

סטטיסטיקה



$$\{\sqrt{x}\}^2$$



תוכן העניינים

1. סטטיסטיקה תיאורית- סיווג משתנים וסולמות מדידה 1
2. סטטיסטיקה תיאורית- הצגה של נתונים 5
3. סטטיסטיקה תיאורית- סכימה 16
4. סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מרכז (ללא ספר) 16
5. סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - הטווח, השונות וסטיית התקן 20
6. סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - טווח בין רבעוני 23
7. סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - ממוצע סטיות מוחלטות מהחציון 27
8. סטטיסטיקה תיאורית- מדדי מיקום יחסי-ציון תקן 29
9. סטטיסטיקה תיאורית-אחוזונים בטבלה בדידה 31
10. המשתנה המקרי הבדיד- טרנספורמציה לינארית 33
11. סטטיסטיקה תיאורית- תרשים קופסא 36
12. סטטיסטיקה תיאורית שאלות אמריקאיות 38
13. התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות נורמלית 45
14. התפלגויות בדידות מיוחדות-התפלגות בינומית 53
15. הסקה סטטיסטית - הקדמה 56
16. התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי 59
17. מושגי יסוד באמידה 74
18. רווח סמך לתוחלת (ממוצע) 79
19. רווח סמך לפרופורציה 89
20. רווח סמך להפרש פרופורציות 95
21. רווח סמך להפרש תוחלות (ממוצעים) במדגמים בלתי תלויים 97
22. שאלות מסכמות על רווחי סמך 103
23. מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים 105

תוכן העניינים

| | |
|-----|---|
| 111 | 24. בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) |
| 127 | 25. בדיקת השערות על פרופורציה |
| 134 | 26. בדיקת השערות על הפרש פרופורציות |
| 138 | 27. בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים |
| 149 | 28. בדיקת השערות על שוניות |
| 153 | 29. שאלות מסכמות בבדיקת השערות |
| 166 | 30. ניתוח שונות חד כיוונית |
| 175 | 31. ניתוח שונות דו כיוונית |
| 211 | 32. מקדם המתאם (מדד קשר) הלינארי ומובהקותו |
| 238 | 33. רגרסיה |
| 241 | 34. מדדי קשר-רגרסיה -שונות מוסברת ושונות לא מוסברת |
| 244 | 35. מדד הקשר ספירמן |
| 247 | 36. מבחני חי בריבוע |

סטטיסטיקה

פרק 1 - סטטיסטיקה תיאורית- סיווג משתנים וסולמות מדידה

תוכן העניינים

1. כללי 1

סטטיסטיקה תיאורית – סיווג משתנים וסולמות מדידה:

רקע:

סטטיסטיקה תיאורית הוא ענף בו לומדים כיצד לאסוף נתונים, להציג אותם ולנתח אותם. בסטטיסטיקה תיאורית אנו פונים לקבוצה מסוימת, ובאותה קבוצה אנו אוספים נתונים על הישויות באותה קבוצה. משתנה – תכונה שיכולה לקבל מספר ערכים: דעה פוליטית, מקום מגורים, גובה של אדם וכדומה. חלוקה אחת של המשתנים הנמדדים היא לפי סולמות מדידה:

מיון משתנים לפי סולמות המדידה:

1. סולם שמי (נומינאלי) – משתנה שלערכיו יש משמעות רק מבחינת הזהות ואין עניין של יותר או פחות. לדוגמה: מצב משפחתי (רווק/נשוי/אלמן/גרש), אזור מגורים. משתנה דיכוטומי (הינו מסולם שמי) אותם משתנים שיש להם רק שני ערכים אפשריות זכר/נקבה. מעשן/לא מעשן.
2. סולם סדר (אורדינאלי) – כאשר לערכים של המשתנה בנוסף לשם ישנה גם משמעות לסדר אבל אין משמעות לגודל ההפרש. למשל, דרגה בצבא.
3. סולם רווחים (אינטרוואלי) – משתנה שלערכים שלו בנוסף לשם ולסדר בניהם יש משמעות לרווחים בין הערכים אבל אין משמעות ליחס בין הערכים. למשל, קומה בבניין. סולם לא כל כך פופולרי.

סולם מנה/יחס:

משתנה שלערכיו בנוסף לשם, לסדר ולרווח יש משמעות גם ליחס בין הערכים. למשל, מספר מכוניות למשפחה, משקל אדם בק"ג. הדרך הקלה ביותר כדי לזהות עם הסולם הוא סולם מנה היא על ידי מבחן האפס. בסולם מנה האפס הוא מוחלט, אבסולוטי, ומייצג אין.

סוגי משתנים:

נבצע סיווג של המשתנים:

משתנה איכותי

משתנה שלערכיו אין משמעות של יותר או פחות, אין עניין כמותי לערכים המתקבלים. כמו: מקום מגורים של אדם (רעננה, תל אביב, אשדוד...), מין האדם (זכר, נקבה), מצב משפחתי (רווק, נשוי, גרוש, אלמן).

משתנה כמותי

משתנה שערכיו הם מספרים להם יש משמעות כמותית כמו: גובה אדם בס"מ, ציון בבחינה וכדומה. את המשתנה הכמותי נסווג לשני סוגים:

משתנה בדיד: משתנה שערכיו מתקבלים מתוך סידרה של ערכים אפשריים. כמו: מספר ילדים למשפחה (1,2,3...), ציון בבחינה (מ-0 ועד 100 בקפיצות של 1).

משתנה רציף: משתנה שערכיו מתקבלים מתוך אינסוף ערכים בתחום מסוים, הערכים מתקבלים ברצף – ללא קפיצות של ערכים. דוגמאות: גובה בס"מ – אם הגובה הנמוך ביותר הוא 150 ס"מ ועד 190 ס"מ – הגבהים בקבוצה הם ברצף. גם בין 160 ל-161 ס"מ יש רצף אינסופי של ערכים אפשריים (כמו 160.233 ס"מ, למשל).



שאלות:

- (1) באיזה סולם מדידה המשתנים הבאים נחקרים (שמי/סדר/רווחים/מנה):
- גובה (בס"מ).
 - מספר ילדים למשפחה.
 - מידת החרדה לפני מבחן.
 - שביעות רצון משירות לקוחות בסקלה מ-1 עד 7 (1 - כלל לא מרוצה עד 7 - מרוצה מאד)
 - השכלה.
 - מספר אוטובוס.
 - מקום מגורים.
 - מין (1=גבר ; 2=אישה).
 - מידת נעליים.

- (2) להלן התפלגות מספר האיחורים לעבודה בחודש של העובדים בחברת "סטאר":

| מספר האיחורים | מספר העובדים |
|---------------|--------------|
| 0 | 17 |
| 1 | 23 |
| 2 | 85 |
| 3 | 50 |
| 4 | 25 |

בחברה 200 עובדים.

- מהו המשתנה הנחקר כאן?
 - האם מדובר במשתנה איכותי או כמותי?
אם הוא כמותי האם הוא בדיד או רציף?
באיזה סולם מדידה המשתנה?
- (3) להלן רשימה של משתנים כמותיים. ציינו האם הוא משתנה רציף/בדיד:
- שכר ב-ש.
 - ציון בחינת בגרות.
 - תוצאה של הטלת קובייה.
 - מהירות ריצה בתחרות.
 - שיעור התמיכה בממשלה.

תשובות סופיות:

- (1) א. מנה. ב. מנה. ג. סדר.
ד. סדר. ה. מנה/ סדר. ו. שמי.
ז. שמי. ח. שמי. ט. סדר.
- (2) א. מספר האיחורים. ב. כמותי בדיד בסולם מנה.
ג. בדיד.
- (3) א. רציף. ב. בדיד. ג. בדיד.
ד. רציף. ה. רציף. ו. רציף.

סטטיסטיקה

פרק 2 - סטטיסטיקה תיאורית- הצגה של נתונים

תוכן העניינים

1. כללי 5

סטטיסטיקה תיאורית – הצגה של נתונים:

רקע:

דרכים להצגת נתונים שנאספו:

רשימה של תצפיות:

התצפית היא הערך שנצפה עבור ישות מסוימת בקבוצה. רושמים את התצפיות שהתקבלו כרשומה, יעיל שיש מספר מועט של תצפיות. ההצגה הזו רלבנטית לכל סוגי המשתנים. למשל, להלן מספר החדרים בבניין בן 5 דירות: 4, 3, 5, 4, 3.

טבלת שכיחויות בדידה:

| שם המשתנה- X | שכיחות – $f(x)$ | שכיחות יחסית באחוזים |
|-------------------|------------------------|---------------------------|
| X_1 | f_1 | $\frac{f_1}{N} \cdot 100$ |
| X_2 | f_2 | $\frac{f_2}{N} \cdot 100$ |
| X_3 | f_3 | $\frac{f_3}{N} \cdot 100$ |
| \vdots | \vdots | \vdots |
| X_k | f_k | $\frac{f_x}{N} \cdot 100$ |
| סה"כ | $N = \sum_{i=1}^k f_i$ | 100% |

רושמים את התצפיות בטבלה שבה עמודה אחת מבטאת את ערכי המשתנה והשנייה את השכיחות. יעיל עבור משתנה איכותי וכמותי בדיד וכשיש מספר רב של תצפיות. לא יעיל למשתנה כמותי רציף.

דוגמה:

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת:

| $\frac{f_i}{n}$ | F_i | מספר התלמידים – השכיחות f | הציון X |
|-----------------|-------|--------------------------------|-----------|
| $0.08=2/25$ | 2 | 2 | 5 |
| $0.16=4/25$ | 6 | 4 | 6 |
| $0.32=8/25$ | 14 | 8 | 7 |
| $0.2=5/25$ | 19 | 5 | 8 |
| $0.16=4/25$ | 23 | 4 | 9 |
| $0.08=2/25$ | 25 | 2 | 10 |

שכיחות מצטברת – צבירה של השכיחויות.

השכיחויות F_i – השכיחות המצטברת נותנת כמה תצפיות קטנות או שוות לערך.

שכיחות יחסית (פרופורציה) – השכיחות מחולקת לכמות התצפיות הכללי:

$$\frac{f_i}{n} - \text{איזה חלק מהתצפיות בקבוצה שוות לערך.}$$

טבלת שכיחויות במחלקות:

משתמשים שהמשתנה כמותי רציף או כאשר יש מספר ערכים רב במשתנה הבדיד וטבלת שכיחויות תהיה ארוכה מידי.

דוגמה:

נתנו לקבוצת ילדים לבצע משימה, בדקו את התפלגות זמן הביצוע, בדקות. להלן ההתפלגות שהתקבלה:

| מספר הילדים | זמן בדקות |
|-------------|-----------|
| 20 | 0.5-3.5 |
| 18 | 3.5-9.5 |
| 14 | 9.5-19.5 |
| 8 | 19.5-29.5 |

דיאגרמת עוגה:

זהו התיאור הגרפי של משתנה איכותי. בדיאגרמת עוגה כל ערך במשתנה מקבל "נתח", שהוא פרופורציונלי לשכיחות היחסית של ערך המשתנה בנתונים.

התפלגות המצב המשפחתי



דיאגרמת מקלות:

הציר האופקי הוא הציר של המשתנה והציר האנכי של השכיחות, כך שהגובה של המקל מעיד על השכיחות. רלבנטי למשתנה כמותי בדיד. לא נהוג להשתמש בתיאור למשתנה איכותי וכמו כן לא למשתנה כמותי רציף, וכן בסולמות מדידה עבור משתנה מסולם סדר.



היסטוגרמה:

היסטוגרמה היא הדרך הגרפית כדי לתאר טבלת שכיחויות במחלקות, והיא רלוונטית למשתנה כמותי רציף. בהיסטוגרמה הציר האופקי הוא הציר של המשתנה והציר האנכי הוא הציר של הצפיפות. הצפיפות מחושבת בכל מחלקה על ידי חלוקת השכיחות ברוחב של כל המחלקה, והיא נותנת את מספר התצפיות הממוצע בכל מחלקה ליחידה. אם המחלקות הן שוות ברוחב, ניתן לשרטט את ההיסטוגרמה לפי השכיחות ואין צורך בצפיפות.

| צפיפות | מצטברת | שכיחות | אמצע | רוחב | X |
|--------|--------|--------|------|------|-------------|
| 6.6667 | 20 | 20 | 2 | 3 | 0.5 - 3.5 |
| 3 | 38 | 18 | 6.5 | 6 | 3.5 - 9.5 |
| 1.4 | 52 | 14 | 14.5 | 10 | 9.5 - 19.5 |
| 0.8 | 60 | 8 | 24.5 | 10 | 19.5 - 29.5 |



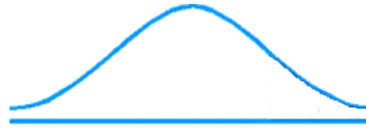
פוליגון – מצולעון:

אם נחבר את אמצע קצה כל מלבן בקווים ישרים. נותן מראה חזותי לצורה של התפלגות המשתנה.

צורות התפלגות נפוצות:

התפלגות סימטרית פעמונית

רוב התצפיות במרכז, וככל שנתרחק מהמרכז יהיו פחות תצפיות באופן סימטרי. לדוגמה, ציוני IQ.

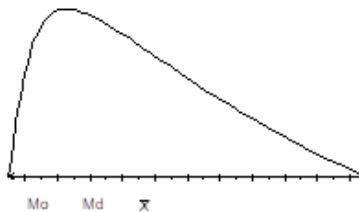


ישנן התפלגויות סימטריות שאינן פעמוניות, כגון:

התפלגות אסימטרית ימנית (חיובית)

רוב התצפיות מקבלות ערכים נמוכים ויש מיעוט הולך וקטן של תצפיות שמקבלות ערכים גבוהים קיצוניים. לדוגמה, שכר במשק.

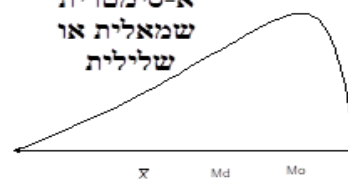
התפלגות א-סימטרית ימנית או חיובית



התפלגות אסימטרית שמאלית (שלילית)

רוב התצפיות מקבלות ערכים גבוהים ויש מיעוט הולך וקטן של תצפיות שמקבלות ערכים נמוכים קיצוניים. לדוגמה, אורך חיים.

התפלגות א-סימטרית שמאלית או שלילית



שאלות:

- 1) בסקר צפייה בטלוויזיה התקבלו התוצאות הבאות: 25 צפו בערוץ הראשון, 25 צפו בערוץ 10, 75 צפו בערוץ השני, 50 צפו באחד מערוצי הכבלים ו-25 לא צפו בטלוויזיה בזמן הסקר.
- א. רשמו את טבלת השכיחות ואת השכיחות היחסית.
- ב. תארו את הנתונים באופן גרפי.

- 2) להלן נתונים על התפלגות המקצוע המועדף של תלמידי שכבה ו' בבית הספר "מעוף":

| המקצוע | מספר התלמידים |
|----------|---------------|
| מתמטיקה | 44 |
| תנ"ך | 20 |
| אנגלית | 12 |
| היסטוריה | 26 |

- א. מהו המשתנה הנחקר?
- ב. מהי פרופורציית התלמידים שמעדיפים תנ"ך?

- 3) להלן התפלגות ההשכלה במקום עבודה מסוים:

| השכלה | מספר העובדים |
|---------|--------------|
| נמוכה | 60 |
| תיכונית | 120 |
| אקדמאית | 20 |

- א. מהו המשתנה הנחקר?
מאיזה סולם הוא?
- ב. תארו את הנתונים באופן גרפי.

- 4) להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:
- 6, 5, 8, 7, 6, 7, 6, 8, 7, 8, 5, 4, 6, 10, 9, 8, 6, 7.
- א. מהו המשתנה? האם הוא בדיד או רציף?
- ב. תארו את הרשימה בטבלת שכיחויות.
- ג. הוסיפו שכיחויות יחסיות לטבלה.
- ד. תארו את הנתונים באופן גרפי.

5) להלן היסטוגרמה המתארת את התפלגות הגבהים בס"מ של קבוצה מסוימת:



- מהו המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?
- תארו את הנתונים בטבלת שכיחויות במחלקות.
- הוסיפו שכיחות יחסית לטבלה.
- הוסיפו את הצפיפות של כל מחלקה לטבלה.
- מהי צורת ההתפלגות של הגבהים?

6) להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג:

| מספר מקרים | משקל |
|------------|-------|
| 10 | 40-45 |
| 20 | 45-50 |
| 30 | 50-60 |
| 20 | 60-65 |
| 10 | 65-70 |

- תארו את ההתפלגות באופן גרפי.
- מה ניתן להגיד על צורת ההתפלגות?

7) להלן גיל המטופלים של ד"ר שוורץ בשנים :
 קנה מידה :



- מה המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?
- מהי הקבוצה הנחקרת?
- תרגמו את ההסיטוגרמה לטבלת שכיחות.
- מהי הפרופורציה של המטופלים של ד"ר שוורץ בגילאים 20-30?

תשובות סופיות:

ב. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.

1) א. להלן טבלה:

| % | $\frac{f(x)}{n}$ | $f(x)$ | x |
|-------|------------------|--------|---------|
| 12.5% | $\frac{25}{200}$ | 25 | ערוץ 1 |
| 12.5% | $\frac{25}{200}$ | 25 | ערוץ 10 |
| 37.5% | $\frac{75}{200}$ | 75 | ערוץ 2 |
| 25% | $\frac{50}{200}$ | 50 | כבלים |
| 12.5% | $\frac{25}{200}$ | 25 | לא צפו |
| 100% | 1 | 200 | סה"כ |

ב. 19.6%.

2) א. מקצוע מועדף.

ב. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.

3) א. משתנה נחקר: השכלה, סוג: סדר.

4) א. המשתנה : ציון, משתנה בדיד.
ד. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.

ב+ג. להלן טבלה :

| % | $\frac{f(x)}{n}$ | $f(x)$ | x |
|------|------------------|--------|------|
| 5% | $\frac{1}{20}$ | 1 | 4 |
| 10% | $\frac{2}{20}$ | 2 | 5 |
| 30% | $\frac{6}{20}$ | 6 | 6 |
| 20% | $\frac{4}{20}$ | 4 | 7 |
| 20% | $\frac{4}{20}$ | 4 | 8 |
| 10% | $\frac{2}{20}$ | 2 | 9 |
| 5% | $\frac{1}{20}$ | 1 | 10 |
| 100% | 20 | 20 | סה"כ |

5) א. גובה בס"מ, רציף.

ב+ג+ד. להלן טבלה : ה. אסימטרית.

| d | % | $\frac{f(x)}{n}$ | $f(x)$ | x |
|-----|-----|------------------|--------|---------|
| 1 | 5% | $\frac{5}{100}$ | 5 | 155-160 |
| 2 | 10% | $\frac{10}{100}$ | 10 | 160-165 |
| 3 | 15% | $\frac{15}{100}$ | 15 | 165-170 |
| 4 | 40% | $\frac{40}{100}$ | 40 | 170-180 |
| 3 | 30% | $\frac{30}{100}$ | 30 | 180-190 |

- 6) א. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.
 ב. סימטרית.
- 7) א. המשתנה: גיל בשנים, משתנה רציף.
 ב. המטופלים של ד"ר שוורץ.
 ד. להלן טבלה:
 ה. 62.5%.

| $f(x)$ | x |
|--------|-------|
| 8 | 10-20 |
| 40 | 20-30 |
| 16 | 30-50 |

סטטיסטיקה

פרק 3 - סטטיסטיקה תיאורית- סכימה

תוכן העניינים

1. כללי.....16

סטטיסטיקה תיאורית – סכימה:

רקע:

בסטטיסטיקה ישנה צורת רישום מקובלת לסכום של תצפיות: $\sum_{i=1}^n X_i$.

נסביר את צורת הרישום על ידי הדוגמה הבאה:

| i | X_i |
|-----|-------|
| 1 | 5 |
| 2 | 0 |
| 3 | 1 |
| 4 | 3 |
| 5 | 2 |

(הסבר מלא מופיע בסרטונים באתר).

שאלות:

- 1) בבניין 5 דירות. לכל דירה רשמו את מספר החדרים שיש בדירה (X), ומספר הנפשות החיות בדירה (Y). חשבו:

| Y | X | מספר דירה |
|-----|-----|-----------|
| 1 | 2 | 1 |
| 1 | 3 | 2 |
| 2 | 2 | 3 |
| 3 | 4 | 4 |
| 2 | 3 | 5 |

א. $\sum_{i=1}^3 X_i$

ב. $\sum_{i=1}^5 Y_i$

ג. $\sum_{i=1}^4 X_i$

ד. $\left(\sum_{i=1}^4 X_i\right)^2$

ה. $\sum X_i$

ו. $\sum X_i Y_i$

ז. $\sum(X_i) \sum(Y_i)$

- (2) נתון לוח ערכי המשתנים X_i ו- Y_i , כאשר: $i = 1, 2, \dots, 6$, ונתונים הקבועים:
 $a = 2$, $b = 5$. חשבו את הנוסחאות הבאות:

| | | | | | | |
|-------|---|---|---|----|----|---|
| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| X_i | 3 | 2 | 4 | -2 | 1 | 4 |
| Y_i | 2 | 0 | 0 | 1 | -5 | 2 |

א. $\sum_{i=1}^4 y_i$

ב. $\sum_{i=1}^6 a$

ג. $\sum_{i=1}^6 x_i y_i$

ד. $\sum_{i=1}^6 (x_i + y_i)$

ה. $\sum_{i=1}^6 x_i + a$

- (3) קבעו לכל זהות האם היא נכונה:

א. $\sum_{i=1}^n bX_i = b \cdot \sum_{i=1}^n X_i$

ב. $\sum_{i=1}^n a = a \cdot n$

ג. $\left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$

(4) נתון: $\sum_{i=1}^{10} X_i = 80$, $\sum_{i=1}^{10} X_i^2 = 1640$

חשבו: $\sum_{i=1}^{10} (X_i - 4)^2$

תשובות סופיות:

- | | | | |
|--------------|---------|-----------|--------------|
| ד. 121. | ג. 11. | ב. 9. | א. 7. (1 |
| | ז. 126. | ו. 27. | ה. 14. |
| | ג. 7. | ב. 12. | א. 3. (2 |
| | | ה. 14. | ד. 12. |
| ג. לא נכונה. | | ב. נכונה. | א. נכונה. (3 |
| | | | .1160 (4 |

סטטיסטיקה

פרק 4 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מרכז

תוכן העניינים

1. כללי (ללא ספר)

סטטיסטיקה

פרק 5 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - הטווח, השונות וסטיית התקן

תוכן העניינים

1. כללי 20

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי פיזור – הטווח, השונות וסטיית התקן:

רקע:

המטרה: למדוד את הפיזור של הנתונים, כלומר כמה הם רחוקים זה מזה ושונים זה מזה.

