

פיזיקה 3



תוכן העניינים

1.	תנועה הרמונית - תנוודות מרוסנות ומאולצות.	1
2.	מודים עצמיים	11
3.	אנליזת פורייה.	12
4.	מבוא לגלים.	21
5.	גלים רוחביים במיתר.	22
6.	חבורת גלים ונפיצה (דיספרסיה).	26
7.	גלים אלקטרו-מגנטיים.	35
8.	גלים דו מימדיים ומנחה גלים.	53
9.	התאבכות בגלים דו ותלת מימדיים.	58
10.	קווי תמסורת	75
11.	תיאוריות מוקדמות של תורת הקוונטים ומבנה האטום.	80

פיזיקה 3

פרק 1 - תנועה הרמונית - תנודות מרוסנות ומאולצות

תוכן העניינים

1. תנועה הרמונית פשוטה 1
2. תנועה הרמונית מרוסנת 4
3. תנועה הרמונית מאולצת 8

תנועה הרמונית פשוטה:

רקע:

משוואת התנועה:

$$-k(x - x_0) = m\ddot{x}$$

k ו- m - קבועים חיוביים כלשהם.

x_0 - קבוע שיכול להיות חיובי או שלילי.

x - משתנה כלשהו, יכול להיות גם זווית או כל משתנה אחר.

$\ddot{x}$ - נגזרת שניה של המשתנה.

חייב להיות מינוס לפני k .

פתרון המשוואה:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + x_0$$

x_0 - נקודת שיווי המשקל, הנקודה שבה: $\sum \vec{F} = 0$.

A - אמפליטודה, המרחק המקסימאלי משווי המשקל.

ω - תדירות זוויתית: $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$.

φ - פאזה.

מציאת הקבועים בפתרון:

x_0 - אפשר למצא ישירות מהקבוע שבמשוואה או למצא אותו מסכום הכוחות שווה לאפס.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\text{של המקדם } x}{\text{של המקדם } \ddot{x}}}$$

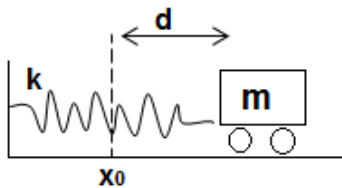
A, φ מוצאים מתנאי התחלה $x(0)$, $\dot{x}(0)$.

נוסחה למהירות המקסימאלית:

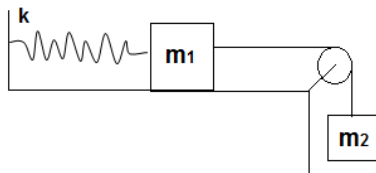
$$v_{\max} = \omega A$$

אנרגיה:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k (x - x_0)^2 = \frac{1}{2} m A^2$$

שאלות:
(1) דוגמה - מסה מתנגשת במסה


מסה m מונחת על שולחן ללא חיכוך ומחוברת לקפיץ המחובר לקיר בעל קבוע קפיץ k . מותחים את המסה מרחק d מהמיקום בו הקפיץ רפוי ומשחררים ממנוחה. מצא את $x(t)$ של המסה.

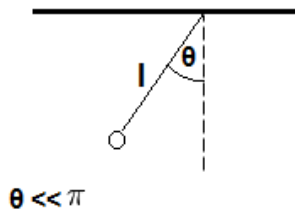
(2) דוגמה - מסה על שולחן מחוברת למסה תלויה


מסה m_1 מונחת על שולחן ללא חיכוך ומחוברת לקפיץ בעל קבוע k . מהמסה יוצא חוט העובר דרך גלגלת אידיאלית וקשור למסה נוספת התלויה באוויר M .

א. מצא את נקודת שיווי המשקל של המערכת (קבע את הראשית בנקודה שבה הקפיץ רפוי).

ב. מצא את תדירות התנודה של המערכת.

ג. מהי האמפליטודה המקסימלית האפשרית לתנועה כך שהמתיחות בחוט לא תתאפס במהלך התנועה?

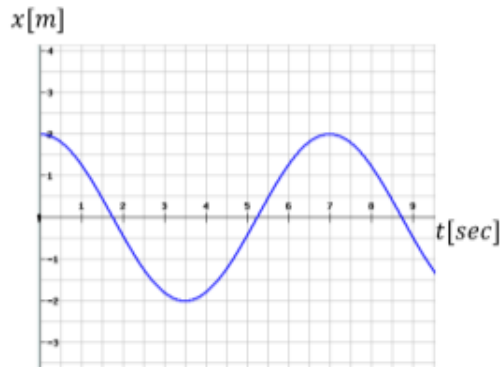
(3) דוגמה - מטוטלת מתמטית (עם אנרגיה)


נתונה מטוטלת (מתמטית) התלויה מהתקרה.

אורך החוט של המטוטלת הוא l .

מצא את תדירות התנודות הקטנות ואת הזווית כפונקציה של הזמן.

הנח כי המטוטלת מתחילה את תנועתה ממנוחה בזווית ידועה θ (דרך אנרגיה).



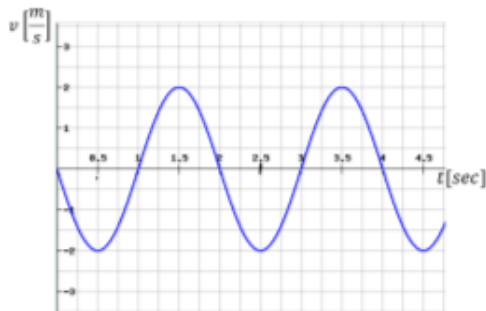
(4) גרף מיקום זמן

הגרף הבא מתאר את מיקומו כתלות בזמן של גוף הנע בתנועה הרמונית פשוטה.

- מהי אמפליטודת התנועה?
- מהו זמן המחזור?
- מהי התדירות הזוויתית?
- מהי הפאזה?
- רשום נוסחה למהירות כתלות בזמן.

(5) גרף מהירות זמן

מהירותו של גוף המתנדנד בתנועה הרמונית נתונה לפי הגרף הבא:



- מתי מגיע הגוף לנקודת שיווי המשקל בפעם הראשונה?
- האם תאוצת הגוף ב- $t = 1\text{sec}$ מקסימאלית?
- האם ב- $t = 1.5\text{sec}$ האנרגיה קינטית מרבית?
- מהו הכוח ב- $t = 2.5\text{sec}$?
- כמה מחזורי תנועה עשה הגוף ב-4 השניות הראשונות של התנועה?

תשובות סופיות:

$$x(t) = -\frac{v_0}{2} \sqrt{\frac{2m}{k}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{2m}} t + \frac{\pi}{2}\right) + x_0 \quad (1)$$

$$A_{\max} = \frac{g}{\omega^2} \quad \text{ג.}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \quad \text{ב.} \quad x = \frac{m_2 g}{k} \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \theta(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (3)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{ד.} \quad \omega \approx 0.898 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \quad \text{ג.}$$

$$T = 7\text{sec} \quad \text{ב.} \quad A = 2\text{m} \quad \text{א.} \quad (4)$$

$$v(t) = -1.80 \cdot \sin(0.898 \cdot t + 0) \quad \text{ה.}$$

$$0 \quad \text{ד.} \quad \text{ג. כן.} \quad \text{ב. כן.} \quad t = 0.5\text{sec} \quad \text{א.} \quad (5)$$

ה. 2

תנועה הרמונית מרוסנת:

רקע:

משוואת התנועה:

$$\ddot{z} + \Gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

$$\Gamma = \frac{\lambda}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

פתרון המשוואה מתחלק לשלושה מקרים:

$$(I). \text{ ריסון חזק: } \frac{\Gamma}{2} > \omega_0$$

$$z(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \left(Ae^{\sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}t} + Be^{\sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}t} \right)$$



אין תנודות.

$$(II). \text{ ריסון קריטי: } \frac{\Gamma}{2} = \omega_0$$

$$z(t) = (A + B \cdot t) \cdot e^{-\omega_0 t}$$

דעיכה הכי מהירה לשיווי משקל עם תנודה אחת.

(III). ריסון חלש: $\frac{\Gamma}{2} < \omega_0$

$$z(t) = Ae^{-\frac{\Gamma}{2}t} \cos(\tilde{\omega}t + \varphi)$$

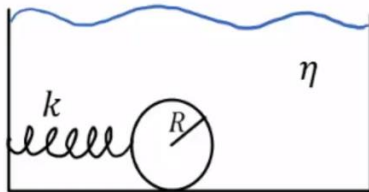
$$\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$



יש תנודות דועכות, $\tilde{\omega}$ היא תדירות התנודות.

שאלות:

(1) כדור במיכל מים



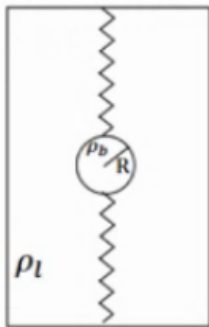
כדור בעל מסה m ורדיוס R נמצא בתוך מיכל מים ומחובר באמצעות קפיץ אופקי לדופן המיכל. קבוע הקפיץ הוא k . בתנועת הגוף במים, מפעילים המים על הכדור כוח התנגדות המתכונתי והפוך למהירותו. כוח זה נקרא כוח סטוקס וגודלו

הוא: $\vec{F} = -6\pi R\eta\vec{v}$. כאשר η היא צמיגות המים ו- R הוא רדיוס הכדור.

התייחס ל- m , k , η , R כנתונים ומצא את תדירות התנודות של הכדור

בהנחה ש- $R < \frac{\sqrt{mk}}{3\pi\eta}$. הזנח את החיכוך בין הכדור לתחתית המיכל.

(2) שני קפיצים בנוזל



כדור נמצא בתוך תיבה מלאה במים ומחובר עם קפיץ אידיאלי לקצה העליון של התיבה ועם קפיץ אידיאלי נוסף זהה לקצה התחתון של התיבה.

נתון: R - רדיוס הכדור, ρ_b - צפיפות המסה של הכדור,

ρ_l - צפיפות המסה של המים, K - קבוע שני הקפיצים

ו- η - צמיגות המים.

(תזכורת: כאשר כדור נמצא בתוך נוזל פועלים עליו

כוח ציפה: $F = \rho_l V g$ וכוח סטוקס: $F = -6\pi\eta R v$).

א. מצא את נקודת שיווי המשקל של המערכת.

ב. מה התנאי שיהיו תנודות הרמוניות?

מצא את התדירות בהנחה שתנודות אלו מתקיימות.

ג. מצא את התנאי בו יחזור הכדור הכי מהר לנקודת שיווי המשקל.

(3) איבוד אנרגיה במחזור

בתנועה הרמונית מרוסנת קיים ריסון חלש כך שהאמפליטודה של התנועה יורדת ב-2.5 אחוז כל מחזור.

בכמה אחוז יורדת האנרגיה בכל מחזור?

(4) משקולת במיכל מים תלויה מהתקרה

משקולת שמסתה: $M = 1\text{kg}$ נמצאת במיכל מים ומחוברת לתקרה באמצעות קפיץ בעל קבוע: $k = 20 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. כוח ההתנגדות שמפעילים המים הוא מהצורה של: $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$ כאשר: $\lambda = 4 \frac{\text{kg}}{\text{sec}}$ ו- $\vec{v}$ היא מהירות המסה. הניחו שהמשקולת אינה יוצאת מהמים ואינה פוגעת ברצפה.

א. תוך כמה זמן תרד האמפליטודה לחמישית מגודלה ההתחלתי? (הניחו שהפאזה היא אפס)

ב. לאחר כמה מחזורים זה יקרה?

(5) מסה באמבט מים ודבש

מסה: $m = 1\text{kg}$ נמצאת באמבט מלא מים, המסה מחוברת באמצעות שני קפיצים זהים בעלי קבוע: $k = 25 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ לשתי דפנות האמבט ונעה ללא חיכוך עם ריצפת האמבט. מזיזים את המסה 0.5m מנקודת שיווי המשקל ומשחררים ממנוחה. התנגדות המים מפעילה כוח גרר: $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$ כאשר: $\lambda = 10 \frac{\text{kg}}{\text{sec}}$.

א. מהו העתק המסה כתלות בזמן?

ב. מחליפים את המים בדבש מה שמגדיל את λ פי $\sqrt{2}$. מזיזים שוב את המסה 0.5m ומשחררים, מהו העתק המסה כתלות בזמן?

תשובות סופיות:

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{3\pi R \eta}{m}\right)^2} \quad (1)$$

$$y_{eq} = \frac{F_b}{2K} \quad \text{א.} \quad \omega^* = \sqrt{\frac{2K}{m} - \left(\frac{6\pi \eta R}{2m}\right)^2} \quad \text{ב.} \quad \frac{2K}{m} = \frac{6\pi \eta R^2}{2m} \quad \text{ג.} \quad (2)$$

$$5\% \quad (3)$$

$$1.6\text{sec} \quad \text{א.} \quad \text{ב. בערך מחזור אחד.} \quad (4)$$

$$x(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{\sqrt{2}}t\right)e^{-5\sqrt{2}t} \quad \text{ב.} \quad x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-5t} \cos\left(5t + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{א.} \quad (5)$$

תנועה הרמונית מאולצת:

רקע:

כוח מאלץ:

$$\vec{F}(t) = F_0 \sin(\Omega t)$$

משוואת התנועה:

$$\ddot{z} + \Gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$$

פתרון משוואת התנועה:

$$x(t) = A(\Omega) \sin(\Omega t + \phi) + x_{\text{הומוגני}}(t)$$

$x_{\text{הומוגני}}(t)$ - הוא הפתרון של תנועה הרמונית מרוסנת שמתחלק לשלושת המקרים במצב עמיד נזיח את הפתרון ההומוגני.

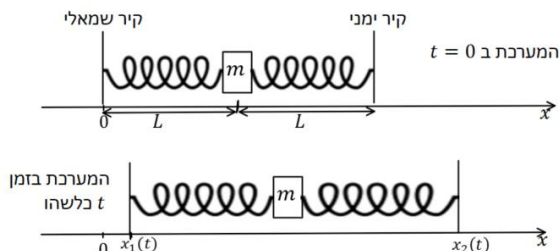
$$A(\Omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2 \Omega^2}}$$

$$\sin(\phi) = \frac{\Gamma \Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2 \Omega^2}}$$

תדירות תהודה - התדירות של הכוח המאלץ עבורה $A(\Omega)$ מקסימאלי.

שאלות:

(1) מסה בין קירות זזים



מסה m מחוברת לשני קפיצים זהים בעלי קבוע k ואורך רפוי L משני צידיה. הקפיצים מחוברים לקירות הנמצאים במרחק L מהמסה משמאלה ומימינה והמערכת כולה מונחת על שולחן חלק (כוח הכובד לתוך הדף).

על המסה פועל כוח גרר: $F = -bv$. ב- $t = 0$ הקירות מתחילים לזוז. ראשית הצירים ממוקמת במרכז התנועה של הקיר השמאלי והכיוון החיובי ימינה. מיקום הקירות כתלות בזמן הוא: $x_1(t) = d \sin(\omega t)$, $x_2(t) = 2L + d \sin(\omega t)$. נתונים: $d \ll L$, d, L, ω, k, b, m .

א. מהי תדירות התנועה ומהי האמפליטודה?

ב. מה התנאי לתהודה בהנחה כי הריסון חלש מאוד?

(2) מציאת תדירות ברבע אמפליטודה

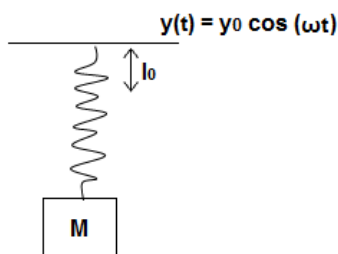
מסה m מחוברת לקפיץ אופקי בעל קבוע k , המסה נעה על מישור חלק ללא חיכוך. על המסה פועל כוח גרר: $f = -bv$ וכוח מאלץ: $F(t) = d \cdot \cos(\omega t)$. מצא את תדירות הכוח בה אמפליטודת התנועה במצב העמיד תהיה רבע מהאמפליטודה המקסימלית. הנח כי: ω, b, k, m, d נתונים וכי: $b \ll \sqrt{mk}$.

(3) מסה תלויה על קרש נע

מסה M מחוברת באמצעות קפיץ אנכי לקרש אופקי הנע בציר ה- y

לפי: $y(t) = y_0 \cos(\omega t)$.

קבוע הקפיץ k ואורכו הרפוי l_0 נתונים. מצא את מיקום המסה כפונקציה של הזמן.



תשובות סופיות:

$$\omega \sim \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad \text{ב.} \quad A(\omega) = \frac{\frac{3kd}{m}}{\sqrt{\left(\frac{2k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{b}{m}\right)^2 \omega^2}} \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4C}}{2}} \quad (2)$$

$$y(t) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\frac{k}{m} - \omega^2} \cos \omega t + y'_0 \quad (3)$$

פיזיקה 3

פרק 2 - מודים עצמיים

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגילים 11

הרצאות ותרגילים – מערכת של שתי מסות

שאלות

1) מסה מחוברת למסה שמחוברת לתקרה

מסה m מחוברת לתקרה באמצעות קפיץ אנכי בעל קבוע $2k$. מסה m נוספת מחוברת למסה הראשונה באמצעות קפיץ אנכי נוסף בעל קבוע k . המסות זזות רק בציר האנכי.

א. הסבירו מדוע ניתן להתעלם מכוח הכובד בבעיה זאת, כאשר אנו באים למצוא את התדירויות העצמיות ואת אופני התנודה.

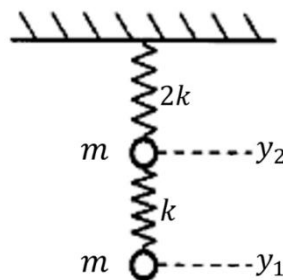
ב. כתבו את מערכת המשוואות בצורה מטריציונית ומצאו את התדירויות העצמיות.

ג. מצאו את אופני התנודה, ותארו אותם.

ד. בזמן $t = 0$ נותנים מכה קטנה למסה התחתונה, כך שהיא מקבלת מהירות התחלתית v_0 .

מצאו את תנועת המסות כתלות בזמן.

רמז: במקרה זה יהיה יותר פשוט לפרוש את תנאי ההתחלה כאשר הפתרון רשום באמצעות סכום של סינוסים וקוסינוסים.



תשובות סופיות

1) א. כוח הכובד הוא כוח קבוע. כוחות קבועים מתבטלים על ידי תוספת קבועה של מתיחה לקפיץ. לכן, כוחות קבועים משנים רק את נקודת שיווי המשקל ואינם משפיעים על התדירויות או על אופני התנודה.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2.41 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.41 \end{pmatrix}. \quad \text{ג.} \quad w_{1,2} = \pm \sqrt{2 + \sqrt{2}} w_0, \quad w_{3,4} = \pm \sqrt{2 - \sqrt{2}} w_0. \quad \text{ב.}$$

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.63 \\ -1.52 \end{pmatrix} \cdot \frac{v_0}{w_0} \sin(\sqrt{2 + \sqrt{2}} w_0 t) + \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.37 \end{pmatrix} \cdot \frac{v_0}{w_0} \sin(\sqrt{2 - \sqrt{2}} w_0 t) \quad \text{ד.}$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

פיזיקה 3

פרק 3 - אנליזת פורייה

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגילים 12

אנליזת פורייה

טורי פורייה

רקע

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \right]$$

כאשר L הוא המחזור של הפונקציה (אפשרי גם שהמחזור של הפונקציה יהיה קטן מ L אבל לא גדול ממנו).

הפונקציה צריכה להיות מחזורית ובמרחב L_2 .

$$A_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx$$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) dx$$

מכפלה פנימית

$$\int_0^L f(x) g(x) dx$$

פונקציות אורתוגונליות

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi mx}{L}\right) dx = 0$$

$$\int_0^L \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi mx}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{nm}$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi mx}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{nm}$$

אפשר לתאר באמצעות אותן נוסחאות של טור פורייה גם קטע מתוך פונקציה שאינה מחזורית או פונקציה המוגבלת לתחום מסוים. צריך לזכור שהטור מתאר רק את הקטע המסוים ובשאר המרחב הוא מתאר שכפול של הקטע ולא את הפונקציה המקורית.

טור סינוסים וקוסינוסים לתיאור פונקציה בקטע סופי

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right)$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx$$

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right)$$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx$$

טור אקספוננטים :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i \frac{2\pi n}{L} x}$$

$$C_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$$

$$C_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-i \frac{2\pi n}{L} x} dx$$

הקשר בין המקדמים בטור אקספוננטים לטור סינוסים וקוסינוסים :

$A_n = C_n + C_{-n}$	$B_n = i(C_n - C_{-n})$
$C_n = \frac{1}{2}(B_n - iA_n)$	$C_{-n} = \frac{1}{2}(B_n + iA_n)$

$$\frac{A_0}{2} = C_0$$

תופעת גיבס :

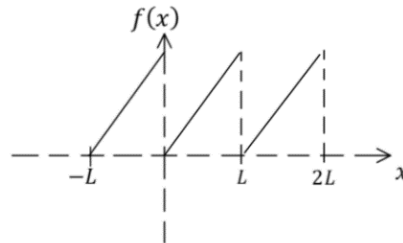
- קרוב לנקודת האי רציפות של הפונקציה המקורית. נראה תנודתיות בפונקציה המתוארת על ידי הטור. תנודתיות זו הולכת וקטנה ככל שמספר האיברים בטור גדל והיא נעלמת לגמרי עבור אינסוף איברים.
- בנקודת אי הרציפות אנחנו נראה סטייה של 0.9% מערך הקפיצה בפונקציה, סטייה זו היא קבועה ואינה קטנה ככל שמגדילים את מספר האיברים (החל ממספר איברים מסוים)

שאלות

(1) דוגמה - פונקציית מסור

מצאו את טור פורייה עבור פונקציית מסור:

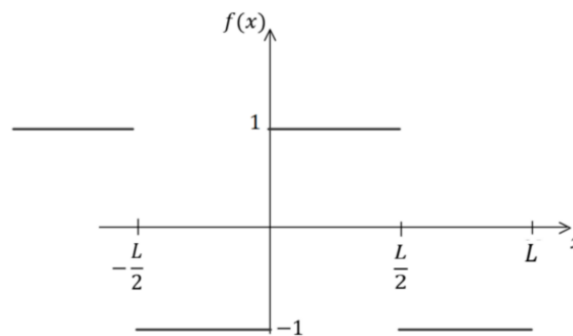
$f(x) = Ax$ כאשר $0 \leq x < L$ ובעלת מחזור L . קבוע נתון.



