f(x) = \frac{3x-2}{x^2}$ .

(54) מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה:  $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x-1}}$ .

(55) מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה:  $f(x) = x(x-2)^3$ .

(56) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{a}{x^2 + b}$ ,  $a, b$  פרמטרים.

הנקודה  $(-1, 1)$  היא נקודת פיתול של הפונקציה.  
מצא את ערכי הפרמטרים  $a, b$ .

(57) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + 2$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. מציאת נקודות פיתול.
- ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
- ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(58) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{2x}{x - \sqrt{x}}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. מציאת נקודות פיתול.
- ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
- ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(59) חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים :**

- i. מציאת תחום הגדרה.
- ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
- iii. מציאת נקודות קיצון וקביעת סוגן.
- iv. מציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- v. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- vi. מציאת נקודות הפיתול של הפונקציה.
- vii. מציאת תחומי הקעירות של הפונקציה.
- viii. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$\text{א. } f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2}$$

$$\text{ג. } f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad \text{ד. } f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$$

$$\text{ה. } f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad \text{ו. } f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)}$$

$$\text{ז. } f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad \text{ח. } f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1}$$

**הערה: בסעיפים ו-ז יש לבצע חקירה ללא סעיפים vi ו-vii.**

### תשובות סופיות:

(52)  $(1,7), (2,16)$ , קעירות כלפי מעלה:  $x > 2$  או  $x < 1$ , קעירות כלפי מטה:  $1 < x < 2$ .

(53)  $(2,1)$ , קעירות כלפי מעלה:  $x > 2$ , קעירות כלפי מטה:  $0 \neq x < 2$ .

(54) קיצון:  $\min(2,4)$ , פיתול:  $\left(4, \frac{8}{\sqrt{3}}\right)$ .

(55) קיצון:  $\min\left(\frac{1}{2}, -\frac{27}{16}\right)$ , פיתול:  $(1,-1), (2,0)$ .

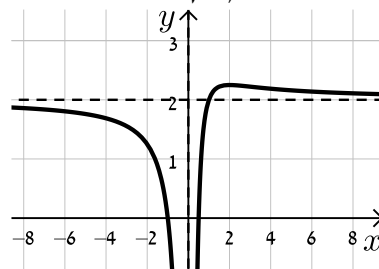
(56)  $a = 4, b = 3$ .

(57) א.  $x \neq 0$  ב.  $\max\left(2, 2\frac{1}{4}\right)$  ג. עולה:  $0 < x < 2$  יורדת:  $x > 2, x < 0$

ד.  $\left(\frac{1}{2}, 0\right), (-1, 0)$  ה.  $x = 0, y = 2$  ו.  $\left(3, 2\frac{2}{9}\right)$

ז. קעירות כלפי מעלה:  $x > 3$ , קעירות כלפי מטה:  $0 \neq x < 3$ .

ח. להלן סקיצה:

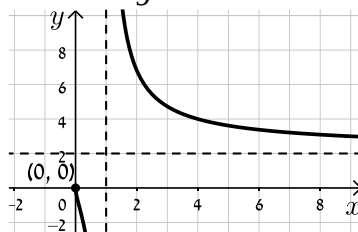


(58) א.  $x > 0, 1 \neq x$  ב. אין. ג. יורדת בכל תחום הגדרתה.

ד. אין. ה.  $x = 1, y = 2$  נקודת אי הגדרה:  $(0,0)$  ו.  $\left(\frac{1}{9}, -1\right)$

ז. קעירות כלפי מעלה:  $x > 1$  או  $0 < x < \frac{1}{9}$ , קעירות כלפי מטה:  $\frac{1}{9} < x < 1$ .

ח. להלן סקיצה:



(59) א. i.  $x \neq 0$  ii.  $(1,0)$  iii.  $x = 0, y = 0$  iv.  $\max(2, 0.25)$

v. עולה:  $0 < x < 2$ , יורדת:  $x < 0, x > 2$  vi.  $\left(3, \frac{2}{9}\right)$

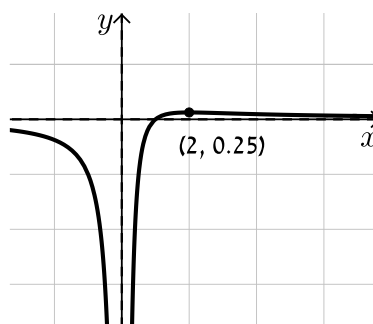
vii. קעורה כלפי מעלה:  $x > 3$ , קעורה כלפי מטה:  $0 < x < 3, x < 0$ .

ב. i.  $x \neq -1$  ii.  $(0,0)$  iii.  $x = -1, y = 2$  iv.  $\min(0,0)$

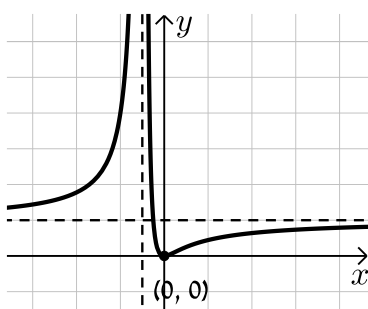
- v. עולה:  $x < -1$ ,  $x > 0$ , יורדת:  $-1 < x < 0$
- vi.  $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{9}\right)$
- vii. קעורה כלפי מעלה:  $-1 < x < \frac{1}{2}$ ,  $x < -1$ , קעורה כלפי מטה:  $x < \frac{1}{2}$
- ג. i.  $x \neq \pm 2$  ii.  $(0, 0)$  iii.  $x = \pm 2$
- iv.  $\min(\sqrt{12}, 5.2)$ ,  $\max(-\sqrt{12}, -5.2)$
- v. עולה:  $x > \sqrt{12}$ ,  $x < -\sqrt{12}$ , יורדת:  $2 < x < \sqrt{12}$ ,  $-2 < x < 2$ ,  $-\sqrt{12} < x < -2$
- vi.  $(0, 0)$
- vii. קעורה כלפי מעלה:  $x > 2$ ,  $-2 < x < 0$ , קעורה כלפי מטה:  $0 < x < 2$ ,  $x < -2$
- ד. i.  $x \neq -1$  ii.  $(0, 0)$  iii.  $x = -1$  iv.  $\max(-3, -6.75)$
- v. עולה:  $x > -1$ ,  $x < -3$ , יורדת:  $-3 < x < -1$
- vi.  $(0, 0)$
- vii. קעורה כלפי מעלה:  $x > 0$ , קעורה כלפי מטה:  $-1 < x < 0$ ,  $x < -1$
- ה. i.  $x \neq 1$  ii.  $(-1, 0), (0, -1)$  iii.  $x = 1, y = 1$  iv. אין.
- v. יורדת בכל ת.ה. vi.  $\left(-3, \frac{1}{8}\right), (-1, 0)$
- vii. קעורה כלפי מעלה:  $-3 < x < -1$ ,  $x > 1$ , קעורה כלפי מטה:  $-1 < x < 1$ ,  $x < -3$
- ו. i.  $x \neq 2, 5$  ii.  $(0, -0.1), (-1, 0), (1, 0)$  iii.  $x = 2, x = 5, y = 1$
- iv.  $\min(0.359, -0.11)$ ,  $\max(2.78, -3.89)$
- v. עולה:  $2 < x < 2.78$ ,  $0.359 < x < 2$ , יורדת:  $x > 5$ ,  $2.78 < x < 5$ ,  $x < 0.359$
- ז. i.  $x \neq \pm 2$  ii.  $(3, 0), (1, 0), (0, -0.75)$  iii.  $x = \pm 2, y = 1$
- iv. אין. v. יורדת בכל ת.ה.
- ח. i.  $x \neq \pm 1$  ii.  $(0, 0)$  iii.  $x = -1$  iv.  $\min(0, 0)$ ,  $\max(-2, -4)$
- v. עולה:  $x > 0$ ,  $x < -2$ ,  $x \neq 1$ , יורדת:  $-1 < x < 0$ ,  $-2 < x < -1$
- vi. אין. vii. קעורה כלפי מעלה:  $x > -1$ ,  $x \neq 1$ , קעורה כלפי מטה:  $x < -1$

## סקיצות:

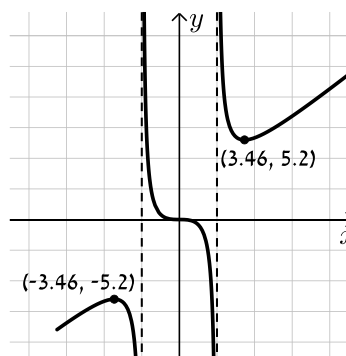
א.



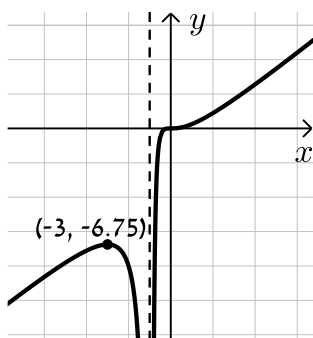
ב.



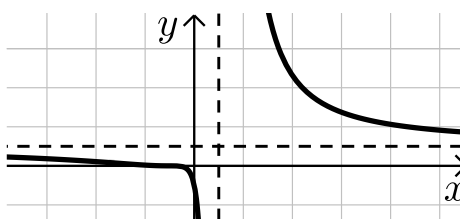
ג.



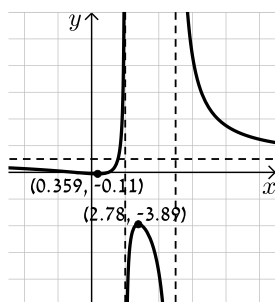
ד.



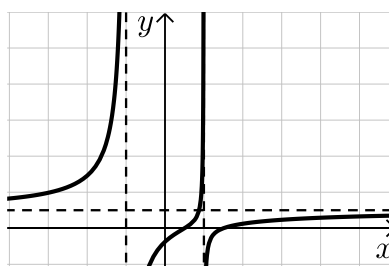
ה.



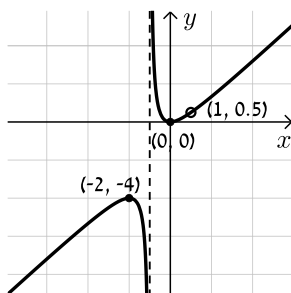
ו.



ז.



ח.





## חקירת פונקציה עם פרמטר:

### סיכום כללי:

סיווג נקודות קיצון באמצעות  $y''$  :

אם הנקודה  $A(x_1, y_1)$  היא נקודת קיצון אז :

- אם  $f''(x_1) > 0$  הנקודה  $A(x_1, y_1)$  היא נקודת מינימום.
- אם  $f''(x_1) < 0$  הנקודה  $A(x_1, y_1)$  היא נקודת מקסימום.

### שאלות:

(1) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה :  $f(x) = x^3 - 12x$  .

(2) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה :  $f(x) = x^2 - 6x - 16$  .

(3) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה :  $f(x) = x^3 - 3b^2x$  ,  $b > 0$  פרמטר. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(4) נתונה הפונקציה :  $f(x) = \frac{2x}{a^2 + x^2}$  ,  $(a > 0)$  . חקור לפי הסעיפים הבאים :

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(5) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1-x^2}{(x-b)^2}$ ,  $(b > 1)$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(6) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 4x\sqrt{b^2 - x^2}$ ,  $(b > 0)$ .

חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(7) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 - m}{ax - 4}$ ,  $a, m$  פרמטרים קבועים כאשר:  $a > 0$ .

ידוע כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- $y$ .

- א. מצא את הערך של הפרמטר  $m$ .
- ב. הצב את הערך של  $m$  שמצאת בסעיף א' והבא באמצעות  $a$  את:
  - i. תחום ההגדרה של הפונקציה.
  - ii. נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
  - iii. האסימפטוטות לגרף הפונקציה המקבילות לצירים.
- ג. סרטט סקיצה וסמן בה את נקודות הקיצון ואת משוואות האסימפטוטות שהבעת באמצעות  $a$  בסעיף הקודם.
- ד. ידוע כי נקודת הקיצון שאינה על ציר ה- $y$  נמצאת במרחקים שווים מהצירים. מצא את הערך של הפרמטר  $a$ .
- ה. נתון הישר:  $y = k$ . מצא עבור אילו ערכים של  $k$  אין לישר ולגרף הפונקציה נקודות משותפות כלל.

## תשובות סופיות:

(1)  $\min(2, -16), \max(-2, 16)$

(2)  $\min(3, -25)$

(3)  $\min(b, -2b^3), \max(-b, 2b^3)$

(4) א. כל  $x$  ב.  $\max\left(a, \frac{1}{a}\right), \min\left(-a, -\frac{1}{a}\right)$

ג. עולה:  $-a < x < a$  יורדת:  $x < -a, x > a$ 

ד.  $(0, 0)$  ה. אסימפטוטה אופקית:  $y = 0$

(5) א.  $x \neq b$  ב.  $\max\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{b^2 - 1}\right)$  ג. עולה:  $x > b, x < \frac{1}{b}$  יורדת:  $\frac{1}{b} < x < b$

ד.  $\left(0, \frac{1}{b^2}\right), (-1, 0), (1, 0)$  ה.  $x = b, y = -1$

(6) א.  $-b \leq x \leq b$  ב.  $\min\left(-\frac{b}{\sqrt{2}}, -2b^2\right), \max\left(\frac{b}{\sqrt{2}}, 2b^2\right), \min(-b, 0)$  קצה,

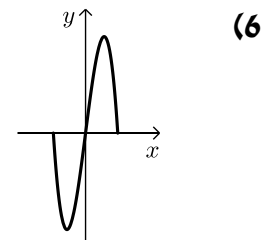
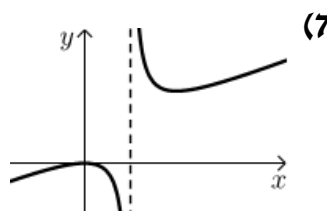
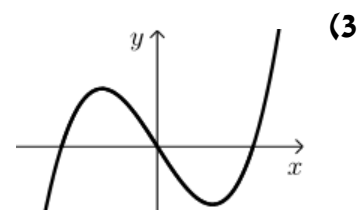
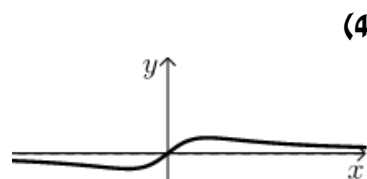
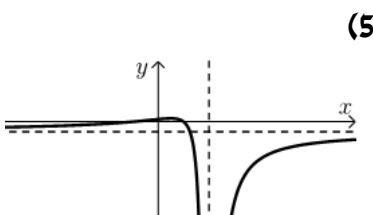
ג. עולה:  $-\frac{b}{\sqrt{2}} < x < \frac{b}{\sqrt{2}}$  יורדת:  $\frac{b}{\sqrt{2}} < x < b, -b < x < -\frac{b}{\sqrt{2}}$

ד.  $(b, 0), (-b, 0), (0, 0)$

(7) א.  $m = 0$  ב. i.  $x \neq \frac{4}{a}$  ii.  $\max(0, 0), \min\left(\frac{8}{a}, \frac{16}{a^2}\right)$

ב. iii.  $x = \frac{4}{a}$  ד.  $a = 2$  ה.  $0 < k < 4$

## סקיצות לשאלות:



## פונקציות ללא תבנית מפורשת:

### סיכום כללי:

#### הגדרת פונקציה:

פונקציה  $f$  היא התאמה בין ערך  $x$  לערך  $y$  ומסומנת באופן הבא:  $f: x \rightarrow y$ .  
 כך שלכל  $x$  מתאים ערך אחד בלבד של  $y$ . סימון אחר:  $y = f(x)$ .  
 הנגזרת של פונקציה  $f(x)$  מסומנת  $f'(x)$ .

#### כללי הגזירה לפי כלל השרשרת:

- סימון הנגזרת:  $(f(x))' = f'(x)$
- גזירה של פונקציה בחזקה:  $(f^2(x))' = 2f(x)f'(x)$
- גזירה של הרכבת פונקציות:  $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

### שאלות:

1) הפונקציה  $f(x)$  מקיימת:  $f(1) = 3$  ו- $f'(1) = -2$ .  
 חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- $f(1) + 4$
- $f'(1) + 4$
- $\frac{f(1)+1}{f'(1)-1}$
- $\sqrt{f(1)+f'(1)}$

2) נתונה פונקציה  $f$  המקיימת:  $f(4) = 0$  ו- $f'(4) = 1$ .  
 מגדירים:  $g(x) = 2x + f(2x)$ .  
 חשב את  $g(2)$  ואת  $g'(2)$ .

(3) נתונה פונקציה המקיימת:  $f(8) = -1$  ו- $f'(8) = 1$ .

א. נתון:  $g(x) = x^2 \sqrt{f(4x) + f'(x+6)}$ . חשב את  $g(2)$ .

ב. נתון:  $h(x) = \frac{f(x+2) + x + 2}{f'(14-x) - 14 + x}$ . חשב את  $h(6)$ .

(4) נתונה פונקציה המקיימת:  $f(9) = -4$ ,  $f'(9) = 3$ .

מגדירים:  $g(x) = f^2(3x) + f'(x^2)$ . חשב את  $g(3)$ .

(5) פונקציה  $f$  מקיימת:  $f(4) = 2$ ,  $f'(4) = 1$ .

מגדירים:  $g(x) = f^2(x) + f(x) + x$ .

חשב את  $g(4)$  ואת  $g'(4)$ .

(6) פונקציה  $f$  מקיימת:  $f(1) = -3$ ,  $f'(1) = 3$ . מגדירים:  $g(x) = \frac{x \cdot f(x)}{x + f(x)}$ .

חשב את  $g(1)$  ואת  $g'(1)$ .

(7) פונקציה  $f$  מקיימת:  $f(-2) = 6$ ,  $f'(-2) = 2$ . מגדירים:  $g(x) = \sqrt{f^2(x) + 1}$ .

חשב את  $g(-2)$  ואת  $g'(-2)$ .

(8) פונקציה  $f$  מקיימת:  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$ ,  $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}$ . מגדירים:  $g(x) = 3x \cdot f(2x)$ .

חשב את  $g\left(\frac{1}{4}\right)$  ואת  $g'\left(\frac{1}{4}\right)$ .

(9) פונקציה  $f$  מקיימת:  $f(6) = \frac{2}{3}$ ,  $f'(6) = -\frac{3}{2}$ . מגדירים:  $g(x) = \frac{x+3 + f(x+3)}{f(2x)+3}$ .

חשב את  $g(3)$  ואת  $g'(3)$ .

**10** נתונה פונקציה המקיימת:  $f(8) = -3$ . מגדירים:  $g(x) = \frac{f(4x)+1}{f(x+6)+2}$ .

א. חשב את  $g(2)$ .

ב. חשב את  $f'(8)$  אם ידוע כי:  $g'(2) = 1$ .

ג. חשב את  $f'(8)$  אם ידוע כי:  $g'(2) = (f'(8))^2$  וכי  $f'(8) < 0$ .

**11** נתונה פונקציה המקיימת:  $f(3) = -2$ .

מגדירים:  $g(x) = \frac{x^2 \cdot f(x-2)}{f(2x-7)}$  וידוע כי  $g'(5) = -15$ .

חשב את  $g(5)$  ואת  $f'(3)$ .

**12** נתונה פונקציה שמקיימת:  $f(4) = \frac{1}{2}$ .

מגדירים:  $g(x) = x^2 \cdot f(x^2) + f^2(x^2)$ .

א. הבע את  $g'(x)$  באמצעות  $f$ .

ב. חשב את  $g(-2)$  ואת  $g(2)$  אם ידוע כי  $f'(4) = 1$ .

ג. חשב את  $f'(4)$  אם ידוע כי  $g'(2) = 11$  ו-  $f''(4) = \frac{1}{4}$ .

## תשובות סופיות:

- (1) א. 7      ב. 2      ג.  $-\frac{4}{3}$       ד. 1.
- (2)  $g(2) = 4, g'(2) = 4$
- (3) א.  $g(2) = 0$       ב.  $h(6) = -1$
- (4)  $g(3) = 19$
- (5)  $g(4) = 10, g'(4) = 6$
- (6)  $g(1) = 1.5, g'(1) = 3$
- (7)  $g(-2) = \sqrt{37}, g'(2) = \frac{12}{\sqrt{37}}$
- (8)  $g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{4}, g'\left(\frac{1}{4}\right) = 11$
- (9)  $g(3) = 1\frac{9}{11}, g'(3) = \frac{327}{242} = 1.351$
- (10) א.  $g(2) = 2$       ב.  $f'(8) = -\frac{1}{2}$       ג.  $f'(8) = -2$
- (11)  $g(5) = 25, f'(3) = -2$
- (12) א.  $g'(x) = 2x f(x^2) + 2x^3 f'(x^2) + 4x f'(x^2) f''(x^2)$
- ב.  $g(2) = 3, g'(-2) = 3$       ג.  $f'(4) = \frac{1}{2}$

# קורס מבוא למתמטיקה לכלכלנים

פרק 13 - חשבון דיפרנציאלי - הקשר שבין גרף הפונקציה וגרף הנגזרת

תוכן העניינים

1. כללי ..... (ללא ספר)



# קורס מבוא למתמטיקה לכלכלנים

פרק 14 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות מעריכיות

תוכן העניינים

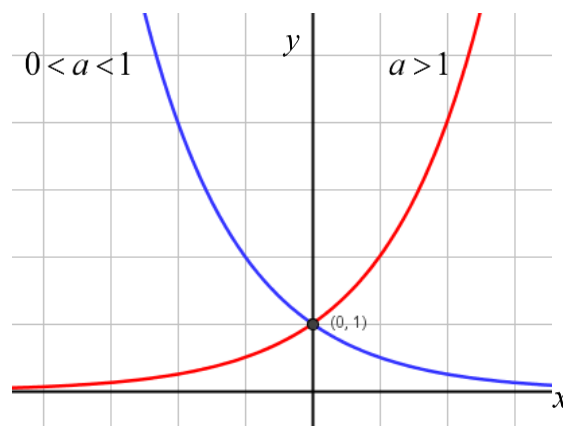
1. הנגזרת של פונקציה מעריכית ..... 173
2. שימושי הנגזרת ..... 177
3. חקירה של פונקציה מעריכית ..... 178

## הנגזרת של פונקציה מעריכית:

**סיכום כללי:**

**הגדרות כלליות:**

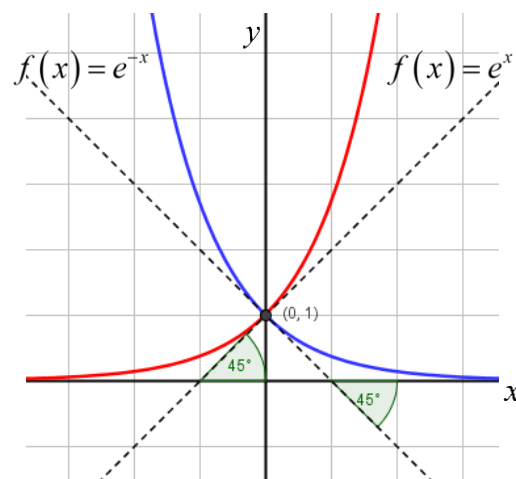
להלן תיאורים גרפיים של פונקציה מעריכית כללית מהצורה:  $f(x) = a^x$   
 עבור:  $a > 1$  ו-  $0 < a < 1$ :



**תכונות כלליות:**

1. הפונקציות מוגדרות לכל  $x$ .
2. הפונקציות תמיד חיוביות.
3. הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- $y$  בנקודה:  $(0, 1)$ .
4. עבור:  $a > 1$  הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור:  $0 < a < 1$  הפונקציה יורדת בכל ת.ה.

עבור הפונקציות  $f(x) = e^x$  ו-  $f(x) = e^{-x}$  נקבל:



## תכונות נוספות:

1. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = e^x$  בנקודת החיתוך עם ציר ה- $y$  הוא 1.
2. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = e^{-x}$  בנקודת החיתוך עם ציר ה- $y$  הוא -1.

## נגזרות של פונקציות מעריכיות:

| הפונקציה       | הנגזרת                                  |
|----------------|-----------------------------------------|
| $y = a^x$      | $y' = a^x \cdot \ln a$                  |
| $y = a^{f(x)}$ | $y' = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln a$ |
| $y = e^x$      | $y' = e^x$                              |
| $y = e^{f(x)}$ | $y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$             |

## תזכורת - כללי הגזירה:

| מספר כלל | הפונקציה                | תיאור          | הנגזרת                                                      |
|----------|-------------------------|----------------|-------------------------------------------------------------|
| 1.       | $y = a \cdot f(x)$      | מכפלה בקבוע    | $y' = a \cdot f'(x)$                                        |
| 2.       | $y = f(x) + g(x)$       | סכום פונקציות  | $y' = f'(x) + g'(x)$                                        |
| 3.       | $y = f(x) \cdot g(x)$   | מכפלת פונקציות | $y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$                  |
| 4.       | $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ | מנת פונקציות   | $y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ |
| 5.       | $y = f(g(x))$           | פונקציה מורכבת | $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$                                 |

## שאלות:

(1) גזור את הפונקציות הבאות (סכום פונקציות):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = 3e^x + e^{2x} + e^{-x} + 2x + 1 & \text{ב. } f(x) = e^{x^2-3x} + ex \\ \text{ג. } f(x) = 2^{3x} & \text{ד. } f(x) = 3^{x^2} + 4^{-x} \end{array}$$

(2) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלת פונקציות):

$$\text{א. } f(x) = x \cdot e^x \quad \text{ב. } f(x) = x^2 \cdot e^{4x} \quad \text{ג. } f(x) = (x+1) \cdot 2^x$$

(3) גזור את הפונקציות הבאות (מנת פונקציות):

$$\text{א. } f(x) = \frac{x^2}{e^x} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

(4) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציה מורכבת):

$$\text{א. } f(x) = 5(e^{2x} - 1)^3 \quad \text{ב. } f(x) = \sqrt{e^{2x} + e^{-2x}} \quad \text{ג. } f(x) = \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^x + 1}}$$

(5) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות שונות):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = e^{2x} & \text{ב. } f(x) = e^x + 1 \\ \text{ג. } f(x) = e^{\frac{1}{x}} & \text{ד. } f(x) = (x^2 + 1)e^x \\ \text{ה. } f(x) = e^{-x}(x^2 + 4x + 1) & \text{ו. } f(x) = e^{3x-2} \\ \text{ז. } f(x) = e^x \cdot \frac{1}{x} & \text{ח. } f(x) = x^3 e^{2x} \\ \text{ט. } f(x) = e^{-2x}(x+4) & \text{י. } f(x) = e^{2x+1}(1-x) \\ \text{יא. } f(x) = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} & \text{יב. } f(x) = \frac{x^3}{e^{3x}} \\ \text{יג. } f(x) = \frac{2+x^2}{e^{x^2}} & \text{יד. } f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^{-x} + e^x} \\ \text{טו. } f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^{-x}} & \text{טז. } f(x) = \frac{e^x}{1 - e^{x+1}} \end{array}$$

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } 3e^x + 2e^{2x} - e^{-x} + 2 \quad \text{ב. } (2x-3)e^{x^2-3x} + e \quad \text{ג. } 3\ln 2 \cdot 2^{3x} \quad \text{ד. } 2x \ln 3 \cdot 3^{x^2} - \ln 4 \cdot 4^{-x}$$

$$(2) \quad \text{א. } (1+x)e^x \quad \text{ב. } 2xe^{4x}(1+2x) \quad \text{ג. } 2^x(1+x \ln 2 + \ln 2)$$

$$(3) \quad \text{א. } \frac{x(2-x)}{e^x} \quad \text{ב. } \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$(4) \quad \text{א. } 30e^{2x}(e^{2x}-1)^2 \quad \text{ב. } \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}}} \quad \text{ג. } \frac{5e^{4x}+6e^{3x}}{2\sqrt{(e^x+1)^3}}$$

$$(5) \quad \text{א. } 2e^{2x} \quad \text{ב. } e^x \quad \text{ג. } -\frac{e^{1/x}}{x^2} \quad \text{ד. } (x+1)^2 e^x$$

$$\text{ה. } e^{-x}(-x^2-2x+3) \quad \text{ו. } 3e^{3x-2}$$

$$\text{ז. } \frac{e^x(x-1)}{x^2} \quad \text{ח. } x^2 e^{2x}(3+2x) \quad \text{ט. } -e^{-2x}(2x+7)$$

$$\text{י. } e^{2x+1}(1-2x)$$

$$\text{יא. } \frac{e^{-1/x}}{x^2} \quad \text{יב. } \frac{3x^2(1-x)}{e^{3x}} \quad \text{יג. } \frac{-2x(x^2+1)}{e^{x^2}}$$

$$\text{יד. } \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2} \quad \text{טו. } \frac{(x+1)^2}{e^{-x}} \quad \text{טז. } \frac{e^x}{(1-e^{x+1})^2}$$

## שימושי הנגזרת:

### שאלות:

- (6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = e^x$  בנקודה  $A(1, e)$ .
- (7) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = e^{2x} + xe^{-x}$  בנקודה שבה  $x = 0$ .
- (8) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה  $f(x) = (e+1)e^x - e^{2x}$  בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר  $y = e$ .
- (9) נתונה הפונקציה:  $y = e^{2x} + 3ex$ .  
 לפונקציה העבירו משיק דרך הנקודה שבה:  $x = 2$ .  
 מצא את משוואת המשיק.
- (10) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = a \cdot 3^{2x-1} + 3^{x-b}$  בנקודה  $(1, 15)$  הוא  $21 \ln 3$ .  
 מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

### תשובות סופיות:

- (6)  $y = ex$
- (7)  $y = 3x + 1$
- (8)  $y = (-e^2 + e)x + e^2$ ,  $y = (e-1)x + e$
- (9)  $y = 2e^4x + 3ex - 3e^4$
- (10)  $b = -1$ ,  $a = 2$

## חקירה של פונקציה מעריכית:

### שאלות:

(11) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } f(x) = \frac{2x-1}{e^x} & \text{ב. } f(x) = \frac{3}{e^x-1} & \text{ג. } f(x) = \frac{x+1}{e^x-5} \\
 \text{ד. } f(x) = \frac{1}{e^{2x}-3e^x+2} & \text{ה. } f(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^x} & \text{ו. } f(x) = \frac{\sqrt{e^x-1}}{5x-2} \\
 \text{ז. } f(x) = \sqrt{e^{2x}-4e^x+3}
 \end{array}$$

(12) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = x^2 e^x$ .

(13) מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{e^x}{x-2}$ .

(14) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{ax^2+bx+9}{e^x}$ .

