פונקציות מרוכבות



תוכן העניינים

1. מספרים מרוכבים ..... (ללא ספר)
2. טופולוגיה במישור המרוכב 1
3. פונקציות אנליטיות 5
4. פונקציות אלמנטריות 13
5. אינטגרציה מרוכבת 20
6. טורים 35
7. משפט השארית וחישוב אינטגרלים ממשיים 43

פונקציות מרוכבות

פרק 1 - מספרים מרוכבים

תוכן העניינים

1. מספרים מרוכבים ..... (ללא ספר)

פונקציות מרוכבות

פרק 2 - טופולוגיה במישור המרוכב

תוכן העניינים

1. סדרות של מספרים מרוכבים 1
2. מושגים טופולוגיים בסיסיים 3

סדרות של מספרים מרוכבים:

שאלות:

1) נתון $z_n=\frac{1}{n}+i\left(\frac{n-2}{n}\right)$. חשב את הגבול $\lim_{n\to\infty} z_n$.

2) נתון $z_n=\frac{n^2+n+1}{3n^2+2}+i\left(\frac{n-1}{2n}\right)$. חשב את הגבול $\lim_{n\to\infty} z_n$.

3) נגדיר $z_n=(i)^{2n}n^3$. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} z_n=\infty$.

4) נגדיר $z_n=\frac{i^n}{n}$. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}|z_n|=0$.

5) נתון $z_n=\frac{(1+i)^n}{n}$. חשב את הגבול $\lim_{n\to\infty} z_n$.

6) בדקו את התכנסות הסדרה $z_n=n\cdot z^n$ כאשר $z\in\mathbb{C}$.

א. כאשר $|z|\geq 1$.

ב. כאשר $0<|z|<1$.

7) נאמר כי סדרת מספרים מרוכבים $z_n\xrightarrow{n\to\infty}L$ אם ורק אם $\lim_{n\to\infty}|z_n-L|=0$.

הוכיחו כי אם $z_n\xrightarrow{n\to\infty}z$ ו- $w_n\xrightarrow{n\to\infty}w$ אזי $z_n+w_n\xrightarrow{n\to\infty}z+w$.

8) בדקו האם הסדרות הבאות מתכנסות, אם כן חשבו את גבולן.

א. $z_n=\frac{1+n}{1-2n}+\frac{n-10}{n^2}i$

ב. $z_n=\cos(\pi n)+n\sin\left(\frac{1}{n}\right)i$

ג. $z_n=\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-n}+\sqrt[n]{3^n+4^n}\cdot i$

ד. $z_n=\left(\frac{1+\sqrt{3i}}{2}\right)$

תשובות סופיות:

1) $\lim_{n\to\infty} z_n = i$

2) $\lim_{n\to\infty} z_n = \frac{1}{3} + i \cdot \frac{1}{2}$

3) הוכחה.

4) הוכחה.

5) ∞

6) א. ∞ ב. 0

7) הוכחה.

8) ראו סרטון.

מושגים טופולוגיים בסיסיים:

שאלות:

1) שרטטו את הקבוצה $|z-i|+|z+i|<4$.

א. האם היא פתוחה/סגורה?

ב. האם זה תחום?

ג. האם זה תחום פשוט קשר?

2) שרטטו את הקבוצה, עבור a ממשי $\mathrm{Re}\left[\frac{z-a}{z+a}\right]=0$.

א. האם היא פתוחה?

ב. האם זה תחום?

ג. האם זה תחום פשוט קשר?

3) שרטטו את הקבוצה $\mathrm{Im}\left[\frac{z-1}{z+1}\right]=0$.

א. האם היא פתוחה?

ב. האם זה תחום?

ג. האם זה תחום פשוט קשר?

4) שרטטו את הקבוצה $|z+i|=2|z-i|$.

א. האם היא פתוחה?

ב. האם זה תחום?

ג. האם זה תחום פשוט קשר?

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הראו כי $|z\pm w|^2=|z|^2\pm 2\mathrm{Re}\left(z\cdot\overline{w}\right)+|w|^2$.

ב. עבור $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ ו-$\lambda>0$ הראו כי המשוואה $|z-z_1|=\lambda|z-z_2|$ מתארת ישר או מעגל.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il

תשובות סופיות:

1) ראו סרטון.
2) ראו סרטון.
3) ראו סרטון.
4) ראו סרטון.
5) ראו סרטון.

פונקציות מרוכבות

פרק 3 - פונקציות אנליטיות

תוכן העניינים

1. פונקציות מרוכבות 5
2. גבולות מרוכבים ורציפות 6
3. נגזרות מרוכבות 7
4. משוואות קושי-רימן 8
5. פונקציות הרמוניות 11

פונקציות מרוכבות:

שאלות:

1) רשמו את הפונקציה $f(z)=z\cdot \mathrm{Re}(z)$ בצורה $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$.

2) רשמו את הפונקציה $f(z)=|z|^2$ בצורה $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$.

3) רשמו את הפונקציה $f(z)=2|z|^2+i(\bar{z})^2$ בצורה $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$.

4) רשמו את הפונקציה $f(z)=\frac{z}{1+|z|^2}$ בצורה $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$.

5) רשמו את הפונקציה $f(z)=z^2+\bar{z}$ בצורה $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$.

6) רשמו את הפונקציה $f(x+iy)=\frac{x^3}{3}+i\cdot\left(-\frac{y^3}{3}\right)$ בצורה $f(z)$, כאשר $z=x+iy$.

תשובות סופיות:

1) $f(z)=x^2+i\cdot xy$

2) $f(z)=x^2+y^2+i\cdot 0$

3) $f(z)=2\left[x^2+xy+y^2\right]+i\left(x^2-y^2\right)$

4) $f(z)=\frac{x}{1+x^2+y^2}+i\cdot\frac{y}{1+x^2+y^2}$

5) $f(z)=x^2+x-y^2+i\cdot(2xy-y)$

6) $f=\frac{2z^3+6z(\bar{z})^2}{24}$

גבולות מרוכבים ורציפות:

שאלות:

מצאו את הגבולות הבאים (אם קיימים):

1) $\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z}=?$

2) $\lim_{z\to 0}\frac{z^4}{|z|^4}=?$

3) $\lim_{z\to 0}e^{\frac{-1}{z^2}}=?$

4) $\lim_{z\to 0}e^{\frac{-1}{z^4}}=?$

תשובות סופיות:

1) $\frac{1-ik}{1+ik}$

2) $\frac{(1+ik)^4}{(1+k)^2}$

3) הגבול תלוי במסלול ולכן אינו קיים.

4) הגבול תלוי במסלול ולכן אינו קיים.

נגזרות מרוכבות:

שאלות:

1) מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה $f(z)=\bar{z}$ גזירה.
הראו עפ"י הגדרת הנגזרת כי $f(z)=\bar{z}$ אינה גזירה ב- z_0 לכל $z_0\in\mathbb{C}$.

2) מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה $f(z)=\mathrm{Re}(z)$ גזירה.

3) מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה $f(z)=|z|^2$ גזירה.

4) הוכיחו את משפט לופיטל: $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{g(z)-g(z_0)}$

תשובות סופיות:

1) הפונקציה לא גזירה.
הגבול תלוי במסלול ולכן אינו קיים.
2) הפונקציה לא גזירה.
3) בראשית הצירים, והנגזרת שלה היא 0.
4) הוכחה.

משוואות קושי-רימן:

שאלות:

1) הראו כי $f(z)=z^2+\mathrm{Im}(z)$ אינה גזירה לכל z.

2) הראו כי $f(z)=xy+i(x^2+y^2)$ אינה גזירה בכל הנקודות בהן $z\neq 0$,
אך כן גזירה בנקודה $z=0$ (לפי הגדרה).