(2) דוגמה - פונקציית סימן

מצאו את המקדמים של טור פורייה של הפונקציה $f(x)$ השווה לפונקציית סימן $sign(x)$, בתחום $-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$ ובעלת מחזור L . ציירו באמצעות מחשב את המקרה של $N = 1$, $N = 3$, $N = 10$ ו- $N = 50$ עבור $L = 1$

$$sign(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



(3) תרגיל - פונקציית משולש

נתונה פונקציית משולש

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ L - x, & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$

המוגדרת בתחום $0 \leq x \leq L$

א. כתבו את הפונקציה כטור פורייה של קוסינוסים וסינוסים.

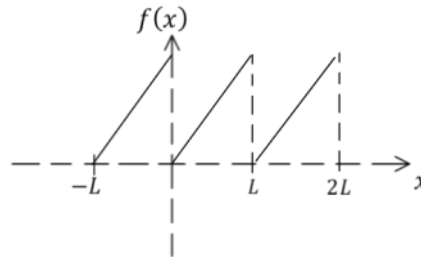
ב. כתבו את הפונקציה כטור סינוסים.

ג. כתבו את הפונקציה כטור קוסינוסים.

ד. הראו כי התוצאה של סעיף ג' מתלכדת עם התוצאה של סעיף א' והסבירו מדוע.

(4) תרגיל - פונקציית מסור עם אקספוננטים

א. מצאו את טור אקספוננטים עבור פונקציית המסור מהדוגמה בתחילת הפרק: $f(x) = Ax$ כאשר $0 \leq x < L$ ובעלת מחזור L . A קבוע נתון.



ב. מצאו את המקדמים של טור סינוסים וקוסינוסים באמצעות המקדמים שמצאתם בסעיף א' והראו שהתשובה זהה לתשובה שקיבלנו בדוגמה של תחילת בפרק.

(5) תרגיל - פונקציה לינארית בתחומים שונים

מצאו את טור פורייה של הפונקציה $f(x) = x$ בתחומים הבאים:

א. $[0, 2\pi]$

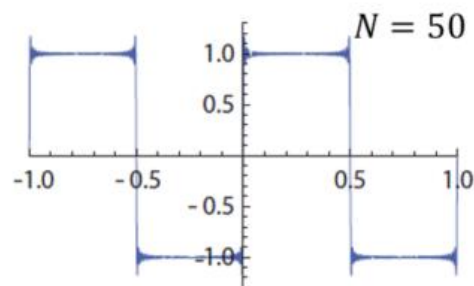
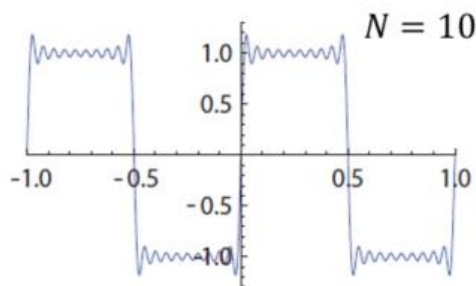
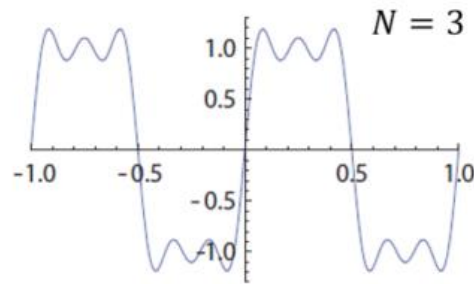
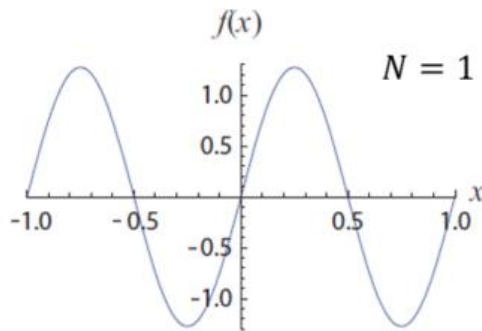
ב. $[-\pi, \pi]$

ג. $[0, 4\pi]$

תשובות סופיות

$$f(x) = \frac{AL}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{AL}{\pi n} \sin\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) \quad (1)$$

$$B_n = \begin{cases} \frac{4}{\pi n} & n \text{ odd} \\ 0 & n \text{ even} \end{cases} ; A_n = 0 \text{ לכל } n \quad (2)$$



$$f(x) = \frac{L}{4} - \sum_{n=1, \text{ odd}}^{\infty} \frac{2L}{\pi^2 n^2} \cos\left(\frac{2\pi n}{L} x\right) \quad (3)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4L}{\pi^2 n^2} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = \frac{L}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L}{\pi^2 n^2} \left(2 \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - 1 - (-1)^n \right) \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \quad \text{ג.}$$

ד. כי שכפול הפונקציה על מחזור L נותן פונקציה זוגית.

$$f(x) = \frac{AL}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{iLA}{2\pi n} e^{i\frac{2\pi n}{L} x} \quad (4)$$

$$A_0 = AL, \quad A_n = 0, \quad B_n = -\frac{LA}{\pi n} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = \pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \sin(nx) \quad (5)$$

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^n \sin(nx) \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = 2\pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n} \sin\left(\frac{n}{2} x\right) \quad \text{ג.}$$

התמרת (טרנספורם) פורייה

רקע

התמרה (טרנספורם) פורייה

$$F(k) = FT[f(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

התמרה הפוכה

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dx$$

תכונות:

1. לינאריות : $FT[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha FT[f(x)] + \beta FT[g(x)]$

אם $f(x) \in G$ אז $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \neq \infty$

• אם $f(x) \in G$ אז $F(k)$ רציפה

• אם $f(x) \in G$ אז $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} F(k) = 0$, רימן - לבג

• אם $f(x)$ זוגית אז $F(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos(kx) dx$

• אם $f(x)$ אי-זוגית אז $F(k) = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin(kx) dx$

• אם $f(x)$ ממשית אז $\overline{F(k)} = F(-k)$

התמרות של פונקציות מיוחדות:

גאוסיאן

$$FT[Ae^{-\alpha x^2}] = \frac{Ae^{-\frac{k^2}{4\alpha}}}{2\sqrt{\pi\alpha}}$$

אקספוננט



$$FT[Ae^{-\alpha|x|}] = \frac{\alpha A}{\pi(\alpha^2 + k^2)}$$

לורנציאן

$$FT\left[\frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}\right] = \frac{1}{2}e^{-\alpha|k|}$$

פונקציית דלתא

$$FT[\delta(x)] = \frac{1}{2\pi}$$

קבוע

$$FT[1] = \delta(k)$$

נוסחת הכפל באקספוננט, קוסינוס או סינוס (מודולציה):

$$FT[f(x)e^{iCx}] = F(k - C)$$

$$FT[f(x)\cos(Cx)] = \frac{F(k - C) + F(k + C)}{2}$$

$$FT[f(x)\sin(Cx)] = \frac{F(k - C) - F(k + C)}{2i}$$

נוסחת הכיווץ והזזה:

$$FT[f(ax + b)] = \frac{1}{|a|}e^{i\frac{kb}{a}}F\left(\frac{k}{a}\right)$$

נוסחת הנגזרת:

אם $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ ו- $f(x), f'(x) \in G$:

$$FT[f'(x)] = ikF(k)$$

נוסחת המומנט:

אם $xf(x) \in G$ אז $F(k)$ גזירה ברציפות ו- $i\frac{d}{dk}F(k) = FT[xf(x)]$

שאלות

(1) דוגמה - אקספוננט עם פונקציית טטה

חשבו את התמרת פורייה של הפונקציה:

$$f(x) = Ae^{-ax}\theta(x)$$

כאשר $\theta(x)$ היא פונקציית Heaviside המוגדרת לפי: $\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$

(2) דוגמה - פונקציית חלון

חשבו את התמרת פורייה של פונקציית חלון המוגדרת לפי:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

(3) דוגמה - חלון מורחב

חשבו את התמרת פורייה של פונקציית חלון מורחב המוגדרת לפי:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -r \leq x \leq r \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}, \text{ כאשר } r > 0$$

(4) תרגיל - נגזרת של לורנציאן

השתמשו בנוסחת הנגזרת ומצאו את התמרת פוריה של הפונקציה

$$f(x) = \frac{x}{(x^2 + a^2)^2}$$

(5) תרגיל - חלון כפול איקס

השתמשו בנוסחת המומנט וחשבו את התמרת פורייה של הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

(6) תרגיל - גאוסיאן כפול איקס בריבוע

מצאו את התמרת פורייה של הפונקציה $f(x) = x^2 e^{-\alpha x^2}$.

(7) תרגיל - משוואה עם נגזרת ראשונה

פתרו את המשוואה הבאה $\frac{d}{dt}q(t) + bq(t) = f_0 e^{-at}\theta(t)$

כלומר מצאו את $q(t)$ באופן מפורש עבור $a, b > 0$.

רמז: מצאו את הפירוק לשברים חלקיים לפי הדרך הבאה

$$\frac{1}{(x+b)(x+a)} = \frac{A}{x+b} + \frac{B}{x+a}$$

תשובות סופיות

$$\frac{A}{2\pi(a+ik)} \quad (1)$$

$$\frac{1}{\pi} \sin c(k) \quad (2)$$

$$\frac{\sin(rk)}{\pi k} \quad (3)$$

$$\frac{-ik}{4\alpha} e^{-\alpha(k)} \quad (4)$$

$$\frac{i}{\pi} \left(\frac{k \cos k - 1 \cdot \sin k}{k^2} \right) \quad (5)$$

$$\frac{e^{\frac{k^2}{4\alpha}}}{4\sqrt{\pi\alpha^3}} \left(1 - \frac{k^2}{2\alpha} \right) \quad (6)$$

$$q(t) = \frac{1}{b-a} f_0(e^{-at} - e^{-bt}) \theta(t) + Ce^{-bt} \quad (7)$$

פיזיקה 3

פרק 4 - מבוא לגלים

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגילים 21

הרצאות ותרגילים – מערכת של שתי מסות

שאלות

1) מסה מחוברת למסה שמחוברת לתקרה

מסה m מחוברת לתקרה באמצעות קפיץ אנכי בעל קבוע $2k$. מסה m נוספת מחוברת למסה הראשונה באמצעות קפיץ אנכי נוסף בעל קבוע k . המסות זזות רק בציר האנכי.

א. הסבירו מדוע ניתן להתעלם מכוח הכובד בבעיה זאת, כאשר אנו באים למצוא את התדירויות העצמיות ואת אופני התנודה.

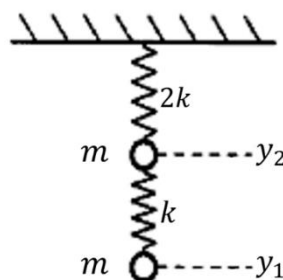
ב. כתבו את מערכת המשוואות בצורה מטריציונית ומצאו את התדירויות העצמיות.

ג. מצאו את אופני התנודה, ותארו אותם.

ד. בזמן $t = 0$ נותנים מכה קטנה למסה התחתונה, כך שהיא מקבלת מהירות התחלתית v_0 .

מצאו את תנועת המסות כתלות בזמן.

רמז: במקרה זה יהיה יותר פשוט לפרוש את תנאי ההתחלה כאשר הפתרון רשום באמצעות סכום של סינוסים וקוסינוסים.



תשובות סופיות

1) א. כוח הכובד הוא כוח קבוע. כוחות קבועים מתבטלים על ידי תוספת קבועה של מתיחה לקפיץ. לכן, כוחות קבועים משנים רק את נקודת שיווי המשקל ואינם משפיעים על התדירויות או על אופני התנודה.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2.41 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.41 \end{pmatrix}. \quad \text{ג.} \quad w_{1,2} = \pm \sqrt{2 + \sqrt{2}} w_0, \quad w_{3,4} = \pm \sqrt{2 - \sqrt{2}} w_0. \quad \text{ב.}$$

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.63 \\ -1.52 \end{pmatrix} \cdot \frac{v_0}{w_0} \sin(\sqrt{2 + \sqrt{2}} w_0 t) + \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.37 \end{pmatrix} \cdot \frac{v_0}{w_0} \sin(\sqrt{2 - \sqrt{2}} w_0 t) \quad \text{ד.}$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

פיזיקה 3

פרק 5 - גלים רוחביים במיתר

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגולים 22

גלים רוחביים במיתר

משוואת הגלים במיתר

משוואת הגלים היא $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$, כאשר

T – המתיחות במיתר

ρ – צפיפות המסה ליחידת אורך

ψ – פונקציית הגל, מתארת את התנועה הרוחבית של כל חתיכה במיתר.

מהירות הגל היא $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$.

פתרון המשוואה:

$$\psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t) + B \sin(kx - \omega t) + C \cos(kx + \omega t) + D \sin(kx + \omega t)$$

יחס הדיספרסיה: $\omega = v \cdot k$.

אפשרויות נוספות לפתרון (על ידי שימוש בזהויות טריגונומטריות)

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= A_1 \cos(kx - \omega t + \phi_1) + A_2 \cos(kx - \omega t + \phi_2) = \\ &= B_1 \cos kx \cos \omega t + B_2 \cos kx \sin \omega t + B_3 \sin kx \cos \omega t + B_4 \sin kx \sin \omega t = \\ &= C_1 \cos kx \cos(\omega t + \phi_1) + C_2 \sin kx \cos(\omega t + \phi_2) \end{aligned}$$

שתי האפשרויות האחרונות עדיפות לגלים עומדים.

פתרון במספרים מרוכבים (העשרה בלבד)

$$\psi(x, t) = A_1 e^{i(kx + \omega t)} + A_2 e^{i(kx - \omega t)} + A_3 e^{-i(kx + \omega t)} + A_4 e^{-i(kx - \omega t)}$$

אם הפונקציה ממשית, אז $A_3 = A_1^*$ ו- $A_4 = A_2^*$, והפתרון מתכנס לחלק הממשי של

$$\psi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)} + B e^{-i(kx + \omega t)}$$

שאלות



1) תרגיל – סטודנטית מודדת את כוח הכובד

סטודנטית רוצה למדוד את תאוצת כוח הכבידה (g) המקומי, הסטודנטית תולה חוט אנכי ומחברת אליו משקולת בעלת מסה $M = 2\text{kg}$. נתון שלחבל יש מסה של $m = 5\text{gr}$ (ניתן להניח התפלגות אחידה) ואורך של $l = 1.2\text{m}$. הסטודנטית שולחת מספר פולסים לאורך החבל ומודדת שהזמן הממוצע שלוקח לפולס להגיע מקצה לקצה הוא $t = 17.5\text{ms}$ (מילי שניות). חשבו את g (ניתן להזניח את משקל החוט ולהשתמש רק במשקל המשקולת, כאשר מחשבים את המתיחות בו).

2) תרגיל - גל קוסינוס מעורר במיתר

צפיפות המסה הקווית במיתר היא $1.2 \times 10^{-4} \frac{\text{kg}}{\text{m}}$, במיתר מעורר גל מהצורה: $\psi(x, t) = 0.005 \cos(3x - 90t)$. חשבו את מהירות הגלים במיתר, את המתיחות ואת המהירות המקסימלית בכיוון רוחבי של נקודה כלשהיא במיתר. הניחו יחידות סטנדרטיות.

3) תרגיל - גל סינוס מתקדם במיתר

נתון גל סינוס המתקדם במיתר.

א. כתבו פונקציה שתתאר גל סינוס הנע על מיתר בכיוון החיובי של ציר ה- x , בעל זמן מחזור של 5 שניות, מהירות של 20 מטר לשנייה ואמפליטודה של 6 מילימטר.

ב. רשמו ביטוי לתאוצה של כל אלמנט מסה במיתר.

ג. איפה נמצאים אלמנטי המסה במיתר בעלי התאוצה הגדולה ביותר (בערך מוחלט) בזמן $t = 3\text{sec}$?

ד. עבור אילו זמנים התאוצה של אלמנט המסה בנקודה $x = 2\text{cm}$ היא הנמוכה ביותר (בערך מוחלט)?

ה. מקטינים את התדירות f של הגל, תארו כיצד ישתנו מהירות אלמנט מסה במיתר, מהירות הגל ואורך הגל?

4 תרגיל – פונקציה ריבועית

נתונה פונקציה $y(x, t) = 32x^2 + 128t^2$. הניחו יחידות סטנדרטיות.

א. הראו שפונקציה זו היא פתרון של משוואת הגלים במיתר.
הדרכה: נסו לרשום את הפונקציה כצירוף של פונקציות, אשר כל אחת מהן מתארת גל במיתר.

ב. מהי מהירות הגלים במיתר זה.

ג. נתון שצפיפות המסה ליחידת אורל של המיתר היא $0.03 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$ חשבו את מתיחותו.

ד. האם הפונקציה $\sqrt{32x^2 + 128t^2}$ היא גם פתרון של משוואת הגלים?

5 תרגיל – מיתר בתווך צמיג *

מיתר בעל מתיחות T וצפיפות ρ נמצא בתווך צמיג, כך שכוח החיכוך

שפועל על אלמנט אורך dx , הוא $F = -b dx \frac{\partial \Psi}{\partial t}$ כאשר b פרמטר נתון.

א. מצאו משוואה המתארת תנודות קטנות של המיתר (משוואת הגלים).

ב. מצאו את אופני התנודה של המערכת, כלומר פתרונות בהם בכל נקודה x תהיה אותה תלות זמנית. הניחו ריסון חלש.

הדרכה: הציבו פתרון מופרד משתנים $\Psi(x, t) = X(x)f(t)$ זהו כי המשוואה עבור $f(t)$ היא משוואה של מתנד הרמוני מרוסן, מהו Γ במקרה הזה?

ג. נתון שבזמן $t = 0$ צורת המיתר היא $\Psi(x, t = 0) = a \cos(k_0 x)$ ושהמהירות ההתחלתית היא אפס. מצאו את צורת המיתר בזמן $t > 0$.

תשובות סופיות

$$9.8 \frac{m}{s} \quad (1)$$

$$30 \frac{m}{s}; 0.102N; 0.45 \frac{m}{s} \quad (2)$$

$$a(x, t) = 0.00096\pi^2 \sin\left(\frac{\pi}{50}x - \frac{2\pi}{5}t\right) \quad \text{ב.} \quad y(x, t) = 0.006_m \sin\left(\frac{\pi}{50}x - \frac{2\pi}{5}t\right) \quad \text{א.} \quad (3)$$

ג. כאשר $x = 85_m + 50n$, מינוס אינסוף לאינסוף.

$$t = 0.001_s - 2.5_n \quad \text{ד.}$$

ה. מהירות אלמנט מסה במיתר קטנה, מהירות הגל לא משתנה ואורך הגל גדל.

$$y(x, t) = (4x + 8t)^2 + (4x - 8t)^2 \quad \text{א.} \quad (4) \quad \text{ב.} \quad 2 \frac{m}{s} \quad \text{ג.} \quad 0.12N \quad \text{ד.} \quad \text{לא.}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{b}{T} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\Gamma = \frac{b}{\rho} \quad \text{כאשר} \quad \psi(x, t) = [A \cos(kx) + B \sin(kx)] e^{-\frac{\Gamma}{2}t} [\cos(\omega t) \quad 2C \sin(\omega t)] \quad \text{ב.}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k_0^2 T}{\rho} - \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \quad \text{כאשר} \quad \psi(x, t) = a \cos(k_0 x) e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \left[\cos(\omega t) \frac{\Gamma}{2\omega} \sin(\omega t) \right] \quad \text{ג.}$$

פיזיקה 3

פרק 6 - חבורת גלים ונפיצה (דיספרסיה)

תוכן העניינים

1. יחס נפיצה כללי ומהירות החבורה 26
2. התרחבות בזמן של פולס 28
3. גלים דועכים ותדירויות סף 30
4. מקרים מיוחדים 31
5. תרגילים נוספים 33

יחס נפיצה כללי ומהירות החבורה

רקע

ייצוג פונקציית הגל באמצעות פורייה: $\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dx$

כאשר: $A(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, 0) e^{-ikx} dx$

מהירות הפאזה: $v_\phi(k) = \frac{\omega}{k}$

מהירות החבורה: $v_g(k) = \frac{\partial \omega}{\partial k}$

שאלות

1) מיתר מתכתי

יחס הנפיצה שמתאר תנודות של מיתר מתכתי ממשי הקשור בשני קצוותיו

$$\omega^2 = \left(\frac{T}{\rho} \right) k^2 (1 + \varepsilon L^2 k^2)$$

כאשר T המתוחות, ρ צפיפות המסה ליחידת אורך, $\varepsilon \ll 1$ פרמטר חסר יחידות המייצג את קשיחות המיתר ו- L אורך המיתר.

א. חשבו את מהירות הפאזה ומהירות החבורה.

ב. הסבירו מדוע מספרי הגל ואורכי הגל זהים לאלו המתקבלים אם המיתר היה אידיאלי.

ג. רשמו את התדירויות העצמיות כתלות ב- n ושאר הנתונים בבעיה.

ד. הראו שבגבול $n \rightarrow \infty$ התדירויות פרופרופציוניות ל- n^2 והשוו למיתר אידיאלי.

ה. נגדיר את התחום האידיאלי של מיתר על פי $\varepsilon L^2 k^2 \ll 1$.

כמה אופני תנודה נמצאים בתחום האידיאלי במיתר שבו $L = 1.2m$

ו- $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-5}$.

(2) הוכחת נוסחה נוספת למהירות החבורה

הראו שניתן לרשום את מהירות החבורה בתור: $v_g(k) = k \frac{\partial v_\phi}{\partial k} + v_\phi$.