הטווח / תחום (RANGE):

ההפרש בין התצפית הגבוהה ביותר לנמוכה ביותר: $R = X_{\max} - X_{\min}$.

שונות וסטיית תקן:

שונות היא ממוצע ריבועי של הסטיות מהממוצע וסטיית התקן היא שורש של השונות.

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

עבור סדרת נתונים:

דוגמאות:

(1) נחשב את השונות של סדרת המספרים הבאה: 5, 4, 9.

$$S_x^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{n} = \frac{\sum x^2 \cdot f}{n} - \bar{x}^2$$

עבור טבלת שכיחויות:

(2) להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת בה ממוצע הציונים הוא 7.44.

| הציון X | השכיחות F | $x^2 \cdot F$ |
|--------------|----------------|---------------|
| 5 | 2 | 50 |
| 6 | 4 | 144 |
| 7 | 8 | 392 |
| 8 | 5 | 320 |
| 9 | 4 | 324 |
| 10 | 2 | 200 |
| סה"כ | | 1430 |

$$S_x^2 = \frac{\sum x^2 f(x)}{n} - \bar{x}^2 = \frac{1430}{25} - 7.44^2 = 1.8464$$

$$S = \sqrt{S_x^2} = \sqrt{1.8464} = 1.3588$$

כשיש מחלקות נעזר באמצע המחלקה כדי לחשב את השונות.

שאלות:

(1) להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:
6, 5, 8, 7, 6, 8, 6, 7, 8, 5, 6, 4, 10, 9, 8, 6, 7.
חשבו את השונות, סטיית התקן והטווח של הציונים.

(2) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן":

| מספר מכוניות למשפחה | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---------------------|----|-----|-----|-----|----|
| שכיחות | 65 | 150 | 220 | 140 | 55 |

א. חשבו סטיית התקן.

ב. חשבו את הטווח של הנתונים.

הקפידו להסביר לגבי כל סעיף מה משמעות התוצאה שקיבלתם.

(3) בחברה העוסקת בטלמרקטינג בדקו עבור כל עובד את מספר שנות הוותק שלו. התקבל שממוצע שנות הוותק הוא 4 שנים וסטיית התקן היא שנתיים.

א. האם הממוצע יגדל/יקטן/לא ישתנה וסטיית התקן תגדל/תקטן/לא תשנה כאשר יתווספו שני עובדים עם וותק של 4 שנים להתפלגות?

ב. האם הממוצע יגדל/יקטן/לא ישתנה וסטיית התקן תגדל/תקטן/לא תשנה כאשר יתווספו שני עובדים אשר אחד עם וותק של 0 שנים והשני עם וותק של 8 שנים להתפלגות?

(4) נתונה רשימה של 5 תצפיות, אך רק עבור 4 מהן נרשמו הסטיות שלהן מהממוצע: 2, 3, 2, -1. חשבו את השונות של חמש התצפיות.

(5) בשכונה בדקו בכל דירה את מספר החדרים לדירה. בשכונה 200 דירות.

| מספר חדרים | פרופורציה |
|------------|-----------|
| 1 | 0.1 |
| 2 | 0.2 |
| 3 | 0.4 |
| 4 | 0.15 |
| 5 | |

א. מה הממוצע של מספר החדרים לשכונה בדירה?

ב. חשבו את סטיית התקן של מספר החדרים לדירה.

ג. חלק מבעלי הדירות בנות 2 החדרים הפכו את דירתם לדירת חדר. כיצד הדבר ישפיע(יקטין, יגדל, לא ישנה) על כל מדד שחישבתם בסעיפים הקודמים

תשובות סופיות:

- (1) שונות: 2.19, סטיית תקן: 1.48, טווח: 6.
- (2) א. סטיית תקן: 1.106. ב. טווח: 4.
- (3) א. ממוצע לא ישתנה, סטיית התקן תקטן.
ב. ממוצע לא ישתנה, סטיית התקן תגדל.
- (4) 10.8.
- (5) א. 3.05. ב. 1.16. ג. ממוצע: יקטן, סטיית התקן: תגדל.

סטטיסטיקה

פרק 6 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - טווח בין רבעוני

תוכן העניינים

1. טווח בינרבעוני.....23

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי פיזור – טווח בין רבעוני:

רקע:

הטווח הבין-רבעוני (יש הקוראים לו התחום הבין-רבעוני) נותן את הטווח בין הרבעונים בו נמצאים 50% מהתצפיות המרכזיות. הרעיון ליצור מדד פיזורי שלא רגיש לתצפיות החריגות ביותר. כדי לחשב את הטווח הבין-רבעוני יש למצוא את הרבעון התחתון והעליון של התפלגות התצפיות.

רבעון תחתון – ערך שמחלק את ההתפלגות לשניים.
25% מהמקרים נמוכים ממנו או שווים לו ו-75% מהמקרים גבוהים או שווים לו.
סימון: Q_1 .

רבעון עליון – ערך שמחלק את ההתפלגות לשניים.
75% מהמקרים נמוכים ממנו או שווים לו ו-25% מהמקרים גבוהים או שווים לו.
סימון: Q_3 .

הטווח הבין רבעוני הוא הפער בין שני הרבעונים: $IQR = Q_3 - Q_1$.

שלב ב: במציאת טווח בין-רבעוני בטבלת שכיחויות:

שלב א: נמצא את הרבעון התחתון: הוא הערך שהשכיחות היחסית המצטברת באחוזים עברה לראשונה את 25%.

שלב ב: נמצא את הרבעון העליון: הוא הערך שהשכיחות היחסית המצטברת באחוזים עברה לראשונה את 75%.

שלב ג: נמצא את הטווח הבין-רבעוני: נחסר את הרבעונים: $IQR = Q_3 - Q_1$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בסניף בנק 250 לקוחות. ספרו לכל לקוח את מספר תוכניות החיסכון שלו. מהו הטווח הבין-רבעוני של מספר תוכניות החיסכון בסניף?

| שכיחות יחסית מצטברת | שכיחות מצטברת | $f(x)$ | # תוכניות החיסכון |
|---------------------|---------------|--------|-------------------|
| | | 100 | 0 |
| | | 75 | 1 |
| | | 25 | 2 |
| | | 25 | 3 |
| | | 25 | 4 |

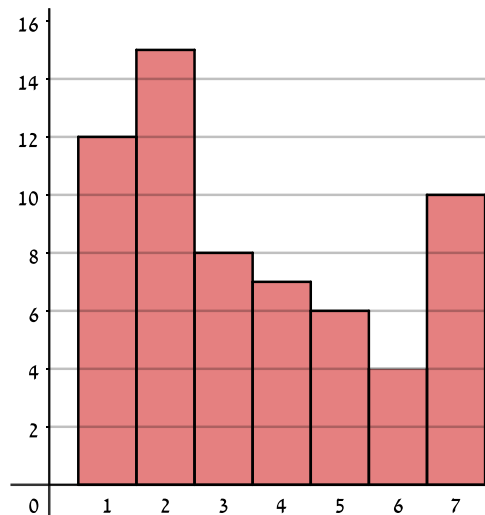
שאלות:

1) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן":

| מספר מכוניות למשפחה | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---------------------|----|-----|-----|-----|----|
| שכיחות | 65 | 150 | 220 | 140 | 55 |

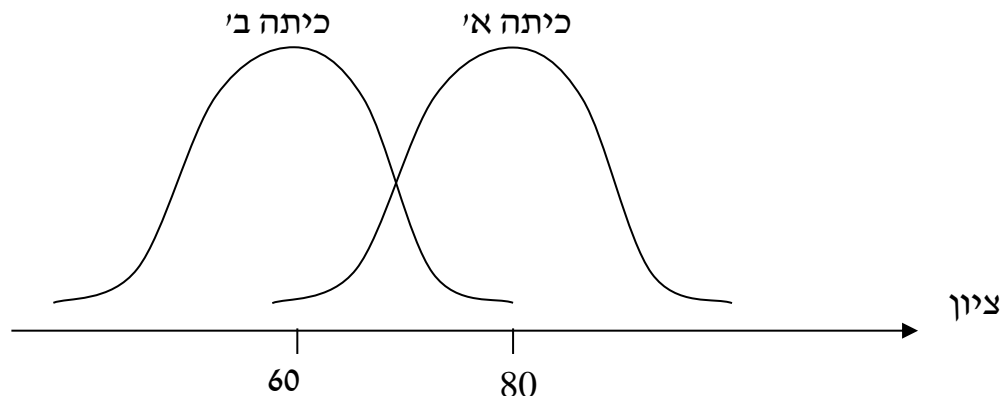
מהו הטווח הבין-רבעוני של מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן"?

2) בסקר שנעשה בדקו את מספר ימי המחלה השנתיים של מורים בארץ.



- א. מה מייצגים הערכים בציר האופקי?
- ב. מהו הטווח הבין-רבעוני של מספר ימי המחלה של המורים?
- ג. אם נוסף 25 מורים אשר הצהירו שמספר ימי המחלה השנתיים שלהם הוא 4 ימים, כיצד הדבר ישנה את הטווח הבין-רבעוני? הסבירו.
- ד. אם מסתבר שחלק מהמורים בסקר הצהירו שהם חלו 7 ימים בשנה אבל בפועל הם חלו 8 ימים, כיצד הדבר ישנה את הטווח הבין-רבעוני? הסבירו.

3) לפניך שתי עקומות המתארות את התפלגות הציונים בכל כיתה. באיזו כיתה הטווח הבין-רבעוני גדול יותר?



- א. כיתה א.
- ב. כיתה ב'.
- ג. לשתיהן אותו טווח בין-רבעוני.
- ד. לא ניתן לדעת, אין מספיק נתונים.

4) הוספת גודל קבוע לכל תצפיות סדרת נתונים:

- א. תגדיל את הטווח הבין-רבעוני.
- ב. תקטין את הטווח הבין-רבעוני.
- ג. לא תשנה הטווח הבין-רבעוני.
- ד. לא ניתן לדעת מה יקרה לטווח הבין-רבעוני.

5) חושב הטווח הבין-רבעוני עבור התפלגות מסוימת והתקבלה התוצאה אפס. לכן:

- א. לפחות 50% מהתצפיות זהות.
- ב. סטיית התקן היא אפס.
- ג. ההתפלגות היא סימטרית.
- ד. מצב זה כלל לא יתכן.

- 6) סניף מספר 543 של בנק "רווה" בדק ל-80 לקוחות את מספר הפעמים שכל לקוח נכנס לסניף הבנק במשך שבוע. התוצאות שהתקבלו הן:
- 50 אנשים נכנסו 0 פעמים לסניף.
 - 20 אנשים נכנסו פעם אחת לסניף.
 - 5 אנשים נכנסו פעמיים לסניף.
 - 5 אנשים נכנסו יותר מפעמיים.
- מהו הטווח הבין-רבעוני?
- א. 60.
 - ב. 2.
 - ג. 50.
 - ד. 1.

- 7) התפלגות הציונים במבחן ווקסלר היא סימטרית לכן:
- א. טווח הציונים הוא אפס.
 - ב. הטווח הבין רבעוני של הציונים אפס.
 - ג. סעיפים א ו-ב הם נכונים.
 - ד. אף סעיף אינו נכון.

תשובות סופיות:

- 1) 2.
- 2) א. מספר ימי המחלה השנתיים. ב. 3. ג. יקטן. ד. לא ישתנה.
- 3) ג.
- 4) ג.
- 5) א.
- 6) ד.
- 7) ד.

סטטיסטיקה

פרק 7 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - ממוצע סטיות מוחלטות
מהחציון

תוכן העניינים

1. כללי 27

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי פיזור – ממוצע סטיות מוחלטות מהחציון:

רקע:

מדד זה הוא מדד לפיזור בנוסף למדדים שנלמדו בפרקים הקודמים כמו סטיית התקן. המדד בודק את הפיזור הממוצע סביב החציון. הרעיון הוא למצוא בכמה התצפיות סוטות בערכן המוחלט מהחציון, בממוצע. כדי לחשב את המדד יש לחשב קודם כל את החציון.

אם מדובר ברשימה של תצפיות, הנוסחה לחישוב המדד:

$$MAD = \frac{\sum_i |X_i - Md|}{n}$$

אם מדובר בטבלת שכיחויות, הנוסחה לחישוב המדד:

$$MAD = \frac{\sum |X_i - Md| \cdot f(X)}{n}$$

כאשר מדובר על טבלת שכיחויות במחלקות ניקח בתור X את אמצע המחלקה.

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

נתונה רשימת המספרים הבאה: 2, 8, 7, 6, 3.
מה ממוצע הסטיות המוחלטות מהחציון?

שאלות:

- (1) נתונה רשימת המספרים הבאה: 3, 5, 6, 9, 12, 8. מה ממוצע הסטיות המוחלטות מהחציון?
- (2) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלויזיה שנספרו עבור כל משפחה בישוב מסוים:

| מספר משפחות | מספר מקלטים |
|-------------|-------------|
| 22 | 0 |
| 28 | 1 |
| 18 | 2 |
| 22 | 3 |
| 10 | 4 |

- א. חשבו את החציון.
- ב. חשב את ממוצע הסטיות המוחלטות מהחציון.
- ג. הסבירו ללא חישוב כיצד כל מדד שחושב היה משתנה, אם 5 משפחות שהיה להם מקלט יחיד היו מוכרים אותו.

תשובות סופיות:

- (1) 2.5
- (2) א. 1.5 ב. 1.14 ג. חציון לא ישתנה, ממוצע סטיות מוחלטות מהחציון יגדל.

סטטיסטיקה

פרק 8 - סטטיסטיקה תיאורית- מדדי מיקום יחסי-ציון תקן

תוכן העניינים

1. כללי 29

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי מיקום יחסי – ציון תקן:

רקע:

המטרה למדוד איך תצפית ממוקמת ביחס לשאר התצפיות בהתפלגות.

ציון תקן:

הנוסחה לציון תקן של תצפית היא: $Z = \frac{X - \bar{X}}{S}$.

- ציון התקן נותן כמה סטיות תקן סוטה התצפית מהממוצע. כלומר, ציון התקן מעיד על כמה סטיות תקן התצפית מעל או מתחת לממוצע:
- ציון תקן חיובי אומר שהתצפית מעל הממוצע.
 - ציון תקן שלילי אומר שהתצפית מתחת לממוצע.
 - ציון תקן אפס אומר שהתצפית בדיוק בממוצע.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במקום עבודה מסוים, ממוצע המשכורות הוא 8 אלף ₪, עם סטית תקן של אלפיים ₪. באותו מקום עבודה ההשכלה הממוצעת של העובדים הנה 14 שנים, עם סטית תקן של 1.5 שנים. ערן מרוויח במקום עבודה זה 11 אלף ₪ והשכלתו 16 שנים. מה ערן יותר, באופן יחסי, משכיל או משתכר?

שאלות:

- 1) תלמידי כיתה ח' ניגשו למבחן בלשון ולמבחן במתמטיקה. להלן התוצאות שהתקבלו:

| המקצוע | ממוצע | סטיית תקן |
|---------|-------|-----------|
| לשון | 74 | 12 |
| מתמטיקה | 80 | 16 |

עודד קיבל: 68 בלשון ו-70 במתמטיקה.

- א. באיזה מקצוע עודד טוב יותר באופן יחסי לשכבה שלו?
 ב. איזה ציון עודד צריך לקבל במתמטיקה כדי שיהיה שקול לציונו בלשון?

- 2) במפעל לייצור מצברים לרכב בדקו במשך 40 ימים את התפוקה היומית (מספר מצברים במאות) ואת מספר הפועלים שעבדו באותו היום. להלן טבלה המסכמת את המידע שנאסף על שני המשתנים:

| מספר פועלים | תפוקה | ממוצע |
|-------------|-------|-----------|
| 15 | 48 | |
| 2 | 10 | סטיית תקן |

- באחד הימים מתוך כלל הימים שנבדקו התפוקה הייתה 50 מאות מצברים ובאותו היום עבדו 13 פועלים.
 מה יותר חריג באותו היום, יחסית לשאר הימים שנבדקו: נתוני התפוקה או כמות הפועלים?
 א. התפוקה.
 ב. כמות הפועלים.
 ג. חריגים באותה מידה.
 ד. חסרים נתונים כדי לדעת זאת.

- 3) הגובה הממוצע של המתגייסים לצבא הוא 175 סנטימטר עם סטיית תקן של 10 סנטימטר. המשקל הממוצע הוא 66 ק"ג עם סטיית תקן של 8 ק"ג. ערך התגייס כשגובהו 180 ס"מ ומשקלו 59 ק"ג.
 א. במה ערך חריג יותר ביחס לשאר המתגייסים, גובהו או משקלו?
 ב. כמה ערך אמור לשקול כדי שמשקלו יהיה שקול לגובהו?

תשובות סופיות:

- 1) א. לשון. ב. 72.
 2) ב'.
 3) א. משקל. ב. 70.

סטטיסטיקה

פרק 9 - סטטיסטיקה תיאורית-אחוזונים בטבלה בדידה

תוכן העניינים

1. כללי 31

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי מיקום יחסי – אחוזונים בטבלה בדידה:

רקע:

האחוזון (המאון) ה- p הוא הערך בנתונים המחלק את הנתונים בצורה כזאת, שעד אליו (כולל) יש $p\%$ מהנתונים. מסמנים את האחוזון ה- p ב- X_p .

חישוב האחוזון מתוך נתונים בטבלת שכיחויות בדידה:

האחוזון הוא הערך שבו בפעם הראשונה השכיחות היחסית המצטברת (באחוזים) גדולה או שווה ל- $p\%$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בסניף בנק 250 לקוחות. ספרו לכל לקוח את מספר תוכניות החיסכון שלו:

| שכיחות יחסית מצטברת | שכיחות מצטברת | $F(x)$ | # תוכניות החיסכון |
|---------------------|---------------|--------|-------------------|
| | | 100 | 0 |
| | | 75 | 1 |
| | | 25 | 2 |
| | | 25 | 3 |
| | | 25 | 4 |

א. מצאו את האחוזון ה-25.

ב. מצאו את הערך ש-20% מהמקרים מעליו.

שאלות:

(1) להלן התפלגות של משתנה כלשהו:

| $F(x)$ | X |
|--------|-----|
| 10 | 0 |
| 40 | 1 |
| 30 | 2 |
| 15 | 3 |
| 5 | 4 |

מצאו להתפלגות את:

- א. האחוזון ה-60.
- ב. המאון ה-40.
- ג. העשירון העליון.
- ד. הטווח בין הרבעונים.

(2) להלן התפלגות מספר המכונניות למשפחה בישוב "הגורן":

| מספר מכונניות למשפחה | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------------------|----|-----|-----|-----|----|
| שכיחות | 65 | 150 | 220 | 140 | 55 |

חשבו את:

- א. העשירון התחתון.
- ב. האחוזון ה-30.
- ג. הערך ש-20% מהתצפית גדולות ממנו.
- ד. רבעון עליון.

תשובות סופיות:

- (1) א. 2 ב. 1 ג. 3 ד. 1
- (2) א. 1 ב. 2 ג. 4 ד. 4

סטטיסטיקה

פרק 10 - המשתנה המקרי הבדיד - טרנספורמציה לינארית

תוכן העניינים

1. כללי 33

המשתנה המקרי הבדיד – טרנספורמציה לינארית:

רקע:

טרנספורמציה לינארית היא מצב שבו מבצעים הכפלה של קבוע ו/או הוספה של קבוע על המשתנה המקורי (כולל גם חלוקה של קבוע והחסרה של קבוע).

בניסוח מתמטי נאמר כי אם משתנה אקראי Y מיוצג ע"י משתנה אקראי X כאשר a, b הם קבועים כלשהם: $Y = aX + b$, אזי מתקיימים:

$$E(Y) = aE(X) + b \quad (1)$$

$$V(Y) = a^2 \cdot V(X) \quad (2)$$

$$\sigma_Y = |a| \sigma_X \quad (3)$$

שלבי העבודה:

- (1) נזהה שמדובר בטרנספורמציה לינארית (שינוי קבוע לכל התצפיות).
- (2) נרשום את כלל הטרנספורמציה לפי נתוני השאלה.
- (3) נפשט את הכלל ונזהה את ערכי a ו- b .
- (4) נציב בנוסחאות שלעיל בהתאם למדדים שנשאלים.

דוגמה – הרולטה:

בהמשך לנתוני שאלת הרולטה נתון שעלות השתתפות במשחק 15 ₪. מהי התוחלת והשונויות של הרווח במשחק?

פתרון (בהקלטה):

חישבנו קודם ש: $E(X) = 22.5 = \mu$, $V(X) = 68.75 = \sigma^2$.