הפונקציה משיקה לציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x=1.5$ .  
מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$  ואת נקודות הקיצון של הפונקציה.

(15) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 8^x + p \cdot 2^x + q$ . לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה  $(\log_2 3, -19)$ . מצא את ערכי הפרמטרים  $p$  ו- $q$ .

(16) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = e^{2x} + e^x$ .

(17) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}}$ .

(18) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{e^x + 5}{e^x - 1}$ .

(19) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x - 5}$ .

(20) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ .

(21) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^{2x} - 5e^x + 6}$ .

(22) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ .

(23) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{x^3 - 1}{e^x}$ .

(24) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{x-1}{e^{3x} - e}$ .

(25) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = (x-3)e^x$ .

(26) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ .

(27) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 + a}{be^x}$ . לפונקציה יש נקודת פיתול בנקודה  $\left(1, \frac{2}{e}\right)$ . מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$  ואת נקודת הפיתול השנייה של הפונקציה.



**(28)** חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים הבאים :

1. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
2. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
3. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
4. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

$$f(x) = (x^2 + 1)e^x \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = (x-1)e^x \quad \text{א.}$$

$$f(x) = e^{x^2-x} \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{4}x^2} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^{x+1}} \quad \text{ו.}$$

$$f(x) = \frac{2}{e^{x^2} + 1} \quad \text{ה.}$$

**(29)** נתונה הפונקציה  $f(x) = (x-3)e^x$  . חקור על פי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(30)** נתונה הפונקציה  $f(x) = e^{2x} - 8e^x + 6x + 10$  . חקור על פי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$  .
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(31)** נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{4x}{e^{0.5x^2}}$  . חקור על פי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(32)** נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$ . חקור על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(33)** נתונה הפונקציה  $f(x) = 2x \cdot 3^x$ . חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(34)** נתונה הפונקציה  $f(x) = 2e^{\frac{x}{x^2+1}}$ . חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- לאילו ערכי  $m$  יש למשוואה  $f(x) = m$  בדיוק פתרון אחד?

**(35)** נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ . חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- מציאת נקודות פיתול של הפונקציה.
- כתיבת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.

ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$(36) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \frac{e^{3x}}{12x^2 + 1}.$$

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. כתוב את תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$(37) \text{ שיפוע המשיק לגרף הפונקציה: } f(x) = \frac{1}{e^{3x^2+6x+k}} \text{ בנקודה שבה } x=1 \text{ הוא } -\frac{12}{e^{10}}.$$

- א. מצא את ערך הפרמטר  $k$  וכתוב את הפונקציה.
- ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
- ג. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ד. הוכח על סמך הסקיצה את אי-השוויון הבא:  $0 < \frac{1}{e^{3x^2+6x+1}} \leq e^2$ .

$$(38) \text{ נתונה הפונקציה הבאה: } f(x) = e^{2x} + ae^x + b. \text{ גוזרים את הפונקציה פעמיים}$$

$$\text{וידוע כי כאשר } x = \ln \frac{2}{3} \text{ הנגזרות מקיימות: } f'(x) + f''(x) = 8.$$

- א. מצא את  $a$ .
- משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא:  $y = 16x + 7 - 16 \ln 2$ .
- ב. מצא את שיעור ה- $x$  של נקודת ההשקה.
- ג. מצא את  $b$ .
- ד. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

$$(39) \text{ נתונות הפונקציות הבאות: } f(x) = 6x - e^x \text{ ו- } g(x) = ae^x - e^{2x} + b.$$

ידוע כי לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה אותו שיעור  $x$  וכי שתיהן נפגשות על ציר ה- $y$ .

- א. מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .
- ב. הראה כי לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה משותפים.

**(40)** לגרף הפונקציה:  $f(x) = ax^2 \cdot e^{-bx^2}$  יש נקודת קיצון:  $\left(2, \frac{4}{e}\right)$ ,  $a, b \neq 0$ .

- מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$  וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון הנוספות של הפונקציה וקבע את סוגן.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מעבירים ישר:  $y = k$ . באיזה תחום ערכים צריך להימצא  $k$  כדי שהישר יחתוך את גרף הפונקציה ב-4 נקודות שונות?

**(41)** לפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 - 6x - 7}{e^{ax-1}}$  יש קיצון בנקודה שבה:  $x = 1$ .

- מצא את ערך הפרמטר  $a$ .
- האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון נוספות? אם כן מצא אותן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(42)** הישר  $x = \sqrt{6}$  הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה:  $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 + m}$ .

- מצא את ערך הפרמטר  $m$  וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(43)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^3 \cdot e^{2x}$ .

- מצא את הנקודות המקיימות:  $f'(x) = 0$  וקבע כמה מהן הן נקודות קיצון.
- מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- בכמה נקודות חותך הישר  $y = -0.01$  את גרף הפונקציה?

44 נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = e^{2x} + ae^x + b$ . גוזרים את הפונקציה פעמיים

וידוע כי כאשר  $x = \ln \frac{2}{3}$  הנגזרות מקיימות:  $f'(x) + f''(x) = 12$ .

א. מצא את  $a$ .

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא:  $y = 22x + 28 - 22 \ln 2$ .

ב. מצא את שיעור ה- $x$  של נקודת ההשקה.

ג. מצא את  $b$ .

ד. האם הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$ ? אם כן מצא את הנקודות.

45 נתונה הפונקציה:  $f(x) = x \cdot a^x$ ,  $(a > 0)$ .

לפונקציה יש נקודת קיצון שבה:  $x = -\frac{1}{\ln 2}$ .

א. מצא את  $a$ .

ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

הנקודה שבה  $x = 2$  היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$

עם גרף הפונקציה:  $g(x) = x^2 \cdot 2^x - kx \cdot 2^x$ .

ג. מצא את  $k$ .

ד. מצא נקודה נוספת שבה הגרפים נחתכים.

46 נתונה הפונקציה:  $f(x) = 3^{2x} + 2 \cdot 3^{1-x}$ .

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה

עם ציר ה- $y$ .

ב. הוכח כי גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה- $x$ .

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

## תשובות סופיות:

$$(11) \quad \text{א. כל } x \quad \text{ב. } x \neq 0 \quad \text{ג. } x \neq \ln 5 \quad \text{ד. } x \neq \ln 2, x \neq 0 \quad \text{ה. כל } x$$

$$\text{ו. } 0 \leq x \neq \frac{2}{5} \quad \text{ז. } x \leq 0, x \geq \ln 3$$

$$(12) \quad \min(0,0), \max\left(-2, \frac{4}{e^2}\right)$$

$$(13) \quad \min(3, e^3)$$

$$(14) \quad \min(1.5, 0), \max(3.5, 0.483), b = -12, a = 4$$

$$(15) \quad p = -27, q = 35$$

$$(16) \quad y = 0$$

$$(17) \quad y = 0$$

$$(18) \quad x = 0, y = -5, y = 1$$

$$(19) \quad x = \ln 5, y = -\frac{1}{5}$$

$$(20) \quad y = -1, y = 1$$

$$(21) \quad (\ln 2, -1) : \text{נקודת אי הגדרה}, x = \ln 3, y = -\frac{1}{3}, y = 0$$

$$(22) \quad x = 0, y = 0$$

$$(23) \quad y = 0$$

$$(24) \quad x = \frac{1}{3}, y = 0$$

$$(25) \quad y = 0$$

$$(26) \quad (0,0) : \text{נקודת אי הגדרה}, x = 0$$

$$(27) \quad \left(3, \frac{10}{e^3}\right), a = 1, b = 1$$

$$(28) \quad \text{א. כל } x \quad \text{ב. } (0, -1), (1, 0) \quad \text{ג. } \min(0, -1) \quad \text{ד. עולה: } x > 0 \text{ יורדת: } x < 0$$

$$\text{ב. כל } x \quad \text{ג. } (0, 1) \quad \text{ד. עולה: } x < -1, x > -1 \quad \text{פיתול} \quad \left(-1, \frac{2}{e}\right)$$

$$\text{ג. כל } x \quad \text{ד. } (0, 0) \quad \text{ה. } \max\left(2, \frac{4}{e}\right), \min(0, 0), \max\left(-2, \frac{4}{e}\right)$$

$$\text{ז. עולה: } x < -2, 0 < x < 2 \text{ יורדת: } x > 2, -2 < x < 0$$

$$\text{ז. כל } x \quad \text{ח. } (0, 1) \quad \text{ט. } \min(0.5, e^{-0.25}) \quad \text{י. עולה: } x > 0.5 \text{ יורדת: } x < 0.5$$

- ה.1. כל  $x$     2.  $(0,1)$     3.  $\max(0,1)$     4. עולה:  $x < 0$  יורדת:  $x > 0$
- ו.1. כל  $x$     2.  $(0, 2e^{-1})$     3.  $\min(0, 2e^{-1})$     4. עולה:  $x > 0$  יורדת:  $x < 0$
- (29) א. כל  $x$     ב.  $\min(2, -e^2)$     ג. תחומי עלייה:  $x > 2$  תחומי ירידה:  $x < 2$
- ד.  $(3,0)$ ,  $(0,-3)$
- (30) א. כל  $x$     ב.  $\max(0,3)$ ,  $\min(\ln 3, 1.59)$     ג. תחומי עלייה:  $x > \ln 3$  או  $x < 0$  תחומי ירידה:  $0 < x < \ln 3$     ד.  $(0,3)$
- (31) א. כל  $x$     ב.  $\min\left(-1, -\frac{4}{e^{0.5}}\right)$ ,  $\max\left(1, \frac{4}{e^{0.5}}\right)$     ג. תחומי עלייה:  $-1 < x < 1$  תחומי ירידה:  $x > 1$  או  $x < -1$     ד.  $(0,0)$
- (32) א. כל  $x$     ב.  $\max\left(3, \frac{27}{e^3}\right)$     ג. עולה:  $x < 3$ , יורדת:  $x > 3$
- ד.  $(0,0)$
- (33) א. כל  $x$     ב.  $\min(-0.91, -0.67)$     ג. עולה:  $x > -0.91$  יורדת:  $x < -0.91$
- ד.  $(0,0)$
- (34) א. כל  $x$     ב.  $\max(1, 2\sqrt{e})$ ,  $\min\left(-1, \frac{2}{\sqrt{e}}\right)$     ג. עולה:  $-1 < x < 1$  יורדת:  $x < -1$ ,  $x > 1$
- ז.  $m = 2$ ,  $m = 2\sqrt{e}$ ,  $m = \frac{2}{\sqrt{e}}$     ח.  $y = 2$     ד.  $(0,2)$
- (35) א.  $x \neq 0$     ב.  $\min\left(\frac{1}{2}, \frac{e^2}{4}\right)$     ג. עולה:  $x > \frac{1}{2}$ , יורדת:  $x < \frac{1}{2}$     ד. אין
- (36) א. כל  $x$     ב.  $\max\left(\frac{1}{6}, \frac{3\sqrt{e}}{4}\right)$ ,  $\min\left(\frac{1}{2}, \frac{e^{1.5}}{4}\right)$     ג. עולה:  $x > \frac{1}{2}$ ,  $x < \frac{1}{6}$  יורדת:  $x > \frac{1}{6}$ ,  $x < \frac{1}{2}$
- ד.  $\frac{1}{6} < x < \frac{1}{2}$     ד.  $(0,1)$
- (37) א.  $k=1$ ,  $f(x) = \frac{1}{e^{3x^2+6x+1}}$     ב.  $(-1, e^2)$     ד. ניתן לראות עפ"י הגרף כי ערך הפונקציה  $f(x)$  נמצא בתחום  $0 < f(x) \leq e^2$
- (38) א.  $a=4$     ב.  $x = \ln 2$     ג.  $b = -5$     ד.  $(0,0)$
- (39) א.  $a=12$ ,  $b=-12$     ב. עולות:  $x < \ln 6$  יורדות:  $x > \ln 6$

(40) א.  $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{4}x^2}$ ,  $a=1$ ,  $b=0.25$  ב.  $\max\left(-2, \frac{4}{e}\right)$ ,  $\min(0,0)$  ג.

ג.  $(0,0)$  ה.  $0 < k < \frac{4}{e}$

(41) א.  $a = \frac{1}{3}$  ב. כן:  $\left(11, \frac{48}{e^{\frac{2}{3}}}\right)$  ג. עולה:  $1 < x < 11$  יורדת:  $x < 1, x > 11$

ד.  $(-1,0)$ ,  $(7,0)$ ,  $(0,-7e)$

(42) א.  $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 - 6}$ ,  $m = -6$  ב.  $\max\left(-2, -\frac{1}{2e^4}\right)$ ,  $\min\left(3, \frac{e^6}{3}\right)$  ג.  $\left(0, -\frac{1}{6}\right)$

(43) א.  $x = 0, -1.5$ . נקודת הקיצון היא:  $\min\left(-1.5, -3\frac{3}{8}e^{-3}\right)$  ב.  $y = 0$

ד. 2 נקודות.

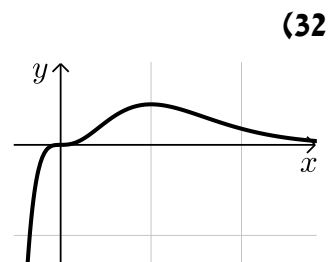
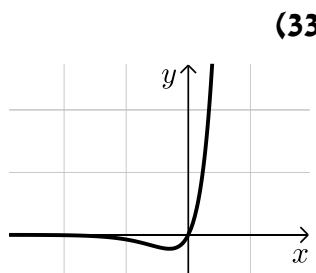
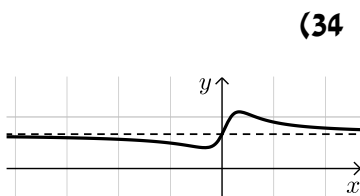
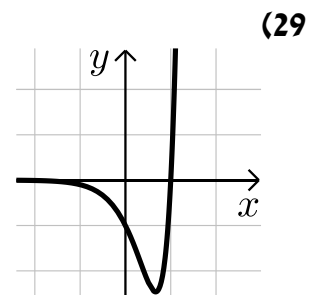
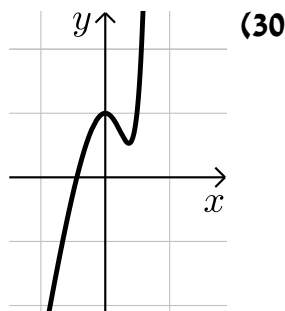
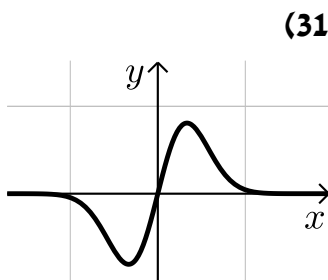
(44) א.  $a = 7$  ב.  $x = \ln 2$  ג.  $b = 10$  ד. לא.

(45) א.  $a = 2$  ב. עולה:  $x > -\frac{1}{\ln 2}$  יורדת:  $x < -\frac{1}{\ln 2}$  ג.  $k = 1$

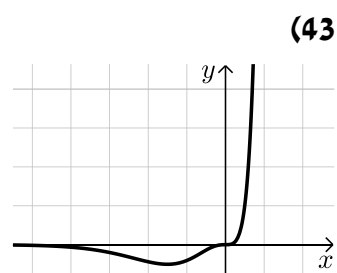
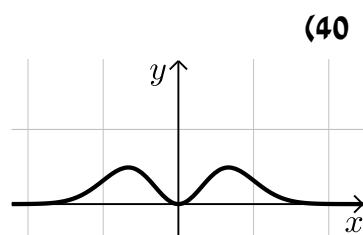
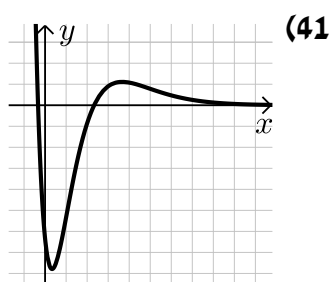
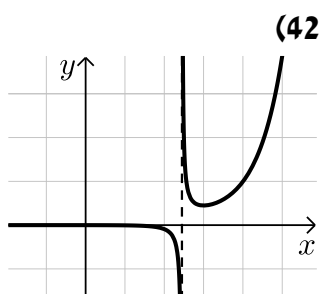
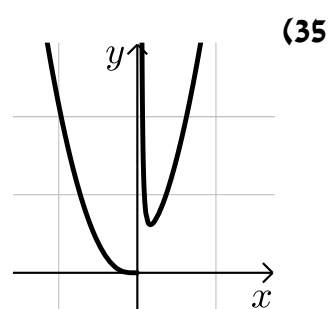
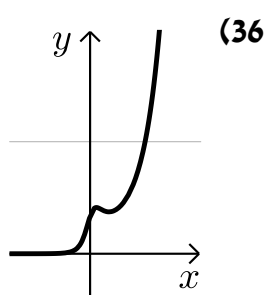
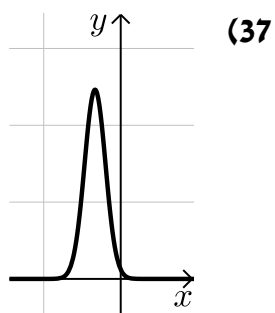
ד.  $(0,0)$

(46) א.  $y = -x \ln 81 + 7$  ג.  $\min\left(\frac{1}{3}, \sqrt[3]{243}\right)$

סקיצות לשאלות החקירה:







# קורס מבוא למתמטיקה לכלכלנים

פרק 15 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות

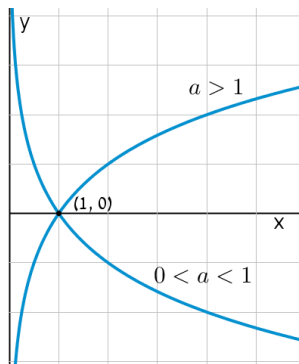
תוכן העניינים

1. הנגזרת של פונקציה לוגריתמית ..... 189
2. שימושי הנגזרת ..... 194
3. חקירה של פונקציה לוגריתמית ..... 195

## הנגזרת של פונקציה לוגריתמית:

### סיכום כללי:

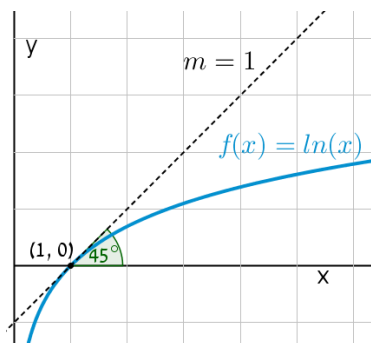
### הגדרות כלליות:



להלן תיאורים גרפיים של פונקציה לוגריתמית כללית מהצורה:  $f(x) = \log_a x$  עבור  $a > 1$  ו-  $0 < a < 1$ :

### תכונות כלליות:

- לפונקציות תחום הגדרה  $x > 0$ .
- הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- $x$  בנקודה  $(1, 0)$ .
- עבור  $a > 1$  הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור  $0 < a < 1$  הפונקציה יורדת בכל ת.ה.



עבור הפונקציות  $f(x) = \ln x = \log_e x$  נקבל כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$  הוא 1:

### תחום הגדרה של פונקציה לוגריתמית:

תחום ההגדרה של פונקציה לוגריתמית מהצורה:  $y = \log(f(x))$  הוא:  $f(x) > 0$ .

## נגזרות של פונקציות לוגריתמיות:

| הפונקציה          | הנגזרת                          |
|-------------------|---------------------------------|
| $y = \log_a x$    | $y' = \frac{1}{x \ln a}$        |
| $y = \log_a f(x)$ | $y' = \frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$ |
| $y = \ln x$       | $y' = \frac{1}{x}$              |
| $y = \ln f(x)$    | $y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$       |

## שאלות:

(1) גזור את הפונקציות הבאות (גזירה לוגריתמית יסודית עם ביטויים פנימיים שונים):

א.  $f(x) = 3 \ln x + 4 \ln(x+2) - \ln(5x-1)$     ב.  $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$

ג.  $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$     ד.  $f(x) = \ln(e^x + 1)$

ה.  $f(x) = \ln(\cos x)$     ו.  $f(x) = \log_2 x + 5 \log_3(2x-1)$

(2) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלה ומנה של פונקציות):

א.  $f(x) = x \ln x$     ב.  $f(x) = (3x+1)^2 \ln x$     ג.  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

ד.  $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2}$     ה.  $f(x) = \sqrt{\ln x + x}$

(3) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציות מורכבות):

א.  $f(x) = \ln^3 x$     ב.  $f(x) = 3 \ln^2 x$

ג.  $f(x) = x^2 \ln^2 x$     ד.  $f(x) = \frac{\ln^2 x + 1}{(\ln x + 1)^2}$

(4) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות שונות):

- |                                  |                                     |
|----------------------------------|-------------------------------------|
| א. $f(x) = \ln(x+2)$             | ב. $f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3$   |
| ג. $f(x) = x^2 \ln x$            | ד. $f(x) = x^3 \ln x$               |
| ה. $f(x) = \ln e^{2x}$           | ו. $f(x) = e^x \ln x$               |
| ז. $f(x) = e^{-x^2} \ln x$       | ח. $f(x) = x^2(2 \ln x - 1)$        |
| ט. $f(x) = \ln(x^2)$             | י. $f(x) = \ln(x^4)$                |
| יא. $f(x) = (\ln x)^4$           | יב. $f(x) = x \ln x - \ln x^2$      |
| יג. $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ | יד. $f(x) = \ln \sqrt{x}$           |
| טו. $f(x) = \sqrt{\ln x}$        | טז. $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ |

(5) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות אתגר):

- |                                        |                                          |
|----------------------------------------|------------------------------------------|
| א. $f(x) = \ln \frac{x+2}{x}$          | ב. $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$          |
| ג. $f(x) = \ln \frac{x-3}{x+3}$        | ד. $f(x) = \ln \frac{(x-5)^3}{(x+1)^2}$  |
| ה. $f(x) = \ln \sqrt{x^2 - 1}$         | ו. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$    |
| ז. $f(x) = e^{\sqrt{\ln x}}$           | ח. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}}$     |
| ט. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ | י. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+5x}{1-5x}}$ |
| יא. $f(x) = \frac{\ln \sqrt[3]{x}}{x}$ | יב. $f(x) = \frac{(\ln x)^3}{x}$         |
| יג. $f(x) = \frac{x}{\ln(x^2)}$        | יד. $f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x}$ |
| טו. $f(x) = \frac{x}{\ln^4 x}$         |                                          |

## תשובות סופיות:

(1) א.  $f'(x) = \frac{3}{x} + \frac{4}{x+2} - \frac{5}{5x-1}$  ב.  $f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x}$  ג.  $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)(x+1)}$

ד.  $f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$  ה.  $f'(x) = -\tan x$  ו.  $f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} + \frac{10}{(2x-1) \ln 3}$

(2) א.  $f'(x) = \ln x + 1$  ב.  $f'(x) = (3x+1) \left( 6 \ln x + \frac{3x+1}{x} \right)$  ג.  $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$

ד.  $f'(x) = \frac{4}{x(\ln x+2)^2}$  ה.  $f'(x) = \frac{1+x}{2x\sqrt{\ln x+x}}$

(3) א.  $f'(x) = \frac{3 \ln^2 x}{x}$  ב.  $f'(x) = \frac{6 \ln x}{x}$  ג.  $f'(x) = 2x \ln x (\ln x + 1)$

ד.  $f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{x(\ln x + 1)^3}$  ה. 2

(4) א.  $\frac{1}{x+2}$  ב.  $\frac{2 \ln x + 2}{x}$  ג.  $x(2 \ln x + 1)$

ד.  $x^2(3 \ln x + 1)$  ה.  $e^x \left( \ln x + \frac{1}{x} \right)$  ו.  $\frac{4}{x}$

ז.  $e^{-x^2} \left( \frac{1}{x} - 2x \ln x \right)$  ח.  $4x \ln x$  ט.  $\frac{2}{x}$

י.  $\frac{4(\ln x)^3}{x}$  יא.  $\frac{2 \ln x - \ln^2 x}{x^2}$  יב.  $\ln x + 1 - \frac{2}{x}$

יג.  $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$  יד.  $\frac{1}{2x}$  יו.  $\frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$

(5) א.  $-\frac{2}{x(x+2)}$  ב.  $\frac{2}{x^2-1}$  ג.  $\frac{6}{x^2-9}$

ד.  $\frac{3}{x-5} - \frac{2}{x+1}$  ה.  $\frac{x}{x^2-1}$  ו.  $\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{x\sqrt{x^2+a^2}+x^2+a^2}$

ז.  $\frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}$  ח.  $\frac{1}{4-2x}$  ט.  $\frac{1}{x^2-1}$

$$\text{י.ב.} \quad \frac{3\ln^2 x - \ln^3 x}{x^2}$$

$$\text{ט.ו.} \quad \frac{\ln x - 4}{\ln^5 x}$$

$$\text{י.א.} \quad \frac{1 - 3\ln \sqrt[3]{x}}{3x^2}$$

$$\text{י.ד.} \quad \frac{2(\ln^4 x - 1)}{x \ln^3 x}$$

$$\text{י.} \quad \frac{5}{1 - 25x^2}$$

$$\text{י.ג.} \quad \frac{\ln(x^2) - 2}{\ln^2(x^2)}$$

## שימושי הנגזרת:

### שאלות:

(6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \ln x$  בנקודה  $A(e, 1)$ .

(7) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{\ln^2 x + a}{\ln x + b}$  בנקודה  $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$  הוא  $\frac{e}{3}$ .  
מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

(8) הגרפים של הפונקציות  $f(x) = \ln x$  ו- $g(x) = 1 - f(x)$  נחתכים בנקודה  $A$  ברביע הראשון.  
בנקודה  $A$  העבירו משיק ל- $f(x)$ .  
מצא את משוואת המשיק והוכח שמשיק זה עובר דרך הראשית.

(9) לפונקציה  $g(x) = \frac{\ln x^2}{x}$  העבירו משיק בנקודה שבה  $x = e^2$ .  
מצא את משוואת המשיק.

(10) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $y = x \ln(x^2 + 1)$  בנקודה שבה  $x = 1$ .

### תשובות סופיות:

$$(6) \quad y = \frac{1}{e}x$$

$$(7) \quad a = 2, b = -2$$

$$(8) \quad y = \frac{1}{e}x$$

$$(9) \quad y = -\frac{2}{e^4}x + \frac{6}{e^2}$$

$$(10) \quad y = \ln 2 \cdot x + x - 1$$



## חקירה של פונקציה לוגריתמית:

### שאלות:

11 מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

- א.  $f(x) = \ln x$       ב.  $f(x) = \ln(x^2)$   
 ג.  $f(x) = \log_3(x^2 - 8x - 20)$       ד.  $f(x) = \ln(e^x - 4)$   
 ה.  $f(x) = \frac{x-1}{\ln x - 1}$       ו.  $f(x) = \frac{1}{\ln^2 x - 2 \ln x - 3}$   
 ז.  $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$

12 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = 2 \ln x - x^2$ .

13 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = x^2 \ln x$ .

14 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{\sqrt{2 \ln x - 1}}{x}$ .

15 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$ .

16 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{a \ln x + b}{x}$ . הנקודה  $\left(e^2, \frac{1}{e^2}\right)$  היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

17 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{a \ln^2 x + b \ln x}{(\ln x + 1)^2}$ . הנקודה  $\left(\sqrt[3]{e}, -\frac{1}{8}\right)$  היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

18 מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \ln(x-3)$ .

19 מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{1}{\ln x - 1}$ .

(20) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{2 \ln x - 1}{\ln x + 1}$ .

(21) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln^2 x - 4}$ .

(22) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

(23) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\ln^2 x + 1}$ .

(24) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = x \ln x + 2$ .

(25) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ . מצא את נקודת הפיתול של הפונקציה.

(26) חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים הבאים:

- i. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ii. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- iii. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- iv. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

א.  $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3 \ln x$       ב.  $y = x \ln x$

ג.  $y = x \ln x - x$       ד.  $y = \sqrt{x} \ln x$

ה.  $y = x^2 \ln x$       ו.  $y = \ln(x^2 + 1)$

(27) נתונה הפונקציה  $f(x) = 2x \ln^2 x$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(28) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x}{\ln x - 1}$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- תחום הגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא לאלו ערכי  $k$  הישר  $y = k$  חותך את הפונקציה בשתי נקודות.

(29) נתונה הפונקציה  $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- תחום הגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(30) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{\ln x}$ .

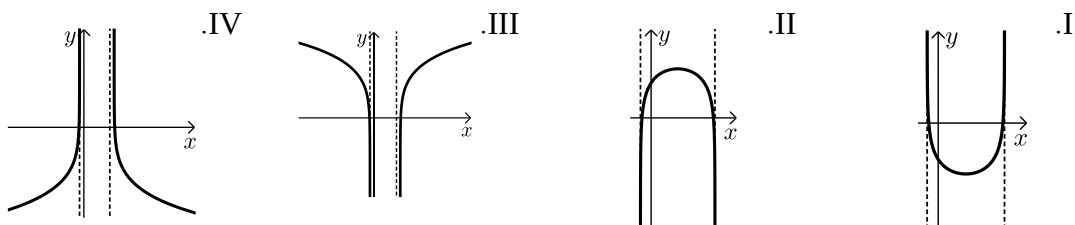
- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- הוכח כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.
- מגדירים פונקציה נוספת:  $g(x) = \ln x$ .
- מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.
- הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$  והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה  $g(x)$ . ידוע כי לנקודות A ו-B אותו שיעור  $x$ ,  $(x_A = x_B)$ .
- מצא את שיעור ה- $x$  של שתי הנקודות אם ידוע כי המשיקים לגרפים של הפונקציות בנקודות אלו מקבילים.

**(31)** נתונה שתי הפונקציות הבאות:  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ ,  $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

- א. קבע אילו מהמשפטים הבאים נכונים ואלו שגויים.  
 נמק זאת ע"י חישוב מתאים ותקן במשפטים השגויים את הטעות.
- לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.
  - לשתי הפונקציות יש נקודת קיצון מאותו סוג ובעלות שיעור  $x$  זהה.
  - לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה זהים.
  - לשתי הפונקציות יש אסימפטוטות אנכיות.
- ב. בוחרים באקראי שתי נקודות, אחת על כל גרף, כך ששיעור ה- $x$  שלהן זהה. הוכח כי מכפלת שיעורי ה- $y$  של כל זוג נקודות כאלו שווה ל-1.