(3) חילוץ משוואה מתוך יחס נפיצה

גלים אלקטרו מגנטיים בפלסמה מקיימים את יחס הדיספרסיה הבא:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$$

כאשר ω_p ו- c קבועים.

א. רשמו את משוואת הגלים המתאימה ליחס הדיספרסיה הנ"ל.

ב. מצאו את מהירות הפאזה ומהירות החבורה ובדקו מה קורה בגבול של: $ck \gg \omega_p$.

תשובות סופיות

$$(1) \text{ א. } v_g = \frac{1}{2\omega} \left(\frac{T}{\rho} (2k + 4\varepsilon L^2 k^3) \right), \quad v_\phi = \sqrt{\left(\frac{T}{\rho} \right) (1 + \varepsilon L^2 k^2)}$$

ב. מספרי הגל ואורכי הגל מגיעים מתנאי השפה ואינם מושפעים מיחס הנפיצה.

$$\text{ג. } f_n = \frac{1}{2\pi} \left(\left(\frac{T}{\rho} \right) \frac{\pi^2 n^2}{L^2} (1 + \varepsilon \pi^2 n^2) \right) \frac{1}{2}$$

ד. הוכחה בסרטון.

ה. $n \approx 7$

(2) הוכחה בסרטון.

$$(3) \text{ א. } \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega_p^2 \psi + c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$\text{ב. } v_g \chi v_\rho \chi c \quad ch \gg \omega_p \text{ בגבול, } v_g = \frac{c^2 k}{\omega}, \quad v_\phi = \sqrt{\frac{\omega_p^2}{k^2} + c^2}$$

התרחבות בזמן של פולס

רקע

הרוחב כתלות בזמן של פונקציית גאוסיאן: $\sigma^2(t) = \frac{\sigma^4 + 4\beta^2 t^2}{\sigma^2}$,

כאשר σ היא הרוחב ההתחלתי ו- $\beta = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \Big|_{k_0}$.

שאלות

1) פולס בסיבים אופטיים

נתבונן על הדיספרסיה בסיבים אופטיים. משדרים פולס גאוסיאני בעל אורך זמני τ_0 לסיב באורך l .

מהירות החבורה בסיב היא: $v_g(k)$.

א. ההרחבה הזמנית של הפולס מוגדרת לפי: $\Delta\tau = \sqrt{\tau^2 - \tau_0^2}$.

מצאו נוסחה להרחבה הזמנית כתלות בפרמטרים: τ_0, v_g, l, β .

השווה ל- $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}$.

הדרכה: השתמשו בנוסחה של ההרחבה המרחבית: $\sigma^2(t) = \frac{\sigma^4 + 4\beta^2 t^2}{\sigma^2}$.

ועברו לרוחב הזמני על ידי חלוקה במהירות החבורה.

ב. נתון שמהירות הפאזה עבור סיב ספציפי סביב אורך גל: $\lambda_0 = 1.55 \mu m$.

היא: $v_\varphi(k) \approx \frac{c}{n} \left(1 + \frac{k}{q} \right)$ כאשר c היא מהירות האור, n הוא מקדם

השבירה של הסיב ו- q פרמטר נוסף.

מהו משך רוחב הפולס שניתן לשדר כך שההרחבה שלו תהיה בגודל

הרוחב המקורי, כלומר: $\Delta\tau = \tau_0$.

ג. חשבו את $\Delta\tau$ כאשר:

$$n = 1.47, \quad q = 4.35 \cdot 10^9 \cdot \frac{1}{m}, \quad \lambda_0 = 1.55 \mu m, \quad l = 75 km, \quad c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{sec}$$

מהי המגבלה על קצב השידור המירבי אם הדיספרסיה היא הגורם המגביל?

(2) יחס מדומה בגאוסיאן

בתווך כלשהו מתקיים יחס הנפיצה הבא: $\omega(k) = \alpha k - i\beta k^2$ כאשר α ו- β קבועים חיוביים נתונים.

א. מצאו את מהירות הפאזה ומהירות החבורה כתלות ב- k .

ב. רשמו ביטוי אינטגרלי כללי ל- $\psi(x, t)$ עבור פולס שנע בכיוון החיובי

בהינתן: $\psi(x, 0) = f(x)$.

ג. מצאו את: $\psi(x, t)$ עבור פונקציית גאוסיאן: $\psi(x, 0) = Ae^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}$.

ד. מהו רוחבו ומרכזו של הגאוסיאן כתלות בזמן?

(3) רוחב חבילה לאחר מרחק 3 סגמה

גלים אלקטרו מגנטיים בפלסמה מקיימים את יחס הדיספרסיה

הבא: $\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$, כאשר ω_p ו- c קבועים.

מעוררים בפלסמה חבילת גלים גאוסיאנית ברוחב σ ותדירות מרכזית $\omega_0 > \omega_p$.

מצאו את רוחב החבילה לאחר שהתקדמה מרחק 3σ .

תשובות סופיות

$$(1) \quad \Delta\tau = \frac{2\beta l}{\tau_0 v_g^3} \quad \text{א.} \quad \tau_0 = \sqrt{\frac{2n^2 l}{c^2 q \left(1 + \frac{4\pi}{q\lambda_0}\right)^3}} \quad \text{ב.} \quad \lambda = 2.87 \cdot 10^{11} \text{ sec} \quad \text{ג.}$$

$$(2) \quad v_g(k) = \alpha - 2i\beta k, \quad v_\phi(k) = \alpha - i\beta k \quad \text{א.}$$

$$\text{ב.} \quad F(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx, \quad \psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{i(kx - (\alpha k - i\beta k^2)t)} dk$$

$$\text{ג.} \quad \psi(x, t) = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + 2\beta t}} Ae^{-\frac{1}{2} \frac{(x - \alpha t)^2}{\sigma^2 + 2\beta t}}$$

$$\text{ד.} \quad \mu = \alpha t, \quad \sigma = \sqrt{\sigma^2 + 2\beta t}$$

$$(3) \quad \frac{qc^2 \omega_p^4}{\omega_0^4 (\omega_0^2 - \omega_p^2)} + \sigma^2$$

גלים דועכים ותדירויות סף

רקע

במקרים מסוימים יחס הנפיצה יכול לייצר מספר גל מורכב עבור תדירויות מסוימות. במקרים אלו נקבל גל דועך בתווך. קבוע הדעיכה הוא החלק המדומה של מספר הגל.

שאלות

1) גל דועך בפלסמה

גלים אלקרו מגנטיים בפלסמה מקיימים את יחס הדיספרסיה

הבא: $\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$, כאשר ω_p ו- c קבועים, מעוררים גל

בתדירות: $\omega_0 = \frac{1}{2} \omega_p$.

רשמו ביטוי לפונקציית הגל, מהו קבוע הדעיכה?

תשובות סופיות

$$\psi(x, t) = A e^{-\frac{\sqrt{3}\omega_p}{2c}x} e^{-i\frac{1}{2}\omega_p t} \quad (1)$$

קבוע הדעיכה הוא: $\frac{\sqrt{3}\omega_p}{2c}$.

מקרים מיוחדים

רקע

מכניקת הקוונטים:

פונקציית גל מתארת הסתברות למצוא חלקיק במיקום מסוים.

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} : \text{משוואת שרדינגר}$$

$$\rho = \hbar k : \text{התנע של חלקיק}$$

גלי מים:

יחס הדיספרסיה הכללי עבור גלים בנוזל

$$\omega^2 = \left[gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3 \right] \tanh(kH)$$

σ – קבוע מתח הפנים, כוח ליחידת אורך או אנרגיה ליחידת שטח

H – עומק הנוזל

g – תאוצת הכובד

ρ – צפיפות המסה ליחידת נפח

עבור גלים קצרים (גלי מתח פנים): $\lambda \ll \lambda_c \sim 2cm$

$$\omega = \sqrt{\frac{\sigma k^3}{\rho}}$$

עבור גלים ארוכים (גלי כבידה) אבל קצרים מעומק המים (או הנוזל): $H \gg \lambda \gg \lambda_c$

$$\omega = \sqrt{gk}$$

עבור גלים ארוכים וגדולים מעומק המים (או הנוזל): $\lambda \gg H \gg \lambda_c$

$$\omega = \sqrt{gHk}$$

שאלות

(1) קירובים במים עמוקים

יחס הנפיצה של גלים על השפה של נוזל לא צמיג נתון בקירוב

ע"י: $\omega^2 = \left[gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3 \right] \tanh(kH)$ כאשר g היא תאוצת הכובד, H גובה הנוזל, σ מתח הפנים ו- ρ צפיפות הנוזל.

במקרים בהם המים עמוקים ביחס לאורך הגל אז: $\tanh(kH) \approx 1$ ויחס הנפיצה

$$\omega^2 = gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3 \quad \text{ניתן בקירוב ע"י:}$$

א. הראו באופן כללי שבנקודת הקיצון של מהירות הפאזה מתקבל שמהירות החבורה שווה למהירות הפאזה.

ב. מהו אורך הגל λ_c במקרה הנתון שבו מהירות הפאזה שווה למהירות החבורה? ומהן המהירויות באורך גל זה?

ג. הראו כי עבור גלי כבידה שבהן $\lambda \gg \lambda_c$ מתקבל: $v_g = \frac{1}{2} v_\phi$.

ד. הראו כי עבור גלי מתח פנים שבהם $\lambda \ll \lambda_c$ מתקבל: $v_g = \frac{3}{2} v_\phi$.

(2) צונמי ליד טונגה

בינואר 2022 התפוצץ הר געש תת ימי כ-65 ק"מ מאיי טונגה שבאוקיינוס השקט. קוטר הר הגעש הוא כ-10 ק"מ והוא יצר גל באורך של כ-20 ק"מ. כמה זמן ייקח לגל להגיע לאיים? וכמה זמן ייקח לגל להגיע לחופי קליפורניה שנמצאים בערך 8,500 ק"מ מנקודת היווצרות הגל? הניחו כי עומק האוקיינוס הוא כ-4 ק"מ.

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. הוכחה בסרטון.} \quad \text{ב.} \quad v_g(\lambda_c) = \sqrt{2} \left(\frac{g\sigma}{\rho} \right), \quad \lambda_c = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{g\rho}}$$

ג. הוכחה בסרטון. ד. הוכחה בסרטון.

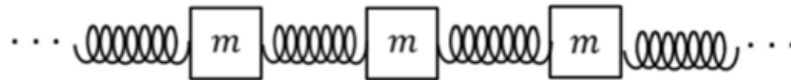
(2) כ-70 שניות לטונגה וכ-26 שעות לקליפורניה.

תרגילים נוספים

שאלות

(1) גלי רוחב בשרשרת מסות בדידה

נתונה מערכת של שרשרת מסות זהות m המחוברות בקפיצים זהים בעלי קבוע k_0 . המסות נמצאות במרחקים זהים אחת מהשנייה ומרחקים אלו גדולים בהרבה מהאורך הרפוי של הקפיץ ומתנודות המסות. מצאו את משוואת הגלים עבור גלי רוחב, כלומר תנודות המסות הן בכיוון מאונך לקפיצים, ומצאו את יחס הדיספרסיה.



(2) מודל לגביש עם שכנים רחוקים

נתונה שרשרת חד ממדית של אטומים זהים בעלי מסה m . בשיווי משקל המרחק בין זוג אטומים הוא l . נתון שכל אטום מחובר לשני שכניו הקרובים ביותר באמצעות קפיצים זהים בעלי קבוע קפיץ k_0 ולשני שכניו הבאים בתור באמצעות קפיצים בעלי קבוע קפיץ k_1 .
א. מצאו את יחס הנפיצה של תווך זה.
ב. מהי מהירות החבורה כתלות ב- k (מספר הגל)?

(3) החזרה והעברה בתווך עם נפיצה

מיתר בעל יחס נפיצה: $\omega = ck$ משתרע מ- $x = -\infty$ עד $x = 0$.
ב- $x = 0$ המיתר מחובר למיתר אחר המשתרע עד $x = \infty$ ובו מתקיימת משוואת הגלים הבאה: $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0$ (זוהי משוואת קליין גורדון לחלקיק קוונטי יחסותי).
א. מצאו את יחס הנפיצה במיתר הימני.
ב. גל הרמוני בתדירות ω ואמפליטודה A מתקדם מ- $-\infty$ למיתר הימני. מצאו את הביטויים עבור הגל המוחזר ועבור הגל העובר במקרים הבאים:

$$\omega > \frac{mc^2}{\hbar} \quad \text{i.}$$

$$\omega < \frac{mc^2}{\hbar} \quad \text{ii.}$$

ג. חשבו את מקדמי ההחזרה וההעברה של ההספק: $R_p = \left\langle \frac{P_r}{P_i} \right\rangle$

ו- $T_p = \left\langle \frac{P_t}{P_i} \right\rangle$ בשני המקרים שבסעיף הקודם.

רמז: העזרו בשימור אנרגיה.

תשובות סופיות

$$\omega(k) = 2\omega_0 \sin\left(\frac{kl}{2}\right), \quad k(4_{n+1} - 24_n + 4_{n-1}) = m\ddot{\psi}_n \quad (1)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k_0}{m}, \quad \omega_1^2 = \frac{k_1}{m}, \quad \omega^2(k) = 4\omega_1^2 \sin^2(kl) + 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{kl}{2}\right) \quad (2)$$

$$\frac{1}{\omega} (2\omega_1^2 l \cdot \sin(2kl) + \omega_0^2 l \sin(kl)) \quad (3)$$

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \omega_s^2, \quad \omega_s^2 = \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \quad (3)$$

$$\psi_t(x, t) = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2}} Ae^{-i\left(\frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_s^2}}{c}x - \omega t\right)}, \quad \psi_r(x, t) = \frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2}}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2}} Ae^{-i\frac{\omega}{c}(x+ct)} \quad \text{ב. i.}$$

$$\psi_t(x, t) = \frac{2A}{1 + i\sqrt{\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2 - 1}} e^{-\frac{\sqrt{\omega_s^2 - \omega^2}}{c}x} e^{-i\omega t}, \quad \psi_r(x, t) = \frac{1 - i\sqrt{\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2 - 1}}{1 + i\sqrt{\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2 - 1}} Ae^{-i\frac{\omega}{c}(x+ct)} \quad \text{ii.}$$

$$T_p = 1 - \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2}}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2}} \right)^2, \quad R_p = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2}}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^2}} \right)^2 \quad \text{ג. i.}$$

$$T_p = 0, \quad R_p = 1 \quad \text{ii.}$$

פיזיקה 3

פרק 7 - גלים אלקטרו-מגנטיים

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגילים 35

משוואות הגלים האלקטרומגנטיים

רקע:

משוואות מקסוול בהיעדר מטענים וזרמים חופשיים:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{H} &= -\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

בחומר איזוטרופי ולינארי מתקיים:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

משוואת הגלים עבור השדה החשמלי והמגנטי:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

כאשר:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad \text{ובריק:}$$

המשוואה היא עבור כל רכיב בנפרד.

המשוואה זהה לשדה המגנטי.

אינדקס השבירה (מהירות האור בריק חלקי מהירות האור בחומר):

$$n = \frac{c}{u} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$$

תמיד גדול מאחד (מהירות האור בחומר תמיד קטנה מהמהירות בריק):

פתרון למשוואת הגלים במימד אחד:

$$E_x(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

מעבר לייצוג קופלקסי: $\cos(kx - \omega t) = \text{Re}[e^{i(kx - \omega t)}]$

כשעובדים עם הייצוג הקומפלקסי ניתן לעבוד רק עם החלק התלוי במרחב (או השדה ב- $t=0$) ובסוף להכפיל את הפונקציה ב- $e^{-i\omega t}$ בשביל לקבל את התלות בזמן.

יחס הדיספרסיה - הקשר בין התדירות למספר הגל:

$$\omega = uk$$

אם היחס לא לינארי אז צריך להבדיל בין מהירות הפאזה למהירות החבורה:

$$u_{ph} = \frac{\omega}{k}, u_g = \frac{d\omega}{dk}$$

גל אלקטרומגנטי מישורי

רקע:

הצורה הכללית של הפתרון ההרמוני:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

כאשר:

$$\vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z} \quad \text{וקטור הגל -}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

הערות – תמיד אפשר להוסיף גם פאזה.

$$\omega = u|k| = u\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \quad \text{יחס הדיספרסיה בגל:}$$

הכיוון של $\vec{k}$ הוא כיוון התקדמות הגל ובגל מישורי תמיד $\vec{E} \perp \hat{k}$.

לכיוון של $\vec{E}$ (המסומן בדו"כ ב- $\hat{n}$) קוראים כיוון הקיטוב של הגל.

השדה המגנטי בגל:

כיוון השדה המגנטי מאונך לשדה החשמלי ולכיוון התקדמות הגל. התלות בזמן ובמרחב של השדה המגנטי זהה לזו של השדה החשמלי. (אותו קוסינוס עם אותו ארגומנט).

$$\vec{B} = \frac{1}{u} \hat{k} \times \vec{E} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad \text{העכבה של התווך:}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \eta_0 = 120\pi \quad \text{בריק:}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta} \hat{k} \times \vec{E},$$

$$\vec{E} = -\eta \hat{k} \times \vec{H}$$

וקטור פוינטינג (האנרגיה שהגל נושא) - כמות אנרגיה ליחידת שטח ליחידת זמן.

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

בנוסחה מציבים את הביטוי הממשי של השדות.

הכיוון של $\vec{S}$ הוא בכיוון של $\hat{k}$ (כיוון התקדמות הגל).
הממוצע של הוקטור פוינטינג בזמן (נקרא גם העוצמה של הגל):

$$\vec{S}_{\text{Avg}} = \langle \vec{S} \rangle = \text{Re} \left\{ \frac{\vec{\tilde{E}} \times \vec{\tilde{H}}^*}{2} \right\}$$

$\vec{\tilde{E}}$ ו- $\vec{\tilde{H}}$ הם הייצוג הקומפלקסי של השדות.

המרה של הנגזרות בזמן ובמרחב:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$$

$$\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$$

שאלות:

- (1) **דוגמה - חישוב כל הגדלים הבסיסיים**
השדה החשמלי של גל א"מ המתקדם בחומר לא מגנטי נתון בביטוי
הבא: $\vec{E} = 4\pi \cos(10^9 t - 6x) \hat{y} \frac{mV}{m}$
א. מהו התדר של הגל ומהו אורך הגל?
ב. מהו מקדם השבירה והקבוע הדיאלקטרי של החומר?
ג. מהו $\vec{H}$ ומהו וקטור פוינטינג הממוצע?

- (2) **דוגמה 2 - חישוב כל הגדלים**
השדה: $\vec{H} = H_0 e^{i(2\pi x - 6\pi y - 10^8 \pi t)} \cdot \frac{3\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{10}}$ מתפשט בתווך לא מגנטי.
מצאו את:
א. וקטור הגל ואורך הגל.
ב. תדר הגל.
ג. מהירות הגל בתווך ומקדם השבירה.
ד. המקדם הדיאלקטרי והעכבה.
ה. השדה החשמלי.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } f = 1.59 \cdot 10^8 \text{ Hz}, \lambda = \frac{\pi}{3} \text{ m} \quad \text{ב. } n = 1.8, \varepsilon_r = 3.24$$

$$\text{ג. } \vec{H} = 6 \cdot 10^{-5} \cos(6x - 10^9 t) z \frac{A}{m}, \vec{S}_{Avg} = 12\pi \cdot 10^{-8} \hat{x}$$

$$(2) \quad \text{א. } \vec{K} = 2\pi(1, -3, 0), \lambda = \frac{1}{\sqrt{10}} \text{ m} \quad \text{ב. } f = 5 \cdot 10^7 \text{ Hz}$$

$$\text{ג. } u = 5 \cdot \sqrt{10} \cdot 10^6 \frac{m}{\text{sec}}, n = 18.97 \quad \text{ד. } \eta = 2\pi \cdot \sqrt{10}, \varepsilon_r = 360$$

$$\text{ה. } \vec{E}(x, y, t) = -2\pi \cdot \sqrt{10} \cdot H_0 e^{i(2\pi x - 6\pi y - 10^8 \pi t)} \hat{z}$$

קיטוב מעגלי ואליפטי

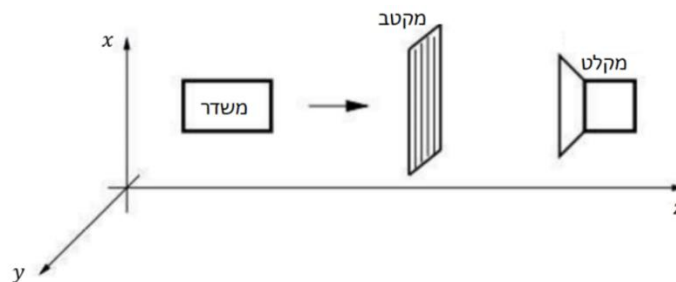
רקע:

הקיטוב של הגל נקבע על ידי כיוון השדה החשמלי (לא לבלבל עם כיוון הגל).
מקטב - מודד את הקיטוב של הגל.
קיטוב לינארי - כיוון השדה קבוע.
קיטוב מעגלי ימני - רכיב y מפגר אחרי רכיב x ב- 90° .
 כלומר הפאזה של רכיב y פחות הפאזה של רכיב x שווה $\varphi = \frac{\pi}{2}$.
 השדה מסתובב נגד השעון או בהתאם לכלל יד ימין ביחס לציר ה- z .
קיטוב מעגלי שמאלי - רכיב y מקדים את רכיב x ב- 90° .
 ($\varphi = -\frac{\pi}{2}$) השדה מסתובב עם השעון או הפוך לכלל יד ימין ביחס לציר ה- z).
קיטוב אליפטי - מתקבל כאשר יש הפרש פאזה של 90° והאמפליטודה של הרכיבים שונה או אם הפרש הפאזה שונה מ- 90° .

