פונקציות מרוכבות

תוכן העניינים

פונקציות מרוכבות

פרק 1 - מספרים מרוכבים

תוכן העניינים

פונקציות מרוכבות

פרק 2 - טופולוגיה במישור המרוכב

תוכן העניינים

סדרות של מספרים מרוכבים:

שאלות:

1) נתון $z_n = \frac{1}{n} + i\left(\frac{n-2}{n}\right)$. חשב את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

2) נתון $z_n = \frac{n^2+n+1}{3n^2+2} + i\left(\frac{n-1}{2n}\right)$. חשב את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

3) נגדיר $z_n = (i)^{2n} n^3$. הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$.

4) נגדיר $z_n = \frac{i^n}{n}$. הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 0$.

5) נתון $z_n = \frac{(1+i)^n}{n}$. חשב את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

6) בדקו את התכנסות הסדרה $z_n = n \cdot z^n$ כאשר $z \in \mathbb{C}$.

א. כאשר $|z| \geq 1$.

ב. כאשר $0 < |z| < 1$.

7) נאמר כי סדרת מספרים מרוכבים $z_n \xrightarrow{n\to\infty} L$ אם ורק אם $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - L| = 0$.
הוכיחו כי אם $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z$ ו- $w_n \xrightarrow{n\to\infty} w$ אזי $z_n + w_n \xrightarrow{n\to\infty} z + w$.

8) בדקו האם הסדרות הבאות מתכנסות, אם כן חשבו את גבולן.

א. $z_n = \frac{1+n}{1-2n} + \frac{n-10}{n^2} i$

ב. $z_n = \cos(\pi n) + n\sin\left(\frac{1}{n}\right) i$

ג. $z_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^{-n} + \sqrt[n]{3^n + 4^n} \cdot i$

ד. $z_n = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)$

תשובות סופיות:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = i$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \frac{1}{3} + i\cdot\frac{1}{2}$

3) הוכחה.

4) הוכחה.

5) ∞

6) א. ∞ ב. 0

7) הוכחה.

8) ראו סרטון.

מושגים טופולוגיים בסיסיים:

שאלות:

1) שרטטו את הקבוצה $|z-i|+|z+i|<4$.

א. האם היא פתוחה/סגורה?

ב. האם זה תחום?

ג. האם זה תחום פשוט קשר?

2) שרטטו את הקבוצה, עבור a ממשי $\text{Re}\left[\frac{z-a}{z+a}\right]=0$.

א. האם היא פתוחה?

ב. האם זה תחום?

ג. האם זה תחום פשוט קשר?

3) שרטטו את הקבוצה $\text{Im}\left[\frac{z-1}{z+1}\right]=0$.

א. האם היא פתוחה?

ב. האם זה תחום?

ג. האם זה תחום פשוט קשר?

4) שרטטו את הקבוצה $|z+i|=2|z-i|$.

א. האם היא פתוחה?

ב. האם זה תחום?

ג. האם זה תחום פשוט קשר?

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הראו כי $|z\pm w|^2=|z|^2\pm 2\,\text{Re}\left(z\cdot\overline{w}\right)+|w|^2$.

ב. עבור $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ ו- $\lambda>0$ הראו כי המשוואה $|z-z_1|=\lambda|z-z_2|$ מתארת ישר או מעגל.

תשובות סופיות:

1) ראו סרטון.
2) ראו סרטון.
3) ראו סרטון.
4) ראו סרטון.
5) ראו סרטון.

פונקציות מרוכבות

פרק 3 - פונקציות אלמנטריות

תוכן העניינים

סינוס מרוכב:

שאלות:

1) פתרו את המשוואה $\sin(z)=2$.

2) הוכיחו כי $\sin(z)=\sin(x+iy)=\sin(x)\cosh(y)+i\cos(x)\sinh(y)$.

3) פתרו את המשוואה $\sin(z)=5$.

תשובות סופיות:

1) כל הפתרונות הם מהצורה הבאה: $z_n=\frac{\pi}{2}+2\pi n+i\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)$,
כאשר n מספר שלם.

2) הוכחה.

3) $z_k=\frac{\pi}{2}+2\pi k-i\ln\left(5\pm2\sqrt{6}\right)$

קוסינוס מרוכב:

שאלות:

1) הוכיחו כי $\cos(z)=\cos(x+iy)=\cos(x)\cosh(y)-i\sin(x)\sinh(y)$.

2) פתרו את המשוואה $\cos(z)=2$.

3) האם $|\cos(z)|\le 1$ לכל z ?

4) פתרו את המשוואה $\cos(\pi z)+\frac{3}{4}i=0$.

5) הוכיחו כי לכל $z\in\mathbb{C}$ מתקיים $|\cos(z)|\le\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}$ כאשר $y=\mathrm{Im}(z)$.

6) פתרו את המשוואה $\tan(z)=\frac{i}{3}$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) $z_n=2\pi n+i\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)$

3) לא.

4) $z_k=-\frac{1}{2}+2k-i\frac{1}{\pi}\ln(2)$

5) הוכחה.

6) $z_k=\pi k+i\frac{1}{2}\ln(2)$

אקספוננט מרוכב:

שאלות:

1) פתרו את המשוואה $e^{z}=-1$.
2) הוכיחו כי לכל x ממשי מתקיים $\left|e^{ix}\right|=1$.
3) ענו על הסעיפים הבאים:
   א. הראו כי אם $\operatorname{Im}(z)\ge 0$ אז $\left|e^{iz}\right|\le 1$.
   ב. הראו כי $\left|e^{z}\right|=1$ אם ורק אם $\operatorname{Re}(z)=0$.
4) פתרו את המשוואה $e^{z}=1$.
5) פתרו את המשוואה $e^{z}=i$.
6) פתרו את המשוואה $e^{z}=1+i$.
7) האם הפונקציה $f(z)=e^{z}$ היא חח"ע?

תשובות סופיות:

1) $z=i\cdot\pi[2n+1]$
2) $\sqrt{\cos^{2}(x)+\sin^{2}(x)}=1$
3) א. $\left|e^{iz}\right|=e^{-y}=\frac{1}{e^{y}}\le\frac{1}{e^{0}}=1$ ב. הוכחה.
4) $k\in\mathbb{Z}$ $\quad z_k=2\pi ik$
5) $k\in\mathbb{Z}$ $\quad z_k=i\pi\left(2k+\frac{1}{2}\right)$
6) $k\in\mathbb{Z}$ $\quad z_k=\frac{1}{2}\ln(2)+i\pi\left(2k+\frac{1}{4}\right)$
7) לא.

העתקות אלמנטריות:

שאלות:

1) מצאו את התמונה $f(U)$ של התחום $U=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\}$, תחת ההעתקה $f(z)=z+1$.

2) מצאו את התמונה $f(U)$ של התחום $U=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\}$, תחת ההעתקה $f(z)=5z$.

3) מצאו את התמונה $f(U)$ של התחום $U=\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,Arg(z)=\frac{\pi}{4}\right\}$, תחת ההעתקה $f(z)=z^3$.

4) מהי תמונת התחום $A=\{z\in\mathbb{C}\,|\,0<\mathrm{Im}(z)<\pi\}$ תחת העתקה $f(z)=e^z$.