שאלות:

- (1) סטודנט ניגש ל-5 קורסים הסמסטר. נניח שכל קורס שסטודנט מסיים מזכה אותו ב-4 נקודות אקדמאיות. חשבו את התוחלת והשונות של סך הנקודות שיצבור הסטודנט כאשר נתון שתוחלת מספר הקורסים שיסיים היא 3.5 עם שונות 2.
- (2) תוחלת סכום הזכייה במשחק מזל הינה 10 עם שונות 3. הוחלט להכפיל את סכום הזכייה במשחק. עלות השתתפות במשחק הינה 12. מה התוחלת ומהי השונות של הרווח במשחק?
- (3) תוחלת של משתנה מקרי הינה 10 וסטית התקן 5. הוחלט להוסיף 2 למשתנה ולאחר מכן להעלות אותו ב-10%. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן לאחר השינוי?
- (4) X הינו משתנה מקרי. כמו כן נתון ש- $E(X) = 4$ ו- $V(X) = 3$.
 Y הינו משתנה מקרי חדש, עבורו: $Y = 7 - X$. חשבו את: $E(Y)$ ו- $V(Y)$.
- (5) אדם החליט לבטח את רכבו; שווי הרכב 100,000 ₪ להלן התביעות האפשריות והסתברותן: בהסתברות של 0.001 תהיה תביעה טוטאלוסט (כל שווי הרכב). בהסתברות של 0.02 תהיה תביעה בשווי מחצית משווי הרכב. בהסתברות של 5% תהיה תביעה בשווי רבע משווי הרכב. אחרת אין תביעה בכלל. החברה מאפשרת תביעה אחת בשנה. נסמן ב- X את גובה התביעה השנתית, באלפי₪.
- א. בנו את פונקציית ההסתברות של X .
- ב. חשבו את התוחלת והשונות של גובה התביעה.
- ג. פרמיית הביטוח היא 4,000 ₪. מהי התוחלת ומהי השונות של רווח חברת הביטוח לביטוח הרכב הנ"ל?

תשובות סופיות:

- (1) תוחלת: 14, שונות: 32.
- (2) תוחלת: 8, שונות: 12.
- (3) תוחלת: 13.2, סטיית תקן: 5.5.
- (4) תוחלת: 3, שונות: 3.
- (5) א. להלן טבלה: ב. תוחלת: 2350, שונות: $85,727.5^2$.

| | | | | |
|-------|------|------|-------|--------|
| 0 | 25 | 50 | 100 | X |
| 0.929 | 0.05 | 0.02 | 0.001 | $P(X)$ |

- ג. תוחלת: 1650, שונות: $85,727.5^2$.

סטטיסטיקה

פרק 11 - סטטיסטיקה תיאורית- תרשים קופסא

תוכן העניינים

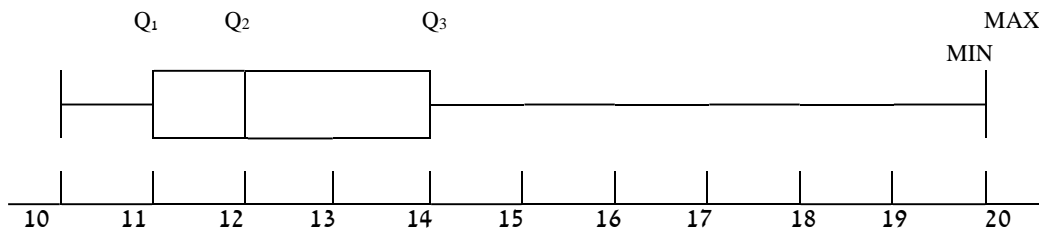
1. כללי 36

סטטיסטיקה תיאורית – תרשים קופסא (Boxplot):

רקע:

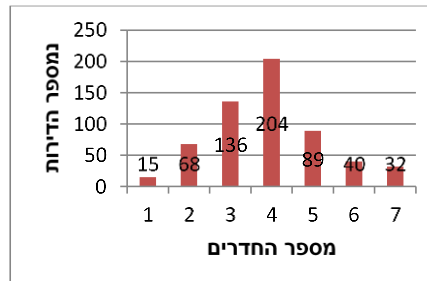
תרשים קופסא הינו תרשים שבעזרתו ניתן לבחון:

- (1) את המרכז של ההתפלגות על ידי החציון (Q_2).
- (2) את הפיזור של הנתונים (הטווח והטווח הבין רבעוני).
- (3) את צורת ההתפלגות (סימטרית ואסימטרית ימנית או אסימטרית שמאלית).



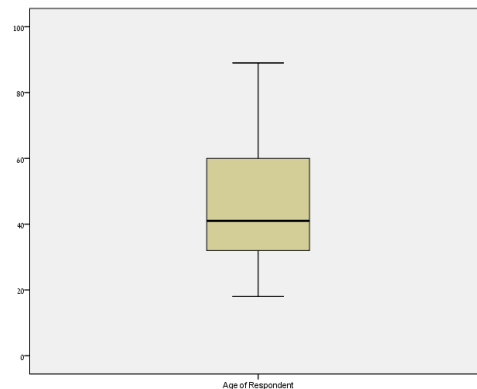
שאלות:

1) להלן התפלגות מספר החדרים לדירות שנבנו בשנת 2009 בעיר אשדוד:



- א. מצאו את החציון, הרבעון התחתון והרבעון העליון של ההתפלגות.
 ב. שרטטו דיאגרמת קופסא להתפלגות.
 ג. מה ניתן לומר על צורת ההתפלגות?

2) להלן דיאגרמת קופסא המתארת את התפלגות הגיל (בשנים) באוכלוסייה מסוימת:



- א. מה הגיל החציוני?
 ב. מה בערך טווח הגילאים?
 ג. מה ניתן להגיד על צורת ההתפלגות?

תשובות סופיות:

- 1) א. חציון: 4, רבעון תחתון: 3, רבעון עליון: 5.
 ב. ראה גרף מלא בסרטון וידאו. ג. כמעט סימטרית.
 2) א. חציון: 40. ב. טווח: 70. ג. התפלגות אסימטרית ימנית.

סטטיסטיקה

פרק 12 - סטטיסטיקה תיאורית שאלות אמריקאיות

תוכן העניינים

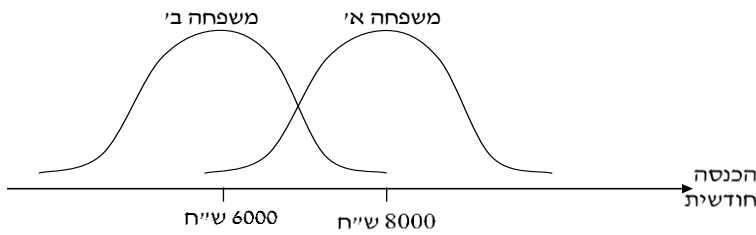
1. כללי 38

סטטיסטיקה תיאורית – שאלות אמריקאיות:

שאלות:

שאלות 1-3 מתייחסות לקטע הבא:

להלן שתי עקומות המתארות את התפלגות ההכנסות החודשיות של שתי משפחות שנבחרו באקראי:



- (1) לאיזו משפחה הכנסה שכיחה גבוהה יותר?
 א. משפחה א׳.
 ב. משפחה ב׳.
 ג. לשתיהן אותה הכנסה שכיחה.
 ד. לא ניתן לדעת – אין מספיק נתונים.
- (2) באיזו משפחה ההכנסה החציונית שווה להכנסה הממוצעת?
 א. משפחה א׳.
 ב. משפחה ב׳.
 ג. בשתיהן ההכנסה החציונית שווה להכנסה הממוצעת.
 ד. לא ניתן לדעת – אין מספיק נתונים.
- (3) באיזו משפחה סטית התקן של ההכנסה החודשית גבוהה יותר?
 א. משפחה א׳.
 ב. משפחה ב׳.
 ג. לשתיהן אותה סטית תקן.
 ד. לא ניתן לדעת – אין מספיק נתונים.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 4-6:

להלן נתונים חלקיים של טבלת שכיחויות:
כמו כן, נתון כי הממוצע הוא 1.66.

| $F(x)$ | x |
|--------|------|
| ? | 0 |
| 10 | 1 |
| 6 | 2 |
| 15 | 3 |
| ? | 4 |
| 50 | סה"כ |

(4) השכיח של הנתונים הוא:

- א. 0.
- ב. 15.
- ג. ישנם שני שכיחים: 0 ו-3.
- ד. על סמך הנתונים החלקיים אי אפשר לקבוע מה יהיה ערכו של השכיח.

(5) חציון הנתונים הוא:

- א. 2.
- ב. 1.5.
- ג. 25.5.
- ד. על סמך הנתונים החלקיים אי אפשר לקבוע מה יהיה ערכו של החציון.

(6) הטווח של הנתונים:

- א. 11.
- ב. 3.
- ג. 4.
- ד. על סמך הנתונים החלקיים אי אפשר לקבוע מה יהיה ערכו של החציון.

(7) בהתפלגות אסימטרית ימנית של משתנה כמותי רציף, הערך המתאים למאון ה-30, ציון התקן שלו הוא בהכרח:

- א. שלילי.
- ב. חיובי.
- ג. אפס.
- ד. לא ניתן לדעת ללא הנתונים.

- 8) סדרת נתונים סטטיסטיים מונה 10 תצפיות. נתון כי סדרת הנתונים סימטרית סביב הממוצע. ממוצע הסדרה-40 ושונות הסדרה-100. בשלב מאוחר יותר נוספו שתי תצפיות נוספות לסדרה : 50 ו-30. השונות של 12 התצפיות :
- א. תקטן.
 - ב. תגדל.
 - ג. לא תשתנה.
 - ד. לא ניתן לחשב את השונות ללא ידיעת התצפיות.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 9-10:

בחברת "טיק" המשכורת הממוצעת היא 4,600 ₪ וסטיית התקן של משכורת זו הינה 200 ₪. לאחר מו"מ עם ועד עובדי ההנהלה סוכם כי המשכורת תוכפל פי 1.5.

- 9) מהי המשכורת הממוצעת החדשה (ב-₪)?

- א. 2,300.
- ב. 6,900.
- ג. 4,650.
- ד. 4,600.

ה. חסרים נתונים כדי לדעת.

- 10) מהי סטיית התקן של המשכורת לאחר יישום המו"מ לגבי השכר (ב-₪)?

- א. 200.
- ב. 300.
- ג. 675.

ד. לא ניתן לדעת.

- 11) הוספת גודל קבוע לכל תצפיות סדרת נתונים :

- א. תגדיל את סטיית התקן.
- ב. תקטין את סטיית התקן.
- ג. לא תשנה את סטיית התקן.
- ד. לא ניתן לדעת.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 12-13:

להלן נתונים על ציוני תלמידים שנבחנו במועדים שונים בסטטיסטיקה:

| שם התלמיד | ציון | ממוצע הציונים במועד בו נבחן | סטיית התקן של הציונים במועד בו נבחן |
|-----------|------|-----------------------------|-------------------------------------|
| צבי | 50 | 50 | 12 |
| סטף | 82 | 80 | 5 |
| שרית | 65 | 60 | 15 |
| לובה | 60 | 63 | 1.5 |
| מיטב | 70 | 70 | 10 |

12 התלמיד הטוב ביותר ביחס לנבחנים באותו מועד בו נבחן הוא:

- א. מיטב.
- ב. צבי.
- ג. לובה.
- ד. שרית.
- ה. סטף.

13 פנינה נבחנה עם סטף וציון התקן שלה שווה לציון התקן של שרית לכן ציונה הוא:

- א. 80.55.
- ב. 65.
- ג. 80.
- ד. 81.66.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 14-17:

בבדיקת פתע של משרד הבריאות במפעל שוקולד, נמצא ש:

| שוקולד פגום | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------------|----|----|----|----|----|----|----|---|
| מס' קופסאות | 35 | 63 | 48 | 12 | 13 | 11 | 10 | 8 |

14 מהו החציון של מספר הפגומים בקופסא:

- א. 1.
- ב. 2.
- ג. 4.
- ד. לא ניתן לדעת.

15 מהו הרבעון התחתון של מספר הפגומים בקופסא?

- א. 1.
- ב. 2.
- ג. 3.
- ד. 4.
- ה. לא ניתן לדעת.

16) מספר הפגומים בקופסא הוא משתנה :

- א. סדר.
- ב. שמי.
- ג. כמותי בדיד.
- ד. כמותי רציף.

17) השכיח של מספר הפגומים בקופסא :

- א. 63.
- ב. 1.
- ג. 200.
- ד. לא ניתן לדעת.

18) ביחס לציר המספרים, רוב הערכים בהתפלגות א-סימטרית ימנית נמצאים :

- א. בערכים הגבוהים.
- ב. בחלוקה זהה בין הערכים הגבוהים והנמוכים.
- ג. בערכים הנמוכים.
- ד. לא ניתן לדעת.
- ה. אף לא תשובה מהני"ל נכונה.

19) בוצע מחקר על מספר העובדים בחברות מזון לעומת חברות תקשורת. החציון והממוצע בשתיהן שווה 8.

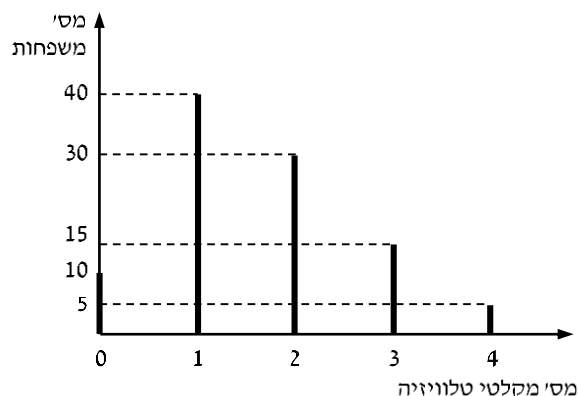
איזה מהטענות הבאות היא הנכונה והמלאה ביותר :

- א. השכיחות ב-2 החברות זהה אך שונה מ-8.
- ב. השכיח ב-2 החברות זהה אך לא ניתן לדעת מהו.
- ג. השכיח בשתי חברות הינו בהכרח 8.
- ד. שכיח בחברה אחת שונה מ-8 ובשנייה הוא 8.
- ה. אף תשובה אינה נכונה.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 20 עד 24 :

נערך סקר על מספר מקלטי הטלוויזיה הנמצאים בבית.

תוצאות הסקר נתונות בדיאגרמת מקלות הבאה :



(20) המשתנה הנחקר כאן הוא :

- א. משתנה שמי.
- ב. משתנה מסולם סדר.
- ג. משתנה כמותי בדיד.
- ד. משתנה כמותי רציף.

(21) הטווח של ההתפלגות הוא :

- א. 35.
- ב. 4.
- ג. 3.
- ד. 2.

(22) ממוצע מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה הוא :

- א. 1.65.
- ב. 1.5.
- ג. 1.
- ד. 2.

(23) השכיח של התפלגות זו היא :

- א. 40.
- ב. 1.5.
- ג. 1.
- ד. 2.

(24) מסתבר שיש בין 2 ל-5 משפחות נוספות שאין להם מקלטי טלוויזיה ויש לצרף את המשפחות הללו להתפלגות. כיצד הנתון זה ישפיע על סטיית התקן?

- א. יקטין אותו.
- ב. יגדיל אותו.
- ג. לא ישנה אותו.
- ד. אין לדעת.

תשובות סופיות:

| | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| (5) ב' | (4) ג' | (3) ג' | (2) ג' | (1) א' |
| (10) ב' | (9) ב' | (8) ג' | (7) א' | (6) ג' |
| (15) א' | (14) ב' | (13) ד' | (12) ה' | (11) ג' |
| (20) ג' | (19) ה' | (18) ג' | (17) ב' | (16) ג' |
| | (24) ב' | (23) ג' | (22) א' | (21) ב' |

סטטיסטיקה

פרק 13 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות נורמלית

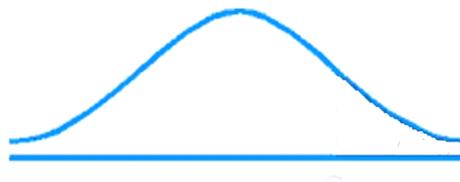
תוכן העניינים

1. כללי 45

התפלגויות רציפות מיוחדות – התפלגות נורמלית:

רקע:

התפלגות נורמלית הינה התפלגות של משתנה רציף. ישנם משתנים רציפים מסוימים שנהוג להתייחס אליהם כנורמליים כגון: זמן ייצור, משקל תינוק ביום היוולדו ועוד. פונקציית הצפיפות של ההתפלגות הנורמלית נראית כמו פעמון:



לעקומה זו קוראים גם עקומת גאוס ועקומה אחת נבדלת מהשנייה באמצעות הממוצע וסטיית התקן שלה.

אלה הם הפרמטרים שמאפיינים את ההתפלגות: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

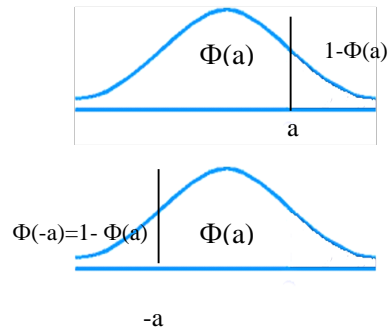
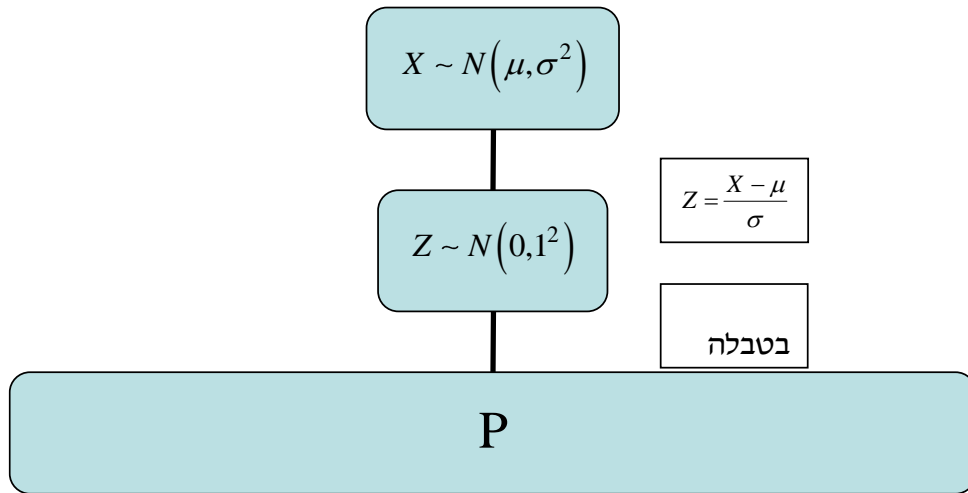
$$\text{נוסחת פונקציית הצפיפות: } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

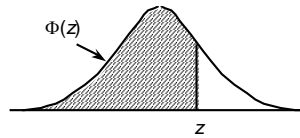
כדי לחשב הסתברויות בהתפלגות נורמלית יש לחשב את השטחים הרלוונטיים שמתחת לעקומה. כדי לחשב שטחים אלה נמיר כל התפלגות נורמלית להתפלגות נורמלית סטנדרטית על ידי תהליך הנקרא תקנון. התפלגות נורמלית סטנדרטית היא התפלגות נורמלית שהממוצע שלה הוא אפס וסטיית התקן היא אחת, והיא תסומן באות Z : $Z \sim N(0, 1^2)$.

$$\text{תהליך התקנון מבוצע על ידי הנוסחה הבאה: } Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

אחרי תקנון מקבלים ערך הנקרא ציון תקן. ציון התקן משמעו בכמה סטיות תקן הערך סוטה מהממוצע.