שאלות:

1) דוגמה חשובה - שינוי עוצמה ממקטבים

נתונה המערכת הבאה:



במערכת, המשדר יכול לייצר גל הנע בכיוון z בכל קיטוב שנרצה.
 והמשדר יכול למדוד גל בכל קיטוב שמגיע אליו.
 המקטב מורכב מרשת מתכתית כפי שמתואר באיור.
 כיוון המקטב מוגדר לפי כיוון הרכיב של השדה שעובר, כלומר במאונך לרשת.
 א. עבור המצב של המקטב בתמונה נתון כי המקלט אינו קולט סיגנל.
 רשמו את פונקציית הגל שמייצר המשדר.
 ב. עבור אותו גל מוסיפים לפני המקטב הקיים מקטב זהה נוסף בזווית של 30° מעלות ביחס לציר ה- x .
 מה היחס בין העוצמה שימדוד הגלאי לעוצמה שיוצאת מהמשדר?

(2) דוגמה - קיטוב לינארי ומעגלי

מצאו את הקיטוב של השדה במקרים הבאים.

עבור קיטוב לינארי רשמו את כיוון הקיטוב וזווית הקיטוב.

א. $\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{x} + 3E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{y}$

ב. $\vec{E} = E_0 \cos\left(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) \hat{x} + E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{y}$

ג. $\vec{E} = E_0 \cos(kz + \omega t) \hat{x} + E_0 \cos\left(kz + \omega t + \frac{\pi}{2}\right) \hat{y}$

ד. $\vec{H} = H_0 \cos\left(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) \hat{x} + H_0 \cos\left(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) \hat{y}$

תשובות סופיות:

(1) א. $\vec{E}(z, t) = E_0 \hat{x} \cos(kz - \omega t)$ ב. $\frac{3}{16}$

(2) א. קיטוב ליניארי, $\theta = 72^\circ$, $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3)$

ב. קיטוב מעגלי שמאלי. ג. קיטוב מעגלי ימני.

ד. קיטוב ליניארי, $\theta = -45^\circ$, $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$

פגיעה ישרה בתווך דיאלקטרי

רקע:

כאשר גל הנע בתווך אחד פוגע בשפה של תווך אחר נקבל גל עובר וגל מוחזר תדירות כל הגלים זהה ושווה לתדירות המקוראת אמפליטודות הגל העובר והגל המוחזר נקבל מתנאי השפה.

$$D_{2\perp} - D_{1\perp} = \sigma_{free} \quad B_{2\perp} = B_{1\perp}$$

$$E_{2\parallel} = E_{1\parallel} \quad H_{2\parallel} - H_{1\parallel} = k_{free}$$

σ_{free} - היא צפיפות המטען המשטחית והחופשית על השפה

k_{free} - צפיפות הזרם המשטחי והחופשי על השפה

בפגיעה ישרה (או פגיעה בניצב) לשני השדות רכיב מקביל לשפה בלבד.

בתווך דיאלקטרי: $\sigma_{free} = k_{free} = 0$
 הקשר בין האמפליטודות:

$$\frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

$$\frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

השוויון השני נכון רק אם: $\mu_1 = \mu_2$ (זה המצב ברוב המקרים).
 לא לבלבל בין n ל- η .

מקדם העברה:

$$\tau = \frac{E_t}{E_0}$$

מקדם החזרה:

$$\Gamma = \frac{E_r}{E_0}$$

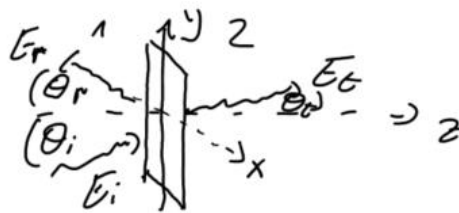
בפגיעה ישרה בתווך דיאלקטרי:

$$1 + \Gamma = \tau$$

פגיעה בזווית בתווך דיאלקטרי

רקע:

מישור השפה בין החומרים (מישור xy באיור).
מישור הפגיעה הוא המישור של וקטורי הגל (מישור yz באיור).



משיקולי סימטריה k_y זהה לכל הגלים.

$$\theta_i = \theta_r$$

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{u_t}{u_i} = \frac{n_i}{n_t} \quad \text{חוק סנל:}$$

אם: $n_i > n_t$ אז קיימת **זווית קריטית**.
 אם זווית הפגיעה גדולה מהזווית הקריטית אז לא יהיה גל עובר או תהיה החזרה מלאה:

$$\theta_c = \arcsin\left(\frac{n_t}{n_i}\right)$$

משוואות פרנל:

עבור פגיעה בזווית עם קיטוב אנכי (השדה החשמלי מאונך למישור הפגיעה):

$$\Gamma^\perp = \frac{E_{r0}^\perp}{E_{i0}^\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} = \frac{n_1 \cos \theta_i - \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{n_1 \cos \theta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}$$

$$\tau^\perp = \frac{E_{t0}^\perp}{E_{i0}^\perp} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}$$

$$1 + \Gamma^\perp = \tau^\perp$$

עבור פגיעה בזווית עם קיטוב מקבילי (השדה החשמלי מקביל למישור הפגיעה):

$$\Gamma^{\parallel} = \frac{E_{r_0}^{\parallel}}{E_{i_0}^{\parallel}} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} = \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos \theta_i - n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos \theta_i + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}$$

$$\tau^{\parallel} = \frac{E_{t_0}^{\parallel}}{E_{i_0}^{\parallel}} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} = \frac{2n_1 n_2 \cos \theta_i}{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos \theta_i + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}$$

$$1 + \Gamma^{\parallel} = \tau^{\parallel} \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}$$

זווית ברוסטר היא הזווית שבה יש העברה מלאה (ואין החזרה).

זווית ברוסטר בקיטוב מקבילי:

$$\sin^2 \theta_B^{\parallel} = \frac{1 - \frac{\mu_t \epsilon_i}{\mu_i \epsilon_t}}{1 - \left(\epsilon_t / \epsilon_i \right)^2}$$

אם: $\mu_2 \approx \mu_1$ אז:

$$\sin \theta_B^{\parallel} = \frac{1}{1 + \epsilon_i / \epsilon_t}$$

$$\tan \theta_B^{\parallel} = \frac{n_t}{n_i}$$

בקיטוב אנכי:

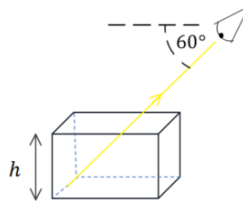
$$\sin^2 \theta_B^{\perp} = \frac{1 - \frac{\mu_i \epsilon_t}{\mu_t \epsilon_i}}{1 - \left(\mu_i / \mu_t \right)^2}$$

* מאוד נדיר למצוא חומרים שקיימת עבורם זווית ברוסטר בקיטוב אנכי.

שאלות:

(1) תרגיל - צופה מסתכל על תיבה

לתיבת זכוכית ריקה גובה של: $h = 6\text{cm}$. צופה מסתכל על התיבה, כאשר הוא מוריד את ראשו בזווית של 60 מעלות מתחת לאופק הוא רואה בדיוק את קצה הבסיס הרחוק של התיבה. ממלאים את התיבה בשמן $n = 1.54$. איזה נקודה בבסיס התיבה יראה הצופה? (מצאו את מרחק הנקודה מהקצה הרחוק של בסיס התיבה).



(2) תרגיל - שבירה דרך מספר חומרים

בתמונות הבאות מתוארים חומרים בעלי מקדמי שבירה שונים. גל עובר דרך השכבות כמתואר באיורים. הניחו שהתמונות מדויקות. דרגו את מקדמי השבירה של החומרים השונים, בכל תמונה, מהקטן לגדול (אין קשר בין התמונות).



(3) דוגמה - גל פוגע בזווית במים

- גל אלקטרומגנטי מישורי נע באוויר (ריק) ופוגע בזווית בפני המים. הקבוע הדיאלקטרי של מי ים הוא בערך 80. (הניחו שהמים מתנהגים כמבודד).
- מצאו את זווית ברוסטר עבור גל בקיטוב מקבילי.
 - המקוטב אנכית פוגע בפני המים בזווית שחישבתם בסעיף א.
 - מהי זווית ההעברה של הגל?
 - מה הם מקדמי ההעברה וההחזרה?

(4) תרגיל - שבירה במעברים עם זווית קריטית וברוסטר

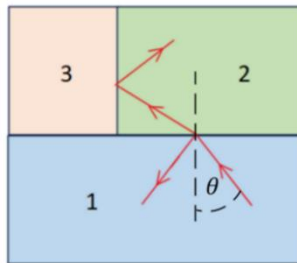
אור נכנס מחומר 1 ועובר שבירה במעבר לחומר 2 כך שחלקו מוחזר וחלקו מועבר, ראו איור. הקרן שהועברה ממשיכה עד לפגיעה בחומר 3 שם היא פוגעת בו בזווית הקריטית ומבצעת החזרה מלאה.

נתון: $n_1 = 1.5$, $n_2 = 1.3$, $n_3 = 1.1$.

א. מהי הזווית θ שבאיור?

ב. האם צריך להגדיל או להקטין את הזווית θ כך שהאור לא יבצע החזרה מלאה וייכנס לחומר 3?

ג. האם האור יעבור לחומר 3 בהינתן ש- θ היא זווית ברוסטר למעבר בין חומר 1 לחומר 2? (הניחו כי הפרמבילות זהה).

**(5) תרגיל - גלים בין שני מקטבים**

גל בעל קיטוב בכיוון x ואמפליטודה של השדה החשמלי E_0 נע בכיוון z . הגל עובר דרך שני מקטבים הראשון בעל קיטוב בזווית 20 מעלות עם ציר x והשני בזווית 60 מעלות עם ציר x . בכל הסעיפים ניתן להזניח החזרות מרובות.

א. מהי האמפליטודה והכיוון של הגל העובר את המקטב הראשון?

ב. מהי האמפליטודה והכיוון של הגל העובר את המקטב השני? רשמו ביטוי לגל זה.

ג. בהנחה שהמקטב השני הוא מקטב רשת המחזיר את הרכיב המקביל ללא איבוד אנרגיה לחום. מהי האמפליטודה והכיוון של הגל המוחזר מהמקטב השני?

6 תרגיל - מקטב מערימה של משטחי זכוכית

- דרך פשוטה ויעילה לבנות מקטב היא להשתמש בערימה של משטחי זכוכית מיקרוסקופים עם מרווחים ביניהם. הרעיון הוא לנצל את ההבדל בין מקדמי ההעברה של הרכיב המקביל והמאונך. בזווית ברוסטר ישנה העברה מלאה של הרכיב המקביל בעוד שרק חלק מהרכיב המאונך עובר, כלומר זהו סוג של מקטב. נניח שיש לנו חתיכה אחת של זכוכית והפגיעה בה היא בזווית ברוסטר.
- א. מצאו את זווית ברוסטר עבור הפגיעה בזכוכית (מאוור) בעלת מקדם שבירה $n = 1.46$ (מקדם השבירה תלוי באורך הגל, הניחו שזה מקדם השבירה עבור אורך הגל שבבעיה וכי הפרמביליות אחידה).
- ב. מצאו את זווית ההעברה, האם היא תלויה בקיטוב?
- ג. הראו כי זווית הפגיעה ביציאה מהזכוכית היא זווית ברוסטר לאותו מעבר.
- ד. מצאו את מקדמי ההעברה לכל רכיב ($\tau^\parallel, \tau^\perp$) עבור היציאה מהזכוכית.

מקדמי ההחזרה וההעברה של האנרגיה עבור שני הרכיבים מוגדרים באופן

$$\text{הבא: } T = \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} |\tau|^2$$

מקדם ההעברה הכולל הוא מכפלה של מקדם ההעברה בכניסה של האור לזכויות במקדם ההעברה של היציאה של האור מהזכוכית. ניתן להזניח החזרות מרובות.

ה. מהו מקדם ההעברה הכולל של האנרגיה עבור כל רכיב.

- ו. נגדיר את יעילות המקטב לפי: $e = \frac{T^\parallel}{T^\perp}$ לכמה שכבות נזדקק על מנת להגיע ליעילות של $e = 10^4$

תשובות סופיות:

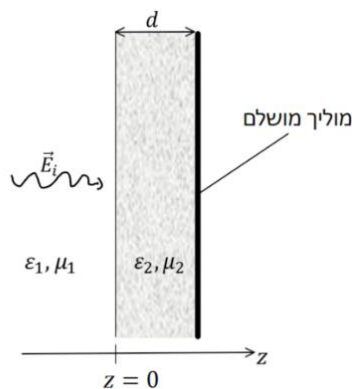
- (1) 1.4cm
- (2) תמונה א: $n_1 > n_2 > n_3$, תמונה ב: $n_5 < n_3 = n_2 < n_1 < n_4$
- (3) א. $\theta_B = 84^\circ$ ב. $\theta_t = 6.4^\circ$
- ג. $\tau^\perp = 0.025, \Gamma^\perp = -0.975$
- (4) א. $\theta \approx 27.5^\circ$ ב. צריך להגדיל את טטה. ג. האור ייכנס.
- (5) א. $E_0 \cos(20^\circ)$ בכיוון: $\cos(20^\circ)\hat{x} + \sin(20^\circ)\hat{y}$ ב. $\vec{E}(z, t) = E_0 \cos(20^\circ) \cos(40^\circ) (\cos(60^\circ)\hat{x} + \sin(60^\circ)\hat{y}) \cos(kz - \omega t)$ ג. $E_0 \cos(20^\circ) \sin(40^\circ)$ בכיוון: $\cos(30^\circ)\hat{x} - \sin(30^\circ)\hat{y}$
- (6) א. $\theta_B \approx 55.6^\circ$ ב. $\theta_t \approx 34.4^\circ$ לא תלויה בקיטוב.
- ג. $\tau^\perp = 1.36, \tau^\parallel = 0.685, \tau^\perp = 0.754, \tau^\parallel = 1$ ה. 33

מעבר של יותר מתווך אחד

רקע:

נציב את תנאי השפה עבור כל ממעבר.

שאלות:



1) שכבת חומר דיאלקטרי ליד מוליך מושלם

גל הנע בתווך דיאלקטרי בעל ϵ_1, μ_1 פוגע בניצב לשכבה בעובי d עם ϵ_2, μ_2 ומוחזר ממוליך מושלם הנמצא בקצה השכבה, ראו איור. השדה החשמלי של הגל נתון לפי: $\vec{E}_i(z, t) = E_{i0} \hat{x} \cos \omega \left(\frac{z}{u} - t \right)$ מצאו את:

א. $\vec{E}_r(z, t)$

ב. $\vec{E}_1(z, t)$

ג. $\langle S_1 \rangle$

ד. העובי d עבורו לא ניתן יהיה לזהות את השכבה.

2) גל עובר דרך פיסת נחושת

גל אלקטרומגנטי מישורי בתדירות 10 MHz עם אמפליטודה E_{i0}

פוגע בניצב לפיסת נחושת (פגוע $\sigma = 5.80 \cdot 10^7 \frac{\text{S}}{\text{m}}$) דקה

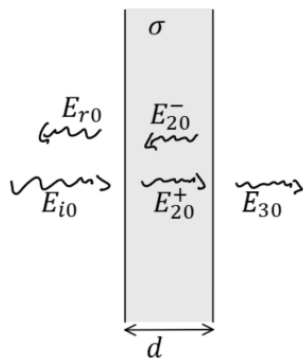
מישורית בעובי d השווה לעומק החדירה.

הזניחו החזרות מסדר שני ומעלה וחשבו את:

א. האמפליטודות של כל שאר

הגלים: $E_{r0}, E_{20}^+, E_{20}^-, E_{30}$ כתלות ב- E_{i0} .

ב. $\frac{\langle S_3 \rangle}{\langle S_{1i} \rangle}$



3) חישוב כל הגדלים

השדה החשמלי של גל מישורי הנע בתווך הומוגני נתון לפי

הביטוי: $\vec{E} = \cos(z + 2\pi \cdot 10^7 t) \hat{y}$ ביחידות של וולט למטר.

א. מהו תדר הגל (בהרץ)?

ב. מהו כיוון התקדמות הגל?

ג. מהו אורך הגל?

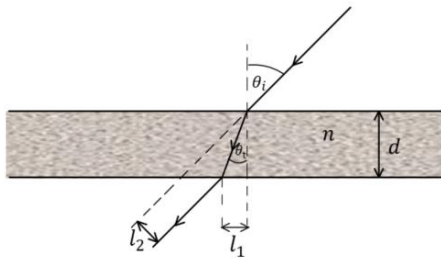
בהנחה כי: $\mu = \mu_0$ מצאו את המקדם הדיאלקטרי היחסי של החומר.

רשמו ביטוי ל- $\vec{H}$.

ד. רשמו ביטוי לווקטור פוינטינג הממוצע בזמן.

(4) ציירו קיטוב אליפטי

ציירו את אליפסת הפולריזציה (האליפסה אותה "מצייר" קצהו של ווקטור השדה החשמלי במישור המאונך לכיוון התקדמות הגל כאשר הצופה מודד אותו לאורך זמן בנקודה קבועה) עבור הגל: $\vec{E} = (5i\hat{x} - \hat{y})e^{-i(\pi z + \omega t)}$.

(5) חישוב ההזזה לטרלית (חוק סנל)

קרן אור נעה באוויר ופוגעת בזווית θ_i בחומר שקוף בעובי d בעל אינדקס שבירה n .

א. מצאו את זווית ההעברה.

ב. מצאו את המרחק של נקודת היציאה l_1 .

ג. מצאו את ההזזה הטרלית (המרחק l_2 באיור).

(6) תרגיל - אלכוהול מזויף

רועי קנה בקבוק יוקרתי של משקה ג'ין ורוצה לוודא שהאלכוהול אינו מזויף. אלכוהול מזויף מכיל כמות גבוהה של אתנול במקום מתנול. לרועי יש שני מצביעי לייזר באורכי גל של $532nm$ ו- $638nm$. הוא מכוון את הלייזר בזווית 30° מעלות כלפי מעלה ולמרכז הבקבוק ומודד את הגובה h ממנו יוצאת קרן האור, ראו איור. קוטר הבקבוק הוא $12cm$. את מקדמי השבירה של מתנול ואתנול ניתן למצא באינטרנט והקירוב שלהם עבור תחום אורכי גל: $\lambda \in [0.4\mu m, 0.8\mu m]$ הוא:

$$n(\lambda) \approx -0.8\lambda^3 + 1.8\lambda^2 - 1.4\lambda + 1.7 \quad \text{מתנול}$$

$$n(\lambda) \approx -0.1\lambda^3 + 0.3\lambda^2 - 0.3\lambda + 1.4 \quad \text{אתנול}$$

בנוסחה יש להציב את אורך הגל הנמדד באוויר ב - μm .

לצורך הפשטות נניח כי הבקבוק מכיל 100% אתנול או מתנול.

א. ציירו באמצעות מחשב גרף של $n(\lambda)$ עבור מתנול ואתנול על אותו גרף.

ב. ציירו באמצעות מחשב את זווית ההעברה כתלות ב- λ .

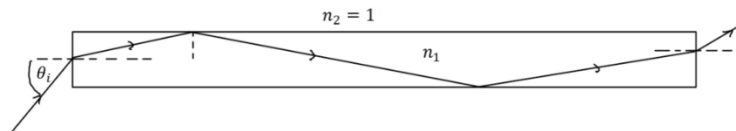
על איזה מהלייזרים תמליצו לרועי להשתמש?

ג. מצאו את הערך של h עבור כל אחד מסוגי החומרים.

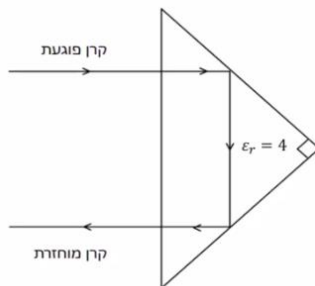


(7) גל א"מ לא יוצא מסיב אופטי

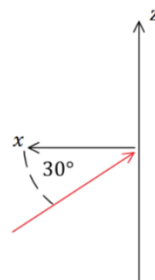
סיב אופטי ישר עשוי מחומר דיאלקטרי שקוף בעל אינדקס שבירה n_1 . גל אלקטרו מגנטי נכנס בצידו האחד של הסיב בזווית θ_i ופוגע בדפנות של הסיב במהלך ההתקדמות. מהו n_1 המינימלי כך שהגל לא יצא מהסיב עד אשר יגיע לקצה השני ללא תלות בזווית הפגיעה θ_i .

**(8) אור מוחזר מפריזמה משולשת**

אור נכנס ומוחזר מפריזמה משולשת העשויה זכוכית. מסלול קרן האור מתואר באיור. מהו אחוז עוצמת האור של הקרן המוחזרת. הניחו $\epsilon_r = 4$ עבור זכוכית. הפריזה היא משולש שווה שוקיים וישר זווית.

**(9) תרגיל - גל פוגע במראה בזווית**

גל אלקטרו מגנטי מתקדם במישור xz עם זווית של 30° מעלות ביחס לציר ה- x . כפי שמתואר באיור. לגל כיתוב בכיוון y . הגל פוגע במראה מישורית הנמצאת במישור zy ומוחזר ממנה. א. כתבו את $\hat{k}$ עבור הגל הפוגע והמוחזר. ב. מהו הכיוון של השדה החשמלי והמגנטי של הגל המוחזר?



