

פיסיקה 3



תוכן העניינים

1	גלים	1
19	גלים אלקטרו-מגנטיים	19
43	וקטור פויינטינג והאנרגיה האגורה בשדות	43
44	יחסות פרטית -	44
63	תיאוריות מוקדמות של תורת הקוונטים ומבנה האטום	63
87	תורת הקוונטים	87
104	תורת הקוונטים חלק 2	104
126	המודל הקוונטי לאטום המימן ספין והטבלה המחזורית	126
138	פורמליזם אלגברי לתורת הקוונטים	138
143	אופרטורים בייצוג האלגברי	143
151	גרעין האטום, אנרגיית הגרעין ורדיואקטיביות	151

פיסיקה 3

פרק 1 - גלים

תוכן העניינים

1. גלים והתאבכות גלים.....1

גלים והתאבכות גלים:

רקע:

מהירות גל מחזורי: $v = \lambda f$

חוק השבירה: $\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$

גל עומד במיתר שקצותיו קשורים: $\ell = n \frac{\lambda}{2}$

קווי מקסימום ראשיים בהתאבכות משני מקורות (ויותר) שווי-מופע:

$$\sin \theta_n = \frac{X_n}{L_n} = n \frac{\lambda}{d}$$

קווי מינימום בהתאבכות משני מקורות שווי-מופע: $\sin \theta_n = \frac{X_n}{L_n} = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{d}$

נוסחת יאנג: $\frac{\Delta X}{L} = \frac{\lambda}{d}$

קווי מקסימום בהתאבכות בסריג עקיפה: $\sin \theta_n = n \frac{\lambda}{d} = nN \cdot \lambda$

קווי צומת בעקיפה בסדר יחיד: $\sin \theta_n = \frac{X_n}{L_n} = n \frac{\lambda}{w}$

$$\frac{I_a}{I_0} = 10^{\left(\frac{\alpha}{10}\right)}$$

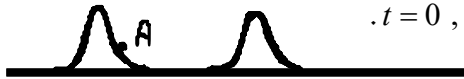
$$\frac{I_a}{I_b} = 10^{\left(\frac{\alpha-\beta}{10}\right)}$$

$$E = I \cdot S \cdot t$$

שאלות:

(1) תרגול גל 1

פולס נע ימינה בחבל.

מתוארת צורתו בשני זמנים שונים: $t = 0$, $t = 2 \text{ sec}$.

א. מה משרעת הפולס?

ב. מה מהירות התקדמותו?

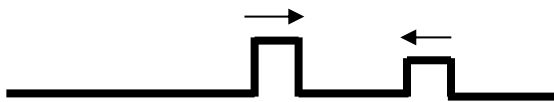
ג. מה כיוון תנועת החלקיק בחבל שנמצא בנקודה A ברגע $t = 0$?

ד. מה כיוון תנועת החלקיק בחבל שנמצא בנקודה B ברגע זה?

(2) תרגול גל 2

מציירים בחבל שתי הפרעות כמתואר בתרשים: $v = 10 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$.

שרטט את החבל בזמנים הבאים:

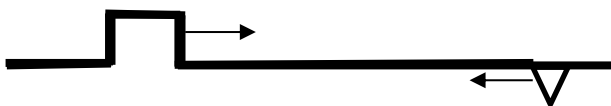
א. $t = 8 \text{ sec}$ ב. $t = 16 \text{ sec}$ ג. $t = 18 \text{ sec}$ ד. $t = 22 \text{ sec}$ 

(3) תרגול גל 3

בחבל מייצרים שתי הפרעות שונות בשני קצותיו שמתקדמות אחת לקראת

השנייה, כמתואר בתרשים: $v = 0.5 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$.

שרטט את צורת החבל בזמנים הבאים:

א. $t = 8 \text{ sec}$ ב. $t = 12 \text{ sec}$ ג. $t = 13 \text{ sec}$ ד. $t = 16 \text{ sec}$ 

(4) תרגול גל 4

פולס משולש נע בחבל ומגיע לקצהו. שרטט את החבל + הפולס במקרים הבאים:

א. קצה החבל קשור לקיר.

ב. קצה החבל מולבש על טבעת חופשיה למנוע על פני ציר שעובר דרכה.

ג. קצה החבל קשור לחבל כבד יותר.

ד. קצה החבל קשור לחבל קל יותר.

5) תרגול גל עומד



חוט AB, שאורכו 1m, קשור בקצהו B למחולל תנודות, ובקצהו A למוט קבוע (ראה תרשים).
 כאשר תלמיד מפעיל את מחולל התנודות, נוצר בחוט AB גל, שמוחזר מהקצה A.
 התלמיד מגדיל ברציפות את תדירות מחולל התנודות ורושם את התדירויות בכל פעם שנוצר בחוט AB גל עומד.
 תוצאות הניסוי רשומות בטבלה שלפניך:

$\frac{1}{\lambda} (\text{m}^{-1})$	$\lambda (\text{m})$	צורת הגל העומד	f - תדירות התנודות (Hz)
			24
			45
			67
			88

התייחס לנקודה B כנקודת צומת.

א. העתק את הטבלה למחברתך, ורשום בעמודה את אורך הגל λ , לכל אחד מארבעת הגלים העומדים שנוצרו בחוט?

ב. רשום בעמודה המתאימה בטבלה את הערך $\frac{1}{\lambda}$ לכל אחד מארבעת הגלים, וסרטט גרף של התדירות f כפונקציה של $\frac{1}{\lambda}$.

ג. מצא בעזרת הגרף את מהירות התפשטותו של גל בחוט AB.

ד. התלמיד ממשיך להגדיל את תדירות מחולל התנודות.

מהי התדירות הראשונה (הגבוהה מ-88Hz) שיווצר בה גל עומד בחוט AB? נמק.

6) תרגול גל מחזורי 1

מופיעים לפניכם גרפי העתק זמן והעתק מקום של חבל מסוים.

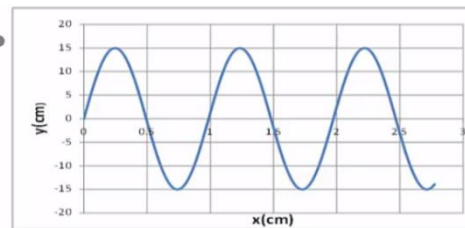
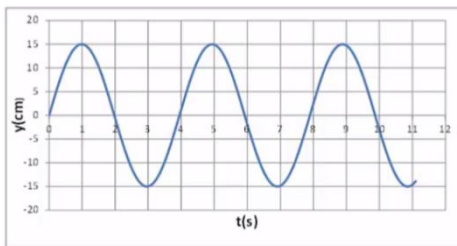
א. מהי משרעת הגל?

ב. מהו אורך הגל המתקדם בחבל?

ג. מה זמן המחזור של הגל?

ד. מה מהירות הגל?

ה. לאיזה נקודה/נקודות בחבל יכול להתאים גרף ההעתק זמן (השמאלי)?



תרגול גל מחזורי 2 (7)

לפניכם גרף העתק-מקום והעתק-זמן של הגוף מהשאלה הקודמת.
מכפילים את תדירות מחולל הגלים (מקור).
שרטטו את גרף העתק-זמן והעתק-מקום החדשים.

**תרגול גל מחזורי 3 (8)**

- לפניך שני תצלומים (נראים זהים). הימני: גל מתקדם, השמאלי: גל עומד בקהל.
א. קבע את אורך הגל של כל אחד מהגלים בחבל.
ב. שרטט את החבל $\frac{1}{4}$ זמן מחזור לאחר תצלום זה.
ג. שרטט את החבל $\frac{1}{2}$ זמן מחזור לאחר תצלום זה.
ד. בחר בכל תצלום נקודה מימין ומשמאל למשרעת, וצייר את כיוון תנועתה מיד לאחר צילום זה.

**תרגיל 1 (9)**

- מהירות גל במיתר מתוח 25 מטר בשנייה. קושרים את היתר בין שני כנים שהמרחק ביניהן 3 מטר.
מניעים את המיתר בעזרת מתנד.
באיזו תדירות יש לנדנד אותו כך שייווצר בו גל עומד עם 12 נקודות צומת (כולל הקצוות)?
- 45.8 הרץ.
 - 70 הרץ.
 - 8.3 הרץ.
 - 75 הרץ.
 - 80.7 הרץ.

(10) תרגיל 2

מיתר בעל אורך 90 ס"מ קשור בשני קצותיו. כשמנדנדים אותו בתדירות 150 הרץ, נוצר בו גל עומד עם 8 נקודות צומת (כולל הקצוות). מהירות גל במיתר הנ"ל:

א. $15.3 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$

ב. $38.6 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$

ג. $17 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$

ד. $34.3 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$

(11) תרגיל 3

מנדנדים מיתר מתוח הקשור בשני קצותיו בתדירות 100 הרץ. אורך המיתר 3 מטר. במיתר נוצר גל עומד עם 5 נקודות צומת (כולל הקצוות). מהי מהירות הגל במיתר?

א. $150 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$

ב. $100 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$

ג. $330 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$

ד. $20 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$

ה. $340 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$

(12) תרגיל 4

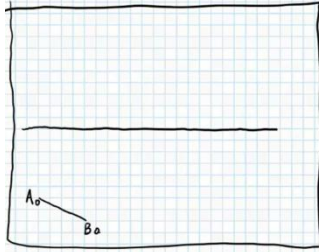
מיתר של גיטרה משמיע עם הפריטה עליו צליל בתדירות של 300 הרץ. אם רוצים להפיק מהמיתר צליל בעל תדירות של 900 הרץ:

- א. אין כל דרך להפיק את התדירות הנ"ל מהמיתר.
- ב. יש להקטין את המתיחות במיתר פי 3.
- ג. יש לקצר את המיתר פי 3.
- ד. יש להאריך את המיתר פי 3.
- ה. יש להגדיל את המתיחות פי 2.

13) תרגיל החזרה גלים דו ממדיים

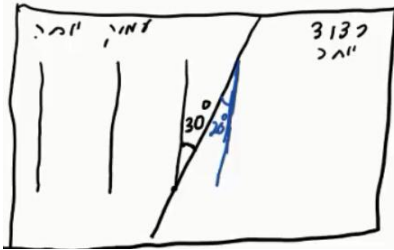
נתון אמבט הגלים הבא בו מתקדם גל ישר A_0B_0 . באמבט קיים גם מחסום.

- הוסף לתרשים חץ המתאר את כיוון התקדמות הגל A_0B_0 .
- הוסף לתרשים את חזית הגל לאחר שהוחזרה מהמחסום.
- הוסף לתרשים חיצים המתארים את זוויות פגיעת והחזרת הגל כפי שהן מוחזרות לאור.
- הוסף לתרשים חיצים המתארים את זוויות פגיעת והחזרת הגל כפי שהן מוחזרות לגלי מים.
- הוסיפו לתרשים את חזית הגל, ברגע שבו אמצע חזית הגל נוגעת במחסום.



14) תרגול מעבר תווך גלי מים

- נתון אמבט גלים בו נע גל לפי התרשים הבא. במרכז האמבט מוקם מחסום כך שגובה המים בחלק הימני נמוך יותר. מקור גלים בקצה השמאלי של האמבט מייצר גל ישר מחזורי בתדירות 4 הרץ. מהירות הגל במים בחלק העמוק היא 20 ס"מ לשנייה. הגל מתקדם ועובר לתווך הימני כמתואר בתרשים.
- מה מהירות גל המים בתווך הרדוד יותר?
 - מהו אורך הגל λ_1 בחלק העמוק?
 - מהו אורך הגל λ_2 בחלק הרדוד?
 - הוסיפו לתרשים (איכותית) עוד 2 אורכי גלים לאחר מעבר גל המים לתווך הרדוד.

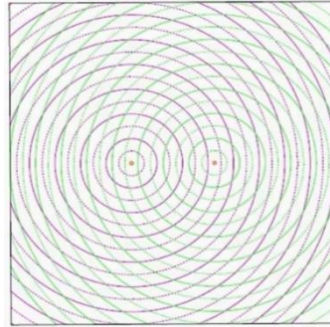


15) תרגול אנרגיה ומשרעת של גל

- גל מעגלי מתפשט באמבט גלים. משרעתו, כשהיה מעגל ברדיוס 3cm, הייתה 1cm.
- פי כמה תהיה קטנה האנרגיה שלו כשיתפשט לרדיוס של 15cm?
 - מה תהיה משרעתו במצב זה?

16) התאבכות גלי מים – תרגיל 1

נתון תרשים של אמבט גלים ובו 2 מקורות בעלי אורך גל זהה ושווי מופע.
 קווים רציפים מייצגים שיא בגל וקווים מקווקוים – שפל.
 זהו את קווי המקסימום והמינימום בתרשים.

**17) התאבכות גלי מים – תרגיל 2**

- נתון אמבט גלים בו 2 מקורות שהמרחק ביניהם 7 ס"מ.
 המקורות מכים במים במופע זהה בתדירות 20 הרץ.
 מהירות התקדמות הגלים באמבט היא 25 ס"מ לשנייה.
 א. מה אורך הגל של הגלים שיוצרים המקורות?
 ב. קבע, לגבי כל אחת מהנקודות הבאות: A, B, C, D בתרשים, האם היא על קו מקסימום, על קו מינימום או נקי ביניים:
- i. A - מרחקה מהמקור הראשון - 4 ס"מ ומהמקור השני - 2.8 ס"מ.
 - ii. B - מרחקה מהמקור הראשון - 5 ס"מ ומהמקור השני - 3.2 ס"מ.
 - iii. C - מרחקה מהמקור הראשון - 7 ס"מ ומהמקור השני - 3.4 ס"מ.
 - iv. D - מרחקה מהמקור הראשון - 8 ס"מ ומהמקור השני - 6.5 ס"מ.
- ג. כמה קווי מקסימום וכמה קווי מינימום יופיעו באמבט?

18) שאלה 1 בהתאבכות גלי מים

שני מקורות גל זהים A ו-B נמצאים בנקודות $(0,0)$ ו- $(6,0)$. המקורות משדרים באורך גל של 1cm לכל הכיוונים. על ציר y מתקבלת התאבכות בונה בנקודות הבאות (המספרים בס"מ):

- א. $(0,1.1)$ $(0,2.5)$ $(0,4.5)$ $(0,8)$ $(0,17.5)$.
- ב. $(0,1)$ $(0,2)$ $(0,4)$ $(0,8)$ $(0,16)$ $(0,32)$.
- ג. $(0,6)$ $(0,12)$ $(0,18)$ $(0,24)$ $(0,30)$.
- ד. $(4,4.5)$ $(4,8)$ $(4,17.5)$ $(3,2)$.
- ה. $(0,4.2)$ $(0,8.7)$ $(0,16.5)$ $(0,0)$.
- ו. $(0,4.5)$ $(0,8)$ $(0,17.5)$.

19) שאלה 2 בהתאבכות גלי מים

- שני מקורות גל זהים ושווי מופע ממוקמים בנקודות $(0,0)$ ו- $(5,0)$ (הערכים בס"מ). אורך הגל של כל אחד מהם 2 ס"מ. היכן על ציר y תתקבל התאבכות בונה מסדר ראשון? (הערכים בס"מ).
- א. $(5,2.5)$.
 ב. $(0,5.25)$.
 ג. $(0,6)$.
 ד. $(0,2.5)$.
 ה. $(0,-5.25)$.

20) שאלה 3 בהתאבכות גלי מים

- שני מקורות גל זהים A ו-B נמצאים בנקודות $(0,5)$ ו- $(0,-5)$. בנקודה $(10,10)$ מתקבלת התאבכות בונה מסדר ראשון (כל המספרים נתונים בס"מ) אורך הגל הוא בקירוב:
- א. 8.5 ס"מ.
 ב. 5 ס"מ.
 ג. 7.3 ס"מ.
 ד. 15 ס"מ.
 ה. 6.8 ס"מ.

21) שאלה 4 בהתאבכות גלי מים

- באמבט גלים ממוקמים שני מתנדים בשתי נקודות $(4,2)$ ו- $(7,6)$. המתנדים רוטטים בתדירות זהה ובאותו מופע. בנקודה $(10,10)$ מתקבלת התאבכות בונה מסדר שלישי. מהו אורך הגל? (הגדלים המספריים במטרים).
- א. 1.67m.
 ב. 0.62m.
 ג. 2.79m.
 ד. 6.83m.
 ה. 1.23m.

(22) התאבכות אור תרגיל 1

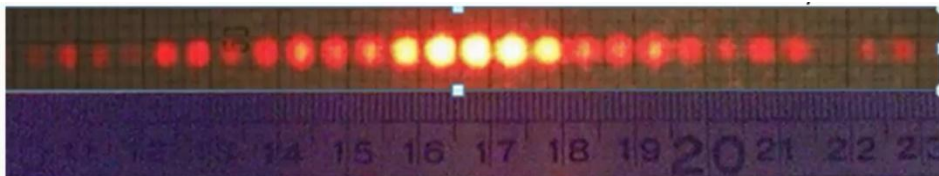
- מאירים בלייזר בעל אורך גל 500 ננומטר לוחית בעלת 2 סדקים בעלי $d = 0.2\text{mm}$. במרחק $L = 3\text{m}$ נמצא מסך.
- מהו רוחב פס אור כל עוד אנחנו בזווית קטנות?
 - מהו מרחקו ממרכז התבנית של מרכז פס האור מסדר רביעי?
 - מהו מרחקו ממרכז תבנית ההתאבכות של קו החושך מסדר שביעי?
 - מה מרחקו ממרכז תבנית ההתאבכות של מרכז פס האור מסדר 200?

(23) התאבכות אור תרגיל 2

- מאירים בלייזר ירוק בעל אורך גל לא ידוע על לוחית ובה 2 סדקים שהמרחק ביניהם 0.15 מ"מ. מניחים מסך שאורכו $h = 1\text{m}$ במרחק 3 מטר מהלוחית כך שמרכז המסך בדיוק מול הסדקים. הזווית למקסימום מסדר חמישי נמדדת ושווה ל-1 מעלה.
- מה אורך הגל של הלייזר?
 - מה מרחקו של המינימום מסדר חמישי ממרכז המסך?
 - כמה קווי חושך התקבלו על המסך?
 - אם נחליף המסך במסך ארוך מאוד שיונח באותו מיקום, כמה פסי אור ייווצרו על המסך?

(24) התאבכות אור תרגיל 3

- לוקחים לייזר אדום בעל אורך גל לא ידוע ומציבים לפניו לוחית בעלת 2 סדקים שהמרחק ביניהם 0.25 מ"מ. ממקמים מסך במרחק 1.8 מטר מהלוחית. על המסך מתקבלת תבנית ההתאבכות הבאה, לצד סרגל שהודבק למסך מראש.



- מצא את אורך הגל של הלייזר בדרך המדויקת ביותר.
- איזה מהנקודות בצילום הינה נקודת המקסימום המרכזי?
- לאיזה נקודה בצילום מגיע אור שמרחקו מאחד הסדקים גדול ב-3 אורכי גל מאשר מרחקו מהסדק השני?
- לאיזה נקודה על המסך מגיע אור שמרחקו מאחד הסדקים גדול ב-4.5 אורכי גל מאשר מרחקו מהסדק השני?
- מהן 3 הדרכים אשר ניתן לצופף בהן את תבנית ההתאבכות?

(25) התאבכות אור בסריג – תרגיל 4

- מאירים בלייזר בעל אורך גל לא ידוע על סריג בעל קבוע של 100 חריצים למ"מ. מציבים מסך במרחק 1 מטר מהסריג כך שמרכזו מול מרכז הסריג ומול קרן הלייזר. אורך המסך 4 מטר.
- מיקומו של קו המקסימום הראשון נמדד ושווה ל-6.5 ס"מ ממרכז המסך.
- מהו אורך הגל של הלייזר?
 - מה מיקומו של קו המקסימום מסדר שני?
 - מה מיקומו של קו המקסימום מסדר חמישי?
 - כמה קווי מקסימום יתקבלו על המסך?
 - בהנחה שמחליפים מסך זה במסך ארוך מאוד באותו המיקום, כמה קווי מקסימום יתקבלו עליו?

(26) התאבכות אור בסריג – תרגיל 5

- מאירים בלייזר ירוק בעל אורך גל 550 ננומטר על סריג בעל קבוע לא ידוע, ומציבים מסך במרחק 2.5 מטר מהסריג.
- על המסך שעליו מודבק סרגל מתקבלת התמונה הבאה :



- מצאו את קבוע הסריג בדרך המדויקת ביותר.
- באיזה זווית ביחס לאנך האמצעי יתקבל קו המקסימום מסדר 20?
- מה יקרה לתבנית ההתאבכות אם נחליף את הלייזר הירוק בלייזר כחול?

(27) התאבכות אור בסריג – תרגיל 6

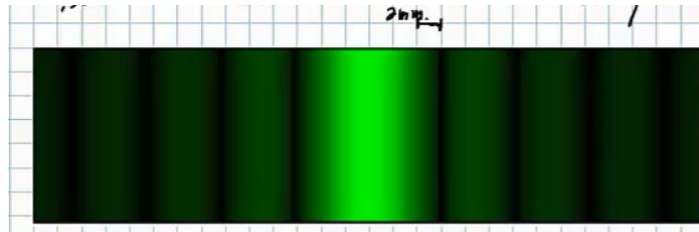
- אור לבן פוגע בסריג עקיפה בעל קבוע 300 חריצים למ"מ. מסך ארוך מונח במרחק 2 מטר מהסריג.
- מה רוחב הפס הצבעוני מסדר ראשון?
 - מה הזווית שנפתחת בין המקסימום האדום מסדר שני, והסגול מסדר שני?
 - הוכח שקיימת חפיפה בצבעים בין הסדר השני לסדר השלישי.

(28) עקיפה מסדק יחיד – תרגיל 1

- תלמיד מאיר בלייזר אדום בעל אורך גל 670 ננומטר סדק שרוחבו 0.3 מ"מ. תבנית עקיפה מתקבלת על מסך במרחק 1.5 מטר.
- מה רוחבו של המקסימום המרכזי?
 - מה רוחבו של מקסימום משני, מסדר נמוך?

29) עקיפה מסדק יחיד – תרגיל 2

לוקחים לייזר ירוק בעל אורך גל 530 ננומטר. מציבים אותו לפני סדק בעל רוחב לא ידוע, ועל מסך משבצות במרחק 3 מטר מהסדק מתקבלת תבנית ההתאבכות הבאה:



נתון שרוחב משבצת על הלוח הוא 2 מ"מ.

- מה רוחב הסדק?
- כמה קווי צומת יתקבלו על מסך ארוך מאוד?
- מה יקרה לתבנית ההתאבכות אם נגדיל את רוחב הסדק?

30) שאלה בהתאבכות גלי אור

דרך משטח מישורי עם שני סדקים צרים מאוד מעבירים גל מישורי בעל אורך גל λ המתקדם בכיוון היוצר זווית קטנה α עם האנך למשטח (ראו ציור).



המרחק בין הסדקים הוא d כאשר $d \gg \lambda$. מודדים את העוצמה במרכז לוח מישורי הנמצא במרחק $L \gg d$ מהמשטח עם הסדקים, כלומר בנקודה הנמצאת מול נקודת האמצע בין שני הסדקים. העוצמה הנמדדת היא 0.

מהי הזווית הקטנה ביותר α המסבירה מדידה זו?

- $\alpha = 0$
- $\alpha = \frac{\lambda}{2d}$
- $\alpha = \frac{2\lambda}{\pi d}$
- $\alpha = \frac{2\lambda}{d}$
- $\alpha = \frac{2\pi\lambda}{d}$
- $\alpha = \frac{\lambda}{\pi d}$

31) שאלה 2 בהתאבכות גלי אור

שני גלים אלקטרומגנטיים העוברים כל אחד דרך סדק צר יוצרים תבנית התאבכות

על פני מסך רחוק. הגל העובר דרך הסדק הראשון מתואר ע"י: $\vec{E}_1 = A_1 \cdot e^{i(kz - \omega t)} \hat{x}$.

הגל העובר דרך הסדק השני מתואר ע"י: $\vec{E}_2 = A_1 \cdot e^{i(kz - \omega t)} (-\hat{y})$.

היחס בין העוצמה המקסימלית לעוצמה המינימלית הוא:

א. $\sqrt{2}:1$.

ב. $1:0$.

ג. $1:1$.

ד. $2:1$.

ה. $4:1$.

ו. $3:2$.

32) שאלה 1 – גלי קול

אם נניח, כי עוצמת סף השמע היא: $10^{-16} \frac{W}{cm^2}$.

מהי העוצמה ביחידות הנ"ל בסף הכאב 140dB (כלומר, כמה $\frac{W}{cm^2}$ יש ב-140dB)?

א. $14 \cdot 10^{-16} \frac{W}{cm^2}$.

ב. $10^{-14} \frac{W}{cm^2}$.

ג. $140 \frac{W}{cm^2}$.

ד. $10^4 \frac{W}{cm^2}$.

ה. $10^{-2} \frac{W}{cm^2}$.

33) שאלה 2 – גלי קול

פי כמה גדולה עוצמת קול של 100 דציבל מעוצמת קול של 10 דציבל?

א. פי 10.

ב. פי 100.

ג. פי 1,000.

ד. פי 10,000.

ה. פי 1,000,000.

- ו. פי 1,000,000,000.
 ז. פי 10,000,000,000.

34) שאלה 3 – גלי קול

אם עוצמת הקול המינימאלית שבני אדם מסוגלים לשמוע (סף השמע) היא: $10^{-16} \frac{W}{cm^2}$, מהי עוצמת הקול באותן יחידות ב-130 דציבל (סף הכאב), וכמה אנרגיה פוגעת בעור התוף החשוף לעוצמה הזו (130dB) במשך שעה? נתון ששטחו של עור התוף כ-0.7 סמ"ר.

- א. העוצמה: $10^{-13} \frac{W}{cm^2}$, וסה"כ אנרגיה בשעה: 5.3J.
 ב. העוצמה: $10^{-3} \frac{W}{cm^2}$, וסה"כ אנרגיה בשעה: 5.3J.
 ג. העוצמה: $130 \frac{W}{cm^2}$, וסה"כ אנרגיה בשעה: 75J.
 ד. העוצמה: $1.3 \cdot 10^{-3} \frac{W}{cm^2}$, וסה"כ אנרגיה בשעה: 2.52J.
 ה. העוצמה: $0.001 \frac{W}{cm^2}$, וסה"כ אנרגיה בשעה: 2.52J.

35) שאלה 4 – גלי קול

אם נניח כי עוצמת סף השמע היא: $10^{-16} \frac{W}{cm^2}$ (ווט לסמ"ר), מהי העוצמה I ביחידות הנ"ל ב-120dB, וכמה אנרגיה E פוגעת בעור התוף של אוזנו של אדם, החשוף לעוצמת קול זו במשך 4 שעות? הניחו ששטחו של עור התוף 0.7 סמ"ר.

- א. $E = 5.8 \text{Joule}$ ו- $I = 12 \cdot 10^{-16} \frac{W}{cm^2}$.
 ב. $E = 5.8 \text{Joule}$ ו- $I = 13 \cdot 10^{-14} \frac{W}{cm^2}$.
 ג. $E = 1.01 \text{Joule}$ ו- $I = 10^{-4} \frac{W}{cm^2}$.
 ד. $E = 10.1 \text{Joule}$ ו- $I = 10^{-4} \frac{W}{cm^2}$.
 ה. $E = 1.2 \cdot 10^6 \text{Joule}$ ו- $I = 120 \frac{W}{cm^2}$.

(36) שאלה 5 – גלי קול

כאשר אדם נחשף לקול בעוצמה של 20 דציבל בפרק זמן של שעה, כמות האנרגיה הכוללת המגיעה לעור התוף של אוזנו היא: $2.5 \cdot 10^{-11}$ Joule. מהי כמות האנרגיה הכוללת המגיעה לעור התוף כאשר האוזן נחשפת לקול בעוצמה של 120 דציבל למשך זמן של 20 דקות?

א. 0.08Joule

ב. 0.75Joule

ג. 25Joule

ד. $2.5 \cdot 10^{-5}$ Jouleה. $5 \cdot 10^{-11}$ Joule**(37) שאלה 6 – גלי קול**

כאשר אדם נחשף לקול בעוצמה של 20 דציבל בפרק זמן של שעה, כמות האנרגיה הכוללת המגיעה לעור התוף של אוזנו היא: $2.5 \cdot 10^{-11}$ Joule. מהי כמות האנרגיה הכוללת המגיעה לעור התוף כאשר האוזן נחשפת לקול בעוצמה של 120 דציבל למשך זמן של 30 דקות?

א. 0.125Joule

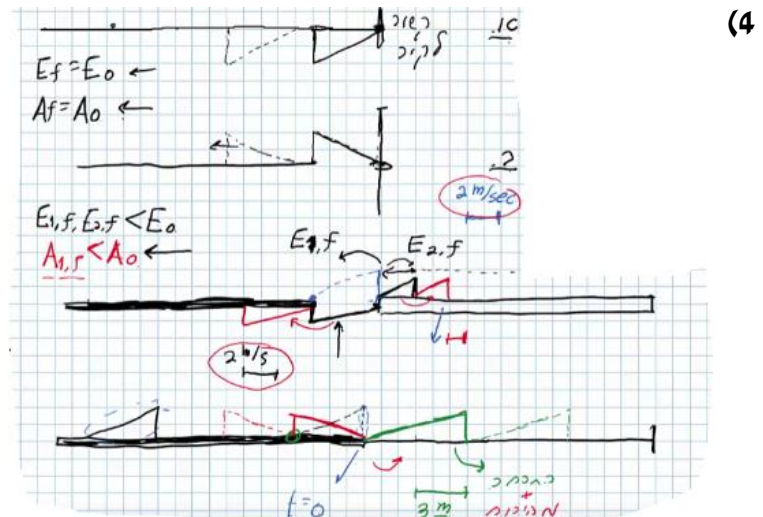
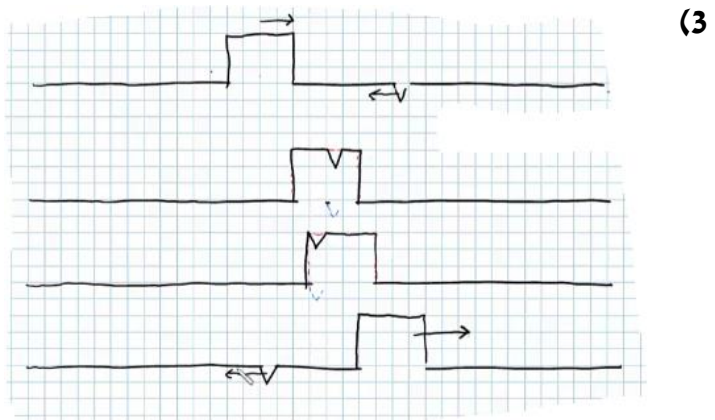
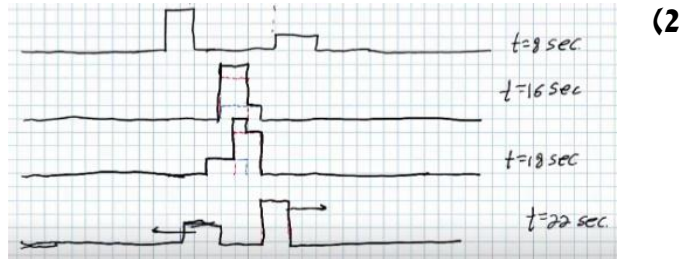
ב. 1.130Joule

ג. 37.52Joule

ד. $3.8 \cdot 10^{-5}$ Jouleה. $7.5 \cdot 10^{-11}$ Joule

תשובות סופיות:

(1) א. $A = 0.3m$ ב. $V = 0.2 \frac{m}{sec}$ ג. למעלה. ד. למטה.

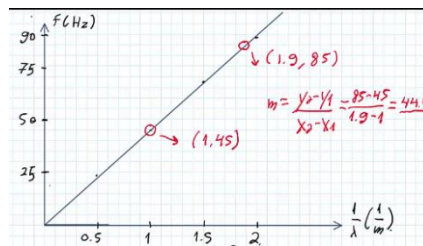


א. (5)

$\frac{1}{\lambda} (m^{-1})$	$\lambda (m)$	צורת הגל העומד	f - תדירות התנודות (Hz)
0.5	2		24
1	1		45
1.5	$\frac{2}{3}$		67
2	$\frac{1}{2}$		88

$f = 111 \text{ Hz}$. ד $f = v \frac{1}{\lambda}$. ג

ב.

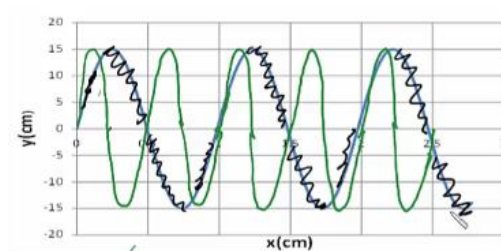


$v = 25 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$. ד

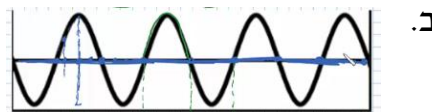
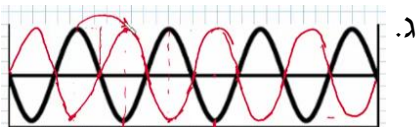
א. $A = 0.15 \text{ m}$. ב. $\lambda = 1 \text{ m}$. ג. $t = 4$. (6)

ה. $(0.5, 0)$, $(1.5, 0)$, $(2.5, 0)$

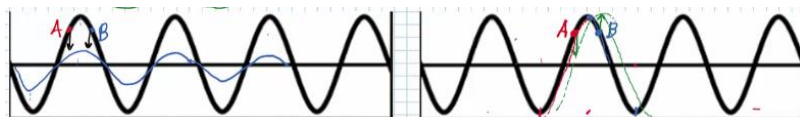
ז. הגל הירוק בשרטוט :



א. מתקדם : $\lambda_1 = 80 \text{ cm}$, עומד : $\lambda_2 = 80 \text{ cm}$. (8)



ד.