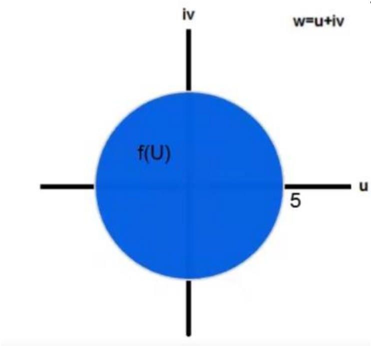
5) מהי תמונת התחום $A=\{z\in\mathbb{C}\,|\,0<\mathrm{Im}(z)<2\pi\}$ תחת העתקה $f(z)=e^z$.

6) מהי תמונת התחום $A=\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,-\infty<\mathrm{Re}(z)<0, 0<\mathrm{Im}(z)<\frac{\pi}{2}\right\}$ תחת העתקה $f(z)=e^z$.

תשובות סופיות:

1) $|w-1|<1$

2)



3) $\frac{3\pi}{4}\simeq 135°$

4) $0<\alpha<\pi \quad 0<R<\infty \quad f(z)=e^x e^{iy}\equiv \mathrm{Re}^{i\alpha}$

5) $0<\alpha<2\pi \quad 0<R<\infty \quad f(z)=e^x e^{iy}\equiv \mathrm{Re}^{i\alpha}$

6) $0<\alpha<\frac{\pi}{2} \quad 0<R<1 \quad f(z)=e^x e^{iy}\equiv \mathrm{Re}^{i\alpha}$

לוגריתם מרוכב, פונקציות רב-ערכיות ושורשים:

שאלות:

1) חשבו את הגדלים הבאים:
   א. $Arg(1+i)$
   ב. $Arg\left(2e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)$

2) חשבו את הגדלים הבאים:
   א. $Log(1+i)$
   ב. $Log\left(2e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)$

3) מצאו את כל הערכים האפשריים של $\sqrt{i}$.

4) מצאו את כל הערכים האפשריים של i^i.

5) מצאו את כל הערכים האפשריים של $2^{\frac{1}{9}+\frac{i}{50}}$.

6) חשבו את הערך $(2+2i)^{5i}$ עבור 3 ענפים שונים לבחירתכם.
   כמה תשובות אפשריות יש לערך זה.

7) מצאו את תמונת התחום $A=\{z=re^{i\theta}\mid R_1<r<R_2\ ,\ -\pi<\theta<\pi\}$ תחת העתקה $Log(z)$ (הענף הראשי של הלוג).

8) מצאו תחום בו הפונקציה $\log\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$ אנליטית. כאשר $a,b\in\mathbb{C}$ $a\neq b$.
   הערה: תרגיל זה דורש ידע בהעתקות מוביוס.

9) הראו כי $|a^z|=a^{\mathrm{Re}(z)}$ עבור a ממשי חיובי בתחום $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0)$ כאשר פונקציית החזקה מוגדרת ע"י ענף ראשי של הלוג, כלומר: $a^z=e^{z\cdot Log(a)}$.

10) הוכיחו ישירות כי העתקה $\sqrt{z}$ איננה רציפה בתחום $\mathbb{C}$ אם מגדירים את $\sqrt{z}$ באופן הבא: $\sqrt{z}=\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ כאשר $z=re^{i\theta}\ \mid\ \theta\in[0,2\pi]$.

11) מצאו את כל הערכים האפשריים של $\log(\log(-1))$.

12) נניח כי $\log(z)$ זה ענף רציף של הלוגריתם בתחום $\mathbb{C}\setminus\{z=x+iy\ ,\ x\geq 0\ ,\ y=\sin(x)\}$ ונניח שבענף זה מתקיים $\log(1)=0$, חשבו בענף זה את הערכים: $\log\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, $\log\left(\frac{5\pi}{2}\right)$, $\log(-i)$, $\log(i)$, $\log(-1)$.

13) נגדיר $\log_\alpha(z)=\ln|z|+i\cdot\arg(z)$ כאשר $\alpha-2\pi<\arg(z)\leq\alpha$.

א. חשבו את הערכים: $\log_0(1)$, $\log_\pi(1)$, $\log_{2\pi}(1)$.

ב. מצאו את התמונה של $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ תחת ההעתקה $\log_\pi(z)$.

ג. מצאו את התמונה של $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ תחת ההעתקה $\log_0(z)$.

14) יהיו z_n , ... , z_1 מספרים מרוכבים כך ש-$\mathrm{Re}(z_k)>0$ לכל $1\leq k\leq n$ וגם $\mathrm{Re}(z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_k)$ לכל $1\leq k\leq n$.
הוכיחו כי $Log(z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n)=Log(z_1)+\ldots+Log(z_n)$, כאשר $Log(z)$ זה הענף הראשי של הלוגריתם.

15) יהי $U=\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ ויהי $y>0$. חשבו את הגבול $\lim\limits_{y\to 0}\left[\log(a+iy)-\log(a-iy)\right]$ עבור $a>0$ ועבור $a<0$.

16) הוכיחו שלא קיים ענף אנליטי של $\sqrt{z}$ ב-$\mathbb{C}$. כלומר, הראו שלא קיימת פונקציה אנליטית $h(z)$ ב-$\mathbb{C}$ כך ש-$h^2(z)=z$ לכל $z\in\mathbb{C}$.

17) הוכיחו שלא קיים ענף אנליטי של $\sqrt[n]{z}$ ב-$|z|<1$ לכל $n\geq 2$.

18) נניח כי $g(z)$, $f(z)$ הם שני ענפים אנליטיים של הלוג בקבוצה פתוחה וקשירה U. הוכיחו כי קיים קבוע k שלם כך ש-$f(z)-g(z)=2\pi ik$ לכל $z\in U$.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{\pi}{4}$ ב. $-\frac{\pi}{2}$

2) א. $\ln\left(\sqrt{2}\right)+i\frac{\pi}{4}$ ב. $\ln(2)-\frac{\pi}{2}$

3) $e\frac{5\pi}{4}i \, , k=1 \quad ; \quad e\frac{\pi}{4}i \, , \, k=0$

4) $\left\{e^{-\pi\frac{4k+1}{2}} \quad | k\in\mathbb{Z}\right\}$

5) $\left\{2^{\frac{1}{9}}e^{-\frac{2\pi k}{50}}e^{i\left(\frac{\ln(2)}{50}+\frac{2\pi k}{9}\right)} \quad | \, k\in\mathbb{Z}\right\}$

6) $\left\{e^{-5\cdot\frac{\pi}{4}}e^{i\cdot 5\ln\left(\sqrt{8}\right)} \, , \, e^{-5\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)}e^{i\cdot 5\ln\left(\sqrt{8}\right)} \, , \, e^{-5\left(\frac{\pi}{4}-2\pi\right)}e^{i\cdot 5\ln\left(\sqrt{8}\right)} \, , \, ..\right\}$

7) $\ln(r)+i\cdot\theta$

8) $\frac{z-a}{z-b}\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0)$

9) $a^{\mathrm{Re}(z)}$

10) הוכחה.