תשובות סופיות:

$$\tan \theta = \frac{\eta_2}{\eta_1} \tan(K_2 d) \quad \text{כאשר} \quad \vec{E}_r(z, t) = E_{i0} \cos(K_1 z + \omega t - 2\theta) \hat{x} \quad (1)$$

$$\cdot \langle S_1 \rangle = 0 \quad \cdot \vec{E}_1(z, t) = E_{i0} \hat{x} [\cos(K_1 z - \omega t) + \cos(K_1 z + \omega t - 2\theta)] \quad \cdot$$

$$d = \frac{\pi n}{\omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2}} \quad (7)$$

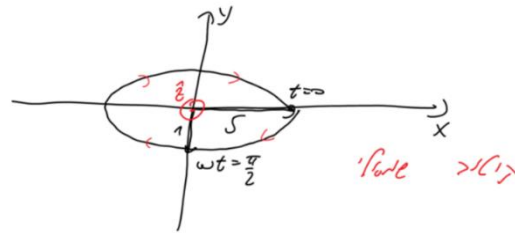
$$\frac{E_{r0}}{E_{i0}} \approx -1 + 4.67 \cdot 10^{-6}i, \quad \frac{E_{20}^+}{E_{i0}} \approx (1.90 + 0.140i) \cdot 10^{-6}, \quad \frac{E_{20}^-}{E_{i0}} \approx (-2.49 + 4.53i) \cdot 10^{-6}. \quad (2)$$

$$\frac{\langle S_3 \rangle}{\langle S_1 \rangle} = 3.13 \cdot 10^{-11} \quad \text{and} \quad \frac{E_{30}}{E_{i0}} \approx (-2.70 + 4.90i) \cdot 10^{-6}$$

$$f = 10^7 \text{ Hz} . \aleph \quad \text{ב. בכיוון } -\hat{z} . \lambda = 2\pi m . \gamma \quad \varepsilon_r = 22.8 . \daleth \quad (3)$$

$$\vec{S}_{Avg} = -\frac{\hat{z}}{16\pi^2} \quad \text{and} \quad \vec{H}(z,t) = \frac{1}{8\pi^2} \cos(z + 2\pi \cdot 10^7 t) \hat{x} \cdot \vec{n}$$

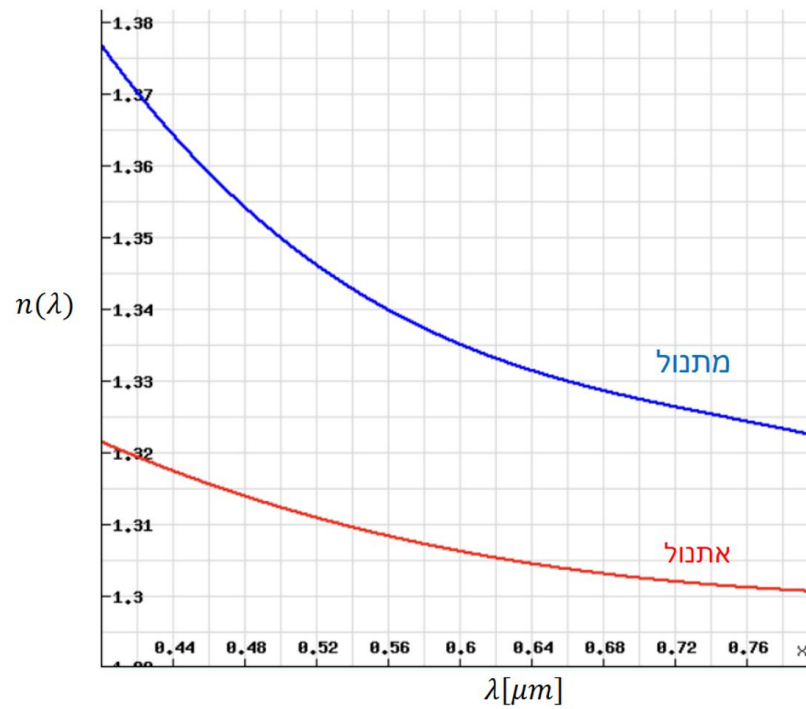
(4) שרטוט:



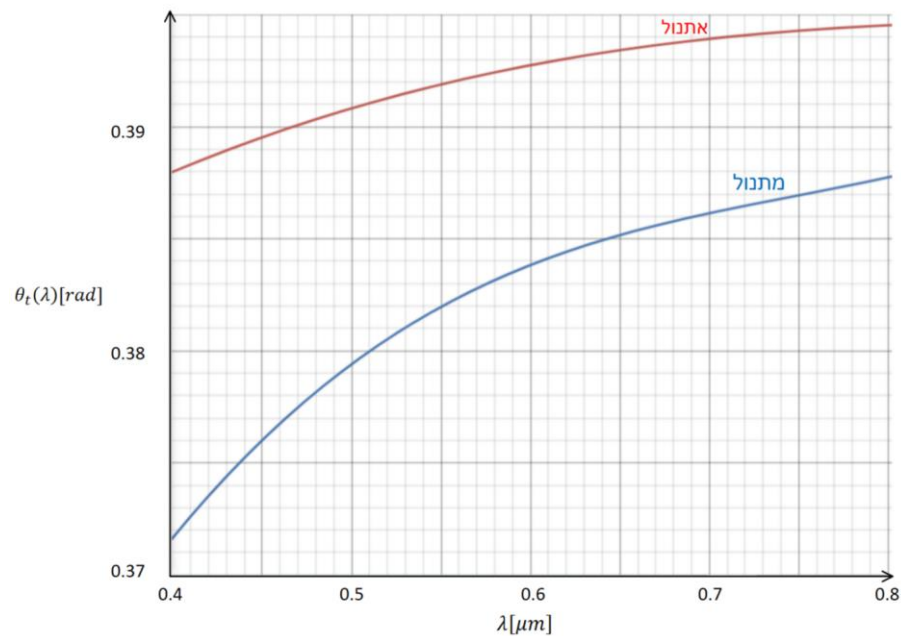
$$.l_1 = \frac{d \sin \theta_i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}} \quad .\text{ج} \quad .\sin \theta_t = \frac{1}{n} \sin \theta_i \quad .\text{د} \quad (5)$$

$$.l_2 = d \sin \theta_i \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}} \right) . \lambda$$

(6) א. שרטוט:



ב. בלייזר של ה-532 ננומטר.



ג. אתנול – 4.83cm , מתנול - 4.96cm.

(7) $\sqrt{2}$.

(8) 79%.

$$(9) \quad \text{א. } \hat{k}_r = \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{x} + \frac{1}{2} \hat{z} \quad , \quad \hat{k}_i = -\frac{\sqrt{3}}{2} \hat{x} + \frac{1}{2} \hat{z} \quad \text{ב. } \hat{E} = -\hat{y} \quad \text{ג. } \hat{B}_r = -\frac{\sqrt{3}}{2} \hat{z} + \frac{1}{2} \hat{x}$$

פיזיקה 3

פרק 8 - גלים דו מימדיים ומנחה גלים

תוכן העניינים

53	1. גלים דו מימדיים
56	2. מנחה גלים

גלים דו מימדיים

רקע

משוואת הגלים :

$$\frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

T - מתיחות ליחידת אורך.
 ρ - צפיפות מסה ליחידת שטח.

פתרון :

$$z(x, y, t) = A e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}$$

$$\vec{k} = (k_x, k_y)$$

כיוון וקטור הגל $\vec{k}$ הוא כיוון התקדמות הגל וחזיתות הגל הן במאונך אליו.

אורך הגל :

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|}$$

יחס הנפיצה :

$$\omega^2 = \frac{T}{\rho} (k_x^2 + k_y^2) = v^2 \cdot |\vec{k}|^2$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

תנאי שפה מלבנים עבור שפה קשורה :

$$z(x, y, t) = \sum_{m,n} A_{m,n} \sin\left(\frac{\pi n}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{L_y} y\right) \cos(\omega_{m,n} t + \varphi_{m,n})$$

שאלות

(1) תנאי התחלה משולשים בתוף ריבועי

נתון תוף ריבועי כך ש: $0 \leq x, y \leq L$. התוף קשור בקצוותיו ובעל מתיחות ליח' אורך T וצפיפות ρ . מותחים את מרכז התוף במרכזו ומשחררים ממנוחה כך שבזמן: $t = 0$ נוצרת בו הצורה:

$$z(x, y, 0) = Af(x)f(y)$$

$$f(q) = \begin{cases} q & , 0 \leq q \leq \frac{L}{2} \\ L - q & , \frac{L}{2} \leq q \leq L \end{cases}$$

- א. מצאו את מקדמי הפרישה ורשמו את הצורה הכללית של פונקציית הגל.
- ב. מצאו את פונקציית הגל אם ראשית הצירים הייתה במרכז התוף ולא בפינה רמז: אין צורך לפתור מחדש.
- ג. נניח כי כל מקדם פרישה הקטן מ- $\frac{411}{100}$ הוא זניח. כמה מקדמי פרישה משמעותיים קיימים (ללא מקדמים המאפסים את הפונקציה).

(2) תוף ריבועי לא איזוטרופי

- נתון תוף ריבועי בגודל $L_x L_y$, התפוס בקצותיו. התוף אינו איזוטרופי, המתיחות בציר x היא T_x והמתיחות בציר y היא T_y .
- א. רשמו את משוואת הגלים עבור התוף.
 - ב. מהו יחס הנפיצה?
 - ג. מהם אופני התנודה?

תשובות סופיות

$$z(x, y, t) = \sum_{m,n} A_{m,n} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{L} y\right) \cos(w_{m,n} t) \quad \text{א. (1)}$$

$$A_{m,n} = \frac{16L^2}{\pi^2 m^2 n^2} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi m}{2}\right)$$

$$w_{m,n} = \frac{T}{\rho} \cdot \frac{\pi^2}{L^2} (n^2 + m^2)$$

$$z(x, y, t) = \sum_{m,n} A_{m,n} \sin\left(\frac{\pi n}{L} \left(x + \frac{L}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{\pi m}{L} \left(y + \frac{L}{2}\right)\right) \cos(w_{m,n} t) \quad \text{ב.}$$

ג. 10

$$\frac{T_x}{\rho} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{T_y}{\rho} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad \text{א. (2)}$$

$$w^2 = \frac{T_x}{\rho} k_x^2 + \frac{T_y}{\rho} k_y^2 \quad \text{ב.}$$

$$z(x, y, t) = \sum_{m,n} A_{m,n} \sin\left(\frac{\pi n}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{L_y} y\right) \cos(w_{m,n} t + \varphi_{m,n}) \quad \text{ג.}$$

מנחה גלים

רקע

הפתרון עבור רצועה מלבנית ארוכה ברוחב L עם התאפסות הפונקציה בשפה:

$$z(x, y, t) = A \sin\left(\frac{\pi n}{L} y\right) e^{i(k_x x - \omega t)}$$

$$v_\phi = \frac{\omega}{k_x}$$

$$v_g = \frac{k_x v^2}{\omega}$$

$$v_g \cdot v_\phi = v^2$$

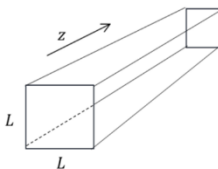
חסם תחתון:

$$\omega > \frac{\pi n}{L}$$

שאלות

1) מוליך גלים תלת מימדי

נסתכל על מוליך גלים תלת מימדי הבנוי מתיבה מאוד ארוכה בעלת שטח חתך ריבועי עם צלע L . שטח החתך הוא במישור xy והמוליך הוא לאורך ציר z . משוואת הגלים במקרה התלת מימדי היא:



$$v^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

הניחו שבשפות התיבה פונקציית הגל מתאפסת.

א. מצאו פתרון כללי למשוואה, $\psi(x, y, z, t)$ הניחו כי גל המתקדם בכיוון z החיובי.

ב. הציבו את תנאי השפה ומצאו את אופני התנודה האפשריים ויחס הנפיצה.

ג. מהי תדירות הקטעון (תדירות החסם התחתון הנמוך ביותר)?

ד. כיצד ישתנו תשובותיכם לסעיף ב' אם התנאי בשפת התיבה היה שהנגזרת של הפונקציה מתאפסת ולא הפונקציה עצמה?

תשובות סופיות

$$(1) \text{ א. } \psi(x, y, z, t) = (Ae^{ik_x x} + Be^{-ik_x x})(Ce^{ik_y y} + Dc^{-ik_y y})e^{i(k_z z - \omega t)}$$

$$\text{ב. } \psi_{m,n}(x, y, z, t) = A_{m,n} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{L} y\right) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

$$\omega^2 = v^2 \left(\left(\frac{\pi n}{L} \right)^2 + \left(\frac{\pi m}{L} \right)^2 + k_z^2 \right)$$

$$\text{ג. } \omega_{m,n} = \frac{v\pi}{L} \sqrt{2}$$

$$\text{ד. } \psi_{m,n}(x, y, z, t) = A_{m,n} \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{L} y\right) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

פיזיקה 3

פרק 9 - התאבכות בגלים דו ותלת מימדיים

תוכן העניינים

58	1. התאבכות בשני סדקים
60	2. התאבכות ב N סדקים
64	3. עקיפה
65	4. הקשר לפורייה
67	5. התאבכות ועקיפה ביחד
68	6. אינטרפרומטריה
73	7. תרגילים נוספים

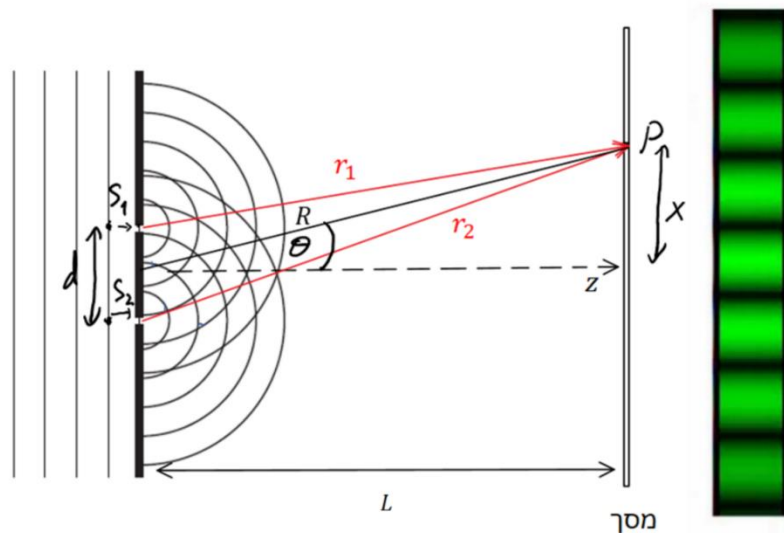
התאבכות בשני סדקים

רקע

עיקרון הווייגנס - ניתן להתייחס לכל נקודה בחזית הגל כמקור נקודתי של גל חדש.

אמפליטודה בגלים גליליים - $A \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$, גלים כדוריים - $A \propto \frac{1}{r}$.

ניסוי שני הסדקים:



קירוב השדה הרחוק $L \gg d$ far field limit :

$$1. \quad A_1 \approx A_2 \leftarrow \Delta r \ll r$$

$$2. \quad \Delta r = d \sin \theta \leftarrow r_1 \parallel r_2$$

העוצמה היחסית :

$$\frac{I(\theta)}{I(0)} = \cos^2 \left(\frac{k d \sin \theta}{2} \right)$$

קירוב זוויות קטנות :

$$\sin \theta \approx \tan \theta \approx \frac{x}{L}$$

בגלל התלות של האמפליטודה במרחק, צריך להכפיל את התוצאה לעוצמה בקוסינוס טטה עבור גלים גליליים ובקוסינוס בריבוע עבור גלים כדוריים. התוספת הזו קשורה למבנה של המסך והיא לא תופיע במסך עגול. בדרכ מניחים קירוב זוויות קטנות ואז היא זניחה.

שאלות

- (1) חישוב מרחק בין כתמים ואורך גל
 קרן לייזר עוברת דרך שני סדקים. מרכזו של כתם האור הראשון
 (לצד כתם האור המרכזי), התקבל בזווית של 8 מעלות.
 א. באיזו זווית יופיע כתם האור השני?
 ב. מהו אורך הגל של הלייזר אם המרחק בין הסדרים הוא: $d = 2.4\mu m$?

(2) תחנת רדיו

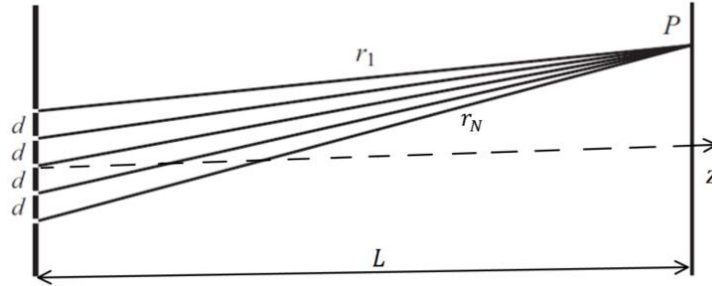
תחנת שידור משדרת אותות רדיו בתדר $1200Hz$ באמצעות שתי אנטנות
 הנמצאות במרחק של $300m$ זו מזו. אם נמקם מקלט במרחק רב משתי
 האנטנות, באילו כיוונים תתקבל העוצמה הגבוהה ביותר ובאילו הנמוכה
 ביותר? רשמו את הכיוונים ביחס לישר המחבר בין שתי האנטנות.

תשובות סופיות

- (1) א. 16° ב. $0.33\mu m$
 (2) $\cos \alpha_{\min} = 9.5 \cdot 10^{-4} \left(n + \frac{1}{2} \right)$, $\cos \alpha_{\max} = 9.5 \cdot 10^{-4} n$

התאבכות ב N סדקים

רקע



קירוב השדה הרחוק:

$$A_1 \approx A_2 \approx A_3 \approx A_4 \leftarrow \Delta r \ll r$$

$$\Delta r = d \sin \theta \leftarrow r_1 \parallel r_2 \parallel r_3 \parallel r_4$$

$$\frac{I_{tot}(\alpha)}{I_{tot}(0)} \approx \left(\frac{\sin\left(\frac{N\alpha}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right)^2$$

$$\alpha = kd \sin \theta$$

פיק גדול - כשהמכנה מתאפס:

$$\alpha_n = 2\pi n$$

נקודות התאפסות - כשהמונה מתאפס והמכנה לא.

$$\alpha_n = \frac{2\pi n}{N} \quad n \neq mN$$

פיק קטן - נגזרת שווה לאפס ומכנה לא מתאפס. עבור $N \gg 1$:

$$\alpha_n = \frac{2\pi}{N} \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

מספר הפיקים באחד הצדדים (ללא הפיק המרכזי) הוא: $\frac{kd}{2\pi}$ (לעגל למטה).

מספר הפיקים (הגדולים) הכולל שווה למספר הפיקים באחד הצדדים כפול 2 ועוד 1.

שאלות

(1) פריזמה מתקליטור

בתמונה רואים תקליטור העשוי מחריצים מעגליים בגודל של מיקרון בערך. האור שפוגע בתקליטור מוחזר למצלמה ומקבלים פריזמה של צבעים. הסבירו את התופעה (ללא חישוב) וציינו אלו פרמטרים משפיעים עליה.

**(2) סטייה בזווית פגיעה**

הראו שבמקרה שהקרן הפוגעת היא בזווית θ_0 ביחס לאנך עם קיר הסדקים אז תתקבל אותה תבנית התאבכות מוזזת בזווית θ_0 . הניחו קירוב זוויות קטנות.

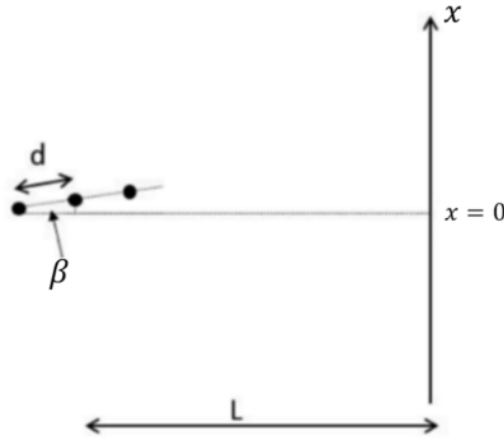
(3) 3 מינימות ראשונות

אור מונוכרומטי מלייזר ארגון בעל אורך גל של $\lambda = 488nm$ עובר דרך סריג בעל 6,000 חריצים בצפיפות של 40,000 חריצים לס"מ ופוגע במסך. מהן הזוויות של שלושת נקודות המינימום הראשונות (בכיוון החיובי). הניחו שהחריצים נקודתיים.

(4) מרחק בין צבעים

מקרניים אור לבן על סריג בעל 5,000 סדקים לס"מ.
א. תארו מה נראה על המסך מול הסריג.
ב. חשבו את המרחק בין כתם האור האדום השני לכתם האור הכחול השני אם המסך נמצא במרחק 1.5 מטר מהסריג ואורכי הגל של האור האדום והכחול הם $632nm$ ו- $420nm$ בהתאמה.

- (5) שלושה מקורות קוהרנטיים באוריינטציה שונה
המערכת המתוארת בסרטוט מכילה שלושה מקורות קוהרנטיים במרחק d
אחד מהשני הנמצאים בזווית β ביחס לאנך למסך. המרחק למסך הוא L .



מצאו את העוצמה היחסית כתלות ב- x בהנחה כי β זווית קטנה וכי $\theta > \beta$.

תשובות סופיות

(1) החריצים בתקליטור יוצרים תבנית התאבכות התלויה באורך הגל, זווית הפגיעה של המקור, בזווית התקליטור ובמיקום הצופה. בכל אזור בתקליטור נוצרת התאבכות בונה עבור אורך גל אחר ולכן רואים את הצבעים השונים בכל אזור. שינוי של הפרמטרים הנ"ל יביא לשינוי התבנית.