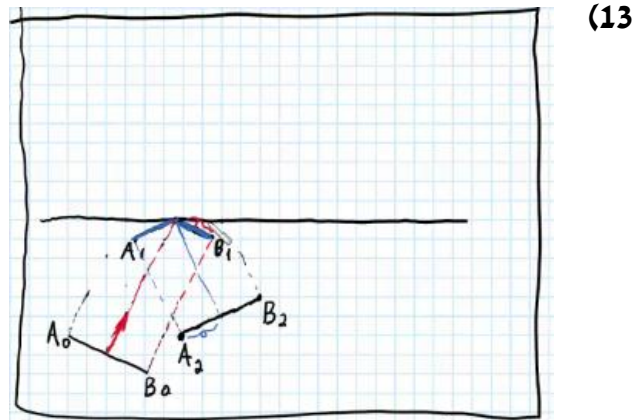


א. (9)

ב. (10)

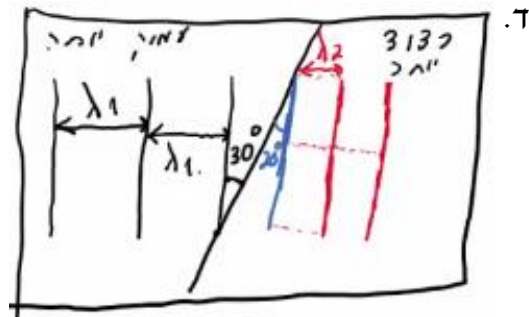
א. (11)

ג. (12)

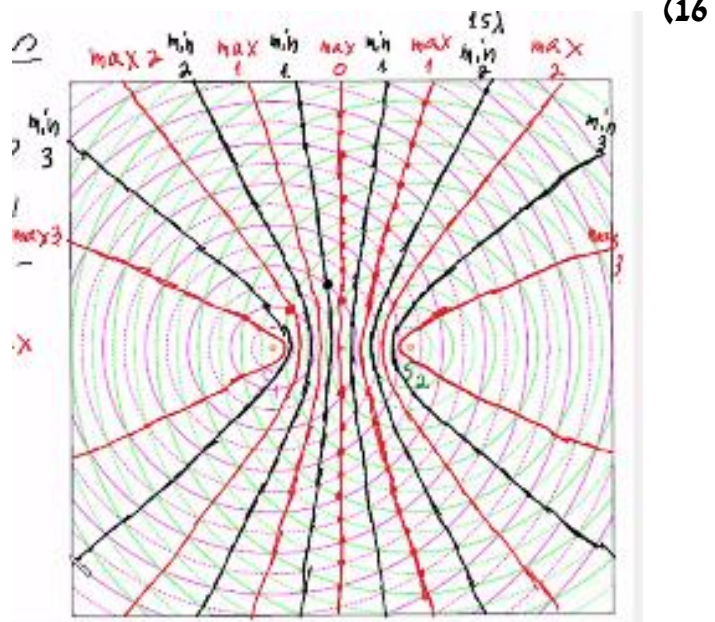


(13)

ג. $\lambda_2 = 3.42\text{cm}$ ב. $\lambda_1 = 5\text{cm}$ נ. $v_2 = 13.7 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ (14)

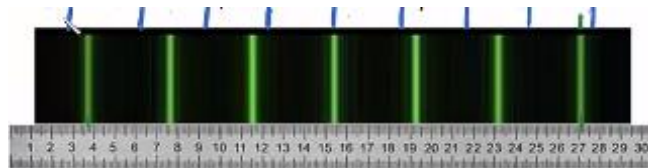


ב. 0.45cm נ. 5 (15)



(16)

- (17) א. 1.2 ס"מ.
 ב.i. A - נקי מקסימום מסדר ראשון.
 ב.ii. B - נקי צומת מסדר שני.
 ב.iii. C - נקי מקסימום מסדר שלישי, נקי על קו מקסימום.
 ב.iv. D - נקי ביניים.
 ג. 11 קווי מקסימום, 12 קווי מינימום.
 (18) א' מלאה ו-ו' חלקית.
 (19) ב' ו-ה.
 (20) ה.
 (21) א'.
- (22) א. 7.5 nm ב. 3 ס"מ. ג. $\theta = 0.93^\circ$ ד. $x_{200} = 1.73$
 (23) א. 524 נ"מ. ב. 4.72 ס"מ. ג. 94 קווי חושך. ד. 573 פסי מקסימום.
 (24) א. 5 מ"מ. ב. $\lambda = 694$ ג. 3λ ד. 4.5λ ה. ראה סרטון.
 (25) א. 649 נ"מ. ב. 13 ס"מ. ג. 34.3 ס"מ. ד. 27 קווים. ה. 31 קווים.
 (26) א. $282 \frac{\text{haritsim}}{\text{cm}}$ ב. 18.1°



- (27) א. 0.188 מ'. ב. 10.9° ג. הוכחה.
 (28) א. 6.7 מ"מ. ב. 3.35 מ"מ.
 (29) א. 0.265 מ"מ. ב. 1,000 קווי צומת בתבנית.
 ג. האור ינוע בקווים ישרים ולא מבצע עקיפה.
 (30) ב'.
 (31) ג'.
 (32) ה.
 (33) ו'.
 (34) ה.
 (35) ג'.
 (36) א'.
 (37) א'.

פיסיקה 3

פרק 2 - גלים אלקטרו-מגנטיים

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגילים 19

הרצאות ותרגילים:

מושגים בסיסיים בגלים

רקע:

גל - הפרעה שמתקדמת במרחב.

גלים רוחביים - ההפרעה בכיוון ניצב להתקדמות הגל.

גלים אורכיים - ההפרעה בכיוון מקביל להתקדמות הגל.

זמן מחזור - הזמן שלוקח להפרעה לעשות מחזור שלם (סימון - T).

תדירות - מספר המחזורים שנעשים בשנייה (סימון - $f = \frac{1}{T}$).

אורך הגל - המרחק בין מחזורים (או המרחק בין שיא לשיא) (סימון - λ).

מהירות הגל - קצב התקדמות ההפרעה במרחב (סימון - u).

גל מוחזר - כשגל פוגע בנקודה בה יש שינוי בתווך נוצר גל מוחזר. הגל המוחזר יהיה בתדירות זהה ובכיוון הפוך לגל הפוגע.

התאבכות - סכמה של שני גלים.

גל עומד - ההפרעה לא מתקדמת במרחב.

פונקציית הגל - פונקציה המתארת את ההפרעה כתלות במיקום ובזמן

משוואת הגלים -

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad \text{- במימד אחד}$$

$$\vec{\nabla}^2 f = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad \text{- בשלושה מימדים}$$

משוואת הגלים האלקטרו-מגנטיים

רקע:

משוואות מקסוול בהיעדר מטענים וזרמים חופשיים:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

בחומר איזוטרופי ולינארי מתקיים:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

משוואת הגלים עבור השדה החשמלי והמגנטי:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

כאשר:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad \text{ובריק:}$$

המשוואה היא עבור כל רכיב בנפרד.

המשוואה זהה לשדה המגנטי.

אינדקס השבירה (מהירות האור בריק חלקי מהירות האור בחומר):

$$n = \frac{c}{u} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$$

תמיד גדול מאחד (מהירות האור בחומר תמיד קטנה מהמהירות בריק):

פתרון למשוואת הגלים במימד אחד:

$$E_x(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

מעבר לייצוג קופלקסי: $\cos(kx - \omega t) = \text{Re}[e^{i(kx - \omega t)}]$.

כשעובדים עם הייצוג הקומפלקסי ניתן לעבוד רק עם החלק התלוי במרחב (או השדה ב- $t=0$) ובסוף להכפיל את הפונקציה ב- $e^{-i\omega t}$ בשביל לקבל את התלות בזמן.

יחס הדיספרסיה - הקשר בין התדירות למספר הגל:

$$\omega = uk$$

אם היחס לא לינארי אז צריך להבדיל בין מהירות הפאזה למהירות החבורה:

$$u_{ph} = \frac{\omega}{k}, u_g = \frac{d\omega}{dk}$$

גל אלקטרומגנטי מישורי

רקע:

הצורה הכללית של הפתרון ההרמוני:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

כאשר:

$$\vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z} \quad \text{וקטור הגל -}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

הערות – תמיד אפשר להוסיף גם פאזה.

$$\omega = u|k| = u\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \quad \text{יחס הדיספרסיה בגל:}$$

הכיוון של \vec{k} הוא כיוון התקדמות הגל ובגל מישורי תמיד $\vec{E} \perp \hat{k}$

לכיוון של \vec{E} (המסומן בדרי"כ ב- \hat{n}) קוראים כיוון הקיטוב של הגל.

השדה המגנטי בגל:

כיוון השדה המגנטי מאונך לשדה החשמלי ולכיוון התקדמות הגל. התלות בזמן ובמרחב של השדה המגנטי זהה לזו של השדה החשמלי. (אותו קוסינוס עם אותו ארגומנט).

$$\vec{B} = \frac{1}{u} \hat{k} \times \vec{E} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad \text{העכבה של התווך:}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \eta_0 = 120\pi \quad \text{בריק:}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta} \hat{k} \times \vec{E},$$

$$\vec{E} = -\eta \hat{k} \times \vec{H}$$

וקטור פוינטינג (האנרגיה שהגל נושא) - כמות אנרגיה ליחידת שטח ליחידת זמן.

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

בנוסחה מציבים את הביטוי הממשי של השדות.

הכיוון של \vec{S} הוא בכיוון של \hat{k} (כיוון התקדמות הגל).
 הממוצע של הוקטור פוינטינג בזמן (נקרא גם **העוצמה** של הגל):

$$\vec{S}_{Avg} = \langle \vec{S} \rangle = \text{Re} \left\{ \frac{\vec{\tilde{E}} \times \vec{\tilde{H}}^*}{2} \right\}$$

$\vec{\tilde{E}}$ ו- $\vec{\tilde{H}}$ הם הייצוג הקומפלקסי של השדות.

המרה של הנגזרות בזמן ובמרחב:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$$

$$\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$$

שאלות:

- 1 דוגמה - חישוב כל הגדלים הבסיסיים**
 השדה החשמלי של גל א"מ המתקדם בחומר לא מגנטי נתון בביטוי
 הבא: $\vec{E} = 4\pi \cos(10^9 t - 6x) \hat{y} \frac{mV}{m}$
 א. מהו התדר של הגל ומהו אורך הגל?
 ב. מהו מקדם השבירה והקבוע הדיאלקטרי של החומר?
 ג. מהו \vec{H} ומהו וקטור פוינטינג הממוצע?

- 2 דוגמה 2 - חישוב כל הגדלים**
 השדה: $\vec{H} = H_0 e^{i(2\pi x - 6\pi y - 10^8 \pi t)} \cdot \frac{3\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{10}}$ מתפשט בתווך לא מגנטי.
 מצאו את:

- א. וקטור הגל ואורך הגל.
 ב. תדר הגל.
 ג. מהירות הגל בתווך ומקדם השבירה.
 ד. המקדם הדיאלקטרי והעכבה.
 ה. השדה החשמלי.

תשובות סופיות:

$$\text{א. } f = 1.59 \cdot 10^8 \text{ Hz}, \lambda = \frac{\pi}{3} \text{ m} \quad \text{ב. } n = 1.8, \varepsilon_r = 3.24 \quad (1)$$

$$\text{ג. } \vec{H} = 6 \cdot 10^{-5} \cos(6x - 10^9 t) z \frac{A}{m}, \vec{S}_{AVg} = 12\pi \cdot 10^{-8} \hat{x}$$

$$\text{א. } \vec{K} = 2\pi(1, -3, 0), \lambda = \frac{1}{\sqrt{10}} \text{ m} \quad \text{ב. } f = 5 \cdot 10^7 \text{ Hz} \quad (2)$$

$$\text{ג. } n = 18.97, u = 5 \cdot \sqrt{10} \cdot 10^6 \frac{m}{sec} \quad \text{ד. } \eta = 2\pi \cdot \sqrt{10}, \varepsilon_r = 360$$

$$\text{ה. } \vec{E}(x, y, t) = -2\pi \cdot \sqrt{10} \cdot H_0 e^{i(2\pi x - 6\pi y - 10^8 \pi t)} \hat{z}$$

קיטוב מעגלי ואליפטי

רקע:

הקיטוב של הגל נקבע על ידי כיוון השדה החשמלי (לא לבלבל עם כיוון הגל).
מקטב - מודד את הקיטוב של הגל.
קיטוב לינארי - כיוון השדה קבוע.

קיטוב מעגלי ימני - רכיב y מפגר אחרי רכיב x ב- 90° .

כלומר הפאזה של רכיב y פחות הפאזה של רכיב x שווה $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

השדה מסתובב נגד השעון או בהתאם לכלל יד ימין ביחס לציר ה- z .

קיטוב מעגלי שמאלי - רכיב y מקדים את רכיב x ב- 90° .

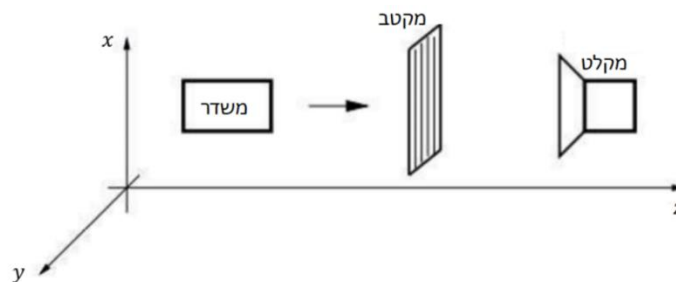
($\varphi = -\frac{\pi}{2}$) השדה מסתובב עם השעון או הפוך לכלל יד ימין ביחס לציר ה- z).

קיטוב אליפטי - מתקבל כאשר יש הפרש פאזה של 90° והאמפליטודה של הרכיבים שונה או אם הפרש הפאזה שונה מ- 90° .

שאלות:

1) דוגמה חשובה - שינוי עוצמה ממקטבים

נתונה המערכת הבאה:



במערכת, המשדר יכול לייצר גל הנע בכיוון z בכל קיטוב שנרצה.

והמשדר יכול למדוד גל בכל קיטוב שמגיע אליו.

המקטב מורכב מרשת מתכתית כפי שמתואר באיור.

כיוון המקטב מוגדר לפי כיוון הרכיב של השדה שעובר, כלומר במאונך לרשת.

א. עבור המצב של המקטב בתמונה נתון כי המקלט אינו קולט סיגנל.

רשמו את פונקציית הגל שמייצר המשדר.

ב. עבור אותו גל מוסיפים לפני המקטב הקיים מקטב זהה נוסף בזווית

של 30° מעלות ביחס לציר ה- x .

מה היחס בין העוצמה שימדוד הגלאי לעוצמה שיוצאת מהמשדר?

(2) דוגמה - קיטוב לינארי ומעגלי

מצאו את הקיטוב של השדה במקרים הבאים.

עבור קיטוב לינארי רשמו את כיוון הקיטוב וזווית הקיטוב.

א. $\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{x} + 3E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{y}$

ב. $\vec{E} = E_0 \cos\left(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) \hat{x} + E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{y}$

ג. $\vec{E} = E_0 \cos(kz + \omega t) \hat{x} + E_0 \cos\left(kz + \omega t + \frac{\pi}{2}\right) \hat{y}$

ד. $\vec{H} = H_0 \cos\left(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) \hat{x} + H_0 \cos\left(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) \hat{y}$

(3) דוגמה - קיטובים אליפטיים וערכים מקסימאליים

מצאו את הקיטוב של הגלים הבאים.

אם הקיטוב אליפטי, מצאו את הערך המקסימאלי של השדה החשמלי ואת זווית ההטיה של הציר הראשי של האליפסה.

א. $\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{x} + 2E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{y}$

ב. $\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{x} + 2E_0 \cos\left(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) \hat{y}$

ג. $\vec{E} = E_0 \cos\left(kz - \omega t + \frac{\pi}{4}\right) \hat{x} + E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{y}$

ד. $\vec{E} = E_0 \cos\left(kz - \omega t + \frac{\pi}{4}\right) \hat{x} + \frac{1}{2} E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{y}$

(4) קיטוב אליפטי הוא סכום של קיטובים מעגליים

הוכיחו כי ניתן לייצג גל בעל קיטוב אליפטי בעזרת סכום של גל בעל קיטוב מעגלי ימני וגל בעל קיטוב מעגלי שמאלי.

(5) קיטוב מעגלי כסכום של קיטובים אליפטיים

הוכיחו כי גל בעל קיטוב מעגלי הינו סופרפוזיציה של שני גלים בעלי קיטוב אליפטי בכיוונים הפוכים.

תשובות סופיות:

$$\text{א. } \vec{E}(z, t) = E_0 \hat{x} \cos(kz - \omega t) \quad \text{ב. } \frac{3}{16} \quad (1)$$

$$\text{א. קיטוב ליניארי, } \theta = 72^\circ, \hat{n} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3) \quad (2)$$

ב. קיטוב מעגלי שמאלי. ג. קיטוב מעגלי ימני.

$$\text{ד. קיטוב ליניארי, } \theta = -45^\circ, \hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$$

$$\text{א. קיטוב ליניארי, } \theta = 26.6^\circ, \hat{n} = \frac{(1, 2)}{\sqrt{5}} \quad (3)$$

$$\text{ב. קיטוב אליפטי, } \theta = \frac{\pi}{2}, E_{\max} = 2E_0$$

$$\text{ג. קיטוב אליפטי, } \theta = 45^\circ, E_{\max} = 1.7E_0$$

$$\text{ד. קיטוב אליפטי, } \theta = 21.7^\circ, E_{\max} = 1.27E_0$$

(4) הוכחה.

(5) הוכחה.

פגיעה ישרה בתווך דיאלקטרי

רקע:

כאשר גל הנע בתווך אחד פוגע בשפה של תווך אחר נקבל גל עובר וגל מוחזר תדירות כל הגלים זהה ושווה לתדירות המקוראת אמפליטודות הגל העובר והגל המוחזר נקבל מתנאי השפה.

$$D_{2\perp} - D_{1\perp} = \sigma_{free} \quad B_{2\perp} = B_{1\perp}$$

$$E_{2\parallel} = E_{1\parallel} \quad H_{2\parallel} - H_{1\parallel} = k_{free}$$

σ_{free} - היא צפיפות המטען המשטחית והחופשית על השפה

k_{free} - צפיפות הזרם המשטחי והחופשי על השפה

בפגיעה ישרה (או פגיעה בניצב) לשני השדות רכיב מקביל לשפה בלבד.

בתווך דיאלקטרי: $\sigma_{free} = k_{free} = 0$
 הקשר בין האמפליטודות:

$$\frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

$$\frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

השוויון השני נכון רק אם: $\mu_1 = \mu_2$ (זה המצב ברוב המקרים).
 לא לבלבל בין n ל- η .

מקדם העברה:

$$\tau = \frac{E_t}{E_0}$$

מקדם החזרה:

$$\Gamma = \frac{E_r}{E_0}$$

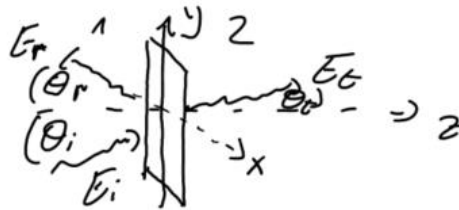
בפגיעה ישרה בתווך דיאלקטרי:

$$1 + \Gamma = \tau$$

פגיעה בזווית בתווך דיאלקטרי

רקע:

מישור השפה בין החומרים (מישור xy באיור).
 מישור הפגיעה הוא המישור של וקטורי הגל (מישור yz באיור).



משיקולי סימטריה k_y זהה לכל הגלים.

$$\theta_i = \theta_r$$

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{u_t}{u_i} = \frac{n_i}{n_t} \quad \text{חוק סנל:}$$

אם: $n_i > n_t$ אז קיימת זווית קריטית.
 אם זווית הפגיעה גדולה מהזווית הקריטית אז לא יהיה גל עובר או תהיה החזרה מלאה:

$$\theta_c = \text{shiftsin} \left(\frac{n_t}{n_i} \right)$$

משוואות פרנל:

עבור פגיעה בזווית עם קיטוב אנכי (השדה החשמלי מאונך למישור הפגיעה):

$$\Gamma^\perp = \frac{E_{r0}^\perp}{E_{i0}^\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} = \frac{n_1 \cos \theta_i - \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{n_1 \cos \theta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}$$

$$\tau^\perp = \frac{E_{t0}^\perp}{E_{i0}^\perp} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}$$

$$1 + \Gamma^\perp = \tau^\perp$$

עבור פגיעה בזווית עם קיטוב מקבילי (השדה החשמלי מקביל למישור הפגיעה):

$$\Gamma^{\parallel} = \frac{E_{r_0}^{\parallel}}{E_{i_0}^{\parallel}} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} = \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos \theta_i - n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos \theta_i + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}$$

$$\tau^{\parallel} = \frac{E_{t_0}^{\parallel}}{E_{i_0}^{\parallel}} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} = \frac{2n_1 n_2 \cos \theta_i}{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos \theta_i + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}$$

$$1 + \Gamma^{\parallel} = \tau^{\parallel} \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}$$

זווית ברוסטר היא הזווית שבה יש העברה מלאה (ואין החזרה).

זווית ברוסטר בקיטוב מקבילי:

$$\sin^2 \theta_B^{\parallel} = \frac{1 - \frac{\mu_t \varepsilon_i}{\mu_i \varepsilon_t}}{1 - \left(\varepsilon_t / \varepsilon_i\right)^2}$$

אם: $\mu_2 \approx \mu_1$ אז:

$$\sin \theta_B^{\parallel} = \frac{1}{1 + \varepsilon_i / \varepsilon_t}$$

$$\tan \theta_B^{\parallel} = \frac{n_t}{n_i}$$

בקיטוב אנכי:

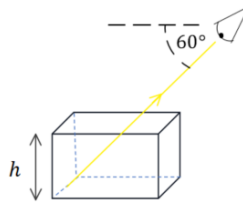
$$\sin^2 \theta_B^{\perp} = \frac{1 - \frac{\mu_i \varepsilon_t}{\mu_t \varepsilon_i}}{1 - \left(\mu_i / \mu_t\right)^2}$$

* מאוד נדיר למצוא חומרים שקיימת עבורם זווית ברוסטר בקיטוב אנכי.

שאלות:

(1) תרגיל - צופה מסתכל על תיבה

לתיבת זכוכית ריקה גובה של $h = 6\text{cm}$. צופה מסתכל על התיבה, כאשר הוא מוריד את ראשו בזווית של 60 מעלות מתחת לאופק הוא רואה בדיוק את קצה הבסיס הרחוק של התיבה. ממלאים את התיבה בשמן $n = 1.54$. איזה נקודה בבסיס התיבה יראה הצופה? (מצאו את מרחק הנקודה מהקצה הרחוק של בסיס התיבה).



(2) תרגיל - שבירה דרך מספר חומרים

בתמונות הבאות מתוארים חומרים בעלי מקדמי שבירה שונים. גל עובר דרך השכבות כמתואר באיורים. הניחו שהתמונות מדויקות. דרגו את מקדמי השבירה של החומרים השונים, בכל תמונה, מהקטן לגדול (אין קשר בין התמונות).



(3) דוגמה - גל פוגע בזווית במים

- גל אלקטרומגנטי מישורי נע באוויר (ריק) ופוגע בזווית בפני המים. הקבוע הדיאלקטרי של מי ים הוא בערך 80. (הניחו שהמים מתנהגים כמבודד).
- מצאו את זווית ברוסטר עבור גל בקיטוב מקבילי.
 - המקוטב אנכית פוגע בפני המים בזווית שחישבתם בסעיף א.
 - מהי זווית ההעברה של הגל?
 - מה הם מקדמי ההעברה וההחזרה?

(4) תרגיל - שבירה במעברים עם זווית קריטית וברוסטר

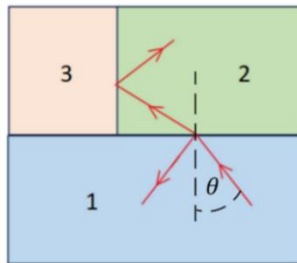
אור נכנס מחומר 1 ועובר שבירה במעבר לחומר 2 כך שחלקו מוחזר וחלקו מועבר, ראו איור. הקרן שהועברה ממשיכה עד לפגיעה בחומר 3 שם היא פוגעת בו בזווית הקריטית ומבצעת החזרה מלאה.

נתון: $n_1 = 1.5$, $n_2 = 1.3$, $n_3 = 1.1$.

א. מהי הזווית θ שבאיור?

ב. האם צריך להגדיל או להקטין את הזווית θ כך שהאור לא יבצע החזרה מלאה וייכנס לחומר 3?

ג. האם האור יעבור לחומר 3 בהינתן ש- θ היא זווית ברוסטר למעבר בין חומר 1 לחומר 2? (הניחו כי הפרמביליות זהה).

**(5) תרגיל - גלים בין שני מקטבים**

גל בעל קיטוב בכיוון x ואמפליטודה של השדה החשמלי E_0 נע בכיוון z . הגל עובר דרך שני מקטבים הראשון בעל קיטוב בזווית 20 מעלות עם ציר x והשני בזווית 60 מעלות עם ציר x . בכל הסעיפים ניתן להזניח החזרות מרובות.

א. מהי האמפליטודה והכיוון של הגל העובר את המקטב הראשון?

ב. מהי האמפליטודה והכיוון של הגל העובר את המקטב השני? רשמו ביטוי לגל זה.

ג. בהנחה שהמקטב השני הוא מקטב רשת המחזיר את הרכיב המקביל ללא איבוד אנרגיה לחום. מהי האמפליטודה והכיוון של הגל המוחזר מהמקטב השני?

6 תרגיל - מקטב מערימה של משטחי זכוכית

- דרך פשוטה ויעילה לבנות מקטב היא להשתמש בערימה של משטחי זכוכית מיקרוסקופים עם מרווחים ביניהם. הרעיון הוא לנצל את ההבדל בין מקדמי ההעברה של הרכיב המקביל והמאונך. בזווית ברוסטר ישנה העברה מלאה של הרכיב המקביל בעוד שרק חלק מהרכיב המאונך עובר, כלומר זהו סוג של מקטב. נניח שיש לנו חתיכה אחת של זכוכית והפגיעה בה היא בזווית ברוסטר.
- א. מצאו את זווית ברוסטר עבור הפגיעה בזכוכית (מאוורר) בעלת מקדם שבירה $n = 1.46$ (מקדם השבירה תלוי באורך הגל, הניחו שזה מקדם השבירה עבור אורך הגל שבבעיה וכי הפרמביליות אחידה).
- ב. מצאו את זווית ההעברה, האם היא תלויה בקיטוב?
- ג. הראו כי זווית הפגיעה ביציאה מהזכוכית היא זווית ברוסטר לאותו מעבר.
- ד. מצאו את מקדמי ההעברה לכל רכיב (τ^{\parallel} , τ^{\perp}) עבור היציאה מהזכוכית.

מקדמי החזרה וההעברה של האנרגיה עבור שני הרכיבים מוגדרים באופן

$$\text{הבא: } T = \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} |\tau|^2$$

מקדם ההעברה הכולל הוא מכפלה של מקדם ההעברה בכניסה של האור לזכויות במקדם ההעברה של היציאה של האור מהזכוכית. ניתן להזניח החזרות מרובות.

ה. מהו מקדם ההעברה הכולל של האנרגיה עבור כל רכיב.

- ו. נגדיר את יעילות המקטב לפי: $e = \frac{T^{\parallel}}{T^{\perp}}$ לכמה שכבות נזדקק על מנת להגיע ליעילות של $e = 10^4$

תשובות סופיות:

1. 1.4cm
2. תמונה א: $n_1 > n_2 > n_3$, תמונה ב: $n_5 < n_3 = n_2 < n_1 < n_4$
3. א. $\theta_B = 84^\circ$. ב. $\theta_t = 6.4^\circ$
- ג. $\tau^{\perp} = 0.025$, $\Gamma^{\perp} = -0.975$
4. א. $\theta \approx 27.5^\circ$. ב. צריך להגדיל את טטה. ג. האור ייכנס.
5. א. $E_0 \cos(20^\circ)$ בכיוון: $\cos(20^\circ)\hat{x} + \sin(20^\circ)\hat{y}$.
- ב. $\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(20^\circ) \cos(40^\circ) (\cos(60^\circ)\hat{x} + \sin(60^\circ)\hat{y}) \cos(kz - \omega t)$
- ג. $E_0 \cos(20^\circ) \sin(40^\circ)$ בכיוון: $\cos(30^\circ)\hat{x} - \sin(30^\circ)\hat{y}$
6. א. $\theta_B \approx 55.6^\circ$. ב. $\theta_t \approx 34.4^\circ$ לא תלויה בקיטוב.
- ג. $\tau^{\perp} = 1.36$, $\tau^{\parallel} = 0.685$. ד. $\tau^{\perp} = 0.754$, $\tau^{\parallel} = 1$. ה. 33

פגיעה במוליך מושלם

רקע:

במוליך מושלם השדות בתוך המוליך מתאפסים תנאי השפה:

$$H_{1||} = -k_{\text{free}}$$

$$E_{1||} = 0$$

בפגיעה ישרה מתקבל גל עומד.

יש הפרש פאזה של 90 בין השדה החשמלי למגנטי בפגיעה בזווית:

$$\theta_i = \theta_r$$

צריך לחלק לקיטוב מקביל או מאונך למישור הפגיעה אבל בשני המקרים מקבלים גל עומד בכיוון z (בכיוון מאונך לשפה) וגל מתקדם בכיוון y (בכיוון מקביל לשפה).

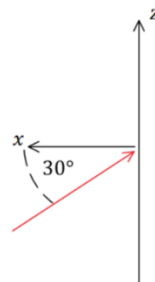
שאלות:

1) תרגיל - גל פוגע במראה בזווית

גל אלקטרו מגנטי מתקדם במישור xz עם זווית של 30 מעלות ביחס לציר ה-x כפי שמתואר באיור. לגל כיתוב בכיוון y. הגל פוגע במראה מישורית הנמצאת במישור zy ומוחזר ממנה.

א. כתבו את \hat{k} עבור הגל הפוגע והמוחזר.

ב. מהו הכיוון של השדה החשמלי והמגנטי של הגל המוחזר?



תשובות סופיות:

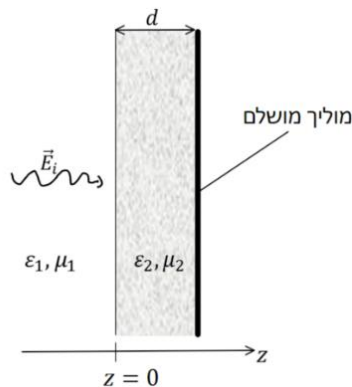
$$\hat{B}_r = -\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{z} + \frac{1}{2}\hat{x} \quad \text{ג.} \quad \hat{E} = -\hat{y} \quad \text{ב.} \quad \hat{k}_i = -\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{z}, \quad \hat{k}_r = \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{z} \quad \text{א.} \quad (1)$$

מעבר של יותר מתווך אחד

רקע:

נציב את תנאי השפה עבור כל ממעבר.

שאלות:



1) שכבת חומר דיאלקטרי ליד מוליך מושלם

גל הנע בתווך דיאלקטרי בעל ϵ_1, μ_1 פוגע בניצב לשכבה בעובי d עם ϵ_2, μ_2 ומוחזר ממוליך מושלם הנמצא בקצה השכבה, ראו איור. השדה החשמלי של הגל נתון לפי:

$$\vec{E}_i(z, t) = E_{i0} \hat{x} \cos \omega \left(\frac{z}{u} - t \right)$$

מצאו את:

א. $\vec{E}_r(z, t)$

ב. $\vec{E}_1(z, t)$

ג. $\langle S_1 \rangle$

ד. העובי d עבורו לא ניתן יהיה לזהות את השכבה.

2) חישוב כל הגדלים

השדה החשמלי של גל מישורי הנע בתווך הומוגני נתון לפי הביטוי: $\vec{E} = \cos(z + 2\pi \cdot 10^7 t) \hat{y}$ ביחידות של וולט למטר.

א. מהו תדר הגל (בהרץ)?

ב. מהו כיוון התקדמות הגל?

ג. מהו אורך הגל?

בהנחה כי $\mu = \mu_0$ מצאו את המקדם הדיאלקטרי היחסי של החומר.