11) $m\in\mathbb{Z} \, , \, k\geq 0 \quad \ln(\pi+2\pi k)+i\cdot\left(\frac{\pi}{2}+2\pi m\right)$

$m\in\mathbb{Z} \quad \ln(-\pi-2\pi k)+i\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi m\right)$

12) $-\pi i \, , \, -\frac{3\pi}{2}i \, , \, -\frac{\pi}{2}i \, , \, \ln\left(\frac{5\pi}{2}\right) \, , \, \ln\left(\frac{3\pi}{2}\right)-2\pi i$

13) א. $2\pi i \, , \, 0 \, , \, 0$ ב. $\theta<r<\infty \, , \, -\infty<\ln(r)<\infty \, , \, \ln(r)+i\theta$

ג. $0<\theta\leq 2\pi \, , \, -\infty<\ln(r)<\infty \, , \, \ln(r)+i\theta$

14) הוכחה.

15) $2\pi i$

16) הוכחה.

17) הוכחה.

18) הוכחה.

פונקציות מרוכבות

פרק 4 - פונקציות אנליטיות

תוכן העניינים

פונקציות מרוכבות:

שאלות:

1) רשמו את הפונקציה $f(z)=z\cdot\mathrm{Re}(z)$, בצורה $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$.

2) רשמו את הפונקציה $f(z)=|z|^2$, בצורה $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$.

3) רשמו את הפונקציה $f(z)=2|z|^2+i(\bar{z})^2$, בצורה $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$.

4) רשמו את הפונקציה $f(z)=\frac{z}{1+|z|^2}$, בצורה $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$.

5) רשמו את הפונקציה $f(z)=z^2+\bar{z}$, בצורה $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$.

6) רשמו את הפונקציה $f(x+iy)=\frac{x^3}{3}+i\cdot\left(-\frac{y^3}{3}\right)$, בצורה $f(z)$, כאשר $z=x+iy$.

תשובות סופיות:

1) $f(z)=x^2+i\cdot xy$

2) $f(z)=x^2+y^2+i\cdot 0$

3) $f(z)=2\left[x^2+xy+y^2\right]+i\left(x^2-y^2\right)$

4) $f(z)=\frac{x}{1+x^2+y^2}+i\cdot\frac{y}{1+x^2+y^2}$

5) $f(z)=x^2+x-y^2+i\cdot(2xy-y)$

6) $f=\frac{2z^3+6z(\bar{z})^2}{24}$

גבולות מרוכבים ורציפות:

שאלות:

מצאו את הגבולות הבאים (אם קיימים):

1) $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z}=?$

2) $\lim\limits_{z\to 0}\frac{z^4}{|z|^4}=?$

3) $\lim\limits_{z\to 0}e^{\frac{-1}{z^2}}=?$

4) $\lim\limits_{z\to 0}e^{\frac{-1}{z^4}}=?$

תשובות סופיות:

1) $\frac{1-ik}{1+ik}$

2) $\frac{(1+ik)^4}{(1+k)^2}$

3) הגבול תלוי במסלול ולכן אינו קיים.

4) הגבול תלוי במסלול ולכן אינו קיים.

נגזרות מרוכבות:

שאלות:

1) מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה $f(z)=\bar{z}$ גזירה.
הראו עפ"י הגדרת הנגזרת כי $f(z)=\bar{z}$ אינה גזירה ב- z_0 לכל $z_0\in\mathbb{C}$.

2) מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה $f(z)=\mathrm{Re}(z)$ גזירה.

3) מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה $f(z)=|z|^2$ גזירה.

4) הוכיחו את משפט לופיטל: $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{g(z)-g(z_0)}$

תשובות סופיות:

1) הפונקציה לא גזירה.
הגבול תלוי במסלול ולכן אינו קיים.

2) הפונקציה לא גזירה.

3) בראשית הצירים, והנגזרת שלה היא 0.

4) הוכחה.

משוואות קושי-רימן:

שאלות:

1) הראו כי $f(z)=z^2+\mathrm{Im}(z)$ אינה גזירה לכל z.

2) הראו כי $f(z)=xy+i(x^2+y^2)$ אינה גזירה בכל הנקודות בהן $z\neq 0$, אך כן גזירה בנקודה $z=0$ (לפי הגדרה).

3) מצאו מספרים ממשיים a,b כך שהפונקציה $f(z)=e^{ax}\cos(3y)+i\left(-e^{-3x}\sin(\mathrm{b}\,y)\right)$ תהיה גזירה בכל נקודה.

4) נתון כי $f(z)=\frac{z}{\bar{z}}$ אינה רציפה ב $z=0$.
מצאו את כל הנקודות (אם קיימות) בהן הפונקציה גזירה.

משפט קושי-רימן: הוכחה (הפתרון בסרטון)
אם $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$, גזירה ב- $z_0=x_0+iy_0$,
אז מתקיימות משוואות קושי-רימן בנקודה זו, כלומר: $\begin{matrix} u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0) \\ u_y(x_0,y_0)=-v_x(x_0,y_0) \end{matrix}$.

5) נניח כי $f(z)$ גזירה בתחום D, ונניח כי $\mathrm{Re}\{f(z)\}=0$ לכל $z\in D$.
הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.

6) נניח כי $f(z)$ פונקציה גזירה שאינה קבועה בתחום D.
נגדיר $g(z)=\overline{f(z)}$ לכל $z\in D$.
הוכיחו כי $g(z)$ אינה גזירה בכל D.

7) נתונה הפונקציה $f(z)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}} & z\neq 0 \\ 0 & z=0 \end{cases}$ הוכיחו את הטענות הבאות:

א. הפונקציה אינה רציפה בראשית.

ב. משוואות קושי-רימן מתקיימות בראשית.

8) נניח כי $f(z)$ אנליטית בתחום $H^{+}=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}(z)>0\}$.
הוכיחו כי $g(z)=\overline{f(\overline{z})}$ אנליטית בתחום $H^{+}=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}(z)<0\}$.

9) הוכיחו כי $f(z)=e^{\mathrm{Re}(z)}$ אינה גזירה בשום נקודה במישור המרוכב.

10) נתונה הפונקציה $f(z)=cx^2-xy+ixy^2$, כאשר c קבוע מרוכב כלשהו.
נתון כי $f(z)$ גזירה בנקודה $1+i$.
מצאו את הקבוע c ואת כל הנקודות בהן הפונקציה גזירה.

11) נתונה הפונקציה $f(z)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+i\cdot\arctan(\frac{y}{x})$.
קבעו האם הפונקציה $f(z)$ אנליטית בחצי המישור הימני $H=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}(z)>0\}$.

12) נתונה הפונקציה $f(z)=e^{\frac{x^2-y^2}{2}}\left[\cos(xy)+i\cdot a\sin(xy)\right]$.
עבור אילו ערכי a זוהי פונקציה הולומורפית (אנליטית) בכל המישור?

13) נניח כי $g(z)$ הולומורפית בתחום $\overline{D(0,1)}=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\le 1\}$,
ומקיימת $|g(z)|=1 \quad \forall |z|\le 1$.
הוכיחו כי $g(z)$ קבועה.
הדרכה: ניתן לכתוב את $g(z)$ באופן הבא: $g(z)=e^{i\cdot h(x,y)}$.

14) נניח כי $R>0$ ונתונה הפונקציה $f:D(0,R)\to\mathbb{C}$ גזירה בכל התחום.
נגדיר: $g(z)=\overline{f\left(\frac{R}{\overline{z}}\right)}$.
מצאו תחום בו $g(z)$ מוגדרת, ובדקו אם היא גזירה שם.