לאחר חישוב ציון התקן של ערך מסוים נעזרים בטבלה של ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית לחישוב השטח הרצוי, ובאופן כללי נתאר את הסכמה הבאה:



טבלת ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית – ערכי $\Phi(z)$:

| z | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0.0 | .5000 | .5040 | .5080 | .5120 | .5160 | .5199 | .5239 | .5279 | .5319 | .5359 |
| 0.1 | .5398 | .5438 | .5478 | .5517 | .5557 | .5596 | .5636 | .5675 | .5714 | .5753 |
| 0.2 | .5793 | .5832 | .5871 | .5910 | .5948 | .5987 | .6026 | .6064 | .6103 | .6141 |
| 0.3 | .6179 | .6217 | .6255 | .6293 | .6331 | .6368 | .6406 | .6443 | .6480 | .6517 |
| 0.4 | .6554 | .6591 | .6628 | .6664 | .6700 | .6736 | .6772 | .6808 | .6844 | .6879 |
| 0.5 | .6915 | .6950 | .6985 | .7019 | .7054 | .7088 | .7123 | .7157 | .7190 | .7224 |
| 0.6 | .7257 | .7291 | .7324 | .7357 | .7389 | .7422 | .7454 | .7486 | .7517 | .7549 |
| 0.7 | .7580 | .7611 | .7642 | .7673 | .7704 | .7734 | .7764 | .7794 | .7823 | .7852 |
| 0.8 | .7881 | .7910 | .7939 | .7967 | .7995 | .8023 | .8051 | .8078 | .8106 | .8133 |
| 0.9 | .8159 | .8186 | .8212 | .8238 | .8264 | .8289 | .8315 | .8340 | .8365 | .8389 |
| 1.0 | .8413 | .8438 | .8461 | .8485 | .8508 | .8531 | .8554 | .8577 | .8599 | .8621 |
| 1.1 | .8643 | .8665 | .8686 | .8708 | .8729 | .8749 | .8770 | .8790 | .8810 | .8830 |
| 1.2 | .8849 | .8869 | .8888 | .8907 | .8925 | .8944 | .8962 | .8980 | .8997 | .9015 |
| 1.3 | .9032 | .9049 | .9066 | .9082 | .9099 | .9115 | .9131 | .9147 | .9162 | .9177 |
| 1.4 | .9192 | .9207 | .9222 | .9236 | .9251 | .9265 | .9279 | .9292 | .9306 | .9319 |
| 1.5 | .9332 | .9345 | .9357 | .9370 | .9382 | .9394 | .9406 | .9418 | .9429 | .9441 |
| 1.6 | .9452 | .9463 | .9474 | .9484 | .9495 | .9505 | .9515 | .9525 | .9535 | .9545 |
| 1.7 | .9554 | .9564 | .9573 | .9582 | .9591 | .9599 | .9608 | .9616 | .9625 | .9633 |
| 1.8 | .9641 | .9649 | .9656 | .9664 | .9671 | .9678 | .9686 | .9693 | .9699 | .9706 |
| 1.9 | .9713 | .9719 | .9726 | .9732 | .9738 | .9744 | .9750 | .9756 | .9761 | .9767 |
| 2.0 | .9772 | .9778 | .9783 | .9788 | .9793 | .9798 | .9803 | .9808 | .9812 | .9817 |
| 2.1 | .9821 | .9826 | .9830 | .9834 | .9838 | .9842 | .9846 | .9850 | .9854 | .9857 |
| 2.2 | .9861 | .9864 | .9868 | .9871 | .9875 | .9878 | .9881 | .9884 | .9887 | .9890 |
| 2.3 | .9893 | .9896 | .9898 | .9901 | .9904 | .9906 | .9909 | .9911 | .9913 | .9916 |
| 2.4 | .9918 | .9920 | .9922 | .9925 | .9927 | .9929 | .9931 | .9932 | .9934 | .9936 |
| 2.5 | .9938 | .9940 | .9941 | .9943 | .9945 | .9946 | .9948 | .9949 | .9951 | .9952 |
| 2.6 | .9953 | .9955 | .9956 | .9957 | .9959 | .9960 | .9961 | .9962 | .9963 | .9964 |
| 2.7 | .9965 | .9966 | .9967 | .9968 | .9969 | .9970 | .9971 | .9972 | .9973 | .9974 |
| 2.8 | .9974 | .9975 | .9976 | .9977 | .9977 | .9978 | .9979 | .9979 | .9980 | .9981 |
| 2.9 | .9981 | .9982 | .9982 | .9983 | .9984 | .9984 | .9985 | .9985 | .9986 | .9986 |
| 3.0 | .9987 | .9987 | .9987 | .9988 | .9988 | .9989 | .9989 | .9989 | .9990 | .9990 |
| 3.1 | .9990 | .9991 | .9991 | .9991 | .9992 | .9992 | .9992 | .9992 | .9993 | .9993 |
| 3.2 | .9993 | .9993 | .9994 | .9994 | .9994 | .9994 | .9994 | .9995 | .9995 | .9995 |
| 3.3 | .9995 | .9995 | .9995 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9997 |
| 3.4 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9998 |

| z | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 | 3.090 | 3.291 | 3.891 | 4.417 |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|---------|----------|
| $\Phi(z)$ | 0.90 | 0.95 | 0.975 | 0.99 | 0.995 | 0.999 | 0.9995 | 0.99995 | 0.999995 |

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

משקל חפיסות שוקולד המיוצרות בחברה מתפלג נורמלית עם ממוצע 100 גרם בסטיית תקן של 8 גרם.

- (1) מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מתחת ל-110 גרם?
- (2) מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מעל 110 גרם?
- (3) מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מתחת ל 92 גרם?
- (4) מהו המשקל ש-90% מהחפיסות בקו הייצור שוקלים פחות מהם?

שאלות:

- (1) הגובה של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 170 ס"מ וסטית תקן של 10 ס"מ.
- מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל-182.4 ס"מ?
 - מה אחוז האנשים שגובהם מעל 190 ס"מ?
 - מה אחוז האנשים שגובהם בדיוק 173.6 ס"מ?
 - מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל-170 ס"מ?
 - מה אחוז האנשים שגובהם לכל היותר 170 ס"מ?
- (2) נתון שהזמן שלוקח לתרופה מסוימת להשפיע מתפלג נורמלית עם ממוצע של 30 דקות ושונות של 9 דקות רבועות.
- מהי פרופורציית המקרים בהן התרופה תעזור אחרי יותר משעה?
 - מה אחוז מהמקרים שבהן התרופה תעזור בין 35 ל-37 דקות?
 - מה הסיכוי שהתרופה תעזור בדיוק תוך 36 דקות?
 - מה שיעור המקרים שבהן ההשפעה של התרופה תסטה מ-30 דקות בפחות מ-3 דקות?
- (3) המשקל של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 60 ק"ג וסטית תקן של 8 ק"ג.
- מה אחוז האנשים שמשקלם נמוך מ-55 ק"ג?
 - מהי פרופורציית האנשים באוכלוסייה שמשקלם לפחות 50 ק"ג?
 - מהי השכיחות היחסית של האנשים באוכלוסייה שמשקלם בין 60 ל-70 ק"ג?
 - לאיזה חלק מהאוכלוסייה משקל הסוטה מהמשקל הממוצע בלא יותר מ-4 ק"ג?
 - מה הסיכוי שאדם אקראי ישקול מתחת ל-140 ק"ג?
- (4) משקל תינוקות ביום היוולדם מתפלג נורמלית עם ממוצע של 3300 גרם וסטית תקן 400 גרם.
- מצאו את העשירון העליון.
 - מצאו את האחוזון ה-95.
 - מצאו את העשירון התחתון.

- (5) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמלית עם ממוצע 100 ושונויות 225.
- מה העשירון העליון של הציונים במבחן האינטליגנציה?
 - מה העשירון התחתון של ההתפלגות?
 - מהו הציון ש-20% מהנבחנים מקבלים מעליו?
 - מהו האחוזון ה-20?
 - מהו הציון ש-5% מהנבחנים מקבלים מתחתיו?
- (6) נפח משקה בבקבוק מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 20 מ"ל, ונתון ש-33% מהבקבוקים בעלי נפח שעולה על 508.8 מ"ל.
- מה ממוצע נפח משקה בבקבוק?
 - 5% מהבקבוקים המיוצרים עם הנפח הגבוה ביותר נשלחים לבדיקה, החל מאיזה נפח שולחים בקבוק לבדיקה?
 - 1% מהבקבוקים עם הנפח הקטן ביותר נתרמים לצדקה, מהו הנפח המקסימלי לצדקה?
- (7) אורך חיים של מכשיר מתפלג נורמלית. ידוע שמחצית מהמכשירים חיים פחות מ-500 שעות, כמו כן ידוע ש-67% מהמכשירים חיים פחות מ-544 שעות.
- מהו ממוצע אורך חיי מכשיר?
 - מהי סטיית בתקן של אורך חיי מכשיר?
 - מה הסיכוי שמכשיר אקראי יחיה פחות מ-460 שעות?
 - מהו המאיון העליון של אורח חיי מכשיר?
 - 1% מהמכשירים בעלי אורך החיים הקצר ביותר נשלח למעבדה לבדיקה מעמיקה. מהו אורך החיים המקסימלי לשליחת מכשיר למעבדה?
- (8) להלן שלוש התפלגויות נורמליות של שלוש קבוצות שונות ששורטטו באותה מערכת צירים. ההתפלגויות מוספרו כדי להבדיל ביניהן.
- לאיזו התפלגות הממוצע הגבוה ביותר?
 - במה מבין המדדים הבאים התפלגות 1 ו-2 זהות?
 - בעשירון העליון.
 - בממוצע.
 - בשונויות.
 - לאיזו התפלגות סטיית התקן הקטנה ביותר?
 - 1.
 - 2.
 - 3.
 - אין לדעת.



- 9** הזמן שלוקח לאדם להגיע לעבודתו מתפלג נורמלית עם ממוצע של 40 דקות וסטית תקן של 5 דקות.
- א. מה ההסתברות שמשך הנסיעה של האדם לעבודתו יהיה לפחות שלושת רבעי השעה?
- ב. אדם יצא לעבודתו בשעה 08:10 מביתו. הוא צריך להגיע לעבודתו בשעה 09:00. מה הסיכוי שיאחר לעבודתו?
- ג. אם ידוע שזמן נסיעתו לעבודה היה יותר משלושת רבעי השעה. מה ההסתברות שזמן הנסיעה הכולל יהיה פחות מ-50 דקות?
- ד. מה הסיכוי שבשבוע (חמישה ימי עבודה) בדיוק פעם אחת יהיה זמן הנסיעה לפחות שלושת רבעי השעה?
- 10** אורך שיר אקראי המשודר ברדיו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 3.5 דקות וסטית תקן של שלושים שניות.
- א. מה ההסתברות שאורך של שיר אקראי המנוגן ברדיו יהיה בין 3 ל-2.5 דקות?
- ב. מהו הטווח הבין רבעוני של אורך שיר המשודר ברדיו?
- ג. ביום מסוים מנוגנים 200 שירים ברדיו. כמה שירים מתוכם תצפה שיהיו באורך הנמוך מ-3.5 דקות?
- ד. בשעה מסוימת שודרו 8 שירים. מה ההסתברות שרבע מהם בדיוק היו ארוכים מ-4 דקות והיתר לא?

תשובות סופיות:

| | | | | | |
|--------|-----------|-----------|------------|-----------|-----|
| ה. 50% | ד. 50% | ג. 0 | ב. 2.28% | א. 89.25% | (1 |
| | ד. 68.26% | ג. 0% | ב. 3.76% | א. 0% | (2 |
| | ד. 0.383 | ג. 39.44% | ב. 89.44% | א. 26.43% | (3 |
| | | | | ה. 100% | |
| | | ג. 2787.2 | ב. 3958 | א. 3812.8 | (4 |
| | ד. 87.4 | ג. 112.6 | ב. 80.8 | א. 119.2 | (5 |
| | | ג. 453.48 | ב. 532.9 | א. 500 | (6 |
| | ד. 733 | ג. 0.3446 | ב. 100 | א. 500 | (7 |
| | | | | ה. 267 | |
| | | ג. 1 | ב. בממוצע. | א. 3 | (8 |
| | ד. 0.3975 | ג. 0.8563 | ב. 0.0228 | א. 0.1587 | (9 |
| | ד. 0.25 | ג. 100 | ב. 0.675 | א. 0.1359 | (10 |

סטטיסטיקה

פרק 14 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות בינומית

תוכן העניינים

1. כללי 53

התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות בינומית:

רקע:

נגדיר את המושג ניסוי ברנולי:
 ניסוי ברנולי הנו ניסוי שיש לו שתי תוצאות אפשריות: "הצלחה" ו"כישלון".
 למשל מוצר פגום או תקין, אדם עובד או מובטל, עץ או פלי בהטלת מטבע וכדומה.
 בהתפלגות בינומית חוזרים על אותו ניסוי ברנולי n פעמים באופן בלתי תלוי זה בזה.
 מגדירים את X להיות מספר ההצלחות שהתקבלו בסך הכול. נסמן ב- P את הסיכוי
 להצלחה בניסוי בודד, וב- Q את הסיכוי לכישלון בניסוי בודד.
 ואז נגיד ש: $X \sim B(n, p)$.

פונקציית ההסתברות של X :

$$P(X = K) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}; \quad n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1; \quad 0! = 1$$

לגודל: $\binom{n}{k}$: ניתן לחשב באמצעות המחשבון.

$$E(X) = np \quad \text{תוחלת:}$$

$$V(X) = npq \quad \text{שונות:}$$

שימו לב, כדי לזהות שמדובר בהתפלגות בינומית צריכים להתקיים כל התנאים הבאים:

- (1) חוזרים על אותו ניסוי ברנולי באופן בלתי תלוי זה בזה.
- (2) חוזרים על הניסוי n פעמים.
- (3) X – מוגדר כמספר ההצלחות המתקבלות בסך הכול.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במדינה מסוימת ל-80% מהתושבים יש רישיון נהיגה.
 נבחרו 10 תושבים אקראיים מהמדינה.

- א. מה ההסתברות שבדיוק ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?
- ב. מה ההסתברות שלפחות ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?
- ג. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר התושבים שנדגמו ושיש להם רישיון נהיגה?

שאלות:

- (1) במדינה 10% מהאוכלוסייה מובטלת. נבחרו 5 אנשים באקראי מאותה אוכלוסייה. נגדיר את X להיות מספר המובטלים שהתקבלו במדגם.
- מהי ההתפלגות של X ?
 - מה ההסתברות שיהיה בדיוק מובטל אחד?
 - מה ההסתברות שכולם יעבדו במדגם?
 - מה ההסתברות שלושה יעבדו במדגם?
 - מה ההסתברות שלפחות אחד יהיה מובטל?
 - מה תוחלת ומהי השונות של מספר המובטלים במדגם?

- (2) על פי נתוני משרד התקשורת ל-70% מהאוכלוסייה יש סמארטפון. נבחרו 10 אנשים באקראי. נגדיר את X כמספר האנשים שנדגמו עם סמארטפון.
- מהי ההתפלגות של X ? הסבירו.
 - מה ההסתברות שבמדגם ל-8 אנשים יש סמארט-פון?
 - מה ההסתברות שבמדגם לפחות ל-9 יהיו סמארט-פון?
 - מה התוחלת ומה סטיית התקן של מספר האנשים שנדגמו ולהם סמארט-פון?

- (3) במדינה מסוימת התפלגות ההשכלה בקרב האוכלוסייה מעל גיל 30 היא כזו:

| השכלה | נמוכה | תיכונית | תואר I | תואר II ומעלה |
|-----------|-------|---------|--------|---------------|
| פרופורציה | 0.1 | 0.6 | 0.2 | 0.1 |

- נבחרו 20 אנשים אקראיים מעל גיל 30.
- מה ההסתברות ש-5 מהם אקדמאים?
 - מה התוחלת של מס' בעלי השכלה הנמוכה?
- (4) במכללה מסוימת 20% מהסטודנטים גרים בת"א. מבין הסטודנטים שגרים בת"א 30% מגיעים ברכבם, ומבין הסטודנטים שלא גרים בת"א 50% מגיעים ברכבם למכללה.
- השומר בשער המכללה בודק לכל סטודנט את תיקו בהיכנסו למכללה. מה ההסתברות שבקרב 5 סטודנטים שנבדקו ע"י השומר רק 1 מתוכם הגיע למכללה ברכבו?
 - בהמשך לסעיף הקודם מה ההסתברות שרוב הסטודנטים בקרב ה-5 הגיעו למכללה ברכבם?

תשובות סופיות:

- (1) א. $X \sim B(n=5, p=0.1)$ ב. 0.32805 ג. 0.59049
- ד. 0.0729 ה. 0.40954 ו. תוחלת: 0.5, שונות: 0.45
- (2) א. 0.2335 ב. 0.1493 ד. תוחלת: 7, סטיית תקן: 1.449
- (3) א. 0.1789 ב. 2
- (4) א. 0.1956 ב. 0.4253

סטטיסטיקה

פרק 15 - הסקה סטטיסטית - הקדמה

תוכן העניינים

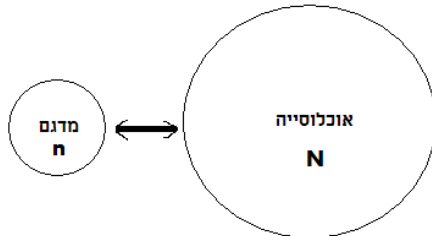
1. כללי 56

הסקה סטטיסטית – הקדמה:

רקע:

אוכלוסייה:

קבוצה שאליה מפנים שאלה מחקרית. למשל, חברת תרופות שמעוניינת לפתח תרופה למחלת הסוכרת מתעניינת באוכלוסיית חולי הסוכרת בעולם.



מדגם:

חלק מתוך האוכלוסייה. למשל, אם נדגום באקראי 10 אנשים מתוך חולי הסוכרת אז זהו מדגם מתוך אוכלוסיית חולי הסוכרת.

במקרים רבים אין אפשרות לחקור את כל האוכלוסייה כיוון שאין גישה לכולה, היא גדולה מידי, או מוגבלים בזמן ובאמצעים טכניים ולכן מבצעים מדגם במטרה לבצע הסקה סטטיסטית מהמדגם לאוכלוסייה. הדגימה בקורס תהיה דגימה מקרית - הכוונה לדגימה שבה לכל תצפית באוכלוסייה יש את אותו סיכוי להיכלל במדגם.

סטטיסטי:

גודל המחושב על המדגם.

פרמטר:

גודל המתאר את האוכלוסייה.

הסימונים לפרמטר וסטטיסטי הם שונים:

| פרמטר (אוכלוסייה) | סטטיסטי (מדגם) | ממוצע |
|-------------------|----------------|--------------------------|
| μ | \bar{X} | |
| P | \hat{p} | פרופורציה (שכיחות יחסית) |

פרמטר הוא גודל קבוע גם אם אנו לא יודעים אותו סטטיסטי הוא משתנה ממדגם למדגם ולכן יש לו התפלגות הנקראת התפלגות הדגימה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

25% מאזרחי המדינה תומכים בהצעת החוק של חבר כנסת מסוים. הוחלט לדגום 200 אזרחים ומתוכם לבדוק מהו אחוז התומכים בהצעת החוק.

א. מי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מה הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

ה. מהו הסטטיסטי שמתכננים להוציא מהמדגם?

ו. האם הפרמטר או הסטטיסטי הוא משתנה מקרי?

שאלות:

- (1) מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.
- א. מי האוכלוסייה?
 - ב. מה המשתנה?
 - ג. מהם הפרמטרים?
 - ד. מהו גודל המדגם?

- (2) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה בישוב "העוגן". נגדיר את X להיות מספר המקלטים של משפחה אקראית. מתכננים לדגום מאוכלוסייה זו 4 משפחות ולהתבונן בממוצע מספר מקלטי הטלוויזיה במדגם.
- א. מיהי האוכלוסייה ומהו המשתנה הנחקר?
 - ב. מהו הסטטיסטי שיילקח מהמדגם ומה סימונו?

| מספר מקלטים | מספר המשפחות |
|-------------|--------------------|
| 0 | 50 |
| 1 | 250 |
| 2 | 350 |
| 3 | 300 |
| 4 | 50 |
| | סך הכול $N = 1000$ |

- (3) נתון כי 20% מהשכירים במדינה הם אקדמאיים. נבחרו באקראי 10 שכירים באותה אוכלוסייה ומתכננים לפרסם את מספר האקדמאיים שנדגמו.
- א. מהי האוכלוסייה?
 - ב. מה המשתנה באוכלוסייה?
 - ג. מהם הפרמטרים?
 - ד. מהו הסטטיסטי?

תשובות סופיות:

- (1) א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון. ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15. ד. 2.
- (2) א. האוכלוסייה: 1000 משפחות בישוב העוגן, המשתנה הנחקר: מס' מקלטים. ב. \bar{X} = ממוצע מדגם.
- (3) א. השכירים במדינה. ב. השכלה: אקדמאי, לא אקדמאי. ג. שיעור ההצלחות באוכלוסייה: 0.2. ג. מס' האקדמאים במדגם.

סטטיסטיקה

פרק 16 - התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי

תוכן העניינים

1. התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי 59
2. התפלגות מספר ההצלחות במדגם - קירוב נורמלי להתפלגות הבינומית 65
3. התפלגות פרופורציית ההצלחות במדגם 70

התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי:

רקע:

בפרק זה נדון בהתפלגות של ממוצע המדגם: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$

מכיוון שממדגם למדגם אנו יכולים לקבל ממוצע מדגם שונה, אזי ממוצע המדגם הוא משתנה מקרי ויש לו התפלגות.

גדלים המתארים התפלגות כלשהי או אוכלוסייה כלשהי נקראים פרמטרים.

להלן רשימה של פרמטרים החשובים לפרק זה:

ממוצע האוכלוסייה נסמן ב- μ (נקרא גם תוחלת).

שונות אוכלוסייה נסמן ב- σ^2 .

סטיית תקן של אוכלוסייה: σ .

תכונות התפלגות:

ממוצע כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לממוצע האוכלוסייה: $E(\bar{x}) = \mu_x = \mu$.

שונות כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לשונות האוכלוסייה מחולק ב- n .

תכונה זו נכונה רק במדגם מקרי: $V(\bar{x}) = \sigma_x^2 = \frac{\sigma^2}{n}$.

יש יחס הפוך בין גודל המדגם לבין שונות ממוצעי המדגם.

אם נוציא שורש לשונות נקבל סטיית תקן של ממוצע המדגם שנקראת גם

טעות תקן: $\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

השכר הממוצע במשק הינו 9000 ₪ עם סטיית תקן של 4000. דגמו באקראי 25 עובדים.

א. מיהי אוכלוסיית המחקר? מהו המשתנה הנחקר?

ב. מהם הפרמטרים של האוכלוסייה?

ג. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?

דגימה מהתפלגות נורמאלית:

אם נדגום מתוך אוכלוסייה שהמשתנה בה מתפלג נורמאלית עם ממוצע μ ושוונות σ^2 .

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

ממוצע המדגם גם יתפלג נורמאלית:

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.
מה ההסתברות שבמדגם של 4 תינוקות אקראיים בעת הולדתם המשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-3.5 ק"ג?

משפט הגבול המרכזי:

אם אוכלוסייה מתפלגת כלשהו עם ממוצע μ ושוונות σ^2 אזי עבור מדגם מספיק

$$\bar{x} \rightsquigarrow N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad (n \geq 30)$$

ממוצע המדגם מתפלג בקירוב נורמאלי:

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם וסטיית תקן של 4 גרם.
דגמו מקו הייצור 36 חפיסות שוקולד אקראיות.
מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד שנדגמו יהיה מתחת ל-102 גרם?