3) מצאו מספרים ממשיים a,b כך שהפונקציה $f(z)=e^{ax}\cos(3y)+i\left(-e^{-3x}\sin(b\,y)\right)$
תהיה גזירה בכל נקודה.

4) נתון כי $f(z)=\frac{z}{\bar{z}}$ אינה רציפה ב $z=0$.
מצאו את כל הנקודות (אם קיימות) בהן הפונקציה גזירה.

משפט קושי-רימן: הוכחה (הפתרון בסרטון)
אם $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$, גזירה ב-$z_0=x_0+iy_0$,
אז מתקיימות משוואות קושי-רימן בנקודה זו, כלומר: $\begin{matrix}u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0)\\ u_y(x_0,y_0)=-v_x(x_0,y_0)\end{matrix}$.

5) נניח כי $f(z)$ גזירה בתחום D, ונניח כי $\mathrm{Re}\{f(z)\}=0$ לכל $z\in D$.
הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.

6) נניח כי $f(z)$ פונקציה גזירה שאינה קבועה בתחום D.
נגדיר $g(z)=\overline{f(z)}$ לכל $z\in D$.
הוכיחו כי $g(z)$ אינה גזירה בכל D.

7) נתונה הפונקציה $f(z)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{z^4}} & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$ הוכיחו את הטענות הבאות:

א. הפונקציה אינה רציפה בראשית.
ב. משוואות קושי-רימן מתקיימות בראשית.

8) נניח כי $f(z)$ אנליטית בתחום $H^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$.
הוכיחו כי $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ אנליטית בתחום $H^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) < 0\}$.

9) הוכיחו כי $f(z) = e^{\mathrm{Re}(z)}$ אינה גזירה בשום נקודה במישור המרוכב.

10) נתונה הפונקציה $f(z) = cx^2 - xy + ixy^2$, כאשר c קבוע מרוכב כלשהו.
נתון כי $f(z)$ גזירה בנקודה $1+i$.
מצאו את הקבוע c ואת כל הנקודות בהן הפונקציה גזירה.

11) נתונה הפונקציה $f(z) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + i \cdot \arctan(\frac{y}{x})$.
קבעו האם הפונקציה $f(z)$ אנליטית בחצי המישור הימני $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

12) נתונה הפונקציה $f(z) = e^{\frac{x^2-y^2}{2}}\left[\cos(xy) + i \cdot a\sin(xy)\right]$.
עבור אילו ערכי a זוהי פונקציה הולומורפית (אנליטית) בכל המישור?

13) נניח כי $g(z)$ הולומורפית בתחום $\overline{D(0,1)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 1\}$,
ומקיימת $|g(z)| = 1 \quad \forall |z| \le 1$.
הוכיחו כי $g(z)$ קבועה.
הדרכה: ניתן לכתוב את $g(z)$ באופן הבא: $g(z) = e^{i \cdot h(x,y)}$.

14) נניח כי $R > 0$ ונתונה הפונקציה $f : D(0,R) \to \mathbb{C}$ גזירה בכל התחום.
נגדיר: $g(z) = \overline{f\left(\frac{R}{\bar{z}}\right)}$.
מצאו תחום בו $g(z)$ מוגדרת, ובדקו אם היא גזירה שם.

תשובות סופיות:

1) $u'_y = -2y+1 \quad , \quad v'_x = 2y$

2) $\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$

3) $a=-3 \ , \ b=3$

4) $x=0 \ , \ y=0$

5) הוכחה

6) הוכחה

7) א. הוכחה ב. הוכחה

8) הוכחה

9) הוכחה

10) $y=0 \ , \ y=1 \ , \ y=0.5$
$x=0 \ , \ x=1 \ , \ x=0.25 \quad , \quad c=a+i\cdot b=\frac{3}{2}$
$z=0 \ , \ z=1+i \ , \ z=0.25+0.5\cdot i$

11) $u_y=\frac{y}{x^2+y^2} \ ; \ u_x=\frac{x}{x^2+y^2}.$

12) $a=1$

13) הוכחה

14) $A=\{z \mid |z|>1\}$

פונקציות הרמוניות:

שאלות:

1) הראו כי הפונקציה x^3-3xy^2 , היא פונקציה הרמונית בכל המישור.

2) הראו כי הפונקציה x^2-y^2 , היא פונקציה הרמונית בכל המישור,
ומצאו לה צמודה הרמונית.

3) הראו כי הפונקציה $f(z)=xy+i\left(x^2+y^2\right)$, היא פונקציה גזירה בראשית-הצירים, אך החלק המדומה שלה אינו פונקציה הרמונית.
האם $f(z)$ הולומורפית בראשית?

4) הראו כי הפונקציה $u(x,y)=\sin(x)\cosh(y)$, היא פונקציה הרמונית בכל המישור,
ומצאו את הצמודה ההרמונית שלה $v\left(x,y\right)$ המקיימת $v\left(0,0\right)=2$.
רמז: $f(z)=\sin(z)$.

5) הראו כי הפונקציה $u(x,y)=\cos(x)\sinh(y)$, היא פונקציה הרמונית בכל המישור,
ומצאו פונקציה הלומורפית כך שמתקיים $u(x,y)=\mathrm{Re}\{f\}$.

6) הראו כי הפונקציה $v(x,y)=e^y\sin(x)$, היא פונקציה הרמונית במישור,
מצאו לה פונקציה צמודה הרמונית $u(x,y)$ ופונקציה שלמה $f(z)$,
כך שמתקיים: $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.

7) הראו כי הפונקציה $u(r,\theta)=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos(\theta)$,
היא פונקציה הרמונית בתחום $r\neq 0$.
רמז: $u(r,\theta)$ תקרא הרמונית אם היא מקיימת $r^2u''_{rr}+ru'_r+u''_{\theta\theta}=0$.

8) נתון כי $u(r,\theta)=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos(\theta)$ היא פונקציה הרמונית בתחום $r\neq 0$.
מצאו לה צמודה הרמונית בתחום זה.

9) הוכיחו כי $u(x,y)=2x-x^3+3xy^2$, היא פונקציה הרמונית
ומצאו לה צמודה הרמונית.

10) תהי $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ פונקציה שלמה.
הוכיחו כי $g(x,y)=u(x,y)^2-v(x,y)^2$ פונקציה הרמונית.

11) תהי $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ פונקציה שלמה.
הוכיחו כי $g(x,y)=\sin\left[u(x,y)\right]\cdot\cosh\left[v(x,y)\right]$ פונקציה הרמונית.

12) האם קיימות פונקציות הרמוניות מהצורה $u(x,y)=\varphi\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)$

(כאשר $\varphi\in C^2$ פונקציה לא ידועה)?
אם כן, מצאו אותן.

13) האם קיימות פונקציות הרמוניות מהצורה $u(x,y)=\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$

(כאשר $\varphi\in C^2$ פונקציה לא ידועה)?
אם כן, מצאו אותן.

14) הראו כי הפונקציה $\sinh(x)\cos(y)$ היא פונקציה הרמונית בכל המישור,
ומצאו את הצמודה ההרמונית שלה.

תשובות סופיות:

ראה פתרונות מלאים בסרטוני הוידאו.

פונקציות מרוכבות

פרק 4 - פונקציות אלמנטריות

תוכן העניינים

1. סינוס מרוכב 13
2. קוסינוס מרוכב 14
3. אקספוננט מרוכב 15
4. העתקות אלמנטריות 16
5. לוגריתם מרוכב, פונקציות רב-ערכיות ושורשים 17

סינוס מרוכב:

שאלות:

1) פתרו את המשוואה $\sin(z)=2$.
2) הוכיחו כי $\sin(z)=\sin(x+iy)=\sin(x)\cosh(y)+i\cos(x)\sinh(y)$.
3) פתרו את המשוואה $\sin(z)=5$.