תשובות סופיות:

1) $u'_y = -2y+1 \;,\; v'_x = 2y$

2) $\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$

3) $a=-3 \;,\; b=3$

4) $x=0 \;,\; y=0$

5) הוכחה

6) הוכחה

7) א. הוכחה ב. הוכחה

8) הוכחה

9) הוכחה

10) $c = a + i\cdot b = \frac{3}{2}$,
$y=0 \;,\; y=1 \;,\; y=0.5$
$x=0 \;,\; x=1 \;,\; x=0.25$
$z=0 \;,\; z=1+i \;,\; z=0.25+0.5\cdot i$

11) $u_y = \frac{y}{x^2+y^2} \;;\; u_x = \frac{x}{x^2+y^2}$.

12) $a=1$

13) הוכחה

14) $A = \{z \;|\; |z|>1\}$

פונקציות הרמוניות:

שאלות:

1) הראו כי הפונקציה x^3-3xy^2 , היא פונקציה הרמונית בכל המישור.

2) הראו כי הפונקציה x^2-y^2 , היא פונקציה הרמונית בכל המישור,
ומצאו לה צמודה הרמונית.

3) הראו כי הפונקציה $f(z)=xy+i\left(x^2+y^2\right)$, היא פונקציה גזירה בראשית-
הצירים, אך החלק המדומה שלה אינו פונקציה הרמונית.
האם $f(z)$ הולומורפית בראשית?

4) הראו כי הפונקציה $u(x,y)=\sin(x)\cosh(y)$, היא פונקציה הרמונית בכל המישור,
ומצאו את הצמודה ההרמונית שלה $v(x,y)$ המקיימת $v(0,0)=2$.
רמז: $f(z)=\sin(z)$.

5) הראו כי הפונקציה $u(x,y)=\cos(x)\sinh(y)$, היא פונקציה הרמונית בכל המישור,
ומצאו פונקציה הלומורפית כך שמתקיים $u(x,y)=\mathrm{Re}\{f\}$.

6) הראו כי הפונקציה $v(x,y)=e^y\sin(x)$, היא פונקציה הרמונית במישור,
מצאו לה פונקציה צמודה הרמונית $u(x,y)$ ופונקציה שלמה $f(z)$,
כך שמתקיים: $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.

7) הראו כי הפונקציה $u(r,\theta)=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos(\theta)$,
היא פונקציה הרמונית בתחום $r\neq 0$.
רמז: $u(r,\theta)$ תקרא הרמונית אם היא מקיימת $r^2u_{rr}''+ru_r'+u_{\theta\theta}''=0$.

8) נתון כי $u(r,\theta)=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos(\theta)$ היא פונקציה הרמונית בתחום $r\neq 0$.
מצאו לה צמודה הרמונית בתחום זה.

9) הוכיחו כי $u(x,y)=2x-x^3+3xy^2$, היא פונקציה הרמונית ומצאו לה צמודה הרמונית.

10) תהי $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ פונקציה שלמה.
הוכיחו כי $g(x,y)=u(x,y)^2-v(x,y)^2$ פונקציה הרמונית.

11) תהי $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ פונקציה שלמה.
הוכיחו כי $g(x,y)=\sin\left[u(x,y)\right]\cdot\cosh\left[v(x,y)\right]$ פונקציה הרמונית.

12) האם קיימות פונקציות הרמוניות מהצורה $u(x,y)=\varphi\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)$
(כאשר $\varphi\in C^2$ פונקציה לא ידועה)?
אם כן, מצאו אותן.

13) האם קיימות פונקציות הרמוניות מהצורה $u(x,y)=\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$
(כאשר $\varphi\in C^2$ פונקציה לא ידועה)?
אם כן, מצאו אותן.

14) הראו כי הפונקציה $\sinh(x)\cos(y)$ היא פונקציה הרמונית בכל המישור, ומצאו את הצמודה ההרמונית שלה.

תשובות סופיות:

ראה פתרונות מלאים בסרטוני הוידאו.

פונקציות מרוכבות

פרק 5 - תכונות של פונקציות אנליטיות

תוכן העניינים

משפט ליוביל:

רקע:

משפט:

אם $f(z)$ פונקציה שלמה (אנליטית בכל $\mathbb{C}$) וחסומה ב- $\mathbb{C}$ (כלומר קיים $M>0$ כך ש- $|f(z)|<M$ $\forall z\in\mathbb{C}$) אז $f(z)$ פונקציה קבועה.

שאלות:

1) מצאו פונקציה שלמה, המקיימת את אי-השוויון $|\sin(z)-z\cdot f(z)|<2$ $\forall z\in\mathbb{C}$.

2) הוכיחו כי קיים $z\in\mathbb{C}$ עבורו $|\cos(z)|>1$ ע״י שימוש במשפט ליוביל.

3) נתונה פונקציה שלמה $f(z)=u+iv$, המקיימת $v\le 0$ (לכל z).
הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.
רמז: התבוננו בפונקציה $e^{-i\cdot f(z)}$.

4) מצאו את כל הפונקציות השלמות $f(z)=u+iv$, המקיימות $u\le 0$ (לכל z).
רמז: התבוננו בפונקציה $e^{f(z)}$.

5) מצאו את כל הפונקציות השלמות $f(z)=u+iv$, המקיימות $u\ge 0$ (לכל z).
רמז: התבוננו בפונקציה $e^{-f(z)}$.

6) מצאו את כל הפונקציות השלמות $f(z)=u+iv$, המקיימות $v\ge 0$ (לכל z).

7) נתונה פונקציה שלמה $f(z)$, המקיימת $|f(z)|\ge 1$ לכל z.
הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.
רמז: התבוננו בפונקציה $\frac{1}{f(z)}$.

8) מצאו את כל הפונקציות השלמות $f(z)=u+iv$, המקיימות $v\le 0$ (לכל z).
רמז: התבוננו בפונקציה $e^{-i\cdot f(z)}$.

9) הוכיחו כי כל הפונקציות השלמות $f(z)$, המקיימות $|f(z)|\le 4+5|z|^{\frac{4}{5}}$ $\forall z\in\mathbb{C}$
הן פונקציות קבועות.

10) נתון כי $f(z)$ שלמה, המקיימת $|f(z)|\ge e^{\operatorname{Re}(z)}$ $\forall z\in\mathbb{C}$.
הוכיחו שקיים קבוע C מרוכב, כך ש- $f(z)=C\cdot e^{z}$ $\forall z\in\mathbb{C}$.

11) נתון כי $f(z)$ שלמה, המקיימת $f(0)=0$ ו- $f(1)=1$.
הוכיחו שקיים C מרוכב, כך ש- $|f(c)|>2$.

12) נתון כי $f(z)$ שלמה, המקיימת $\lim_{z\to\infty} f(z)=2$.
הוכיחו כי $f(z)\equiv 2$.

13) נתון כי $f(z)=u+iv$ שלמה המקיימת $u\cdot v\ge 0$ לכל $z\in\mathbb{C}$.
הוכיחו כי $f(z)$ פונקציה קבועה.