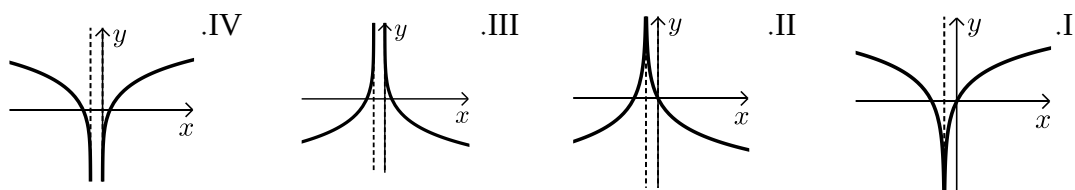
**(32)** נתונה הפונקציה הבאה:  $y = \ln(x^2 - 6x - 7)$ .

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.  
 ב. מהן האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לציר ה- $y$ ?  
 ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.  
 ד. לפניך 4 גרפים: I, II, III, ו-IV. איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.



**(33)** נתונה הפונקציה:  $y = \ln(x^2 + 2x + 1)$ .

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.  
 ב. מהי האסימפטוטה של הפונקציה המקבילה לציר ה- $y$ ?  
 ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.  
 ד. לפניך 4 גרפים: I, II, III, ו-IV. איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.



- ה. העזר בגרף שבחרת וכתוב את תחומי השליליות של הפונקציה.

34) לפניך הפונקציה הבאה :  $f(x) = \ln(1 - \ln x)$  .

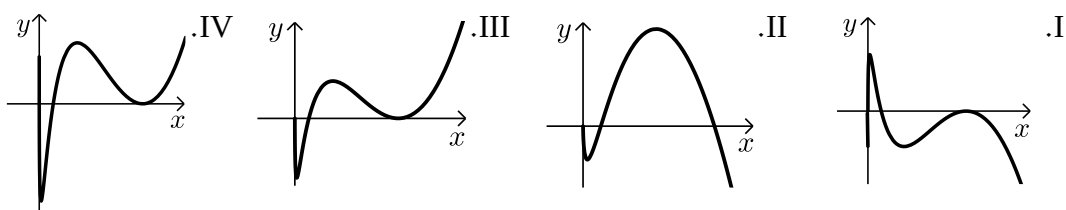
- מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- הוכח כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  .
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

35) נתונה הפונקציה הבאה :  $y = \ln \frac{2x+1}{x-1}$  .

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  .
- הראה כי גרף הפונקציה יורד בכל תחום הגדרתו.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

36) נתונה הפונקציה הבאה :  $f(x) = x(\ln^3 x + 2\ln^2 x)$  .

- הראה כי נגזרת הפונקציה היא :  $f'(x) = \ln^3 x + 5\ln^2 x + 4\ln x$  .
- מצא את התחום בו הפונקציה עולה.
- ענה על השאלות הבאות :
  - מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$  .
  - מצא את התחום בו הפונקציה חיובית.
- לפניך 4 גרפים. קבע איזה מהם מתאר את הפונקציה  $f(x)$  ונמק את בחירתך.



37) נתונה הפונקציה :  $f(x) = \ln^3 x - 3\ln x$  .

- מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$  .
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הפונקציה  $g(x) = \ln x$  .

(38) ענה על הסעיפים הבאים :

א. פתור את המשוואה הבאה :  $\ln(x+e) - \ln(x\sqrt{e}) = \ln 2 - 0.5$

נתונה הפונקציה :  $f(x) = \ln(x+e) - \ln(x\sqrt{e})$

ב. הראה כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה :  $x=e$ .

(39) נתונה הפונקציה הבאה :  $y = \frac{x+a}{\ln(x+a)}$  ,  $a$  פרמטר חיובי,  $a \neq 1$ .

א. הבע באמצעות  $a$  את :

i. תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. הנקודה המקיימת  $y' = 0$ .

iii. נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

iv. האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.

ב. ידוע כי גרף הפונקציה עולה רק בתחום :  $x > e-2$ . מצא את  $a$ .

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום  $x > -1$ .

ד. נתון הישר :  $y = k$ . מצא בסקיצה את תחום הערכים של  $k$  עבורו לישר ולגרף הפונקציה לא תהיה אף נקודה משותפת.

(40) נתונה הפונקציה הבאה :  $y = \ln x + \frac{1}{x}$

א. ענה על הסעיפים הבאים :

i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ii. יש לגרף הפונקציה אסימפטוטה מקבילה לציר  $y$ ?

אם כן מצא אותה.

ב. מצא את נקודת הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגה.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של גרף הפונקציה.

## תשובות סופיות:

$$(11) \quad \text{א. } x > 0 \quad \text{ב. } x \neq 0 \quad \text{ג. } x > 10 \text{ או } x < -2 \quad \text{ד. } x > \ln 4$$

$$\text{ה. } 0 < x \neq e \quad \text{ו. } x > 0 \text{ וגם } x \neq e^3, e^{-1} \quad \text{ז. } x \geq e$$

$$(12) \quad \max(1, -1)$$

$$(13) \quad \min\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right)$$

$$(14) \quad \min(\sqrt{e}, 0) \text{ קצה, } \max\left(e, \frac{1}{e}\right)$$

$$(15) \quad \min(4, -1)$$

$$(16) \quad a = 1, b = -1$$

$$(17) \quad a = 1, b = -1$$

$$(18) \quad x = 3$$

$$(19) \quad \text{נקודת אי הגדרה } (0, 0), x = e, y = 0$$

$$(20) \quad \text{נקודת אי הגדרה } (0, 2), x = \frac{1}{e}, y = 2$$

$$(21) \quad \text{נקודת אי הגדרה } \left(e^2, \frac{1}{4}\right), (0, 0); x = \frac{1}{e^2}, y = 0$$

$$(22) \quad x = 0, y = 0$$

$$(23) \quad \text{נקודת אי הגדרה } (0, 0)$$

$$(24) \quad \text{נקודת אי הגדרה } (0, 2)$$

$$(25) \quad \left(\sqrt{e^3}, \frac{3}{2\sqrt{e^3}}\right)$$

$$(26) \quad \text{א. i. } x > 0 \quad \text{iii. } \max(1, -3.5), \min(3, \ln 27 - 7.5)$$

$$\text{iv. עולה: } 0 < x < 1, x > 3 \quad \text{יורדת: } 1 < x < 3 \quad \text{ב. i. } x > 0 \quad \text{ii. } (1, 0)$$

$$\text{iii. } \min(e^{-1}, -e^{-1}) \quad \text{iv. עולה: } x > e^{-1} \quad \text{יורדת: } 0 < x < e^{-1}$$

$$\text{ג. i. } x > 0 \quad \text{ii. } (e, 0) \quad \text{iii. } \min(1, -1) \quad \text{iv. עולה: } x > 1 \quad \text{יורדת: } 0 < x < 1$$

$$\text{ד. i. } x > 0 \quad \text{ii. } (1, 0) \quad \text{iii. } \min\left(e^{-2}, -\frac{2}{e}\right) \quad \text{iv. עולה: } x > e^{-2} \quad \text{יורדת: } 0 < x < e^{-2}$$

ה. i.  $x > 0$  ii.  $(1, 0)$  iii.  $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right)$  iv. עולה:  $x > \frac{1}{\sqrt{e}}$  יורדת:  $0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$

ו. i. כל  $x$  ii.  $(0, 0)$  iii.  $\min(0, 0)$  iv. עולה:  $x > 0$  יורדת:  $x < 0$

(27) א.  $x > 0$  ב.  $\max\left(\frac{1}{e^2}, \frac{8}{e^2}\right), \min(1, 0)$

ג. עלייה:  $x > 1$  או  $0 < x < \frac{1}{e^2}$ , ירידה:  $\frac{1}{e^2} < x < 1$  ד.  $(1, 0)$

(28) א.  $0 < x \neq e$  ב.  $\min(e^2, e^2)$  ג. עלייה:  $x > e^2$ , ירידה:  $0 < x < e^2$

ו.  $k > e^2$  ד. אין

(29) א.  $x > 0$  ב.  $\min(4, -1)$  ג. עלייה:  $x > 4$ , ירידה:  $0 < x < 4$

ד.  $(1, 0)$ ,  $(16, 0)$

(30) א.  $x \geq 1$  ב. מתקבל:  $f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} > 0$  ג.  $(e, 1)$ ,  $(1, 0)$

ד.  $x = \sqrt[4]{e}$

(31) א. i. לא נכון. תחום ההגדרה של  $f(x)$  הוא:  $x > 0, x \neq 1$  ותחום ההגדרה של  $g(x)$  הוא:  $x > 0$

ii. לא נכון. לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה  $x = e$  אך עבור  $f(x)$  מדובר במינימום ועבור  $g(x)$  מדובר במקסימום.

iii. לא נכון. עבור  $f(x)$ : עולה:  $x > e$  יורדת:  $0 < x < e, x \neq 1$

ועבור  $g(x)$ : עולה:  $0 < x < e$  יורדת:  $x > e$  iv. נכון.

ב. לגבי כל נקודה נאמר כי שיעור ה- $y$  שלה הוא:  $y = \frac{x}{\ln x}$  ו- $y = \frac{\ln x}{x}$

נכפול:  $y = \frac{x}{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x} = 1$

(32) א.  $x < -1, x > 7$  ב.  $x = -1, 7$  ג. עולה:  $x > 7$  יורדת:  $x < -1$

ד. III. הסבר: באיורים I ו-II גרף הפונקציה לא בתחום. באיור IV תחומי העלייה והירידה הפוכים.

(33) א.  $x \neq -1$  ב.  $x = -1$  ג. עולה:  $x > -1$  יורדת:  $x < -1$

ד. I. הסבר: באיור II תחומי העלייה והירידה הפוכים.

באיורים III ו-IV יש אסימפטוטה מיותרת. ה.  $x \neq -1, -2 < x < 0$



(34) א.  $0 < x < e$ . (שימו לב כי תנאי ת.ה. הם:  $1 - \ln x > 0$  וגם  $x > 0$ ).

ב.  $f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{1 - \ln x} = -\frac{1}{x(1 - \ln x)} < 0$ . ולכן הפונקציה יורדת בת.ה.  
ג.  $(1, 0)$ .

(35) א.  $x < -\frac{1}{2}, x > 1$ . ב.  $x = -\frac{1}{2}, 1$ . ג.  $(-2, 0)$ .

ד. מתקבל:  $y' = \frac{-3}{(2x+1)(x-1)} < 0$ .

(36) ב.  $x > 1, e^{-4} < x < e^{-1}$ .

ג. i. 2 נקודות והן:  $(e^{-2}, 0)$ ,  $(1, 0)$ . הנקודה שבה:  $x = 0$  לא קיימת עקב ת.ה.

ii.  $x \neq 1, x > e^{-2}$ . ד. III – בראשית הצירים יש חור ולא אסימפטוטה. שאר הנתונים כפי שהתקבלו בסעיפים הקודמים.

(37) א.  $x > 0$ . ב.  $(e^{-\sqrt{3}}, 0)$ ,  $(e^{\sqrt{3}}, 0)$ ,  $(1, 0)$ . ג.  $\min(e, -2)$ ,  $\max(e^{-1}, 2)$ .  
ה.  $(e^2, 2)$ ,  $(e^{-2}, -2)$ ,  $(1, 0)$ .

(38) א.  $x = e$ . ב. מתקבל:  $y' = \frac{-e}{x(x+e)} < 0$ . ג.  $y = -\frac{1}{2e}x + \ln 2$ .

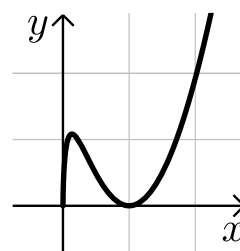
(39) א. i.  $x > -a, x \neq 1-a$ . ii.  $(e-a, e)$ . iii.  $\left(0, \frac{a}{\ln a}\right)$ .

iv.  $x = 1-a$ . ב.  $a = 2$ . ד.  $k < e$ .

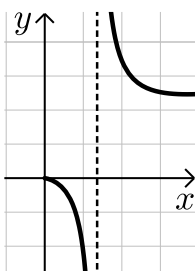
(40) א. i.  $x > 0$ . ii.  $x = 0$ . ב.  $\min(1, 1)$ . ג. עולה:  $x > 1$ , יורדת:  $0 < x < 1$ .

סקיצות לשאלות:

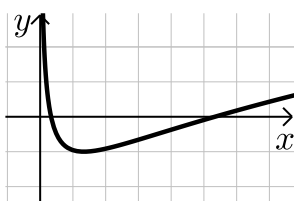
(27)



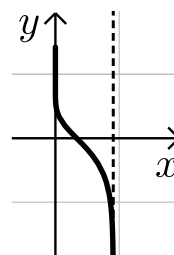
(28)



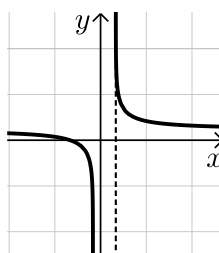
(29)



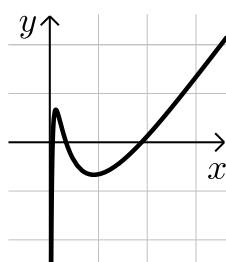
(34)



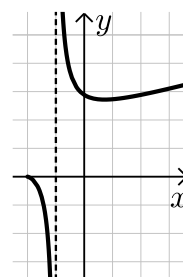
(35)



(37)



(39)



# קורס מבוא למתמטיקה לכלכלנים

פרק 16 - חשבון אינטגרלי - האינטגרל הכללי

תוכן העניינים

1. חישובי אינטגרלים ..... 205
2. מציאת פונקציה קדומה ..... 210

## חישובי אינטגרלים:

### סיכום כללי:

#### הגדרה וכללי האינטגרציה:

- כלל האינטגרציה של פונקציה פולינומית:  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$

- עבור מקדם קבוע  $a$  נקבל:  $\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$

- כללי האינטגרציה של פונקציות טריגונומטריות:

$$\int \sin x dx = -\cos x + c, \int \cos x dx = \sin x + c, \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c, \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

### שאלות:

#### (1) מצא את האינטגרלים הבאים:

א.  $\int x^3 dx$       ב.  $\int 12x^5 dx$

ג.  $\int x^4 dx$       ד.  $\int 2x^3 dx$

ה.  $\int \frac{2}{3} x^5 dx$       ו.  $\int 7 dx$

ז.  $\int \left( \frac{5}{6} x^4 + 16x^3 - \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{1}{3} \right) dx$       ח.  $\int \left( \frac{4x^3}{5} - ax^2 - \frac{2ax}{b} + b \right) dx$

#### (2) מצא את האינטגרלים הבאים:

א.  $\int x^{-3} dx$       ב.  $\int \frac{1}{x^3} dx$

ג.  $\int \left( \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \frac{a}{x^3} + \frac{x}{a} \right) dx$       ד.  $\int \frac{2x^3 + x - 2}{x^3} dx$

(3) מצא את האינטגרלים הבאים :

$$\begin{array}{ll} \text{א.} \int x^{\frac{1}{2}} dx & \text{ב.} \int \sqrt{x} dx \\ \text{ג.} \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx & \text{ד.} \int \left( \frac{4}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x} \right) dx \end{array}$$

(4) מצא את האינטגרלים הבאים :

$$\begin{array}{lll} \text{א.} \int (5x-1)^3 dx & \text{ב.} \int 3(2-7x)^4 dx & \text{ג.} \int \frac{18}{(6x+5)^2} dx \\ \text{ד.} \int \frac{1}{\sqrt{6x-3}} dx & \text{ה.} \int \sqrt{ax+b} dx \end{array}$$

(5) מצא את תוצאת החילוק :

$$\begin{array}{ll} \text{א.} \frac{x^2-5x-14}{x+2} = & \text{ב.} \frac{x^3+x^2+3x-5}{x-1} = \\ \text{ג.} \frac{x^4+x^3-x^2+14x-3}{x+3} = & \text{ד.} \frac{x^3-4x^2+9}{x-3} = \\ \text{ה.} \frac{x^3+5x^2-4x-20}{x+5} = \end{array}$$

(6) מצא את האינטגרלים הבאים :

$$\begin{array}{ll} \text{א.} \int \frac{x^2-5x-14}{x+2} dx & \text{ב.} \int \frac{x^3+x^2+3x-5}{x-1} dx \\ \text{ג.} \int \frac{x^4+x^3-x^2+14x-3}{x+3} dx & \text{ד.} \int \frac{x^3-4x^2+9}{x-3} dx \\ \text{ה.} \int \frac{x^3+5x^2-4x-20}{x+5} dx & \text{ו.} \int \frac{2x^5+x^4-4x^2+1}{2x+1} dx \end{array}$$

(7) מצא את האינטגרלים הבאים :

$$\begin{array}{ll} \text{א.} \int -\frac{2x}{(x^2-1)^2} dx & \text{ב.} \int \frac{x^2}{(x^3+6)^2} dx \\ \text{ג.} \int \frac{x-2}{(x^2-4x+1)^2} dx & \text{ד.} \int \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} dx \\ \text{ה.} \int \frac{6x-3}{\sqrt{x-x^2}} dx & \text{ו.} \int 8x(x^2+1)^3 dx \\ \text{ז.} \int (2-x^2)(6x-x^3)^2 dx \end{array}$$

(8) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\text{א. } \int \left( \sin x - 3 \cos x + \frac{4}{\cos^2 x} + 5 \right) dx$$

$$\text{ב. } \int \left( \cos 3x - 2 \sin 4x + \frac{4}{\cos^2 3x} \right) dx$$

$$\text{ג. } \int \left( \sin(\pi - x) + \frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x} \right) dx$$

(9) חשב את האינטגרלים הבאים (שימוש בזהויות) :

$$\text{א. } \int (2 \sin x \cos x) dx \quad \text{ב. } \int (\sin 3x \cos 3x) dx$$

$$\text{ג. } \int (\sin^4 x - \cos^4 x) dx \quad \text{ד. } \int (\sin^2 x) dx$$

(10) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\text{א. } \int \left( \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \right) dx \quad \text{ב. } \int \left( \frac{\sin x}{\cos^2 x} \right) dx$$

$$\text{ג. } \int (\cos x \sin^2 x) dx$$

(11) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\text{א. } \int \left( \sin 2x - 4 \cos \frac{x}{3} \right) dx$$

$$\text{ב. } \int \frac{1}{\cos^2 4x} dx$$

$$\text{ג. } \int \frac{1}{\sin^2 10x} dx$$

$$\text{ד. } \int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$$

$$\text{ה. } \int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx$$

$$\text{ו. } \int (\cos x + \sin x)^2 dx$$

$$\text{ז. } \int (\sin x \cos x \cos(2x)) dx$$

$$\text{ח. } \int \tan^2 x dx$$

$$\text{ט. } \int \frac{1}{(\sin x \cos x)^2} dx$$

$$\text{י. } \int \cos^2 x dx$$

$$\text{יא. } \int \sin^2 4x dx$$

(12) חשב את ערכי האינטגרלים הבאים (שאלות אתגר):

$$\text{א. } \int (\cos^4 x + \sin^4 x) dx \quad \text{ב. } \int \cos^4 x dx$$

$$\text{ג. } \int \sin^4 4x dx \quad \text{ד. } \int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx$$

$$\text{ה. } \int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx$$

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } \frac{x^4}{4} + c \quad \text{ב. } 2x^6 + c \quad \text{ג. } \frac{x^5}{5} + c \quad \text{ד. } \frac{x^4}{2} + c \quad \text{ה. } \frac{x^6}{9} + c \quad \text{ו. } 7x + c$$

$$\text{ז. } \frac{x^5}{6} + 4x^4 - \frac{x^3}{6} + 2x^2 - \frac{1}{3}x + c \quad \text{ח. } \frac{x^4}{5} - \frac{ax^3}{3} - \frac{ax^2}{b} + bx + c$$

$$(2) \quad \text{א. } -\frac{x^{-2}}{2} + c \quad \text{ב. } -\frac{1}{2x^2} + c \quad \text{ג. } -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{a}{2x^2} + \frac{x^2}{2a} + c \quad \text{ד. } 2x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + c$$

$$(3) \quad \text{א. } \frac{x^{1.5}}{1.5} + c \quad \text{ב. } \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c \quad \text{ג. } 2\sqrt{x} + c \quad \text{ד. } 8\sqrt{x} + 2\sqrt{x^3} + c$$

$$(4) \quad \text{א. } \frac{(5x-1)^4}{20} + c \quad \text{ב. } -\frac{3(2-7x)^5}{35} + c \quad \text{ג. } -\frac{3}{6x+5} + c$$

$$\text{ד. } \frac{\sqrt{6x-3}}{3} + c \quad \text{ה. } \frac{2\sqrt{(ax+b)^3}}{3a} + c$$

$$(5) \quad \text{א. } x-7 \quad \text{ב. } x^2+2x+5 \quad \text{ג. } x^3-2x^2+5x-1$$

$$\text{ד. } x^2-x-3 \quad \text{ה. } x^2-4$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - x + c \quad \text{ג.} \quad \frac{x^3}{3} + x^2 + 5x + c \quad \text{ב.} \quad \frac{x^2}{2} - 7x + c \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$\cdot \frac{x^5}{5} - x^2 + x + c \quad \text{ו.} \quad \frac{x^3}{3} - 4x + c \quad \text{ה.} \quad \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 3x + c \quad \text{ד.}$$

$$-\frac{1}{2(x^2 - 4x + 1)} + c \quad \text{ג.} \quad -\frac{1}{3(x^3 + 6)} + c \quad \text{ב.} \quad \frac{1}{x^2 - 1} + c \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$(x^2 + 1)^4 + c \quad \text{ו.} \quad -6\sqrt{x - x^2} + c \quad \text{ה.} \quad \sqrt{x^2 + 2} + c \quad \text{ד.}$$

$$\cdot \frac{(6x - x^3)^3}{9} + c \quad \text{ז.}$$

$$\frac{\sin 3x}{3} + \frac{\cos 4x}{2} + \frac{4 \tan 3x}{3} + c \quad \text{ב.} \quad -\cos x - 3 \sin x + 4 \tan x + 5x + c \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$\cdot \cos(\pi - x) + \tan x + x + c \quad \text{ג.}$$

$$-\frac{\sin 2x}{2} + c \quad \text{ג.} \quad -\frac{\cos 6x}{12} + c \quad \text{ב.} \quad -\frac{1}{2} \cos 2x + c \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$\cdot \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + c \quad \text{ד.}$$

$$\cdot \frac{1}{3} \sin^3 x + c \quad \text{ג.} \quad \frac{1}{\cos x} + c \quad \text{ב.} \quad 2\sqrt{\sin x} + c \quad \text{א.} \quad (10)$$

$$-\frac{1}{10} \cot 10x + c \quad \text{ג.} \quad \frac{1}{4} \tan 4x + c \quad \text{ב.} \quad -\frac{1}{2} \cos 2x - 12 \sin \frac{x}{3} + c \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$x - \frac{1}{2} \cos 2x + c \quad \text{ו.} \quad \frac{1}{2} \sin 2x + c \quad \text{ה.} \quad \frac{1}{2} \sin 2x + c \quad \text{ד.}$$

$$\tan x - \cot x + c \quad \text{ט.} \quad \tan x - x + c \quad \text{ח.} \quad -\frac{1}{16} \cos 4x + c \quad \text{ז.}$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{16} \sin 8x + c \quad \text{יא.} \quad \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + c \quad \text{י.}$$

$$\frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \quad \text{ב.} \quad \frac{3}{4}x + \frac{1}{16} \sin 4x + c \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$-\cot x - x + c \quad \text{ד.} \quad \frac{3}{8}x - \frac{1}{16} \sin 8x + \frac{1}{128} \sin 16x + c \quad \text{ג.}$$

$$-\cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + c \quad \text{ה.}$$



## מציאת פונקציה קדומה:

### שאלות:

- (1) נתונה נגזרת של פונקציה:  $f'(x) = 3x^2 - 7$ . מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה  $(2, -1)$ .
- (2) נתונה נגזרת של פונקציה:  $f'(x) = 2x - 6$ . ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5. מצא את הפונקציה.
- (3) הנגזרת של פונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = x^2 - 8x + 2$ . נתון:  $f(-2) = 1$ .
  - א. מצא את  $f(x)$ .
  - ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 1$ .
- (4) נתונה הנגזרת של פונקציה  $f(x)$ :  $f'(x) = 9x^2 - 4$ . ערך הפונקציה בנקודה  $x = 1$  הוא 3.
  - א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 1$ .
  - ב. מצא את  $f(x)$ .
  - ג. מצא את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.
- (5) הנגזרת של פונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = 2x - 3$ . לפונקציה משיק ששיפועו הוא -3.
  - א. מצא את שיעור ה- $x$  של נקודת ההשקה.
  - ב. מצא את  $f(x)$  אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא 7.
- (6) הנגזרת של פונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = -6x - 5$ . המשיק לפונקציה בנקודה A יוצר זווית של  $45^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .
  - א. מצא את שיעור ה- $x$  של הנקודה A.
  - ב. מצא את  $f(x)$  אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא -6.
  - ג. מצא את משוואת המשיק.

- (7) הנגזרת של פונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = 3x - 4$ .  
 הישר  $y = 2x + 5$  משיק לגרף הפונקציה. מצא את  $f(x)$ .

### תשובות סופיות:

- (1)  $f(x) = x^3 - 7x + 5$
- (2)  $f(x) = x^2 - 6x + 14$
- (3) א.  $f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 2x + 23\frac{2}{3}$  ב.  $y = -5x + 27$
- (4) א.  $y = 5x - 2$  ב.  $f(x) = 3x^3 - 4x + 4$  ג.  $(0, -2)$ ,  $(0.4, 0)$
- (5) א.  $x = 0$  ב.  $f(x) = x^2 - 3x + 7$
- (6) א.  $x = -1$  ב.  $f(x) = -3x^2 - 5x - 8$  ג.  $y = x - 5$
- (7)  $f(x) = \frac{3x^2}{2} - 4x + 11$

# קורס מבוא למתמטיקה לכלכלנים

פרק 17 - חשבון אינטגרלי - האינטגרל המסוים וחישובי שטחים

תוכן העניינים

|     |                                           |
|-----|-------------------------------------------|
| 212 | 1. האינטגרל המסוים                        |
| 214 | 2. חישובי שטחים יסודיים                   |
| 220 | 3. חישובי שטחים יסודיים עם פרמטרים        |
| 222 | 4. חישובי שטחים כאשר נתונה נגזרת הפונקציה |
| 225 | 5. חישובי שטחים עם פונקציה רציונאלית      |
| 227 | 6. חישובי שטחים עם פונקצית שורש           |
| 231 | 7. חישובי שטחים עם פונקציות טריגונומטריות |
| 234 | 8. חישובי שטחים בין גרף הנגזרת והצירים    |

## האינטגרל המסוים:

### סיכום כללי:

תהא פונקציה  $f(x)$  שנגזרתה היא  $f'(x)$  ( $f(x)$  מוגדרת בתחום  $a \leq x \leq b$ ).  
 הקשר שבין האינטגרל המסוים לפונקציה קדומה הוא:  $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$ .

### הערה:

יש להשתמש בכל כללי האינטגרציה המיידיים של הפונקציות השונות אשר נלמדו.

### שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

ב.  $\int_{-4}^{-1} x^2(x-3) dx$

א.  $\int_2^5 (x^2 + 5x) dx$

ד.  $\int_{-1}^1 3(2x-1)^5 dx$

ג.  $\int_{-3}^3 (x^3 + 4x) dx$

ו.  $\int_1^4 \frac{x-1}{x^3} dx$

ה.  $\int_1^2 \frac{2}{(x-3)^2} dx$

ח.  $\int_3^4 \frac{3x^2 - 7x + 2}{x-2} dx$

ז.  $\int_{-3}^0 \frac{2x^2 + 7x - 4}{x+4} dx$

י.  $\int_{-5}^0 \frac{3}{\sqrt{4-x}} dx$

ט.  $\int_1^2 \sqrt{3x-1} dx$

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

ב.  $\int_0^\pi (\sin 2x + 1) dx$

א.  $\int_0^\pi (\cos x) dx$

ד.  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( \frac{3}{\cos^2 x} + 2 \right) dx$

ג.  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x - 3 \cos 2x) dx$

$$(3) \quad \text{לפניך האינטגרל הבא: } \int_1^a (4x-7) dx$$

מצא עבור אלו ערכים של  $a$  ערך האינטגרל יהיה שווה ל-1.

$$(4) \quad \text{לפניך האינטגרל הבא: } \int_a^2 (x-3x^2) dx$$

א. כתוב ביטוי לערך האינטגרל כתלות ב- $a$ .

ב. מצא עבור אלו ערכים של  $a$  ערך האינטגרל יהיה שווה ל- $\frac{a-12}{2}$ .

$$(5) \quad \text{לפניך האינטגרל הבא: } \int_a^{a+4} \left( \frac{1}{\sqrt{x-a}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) dx$$

א. כתוב את ערך האינטגרל כתלות ב- $a$ .

ב. מצא את ערכו של  $a$  עבורו ערך האינטגרל יהיה שווה ל-2.

$$(6) \quad \text{לפניך האינטגרל הבא: } \int_0^a (\sin x + 2 \cos 2x) dx, \quad 0 < a < 3$$

מצא עבור אלו ערכים של  $a$  ערך האינטגרל יהיה שווה ל-1.

### תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } 91.5 \quad \text{ב. } -126.75 \quad \text{ג. } 0 \quad \text{ד. } -182 \quad \text{ה. } 1$$

$$\text{ו. } \frac{9}{32} \quad \text{ז. } -12 \quad \text{ח. } 9.5 \quad \text{ט. } 1.856 \quad \text{י. } .6$$

$$(2) \quad \text{א. } 0 \quad \text{ב. } \pi \quad \text{ג. } 0 \quad \text{ד. } 3\sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi \approx 7.29$$

$$(3) \quad a = 2, 1.5$$

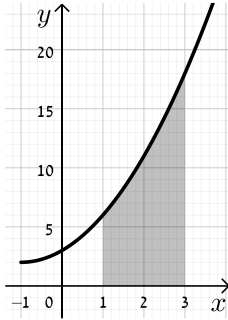
$$(4) \quad \text{א. } a^3 - \frac{1}{2}a^2 - 6 \quad \text{ב. } a = 0, 1, -\frac{1}{2}$$

$$(5) \quad \text{א. } 4 + 2(\sqrt{a+1} - \sqrt{a+5}) \quad \text{ב. } a = 1\frac{1}{4}$$

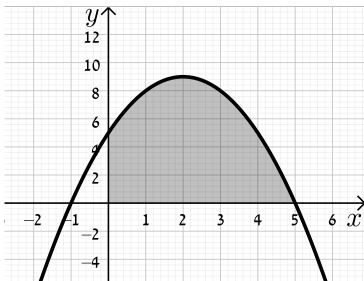
$$(6) \quad a = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$$

## חישובי שטחים יסודיים:

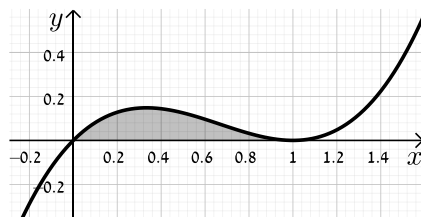
### שאלות:



- (1) חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה  $f(x) = x^2 + 2x + 3$ , ציר ה- $x$  והישרים  $x = 1$  ו- $x = 3$ .