תשובות סופיות:

1) כל הפתרונות הם מהצורה הבאה: $z_n=\frac{\pi}{2}+2\pi n+i\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)$,
כאשר n מספר שלם.
2) הוכחה.
3) $z_k=\frac{\pi}{2}+2\pi k-i\ln\left(5\pm2\sqrt{6}\right)$

קוסינוס מרוכב:

שאלות:

1) הוכיחו כי $\cos(z)=\cos(x+\mathrm{i}y)=\cos(x)\cosh(y)-i\sin(x)\sinh(y)$.

2) פתרו את המשוואה $\cos(z)=2$.

3) האם $|\cos(z)|\le 1$ לכל z ?

4) פתרו את המשוואה $\cos(\pi z)+\frac{3}{4}i=0$.

5) הוכיחו כי לכל $z\in\mathbb{C}$ מתקיים $|\cos(z)|\le\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}$ כאשר $y=\mathrm{Im}(z)$.

6) פתרו את המשוואה $\tan(z)=\frac{i}{3}$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) $z_n=2\pi n+i\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)$

3) לא.

4) $z_k=-\frac{1}{2}+2k-i\frac{1}{\pi}\ln(2)$

5) הוכחה.

6) $z_k=\pi k+i\frac{1}{2}\ln(2)$

אקספוננט מרוכב:

שאלות:

1) פתרו את המשוואה $e^z=-1$.
2) הוכיחו כי לכל x ממשי מתקיים $\left|e^{ix}\right|=1$.
3) ענו על הסעיפים הבאים:
   א. הראו כי אם $\mathrm{Im}(z)\geq 0$ אז $\left|e^{iz}\right|\leq 1$.
   ב. הראו כי $\left|e^z\right|=1$ אם ורק אם $\mathrm{Re}(z)=0$.
4) פתרו את המשוואה $e^z=1$.
5) פתרו את המשוואה $e^z=i$.
6) פתרו את המשוואה $e^z=1+i$.
7) האם הפונקציה $f(z)=e^z$ היא חח"ע?

תשובות סופיות:

1) $z=i\cdot\pi[2n+1]$
2) $\sqrt{\cos^2(x)+\sin^2(x)}=1$
3) א. $\left|e^{iz}\right|=e^{-y}=\frac{1}{e^y}\leq\frac{1}{e^0}=1$ ב. הוכחה.
4) $z_k=2\pi ik \quad k\in\mathbb{Z}$
5) $z_k=i\pi\left(2k+\frac{1}{2}\right) \quad k\in\mathbb{Z}$
6) $z_k=\frac{1}{2}\ln(2)+i\pi\left(2k+\frac{1}{4}\right) \quad k\in\mathbb{Z}$
7) לא.

העתקות אלמנטריות:

שאלות:

1) מצאו את התמונה $f(U)$ של התחום $U=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\}$,
תחת ההעתקה $f(z)=z+1$.

2) מצאו את התמונה $f(U)$ של התחום $U=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\}$,
תחת ההעתקה $f(z)=5z$.

3) מצאו את התמונה $f(U)$ של התחום $U=\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,Arg(z)=\frac{\pi}{4}\right\}$,
תחת ההעתקה $f(z)=z^3$.

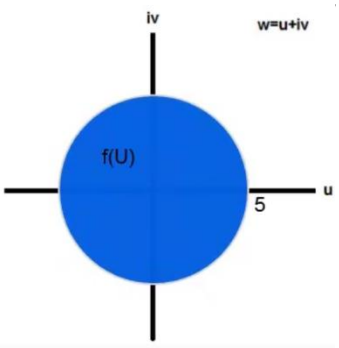
4) מהי תמונת התחום $A=\{z\in\mathbb{C}\,|\,0<\mathrm{Im}(z)<\pi\}$ תחת העתקה $f(z)=e^z$.

5) מהי תמונת התחום $A=\{z\in\mathbb{C}\,|\,0<\mathrm{Im}(z)<2\pi\}$ תחת העתקה $f(z)=e^z$.

6) מהי תמונת התחום $A=\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,-\infty<\mathrm{Re}(z)<0,0<\mathrm{Im}(z)<\frac{\pi}{2}\right\}$ תחת העתקה $f(z)=e^z$.

תשובות סופיות:

1) $|w-1|<1$

2) 

3) $\frac{3\pi}{4}\simeq 135°$

4) $f(z)=e^xe^{iy}\equiv \mathrm{Re}^{i\alpha}\quad 0<R<\infty\quad 0<\alpha<\pi$

5) $f(z)=e^xe^{iy}\equiv \mathrm{Re}^{i\alpha}\quad 0<R<\infty\quad 0<\alpha<2\pi$

6) $f(z)=e^xe^{iy}\equiv \mathrm{Re}^{i\alpha}\quad 0<R<1\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

לוגריתם מרוכב, פונקציות רב-ערכיות ושורשים:

שאלות:

1) חשבו את הגדלים הבאים:

א. $Arg(1+i)$

ב. $Arg\left(2e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)$

2) חשבו את הגדלים הבאים:

א. $Log(1+i)$

ב. $Log\left(2e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)$

3) מצאו את כל הערכים האפשריים של $\sqrt{i}$.

4) מצאו את כל הערכים האפשריים של i^i.

5) מצאו את כל הערכים האפשריים של $2^{\frac{1}{9}+\frac{i}{50}}$.

6) חשבו את הערך $(2+2i)^{5i}$ עבור 3 ענפים שונים לבחירתכם.
כמה תשובות אפשריות יש לערך זה.

7) מצאו את תמונת התחום $A=\{z=re^{i\theta} \mid R_1<r<R_2\ ,\ -\pi<\theta<\pi\}$ תחת העתקה $Log(z)$ (הענף הראשי של הלוג).

8) מצאו תחום בו הפונקציה $\log\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$ אנליטית. כאשר $a,b\in\mathbb{C}\quad a\neq b$.
הערה: תרגיל זה דורש ידע בהעתקות מוביוס.

9) הראו כי $|a^z|=a^{\mathrm{Re}(z)}$ עבור a ממשי חיובי בתחום $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0)$ כאשר פונקציית החזקה מוגדרת ע"י ענף הראשי של הלוג, כלומר: $a^z=e^{z\cdot Log(a)}$.

10) הוכיחו ישירות כי העתקה $\sqrt{z}$ איננה רציפה בתחום $\mathbb{C}$ אם מגדירים את $\sqrt{z}$ באופן הבא: $\sqrt{z}=\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ כאשר $z=re^{i\theta}$ | $\theta\in[0,2\pi)$.

11) מצאו את כל הערכים האפשריים של $\log(\log(-1))$.

12) נניח כי $\log(z)$ זה ענף רציף של הלוגריתם בתחום $\mathbb{C}\setminus\{z=x+iy\ ,\ x\geq 0\ ,\ y=\sin(x)\}$ ונניח שבענף זה מתקיים $\log(1)=0$,
חשבו בענף זה את הערכים: $\log\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, $\log\left(\frac{5\pi}{2}\right)$, $\log(-i)$, $\log(i)$, $\log(-1)$.

13) נגדיר $\log_\alpha(z)=\ln|z|+i\cdot\arg(z)$ כאשר $\alpha-2\pi<\arg(z)\leq\alpha$.

א. חשבו את הערכים: $\log_0(1)$, $\log_\pi(1)$, $\log_{2\pi}(1)$.

ב. מצאו את התמונה של $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ תחת ההעתקה $\log_\pi(z)$.