14) נתון כי $f(z)=u+iv$ שלמה המקיימת $u\ge v$ לכל $z\in\mathbb{C}$.
הוכיחו כי $f(z)$ פונקציה קבועה.

15) האם קיימת פונקציה אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ כך ש-
$$|f(z)|\ge\frac{1}{\sqrt{|z|}}\qquad \forall z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\ ?$$
הערה: ניתן להשתמש במשפט רימן אם $g(z)$ אנליטית בסביבה נקובה של z_0
וחסומה שם אז היא אנליטית גם ב- z_0.
(הכוונה שניתן להגדיר אותה ב- z_0 כך שתהיה אנליטית שם).

16) הוכח או הפרך: אם $f(z)$ שלמה שאינה קבועה אז קיים $z\in\mathbb{C}$ כך
ש- $\operatorname{Re} f(z)>|f(z)|^2$.

17) הוכיחו כי אם $f(z)$ שלמה שאינה קבועה התמונה $f[\mathbb{C}]$ צפופה ב- $\mathbb{C}$.
הגדרה: קבוצה $A\subseteq\mathbb{C}$ תקרא צפופה ב- $\mathbb{C}$ אם ורק אם לכל $z_0\in\mathbb{C}$ ולכל $R>0$
מתקיים $D(z_0,R)\cap A\ne\varnothing$.

18) ידוע כי קיימת פונקציה $T(z):\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]\to D(0,1)$ אנליטית המקיימת $T'(z)\neq 0$ לכל $z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$.
הוכיחו כי כל פונקציה שלמה $f(z)$ המקיימת $f(z)\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ לכל $z\in\mathbb{C}$ הינה פונקציה קבועה.

19) נניח כי $f(z)$ שלמה ומקיימת $f(z)=f(z+1)=f(z+i)$ לכל $z\in\mathbb{C}$.
הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.

תשובות סופיות

1) $f(z)=\begin{cases}\dfrac{\sin(z)}{z} & z\neq 0\\ 1 & z=0\end{cases}$

2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) ראו וידאו.
5) ראו וידאו.
6) ראו וידאו.
7) הוכחה.
8) ראו וידאו.
9) הוכחה.
10) הוכחה.
11) הוכחה.
12) הוכחה.
13) הוכחה.
14) הוכחה.
15) לא קיימת.
16) הוכחה.
17) הוכחה.
18) הוכחה.
19) הוכחה.

עקרון היחידות:

שאלות:

1) הוכיחו כי אם $f(z)$ שלמה ומקיימת $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$, אז $f(z)\equiv z$.

2) נניח כי $f(z)$ אנליטית ב- $D=\{z \mid |z|<1\}$ ומקיימת $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$.
מצאו את $f(z)$.

3) נניח כי $f(z)$ אנליטית ב- $D=\{z \mid |z|<1.5\}$,
ומקיימת $f\left(\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{nz}{nz-0.5}dz$ $\forall n\in\mathbb{N}$.
מצאו את $f(z)$.

4) כמה פונקציות אנליטיות $f(z)$ ב- $D=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$,
מקיימות $f\left(\frac{1}{3n-1}\right)=\frac{2}{n}$ $\forall n\geq 2$?

5) מצאו את כל הפונקציות האנליטיות $f(z)$ ב- $D=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$,
המקיימות $f\left(\frac{1}{n}\right)=\sin(\pi n)$ $\forall n\geq 4$.

6) מצאו (אם ישנן) את כל הפונקציות האנליטיות $f(z)$ ב- $D=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$
המקיימות $f\left(\frac{1}{n}\right)=\begin{cases}\frac{1}{n+1} & n=2k\\ \frac{1}{n+2} & n=2k+1\end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

7) הוכח או הפרך:
לא קיימת פונקציה אנליטית $f(z)$ בעיגול היחידה הפתוח D,
בעלת אינסוף אפסים ב- D, שאינה פונקציית האפס.

8) הוכח או הפרך:
קיימת פונקציה אנליטית בתחום $1<|z|<3$ כך שלכל x ממשי המקיים $1<|x|<3$ מתקיים $f(x)=|x|^3$.

9) נתונות $f(z),g(z)$ אנליטיות בתחום D ויהיו $a,b\in D$.
הוכיחו כי אם $(f(z)-a)(g(z)-b)=0$ לכל $z\in D$ אז בהכרח $f(z)\equiv a$ או $g(z)\equiv b$.

10) נניח כי $f(z)$ אנליטית בתחום $D(z_0,R)$ עבור $z_0\in\mathbb{C}$ ו- $R>0$.
נניח בנוסף כי $f'(z_0)\neq 0$.
הוכיחו כי קיים $r>0$ כך ש- $\oint\limits_{|z-z_0|=r}\frac{1}{f(z)-f(z_0)}dz=\frac{2\pi i}{f'(z_0)}$.
הערה: תרגיל זה דורש שימוש במשפט השארית.

11) הוכח או הפרך:
נסמן $D=\{z\in\mathbb{C}\mid 0<|z|<1\}$.
נניח כי $f(z)$ אנליטית ב- D כך ש- $f\left(\frac{1}{n}\right)=n$ לכל $n>1$ וכי $f(z)$ בעלת קוטב ב- $z=0$ אז בהכרח $f(z)=\frac{1}{z}$ לכל $z\in D$.
הערה: תרגיל זה דורש ידע על נקודות סינגולריות.

12) הוכח או הפרך:
נתונה $f(z)$ אנליטית בתחום $|z|>1$ ונתון כי לכל $z\in(1,\infty)$ מתקיים ש- $f(z)$ ממשי.
אז בהכרח גם לכל $z\in(-\infty,-1)$ מתקיים ש- $f(z)$ ממשי.

13) נניח כי $f(z)$ רציפה ב- $|z|<1$ ומקיימת $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}$ ו- $f\left(\frac{i}{2}\right)=0$.
הוכיחו כי $f(z)$ אינה אנליטית ב- $|z|<1$.

14) (אתגר)
נניח כי $f(z)$ רציפה ב- $\overline{D(0,1)}$ ואנליטית ב- $D(0,1)$ המקיימת
$|f(z)|=1 \quad \forall|z|=1$ הוכיחו כי יש מספר סופי בלבד של נקודות ב- $D(0,1)$
בהן $f(z)$ מתאפסת.
רמז: היעזרו במשפט בולצאנו וייארשטראס.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) $f(z)=\frac{z}{1+z}$
3) $f(z)=z$
4) $f(z)=6\frac{z}{z+1}$
5) ראו בווידאו.
6) לא קיימות כאלו פונקציות.
7) הפרכה. דוגמא נגדית: $f(z)=\sin\left(\frac{\pi}{1-z}\right)$
8) לא קיימת כזו פונקציה.
9) הוכחה.
10) הוכחה.
11) הוכחה.
12) הוכחה.
13) הוכחה.
14) הוכחה.

עקרון המקסימום והמינימום:

שאלות:

1) מצאו (אם קיים) ערך מקסימלי של $|f(z)|$, כאשר $f(z)=e^{-z^2}$
בתחום $D=\{z \mid |z|<1\}$.

2) מצאו (אם קיים) ערך מקסימלי של $|f(z)|$, כאשר $f(z)=e^{-z^2}$
בתחום $D=\{z \mid |z|\le 3\}$.