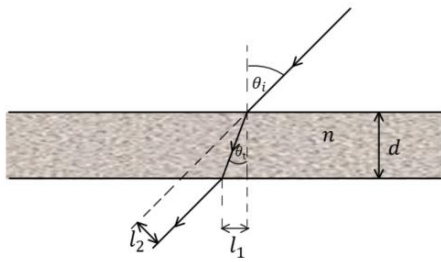
רשמו ביטוי ל- \vec{H} .

ד. רשמו ביטוי לווקטור פוינטינג הממוצע בזמן.

3) ציירו קיטוב אליפטי

ציירו את אליפסת הפולריזציה (האליפסה אותה "מצייר" קצהו של ווקטור השדה החשמלי במישור המאונך לכיוון התקדמות הגל כאשר הצופה מודד אותו לאורך זמן בנקודה קבועה) עבור הגל:

$$\vec{E} = (5i\hat{x} - \hat{y})e^{-i(\pi z + \omega t)}$$



(4) חישוב הזזה לטרלית (חוק סנל)

קרן אור נעה באוויר ופוגעת בזווית θ_i בחומר שקוף בעובי d בעל אינדקס שבירה n .

א. מצאו את זווית ההעברה.

ב. מצאו את המרחק של נקודת היציאה l_1 .

ג. מצאו את ההזזה הטרלית (המרחק l_2 באיור).

(5) תרגיל - אלכוהול מזויף

רועי קנה בקבוק יוקרתי של משקה ג'ין ורוצה לוודא שהאלכוהול אינו מזויף. אלכוהול מזויף מכיל כמות גבוהה של אתנול במקום מתנול. לרועי יש שני מצביעי לייזר באורכי גל של 532nm ו- 638nm . הוא מכוון את הלייזר בזווית 30° מעלות כלפי מעלה ולמרכז הבקבוק ומודד את הגובה h ממנו יוצאת קרן האור, ראו איור. קוטר הבקבוק הוא 12cm . את מקדמי השבירה של מתנול ואתנול ניתן למצוא באינטרנט והקירוב שלהם עבור תחום אורכי גל: $\lambda \in [0.4\mu\text{m}, 0.8\mu\text{m}]$ הוא:

$$\text{מתנול: } n(\lambda) \approx -0.8\lambda^3 + 1.8\lambda^2 - 1.4\lambda + 1.7$$

$$\text{אתנול: } n(\lambda) \approx -0.1\lambda^3 + 0.3\lambda^2 - 0.3\lambda + 1.4$$

בנוסחה יש להציב את אורך הגל הנמדד באוויר ב- μm .

לצורך הפשטות נניח כי הבקבוק מכיל 100% אתנול או מתנול.

א. ציירו באמצעות מחשב גרף של $n(\lambda)$ עבור מתנול ואתנול על אותו גרף.

ב. ציירו באמצעות מחשב את זווית ההעברה כתלות ב- λ .

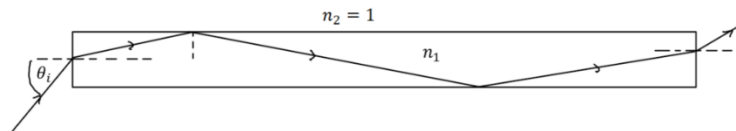
על איזה מהלייזרים תמליצו לרועי להשתמש?

ג. מצאו את הערך של h עבור כל אחד מסוגי החומרים.

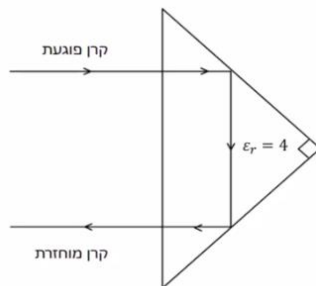


6) גל א"מ לא יוצא מסיב אופטי

סיב אופטי ישר עשוי מחומר דיאלקטרי שקוף בעל אינדקס שבירה n_1 . גל אלקטרו מגנטי נכנס בצידו האחד של הסיב בזווית θ_i ופוגע בדפנות של הסיב במהלך ההתקדמות. מהו n_1 המינימלי כך שהגל לא יצא מהסיב עד אשר יגיע לקצה השני ללא תלות בזווית הפגיעה θ_i .

**7) אור מוחזר מפריזמה משולשת**

אור נכנס ומוחזר מפריזמה משולשת העשויה זכוכית. מסלול קרן האור מתואר באיור. מהו אחוז עוצמת האור של הקרן המוחזרת. הניחו $\epsilon_r = 4$ עבור זכוכית. הפריזה היא משולש שווה שוקיים וישר זווית.

**8) פגיעה ישרה במוליך מושלם**

גל הנע באוויר (ריק) בכיוון ציר z פוגע פגיעה ישירה במוליך מושלם (שפת המוליך היא מישור xy). אמפליטודת השדה החשמלי של הגל היא: $6 \frac{V}{m}$ והתדירות היא: 100 MHz .

א. מצאו את השדה החשמלי ואת H של הגל הפוגע והגל המוחזר.
 ב. רשמו ביטוי לשדה החשמלי הכולל.
 ציינו במפורש מה גודל השדה הנמדד כתלות בזמן ובמרחב.
 ג. מצאו את המיקום הכי קרוב למוליך שבו השדה החשמלי מתאפס.

9) גל מקוטב מעגלית פוגע במוליך מושלם

השדה החשמלי של גל מישורי הנע באוויר נתון לפי: $\vec{E}(z) = E_{i0}(\hat{x} - i\hat{y})e^{ikz}$. הגל פוגע פגיעה ישרה במוליך מושלם כך ששפת המוליך היא במישור $z = 0$.

א. מהו סוג הקיטוב של הגל? במקרה של קיטוב מעגלי או אליפטי ציינו גם אם הקיטוב ימני או שמאלי.
 ב. מצאו את הקיטוב של הגל המוחזר.
 ג. מהו הזרם המושרה במוליך?
 ד. רשמו ביטוי מפורש לשדה החשמלי הנמדד כתלות במרחב ובזמן.

10) גל פוגע בזווית במוליך מושלם

- גל מישורי בתדירות ω נע באוויר (ריק) ופוגע בזווית במוליך מושלם. זווית הפגיעה היא θ_i וקיטוב הגל מאונך למישור הפגיעה. אמפליטודת השדה החשמלי היא E_{i0} .
- א. מצאו את הזרם על שפת המוליך כתלות בזמן ובמרחב.
 ב. מצאו את הממוצע בזמן של הוקטור פוינטנג.

11) גל פוגע בזווית במוליך מושלם קיטוב מקבילי

- השדה החשמלי של גל מישורי הנע באוויר נתון לפי: $\vec{E}_i(x, z) = 10e^{i(6x+8z)} \hat{y} \frac{V}{m}$
- הגל פוגע במוליך מושלם ששפתו היא במישור $z = 0$.
- א. מהם אורך הגל והתדירות?
 ב. רשמו ביטוי עבור השדה החשמלי ו- H הנמדדים כתלות בזמן ובמרחב.
 ג. מהי זווית הפגיעה?
 ד. מצאו את השדה החשמלי ואת H של הגל המוחזר.
 ה. רשמו את השדה החשמלי ואת H השקולים באוויר.

12) גל פוגע בזווית במוליך מושלם קיטוב אנכי

- השדה החשמלי של גל מישורי הנע באוויר נתון לפי: $\vec{E}_i(x, z) = 5(\hat{y} + \sqrt{3}\hat{z})e^{-i6(\sqrt{3}y-z)} \frac{V}{m}$
- הגל פוגע במוליך מושלם ששפתו היא במישור $z = 0$.
- א. מהם אורך הגל והתדירות?
 ב. רשמו ביטוי עבור השדה החשמלי ו- H הנמדדים כתלות בזמן ובמרחב.
 ג. מהי זווית הפגיעה?
 ד. מצאו את השדה החשמלי ואת H של הגל המוחזר.
 ה. רשמו את השדה החשמלי ואת H השקולים באוויר.

13) גלי רדיו בנחושת

- מצאו את אורך הגל ומהירות הפאזה של גל רדיו בתדר של 1MHz המתפשט בנחושת. השוו לתוצאה המתקבלת באוויר (או ריק).
- המוליכות של נחושת היא: $(\Omega \cdot m)^{-1} \approx 59.6 \cdot 10^6$ ו- $\mu_r \approx \epsilon_r \approx 1$.

14) כמה עמוק חודרת קרינת הפלאפון למח

המוליכות של עצם הגולגולת היא בערך: $0.15 \frac{S}{m}$ ($S = siemens = \frac{1}{\Omega}$) והמקדם הדיאלקטרי הוא בערך 12. עבור רקמת המוח עצמה המוליכות היא בקירוב $1 \frac{S}{m}$ והמקדם הדיאלקטרי הוא בקירוב 50 (קרוב למים). העריכו את עומק החדירה של קרינת ה-4g המשודרת בתדרים בסביבות ה-1GHz. מה יהיה השינוי בעומק החדירה עבור קרינת ה-5g המשודרת בתדרים של כ-30GHz (בפועל התוצאה נמוכה פי 10 כי המקדם הדיאלקטרי והמוליכות גם משתנים עם שינוי התדר).

15) גל פוגע בזווית במי ים

גל בעל תדירות של 10 kHz המקוטב במקביל למישור הפגיעה נע באוויר ופוגע בזווית בשפה של המים באוקיינוס.

זווית הפגיעה היא: 88° , $\epsilon_r = 80$, $\mu_r = 1$, $\sigma = 4 \frac{S}{m}$.

א. מצאו את זווית ההעברה.

ב. מצאו את מקדם ההעברה τ .

ג. את היחס $\frac{\langle s_t \rangle}{\langle s_i \rangle}$ על השפה (s) הוא הממוצע בזמן).

ד. ואת המרחק שבו עוצמת השדה יורדת ב-30dB (דציבל).

תשובות סופיות:

$$1. \text{א. } \vec{E}_r(z, t) = E_{i0} \cos(K_1 z + \omega t - 2\theta) \hat{x} \quad \text{כאשר } \tan \theta = \frac{\eta_2}{\eta_1} \quad (1)$$

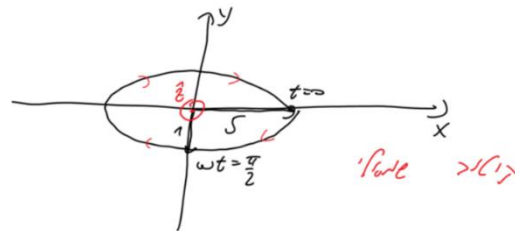
$$2. \text{ב. } \vec{E}_1(z, t) = E_{i0} \hat{x} [\cos(K_1 z - \omega t) + \cos(K_1 z + \omega t - 2\theta)] \quad \text{ג. } \langle S_1 \rangle = 0$$

$$4. \text{ד. } d = \frac{\pi n}{\omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2}}$$

$$2. \text{א. } f = 10^7 \text{ Hz} \quad \text{ב. בכיוון } -\hat{z} \quad \text{ג. } \lambda = 2\pi m \quad \text{ד. } \epsilon_r = 22.8$$

$$3. \text{ה. } \vec{H}(z, t) = \frac{1}{8\pi^2} \cos(z + 2\pi \cdot 10^7 t) \hat{x} \quad \text{ו. } \vec{S}_{Avg} = -\frac{\hat{z}}{16\pi^2}$$

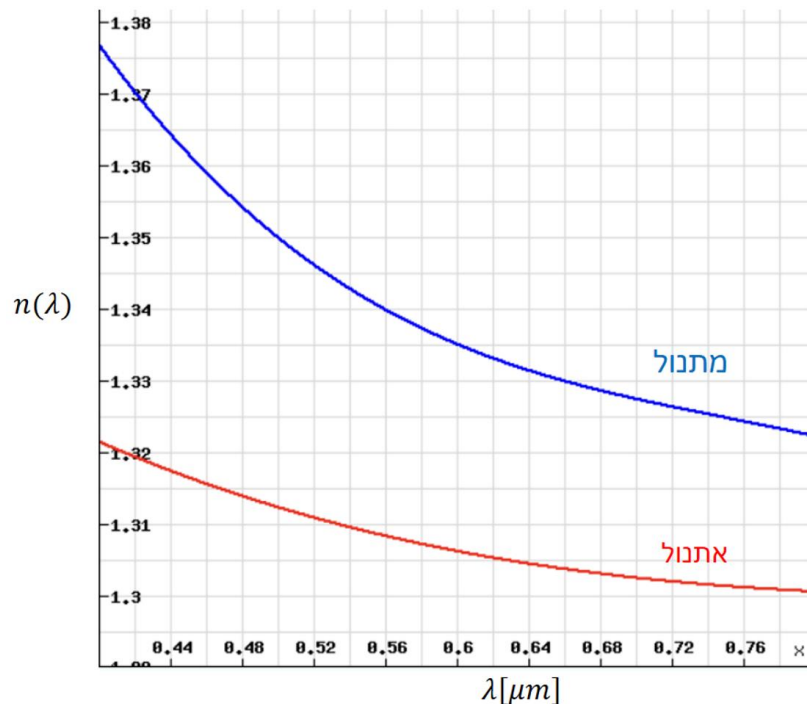
שרטוט: (3)



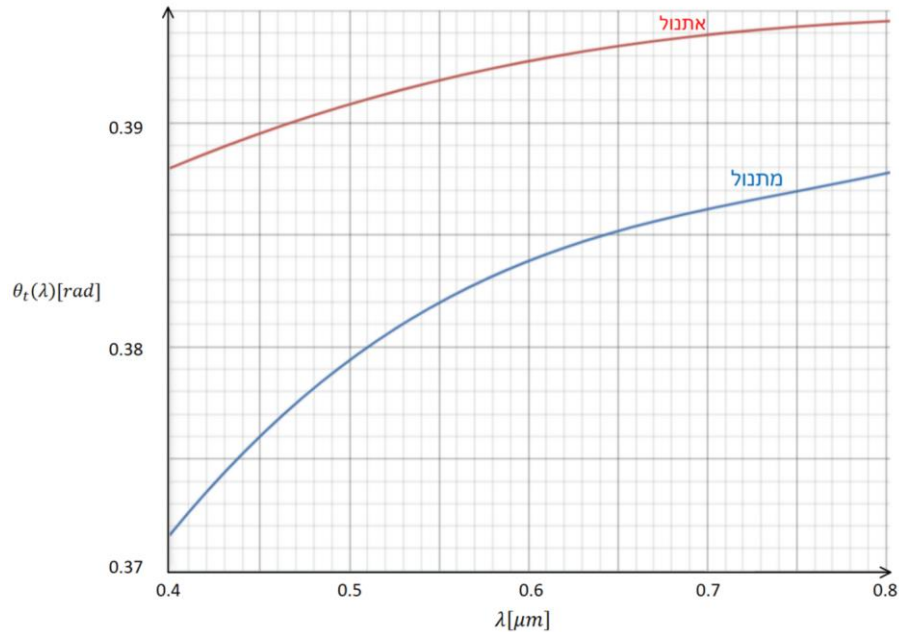
$$4. \text{א. } \sin \theta_i = \frac{1}{n} \sin \theta_i \quad \text{ב. } l_1 = \frac{d \sin \theta_i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}} \quad (4)$$

$$3. \text{ג. } l_2 = d \sin \theta_i \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}} \right)$$

א. שרטוט: (5)



ב. בלייזר של ה-532 ננומטר.



ג. אתנול – 4.83cm , מתנול – 4.96cm

$$\cdot \sqrt{2} \quad (6)$$

$$\cdot 79\% \quad (7)$$

$$\cdot \vec{E}_i = 6 \cdot 10^{-3} e^{i\left(\frac{2\pi}{3}z - 2\pi \cdot 10^8 t\right)} \hat{x}, \vec{H}_i = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{120\pi} e^{i\left(\frac{2\pi}{3}z - 2\pi \cdot 10^8 t\right)} \hat{y} \quad (8)$$

$$\cdot \vec{E}_T = 12 \cdot 10^{-3} \sin\left(\frac{2\pi}{3}z\right) \sin(2\pi \cdot 10^8 t) \quad (9)$$

$$\cdot \frac{3}{2} m \quad \lambda$$

$$\cdot \vec{J}_s = \frac{2E_{i0}}{\eta_0} (\hat{x} - i\hat{y}) \quad (9)$$

א. קיטוב מעגלי שמאלי.

$$\cdot \vec{E}_1(z, t) = 2E_{i0} \sin(kz) (\sin(\omega t) \hat{x} + \cos(\omega t) \hat{y}) \quad (10)$$

$$\cdot \vec{J}_s(y, t) = \frac{E_{i0}}{60\pi} \cos\theta_i \cos\left(\frac{\omega}{c} \sin\theta_i y - \omega t\right) \hat{x} \quad (11)$$

$$\cdot \langle \vec{S} \rangle = \frac{-E_{i0}^2}{30\pi} \sin\theta_i \sin^2\left(\frac{\omega}{c} \cos\theta_i z\right) \hat{y}$$

$$\cdot \lambda = \frac{\pi}{5} m, f = \frac{3}{2\pi} \cdot 10^9 \text{ Hz} \quad (11)$$

$$\cdot \vec{E}_i(x, z, t) = 10 \cos(6x + 8z - 3 \cdot 10^9 t) \hat{y}, \vec{H}_i(x, z, t) = \frac{3\hat{z} - 4\hat{x}}{60\pi} \cos(6x + 8z - 3 \cdot 10^9 t) \quad (12)$$

$$\cdot \theta_i = 36.9^\circ$$

$$\cdot \vec{E}_r(x, z, t) = -10 \cos(6x - 8z - 3 \cdot 10^9 t) \hat{y}, \vec{H}_r(x, z, t) = \frac{-3\hat{z} - 4\hat{x}}{60\pi} \cos(6x - 8z - 3 \cdot 10^9 t) \quad (13)$$

$$, \vec{E}_1(x, z, t) = -20 \sin(8z) \sin(6x - 3 \cdot 10^9 t) \hat{y} \quad \text{ה.}$$

$$. \vec{H}_1(x, z, t) = \frac{1}{30\pi} \left(-3 \sin(8z) \sin(6x - 3 \cdot 10^9 t) \hat{z} - 4 \cos(8z) \cos(6x - 3 \cdot 10^9 t) \hat{x} \right)$$

$$. \lambda = \frac{\pi}{6} m, f = \frac{1.8}{\pi} \cdot 10^9 \text{ Hz} \quad \text{א. (12)}$$

$$. \vec{E}_i = 5(\hat{y} + \sqrt{3}\hat{z}) \cos(6\sqrt{3}y - 6z + 3.6 \cdot 10^9 t), \vec{H}_i = -\frac{\hat{x}}{12\pi} \cos(6\sqrt{3}y + 6z + 3.6 \cdot 10^9 t) \quad \text{ב.}$$

$$. \theta = 60^\circ \quad \text{ג.}$$

$$. \vec{E}_r = 5(-\hat{y} + \sqrt{3}\hat{z}) \cos(6\sqrt{3}y + 6z + 3.6 \cdot 10^9 t), \vec{H}_r = -\frac{\hat{x}}{12} \cos(6\sqrt{3}y + 6z + 3.6 \cdot 10^9 t) \quad \text{ד.}$$

$$, \vec{E}_1 = 10 \left(\sin(6z) \sin(6\sqrt{3}y + 3.6 \cdot 10^9 t) \hat{y} + \sqrt{3} \cos(6z) \cos(6\sqrt{3}y + 3.6 \cdot 10^9 t) \hat{z} \right) \quad \text{ה.}$$

$$. \vec{H}_1 = -\frac{\hat{x}}{12\pi} \cos(6z) \cos(6\sqrt{3}y + 3.6 \cdot 10^9 t) \hat{z}$$

$$. \lambda = 4.1 \cdot 10^{-4} m, u = 410 \frac{m}{\text{sec}} \approx 10^{-5} c \quad \text{א. (13)}$$

$$. d = 4 \text{ cm} \quad \text{עבור ה-5g אין הבדל. (14)}$$

$$. \frac{\langle S_r \rangle}{\langle S_i \rangle} = 1.03 \cdot 10^{-3} \quad \text{ג.}$$

$$. \tau'' = 7.37 \cdot 10^{-4} e^{-i \cdot 0.778} \quad \text{ב.}$$

$$. \theta_i = 0.03^\circ \quad \text{א. (15)}$$

$$. 8.69 m \quad \text{ד.}$$

פיסיקה 3

פרק 3 - וקטור פויינטינג והאנרגיה האגורה בשדות

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגילים 43

הרצאות ותרגילים:

רקע:

אנרגיה אלקטרו מגנטית האגורה בשדות:

$$U = \int \left(\frac{\epsilon_0 (\vec{E})^2}{2} + \frac{(\vec{B})^2}{2\mu_0} \right) dv$$

צפיפות האנרגיה:

$$u_{em} = \frac{\epsilon_0 (\vec{E})^2}{2} + \frac{(\vec{B})^2}{2\mu_0}$$

פיסיקה 3

פרק 4 - יחסות פרטית -

תוכן העניינים

44	1. טרנספורמציות לורנץ למיקום והזמן
49	2. טרנספורמציות לורנץ למהירות
50	3. תרגילים לטרנספורמציות מיקום ומהירות
53	4. דינמיקה יחסותית
58	5. תרגילים לדינמיקה יחסותית
60	6. תרגילים נוספים

טרנספורמצית לורנץ למיקום והזמן:

רקע:

תורת היחסות הפרטית עוסקת בתיאור של מאורעות מנקודת המבט של צופים הנמצאים במערכות ייחוס שונות.

מערכות הייחוס תמיד יהיו מערכות אינרציאליות (צופים שזזים במהירות קבועה ביחס למערכת הכוכבים).

הגדרת מאורע:

מאורע הוא אירוע פיזיקלי המוגדר בזמן ובמרחב. כל מאורע ניתן לתאר ע"י ארבע קואורדינטות (x, y, z, t) .

עקרונות יסוד בתורת היחסות:

חוקי הפיזיקה זהים בכל המערכות האינרציאליות. האור אינו צריך תווך בשביל לעבור בו. מהירות האור קבועה וזהה בכל מערכות הייחוס. אף גוף אינו יכול לנוע יותר מהר ממהירות האור בוואקום. כתוצאה מכך מדידת הזמן שונה בין מערכות הייחוס. הזמן הופך לקואורדינטה רביעית (ביחד עם x, y, z) שעוברת טרנספורמציה.

טרנספורמציות לורנץ למיקום והזמן:

$$x' = \gamma_o(x - v_o t)$$

$$t' = \gamma_o \left(t - \frac{v_o x}{c^2} \right)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$\beta = \frac{v_o}{c}$$

$$\gamma_o = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_o}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

טרנספורמציה הפוכה:

$$x = \gamma_o(x' + v_o t')$$

$$t = \gamma_o \left(t' + \frac{v_o x'}{c^2} \right)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

תנאים לשימוש בטרנספורמציות לורנץ:

הצירים של המערכות מקבילים.

בזמן: $t = t' = 0$ הראשיות מתלכדות.

המערכת העצמית:

מערכת עצמית היא מערכת בה המאורע הנצפה נמצא במנוחה.

זמן עצמי τ - מוגדר להיות הפרש הזמנים בין שני מאורעות כפי שהוא נמדד במערכת העצמית שלהם.

אורך עצמי - האורך של גוף כפי שנמדד במערכת בו הגוף נמצא במנוחה.

התכווצות האורך:

$$l = \frac{l_0}{\gamma_0}$$

l_0 - האורך העצמי

התארכות הזמן:

$$\Delta t = \gamma_0 \tau > \tau$$

שינוי זווית במדידת אורך:

$$\tan \theta = \gamma_0 \tan \theta'$$

θ' - זווית במערכת העצמית

אפקט דופלר היחסותי:

זמן המחזור של הגל:

$$T = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \tau$$

אורך הגל:

$$\lambda = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \lambda'$$

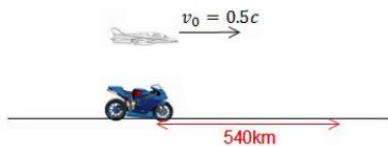
λ' - אורך הגל במערכת העצמית

תדירות הגל :

$$f = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} f'$$

f' - תדירות במערכת העצמית

שאלות:

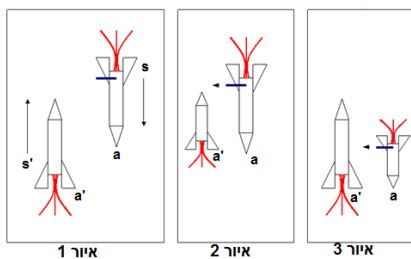


1) מציאת מהירות ומיקום אופנוע

אופנוע נוסע במהירות קבועה בקו ישר. צופה על הקרקע מודד כי האופנוע נסע מרחק של 540km.

- צופה הנע במטוס ממש מהיר $v = 0.5c$, בכיוון נסיעת האופנוע, מודד כי משך זמן נסיעת האופנוע היה 0.01 שניה.
- א. מצא את מהירות האופנוע במערכת כדה"א.
- ב. מצא את המרחק שעבר האופנוע כפי שמדד הצופה במטוס.

2) בדיקת ירי



שתי חלליות בעלות אורך מנוחה זהה, עוברות זו במקביל לזו במהירות גבוהה.

בזנב החללית S מצוי תותח המכוון בניצב לכיוון תנועת החללית ולעבר מסלול התנועה של החללית s' (איור 1).

בחללית S מתבצעת בדיקת ירי בתותח ברגע

שהנקודה a בראש החללית מתלכדת עם הנקודה a' (זנב s').

מכיוון שאורך החללית s' קצר מהאורך העצמי בחללית ב-s מניחים כי הטיל יפספס את החללית השנייה (איור 2).

אולם במערכת s' אורך החללית S קצר מהאורך העצמי ולכן כאשר a ו-a' מתלכדות האסטרונאוט S יפגע (איור 3). יש/י את הפרדוקס.

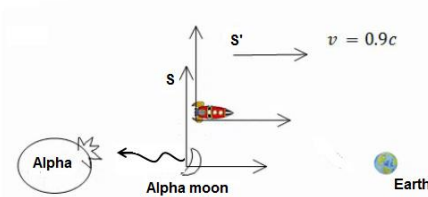
(3) מוט פולט אור לסירוגין

מוט בעל אורך l_0 נע במהירות V נתונה ביחס לכדה"א.
נתון כי ב- $t = 0$ הקצה השמאלי של המוט נמצא ב- $x = x' = 0$.
ברגע זה המוט פולט אור מקצהו הימני.
לאחר זמן τ המוט פולט אור מקצהו הימני.
מצא את הפרש הזמנים כפי שרואה אותם צופה מכדה"א
(הפרש הזמנים בין הגעת האור משני המאורעות לראשית).



(4) פיצוץ בכוכב אלפה

החללית אנטרייז יוצאת מכוכב אלפה חזרה לכדה"א.
בדרך היא עוברת ליד הירח של כוכב אלפה ורואה
פולס אלקטרו מגנטי חזק יוצא לכיוון הכוכב.
ידוע שבירח ישנה קבוצת חייזרים תוקפניים בשם
ה"קליגוניים". 1.3 שניות מאוחר יותר היא רואה
פיצוץ בכוכב. המרחק בין הכוכב לירח שלו
הוא 500 מיליון מטרים כפי שנמדד במערכת החללית.
מהירות החללית ביחס לכוכב ולירח היא $0.9c$.



- א. מהו מרווח הזמן בין גילוי הגל לפיצוץ במערכת הכוכב והירח?
- ב. מה משמעות הסימן בהפרש הזמן?
- ג. האם הפולס גרם לפיצוץ או להיפך?

תשובות סופיות:

1) א. $v = 5.65 \cdot 10^7 \frac{m}{sec}$ ב. $x'_2 = -10.32 \cdot 10^5 m$

2) ראה סרטון.

3) $\Delta t = \gamma_0 (1 + \beta) \left(\tau - \frac{l_0}{c} \right)$

4) א. $t_3 = -3.525 sec$ ב. הפיצוץ היה לפני הגעת הגל לכוכב וגם לפני ירי הגל.

ג. לא יכול להיות שהפיצוץ גרם לירי של הפולס, $x_2 = 11.47 \cdot 10^8 \cdot m > 10.575 \cdot 10^8 m$

טרנספורמציית לורנץ למהירות:

רקע:

$$v'_x = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}}$$

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma_0 \left(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}\right)}$$

$$v'_z = \frac{v_z}{\gamma_0 \left(1 - \frac{v_0 v_x}{c^2}\right)}$$

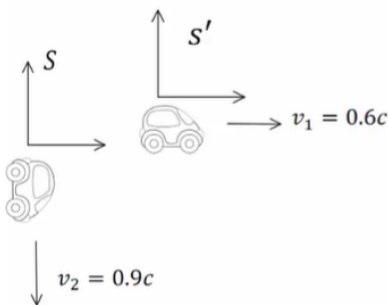
אברציה - שינוי זווית המהירות:

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma_0 \left(\cos \theta - \frac{v_0}{c}\right)}$$

שאלות:

(1) מהירות יחסית בין מכוניות

שתי מכוניות נוסעות האחת במאונך לשנייה כך שמהירות המכונית הראשונה היא $0.6c$ ומהירות המכונית השנייה היא $0.9c$. מצא את המהירות היחסית.



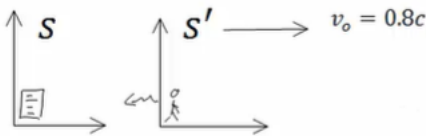
תשובות סופיות:

$$v'_{2x} = -0.6c, v'_{2y} = -0.72c \quad (1)$$

תרגילים לטרנספרמציית מיקום ומהירות:

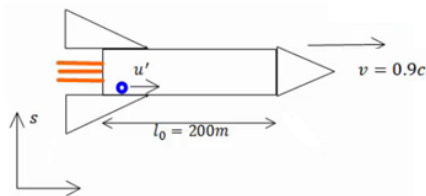
שאלות:

1) דודה יוצאת לטיול



המבחן בפיזיקה התחיל בשעה 9:00 והמשגיחה יצאה לטייל במהירות $0.8c$ (דודה זריזה במיוחד). לאחר שעה לפי שעונה היא שולחת לסטודנטים אות רדיו לסיים את הבחינה. כמה זמן ארכה הבחינה עבור הסטודנטים?

2) כדור מתגלגל בחללית



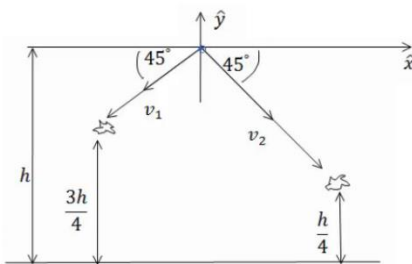
חללית בעלת אורך עצמי של 200 מטר נעה במהירות $0.9c$ ביחס למערכת אינרציאלית S . כדור קטן מתגלגל לאורכה במהירות $u' = 0.04c$ בכיוון ציר x , כפי שנמדד ע"י צופה בחללית.

א. מהי מהירות הכדור כפי שנמדדת ע"י צופה ב- S ? (הבא את התשובה ביחידות של c).

ב. מהו הזמן שייקח לכדור לעבור מקצה לקצה של החללית כפי שנמדד ב- s ? (הבא את התשובה במיליוניות שנייה).

ג. איזה מרחק עבר הכדור לפי צופה במערכת s ? (ביחידות של ק"מ).

3) חלקיקים נוצרים בגובה ומתפרקים



שני חלקיקים נוצרים בגובה h מעל הקרקע. אחד נפלט בזווית 225 מעלות עם ציר ה- x והשני בזווית -45 מעלות עם ציר ה- x .

החלקיק הראשון מתפרק לאחר זמן T בגובה $\frac{3h}{4}$

והחלקיק השני מתפרק לאחר זמן T_2 בגובה $\frac{h}{4}$.

התעלם מהכבידה בבעיה.

א. הבע את מהירויות החלקיקים באמצעות h ו- T .

ב. מצא את זמן החיים העצמי של כל חלקיק (זמן החיים במערכת המנוחה).

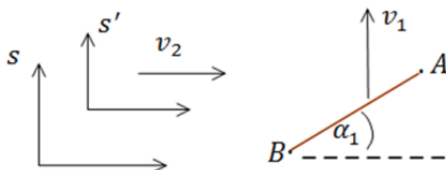
ג. מצא מערכת s' הנעה בכיוון החיובי של ציר ה- x בה ההתפרקויות מתרחשות באותו הזמן.

ד. מה המרחק בין ההתפרקויות במערכת s' ?

(4) מיואון מתפרק ליד אלקטרון

- מיואון (μ) נוצר ברגע מסוים ונע במהירות $0.7c$ ביחס לקרקע. המיואון מתפרק לאחר שנע 3 ק"מ ממקום היווצרו.
- כמה זמן חי המיואון במערכת העצמית שלו? אלקטרון נע במקביל למיואון ובמהירות $0.5c$ ביחס למעבדה.
 - מהי מהירות המיואון ביחס לאלקטרון?
 - איזה מרחק נע המיואון ביחס לאלקטרון.

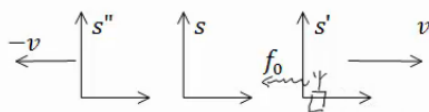
(5) זווית של מוט נע



מוט בעל אורך l (לא נתון) נע במהירות v_1 בכיוון ציר ה- y ביחס לצופה הנמצא במעבדה. הצופה במעבדה מודד זווית α_1 של המוט ביחס לציר ה- x .