ג. מצאו את התמונה של $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ תחת ההעתקה $\log_0(z)$.

14) יהיו z_1 , ... , z_n מספרים מרוכבים כך ש-$\mathrm{Re}(z_k)>0$ לכל $1\leq k\leq n$ וגם $\mathrm{Re}(z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_k)$ לכל $1\leq k\leq n$.
הוכיחו כי $Log(z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n)=Log(z_1)+\ldots+Log(z_n)$, כאשר $Log(z)$ זה הענף הראשי של הלוגריתם.

15) יהי $U=\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ ויהי $y>0$. חשבו את הגבול $\lim_{y\to 0}\left[\log(a+iy)-\log(a-iy)\right]$ עבור $a>0$ ועבור $a<0$.

16) הוכיחו שלא קיים ענף אנליטי של $\sqrt{z}$ ב-$\mathbb{C}$. כלומר, הראו שלא קיימת פונקציה אנליטית $h(z)$ ב-$\mathbb{C}$ כך ש-$h^2(z)=z$ לכל $z\in\mathbb{C}$.

17) הוכיחו שלא קיים ענף אנליטי של $\sqrt[n]{z}$ ב-$|z|<1$ לכל $n\geq 2$.

18) נניח כי $f(z)$, $g(z)$ הם שני ענפים אנליטיים של הלוג בקבוצה פתוחה וקשירה U. הוכיחו כי קיים קבוע k שלם כך ש-$f(z)-g(z)=2\pi ik$ לכל $z\in U$.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{\pi}{4}$ ב. $-\frac{\pi}{2}$

2) א. $\ln\left(\sqrt{2}\right)+i\frac{\pi}{4}$ ב. $\ln(2)-\frac{\pi}{2}$

3) $e\frac{\pi}{4}i\ ,\ k=0\ \ ;\ \ e\frac{5\pi}{4}i\ ,k=1$

4) $\left\{e^{-\pi\frac{4k+1}{2}}\ \ |k\in\mathbb{Z}\right\}$

5) $\left\{2^{\frac{1}{9}}e^{-\frac{2\pi k}{50}}e^{i\left(\frac{\ln(2)}{50}+\frac{2\pi k}{9}\right)}\ \ |\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

6) $\left\{e^{-5\cdot\frac{\pi}{4}}e^{i\cdot5\ln\left(\sqrt{8}\right)}\ ,\ e^{-5\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)}e^{i\cdot5\ln\left(\sqrt{8}\right)}\ ,\ e^{-5\left(\frac{\pi}{4}-2\pi\right)}e^{i\cdot5\ln\left(\sqrt{8}\right)}\ ,\ ..\right\}$

7) $\ln(r)+i\cdot\theta$

8) $\frac{z-a}{z-b}\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0)$

9) $a^{\mathrm{Re}(z)}$

10) הוכחה.

11) $\ln(\pi+2\pi k)+i\cdot\left(\frac{\pi}{2}+2\pi m\right)\quad m\in\mathbb{Z}\ ,\ k\geq0$

$\ln(-\pi-2\pi k)+i\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi m\right)\quad m\in\mathbb{Z}$

12) $-\pi i\ ,\ -\frac{3\pi}{2}i\ ,\ -\frac{\pi}{2}i\ ,\ \ln\left(\frac{5\pi}{2}\right)\ ,\ \ln\left(\frac{3\pi}{2}\right)-2\pi i$

13) א. $2\pi i\ ,\ 0\ ,\ 0$ ב. $\ln(r)+i\theta\ \ ,\ \ -\infty<\ln(r)<\infty\ \ ,\ \ \theta<r<\infty$

ג. $\ln(r)+i\theta\ \ ,\ \ -\infty<\ln(r)<\infty\ \ ,\ \ 0<\theta\leq2\pi$

14) הוכחה.

15) $2\pi i$

16) הוכחה.

17) הוכחה.

18) הוכחה.

פונקציות מרוכבות

פרק 5 - אינטגרציה מרוכבת

תוכן העניינים

1. אינטגרל ממשי של פונקציה מרוכבת 20
2. אינטגרל מרוכב של פונקציה מרוכבת 21
3. משפט קושי גורסט 22
4. נוסחת האינטגרל של קושי 23
5. נוסחת האינטגרל המוכללת של קושי 26
6. משפט הערכה 28
7. תרגילים מסכמים 29
8. פונקציות קדומות 31
9. התכנסות במש של סדרת פונקציות הולומורפיות 33
10. משפט מוררה 34

אינטגרל ממשי של פונקציה מרוכבת:

שאלות:

1) חשבו את האינטגרל $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}dx$, לכל $\forall m,n\in\mathbb{Z}$.

2) לכל $z\in\mathbb{C}$, המקיים $\mathrm{Re}(z)<0$, פתרו את האינטגרל $\int_0^{\infty} e^{zt}dt$.

תשובות סופיות:

1) $\begin{cases}1 & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}$

2) $-\frac{1}{z}$

אינטגרל מרוכב של פונקציה מרוכבת:

שאלות:

1) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1} z^n dz$, כאשר $n \in \mathbb{Z}$.

2) חשבו את האינטגרל $\int_{\gamma} \frac{z+2}{z} dz$, כאשר $\gamma = \left\{ z = 2e^{i\theta} \mid 0 \le \theta \le \pi \right\}$.

3) חשבו את האינטגרל $\int_{\gamma} (z-1) dz$, כאשר $\gamma = \left\{ z = 1 + e^{i\theta} \mid \pi \le \theta \le 2\pi \right\}$.

4) חשבו את האינטגרל $\oint_{\gamma} \pi e^{\pi \bar{z}} dz$, כאשר γ מסילת קווים ישרים, העוברת בנקודות $\gamma : 0 \to 1 \to 1+i \to i \to 0$.

5) חשבו את אורך המסילה $\gamma = [z_1, z_2]$, כאשר $\gamma = [z_1, z_2]$ היא מסילת הקו הישר המחברת בין z_1 ל- z_2 .

6) חשבו את אורך המסילה $\gamma(t) = \left\{ (t - \sin t) + i \cdot (1 - \cos t) \mid 0 < t < 1 \right\}$.

7) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1} \bar{z} \, dz$.

תשובות סופיות:

1) $\begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$

2) $2\pi i - 4$

3) 0

4) $4e^{\pi} - 4$

5) $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

6) ≈ 0.48

7) $2\pi i$

משפט קושי גורסט:

שאלות:

1) חשבו את האינטגרל $\int_0^{2+\frac{i\pi}{4}} e^z dz$.

2) הוכיחו כי $\int_4^{1+i} \frac{1}{2\sqrt{z}} dz = \sqrt[4]{2}\cos(\frac{\pi}{8}) - 2 + i\sqrt[4]{2}\sin(\frac{\pi}{8})$.

כאשר $\sqrt{z}$ הינו הענף העיקרי של פונקציית השורש.

תשובות סופיות:

1) $\frac{e^2[1+i]}{\sqrt{2}} - 1$

2) הוכחה.

נוסחת האינטגרל של קושי:

שאלות:

1) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z}dz$.