שאלות:

- (1) מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.
- מיהי האוכלוסייה?
 - מה המשתנה?
 - מהם הפרמטרים?
 - מהו גודל המדגם?
 - מהו תוחלת ממוצע המדגם?
 - מהי טעות התקן?
- (2) משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.
- מה ההסתברות שתינוק אקראי בעת הלידה ישקול פחות מ-3800 גרם? נתון כי ביום מסוים נולדו 4 תינוקות.
 - מה ההסתברות שהמשקל הממוצע שלהם יעלה על 4 ק"ג?
 - מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-2.5 ק"ג?
 - מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה רחוק מהתוחלת בלא יותר מ-50 גרם?
 - הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם היה מדובר על יותר מ-4 תינוקות?
- (3) הגובה של המתגייסים לצה"ל מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 175 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ. ביום מסוים התגייסו 16 חיילים.
- מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה לפחות 190 ס"מ?
 - מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה בדיוק 180 ס"מ?
 - מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יסטה מתוחלת הגבהים בפחות מ-5 ס"מ?
 - מהו הגובה שבהסתברות של 90% הגובה הממוצע של המדגם יהיה נמוך ממנו?

- 4) הזמן הממוצע שלוקח לאדם להגיע לעבודתו 30 דקות עם שונות של 16 דקות רבועות. האדם נוסע לעבודה במשך שבוע 5 פעמים. לצורך הפתרון הניחו שזמן הנסיעה לעבודה מתפלג נורמאלית.
- א. מה ההסתברות שבמשך שבוע משך הנסיעה הממוצע יהיה מעל 33 דקות?
 ב. מהו הזמן שבהסתברות של 90% ממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה גבוה ממנו?
 ג. מה ההסתברות שממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה מרוחק מ-30 דקות בלפחות 2 דקות?
 ד. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם האדם היה נוסע לעבודה 6 פעמים בשבוע?
- 5) נפח היין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 סמ"ק וסטיית תקן של 10 סמ"ק.
- א. בארגו 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגו יהיה בדיוק 755 סמ"ק?
 ב. בארגו 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגו יהיה יותר מ-755 סמ"ק?
 ג. בארגו 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגו יהיה לפחות 755 סמ"ק?
 ד. בקבוקי היין שבארגו נמזגים לקערה עם קיבולת של שלושה ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהקערה?
- 6) משתנה מתפלג נורמאלית עם תוחלת 80 וסטיית תקן 4.
- א. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה כאשר גודל המדגם הוא 9?
 ב. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה שגודל המדגם הוא 16?
 הסבר את ההבדל בתשובות של שני הסעיפים.
- 7) לפי הערכות הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה השכר הממוצע במשק הוא 8000 ₪ עם סטיית תקן של 3000 ₪. מה ההסתברות שבמדגם מקרי של 100 עובדים השכר הממוצע יהיה יותר מ-8500 ₪?

8) אורך צינור שמפעל מייצר הינו עם ממוצע של 70 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ.

א. נלקחו באקראי 100 מוטות, מה ההסתברות שממוצע אורך המוטות יהיה בין 68 ל 78 ס"מ?

ב. יש לחבר 2 בניינים באמצעות מוטות. המרחק בין שני הבניינים הינו 7200 ס"מ. מה ההסתברות ש 100 המוטות יספיקו למלאכה?

ג. מה צריך להיות גודל המדגם המינימאלי, כדי שבהסתברות של 5% ממוצע המדגם יהיה קטן מ-69 ס"מ. היעזרו במשפט הגבול המרכזי.

9) נתון ש- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. דגמו 5 תצפיות מאותה התפלגות והתבוננו בממוצע

המדגם \bar{X} . לכן: $P(\bar{X} > \mu)$ יהיה (בחרו בתשובה הנכונה):

א. 0.

ב. 0.5.

ג. 1.

ד. לא ניתן לדעת.

10) נתון ש- X מתפלג כלשהו עם תוחלת μ ושונויות σ^2 .

החליטו לבצע מדגם בגודל 200 מתוך ההפלגות הנתונה לפי משפט הגבול המרכזי מתקיים (בחרו בתשובה הנכונה):

א. $X \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$.

ב. $\mu \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$.

ג. $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$.

ד. $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$.

11) נתון ש- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. אם נדגום n תצפיות מתוך ההתפלגות ונגדיר: $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$,

אזי (בחרו בתשובה הנכונה):

א. μ ו- \bar{X} יהיו משתנים מקריים.

ב. μ יהיה משתנה מקרי ו- \bar{X} קבוע.

ג. \bar{X} יהיה משתנה מקרי ו- μ קבוע.

ד. μ ו- \bar{X} יהיו קבועים.

תשובות סופיות:

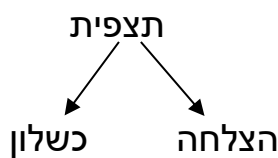
- (1) א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון. ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15. ד. 2. ה. 78. ו. 10.6.
- (2) א. 0.8413 ב. 0.0013 ג. 0. ד. 0.1974.
- (3) א. 0 ב. 0 ג. 0.9544 ד. 178.205.
- (4) א. 0.0465 ב. 27.71 ג. 0.2628 ד. התשובה הייתה קטנה.
- (5) א. 0 ב. 0.1587 ג. 0.1587 ד. 0.5.
- (6) א. 0.5468 ב. 0.6826
- (7) 0.0475
- (8) א. 0.9772 ב. 0.0228 ג. 271.
- (9) ב'.
- (10) ד'.
- (11) ג'.

התפלגות מספר ההצלחות במדגם – קירוב נורמלי להתפלגות הבינומית:

רקע:

תזכורת על התפלגות בינומית:

בפרק זה נדון בהתפלגות מספר ההצלחות במדגם אקראי (תצפיות בלתי תלויות זו בזו). את מספר ההצלחות במדגם נסמן ב- Y . מחלקים כל תצפית במדגם להצלחה או כישלון.



כעת מה שמשתנה מתצפית לתצפית הוא משתנה דיכוטומי (משתנה שיש לו שני ערכים). הסיכוי להצלחה יסומן עם הפרמטר p וכישלון יסומן ע"י הפרמטר: $q = 1 - p$. מבצעים מדגם אקראי בגודל n : $Y \sim B(n, p)$.

פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הבינומית היא: $p(y = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$,

תוחלת: $E(y) = np$.

שונות: $V(y) = npq$.

קירוב נורמלי עבור התפלגות בינומית:

אם לפנינו התפלגות בינומית: $Y \sim B(n, p)$, ומתקיים ש:

$$1. \quad n \cdot p \geq 5$$

$$2. \quad n \cdot (1 - p) \geq 5$$

$$y \rightsquigarrow N(np, npq)$$

$$\text{אז: } Z_y = \frac{y - np}{\sqrt{npq}}$$

תיקון רציפות:

כאשר משתמשים בקירוב הנורמלי להתפלגות הבינומית יש לבצע תיקון רציפות. הסיבה שעוברים כאן מהתפלגות בדידה להתפלגות נורמלית שהיא התפלגות רציפה. על פי הכללים הבאים:

$$1. \quad p(Y = a) \cong p\left(a - \frac{1}{2} \leq Y \leq a + \frac{1}{2}\right)$$

$$2. \quad P(Y \leq a) \cong P(Y \leq a + 0.5)$$

$$3. \quad P(Y \geq a) \cong P(Y \geq a - 0.5)$$

הערות:

- התנאים למעבר מבינומי לנורמלי הם נזילים, כלומר משתנים ממרצה אחד לשני. התנאי שהצגתי כאן הוא הפופולרי ביותר:

$$1. \quad n \cdot p \geq 5$$

$$2. \quad n \cdot (1 - p) \geq 5$$

- ישנם מרצים שנותנים את התנאי המחמיר הבא:

$$1. \quad n \cdot p \geq 10$$

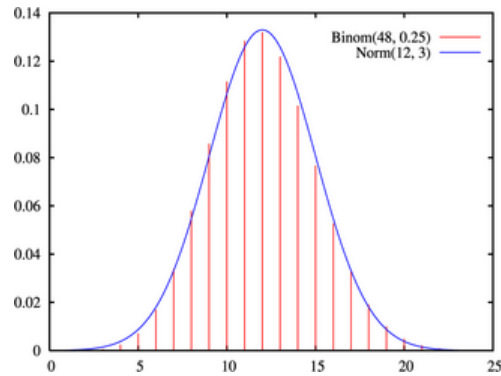
$$2. \quad n \cdot (1 - p) \geq 10$$

- וישנם מרצים שהתנאי שהם נותנים הוא: $(n \geq 30)$.
- תאלצו לבדוק מהו התנאי שנתנו לכם בכיתה כדי לעבור מהתפלגות בינומית לנורמלית.
- הערה נוספת היא לגבי תיקון רציפות. ישנם מרצים שלא מחייבים לבצע תיקון רציפות שהמדגמים גדולים (בדרך כלל מעל 100 תצפיות) בפתרונות שאציג תמיד אבצע תיקון רציפות במעבר מבינומי לנורמלי כיוון שכך הפתרון יהיה יותר מדויק (בכל מקרה שהמדגמים גדולים העניין זניח).

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

נתון שבקרב אוכלוסיית הנוער 25% זקוקים למשקפיים. נדגמו באקראי 48 בני נוער.

1. מה הסיכוי שבדיוק 14 מתוכם יהיו זקוקים למשקפיים?
2. מה הסיכוי שלכל היותר 13 מתוכם זקוקים למשקפיים?



שאלות:

- (1) נתון ש-20% מאוכלוסייה מסוימת אקדמאית. נבחרו באקראי 10 אנשים באותה אוכלוסייה.
- א. מה ההסתברות ששלושה מהם אקדמאים?
 ב. מה ההסתברות שלכל היותר אחד מהם אקדמאי?
 ג. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר האקדמאים במדגם?
- (2) במפעל 10% מהמוצרים פגומים. נלקחו 100 מוצרים באקראי מקו הייצור.
- א. מה ההסתברות שנדגמו לפחות 6 מוצרים פגומים?
 ב. מה ההסתברות שמספר המוצרים הפגומים יהיה לכל היותר 11 במדגם?
- (3) ציוני פסיכומטרי בקרב הנרשמים למוסד מסוים מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 500 וסטיית תקן 100. למוסד מסוים הוחלט לקבל אך ורק סטודנטים שקיבלו מעל 600 בפסיכומטרי. 100 סטודנטים אקראיים נרשמו למוסד. מה ההסתברות שלפחות 20 יתקבלו?
- (4) מטילים מטבע 50 פעמים.
- א. מה ההסתברות לקבל לכל היותר 30 עצים?
 ב. מה ההסתברות לקבל 28 עצים לפי התפלגות הבינומית ולפי הקירוב הנורמאלי?
- (5) במטוס מקום ל-400 נוסעים. נרשמו לטיסה 430 אנשים (overbooking). מנתונים סטטיסטיים ידוע שהסיכוי שאדם שנרשם לטיסה אכן יגיע הוא 0.9.
- א. מה ההסתברות שלא יהיו מקומות ישיבה לכל האנשים שהגיעו לטיסה?
 ב. מה צריך להיות גודל המטוס כדי שבסיכוי שלפחות 95% המטוס יספיק לכמות הנרשמים?
- (6) מפעל לייצור ארטיקים טוען שהסיכוי שארטיק שהוא מייצר יהיה פגום הוא 0.01. מוכר הזמין 1000 ארטיקים מהמפעל. מה ההסתברות שהמוכר יקבל לפחות 980 ארטיקים תקינים אם טענת המפעל מוצדקת?
- (7) מהמר מטיל קובייה הוגנת 100 פעמים. בכל הטלה, אם מתקבל תוצאה זוגית בקובייה המהמר זוכה בשקל. אחרת, המהמר משלם שקל. המהמר הטיל את הקובייה 100 פעמים מה הסיכוי שהרווח של המהמר יהיה לכל היותר 10?

תשובות סופיות:

- | | | | |
|---|------------|------------|----|
| ג. התוחלת: 2, סטיית התקן: 1.2649. | ב. 0.3758. | א. 0.201. | (1 |
| | ב. 0.6915. | א. 0.9332. | (2 |
| | | 0.1611. | (3 |
| ב. בינומית - 0.0788, קירוב לנורמלית - 0.0778. | | א. 0.9406. | (4 |
| | ב. 0.398. | א. 0.015. | (5 |
| | | 0.9996. | (6 |
| | | 0.8643. | (7 |

התפלגות פרופורציית ההצלחות במדגם:

רקע:

בפרק זה נדון בהתפלגות הדגימה של פרופורציית המדגם.
 Y - מספר ההצלחות במדגם (למשל, מספר המובטלים במדגם).

$$\hat{p} = \frac{Y}{n} \text{ - פרופורציית ההצלחות במדגם.}$$

למשל, שיעור המובטלים במדגם - $n = 200$:

מספר המובטלים : $Y = 20$.

$$\hat{p} = \frac{20}{200} = 0.1 \text{ : פרופורציית המובטלים במדגם}$$

נסמן ב- p את שיעור ההצלחה באוכלוסייה וב- q את שיעור הכישלונות באוכלוסייה.
 נבצע מדגם מקרי (הנחה שהתצפיות בלתי תלויות זו בזו) ונתבונן בהתפלגות של פרופורציית המדגם.

התוחלת, השונות וסטיית התקן של פרופורציית המדגם:

$$E(\hat{p}) = p, \quad V(\hat{p}) = \frac{pq}{n}$$

משפט הגבול המרכזי עבור הפרופורציה המדגמית:

$$\text{אם: } np \geq 5 \text{ \& } nq \geq 5, \text{ אזי: } \hat{p} \sim N\left(p, \frac{pq}{n}\right) \cdot Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

הערות:

- התנאים לקרוב הנורמאלי הם נזילים, כלומר משתנים ממרצה אחד לשני.
 התנאי שהצגתי כאן הוא הפופולרי ביותר:
 1. $n \cdot p \geq 5$
 2. $n \cdot (1 - p) \geq 5$
- ישנם מרצים שנותנים את התנאי המחמיר הבא:
 1. $n \cdot p \geq 10$
 2. $n \cdot (1 - p) \geq 10$
- וישנם מרצים המשתמשים בתנאי: $(n \geq 30)$.
- תאלצו לבדוק מהו התנאי שנתנו לכם בכיתה כדי לעבור לנורמלית.

- כיוון שפרופורציה אינה חייבת להיות מספר שלם בהכרח לא נהוג לבצע כאן תיקון רציפות.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

לפי נתוני משרד החינוך בעיר ירושלים ל-60% מתלמידי התיכון זכאים לתעודת בגרות. נדגמו 200 תלמידי תיכון.

- א. מה ההסתברות שהשכיחות היחסית (\hat{p}) של הזכאים לבגרות במדגם תעלה על 60%?
- ב. מה ההסתברות שפרופורציית הזכאים לבגרות במדגם תעלה על 70%?

שאלות:

- (1) במדינה מסוימת 10% מכלל האוכלוסייה הינם מובטלים. נדגמו באקראי 140 אנשים מהמדינה.
- מה התוחלת ומהי השונות של פרופורציות המובטלים שנדגמו?
 - מה ההסתברות שבמדגם לפחות 10% יהיו מובטלים?
 - מה ההסתברות שלכל היותר 9% מהמדגם יהיו מובטלים?
- (2) נניח כי 30% מהאוכלוסייה תומכים בהצעת חוק מסוימת. אם נדגום מהאוכלוסייה 200 איש. חשבו את ההסתברויות הבאות:
- לפחות 35% יתמכו בהצעת החוק במדגם.
 - לכל היות 25% יתמכו בהצעת החוק במדגם.
 - יותר מ-27% יתמכו בהצעת החוק במדגם.
- (3) לפי נתוני משרד התקשורת 40% מהאוכלוסייה מחזיקים בטלפון נייד מסוג "סמארטפון". נדגמו 400 אנשים מהאוכלוסייה.
- מה ההסתברות שבמדגם לכל היותר ל-40% יש סמארטפון?
 - מה ההסתברות שבמדגם לרוב יש סמארטפון?
 - מה ההסתברות שפרופורציית בעלי הסמארטפון במדגם תסטה מהפרופורציה באוכלוסייה בלא יותר מ-4%?
 - כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם הינו מגדילים את גודל המדגם?
- (4) נתון כי 80% מבתי האב מחוברים לאינטרנט. נדגמו 400 בתי אב אקראיים.
- מה ההסתברות שלפחות 340 מהם מחוברים לאינטרנט?
 - מה ההסתברות שפרופורציית המחוברים לאינטרנט במדגם תסטה מהפרופורציה האמיתית ביותר מ-4%?
 - כמה בתי אב יש לדגום כדי שהסטייה בין הפרופורציה המדגמית לפרופורציה האמיתית לא תעלה על 3% בהסתברות של 90%?
 - מהו העשירון התחתון של התפלגות פרופורציית המדגם?
- (5) נתון שציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית עם תוחלת 500 וסטיית תקן 100. ב"מועדון ה-700" נכללים נבחנים שמקבלים ציון מעל 700 בפסיכומטרי. מה הסיכוי שבמועד בו נבחנו 2000 נבחנים אקראיים יהיו לפחות 3% המשתייכים למועדון?

6 נתון ש- $X \sim B(n, p)$, ונגדיר את המשתנה הבא: $\hat{P} = \frac{X}{n}$.

א. הוכיחו ש: $E(\hat{P}) = p$, $V(\hat{P}) = \frac{p(1-p)}{n}$.

ב. מה p המביא את $V(\hat{P})$ להיות במקסימום?

תשובות סופיות:

- (1) א. התוחלת: 0.1, השונות: 0.00064. ב. 0.5. ג. 0.3446.
- (2) א. 0.0618. ב. 0.0618. ג. 0.8238.
- (3) א. 0.5. ב. 0. ג. 0.8968. ד. גדלה.
- (4) א. 0.0062. ב. 0.0456. ג. 0.481. ד. 0.77436.
- (5) 0.0154.
- (6) א. שאלת הוכחה. ב. 0.5.

סטטיסטיקה

פרק 17 - מושגי יסוד באמידה

תוכן העניינים

74 1. כללי

מושגי יסוד באמידה:

רקע:

כזכור מהמפגש הקודם, פרמטר הוא גודל המתאר את האוכלוסייה או התפלגות מסוימת. כמו ממוצע הגבהים בקרב מתגייסים לצה"ל - μ . כמו פרופורציית התומכים בממשלה בקרב אזרחי המדינה - p . בדרך כלל הפרמטרים הם גדלים שאינם ידועים באמת, ולכן מבצעים מדגמים במטרה לאמוד אותם. אין אפשרות לחשב אותם הניסיון הוא בלהעריך כמה הם שווים ככל שניתן.

- נסמן באופן כללי פרמטר באות θ ואומד ב- $\hat{\theta}$. הוא סטטיסטי המחושב על המדגם ובאמצעותו נאמוד את θ .
- שגיאת אמידה: $|\hat{\theta} - \theta|$ - ההפרש בין האומד לאמת (הפרמטר).

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בכנסת ה-19 קיבלה מפלגת העבודה 15 מנדטים. בערוץ 10 ברגע סגירת הקלפיות העריכו את מספר המנדטים של המפלגה להיות 17 מנדטים וזאת על סמך תוצאות מדגם של הערוץ.

- א. מה הפרמטר בדוגמה זו?
 - ב. מהי טעות האמידה של ערוץ 10?
- $E(\hat{\theta}) = \theta$ יהיה אומד חסר הטיה ל- θ אם התוחלת של $\hat{\theta}$ תהיה שווה ל- θ .
 - טעות התקן של אומד היא סטיית התקן שלו, כלומר: $\sigma(\hat{\theta}) = S.E$

פרמטרים מרכזיים והאומדים שלהם:

ממוצע האוכלוסייה μ :

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} : \text{האומד הנקודתי שלו יהיה: ממוצע המדגם}$$

$$E(\bar{x}) = \mu \text{ לכן } \bar{x} \text{ הינו אומר חסר הטיה ל-} \mu . \text{ כמו כן, טעות תקן: } \sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = SE$$

פרופורציה באוכלוסייה p :

$$\hat{p} = \frac{y}{n} : \text{האומד הנקודתי שלו יהיה: פרופורציה במדגם}$$

$$E(\hat{p}) = p , \text{ לכן } \hat{p} \text{ הינו אומר חסר הטיה ל-} p . \text{ כמו כן טעות התקן: } \sigma(\hat{p}) = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$$

שונות האוכלוסייה σ^2 :

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} : \text{האומד הנקודתי שלו יהיה}$$

$$E(S^2) = \sigma^2 \text{ ולכן } S^2 \text{ הינו אומד חסר הטיה ל-} \sigma^2 : S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$$

הערה: אומד הוא הנוסחה הכללית לאמידת הפרמטר ואומדן הוא הערך הספציפי שהתקבל במדגם מסוים.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נדגמו 10 משפחות בתל אביב ונבדק עבור כל משפחה מספר הילדים שלה.
להלן התוצאות שהתקבלו: 2, 1, 3, 2, 1, 4, 5, 2, 1, 3.
אמדו באמצעות אומדים חסרי הטיה את הפרמטרים הבאים:

1. ממוצע מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
2. שונות מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
3. פרופורציית המשפחות בנות שני ילדים.