איזו זווית ימדוד צופה הנע במהירות $v_2 \hat{x}$ ביחס למעבדה?

(6) תדר יחסי



במערכת s' הנעה במהירות v ביחס למערכת המעבדה S , נמצא משדר רדיו הפולט אותות בתדירות f_0 ?

- מה תהיה התדירות שתיקלט במעבדה?
- מה תהיה התדירות שתיקלט במערכת s'' הנעה במהירות $\vec{v} = -v\hat{x}$ ביחס למעבדה?

תשובות סופיות:

$$\Delta t = 1.08 \cdot 10^4 \text{ sec} \quad (1)$$

$$x_1 = 10.78 \text{ km} \quad \lambda \quad t_1 = 39.62 \mu\text{s} \quad \text{ב.} \quad v_x = 0.907c \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$\tau_1 = T \sqrt{1 - \frac{h^2}{8T^2c^2}}, \quad \tau_2 = 2T \sqrt{1 - \frac{9h^2}{64T^2c^2}} \quad \text{ב.} \quad v_1 = \frac{h}{2\sqrt{2}T}, \quad v_2 = \frac{3h}{4\sqrt{2}T} \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$d'^2 = \frac{5h^4}{4} - 3c^2T^2h^2 + c^4T^4 \quad \text{ד.} \quad v_0 = \frac{c^2T}{h} \quad \text{ג.}$$

$$\Delta x_{12} = 0.98 \text{ km} \quad \lambda \quad V_{12} = 0.31c \quad \text{ב.} \quad \tau = 10^{-5} \text{ sec} \quad \text{א.} \quad (4)$$

$$\tan \alpha' = \gamma_2 \left(\tan \alpha_1 + \frac{v_1 v_2}{c^2} \right) \quad (5)$$

$$f'' = \sqrt{\left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^2} f_0 \quad \text{ב.} \quad f_s = \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} f_0 \quad \text{א.} \quad (6)$$

דינמיקה יחסותית:

רקע:

תנע ואנרגיה יחסותיים:

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

$$E = \gamma m c^2$$

הגודל γ קשור עכשיו למהירות הגוף עבורו נרצה לחשב את התנע ואינו קשור למעבר בין מערכות אינרציאליות שונות.

נוסחאות נוספות:

$$E^2 = |p|^2 c^2 + m^2 c^4$$

$$|p| = \sqrt{\gamma^2 - 1} \cdot m c$$

אנרגיית מנוחה:

$$E_0 = m c^2$$

אנרגיה קינטית:

$$E_k = E - E_0 = m c^2 (\gamma - 1)$$

עבור חלקיקים מסוימים מסת המנוחה היא אפס (פוטון, ניוטרינו).

$$E = |p|c = h\nu$$

ν – תדירות

קבוע פלאנק:

$$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ j} \cdot \text{s}$$

טרנספורמציה של התנע והאנרגיה:

$$E' = \gamma_0(E - v_0 p_x)$$

$$p'_x = \gamma_0(p_x - v_0 E/c^2)$$

$$p'_y = p_y$$

$$p'_z = p_z$$

וקטור תנע אנרגיה:

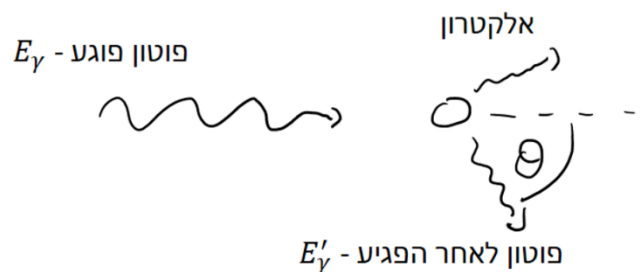
$$\left(p_x, p_y, p_z, \frac{E}{c} \right)$$

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \left(\frac{E}{c} \right)^2 = const$$

- הקבוע זהה בכל מערכות הייחוס.
- הנוסחה נכונה גם עבור מערכת עם יותר מגוף אחד כאשר התנע והאנרגיה הם התנע והאנרגיה של כל המערכת.
- עבור גוף יחיד הקבוע הוא: $m^2 c^2$.

פיזור קומפטון:

פוטון הפוגע באטום הנמצא במנוחה, לאחר הפגיעה נפלט אלקטרון וכיוון התנועה של הפוטון משתנה.



$$\frac{1}{E'_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

E_γ - אנרגיית הפוטון לפני הפגיעה

E'_γ - אנרגיית הפוטון אחרי הפגיעה

m_e - מסת אלקטרון

θ - זווית התנועה של הפוטון ביחס לכיוון הפגיעה.

יחידת האלקטרון וולט:

$$1 \text{ eV} = 1.602 \ 176 \ 462 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Object	Mass (kg)	Energy Equivalent	
Electron	$\approx 9.11 \times 10^{-31}$	$\approx 8.19 \times 10^{-14} \text{ J}$	($\approx 511 \text{ keV}$)
Proton	$\approx 1.67 \times 10^{-27}$	$\approx 1.50 \times 10^{-10} \text{ J}$	($\approx 938 \text{ MeV}$)
Uranium atom	$\approx 3.95 \times 10^{-25}$	$\approx 3.55 \times 10^{-8} \text{ J}$	($\approx 225 \text{ GeV}$)

ניתן גם לרשום את היחידות של התנע של גופים כ- $\frac{eV}{c}$.

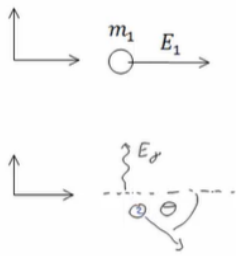
שאלות:

(1) הגעת נויטרון ממרחקים

מצא את האנרגיה הדרושה לנויטרון להגיע לכדור הארץ ממרחק של 5 שנות אור בהינתן שזמן החיים של נויטרון הוא 881 שניות והמסה שלו היא: $M_n = 940 \text{ Me} \frac{V}{c^2}$.

(2) התנגשות בסיסית

- חלקיק בעל מסה m מתנגש בחלקיק בעל מסה $3m$.
 לחלקיק הראשון אנרגיה כוללת לפני ההתנגשות $5mc^2$ ונתון כי התנע הכולל שלהם במערכת המעבדה הוא אפס. כתוצאה מההתנגשות שני החלקיקים מושמדים ונוצר חלקיק חדש הנמצא במנוחה.
- מצאו את האנרגיה הקינטית של החלקיק הראשון.
 - מצאו את פקטור לורנץ של החלקיקים לפני ההתנגשות ואת האנרגיה הקינטית של החלקיק השני.
 - מצאו את מסת החלקיק הנוצר לאחר ההתנגשות.



(3) חלקיק מתפרק לפוטון וחלקיק נוסף

לפני חלקיק בעל אנרגיה כוללת E_1 ומסת מנוחה m_1 נע במעבדה בכיוון החיובי של ציר ה- x .
ברגע מסוים מתפרק החלקיק לפוטון ולחלקיק נוסף.
אנרגיית הפוטון נתונה E_y וידוע כי הפוטון נע בציר ה- y , בכיוון החיובי.

א. מהו התנע של החלקיק הראשון לפני ההתפרקות?

ב. מהי הזווית של התנע של חלקיק 2 ביחס לציר ה- x ?

ג. מצא מערכת ייחוס חדשה S' שבה הפוטון יפלט בכיוון נגדי לכיוון תנועתו של חלקיק מס' 2.

מה מהירותה של מערכת זו ביחס למערכת המעבדה?

(4) פוטון פוגע בפרוטון ויוצר פיון

פוטון פוגע בפרוטון הנמצא במנוחה במערכת המעבדה.

נתונות מסת הפרוטון והפיון M_p, M_π .

מהי האנרגיה המינימלית הדרושה לפוטון על מנת שלאחר ההתנגשות ייווצרו פרוטון ופיון (π)?

(5) דוגמה - חישוב תנע ואנרגיה קינטית של אלקטרון ופרוטון

חשבו את התנע והאנרגיה הקינטית של פרוטון ואלקטרון בעלי אנרגיה של 1 GeV במערכת המעבדה.

(6) דוגמה - גמה וביטה של אלקטרון

מסת האלקטרון היא: $9.10938188 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ומהירות האור היא: 299792458 m/sec .

מצאו בדיוק של 6 ספרות את γ ו- β של אלקטרון שהאנרגיה הקינטית שלו היא: $K = 100.000 \text{ MeV}$ במערכת המעבדה.

(7) בטה של מיואונים מתפרקים

מסת מיואון היא פי 207 ממסת האלקטרון.

זמן מחצית החיים הממוצע של מיואון הוא $2.20 \mu\text{s}$.

מיואונים נעים ביחס למעבדה בניסוי כלשהו.

זמן החיים הנמדד של המיואונים ביחס למערכת המעבדה הוא: $6.90 \mu\text{s}$.

מהם β , התנע והאנרגיה הקינטית של המיואונים ביחידות $\frac{\text{MeV}}{c}$?

תשובות סופיות:

$$E_n = 1.69 \cdot 10^8 \text{ MeV} \quad (1)$$

$$m_3 = 6.91 \text{ m} \quad \text{ג} \quad \gamma_1 = 5, \gamma_2 = \sqrt{\frac{11}{3}}, E_{k_2} = 3mc \left(\sqrt{\frac{11}{3}} - 1 \right) \quad \text{ב} \quad E_{k_1 = 4mc^2} \quad \text{א} \quad (2)$$

$$\tan \theta = -\frac{E_\gamma}{\sqrt{E_1^2 - m_1^2 c^4}} \quad \text{ב} \quad \vec{p}_1 = \sqrt{\left(\frac{E_1}{c}\right)^2 - m_1^2 c^2} \cdot \hat{x} \quad \text{א} \quad (3)$$

$$v_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{m_1 c^2}{E_1}\right)^2} \cdot c \quad \text{ג}$$

$$E_\gamma = \frac{1}{2m_p} (m_\pi^2 + 2m_\pi m_p) c^2 \quad (4)$$

$$K = 0.999 \text{ GeV}, P = 1 \frac{\text{GeV}}{c} \quad \text{אלקטרון:} \quad (5)$$

$$K = 0.062 \text{ GeV}, P = 0.347 \frac{\text{GeV}}{c} \quad \text{פרוטון:}$$

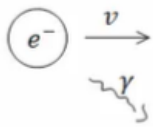
$$\gamma = 196.695, \beta = 0.999987 \quad (6)$$

$$\beta = 0.898, P = 314 \frac{\text{MeV}}{c}, K = 226 \text{ MeV} \quad (7)$$

תרגילים לדינמיקה יחסותית:

שאלות:

- (1) **חלקיק מתפרק לשני חלקיקים**
 חלקיק בעל מסה m הנמצא במנוחה מתפרק לשני חלקיקים בעלי מסות מנוחה m_1, m_2 .
 מה יהיו האנרגיה והתנע של החלקיקים שנוצרו? (כל המסות נתונות).



- (2) **אלקטרון חופשי פולט פוטון**
 הראו כי אלקטרון חופשי הנע בואקום אינו יכול לפלוט פוטון בודד.

- (3) **התנגשות חלקיקים זהים ויצירת חלקיקים**
 חלקיק בעל מסת מנוחה m פוגע בחלקיק זהה לו הנמצא במנוחה. כתוצאה מההתנגשות נוצרים שני חלקיקים בעלי מסות מנוחה m_1, m_2 . מצא את אנרגיית הסף ליצירת ריאקציה זו. (הנח ש: $(m_1 + m_2) > 2m$).

(4) פיון מתפרק

לפני ההתפרקות



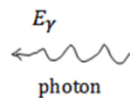
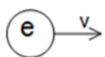
פיון (π^+) מתפרק למיואון חיובי ($M_\mu = 160Me \frac{v}{c^2}$)

אחרי



וניטרينو חסר מסה. מצא את מסת המנוחה של הפיון אם למיואון אנרגיה קינטית של $5MeV$.

(5) פוטון מתנגש אלסטית באלקטרון



אלקטרון נע במהירות v ומתנגש בפוטון בעל אנרגיה E_γ הנע לקראתו. מצא את הערך של v אם ידוע כי הפוטון מוחזר באותה אנרגיה בה פגע. הנח כי מסת האלקטרון ידועה.

תשובות סופיות:

$$, E_1 = m_1 c^2 \gamma_1 = \frac{c^2}{2m} (m^2 + m_1^2 - m_2^2), p_1 = c \sqrt{\frac{1}{2m} (m^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - 1} \quad (1)$$

$$E_2 = m_2 c^2 \gamma_2 = \frac{c^2}{2m} (m^2 + m_2^2 - m_1^2), p_2 = m_2 c \sqrt{\gamma_2^2 - 1} = c \sqrt{\frac{1}{2m} (m^2 + m_2^2 - m_1^2)^2 - 1}$$

שאלת הוכחה. (2)

$$E_{\min} = \frac{1}{2m} c^2 ((m_1 + m_2)^2 - 2m^2) \quad (3)$$

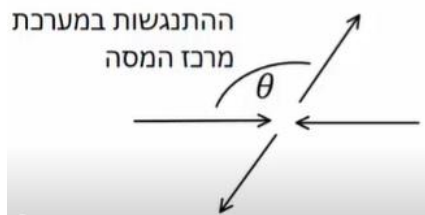
$$M_\pi = 144 \frac{\text{MeV}}{c^2} \quad (4)$$

$$v = c \left| 1 - \left(\left(\frac{E_\gamma}{m_e c^2} \right)^2 + 1 \right)^{-1/2} \right| \quad (5)$$

תרגילים נוספים:

שאלות:

(1) פוטון מתנגש ומעבר למרכז מסה



פוטון עם אנרגיה E_0 מתנגש אלסטית עם חלקיק בעל מסה m הנמצא במנוחה (במערכת המעבדה).

א. מצא את מהירות מערכת מרכז המסה של המערכת פוטון פלוס חלקיק.

ב. מצא את התנע והאנרגיה של החלקיק והפוטון לפני ההתנגשות במערכת מרכז המסה.

מצא את התנע והאנרגיה של הפוטון והחלקיק אחרי ההתנגשות אם ידוע שהפוטון מפוזר בזווית θ ביחס לכיוון בפגיעה במערכת מרכז המסה (ראה איור).

ג. מהם האנרגיה והערך המוחלט של התנע של הפוטון והחלקיק לאחר ההתנגשות במערכת המעבדה?

ד. מצא את הזווית θ עבורה האנרגיה של הפוטון במערכת המעבדה תהיה מינימלית.

(2) שאלה 1

נתונים שני גופים הנעים בניצב זה לזה. ידוע כי מסת הגופים זהה ושווה ל- M ,

וכן כי התנעים של הגופים הם: p_1, p_2 .

ברגע מסוים, הגופים מתנגשים ומופיעים ארבעה גופים חדשים.

מסות הגופים החדשים שנוצרו הן: $m, 2m, 3m, 4m$.

מהו m המקסימלי האפשרי?

נתון: $p_1 = 6Mc, p_2 = 17Mc$.

(3) שאלה 2

נתונים שני חלקיקים בעלי מסה m , וכן נתונות האנרגיות שלהם E_1, E_2 .

החלקיקים נעים זה אל עבר זה, ומתנגשים.

חשבו את מסת החלקיק M הנוצר כתוצאה מהתנגשות החלקיקים.

נתון: $E_1 = 4mc^2, E_2 = 7mc^2$.

שאלה 3 (4)

שתי חלליות יוצאות מאותה נקודה, בכיוון ניצב אחת לשנייה. חללית א' טסה במהירות v_1 , וחללית ב' טסה במהירות v_2 . חשבו את וקטור המהירות של חללית ב' ביחס לחללית א'. נתון: $v_1 = 0.8c(+\hat{x})$, $v_2 = 0.9c(-\hat{y})$

שאלה 4 (5)

חלקיקים 1,2 נוצרים במעבדה ונמצאים במנוחה. ידוע לגבי זמני החיים שלהם כי: $t_2 = 0.75t_1$ (במצב מנוחה חלקיק 2 נעלם לפני חלקיק 1). מהי המהירות אליה יש להאיץ את חלקיק 2, כדי שלא ידעך לפני חלקיק 1?

זריקה אופקית יחסותית (6)

מסלולו של חלקיק במערכת S נתון ע"י: $x = vt$, $y = \frac{1}{2}at^2$ כאשר v, a קבועים ידועים. מצא את תאוצת החלקיק במערכת S' הנעה במהירות v בכיוון ציר ה-x ביחס ל-S. תאר את צורת המסלול בשתי המערכות (v אינה זניחה ביחס למהירות האור).

תשובות סופיות:

$$v_{c.m} = \frac{E_0 \cdot c}{mc^2 + E_0} \quad \text{א. (1)}$$

$$E'_{pH} = E_0 \sqrt{\frac{mc^2}{2E_0 + mc^2}}, \quad P'_{pH} = \frac{E_0}{c} \sqrt{\frac{mc^2}{2E_0 + mc^2}} \quad \text{ב. פוטון לפני ההתנגשות:}$$

$$E'_m = mc^2 \left(\frac{mc^2 + E_0}{\sqrt{m^2 c^4 + 2E_0 mc^2}} \right), \quad P'_{m_x} = \frac{-mE_0 c}{\sqrt{m^2 c^4 + 2E_0 mc^2}} \quad \text{חלקיק לפני ההתנגשות:}$$

פוטון אחרי ההתנגשות: אותו דבר כמו לפני ההתנגשות.

חלקיק אחרי ההתנגשות: אותו דבר כמו לפני ההתנגשות.

$$\vec{P}_{pH} = (P(-\cos \theta), P \sin(\theta), 0), \quad \vec{P}_m = -\vec{P}_{pH} = (P \cos \theta, P \sin \theta, 0) \quad \text{כיוון התנע:}$$

$$E'_m = mc^2 \left(\frac{mc^2 + E_0}{\sqrt{m^2 c^4 + 2E_0 mc^2}} \right), \quad |P'_m| = \sqrt{\left(\frac{E'_m}{c} \right)^2 - m^2 c^2} \quad \text{ג.}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{ד.}$$

$$m_{\max} \approx 1.45M \quad \text{(2)}$$

$$M \approx \sqrt{112}m \quad \text{(3)}$$

$$\vec{v}' = (-0.8c, -0.54c, 0) \quad \text{(4)}$$

$$v \approx 0.66c \quad \text{(5)}$$

$$x' = 0, \quad y' = \frac{1}{2} a \gamma_0^2 t'^2 \quad \text{(6)}$$

פיסיקה 3

פרק 5 - תיאוריות מוקדמות של תורת הקוונטים ומבנה האטום

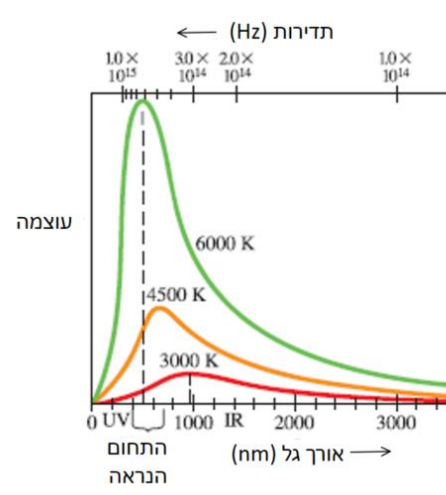
תוכן העניינים

1. תיאוריות מוקדמות של תורת הקוונטים ומבנה האטום 63
2. התיאוריה הפוטנית של האור והאפקט הפוטואלקטרי 66
3. אנרגיה מסה ותנע של פוטון 70
4. אפקט קומפטון 71
5. אינטראקציות של פוטונים ויצירת זוגות 73
6. דואליות גל חלקיק והאופי הגלי של החומר 75
7. סיכום ביניים התורה הפוטונית והשלכות (ללא ספר) 71
8. מודלים מוקדמים של האטום 77
9. מודל האטום של בוהר 78
10. סיכום חלק שני מודלים מוקדמים ומודל בוהר (ללא ספר) 78
11. שאלות ותרגילים נוספים 82

תיאוריות מוקדמות של תורת הקוונטים ומבנה האטום:

סיכום כללי:

ההנחה הקוונטית של פלאנק וקרינת גוף שחור.

		<p>גרף של קרינת גוף שחור כתלות באורך הגל ובטמפרטורות שונות</p>
λ_p - אורך הגל בשיא T - הטמפרטורה בקלווין	$\lambda_p T = 2.90 \cdot 10^{-3} m \cdot K$	<p>חוק וויין - Wien law</p>
קבוע בולצמן $k = 1.38 \cdot 10^{-23} J \cdot K^{-1}$ קבוע פלאנק $h = 6.626 \cdot 10^{-34} J \cdot s$	$I(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2 \lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$	<p>נוסחת פלאנק לקרינת גוף שחור</p>
<u>ההנחה הקוונטית של פלאנק</u>	$E_{min} = hf$	<p>אנרגיה מינימלית של מטען בתנועה הרמונית באטום</p>
המספר הקוונטי $n = 1, 2, 3, \dots$	$E = nhf$	<p>אנרגיית המטען חייבת להיות כפולה שלמה של הערך המינימלי</p>

שאלות:

(1) **דוגמה - טמפרטורת השמש**
 הראו באמצעות חוק וויין כי הטמפרטורה על פני השמש היא באמת 6,000K אם ידוע שאורך הגל של האור הנראה הוא בערך 500nm.

(2) **דוגמה - טמפרטורת כוכב**
 טלסקופ גדול בחלל מזהה כוכב חדש. הקרינה שפולט הכוכב נקלטת בטלסקופ כאשר השיא של הקרינה הוא באורך גל של 90nm. מהי הטמפרטורה על פני הכוכב?

(3) **טמפרטורה של מתכת**
 מה הטמפרטורה של מתכת בשלב הריתוך אם שיא פליטת האור שלה באורך גל של 460nm.

(4) **הפרש אנרגיות של מולקולה רוטטת**
 מולקולת HCl רוטטת בתדירות של $8.1 \cdot 10^{13}$ Hz. חשבו את ההפרש בין שני ערכים צמודים של האנרגיות האפשריות לפי ההנחה הקוונטית של פלאנק לערכי האנרגיה באוסילציות. תנו תשובה בג'אול ובאלקטרון וולט.

(5) **חוק וויין וקבוע פלאנק מנוסחת הקרינה**

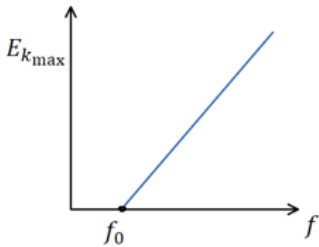
$$I(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2 \lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$
 נוסחת פלאנק לקרינת גוף שחור היא:
 א. * הראו, ללא שימוש בחוק וויין, כי קבוע $\lambda_p T =$ לעזרתכם פתרון המשוואה: $5e^{-x} = 5 - x$: $x = 4.966$.
 ב. השתמשו בחוק וויין וחשבו את קבוע פלאנק.
 ג. ** הראו כי הקרינה הנפלטת מגוף שחור פרופורציונית לטמפרטורה ברביעית - חוק סטפן - בולצמן.
 הדרכה: בשביל לחשב את הקרינה הכוללת הנפלטת יש לעשות אינטגרציה על כל אורכי הגל, אין צורך לפתור את האינטגרל עד הסוף.

תשובות סופיות:

- (1) הוכחה.
- (2) .32,000K
- (3) .6,300K
- (4) $.5.4 \cdot 10^{-20} \text{ J}$, 0.34eU
- (5) הוכחה.

התיאוריה הפוטנטית של האור והאפקט הפוטואלקטרי:

סיכום כללי:

f - תדירות האור	$E = hf$	אנרגיה של פוטון יחיד
		<u>הניסוי הפוטואלקטרי</u>
W_0 - פונקציית העבודה של המתכת	$hf_0 = W_0$	תדירות סף
	$E_k = hf - W_0$	אנרגיה קינטית מקסימאלית של האלקטרונים
	$eV_0 = E_k$	מתח עצירה
<p><u>לפי התורה הגלית-אלקטרומגנטית</u></p> <p>1. עוצמת האור קשורה לגודל השדה הגדלת העוצמה תגדיל את האנרגיה הקינטית של האלקטרונים.</p> <p>2. התדירות לא משפיעה על האנרגיה של האלקטרונים.</p>	<p><u>לפי התורה הפוטונית</u></p> <p>1. עוצמת האור קשורה למספר הפוטונים ולא לאנרגיה של כל אחד מהם. הגדלת העוצמה תגדיל את מספר האלק' הנפלטים אבל לא את האנרגיה הקינטית שלהם.</p> <p>2. האנרגיה של הפוטון תלויה בתדירות.</p> <p>3. רק פוטון אחד נותן את כל האנרגיה שלו ולכן קיימת תדירות סף.</p>	השוואה לתורה הגלית

שאלות:

- (1) **דוגמה - חישוב אנרגיית פוטון באור כחול**
 חשבו את האנרגיה של פוטון באור כחול: $\lambda = 450\text{nm}$ באוויר (או וואקום).
- (2) **דוגמה - הערכה של מספר פוטונים מנורה**
 נסו להעריך כמה פוטונים פולטת נורה בהספק 100W כל שניה. הניחו שהנצילות של הנורה היא בערך 3% (כלומר רק 3% מהאנרגיה המושקעת בנורה כל שניה מנוצלת להפקה של אור). האור שיוצא מנורה לבנה הוא בכל אורכי הגל, ניתן לקחת לצורך ההערכה את אורך הגל באמצע הספקטרום של האור הנראה: $\lambda \approx 500\text{nm}$.
- (3) **דוגמה - חישוב אנרגיה של אלקטרונים נפלטים**
 מהי האנרגיה הקינטית המקסימאלית ומהי המהירות המקסימאלית של אלקטרונים הנפלטים מחומר שפונקציית העבודה שלו היא: $W_0 = 2.8\text{eV}$ אם אורך הגל של האור הפוגע במשטח הוא:
 א. $\lambda = 400\text{nm}$
 ב. $\lambda = 600\text{nm}$
- (4) **עקיפה של קרינת גמא**
 לפוטון בקרינת גמא יש אנרגיה של 380 keV.
 א. מהו אורך הגל של הקרינה?
 ב. האם לדעתך הקרינה עושה עקיפה דרך פתחים טיפוסיים שאנחנו נתקלים ביום יום כמו פתח של דלת?
- (5) **איזו מתכת לא תפלוט אלקטרונים**
 פונקציות העבודה של סודיום, צסיום, נחושת וברזל הן: 2.1, 2.3, 4.7 ו-4.5 אלקטרון וולט בהתאמה. אלו מהמתכות לא תפלוט אלקטרונים כאשר פוגע בה אור מהתחום הנראה?
- (6) **פונקציית עבודה ומתח עצירה**
 בניסוי של האפקט הפוטואלקטרי נצפה כי לא זורם זרם כאשר אורך גל של האור הוא מעל ל-540nm.
 א. מהי פונקציית העבודה של המתכת?
 ב. מהו מתח העצירה הדרושה אם מקרינים באור באורך גל של 450nm?

7 ניסוי פוטואלקטרי

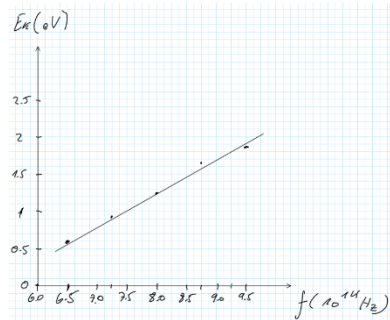
בניסוי פוטואלקטרי הקרינו אור בתדירויות שונות ומדדו את מתח העצירה. התוצאות של הניסוי מוצגות בטבלה הבאה:

$f(10^{14}\text{Hz})$	$V(V)$
6.50	0.6
7.25	0.91
8.00	1.23
8.75	1.54
9.50	1.85

- א. מצאו את האנרגיה הקינטית של האלקטרונים בפליטה ושרטטו גרף של אנרגיה זו כתלות בתדירות. השתמשו בנייר משבצות ורשמו נתונים בצורה מדויקת.
- ב. חשבו מתוך הגרף את קבוע פלאנק.
- ג. חשבו את פונקציית העבודה ותדירות הסף של המתכת.

תשובות סופיות:

- (1) 2.8eV
- (2) $8 \cdot 10^{18}$ פוטונים.
- (3) א. $3.2 \cdot 10^2 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ ב. לא תהיה פליטה של אלקטרונים.
- (4) א. $3.3 \cdot 10^{-3} \text{nm}$ ב. לא.
- (5) נחשת וברזל.
- (6) א. 2.3eV ב. 0.46V
- (7) א. ב. הוכחה.



$E_k = \text{eV}$
0.6eV
0.91eV
1.23eV
1.54eV
1.85eV

ג. $W_0 = 2.42\text{eV}$, $f = 5.84 \cdot 10^{14} \text{Hz}$

אנרגיה מסה ותנע של פוטון:

סיכום כללי:

אנרגיה של פוטון יחיד	$E = hf$	f -תדירות האור
תנע של פוטון	$p = \frac{E}{c} = h \frac{f}{c} = \frac{h}{\lambda}$	
מסת מנוחה של פוטון	$m = 0$	

שאלות:

- (1) דוגמה - כוח שמפעילה נורה על נייר שחור
 בדוגמה "הערכה של מספר הפוטונים מנורה" חישבנו את מספר הפוטונים שיוצאים מנורה של 100W כל שניה (בערך 10^{19}). נניח כי כל הפוטונים האלו פוגעים בנייר שחור (ולא מוחזרים) חשבו את:
 א. התנע של פוטון יחיד.
 ב. הכוח שמפועל על הנייר.

- (2) דוגמה - יעילות של תהליך פוטוסינתזי
 בתהליך פוטוסינתזי פיגמנטים בצמח כמו כלורופיל סופגים אור שמש ובאמצעותו הופכים פחמן דו חמצני (CO_2) לפחמימות (וחמצן שנפלט).
 בשביל להפוך מולקולה אחת של CO_2 לפחממה הצמח משתמש ב-9 פוטונים. כלורופיל סופג אור בעיקר באורך גל של 670nm. אם ידוע שהאנרגיה המשתחררת בפירוק פחממה היא: $4.9 \frac{eV}{molecule}$, מה היעילות (או נצילות) של התהליך הפוטוסינתזי?

תשובות סופיות:

- (1) א. $1.3 \cdot 10^{-27} \frac{kg \cdot m}{sec}$ ב. $10^{-8} N$
 (2) 29%

אפקט קומפטון:

סיכום כללי:

λ - אורך הגל של הקרן הפוגעת λ' - אורך הגל של הקרן המפוזרת θ - זווית ביחס לכיוון הקרן הפוגעת $\frac{h}{m_e c}$ - אורך גל של האלקטרון החופשי	$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$	הסחת קומפטון
--	--	--------------

שאלות:

(1) דוגמה - פיזור בכמה זוויות

קרני X באורך גל 0.162nm מפוזרות מסרט פחמן דק. מה יהיו אורכי הגל של הקרניים המפוזרות בזוויות?

- א. 0°
 ב. 90°
 ג. 180°

(2) הסחה יחסית מקסימאלית

בפיזור קומפטון, מצאו את זווית הפיזור עבורה ההסחה (שינוי באורך הגל) היא מקסימאלית. מהי ההסחה היחסית המקסימאלית $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ עבור פוטון באורך גל: $\lambda = 500\text{nm}$ מהתחום הנראה ועבור פוטון באורך גל: $\lambda = 0.1\text{nm}$ מתחום קרינת X.

(3) פיזור רב פעמי

קרני גמא שנוצרות קרוב למרכז השמש עוברות הרבה פיזורים בזוויות קטנות עד שהן מאבדות מספיק אנרגיה והופכות לקרניים בתחום הנראה. הניחו שלפוטון בקרן גמא יש אנרגיה של 1.0MeV והפוטון עובר סדרה של התנגשויות בזוויות של 0.5° בכל התנגשות. כמה התנגשויות צריך הפוטון לעבור בשביל שאורך הגל שלו ישתנה ל-555nm.

תשובות סופיות:

- (1) א. 0.162nm . ב. 0.164nm . ג. 0.167 .
- (2) א. $\theta = \pi$. ב. 0.00097% . ג. 4.9% .
- (3) $6 \cdot 10^9$ התנגשויות.

אינטראקציות של פוטונים ויצירת זוגות:

סיכום כללי:

תנאים ביצירת זוגות:

1. חייב להיווצר זוג בשביל שיתקיים שימור מטען
2. אנרגיית הפוטון שווה לאנרגיית הזוג, יש להוסיף אנרגיית מנוחה יחסותית לכל חלקיק mc^2 .
3. בשביל ליצור זוג חייבת להיות אינטראקציה עם גוף נוסף (בד"כ גרעין) כדי שיהיה שימור תנע.
4. התהליך יכול גם לקרות הפוך ונקרא אינהלציה. לדוגמה פוזיטרון פוגש אלקטרון, הם נכחדים ויוצרים פוטון.