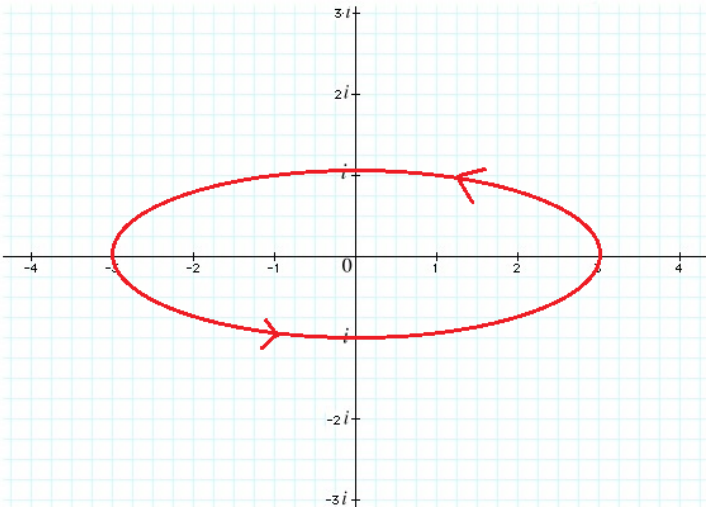
2) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z-2|=1} \frac{e^z}{z-2}dz$.

3) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z-2|=1} \frac{\sin(z^2)}{z(z-2)}dz$.

4) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1} \frac{e^z+e^{-z}}{z(z-2)(z-3)}dz$.

5) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1.5} \frac{e^z}{z(z-1)(z-2)}dz$.

6) חשבו את האינטגרל $\oint_{\gamma} \frac{\sin(z)}{z(z-2)(z-4)}dz$, עבור המסילה שבציור:



7) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=2} \frac{z^2 - e^{z^2}}{z(z^2-1)(z+3)} dz$.

8) תהי $f(z)$ פונקציה הולומורפית בתחום D.
נניח כי $z_0 \in D$ וכי הדיסק $D(z_0, R) = \{|z - z_0| \le R\}$ מוכל כולו ב- D.
הוכיחו כי $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + R \cdot e^{i\theta}\right) d\theta$.

9) חשבו את האינטגרל $\int_0^{\pi} \frac{1}{2 + \sin(2\theta)} d\theta$.

10) הוכיחו: $n \in \mathbb{N}$ $\int_0^{2\pi} \cos^{2n}(\theta) d\theta = \frac{2\pi}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$.

11) חשבו את האינטגרל $\int_C \frac{z}{z^2+1} dz$ כאשר $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2,\ \mathrm{Im}(z) \ge 0\}$.

12) חשבו את האינטגרל $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b\cos x)}$ כאשר $a > b > 0$.

13) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1} \frac{Log\left(1 + \frac{z}{3}\right)}{z} dz$.

14) תהי $f(z) = u + iv$ הולומורפית בתחום $|z| < 1$ כך ש- $u^2(0) = v^2(0)$.
הוכיחו כי לכל $0 < r < 1$ מתקיים $\int_0^{2\pi} u^2\left(re^{i\theta}\right) d\theta = \int_0^{2\pi} v^2\left(re^{i\theta}\right) d\theta$.

15) תהי $f(z) = u + iv$ הולומורפית בתחום $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.
הוכיחו כי לכל $0 < r < 1$ ולכל $0 < |a| < r$ מתקיים
$\oint_{|z|=r} \frac{\mathrm{Re}(z)}{z - a} f(z) dz = \pi i \cdot \left(\left[a + \frac{r^2}{a} \right] f(a) - \frac{r^2}{a} \cdot f(0) \right)$.

תשובות סופיות:

1) $2\pi i$
2) $2\pi e^2 i$
3) $2\pi i \cdot \frac{\sin\left(2^2\right)}{2}$
4) $2\pi i \cdot \frac{1}{3}$
5) $\pi i - 2\pi e i$
6) $-\frac{\sin(2)\pi i}{2}$
7) $\pi i \cdot \left(\frac{17}{12} - \frac{3e}{4}\right)$
8) הוכחה.
9) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$
10) הוכחה.
11) πi
12) $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$
13) 0
14) הוכחה.
15) הוכחה.

נוסחת האינטגרל המוכללת של קושי:

שאלות:

1) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z-i|=1}\frac{\sin(z)}{(z-i)^3}dz$.

2) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1}\frac{\cos(z)}{z^3}dz$.

3) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=4}\frac{\cos(z)}{(z-\pi)^2}dz$.

4) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z-1|=1}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{(z-1)^2(z-3)}dz$.

5) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{z+1}\right)}{z^3}dz$.

6) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=6}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{(z-1)^2(z-3)}dz$.

7) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=5}\frac{1}{(z-2)^2(z-4)}dz$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{\pi}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$

2) $-\pi i$

3) $-2\pi i\cdot\sin(\pi)$

4) $-\frac{\pi+4}{4\sqrt{2}}\pi i$

5) $-2\pi^2 i$

6) $-\frac{\pi i}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

7) 0

אי-שיוויונות אינטגרליים (משפט הערכה):

שאלות:

הוכיחו את אי השוויונות הבאים:

1) $\left|\int_C \frac{z^3}{z^2+1}dz\right| \le \frac{81\pi}{8}$, כאשר $C:\{|z|=3 \ , \ \mathrm{Re}(z)>0\}$.

2) $\left|\int_{|z|=3} \frac{1}{z^2-1}dz\right| \le \frac{6\pi}{8}$

3) $\left|\int_C e^{z^2}dz\right| \le \sqrt{8}$, כאשר C הינה מסילת הקו הישר מ- 0 עד $2+2i$.

4) $\left|\int_C \frac{z^2}{\sin(z)}dz\right| \le \frac{\pi^2}{2}+2$, כאשר C הוא הקטע הישר המתחיל בנקודה $\frac{\pi}{2}+i$ ומסתיים בנקודה $\frac{\pi}{2}-i$.

תשובות סופיות:

ראה פתרונות מלאים בסרטוני הוידאו.

תרגילים מסכמים:

שאלות:

1) הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos(2bx)dx=\sqrt{\pi}e^{-b^2}$ עבור $b>0$.

2) הוכיחו כי $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos\left(x^2\right)dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{2}}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ ו- $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\sin\left(x^2\right)dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{2}}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

3) הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(x)}{x^2}dx=\pi$.

4) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^6(x)}{x^6}dx$.

5) הוכיחו כי $\int_0^{2\pi}\frac{1}{\left(a+b\cos\theta\right)^2}d\theta=2\pi\cdot\frac{a}{\left(a^2-b^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ עבור $a>b>0$.

6) תהי $f(z)=\frac{1}{(1+az)^2}+\frac{1}{(1+bz)^2}$ כאשר $a,b\in\mathbb{C}$ קבועים המקיימים $|a|<1$, $|b|<1$ שונים מאפס. נניח כי $|f(z)|\le 3$ לכל $|z|=1$. הוכיחו כי $|a^n+b^n|\le\frac{3}{n+1}$ לכל $n\ge 0$.

רמז: התבוננו ב- $\left|f^{(n)}(0)\right|$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) הוכחה.

3) הוכחה.

4) $\frac{11\pi}{20}$

5) הוכחה.

6) הוכחה.

פונקציות קדומות:

שאלות:

1) האם הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z}$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{0\}$? האם יש לה קדומה שם?

2) האם הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z^n}$ $(n\geq 2)$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{0\}$? האם יש לה קדומה שם?

3) האם הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$? האם יש לה קדומה שם?

4) האם הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{-i,i\}$? האם יש לה קדומה שם?

5) הוכיחו כי לפונקציה $f(z)=\frac{1}{z\left(z^2-\pi^2\right)}$ יש קדומה בתחום $D=\left\{z\in\mathbb{C}\mid |z|>\pi\right\}$.

6) נסמן $I=\int_{\Gamma}\frac{2z}{z^2+1}dz$ כאשר $\Gamma=\left\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=2\ ,\ \mathrm{Im}(z)\geq 0\right\}$ בכיוון החיובי.

א. האם לאינטגרינד $\frac{2z}{z^2+1}$ יש פונקציה קדומה בתחום פשוט קשר המכיל את Γ?

ב. חשבו את I.