3) מצאו (אם קיים) ערך מקסימלי של $|f(z)|$, כאשר $f(z)=\cos(z)$
בתחום $D=\{z \mid 0\le \operatorname{Re}\{z\}\le 2\pi \ ,\ 0\le \operatorname{Im}\{z\}\le 2\pi\}$.

4) מצאו (אם קיים) ערך מקסימלי של $|f(z)|$, כאשר $f(z)=e^{z^2}$ בתחום
$D=\{z \mid |z|\le 1\}$ ואת כל הנקודות בהן הוא מתקבל.

5) תהי $f(z)$ אנליטית בעיגול $|z|\le R$ ומקיימת $|f(z)|>a \qquad \forall |z|=R$
הוכיחו כי אם $|f(0)|<a$ אז בעיגול $|z|<R$ יש לפחות אפס אחד של $f(z)$.

6) (עקרון המינימום)
תהי $f(z)$ אנליטית בתחום (קבוצה פתוחה וקשירה) U ומקיימת $|f(z)|>0$.
הוכיחו:
א. אם $f(z)$ אינה קבועה אז לא קיימת נקודה $z_0\in U$ כך שהפונקציה $|f(z)|$ מקבלת מינימום ב- z_0.
ב. אם $|f(z)|$ מקבלת מינימום ב- U אז היא קבועה.
ג. הערך המינימלי של $|f(z)|$ בתחום קומפקטי Ω מתקבל על השפה בהנחה כי $f(z)$ אנליטית ולא מתאפסת ב- Ω.

7) תהי $f(z)$ אנליטית ב- $|z|\le 1$ ונניח שאינה מתאפסת שם.
נניח גם כי לכל $|z|=1$ מתקיים $|f(z)|=1$.
א. הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.
ב. האם סעיף א' נכון גם ללא הנחה ש- $f(z)$ אינה מתאפסת ב- $|z|\le 1$?

8) (עקרון המקסימום לפונקציות הרמוניות).
נניח כי $f(z)=u+iv$ אנליטית בתחום קומפקטי Ω.
הוכיחו כי $u(x,y)$ מקבלת ערך מקסימלי על השפה $\partial\Omega$.

9) (עקרון המינימום לפונקציות הרמוניות).
נניח כי $f(z)=u+iv$ אנליטית בתחום קומפקטי Ω.
הוכיחו כי $u(x,y)$ מקבלת ערך מינימלי על השפה $\partial\Omega$.

10) נניח גם כי $g(z)$, $f(z)$ אנליטיות ב- $D=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|\le 1\}$.
נניח כי לכל $|z|=1$ מתקיים $\mathrm{Re}[f(z)]=\mathrm{Re}[g(z)]$.
הוכיחו כי קיים קבוע $c\in\mathbb{C}$ כך ש- $f(z)=g(z)+c$ לכל $z\in D$.

11) יהי $p(z)=\sum_{k=0}^{k=n}a_k z^k$ פולינום ממעלה n $(a_n\ne 0)$.
נתון כי לכל $|z|=1$ מתקיים $|p(z)|\le 1$.
הראו כי לכל $|z|\ge 1$ מתקיים $|p(z)|\le |z|^n$.
רמז: הראו כי הפונקציה $f(z)=z^n p\left(\frac{1}{z}\right)$ היא פונקציה שלמה ומצאו לה חסם בדיסק היחידה.
הערה: ניתן להשתמש בעובדה: אם $f(z)$ אנליטית בסביבה נקובה של z_0 והגבול $\lim_{z\to z_0}f(z)$ קיים וסופי אזי $f(z)$ אנליטית גם ב- z_0.
(הכוונה שניתן להגדיר אותה ב- z_0 כך שתהיה אנליטית שם).

12) יהי $R>0$ ונניח כי $f(z)$ אנליטית בתחום:
$A=\{z=x+iy\,|\,-R\le x\le R,-R\le y\le R\}$.
נסמן את שפות התחום כך:

$$l_3=\{z=-R+iy\,|\,-R\le y\le R\}\qquad l_1=\{z=R+iy\,|\,-R\le y\le R\}$$
$$l_4=\{z=x-iR\,|\,-R\le x\le R\}\qquad l_2=\{z=x+iR\,|\,-R\le x\le R\}$$

הוכיחו כי $|f(0)|\le\frac{1}{4}\left(\max_{l_1}|f(z)|+\max_{l_2}|f(z)|+\max_{l_3}|f(z)|+\max_{l_4}|f(z)|\right)$.
רמז: התבוננו בפונקציה $g(z)=\frac{1}{4}\left(f(z)+f(-z)+f(iz)+f(-iz)\right)$.

13) (אתגר)
הוכיחו כי משפט ההעתקה הפתוחה: אם $A\subset\mathbb{C}$ קבוצה פתוחה ו- $f(z)$ אנליטית ולא קבועה ב- A אז התמונה $f[A]$ פתוחה.

14) נסמן $D(0,1)=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\}$ ונניח כי:
- $f(z)$ הולומורפית ב- $D(0,1)$.
- לכל $z\in D(0,1)$ מתקיים $|f(z)|\le 1$.
- $f(0)=0$.

הוכיחו כי $|f(z)|\le|z|$ לכל $z\in D(0,1)$ וכי $|f'(0)|\le 1$ ואת ההערה הבאה.
הערה: אם בנוסף ידוע כי קיימת נקודה $z_0\in D(0,1)$ (שאינה אפס)
כך ש- $|f(z_0)|=|z_0|$ אז קיים קבוע $c\in\mathbb{C}$ כך ש- $f(z)=c\cdot z$.

15) נניח כי $f(z)$ הולומורפית בתחום $\overline{D(0,1)}=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|\le 1\}$
ומקיימת $|f(z)|=1$ לכל $|z|=1$.
נניח בנוסף כי $f(z)=0$ אם ורק אם $z=0$.
הוכיחו כי קיימים קבועים c ו- k כך ש- $f(z)=c\cdot z^k$.
הערה: ניתן להשתמש בעקרון המינימום.

16) (נכון או לא נכון)
נגדיר $A=\{z\in\mathbb{C}\,|\,1<|z|<2\}$ ונניח כי $f(z)$ אנליטית ב- A ורציפה ב- $\bar{A}$.
נתון כי:
$$|f(z)|=1 \quad \forall|z|=1$$
$$|f(z)|=8 \quad \forall|z|=2$$
אזי בהכרח $|f(z)|\le|z|^3$ לכל $z\in A$.

17) נניח כי $f(z)$ אנליטית ב- $|z|\le 1$ ומקיימת:
- $|f(z)|\le 1 \quad \forall z\in\{\mathrm{Im}(z)\ge 0,|z|=1\}$
- $|f(z)|\le 3 \quad \forall z\in\{\mathrm{Im}(z)\ge 0,|z|=2\}$

הוכיחו כי $|f(0)|\le\sqrt{6}$.
רמז: התבוננו בביטוי $f(z)f(-z)$.

18) יהי $r>0$.
נגדיר $C_r=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|=r\}$ ויהיו $z_1,\dots,z_n\in C_r$.
הוכיחו כי קיים $z\in C_r$ כך ש- $\prod_{k=1}^{k=n}|z-z_k|>r^n$.