(2) ראו סרטון.

$$\theta_1 \approx 0.0186^\circ$$

$$\theta_2 \approx 0.0373^\circ \quad (3)$$

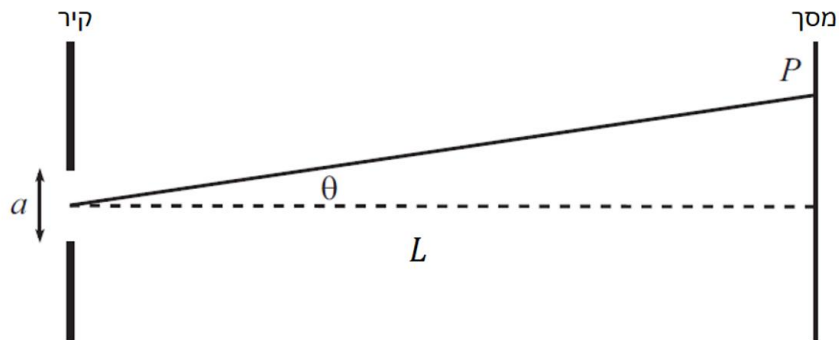
$$\theta_3 \approx 0.0560^\circ$$

(4) א. נקבל תבנית התאבכות של N סדקים שכתם האור המרכזי שלה לבן ובמקום כל כתם אחר נקבל קשת של צבעים כי מיקום הפיק הגדול שאינו במרכז גדל עם אורך הגל.
ב. 70 ס"מ.

$$\alpha = kd \frac{L}{\sqrt{L^2 + x^2}} \left[1 + \beta \frac{x}{L} \right], \quad \frac{I(\alpha)}{I(0)} = \left(\frac{\sin\left(\frac{3}{2}\alpha\right)}{3\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right)^2 \quad (5)$$

עקיפה

רקע



קירוב השדה הרחוק $L \gg a$:

$$\frac{I(\beta)}{I(0)} = \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\beta\right)}{\frac{1}{2}\beta} \right)^2$$

$$\beta = ka \sin \theta$$

נק' התאפסות: $\beta_n = 2\pi n$

- אם $\lambda > a$ אז רוחב הפיק המרכזי גדול מאינסוף ולא יהיו נק' התאפסות וזה אומר שהסדק מתנהג כמו מקור אור נקודתי.
- אם $a \gg \lambda$ אז מקבלים עוצמה קבועה ברוחב הסדק, מתאים למקרה הקלאסי בו מניחים שהאור נע בקווים ישרים.

מקסימום מקומי - נגזרת מתאפסת :

$$\beta_n \approx 2\pi \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

הקשר לפורייה

רקע

האמפליטודה הכוללת על המסך כתלות בזווית:

$$A_{tot}(\theta) = 2\pi FT[B(x)](k')$$

$$k' = k \sin \theta$$

כאשר $B(x)$ היא האמפליטודה ליחידת אורך בסדק.

שאלות

1) לאן נעלם שימור האנרגיה?

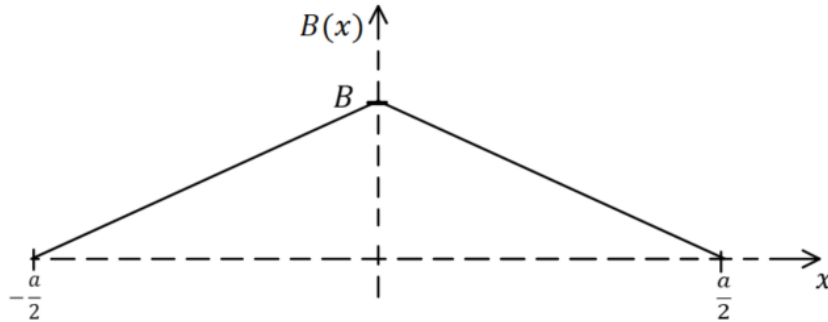
- א. הראו כי בסדק רחב: $I(0) \propto a^2$ כאשר a הוא רוחב הסדק.
 רמז: שימו לב שהאמפליטודה בחלק מהנוסחאות תלויה ברוחב הסדק.
 ב. העוצמה היא אנרגיה ליחידת שטח ליחידת זמן. אם נרחיב את רוחב הסדק פי 2 אז $I(0)$ תגדל פי 4. הרחבת הפתח פי 2 מכניסה פי 2 אור ופי 2 אנרגיה איך יתכן שהעוצמה על המסך גדלה פי 4? לאן נעלם שימור האנרגיה?

2) שינוי בעוצמה כתלות בשינוי הפתח

- נניח שיש לנו סדק ברוחב a ואנחנו מסתכלים על העוצמה הממוצעת בנקודה הנמצאת במרחק כלשהו, לא קטן, מהפיק המרכזי אבל עדיין בתחום הזוויות הקטנות.
 מה יקרה לעוצמה הממוצעת (ממוצעת בתחום קטן) אם נגדיל את רוחב הפתח? שימו לב שמצד אחד כשמגדילים את רוחב הפתח אז יותר אור נכנס והעוצמה גדלה אבל מצד שני העקומה מתכווצת והעוצמה בנקודה מסוימת קטנה.
 השאלה היא איזה אפקט יותר חזק?

(3) אמפליטודה בצורת משולש

נתון סדק ברוחב a דרכו עובר גל בעל חזית (פאזה) אחידה אך בעל אמפליטודה לא אחידה. האמפליטודה ליחידת אורך כתלות ב- x כאשר: $x = 0$ זה מרכז הסדק היא:



מצאו את תבנית ההתאבכות $\left(\frac{I(\theta)}{I(0)} \right)$ המתקבלת על מסך הנמצא במרחק רב מהסדק.

תשובות סופיות

- 1) א. הוכחה בסרטון.
ב. אם מגדילים את רוחב הסדק אז העוצמה באפס גדלה אבל התבנית מתכווצת והעוצמה קטנה בזוויות אחרות. האנרגיה שווה לאינטגרל על העוצמה לאורך כל המסך והערך של האנרגיה הכוללת יגדל רק פי 2 ולא פי 4.
2) העוצמה לא תשתנה.

$$\frac{I(\theta)}{I_{\max}} = \sin^4 c^4 \left(\frac{1}{4} ka \sin \theta \right) \quad (3)$$

התאבכות ועקיפה ביחד

רקע

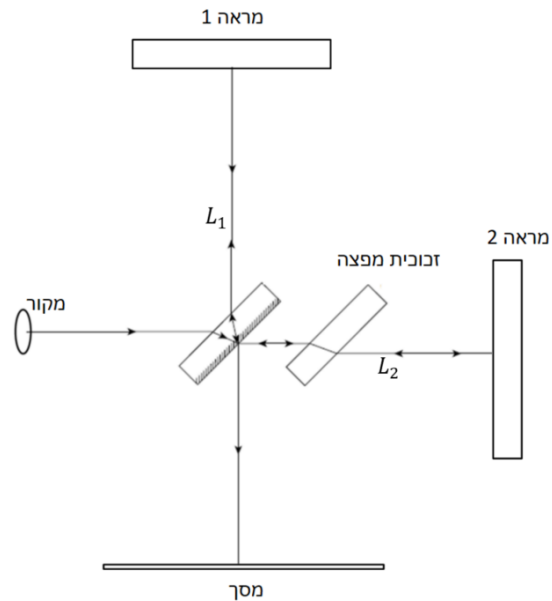
$$\frac{I(\theta)}{I(0)} = \left(\sin c \left(\frac{ka \sin \theta}{2} \right) \frac{\sin \left(\frac{Nkd \sin \theta}{2} \right)}{N \sin \left(\frac{kd \sin \theta}{2} \right)} \right)^2$$

כאשר a הוא רוחב כל סדק, d המרחק בין שני סדקים ו- N מספר הסדקים.

אינטרפרומטריה

רקע

האינטרפרומטר של מייקלסון:



$$\delta = 2(L_2 - L_1)$$

$$\Delta\varphi = k\delta + \pi$$

התאבכות בונה :

$$\delta = \lambda \left(m + \frac{1}{2} \right)$$

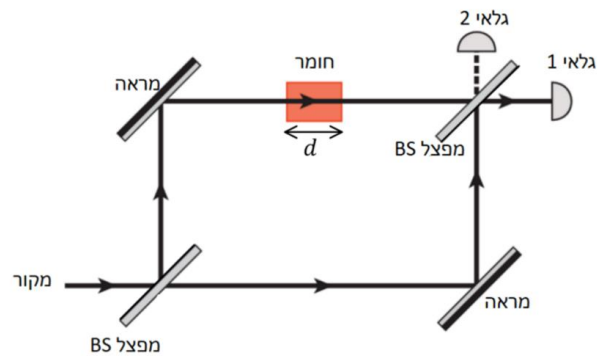
התאבכות הורסת :

$$\delta = \lambda m$$

עוצמה :

$$\frac{I}{I_{\max}} = \cos^2 \left(\frac{\Delta\varphi}{2} \right) = \sin^2 \left(\frac{\pi\delta}{\lambda} \right)$$

אינטרפרומטר מאך-זנדר:



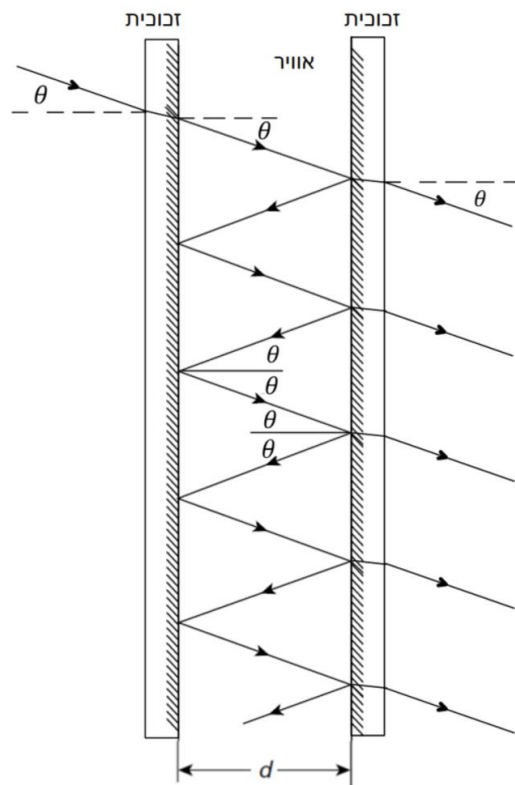
$$\delta = d(n - 1)$$

$$\Delta\varphi = k\delta \quad \text{גלאי 1}$$

$$\Delta\varphi = k\delta + \pi \quad \text{גלאי 2}$$

$$\frac{I}{I_{\max}} = \cos^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \quad \text{עוצמה}$$

אינטרפרומטר פברי-פרו:



$$\frac{I}{I_{\max}} = \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}$$

$$\Delta\varphi = k\delta = k2d \cos \theta$$

$$R = r^2 = \left(\frac{A_r}{A_i}\right)^2$$

$$\Delta\varphi_{\frac{1}{2}} \approx \frac{1-R}{\sqrt{R}}$$

שאלות

(1) ללא פלטה מפצה

נתון אינטרפרומטר מייקלסון עם מפצל (50:50) העשוי מזכוכית בעובי t ומקדם שבירה n_2 . זווית המפצל היא 45 מעלות, ציפוי הכסף נמצא בדופן האחורית של הזכוכית (כמו במקרה הרגיל) ובמערכת **אין פלטה מפצה**.

א. מהו הפרש הדרכים האופטיות בין הקרניים?

ומהו הפרש הפאזה עבור אורך גל נתון?

ניתן להניח ששינוי הזווית עקב מעברי התווך במפצל זניח מבחינת

אורך הדרך וכי L_1, L_2 גם נתונים.

ב. הניחו שניתן למדוד את העוצמה על המסך.

הראו כי:

$$\lambda = \frac{2\pi(L_2 - L_1 - \sqrt{2}t(1 - n_2))}{\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{I}{I_{\max}}}\right)}$$

ג. כעת הניחו שהופכים את המפצל כך שציפוי הכסף (ופיצול הקרניים)

יהיה בדופן הקדמית של הזכוכית.

מה יהיה כעת הפרש הפאזה?

(2) גלאי 2

נתון אינטרפרומטר של מאך-זנדר כפי שנראה בסרטון ההסבר.

א. חשבו את הדרך האופטית והפאזה של כל קרן המגיעה לגלאי 2.

ב. חשבו את העוצמה בגלאי 2 והראו כי מתייחס שימור אנרגיה

(ביחיד עם העוצמה בגלאי 1).

(3) מפצל לא סימטרי

נניח כי המפצל באינטרפרומטר מאך זנדר הוא מפצל לא סימטרי כך שמקדם

ההעברה שלו $\left(\frac{A_t}{A_{in}}\right)$ הוא t ומקדם ההחזרה $\left(\frac{A_r}{A_{in}}\right)$ הוא r .

א. רשמו את האמפליטודות של כל אחד מהמסלולים האפשריים ביחס

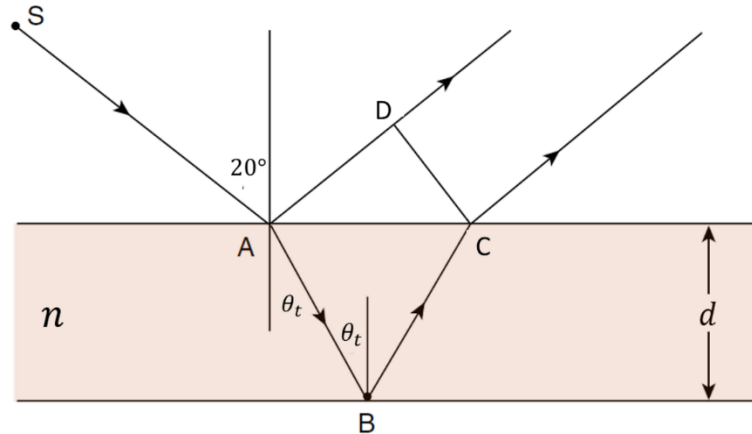
לאמפליטודת הכניסה.

ב. * רשמו מטריצה כללית המתארת את המפצל. כולל תוספת הפאזה אך

ללא התוספת של הדרכים האופטיות.

(4) חישוב עובי קרום דק

גל מישורי לבן פוגע בקרום דק בזווית 20° מעלות. בצפייה של הגל המוחזר רואים אור אדום ($\lambda = 640\text{nm}$). מקדם השבירה של הקרום הוא $n = 1.3$. מהו עובי הקרום? הניחו התאבכות בסדר ראשון.

**(5) טווחים של מספר גל**

נתון אינטרפרומטר של פברי-פרו שבו $R = 0.95$ ו- $d = 0.2\text{mm}$ וזווית הפגיעה קטנה מאוד.

- א. מה הם אורכי הגל λ_m בהם מתקבלים הפיקים?
מהם הערכים k_m המתאימים?
מה המרחק בין הפיקים במונחי k , כלומר מהו Δk בין שני פיקים?
- ב. מהו רוחב הפונקציה (FWHM) כתלות ב- k ?
ומהו הרוחב כתלות בתדר?
- ג. נתונה דוגמית שערך הרזוננס שלה הוא בטווח של:
 $k_r \in [10^3\text{cm}^{-1}, 1.15 \cdot 10^3\text{cm}^{-1}]$
מהו N עבורו ערך הרזוננס נמצא בטווח של: $k_r \in [k_N, k_{N+1}]$?
- ד. בשביל לסרוק את k אנחנו צריכים לשנות את d .
בכמה צריך לשנות את d בשביל לסרוק את הטווח של: $k_r \in [k_N, k_{N+1}]$?

תשובות סופיות

$$(1) \quad \delta = 2(L_2 - L_1 - \sqrt{2}t(1 - n_2)) \quad \text{א.} \quad \Delta\varphi = 2k(L_2 - L_1) \quad \text{ג.} \quad \text{ב. הוכחה.}$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta + \pi$$

$$(2) \quad \text{א. מסלול 3: החזרה במפצל 1 והחזרה במפצל 2 (כניסה לגלאי 2).}$$

$$\text{דרך אופטית - } L_1 + d(n-1) + 2c$$

$$\varphi_3 = k(L_1 + d(n-1) + 2c) + \pi$$

כאשר c הוא הדרך האופטית במפצל.

$$\text{מסלול 4: העברה במפצל 1 והעברה במפצל 2 (כניסה לגלאי 2).}$$

$$\text{דרך אופטית - } L_2 + 2c$$

$$\varphi_4 = k(L_2 + 2c)$$

$$\text{ב.} \quad \frac{I}{I_{\max}} = \sin^2\left(\frac{k\delta}{2}\right)$$

$$\delta = L_1 - L_2 + d(n-1)$$

$$(3) \quad \text{א.} \quad |A_1| = trE_0, |A_2| = rtE_0, |A_3| = r^2E_0, |A_4| = t^2E_0, \quad \text{ב.} \quad \begin{pmatrix} t & -r \\ r & t \end{pmatrix}$$

$$128\text{mm} \quad (4)$$

$$(5) \quad \text{א.} \quad \lambda_m = \frac{2d}{m}, \quad k_m = \frac{\pi m}{d}, \quad \Delta k = \frac{\pi}{d}$$

$$\text{ב.} \quad \text{FWHM}_{[K]} = 512 \cdot \frac{1}{m}, \quad \text{FWHM}_{[F]} = 2.44 \cdot 10^{10\text{Hz}}$$

$$\text{ג.} \quad N = 6$$

$$\text{ד.} \quad \Delta d = 28\mu\text{m}$$

תרגילים נוספים

שאלות

1) שני סדקים ברוחב לא זניח

נתונים שני סדקים בעלי רוחב a (שאינו זניח) במרחק d אחד מהשני ובמרחק L מהמסך. הניחו קירוב שדה רחוק וזוויות קטנות.

א. כתבו את הנוסחה המתארת את העוצמה כתלות במרחק ממרכז המסך ביחס לעוצמה המקסימלית. ציינו איזה חלק מהעוצמה הוא פונקציית המעטפת וממה הוא נובע, ואיזה חלק הוא הפונקציה הפנימית (פונקציית המודולציה) וממה הוא נובע.

ב. מהו רוחב פונקציית המעטפת (FWHM) אם נתון שרוחב פונקציית

$$\sin^2(x) \text{ הוא } 2.8 \text{ rad?}$$

ג. כמה מחזורים של הפונקציה הפנימית נכנסים ברוחב פונקציית המעטפת?

ד. על מנת שנוכל להבחין בהתאבכות של שני הסדקים צריך שיהיו לפחות שני פיקים של הפונקציה הפנימית בתוך הרוחב של פונקציית המעטפת, אחרת נראה רק את פונקציית המעטפת. מה התנאי על a ו- d כך שנוכל להבחין בהתאבכות הסדקים.

2) שני סדקים עם קיטובים שונים

בניסוי שני הסדקים מסוים הקיטוב של השדה היוצא מכל סדק שונה ונתון

$$\vec{E}_1 = E_0 \hat{x} \text{ ו- } \vec{E}_2 = E_0 (\cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y})$$

הניחו שהמרחק בין הסדקים הוא d והמרחק למסך הוא L ו- $L \gg d$.

א. מה תהיה האמפליטודה של כל אחד מן השדות בפגיעה במרכז המסך? הניחו שהגלים גלילים.

ב. מצאו את השדה השקול והעוצמה במרכז המסך כתלות ב- φ .

הסבירו את התוצאות המתקבלות עבור: $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ו- $\varphi = \pi$.

תשובות סופיות

$$(1) \quad \frac{I(x)}{I(0)} = \sin^2 \left(\frac{kax}{2L} \right) \cos^2 \left(\frac{kd}{2L} x \right) \quad \text{א.}$$

פונקציית המעטפת היא ה- $\sin c$ בריבוע והיא נובעת מרוחב הסדקים.
הפונקציה הפנימית היא הקוסינוס בריבוע והיא נובעת מההתאבכות בין
הסדקים.

$$\text{ב.} \quad \frac{L}{ka} 5.6 \quad \text{ג.} \quad 0.89 \frac{d}{a} \quad \text{ד.} \quad d \approx 2.24a$$

$$(2) \quad \text{א.} \quad A_1 = A_2 = \frac{E_0}{\sqrt{L}}$$

$$\text{ב.} \quad E_{tot} = ((1 + \cos \varphi) \hat{x} + \sin \varphi \hat{y}) \quad , \quad I \propto \frac{E_0^2}{L} 4 \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)$$

ב- $\varphi = 0$ התאבכות מלאה כי השדות באותו קיטוב
ב- $\varphi = \frac{\pi}{2}$ השדות מאונכים אין התאבכות, העוצמה הכוללת היא סכום
העוצמות.
ב- $\varphi = \pi$ השדות בפאזה הפוכה, התאבכות הורסת, עוצמה אפס.

פיזיקה 3

פרק 10 - קווי תמסורת

תוכן העניינים

1. קווי תמסורת ללא הפסדים.....75

קווי תמסורת ללא הפסדים

רקע

הקשרים בין המתח לזרם (בקו ללא הפסדים):

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t} \qquad \frac{\partial I}{\partial x} = -C_0 \frac{\partial V}{\partial t}$$

משוואות הגלים:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}$$

כאשר C_0 ו- L_0 הם הקיבול וההשראות ליחידת אורך.

עכבה

עכבה כללית מוגדרת לפי: $Z = \frac{V}{I}$ והיא יכולה להיות תלויה במיקום עכבה אופיינית:

$$\frac{V^+(x, t)}{I^+(x, t)} = -\frac{V^-(x, t)}{I^-(x, t)} = Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

לא תלויה במיקום (בדור"כ כשנתונה העכבה הכוונה לעכבה אופיינית).

החזרה והעברה

$$V^-(x_0, t) = -rV^+(x_0, t) \qquad I^-(x_0, t) = rI^+(x_0, t)$$

$$r = \frac{Z_0 - Z_L}{Z_L + Z_0}$$

$$V_L^+(x_0, t) = tV^+(x_0, t) \qquad I_L^+(x_0, t) = tI^+(x_0, t)$$

$$t = \frac{2Z_0}{Z_L + Z_0}$$

הערה: הנוסחאות הן בהנחה שאין גל חוזר בעומס.

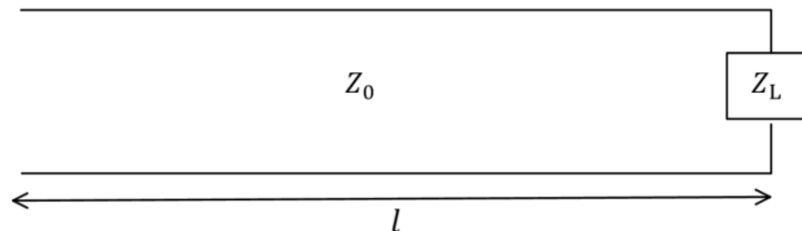
כאשר יש קצר בקצה בקו, $Z_L = 0$, מקבלים גל עומד.