7) נניח כי a , b מספרים מרוכבים בחצי המישור השמאלי, כלומר $\mathrm{Re}(b)<0$, $\mathrm{Re}(a)<0$.
הוכיחו כי $\left|e^a-e^b\right|<|a-b|$, $(a\neq b)$.

8) נניח כי $f(z)$, $g(z)$ פונקציות שלמות המקיימות $f^2(z)+g^2(z)=1$ לכל $z\in\mathbb{C}$. הוכיחו כי קיימת פונקציה שלמה $h(z)$ כך שמתקיים: $f(z)=\cos\left(h[z]\right)\mid g(z)=\sin\left(h[z]\right)$.

תשובות סופיות:

1) $2\pi i$

2) לפונקציה אנליטית $f(z)$ בתחום Ω תהיה קיימת קדומה בתחום אם ורק אם $\oint_\gamma f(z)dz=0$ לכל מסלול סגור γ המוכל בתחום Ω.

3) π

4) לפונקציה אנליטית $f(z)$ בתחום Ω תהיה קיימת פונקציה קדומה בתחום אם ורק אם $\oint_\gamma f(z)dz=0$ לכל מסלול סגור בתחום.

5) הוכחה.

6) א. לפונקציה אנליטית $f(z)$ בתחום Ω תהיה קיימת פונקציה קדומה בתחום אם ורק אם $\oint_\gamma f(z)dz=0$ לכל מסלול סגור בתחום. ב. $2\pi i$

7) הוכחה.

8) הוכחה.

התכנסות במש של סדרת פונקציות הולומורפיות:

שאלות:

1) יהי $a>0$. הוכיחו כי הפונקציה $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-a\cdot n^2 z}$ הולומורפית ב- $\mathrm{Re}(z)>0$.

2) יהי $a>0$. הוכיחו כי הפונקציה $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(a+n)^z}$ הולומורפית ב- $\mathrm{Re}(z)>1$.

הערה: $(a+n)^z$ מוגדרת באופן הבא $(a+n)^z=e^{z\cdot Log(a+n)}$ ו- $Log(z)$ זה הענף הראשי של הלוג.

3) פונקציית זטא של רימן מוגדרת כך $\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$.

הראו כי היא הולומורפית בתחום $\mathrm{Re}(z)>1$.

הערה: n^z מוגדרת באופן הבא: $n^z=e^{z\cdot Log(n)}$ ו- $Log(z)$ זה הענף הראשי של הלוג.

4) תהי $f(x):(0,\infty)\to R$ רציפה וחסומה. נגדיר $L[f](z)=\int_0^{\infty}f(x)e^{-z\cdot x}dx$.

נתון כי $L[f](z)$ רציפה בתחום $\mathrm{Re}(z)>0$, הוכיחו כי היא הולומורפית שם.

תשובות סופיות:

ראו פתרונות מלאים בסרטוני הוידאו.

משפט מוררה:

שאלה:

1) תהי $f_n(z)$ סדרת פונקציות אנליטיות המתכנסת במ"ש לפונקציה $f(z)$ בתחום D פשוט קשר. הוכיחו כי:

א. $f(z)$ אנליטית בתחום D.

ב. מתקיים $\lim_{n\to\infty} f_n'(z) = f'(z)$ $\forall z \in D$

הערה: תחום זה קבוצה פתוחה וקשירה.

תשובה סופית:

ראו פתרון מלא בסרטון הוידאו.

פונקציות מרוכבות

פרק 6 - טורים

תוכן העניינים

1. טורים מספריים 35
2. טורים כלליים 36
3. טורי טיילור ומקלורן 37
4. קריטריון קושי-הדמרד 38
5. טורי לורן 39

טורים מספריים:

שאלות:

1) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(in)}{2^n}$.

2) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\sin(in)}{3^n}$.

3) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)^n$.

4) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2+i^n}$.

5) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+i^n}$.

תשובות סופיות:

1) מתבדר.
2) מתכנס.
3) מתבדר.
4) מתבדר.
5) מתכנס.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il

טורים כלליים:

שאלות:

1) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$.

2) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{(1-i)^n}$.

3) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n (z-1)^n}$.

4) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^n$.

5) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nz}$.

תשובות סופיות:

1) $|z| > 1$

2) $|z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$

3) $|z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$

4) $2 < |z| < 4$

5) $\mathrm{Re}(z) < 0$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il

טורי טיילור ומקלורן:

שאלות:

1) מצאו טור טיילור עבור $f(z)=\sin(z+1)$ סביב $z=0$ ומצאו תחום התכנסות.

2) מצאו טור טיילור עבור $f(z)=\frac{1}{z}$ סביב $z=i$ וציינו את רדיוס ההתכנסות.

3) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{2i}{2+i+z}$ סביב $z_0\neq-(2+i)$ בתחום $|z-z_0|<|2+i+z_0|$.

4) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(1-z)^3}$ לטור חזקות סביב $z_0\neq1$ בתחום $|z-z_0|<|1-z_0|$.

5) נניח כי $f(z)$ שלמה ומתאפסת רק בנקודה $z=0$ ומתקיים $f'(0)=1$.
חשבו את $\oint_{|z|=1}\frac{\cos(z)}{f(z)}dz$.

תשובות סופיות:

1) $z\in\mathbb{C}$ $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\cos(1)\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}+\sin(1)\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}\right)$.

2) $|z-i|<1$ $f(z)=\frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{i}\right)^n(z-i)^n$.

3) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2i(-1)^n}{(2+i+z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n$.

4) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{(n+1)(n+2)}{(1-z_0)^{n+3}}(z-z_0)^n$.

5) $2\pi i$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il

קריטריון קושי – הדמרד:

שאלות:

1) מצאו רדיוס התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} e^{in} z^n$.

2) מצאו רדיוס התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{in} \right)^n$.

3) מצאו רדיוס התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n (2n+1)} (z-3n)^n$.

תשובות סופיות:

1) $R=1$
2) $R=\infty$
3) $R=3$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il

טורי לורן:

שאלות:

1) פתחו את הפונקציה לטור לורן סביב $z_0=0$ בכל התחומים האפשריים $f(z)=\frac{1}{1-z}$.

2) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ בתחום $|z|<2$ ובתחום $|z|>2$.

3) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0=-1$ בתחומים הבאים: $0<|z+1|<2$ ו- $|z+1|>2$.

4) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(z+2)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0=-3$ בכל התחומים האפשריים.

5) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ בתחום $1<|z|<3$.
רמז: פירוק לשברים חלקיים.

6) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ בתחום $|z|>3$.
רמז: פירוק לשברים חלקיים.

7) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ בתחום $|z|<1$.

8) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ בתחום $|z|<1$ ומצאו את המקדם a_{-1}.

9) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ לטור לורן סביב $z_0=i$ בתחום $0<|z-i|<2$ ומצאו את המקדם a_{-1}.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il

10) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ לטור לורן סביב $z_0=i$ בתחום $|z-i|>2$.

11) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{z}{(z-1)(z-4)}$ לטור לורן סביב $z_0=1$ כך שיתכנס בתחום המכיל את $z=5$.

12) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z^2-5z+6}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ כך שיתכנס בתחום המכיל את $1-3i$.

13) נניח כי $|a|<1$ ונגדיר את הפונקציה $f(z)=\frac{a}{z-a}$ (כאשר a מספר ממשי).

א. פתחו פונקציה זו לטור לורן בטבעת $|a|<|z|<\infty$.

ב. הוכיחו את הזהות $\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos(n\theta)=\frac{a\cos(\theta)-a^2}{1-2a\cos(\theta)+a^2}$.

14) תהי $a\in\mathbb{C}$ ונניח כי $f(z)$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ ונניח כי מתקיים $\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=0$.