שאלות:

- (1) מתוך 500 טירונים, נמצאו 120 בעלי שברי הליכה. נתון שהסיכוי שטירון יהיה עם שבר הליכה הוא 0.25.
- מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?
 - מהי טעות התקן של האומדן כשהמדגם בגודל 500?
 - מהו האומדן לפרמטר?
 - מהי טעות האמידה?
- (2) לפי נתוני היצרן, מקרר צורך בממוצע 2400 וואט לשעה עם סטיית תקן של 500 וואט לשעה.
- במדגם של 25 מקררים של היצרן התקבל ממוצע של 2342 וואט לשעה.
- מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?
 - מהי טעות התקן של האומדן?
 - מהו האומדן לפרמטר?
 - מהי טעות האמידה?
- (3) נדגמו עשרה מתגייסים לצה"ל. גובהם נמדד בס"מ. להלן התוצאות שהתקבלו: 168, 184, 192, 171, 180, 177, 187, 168, 177 ו-175.
- מצאו אומדן חסר הטיה לגובה הממוצע של מתגייסי צה"ל.
 - מצאו אומדן חסר הטיה לשונות הגבהים של מתגייסי צה"ל.
 - מצאו אומדן חסר הטיה לפרופורציות המתגייסים בגובה של לפחות 180 ס"מ.
- (4) נדגמו 20 שכירים באקראי. עבור כל שכיר נמדד השכר באלפי שקלים.
- להלן התוצאות שהתקבלו: $\sum_{i=1}^{20} X_i = 162$, $\sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 1502.2$.
- אמדו את השכר הממוצע של השכירים במשק.
 - אמדו את סטיית התקן של שכר השכירים במשק.
- (5) במטרה לאמוד את ממוצע האוכלוסייה, דגמו תצפיות בלתי תלויות מהאוכלוסייה וחישבו את הממוצע שלהם. מהי טעות התקן?
- סטיית התקן של האוכלוסייה.
 - סטיית התקן של ממוצע האוכלוסייה.
 - סטיית התקן של המדגם.
 - סטיית התקן של ממוצע המדגם.

6) משקל הממוצע של אוכלוסייה מסוימת הוא 75 ק"ג עם שונות של 25. אם יבחרו כל המדגמים האפשריים בגודל 10 מאוכלוסייה זו סטיית התקן של ממוצעי המדגמים תהייה:

א. 3.

ב. 2.5.

ג. 1.581.

ד. אין מספיק נתונים לדעת.

7) במדגם מקרי, מתי סכום ריבועי הסטיות מהממוצע, $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, מחולק ב- $n-1$?

א. כאשר n קטן.

ב. כאשר תצפיות המדגם אינן בלתי תלויות.

ג. כאשר האוכלוסייה אינה מתפלגת נורמאלית.

ד. כאשר מעוניינים באומד חסר הטיה לשונות האוכלוסייה ממנה הוצא המדגם.

ה. כאשר מעוניינים לחשב את שונות התפלגות הדגימה של ממוצע המדגם.

8) X_1, X_2, \dots, X_{16} מדגם מקרי מתוך אוכלוסייה בעלת ממוצע μ לא ידוע

ושונות: $\sigma^2 = 64$. טעות התקן של האומד ל- μ היא:

א. 16.

ב. 8.

ג. 4.

ד. 2.

9) מהו אומד חסר הטיה?

א. אומד שערכו שווה לממוצע התפלגות הדגימה שלו.

ב. אומד שערכו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.

ג. אומד שממוצע התפלגות הדגימה שלו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.

ד. אומד שהסיכוי שערכו יהיה גבוה מערך הפרמטר באוכלוסייה שווה

לסיכוי שיהיה נמוך ממנו.

תשובות סופיות:

- (1) א. 0.25 ב. 0.019 ג. 0.24 ד. 0.01
- (2) א. אוכלוסייה: מקררים של יצרן, תוחלת: 2400, סטיית תקן: 500.
 ב. 100 ג. 2342 ד. 58
- (3) א. 177.9 ב. 64.1 ג. 0.4
- (4) א. 8.1 ב. 3.16
- (5) ד'
- (6) ג'
- (7) ד'
- (8) ד'
- (9) ג'

סטטיסטיקה

פרק 18 - רווח סמך לתוחלת (ממוצע)

תוכן העניינים

- 79 1. רווח סמך כששונות האוכלוסיה ידועה
- 84 2. קביעת גודל מדגם
- 86 3. רווח סמך כששונות האוכלוסיה לא ידועה

רווח סמך כששונות האוכלוסייה ידועה:

רקע:

ממוצע המדגם הוא אומדן לממוצע האוכלוסייה, אך לא באמת ניתן להבין ממנו על גודלו של ממוצע האוכלוסייה. ההסתברות שממוצע המדגם יהיה בדיוק כמו הממוצע האמתי הוא אפסי.

מה שנהוג לעשות כדי לאמוד את ממוצע האוכלוסייה, זה לבנות רווח סמך.

נבנה מרווח בטחון שהסיכוי שהפרמטר μ ייכלל בתוכו הוא: $1-\alpha$.

$1-\alpha$: נקרא רמת בטחון או רמת סמך. כך ש: $P(A \leq \mu \leq B) = 1-\alpha$.

A - גבול התחתון של רווח הסמך.

B - הגבול העליון של רווח הסמך.

$L = B - A$ - אורך רווח הסמך.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

חוקר דגם 25 חיילים שנבחנו במבחן הפסיכומטרי. הוא בנה רווח סמך לממוצע הציונים במבחן הפסיכומטרי בקרב אוכלוסיית החיילים וקיבל בין 510 ל-590. רווח הסמך נבנה ברמת סמך של 95%.

1. מהי אוכלוסיית המחקר?

2. מה המשתנה באוכלוסייה?

3. מה הפרמטר שהחוקר רצה לאמוד?

4. מהו רווח הסמך?

5. מה אורך רווח הסמך?

6. מהי רמת הביטחון של רווח הסמך?

בפרק זה נרצה לבנות רווח סמך לתוחלת (μ) במקרה ש- σ^2 (שוונות האוכלוסייה) ידועה.

פרמטר אותו נרצה לאמוד: μ .

אומד נקודתי: \bar{x} .

תנאים לבניית רווח הסמך: $X \sim N$ או $n \geq 30$.

σ^2 (שוונות האוכלוסייה) ידועה.

נוסחה לרווח הסמך: $\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

על פי נתוני היצרן אורך חיי סוללה מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 1 שעה. מעוניינים לאמוד את תוחלת חיי סוללה. נדגמו באקראי 4 סוללות, אורך החיים הממוצע שהתקבל הוא 13.5 שעות. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת אורך חיי סוללה.

שגיאת האמידה המקסימלית: $\varepsilon = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ε - נותן את שגיאת האמידה המקסימלית, דבר שנקרא גם טעות סטטיסטית, טעות דגימה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בהמשך לשאלה עם הסוללות. מה ניתן להגיד בביטחון של 95% על שגיאת האמידה?

קשרים מתמטיים ברווח הסמך:

• אורך רווח הסמך הוא פעמיים שגיאת האמידה המקסימלית: $L = 2\varepsilon$.

• ממוצע המדגם נופל תמיד באמצע רווח הסמך: $\bar{X} = \frac{A+B}{2}$.

• ככל שמספר התצפיות (n) גבוה יותר, כך יש יותר אינפורמציה ולכן האומד יותר מדויק, ולכן נקבל רווח סמך יותר קצר.

• ככל שרמת הביטחון ($1-\alpha$) גבוהה יותר, כך: $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ יותר גבוה, ורווח הסמך יותר ארוך.

שאלות:

- 1) חוקר התעניין לאמוד את השכר הממוצע במשק. על סמך מדגם הוא קבע שבביטחון של 95% כי השכר הממוצע במשק נע בין 9200 ל-9800 ₪.
- מי האוכלוסייה במחקר?
 - מה המשתנה הנחקר?
 - מה הפרמטר שאותו רוצים לאמוד?
 - מה רווח הסמך לפרמטר?
 - מהי רמת הסמך לפרמטר?
 - מה אורך רווח הסמך?
 - מה הסיכוי שטעות הדגימה תעלה על 300 ₪?
- 2) מעוניינים לאמוד את התפוקה היומית הממוצעת של מפעל מסוים ברמת סמך של 95%. במדגם אקראי של 100 ימים התקבלה תפוקה ממוצעת 4950 מוצרים ביום. לצורך פתרון הנח שסטיית התקן האמתית ידועה ושווה 150 מוצרים ביום. בנו את רווח הסמך.
- 3) מעוניינים לאמוד את ממוצע אורך החיים של מכשיר. מנתוני היצרן ידוע שאורך החיים מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 20 שעות. נדגמו 25 מכשירים ונמצא כי ממוצע אורך החיים שלהם היה 230 שעות.
- בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.
 - בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.
 - הסבירו כיצד ומדוע השתנה רווח הסמך.
- 4) דגמו 200 עובדים מהמשק הישראלי. השכר הממוצע שלהם היה 9700 ₪. נניח שסטיית התקן של השכר במשק היא 3000 ₪.
- בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת השכר במשק.
 - מה ניתן לומר בביטחון של 95% על הסטייה המרבית בין ממוצע המדגם לתוחלת השכר?
 - מה היה צריך להיות גודל המדגם אם הינו רוצים להקטין את רווח הסמך ב-50%?
 - אם היינו מגדילים את גודל המדגם ובונים רווח סמך באותה רמת סמך האם היה ניתן לטעון בביטחון רב יותר שרווח הסמך מכיל את הפרמטר?

- (5) בנו רווח סמך לממוצע הציונים של מבחן אינטליגנציה. ידוע שסטיית התקן היא 15 והמדגם מתבסס על 100 תצפיות. רווח הסמך שהתקבל הוא (105,99). שחזרו את:
- ממוצע המדגם.
 - שגיאת האמידה המקסימאלית.
 - רמת הסמך.
- (6) זמן החלמה מאנגינה מתפלג עם סטיית תקן של יומיים. חברת תרופות מעוניינת לחקור אנטיביוטיקה חדשה שהיא פיתחה. במחקר השתתפו 60 אנשים שחלו באנגינה וקיבלו את האנטיביוטיקה החדשה. בממוצע הם החלימו לאחר 4 ימים.
- בנו רווח סמך לתוחלת זמן ההחלמה תחת האנטיביוטיקה החדשה ברמת סמך של 90%.
 - מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היה תקציב להגדלת גודל המדגם פי 4? הסבירו.
 - מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת סמך גדולה יותר? הסבירו.
- (7) חוקר בנה רווח סמך לממוצע וקיבל את רווח הסמך הבא: $82 < \mu < 92$. נתון שסטיית התקן בהתפלגות שווה ל-10 ושהמדגם מתבסס על 16 תצפיות. התפלגות המשתנה היא נורמאלית.
- מהו ממוצע המדגם?
 - מהי רמת הסמך של רווח הסמך שנבנה?
 - מה הסיכוי ששגיאת האמידה באמידת ממוצע האוכלוסייה תעלה על 5?
- (8) חוקר בנה רווח סמך לתוחלת כאשר השונות בהתפלגות ידועה ברמת סמך של 95%. אם החוקר כעת יבנה על סמך אותם נתונים רווח סמך ברמת סמך קטנה מ-95%, איזה מהמשפטים הבאים לא יהיה נכון.
- אורך רווח הסמך החדש יהיה קטן יותר.
 - גודל המדגם יהיה כעת קטן יותר.
 - המרחק בין ממוצע המדגם לקצות רווח הסמך יהיו קטנים יותר ברווח הסמך החדש.
 - רמת הביטחון לבנות רווח הסמך החדש תהיה קטנה יותר.

(9) חוקר בנה רווח סמך ל- μ וקיבל: $48 < \mu < 54$. מה נכון בהכרח:

א. $\mu = 51$.

ב. $\bar{X} = 6$.

ג. $\bar{X} = 51$.

ד. אורך רווח הסמך הינו 3.

(10) איזה מהגורמים הבאים אינו משפיע על גודלו של רווח בר סמך, כאשר שונות האוכלוסייה ידועה (בחרו בתשובה הנכונה):

א. רמת הביטחון.

ב. סטיית התקן באוכלוסייה.

ג. מספר המשתתפים.

ד. סטיית התקן במדגם.

תשובות סופיות:

(1) א. העובדים במשק. ב. שכר ב-ש. ג. μ . ד. $9200 < \mu < 9800$.

ה. 0.95. ו. 600. ז. 0.05.

(2) $4920.6 < \mu < 4979.4$

(3) א. $223.42 < \mu < 236.58$. ב. $222.16 < \mu < 237.84$.

ג. ראה סרטון.

(4) א. $10,116 < \mu < 9284$. ב. הסטיה המירבית בין \bar{x} ל- μ היא 416 שם בבטחון של 95%.

ג. 800. ד. לא.

(5) א. 102. ב. 3. ג. 0.9544.

(6) א. $4.42 < \mu < 83.5$. ב. יקטן פי 2. ג. גדל.

(7) א. 87. ב. 5. ג. 0.9544.

(8) ב'.

(9) ג'.

(10) ד'.

קביעת גודל מדגם:

רקע:

אם מעוניינים לאמוד את ממוצע האוכלוסייה כאשר סטיית התקן של האוכלוסייה ידועה: σ ברמת סמך של $1-\alpha$ ושגיאת אמידה שלא תעלה על ε מסוים, נציב

$$.n \geq \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\varepsilon} \right)^2$$

בנוסחה הבאה:

כדי להציב בנוסחה צריך שהמשתנה הנחקר יתפלג נורמלית או שהמדגם ייצא בגודל של לפחות 30 תצפיות.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

חברת תעופה מעוניינת לאמוד את תוחלת משקל המטען של נוסע. נניח שמשקל מטען של נוסע מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 2 ק"ג. כמה נוסעים יש לדגום אם מעוניינים שבביטחון של 98% הסטייה המרבית בין ממוצע המדגם לממוצע האמתי לא יעלה על 0.5 ק"ג? (תשובה: 87).

שאלות:

- (1) משתנה מקרי מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן ידועה 12. מה צריך להיות גודל המדגם כדי לבנות רווח סמך ברמת סמך של 98% שאורכו לא יעלה על 2?
- (2) מעוניינים לאמוד את הדופק הממוצע של מתגייסים לצבא. מעוניינים שבביטחון של 95% שגיאת האמידה המרבית תהיה 0.5. נניח שהדופק מתפלג נורמאלית על סטיית תקן של 3 פעימות לדקה.
 א. כמה מתגייסים יש לדגום?
 ב. אם ניקח מדגם הגדול פי 4 מהמדגם של סעיף א ונאמוד את הממוצע באותה רמת סמך כיצד הדבר ישפיע על שגיאת האמידה?
- (3) יהי X משתנה מקרי עם ממוצע μ וסטיית תקן σ . חוקר רוצה לבנות רווח בר סמך ל- μ ברמת ביטחון של 0.95, כך שהאורך של הרווח יהיה 0.5σ . מהו גודל המדגם הנדרש?

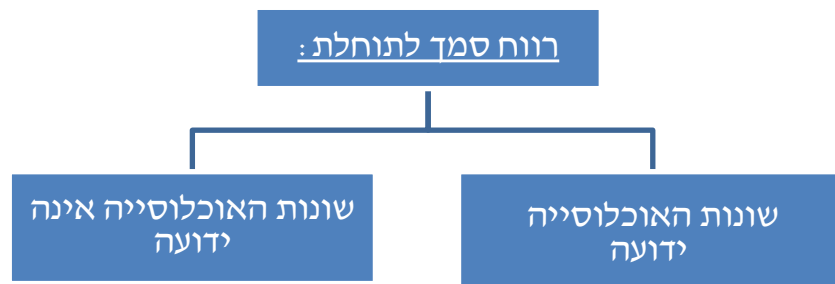
תשובות סופיות:

- (1) .780
 (2) א. 139. ב. הדבר יקטין את ε פי 2.
 (3) $n = 62$.

רווח סמך כששונות האוכלוסייה לא ידועה:

רקע:

בבואנו לבנות רווח סמך לתוחלת אנו צריכים להתמקד בשני המצבים הבאים:

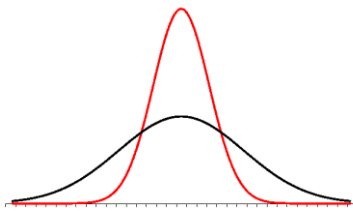


בפרק זה נעסוק במקרה ששונות האוכלוסייה (σ^2) אינה ידועה לנו.

מקרה יותר פרקטי.

התנאי: $X \sim N$ או שהמדגם גדול.

רווח סמך: $\bar{X} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$



$$\text{האומד לשונות: } S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$

התפלגות T:

הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה

להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים.

התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש. דרגות החופש הן: $df = n-1$.

ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה.

כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

הזמן שלוקח לפתור שאלה מסוימת בחשבון מתפלג אצל תלמידי כיתות ח' נורמאלית.

במטרה לאמוד את תוחלת זמן הפתרון נדגמו 4 תלמידים בכיתה ח'. להלן התוצאות

שהתקבלו בדקות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3.

בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לממוצע זמן הפתרון לשאלה בקרב תלמידי כיתה ח'.

שאלות:

- (1) מחקר מעוניין לדעת כיצד תרופה מסוימת משפיעה על קצב פעימות הלב. ל-5 אנשים שנטלו את התרופה מדדו את הדופק והתקבל מספר פעימות לדקה: 84, 88, 84, 79, 89. הערה: לצורך פתרון הנח שקצב פעימות הלב מתפלג נורמאלית בקירוב.
- א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת הדופק של נוטלי התרופה הנ"ל.
 ב. נתון שהדופק הממוצע ללא לקיחת התרופה הינו 70. לאור זאת, האם בביטחון של 95% התרופה משפיעה על הדופק?
 ג. בהמשך לסעיף א', אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת ביטחון של 99%, כיצד הדבר היה משפיע על רווח הסמך?
- (2) במדגם שנעשה על 25 מתגייסים לצבא האמריקאי התקבל כי גובה ממוצע של חייל הינו 178 ס"מ עם סטיית תקן: $S = 13$ ס"מ. בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לתוחלת גובה המתגייסים לצבא האמריקאי. מה יש להניח לצורך פתרון?
- (3) אדם מעוניין לאמוד את זמן הנסיעה הממוצע שלו לעבודה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שזמן הנסיעה בהם בדקות הוא: 30, 40, 32, 34, 27.
- א. ברמת ביטחון של 95% אמוד את זמן הנסיעה הממוצע. מהי ההנחה הדרושה לצורך פתרון?
 ב. איך גודל רווח הסמך היה משתנה אם היו דוגמים עוד ימים?
- (4) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמאלית. נדגמו 25 מבחנים והתקבל ממוצע ציונים 102 וסטיית תקן מדגמית 13.
- א. בנו רווח סמך לממוצע הציונים באוכלוסייה ברמת ביטחון של 95%.
 ב. חזרו על סעיף א' אם סטיית התקן הינה סטיית התקן האמתית של כלל הנבחנים.
 ג. הסבירו את ההבדלים בין שני הסעיפים הנ"ל.
- (5) נשקלו 60 תינוקות אשר נולדו בשבוע ה-40 של ההיריון. המשקל נמדד בקילוגרמים. להלן התוצאות שהתקבלו: $\sum_{i=1}^{60} X_i = 195$, $\sum_{i=1}^{60} X_i^2 = 643.19$.
- בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת משקל תינוק ביום היוולדו.

- (6) נדגמו 120 אנשים אקראיים מעל גיל 50. עבור כל אדם נבדק מספר שנות השכלתו. להלן התוצאות שהתקבלו: $\bar{x} = 13.8$, $S = 2$. בנו רווח סמך ברמת סמך של 96% לממוצע ההשכלה של אזרחים מעל גיל 50.
- (7) שני סטטיסטיקאים בנו רווח בר-סמך לאותו פרמטר μ . לכל אחד מהסטטיסטיקאים מדגם אחר, אך באותו גודל 10. שניהם קבעו אותה רמת סמך. סטטיסטיקאי א': הניח $\sigma = 20$. סטטיסטיקאי ב': חישב לפי המדגם וקיבל $S = 20$. למי משני הסטטיסטיקאים יהיה רווח סמך ארוך יותר?
 א. סטטיסטיקאי א'.
 ב. סטטיסטיקאי ב'.
 ג. אותו אורך רווח סמך לשני הסטטיסטיקאים.
 ד. תלוי בתוצאות המדגם של כל סטטיסטיקאי.
- (8) נתון ש: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ביצעו מדגם בגודל 16 וקיבלו סטיית תקן מדגמית 10. אורך רווח הסמך שהתקבל הוא: 8.765. מהי רמת הביטחון של רווח הסמך?

תשובות סופיות:

- (1) א. $79.88 < \mu < 89.72$ ב. כן. ג. הוא היה גדל.
- (2) ראה בסרטון.
- (3) א. צריך להניח שהמשתנה מתפלג נורמלית. ב. לא ניתן לדעת.
- (4) א. $96.63 < \mu < 107.37$ ב. $96.90 < \mu < 107.10$ ג. ראה בסרטון.
- (5) $3.149 < \mu < 3.351$
- (6) $13.42 < \mu < 14.18$
- (7) ב'.
- (8) 90%

סטטיסטיקה

פרק 19 - רווח סמך לפרופורציה

תוכן העניינים

| | | |
|----|-------|-------------------------|
| 89 | | 1. רווח הסמך לפרופורציה |
| 92 | | 2. קביעת גודל מדגם |

רווח הסמך לפרופורציה:

רקע:

המטרה היא לאמוד את P – פרופורציה באוכלוסייה.

האומד הנקודתי:

$$\hat{p} = \frac{y}{n} \quad (Y - \text{ מספר ההצלחות שבמדגם}).$$

$$\text{רווח הסמך ל- } p : \hat{p} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

תנאי לבניית רווח הסמך:

מדגם של לפחות 30 תצפיות (לעיתים נותנים תנאי של מספר הצלחות ומספר כשלונות לפחות 5 או לפחות 10).

$$\text{האומד לטעות התקן: } \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$\text{מתקיים ש: } \hat{p} = \frac{A+B}{2}, \quad L = 2\varepsilon$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במטרה לאמוד את אחוז המובטלים במשק נדגמו 200 אזרחים, מתוכם התקבל ש-24 היו מובטלים.