שאלות:

- (1) דוגמה - אנרגיה מינימלית ליצירת זוגות
מצאו מהי האנרגיה המינימלית (ב-eV) ליצירת זוג אלקטרון פוזיטרון?
מה אורך הגל של הפוטון במקרה זה?
- (2) חישוב אנרגיה קינטית ביצירת זוג
חשבו כמה אנרגיה קינטית כוללת תהיה ביצירת זוג של אלקטרון פוזיטרון מתוך פוטון בעל אנרגיה של: 2.8MeV .
- (3) אורך גל מקסימאלי ליצירת זוג
מהו אורך הגל המקסימאלי של פוטון היכול לייצר זוג של פרוטון ואנטי פרוטון (כל אחד במסה של: $1.67 \cdot 10^{-27}\text{kg}$).
- (4) אלקטרון ופוזיטרון מייצרים שני פוטונים
אלקטרון ופוזיטרון נעים אחד כלפי השני במהירות: $10^5 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ כל אחד. הם מתנגשים, נעלמים ויוצרים שני פוטונים שנעים בכיוונים מנוגדים. מהן האנרגיה והתנע של כל פוטון?

תשובות סופיות:

(1) 1.02MeV ו- 1.2pm .

(2) 1.78MeV .

(3) $6.63 \cdot 10^{-16}\text{m}$.

(4) $E = 0.51\text{MeV}$, $p = 0.51 \frac{\text{MeV}}{c}$.

דואליות גל חלקיק והאופי הגלי של החומר:

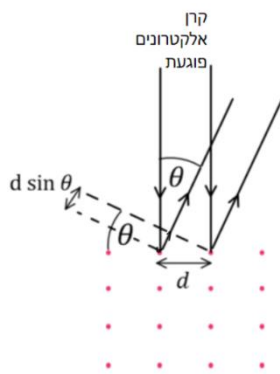
סיכום כללי:

$p = mv$	או	לא יחסותי	$\lambda = \frac{h}{p}$	אורך גל דה ברולי של חלקיק
$p = m\gamma v$		יחסותי		

שאלות:

(1) דוגמה - אורך גל של כדורסל
חשבו את אורך גל דה ברולי של כדורסל השוקל חצי קילוגרם ונזרק במהירות של 10 מטר לשנייה.

(2) דוגמה - אורך גל של אלקטרון ב-100 וולט
חשבו את אורך הגל של אלקטרון המואץ תחת הפרש פוטנציאלים של 100V.



(3) דוגמה - עקיפה של אלקטרונים
מקרינים קרן אלקטרונים בניצב למשטח של חומר מוצק. האטומים בחומר מסודרים בצורת סריג ריבועי כאשר המרווח בין האטומים לא ידוע ומסומן ב- d , ראו איור. מצאו את המרחק d אם האנרגיה הקינטית של האלקטרונים היא: $E_k = 80\text{eV}$ והזווית בה מתרחשת התאבכות בונה בפעם הראשונה היא 22° .
הניחו שהאנרגיה של האלקטרונים נמוכה וכי האלקטרונים עושים אינטראקציה רק עם השכבה החיצונית של החומר.

(4) כמה מתח לאורך גל
באיזה מתח צריך להאיץ אלקטרון כך שהוא יגיע לאורך גל של 0.6nm.

(5) אנרגיה ותנע מאורך גל
לאלקטרון אורך גל דה ברולי של: $\lambda = 3.2 \cdot 10^{-10}\text{m}$.
א. מהו התנע שלו?
ב. מהי מהירותו? האם היא יחסותית? רמת דיוק של 1% בגאמה.
ג. איזה מתח נדרש כדי להאיץ אותו למהירות כזו?

(6) רזולוציה של מיקרוסקופ אלקטרוני

מהו הגבול התיאורטי של הרזולוציה של מיקרוסקופ אלקטרוני שבו האלקטרונים מואצים במתח של 80keV . יש להשתמש בנוסחאות יחסותיות.

(7) אנרגיה יחסותית

אלקטרון בשפופרת טלויזיה (של פעם) מואץ במתח של 33keV .

א. האם האנרגיה של האלקטרון יחסותית? לפי רמת דיוק של אחוז אחד בגמא.

ב. חשבו את אורך הגל של האלקטרון. האם צריך לדאוג מתופעות עקיפה?

גודל פתח השפופרת הוא 5cm .

תשובות סופיות:

(1) $1.3 \cdot 10^{-34}\text{ m}$

(2) $1.2 \cdot 10^{-10}\text{ m}$

(3) 3 A

(4) 4.17 V

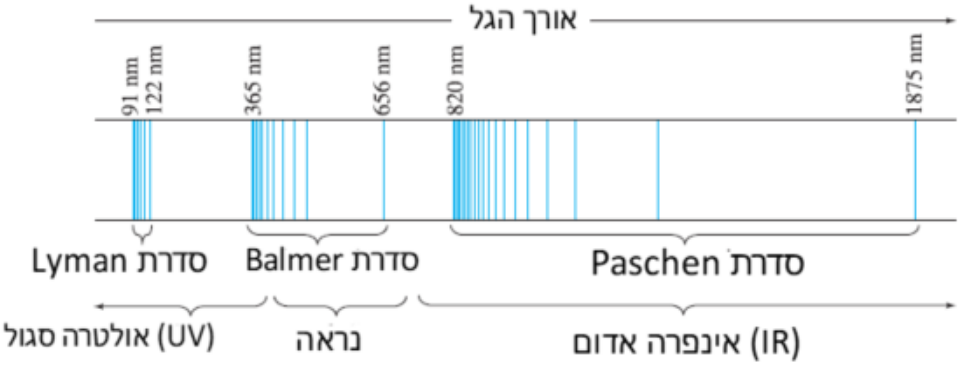
(5) א. $2.1 \cdot 10^{-24}\text{ kg} \cdot \text{sec}$. ב. $2.3 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, לא יחסותי. ג. 15 V .

(6) $4.2 \cdot 10^{-12}\text{ m}$

(7) א. כן. ב. $6.6 \cdot 10^{-12}\text{ m}$, אין צורך.

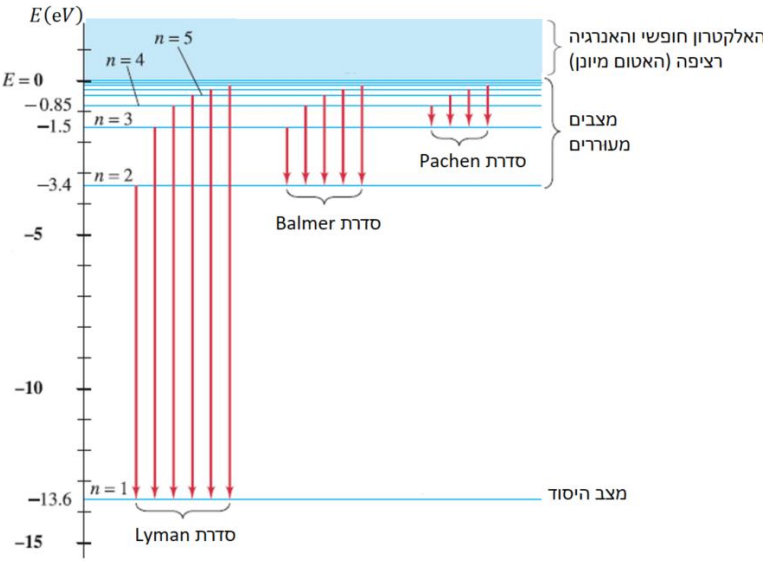
מודלים מוקדמים של האטום:

סיכום כללי:

קבוע Rydberg $\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	נוסחה לאורכי הגל הנפלטים מאטום המימן
 <p>The diagram illustrates the hydrogen emission spectrum. It shows three series of spectral lines: Lyman (91 nm, 122 nm), Balmer (365 nm, 656 nm), and Paschen (820 nm, 1875 nm). The Lyman series is in the UV region, Balmer is in the visible region, and Paschen is in the IR region. The x-axis is labeled 'אורך הגל' (wavelength).</p>		
1. מדוע הקרינה שנפלטת היא באורכי גל מסוימים בלבד. 2. אם האלקטרון בתאוצה כל הזמן הוא צריך לאבד אנרגיה כל הזמן ולקרוס לגרעין. אטומים לא היו צריכים להיות יציבים.		בעיות במודל הפלנטארי של ראתפורד

מודל האטום של בוהר:

סיכום כללי:

<p>1. האלקטרונים יכולים לנוע רק במסלולים / רדיוסים ספציפיים מסביב לגרעין. המסלולים נקראים אורביטלים.</p> <p>2. האלקטרונים לא מאבדים אנרגיה בתנועה המעגלית (למרות שהם בתאוצה). בגלל שהאלקטרון לא מאבד אנרגיה במצבים stationary states אלו הם נקראים מצבים יציבים</p>		הנחות המודל
	$hf = E_U - E_L$	אנרגיית הפוטון שווה להפרש האנרגיות בין שני מצבים
$n=1,2,3\dots$	$L = mvr_n = \frac{nh}{2\pi}$	הנחה על התנע הזוויתי
<p>Z - מספר הפוטונים</p> $r_1 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi e^2 m_e} \approx 0.529 \cdot 10^{-10}$	$r_n = \frac{n^2}{Z} r_1$	הרדיוסים האפשריים
	$E = -\frac{Z^2 \cdot 13.6eV}{n^2}$	האנרגיה של האלקטרון הנמצא במסלול ה- n
		טבלה של רמות האנרגיה באטום המימן

שאלות:

- (1) **דוגמה - אורך הגל של הקו הראשון של Paschen**
 השתמשו בטבלה שהוצגה בסרטון "קווי הספקטרום ממודל בוהר" ומצאו את אורך הגל של קו הספקטרום הראשון בסדרת Paschen. באיזה תחום של אורכי גל נמצא קו זה? (IR, UV או אור נראה).
- (2) **דוגמה - אורך גל מקסימלי בבליעה**
 גז מימן נמצא בשפופרת בלחץ נמוך ובטמפרטורת החדר (האלקטרונים במצב היסוד). מקרינים את הגז בקרינה עם ספקטרום רציף של אורכי גל. מהו אורך הגל הכי גבוה בספקטרום הבליעה ומהו אורך הגל אחריו? השתמשו בטבלה של רמות האנרגיה באטום המימן.
- (3) **דוגמה - אנרגיית ינון של יון הליום**
 He^+ הוא יון של הליום המכיל שני פרוטונים ואלקטרון אחד. השתמשו במודל בוהר וחשבו את אנרגיית היינון של He^+ , כלומר, כמה אנרגיה דרושה בשביל לנתק גם את האלקטרון היחיד שנשאר. מהו אורך הגל המקסימאלי של פוטון הגורם ליינון? הניחו שהאלקטרון במצב היסוד.
- (4) **דוגמה - אנרגיה של אטומים בטמפרטורת חדר**
 לפי התיאוריה הקינטית (תיאוריה בתרמודינמיקה), האנרגיה הקינטית הממוצעת של אטום בגז (אידיאלי) היא: $\bar{E}_k = \frac{3}{2}kT$ כאשר $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$. הוא קבוע בולצמן ו-T היא הטמפרטורה בקלווין. הסבירו מדוע בטמפרטורת החדר כמעט כל האטומים צריכים להיות במצב היסוד. (טמפרטורת החדר היא בערך 20 מעלות צלזיוס והטמפרטורה בקלווין שווה לטמפרטורה בצלזיוס פלוס 273).
- (5) **השוואה בין מעברים**
 נתונים שלושה מעברים בין רמות אנרגיה של אטום המימן לפי מודל בוהר כאשר n הוא המצב ההתחלתי ו-n' הוא המצב הסופי.
 I. $n = 1 \quad n' = 3$
 II. $n = 6 \quad n' = 2$
 III. $n = 4 \quad n' = 5$
 א. קבעו אילו מן המעברים הם בליעה ואילו פליטה.
 ב. באיזה מעבר מעורב הפוטון הכי אנרגטי?

- (6) **יינון אטום מעורר**
 כמה אנרגיה דרושה על מנת ליינן אטום מימן מעורר הנמצא במצב אנרגיה החמישי?
 החמישי?
- (7) **אורך גל של הקו השני**
 מצאו את אורך הגל של הקו השני בסדרת בלמר.
- (8) **מימן בולע פוטון של הליום מיונן**
 בשמש ישנם יונים של הליום - He^+ . יון של ההליום פולט פוטון במעבר מרמה 5 לרמה 2. האם אטום מימן הנמצא בשמש יוכל לבלוע את הפוטון בלי לבצע יינון? אם כן בין איזה רמות אנרגיה תתבצע הבליעה?
- (9) **אנרגיית יינון של ליתיום פלוס שתיים**
 חשבו את אנרגיית היינון (ממצב הייסוד) של אטום ליתיום החסר שני אלקטרונים Li^{2+} בעל $Z = 3$ לפי מודל בוהר.
- (10) **אנרגיה קינטית של אלקטרון במצב יסוד**
 מהי האנרגיה הפוטנציאלית והקינטית של אלקטרון במצב היסוד של אטום המימן?
- (11) **האם אטום המימן יחסותי**
 השתמשו בתוצאה של התרגיל הקודם "אנרגיה קינטית של אלקטרון במצב ייסוד" ובדקו האם יש צורך להשתמש בנוסחאות יחסותיות במודל בוהר.
- (12) **רדיוס אטום מעורר**
 אטום מימן מעורר יכול להיות תיאורטי בקוטר של 0.10mm. באיזה רמת אנרגיה נמצא אטום זה? ומהי האנרגיה של מצב זה?
- (13) **אנרגיה ותנז**
 מצאו את התנע הזוויתי של אלקטרון באטום המימן אם האנרגיה שלו היא $-1.5eV$.
- (14) **אלקטרונים פוגעים בגז מימן**
 קרן אלקטרונים בעלי אנרגיה של $12.1eV$ פוגעת בגז מימן הנמצא בטמפרטורת החדר (רוב האטומים במצב היסוד). מהו ספקטרום הפליטה שנצפה לראות מן הגז בעקבות פגיעת הקרן?

תשובות סופיות:

- (1) 300nm בתחום העל סגול (UV).
- (2) $\lambda_{\max} = 122\text{nm}$, $\lambda_2 = 103\text{nm}$.
- (3) 22.8nm.
- (4) ראה סרטון.
- (5) א. בליעה: I, פליטה: II, בליעה: III. ב. מעבר I.
- (6) 0.544eV.
- (7) 490nm.
- (8) לא יוכל לקלוט.
- (9) 122.4eV.
- (10) $K = 13.6\text{eV}$, $U = -27.2\text{eV}$.
- (11) אין צורך.
- (12) ברמה ה-972, האנרגיה היא: $-1.4 \cdot 10^{-1}\text{eV}$.
- (13) $3.17 \cdot 10^{-34}\text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{sec}}$.
- (14) אורכי הגל הנצפים הם: 103nm, 656nm, 122nm.

שאלות ותרגילים נוספים:

שאלות:

- (1) **טמפרטורה של כוכב**
איזה כוכב נמצא בטמפרטורה גבוהה יותר, כוכב הנראה כחול, אדום או צהוב?
- (2) **גופים שחורים בחושך**
אם קרינה נפלטת מכל גוף, למה אנחנו לא רואים אותם בחושך?
- (3) **צבע אור של נורה**
האם האור של נורה בטמפרטורה של 3000K יראה לבן כמו האור של השמש הנמצאת ב-6000K?
- (4) **חדר חושך**
למה בחדרי חושך מאירים בנורה אדומה כשמפתחים תמונה של שחור לבן? האם ניתן להשתמש באור אדום גם בפיתוח של תמונה בצבע?
- (5) **תדירות סף מעדיפה תיאוריה פוטונית**
הסבירו למה העובדה שיש תדירות סף באפקט הפוטואלקטרי מסתדרת עם התורה הפוטונית ולא עם התורה הגלית של האור?
- (6) **אנרגיה של אינפרה אדום לעומת על סגול**
א. האם לפוטון יחיד של קרן בתחום העל סגול יש תמיד יותר אנרגיה מפוטון יחיד של קרן בתחום האינפרה אדום?
ב. האם לקרן בתחום העל סגול יש תמיד יותר אנרגיה מקרן בתחום האינפרה אדום?
- (7) **האם נפלטים יותר אלקטרונים באורך גל נמוך**
מקרינים מתכת באמצעות אור באורך גל מסוים ומודדים את האנרגיה של האלקטרונים הנפלטים. מחליפים את הקרן האור לקרן אחרת, באותה העוצמה אך עם אורך גל גדול יותר. בהנחה שבשני המקרים נפלטים אלקטרונים מן המתכת:
א. האם מספר האלקטרונים הנפלט גדל / קטן או נשאר ללא שינוי?
ב. האם האנרגיה של האלקטרונים גדלה / קטנה או נשארת ללא שינוי?

- (8) **אורך גל של פוטון בפיזור**
 האם אורך הגל של פוטון בקרינת X המפוזר מאלקטרון גדל / קטן או לא משתנה?
- (9) **הבדל בין הפוטואלקטרי לקומפטון**
 באפקט קומפטון הפגיעה של הפוטון יכולה לגרום ליציאה של אלקטרון מהמתכת, במקרה כזה מה ההבדל בינו לאפקט הפוטואלקטרי?
- (10) **איך העוצמה יורדת עם המרחק לפי כל מודל**
 נניח כי ישנו מקור אור נקודתי, כיצד צריכה לרדת העוצמה של האור כתלות במרחק מהמקור לפי המודל הפוטוני וכיצד לפי המודל הגלי.
 האם ניתן להבחין בין המודלים בדרך זו?
- (11) **מהם ההבדלים בין פוטון לאלקטרון**
 ציינו את כל ההבדלים בין פוטון לאלקטרון.
- (12) **האם יש חמצן על כוכב**
 כיצד ניתן לדעת האם יש חמצן על פני השמש או על כוכבים בכלל?
- (13) **נכונות הנוסחה של אנרגיית הפוטון**
 השתמשו בשימור תנע והראו כי לפוטון הנפלט מאטום המימן יש קצת פחות אנרגיה מאשר החישוב שבנוסחה: $hf = E_U - E_L$.
- (14) **ספקטרום בליעה ופליטה בטמפרטורות שונות**
 נניח שניקח את ספקטרום הפליטה של גז מימן הנמצא בטמפרטורה מאוד גבוהה כך שחלק מהאטומים נמצאים במצב מעורר ונעביר אותו דרך גז מימן הנמצא בטמפרטורה החדר (האטומים לא מעוררים) כך שתתבצע בליעה.
 האם קווי הבליעה יהיו זהים לקווי הפליטה?
- (15) **אנרגיה מקסימלית להתנגשות אלסטית**
 מהי האנרגיה המקסימלית עבורה יתנגשו שני אטומי מימן הנמצאים במצב היסוד להתנגשות אלסטית?

(16) כמה פוטונים נכנסים לעין מנורה

נורה של 40W פולטת בערך 3% מהאנרגיה המושקעת בה כאור נראה באורך גל ממוצע של 550nm. האור נפלט בצורה אחידה לכל הכיוונים. העריכו כמה פוטונים פוגעים בעין של אדם הנמצא במרחק 10m מהנורה בכל שניה. קוטר האישון הוא 4.0mm.

(17) כמה פוטונים מגיעים מהשמש

עוצמת האור המגיע מן השמש היא: $I = 1350 \frac{W}{m^2}$. חשבו כמה פוטונים למטר מרובע לשנייה יש פוגעים בפני כדור הארץ מן השמש? קחו אורך גל ממוצע של 550nm.

(18) כוח של קרן לייזר

קרן לייזר באורך גל של: $\lambda = 633nm$ פוגעת בחיישן כוח. החיישן מודד כוח של: $F = 3.0nN$. כמה פוטונים פוגעים בחיישן כל שניה אם נניח שהפוטונים אינם מוחזרים?

(19) חלקיקי אלפא מתקרבים לגרעין

בחלק מהניסויים של רתפורד הוא השתמש בחלקיקי אלפא בעלי מטען $+2e$ עם אנרגיה של 3.6MeV. כמה קרוב יכלו החלקיקים להגיע למרכז גרעין של כסף המכיל מטען של $+47e$. התעלמו מהרתע של הגרעין.

(20) פוטנציאל עצירה בניסוי פוטואלקטרי

בניסוי פוטואלקטרי מקרינים מתכת באור באורך גל 440nm ומודדים כי פוטנציאל העצירה הוא 1.2V. מה יהיה פוטנציאל העצירה אם יחליפו את האור לאורך גל של 550nm.

(21) שינוי תדירות בפוטואלקטרי

בניסוי פוטואלקטרי פוטונים באנרגיה של 9.0eV פוגעים במתכת ומתח העצירה הנמדד הוא 5.0V.
 א. מה תהיה האנרגיה המקסימאלית של האלקטרונים הנפלטים אם תדירות הפוטונים תקטן לחצי מהתדירות המקורית?
 ב. חזרו על סעיף א אם התדירות תקטן לשליש מהתדירות המקורית.

(22) מודל בוהר לשמש וכדור הארץ

נסו ליישם את המודל של בוהר לכדור הארץ והשמש.

א. מהם הרדיוסים ורמות האנרגיה? יש להשתמש ב:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{sec}^2 \text{kg}}, M_E = 5.97 \cdot 10^{24} \text{kg}, M_S = 2 \cdot 10^{30} \text{kg}$$

ב. חשבו את רמת האנרגיה שבה נמצא כדור הארץ אם המרחק מהשמש

$$\text{הוא: } r = 1.50 \cdot 10^{11} \text{m}$$

ג. * הראו כי ההבדל בין רמות האנרגיה זניח עבור מודל זה וניתן להתייחס לאנרגיה כרציפה.

(23) כוח על פנס

פנס קטן עובד בהספק של 5W כאשר כ-3% מנוצל לאור נראה. העריכו את הכוח המופעל על הפנס אם האור יוצא בכיוון אחד.

(24) זמן ואורך פלאנק

נסתכל על שלושה קבועים בסיסיים בטבע קבוע הגרביטציה:

$$h = 6.63 \cdot 10^{-34} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{sec}}, G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{sec}^2}$$

$$\text{ומהירות האור: } c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

- א. מצאו קומבינציה מתמטית של הקבועים האלו שתהיה ביחידות של זמן. זמן זה נקרא זמן פלאנק t_p והוא נחשב לזמן המוקדם ביותר מרגע תחילת הייקום שבו ניתן להפעיל את חוקי הפיזיקה כפי שאנחנו מבינים כיום. חשבו את זמן זה.
- ב. מצאו קומבינציה מתמטית של הקבועים האלו שתהיה ביחידות של אורך. אורך זה נקרא אורך פלאנק λ_p והוא נחשב לאורך הקטן ביותר שבו ניתן להפעיל את חוקי הפיזיקה כפי שאנחנו מבינים כיום. חשבו את אורך זה.

תשובות סופיות:

- (1) כחול.
- (2) כי הקרינה הנפלטת היא לא בתחום הנראה.
- (3) לא, הוא יראה יותר צהוב אדום.
- (4) כי סרט שחור לבן לא מגיב לאור אדום, לא ניתן להשתמש באור אדום לפיתוח תמונה צבעונית.
- (5) לפי התורה הגלית האנרגיה של האור קשורה לעוצמת האור ולפי התורה הפוטונית לתדירות.
- (6) א. כן. ב. לא.
- (7) א. ללא שינוי. ב. קטנה.
- (8) גדל.
- (9) באפקט קומפטון הפוטון מפוזר באנרגיה יותר נמוכה לעומת הפוטואלקטרי שם תמיד כל הפוטון נבלע וכל האנרגיה שלו הולכת לאלקטרון.
- (10) לפי אחד חלקי המרחק בריבוע בשניהם ואי אפשר להבחין ביניהם.
- (11) משותף: תנע - לשניהם יש, דואליות גל חלקיק לשניהם (לשניהם יש אורך גל). שונה: פוטון נע רק במהירות האור, לפוטון אין מסת מנוחה, לפוטון אין מטען חשמלי.
- (12) לפי ספקטרום הפליטה.
- (13) ראה סרטון.
- (14) לא.
- (15) 10.2eV
- (16) 10^{10}
- (17) $3.7 \cdot 10^{21}$ פוטונים.
- (18) $2.9 \cdot 10^8$ פוטונים לשנייה.
- (19) $3.76 \cdot 10^{-14}$ m
- (20) 0.64V
- (21) א. 0.5eV. ב. לא תהיה פליטת אלקטרונים.
- (22) א. $r_n = 2.34 \cdot 10^{-138} \cdot n^2$, $E_n = -1.68 \cdot 10^{182} \cdot \frac{1}{n^2}$. ב. $n = 2.53 \cdot 10^{74}$.
- ג. ראה סרטון.
- (23) $5 \cdot 10^{-10}$ N
- (24) א. $t_p = \sqrt{\frac{Gh}{c^5}} = 1.35 \cdot 10^{-43}$ sec. ב. $\lambda_p = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}} = 4.05 \cdot 10^{-35}$ m

פיסיקה 3

פרק 6 - תורת הקוונטים

תוכן העניינים

87 1. הרצאות ותרגולים

פונקציית הגל של החומר:

סיכום כללי:

- $|\psi(x)|$ היא פונקציית הגל של החומר.
- $|\psi(x)|^2$ היא צפיפות ההסתברות למצא חלקיק בנקודה מסוימת.
- ההסתברות שחלקיק נמצא בין x_1 ל- x_2 היא: $\int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx$.
- נרמול: $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$.
- כאשר מתבצעת מדידה של החלקיק פונקציית הגל קורסת.
- מיקום ממוצע: $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx$
- המיקום בעל ההסתברות הגבוה ביותר הוא נקודת המקסימום של פונקציית ההסתברות $|\psi(x)|^2$ (ניתן למצא אותו על ידי נגזרת).
- שונות: $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ כאשר $\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx$

שאלות:

- (1) דוגמה – חישוב ההסתברות לדעיכה אקספוננציאלית
פונקציית הגל של חלקיק היא $4e^{-8x}$ עבור $x > 0$ ואפס עבור $x < 0$.
מה הסיכוי למצא את החלקיק ב- $x > 0.03$.

(2) דוגמה – מצאו את המקדם

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ A \sin(20\pi x) & 0 \leq x \leq 0.05 \\ 0 & x > 0.05 \end{cases}$$

נתונה פונקציית הגל הבאה של חלקיק: $0 \leq x \leq 0.05$

מצאו את הקבוע A .

(3) דוגמה – מצאו משתנים

נתונה פונקציית גל מנורמלת לחלקיק בעל מסה M : $\psi(x) = Ae^{-\alpha(x-x_0)^2}$. מצאו את:

א. A .ב. $\langle x \rangle$.

ג. המיקום המסתבר ביותר.

ד. $\langle x^2 \rangle$.ה. Δx .

לעזרתכם: $\int_0^\infty e^{-bx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4b}}$; $\int_0^\infty x^2 e^{-bx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{16b^3}}$

תשובות סופיות:

(1) 38%

(2) $A = 2\sqrt{10}$

(3) א. $A = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}$

ג. x_0 .ב. x_0 .

ה. $\left(\frac{\pi}{8192\alpha^3}\right)^{\frac{1}{8}}$

ד. $\left(\frac{\pi}{8192\alpha^3}\right)^{\frac{1}{4}} + x_0^2$

עקרון אי הוודאות של הייזנברג:

סיכום כללי:

הערות		
1. אי אפשר למדוד במדויק את המיקום והתנע באותו ציר בו זמנית. 2. אותה נוסחה לכל ציר בנפרד. 3. אין בעיה למדוד במדויק את התנע ב-X והמיקום ב-Y בו זמנית.	$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$ $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.055 \cdot 10^{-34} J \cdot S$	אי ודאות מיקום תנע
1. ככל שמוודדים את הזמן בדיוק גבוה יותר כך הדיוק במדידת האנרגיה קטן. 2. האנרגיה נשמרת עד כדי אי הוודאות, הגופים יכולים להיות באנרגיות האסורות קלאסית.	$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$	אי ודאות זמן אנרגיה
	$\Delta L_z \Delta \theta \geq \frac{\hbar}{2}$	אי ודאות במדידת הזווית והתנע הזוויתי

שאלות:

- (1) דוגמה – מדידת מיקום
 אלקטרון נע במהירות: $2.10 \cdot 10^6 \frac{m}{sec}$ שנמדדה בדיוק של 0.12%.
 מה הדיוק המקסימאלי שניתן להשיג במדידה סימולטנית של המיקום?

- (2) דוגמה – אי וודאות של טניס
 מה היא אי הוודאות במדידת המיקום של כדור טניס בעל מסה של 150 גרם הנזרק במהירות: $35 \pm 2 \frac{m}{sec}$?

- (3) אי ודאות במיקום נויטרון שנע
 נויטרון נע במהירות: $(6.650 \pm 0.023) \cdot 10^5 \frac{m}{sec}$.
 באיזו רמת דיוק ניתן לדעת את המיקום שלו? $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} kg$

- (4) אנרגיה במצב מעורר
 אלקטרון נשאר במצב מעורר באטום בערך $10^{-8} sec$.
 מה אי הוודאות באנרגיה של המצב באלקטרון וולט?

- (5) אי ודאות יחסית בפליטת פוטון
 זמן החיים של אטום במצב מעורר הוא בערך 10^{-9} sec. האטום יורד מהמצב המעורר ופולט פוטון באורך גל של 400nm, מצאו את אי הודאות היחסית באנרגיית הפוטון $\frac{\Delta E}{E}$ ובאורך הגל $\frac{\Delta \lambda}{\lambda}$.

- (6) אי ודאות בשל קליע באקדח
 קליע בעל מסה של 5gr נורה מאקדח במהירות אופקית של $180 \frac{m}{sec}$.
 א. מהו אורך הגל של הקליע?
 ב. מהי אי הודאות המינימלית במדידת המיקום של הקליע?
 ג. מהי אי הודאות המינימלית בתנע בכיוון האנכי של הקליע אם רדיוס הקנה הוא 0.60cm?

- (7) אי ודאות במסת נויטרון
 לנויטרון חופשי: $m = 1.67 \cdot 10^{-27} kg$ יש זמן חיים של 886sec.
 מה אי הודאות במדידת המסה של הנויטרון (בק"ג)?

- (8) אלקטרון יורד מצב באטום המימן
 אלקטרון נמצא במצב המעורר הראשון ($=2n$) של אטום המימן בממוצע $10^{-8} sec$ לפני שהוא יורד למצב הייסוד ($=1n$).
 א. העריכו את אי הודאות באנרגיית האלקטרון במצב $=2n$.
 ב. מהי אי הודאות היחסית באנרגיית הפוטון הנפלט?
 ג. מהו אורך הגל ורוחב הפס של קו הספקטרום הנצפה מתהליך זה?

תשובות סופיות:

- (1) $\Delta X_{min} = 2.3 \cdot 10^{-6} m$
- (2) $1.8 \cdot 10^{-34} m$
- (3) $1.37 \cdot 10^{-11} m$
- (4) $3 \cdot 10^{-8} eV$
- (5) $\frac{\Delta E}{E} = 4 \cdot 10^{-5} \%$, $\left| \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \right| = 4 \cdot 10^{-5} \%$
- (6) א. $7.4 \cdot 10^{-34} m$ ב. $10^{-32} m$ ג. $10^{-32} kg \cdot \frac{m}{sec}$
- (7) $10^{-51} kg$
- (8) א. $3 \cdot 10^{-8} eV$ ב. $3 \cdot 10^{-9}$ ג. $\lambda = 122nm$, $|\Delta \lambda| \approx 4 \cdot 10^{-7} nm$

משוואת שרדינגר:

סיכום כללי:

משוואת שרדינגר עם תלות בזמן במימד אחד:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + U(x, t)\Psi(x, t)$$

תנאים נוספים:

1. פסי מנורמלת.
2. פסי יכולה להיות פונקציה מורכבת.
3. פסי רציפה.
4. הגזרת של פסי רציפה למעט נקודות בהן הפוטנציאל מתבדר.

בתלת מימד:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, y, z, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(x, y, z, t) + U(x, t)\Psi(x, y, z, t)$$

משוואת שרדינגר ללא תלות בזמן במימד אחד:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + U(x)\psi = E\psi$$

כאשר: $\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$

- התרגילים של נושא זה מופעים בנושאים הבאים.

חלקיק חופשי ובור פוטנציאל:

סיכום כללי:

חלקיק חופשי – חלקיק שנע ללא השפעת כוחות: $U(x) = 0$.
 פונקציית הגל של חלקיק חופשי: $\psi(x) = A \sin(kx)$.
 חבילת גלים: $\psi(x) = \sum_n A_n \sin(k_n x) + B_n \cos(k_n x)$.

בור פוטנציאל אינסופי:

פונקציית הגל של המצב ה- n : $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$

האנרגיה של המצב ה- n : $E_n = \frac{h^2}{8ml^2} n^2, n = 1, 2, 3, \dots$

- לפי תורת הקוונטים קיימת אפשרות שהחלקיק יהיה במקום שבו האנרגיה הכוללת קטנה מהאנרגיה הפוטנציאלית, מצב שאינו אפשרי לפי המכניקה הקלאסית. באזור האסור פונקציית הגל דועכת אקספוננציאלית.

עקרונות לציור פונקציית גל:

- ציירו את פונקציית הפוטנציאל ואת אנרגיית החלקיק.
- עבור המצב ה- n ציירו גל עם $n-1$ נקודות צומת (לא כולל הקצוות).
- ככל שהאנרגיה הקינטית גדולה יותר כך האמפליטודה ואורך הגל קטנים יותר (ולהיפך).
- פונקציית הגל הולכת לאפס במיקום בו הפוטנציאל הולך לאינסוף.
- פונקציית הגל דועכת אקספוננציאלית במקומות האסורים קלאסית. ככל שההפרש בין האנרגיה הפוטנציאלית לאנרגיה הכללית גדול יותר כך הדעיכה מהירה יותר.