הוכיחו כי לכל $r>0$ מתקיים $f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=r}\frac{f(z)}{z-a}dz$.

15) נסמן $\sum_{-\infty}^{\infty}a_nz^n$ פיתוח לטור לורן של $f(z)=\frac{z}{e^{z^2}-1}$ סביב $z_0=0$ בתחום $0<|z|<r$.

א. מצאו מהו ה-r המקסימלי.

ב. מצאו את a_n לכל $n\le 4$.

הערה: תרגיל זה דורש ידע בסיווג של נקודות סינגולריות.

16) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1}z^3\cos\left(\frac{1}{z}\right)dz$.

תזכורת: מקדמי לורן נתונים ע"י הנוסחה $a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$.

17) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1}e^{\frac{1}{z}}dz$.

תזכורת: מקדמי לורן נתונים ע"י הנוסחה $a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il

תשובות סופיות:

1)

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n \qquad |z|<1$$

$$f(z)=-\left(\frac{1}{z}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n \qquad |z|>1$$

2)

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n \qquad |z|<2$$

$$f(z)=-\left(\frac{2}{z}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n \qquad |z|>2$$

3)

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z+1)^{n-1} \qquad 0<|z+1|<2$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(z+1)^{n+2}} \qquad |z+1|>2$$

4)

$$f(z)=-\frac{1}{(z+3)}\sum_{n=0}^{\infty}(z+3)^n \qquad 0<|z+3|<1$$

$$f(z)=\frac{1}{(z+3)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+3)^n} \qquad |z+3|>1$$

5)

$$f(z)=\frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n}-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^n} \qquad 1<|z|<3$$

6)

$$f(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{z^{n+1}} \qquad |z|>3$$

7)

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{6\cdot 3^n}\right]z^n \qquad |z|<1$$

8)

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n} \qquad |z|<1$$

$$a_{-1}=0$$

9)

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2i}\right)^{n+1}(z-i)^{n-1} \qquad 0<|z-i|<2$$

$$a_{-1}=\frac{1}{2i}$$

10)

$$f(z)=\frac{1}{(2-i)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-2i}{z-i}\right)^n \qquad 2<|z-i|$$

11)

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(z-1)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(z-1)^{n+2}} \qquad |z-1|>3$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il

12) $|z|>3$ $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$

13) א. $|a|<|z|<\infty$ $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{z^n}$ ב. הוכחה.

14) הוכחה.

15) א. $r=\sqrt{2\pi}$

ב. $a_n=0$ $\forall n\le -2$, $a_{-1}=1$, $a_0=0$, $a_1=-\frac{1}{2}$, $a_2=0$, $a_3=\frac{1}{12}$, $a_4=0$.

16) $\frac{\pi i}{12}$

17) $2\pi i$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il

פונקציות מרוכבות

פרק 7 - משפט השארית וחישוב אינטגרלים ממשיים

תוכן העניינים

1. מציאת שארית 43
2. אינטגרלים מרוכבים 45
3. מסילת חצי-קשת מעגלית 49
4. מסילת מעגל היחידה 52
5. מסילת משולש פיצה 54

מציאת שארית:

שאלות:

חשבו את השאריות של הפונקציות בנקודות הבאות:

1) $\operatorname{Res}\left(\frac{z+3}{z+2}, z=-2\right)$

2) $\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+9}, z=3i\right)$

3) $\operatorname{Res}\left(\frac{z+2}{z^4+2z^3-2z-1}, z=1\right)$

4) $\operatorname{Res}\left(\frac{z+2}{z^4+2z^3-2z-1}, z=-1\right)$

5) נניח כי לפונקציה $\frac{f(z)}{g(z)}$ יש קוטב פשוט ב- z_0 כאשר ונניח כי $g'(z_0)\neq 0$.

הוכיחו כי $\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{g(z)}, z_0\right)=\frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$

6) $\operatorname{Res}\left(\frac{\cos(z)}{z}, 0\right)$

7) $\operatorname{Res}\left(\frac{\sin(z+1)}{z}, 0\right)$

8) חשבו את השאריות בנקודות הסינגולריות (הסופיות) של הפונקציה $f(z)=\frac{\tan(z)}{z^2-\frac{\pi}{4}z}$

9) חשבו את השאריות בנקודות הסינגולריות (הסופיות) של הפונקציה $f(z)=\frac{1-\cos(z)}{z^3(z-\pi)}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il

10) נניח כי $f(z)$ פונקציה שלמה בעלת n אפסים בדיוק.

הוכיחו שכל הנקודות הסינגולריות של $\frac{f'(z)}{f(z)}$ הן קטבים פשוטים וחשבו את השאריות בנקודות אלו.

תשובות סופיות:

1) 1

2) $\frac{1}{6i}$

3) $\frac{3}{8}$

4) $-\frac{3}{8}$

5) הוכחה.

6) 1

7) $\sin(1)$

8) $\operatorname{Res}\left[f(z),\frac{\pi}{2}+\pi k\right]=-\frac{1}{\left[\frac{\pi}{2}+\pi k\right]\left[\frac{\pi}{4}+\pi k\right]}$

9) $\operatorname{Res}\left[f(z),\pi\right]=\frac{2}{\pi^3}$ $\qquad$ $\operatorname{Res}\left[f(z),0\right]=-\frac{1}{2\pi}$

10) $\operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)},z_k\right]=m_k$ כאשר z_k אפס מסדר m_k של $f(z)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il

אינטגרלים מרוכבים :

שאלות:

חשבו את האינטגרלים הבאים :

1) $\oint_{|z|=1} z\tan(\pi z)\,dz$

2) $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3(z+1)}\,dz$

3) $\oint_{|z-i|=3} \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}\,dz$

4) $\oint_{|z|=1} z^2\sin\left(\frac{1}{z}\right)dz$

5) $\oint_{|z|=1} \sin\left(\frac{1}{z^2}\right)+e^{z^2}\cos(z)\,dz$

6) נניח כי $f(z)$ פונקציה שלמה.

הוכיחו כי לכל מסלול C פשוט וסגור שאינו חותך את הראשית, מתקיים $\oint_C f\left(\frac{1}{z^2}\right)dz=0$.

7) $\oint_{|z-a|=a} \frac{z}{z^4-1}\,dz \qquad (a>1)$

8) $\oint_{|z|=1} \frac{(1+z)^5\sinh(z)}{z^6}dz$

9) $\oint_{|z|=5} \frac{e^z-1}{z(z-1)(z-i)^2}\,dz$

10) $\oint_{|z|=6} \cot(z)\,dz$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il

11) $\oint_{|z|=1} \sin(z)\sin\left(\frac{3}{z}\right)\cos\left(e^{z^2+\pi}+\ln(2)\right)\,dz$

12) נניח כי $f(z)$ פונקציה שלמה ומתאפסת רק בנקודה $z=0$ שם יש לה אפס מסדר 2 ומתקיים $f''(0)=7$.

חשבו $\oint_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{f(z)}\,dz$.

13) $\oint_{|z|=1} z^4 \sin\left(\bar{z}\right)\,dz$

14) $\oint_{|z|=1} \sin(z)\sin\left(\frac{1}{z}\right)\,dz$

15) חשבו את המקדמים של החזקות השליליות בפיתוח של $f(z)=\frac{1}{\cos(z)-1}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ בתחום $0<|z|<2\pi$.

הערה: אם $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ טור לורן של $f(z)$ בתחום $R_1<|z-z_0|<R_2$ אז ניתן לקבל את המקדמים ע"י הנוסחה $a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$ כאשר $R_1<r<R_2$.