א. בנו רווח סמך לאחוז המובטלים באוכלוסייה ברמת סמך של 95%.

ב. מהו האומד לטעות התקן?

שאלות:

- (1) נדגמו 200 דירות בעיר חיפה. 48 מתוכן נמצאו כבעלות ממ"ד.
 א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאחוז הדירות בחיפה עם ממ"ד.
 ב. על סמך סעיף א' מה ניתן לומר על שגיאת האמידה המקסימאלית?
 ג. בהנחה ובחיפה 80 אלף דירות, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% למספר הדירות בחיפה עם ממ"ד בפועל.
- (2) במדגם של 300 אנשי היי-טק התקבל ש-180 מהם אקדמאים.
 א. בנו רווח סמך לפרופורציית אקדמאים ברמת סמך של 95% (בקרב אנשי הייטק).
 ב. כיצד רווח הסמך של סעיף א' היה משתנה אם היינו מקטינים את רמת הסמך?
 ג. כיצד רווח הסמך היה משתנה אם היינו מגדילים את גודל המדגם?
- (3) במדגם של 400 נהגים התקבל רווח סמך לפרופורציית הנהגים החדשים:
 $0.08 < p < 0.18$
 א. כמה נהגים במדגם היו נהגים חדשים?
 ב. מהי רמת הסמך של רווח הסמך שנבנה?
- (4) במסגרת מערכת הבחירות בארה"ב נשאלו 840 אנשים עבור איזה מועמד יצביעו. 510 אנשים ענו כי יצביעו בעד ברק אובמה. בסקר פורסם שתתכן סטייה של $\pm 3\%$ מתוצאות האמת. באיזו רמת ביטחון הסקר השתמש?
- (5) במדגם של 300 נשים בגילאי 40-35 נמצא ש-140 היו נשואות, 80 היו גרושות, 60 רווקות והיתר אלמנות.
 א. מצאו רווח סמך ברמה של 90% לאחוז הגרושות באוכלוסייה הנחקרת.
 ב. מצאו רווח סמך ברמה של 99% לסיכוי שבאוכלוסייה הנחקרת תמצא אישה לא נשואה?
- (6) ביצעו מדגם באוכלוסייה. שיעור ההצלחות במדגם היה 10% ורווח הסמך ניבנה ברמת סמך של 95%. אורכו הינו 8.3156%. מהו גודל המדגם שנלקח?

תשובות סופיות:

- (1) א. $.18.1\% < p < 29.9\%$
 ב. בביטחון של 95% שגיאת האמידה היא לכל היותר 0.059.
 ג. $.14,480 < \mu < 23,920$
- (2) א. $0.545 \leq p \leq 0.655$
 ב. האורך שלו היה קטן.
 ג. לא ניתן לדעת.
- (3) א. 52
 ב. 0.997
- (4) 0.925
- (5) א. $.30.9\% > p > 22.5\%$
 ב. $.60.72\% > p > 45.91\%$
- (6) 200

קביעת גודל מדגם:

רקע:

בפרק זה נדון איך קובעים גודל מדגם שבאים לאמוד פרופורציה באוכלוסייה מסוימת: החוקר קובע מראש את רמת הסמך הרצויה: $1-\alpha$. החוקר קובע מראש את הטעות הסטטיסטית המרבית שבה הוא מעוניין: ε (או את אורך רווח הסמך).

$L = 2\varepsilon$ - אורך רווח הסמך.

ε - טעות אמידה מרבית: המרחק המקסימאלי (הסטייה) בין הפרמטר (p) לאומד (\hat{p}).

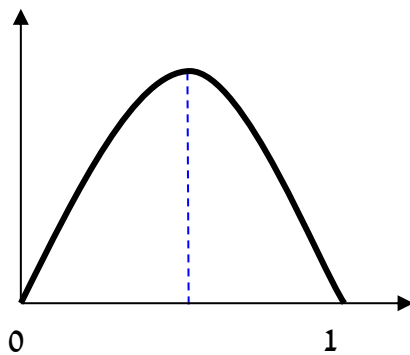
$$\varepsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

ויתעניין לדעת מהו גודל המדגם הרצוי לשם כך.

$$.n \geq \left(\frac{2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{L} \right)^2 \quad \text{נקבל ש:}$$

הבעיה שאין אנו יודעים את \hat{p} .

נתבונן בביטוי: $\hat{p}(1-\hat{p})$.



כיוון שאין לנו ידע מוקדם על \hat{p} נציב את המקרה השמרני ביותר שממקסם את הביטוי עבור: $\hat{p} = 0.5$.

$$.n \geq \left(\frac{2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{0.5 \cdot 0.5}}{L} \right) \Rightarrow n \geq \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{L} \right)^2$$

אך אם תהיה לנו אינפורמציה מוקדמת על הפרופורציה נציב את הערך הקרוב ביותר ל-0.5 האפשרי.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מעוניינים לאמוד את שיעור האבטלה במשק. האמידה צריכה להתבצע ברמת סמך של 90% ועם שגיאת אמידה שלא תעלה על 4%.

א. מהו גודל המדגם המינימאלי שיש לקחת?

ב. חזור לסעיף א' אם ידוע שהאבטלה לא אמורה לעלות על 20%.

שאלות:

- (1) הממשלה אומדת מדי חודש את אחוז התמיכה בה. מהו גודל המדגם אשר יש לקחת אם דורשים שהאומדן לא יסטה מהאחוז האמתי באוכלוסייה ביותר מ-3%, וזאת בביטחון של 95%?
- (2) משרד התקשורת מעוניין לדעת מה שיעור בתי האב עם אינטרנט.
 א. כמה בתי אב יש לדגום אם מעוניינים שבביטחון של 90% אורך רווח הסמך לא יעלה על 8%?
 ב. חזרו על סעיף א' אם ידעו שלפני חמש שנים ל-80% מבתי האב היה אינטרנט וכיום יש להניח שיש ליותר אינטרנט.
- (3) ערוץ טלוויזיה מעוניין לאמוד את הרייטינג של הערוץ בפריים טיים. המטרה שבביטחון של 95% הסטייה המרבית בין האומד לרייטינג האמתי לא תעלה על 4%.
 א. כמה מכשירי PEOPLE METER יש להתקין לצורך האמידה?
 ב. לפי הערכה מוקדמת הרייטינג של הערוץ לא יכול לעלות על 20%. בהנחה ומכשיר כזה עולה 500 ₪ ליחידה מה החיסכון הכספי מאינפורמציה זאת?
- (4) ענו על הסעיפים הבאים:
 א. כמה אזרחים יש לדגום כדי לאמוד את אחוז התמיכה בממשלה עם אורך רווח הסמך שלא עולה על 9% ברמת סמך של 90%?
 ב. בהנחה ובוצע מדגם שאת גודלו חיבתם בסעיף א והתקבל שאחוז התמיכה בממשלה במדגם הנו 42%. בנו רווח סמך לאחוז התמיכה בממשלה ברמת סמך של 95%.
 ג. על סמך סעיף ב', האם תקבלו את הטענה שמיעוט האוכלוסייה תומך הממשלה?
- (5) משרד הבריאות מתכנן לבצע מדגם שמטרתו לבדוק את הסיכוי לחלות בשפעת עם לקיחת חיסון נגד שפעת. הוא מעוניין שבסיכוי של 98% טעות האמידה לא תעלה על 3%.
 א. כמה מחוסנים יש לדגום?
 ב. משרד הבריאות ביצע את המדגם שאת גודלו חיבתם בסעיף הקודם וקיבל ש-15% מבין אלה שקיבלו חיסון נגד שפעת בכל זאת חלו במשך החורף בשפעת. בנו ברמת סמך של 98% את הסיכוי לחלות בחורף בשפעת עם לקיחת חיסון נגד שפעת.
 ג. בהמשך לסעיף הקודם. מהי טעות האמידה המרבית בביטחון של 98% מדוע הוא קטן מ-3%?

תשובות סופיות:

- (1) .1068
- (2) א. .423 ב. .271
- (3) א. .601 ב. 108,000 ₪.
- (4) א. .335 ב. $0.367 < p < 0.473$.
- ג. בביטחון של 0.95 ניתן להגיד שמיעוט באוכלוסייה תומך בממשלה.
- (5) א. .1509 ב. 0.15 ± 0.02 ג. ראה סרטון.

סטטיסטיקה

פרק 20 - רווח סמך להפרש פרופורציות

תוכן העניינים

1. רווח סמך להפרש פרופורציות 95

רווח סמך להפרש פרופורציות:

רקע:

המטרה: לאמוד את $p_1 - p_2$: הפרש פרופורציות בין שתי אוכלוסיות שונות.

האומד הנקודתי: $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$.

התנאי לבניית רווח הסמך: כל מדגם מעל 30 או לבדוק שמספר ההצלחות ומספר הכישלונות בכל מדגם לפחות 5 בכל מדגם (יש כאלה שבודקים לפחות 10).

$$\text{רווח סמך: } (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

רק שאפס נופל בתחומי רווח הסמך להפרש הפרופורציה נאמר שלא ניתן לקבוע שקיים הבדל מובהק בין הפרופורציות באוכלוסיות.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במטרה להשוות בין שתי תרופות נדגמו 200 איש שלקחו תרופה X , מתוכם 180 טענו שהתרופה עזרה להם. כמו כן, נלקחו 300 איש שלקחו את תרופה Y . מתוכם 150 טענו שהתרופה עזרה להם. בנו רווח סמך להפרש אחוזי ההצלחה של התרופות ברמת סמך של 95%. מה ניתן לומר על סמך רווח הסמך על ההבדלים בין התרופות?

שאלות:

- (1) מתוך 150 נשים שנדגמו באקראי 30% תמכו בהצעת חוק מסוימת. מתוך 200 גברים שנדגמו באקראי 25% תמכו בהצעת החוק.
 א. בנו רווח סמך לפער בין אחוזי התמיכה של הנשים לעומת הגברים ברמת סמך של 96%.
 ב. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאחוז התמיכה בהצעת החוק.
- (2) במחקר רפואי השתתפו 200 אנשים הסובלים מכאבים כרוניים. הם חולקו באקראי ל-2 קבוצות שוות בגודלן. קבוצה 1 קיבלה את תרופה A וקבוצה שנייה קיבלה את תרופה B. בקרב לוקחי תרופה A טענו שמצבם השתפר. בקרב לוקחי תרופה B טענו שמצבם השתפר.
 א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% להפרש בין שיעורי ההצלחה של שתי התרופות.
 ב. האם על סמך סעיף א' ניתן לקבוע שקיים הבדל בין התרופות מבחינת שיעורי ההצלחה?
- (3) נדגמו 200 משפחות מגוש דן. ל-70% מתוכן מכשיר DVD בבית. נדגמו 300 משפחות מאזור הצפון ל-65% מתוכן מכשיר DVD בבית.
 א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 98% לפרופורציות המשפחות בגוש דן עם DVD בבית.
 ב. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% להפרש בין פרופורציות המשפחות בגוש דן עם DVD לבין פרופורציות המשפחות בצפון עם DVD.

תשובות סופיות:

- (1) א. $-4.9\% < P_F - P_M < 14.9\%$ ב. $22.5\% < p < 31.8\%$
- (2) א. $0.093 < P_A - P_B < 0.307$ ב. כן.
- (3) $0.625 < p < 0.7754$

סטטיסטיקה

פרק 21 - רווח סמך להפרש תוחלות (ממוצעים) במדגמים בלתי תלויים

תוכן העניינים

1. כששוניות האוכלוסיה ידועות 97
2. כששוניות האוכלוסיה לא ידועות ובהנחת שוויון שוניות 99
3. כששוניות האוכלוסיה לא ידועות והמדגמים גדולים 101

כששונויות האוכלוסייה ידועות:

רקע:

המטרה היא לאמוד את פער התוחלות: $\mu_1 - \mu_2$, כלומר ההבדלים של הממוצעים בין שתי האוכלוסיות.

האומד נקודתי: $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$.

התנאים לבניית רווח הסמך:

1. σ_1^2, σ_2^2 ידועות.

2. $X_1, X_2 \sim N$ או $n_1, n_2 > 30$.

3. שני מדגמים בלתי תלויים.

רווח סמך: $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

אם הערך אפס נופל בגבולות רווח הסמך נגיד שבביטחון של $1-\alpha$, לא קיים הבדל בין התוחלות.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נדגמו 100 תושבים מאזור A והמשכורת הממוצעת הייתה שם 9200 ₪. כמו כן נדגמו 120 תושבים מאזור B וממוצע המשכורות שהתקבל שם 8700 ₪. לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של המשכורות באוכלוסיית שני האזורים היא 1800 ₪. אמדו ברמת סמך של 90% את הפרש השכר הממוצע בין אזור A לאזור B.

שאלות:

- (1) מעוניינים לבדוק האם קיים הבדל בין ממוצע ציוני הפסיכומטרי של חיילים לממוצע ציוני הפסיכומטרי של תלמידי תיכון. ידוע שציוני הפסיכומטרי מתפלגים נורמאלית עם סטיית תקן 100. במדגם של 16 נבחנים חיילים התקבל ממוצע 543. במדגם של 20 תלמידי תיכון התקבל ממוצע 508. בנו רווח סמך לפער תוחלות הציונים בין חיילים לתלמידי תיכון ברמת סמך של 90%. מה ניתן להסיק מרווח סמך זה?
- (2) ציוני IQ מתוכננים כך שיתפלגו נורמאלית עם סטיית תקן של 15. במדגם של 20 נבחנים ישראלים התקבל ממוצע ציונים 104. במדגם של 23 נבחנים אמריקאיים התקבל ממוצע ציונים 99.
 א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לפער בין ישראל לארה"ב בממוצע הציונים במבחן ה-IQ.
 ב. האם קיים הבדל בין ישראלים לאמריקאים מבחינת ממוצע הציונים?
- (3) חברה להנדסת בניין מעוניינת להשוות ברמת הקשיות של שני סוגי ברגים. ידוע שרמת הקשיות של ברגים מתפלגת נורמלית עם סטיית תקן של 4 יחידות. במדגם של 15 ברגים מסוג א' התקבל רמת קשיות ממוצעת של 28 יחידות ובמדגם של 12 ברגים מסוג ב' התקבל רמת קשיות ממוצעת של 25. עבור אילו רמות בטחון יקבע שאין הבדל בין שני סוגי הברגים מבחינת ממוצע רמת הקשיות שלהם?

תשובות סופיות:

- (1) $(-20, 90)$.
- (2) א. $-3.99 < \mu_1 - \mu_2 < 13.99$.
 ב. לא נוכל לטעון בביטחון של 95% שקיים הבדל בין ישראל לארה"ב.
 (3) רמות בטחון הגבוהות מ-0.9476.

כששונויות האוכלוסייה לא ידועות ובהנחת שוויון שונויות:

רקע:

המטרה היא לאמוד את פער התוחלות: $\mu_1 - \mu_2$, כלומר ההבדלים של הממוצעים בין שתי האוכלוסיות.

האומד נקודתי: $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$.

התנאים לבניית רווח הסמך:

$$1. \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$2. X_1, X_2 \sim N$$

3. מדגמים בלתי תלויים.

השונויות המשוקללת: כיוון שאנו מניחים שבין שתי האוכלוסיות השונויות שוות אנו אומדים את השונויות הזו על ידי שקלול שתי השונויות של שני המדגמים על ידי

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

הנוסחה הבאה:

$$d.f = n_1 + n_2 - 2$$

דרגות החופש:

$$\text{רווח סמך: } (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n_1+n_2-2} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$$

אם הערך אפס נופל בגבולות רווח הסמך נגיד שבביטחון של $1 - \alpha$, לא קיים הבדל בין התוחלות.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מחקר מעוניין לבדוק האם קיים הבדל בין תל אביב לבאר שבע מבחינת ההכנסה הממוצעת של אקדמאים. להלן תוצאות המדגם שנעשה:

| באר שבע | תל אביב | |
|---------|---------|------------------------------|
| 10 | 20 | מספר האקדמאים |
| 9500 | 11,000 | ממוצע הכנסות של אקדמאים |
| 250 | 200 | סטיית התקן של הכנסות אקדמאים |

בנו רווח סמך ברמת ביטחון של 90% להפרש תוחלות ההכנסה בשני האזורים. הניחו שהשכר מתפלג נורמלית עם אותה שונות בכל אחד מהאזורים.

שאלות:

- (1) נדגמו 15 ישראלים ו-15 אמריקאים. כל הנדגמים נגשו למבחן IQ. להלן תוצאות המדגם:

| המדינה | ישראל | ארה"ב |
|---------------------|---------|---------|
| גודל המדגם | 15 | 15 |
| סכום הציונים | 1560 | 1470 |
| סכום ריבועי הציונים | 165,390 | 147,560 |

מצאו רווח סמך ברמת סמך של 95% לסטייה בין ממוצע הציונים בישראל לממוצע הציונים בארה"ב. רשמו את כל ההנחות הדרושות לצורך פתרון התרגיל.

- (2) להלן 4 תצפיות על משתנה X שמתפלג: $N(\mu_x, \sigma^2)$, ומשתנה Y שמתפלג: $N(\mu_y, \sigma^2)$.

| | | | | |
|---|----|----|----|----|
| X | 22 | 20 | 21 | 25 |
| Y | 18 | 25 | 17 | 12 |

חשבו רווח סמך ל- $\mu_y - \mu_x$ ברמת הסמך 90%, בהנחה ששני המדגמים בלתי תלויים.

תשובות סופיות:

- (1) הנחות:
1. השונות שווה.
 2. שהציונים מתפלגים נורמלית.
 3. המדגמים אינם תלויים זה בזה.
- $$-5.52 < \mu_1 - \mu_2 < 17.52$$
- (2)
- $$-9.6 < \mu_y - \mu_x < 1.6$$

כששונויות האוכלוסייה לא ידועות והמדגמים גדולים:

רקע:

המטרה היא לאמוד את פער התוחלות: $\mu_1 - \mu_2$, כלומר ההבדלים של הממוצעים בין שתי האוכלוסיות.

האומד נקודתי: $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$.

התנאים לבניית רווח הסמך:

1. מדגמים גדולים.

2. מדגמים בלתי תלויים.

$$\text{רווח סמך: } (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

אם הערך אפס נופל בגבולות רווח הסמך נגיד שבביטחון של $1-\alpha$, לא קיים הבדל בין התוחלות.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

יבואן רכב מעוניין להשוות בין רכבים יפנים לעומת רכבים אמריקאים מבחינת תצרוכת הדלק שלהם. נדגמו 40 רכבים מכל סוג. לכל רכב נבדק כמות הק"מ שהמכונית נסעה עבור 1 ליטר דלק במהירות של 100 קמ"ש. התוצאות שהתקבלו במדגם הם: ברכבים היפנים ממוצע 12.5 עם סטיית תקן 1.5 וברכבים האמריקאים הממוצע 11.3 עם סטיית תקן של 1.4.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לפער הממוצעים של צריכת הדלק של מכוניות יפניות לעומת אמריקאיות.

ב. האם על סמך רווח הסמך ניתן לקבוע שקיים הבדל בין שני סוגי הרכבים מבחינת צריכת הדלק?

שאלות:

- (1) במדגם של 45 תלמידים הלומדים משפטים התקבל שבשבוע הם לומדים בממוצע 4 שעות עם סטיית תקן 2 שעות מעבר לשעות הלימוד בכיתה. במדגם של 55 תלמידים הלומדים הנדסה התקבל שבשבוע הם לומדים בממוצע 10 שעות עם סטיית תקן של 3 שעות.
- א. אמדו את הפרש ממוצעי שעות הלמידה של סטודנטים למשפטים לעומת סטודנטים להנדסה ברמת בטחון של 90%.
- ב. האם קיים הבדל בין סטודנטים למשפטים ולסטודנטים להנדסה מבחינת ההשקעה שלהם מעבר לשעות הלימוד בכיתה?
- (2) מחקר טוען שאנשים החיים במרכז הארץ צופים בממוצע בטלוויזיה יותר מאנשים שלא חיים במרכז. נדגמו 100 אנשים מהמרכז ו-107 אנשים לא מהמרכז. אנשים אלו נשאלו כמה שעות ביום הם נוהגים לצפות בטלוויזיה. במדגם של מרכז הארץ התקבל ממוצע 2.7 שעות וסטיית תקן של 0.7 שעות. במדגם של מחוץ למרכז הארץ התקבל ממוצע 1.8 שעות וסטיית תקן של 1.1 שעות. מצאו רווח סמך לפער בין ממוצע שעות הצפייה בטלוויזיה בין שני האזורים בביטחון של 95%.

תשובות סופיות:

- (1) א. $-5.17 < \mu_1 - \mu_2 < -6.83$. ב. כן.
- (2) כן, בביטחון של 90% סטודנטים להנדסה לומדים יותר מסטודנטים למשפטים.