מיקום ממוצע: $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx$

המיקום בעל ההסתברות הגבוהה ביותר הוא נקודת המקסימום של פונקציית ההסתברות $|\psi(x)|^2$ (ניתן למצוא אותו על ידי נגזרת).

שאלות:

- (1) **דוגמה – אלקטרון חופשי עם אנרגיה ידועה**
 אלקטרון עם אנרגיה $E = 3.7\text{eV}$ נע באופן חופשי במרחב.
 א. מהו אורך הגל של האלקטרון?
 ב. רשמו את פונקציית הגל של האלקטרון.
 אין צורך לנרמל את הפונקציה והניחו כי הפאזה היא אפס.
- (2) **דוגמה – אלקטרון באמצע הקופסה**
 אלקטרון נמצא במצב היסוד בתוך קופסה קשיחה באורך l .
 מצאו את ההסתברות שהאלקטרון נמצא במרחק $\frac{l}{8}$ ממרכז הקופסה (מימין או משמאל למרכז).
- (3) **דוגמה – מיקום ממוצע ומסתבר במצב המעורער הראשון**
 מצאו את המיקום הממוצע והמיקום המסתבר ביותר עבור חלקיק הנמצא במצב המעורער הראשון בתוך קופסה קשיחה באורך: $2.00 \cdot 10^{-10}\text{m}$.
- (4) **דוגמה – חיידק בקופסה**
 חיידק קטן בעל מסה של 10^{-13}kg מוגבל לזוז בין שני קירות קשיחים במרחק 0.1mm אחד מן השני.
 א. האריכו את המהירות המינימאלית של החיידק.
 ב. אם מהירות החיידק היא בערך $10^{-6}\frac{\text{m}}{\text{sec}}$, מהו המספר הקוונטי של המצב בו נמצא החיידק?
- (5) **דוגמה – חלקיק בבור סופי**
 חלקיק בעל מסה M נמצא בבור פוטנציאל הנתון לפי הפונקציה הבאה:

$$U(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq L \\ U_0 & L < x \end{cases}$$

אנרגיית החלקיק E נתונה וקטנה מ- U_0 .

- א. מצאו את פונקציית הגל בכל המרחב ללא מציאת המקדמים הקבועים של הפונקציה בכל תחום.
 ב. השתמשו בתנאי השפה (פונקציית הגל רציפה והנגזרת רציפה) בשביל למצא משוואה ממנה ניתן לחשב את הערכים האפשריים של האנרגיה. הראו כי מתקיים הקשר:

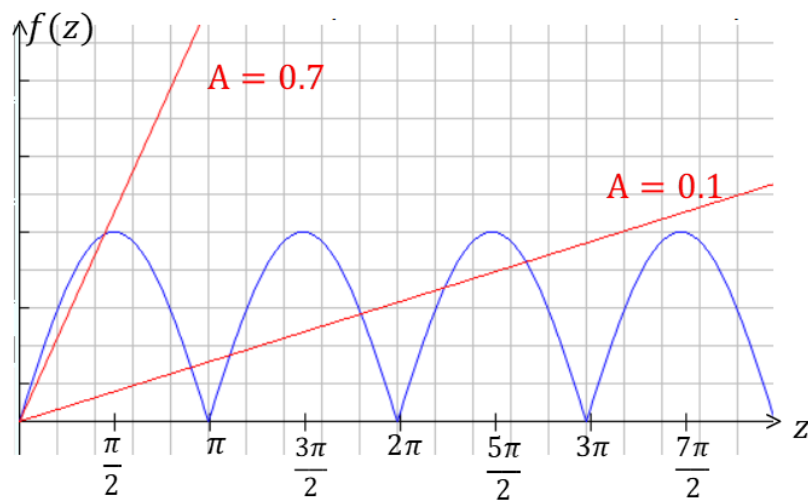
$$\tan(kL) = -\frac{k}{\alpha} \quad \text{כאשר} \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad \alpha = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}$$

ג. מצאו מהו תחום הערכים האפשריים של kL והראו כי :

$$|\sin(kL)| = \frac{\hbar k}{\sqrt{2mU_0}}$$

ד. כתבו את המשוואה של סעיף ג' באמצעות המשתנים : $z = kL$

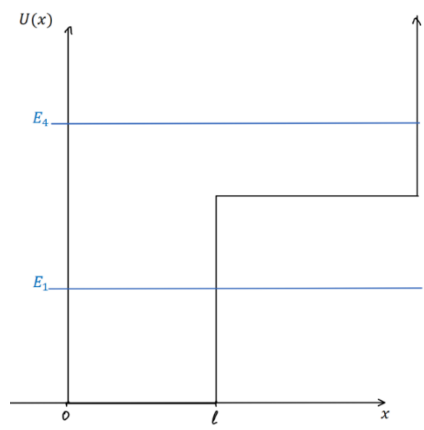
ו- $A = \frac{\hbar}{L\sqrt{2mU_0}}$ כעת ניתן לפתור את הבעיה באמצעות פתרון גרפי. הפתרונות הן נקודות החיתוך של הפונקציות משני צידי המשוואה. סמנו את נקודות הפתרון בגרף הבא עבור : $A = 0.1$ ו- $A = 0.7$. הקפידו על תחום ההגדרה של סעיף ג'.



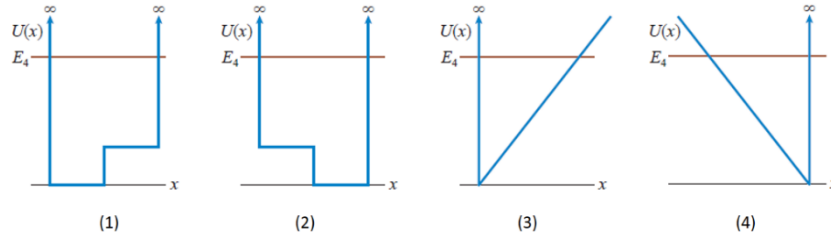
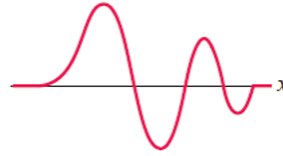
ה. מהו התנאי על A עבורו אין פתרון למשוואה?
מה המשמעות הפיזיקאלית של מצב זה?

6) דוגמה – בור אינסופי עם מדרגה

באיור נתונה פונקציית פוטנציאל של בור פוטנציאל אינסופי עם מדרגת פוטנציאל. ציירו את פונקציית הגל עבור האנרגיות E_1 ו- E_4 באיור.



(7) דוגמה – התאימו פוטנציאל לפונקציית הגל
איזה מהגרפים הבאים מתאר את הפוטנציאל של פונקציית הגל הבאה:



תשובות סופיות:

1. א. $6.38 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ ב. $\psi(x) = A \sin(9.84 \cdot 10^{-9} \text{ m}^{-1} \cdot x)$

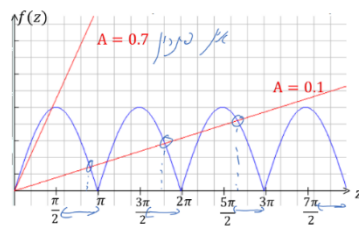
2. 47.5%

3. ממוצע: $\langle x \rangle = \frac{l}{2}$, מסתבר: $\frac{l}{4}$, $\frac{3l}{4}$

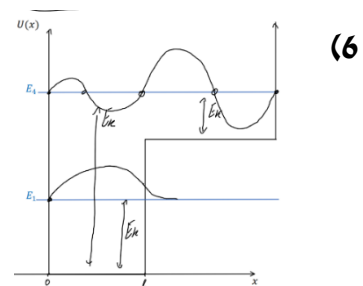
4. א. $3 \cdot 10^{-17} \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ ב. $3 \cdot 10^{-10}$

5. א. $\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x < 0 \\ Ce^{-\alpha x} & 0 < x < L \end{cases}$ כאשר: $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ ו- $\alpha = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$

ב. הוכחה. ג. $\frac{\pi}{2} + \pi n < KL < \pi + \pi n \quad n = 0, 1, 2, \dots$



ד. $|\sin(z)| = Az$ ה.



4 (7)

מנהור (tunneling):

סיכום כללי:

ההסתברות שהחלקיק יעבור את המחסום. $-l$ אורך המחסום $T \ll 1$ רק עבור	$T \approx 16 \frac{E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0}\right) e^{-2\alpha l}$ $\alpha = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$	מקדם ההעברה
	$R = 1 - T$	מקדם החזרה

שאלות:

(1) דוגמה – אלקטרון חודר מחסום

אלקטרון חופשי בעל אנרגיה של 40eV נע במרחב ונתקל במחסום פוטנציאל בעל אנרגיה של 60eV. מה ההסתברות שהאלקטרון יעבור את המחסום אם עובי המחסום הוא:

א. 1.0nm
ב. 0.1nm

(2) נתונים של אלקטרון חופשי

פונקציית הגל של אלקטרון חופשי היא: $\psi(x) = A \sin(\pi \cdot 10^{10} x)$ כאשר x במטרים. מצאו את:

א. אורך הגל והתנע של האלקטרון.
ב. מהירות האלקטרון.
ג. אנרגיית האלקטרון.

(3) מהירות מינימלית בבור אינסופי

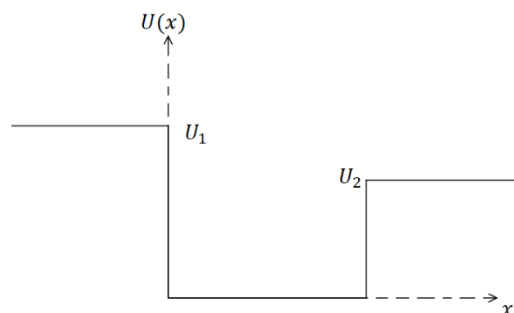
מהי המהירות המינימלית של אלקטרון הנמצא בבור פוטנציאל אינסופי ברוחב 0.30nm?

(4) **אי ודאות במצב היסוד***
 חלקיק נמצא במצב היסוד בתוך בור פוטנציאל אינסופי.
 הראו כי יחס אי הודאות מתקיים עבור מצב זה. עבור Δx ניתן לקחת את רוחב הבור (או יותר מדויק רוחב הבור חלקי 4π). התנע של החלקיק אמנם ידוע מתוך האנרגיה אבל הכיוון שלו אינו ידוע, התנע יכול להיות חיובי או שלילי ולכן אי הודאות בתנע היא $2p$.

(5) **הסתברות למצא אלקטרון בבור**
 אלקטרון נמצא בקופסה סגורה וקשיחה ברוחב 1.00nm .
 מה ההסתברות למצא את האלקטרון במרחק 0.10nm ממרכז הקופסה, מכל צד, עבור המצב:
 א. $n = 1$
 ב. $n = 4$
 ג. $n = 20$
 ד. השוו למקרה הקלאסי.

(6) **בור אינסופי מוזז**
 מצאו את פונקציות הגל עבור בור פוטנציאל אינסופי ברוחב l הנמצא מ- $x = -\frac{l}{2}$ ועד $x = \frac{l}{2}$ (במקום מ-0 עד l). האם רמות האנרגיה משתנות?

(7) **בור סופי עם קירות שונים**
 חלקיק נמצא תחת הפוטנציאל הנתון באיור.
 שרטטו את פונקציית הגל עבור שלושת המצבים הבאים:
 א. החלקיק במצב המעורר הראשון ו- $E < U_2$.
 ב. $U_2 < E < U_1$.
 ג. $U_1 < E$.



(8) זרם פרוטונים עובר מחסום

זרם של 1.2mA המכיל פרוטונים באנרגיה 1.8MeV נתקל במחסום פוטנציאל בגובה 2.0MeV וברוחב $5.0 \cdot 10^{-14}\text{m}$. מהו הזרם המועבר?

תשובות סופיות:

(1) א. $4.86 \cdot 10^{-18}\%$ ב. 3.67%

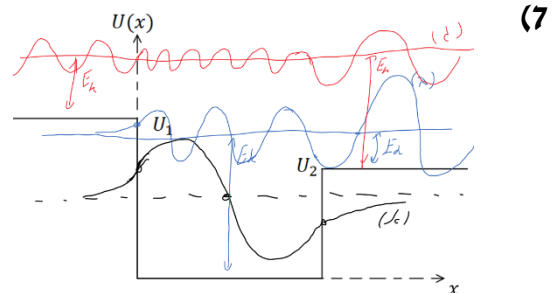
(2) א. $\lambda = 2 \cdot 10^{-10}\text{m}$, $p = 3.3 \cdot 10^{-24}\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ ג. $3.64 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ ד. 38eV

(3) $1.2 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$

(4) הוכחה.

(5) א. 0.387 ב. 0.153 ג. 0.2 ד. 0.2

(6) לא משתנות, $\sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi nx}{l} + \frac{\pi n}{2}\right)$



(8) 96nA

אוסילטור הרמוני:

סיכום כללי:

$$\psi_1(x) = (\pi b^2)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$$

$$\psi_2(x) = (\pi b^2)^{-\frac{1}{4}} \frac{x}{b} e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$$

$$\psi_3(x) = 8\sqrt{3} (\pi b^2)^{-\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{2x^2}{b^2}\right) e^{-\frac{x^2}{2b^2}} \quad \text{פונקציות הגל:}$$

$$b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

$$\text{רמות האנרגיה: } E_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \quad \text{כאשר } n = 1, 2, 3, \dots$$

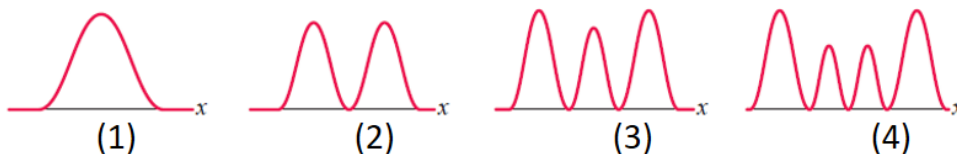
$$\text{(או } E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \text{ כאשר } n = 0, 1, 2, \dots)$$

פתרון כללי ל

שאלות:

- (1) דוגמה – אלקטרון בתנודה הרמונית פולט פוטון
אלקטרון הנמצא באוסילטור הרמוני קוונטי פולט פוטון באורך גל של 400nm
כאשר הוא יורד רמת אנרגיה אחת.
א. האם ניתן לדעת באיזה רמת אנרגיה היה האלקטרון?
ב. מהו "קבוע הקפיץ"?

- (2) דוגמה – איזה פונקציית הסתברות מתאימה
איזו פונקציית הסתברות מתאימה לחלקיק הנמצא תחת פוטנציאל של
אוסילטור קוונטי עם אנרגיה: $E = \frac{7}{2} \hbar\omega$?



תשובות סופיות:

- (1) א. לא. ב. $0.02 \frac{N}{m}$
- (2) 4.

תרגילים נוספים:

שאלות:

- (1) פונקציית חומר מול פונקציות גל אחרות השוו בין פונקציית הגל של החומר ψ לבין:
 א. פונקציית הגל של מיתר.
 ב. פונקציית גל של גל אלקטרומגנטי.
- (2) מודל בוהר וקוונטים מה ההבדל בין המודל האטומי של בוהר למכניקת הקוונטים? רמז: עיקרון אי הוודאות.
- (3) האם אפשר לאזן מחט האם אפשר לאזן מחט כך שהיא תעמוד על החוד שלה באופן מוחלט?
- (4) ניוטון וקוונטים באיזה אופן התורה של ניוטון שונה מתורת הקוונטים?
- (5) מיקום מדויק האם עקרון אי הוודאות מגביל את הדיוק שבו ניתן למדוד את המיקום של גוף?
- (6) למי יש יותר סיכוי לעבור מחסום אטום מימן ואטום הליום בעלי אנרגיה זהה מתקרבים למחסום פוטנציאל ברוחב סופי עם אנרגיה פוטנציאלית גבוהה מהאנרגיה שלהם. למי סיכוי גדול יותר לעבור את המחסום?
- (7) חיים של בוזון Z^0 בוזונים הם שם לקבוצת חלקיקים נשאי כוח (עם ספין שלם). הבוזון Z^0 קשור ל"כוח החלש" (כוח שפועל בתוך הגרעין) ודועך מאוד מהר. האנרגיה הממוצעת שלו היא 91.9 GeV והרוחב במדידת האנרגיה הוא 2.5 GeV . מהו זמן החיים המוערך של הבוזון Z^0 ?

(8) כדור מקפץ

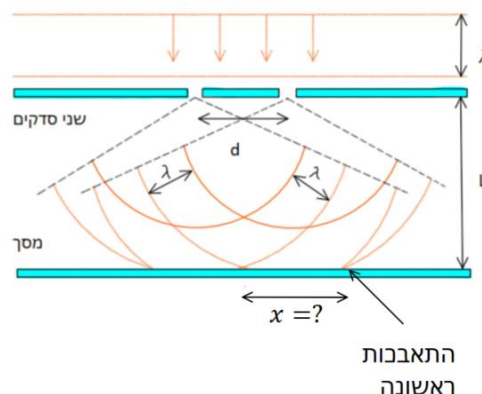
כדור קטן במסה 10^{-6} kg משוחרר ממנוחה בגובה 2 m מעל הרצפה. הכדור פוגע ברצפה וקופץ חזרה. לאחר כל פגיעה ברצפה הכדור מגיע חזרה ל-60% מהגובה הקודם בגלל איבוד אנרגיה בהתנגשות עם הרצפה. כמה פעמים צריך הכדור לפגוע ברצפה עד שאי הודאות במהירות שלו תהיה משמעותית (כלומר בסדר גודל של המהירות עצמה). הניחו שאי הודאות במדידת המיקום היא בסדר גודל של הגובה הנמדד.

(9) פונקציית גל נתונה

נתונה פונקציית הגל הבאה: $\psi(x) = b^{-\frac{1}{2}} \left| \frac{x}{b} \right|^{\frac{1}{2}} e^{-(x/b)^2/2}$, כאשר $nmb = 0.5$.
 א. בדקו כי פונקציית הגל מנורמלת.
 ב. מהו המיקום המסתבר ביותר בו נמצא החלקיק בתחום $x > 0$?
 ג. מה ההסתברות למצא את החלקיק בין $x = 0$ ל- $x = 0.50 \text{ nm}$?

(10) נויטרונים בניסוי שני סדקים

עורכים את ניסוי שני הסדקים עם נויטרונים בעלי אנרגיה של 0.0040 eV . המרחק בין הסדקים הוא $d = 0.70 \text{ mm}$ והמרחק למסך הוא $L = 1.0 \text{ m}$. מהו המרחק מהמרכז בו תופיע ההתאבכות הראשונה? $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.



תשובות סופיות:

- (1) א. חומר: פונקציה סקלרית, מתארת הסתברות וללא תווך.
מיתר: פונקציה סקלרית, מתארת תנודה, דרוש תווך.
ב. א"מ: פונקציה וקטורית, מתארת הסתברות ואת האמפליטודה של השדה החשמלי והמגנטי, ללא תווך.
- (2) ראו סרטון.
- (3) לא.
- (4) בתורה של ניוטון ניתן לחשב את המיקום והתנע באופן מדויק בו זמנית, כתוצאה מכך ניתן תיאורטית לצפות בדיוק את ההתנהגות של מערכת בעתיד. לפי תורת הקוונטים יש אי ודואות במדידות ולכן ניתן לצפות רק הסתברויות להתנהגות המערכת בעתיד.
- (5) לא.
- (6) מימן.
- (7) $1.3 \cdot 10^{-25} \text{ sec}$
- (8) .70
- (9) א. הוכחה. ב. 0.35 nm . ג. 63% .
- (10) $6.5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$

פיסיקה 3

פרק 7 - תורת הקוונטים חלק 2

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגילים 104

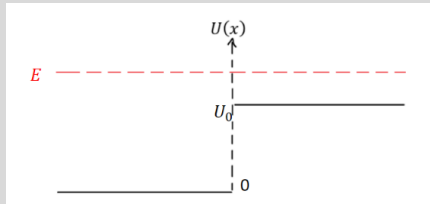
מהירות הפאזה, יחס דיספרסיה ומהירות החבורה

סיכום כללי

שם	נוסחה	הערות
מהירות הפאזה	$v_{ph} = \frac{\omega}{k}$	המהירות של אורך גל מסוים
מהירות החבורה	$v_g = \frac{d\omega}{dk}$	מהירות של כל הפונקציה או סכום כל הגלים (חבילת הגלים)
יחס הדיספרסיה	הקשר בין ω ל- k	

פיזור

סיכום כללי

הערות	נוסחה	שם
ההסתברות שהחלקיק יעבור את המחסום במקרה שבו k_2 בתחום אליו החלקיק עובר שונה מ- k_1 בתחום ממנו החלקיק הגיע $T = \frac{ C ^2 k_2}{ A ^2 k_1}$	$T = \frac{ C ^2}{ A ^2}$	מקדם ההעברה
ההסתברות שהחלקיק יוחזר מהמחסום	$R = \frac{ B ^2}{ A ^2}$	מקדם החזרה
$T = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} ; R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2$	עבור מדרגת פוטנציאל וכאשר $E > U_0$	

- כאשר $E < U(\pm\infty)$ נקבל מצבים קשורים, החלקיק "כלוא" ורמות האנרגיה בדידות.
- כאשר $E > U(\pm\infty)$ נקבל פיזור, החלקיק יגיע לאינסוף ורמות האנרגיה רציפות.

שאלות

(1) פיזור מפוטנציאל מלבני

חלקיק חופשי בעל מסה m נע משמאל לימין ונתקל בפוטנציאל מלבני בגובה U_0 וברוחב L המתחיל ב- $x = 0$. אנרגיית החלקיק היא E וקטנה מ- U_0 . א. הראו כי הפתרון הכללי לפונקציית הגל הוא מצורה:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x < 0 \\ Ce^{\alpha x} + De^{-\alpha x} & 0 < x < L \\ Fe^{ikx} & L < x \end{cases}$$

$$\text{כאשר: } k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \text{ ו- } \alpha = \frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}$$

ב. רשמו את תנאי השפה והראו כי הקשר בין הקבועים נתון לפי המשוואות:

$$A + B = C + D$$

$$ik(A - B) = \alpha(C - D)$$

$$Ce^{\alpha L} + De^{-\alpha L} = Fe^{ikL}$$

$$\alpha(Ce^{\alpha L} - De^{-\alpha L}) = ikFe^{ikL}$$

ג. פתרו את המשוואות (רצוי באמצעות מחשב) והראו כי:

$$T = \left| \frac{F}{A} \right|^2 = \frac{1}{\cosh^2(\alpha L) + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \sinh^2(\alpha L)}$$

$$\text{כאשר: } \gamma = \frac{\alpha}{k} - \frac{k}{\alpha}$$

ד. הראו כי במקרה של $e^{-\alpha L} \ll 1$ מקדם ההעברה הוא בקירוב:

$$T \approx 16 \frac{E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0}\right) e^{-2\alpha L}$$

ה. כעת הניחו ש- $E > U_0$, מצאו את מקדם ההעברה במקרה זה. הדרכה: חזרו על השלבים שבסעיפים א - ג עבור מקרה זה.

$$\text{רמז: } \cosh(ik) = \cos(k) \text{ ו- } \sinh(ik) = i \sin(k)$$

(2) חלקיק עובר מעל בור פוטנציאל סופי

$$U(x) = \begin{cases} U_0 & x < 0 \\ 0 & 0 < x < L \\ U_0 & L < x \end{cases}$$

חלקיק בעל מסה m נע משמאל בהשפעת הפוטנציאל: $0 < x < L$

כאשר אנרגיית החלקיק E נתונה וגדולה מ- U_0 .

א. מצאו את מקדם ההעברה.

ב. עבור אילו מצבים הבור "שקוף" לתנועת החלקיק? האם המצבים מוכרים לכם?

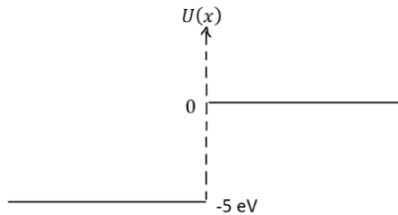
(3) מקדם החזרה בפגיעת אלקטרון בשפת מתכת

במקרה של פליטת אלקטרונים ממתכת, חלק מהאלקטרונים עם אנרגיה מספיקה ליציאה מהמתכת עדיין יכולים להיות מוחזרים משפת המתכת. במודל חד מימדי נניח כי פוטנציאל האלקטרון בתוך המתכת ($x < 0$) שווה ל- -5eV והפוטנציאל הוא אפס מחוץ למתכת ($x > 0$).

מהו מקדם החזרה של האלקטרון משפת המתכת אם אנרגיית האלקטרון היא

א. 90eV

ב. 0.4eV



תשובות סופיות

(1) א-ד. שאלות הוכחה. ה. $T = \left| \frac{F}{A} \right|^2 = \frac{1}{\cos^2(k_2L) + \left(\frac{\tilde{\gamma}}{2}\right)^2 \sin^2(k_2L)}$

כאשר: $\tilde{\gamma} = \frac{k_2}{k} + \frac{k}{k_2}$ ו- $k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - v_0)}}{\hbar}$

(2) א. $T = \frac{1}{\cos^2(k_2L) + \left(\frac{\tilde{\gamma}}{2}\right)^2 \sin^2(k_2L)}$ כאשר: $\tilde{\gamma} = \frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1}$ ו- $k_2 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

ב. $E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ כן.

(3) א. $1.83 \cdot 10^{-4}$ ב. 0.328

פונקציית דלתא של דיראק

סיכום כללי

הגדרת הפונקציה:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

או

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

או

$$\delta_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-x^2/a^2}$$

כאשר a הולך לאפס.

תכונה:

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a) dx = f(a)$$

פיזור מפונקציית דלתא:

עבור:

$$V(x) = -a\delta(x)$$

כאשר $E < 0$:

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{am}}{\hbar} e^{-\frac{am}{\hbar^2}|x|}$$

$$E = -\frac{a^2 m}{2\hbar^2}$$

מקבלים מצב אחד בלבד, לא משנה מה הערך של a (גודל הבור).

כאשר $E > 0$ וחלקיק שמגיע משמאל:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x < 0 \\ Ce^{ikx} & x > 0 \end{cases}$$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \frac{\beta^2}{1 + \beta^2}$$

$$T = \left| \frac{C}{A} \right|^2 = \frac{1}{1 + \beta^2}$$

$$\beta = \frac{am}{\hbar^2 k}$$

עבור :

$$V(x) = +a\delta(x)$$

E חייב להיות גדול מאפס והפתרון זהה לפתרון במקרה של הפוטנציאל השלילי כאשר $E > 0$.

שאלות

1) פוטנציאל דלתא בתוך בור אינסופי**

אלקטרון נמצא בבור פוטנציאל ברמה השנייה. הבור הוא אינסופי אך במרכז יש פוטנציאל דלתא, כלומר :

$$V(x) = \infty, |x| > \frac{l}{2}$$

$$V(x) = a\delta(x), |x| < l/2$$

א. מצאו את הפתרונות עבור משוואת שרדינגר הבלתי תלויה בזמן. הפרידו בין הפתרונות הסימטריים לאנטי סימטריים ומצאו את האנרגיות המתאימות לכל פתרון. עבור הפתרונות הסימטריים הראו רק כי המשוואה ממנה ניתן לקבל את רמות האנרגיה היא מהצורה: $\tan\left(k\frac{l}{2}\right) = -\frac{\hbar^2 k}{am}$. בשני המקרים אין צורך לנרמל את הפתרונות.

ב. דונו במקרה ש- $a \ll \frac{\hbar^2}{ml}$ ובמקרה ש- $a \gg \frac{\hbar^2}{ml}$.

ג. האלקטרון יורד לרמת היסוד ופולט פוטון, מהי האנרגיה של הפוטון הנפלט ב- eV אם: $a = 2 \cdot 10^{-27} j \cdot m$ ו- $l = 2.7nm$.

(2) קרן אלקטרוניים עוברת שתי דלתות

קרן אלקטרוניים מפוזרת על ידי מחסום פוטנציאל המורכב שתי פונקציות דלתא זהות במרחק l . כלומר: $V(x) = a\delta(x) + a\delta(x - l)$. חשבו בקירוב את האנרגיה הכי נמוכה של אלקטרון עברה אין החזרה של הקרן (כל האלקטרוניים עוברים דרך המחסום).

$$a = 1.9 \cdot 10^{-27} \text{ j} \cdot \text{m}, l = 4.2 \text{ nm}$$

(3) קרן עוברת דרך שתי דלתות ומדרגה

קרן אלקטרוניים מגיעה משמאל לפוטנציאל הבא:

$$V(x) = U(x) + a\delta(x) + a\delta(x - l)$$

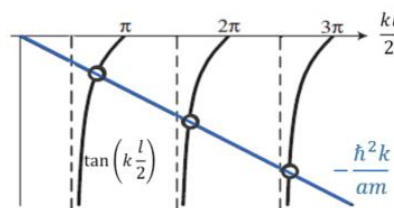
$$U(x) = \begin{cases} U_0 & 0 < x < l \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

מצאו את רמת האנרגיה הרביעית עברה אין החזרה של הקרן, יש להשתמש בפתרון גרפי ולבטא ב- eV .

$$a = 0.63 \cdot 10^{-28} \text{ j} \cdot \text{m}, U_0 = 4.7 \text{ eV}, l = 0.2 \text{ nm}$$

תשובות סופיות

(1) א. פתרון גרפי למצבים הסימטריים:



האנרגיות של המצבים האנטי סימטריים: $n = 2, 4, 6, \dots$ $E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2$

ב. האנרגיות של הפונקציות האנטי סימטריות לא מושפעות מ- a עבור $a \ll \frac{\hbar^2}{ml}$ האנרגיות של הפונקציות הסימטריות שואפות לאנרגיות שלהם בבור אינסופי

(ללא דלתא). עבור $a \gg \frac{\hbar^2}{ml}$ האנרגיות של הפונקציות הסימטריות שואפות

לאנרגיות של בור אינסופי **ברוחב** $\frac{l}{2}$. ג. 0.3 eV

(2) 0.02 eV

(3) 125 eV

פוטנציאלים תלת מימדים

סיכום כללי

פונקציית הגל והאנרגיות של תיבה תלת מימדית:

$$\psi(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{c} z\right)$$

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2} \right)$$

אוסילטור הרמוני תלת מימדי:

$$v(x, y, z) = \frac{1}{2} k_x x^2 + \frac{1}{2} k_y y^2 + \frac{1}{2} k_z z^2$$

האנרגיה של אוסילטור תלת מימדי:

$$E = \left(n_x - \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_x + \left(n_y - \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_y + \left(n_z - \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_z$$

ניוון - כאשר לכמה מצבים (פונקציות גל) שונים יש את אותה האנרגיה. אי אפשר לדעת את המצב של החלקיק מהאנרגיה בלבד.

ניוון היא תופעה שלא מתרחשת במימד אחד

דרגת הניוון מוגדרת לפי מספר המצבים הקוונטים שיש לאנרגיה.

שאלות

(1) אוסילטור ב-Z בור ב-X ו-Y

חלקיק בעל מסה m נמצא תחת הפוטנציאל הבא:

$$V(x, y, z) = V_1(x) + V_2(y) + V_3(z)$$

כאשר:

$$V_1(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2, \quad V_2(y) = \begin{cases} 0, & 0 < y < a \\ \infty, & \text{otherwise} \end{cases}, \quad V_3(z) = \begin{cases} 0, & 0 < z < b \\ \infty, & \text{otherwise} \end{cases}$$

כמו כן נתון כי:

$$\hbar \omega = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

$$b = 2a$$

- א. מהי האנרגיה של הרמה המעורערת החמישית?
- ב. מהי דרגת הניוון של רמה זו?
- ג. מהי פונקציית הגל של חלקיק שנמצא ברמת אנרגיה זו?

תשובות סופיות

(1) א. $E = 2.75 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$ רמה 5. ב. 2

ג.
$$\psi(x, y, z) = \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) e^{-\frac{z^2 \pi^2 \hbar}{4L^2}} \left[\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2L}y\right) \left(1 - \left(\frac{\pi z}{L}\right)^2\right) + \beta \sin\left(\frac{3\pi}{2L}y\right) \right]$$

פונקציית הגל כתלות בזמן

סיכום כללי

ניתן לקבל את פונקציית הגל הכללית, הפותרת את משוואת שרדינגר התלויה בזמן על ידי קומבינציה לינארית של פונקציות הגל המתקבלות במצבים עמידים (מתוך פתרון משוואת שרדינגר הבלתי תלוי בזמן).

$$\Psi(x, t) = \sum_n \alpha_n \psi_n(x) e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}$$

כאשר - הן פתרונות המצבים העמידים ו - היא האנרגיה של כל מצב.

את המקדמים ניתן למצוא לפי (בהנחה שהפונקציות שמתקבלות מהמצב העמיד הן אורתונורמליות).

$$\alpha_n = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) \Psi(x, 0) dx$$

ו - $|\alpha_n|^2$ הן ההסתברות להיות במצב מסוים.

יוצא גם שאם $\Psi(x, 0)$ מנורמלת אז $\Psi(x, t)$ מנורמלת לכל t .