16) הוכיחו את עקרון הארגומנט:

אם $f(z)$ אנליטית בתחום D פרט למספר סופי של קטבים ורציפה על השפה γ ואינה מתאפסת שם על השפה אזי $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N-P$ כאשר

N - מספר האפסים של $f(z)$ כולל ריבוי בתחום D.

P - מספר הקטבים של $f(z)$ כולל ריבוי בתחום D.

17) אם $n\in\mathbb{N}$ ו-$r>0$ כך ש-$n<r^2<n+1$ חשבו את האינטגרל $\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{z}{e^{2\pi i z^2}-1}dz$.

18) חשבו $\int_{-i\cdot\infty}^{i\cdot\infty}\frac{e^z}{(z+1)^4}dz$.

הערה: $\int_{-i\cdot\infty}^{i\cdot\infty}\frac{e^z}{(z+1)^4}dz \overset{definition}{=} \lim_{R\to\infty}\int_{-iR}^{iR}\frac{e^z}{(z+1)^4}dz$ כאשר המסילה באינטגרל הימני היא מסילת הקו הישר מ-$-iR$ ל-iR.

תשובות סופיות:

1) $\oint_{|z|=1} z\tan(\pi z)dz = 0$

2) $\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{z^3(z+1)}dz = 2\pi i\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{e}\right)$

3) $\oint_{|z-i|=3}\frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}dz = 2\pi i\left(1-\frac{1}{e}\right)$

4) $\oint_{|z|=1} z^2\sin\left(\frac{1}{z}\right)dz = -\frac{\pi i}{3}$

5) $\oint_{|z|=1}\sin\left(\frac{1}{z^2}\right)+e^{z^2}\cos(z)dz = 0$

6) הוכחה.

7) $\oint_{|z-a|=a}\frac{z}{z^4-1}dz = \frac{\pi i}{2}$

8) $\oint_{|z|=1}\frac{(1+z)^5\sinh(z)}{z^6}dz = \frac{267}{20}\pi i$

9) $\oint_{|z|=5}\frac{e^z-1}{z(z-1)(z-i)^2}dz = \pi\left[-3i\cdot e^i+2i-e\right]$

10) $\oint_{|z|=6}\cot(z)\,dz = 6\pi i$

11) $\oint_{|z|=1}\sin(z)\sin\left(\frac{3}{z}\right)\cos\left(e^{z^2+\pi}+\ln(2)\right)dz = 0$

12) $\oint_{|z|=1}\frac{\sin(z)}{f(z)}dz = \frac{4\pi i}{7}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il

13) $\oint_{|z|=1} z^4 \sin\left(\bar{z}\right) dz = \frac{2\pi i}{5!}$

14) $\oint_{|z|=1} \sin(z)\sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = 0$

15) $a_{-1} = -2 \ , \ a_{-2} = -2 \ , \ a_n = 0 \ \text{ for } \ n \le -3$

16) הוכחה.

17) $\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{z}{e^{2\pi i z^2} - 1} dz = 2n+1$

18) $\int_{-i\cdot\infty}^{i\cdot\infty} \frac{e^z}{(z+1)^4} dz = \frac{\pi i}{3e}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il

מסילת חצי קשת מעגלית:

שאלות:

בכל התרגילים הבאים נסמן את המסלולים הבאים:

$$C_R = \left\{ z = \mathrm{Re}^{i\theta} \mid 0 \le \theta \le \pi \right\}$$

$$\gamma = \left\{ z = x \mid -R \le x \le R \right\}$$

1) חשבו את $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ על ידי משפט השארית.

הדרכה:

א. חשבו את האינטגרל $\oint_{C_R+\gamma} \frac{1}{1+z^2} dz$

ב. הוכיחו כי $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{1}{1+z^2} dz = 0$

ג. הסיקו מהסעיף הקודם כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{R\to\infty} \oint_{C_R+\gamma} \frac{1}{1+z^2} dz$

2) הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ על ידי משפט השארית.

הדרכה:

א. חשבו את האינטגרל $\oint_{C_R+\gamma} \frac{1}{1+z^4} dz$

ב. הוכיחו כי $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{1}{1+z^4} dz = 0$

ג. הסיקו מהסעיפים הקודמים כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il

3) הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\pi\sqrt{2}$

הדרכה:

א. חשבו את האינטגרל $\oint_{C_R+\gamma}\frac{z^2+1}{z^4+1}dz$

ב. הוכיחו כי $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{z^2+1}{z^4+1}dz=0$

ג. הסיקו מהסעיפים הקודמים כי $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\pi\sqrt{2}$

4) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(x^2+1\right)^3}dx$

5) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4+6}{x^6+1}dx$.

6) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\left(x^2+4\right)^2}dx$

7) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\left(x^2+4x+13\right)^2}dx$

8) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\left(x^2+9\right)^2}dx$

9) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+9\right)}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il

תשובות סופיות:

1) א) $\oint_{C_R+\gamma}\frac{1}{1+z^2}dz=\pi$

ב) הוכחה.

ג) הוכחה.

2) א) $\oint_{C_R+\gamma}\frac{1}{1+z^4}dz=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

ב) הוכחה.

ג) הוכחה.

3) א) $\oint_{C_R+\gamma}\frac{z^2+1}{z^4+1}dz=\pi\sqrt{2}$

ב) הוכחה.

ג) הוכחה.

4) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(x^2+1\right)^3}dx=\frac{3\pi}{8}$

5) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4+6}{x^6+1}dx=\frac{14\pi}{3}$

6) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\left(x^2+4\right)^2}dx=\frac{\pi}{4}$

7) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\left(x^2+4x+13\right)^2}dx=-\frac{\pi}{27}$

8) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\left(x^2+9\right)^2}dx=\frac{\pi}{6}$

9) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+9\right)}=\frac{5}{96}\pi$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il

מסילת מעגל היחידה:

שאלות:

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\left(2+\cos(\theta)\right)^2} d\theta$

2) $\int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos(3x)} dx$

3) חשבו את האינטגרל $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a\cos(x)+b\sin(x)+c} dx$ עבור הפרמטרים הממשיים a,b,c המקיימים $c>\sqrt{a^2+b^2}$ $=1$.

<u>הערה:</u> ניתן להשתמש בעובדה כי $\left|\sqrt{c^2-1}-c\right|<1$

4) חשבו את האינטגרל $\int_0^{\pi} \frac{1}{\left(a+b\cos\varphi\right)^2} d\varphi$ עבור $a>b>0$

5) חשבו את האינטגרל $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a+\sin^2 x} dx$ עבור $|a|>1$

6) חשבו לכל $n\in\mathbb{N}$ את $\int_0^{2\pi} (1+2\cos\theta)^n \cos(n\theta) d\theta$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il

תשובות סופיות:

1) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\left(2+\cos(\theta)\right)^2} d\theta = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$

2) $\int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos(3x)} dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$

3) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a\cos(x)+b\sin(x)+c} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{c^2-1}}$

4) $\int_0^{\pi} \frac{1}{\left(a+b\cos\varphi\right)^2} d\varphi = \frac{\pi ab}{\left(a^2-b^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a+\sin^2 x} dx = \frac{\pi}{\sqrt{a^2+a}}$

6) $\int_0^{2\pi} \left(1+2\cos\theta\right)^n \cos(n\theta) d\theta = 2\pi$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il

מסילת משולש פיצה:

שאלה:

1) הוכיחו כי $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^{2016}}dx = \frac{\pi}{2016}\cdot\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2016}\right)}$.

רמז: התבוננו בפונקציה $f(z)=\frac{1}{1+x^{2016}}$ ובגזרת מעגל בזווית $\frac{2\pi}{2016}$.

תשובה סופית:

1) הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו ל-www.GooL.co.il