תשובות סופיות:

1) לא קיים.
2) e^9
3) 268
4) $|f(1)|=|f(-1)|=e$
5) הוכחה.
6) הוכחה.
7) א. הוכחה. ב. לא.
8) הוכחה.
9) הוכחה.
10) הוכחה.
11) הוכחה.
12) הוכחה.
13) הוכחה.
14) הוכחה.
15) הוכחה.
16) נכון.
17) הוכחה.
18) הוכחה.

פונקציות מרוכבות

פרק 6 - אינטגרציה מרוכבת ומשפט האינטגרל קושי

תוכן העניינים

אינטגרל ממשי של פונקציה מרוכבת:

שאלות:

1) חשבון את האינטגרל $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}dx$, לכל $\forall m,n\in\mathbb{Z}$.

2) לכל $z\in\mathbb{C}$, המקיים $\mathrm{Re}(z)<0$, פתרו את האינטגרל $\int_0^\infty e^{zt}dt$.

תשובות סופיות:

1) $\begin{cases}1 & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}$

2) $-\frac{1}{z}$

אינטגרל מרוכב של פונקציה מרוכבת:

שאלות:

1) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1} z^n dz$, כאשר $n\in\mathbb{Z}$.

2) חשבון את האינטגרל $\int\limits_{\gamma} \frac{z+2}{z} dz$, כאשר $\gamma=\left\{z=2e^{i\theta} \mid 0\le\theta\le\pi\right\}$.

3) חשבון את האינטגרל $\int\limits_{\gamma} (z-1)dz$, כאשר $\gamma=\left\{z=1+e^{i\theta} \mid \pi\le\theta\le 2\pi\right\}$.

4) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{\gamma} \pi e^{\pi\bar{z}}dz$, כאשר γ מסילת קווים ישרים, העוברת בנקודות $\gamma: 0\to 1\to 1+i\to i\to 0$.

5) חשבון את אורך המסילה $\gamma=[z_1,z_2]$, כאשר $\gamma=[z_1,z_2]$ היא מסילת הקו הישר המחברת בין z_1 ל- z_2 .

6) חשבון את אורך המסילה $\gamma(t)=\left\{(t-\sin t)+i\cdot(1-\cos t) \mid 0<t<1\right\}$.

7) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1} \bar{z}\, dz$.

תשובות סופיות:

1) $\begin{cases} 0 & n\ne -1 \\ 2\pi i & n=-1 \end{cases}$

2) $2\pi i-4$

3) 0

4) $4e^{\pi}-4$

5) $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

6) ≈ 0.48

7) $2\pi i$

משפט קושי גורסט:

שאלות:

1) חשבו את האינטגרל $\int_{0}^{2+\frac{i\pi}{4}} e^{z}dz$.

2) הוכיחו כי $\int_{4}^{1+i} \frac{1}{2\sqrt{z}}dz = \sqrt[4]{2}\cos(\frac{\pi}{8}) - 2 + i\sqrt[4]{2}\sin(\frac{\pi}{8})$.
כאשר $\sqrt{z}$ הינו הענף העיקרי של פונקציית השורש.

תשובות סופיות:

1) $\frac{e^{2}[1+i]}{\sqrt{2}} - 1$

2) הוכחה.

נוסחת האינטגרל של קושי:

שאלות:

1) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z}dz$.

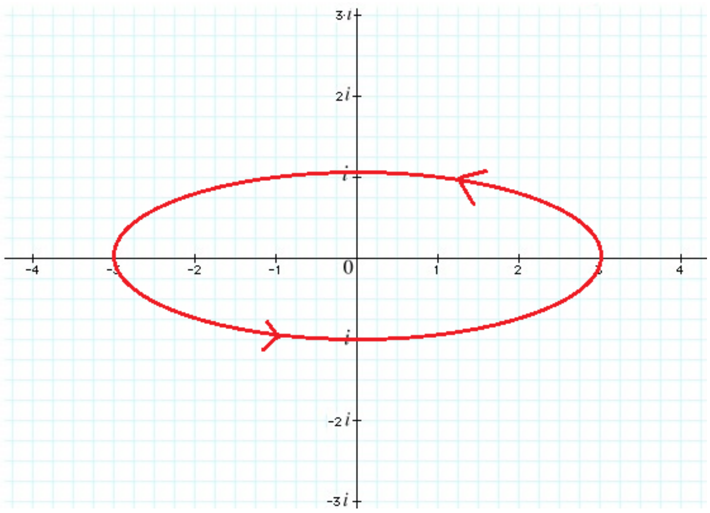
2) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{e^z}{z-2}dz$.

3) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{\sin(z^2)}{z(z-2)}dz$.

4) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z+e^{-z}}{z(z-2)(z-3)}dz$.

5) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1.5} \frac{e^z}{z(z-1)(z-2)}dz$.

6) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{\gamma} \frac{\sin(z)}{z(z-2)(z-4)}dz$, עבור המסילה שבציור:



7) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2-e^{z^2}}{z(z^2-1)(z+3)}dz$.

8) תהי $f(z)$ פונקציה הולומורפית בתחום D.
נניח כי $z_0 \in D$ וכי הדיסק $D(z_0,R)=\{|z-z_0|\le R\}$ מוכל כולו ב- D.
הוכיחו כי $f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\left(z_0+R\cdot e^{i\theta}\right)d\theta$.

9) חשבו את האינטגרל $\int\limits_0^{\pi}\frac{1}{2+\sin(2\theta)}d\theta$.

10) הוכיחו: $n\in\mathbb{N}$ $\int\limits_0^{2\pi}\cos^{2n}(\theta)d\theta=\frac{2\pi}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$.

11) חשבו את האינטגרל $\int\limits_C \frac{z}{z^2+1}dz$ כאשר $C=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=2,\ \mathrm{Im}(z)\ge 0\}$.

12) חשבו את האינטגרל $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{(a+b\cos x)}$ כאשר $a>b>0$.

13) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1}\frac{Log\left(1+\frac{z}{3}\right)}{z}dz$.

14) תהי $f(z)=u+iv$ הולומורפית בתחום $|z|<1$ כך ש- $u^2(0)=v^2(0)$.
הוכיחו כי לכל $0<r<1$ מתקיים $\int_0^{2\pi}u^2\left(re^{i\theta}\right)d\theta=\int_0^{2\pi}v^2\left(re^{i\theta}\right)d\theta$.

15) תהי $f(z)=u+iv$ הולומורפית בתחום $D=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$.
הוכיחו כי לכל $0<r<1$ ולכל $0<|a|<r$ מתקיים
$$\oint\limits_{|z|=r}\frac{\mathrm{Re}(z)}{z-a}f(z)dz=\pi i\cdot\left(\left[a+\frac{r^2}{a}\right]f(a)-\frac{r^2}{a}\cdot f(0)\right).$$

תשובות סופיות:

1) $2\pi i$

2) $2\pi e^2 i$

3) $2\pi i\cdot\frac{\sin\left(2^2\right)}{2}$

4) $2\pi i\cdot\frac{1}{3}$

5) $\pi i-2\pi e i$

6) $-\frac{\sin(2)\pi i}{2}$

7) $\pi i\cdot\left(\frac{17}{12}-\frac{3e}{4}\right)$

8) הוכחה.

9) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

10) הוכחה.

11) πi

12) $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$

13) 0

14) הוכחה.

15) הוכחה.

נוסחת האינטגרל המוכללת של קושי:

שאלות:

1) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{\sin(z)}{(z-i)^3}dz$.

2) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z^3}dz$.

3) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=4} \frac{\cos(z)}{(z-\pi)^2}dz$.

4) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{(z-1)^2(z-3)}dz$.

5) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{z+1}\right)}{z^3}dz$.

6) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=6} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{(z-1)^2(z-3)}dz$.

7) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=5} \frac{1}{(z-2)^2(z-4)}dz$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{\pi}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$

2) $-\pi i$

3) $-2\pi i \cdot \sin(\pi)$

4) $-\frac{\pi+4}{4\sqrt{2}}\pi i$

5) $-2\pi^2 i$

6) $-\frac{\pi i}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

7) 0

אי-שיוויונות אינטגרליים (משפט הערכה):

שאלות:

הוכיחו את אי השוויונות הבאים:

1) $\left|\int_C \frac{z^3}{z^2+1}dz\right| \le \frac{81\pi}{8}$, כאשר $C:\{|z|=3\ ,\ \mathrm{Re}(z)>0\}$.

2) $\left|\int_{|z|=3} \frac{1}{z^2-1}dz\right| \le \frac{6\pi}{8}$

3) $\left|\int_C e^{z^2}dz\right| \le \sqrt{8}$, כאשר C הינה מסילת הקו הישר מ- 0 עד $2+2i$.

4) $\left|\int_C \frac{z^2}{\sin(z)}dz\right| \le \frac{\pi^2}{2}+2$, כאשר C הוא הקטע הישר המתחיל בנקודה $\frac{\pi}{2}+i$ ומסתיים בנקודה $\frac{\pi}{2}-i$.

תשובות סופיות:

ראה פתרונות מלאים בסרטוני הוידאו.

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1) הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos(2bx)dx=\sqrt{\pi}e^{-b^2}$ עבור $b>0$.

2) הוכיחו כי $\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\cos(x^2)dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{2}}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ ו- $\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\sin(x^2)dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{2}}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

3) הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(x)}{x^2}dx=\pi$.

4) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^6(x)}{x^6}dx$.

5) הוכיחו כי $\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{(a+b\cos\theta)^2}d\theta=2\pi\cdot\frac{a}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}$ עבור $a>b>0$.

6) תהי $f(z)=\frac{1}{(1+az)^2}+\frac{1}{(1+bz)^2}$ כאשר $a,b\in\mathbb{C}$ קבועים המקיימים $|b|<1$, $|a|<1$ שונים מאפס. נניח כי $|f(z)|\le 3$ לכל $|z|=1$. הוכיחו כי $|a^n+b^n|\le\frac{3}{n+1}$ לכל $n\ge 0$.
רמז: התבוננו ב- $|f^{(n)}(0)|$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) $\frac{11\pi}{20}$
5) הוכחה.
6) הוכחה.

פונקציות קדומות:

שאלות:

1) האם הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z}$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{0\}$? האם יש לה קדומה שם?

2) האם הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z^n}$ $(n\geq 2)$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{0\}$? האם יש לה קדומה שם?

3) האם הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$? האם יש לה קדומה שם?

4) האם הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{-i,i\}$? האם יש לה קדומה שם?

5) הוכיחו כי לפונקציה $f(z)=\frac{1}{z(z^2-\pi^2)}$ יש קדומה בתחום $D=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|>\pi\}$.

6) נסמן $I=\int_\Gamma \frac{2z}{z^2+1}dz$ כאשר $\Gamma=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=2 , \operatorname{Im}(z)\geq 0\}$ בכיוון החיובי.

א. האם לאינטגרנד $\frac{2z}{z^2+1}$ יש פונקציה קדומה בתחום פשוט קשר המכיל את Γ ?

ב. חשבו את I.

7) נניח כי a , b מספרים מרוכבים בחצי המישור השמאלי, כלומר $\operatorname{Re}(a)<0$, $\operatorname{Re}(b)<0$.
הוכיחו כי $|e^a-e^b|<|a-b|$, $(a\neq b)$.

8) נניח כי $f(z)$, $g(z)$ פונקציות שלמות המקיימות $f^2(z)+g^2(z)=1$ לכל $z\in\mathbb{C}$. הוכיחו כי קיימת פונקציה שלמה $h(z)$ כך שמתקיים: $f(z)=\cos(h[z])$ | $g(z)=\sin(h[z])$.

תשובות סופיות:

1) $2\pi i$

2) לפונקציה אנליטית $f(z)$ בתחום Ω תהיה קיימת קדומה בתחום אם ורק אם $\oint_{\gamma} f(z)dz=0$ לכל מסלול סגור γ המוכל בתחום Ω.

3) π

4) לפונקציה אנליטית $f(z)$ בתחום Ω תהיה קיימת פונקציה קדומה בתחום אם ורק אם $\oint_{\gamma} f(z)dz=0$ לכל מסלול סגור בתחום.

5) הוכחה.

6) א. לפונקציה אנליטית $f(z)$ בתחום Ω תהיה קיימת פונקציה קדומה בתחום אם ורק אם $\oint_{\gamma} f(z)dz=0$ לכל מסלול סגור בתחום. ב. $2\pi i$

7) הוכחה.

8) הוכחה.

התכנסות במש של סדרת פונקציות הולומורפיות:

שאלות:

1) יהי $a>0$. הוכיחו כי הפונקציה $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-a\cdot n^2 z}$ הולומורפית ב- $\operatorname{Re}(z)>0$.

2) יהי $a>0$. הוכיחו כי הפונקציה $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(a+n)^z}$ הולומורפית ב-$\operatorname{Re}(z)>1$.

הערה: $(a+n)^z$ מוגדרת באופן הבא $(a+n)^z=e^{z\cdot Log(a+n)}$ ו-$Log(z)$ זה הענף הראשי של הלוג.

3) פונקציית זטא של רימן מוגדרת כך $\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$.

הראו כי היא הולומורפית בתחום $\operatorname{Re}(z)>1$.

הערה: n^z מוגדרת באופן הבא: $n^z=e^{z\cdot Log(n)}$ ו-$Log(z)$ זה הענף הראשי של הלוג.

4) תהי $f(x):(0,\infty)\to R$ רציפה וחסומה. נגדיר $L[f](z)=\int_0^{\infty} f(x)e^{-z\cdot x}dx$.

נתון כי $L[f](z)$ רציפה בתחום $\operatorname{Re}(z)>0$, הוכיחו כי היא הולומורפית שם.

תשובות סופיות:

ראו פתרונות מלאים בסרטוני הוידאו.

משפט מוררה:

שאלה:

1) תהי $f_n(z)$ סדרת פונקציות אנליטיות המתכנסת במ״ש לפונקציה $f(z)$ בתחום D פשוט קשר. הוכיחו כי:

א. $f(z)$ אנליטית בתחום D.

ב. מתקיים $\lim_{n\to\infty} f_n'(z) = f'(z) \qquad \forall z \in D$

הערה: תחום זה קבוצה פתוחה וקשירה.

תשובה סופית:

ראו פתרון מלא בסרטון הוידאו.