שאלות

(1) רשמו פונקציית גל

חלקיק בעל מסה m נמצא תחת פוטנציאל מהצורה $\frac{1}{2}kx^2$.
 ב- $t = 0$ לחלקי הסתברות של 75% להיות במצב ייסוד ו- 25% להיות במצב המעורר הראשון. רשמו את פונקציית הגל של החלקיק כתלות בזמן. פונקציות הגל של מצב היסוד והמצב המעורר הראשון הן:

$$\psi_1(x) = (\pi b^2)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$$

$$\psi_2(x) = (\pi b^2)^{-\frac{1}{4}} \frac{x}{b} e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$$

$$b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

כאשר ω והאנרגיות הן:

$$E_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

(2) מסת חלקיק מפונקציית הגל

נתונה פונקציית גל (חד מימדית) של חלקיק חופשי

$$\Psi(x, t) = A e^{i\left(\frac{x}{L} - \frac{t}{\tau}\right)}$$

כאשר L , A , τ קבועים חיוביים נתונים. מהי מסת החלקיק?

תשובות סופיות

$$\psi(x, t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \psi_1(x) e^{-i\frac{1}{2}\omega t} + \frac{1}{2} \psi_2(x) e^{-i\frac{3}{2}\omega t} \quad (1)$$

$$m = \frac{\hbar \tau}{2L^2} \quad (2)$$

אופרטורים

סיכום כללי

אופרטור - לכל גודל פיזיקאלי ניתן לשייך אופרטור. כאשר שמים את האופרטור בין ψ ל- ψ^* ועושים אינטגרל על כל המרחב (סנוויץ) הוא נותן את ערך התוחלת של הגודל הפיזיקאלי אליו הוא שייך.

$$\langle Q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{Q} \psi dx$$

אופרטור המיקום: $\hat{x} = x$

אופרטור התנע במימד אחד: $\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$

כל אופרטור אחר יהיה פונקציה של אופרטור המיקום והתנע:

$$Q(x, p, t) \rightarrow \hat{Q}\left(x, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} t\right)$$

כאשר מכפילים אופרטור בפונקציה אומרים שהאופרטור "פועל" על הפונקציה. אם $\hat{Q}\psi = \lambda\psi$, אז ψ היא פונקציה עצמית של האופרטור ו- λ הוא ערך עצמי (ע"ע) של האופרטור.

הפונקציות העצמיות של אופרטור התנע הן: $\psi(x) = Ae^{ikx}$ והערכים העצמיים הם: $\hbar k$.

הפונקציות העצמיות של אופרטור המיקום הן: $\delta(x - a)$ והערכים העצמיים הם a (המיקום עצמו).

אופרטור ההמילטוניאן (מודד את האנרגיה):

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

אפשר לכתוב את משוואת שרידנגר הבלתי תלויה בזמן באמצעות ההמילטוניאן. הפונקציות העצמיות של ההמילטוניאן הן הפתרונות של משוואת שרידנגר הבלתי תלויה בזמן והאנרגיות הן הערכים העצמיים של ההמילטוניאן.

שאלות

1) המילטוניאן ומדידת אנרגיה בבור פוטנציאל

חלקיק בעל מסה m נמצא בבור פוטנציאל ברוחב $0 < x < l$.
 א. מצאו את המצבים העצמיים ואת הערכים העצמיים של ההמילטוניאן.
 כעת נניח כי פונקציית הגל של החלקיק ברגע מסוים היא:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{3}}\psi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{3}}\psi_2(x)$$

כאשר $\psi_1(x)$ ו- $\psi_2(x)$ הן פונקציות הגל של האנרגיות E_1 ו- E_2 בבור בהתאמה.
 ב. האם פונקציה זו היא פונקציה עצמית של ההמילטוניאן?
 ג. מהי האנרגיה הממוצעת של החלקיק במצב הנ"ל?
 האם ניתן למצא את החלקיק באנרגיה זו?

2) חלקיק בצד ימין של בור פוטנציאל

חלקיק בעל מסה m נמצא בבור פוטנציאל אינסופי ברוחב l .
 נתון כי בזמן $t = 0$ לחלקיק הסתברות שווה להיות בחצי הימני של הבור.
 א. מהי פונקציית הגל של החלקיק ב- $t = 0$?
 ב. מצאו את פונקציית הגל של החלקיק כתלות בזמן.
 שערו ללא חישוב האם החלקיק יישאר בחצי הימני של הבור?
 ג. מהי ההסתברות שהחלקיק יהיה במצב היסוד ב- $t = 2 \text{ sec}$?
 ד. ב- $t = 3 \text{ sec}$ נעשתה מדידה והתגלה שהחלקיק אכן במצב היסוד.
 מהי פונקציית הגל של החלקיק מרגע זה והילך, ניתן לקבוע רגע זה
 כ- $t = 0$ חדש.
 ה. מהו ערך התוחלת של התנע של החלקיק מסעיף ד'?

3) מוסיפים פאזות למקדמים

חלקיק נמצא בבור פוטנציאל אינסופי ברוחב l .
 א. מצאו את ההסתברות כתלות בזמן של החלקיק להיות בחצי השמאלי של הבור אם ידוע שהוא נמצא במצב עמיד כלשהו (או מצב עצמי של ההמילטוניאן).
 כעת נתון שפונקציית הגל של החלקיק היא:

$$\Psi(x, t) = c_1\psi_1(x)e^{-i\frac{E_1t}{\hbar}} + c_2\psi_2(x)e^{-i\frac{E_2t}{\hbar}}$$
 כאשר $c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ψ_1 ו- ψ_2 הן פונקציות הגל של מצב היסוד והמצב המעורר הראשון בבור, ו- E_1, E_2 הן האנרגיות של אותם מצבים.
 ב. הראו כי $\Psi(x, t)$ מנורמלת.
 ג. מהי ההסתברות למצא את החלקיק בחצי השמאלי של הבור כתלות בזמן?
 ד. חזרו על סעיף ג כאשר $c_1 = \frac{e^{i\varphi_1}}{\sqrt{2}}$, $c_2 = \frac{e^{i\varphi_2}}{\sqrt{2}}$.

(4) אופרטור האנרגיה הקינטית

אופרטור האנרגיה הקינטית הוא :

$$\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$$

הראו כי הפונקציות העצמיות של אופרטור התנע $\phi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ikx}$ הן גם פונקציות עצמיות של אופרטור האנרגיה הקינטית ומצאו את הערכים העצמיים של אופרטור זה.

תשובות סופיות

$$\langle E \rangle = \frac{\pi^2 \hbar^2}{ml^2}, \text{ ג. לא, } \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2 \text{ א. לא. ב. לא. } \quad (1)$$

$$\psi(x, t) = \sum \alpha_n \psi_n(x) e^{\frac{iE_n t}{\hbar}}$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$$

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2$$

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi n} \left[\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - (-1)^n \right]$$

$$\psi(x, t=0) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \frac{l}{2} \\ \sqrt{\frac{2}{l}} & \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases} \text{ א. ב. } \quad (2)$$

לא יישאר,

$$\psi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right) e^{\frac{iE_1 t}{\hbar}}, E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} \text{ ד. } \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \text{ ג. אפס. ה. } \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} + \cos\left(\frac{E_2 - E_1}{\hbar} t\right) \frac{4}{3\pi} \text{ ג. ב. הוכחה. } 0.5 \text{ א. } \quad (3)$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1, P\left(0 \leq x \leq \frac{l}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{4}{3\pi} \cos\left(\frac{E_2 - E_1}{\hbar} t - \Delta\varphi\right) \text{ ד.}$$

$$\lambda = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (4)$$

אופרטורים הרמיטיים

סיכום כללי

גודל פיזיקאלי מדיד חייב להיות מספר ממשי .
 כל הגדלים הפיזיקאלי מיוצגים ע"י אופרטורים הרמיטיים.

הגדרה :

$$(\hat{A}\psi)^* = \psi^* \hat{A}$$

לכל הפונקציות במרחב.

או :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \hat{A} \psi_2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{A} \psi_1)^* \psi_2 dx$$

תכונות של אופרטור הרמיטי :

1. ערך התוחלת של אופרטור הרמיטי תמיד ממשי.
2. הערכים העצמיים של אופרטור הרמיטי תמיד ממשיים.
3. הפונקציות העצמיות של אופרטור הרמיטי הן אורתוגונליות.
4. הפונקציות העצמיות של אופרטור הרמיטי מהוות סט שלם.*

* אם ניתן לתאר את כל הפונקציות במרחב באמצעות קומבינציה לינארית של סט מסוים של פונקציות אז אותו סט נקרא סט שלם.

הפירוש הסטטיסטי המוכלל והסבר מסכם על צורת העבודה בתורת הקוונטים

סיכום כללי

הפונקציות העצמיות של אופרטור הרמיטי מהוות סט שלם של פונקציות (או בסיס). אפשר לכתוב כל פונקציית גל כקומבינציה לינארית של הבסיס העצמי של כל אופרטור.

כלומר, אם ϕ_n ו- λ_n הן הפונקציות העצמיות והערכים העצמיים של האופרטור \hat{A}

אז אפשר לרשום כל פונקציית גל בצורה: $\omega(x, t) = \sum \alpha_n \phi_n$.

$|\alpha_n|^2$ זה ההסתברות להיות במצב ϕ_n או ההסתברות למדוד את הערך λ_n .

הערכים המדידים היחידים של גודל מסוים הם הערכים העצמיים של האופרטור השייך לאותו גודל.

בשביל למצא את α_n :

$$\alpha_n = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^* \Psi(x, t) dx$$

במקרה הרציף:

$$\lambda_n = \lambda(k)$$

$$\phi_n \rightarrow \phi(k)$$

$$\sum \alpha_n \phi_n \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(k, t) \phi(k) dk$$

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(k, t) \phi(k) dk$$

$$|\alpha_n|^2 \rightarrow |\alpha(k, t)|^2 dk$$

שאלות

(1) פונקציה משולשת

נתון חלקיק בבור פוטנציאל אינסופי ברוחב L . כזכור, המצבים העצמיים עבור

בור שכזה נתונים ע"י הפונקציות: $\phi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ והאנרגיות העצמיות

הן: $E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2$. נתון שפונקציית הגל ההתחלתית בה הוכנה המערכת היא

$$\psi(x,0) = \begin{cases} \frac{A}{L}x & \text{for } 0 < x < \frac{L}{2} \\ A\left(1 - \frac{x}{L}\right) & \text{for } \frac{L}{2} < x < L \end{cases} \quad \text{פונקציה משולשת מהצורה:}$$

א. מצאוי את A .

ב. מהי ההסתברות שבמידת אנרגיית החלקיק ימדדו הערכים: E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 ?

ג. חשבו את ערך התוחלת של אנרגיית החלקיק $\langle E \rangle$.

$$\cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{ייתכן ותזדקקי לטור הבא:}$$

(2) פונקציית גאוסיאן ומעבר לתדר

פונקציית הגל (מנורמלת) של חלקיק חופשי ב- $t=0$ נתונה לפי:

$$\Psi(x, t=0) = (2\pi a^2)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2}}$$

א. מצאו את פונקציית הגל של החלקיק במרחב התדר: $\Psi(k, t=0)$.

ב. מצאו את אי הודאות של מספר הגל של החלקיק Δk .

השתמשו ב:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2-bx-c} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ax^2} dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4a^3}}$$

תשובות סופיות

$$A = \sqrt{\frac{12}{11L}} \quad \text{א. (1)}$$

$$P(E_1) = 0.09 \quad , \quad P(E_3) = 1.1 \cdot 10^{-3} \quad , \quad P(E_5) = 1.4 \cdot 10^{-4} \quad , \quad P(E_2) = P(E_4) = 0 \quad \text{ב.}$$

$$\langle E \rangle = \frac{6\hbar^2}{11mL^2} \quad \text{ג.}$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2a^2}} \quad \text{ב.} \quad \sqrt{2} (2\pi\varphi^2)^{\frac{1}{4}} e^{-ikx_0} e^{-a^2k^2} \quad \text{א. (2)}$$

יחס החילוף

סיכום כללי

יחס החילוף (או הקומוטטור) מוגדר להיות:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

יחס החילוף הוא אופרטור בפני עצמו. אם סדר הפעולה של האופרטורים לא משנה אז יחס החילוף שלהם שווה לאפס ואם הסדר כן משנה אז הפעלה של יחס החילוף תיתן ערך מורכב כלשהו לאופרטורים שיחס החילוף שלהם מתאפס אנחנו קוראים חילופיים. יחס החילוף של המיקום עם התנע:

$$\langle [\hat{x}, \hat{p}_x] \rangle = i\hbar$$

אם האופרטורים \hat{A} ו- \hat{B} מתחלפים אז קיים סט של פונקציות עצמיות משותפות לשניהם ולהפך (אם הם לא מתחלפים אז לא ניתן למצא סט של פונקציות עצמיות משותפות).

אם שני אופרטורים מתחלפים אז ניתן למדוד את שניהם בו זמנית בדיוק אינסופי. אם הם לא מתחלפים אז ניתן לרשום את יחס אי הודאות בניהם לפי:

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|$$

שאלות

1 פירוק יחס חילוף מורכב

א. הראו כי: $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$

ב. הראו כי: $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}$

ג. מצאו את $[\hat{x}, \hat{p}^2]$ ובדקו האם אופרטור המיקום מתחלף עם ההמילטוניאן של חלקיק חופשי במימד אחד.

2 הוכחת זהות

הוכיחו כי: $[\hat{A} + \hat{B}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{B}, \hat{C}]$.

תשובות סופיות

1 א-ב. הוכחה. ג. $2i\hbar\hat{p}$, לא מתחלף.

2 הוכחה.

משפט ארנפס

סיכום כללי

$$\frac{d}{dt}\langle Q \rangle = \frac{i}{\hbar}\langle [\hat{H}, \hat{Q}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \right\rangle$$

אם אופרטור מתחלף עם ההמילטוניאן אז ערך התוחלת של הגודל הפיזיקאלי קבוע בזמן.

שאלות

1) הקשרים הקלאסיים

- א. הראו באמצעות משפט ארנפסט כי: $\langle p \rangle = \frac{d}{dt}\langle x \rangle$.
- ב. הראו כי: $[\hat{p}, U(\hat{x})] = -i\hbar \frac{\partial U}{\partial x}$.
- ג. הראו באמצעות משפט ארנפסט כי: $\frac{d}{dt}\langle p \rangle = -\left\langle \frac{\partial U}{\partial x} \right\rangle$.

תשובות סופיות

1) הוכחה.

תרגילים נוספים

שאלות

(1) התפתחות בזמן בבור אינסופי

נתון חלקיק בעל מסה m אשר כלוא בבור פוטנציאל אינסופי חד-מימדי בעל

אורך L אשר מרכזו ב- $x = \frac{L}{2}$. פונקציית הגל של החלקיק ברגע $t = 0$ הינה

סופרפוזיציה של שני מצבים עצמיים של בור פוטנציאל אינסופי:

$$\psi(x, t=0) = A[\phi_1(x) + \phi_2(x)]$$

כאשר ϕ_1 הוא מצב היסוד (בעל אנרגיה E_1) ו- ϕ_2 הוא המצב המעורר הראשון

(בעל אנרגיה E_2).

שני המצבים בעלי הסתברות זהה.

א. מצאו את הנרמול של פונקציית הגל.

ב. מצאו את $\psi(x, t)$. ודאו כי $\psi(x, t)$ מקיימת את משוואת שרדינגר.

ג. מצאו את $|\psi(x, t)|^2$, בטאו את פונקציית צפיפות ההסתברות כפונקציה סינוסואידלית בזמן.

ד. חשבו את ערך התצפית של המקום. שימו לב כי ערך התצפית עושה אוסילציות בזמן. מהי תדירות האוסילציות?

ה. חשבו את ערך התצפית של התנע לפי הגדרה. הראו כי מתקיים:

$$\left(\langle p \rangle = m \frac{d}{dt} (\langle x \rangle) \right)$$

ו. חשבו את ערך התצפית של האנרגיה של החלקיק לפי הגדרה.

הסבירו את תשובתכם.

ז. הניחו כי אי הודאות באנרגיה היא: $\Delta E = (E_2 - E_1)$ והשתמשו בעיקרון

אי הודאות של הייזנברג על מנת למצוא את Δt .

השוו לזמן המחזור של האוסילציות שמצאתם בסעיף ד' והסבירו.

תשובות סופיות

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\phi_1 e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}} + \phi_2 e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}} \right) \quad \text{ב.} \quad A = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$|\psi(x, t)|^2 = \frac{1}{2} \left(|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + 2\phi_1 + \phi_2 \cos\left(\frac{E_2 - E_1}{\hbar} t\right) \right) \quad \text{ג.}$$

$$\langle P \rangle = \frac{8\hbar}{3L} \sin\left(\frac{E_2 - E_1}{\hbar} t\right) \quad \text{ה.} \quad \langle x \rangle: \frac{L}{2} - \frac{16}{9} \frac{L}{\pi^2} \cos\left(\frac{E_2 - E_1}{\hbar} t\right) \quad \text{ד.}$$

$$\omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} = 2\pi F$$

ג. $\langle E \rangle = \frac{1}{2} E_1 + \frac{1}{2} E_2$, חישוב התוחלת של האנרגיה הוא ההסתברות להיות בכל

מצב עצמי של האנרגיה כפול האנרגיה של המצב.

$$\Delta t \approx \frac{\hbar}{2(E_2 - E_1)} \quad \text{ו.}$$

פיסיקה 3

פרק 8 - המודל הקוונטי לאטום המימן ספין והטבלה המחזורית

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגולים 126

פתרון עבור אטום המימן ותנע זוויתי קוונטי:

סיכום כללי:

משוואת שרדינגר לפוטנציאל התלוי רק ב- r :

משוואה ל- $\theta(\theta)$:

$$\frac{1}{\theta(\theta)} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \theta(\theta)}{\partial \theta} \right) + l(l+1) \sin^2 \theta = m^2$$

משוואה ל- $\phi(\phi)$:

$$\frac{\partial^2 \phi(\phi)}{\partial \phi^2} = -m^2 \phi(\phi)$$

פתרון לחלק הזוויתי:

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \theta(\theta)\phi(\phi) = \varepsilon \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$$

$$\varepsilon = \begin{cases} (-1)^m & m > 0 \\ 1 & m \geq 0 \end{cases}$$

$l \geq 0$ ו- $|m| \leq l$ שלם.

$$P_l^m(x) \equiv (1-x^2)^{|m|/2} \left(\frac{d}{dx} \right)^{|m|} P_l(x)$$

$$P_l(x) \equiv \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^l (x^2-1)^l$$

$$Y_0^0 = \left(\frac{1}{4\pi} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$Y_2^{\pm 2} = \left(\frac{15}{32\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}$$

$$Y_1^0 = \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \theta$$

$$Y_3^0 = \left(\frac{7}{16\pi} \right)^{\frac{1}{2}} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$$

$$Y_1^{\pm 1} = \mp \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \theta e^{\pm i\phi}$$

$$Y_3^{\pm 1}$$

$$= \mp \left(\frac{21}{64\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) e^{\pm i\phi}$$

$$Y_2^0 = \left(\frac{5}{16\pi} \right)^{\frac{1}{2}} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$Y_3^{\pm 2} = \left(\frac{105}{32\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \sin^2 \theta \cos \theta e^{\pm 2i\phi}$$

$$Y_2^{\pm 1} = \mp \left(\frac{15}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi} \quad Y_3^{\pm 3} = \mp \left(\frac{35}{64\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin^3 \theta e^{\pm 3i\phi}$$

$$\begin{aligned} P_1^1 &= \sin \theta & P_3^3 &= 15 \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) \\ P_1^0 &= \cos \theta & P_3^2 &= 15 \sin^2 \theta \cos \theta \\ P_2^2 &= 3 \sin^2 \theta & P_3^1 &= \frac{3}{2} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) \\ P_2^1 &= 3 \sin \theta \cos \theta & P_3^0 &= \frac{1}{2} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \\ P_2^0 &= \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) \end{aligned}$$

אורתוגונליות:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi [Y_l^m(\theta, \varphi)]^* [Y_l^{m'}(\theta, \varphi)] \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

המשוואה לחלק הרדיאלי:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} (V(r) - E) &= l(l+1) \\ R(r) &= \frac{u(r)}{r} \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u(r) &= Eu(r) \end{aligned}$$

פתרון עבור אטום המימן:

מתוך פתרון המשוואה תנאי שמקוונטט את האנרגיה:

$$\begin{aligned} E_n &= -\frac{mk^2 e^4}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{E_1}{n^2} \\ E_1 &= -\frac{mk^2 e^4}{2\hbar^2} = -13.6 \text{ eV} \\ n &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

הפתרון לפונקציה תלוי בקבועים n ו- l :

$$R_{nl}(r) = \sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n-l)!]^3}} e^{-\frac{r}{na}} \left(\frac{2r}{na}\right)^l L_{n-l-1}^{2l+1} \left(\frac{2r}{na}\right)$$

רדיוס בוהר:

$$a = \frac{\hbar^2}{kme^2} = 0.529 \cdot 10^{-10} m$$

$$L_{q-p}^p(x) \equiv (-1)^p \left(\frac{d}{dx}\right)^p L_q(x)$$

$$L_q(x) \equiv e^x \left(\frac{d}{dx}\right)^q (e^{-x} x^q)$$

$$R_{10} = 2a^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

$$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{r}{2a}\right)$$

$$R_{21} = \frac{1}{\sqrt{24}} a^{-\frac{3}{2}} \frac{r}{a} \exp\left(-\frac{r}{2a}\right)$$

$$R_{30} = \frac{2}{\sqrt{27}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r}{a} + \frac{2}{27} \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \exp\left(-\frac{r}{3a}\right)$$

$$R_{31} = \frac{8}{27\sqrt{6}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{6} \frac{r}{a}\right) \left(\frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{r}{3a}\right)$$

$$R_{32} = \frac{4}{81\sqrt{30}} a^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{r}{3a}\right)$$

$$R_{40} = \frac{1}{4} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{r}{a} + \frac{1}{8} \left(\frac{r}{a}\right)^2 - \frac{1}{192} \left(\frac{r}{a}\right)^3\right) \exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$

$$R_{41} = \frac{\sqrt{5}}{16\sqrt{3}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{r}{a} + \frac{1}{80} \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \frac{r}{a} \exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$

$$R_{42} = \frac{1}{64\sqrt{5}} a^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{12} \frac{r}{a}\right) \left(\frac{r}{a}\right)^2 \exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$

$$R_{43} = \frac{1}{768\sqrt{35}} a^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{r}{a}\right)^3 \exp\left(-\frac{r}{4a}\right)$$

פתרון כללי:

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \varphi)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$0 \leq l \leq n - 1$$

 l שלם ומקיים:

$$-l \leq m \leq l$$

 m שלם ומקיים:

אורתוגונליות:

$$\int \psi_{nlm}^* \psi_{n'l'm'} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

פונקציית ההסתברות הרדיאלית (צפיפות ההסתברות למצא את האלקטרון במרחק r מהגרעין):

$$P_{nl}(r) = |R_{nl}|^2 r^2$$

תנע זוויתי:

התנע הזוויתי הוא: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = (L_x, L_y, L_z)$
נגדיר אופרטורים: $\hat{L}^2, \hat{L}_z, \hat{L}_x, \hat{L}_y$

$$\hat{L}^2 Y_l^m = l(l+1)\hbar^2 Y_l^m$$

$$|L| = \sqrt{l(l+1)}\hbar$$

גודל התנע יכול להיות גם אפס וזה בניגוד למודל של בוהר.

את הכיוון נתאר באמצעות הגודל של L_z , משם אפשר למצא את $\cos \theta = \frac{L_z}{|L|}$

$$\hat{L}_z Y_l^m = m\hbar Y_l^m$$

גם הכיוון של וקטור התנע הזוויתי מקוונטט!

רמות אנרגיה ניוון וספקטרום הפליטה:

צפיפות המצבים: $g(n) = 2n^2$ (ה-2 מגיע מהספין).

כללי מעבר (Selection Rules):

$$n_i > n_f \quad .1$$

$$\Delta l = l_f - l_i = \pm 1 \quad .2$$

$$\Delta m = m_f - m_i = 0, \pm 1 \quad .3$$

שאלות:

(1) הסתברות להיות רחוק מרדיוס בוהר

- א. חשבו את ההסתברות של אלקטרון במצב היסוד באטום מימן, להימצא במרחק שגדול מרדיוס בוהר מהגרעין.
 ב. מצאו את הרדיוס הממוצע בו נמצא האלקטרון במצב היסוד.

(2) כוח ממוצע

פונקציית הגל של המצב: $n = 2, l = 1, m = 0$ היא: $\psi_{210} = \frac{r \cdot \cos \theta}{\sqrt{32\pi a^5}} e^{-\frac{r}{2a}}$
 מצאו את גודל הכוח החשמלי הממוצע שפועל על האלקטרון.

נוסחאות עזר:

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

$$\int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^\pi \sin^5 \theta d\theta = \frac{16}{15}$$

(3) הראו כי התנז לא בכיוון Z

הראו שהתנע הזוויתי המסלולי של האלקטרון באטום המימן לא יכול להיות מקביל לציר Z.

(4) גז מעורר

נתון גז של אטומי מימן שבכל אחד מהם האלקטרון נמצא ברמה התחלתית ($n = 4, l = 3$).
 נתון שאין אינטראקציה בין האטומים, טמפרטורת הגז נשארת קבועה כל הזמן ולא קיים שדה מגנטי חיצוני.
 כמה קווי פליטה שונים (אורכי גל שונים) נראה בספקטרום הפליטה של הגז (ספקטרום הפליטה מתקבל כאשר האלקטרונים יורדים לרמות נמוכות יותר)?
 רשמו את מצבי האנרגיה הנמוכים ביותר שבהם יכולים להימצא האלקטרונים לאחר זמן רב (השתמשו במספרים הקוונטים (n, l) כדי לאפיין את מצבי האנרגיה).

(5) צבר אטומי מימן במצב 2 בשטרן גרלך

- צבר אטומי מימן נמצא במצב $n = 2$ (ועם תנע זוויתי כלשהו).
 בכל סעיפי השאלה יש להתחשב גם בספין.
 א. כמה כתמים יהיו על המסך עבור הצבר בניסוי שטרן גרלך?
 ב. ציינו איזה מצב קוונטי גרם לכל כתם על המסך.

- אורך המגנט בניסוי הוא L והמרחק מסוף המגנט ועד המסך הוא $10L$.
 השדה המגנטי הוא $B(z) = B_0 \frac{z}{L}$ ומהירות האטומים היא v .
- ג. מה יהיה המרחק בין שני הכתמים הנוצרים מהמצבים בהם האלקטרון נמצא ברמה $2s$?
- ד. כמה רמות אנרגיה שונות קיימות לצבר (תחת שדה מגנטי)? כמה אורכי גל שונים יכולים להיפלט מהצבר?

תשובות סופיות:

- (1) א. 0.677 ב. $1.5a$
- (2) $\frac{ke^2}{12a^3}$
- (3) הוכחה.
- (4) 5 קווים, $1s$ ו- $2s$.
- (5) א. ישנם 5 אופציות שונות למומנט המגנטי ולכן נקבל 5 כתמים.
 ב. הכתם הכי נמוך שייך ל- $m+2ms=2$ וככל שהערך יורד הכתם יהיה יותר גבוה.
 ג. $21 \frac{\mu_B B_0 L}{mv^2}$
 ד. לצבר 5 רמות אנרגיה שונות עבור הערכים השונים של המומנט המגנטי.
 7 אורכי גל שונים.

מומנט מגנטי מסילתי ואפקט זימן הנורמאלי:

סיכום כללי:

מומנט כוח על דיפול מגנטי:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

אנרגיה פוטנציאלית של דיפול מגנטי בשדה מגנטי:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

כוח על דיפול מגנטי בשדה מגנטי לא אחיד:

$$\vec{F} = (\vec{\mu} \cdot \nabla) \vec{B}$$

מומנט דיפול מגנטי כתוצאה מתנועת האלקטרון סביב הגרעין:

$$\vec{\mu} = \frac{-\mu_B}{\hbar} \vec{L}$$

גודל קבוע שנקרא המגנטון של בוהר:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 5.788 \cdot 10^{-5} \text{ eV/T}$$

האנרגיה הפוטנציאל כתוצאה האינטראקציה של המומנט המגנטי המסילתי עם שדה מגנטי חיצוני:

$$U = \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{L} \cdot \vec{B} = \mu_B B m$$

כאשר m הוא המספר הקוונטי של L_z .

תוספת לשינוי באנרגיה כתוצאה ממעבר בין הרמות בעקבות אפקט זימן:

$$\begin{aligned} \Delta E_z &= \mu_B B \Delta m \\ \Delta m &= \pm 1, 0 \end{aligned}$$

התוספת בעקבות אפקט זימן גורמת לכל קו ספקטרלי להתפצל לשלושה קווים.

שאלות:

1) פוטון נפלט מאטום מימן בשדה מגנטי

אלקטרון נמצא ברמת האנרגיה $3p$ של אטום מימן. האטום נמצא באזור בו יש שדה מגנטי אחיד $B = 4 \cdot 10^3 [T]$. מצאו את אורך הגל הקצר ביותר שיכול

להתקבל ממעבר של האלקטרון לרמה כלשהיא (הניחו שהאלקטרון אינו עולה רמות לפני הפליטה).

(2) פליטה מאטום בורון ורוחב פס

- גז של אטומי בורון נמצא באזור בו קיים שדה מגנטי חיצוני אחד B .
 בכל אחד מהאטומים מעוררים את האלקטרון שנמצא ברמה $2p$ לרמה $3s$
 ומוודדים את ספקטרום הקרינה האלקטרומגנטית שמתקבל בחזרה של
 האלקטרון לרמה המקורית.
- א. כמה קווים יתקבלו בספקטרום? הניחו שרמת האנרגיה זהות לאלו של
 אטום המימן.
- ב. מצאו את הערך של B עבורו נוכל להבחין כי הפיצול אכן נבע מהשדה
 המגנטי החיצוני אם נתון שזמן החיים של הרמה המעוררת הוא 2ns .

תשובות סופיות:

- (1) 100nm
 (2) א. 3 קווים. ב. $B > 9\text{mT}$

ספין ניסוי ושטרן גרלך:

סיכום כללי:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

\vec{L} תנ"ז מסילתי, נובע מהתנועה הסיבובית של החלקיק.

\vec{S} תנ"ז כתוצאה מהספין.

$$S = \sqrt{s(s+1)}\hbar$$

S גדולה - גודל התנ"ז מהספין.

s קטנה - הספין של החלקיק, עבור אלקטרון $s = \frac{1}{2}$.

עבור חלקיקים אחרים ערכי הספין הן כפולות שלמות של חצי $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$

חלקיקים שהספין שלהם חצי שלם $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$ וכו' נקראים **פרמיונים** וחלקיקים שהספין שלהם שלם $0, 1, 2$ נקראים **בוזונים**.

$$S_z = m_s \hbar$$

$-s < m_s < s$ בקפיצות של 1

עבור אלקטרון $m_s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

$$\vec{\mu}_s = -g \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{S}$$

פקטור g או gyromagnetic ratio

עבור אלקטרון $g = 2.0023 \dots \approx 2$

שאלות:

(1) תוחלת של S

נתונה פונקציית הגל הבאה:

$$\frac{1}{\sqrt{4}} \Psi_{2,1,-1,\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} \Psi_{2,1,1,\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_{2,1,1,-\frac{1}{2}}$$

א. הראו שהפונקציה מנורמלת (בהנחה ש- Ψ_{n,l,m,m_s} הן אורטונורמליות).

ב. מצאו את $\langle \hat{L}_z \rangle$.

ג. מצאו את $\langle \hat{S}_z \rangle$.

ד. מצאו את ΔS_z .

(2) שטרן גרלך עם תנז מסילתי

מה היה קורה בניסוי שטרן-גרלך אם לאלקטרון בקרן שפוגעת היה $l = 1$?

תשובות סופיות:

- (1) א. הוכחה. ב. $\frac{\hbar}{2}$. ג. 0. ד. $\frac{\hbar}{2}$.
- (2) הקרן תתפצל לחמש קרניים ונראה חמש נקודות על המסך.

אטומים מורכבים והטבלה המחזורית:

סיכום כללי:

כל אלקטרון מאכלס מצב מסוים המאופיין על ידי המספרים הקוונטים: n, l, m_l, m_s . בגלל האינטראקציה של האלקטרונים עם עצמם האנרגיות תלויות ב- n וגם ב- l .

עיקרון האיסור של פאולי (1900-1958) Wolfgang Pauli:

שני אלקטרונים באטום לא יכולים לאכלס את אותו המצב הקוונטי.

כלומר לא יכולים להיות שני אלקטרונים שיש להם בדיוק אותם מספרים קוונטים: n, l, m_l, m_s .

ככל ש- l גדל (יש יותר תנ"ז מסילת) האנרגיה גדלה.

הטבלה המחזורית:

KEY:

- Atomic Number
- Element Symbol
- Electronic Configuration
- Density at 300K (g/cm³)
- * indicates density in g/l of gaseous state at 273K and 1 atm
- Atomic Mass
- Oxidation States (dark indicates most stable)
- Electronegativity
- Element Name
- Melting Point, K
- Boiling Point, K
- First Ionization Potential, V
- Atomic Radius (pm)
- Ion Radius (pm)

Carbon (C): Atomic Number 6, Atomic Mass 12.011, Oxidation States +4, +2, Electronic Configuration He 2s² 2p², Electronegativity 2.55.