שאלות

(1) עכבת כניסה

קו תמסורת באורך l ועכבה אופיינית Z_0 מחובר בקצה לעומס בעל עכבה אופיינית Z_L . הניחו כי אין גל חוזר בעומס וכי אמפליטודת הגל המתקדם בכיוון החיובי ידועה.

- רשמו את פונקציות המתח והזרם של הגל הפוגע והגל החוזר אם ראשית הצירים נמצאת בנקודת החיבור עם העומס.
- חזרו על סעיף א אם הראשית בתחילת הקו.
- חשבו עבור סעיפים א' ו- ב' את העכבה בתחילת הקו, עכבה זו נקראת עכבת הכניסה Z_{in} .
- חשבו עבור סעיף ב את העכבה בדיוק באמצע הקו.



(2) גל בכבל קואקסיאלי פוגע בצומת

נתון קו תמסורת חשמלי המורכב מכבל קואקסיאלי ארוך מאוד שבו צומת כך שהעכבות האופייניות משני צידי הצומת הן Z_1 ו- Z_2 . לצומת מגיע גל הרמוני. נתונים האמפליטודה, התדירות ואורך הגל של גל הזרם המגיע לצומת: $\omega, \lambda_1 I_0^+$. על סמך הנתונים הנ"ל:

- האם ניתן לחשב את אמפליטודת גל הזרם העובר והחוזר?
- האם ניתן לחשב את אמפליטודות של שלושת גלי המתח?
- האם ניתן לחשב את אורך הגל של הגל החוזר ואת אורך הגל של הגל העובר?
- האם ניתן לחשב את ההספק של כל אחד מהגלים?

3 קו תמסורת פתוח עם תנאי התחלה

נתון קו תמסורת בעל השראות ליחידת אורך של: $0.03 nH/m$
 וקיבוליות ליחידת אורך של: $4 \mu F/m$. אורך הקו הוא: $l = 400 m$
 והוא פתוח משני קצותיו.
 ברגע: $t = 0$ המתח בקו מתאפס והזרם הוא:

$$I(x) = \begin{cases} I_0 \frac{x}{l} & , 0 \leq x \leq l/2 \\ 0 & , l/2 \leq x \leq l \end{cases}$$

כאשר: $I_0 = 20 A$.

- מהי מהירות הגלים בקו? האם הקו נמצא בריק?
- בקירוב של שתי הרמוניות ראשונות, חשבו את הזרם ב- $t = 3 \mu s$ כתלות ב- x .
- מהו המתח באותו זמן בקצוות ובמרכז הקו?

4 קו תמסורת אינסופי עם תנאי התחלה

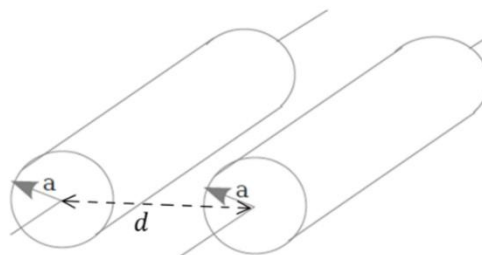
קו תמסורת עשוי מכבל קואקסיאלי אינסופי בעל עכבה אופיינית של 25Ω
 וקיבול ליחידת אורך של: $C_0 = 0.2 nF/m$.

- חשבו את מהירות הגלים והקבוע הדיאלקטרי היחסי ϵ_r .
 ניתן להניח: $\mu_r = 1$.
- נתון כי: $V(x, t = 0) = \frac{aV_0x}{x^2 + a^2}$ וכי: $I(x, t = 0) = 0$
 כאשר: a, V_0 נתונים.
 חשבו את גלי המתח והזרם כתלות במיקום ובזמן.
- מהי האנרגיה הכוללת החולפת ב- $x = 50 m$ מ- $t = 0$ ועד $t = 1 ms$.
 מספיק לרשום את האינטגרל אין צורך לפתור אותו.

5 חישוב השראות וקיבול בכבלים מקבילים

נתון קו תמסורת העשוי משני כבלים ארוכים מאוד בעלי רדיוס a ומרחק d
 בין מרכזיהם. הניחו ש- $d \gg a$ וכי התפלגות המטען על הכבלים היא אחידה
 ביחס לסיבוב הכבל.

- מהו הקיבול ליחידת אורך של הכבלים?
- מהי ההשראות ליחידת אורך של הכבלים?



6) חישוב השראות וקיבול בכבל קואקסיאלי

כבל קואקסיאלי ארוך מאוד עשוי ממעטפת גלילית ברדיוס a ומעטפת חיצונית ברדיוס b וריק ביניהם.

א. מהו הקיבול ליחידת אורך של הכבל?

ב. מהי ההשראות ליחידת אורך של הכבל?

ג. מהי מהירות הגלים בכבל?

תשובות סופיות

$$(1) \text{ א. } I^-(x) = r \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-ikx}, I^+(x) = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{ikx}, V^-(x) = -rV_0^+ e^{-ikx}, V^+(x) = V_0^+ e^{ikx}$$

$$\text{ב. } I^-(x) = r \frac{V_0^+}{Z_0} e^{2ikl} e^{-ikx}, I^+(x) = \frac{V_0^+}{Z} e^{ikx}, V^-(x) = -rV_0^+ e^{2ikl} e^{-ikx}, V^+(x) = V_0^+ e^{ikx}$$

$$\text{ג. בשני המקרים: } Z_{in} = Z_0 \frac{1 - re^{2ikl}}{1 + re^{2ikl}}$$

$$\text{ד. } Z_0 \frac{1 - re^{ikl}}{1 + re^{ikl}}$$

$$(2) \text{ א. כן. ב. כן. ג. אורך הגל החוזר זהה לאורך הגל הפוגע, אין מספיק נתונים לחשב את אורך הגל העובר. ד. אין מספיק נתונים לחשב את אורך הגל העובר.}$$

$$(3) \text{ א. } 9.13 \cdot 10^9 \frac{m}{sec} \text{ ב. } 3.39_A \sin\left(\frac{\pi}{400}x\right) - 2.91 \sin\left(\frac{2\pi}{400}x\right) \text{ ג. } V(0, 3\mu s) = -0.13V, V(l, 3\mu s) = 1.73V, V\left(\frac{l}{2}, 3\mu s\right) = 0.798V$$

$$(4) \text{ א. } \epsilon_r = 2.25, V = 2 \cdot 10^8 \frac{m}{sec}$$

$$\text{ב. } V(x, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{aV_0(x-Vt)}{(x-Vt)^2 + a^2} + \frac{aV_0(x+Vt)}{(x+Vt)^2 + a^2} \right]$$

$$I(x, t) = \frac{aV_0}{2VL_0} \left[\frac{x-Vt}{(x-Vt)^2 + a^2} - \frac{x+Vt}{(x+Vt)^2 + a^2} \right]$$

$$\text{ג. } \Delta E = \int_0^{0.001} V(50, t) I(50, t) dt$$

$$(5) \text{ א. } \frac{\pi \epsilon_0}{\ln \left| \frac{d-a}{a} \right|} \text{ ב. } \frac{\mu_0}{\pi} \ln \left| \frac{d-a}{a} \right|$$

$$(6) \text{ א. } \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}} \text{ ב. } \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \text{ ג. מהירות האור.}$$

פיזיקה 3

פרק 11 - תיאוריות מוקדמות של תורת הקוונטים ומבנה האטום

תוכן העניינים

80	1. תיאוריות מוקדמות של תורת הקוונטים ומבנה האטום
83	2. התיאוריה הפוטנית של האור והאפקט הפוטואלקטרי
87	3. אנרגיה מסה ותנע של פוטון
88	4. אפקט קומפטון
90	5. אינטראקציות של פוטונים ויצירת זוגות
92	6. דואליות גל חלקיק והאופי הגלי של החומר
(ללא ספר)	7. סיכום ביניים התורה הפוטונית והשלכות
94	8. מודלים מוקדמים של האטום
95	9. מודל האטום של בוהר
(ללא ספר)	10. סיכום חלק שני מודלים מוקדמים ומודל בוהר
99	11. שאלות ותרגילים נוספים

תיאוריות מוקדמות של תורת הקוונטים ומבנה האטום:

סיכום כללי:

ההנחה הקוונטית של פלאנק וקרינת גוף שחור.

		גרף של קרינת גוף שחור כתלות באורך הגל ובטמפרטורות שונות
λ_p - אורך הגל בשיא T - הטמפרטורה בקלווין	$\lambda_p T = 2.90 \cdot 10^{-3} m \cdot K$	חוק ווין - Wien law
קבוע בולצמן $k = 1.38 \cdot 10^{-23} J \cdot K^{-1}$ קבוע פלאנק $h = 6.626 \cdot 10^{-34} J \cdot s$	$I(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2 \lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$	נוסחת פלאנק לקרינת גוף שחור
<u>ההנחה הקוונטית של פלאנק</u>	$E_{min} = hf$	אנרגיה מינימלית של מטען בתנועה הרמונית באטום
המספר הקוונטי $n = 1, 2, 3, \dots$	$E = nhf$	אנרגיית המטען חייבת להיות כפולה שלמה של הערך המינימלי

שאלות:

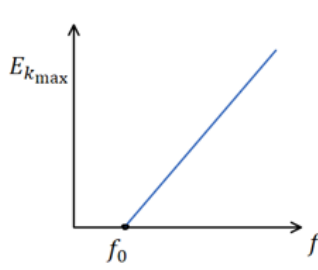
- (1) **דוגמה - טמפרטורת השמש**
הראו באמצעות חוק ווין כי הטמפרטורה על פני השמש היא באמת 6,000K אם ידוע שאורך הגל של האור הנראה הוא בערך 500nm.
- (2) **דוגמה - טמפרטורת כוכב**
טלסקופ גדול בחלל מזהה כוכב חדש. הקרינה שפולט הכוכב נקלטת בטלסקופ כאשר השיא של הקרינה הוא באורך גל של 90nm. מהי הטמפרטורה על פני הכוכב?
- (3) **טמפרטורה של מתכת**
מה הטמפרטורה של מתכת בשלב הריתוך אם שיא פליטת האור שלה באורך גל של 460nm.
- (4) **הפרש אנרגיות של מולקולה רוטטת**
מולקולת HCl רוטטת בתדירות של: $8.1 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$. חשבו את ההפרש בין שני ערכים צמודים של האנרגיות האפשריות לפי ההנחה הקוונטית של פלאנק לערכי האנרגיה באוסילציות. תנו תשובה בג'אול ובאלקטרון וולט.
- (5) **חוק ווין וקבוע פלאנק מנוסחת הקרינה**
נוסחת פלאנק לקרינת גוף שחור היא: $I(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2 \lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$.
א. * הראו, ללא שימוש בחוק ווין, כי קבוע $\lambda_p T$, לעזרתכם פתרון המשוואה: $5e^{-x} = 5 - x$: $x = 4.966$.
ב. השתמשו בחוק ווין וחשבו את קבוע פלאנק.
ג. ** הראו כי הקרינה הנפלטת מגוף שחור פרופורציונית לטמפרטורה ברביעית - חוק סטפן - בולצמן.
הדרכה: בשביל לחשב את הקרינה הכוללת הנפלטת יש לעשות אינטגרציה על כל אורכי הגל, אין צורך לפתור את האינטגרל עד הסוף.

תשובות סופיות:

- (1) הוכחה.
- (2) 32,000K
- (3) 6,300K
- (4) $5.4 \cdot 10^{-20} \text{ J}$, 0.34eU
- (5) הוכחה.

התיאוריה הפוטנטית של האור והאפקט הפוטואלקטרי:

סיכום כללי:

אנרגיה של פוטון יחיד	$E = hf$	f - תדירות האור
<u>הניסוי הפוטואלקטרי</u>		
תדירות סף	$hf_0 = W_0$	W_0 - פונקציית העבודה של המתכת
אנרגיה קינטית מקסימאלית של האלקטרונים	$E_k = hf - W_0$	
מתח עצירה	$eV_0 = E_k$	
השוואה לתורה הגלית	<u>לפי התורה הפוטנטית</u> - עוצמת האור קשורה למספר הפוטונים ולא לאנרגיה של כל אחד מהם. הגדלת העוצמה תגדיל את מספר האלק' הנפלטים אבל לא את האנרגיה הקינטית שלהם. - האנרגיה של הפוטון תלויה בתדירות. - רק פוטון אחד נותן את כל האנרגיה שלו ולכן קיימת תדירות סף.	<u>לפי התורה הגלית</u> <u>אלקטרומגנטית</u> - עוצמת האור קשורה לגודל השדה הגדלת העוצמה תגדיל את האנרגיה הקינטית של האלקטרונים. - התדירות לא משפיעה על האנרגיה של האלקטרונים.

שאלות:

- (1) **דוגמה - חישוב אנרגיית פוטון באור כחול**
חשבו את האנרגיה של פוטון באור כחול: $\lambda = 450\text{nm}$ באוויר (או וואקום).
- (2) **דוגמה - הערכה של מספר פוטונים מנורה**
נסו להעריך כמה פוטונים פולטת נורה בהספק 100W כל שניה.
הניחו שהנצילות של הנורה היא בערך 3% (כלומר רק 3% מהאנרגיה המושקעת בנורה כל שניה מנוצלת להפקה של אור). האור שיוצא מנורה לבנה הוא בכל אורכי הגל, ניתן לקחת לצורך ההערכה את אורך הגל באמצע הספקטרום של האור הנראה: $\lambda \approx 500\text{nm}$.
- (3) **דוגמה - חישוב אנרגיה של אלקטרונים נפלטים**
מהי האנרגיה הקינטית המקסימאלית ומהי המהירות המקסימאלית של אלקטרונים הנפלטים מחומר שפונקציית העבודה שלו היא: $W_0 = 2.8\text{eV}$
אם אורך הגל של האור הפוגע במשטח הוא:
א. $\lambda = 400\text{nm}$
ב. $\lambda = 600\text{nm}$
- (4) **עקיפה של קרינת גמא**
לפוטון בקרינת גמא יש אנרגיה של 380keV .
א. מהו אורך הגל של הקרינה?
ב. האם לדעתך הקרינה עושה עקיפה דרך פתחים טיפוסיים שאנחנו נתקלים ביום יום כמו פתח של דלת?
- (5) **איזו מתכת לא תפלוט אלקטרונים**
פונקציות העבודה של סודיום, צסיום, נחושת וברזל הן: $2.1, 2.3, 4.5$ ו- 4.7 eV.
אלקטרון וולט בהתאמה. אלו מהמתכות לא תפלוט אלקטרונים כאשר פוגע בה אור מהתחום הנראה?
- (6) **פונקציית עבודה ומתח עצירה**
בניסוי של האפקט הפוטואלקטרי נצפה כי לא זורם זרם כאשר אורך גל של האור הוא מעל ל- 540nm .
א. מהי פונקציית העבודה של המתכת?
ב. מהו מתח העצירה הדרושה אם מקרינים באור באורך גל של 450nm ?

(7) ניסוי פוטואלקטרי

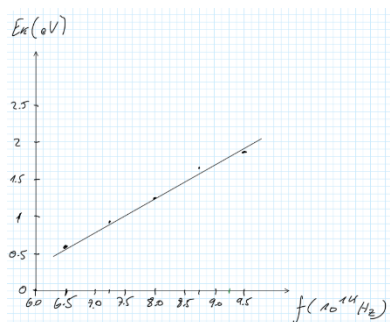
בניסוי פוטואלקטרי הקרינו אור בתדירויות שונות ומדדו את מתח העצירה. התוצאות של הניסוי מוצגות בטבלה הבאה:

$f(10^{14}\text{Hz})$	$V(V)$
6.50	0.6
7.25	0.91
8.00	1.23
8.75	1.54
9.50	1.85

- א. מצאו את האנרגיה הקינטית של האלקטרונים בפליטה ושרטטו גרף של אנרגיה זו כתלות בתדירות. השתמשו בנייר משבצות ורשמו נתונים בצורה מדויקת.
- ב. חשבו מתוך הגרף את קבוע פלאנק.
- ג. חשבו את פונקציית העבודה ותדירות הסף של המתכת.

תשובות סופיות:

- (1) 2.8eV
- (2) $8 \cdot 10^{18}$ פוטונים.
- (3) א. $3.2 \cdot 10^2 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ ב. לא תהיה פליטה של אלקטרונים.
- (4) א. $3.3 \cdot 10^{-3} \text{nm}$ ב. לא.
- (5) נחשת וברזל.
- (6) א. 2.3eV ב. 0.46V
- (7) א.
- ב. הוכחה.



$E_k = \text{eV}$
0.6eV
0.91eV
1.23eV
1.54eV
1.85eV

ג. $W_0 = 2.42\text{eV}$, $f = 5.84 \cdot 10^{14} \text{Hz}$

אנרגיה מסה ותנע של פוטון:

סיכום כללי:

אנרגיה של פוטון יחיד	$E = hf$	f -תדירות האור
תנע של פוטון	$p = \frac{E}{c} = h \frac{f}{c} = \frac{h}{\lambda}$	
מסת מנוחה של פוטון	$m = 0$	

שאלות:

- (1) **דוגמה - כוח שמפעילה נורה על נייר שחור**
 בדוגמה "הערכה של מספר הפוטונים מנורה" חישבנו את מספר הפוטונים שיוצאים מנורה של 100W כל שניה (בערך 10^{19}). נניח כי כל הפוטונים האלו פוגעים בנייר שחור (ולא מוחזרים) חשבו את:
 א. התנע של פוטון יחיד.
 ב. הכוח שמפועל על הנייר.

- (2) **דוגמה - יעילות של תהליך פוטוסינתזי**
 בתהליך פוטוסינתזי פיגמנטים בצמח כמו כלורופיל סופגים אור שמש ובאמצעותו הופכים פחמן דו חמצני (CO_2) לפחמימות (וחמצן שנפלט).
 בשביל להפוך מולקולה אחת של CO_2 לפחממה הצמח משתמש ב-9 פוטונים. כלורופיל סופג אור בעיקר באורך גל של 670nm. אם ידוע שהאנרגיה המשתחררת בפירוק פחממה היא: $4.9 \frac{eV}{molecule}$, מה היעילות (או נצילות) של התהליך הפוטוסינתזי?

תשובות סופיות:

- (1) א. $1.3 \cdot 10^{-27} \frac{kg \cdot m}{sec}$ ב. $10^{-8} N$
 (2) 29%

אפקט קומפטון:

סיכום כללי:

λ - אורך הגל של הקרן הפוגעת λ' - אורך הגל של הקרן המפוזרת θ - זווית ביחס לכיוון הקרן הפוגעת $\frac{h}{m_e c}$ - אורך גל של האלקטרון החופשי	$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$	הסחת קומפטון
--	--	--------------

שאלות:

(1) דוגמה - פיזור בכמה זוויות

קרני X באורך גל 0.162nm מפוזרות מסרט פחמן דק. מה יהיו אורכי הגל של הקרניים המפוזרות בזוויות?

- א. 0° .
- ב. 90° .
- ג. 180° .

(2) הסחה יחסית מקסימאלית

בפיזור קומפטון, מצאו את זווית הפיזור עבורה ההסחה (שינוי באורך הגל) היא מקסימאלית. מהי ההסחה היחסית המקסימאלית $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ עבור פוטון באורך גל: $\lambda = 500\text{nm}$ מהתחום הנראה ועבור פוטון באורך גל: $\lambda = 0.1\text{nm}$ מתחום קרינת X.

(3) פיזור רב פעמי

קרני גמא שנוצרות קרוב למרכז השמש עוברות הרבה פיזורים בזוויות קטנות עד שהן מאבדות מספיק אנרגיה והופכות לקרניים בתחום הנראה. הניחו שלפוטון בקרן גמא יש אנרגיה של 1.0MeV והפוטון עובר סדרה של התנגשויות בזוויות של 0.5° בכל התנגשות. כמה התנגשויות צריך הפוטון לעבור בשביל שאורך הגל שלו ישתנה ל-555nm.

תשובות סופיות:

- (1) א. 0.162nm ב. 0.164nm ג. 0.167
- (2) א. $\theta = \pi$ ב. 0.00097% ג. 4.9%
- (3) $6 \cdot 10^9$ התנגשויות.

אינטראקציות של פוטונים ויצירת זוגות:

סיכום כללי:

תנאים ביצירת זוגות:

1. חייב להיווצר זוג בשביל שיתקיים שימור מטען
2. אנרגיית הפוטון שווה לאנרגיית הזוג, יש להוסיף אנרגיית מנוחה יחסותית לכל חלקיק mc^2 .
3. בשביל ליצור זוג חייבת להיות אינטראקציה עם גוף נוסף (בד"כ גרעין) כדי שיהיה שימור תנע.
4. התהליך יכול גם לקרות הפוך ונקרא אינהלציה. לדוגמה פוזיטרון פוגש אלקטרון, הם נכחדים ויוצרים פוטון.

שאלות:

- (1) דוגמה - אנרגיה מינימלית ליצירת זוגות
מצאו מהי האנרגיה המינימלית (ב-eV) ליצירת זוג אלקטרון פוזיטרון?
מה אורך הגל של הפוטון במקרה זה?
- (2) חישוב אנרגיה קינטית ביצירת זוג
חשבו כמה אנרגיה קינטית כוללת תהיה ביצירת זוג של אלקטרון פוזיטרון מתוך פוטון בעל אנרגיה של: 2.8 MeV.
- (3) אורך גל מקסימאלי ליצירת זוג
מהו אורך הגל המקסימאלי של פוטון היכול לייצר זוג של פרוטון ואנטי פרוטון (כל אחד במסה של: $1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$).
- (4) אלקטרון ופוזיטרון מייצרים שני פוטונים
אלקטרון ופוזיטרון נעים אחד כלפי השני במהירות: $10^5 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ כל אחד. הם מתנגשים, נעלמים ויוצרים שני פוטונים שנעים בכיוונים מנוגדים. מהן האנרגיה והתנע של כל פוטון?

תשובות סופיות:

(1) 1.02MeV ו- 1.2pm .

(2) 1.78MeV .

(3) $6.63 \cdot 10^{-16} \text{m}$.