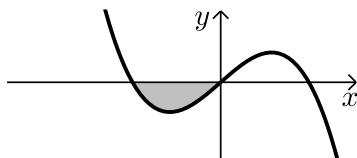


- (2) נתונה הפונקציה  $y = -x^2 + 4x + 5$ .  
 א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
 ב. מצא את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  וציר ה- $y$ .

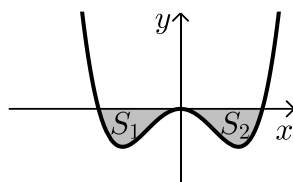


- (3) מצא את השטח המוגבל תחת הפונקציה  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$  וציר ה- $x$  כמתואר באיור.

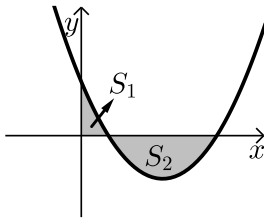
### שאלות עם שטח מתחת לציר ה- $x$ :



- (4) נתונה הפונקציה  $f(x) = x(4 - x^2)$ .  
 חשב את השטח המוגבל שמתחת הפונקציה וציר ה- $x$  שברביע השלישי.



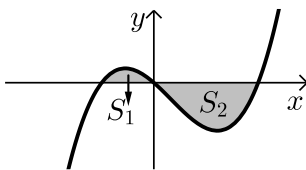
- (5) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2$ .  
 חשב את השטח המוגבל שבין הפונקציה לציר ה- $x$ .



- 6) חשב את האינטגרל המסוים של הפונקציה  $y = x^2 - 6x + 5$  בין 0 ל-5. האם התוצאה מייצגת את סכום השטחים:  $S_1 + S_2$ ? אם כן, הסבר. אם לא, נמק וחשב את סכום זה.

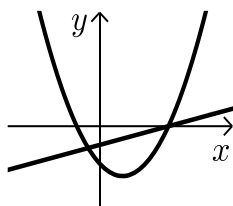
- 7) נתונה הפונקציה  $y = x^3 - x^2 - 2x$ .

יוצרים את השטחים  $S_1$  ו- $S_2$  בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$  כמתואר באיור.

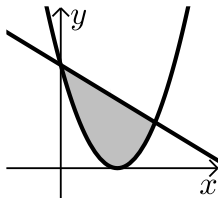


- א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$ .

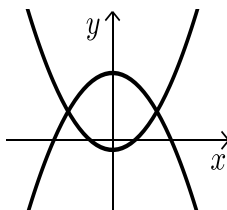
### שאלות עם שטחים בין שתי פונקציות:



- 8) נתונות הפונקציות הבאות:  $f(x) = x^2 - 4x - 12$  ו- $g(x) = x - 6$ . חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות הנ"ל.



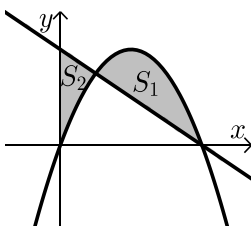
- 9) נתונות הפונקציות:  $y = -x + 9$ ,  $y = (x - 3)^2$ . חשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות.



- 10) נתונות הפונקציות:  $f(x) = x^2 - 1$ ,  $g(x) = 7 - x^2$ . חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות הנ"ל.

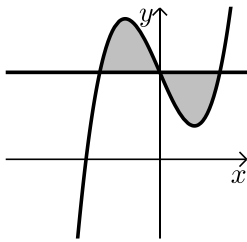
- 11) נתונות הפונקציות הבאות:  $f(x) = -x^2 + 4x$  ו- $g(x) = -x + 4$ .

מסמנים את השטח הכלוא בין שני הגרפים ב- $S_1$  ואת השטח הכלוא בין הגרפים וציר ה- $y$  ב- $S_2$  כמתואר באיור.

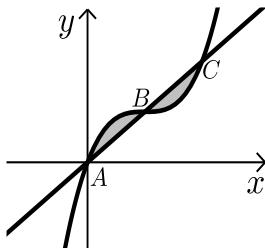


א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות.

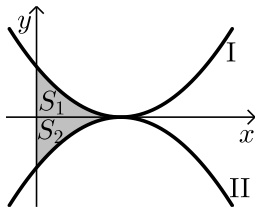
- ב. חשב את היחס שבין השטחים:  $\frac{S_1}{S_2}$ .



- 12** נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^3 - 4x + 5$  והישר  $y = 5$ .
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה והישר.
  - חשב את השטח המוגבל ביניהן.

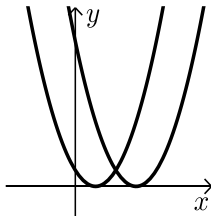


- 13** נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ .
- הישר AC חותך את גרף הפונקציה בנקודות  
 הבאות:  $A(0,0)$ ,  $B(1,1)$ ,  $C(2,2)$ .
- חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה לישר AC.

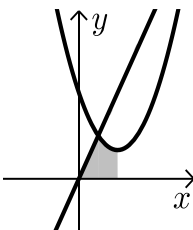


- 14** נתונות הפונקציות  $f(x) = (x-2)^2$  ו-  $g(x) = -(x-2)^2 - 1$  כמתואר באיור.
- התאם בין הפונקציות לגרפים I ו-II.
  - מסמנים את השטחים שבין כל פונקציה והצירים ב-  $S_1$  ו-  $S_2$  כמתואר באיור. הראה כי השטחים  $S_1$  ו-  $S_2$  שווים זה לזה.

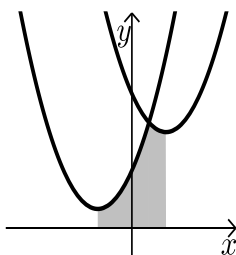
### שאלות עם שטחים מורכבים:



- 15** נתונות הפונקציות:  $f(x) = x^2 - 2x + 1$ ,  $g(x) = x^2 - 6x + 9$ .
- חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות  
 ובין ציר ה- $x$ .

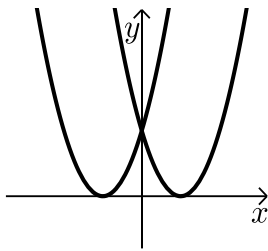


- 16** נתונות הפונקציות:  $y = 3x$ ,  $y = x^2 - 4x + 6$ .
- מצא את קדקוד הפרבולה.
  - מצא נקודת חיתוך של הפרבולה עם הישר שמשמאל לקדקוד הפרבולה.
  - חשב את השטח המסומן שבשרטוט.

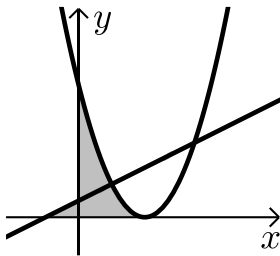


- 17** נתונות הפונקציות:  $y = x^2 - 4x + 14$ ,  $y = x^2 + 4x + 6$ .
- מצא את שיעורי ה- $x$  של קודקודי הפרבולות.
  - חשב את נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות.
  - חשב את השטח המסומן בשרטוט.



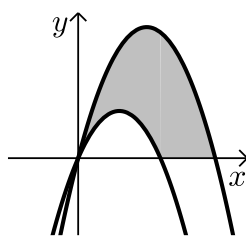


**18** נתונות הפונקציות:  $f(x) = (x-3)^2$ ,  $g(x) = (x+3)^2$ .  
חשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות וציר ה- $x$ .

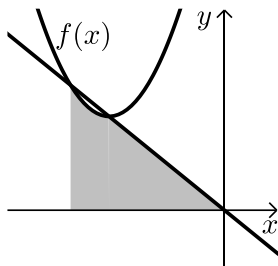


**19** נתונות שתי הפונקציות:  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ,  $y = (x-2)^2$ .

- מצא את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות לציר ה- $x$ .
- מצא את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות לציר ה- $y$ .

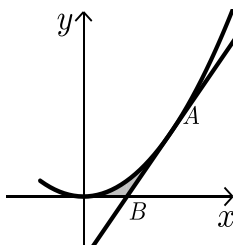


**20** נתונות הפרבולות הבאות:  $f(x) = -x^2 + 5x$  ו- $g(x) = -x^2 + 3x$ .  
חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של הפרבולות וציר ה- $x$ .



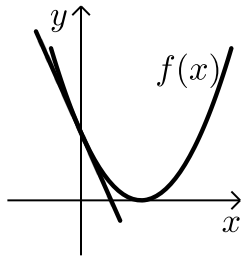
**21** נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^2 + 6x + 12$ .

- ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = -4$  כמתואר באיור.
- מצא את משוואת הישר.
- מצא את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.
- מצא את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  והישר  $x = -4$ .



**22** נתונה הפונקציה:  $y = 2x^2$ .

- מעבירים משיק לגרף הפונקציה מהנקודה  $A(1,2)$ .
- המשיק חותך את ציר ה- $x$  בנקודה  $B$ .
- חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה, המשיק וציר ה- $x$ .



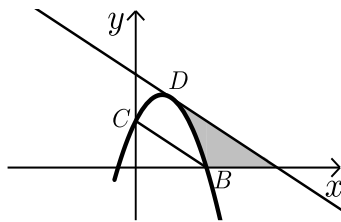
**(23)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = (x-2)^2$ .

מנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$  מעבירים משיק.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$ .

ג. חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- $x$ .



**(24)** משוואת הפרבולה היא:  $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$ .

הנקודות  $B(2,0)$ ,  $C(0,2)$  הן נקודות חיתוך של הפרבולה עם הצירים.

המשיק לפרבולה בנקודה  $D$  מקביל לישר  $BC$ .

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את השטח המוגבל בין הפרבולה, המשיק וציר ה- $x$ .

ג. מצא את השטח המוגבל בין הפרבולה, המשיק וציר ה- $y$ .

### תשובות סופיות:

(1)  $22\frac{2}{3}$  יח"ש.

(2) א.  $(-1,0)$ ,  $(5,0)$  ב.  $33\frac{1}{3}$  יח"ש.

(3)  $\frac{1}{12}$  יח"ש.

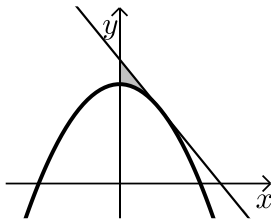
(4) 4 יח"ש.

(5)  $4\frac{4}{15}$  יח"ש.

- (6) לא. השטח הוא: 13 יח"ש.
- (7) א.  $(-1,0)$ ,  $(0,0)$ ,  $(2,0)$  ב.  $3\frac{1}{12}$  יח"ש.
- (8)  $57\frac{1}{6}$  יח"ש.
- (9)  $20\frac{5}{6}$  יח"ש.
- (10)  $21\frac{1}{3}$  יח"ש.
- (11) א.  $(1,3)$ ,  $(4,0)$  ב.  $2\frac{5}{11}$ .
- (12) א.  $(-2,5)$ ,  $(0,5)$ ,  $(2,5)$  ב. 8 יח"ש.
- (13) 0.5 יח"ש.
- (14) א.  $g(x)=\Pi$ ,  $f(x)=I$  ב. הוכחה.
- (15)  $\frac{2}{3}$  יח"ש.
- (16) א.  $(2,2)$  ב.  $(1,3)$  ג.  $3\frac{5}{6}$  יח"ש.
- (17) א.  $x=2$ ,  $x=-2$  ב.  $(1,11)$  ג.  $25\frac{1}{3}$  יח"ש.
- (18) 18 יח"ש.
- (19) א.  $\frac{4}{3}$  יח"ש ב.  $1\frac{7}{12}$  יח"ש.
- (20)  $16\frac{1}{3}$  יח"ש.
- (21) א.  $y=-x$  ב.  $(-3,3)$  ג.  $7\frac{5}{6}$  יח"ש.
- (22)  $\frac{1}{6}$  יח"ש.
- (23) א.  $y=-4x+4$  ב.  $(1,0)$  ג.  $\frac{2}{3}$  יח"ש.
- (24) א.  $y=-x+4$  ב.  $2\frac{2}{3}$  יח"ש. ג.  $\frac{2}{3}$  יח"ש.

## חישובי שטחים יסודיים עם פרמטרים:

### שאלות:

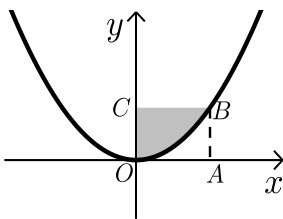


25 נתונה הפרבולה:  $y = ax^2 + 8$ .

שיפוע המשיק לגרף הפרבולה בנקודה שבה  $x = 2$  הוא -2.

א. חשב את  $a$ .

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי המשיק, הפרבולה וציר  $y$ .



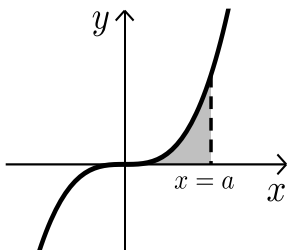
26 הפונקציה המתוארת בשרטוט היא:  $y = ax^2$  ( $a$  פרמטר).

המרובע ABCO הוא ריבוע.

הקדקוד B נמצא על גרף הפונקציה.

ידוע כי אורך צלע הריבוע היא 2 יחידות.

מצא את ערך הפרמטר  $a$  ואת השטח המסומן בשרטוט.



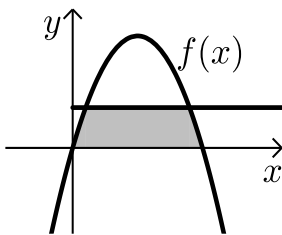
27 נתונה הפונקציה  $y = x^3$ .

מעבירים אנך לציר ה- $x$ :  $x = a$  ( $a$  פרמטר חיובי)

כך שנוצר שטח הכלוא בין האנך, גרף הפונקציה וציר ה- $x$ .

א. הבע באמצעות  $a$  את השטח המקווקו בציור.

ב. חשב את  $a$  אם ידוע כי שטח זה שווה ל- $a^2$ .



28 נתונה הפונקציה:  $f(x) = kx - x^2$ .

הישר  $y = 9$  חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.

ידוע כי שיעור ה- $x$  של אחת מנקודות החיתוך

הוא  $x = 9$ .

א. מצא את ערך הפרמטר  $k$ .

ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,

הישר וציר ה- $x$  (השטח המסומן).

**תשובות סופיות:**

$$(25) \quad \text{א. } a = -\frac{1}{2} \quad \text{ב. } \frac{4}{3} \text{ יח"ש.}$$

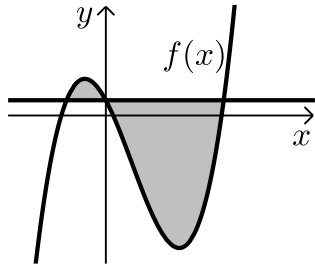
$$(26) \quad \text{א. } a = \frac{1}{2}, \quad \text{ב. } 2\frac{2}{3} \text{ יח"ש.}$$

$$(27) \quad \text{א. } \frac{a^4}{4} \quad \text{ב. } a = 2.$$

$$(28) \quad \text{א. } k = 10 \quad \text{ב. } (1, 9) \quad \text{ג. } 81\frac{1}{3} \text{ יח"ש.}$$

## חישובי שטחים כאשר נתונה נגזרת הפונקציה:

### שאלות:

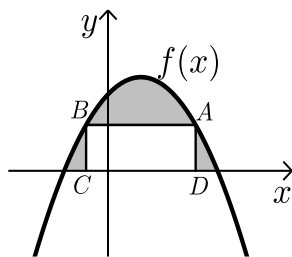


**(29)** נגזרת הפונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = 3x^2 - 8x - 12$ .

הישר  $y = 5$  חותך את גרף הפונקציה  $f(x)$  על ציר ה- $y$ .

א. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

ב. מצא את השטח המוגבל בין הישר והפונקציה.



**(30)** הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$  המתוארת באיור שלפניך היא:  $f'(x) = 3 - 2x$ .

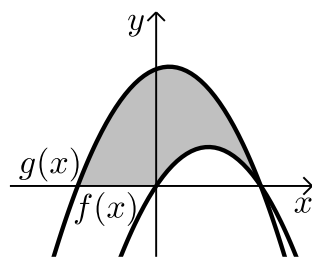
ישר AB שמשוואתו:  $y = 6$  חותך את גרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודות A ו-B.

מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- $x$  כך שנוצר מלבן ABCD.

ידוע ששיעור ה- $x$  של הנקודה A הוא 4.

א. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- $x$ .



**(31)** באיור שלפניך מתוארות הפונקציות שנגזרותיהן:  $f'(x) = 4 - 2x$ ,  $g'(x) = -2x + 1$ .

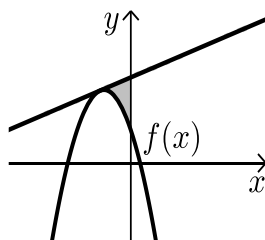
ידוע ששתי הפונקציות חותכות את ציר ה- $x$  כאשר:  $x = 4$ .

א. מצא את הפונקציות.

ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות וציר ה- $x$  (המסומן).

**(32)** נתונה פונקציה  $f(x)$ .

משוואת המשיק לפונקציה  $f(x)$  בנקודה שבה:  $x = -2$  היא:  $y = x + 13$ .



הנגזרת של הפונקציה היא:  $f'(x) = -4x - 7$ .

א. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

ב. חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- $y$ .

**(33)** נתונה פונקציה  $f(x)$  שנגזרתה היא:  $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ .

ישר ששיפועו 15 משיק לפונקציה ברביע הרביעי בנקודה שבה:  $y = -20$ .

א. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

ב. האם יש עוד משיקים לגרף הפונקציה בעלי שיפוע 15? אם כן- מצא אותם.

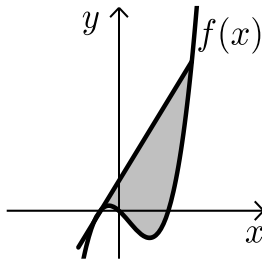
ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הראה כי הנקודה שבה  $x = 7$  משותפת למשיק

שמצאת בסעיף הקודם ולפונקציה  $f(x)$ .

ii. מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה

והמשיק שמצאת בסעיף הקודם (ראה איור).



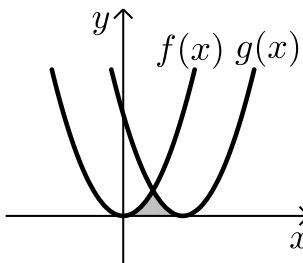
**(34)** באיור שלפניך חותך גרף הפונקציה:  $f(x) = x^2$

את גרף הפונקציה  $g(x)$  בנקודה שבה  $x = 2$ .

הנגזרת של הפונקציה  $g(x)$  היא:  $g'(x) = 2x - 8$ .

א. מצא את הפונקציה  $g(x)$ .

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- $x$  (המסומן).



**(35)** באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה  $f(x)$  והישר  $y = 2x$ .

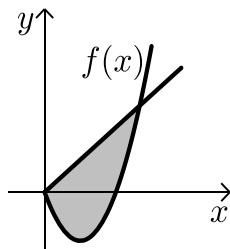
נגזרת הפונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = 2x - 6$

וידוע כי הישר חותך את הפונקציה בנקודה שבה ערך ה- $y$  הוא 16.

א. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן מצא אותן.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.



## תשובות סופיות:

(29) א.  $f(x) = x^3 - 4x^2 - 12x + 5$  ב.  $189\frac{1}{3}$  יח"ש.

(30) א.  $f(x) = -x^2 + 3x + 10$  ב.  $27\frac{1}{6}$  יח"ש.

(31) א.  $f(x) = 4x - x^2$ ,  $g(x) = -x^2 + x + 12$  ב.  $46.5$  יח"ש.

(32) א.  $f(x) = -2x^2 - 7x + 5$  ב.  $5\frac{1}{3}$  יח"ש.

(33) א.  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$  ב.  $y = 15x + 28$

ג. i.  $(7, 133)$  ג. ii.  $546.75$  יח"ש.

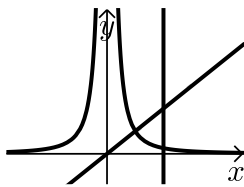
(34) א.  $g(x) = (x - 4)^2$  ב.  $5\frac{1}{3}$  יח"ש.

(35) א.  $f(x) = x^2 - 6x$  ב.  $(0, 0)$  ג.  $85\frac{1}{3}$  יח"ש.



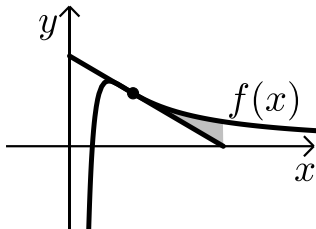
## חישובי שטחים עם פונקציה רציונאלית:

### שאלות:



(1) נתונות שתי פונקציות:  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $g(x) = x$ .

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות, הישר  $x=2$  וציר ה- $x$ .



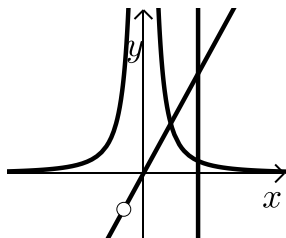
(2) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ .

מצא את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה והמשיק שמצאת בסעיף א'.

חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק ואנך לציר ה- $x$  היוצא מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$ .



(3) נתונות שתי פונקציות:  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $g(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + 2}$ .

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות, הישר  $x=2$  וציר ה- $x$ .

(4) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:  $f(x) = 2x^2$  ו- $g(x) = \frac{a}{x^2}$ .

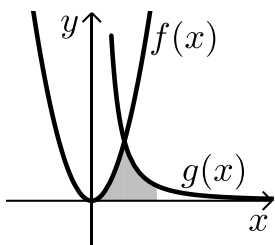
( $a$  קבוע) בתחום:  $x > 0$ .

ידוע כי הגרפים נחתכים ברביע הראשון בנקודה

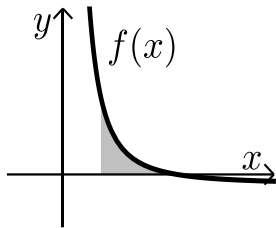
הנמצאת על הישר:  $y = 4x$ .

א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים ואת  $a$ .

ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- $x$  והישר:  $x=4$ .

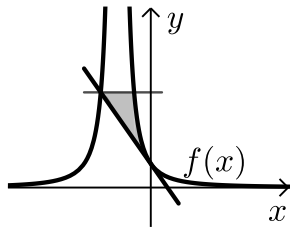


(5) גרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{a-x^2}{x^2}$  (קבוע  $a$ ) חותך את ציר ה- $x$  בנקודה  $(6,0)$ .



- א. מצא את  $a$  וכתוב את הפונקציה.  
 ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  והישר:  $x=2$ .

(6) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{A}{(2x+A)^2}$  ( $A$  פרמטר חיובי).



ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$  הוא:  $-\frac{1}{9}$ .

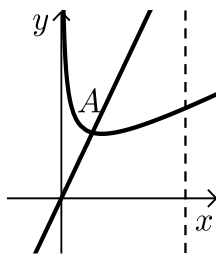
- א. מצא את ערך הפרמטר  $A$ .  
 ב. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך עם ציר ה- $y$ .  
 ג. הראה כי המשיק חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה:  $x=-4.5$ .  
 ד. העבר ישר אופקי מנקודת החיתוך של המשיק וגרף הפונקציה מהסעיף הקודם. מצא את נקודת החיתוך הנוספת של ישר זה עם גרף הפונקציה.  
 ה. חשב את השטח כלוא בין המשיק, הישר וגרף הפונקציה (היעזר באיור).

### תשובות סופיות:

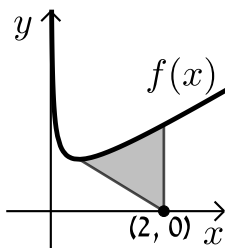
- (1) 1 יח"ש.  
 (2) א.  $y = -x + 2$ .  
 (3) 1 יח"ש.  
 (4) א.  $a = 32$ ,  $(2,8)$ .  
 (5) א.  $a = 36$ ,  $f(x) = \frac{36-x^2}{x^2}$ .  
 (6) א.  $A = 6$ .  
 ב.  $\frac{1}{8}$  יח"ש.  
 ב.  $13\frac{1}{3}$  יח"ש.  
 ב. 8 יח"ש.  
 ג. הוכחה.  
 ב.  $y = -\frac{1}{9}x + \frac{1}{6}$ .  
 ה.  $\frac{5}{8}$  יח"ש.  
 ד.  $\left(-1.5, \frac{2}{3}\right)$ .

## חישובי שטחים עם פונקצית שורש:

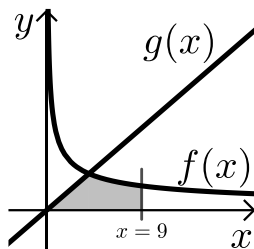
### שאלות:



- (1) באיור שלפניך נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} + x$ .  
 מעבירים ישר:  $y = 4x$  החותך את גרף הפונקציה  
 בנקודה A המסומנת באיור.  
 א. מצא את שיעורי הנקודה A.  
 ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $f(x)$ ,  
 הישר  $y = 4x$ , ציר ה- $x$  ואנך לציר ה- $x$ :  $x = 4$ .

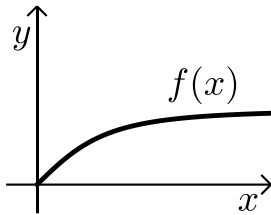


- (2) באיור שלפניך נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + x$ .  
 א. מצא את נקודת המינימום שלה.  
 ב. מנקודת המינימום של הפונקציה מעבירים  
 ישר לנקודה  $(2, 0)$  שעל ציר ה- $x$ .  
 מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר ואנך לציר ה- $x$   
 היוצא מהנקודה  $(2, 0)$  עד לנקודת החיתוך עם גרף הפונקציה.

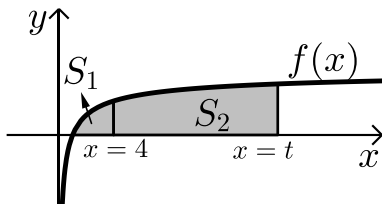


- (3) באיור הבא מתוארים הגרפים של  
 הפונקציות:  $f(x) = \frac{16}{\sqrt{x}}$  ו- $g(x) = 2x - 1$ .  
 א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.  
 ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים,  
 ציר ה- $x$  והישר  $x = 9$ .

- (4) נתונה הפונקציה:  $f(x) = (x-6)\sqrt{x}$ .  
 חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודת  
 המינימום שלה וציר ה- $y$ .



- (5) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$  ברביע הראשון. לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק והישר  $x = \sqrt{3}$ .

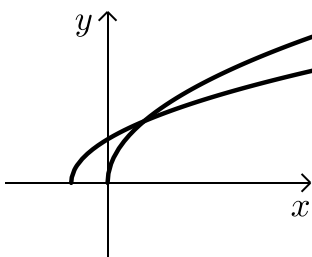


- (6) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:  $f(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ . מעבירים שני אנכים לציר ה- $x$  והם:  $x = 4$  ו- $x = t$  ( $t > 4$ ). נסמן:  
 $S_1$  - השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$ .  
 $S_2$  - השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  והאנכים.  
 ידוע כי:  $8S_1 = S_2$ . מצא את  $t$ .

- (7) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$ .

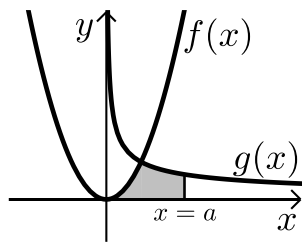
א. ענה על הסעיפים הבאים:

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
  - מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
  - הראה כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
- ב. מעבירים משיק לגרף הפונקציה ששיפועו הוא:  $m = \frac{17}{16}$ . מצא את נקודת ההשקה.
- ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  ואנך לציר ה- $x$  מנקודת ההשקה שמצאת בסעיף הקודם.



- (8) נתונות שתי פונקציות:  $f(x) = \sqrt{x+b}$ ,  $g(x) = \sqrt{2x}$  ( $b > 0$ ). גודל השטח הכלוא בין הפונקציות וציר ה- $x$  הוא  $2\frac{2}{3}$  יח"ש. מצא את ערכו של הפרמטר  $b$ .

(9) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:  $f(x) = x^2$

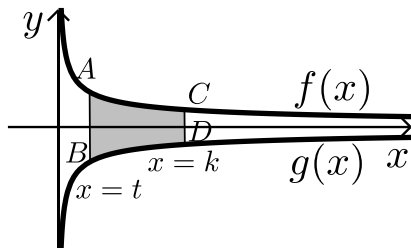


ו-  $g(x) = \frac{32}{\sqrt{x}}$  ברביע הראשון.

מעבירים ישר  $x=a$  החותך את גרף הפונקציה  $g(x)$  ויוצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים, ציר ה- $x$  והישר. ידוע כי שטח זה שווה ל-  $S = 85\frac{1}{3}$ .

מצא את  $a$ .

(10) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$  ו-  $g(x) = -\frac{3}{\sqrt{x}}$ .



מעבירים שני ישרים:  $x=k$  ו-  $x=t$  אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD. ידוע כי:  $2CD=AB$ .

א. הראה כי:  $k=4t$ .

ב. השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות והישרים:  $x=t$  ו-  $x=k$  הוא:  $S=12$ . מצא את  $t$ .

(11) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא עבור איזה ערך של  $a$ ,  $(a>1)$  יתקיים:  $\int_1^a \left( \frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1 \right) dx = 0$ .

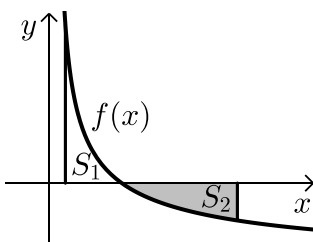
ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1$ .

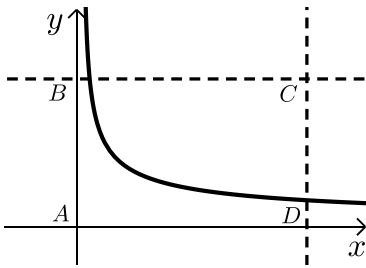
מעבירים שני אנכים לציר ה- $x$  והם:  $x=1$  ו-  $x=13$  כך שנוצרים השטחים  $S_1$  ו-  $S_2$ .

מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$  ענה על הסעיפים הבאים:

i. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  והאנך  $x=1$ ,  $(S_1)$ .

ii. היעזר בתוצאה שקיבלת ובסעיף א' וקבע לכמה שווה השטח  $S_2$ . נמק את טענתך.





**(12)** באיור שלפניך מתוארת הפונקציה:  $f(x) = \frac{9}{\sqrt{2x-1}}$

מעבירים את הישרים המקבילים לצירים:  $x=13$

ו-  $y=3$  כך שנוצר המלבן ABCD כמתואר באיור.

הישר  $y=3$  חותך את גרף הפונקציה בנקודה M.

א. מצא את שיעורי הנקודה M.

ב. מסמנים את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה

והישרים ב-  $S_1$  ואת שטח המלבן ב-  $S_2$ .

$$\text{הראה כי: } \frac{S_1}{S_2} = \frac{2}{13}$$

### תשובות סופיות:

1) א.  $A(1,4)$  ב. 15.5 יח"ש.

2) א.  $\min(0.5, 1.5)$  ב. 1.75 יח"ש.

3) א.  $(4,8)$  ב. 48 יח"ש.

4) 2.26 יח"ש.

5) 0.5 יח"ש

6)  $t=16$

7) א. i.  $x > 0$  ii.  $(4,0)$  iii.  $f'(x) = 1 + \frac{4}{x\sqrt{x}} > 0$

ב.  $(16,14)$  ג. 88 יח"ש.

8)  $b=2$

9)  $a=9$

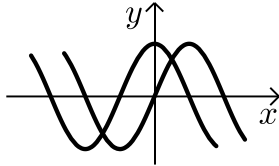
10) א. הוכחה ב.  $t=1$

11) א.  $a=13$  ב.  $(5,0)$  ג. i.  $S_1=2$  ii.  $S_2=|-S_1|=2$

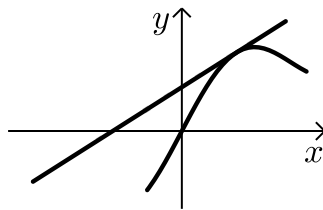
12) א.  $M(5,3)$

## חישובי שטחים עם פונקציות טריגונומטריות:

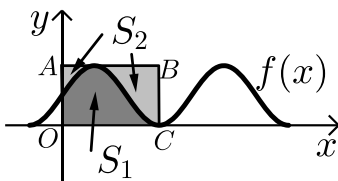
### שאלות:



- (1) נתונות הפונקציות:  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = \cos x$ .  
 חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות  
 לציר ה- $y$  ברביע הראשון.



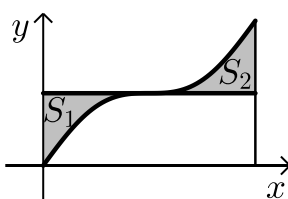
- (2) נתונה הפונקציה:  $f(x) = x + 2 \sin x$ .  
 בתחום שבין ראשית הצירים לנקודת  
 המקסימום הראשונה מימינה העבירו  
 לפונקציה משיק ששיפועו 1.  
 א. מצא את משוואת המשיק.  
 ב. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,  
 המשיק וציר ה- $x$  ברביעים הראשון והשני.



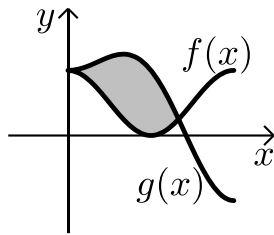
- (3) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sin 2x + 1}{2}$ .  
 בתחום:  $-0.25\pi \leq x \leq 1.75\pi$  מעבירים משיק  $AB$   
 דרך נקודת המקסימום של הפונקציה ומעלים אנך  
 לציר ה- $x$  מנקודת החיתוך הראשונה של גרף  
 הפונקציה עם ציר ה- $x$  בתחום הנתון המסומנת ב- $C$  כך שנוצר המלבן  $ABCO$ .  
 השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים יסומן ב- $S_1$  (ראה סימון בציור).  
 השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה- $y$  יסומן ב- $S_2$ .  
 א. מצא את משוואת הצלע  $AB$  של המלבן.  
 ב. חשב את היחס:  $\frac{S_1}{S_2}$ .

- (4) באיור שלפניך נתונה הפונקציה:  $y = \sin x + x$  בתחום:  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

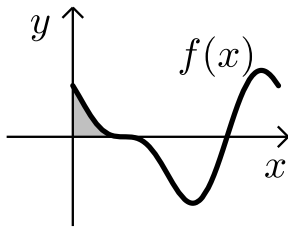
- א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות בתחום הנתון?  
 ב. מורידים אנך מגרף הפונקציה לציר ה- $x$   
 בנקודה שבה:  $x = 2\pi$ .  
 מעבירים ישר המקביל לציר ה- $x$  מהנקודה  
 שמאפסת את הנגזרת.



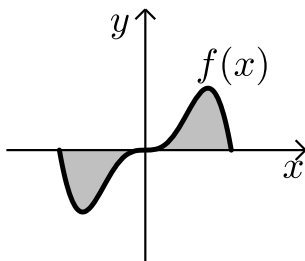
הראה כי השטחים  $S_1$  ו- $S_2$  המסומנים בסרטוט שווים.



- (5) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה  
 הבאות:  $f(x) = \cos^2 x$  ו-  $g(x) = \sin^2 x + \cos x$   
 בתחום:  $0 \leq x \leq \pi$ .  
 א. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.  
 ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים.  
 השתמש בזהות:  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ .



- (6) הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = -\cos 2x - \sin x$ .  
 א. מצא את שיעורי ה- $x$  של הנקודות  
 המקיימות:  $f'(x) = 0$  בתחום:  $0 < x < 2\pi$ .  
 ידוע כי הנקודה המקיימת  $f'(x) = 0$  אשר אינה  
 קיצון נמצאת על ציר ה- $x$ .  
 ב. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .  
 ג. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה בתחום הנתון.  
 חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.



- (7) ענה על הסעיפים הבאים:  
 א. נתונה הפונקציה:  $y = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$   
 הוכח כי הנגזרת של הפונקציה היא:  $y' = x^2 \sin x$   
 באיור שלפניך נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^2 \sin x$   
 בתחום:  $-\pi \leq x \leq \pi$ .  
 ב. הראה כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.  
 ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  
 וציר ה- $x$  בתחום הנתון.

- (8) נתונה הפונקציה:  $f(x) = a \cos x + b \sin x$ ,  $a, b$  פרמטרים.  
 הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = \frac{\pi}{4}$  והיא חיובית בתחום  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ .  
 גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה בתחום  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  הוא  $2\sqrt{2} - 2$ .  
 מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

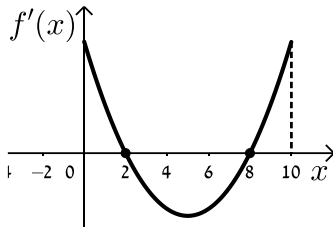


## תשובות סופיות:

- (1) 0.41 יח"ש.
- (2) א.  $y = x + 2$  ב.  $\pi$  יח"ש.
- (3) א.  $y = 1$  ב.  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 2}{3\pi - 2} = 1.538$ .
- (4) א. אין נקודת קיצון, הנקודה  $(\pi, \pi)$  היא נקודת פיתול.  
 ב.  $S = 0.5\pi^2 - 2 = 2.934$ .
- (5) א.  $(0, 1), \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{1}{4}\right)$  ב.  $S = 1.5 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.299$ .
- (6) א.  $x = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$  ב.  $f(x) = -\frac{1}{2} \sin 2x + \cos x$  ג.  $\frac{1}{2}$  יח"ש.
- (7) א. הוכחה ב. הוכחה ג.  $S = 2(\pi^2 - 4) \approx 11.74$ .
- (8)  $b = -2, a = 2$ .

## חישובי שטחים בין גרף הנגזרת והצירים:

### שאלות:



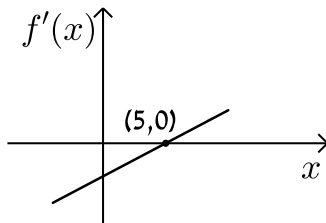
(1) הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת בתחום  $0 \leq x \leq 10$ .

בציור מתואר גרף הנגזרת  $f'(x)$ .

א. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$

אם:  $f(2) = 6$ ,  $f(0) = -4$ ,  $f(5) = 0$  וכן:  $f(10) > 0$ .

ב. חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הנגזרת והצירים ברביע הראשון עד לנקודה שבה  $x = 2$ .



(2) לפניך הגרף של הפונקציה  $f'(x)$ .

הגרף המתואר חותך את ציר ה- $x$  בנקודה

אחת בלבד והיא  $(5, 0)$ .

א. מצא את התחומים שבהם  $f'(x)$  היא חיובית

ואת התחומים שבהם היא שלילית.

ב. קבע מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .

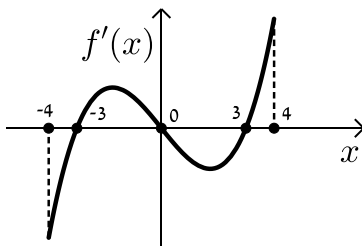
ג. כתוב את נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  אם ידוע כי

שיעור ה- $y$  שלה הוא  $-2$ .

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  אם ידוע כי גרף הפונקציה

חותך את ציר ה- $y$  כאשר  $y = 8$ .

ה. חשב את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת  $f'(x)$  והצירים.



(3) בציור מתואר גרף הנגזרת  $f'(x)$  של הפונקציה  $f(x)$ .

א. רשום את תחומי העלייה והירידה של  $f(x)$ .

ב. מצא את שיעורי ה- $x$  של נקודות הקיצון

של  $f(x)$  וקבע את סוגן.

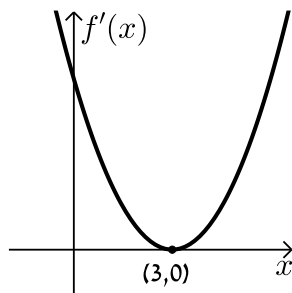
ג. נתון כי הפונקציה  $f(x)$  עוברת בראשית הצירים וגם מקיימת:  $f(-3) = f(3) = m$ .

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום הנ"ל (הבע באמצעות  $m$ ).

ד. השטח הכלוא בין גרף הנגזרת  $f'(x)$  וציר ה- $x$  ברביעים

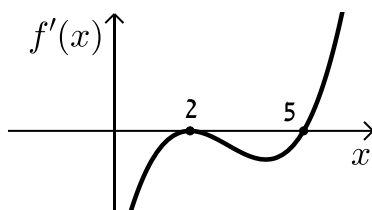
השני והרביעי הוא 16 יח"ש. מצא את  $m$ .

(4) הנגזרת  $f'(x)$  של הפונקציה  $f(x)$  מתוארת באיור הבא.



- א. האם ל- $f(x)$  יש נקודות קיצון? נמק.
- ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  אם ידוע כי  $f(3) = 4$  וכי היא חותכת את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = -5$ .
- ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת  $f'(x)$  והצירים ברביע הראשון.

(5) באיור שלפניך מתואר גרף הנגזרת  $f'(x)$  של הפונקציה  $f(x)$ .

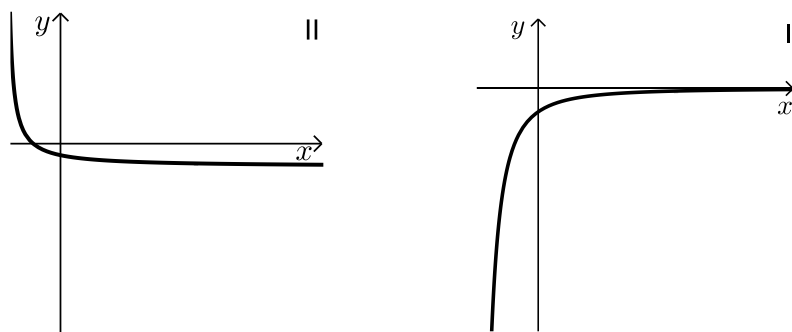


ידוע כי הנקודות  $B(2, 2)$ ,  $A(5, -4.75)$

ו- $C(0, 14)$  נמצאות על  $f(x)$ .

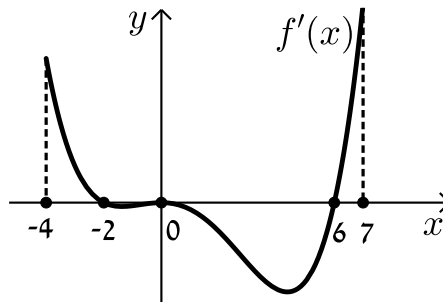
- א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ .
- ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של  $f(x)$ .
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- ד. חשב את השטח מוגבל בין גרף הנגזרת  $f'(x)$  והצירים בתחום  $0 \leq x \leq 5$ .

(6) באיורים שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו- $f'(x)$ :



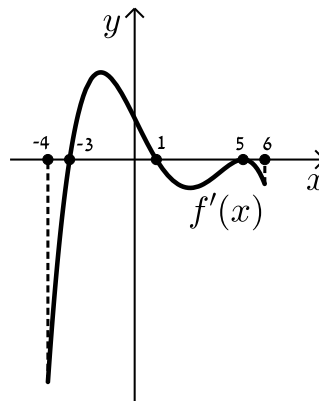
- א. זהה איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמק.
- ב. נתון כי  $f(10) = -3$  וכי  $f(x)$  חותכת את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = -2$ . מהו השטח המוגבל בין גרף הנגזרת  $f'(x)$ , הצירים והישר  $x = 10$ ?

(7) נתון גרף הנגזרת  $f'(x)$  הבא:



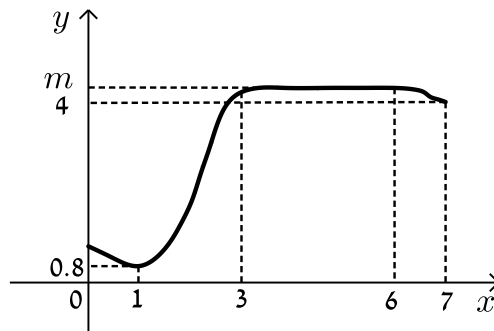
- א. סרטט את גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום  $-4 \leq x \leq 7$  לפי הנתונים:  $f(0) = -2$ ,  $f(-2) = 7.6$  ו-  $f(6) = -606.8$ .
- ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- $x$  ברביע השלישי.
- ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- $x$  ברביע הרביעי.

(8) נתון גרף הנגזרת  $f'(x)$  הבא:



- א. סרטט את גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום  $-4 \leq x \leq 6$  עבור הנתונים:  $f(-3) = -356\frac{2}{5}$ ,  $f(1) = 36\frac{2}{15}$ ,  $f(5) = -83\frac{1}{3}$ .
- ב. חשב את כלל השטח הכלוא בין גרף הנגזרת וציר ה- $x$  בתחום:  $-3 \leq x \leq 5$ .

9) בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום  $0 < x < 7$ :



הסתמך על הגרף של  $f(x)$  ועל הערכים הרשומים על הצירים וענה על השאלות הבאות:

א. מצא עבור אילו ערכים של  $x$  השונים מ-6 מתקיים:

i.  $f'(x) > 0$

ii.  $f'(x) = 0$

iii.  $f'(x) < 0$

ב. נתון כי:  $\int_3^6 m dx = 15$ , כאשר  $m$  הוא פרמטר המסומן על ציר ה- $y$ .

מצא את  $f(5)$ .

ג. סרטט סקיצה של גרף פונקציה הנגזרת  $f'(x)$  בתחום  $0 < x < 3$ .

ד. מצא את השטח המוגבל בין הגרף של פונקציה הנגזרת  $f'(x)$

וציר ה- $x$  בתחום  $1 < x < 3$ .

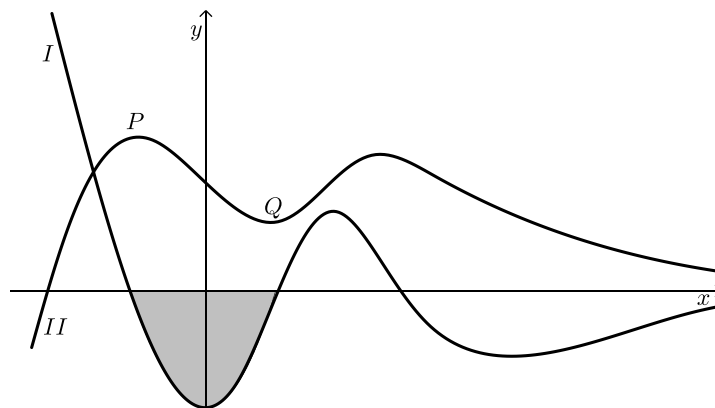
10) בסרטוט נתונים הגרפים של פונקציה ושל נגזרתה.

א. קבע איזה מהגרפים, I או II, שייך לפונקציה ואיזה שייך לנגזרת. נמק.

ב. כמה נקודות פיתול יש לפונקציה? נמק וסמן אותן על הסרטוט.

ג. נתון:  $P(-2, 4)$ ,  $Q(2, 1)$ . מצא את גודלו של השטח הכלוא בין גרף I

לציר ה- $x$  (השטח המסומן בסרטוט).



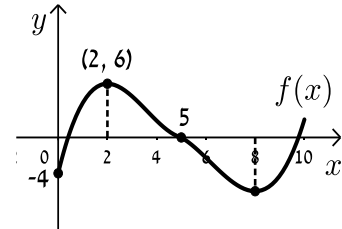
## תשובות סופיות:

הערה: סרטוטי הסקיצות מופיעות במרכז בעמוד הבא.

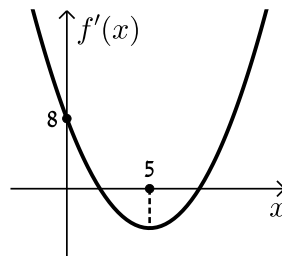
- (1) ב. 10 יח"ש.
- (2) א. חיובית:  $x > 5$ , שלילית:  $x < 5$ . ב. עולה:  $x > 5$ , יורדת:  $x < 5$ . ג.  $\min(5, -2)$ . ד. הוכחה. ה. 10 יח"ש.
- (3) א. עולה:  $3 < x \leq 4$ ,  $-3 < x < 0$ , יורדת:  $0 < x < 3$ ,  $-4 \leq x < -3$ . ב.  $x_{\min} = -3$ ,  $x_{\max} = 0$ ,  $x_{\min} = 3$ . ג. הוכחה. ד.  $m = -8$ .
- (4) א. לא. הנקודה  $(3, 0)$  היא פיתול מכיוון שהפונקציה עולה לפניה ואחריה. ב. הוכחה. ג. 9 יח"ש.
- (5) א.  $\min(5, -4.75)$ . ב. עולה:  $x > 5$ , יורדת:  $x < 5$ . ג. הוכחה. ד. 18.75 יח"ש.
- (6) א.  $f(x): \mathbb{I}$ ,  $f'(x): \mathbb{I}$ . ב. 1 יח"ש.
- (7) א. הוכחה. ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.
- (8) א. הוכחה. ב. 512 יח"ש.
- (9) א. i.  $f'(x) > 0: 1 < x < 3$ . ii.  $f'(x) = 0: x = 1, 3 \leq x < 6$ . iii.  $f'(x) < 0: 6 < x < 7, 0 < x < 1$ . ב.  $f(5) = 5$ ,  $m = 5$ . ד. 4.2 יח"ש.
- (10) א. גרף I -  $f'(x)$  וגרף II -  $f(x)$ . ב. 3 נקודות פיתול. ג. 3 יח"ש.

סרטוטי גרפים לפי מספרי שאלות:

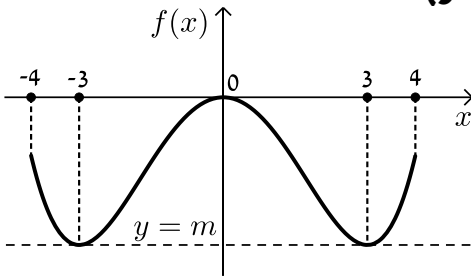
(1)



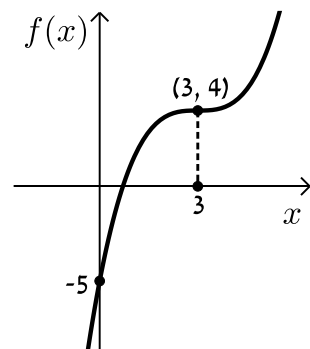
(2)



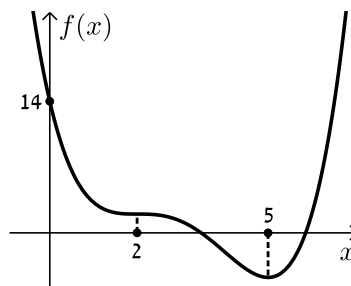
(3)



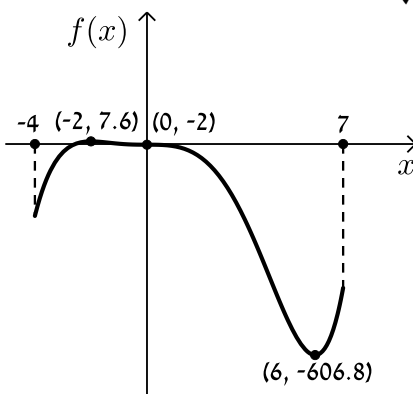
(4)



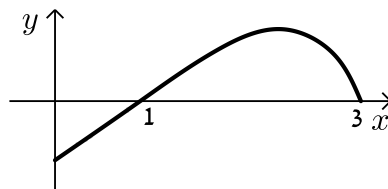
(5)



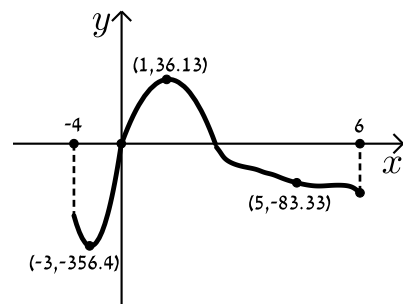
(7)



(9)



(8)



# קורס מבוא למתמטיקה לכלכלנים

פרק 18 - חשבון אינטגרלי - פונקציה מעריכית, לוגריתמית וחזקה

תוכן העניינים

1. פונקציה מעריכית..... 240
2. פונקציה לוגריתמית..... 246
3. פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי..... 252



## פונקציה מעריכית:

### סיכום כללי:

אינטגרלים מיידיים של פונקציות מעריכיות:

| אינטגרלים יסודיים                     | אינטגרלים של פונקציות מורכבות                           |
|---------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ | $\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$ |
| $\int e^x dx = e^x + c$               | $\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$             |

### שאלות:

#### אינטגרל כללי:

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

א.  $\int (5e^x - e^{3x} + e^{-x} + 1) dx$

ג.  $\int (6\sqrt{e^{4x-1}}) dx$

ב.  $\int (3^x + 5^{2x}) dx$

ד.  $\int (e^x + e^{-x})^2 dx$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים:

א.  $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} dx$

ב.  $\int \frac{3e^{3x} - 5e^{2x} + 4e^x - 2}{e^x - 1} dx$

(3) חשב את האינטגרלים הבאים:

א.  $\int (e^{4x} + e^{-x}) dx$

ג.  $\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx$

ב.  $\int (e^{x+1})^2 dx$

ד.  $\int \left( 4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx$

(4) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int \left( \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 3}} \right) dx \quad \text{ב. } \int \left( \frac{3 - e^x}{(e^x - 3x)^2} \right) dx \quad \text{ג. } \int (xe^{x^2}) dx$$

אינטגרל מסוים:

(5) נתונה נגזרת של פונקציה:  $f'(x) = 2e^x - \frac{1}{e^x}$ .

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה  $\left(\ln 2, 3\frac{1}{4}\right)$ .

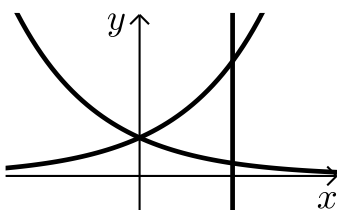
(6) נתונה נגזרת של פונקציה:  $f'(x) = e^{2x} + e^x - 2$ .

מצא את הפונקציה אם ידוע שערך הפונקציה בנקודת המינימום שלה הוא  $\frac{1}{2}$ .

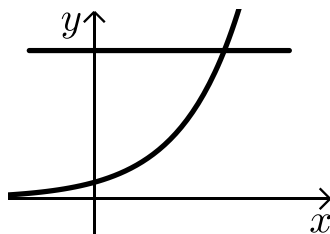
(7) נתונה נגזרת של פונקציה:  $f'(x) = 6x^2 e^{x^3} - \frac{1}{x^2}$ .

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה  $\left(-1, \frac{2}{e}\right)$ .

חישובי שטחים:

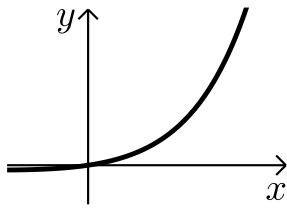


(8) נתונות הפונקציות:  $f(x) = e^x$ ,  $g(x) = e^{-x}$ .

מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות לישר  $x = \ln 3$ .

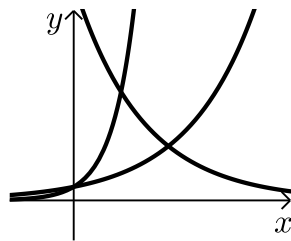
(9) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 3^x$ .

מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישר  $y = 9$  וציר ה- $y$ .



**(10)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = e^{2x} - e^x$ .

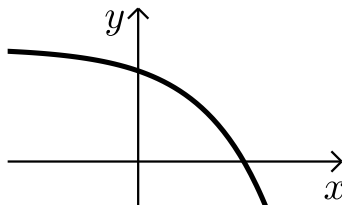
לפונקציה העבירו משיק בראשית הצירים.  
מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,  
המשיק והישר  $x = 2$ .



**(11)** נתונות הפונקציות:

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = e^{3x}, \quad h(x) = 16e^{-x}$$

חשב את גודל השטח הכלוא שבין שלוש הפונקציות.



**(12)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = 5 - e^x$ .

העבירו לפונקציה משיק ששיפועו  $-e$ .  
חשב את גודל השטח הכלוא בין  
הפונקציה, המשיק וציר ה- $x$ .  
ניתן להשאיר  $e$  ו- $\ln$  בתשובה.

**(13)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = e^{bx}$ ,  $(0 < b)$ .

גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר

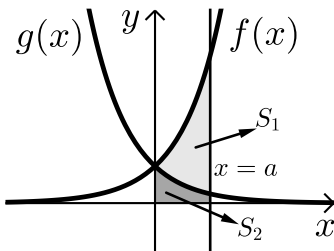
$$\text{בראשית הצירים וציר ה-} y \text{ הוא } \frac{e-2}{4}.$$

מצא את ערכו של הפרמטר  $b$ .

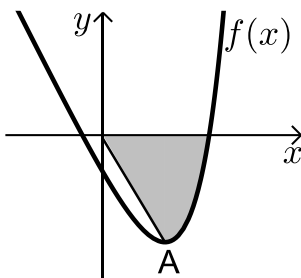
**(14)** נתונות הפונקציות:  $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ ,  $g(x) = e^{-x}$ .

מנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה  $g(x)$  ברביע הראשון הורידו אנך לשני  
הצירים. המשך האנך לציר ה- $y$  חותך את הפונקציה  $f(x)$  ומנקודת החיתוך  
יורד אנך נוסף לציר ה- $x$  כך שנוצר מלבן.

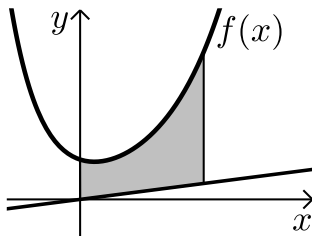
הוכח כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא  $\frac{3}{e}$ .



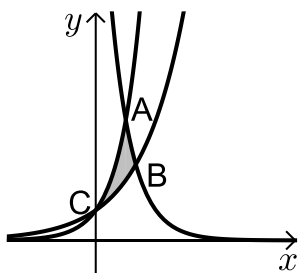
- 15** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:  $f(x) = e^{2x}$  ו-  $g(x) = e^{-2x}$ . מעבירים אנך לציר ה- $x$  את הישר  $x=a$ ,  $a > 0$ , כמתואר באיור. אנך זה יוצר את השטחים  $S_1$  ו-  $S_2$ . ידוע כי השטח  $S_1$  גדול פי 3 מהשטח  $S_2$ . מצא את  $a$ .



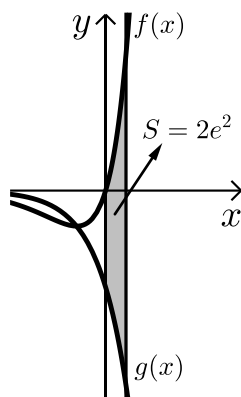
- 16** נתונה הפונקציה:  $f(x) = e^{2x-1} - 2ex - 2$ . הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה. א. מצא את שיעורי הנקודה A. מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים. ב. כתוב את משוואת הישר המחבר את הנקודה A עם הראשית. ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- $x$ , אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 1.7$ .



- 17** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{e^x + e^{ax}}{4}$ . ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה:  $\left(1, \frac{e^3 + 1}{4e^2}\right)$ . א. מצא את  $a$  וכתוב את הפונקציה. ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה  $f(x)$  והישר:  $y = 0.1x$ . חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר  $y$  והאנך:  $x = 2$ .



- 18** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של שלוש פונקציות: I.  $f(x) = 2^x$ . II.  $g(x) = 4^x$ . III.  $h(x) = 2^{4-2x}$ . א. קבע איזה גרף מתאר כל פונקציה. ב. מצא את שיעורי הנקודות A, B ו- C. (נקודות החיתוך שבין הגרפים). ג. חשב את השטח המסומן באיור.



**19) ענה על הסעיפים הבאים:**

א. גזור את הפונקציה הבאה:  $y = e^x(x-1)$ .

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

הפונקציות:  $f(x) = xe^x$ ,  $g(x) = -e^x$ .

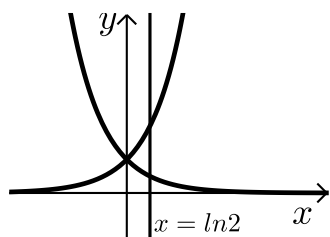
מעבירים ישר  $x = a$  ( $a > 0$ ), החותך את הגרפים

של שתי הפונקציות ויוצר את השטח המתואר

הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- $y$  והישר.

ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$ . מצא את  $a$ .