Legend:

- Alkali metals (Blue)
- Rare earths (Pink)
- Non-metals (Green)
- Solid (Black)
- Hydrogen (Red)
- Alkali earth metals (Light Blue)
- Basio metals (Orange)
- Halogens (Yellow)
- Liquid (Light Blue)
- Transition metals (Dark Blue)
- Metalloids (Yellow)
- Noble gases (Light Blue)
- Gas (Light Blue)
- Not classified (Grey)

ChemRoots, cchange, sasol, UNIVERSITY OF CAPE TOWN, CAPE TOWN SCIENCE CENTRE, CTSC

שאלות:

- (1) **טיטניום**
כמה אלקטרונים יש ליסוד טיטניום: Ti ($Z = 22$) ברמה הרביעית?
הניחו שהוא במצב היסוד.
- (2) **אטום ראשון ברמה החמישית**
מהו המספר האטומי של האטום "הראשון" ברמה החמישית?
- (3) **קונפיגורציה של ברזל**
רשמו את קונפיגורציית האלקטרונים של אטום הברזל: Fe $Z=26$
במצב היסוד. רשמו את הכתיב המלא והמקוצר.
- (4) **קונפיגורציות הגיוניות**
אלו מהקונפיגורציות הבאות הן הגיוניות ואלו לא? (עבור אטומים ברמת היסוד)
- א. $1s^2 2s^2 2p^6 3s^3$
ב. $1s^2 2s^2 2p^6 2d^2$
ג. $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5 4s^2$
ד. $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^5 4s^2$

תשובות סופיות:

- (1) שני אלקטרונים.
(2) 37.
(3) $3d^2 4s^2$, $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^6 4s^2$
(4) א. לא. ב. לא. ג. לא. ד. כן.

פיסיקה 3

פרק 9 - פורמליזם אלגברי לתורת הקוונטים

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגילים 138

ייצוג באמצעות אלגברה לינארית:

סיכום כללי:

פונקציות הגל מקיימות את התנאים של מרחב וקטורי.
הכללות:

1. נעבוד עם וקטורים ביותר משלושה מימדים.
2. נעבוד עם סקלרים שיכולים להיות גם מספרים מורכבים.

כתיב דיראק:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{:ket}$$

$$\langle\psi| = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*, \dots) \quad \text{:bra}$$

מכפלה פנימית - הכללה של מכפלה סקלרית ליותר מ-3 מימדים.

תכונות המכפלה הפנימית:

תכונה 1: $\langle v|u\rangle = \langle u|v\rangle^*$ סקלר

תכונה 2: $\langle v|v\rangle \geq 0$ ממשי, אם $\langle v|v\rangle = 0$ אז $|v\rangle = |0\rangle$

תכונה 3: $\langle v|(\alpha|u\rangle + \beta|k\rangle) = \alpha\langle v|u\rangle + \beta\langle v|k\rangle$
הגדרת המכפלה הפנימית בפונקציות הגל:

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \psi_2 dx$$

נורמה – הכללה של גודל של וקטור ליותר מ-3 מימדים.

$$\|v\| = \sqrt{\langle v|v\rangle}$$

אם המכפלה הפנימית של שני וקטורים מתאפסת אז אומרים שהוקטורים אורתוגונליים.

מרחב L_2 (או L^2) – מכיל את כל הפונקציות שהאינטגרל על גודל הפונקציה בריבוע

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \quad \text{אינו מתבדר:}$$

בפיזיקה, מרחב פונקציות הגל שנעבוד איתו נקרא מרחב הילברט ובפועל הוא יהיה המרחב L_2 .

* הפונקציות העצמיות של התנע והמיקום אינם ב- L_2 אבל עדיין עובדים איתם.

ייצוג באמצעות בסיס:

בסיס – סט של וקטורים (בלתי תלויים) שבאמצעותם ניתן לבטא כל וקטור אחר במרחב.

בסיס אורתונורמלי – בסיס שבו כל הוקטורים אורתונורמליים.

בסיס אורתונורמלי – בסיס אורתונורמלי שבו הנורמה של כל וקטור היא 1.

הבסיס הסטנדרטי – בסיס שמורכב מוקטורי יחידה.

סט הפונקציות העצמיות (או הו"ע) של כל אופרטור מהוות בסיס*
 * יש יוצאי דופן, לדוגמה במקרים שהבסיס אינסופי.

$$\psi(x) = \sum \alpha_n \phi_n(x)$$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{או}$$

$$\alpha_n = \langle \phi_n | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^*(x) \psi(x) dx \quad \text{כאשר}$$

המכפלה הפנימית בהצגה באמצעות בסיס אורתונורמלי:

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*, \dots) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \dots \end{pmatrix} = \sum \alpha_i^* \beta_i$$

שאלות:

1) ייצוג בסיס לז'נדר

נתונה הפונקציה: $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$.

בתרגיל זה נתרגל פריסה (או ייצוג) באמצעות בסיס פולינומי לז'נדר המנורמל לקטע: $x \in [-1, 1]$.

$$L_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, L_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x, L_2(x) = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{1}{2}(3x^2 - 1), L_3(x) = \sqrt{\frac{7}{2}} \cdot \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \dots$$

א. הראו כי ארבעת איברי הבסיס הנ"ל הם אכן אורתונורמלים,

$$\delta_{nm} = \langle L_n | L_m \rangle.$$

ב. מצאו את ארבעת המקדמים ("המשקלים") הראשונים בייצוג של $f(x)$

$$\text{בבסיס לז'נדר. (רמז: } \langle L_n | f \rangle \text{)}$$

ג. רשמו את הפונקציה לפי ארבעת האיברים הראשונים ושרטטו אותה (באמצעות מחשב) על גבי הפונקציה המקורית.

2) חישוב אי ודאות בתנע ומיקום

א. חשבו את אי הודאות במקום ובתנע של המצב: $|\psi\rangle = |x_1\rangle$. הנחייה: בשביל לחשב את ערכי התצפית של התנע השתמשו

בקשר: $\langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{ipx}{\hbar}}$ (או בטרנספורם פורייה) על מנת למצא את פונקציית הגל בבסיס התנע.

ב. חשבו את אי הודאות במקום ובתנע של המצב: $|\psi\rangle = \alpha|x_1\rangle + \beta|x_2\rangle$. (ממשיים β, α).

מהו החסם על אי הודאות בתנע?

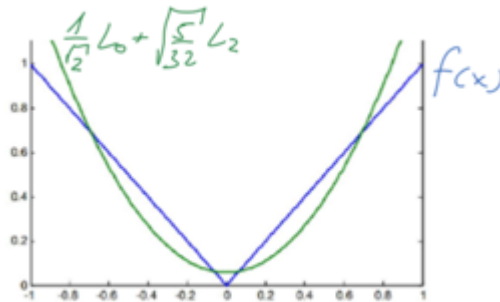
(את אי הודאות בתנע ניתן להשאיר כאינטגרל).

ג. מה יקרה לפונקציית הגל אם נערוך מדידה ונקבל שהחלקיק נמצא ב- x_1 ?

תשובות סופיות:

(1) א. הוכחה. ב. $\alpha_1 = \alpha_3 = 0, \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \alpha_2 = \sqrt{\frac{5}{32}}$

ג. $f(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2}}L_0 + \sqrt{\frac{5}{32}}L_2$



(2) א. $\Delta x = 0, \Delta p = \infty$
ב.

□ $x = \alpha\beta|x_1 - x_2|, \langle p \rangle = 0, \langle p^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} p \left[1 + 2\alpha\beta \cos\left(\frac{p(x_1 - x_2)}{\hbar}\right) \right] dp = \infty$
ג. פונקציית הגל תקרוס ונחזור למצב של סעיף א'.

אי שוויון שורץ:

$$|\langle a|b \rangle|^2 \leq \langle a|a \rangle \langle b|b \rangle$$

זווית מוכללת בין וקטורים:

$$\cos \theta = \frac{\langle a|b \rangle \langle b|a \rangle}{\langle a|a \rangle \langle b|b \rangle}$$

אי שוויון המשולש:

$$|\langle a + b | a + b \rangle| \leq |a| + |b|$$

שאלות:

(1) אי שוויון שורץ

הוכיחו את אי שוויון שורץ: $\langle a|a\rangle\langle b|b\rangle \geq |\langle a|b\rangle|^2$.

השתמשו ב- $|c\rangle = |a\rangle - \frac{\langle b|a\rangle}{\langle b|b\rangle}|b\rangle$ ובעובדה שהנורמה של וקטור תמיד גדולה או שווה לאפס $\langle c|c\rangle \geq 0$.

(2) אי שוויון המשולש

הוכיחו את אי שוויון המשולש: $|(|a\rangle + |b\rangle)| \leq |a| + |b|$.
 רמז: השתמשו גם באי שוויון שורץ.

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) הוכחה.

פיסיקה 3

פרק 10 - אופרטורים בייצוג האלגברי

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגילים 143

הרצאות ותרגילים:

סיכום כללי:

-אופרטורים מיוצגים באמצעות מטריצות:

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \dots & Q_{nn} \end{pmatrix}$$

האיבר Q_{ij} מעביר את הוקטור e_j לוקטור e_i : $Q_{ij} = \langle e_i | \hat{Q} | e_j \rangle$ (כפול סקלר כלשהו).
 i שורה, j עמודה.

אם הבסיס הוא בסיס עצמי של אופרטור כלשהו אז המטריצה של האופרטור תהיה אלכסונית והערכים על האלכסון הם הערכים העצמיים של האופרטור.

$$\langle \psi_1 | \hat{Q} | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \hat{Q} \psi_2 \rangle$$

כתיב נוסף:

$$\langle \hat{Q} \psi | = (\hat{Q} | \psi \rangle)^\dagger = \langle \psi | \hat{Q}^\dagger$$

חזרה על אלגברה לינארית

- מציאת ערכים עצמיים (ע"ע): $\det(Q - \lambda I) = 0$

- מציאת וקטורים עצמיים (ו"ע) בסרטון:

מטריצה משוחלפת:

$$A^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

צמד הרמיטי :

$$A^\dagger = (A^*)^T = \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* & \dots & A_{n1}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* & \dots & A_{n2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n}^* & A_{2n}^* & \dots & A_{nn}^* \end{pmatrix}$$

מטריצת יחידה :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \sum |\phi_n\rangle\langle\phi_n|$$

כפל מטריצות : $C = A \cdot B \Rightarrow C_{mn} = \sum A_{mi} B_{in}$ כפל מטריצות הוא לא חילופי : $AB \neq BA$ יחס חילוף בין מטריצות : $[A, B] = AB - BA$ מטריצה ההופכית : $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ מטריצה אוניטרית : $U^\dagger = U^{-1}$

- זהויות :

$$(\langle\psi_1|\hat{A}^\dagger|\psi_2\rangle)^* = \langle\psi_2|\hat{A}|\psi_1\rangle$$

$$\langle\psi_1|\hat{A}\psi_2\rangle = \langle\hat{A}^\dagger\psi_1|\psi_2\rangle$$

$$(A^\dagger)^\dagger = A$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

הגודל של ערך עצמי של אופרטור אוניטרי הוא תמיד 1.
 אופרטורים הרמיטים ואוניטרים הם אופרטורים נורמליים, כלומר : $[A, A^\dagger] = 0$.

שאלות:

(1) בניית אופרטורים ופעולות על פונקציות שונות

נתון כי: $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle\}$ מהווים בסיס אורתונורמאלי במרחב וקטורי דו מימדי. מגדירים את המצבים הבאים:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \alpha_1|v_1\rangle + \alpha_2|v_2\rangle \\ |\psi_2\rangle &= \beta_1|v_1\rangle + \beta_2|v_2\rangle \end{aligned}$$

כאשר: $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ הם סקלרים מורכבים.

- א. רשמו את $\langle \psi_2 |$ בכתוב דיראק בבסיס הנייל.
- ב. חשבו את המכפלה הפנימית $\langle \psi_2 | \psi_1 \rangle$. האם היא שווה למכפלה הפנימית $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle$?
- ג. רשמו את $|\psi_2\rangle$ ואת $\langle \psi_2 |$ כוקטורים בכתוב מטריצי.
- ד. מצאו את הנורמה של המצב $|\psi_2\rangle$.
- ה. נגדיר אופרטור $\hat{Q} = c|v_1\rangle\langle v_2|$ כאשר c הוא סקלר מורכב שונה מאפס. חשבו את פעולת האופרטור על איברי הבסיס וכתבו את הייצוג המטריצי של האופרטור בבסיס הנתון. האם האופרטור הרמיטי?
- ו. חשבו את הפעולה של \hat{Q} על המצב $|\psi_2\rangle$ פעם אחת דרך הייצוג המטריצי ופעם שניה דרך כתיב דיראק.
- ז. נגדיר אופרטור חדש $\hat{G} = c|\psi_1\rangle\langle \psi_2|$ מצאו את \hat{G} בייצוג המטריצי.
- ח. נתון כי האופרטור \hat{S} מבצע את הפעולה הבאה:

$$\begin{aligned} \hat{S}|v_1\rangle &= |v_2\rangle \\ \hat{S}|v_2\rangle &= |v_1\rangle \end{aligned}$$

מצאו את הייצוג המטריצי של \hat{S} וחשבו את הפעולה שלו על המצבים $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$.

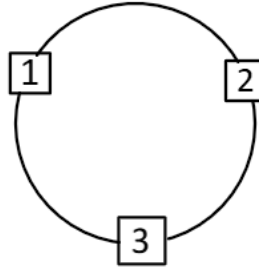
(2) מציאת עע ווע

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \text{נתונה המטריצה הבאה:}$$

- א. האם המטריצה הרמיטית?
- ב. מצאו את העי"ע וי"ע של A .

3 (3) אתרים על טבעת

נתונה מערכת ובה שלושה אתרים על טבעת:



נסמן את המצבים בהם נמצא החלקיק בכל אחד מהאתרים בצורה הבאה:

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הדינמיקה של המערכת מתוארת ע"י ההמילטוניאן: $H = \varepsilon \hat{D} + \varepsilon \hat{D}^\dagger$
 כך שאופרטורי ההזזות מוגדרים:

$$\hat{D}|i\rangle = |i-1\rangle, \hat{D}|1\rangle = |3\rangle, \hat{D}^\dagger|i\rangle = |i+1\rangle, \hat{D}^\dagger|3\rangle = |1\rangle$$

אופרטור המיקום מוגדר כ- $\hat{x}|i\rangle = i|i\rangle$.

א. ייצגו את אופרטורי ההזזה ע"י מטריצה והראו כי אחד הוא צמוד הרמיטי של השני.

ב. ייצגו את אופרטור המיקום ע"י מטריצה. מהם הוקטורים והערכים העצמיים.

ג. מהם הוקטורים והערכים העצמיים של ההמילטוניאן?

שימו לב כי הו"ע אינם אורתוגונליים ויש לבצע תהליך גרהם שמידט.

פתרון המשוואה: $-\lambda^3 + 3\varepsilon^2\lambda + 2\varepsilon^3 = 0$ הוא: $\lambda_{1,2} = -\varepsilon, \lambda_3 = 2\varepsilon$.

ד. מכינים את החלקיק בזמן 0 במצב $|2\rangle$, מהו מצב המערכת בזמן כלשהו?

ה. מה הסיכוי למצוא את החלקיק באתר 3 אחרי זמן כלשהו?

ו. מהו יחס החילוף $[D, x]$?

ז. **מצאו את המצבים העצמיים עבור מערכת עם אינסוף אתרים

(גבול הרצף) עבור \hat{D}^\dagger, \hat{D} ועבור H .

הדרכה: כתבו את משוואת המצבים העצמיים בכתוב דיראק ונסו לחלץ

סדרה הנדסית עבור המקדמים. מתוך התנאי על האיבר האחרון מצאו

את הערכים העצמיים והפונקציות העצמיות.

4 הוכחת זהויות 1

- א. הוכיחו כי: $\langle i|\hat{A}|j\rangle = (\langle j|\hat{A}^\dagger|i\rangle)^*$ כאשר: $|i\rangle, |j\rangle$ הן פונקציות בסיס אורתונורמאלי.
- ב. הוכיחו כי: $\langle \psi_2|\hat{A}|\psi_1\rangle = (\langle \psi_1|\hat{A}^\dagger|\psi_2\rangle)^*$ כאשר ψ_1, ψ_2 הן פונקציות כלשהן.
- ג. הוכיחו כי: $\langle \psi_1|\hat{A}\psi_2\rangle = \langle \hat{A}^\dagger\psi_1|\psi_2\rangle$.

5 הוכחת זהויות 2

- הוכיחו את הטענות הבאות עבור אופרטורים כלשהם A ו- B :
- א. $(A^\dagger)^\dagger = A$.
- רמז: השתמשו בתכונות ההצמדה של מכפלה פנימית והראו
- כי: $\langle \psi_1|(A^\dagger)^\dagger|\psi_2\rangle = \langle \psi_1|A|\psi_2\rangle$
- ב. $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.
- ג. $AA^\dagger, i(A - A^\dagger), A + A^\dagger$ הם כולם אופרטורים הרמיטיים.

6 הוכחת זהויות 3

- נניח כי לאופרטור Q ישנם וקטורים עצמיים $|\phi_i\rangle$ עם ערכים עצמיים λ_i בהתאמה. הראו כי אם אין ניוון אז: $(\prod_i(\hat{Q} - \lambda_i))|\psi\rangle = 0$
- כאשר: $\prod_i(x_i) = x_1x_2x_3 \cdots x_n$.
- רמז: השתמשו בתכונת מטריצת היחידה: $I = \sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$.

7 הוכחת זהויות 4

- הראו כי הגודל של ערך עצמי של אופרטור אוניטרי הוא תמיד 1.
- הנחייה: הניחו מצב עצמי של אופרטור אוניטרי שעבורו מתקיים: $U|\phi\rangle = \lambda|\phi\rangle$.

8 הוכחת זהויות 5

- הוכיחו שאופרטורים הרמיטיים ואוניטרים הם אופרטורים נורמליים, כלומר שהם מקיים את התנאי: $[A, A^\dagger] = 0$.

9 הוכחת זהויות 6

- הראו כי אופרטור אוניטרי הפועל על פונקציית גל אינו משנה את הנורמה של הפונקציה.

10) אופרטור סיבוב

נתון האופרטור הבא :

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- א. הראו שהאופרטור אוניטרי.
 ב. מצאו את הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים.
 ג. הראו שהוקטורים העצמיים אורתונורמאליים.
 ד. הראו שהמטריצה $U^\dagger A U$ היא מטריצה אלכסונית כאשר U מורכבת מהוקטורים העצמיים של A בעמודות.

11) חישוב אי ודאות בתנע ומיקום

- א. חשבו את אי הודאות במקום ובתנע של המצב $|\psi\rangle = |x_1\rangle$. הנחייה : בשביל לחשב את ערכי התצפית של התנע השתמשו בקשר : $\langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{ipx}{\hbar}}$ (או בטרנספורם פורייה) על מנת למצא את פונקציית הגל בבסיס התנע.
- ב. חשבו את אי הודאות במקום ובתנע של המצב $|\psi\rangle = \alpha|x_1\rangle + \beta|x_2\rangle$. (α, β ממשיים). מהו החסם על אי הודאות בתנע? (את אי הודאות בתנע ניתן להשאיר כאינטגרל).
- ג. מה יקרה לפונקציית הגל אם נערוך מדידה ונקבל שהחלקיק נמצא ב- x_1 ?

תשובות סופיות:

א. $\beta_1^* \langle v_1 | + \beta_2^* \langle v_2 |$. א. (1)

ב. $|\beta_1^* \alpha_1 + \beta_2^* \alpha_2|$, לא שווה.

ד. $\sqrt{|\beta_1|^2 + |\beta_2|^2}$

ג. $L\psi_2 = (\beta_1^*, \beta_2^*)$, $|\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$

ו. $c\beta_2 |v_1\rangle$ או $\begin{pmatrix} c\beta_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

ה. $\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ לא הרמיטי.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

ח. $\hat{S}|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$

ז. $c \begin{pmatrix} \alpha_1 \beta_1^* & \alpha_1 \beta_2^* \\ \alpha_2 \beta_1^* & \alpha_2 \beta_2^* \end{pmatrix}$

$\hat{S}|\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$

א. כן. (2)

ב. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$: $|\lambda_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|\lambda_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $|\lambda_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

א. (3) $D^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ב. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$, $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$

$\lambda_1 = -\varepsilon$, $|\lambda_1\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2} \right)$

ג. $\lambda_2 = -\varepsilon$, $|\lambda_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, -1)$

$\lambda_3 = -2\varepsilon$, $|\lambda_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1)$

ד. $|\psi(t)\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} e^{+\frac{i\varepsilon t}{\hbar}} |\lambda_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{i\varepsilon t}{\hbar}} |\lambda_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{2\varepsilon t}{\hbar}} |\lambda_3\rangle$

ה. $\left(-\frac{5}{6} \cos(\omega t) + \frac{1}{3} \cos(2\omega t) \right)^2 + \left(\frac{5}{6} \sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(2\omega t) \right)^2$

ו. $[\hat{D}, \hat{X}] = \hat{D}$

ז. הפונקציות העצמיות של שלושת האופרטורים הן:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-ikx} \quad \text{או} \quad |\phi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \varepsilon e^{-i\frac{2\pi j}{N}n} |n\rangle$$

כאשר j מספר שלם בין $-\infty$

$$k = \frac{2\pi}{N} j \quad j = 0, 1, \dots, \infty$$

$$E_j = 2\varepsilon\omega \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) \quad \text{של } H \quad \text{הן } \lambda_j = e^{-i\frac{2\pi j}{N}} \quad \text{של } D \quad \text{הן } \lambda_j^+ = e^{i\frac{2\pi j}{N}} \quad \text{של } D^+$$

(4) הוכחה.

(5) הוכחה.

(6) הוכחה.

(7) הוכחה.

(8) הוכחה.

(9) הוכחה.

$$\lambda_1 = e^{i\theta} \quad |\lambda_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i) \quad \text{א. הוכחה. (10)}$$

$$\lambda_2 = e^{-i\theta} \quad |\lambda_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i) \quad \text{ב. הוכחה. ג. הוכחה.}$$

ד. הוכחה.

$$\Delta x = 0, \Delta p = \infty \quad \text{א. (11)}$$

ב.

$$\Delta x = \alpha\beta|x_1 - x_2|, \langle p \rangle = 0, \langle p^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} p \left[1 + 2\alpha\beta \cos\left(\frac{p(x_1 - x_2)}{\hbar}\right) \right] dp = \infty$$

ג. פונקציית הגל תקרוס ונחזור למצב של סעיף א'.

פיסיקה 3

פרק 11 - גרעין האטום, אנרגיית הגרעין ורדיואקטיביות

תוכן העניינים

1. הגרעין- הסבר (ללא ספר)
2. אנרגיית קשר של הגרעין ויציבות גרעינים 151
3. רדיואקטיביות 152
4. תגובות גרעיניות 156

אנרגיית קשר של הגרעין ויציבות גרעינים:

רקע:

שקילות מסה-אנרגיה:

$$\Delta E = \Delta mc^2$$

$$\Delta E (\text{MeV}) = \Delta m (u) \cdot 931.494 \frac{\text{MeV}}{u}$$

שאלות:

1) אנרגיית קשר גרעינית - תרגיל 1
 חשבו את אנרגיית הקשר הגרעינית של ליתיום 7.

2) אנרגיית קשר גרעינית - תרגיל 2
 מצאו את אנרגיית הקשר הממוצעת לנוקליאון של פחמן 12.

תשובות סופיות:

$$\Delta E = 39.2 \text{ MeV} \quad (1)$$

$$E = 7.684 \quad (2)$$

רדיואקטיביות:

רקע:

דעיכה של מקור רדיואקטיבי:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad \lambda - \text{קבוע דעיכה}$$

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

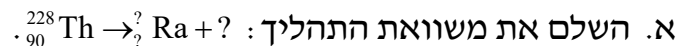
פעילות של מקור רדיואקטיבי: $R = \lambda N$

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad \text{זמן מחצית החיים:}$$

שאלות:

1) רדיואקטיביות - תרגיל 1

תוריום 228 מתפרק התפרקות אלפא ונוצר גרעין בת של רדיום 224.



ב. מצא את האנרגיה הקינטית המקסימלית האפשרית שתהיה לתוצר החסר.

נתון שמסתו האטומית של תוריום 228 היא: 228.028741u , ומסתו האטומית

של רדיום 224 היא: 224.020186u .

ג. הסבר מדוע כמעט בכל המקרים האנרגיה הקינטית של התוצר השני

תהיה קטנה מהערך שחישבת בסעיף ב'?

2) רדיואקטיביות - תרגיל 2

עורכים ניסוי עם חומר רדיואקטיבי בשם ביסמוט (${}_{83}^{210}\text{Bi}$).

נמצא, שחומר זה מתפרק התפרקות בטא מינוס לחומר לא-ידוע בשם פולוניום (Po).

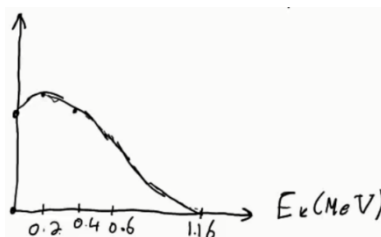
א. כתוב את משוואת ההתפרקות.

ב. בניסוי המשך עם חומר זה מודדים את מהירות החלקיקים הנפלטים

מהגרעין, ומשרטטים גרף של מספר החלקיקים הנפלטים בעלי אנרגיה

קינטית מסוימת, כתלות באנרגיה קינטית זו.

התקבל הגרף הבא:



- נתון שמסתו האטומית של ביסמוט זה היא : $209.98412u$, ושמסתו האטומית של פולוניום זה היא : $209.98287u$.
- הסבר כיצד נקודת החיתוך של הגרף עם הציר האופקי תומכת בחוק שימור מסה-אנרגיה.
 - הסבר מדוע שאר הנקודות בגרף לא סותרות חוק שימור זה, ואיזה תגלית היסטורית הוסקה בעזרת גרף זה.

3 רדיואקטיביות - תרגיל 3

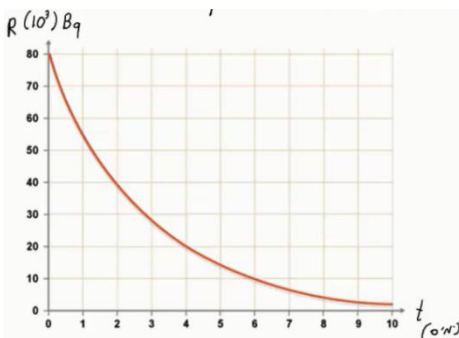
- נתון מדגם של חומר רדיואקטיבי בעל 10^{10} גרעינים וזמן מחצית חיים של יומיים וחצי.
- כמה גרעינים רדיואקטיביים יישארו במדגם לאחר יומיים וחצי?
 - כמה גרעיני בת ייווצרו לאחר 7 וחצי ימים?
 - כמה גרעיני אב יישארו לאחר 9 ימים?
 - מה תהיה הפעילות לאחר 9 ימים?

4 רדיואקטיביות - תרגיל 4

- נתון מדגם של נתרן $^{24}_{11}\text{Na}$ שמתפרק התפרקות בטא מינוס למגנזיום (Mg). מסת המדגם – 2 גרם. המסה האטומית של נתרן 24 היא : $23.990962u$.
- זמן מחצית החיים של נתרן היא 15 שעות.
- כתוב את משוואת תהליך ההתפרקות.
 - מה פעילות מדגם זה ברגע $t = 0$?
 - מה תהיה פעילותו (בבקרל) לאחר 30 שעות?
 - כמה גרעיני בת יוצרו לאחר 42 שעות?

5 רדיואקטיביות - תרגיל 5

- חומר רדיואקטיבי מסוים מתפרק, כמופיע בתרשים הבא :
- מהו זמן מחצית החיים של החומר?
 - מתי תהיה פעילותו 10^4 בקרל?
 - מה תהיה פעילותו ברגע $t = 17$ days?
 - הוסף לתרשים עקומה המתארת את כמות גרעיני הבת שנוצרו בתהליך, כתלות בזמן.



6 רדיואקטיביות - תרגיל 6

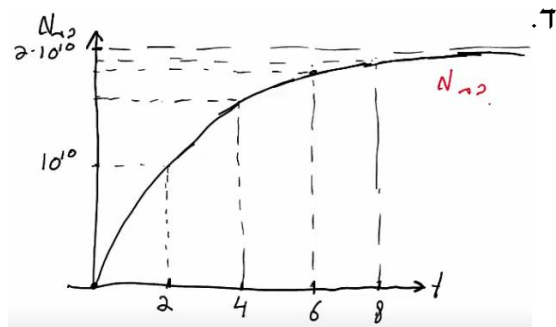
- אורניום $^{235}_{92}\text{U}$ מתפרק בשרשרת התפרקויות שכוללת 3 התפרקויות אלפא ו-2 התפרקויות בטא מינוס.
- א. מצא את המספר האטומי ומספר המסה של הגרעין החדש שנוצר. אותו $^{235}_{92}\text{U}$ ממשיך בשרשרת ההתפרקות שלו, ומסיים כאיזוטופ יציב של עופרת $^{207}_{82}\text{Pb}$.
- ב. מצא כמה התפרקויות אלפא וכמה התפרקויות בטא מינוס עבר בתהליך.

7 רדיואקטיביות - תרגיל 7

- פעילותו של 1 ק"ג חומר אורגני (חי) נמדדה ושווה ל-231 בקרל.
- א. ענה על הסעיפים הבאים:
- מה תהיה פעילותו של חומר אורגני שמת לפני 5,736 שנה?
 - לפני 11,472 שנה?
- ב. פעילותה של ערימת חומר (1 ק"ג) שנחפרה באפריקה נמדדה, ונמצא כי היא שווה ל-160 בקרל. מתי הפסיק לתפקד חומר זה?
- ג. מה תהיה פעילותו של 1 ק"ג חומר אורגני שהפסיק לתפקד לפני שבוע?
- ד. מה תהיה פעילותו של 1 ק"ג חומר אורגני שהפסיק לתפקד לפני 65 מיליון שנה?

תשובות סופיות:

- (1) א. ${}_{90}^{228}\text{Th} \rightarrow {}_{88}^{224}\text{Ra} + {}_2^4\text{He}$ ב. $E_{v_{\max}} = -5.55 \text{ MeV}$ ג. $E_{v_{\max}} < -5.55 \text{ MeV}$
- (2) א. ${}_{83}^{210}\text{Bi} \rightarrow {}_{84}^{210}\text{Po} + {}_{-1}^0\text{e} + \bar{\nu}$ ב. הסברים בסרטון.
- (3) א. $5 \cdot 10^9$ ב. $8.75 \cdot 10^9$ ג. $8.25 \cdot 10^8$
- (4) א. ${}_{11}^{24}\text{Na} \rightarrow {}_{12}^{24}\text{Mg} + {}_{-1}^0\text{e} + \bar{\nu}$ ב. $6.43 \cdot 10^{17} \text{ Bq}$ ג. $1.61 \cdot 10^{17} \text{ Bq}$
- (5) א. יומיים. ב. אחרי שישה ימים. ג. 221 Bq



- (6) א. ${}_{88}^{223}\text{Ra}$ ב. 7 התפרקויות אלפא ו-4 בטא.
- (7) א.i. 115.5 Bq א.ii. 57.75 Bq ב. לפני 3,031 שנה בערך.
- ג. אי אפשר לדעת. ד. $R \rightarrow 0$

תגובות גרעיניות:

שאלות:

(1) תגובות גרעיניות - תרגיל 1

- יורים על גרעין ${}_{13}^{27}\text{Al}$, שמסתו האטומית: $26.981538u$, גרעין הליום. בתגובה נוצר גרעין לא ידוע, שמסתו: $29.9783138u$, וחלקיק נוסף – נויטרון. א. כתוב את משוואת התגובה הגרעינית, והשלם את המספרים לגרעין הלא-ידוע שסימונו P. ב. כמה אנרגיה מינימלית יש לתת לחלקיק האלפא בתגובה, כדי שתתרחש תגובה זו? ג. נותנים לו אנרגיה כפולה מהאנרגיה שחישבנו בסעיף ב'. לאן תלך אנרגיה זו לאחר התגובה?

(2) תגובות גרעיניות - תרגיל 2

- נתונה התגובה הבאה: ${}^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^3_2\text{H} + ?$. א. השלם את התגובה. ב. נתון שאנרגיית הקשר לנוקליאון לדויטריום (${}^2_1\text{H}$) היא: 1.11226MeV , ולהליום 3 (${}^3_2\text{H}$) היא: 2.5727MeV . מצא כמה אנרגיה מינימלית יש להשקיע בתגובה הנ"ל, כדי שתקרה.

תשובות סופיות:

- (1) א. ${}_{13}^{27}\text{Al} + {}_2^4\text{He} \rightarrow {}_{15}^{30}\text{P} + {}_0^1\text{h}$ ב. $\Delta E = 2.65\text{MeV}$ ג. אנרגיה קינטית לתוצרים ופליטה של אנרגיה בצורת פוטונים.
 (2) א. ${}^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^3_2\text{H} + {}^1_0\text{n}$ ב. התהליך יקרה מעצמו (0).