(4) $p = 0.51 \frac{\text{MeV}}{c}$, $E = 0.51\text{MeV}$.

דואליות גל חלקיק והאופי הגלי של החומר:

סיכום כללי:

$p = mv$	לא יחסותי	$\lambda = \frac{h}{p}$	אורך גל דה ברולי של חלקיק
או $p = m\gamma v$	יחסותי		

שאלות:

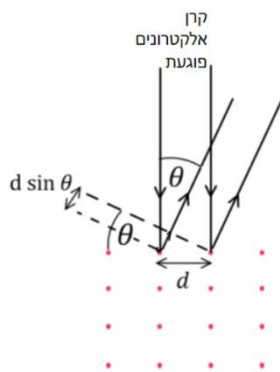
(1) דוגמה - אורך גל של כדורסל

חשבו את אורך גל דה ברולי של כדורסל השוקל חצי קילוגרם ונזרק במהירות של 10 מטר לשנייה.

(2) דוגמה - אורך גל של אלקטרון ב-100 וולט

חשבו את אורך הגל של אלקטרון המואץ תחת הפרש פוטנציאלים של 100V.

(3) דוגמה - עקיפה של אלקטרונים



מקרינים קרן אלקטרונים בניצב למשטח של חומר מוצק. האטומים בחומר מסודרים בצורת סריג ריבועי כאשר המרווח בין האטומים לא ידוע ומסומן ב- d , ראו איור. מצאו את המרחק d אם האנרגיה הקינטית של האלקטרונים היא: $E_k = 80\text{eV}$ והזווית בה מתרחשת התאבכות בונה בפעם הראשונה היא 22° . הניחו שהאנרגיה של האלקטרונים נמוכה וכי האלקטרונים עושים אינטראקציה רק עם השכבה החיצונית של החומר.

(4) כמה מתח לאורך גל

באיזה מתח צריך להאיץ אלקטרון כך שהוא יגיע לאורך גל של 0.6nm.

(5) אנרגיה ותנע מאורך גל

לאלקטרון אורך גל דה ברולי של: $\lambda = 3.2 \cdot 10^{-10}\text{m}$.

א. מהו התנע שלו?

ב. מהי מהירותו? האם היא יחסותית? רמת דיוק של 1% בגאמה.

ג. איזה מתח נדרש כדי להאיץ אותו למהירות כזו?

(6) רזולוציה של מיקרוסקופ אלקטרוני

מהו הגבול התיאורטי של הרזולוציה של מיקרוסקופ אלקטרוני שבו האלקטרונים מואצים במתח של 80 kV . יש להשתמש בנוסחאות יחסיות.

(7) אנרגיה יחסית

אלקטרון בשפופרת טלויזיה (של פעם) מואץ במתח של 33 keV .
א. האם האנרגיה של האלקטרון יחסית? לפי רמת דיוק של אחוז אחד בגמא.
ב. חשבו את אורך הגל של האלקטרון. האם צריך לדאוג מתופעות עקיפה? גודל פתח השפופרת הוא 5 cm .

תשובות סופיות:

- (1) $1.3 \cdot 10^{-34}\text{ m}$
- (2) $1.2 \cdot 10^{-10}\text{ m}$
- (3) 3 A
- (4) 4.17 V
- (5) א. $2.1 \cdot 10^{-24}\text{ kg} \cdot \text{sec}$, ב. $2.3 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, לא יחסית. ג. 15 V
- (6) $4.2 \cdot 10^{-12}\text{ m}$
- (7) א. כן. ב. $6.6 \cdot 10^{-12}\text{ m}$, אין צורך.

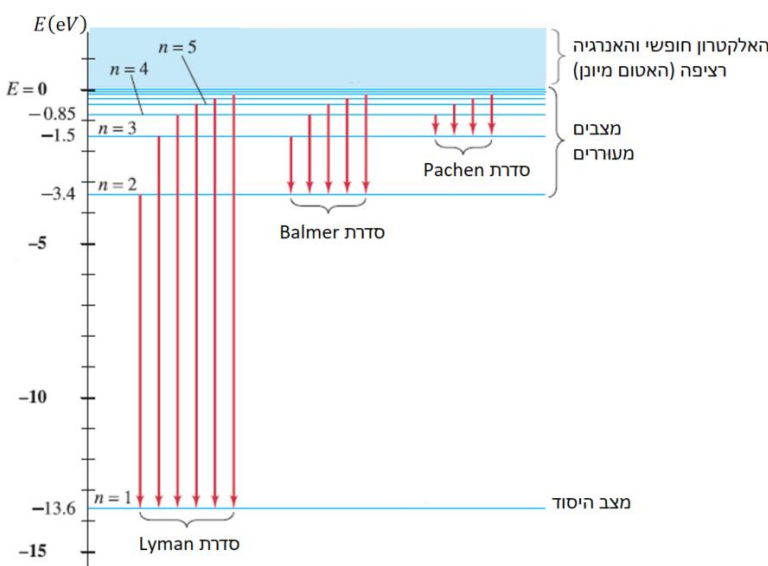
מודלים מוקדמים של האטום:

סיכום כללי:

קבוע Rydberg $\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	נוסחה לאורכי הגל הנפלטים מאטום המימן $\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	
1. מדוע הקרינה שנפלטת היא באורכי גל מסוימים בלבד. 2. אם האלקטרון בתאוצה כל הזמן הוא צריך לאבד אנרגיה כל הזמן ולקרוס לגרעין. אטומים לא היו צריכים להיות יציבים.		בעיות במודל הפלנטארי של ראתפורד

מודל האטום של בוהר:

סיכום כללי:

1. האלקטרונים יכולים לנוע רק במסלולים / רדיוסים ספציפיים מסביב לגרעין. המסלולים נקראים אורביטלים .		הנחות המודל
2. האלקטרונים לא מאבדים אנרגיה בתנועה המעגלית (למרות שהם בתאוצה). בגלל שהאלקטרון לא מאבד אנרגיה במצבים stationary states אלו הם נקראים מצבים יציבים		
	$hf = E_U - E_L$	אנרגיית הפוטון שווה להפרש האנרגיות בין שני מצבים
$n=1,2,3\ldots$	$L = mvr_n = \frac{nh}{2\pi}$	הנחה על התנע הזוויתי
Z - מספר הפוטונים $r_1 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi e^2 m_e} \approx 0.529 \cdot 10^{-10}$	$r_n = \frac{n^2}{Z} r_1$	הרדיוסים האפשריים
	$E = -\frac{Z^2 \cdot 13.6eV}{n^2}$	האנרגיה של האלקטרון הנמצא במסלול ה- n
		טבלה של רמות האנרגיה באטום המימן

שאלות:

- (1) **דוגמה - אורך הגל של הקו הראשון של Paschen**
השתמשו בטבלה שהוצגה בסרטון "קווי הספקטרום ממודל בוהר" ומצאו את אורך הגל של קו הספקטרום הראשון בסדרת Paschen. באיזה תחום של אורכי גל נמצא קו זה? (IR, UV או אור נראה).
- (2) **דוגמה - אורך גל מקסימלי בבליעה**
גז מימן נמצא בשפופרת בלחץ נמוך ובטמפרטורת החדר (האלקטרונים במצב היסוד). מקרינים את הגז בקרינה עם ספקטרום רציף של אורכי גל. מהו אורך הגל הכי גבוה בספקטרום הבליעה ומהו אורך הגל אחריו? השתמשו בטבלה של רמות האנרגיה באטום המימן.
- (3) **דוגמה - אנרגיית יון של יון הליום**
 He^+ הוא יון של הליום המכיל שני פרוטונים ואלקטרון אחד. השתמשו במודל בוהר וחשבו את אנרגיית היינון של He^+ , כלומר, כמה אנרגיה דרושה בשביל לנתק גם את האלקטרון היחיד שנשאר. מהו אורך הגל המקסימאלי של פוטון הגורם ליינון? הניחו שהאלקטרון במצב היסוד.
- (4) **דוגמה - אנרגיה של אטומים בטמפרטורת חדר**
לפי התיאוריה הקינטית (תיאוריה בתרמודינמיקה), האנרגיה הקינטית הממוצעת של אטום בגז (אידיאלי) היא: $\bar{E}_k = \frac{3}{2}kT$ כאשר $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$. הוא קבוע בולצמן ו-T היא הטמפרטורה בקלווין. הסבירו מדוע בטמפרטורת החדר כמעט כל האטומים צריכים להיות במצב היסוד. (טמפרטורת החדר היא בערך 20 מעלות צלזיוס והטמפרטורה בקלווין שווה לטמפרטורה בצלזיוס פלוס 273).
- (5) **השוואה בין מעברים**
נתונים שלושה מעברים בין רמות אנרגיה של אטום המימן לפי מודל בוהר כאשר n הוא המצב ההתחלתי ו-n' הוא המצב הסופי.
I. $n = 1 \quad n' = 3$
II. $n = 6 \quad n' = 2$
III. $n = 4 \quad n' = 5$
א. קבעו אילו מן המעברים הם בליעה ואילו פליטה.
ב. באיזה מעבר מעורב הפוטון הכי אנרגטי?

- (6) **יינון אטום מעורר**
כמה אנרגיה דרושה על מנת ליינן אטום מימן מעורר הנמצא במצב אנרגיה החמישי?
- (7) **אורך גל של הקו השני**
מצאו את אורך הגל של הקו השני בסדרת בלמר.
- (8) **מימן בולע פוטון של הליום מיון**
בשמש ישנם יונים של הליום - He^+ . יון של ההליום פולט פוטון במעבר מרמה 5 לרמה 2. האם אטום מימן הנמצא בשמש יוכל לבלוע את הפוטון בלי לבצע יינון? אם כן בין איזה רמות אנרגיה תתבצע הבליעה?
- (9) **אנרגיית יינון של ליתיום פלוס שתיים**
חשבו את אנרגיית היינון (ממצב הייסוד) של אטום ליתיום החסר שני אלקטרונים Li^{2+} בעל $Z = 3$ לפי מודל בוהר.
- (10) **אנרגיה קינטית של אלקטרון במצב יסוד**
מהי האנרגיה הפוטנציאלית והקינטית של אלקטרון במצב היסוד של אטום המימן?
- (11) **האם אטום המימן יחסותי**
השתמשו בתוצאה של התרגיל הקודם "אנרגיה קינטית של אלקטרון במצב ייסוד" ובדקו האם יש צורך להשתמש בנוסחאות יחסותיות במודל בוהר.
- (12) **רדיוס אטום מעורר**
אטום מימן מעורר יכול להיות תיאורטית בקוטר של 0.10mm. באיזה רמת אנרגיה נמצא אטום זה? ומהי האנרגיה של מצב זה?
- (13) **אנרגיה ותנז**
מצאו את התנע הזוויתי של אלקטרון באטום המימן אם האנרגיה שלו היא -1.5eV .
- (14) **אלקטרונים פוגעים בגז מימן**
קרן אלקטרונים בעלי אנרגיה של 12.1eV פוגעת בגז מימן הנמצא בטמפרטורת החדר (רוב האטומים במצב היסוד). מהו ספקטרום הפליטה שנצפה לראות מן הגז בעקבות פגיעת הקרן?

תשובות סופיות:

- (1) 300nm בתחום העל סגול (UV).
- (2) $\lambda_{\max} = 122\text{nm}$, $\lambda_2 = 103\text{nm}$.
- (3) 22.8nm.
- (4) ראה סרטון.
- (5) א. בליעה: I, פליטה: II, בליעה: III. ב. מעבר I.
- (6) 0.544eV.
- (7) 490nm.
- (8) לא יוכל לקלוט.
- (9) 122.4eV.
- (10) $K = 13.6\text{eV}$, $U = -27.2\text{eV}$.
- (11) אין צורך.
- (12) ברמה ה-972, האנרגיה היא: $-1.4 \cdot 10^{-J} \text{eV}$.
- (13) $3.17 \cdot 10^{-34} \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{sec}}$.
- (14) אורכי הגל הנצפים הם: 103nm, 656nm, 122nm.

שאלות ותרגילים נוספים:

שאלות:

- (1) **טמפרטורה של כוכב**
איזה כוכב נמצא בטמפרטורה גבוהה יותר, כוכב הנראה כחול, אדום או צהוב?
- (2) **גופים שחורים בחושך**
אם קרינה נפלטת מכל גוף, למה אנחנו לא רואים אותם בחושך?
- (3) **צבע אור של נורה**
האם האור של נורה בטמפרטורה של 3000K יראה לבן כמו האור של השמש הנמצאת ב-6000K?
- (4) **חדר חושך**
למה בחדרי חושך מאירים בנורה אדומה כשמפתחים תמונה של שחור לבן? האם ניתן להשתמש באור אדום גם בפיתוח של תמונה בצבע?
- (5) **תדירות סף מעדיפה תיאוריה פוטונית**
הסבירו למה העובדה שיש תדירות סף באפקט הפוטואלקטרי מסתדרת עם התורה הפוטונית ולא עם התורה הגלית של האור?
- (6) **אנרגיה של אינפרה אדום לעומת על סגול**
א. האם לפוטון יחיד של קרן בתחום העל סגול יש תמיד יותר אנרגיה מפוטון יחיד של קרן בתחום האינפרה אדום?
ב. האם לקרן בתחום העל סגול יש תמיד יותר אנרגיה מקרן בתחום האינפרה אדום?
- (7) **האם נפלטים יותר אלקטרונים באורך גל נמוך**
מקרינים מתכת באמצעות אור באורך גל מסוים ומודדים את האנרגיה של האלקטרונים הנפלטים. מחליפים את הקרן האור לקרן אחרת, באותה העוצמה אך עם אורך גל גדול יותר. בהנחה שבשני המקרים נפלטים אלקטרונים מן המתכת:
א. האם מספר האלקטרונים הנפלט גדל / קטן או נשאר ללא שינוי?
ב. האם האנרגיה של האלקטרונים גדלה / קטנה או נשארת ללא שינוי?

- (8) **אורך גל של פוטון בפיזור**
האם אורך הגל של פוטון בקרינת X המפוזר מאלקטרון גדל / קטן או לא משתנה?
- (9) **הבדל בין הפוטואלקטרי לקומפלטון**
באפקט קומפלטון הפגיעה של הפוטון יכולה לגרום ליציאה של אלקטרון מהמתכת, במקרה כזה מה ההבדל בינו לאפקט הפוטואלקטרי?
- (10) **איך העוצמה יורדת עם המרחק לפי כל מודל**
נניח כי ישנו מקור אור נקודתי, כיצד צריכה לרדת העוצמה של האור כתלות במרחק מהמקור לפי המודל הפוטוני וכיצד לפי המודל הגלי.
האם ניתן להבחין בין המודלים בדרך זו?
- (11) **מהם ההבדלים בין פוטון לאלקטרון**
ציינו את כל ההבדלים בין פוטון לאלקטרון.
- (12) **האם יש חמצן על כוכב**
כיצד ניתן לדעת האם יש חמצן על פני השמש או על כוכבים בכלל?
- (13) **נכונות הנוסחה של אנרגיית הפוטון**
השתמשו בשימור תנע והראו כי לפוטון הנפלט מאטום המימן יש קצת פחות אנרגיה מאשר החישוב שבנוסחה: $hf = E_U - E_L$.
- (14) **ספקטרום בליעה ופליטה בטמפרטורות שונות**
נניח שניקח את ספקטרום הפליטה של גז מימן הנמצא בטמפרטורה מאוד גבוהה כך שחלק מהאטומים נמצאים במצב מעורר ונעביר אותו דרך גז מימן הנמצא בטמפרטורה החדר (האטומים לא מעוררים) כך שתתבצע בליעה.
האם קווי הבליעה יהיו זהים לקווי הפליטה?
- (15) **אנרגיה מקסימלית להתנגשות אלסטית**
מהי האנרגיה המקסימלית עבורה יתנגשו שני אטומי מימן הנמצאים במצב היסוד להתנגשות אלסטית?

(16) כמה פוטונים נכנסים לעין מנורה

נורה של 40W פולטת בערך 3% מהאנרגיה המושקעת בה כאור נראה באורך גל ממוצע של 550nm. האור נפלט בצורה אחידה לכל הכיוונים. העריכו כמה פוטונים פוגעים בעין של אדם הנמצא במרחק 10m מהנורה בכל שניה. קוטר האישון הוא 4.0mm.

(17) כמה פוטונים מגיעים מהשמש

עוצמת האור המגיע מן השמש היא: $I = 1350 \frac{W}{m^2}$. חשבו כמה פוטונים למטר מרובע לשנייה יש פוגעים בפני כדור הארץ מן השמש? קחו אורך גל ממוצע של 550nm.

(18) כוח של קרן לייזר

קרן לייזר באורך גל של: $\lambda = 633nm$ פוגעת בחיישן כוח. החיישן מודד כוח של: $F = 3.0nN$. כמה פוטונים פוגעים בחיישן כל שניה אם נניח שהפוטונים אינם מוחזרים?

(19) חלקיקי אלפא מתקרבים לגרעין

בחלק מהניסויים של רתפורד הוא השתמש בחלקיקי אלפא בעלי מטען $+2e$ עם אנרגיה של 3.6MeV. כמה קרוב יכלו החלקיקים להגיע למרכז גרעין של כסף המכיל מטען של $+47e$. התעלמו מהרתע של הגרעין.

(20) פוטנציאל עצירה בניסוי פוטואלקטרי

בניסוי פוטואלקטרי מקרינים מתכת באור באורך גל 440nm ומודדים כי פוטנציאל העצירה הוא 1.2V. מה יהיה פוטנציאל העצירה אם יחליפו את האור לאורך גל של 550nm.

(21) שינוי תדירות בפוטואלקטרי

בניסוי פוטואלקטרי פוטונים באנרגיה של 9.0eV פוגעים במתכת ומתח העצירה הנמדד הוא 5.0V.
א. מה תהיה האנרגיה המקסימאלית של האלקטרונים הנפלטים אם תדירות הפוטונים תקטן לחצי מהתדירות המקורית?
ב. חזרו על סעיף א אם התדירות תקטן לשליש מהתדירות המקורית.

22) מודל בוהר לשמש וכדור הארץ

נסו ליישם את המודל של בוהר לכדור הארץ והשמש.

א. מהם הרדיוסים ורמות האנרגיה? יש להשתמש ב:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{sec}^2 \text{kg}}, M_E = 5.97 \cdot 10^{24} \text{kg}, M_S = 2 \cdot 10^{30} \text{kg}$$

ב. חשבו את רמת האנרגיה שבה נמצא כדור הארץ אם המרחק מהשמש

$$\text{הוא: } r = 1.50 \cdot 10^{11} \text{m}$$

ג. * הראו כי ההבדל בין רמות האנרגיה זניח עבור מודל זה וניתן להתייחס לאנרגיה כרציפה.

23) כוח על פנס

פנס קטן עובד בהספק של 5W כאשר כ-3% מנוצל לאור נראה. העריכו את הכוח המופעל על הפנס אם האור יוצא בכיוון אחד.

24) זמן ואורך פלאנק

נסתכל על שלושה קבועים בסיסיים בטבע קבוע הגרביטציה:

$$h = 6.63 \cdot 10^{-34} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{sec}}, G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{sec}^2}$$

$$\text{ומהירות האור: } c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

א. מצאו קומבינציה מתמטית של הקבועים האלו שתהיה ביחידות של זמן. זמן זה נקרא זמן פלאנק t_p והוא נחשב לזמן המוקדם ביותר מרגע תחילת הייקום שבו ניתן להפעיל את חוקי הפיזיקה כפי שאנחנו מבינים כיום. חשבו את זמן זה.

ב. מצאו קומבינציה מתמטית של הקבועים האלו שתהיה ביחידות של אורך. אורך זה נקרא אורך פלאנק λ_p והוא נחשב לאורך הקטן ביותר שבו ניתן להפעיל את חוקי הפיזיקה כפי שאנחנו מבינים כיום. חשבו את אורך זה.

תשובות סופיות:

- (1) כחול.
- (2) כי הקרינה הנפלטת היא לא בתחום הנראה.
- (3) לא, הוא יראה יותר צהוב אדום.
- (4) כי סרט שחור לבן לא מגיב לאור אדום, לא ניתן להשתמש באור אדום לפיתוח תמונה צבעונית.
- (5) לפי התורה הגלית האנרגיה של האור קשורה לעוצמת האור ולפי התורה הפוטונית לתדירות.
- (6) א. כן. ב. לא.
- (7) א. ללא שינוי. ב. קטנה.
- (8) גדל.
- (9) באפקט קומפטון הפוטון מפוזר באנרגיה יותר נמוכה לעומת הפוטואלקטרי שם תמיד כל הפוטון נבלע וכל האנרגיה שלו הולכת לאלקטרון.
- (10) לפי אחד חלקי המרחק בריבוע בשניהם ואי אפשר להבחין ביניהם.
- (11) משותף: תנע - לשניהם יש, דואליות גל חלקיק לשניהם (לשניהם יש אורך גל). שונה: פוטון נע רק במהירות האור, לפוטון אין מסת מנוחה, לפוטון אין מטען חשמלי.
- (12) לפי ספקטרום הפליטה.
- (13) ראה סרטון.
- (14) לא.
- (15) 10.2eV.
- (16) 10^{10} .
- (17) $3.7 \cdot 10^{21}$ פוטונים.
- (18) $2.9 \cdot 10^8$ פוטונים לשנייה.
- (19) $3.76 \cdot 10^{-14} \text{ m}$.
- (20) 0.64V.
- (21) א. 0.5eV. ב. לא תהיה פליטת אלקטרונים.
- (22) א. $E_n = -1.68 \cdot 10^{182} \cdot \frac{1}{n^2}$, $r_n = 2.34 \cdot 10^{-138} \cdot n^2$. ב. $n = 2.53 \cdot 10^{74}$.
- (23) ג. ראה סרטון. $5 \cdot 10^{-10} \text{ N}$.
- (24) א. $t_p = \sqrt{\frac{Gh}{c^5}} = 1.35 \cdot 10^{-43} \text{ sec}$. ב. $\lambda_p = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}} = 4.05 \cdot 10^{-35} \text{ m}$.