**חישובי נפחים:**



**20) נתונות הפונקציות:  $f(x) = e^x$ ,  $g(x) = e^{-x}$ .**

השטח הכלוא בין הפונקציות והישר:  $x = \ln 2$

מסתובב סביב ציר ה- $x$ .

חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $5e^x - \frac{e^{3x}}{3} - e^{-x} + x + c$     ב.  $\frac{3^x}{\ln 3} + \frac{5^{2x}}{2\ln 5} + c$     ג.  $3e^{2x-\frac{1}{2}} + c$     ד.  $\frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + c$
- (2) א.  $e^x + x + c$     ב.  $\frac{3e^{2x}}{2} - 2e^x + 2x + c$
- (3) א.  $\frac{1}{4}e^{4x} - e^{-x} + c$     ב.  $\frac{1}{2}e^{2x+2} + c$     ג.  $\frac{0.4^x}{\ln 0.4} + \frac{3.2^x}{\ln 3.2} + \frac{200^x}{\ln 200} + c$     ד.  $8\sqrt{e^x} - \frac{3}{4}e^{\frac{-4x}{3}} + c$
- (4) א.  $2\sqrt{e^x+3} + c$     ב.  $\frac{1}{e^x-3x} + c$     ג.  $\frac{1}{2}e^{x^2} + c$
- (5)  $f(x) = 2e^x + e^{-x} - 1.25$
- (6)  $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + e^x - 2x - 1$
- (7)  $f(x) = 2e^{x^3} + \frac{1}{x} + 1$
- (8)  $S = 1\frac{1}{3}$  יח"ש
- (9)  $S = 10.72$  יח"ש
- (10)  $S = 18.41$  יח"ש
- (11)  $S = 3\frac{1}{3}$  יח"ש
- (12)  $S = 0.192$  יח"ש
- (13)  $b = 2$
- (15)  $a = \ln 2$
- (16) א.  $A(1, -e-2)$     ב.  $y = -(e+2)x$     ג.  $S = 4.744$  יח"ש
- (17) א.  $a = -2$     ב.  $f(x) = \frac{e^x + e^{-2x}}{4}$     ג.  $S = 1.52$
- (18) א.  $A(1, 4)$ ,  $B(1\frac{1}{3}, 2.52)$ ,  $C(0, 1)$     ב.  $S = 1.03$  יח"ש
- (19) א.  $y' = xe^x$     ב.  $a = 2$
- (20)  $1\frac{1}{8}\pi$  יח"ג.

## פונקציה לוגריתמית:

### סיכום כללי:

אינטגרלים מיידיים של פונקציות לוגריתמיות:

| אינטגרל יסודי                      | אינטגרל של פונקציה מורכבת                            |
|------------------------------------|------------------------------------------------------|
| $\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + c$ | $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b  + c$ |

### שאלות:

#### אינטגרל כללי:

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int \left( \frac{3}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{4}{3x-1} \right) dx \quad \text{ב. } \int \frac{x^2+3x-4}{x} dx \quad \text{ג. } \int \frac{x+3}{x^2-9} dx$$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int \frac{x^2+3x+5}{x+1} dx \quad \text{ב. } \int \frac{x^3-x^2+5x-6}{x-2} dx \quad \text{ג. } \int \frac{x^4+3}{x+1} dx$$

(3) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\begin{array}{lll} \text{א. } \int \frac{2x}{x^2-3} dx & \text{ב. } \int \frac{x-1}{x^2-2x} dx & \text{ג. } \int \frac{e^x}{e^x+5} dx \\ \text{ד. } \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx & \text{ה. } \int \frac{\cos x}{\sin x} dx & \end{array}$$

#### אינטגרל מסוים:

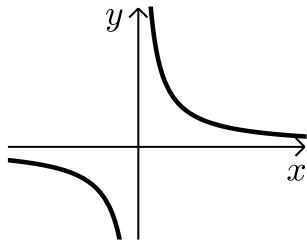
(4) נתונה נגזרת של פונקציה:  $f'(x) = 2x - \frac{1}{x-4}$ .

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה (5, 28).

(5) נתונה נגזרת שנייה של פונקציה:  $f''(x) = 6x - \frac{1}{x^2}$ . מצא את הפונקציה אם

ידוע שהיא עוברת בנקודה  $(1, -2)$  וששיפועה בנקודה זו הוא 3.

### חישובי שטחים:

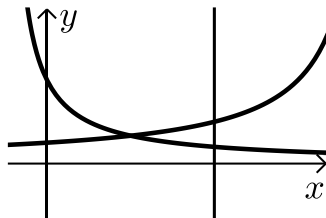


(6) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,

הישרים  $x = -1$  ו- $x = -4$  וציר ה- $x$ .

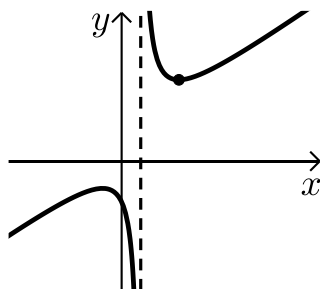
ניתן להשאיר  $\ln$  בתשובה.



(7) נתונות הפונקציות:  $f(x) = \frac{2}{x+1}$ ,  $g(x) = \frac{4}{8-x}$ .

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,

הישר  $x = 4$  והצירים.



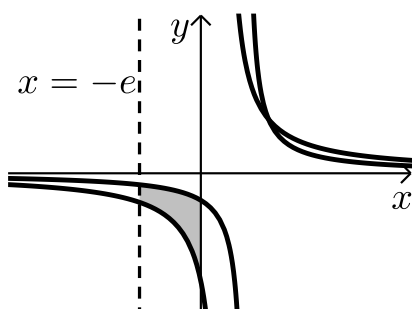
(8) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ .

חשב את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,

המשיק לפונקציה בנקודה שבה  $x = 2$  ואנך לציר

ה- $x$  העובר בנקודת המינימום של הפונקציה.

אפשר להשאיר ביטוי עם  $\ln$  בתשובה.



(9) באיור שלפניך נתונות הפונקציות:  $f(x) = \frac{a}{x-1}$

ו- $g(x) = \frac{a-1}{x-2}$  בתחום:  $x < 0$ .

ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים

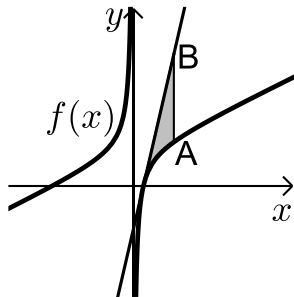
בנקודה שבה  $x = 3$ .

א. מצא את  $a$  וכתוב את שתי הפונקציות.

ב. חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של

שתי הפונקציות, ציר ה- $y$  והישר  $x = -e$ .

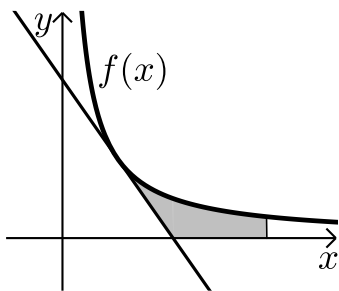




**(10)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = 7 + ax + \frac{b}{x}$ .

ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה  
בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$  היא:  $y = 18x - 9$ .  
א. מצא את  $a$  ו- $b$  וכתוב את הפונקציה.  
מעבירים ישר המקביל לציר ה- $y$  שחותך את גרף  
הפונקציה בנקודה A ואת משוואת המשיק בנקודה B.  
אורך הקטע AB הוא 18.

ב. מצא את משוואת הישר הנ"ל אם ידוע כי הנקודה A  
נמצאת מימין לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.



**(11)** הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$ .

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה

שבה:  $x = 2$  היא:  $y = 4 - x$ .

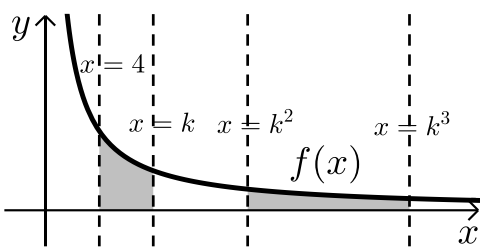
א. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

ב. באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה  $f(x)$

והמשיק בתחום:  $x > 0$ .

חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק,

ציר ה- $x$  והישר  $x = e^2$ .



**(12)** באיור שלפניך נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{2}{x}$ .

בתחום:  $x > 0$ . מעבירים את הישרים:

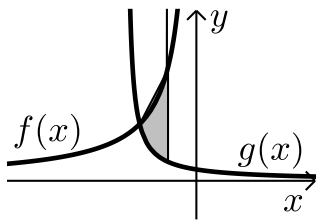
$x = 4$ ,  $x = k$ ,  $x = k^2$ ,  $x = k^3$

כמתואר  $x > 4$ .

א. הבע באמצעות  $k$  את השטחים  $S_1$  ו- $S_2$ .

ב. הראה כי ההפרש:  $S_2 - S_1$  אינו תלוי ב- $k$  וחשב את ערכו.

ג. נתון כי השטח  $S_2$  גדול פי 3 מהשטח  $S_1$ . מצא את  $k$ .



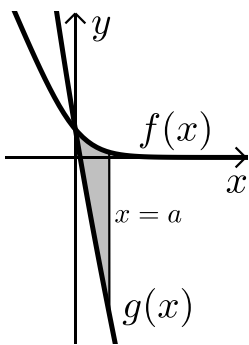
**(13)** נתונות הפונקציות:  $f(x) = -\frac{4}{x}$  ו-  $g(x) = \frac{k}{2x+5}$ .

גרף הפונקציה  $g(x)$  חותך את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = 0.4$ .

א. מצא את הפונקציה  $g(x)$ .

ב. מצא את נקודת החיתוך של שני הגרפים.

ג. חשב את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר  $x = -1$ .



**(14)** באיור מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = \ln(e^{-x} + 1) \quad \text{ו-} \quad g(x) = \ln(e^{-2x} + e^{-3x})$$

בתחום:  $(x \geq 0)$ .

א. הראה כי הגרפים נחתכים על ציר ה- $y$ .

ב. מעבירים ישר  $x = a$ ,  $(a > 1)$ , המאונך

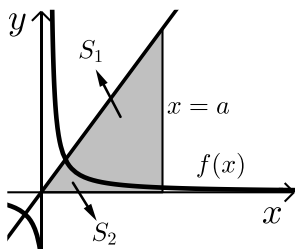
לציר ה- $x$  אשר חותך את הגרפים של שתי

הפונקציות ויוצר את השטח  $S$  (ראה איור).

מצא את ערכו של  $a$  עבורו מתקיים:  $S = 4$ .

**(15)** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{2}{3x-1}$  והישר:  $y = x$ .

א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציות הנמצאת ברביע הראשון.



מעבירים אנך לציר ה- $x$  -  $x = a$  הנמצא מימין

לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.

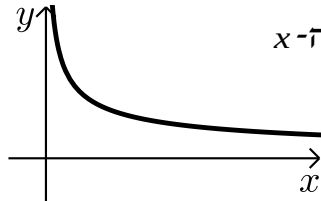
האנך החותך את הגרפים ויוצר את השטחים  $S_1$  ו- $S_2$  המתוארים האיור.

ב. מצא את הערך של  $a$  עבורו השטח  $S_2$  יהיה שווה ל-  $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \ln 7$ .

ג. עבור ערך ה- $a$  שמצאת בסעיף הקודם חשב את יחס השטחים:  $\frac{S_1}{S_2}$ .

**חישובי נפחים:**

**(16)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ .



השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים  $x=1$  ו- $x=3$  וציר ה- $x$  מסתובב סביב ציר ה- $x$ . מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר באופן זה. אפשר להשאיר  $\ln$  בתשובה.

**(17)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}$ .

השטח הכלוא בין הפונקציה, הצירים והישר  $x = \ln \sqrt{3}$  מסתובב סביב ציר ה- $x$ . חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

**(18)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$ .

השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים  $x=a$  ו- $x=a+3$  ( $a > 0$ ), וציר ה- $x$  מסתובב סביב ציר ה- $x$ . חשב את נפח גוף הסיבוב המינימלי שנוצר באופן הזה.

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } 3\ln|x| + 2\ln|x+1| - \frac{4\ln|3x-1|}{3} + c \quad \text{ב. } \frac{x^2}{2} + 3x - 4\ln|x| + c \quad \text{ג. } \ln|x-3| + c$$

$$(2) \quad \text{א. } \frac{x^2}{2} + 2x + 3\ln|x+1| + c \quad \text{ב. } \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 7x + 8\ln|x-2| + c$$

$$\text{ג. } \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + 4\ln|x+1| + c$$

$$(3) \quad \text{א. } \ln|x^2-3| + c \quad \text{ב. } \frac{1}{2}\ln|x^2-2x| + c \quad \text{ג. } \ln|e^x+5| + c$$

$$\text{ד. } \ln|e^x+e^{-x}| + c \quad \text{ה. } \ln|\sin x| + c$$

$$(4) \quad f(x) = x^2 - \ln|x-4| + 3$$

$$(5) \quad f(x) = x^3 + \ln|x| - x - 2$$

$$(6) \quad S = \ln 4 \text{ יח"ש}$$

$$(7) \quad S = 2.17 \text{ יח"ש}$$

$$(8) \quad S = 4\ln 2 - 2 \text{ יח"ש}$$

$$(9) \quad \text{א. } a=2, \quad g(x) = \frac{1}{x-2}, \quad f(x) = \frac{2}{x-1} \quad \text{ב. } 1.76 \text{ יח"ש } S$$

$$(10) \quad \text{א. } a=2, \quad b=-4, \quad f(x) = 7 + 2x - \frac{4}{x} \quad \text{ב. } x=2$$

$$\text{ג. } S = 6 + \ln 256 \approx 11.54 \text{ יח"ש}$$

$$(11) \quad \text{א. } f(x) = \frac{4}{x} \quad \text{ב. } S = 6 - 4\ln 2 \text{ יח"ש}$$

$$(12) \quad \text{א. } S_2 = 2\ln k - \ln 16, \quad S_1 = 2\ln k \quad \text{ב. } S_2 - S_1 = \ln 16 \quad \text{ג. } k=8$$

$$(13) \quad \text{א. } g(x) = \frac{2}{2x+5} \quad \text{ב. } (-2, 2) \quad \text{ג. } \ln 5 \frac{1}{3} \approx 1.674 \text{ יח"ש } S$$

$$(14) \quad \text{ב. } a=2$$

$$(15) \quad \text{א. } (1, 1) \quad \text{ב. } a=5 \quad \text{ג. } \frac{S_1}{S_2} = 5.955$$

$$(16) \quad V = \pi \ln 3 \text{ יח"נ}$$

$$(17) \quad V = \frac{\pi}{2} \ln 2 \text{ יח"נ}$$

$$(18) \quad V = \pi \left( 19 \frac{1}{2} + 4\ln 4 \right) \text{ יח"נ}$$

## פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי:

### סיכום כללי:

אינטגרלים מיידיים של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי:

| אינטגרל יסודי                                                                                   | אינטגרל של פונקציה מורכבת                                                                                                           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\int \sqrt[n]{x^m} dx = \int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + c$ | $\int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx = \int (ax+b)^{\frac{m}{n}} dx = \frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a \cdot \left(\frac{m}{n}+1\right)} + c$ |

תנאי לקיום האינטגרציה:  $\frac{m}{n} \neq -1$ .

### שאלות:

אינטגרל של פונקצית חזקה:

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } \int \sqrt[3]{x} dx & \text{ב. } \int (4x - 2\sqrt[4]{x}) dx & \text{ג. } \int (x \cdot \sqrt[5]{x}) dx \\
 \text{ד. } \int \frac{3}{\sqrt[3]{x}} dx & \text{ה. } \int \frac{x+4}{\sqrt[4]{x}} dx & \text{ו. } \int \frac{x^3 - 3x + 5}{\sqrt{x}} dx \\
 \text{ז. } \int \sqrt[3]{2x-3} dx & \text{ח. } \int \sqrt[4]{5-x} dx & \text{ט. } \int \frac{3}{\sqrt[8]{7x+12}} dx \\
 \text{י. } \int \frac{7}{\sqrt[5]{14-2x}} dx & & 
 \end{array}$$

(2) חשב את ערכי האינטגרלים הבאים:

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } \int_0^8 (x + \sqrt[5]{4x}) dx & \text{ב. } \int_3^{16} (\sqrt[4]{5x+1}) dx & \text{ג. } \int_{-10}^5 \frac{2}{\sqrt[4]{6-x}} dx
 \end{array}$$

**אינטגרל מסוים:**

(3) נתונה הנגזרת הבאה:  $f'(x) = 2x - \sqrt[3]{4x}$ .

ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה  $(2, 3)$ .  
מצא את הפונקציה.

(4) נתונה הנגזרת הבאה:  $f'(x) = \sqrt[3]{5x+7}$ .

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 4$ .  
מצא את הפונקציה.

(5) נתונה הנגזרת הבאה:  $f'(x) = \frac{10}{\sqrt[5]{x+1}} + (x-1)^2$ .

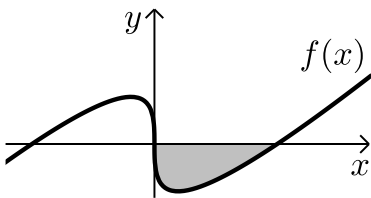
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = -6$ .  
מצא את הפונקציה.

**חישובי שטחים:**

(6) באיור שלפניך מופיע גרף הפונקציה:  $f(x) = x - 4\sqrt[3]{x}$ .

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

ב. חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.



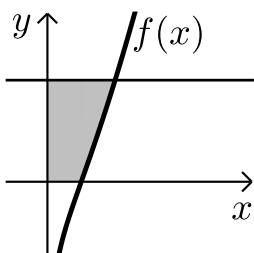
(7) באיור שלפניך מצויר גרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}$ .

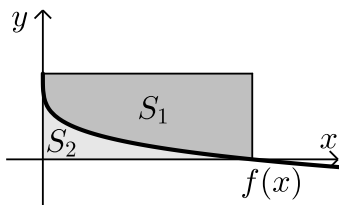
א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

ג. מעבירים אנך לציר ה- $y$  מהנקודה  $(4, 6)$ .

חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והצירים.





(8) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:  $f(x) = 2 - \sqrt[4]{x}$ .

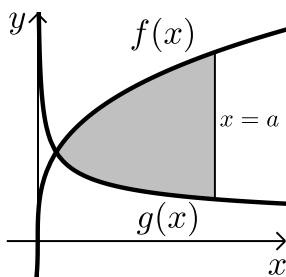
מעבירים אנכים לצירים מנקודות החיתוך של

גרף הפונקציה עם הצירים כך שנוצר מלבן.

מסמנים את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים:

ב-  $S_1$  ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב-  $S_2$ .

מצא את היחס:  $\frac{S_1}{S_2}$ .



(9) באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות

$$f(x) = 4\sqrt[3]{x}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים בתחום:  $x > 0$ .

ב. מעבירים אנך לציר ה- $x$ ,  $x=a$ , ( $a$  פרמטר).

ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים מנקודת

החיתוך שלהם ועד לאנך הוא:  $42\frac{3}{16}$  סמ"ר.

מצא את  $a$ .

(10) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - ax$ , ( $a$  פרמטר).

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x=2$ .

א. מצא את הפרמטר  $a$  וכתוב את הפונקציה.

ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. מצא את נקודת קיצון הקצה של הפונקציה.

ד. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר

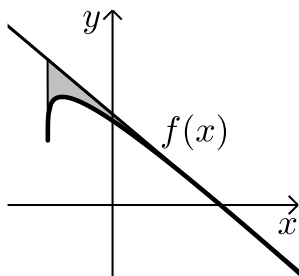
דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ .

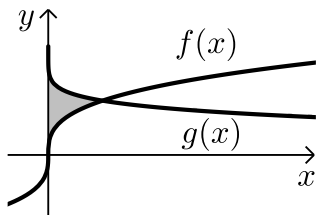
ה. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה  $f(x)$

והמשיק שמצאת בסעיף הקודם. מורידים אנך

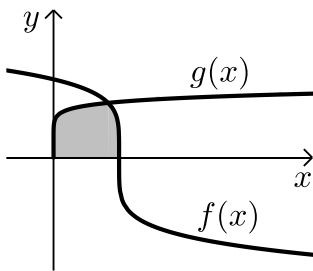
מהמשיק אל נקודת קיצון הקצה של הפונקציה שמצאת בסעיף ג'.

חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה  $f(x)$  והמשיק.

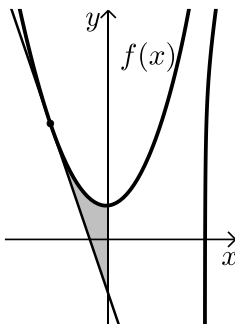




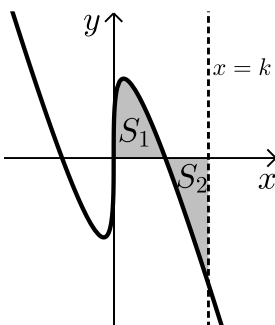
- (11)** באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות:  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $g(x) = 2 - \sqrt[6]{x}$ .
- א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.
- ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- $y$ .



- (12)** הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$ .
- ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה:  $x = 1.2$ .
- א. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .
- ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $f(x)$ , גרף הפונקציה:  $g(x) = \sqrt[10]{x}$  וציר ה- $x$ .



- (13)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{5-x}} + \frac{1}{2}x^2$ .
- א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = -3$ .
- ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $f(x)$ , המשיק וציר ה- $y$ .



- (14)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt[3]{x} - 4x$ .
- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- ג. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה ברביע הראשון. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$  יסומן ב- $S_1$ .
- מעבירים ישר  $x=k$  אשר יוצר את השטח  $S_2$  כמתואר.
- מצא את  $k$  אם ידוע כי:  $S_1 = S_2$ .



## תשובות סופיות:

- (1) א.  $0.75\sqrt[3]{x^4} + c$     ב.  $2x^2 - 1.6\sqrt[4]{x^5} + c$     ג.  $\frac{5}{11}\sqrt[5]{x^{11}} + c$
- ד.  $4.5\sqrt[3]{x^2} + c$     ה.  $\frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7} + \frac{16}{3}\sqrt[4]{x^3} + c$     ו.  $\frac{2}{7}\sqrt{x^7} - 2\sqrt{x^3} + 10\sqrt{x} + c$
- ז.  $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(2x-3)^4} + c$     ח.  $-0.8\sqrt[4]{(5-x)^5} + c$     ט.  $\frac{24}{49}\sqrt[8]{(7x+12)^7} + c$
- י.  $-\frac{35}{8}\sqrt[5]{(14-2x)^4} + c$
- (2) א.  $45\frac{1}{3}$     ב. 33.76    ג.  $18\frac{2}{3}$
- (3)  $f(x) = x^2 - \frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x)^4} + 2$
- (4)  $f(x) = \frac{3}{20}\sqrt[3]{(5x+7)^4} - 12.15$
- (5)  $f(x) = 12.5\sqrt[5]{(x+1)^4} + \frac{1}{3}(x-1)^3 - 18\frac{1}{6}$
- (6) א.  $(0,0)$  ;  $(8,0)$     ב.  $S = 16$  יח"ש
- (7) א.  $x > 0$     ב.  $(2,0)$     ג.  $S = 18.149$  יח"ש
- (8)  $\frac{S_1}{S_2} = 4$
- (9) א.  $\left(\frac{1}{8}, 2\right)$     ב.  $a = 8$
- (10) א.  $f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - x$  ,  $a = 1$     ב.  $x \geq -1.2$     ג.  $(-1.2, 1.2)$
- ד.  $y = -\frac{27}{32}x + \frac{27}{16}$     ה.  $S = 0.48$  יח"ש
- (11) א.  $(1,1)$     ב.  $S = \frac{11}{28}$  יח"ש
- (12) א.  $f(x) = (6-5x)^{\frac{1}{5}}$     ב.  $S = 1\frac{5}{66}$  יח"ש

$$(13) \quad \text{א. } y = -2\frac{15}{16}x - \frac{45}{16} \quad \text{ב. } 4.56 \text{ יח"ש"ש" } S =$$

$$(14) \quad \text{א. כל } x \quad \text{ב. } \left(-\frac{1}{8}, 0\right), \left(\frac{1}{8}, 0\right), (0, 0) \quad \text{ג. } k = \left(\frac{3}{8}\right)^{1.5} = 0.2296..$$

# קורס מבוא למתמטיקה לכלכלנים

פרק 19 - חשבון אינטגרלי - חזרה על מושג האינטגרל ואינטגרלים בשיטת  
\*הנגזרת כבר בפנים\*

תוכן העניינים

1. אינטגרלים מידיים..... 258
2. מציאת פונקציה קדומה..... 261
3. אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"..... 263

## אינטגרלים מיידיים

## שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 12-1 :

$$(\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c : \text{פתירה על ידי הכלל})$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx \quad (3) \qquad \int x^4 dx \quad (2) \qquad \int 4 dx \quad (1)$$

$$\int 4x^{10} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5) \qquad \int \sqrt{x} dx \quad (4)$$

$$\int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9) \qquad \int \left( \frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x} \right) dx \quad (8) \qquad \int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12) \qquad \int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx \quad (11) \qquad \int (x^2+1)(x+2) dx \quad (10)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 20-13 :

$$(\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c : \text{פתירה על ידי הכלל})$$

$$\int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15) \qquad \int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14) \qquad \int (4x+1)^{10} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18) \qquad \int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17) \qquad \int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad (20) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} \quad (19)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 21-26 :

(פתירה על ידי הכלל :  $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$ )

$$\int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx \quad (23)$$

$$\int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{1}{4x} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26)$$

$$\int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25)$$

$$\int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 27-29 :

(פתירה על ידי הכלל :  $\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c$ )

$$\int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}}\right) dx \quad (29)$$

$$\int (e^{x+1})^2 dx \quad (28)$$

$$\int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27)$$

(30) חשבו את האינטגרל :  $\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx$

(פתירה על ידי הכלל :  $\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + c$ )

(31) חשבו את האינטגרל :  $\int \frac{x^2}{1-x^2} dx$

## תשובות סופיות

- $$\begin{aligned} & 4x + c \quad (1) & \frac{x^5}{5} + c \quad (2) & -\frac{1}{x} + c \quad (3) \\ & \frac{x^{1.5}}{1.5} + c \quad (4) & -\frac{2}{\sqrt{x}} + c \quad (5) & \frac{4x^{11}}{11} + c \quad (6) \\ & \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c \quad (7) & -\frac{1}{x^3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2} + c \quad (8) & \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c \quad (9) \\ & \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c \quad (10) & -\frac{1}{x} + 2x + \frac{x^3}{3} + c \quad (11) & \frac{x^{1.5}}{1.5} + \frac{x^{0.5}}{0.5} + c \quad (12) \\ & \frac{(4x+11)^{11}}{44} + c \quad (13) & \frac{(x-1)^{21}}{21} + c \quad (14) & -\frac{1}{(x-2)^4} + c \quad (15) \\ & \frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4} + c \quad (16) & 10\sqrt{2x+4} + c \quad (17) \\ & -\frac{1}{2(x-2)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + c \quad (18) & -\frac{2}{3}\left((x-1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) + c \quad (19) \\ & \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - x + c \quad (20) & \frac{\ln|x|}{4} + c \quad (21) & \ln|x| + x + \frac{x^2}{2} + c \quad (22) \\ & x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c \quad (23) & \frac{\ln|4x-1|}{4} + c \quad (24) & x + \ln|x+2| + c \quad (25) \\ & 4(x - 1.75\ln|x+2|) + c \quad (26) & \frac{e^{4x}}{4} - e^{-x} + c \quad (27) & \frac{e^{2x+2}}{2} + c \quad (28) \\ & 8e^{\frac{x}{2}} - \frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4} + c \quad (29) & \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)} + \frac{(200)^x}{\ln(200)} + c \quad (30) \\ & -\left(x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + c \quad (31) \end{aligned}$$

## מציאת פונקציה קדומה

### שאלות

- (1) נתונה הנגזרת  $f'(x) = 2x - \sqrt[3]{4x}$ .  
 ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה  $(2, 3)$ .  
 מצאו את הפונקציה.
- (2) נתונה הנגזרת  $f'(x) = \sqrt[3]{5x+7}$ .  
 ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 4$ .  
 מצאו את הפונקציה.
- (3) נתונה הנגזרת  $f'(x) = \frac{10}{\sqrt[5]{x+1}} + (x-1)^2$ .  
 ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = -6$ .  
 מצאו את הפונקציה.
- (4) נתונה הנגזרת  $f'(x) = 2x - 6$ .  
 ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.  
 מצאו את הפונקציה.
- (5) נתונה הנגזרת  $f'(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} + 2$ .  
 שיפוע המשיק לפונקציה, בנקודה שבה  $y = 5\frac{2}{3}$ , הוא 3.  
 מצאו את הפונקציה.
- (6) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה  $f''(x) = 6x + 6$ .  
 שיפוע הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא -12,  
 וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1.  
 מצאו את הפונקציה.
- (7) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה  $f''(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$ .  
 המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא הישר  $y = -4$ .  
 מצאו את הפונקציה.

(8) נתונה פונקציה  $f: R \rightarrow R$  המקיימת  $f(0) = 0$  וכן לכל  $x_0$  ממשי:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = |x_0|$$

- א. מצאו את תחומי הרציפות של הפונקציה.  
 ב. חשבו את הגבול  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  או קבעו שהוא אינו קיים.  
 ג. מצאו כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
 ד. מצאו את כל נקודות הפיתול של הפונקציה.  
 ה. תהי  $G(x)$  פונקציה קדומה של  $|x|$ .  
 חשבו את הנגזרת  $(G(x) - f(x))'$ .

### תשובות סופיות

$$f(x) = x^2 - \frac{3}{16} \sqrt[3]{(4x)^4} + 2 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{3}{20} \sqrt[3]{(5x+7)^4} - 12 \frac{3}{20} \quad (2)$$

$$f(x) = 12 \frac{1}{2} \sqrt[5]{(x+1)^4} + \frac{1}{3} (x-1)^3 - 18 \frac{1}{6} \quad (3)$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 14 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{(x+2)^3} - \frac{2}{3} \sqrt{(x-1)^3} + 2x - 3 \quad (5)$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10 \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{4}{x} + 3x + 2 \quad (7)$$

(8) א. רציפה לכל  $x$ . ב.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ . ג. נקודת חיתוך אחת  $(0,0)$ .

ד. נקודת פיתול אחת  $(0,0)$ . ה. 0.



## אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

### שאלות

הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\begin{array}{lll}
 \int \frac{1}{x \ln x} dx & \text{(3)} & \int \frac{x^2}{x^3+1} dx & \text{(2)} & \int \frac{2x}{x^2+1} dx & \text{(1)} \\
 \int e^{-2x^2} x dx & \text{(6)} & \int e^{x^2} 2x dx & \text{(5)} & \int \frac{e^{x+2}}{e^x+1} dx & \text{(4)} \\
 \int 2x\sqrt{x^2+1} dx & \text{(9)} & \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx & \text{(8)} & \int \frac{\ln x}{x} dx & \text{(7)} \\
 & & \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx & \text{(11)} & \int x^2 \sqrt{x^3+4} dx & \text{(10)}
 \end{array}$$

### תשובות סופיות

$$\begin{array}{lll}
 \ln|\ln|x|| + c & \text{(3)} & \frac{1}{3} \ln|x^3+1| + c & \text{(2)} & \ln|x^2+1| + c & \text{(1)} \\
 -\frac{e^{-2x^2}}{4} + c & \text{(6)} & e^{x^2} + c & \text{(5)} & e^2 \ln|e^x+1| + c & \text{(4)} \\
 \frac{2}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} + c & \text{(9)} & 2\sqrt{x^2+1} + c & \text{(8)} & \frac{1}{2} (\ln x)^2 + c & \text{(7)} \\
 & & \frac{2}{3} (\ln x)^{\frac{3}{2}} + c & \text{(11)} & \frac{2}{9} (x^3+4)^{\frac{3}{2}} + c & \text{(10)}
 \end{array}$$

# קורס מבוא למתמטיקה לכלכלנים

פרק 20 - חשבון אינטגרלי - אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים ..... 264

## אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

---

### שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-12 :

$$\int x^4 \ln x dx \quad (2) \qquad \int x e^x dx \quad (1)$$

$$\int x^2 e^{-4x} dx \quad (4) \qquad \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (3)$$

$$\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (6) \qquad \int \ln x dx \quad (5)$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (8) \qquad \int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (7)$$

$$\int \left( \frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (10) \qquad \int \ln^2 x dx \quad (9)$$

$$\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx \quad (12) \qquad \int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx \quad (11)$$

(13) מצאו נוסחת נסיגה עבור  $\int x^n e^x dx$ , באשר  $n$  טבעי.

(14) חשבו את  $\int x^4 e^x dx$ .

## תשובות סופיות

$$xe^x - e^x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^5}{5} \left( \ln x - \frac{1}{5} \right) + c \quad (2)$$

$$\left( \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c \quad (3)$$

$$-\frac{x^2}{4} e^{-4x} + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{4} x e^{-4x} - \frac{1}{16} e^{-4x} \right) + c \quad (4)$$

$$x \ln x - x + c \quad (5)$$

$$-\frac{1}{3} (x \ln x - x) + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{5} \left( \frac{x^2}{2} \ln(x-2) - \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2} + 2x + 4x \ln|x-2| \right) \right) + c \quad (7)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + c \quad (8)$$

$$x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + c \quad (9)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{2}{x} (\ln x - 1) + c \quad (10)$$

$$\frac{e^x}{x+1} + c \quad (11)$$

$$\frac{2}{9} (x+1)(x+2)^{\frac{9}{2}} - \frac{4}{99} (x+2)^{\frac{11}{2}} + c \quad (12)$$

$$x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \quad (13)$$

$$e^x (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + c \quad (14)$$

# קורס מבוא למתמטיקה לכלכלנים

פרק 21 - חשבון אינטגרלי - אינטגרלים בשיטת ההצבה

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת ההצבה ..... 266

## אינטגרלים בשיטת ההצבה

### שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (2)$$

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (4)$$

$$\int e^{x^2} x^3 dx \quad (5)$$

$$\int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx \quad (7)$$

$$\int x^3 (3x^2-1)^{14} dx \quad (8)$$

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad (9)$$

$$\int \ln^3 x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (11)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (12)$$

$$\int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} \quad (14)$$

$$\int x^5 \sqrt[3]{x^3+1} dx \quad (15)$$

## תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x^2+1} + c \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \left( \frac{(\sqrt{x^3+4})^5}{5} - \frac{4}{3} (\sqrt{x^3+4})^3 \right) + c \quad (2)$$

$$2 \left( \frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3} - \sqrt{x^2+1} \right) + c \quad (3)$$

$$-\frac{1}{3(\ln x)^3} + c \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} (x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) + c \quad (5)$$

$$3e^{\sqrt[3]{x}} (\sqrt[3]{x}^2 - 2\sqrt[3]{x} + 2) + c \quad (6)$$

$$\ln \left| \left( x + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left( x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}} \right| + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{18} \left( \frac{(3x^2-1)^{16}}{16} + \frac{(3x^2-1)^{15}}{15} \right) + c \quad (8)$$

$$\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right| + c \quad (9)$$

$$x(\ln^3 x - 3\ln^2 x + 6\ln x - 6) + c \quad (10)$$

$$\frac{(\ln x)^5}{5} + c \quad (11)$$

$$\ln |\ln(\ln x)| + c \quad (12)$$

$$-\frac{1}{4} \left( -\frac{1}{1-x^4} - \ln |1-x^4| \right) + c \quad (13)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1} \right| + c \quad (14)$$

$$\frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^7}{7} - \frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^4}{4} + c \quad (15)$$

# קורס מבוא למתמטיקה לכלכלנים

פרק 22 - אלגברה ליניארית - פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות

תוכן העניינים

1. פתרון מערכת משוואות ליניאריות..... 268
2. חקירת מערכת משוואות ליניאריות (עם פרמטר)..... 273
3. פתרון וחקירת מערכת הומוגנית של משוואות ליניאריות..... 276



## פתרון מערכת משוואות לינאריות

## שאלות

(1) מצאו אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות:

$$\begin{array}{llll} 2x+y=4 & x-y=0 & x-4y=-7 & x+10y=11 \\ x+y=3 & 2x+y=3 & x-y=-1 & 2x-2y=0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ד.} \\ \text{ג.} \\ \text{ב.} \\ \text{א.} \end{array}$$

(2) רשמו את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{llll} x=3 & 2x+y+z=3 & x-4y+z=-7 & x+10y=11 \\ 2x+y=4 & x-z=0 & x-y=-1 & 2x-2=0 \\ z+t=8 & & x+y+z=5 & x+y=3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ד.} \\ \text{ג.} \\ \text{ב.} \\ \text{א.} \end{array}$$

בשאלות 3-5 בצעו על כל מטריצה את הפעולות הרשומות מתחתיה, בזו אחר זו, ומצאו את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

$$\begin{array}{lll} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \\ \text{(5)} & \text{(4)} & \text{(3)} \\ R_1 \rightarrow R_1 + 3R_3, R_2 \rightarrow R_2 + 3R_3 & R_2 \rightarrow 4R_2, R_2 \rightarrow R_2 + R_1 & R_1 \leftrightarrow R_2, R_1 \rightarrow 2R_1 \\ R_1 \rightarrow 5R_1 - 8R_2 & R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2 & R_3 \rightarrow R_3 + R_1, R_1 \leftrightarrow R_3 \end{array}$$

(6) מצאו איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל, כדי לקבל את המטריצה מימין:

$$\begin{array}{ll} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{א.} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} & \text{ב.} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} & \text{ג.} \end{array}$$

בשאלות 7-15 הביאו את המטריצות הבאות לצורה **מדורגת**  
 (בשאלות 7, 9, 11 ו-13 – גם לצורה **מדורגת קנונית**):

$$(8) \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (7) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(10) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (9) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

$$(12) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (11) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(14) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad (13) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(15) \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 2+i & 1+3i \end{pmatrix}$$

$$F=\mathbb{C}, F=\mathbb{R}$$

\* בשאלה 15 יש לדרג את המטריצה פעם מעל השדה  $\mathbb{C}$  ופעם מעל השדה  $\mathbb{R}$ .

בשאלות 16-27 פתרו את מערכות המשוואות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דירוג):

$$\begin{aligned} 4x + 8y &= 20 \\ 3x + 6y &= 15 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 5x - 4y &= -3 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 10x_1 - 6x_2 - 2x_3 &= 32 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} 8x - 4y &= 10 \\ -6x + 3y &= 1 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 3 \\ 4x + 6y + 16z &= 8 \\ 3x + 2y + 17z &= 1 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= -11 \\ 2x + 3y - z &= -5 \\ 3x + y - z &= 2 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} 4x - 7y &= 0 \\ 8x - 14y &= 2 \\ -16x + 28y &= 4 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} x + 3y &= 2 \\ 2x + y &= -1 \\ x - y &= -2 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z + 2t &= 2 \\ 2x + 5y - 8z + 6t &= 5 \\ 6x + 8y - 10z + 4t &= 8 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ -9x + 6y &= -3 \\ 6x - 4y &= 2 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 2 \\ 3x - 2y - z &= 5 \\ 2x - 5y + 3z &= -4 \\ 2x + 8y + 12z &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 13x_4 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

28) פתרו את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס, מעל השדה  $F$ :

$$\begin{aligned} z_1 + iz_2 + (1-i)z_3 &= 1+4i \\ iz_1 + z_2 + (1+i)z_3 &= 2+i \\ (-1+3i)z_1 + (3-i)z_2 + (2+4i)z_3 &= 5-i \end{aligned}$$

א.  $F = \mathbb{R}$

ב.  $F = \mathbb{C}$

## תשובות סופיות

(1) א ו-ג שקולות, ו-ב ו-ד שקולות.

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ ב.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ א.} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ג.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \text{ ד.}$$

$$(3) \quad \begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix} \quad (4) \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad (5) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(6) \quad \text{א. } R_1 \rightarrow 2R_1 + R_2 \quad \text{ב. } R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1 \quad \text{ג. } R_2 \rightarrow 2R_2 + 4R_1$$

$$(7) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ו-} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(8) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(9) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ו-} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$(10) \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(11) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ו-} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(12) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$F=\mathbb{R} \qquad F=\mathbb{C}$

$$\phi \quad (18) \qquad (x, y) = (5-2t, t) \quad (17) \qquad (x, y) = (1, 2) \quad (16)$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, -3, -2) \quad (20) \qquad \phi \quad (19)$$

$$(x, y) = (-1, 1) \quad (22) \qquad (x, y, z) = (-1-7t, 2+2t, t) \quad (21)$$

$$(x, y) = \left( \frac{1+2t}{3}, t \right) \quad (24) \qquad \phi \quad (23)$$

$$\phi \quad (26) \qquad (x, y, z, t) = (-a+2b, 1+2a-2b, a, b) \quad (25)$$

$$(x, y, z) = (2, 1, -1) \quad (27)$$

$$(z_1, z_2, z_3)_{F=\mathbb{C}} = ((-1+i)t+1+i, 3, t) \cdot \text{ב} \qquad (z_1, z_2, z_3)_{F=\mathbb{R}} = (2, 3, -1) \cdot \text{א} \quad (28)$$

## חקירת מערכת משוואות ליניאריות (עם פרמטר)

### שאלות

בשאלות 1-6 מצאו לאילו ערכי  $k$  (אם יש כאלה) יש למערכות:  
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$x + ky + z = 1$$

$$x + y + kz = 1 \quad (2)$$

$$kx + y + z = 1$$

$$x - y + z = 1$$

$$5x - 7y + (k^2 + 3)z = k^2 + 1 \quad (1)$$

$$3x - y + (k + 3)z = 3$$

$$2x - y + z = 0$$

$$x + 2y - z = 0 \quad (4)$$

$$5x + (1 - k)y + k^2 z = 1$$

$$x + 2ky + z = 0$$

$$3x + y + kz = 2 \quad (3)$$

$$x + 9ky + 5z = -2$$

$$x + ky + 3z = 2$$

$$kx - y + z = 4 \quad (6)$$

$$3x + y + (2 + k)z = 0$$

$$kx - y = 1$$

$$(k - 2)x + ky = -2 \quad (5)$$

$$(k^2 - 1)z = 9$$

בשאלות 7-9 מצאו לאילו ערכי  $k$  (אם יש כאלה) יש למערכות:  
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$2x - 3y + z = 1$$

$$4x + (k^2 - 5k)y + 2z = k \quad (8)$$

$$2x + ky = 3$$

$$(k + 3)x + 2y = k^2 + 5 \quad (7)$$

$$6x + 3ky = 7k^2 + 2$$

$$3x + 4y - z = 2$$

$$kx - 2y + z = -1 \quad (9)$$

$$x + 8y - 3z = k$$

$$2x + 6y - 2z = 0.5k + 1$$

בשאלות 10-12 מצאו לאילו ערכים של  $a$  ושל  $b$  (אם יש כאלה) יש למערכות:  
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$x + y - z + t = 1$$

$$ax + y + z + t = b \quad (12)$$

$$3x + 2y + at = 1 + a$$

$$2x + 4y + az = -1$$

$$x + 2y + 4z = -4 \quad (11)$$

$$x + 2y - 4z = 0$$

$$x + 2y + 6z = -2b$$

$$x + 2y - 4z = b$$

$$7x - 10y + 16z = 7 \quad (10)$$

$$2x - ay + 3z = 1$$

$$x + az = 1$$

$$y + 2z = 2 \quad (13) \text{ נתונה מערכת המשוואות:}$$

$$bx + cy + dz = 3$$

- א. מצאו תנאי עבור  $a, b, c, d$ , כך שלמערכת יהיה פתרון יחיד.  
 ב. מצאו תנאי עבור  $b, c, d$ , כך שלכל  $a$ , למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

$$(14) \text{ נתונה המערכת: } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 7y + (k^2 + 1)z = k^2 - 1 \\ 4x - 6y + (k + 2)z = 4 \end{cases}$$

- א. רשמו את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות.  
 ב. רשמו את הצורה המדורגת של המטריצה מסעיף א.  
 ג. מצאו לאילו ערכי  $k$  יש למערכת:  
 1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.  
 ד. רשמו את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.  
 ה. מצאו לאילו ערכי  $k$  יש למערכת פתרון שבו  $z = 0$ .  
 ו. מצאו לאילו ערכי  $k$  יש למערכת פתרון יחיד שבו  $z = 0$ .  
 ז. מצאו עבור איזה ערך של  $k$  פתרון של המשוואה השלישית הוא  $(1, 2, 3)$ .  
 האם ייתכן שהפתרון הנ"ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבירו.  
 ח. מצאו לאיזה ערך של  $k$ ,  $(1, 0, 0)$  הוא הפתרון היחיד של המערכת.

$$(15) \text{ נתונות המשוואות של 3 מישורים: } \begin{cases} 3x + my = 3 \\ mx + 2y - mz = 1 \\ -x + mz = -1 \end{cases}$$

- בסעיפים א-ג מצאו עבור אילו ערכים של הקבוע  $m$  שלושת המישורים:  
 א. נפגשים בנקודה אחת (מצא נקודה זו).  
 ב. לא נפגשים באף נקודה.  
 ג. בעלי אינסוף נקודות משותפות (מצא נקודות אילו).  
 ד. האם קיים ערך של  $m$  עבורו 3 המישורים מתלכדים או מקבילים?

## תשובות סופיות

- (1) 1.  $k \neq 1, k \neq -2$  2.  $k=1$  3.  $k=-2$
- (2) 1.  $k \neq 1, k \neq -2$  2.  $k=-2$  3.  $k=1$
- (3) 1.  $k \neq -1, k \neq \frac{4}{7}$  2.  $k=\frac{4}{7}$  3.  $k=-1$
- (4) 1.  $k \neq 1, k \neq -0.4$  2.  $k=-0.4$  3.  $k=1$
- (5) 1.  $k \neq \pm 1, k \neq -2$  2.  $k=\pm 1, k=-2$
- (6) 1.  $k \neq -1, k \neq -3, k \neq 2$  3.  $k=-1, k=-3, k=2$
- (7) 1.  $k=-1$  2.  $k \neq \pm 1$  3.  $k=1$
- (8) 1.  $k \neq 1$  2.  $k=1$  3.  $k \neq 3$
- (9) 1.  $k \neq 1$  2.  $k=1$  3.  $k \neq 3$
- (10) 1.  $a \neq 2$  2.  $a=2, b \neq -3$  3.  $a=2, b=-3$
- (11) 1.  $a \neq -6$  או  $b \neq 2.5$  2.  $a=-6, b=2.5$  3.  $a \neq -6, b=2.5$
- (12) 1.  $a=2, b \neq 2$  2.  $a \neq 2, b=2$  3.  $a \neq 2, b=2$
- (13) א.  $ab+2c \neq d$  ב.  $b=0, c=1.5, d=3$
- (14) א.  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & k^2+4 & k^2-4 \\ 0 & 0 & -k^2+k+2 & 4-k^2 \end{pmatrix}$  ב.  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & k^2+1 & k^2-1 \\ 4 & -6 & k+2 & 4 \end{pmatrix}$
- ג. 1.  $k \neq 2, k \neq -1$  2.  $k=-1$  3.  $k=2$  4.  $(x, y, z) = (1+0.2t, 0.8t, t)$
- ה.  $k=\pm 2$  ו.  $k=-2$  ז.  $k=2$ , לא.  $k=-2$  ח.  $k=-2$
- (15) א.  $m \neq 0, -2, 3$  ב.  $m=-2, 3$  ג.  $m=0$  ד. לא.



## פתרון וחקירת מערכת הומוגנית של משוואות לינאריות

### שאלות

$$(1) \quad \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + 2z = 6 \\ 4x - 2y + 5z = 12 \end{cases} \quad \text{פתרו את המערכת}$$

על סמך הפתרון, קבעו את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה.

$$(2) \quad \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + 2z = 6 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \quad \text{פתרו את המערכת}$$

על סמך הפתרון, קבעו את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה.

$$(3) \quad \begin{cases} x - y = 1 \\ -x + 2y - z = k \\ 2x + my + z = 3 \end{cases} \quad \text{נתונה המערכת:}$$

- מצאו את ערכי  $m$ , עבורם למערכת ההומוגנית המתאימה אינסוף פתרונות.
- עבור ערך  $m$  שנמצא ב-א, מצאו את ערכי  $k$ , עבורם למערכת פתרון.
- עבור ערכי  $m, k$  שנמצאו בסעיפים הקודמים, מצאו את הפתרון הכללי של המערכת הנתונה, וקבעו את הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

- (4) נתון שהחמישייה  $(4t - 2s + 4, -t + s, 2, t, s)$  מהווה פתרון כללי של מערכת ליניארית נתונה. קבעו אילו מבין הטענות הבאות נכונות:

- המערכת הנתונה היא מערכת הומוגנית.
- החמישייה  $(4, 0, 2, 0, 0)$ , היא פתרון פרטי של המערכת הנתונה.
- החמישייה  $(4, 0, 2, 1, 1)$ , היא פתרון של המערכת הנתונה.
- לכל  $a$  ממשי, החמישייה  $(4a, 0, 2a, 0, 0)$  אינה פתרון של המערכת הנתונה.
- החמישייה  $(4t - 2s, -t + s, 0, t, s)$ , היא פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.
- החמישייה  $(0, 1, 0, 1, 2)$ , היא פתרון פרטי של המערכת ההומוגנית המתאימה.
- במערכת הנתונה, מספר המשוואות לאחר דירוג הוא 2.

$$(5) \quad \begin{cases} 3x + my = 0 \\ mx + 2y - mz = 0 \\ -x + mz = 0 \end{cases} \quad \text{נתונה המערכת ההומוגנית}$$

יהי  $W$  אוסף הפתרונות של המערכת.  
 עבור אילו ערכים של  $m$  הקבוע (אם בכלל)  $W$  הוא:  
 א. נקודה (מצאו נקודה זו).  
 ב. ישר (מצאו ישר זה).  
 ג. מישור (מצאו מישור זה).

$$(6) \quad \text{נתונה המטריצה} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & a & b & c \\ 4 & d & e & f \\ -3 & g & h & i \end{pmatrix}$$

נסמן ב- $A'$  את הצורה המדורגת של  $A$ .  
 ידוע כי בממ"ל ההומוגנית המתאימה יש יותר משתנים חופשיים ממשתנים תלויים.  
 מצאו את  $A$ .

## תשובות סופיות

- (1) פתרון כללי של המערכת  $(4 - \frac{3}{2}t, -\frac{1}{2}t + 2, t)$ .
- פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא  $(-\frac{3}{2}t, -\frac{1}{2}t, t)$ .
- (2) למערכת פתרון יחיד  $(x, y, z) = (1, 1, 2)$ .
- למערכת ההומוגנית המתאימה פתרון יחיד  $(0, 0, 0)$ .
- (3) א.  $m = -3$     ב.  $k = -2$     ג. פתרון כללי של המערכת  $(x, y, z) = (t, t-1, t)$ .
- פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא  $(t, t, t)$ .
- (4) א. הטענה לא נכונה.    ב. הטענה נכונה.    ג. הטענה לא נכונה.
- ד. הטענה לא נכונה.    ה. הטענה נכונה.    ו. הטענה לא נכונה.
- ז. הטענה לא נכונה.
- (5) א.  $m \neq 0, -2, 3$ . הנקודה היא  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ .
- ב. אם  $m = 0$  נקבל ישר  $\underline{x} = t(0, 0, 1)$ . אם  $m = 2$  נקבל ישר  $\underline{x} = t(2, -1, 1)$ .
- אם  $m = 3$  נקבל ישר  $\underline{x} = t(3, -3, 1)$ .
- ג. אין ערכים של  $m$  עבורם נקבל מישור.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \\ -3 & -6 & -9 & -12 \end{pmatrix} \quad (6)$$

# קורס מבוא למתמטיקה לכלכלנים

פרק 23 - אלגברה ליניארית - מטריצות

תוכן העניינים

|     |                                            |
|-----|--------------------------------------------|
| 279 | 1. מטריצות                                 |
| 284 | 2. מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות |
| 285 | 3. המטריצה ההופכית                         |
| 292 | 4. דרגה של מטריצה                          |
| 296 | 5. בחזרה למערכת משוואות ליניארית           |
| 303 | 6. מטריצה אלמנטרית                         |

## מטריצות

## שאלות

- (1) נתונות המטריצות הבאות:  $A_{4 \times 6}$ ,  $B_{4 \times 6}$ ,  $C_{6 \times 2}$ ,  $D_{4 \times 2}$ ,  $E_{6 \times 4}$ .  
קבעו אילו מבין המטריצות הבאות מוגדרות.  
במידה והמטריצה מוגדרת, רשמו את סדר המטריצה:

- א.  $A+B$       ב.  $AB$       ג.  $AC-D$       ד.  $AE-B$   
ה.  $B+AB$       ו.  $E(B+A)$       ז.  $(E+A^T)D$       ח.  $E^T B$   
ט.  $E(AC)$       י.  $E(B-A)$

- (2) מצאו את  $x, y, z$ , אם ידוע כי:
- $$\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$$

בשאלות 3-8 נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשבו (במידה וניתן):

(3) א.  $E+D$       ב.  $E-D+I_3$

ג.  $5C$       ד.  $2D+4EI_3$

(4)  $2tr(D^2 - 2E)$

(5) א.  $4C^T + A$       ב.  $\frac{1}{2}A^T + \frac{1}{4}C$

(6)  $I_2 BC$

(7)  $tr(C^T C)$

(8)  $DABC$

(9) נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר  $n$ .

$$\text{נתון כי } (A - I)(A + I) = 0.$$

הוכיחו או הפריכו:  $A = I$  או  $A = -I$ .

(10) אפיינו את כל המטריצות  $A_{2 \times 2}$  שמקימות  $A^2 = -4I$ .

$$(11) \text{ הוכיחו כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 1 - 2^n & 1 \end{pmatrix}$$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שנדרש לדעת הוכחות באינדוקציה.

(12) שתי מטריצות  $A$  ו- $B$  יקראו מתחלפות אם  $AB = BA$ .

הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

א. אם המטריצות  $A$  ו- $B$  מתחלפות עם המטריצה  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , אז המטריצות

$A$  ו- $B$  מתחלפות.

ב. אם המטריצה  $A$  מתחלפת עם המטריצה  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , אז  $A^T = -A$ .

(13) תהי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר  $n$ .

$$\text{נתון כי } AA^T = 0. \text{ הוכיחו כי } A = 0.$$

האם הטענה נשארת נכונה אם איברי  $A$  מרוכבים?

אם כן, הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

(14) יהיו  $A$  ו- $B$  מטריצות ריבועיות המקיימות  $AB = BA$  (מטריצות מתחלפות).

א. הוכיחו כי לכל  $k$  טבעי מתקיים  $AB^k = B^k A$ .

ב. הוכיחו כי לכל  $k$  טבעי מתקיים  $(AB)^k = A^k B^k$ .

$$(15) \text{ לפי נוסחת הבינום של ניוטון } (A + B)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k, \text{ כאשר}$$

$$A, B \in \mathbb{R}, n, k \in \mathbb{N}$$

א. האם נוסחת הבינום נשארת נכונה גם אם  $A$  ו- $B$  מטריצות ריבועיות

מסדר  $\ell$ ?

ב. מצאו תנאי מספיק על המטריצות  $A$  ו- $B$ , על מנת שנוסחת הבינום

תהיה נכונה עבורן.

ג. מצאו את הפיתוח של  $(A + I)^n$  ו- $(A - I)^n$ , כאשר  $A$  ו- $I$  ריבועיות מסדר

$\ell$ .

- 16** א. הגדירו והדגו את המונח מטריצה נילפוטנטית.  
 ב. נניח ש- $A$  ו- $B$  מטריצות מתחלפות ונילפוטנטיות.  
 הוכיחו שגם המטריצות  $AB$  ו- $A+B$  נילפוטנטיות.

- 17** תהי  $A_{n \times n}$  מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי:  $a_{ij} = \min\{i, j\}$ .  
 תהי  $B_{n \times n}$  מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי:  $b_{ij} = \begin{cases} 1 & i+j = n+1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ .

- א. כתבו את המטריצות  $A$  ו- $B$  בצורה מפורשת.  
 ב. המטריצה  $C$  מקיימת  $C = A \cdot B$ .  
 חשבו את  $C$  ומצאו נוסחה עבור  $c_{ij}$  לכל  $1 \leq i, j \leq n$ .

- 18** מצאו מטריצה ממשית  $A$ , כך שיתקיים  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A - \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A \right)^T = A - A^T$ .

## תשובות סופיות

(1) א.  $4 \times 6$  ב. לא. ג.  $4 \times 2$  ד. לא. ה. לא. ו.  $6 \times 6$

ז.  $6 \times 2$  ח. לא ט.  $6 \times 4$  י.  $6 \times 6$

(2)  $(x, y, z) = (2, 1, -1)$

(3) א.  $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$  ב.  $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$  ג.  $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}$

ד.  $\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

(4) 230

(5) א.  $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$  ב.  $\begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}$

(6)  $\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}$

(7) 63

(8)  $\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}$

(9) שאלת הוכחה.

(10)  $A = \begin{pmatrix} a & -\frac{a^2+4}{c} \\ c & -a \end{pmatrix}$

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) א+ב. שאלת הוכחה.

ג.  $(A+I)^n = \binom{n}{0} A^n + \binom{n}{1} A^{n-1} + \binom{n}{2} A^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} A^1 + \binom{n}{n} I$

$(A-I)^n = \binom{n}{0} A^n - \binom{n}{1} A^{n-1} + \binom{n}{2} A^{n-2} - \dots + (-1)^{n+1} \binom{n}{n-1} A^1 + (-1)^n \binom{n}{n} I$

(16) שאלת הוכחה.



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{א. (17)}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & \cdots & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & \cdots & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & \cdots & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & \cdots & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } c_{ij} = \min \{i, n+1-j\}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(18)}$$

## מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות

### שאלות

מטריצה ריבועית  $A$  תיקרא סימטרית אם  $A^T = A$ , ואנטי-סימטרית אם  $A^T = -A$ .

- (1) ידוע ש- $A$  מטריצה ריבועית.  
מי מבין הבאים נכון (אחד או יותר):
  1.  $AA^T$  סימטרית.
  2.  $A + A^T$  סימטרית.
  3.  $A - A^T$  אנטי-סימטרית.
- (2) ידוע ש- $A$  ו- $B$  אנטי-סימטריות מאותו סדר.  
מי מבין הבאים נכון:
  1.  $BABABA$  אנטי-סימטרית.
  2.  $A^2 - B^2$  סימטרית.
  3.  $A^2 + B$  סימטרית.
- (3) ידוע ש- $A$  ו- $B$  סימטריות מאותו סדר ונתון כי  $AB = -BA$ .  
מי מבין הבאים נכון:
  1.  $AB^3$  אנטי-סימטרית.
  2.  $AB^2$  סימטרית.
  3.  $(A - B)^2$  סימטרית.
- (4) ידוע ש- $A$  סימטרית ו- $B$  אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי  $AB = BA$ .  
הוכיחו:
  1.  $AB$  אנטי-סימטרית.
  2.  $AB + B$  אנטי-סימטרית.
- (5) נתון:  $A, B, AB$  סימטריות מאותו סדר.  
הוכיחו כי  $A^4 B^4 = B^4 A^4$ .

### תשובות סופיות

- (1) 1,2,3
- (2) 2
- (3) 1,2,3
- (4) שאלת הוכחה.
- (5) שאלת הוכחה.

## המטריצה ההופכית

### שאלות

בשאלות 1-9 מצאו את ההפוכה של כל מטריצה.  
בדקו את התשובות על ידי כפל מטריצות מתאים.

$$\begin{array}{lll} \text{(1)} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(2)} & \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} & \text{(3)} & \begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{(4)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \text{(5)} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \text{(6)} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{(7)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(8)} & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} & \text{(9)} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

10) עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$  המטריצה  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 \\ 3 & -1 & k+3 \end{pmatrix}$  הפיכה?

11) עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$  המטריצה  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  איננה הפיכה?

הניחו שהמטריצות בשאלות 12-14 הן הפיכות מסדר  $n$ , וחלצו את  $X$ :

12) א.  $AXC = D$  ב.  $A^{-1}XC = A^{-1}DC$  ג.  $P^{-1}X^T P = A$

13) א.  $C^{-1}(A+X)D^{-2} = I$  ב.  $(A-AX)^{-1} = X^{-1}C$

14)  $ABC^T X^{-1} BA^T C = AB^T$

15) נתון  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ .

חשבו את  $X$ , אם ידוע כי  $B^2 X (2B)^{-1} = B + I$ .

16) נתון  $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ . חשבו את  $Y$ , אם ידוע כי  $BYB^T = B^{-1} + B$ .

17) נתון  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ .

חשבו את  $B$ , אם נתון בנוסף כי:  $5A^T B(I + 2A)^{-2} = (7A)^{-2}$ .

18) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתון:  $A$  מטריצה ריבועית המקיימת  $A^2 - 5A - 2I = 0$ .

הוכיחו כי  $A$  הפיכה ובטאו את  $A^{-1}$  במונחי  $A$  ו- $I$ .

ב. נתון:  $A$  מטריצה ריבועית המקיימת  $(A - 3I)(A + 2I) = 0$ .

הוכיחו כי  $A$  הפיכה ובטאו את  $A^{-1}$  במונחי  $A$  ו- $I$ .

19) נתון כי  $p(x) = x^3 - 4x^2 - 20x + 48$ ,  $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ .

א. חשבו את  $p(A)$ .

ב. בעזרת תוצאת סעיף א (ולא בדרך אחרת), הוכיחו ש- $A$  הפיכה, ובטאו את  $A^{-1}$  בעזרת  $A$  ו- $I$  בלבד.

20) נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית המקיימת  $A^4 = 0$ .

א. הוכיחו כי  $A$  לא הפיכה.

ב. הוכיחו כי המטריצה  $I - A$  הפיכה, ומצאו את ההופכית שלה.

21) נתון כי  $\begin{cases} P^{-1}AP = B \\ Q^{-1}BQ = C \end{cases}$ .

הוכיחו כי קיימת מטריצה הפיכה  $D$ , כך ש- $D^{-1}AD = C$ .

\* הניחו שכל המטריצות הנתונות ריבועיות, מאותו סדר והפיכות.

\*\* לסטודנטים המכירים את המושג **דמיון מטריצות**, ניתן לנסח את השאלה כך:

הוכיחו: אם  $A$  דומה ל- $B$  ו- $B$  דומה ל- $C$ , אז  $A$  דומה ל- $C$ .

(כלומר יחס הדמיון הוא יחס טרנזיטיבי)

**הערה:** בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

**(22)** תהיינה  $A, B$  מטריצות ריבועיות ממסדר  $n \geq 2$ . הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- א.  $AB = BA$ .
- ב. אם  $A^2 - AB = I_n$ , אז בהכרח  $B$  הפיכה.
- ג. אם  $A^2 - AB = I_n$ , אז בהכרח  $A$  הפיכה.
- ד. אם  $(AB)^{100} = I$ , אז בהכרח  $(BA)^{100} = I$ .
- ה. אם  $(AB)^{100} = 0$ , אז בהכרח  $(BA)^{101} = 0$ .

**(23)** תהיינה  $A, B$  מטריצות מסדר  $n \times n$ , עבורן  $A^2 + AB = I$ .

- א. הוכיחו ש- $AB = BA$ .
- ב. אם נתון בנוסף ש- $B^2 + BA$  היא מטריצת האפס, הוכיחו שגם  $B$  היא מטריצת האפס.

**(24)** תהיינה  $A, B$  מטריצות כלשהן.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

- א. אם  $AB = I$  אז  $B = A^{-1}$ .
- ב. אם המכפלה  $AB$  היא מטריצה ריבועית, אזי  $A, B$  מטריצות ריבועיות.
- ג. אם המכפלה  $AB$  היא מטריצה הפיכה, אזי  $A, B$  מטריצות ריבועיות.
- ד. המכפלה  $AB$  לא הפיכה.
- ה. אם  $A$  מטריצה ריבועית והמכפלה  $AB$  מוגדרת, אזי  $B$  מטריצה ריבועית.

**(25)** מטריצה ריבועית  $A$  תיקרא אידמפוטנטית אם  $A^2 = A$ . הוכיחו:

- א. למעט המקרה בו  $A = I$ , מטריצה אידמפוטנטית היא לא הפיכה.
- ב. אם נחסר מטריצה אידמפוטנטית ממטריצת היחידה נקבל מטריצה אידמפוטנטית.
- ג. אם  $A$  מטריצה אידמפוטנטית ריבועית מסדר 2, אז  $\text{tr}(A) = 1$  או ש- $A$  מטריצה אלכסונית.
- ד.  $A$  אידמפוטנטית  $\Leftrightarrow A^n = A$ , לכל  $n$  טבעי.

$$(26) \text{ נתונה } M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

מצאו תנאי על הקבועים  $a, b, c, d$  כך ש- $M$  תהיה הפיכה ומצאו את  $M^{-1}$  במקרה זה.

(27) נתון כי  $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$  הפיכה.

לגבי כל אחת מהמערכות הבאות קבע את מספר הפתרונות של המערכת.

$$\alpha_{11}x + \alpha_{12}y = \alpha_{13}$$

$$\alpha_{21}x + \alpha_{22}y = \alpha_{23} \quad \text{א.}$$

$$\alpha_{31}x + \alpha_{32}y = \alpha_{33}$$

$$\alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + w = 0$$

$$\alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z - 4w = 1 \quad \text{ב.}$$

$$\alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + 3w = -4$$

$$\alpha_{11}x + \alpha_{21}y + \alpha_{31}z = 3$$

$$\alpha_{12}x + \alpha_{22}y + \alpha_{32}z = 1 \quad \text{ג.}$$

$$\alpha_{13}x + \alpha_{23}y + \alpha_{33}z = 1$$

(28) תהינה  $A, B$  מטריצות מסדר  $n \times n$ .

הוכיחו:

$$\text{א. אם } BA = I - A^2 \text{ וגם } B^2 = -AB, \text{ אז } B = 0.$$

$$\text{ב. אם } A^2 = 2I, \text{ אז } A + I \text{ ו- } A - I \text{ הפיכות.}$$

(29) תהינה  $A, B$  מטריצות מסדר  $n \times n$ , כך ש- $B^2A = -2B^3$  (1) וגם

$$(2) B^3 + AB^2 = 3I.$$

הוכיחו ש- $A$  ו- $B$  הפיכות, ובטאו את  $A^{-1}$  ו- $B^{-1}$  באמצעות  $B$ .

(30) תהינה  $A, B$  מטריצות מסדר  $n \times n$ , כך ש- $BA + 2I = B$ .

א. הוכיחו ש- $B$  הפיכה.

ב. ידוע ש- $B$  סימטרית.

הוכיחו כי  $A$  סימטרית.

(31) תהי  $A$  מטריצה נילפוטנטית (כלומר, קיים  $n$  טבעי כך ש- $A^n = 0$ ).

א. הוכיחו כי  $A$  לא הפיכה.

ב. הוכיחו כי  $I - A$  ו- $I + A$  הפיכות.

$$\text{ג. נגדיר: } e^A = I + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots + \frac{1}{n!}A^n + \dots$$

הוכיחו: אם  $e^A = I$  אז  $A = 0$ .

**(32)** נתונות שתי מטריצות,  $A$  ו- $B$ , מסדר  $n$ .

סמנו את הטענה שנכונה בהכרח:

- א. ל- $A$  ול- $A^T$  יש אותה צורה מדורגת קנונית.
- ב. אם  $A, B$  מדורגות קנונית, אז  $A+B$  מדורגת קנונית.
- ג. אם  $A, B$  מדורגות קנונית, אז  $A-B$  מדורגת קנונית.
- ד. אם בצורה המדורגת קנונית של  $B$  יש שורת אפסים, אז גם בצורה המדורגת קנונית של  $AB$  יש שורת אפסים.

## תשובות סופיות

$$\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad (3) \qquad \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \quad (2) \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (5) \qquad \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (7) \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (9) \qquad \begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$k=1, k=-4 \quad (11) \qquad k \neq 1, k \neq -2 \quad (10)$$

$$(P^{-1})^T A^T P^T \quad \text{ג.} \quad D \quad \text{ב.} \quad A^{-1}DC^{-1} \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$(A+C^{-1})^{-1} A \quad \text{ב.} \quad A \quad \text{א.} \quad CD^2 - A \quad (13)$$

$$X = 4 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (15) \qquad BA^T C (B^{-1})^T BC^T \quad (14)$$

$$B = \frac{1}{245} \begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix} \quad (17) \qquad Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6} A - \frac{1}{6} I \quad \text{ב.} \quad A^{-1} = 0.5A - 2.5I \quad \text{א.} \quad (18)$$

$$B^{-1} = -\frac{1}{48} B^2 + \frac{1}{12} B + \frac{5}{12} I \quad \text{ב.} \quad f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{א.} \quad (19)$$

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 \quad \text{ב.} \quad \text{א.} \quad \text{שאלת הוכחה.} \quad (20)$$

(21) שאלת הוכחה.

(22) שאלת הוכחה.

(23) שאלת הוכחה.

(24) שאלת הוכחה.

(25) שאלת הוכחה.

$$((a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)) \quad M^{-1} = \frac{1}{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)} M^T \quad (26)$$



- 27) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות. ג. פתרון יחיד.  
28) שאלת הוכחה.  
29) שאלת הוכחה.  
30) שאלת הוכחה.  
31) שאלת הוכחה.  
32) ד

## דרגה של מטריצה

### שאלות

(1) אמתו את המשפט  $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$ ,

על המטריצה  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 14 \\ 6 & 8 & 10 & 12 & 24 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

(2) אמתו את המשפט  $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$ ,

עבור  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  ו-  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(3) נתונה המטריצה  $A = \begin{pmatrix} 1-k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4-k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10-k \end{pmatrix}$

חשבו את  $\text{rank}(A)$ .

(4) נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר  $n > 1$ . הוכיחו או הפריכו:

א.  $\text{rank}(A) = n-1 \Rightarrow \text{rank}(A^2) = n-1$

ב.  $\text{rank}(A) = n-1 \Leftarrow \text{rank}(A^2) = n-1$

(5) נתון כי  $A, B$  מטריצות ריבועיות מסדר  $n > 1$ . הוכיחו או הפריכו:

א. אם  $\text{rank}(A) = \text{rank}(AB)$ , אז בהכרח  $B$  הפיכה.

ב. ייתכן ש-  $\text{rank}(A) < \text{rank}(AB)$ .

ג. אם  $\text{rank}(A) > \text{rank}(B)$ , אז  $\text{rank}(AB) > \text{rank}(B)$ .

$$(6) \text{ נתון } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

א. חשבו את  $\text{rank}(A)$ ,  $\text{rank}(B)$ .

ב. חשבו את  $\text{rank}(B^{10}A^{14})$ .

(7) נניח כי  $A, B$  שתי מטריצות ריבועיות מסדר  $n$ .

$$\text{הוכיחו כי } \text{rank} \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix} \leq 2\text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

(8) תהי  $A_{8 \times 7}$  מטריצה, כך ש- $\text{rank}(A) = 3$ .

הוכיחו כי קיימות 3 מטריצות  $A_1, A_2, A_3$ , שלכל אחת מהן דרגה 1,

$$\text{כך ש-} A = A_1 + A_2 + A_3.$$

הראו כי לא ניתן לקבל זאת עם פחות מ-3 מטריצות.

הכלילו את תוצאת התרגיל למטריצה מסדר  $m \times n$  שדרגתה  $k$ .

(9) נתונות שתי מטריצות  $A_{3 \times 5}, B_{5 \times 3}$ .

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

$$\text{א. } \text{rank}(AB) = \text{rank}(BA)$$

$$\text{ב. } \text{rank}(AB) \neq \text{rank}(BA)$$

ג. המטריצה  $BA$  לא הפיכה.

(10) תהי  $A$  מטריצה מסדר  $m \times n$ , ותהי  $B$  מטריצה מסדר  $n \times m$ . הוכיחו:

$$\text{א. אם } AB = I_m \text{ אז } \text{rank}(A) = \text{rank}(B) = m$$

$$\text{ב. אם } BA = I_n \text{ אז } \text{rank}(A) = \text{rank}(B) = n$$

$$\text{ג. אם } AB = I_m \text{ וגם } BA = I_n \text{ אז בהכרח } m = n$$

$$\text{ד. אם } A \text{ לא ריבועית אז לא ייתכן שגם } AA^T = I_m \text{ וגם } A^T A = I_n$$

(11) בשדה  $F$  נתונים  $a_1, a_2, \dots, a_m$  איברים, שלא כולם אפס, ו- $b_1, b_2, \dots, b_n$  איברים, שלא כולם אפס.

$$\text{קבעו מהי דרגתה של המטריצה } M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}, \text{ כאשר } m_{ij} = a_i b_j.$$

**12)** תהי  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי:  $a_{ij} = b_i^2 - b_j^2$ ,

כאשר  $b_1, b_2, \dots, b_n$  מספרים ממשיים שונים ו-  $n \geq 3$ .

א. הוכיחו שהמטריצה לא הפיכה.

ב. האם הטענה תישאר נכונה אם נשנה את הנתון ל-  $n \geq 2$ ?  
הוכיחו או הפריכו.

**13)** תהיינה  $A, B$  מטריצות מעל  $\mathbb{R}$ , מסדר  $m \times n$ , כך שלכל  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\underline{x} \neq \underline{0}$ ,

מתקיים  $A\underline{x} \neq B\underline{x}$ .

מה הדרגה של המטריצה  $A - B$ ?

**14)** תהיינה  $A, B$  מטריצות מסדר  $n \times n$ .

א. נתון שכל פתרון של המערכת  $(AB)\underline{x} = \underline{0}$ , הוא פתרון של המערכת

$$A\underline{x} = \underline{0}.$$

הוכיחו שהדרגה של  $AB$  שווה לדרגה של  $A$ .

ב. הוכיחו: אם  $A$  הפיכה, אז  $\rho(AB) = \rho(A)$ .

ג. הוכיחו שאם  $\rho(AB) < \rho(A)$ , אז  $A$  לא הפיכה.

**15)** תהי  $A$  מטריצה מסדר  $n \times n$ .

א. הוכיחו כי  $P(A) \subseteq P(A^2)$ .

ב. נתון כי  $\rho(A^2) < \rho(A)$ .

הוכיחו שקיים  $v \in \mathbb{R}^n$ , כך ש-  $Av \neq 0$  וגם  $A^2v = 0$ .

## תשובות סופיות

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) שאלת הוכחה.
- (3) אם  $k=1$ , אז  $\text{rank}(A)=2$  אם  $k=4, k=10$ , אז  $\text{rank}(A)=3$ .  
אם  $k \neq 1, 4, 10$ ,  $\text{rank}(A)=4$ .
- (4) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה נכונה.
- (5) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה אינה נכונה.  
ג. הטענה אינה נכונה.
- (6) א.  $\text{rank}(A)=2$ ,  $\text{rank}(B)=3$ . ב.  $\text{rank}(B^{10}A^{14})=2$ .
- (7) שאלת הוכחה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) 1
- (12) שאלת הוכחה.
- (13)  $n$
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.

## בחזרה למערכת משוואות ליניארית

### שאלות

(1) בסעיפים הבאים מצאו מטריצות  $A$ ,  $\underline{x}$  ו- $\underline{b}$ , המבטאות את מערכת המשוואות הנתונה ע"י המשוואה היחידה  $A\underline{x} = \underline{b}$ :

$$2x - 3y + z + t = 1$$

$$4x + y + 2z = 4$$

$$y + z + t = 1$$

$$x - 4z - 2y = 10$$

$$2x + y - z = 3$$

$$x + 2y - 4z = 5$$

$$6x + 4y + z = 2$$

ב.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

בשאלות 2-6 נתון כי

בטאו כל אחת מהמשוואות בשאלות אלה כמערכת משוואות ליניאריות:

$$A\underline{x} = -k\underline{x} + \underline{b} \quad (4)$$

$$A\underline{x} = 4\underline{x} + \underline{b} \quad (3)$$

$$A\underline{x} = \underline{b} \quad (2)$$

$$A^T \underline{x} = 2\underline{x} + 3\underline{b} \quad (6)$$

$$A\underline{x} = \underline{x} \quad (5)$$

$$2x - y + z = 3$$

$$3x - 2y + 2z = 5$$

$$5x - 3y + 4z = 11$$

בעזרת המטריצה ההפוכה.

$$x + 4y + 2z + 4t = 1$$

$$x + 2y - z = 0$$

$$y + z + t = 1$$

$$x + 3y - z - 2t = 0$$

(8) פתרו את מערכת המשוואות

בעזרת המטריצה ההפוכה.

(9) למערכת משוואות מסוימת יש את שני הפתרונות הבאים:

$$(x, y, z) = (2, -8, 4) \quad , \quad (x, y, z) = (-1, 4, -2)$$

הוכיחו שהמערכת חייבת להיות הומוגנית.

**10** למערכת משוואות לא הומוגנית יש את שני הפתרונות הבאים :  
 $(x, y, z) = (-1, 4, -2)$  ,  $(x, y, z) = (2, 3, 4)$  .  
 מצאו פתרון לא טריוויאלי כלשהו של המערכת ההומוגנית המתאימה.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 7y + (k^2 + 1)z = k^2 - 1 \\ 4x - 6y + (k + 2)z = 4 \end{cases} \quad \text{11 נתונה המערכת}$$

מצאו עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$ , למערכת :  
 א. פתרון יחיד. ב. אין פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

\* השתמשו בפתרון במושג 'דרגה של מטריצה'.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & k \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ m \end{pmatrix} \quad \text{12 נתון}$$

ידוע כי  $\text{rank}(A) = 3$ , וידוע כי למערכת  $Ax = b$  יש פתרון.  
 מצאו את הקבועים  $k, m$ .

**13** נתונה מטריצה ריבועית  $A$ , המקיימת את התכונה הבאה :  
 סכום האיברים בכל שורה של המטריצה  $A$  שווה 0.  
 הוכיחו ש- $A$  מטריצה לא הפיכה.

**14** נתונה מטריצה ריבועית הפיכה  $A$ , המקיימת את התכונה הבאה :  
 סכום האיברים בכל שורה של המטריצה  $A$  שווה  $k$ .  
 הוכיחו שסכום האיברים בכל שורה של המטריצה הוא קבוע.  
 בטאו קבוע זה בעזרת  $k$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{15 מטריצה } A \text{ מקיימת } = 0$$

הוכיחו כי הווקטור  $\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$  הוא פתרון של המערכת ההומוגנית  $Ax = 0$ .

- 16** יהיו  $A, B$  מטריצות ממשיות מסדר  $n \times n$ . עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או לא.
- א. אם למערכת  $(AB)x = 0$  קיימים שני פתרונות שונים, אז בהכרח  $A$  לא הפיכה.
- ב. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת  $(AB)x = 0$ , אז למערכת  $(BA)x = 0$  קיים פתרון שונה מ-0.
- ג. אם למערכת  $Ax = 0$  קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2 = 0$ .
- ד. אם למערכת  $(A^t A)x = 0$  קיים פתרון יחיד, אז  $A$  לא הפיכה.
- ה. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת ההומוגנית  $(AB)x = 0$ , אז למערכת ההומוגנית  $Ax = 0$  קיים פתרון שונה מ-0.

- 17** נתונה מערכת משוואות מעל  $\mathbb{R}$ :  $Ax = d$  ( $d \neq 0$ ). נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר 4, המקיימת  $\text{rank}(A) = 2$ . ידוע כי הווקטורים הבאים פותרים את המערכת הנתונה:
- $$u = (x_1, x_2, 6, 7), \quad v = (y_1, y_2, 1, 2), \quad w = (z_1, z_2, 4, 3)$$
- מי מבין הבאים הוא הפתרון הכללי של המערכת הנתונה:
- א.  $x = au + bv + cw$
- ב.  $x = (a + b + 1)u - av - bw$
- ג.  $x = au + bv + w$
- ד.  $x = (a - b)u + (b - c)v + (c - a)w$
- ה.  $x = (a + b)u - (av + bw + u)$ , כאשר  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

**הערה:** בחלקו האחרון של פתרון תרגיל זה נדרש הידע הבא מהפרק מרחבים וקטורים: בהינתן מערכת הומוגנית  $Ax = 0$ :

- אוסף כל הפתרונות של המערכת נקרא מרחב הפתרונות של המערכת.
- מספר המשתנים החופשיים במערכת לאחר דירוג נקרא המימד של מרחב הפתרונות. בכל אופן, מומלץ לחזור לתרגיל זה אחרי שתעברו על הפרק מרחבים וקטורים.

- 18** נתונה מערכת  $A_{m \times n} \cdot x = b$ . הוכיחו או הפריכו:
- א. אם  $u$  וגם  $\lambda u$  ( $\lambda \neq 1$ ) פתרונות של המערכת אז המערכת הומוגנית.
- ב. אם  $u$  ו- $v$  וגם  $\alpha u + \beta v$  ( $\alpha, \beta \neq 0$ ) פתרונות של המערכת אז היא הומוגנית.
- ג. אם הווקטורים  $(1, 2, \dots, n), (n, \dots, 2, 1)$  פותרים את המערכת והווקטור  $(n+1, \dots, n+1)$  לא פותר את המערכת, אז המערכת לא הומוגנית.



**(19)** תהי  $A$  מטריצה כך שלמערכת  $Ax = 0$  פתרון יחיד. הוכיחו או הפריכו:

- א.  $A$  הפיכה.
- ב. למערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים  $A^T$  פתרון יחיד.
- ג. לכל מערכת לא הומוגנית עם מטריצת מקדמים  $A$  פתרון יחיד.

**(20)** תהי  $A_{m \times n}$  מטריצה ממשית כך ש- $m < n$ . הוכיחו או הפריכו:

- א. ממד מרחב הפתרונות של המערכת  $Ax = 0$  הוא  $n - m$ .
- ב. למערכת  $(A^T A)x = 0$  יש אינסוף פתרונות.
- ג. ייתכן מצב בו למערכת  $(A^T A)x = 0$  יש פתרון יחיד.
- ד. ייתכן מצב בו למערכת  $(AA^T)x = 0$  יש פתרון יחיד.

**(21)** תהי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר  $n$ , כך שלכל מטריצה ריבועית  $B \neq 0$  מסדר  $n$ , מתקיים  $AB \neq 0$ . הוכיחו ש- $\text{rank}(A) = n$ .

**(22)** תהי  $A$  מטריצה ממשית מסדר  $m \times n$ .

לגבי כל אחת מהטענות הבאות, קבעו אם היא נכונה או לא. נמקו.

- א. אם למערכת  $Ax = b$  יש פתרון לכל  $b \in \mathbb{R}^m$ ,
- אז בהכרח למערכת  $A^T x = b$  יש פתרון לכל  $b \in \mathbb{R}^m$ .
- ב. עבור  $m = n$ , אם למערכת  $Ax = b$  יש פתרון לכל  $b \in \mathbb{R}^m$ ,
- אז בהכרח למערכת  $A^T x = b$  יש פתרון לכל  $b \in \mathbb{R}^m$ .
- ג. אם למערכת ההומוגנית  $Ax = 0$  יש אינסוף פתרונות, אז בהכרח  $m < n$ .
- ד. ייתכן ש- $A^T A = I_n$  וגם  $AA^T = I_m$ .
- ה. אם  $m \neq n$  ואם למערכת  $Ax = 0$  יש פתרון יחיד, אז יש מערכת לא הומוגנית  $Ax = b$  עם יותר מפתרון אחד.

**(23)** תהא  $A \in M_{4 \times 4}(R)$  ויהי  $b \in R^4$ .

ידוע כי  $u$  ו- $v$  פתרונות של המערכת הלא הומוגנית  $Ax = b$ .

- א. נגדיר  $w = \alpha u + \beta v$ .
- הוכיחו כי אם גם  $w$  פתרון של המערכת  $Ax = b$ , אז  $\alpha + \beta = 1$ .
- ב. נניח בנוסף כי  $w = -u + 2v$  הוא פתרון של המערכת  $A^2 x = b$ .
- הוכיחו כי  $A - I$  לא הפיכה.

$$(24) \text{ נתון } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 \\ -3 & -6 & 3 & -8 & -8 \end{pmatrix}, \text{ ויהי } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

א. הראו כי  $v = (2, -1, 1, -1, 1)^T$  הוא פתרון של המערכת  $Ax = b$ .

ב. מצאו את קבוצת הפתרונות של המערכת ההומוגנית  $Ax = 0$ .

ג. מצאו  $C, D \in M_{5 \times 2}(\mathbb{R})$ , כך ש- $C \neq D$  ו- $AC = AD = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ .

## תשובות סופיות

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{א. (1)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{ב.}$$

$$4x - 2y + 4z = 1$$

$$x - y + z = 2 \quad (2)$$

$$x - 6y + 3z = 3$$

$$-2y + 4z = 1$$

$$x - 5y + z = 2 \quad (3)$$

$$x - 6y - z = 3$$

$$(4+k)x - 2y + 4z = 1$$

$$x + (k-1)y + z = 2 \quad (4)$$

$$x - 6y + (3+k)z = 3$$

$$3x - 2y + 4z = 0$$

$$x - 2y + z = 0 \quad (5)$$

$$x - 6y + 2z = 0$$

$$2x + y + z = 3$$

$$-2x - 3y - 6z = 6 \quad (6)$$

$$4x + y + z = 9$$

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) \quad (7)$$

$$(x, y, z, t) = (-13, 4, -5, 2) \quad (8)$$

$$(9) \text{ שאלת הוכחה.}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$(11) \text{ אם } k \neq 2 \text{ או } k \neq -1, \text{ אז יש פתרון אחד.}$$

$$\text{אם } k = 2, \text{ אז יש אינסוף פתרונות.}$$

$$\text{אם } k = -1, \text{ אז אין פתרונות.}$$

$$(12) \quad m = 5, k = 9$$

$$(13) \text{ שאלת הוכחה.}$$

14) סכום האיברים בכל שורה של  $A^{-1}$  הוא קבוע השווה ל-  $\frac{1}{k}$ .

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

18) שאלת הוכחה.

19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

23) שאלת הוכחה.

24) א. שאלת הוכחה. ב.  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-t, -2s, s, -t, t)$ .

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} (t=s=0) \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} (t=s=1) \text{ ג.}$$

## מטריצה אלמנטרית

### שאלות

(1) רשמו את המטריצה  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

(2) רשמו את המטריצה  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$  כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

(3) הוכיחו או הפריכו כל אחד מסעיפים א-ד.  
נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית, ו- $B$  מתקבלת מ- $A$  ע"י סדרת פעולות דירוג.  
ע"י הפעלת אותה סדרה של פעולות תתקבל גם:

א.  $A^2$  מ- $B^2$ .

ב.  $BA$  מ- $A^2$ .

ג.  $BA$  מ- $B^2$ .

ד.  $AB$  מ- $B^2$ .

(4) תהי  $A \in M_3[R]$ , כך שסכום איברי השורה הראשונה שלה הוא 4, סכום איברי השורה השנייה שלה הוא 1 וסכום איברי השורה השלישית שלה הוא 10.

נגדיר את המטריצות האלמנטריות  $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

למה שווה סכום איברי השורה השלישית במטריצה  $E_2 E_1 A$ ?

**פתרו בשתי דרכים:**

**דרך א'** – בעזרת תכונות המטריצה האלמנטרית.

**דרך ב'** – בעזרת כפל מטריצות.

## תשובות סופיות

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{e_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}_{e_3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_A \quad (1)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{e_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_4} \cdot \quad (2)$$

$$\cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_5} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_6} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_7} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{e_8} = A$$

(3) שאלת הוכחה.

(4) -3

# קורס מבוא למתמטיקה לכלכלנים

פרק 24 - אלגברה ליניארית - דטרמיננטות

תוכן העניינים

- 1. חישוב דטרמיננטות ..... 305
- 2. כלל קרמר ופתרון מערכת משוואות ..... 308
- 3. מטריצה צמודה ומטריצה הפוכה ..... 309

## חישוב דטרמיננטות

## שאלות

בשאלות 1-5 חשבו את הדטרמיננטה על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

$$(1) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(2) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(3) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

(4) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי דירוג:

$$\text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

בשאלות 5-6 חשבו את הדטרמיננטה על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

$$(5) \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{vmatrix} \quad (6) \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

בשאלות 7-8 הראו, ללא חישוב, שהדטרמיננטה של המטריצות שווה אפס:

$$(7) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{vmatrix}$$

$$(8) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{vmatrix}$$



בשאלות 9-11 נתון כי  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$ .

חשבו :

$$\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix} \quad (10) \qquad \begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \quad (12) \text{ הוכיחו כי :}$$

בשאלות 13-14 נתון כי  $A$  ו- $B$  מטריצות מסדר 3,  $|B|=2$ ,  $|A|=4$ .  
חשבו :

$$(13) \text{ א. } |ABA^{-1}B^T| \quad \text{ב. } |4A^2B^3|$$

$$(14) \text{ א. } |-A^{-2}B^TA^3| \quad \text{ב. } |-2A^2A^T \text{adj}B|$$

(15) נתון כי  $A$  ו- $B$  מטריצות הפיכות מסדר 4,  $2AB+3I=0$ ,  $|A|=2$ .  
חשבו את  $|B|$ .

(16) נתון כי  $A$  ו- $B$  מטריצות הפיכות מסדר 3,  $B^2-2A^{-1}=0$ ,  $A+3B=0$ .  
חשבו את  $|A|$ ,  $|B|$ .

(17) נתון כי  $A$  מטריצה מסדר  $n$ ,  $|A|=128$ ,  $2AB=B^TA^2$ , ו- $B$  הפיכה.  
מצאו את  $n$ .

## תשובות סופיות

- (1) א.  $ad - bc$     ב. 29    ג. -1
- (2) א. -1    ב. -3    ג. -14
- (3) א. 24    ב. 234    ג. -300
- (4) א. 0    ב. 0    ג. 3
- (5) 120
- (6) 114
- (7) פתרונות באתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)
- (8) פתרונות באתר.
- (9) -8
- (10) 16
- (11) -36
- (12) הוכחה.
- (13) א. 4    ב.  $2^{13}$
- (14) א. -8    ב.  $-2^{11}$
- (15)  $\frac{81}{32}$
- (16)  $|A|=18, |B|=-2/3$
- (17) 7

## כלל קרמר ופתרון מערכת משוואות

### שאלות

בשאלות 1-3 פתרו את מערכות המשוואות בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 3x + 4y &= 11 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x + z &= 3 \\ 4x + y + 8z &= 21 \\ 2x + 3z &= 8 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} x + 2z + 5t &= 8 \\ -2x - 6y &= -8 \\ 5x + 3y - 7z + 4t &= 5 \\ 2x + 5y + 44z &= 51 \end{aligned} \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$\begin{aligned} (1) \quad x &= 1, y = 2 \\ (2) \quad x &= 1, y = 1, z = 2 \\ (3) \quad x &= y = z = t = 1 \end{aligned}$$

## מטריצה צמודה קלאסית ומטריצה הפוכה

### שאלות

בשאלות 1-3 חשבו את הצמודה הקלאסית  $adj(A)$ , ובעזרתה את  $A^{-1}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$adj(A) = A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$adj(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$