סטטיסטיקה

פרק 22 - שאלות מסכמות על רווחי סמך

תוכן העניינים

1. שאלות מסכמות על רווחי סמך 103

שאלות מסכמות על רווחי סמך:

שאלות:

- (2) 200 אנשים נשאלו כמה פעמים ביום הם שותים כוס קפה. להלן התפלגות התשובות:

| | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|------------|
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | מספר פעמים |
| 10 | 20 | 22 | 28 | 34 | 86 | מספר אנשים |

- א. תנו רווח סמך לממוצע מספר כוסות הקפה שאנשים נוהגים לשתות ביום. $\alpha = 0.05$.
- ב. אדם השותה לפחות 4 כוסות קפה ביום נקרא "מכור לקפה". בנו רווח סמך לאחוז "המכורים לקפה". $\alpha = 0.1$.
- (3) חוקר בנה רווח סמך לאחוז האנשים שהתקררו לפחות פעם אחת בשנה. רווח הסמך שהתקבל הוא: $0.81 < p < 0.91$. רווח הסמך הנ"ל התבסס על מדגם של 500 איש.
- א. כמה אנשים במדגם טענו שכלל לא התקררו השנה?
- ב. באיזו רמת סמך נבנה רווח הסמך?
- ג. בנו רווח סמך לאחוז האנשים שהתקררו לפחות פעם אחת השנה ברמת סמך של 96% על סמך תוצאות המדגם.
- (4) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם תוחלת 100. במדגם של 20 ישראלים שנבחנו במבחן ה-IQ התקבלו התוצאות הבאות:
- $$\sum_{i=1}^{20} x_i = 2040, \quad \sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 210740$$
- א. אמדו ברמת ביטחון של 90% את ממוצע ציוני בחינת ה-IQ בישראל – מהי ההנחה הדרושה לפתרון?
- ב. על סמך רווח הסמך של סעיף א' האם תקבלו את הטענה שבישראל ממוצע הציונים שונה מארה"ב?
- ג. מה היה קורה לרווח הסמך אם היינו מגדילים את רמת הסמך שלו?

- (7) בנק מתלבט האם לפתוח סניף באזור A או באזור B. לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של המשכורת באזור A היא 1200 ובאזור B 1500. הבנק דגם 50 אנשים מאזור A, המשכורת הממוצעת שהתקבלה במדגם היא 6,800 ₪. כמו כן, נדגמו 40 אנשים מאזור B, המשכורת הממוצעת שהתקבלה במדגם היא 6,600 ₪.
- א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% להפרש הממוצעים של המשכורות בשני האזורים. האם על סמך רווח הסמך ניתן להמליץ לבנק היכן לפתוח את הסניף. אם כן, היכן?
- ב. בנו רווח סמך לתוחלת המשכורת באזור A ברמת סמך של 95%.

תשובות סופיות:

- (2) א. $1.21 \leq \mu \leq 1.65$ ב. $10.85\% \leq p \leq 19.15\%$
- (3) א. 70 ב. 0.9988 ג. $83\% < p < 89\%$
- (4) א. $97.4 \leq \mu \leq 106.6$ ב. לא ג. יגדל.
- (7) א. $-372 \leq \mu_A - \mu_B \leq 772$, לא. ב. $6467 \leq \mu_A \leq 7133$

סטטיסטיקה

פרק 23 - מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים

תוכן העניינים

| | | |
|-----|-------|----------------|
| 105 | | 1. הקדמה |
| 109 | | 2. סוגי טעויות |

הקדמה:

רקע:

תהליך של בדיקת השערות הוא תהליך מאד נפוץ בעולם הסטטיסטיקה. בבדיקת השערות על פרמטרים נעבוד לפי השלבים הבאים:

שלב א: נוהה את הפרמטר הנחקר.

שלב ב: נרשום את השערות המחקר.

השערת האפס המסומנות ב- H_0 .

בדרך כלל השערת האפס מסמלת את אשר היה מקובל עד עכשיו, את השגרה, הנורמה.

השערה אלטרנטיבית (השערת המחקר) המסומנת ב- H_1 .

ההשערה האלטרנטיבית מסמלת את החדשנות בעצם ההשערה האלטרנטיבית מדברת על הסיבה שהמחקר נעשה היא שאלת המחקר.

שלב ג: נבדוק האם התנאים לביצוע התהליך מתקיימים ונניח הנחות במידת הצורך.

שלב ד: נרשום את כלל ההכרעה. בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שנקרא כלל הכרעה. הכלל יוצר אזורי שנקראים:

1. **אזור דחייה:**

דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.

2. **אזור קבלה:**

קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה. כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי. אזור הדחייה מוכתב על ידי סיכון שלוקח החוקר מראש

שנקרא רמת מובהקות ומסומן ב- α .

שלב ה: בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולחשב את הסטטיסטי המתאים ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה.

שלב ו: להסיק מסקנה בהתאם לתוצאות המדגם.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום לידתם בישראל 3300 גרם. משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון. להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$$n = 20, \bar{X} = 3120, S = 280$$

- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
- ב. מה המשתנה הנחקר?
- ג. מה הפרמטר הנחקר?
- ד. מהן השערות המחקר?

שאלות:

בשאלות הבאות, ענו על הסעיפים הבאים:

- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
- ב. מה המשתנה הנחקר?
- ג. מה הפרמטר הנחקר?
- ד. מהן השערות המחקר?

- (1) ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות. מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים. ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5.
- (2) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25.
- (3) במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה למשפטים היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. מחקר מעוניין לבדוק האם השנה מקשים על הקבלה לפקולטה למשפטים.
- (4) בחודש ינואר השנה פורסם שאחוז האבטלה במשק הוא 8% במדגם עכשווי התקבל שמתוך 200 אנשים 6.5% מובטלים. רוצים לבדוק ברמת מובהקות של 5% האם כיום אחוז האבטלה הוא כמו בתחילת השנה.

תשובות סופיות:

- (1) א. נבחנים בבגרות באנגלית.
 ב. ציון.
 ג. ממוצע הציונים בשיטת לימוד חדשה.
 ד. $H_0: \mu = 72$
 $H_1: \mu > 72$
- (2) א. משקאות בבקבוק של חברה מסוימת.
 ב. נפח משקה בסמ"ק.
 ג. ממוצע נפח המשקה בבקבוק.
 ד. $H_0: \mu = 500$
 $H_1: \mu < 500$
- (3) א. מועמדים לפקולטה למשפטים.
 ב. משתנה דיכוטומי (התקבל, לא התקבל).
 ג. אחוז הקבלה.
 ד. $H_0: p = 0.25$
 $H_1: p < 0.25$
- (4) א. אזרחים בוגרים במשק.
 ב. משתנה דיכוטומי (מובטל, עובד).
 ג. אחוז האבטלה כיום.
 ד. $H_0: p = 0.08$
 $H_1: p \neq 0.08$

סוגי טעויות:

רקע:

בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שניקרא כלל הכרעה. הכלל יוצר אזורים שנקראים:

1. אזור דחייה – דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.
2. אזור קבלה – קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה.

כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי. בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה וכך להגיע למסקנה – המסקנה היא בעירבון מוגבל כיוון שהיא תלויה בכלל ההכרעה ובתוצאות המדגם. אם נשנה את כלל ההכרעה אז אנחנו יכולים לקבל מסקנה אחרת. אם נבצע מדגם חדש אז אנחנו עלולים לקבל תוצאה אחרת. לכן יתכנו טעויות במסקנות שלנו:

| | | הכרעה | |
|--------|-------|-------------|-------------|
| | | H_0 | H_1 |
| מציאות | H_0 | אין טעות | טעות מסוג 1 |
| | H_1 | טעות מסוג 2 | אין טעות |

הגדרת הטעויות:

טעות מסוג ראשון: להכריע לדחות את H_0 למרות שבמציאות H_0 נכונה.

טעות מסוג שני: להכריע לקבל את H_0 למרות שבמציאות H_1 נכונה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

אדם חשוד בביצוע עבירה ונתבע בבית המשפט. אילו סוגי טעויות אפשריות בהכרעת הדין?

שאלות:

- (1) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25. בסופו של דבר הוחלט להכריע לטובת חברת המשקאות.
- א. רשמו את השערות המחקר.
 ב. מה מסקנת המחקר?
 ג. איזו סוג טעות יתכן וביצעו במחקר?
- (2) במחקר על פרמטר מסוים הוחלט בסופו של דבר לדחות את השערת האפס.
- א. האם ניתן לדעת אם בוצע טעות במחקר?
 ב. מה סוג הטעות האפשרית?
- (3) לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. ישנה טענה שכיום ממוצע מספר הילדים במשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות. במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה. על סמך תוצאות המדגם נקבע שלא ניתן לקבוע שבאופן מובהק תוחלת מספר הילדים למשפחה קטנה כיום.
- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
 ב. מה המשתנה הנחקר?
 ג. מה הפרמטר הנחקר?
 ד. מה השערות המחקר?
 ה. מה מסקנת המחקר?
 ו. מהי סוג הטעות האפשרית במחקר?

תשובות סופיות:

- (1) א. $H_0: \mu = 500$
 ב. לא דחינו את H_0 .
 ג. טעות מסוג שני.
- (2) א. לא ניתן לדעת.
 ב. טעות מסוג ראשון.
 (3) א. משפחות כיום.
 ב. מס' הילדים.
 ג. תוחלת מספר הילדים למשפחה כיום.
 ה. לא לדחות את H_0 . ו. טעות מסוג שני.
- ד. $H_0: \mu = 2.3$
 $H_1: \mu < 2.3$

סטטיסטיקה

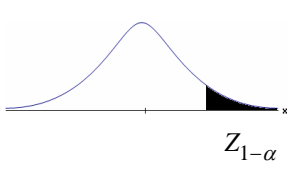
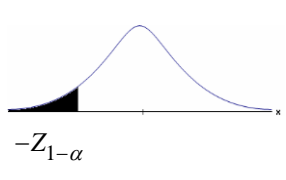
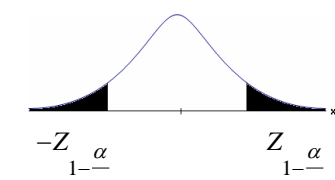
פרק 24 - בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)

תוכן העניינים

- 111 1. בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסיה ידועה
- 115 2. סיכוי לטעויות ועוצמה (ששונות האוכלוסיה ידועה)
- 121 3. בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסיה לא ידועה
- 125 4. הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)

בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסייה ידועה:

רקע:

| $H_0: \mu \leq \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$ | $H_0: \mu \geq \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$ | $H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$ | השערת האפס: השערה אלטרנטיבה: |
|--|--|---|------------------------------------|
| 1. σ ידועה 2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול | | | תנאים: |
| $Z_{\bar{x}} > Z_{1-\alpha}$ | $Z_{\bar{x}} < -Z_{1-\alpha}$ | $Z_{\bar{x}} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\bar{x}} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ | כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0 : |
|  |  |  | |
| דוחים את H_0 ■ | דוחים את H_0 ■ | דוחים את H_0 ■ | |

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

סטטיסטי המבחן:

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

| | | | |
|--|--|--|-----------------------|
| $\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ | $\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ | $\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ | נדחה H_0 אם מתקיים: |
|--|--|--|-----------------------|

דוגמה:

יבול העגבניות מתפלג נורמלית עם תוחלת של 10 טון לדונם וסטיית תקן של 2.5 טון לדונם בעונה. משערים ששיטת זיבול חדשה תעלה את תוחלת היבול לעונה מבלי לשנות את סטיית התקן. נדגמו 4 חלקות שזובלו בשיטה החדשה. היבול הממוצע שהתקבל היה 12.5 טון לדונם. בדקו את ההשערה ברמת מובהקות של 1%.

פיתרון:

אוכלוסייה: עגבניות.

המשתנה: $X =$ יבול העגבניות בטון לעונה.

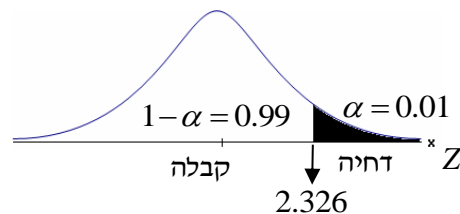
הפרמטר: $\mu =$ תוחלת היבול בשיטת הזיבול החדשה.

השערות:
 $H_0: \mu = 10$
 $H_1: \mu > 10$

תנאים:

1. $X \sim N$

2. $\sigma = 2.5$

כלל הכרעה:

נדחה את H_0 אם $Z_{\bar{x}} > 2.326$

תוצאות: $n = 4$, $\bar{x} = 12.5$

סטטיסטי המבחן: $Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

נציב: $Z_{\bar{x}} = \frac{1.25 - 10}{\frac{2.5}{\sqrt{4}}} = 2 < 2.326$

מסקנה:

לא נדחה H_0 (נקבל H_0).

ברמת מובהקות של 1% לא נוכל לקבל את הטענה ששיטת הזיבול החדשה מעלה את תוחלת היבול של העגבניות.

שאלות:

- (1) ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות. מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים. ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5. בהנחה שגם בשיטתו סטיית התקן תהיה 15 מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
- (2) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 ס"מ³ וסטיית תקן 20 ס"מ³. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 ס"מ³ במדגם בגודל 25. א. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 2.5%? ב. האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה עבור רמת מובהקות הגבוהה מ-5%?
- (3) מהנדס האיכות מעוניין לבדוק אם מכונה מכיילת (מאופסת). המכונה כוונה לחתוך מוטות באורך 50 ס"מ. לפי נתוני היצרן סטיית התקן בחיתוך המוטות היא 0.5 ס"מ. במדגם של 50 מוטות התקבל ממוצע אורך המוט 50.93 ס"מ. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
- (4) המשקל הממוצע של הספורטאים בתחום ספורט מסוים הוא 90 ק"ג, עם סטיית תקן 8 ק"ג. לפי דעת מומחים בתחום יש צורך בהורדת המשקל ובשימוש בדיאטה מסוימת שצריכה להביא להורדת המשקל. לשם בדיקת יעילות הדיאטה נלקח מדגם מקרי של 50 ספורטאים ובתום שנה של שימוש בדיאטה התברר שהמשקל הממוצע במדגם זה היה 84 ק"ג. יש לבדוק בר"מ של 10%, האם הדיאטה גורמת להורדת המשקל.
- (5) לפי מפרט נתון, על עובי בורג להיות 4 מ"מ עם סטיית תקן של 0.2 מ"מ. במדגם של 25 ברגים העובי הממוצע היה 4.07 מ"מ. קבעו ברמת מובהקות 0.05, האם עובי הברגים מתאים למפרט. הניחו כי עובי של בורג מתפלג נורמלית וסטיית התקן של עובי בורג היא אכן 0.2 מ"מ.
- (6) במחקר נמצא שתוצאה היא מובהקת ברמת מובהקות של 5% מה תמיד נכון? בחרו בתשובה הנכונה.
- א. הגדלת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.
 ב. הגדלת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.
 ג. הקטנת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.
 ד. הקטנת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.

(7) חוקר ערך מבחן דו צדדי ברמת מובהקות של α והחליט לדחות את השערת האפס.

אם החוקר היה עורך מבחן צדדי ברמת מובהקות של $\frac{\alpha}{2}$ אזי בהכרח:

- א. השערת האפס הייתה נדחית.
- ב. השערת האפס הייתה לא נדחית.
- ג. לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו במקרה זה.

(8) שני סטטיסטיקאים בדקו השערות: $H_0: \mu = \mu_0$ כנגד $H_1: \mu > \mu_0$,

עבור שונות ידועה ובאותה רמת מובהקות.

שני החוקרים קבלו אותו ממוצע במדגם אך לחוקר א' היה מדגם בגודל 100 ולחוקר ב' מדגם בגודל 200.

- א. אם חוקר א' החליט לדחות את H_0 , מה יחליט חוקר ב'? נמקו.
- ב. אם חוקר א' יחליט לא לדחות את H_0 , מה יחליט חוקר ב'? נמקו.

תשובות סופיות:

(1) נקבל H_0 , בר"מ של 5% לא נקבל את הטענה של המורה ששיטת הלימוד שלו מעלה את ממוצע הציונים.

(2) א. נדחה H_0 , בר"מ של 2.5% נקבל את תלונת אגודת הצרכנים בדבר הפחתת נפח המשקה בבקבוק.

ב. הגדלנו את רמת המובהקות לכן אנחנו נשארים בדחייה של H_0 והמסקנה לא תשתנה.

(3) נדחה H_0 , בר"מ של 5% נקבע שהמכונה לא מאופסת.

(4) נדחה H_0 , בר"מ של 0.1 נקבל את הטענה שהדיאטה יעילה ומפחיתה את המשקל הממוצע.

(5) נקבל H_0 , בר"מ של 0.05 נכריע שתוחלת עובי הבורג מתים למפרט.

(6) א'.

(7) ג'.

(8) א. לדחות. ב. לא ניתן לדעת.

סיכוי לטעויות ועוצמה (ששונות האוכלוסייה ידועה):

רקע:

| | | הכרעה | |
|--------|-------|-------------|-------------|
| | | H_0 | H_1 |
| מציאות | H_0 | אין טעות | טעות מסוג 1 |
| | H_1 | טעות מסוג 2 | אין טעות |

הגדרת הסתברויות:

הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 (רמת מובהקות):

$$\alpha = P(H_0 \text{ לדחות את } H_0 \mid H_0 \text{ נכונה}) = P_{H_0}(H_0)$$

הסיכוי לבצע טעות מסוג 2:

$$\beta = P(H_0 \text{ לקבל את } H_0 \mid H_1 \text{ נכונה}) = P_{H_1}(H_0)$$

רמת בטחון:

$$(\alpha - 1) = P(H_0 \text{ לקבל את } H_0 \mid H_0 \text{ נכונה}) = P_{H_0}(H_0)$$

עוצמה:

$$(\beta - 1) = \pi = P(H_0 \text{ לדחות את } H_1 \mid H_1 \text{ נכונה}) = P_{H_1}(H_0)$$

התהליך לחישוב סיכוי לטעות מסוג שני:

| השערת האפס: השערת האלטרנטיבה: | $H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$ | $H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$ | $H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$ |
|---------------------------------------|---|---|--|
| תנאים: | 1. σ ידועה 2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול | | |
| כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0 : | $\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ | $\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ | $\bar{X} > \mu_0 + Z_{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - Z_{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ |
| חישוב β : | $P_{\mu_1} \left(\bar{X} < \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ | $P_{\mu_1} \left(\bar{X} > \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ | $P_{\mu_1} \left(\mu_0 - Z_{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \mu_0 + Z_{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ |

התפלגות ממוצע המדגם: $\bar{X} \sim N \left(\mu, \frac{\sigma^2}{n} \right)$

התקנון: $Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

דוגמה:

בתחילת השנה חשבון הטלפון הסלולארי הממוצע לאדם היה 200 ש"ח עם סטיית תקן של 80 ש"ח לחודש. בעקבות כניסתן של חברות טלפון סלולארית חדשות מעוניינים לבדוק האם כיום ממוצע חשבון הטלפון הסלולארי פחת. לצורך בדיקה דגמו באקראי 36 אנשים וחשבון הטלפון הסלולארי שלהם היה 150 ש"ח בממוצע לחודש.

- רשמו את השערות המחקר ובנו כלל הכרעה במונחי חשבון ממוצע מדגמי ברמת מובהקות של 5%.
- מה מסקנתכם? איזה סוג טעות אפשרית במסקנה?
- נניח שבמציאות כיום החשבון הממוצע הוא 160 ש"ח. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני?
- אם נקטין את רמת המובהקות מסעיף א', כיצד הדבר ישפיע על התשובה מסעיף ג'?

פתרון:

א. אוכלוסייה: משלמי חשבון טלפון סלולאר כיום.

המשתנה: $X =$ חשבון הטלפון החודשי בשקלים.

הפרמטר: μ .

השערות:
 $H_0: \mu = 200$
 $H_1: \mu < 200$

תנאים:

1. $\mu = 200$.

2. $n = 36$.

$$\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad K = \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\alpha = 0.05$$

$$Z_{1-\alpha} = Z_{0.95} = 1.645$$

$$\text{נציב: שקלים } K = 200 - 1.645 \cdot \frac{80}{\sqrt{36}} = 178.07$$

כלל ההכרעה: דחה את H_0 אם שקלים $\bar{X} < 178.07$.

ב. ברמת מובהקות של 5% נכריע שאכן ממוצע חשבון הטלפון הסלולרי פחת מתחילת השנה.

ג. השערות:
 $H_0: \mu_0 = 200$
 $H_1: \mu < 200$

כלל ההכרעה: נדחה את H_0 אם $\bar{X} < 178.07$.

$$H_1: \bar{X} \sim N\left(160, \frac{80^2}{36}\right)$$

$$Z = \frac{178.07 - 160}{\frac{80}{\sqrt{36}}} = 1.36$$

$$\beta = P_{H_1}(\text{לקבל את } H_0) = P_{H_1}(\bar{X} > 178.07) = 1 - \phi(1.36) = 1 - 0.9131 = 0.0869$$

ד. הקטנת α מגדילה את β .

שאלות:

$$(1) \text{ נתון ש: } X \sim N(\mu, \sigma^2 = 1)$$

- להלן השערות של חוקר לגבי הפרמטר μ : $H_0: \mu = 5$, $H_1: \mu = 7$. מעוניינים ליצור כלל הכרעה המתבסס על הסמך תצפית בודדת כך שרמת המובהקות תהיה 5%.
- א. עבור אילו ערכים של X שידגם נדחית השערת H_0 ?
- ב. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני?
- ג. אם במדגם התקבל ש- $X = 6.9$ מה תהיה המסקנה ומה הטעות האפשרית?

- (2) לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. מעוניינים לבדוק אם כיום ממוצע מספר הילדים למשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות. במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה.
- א. רשמו כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קריטי ברמת מובהקות של 5%.
- ב. בהמשך לסעיף א' מה תהיה המסקנה ומהי הטעות האפשרית במסקנה?
- ג. אם באמת ממוצע מספר הילדים במשפחה פחת לכדי 2.1 מהי העצמה של הכלל מסעיף א'?

- (3) להלן נתונים על תהליך של בדיקת השערות על תוחלת:

$$H_0: \mu = 200, H_1: \mu \neq 200, \sigma = 30, n = 225$$

- א. רשמו כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קריטי וברמת מובהקות של 10%.
- ב. בהמשך לסעיף א', מהי העצמה אם התוחלת שווה ל-195?
- ג. הסבירו, ללא חישוב, איך העצמה תשתנה אם רמת המובהקות תהיה 5%?

- (4) מפעל לייצור צינורות מייצר צינור שקוטרו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 50 מ"מ וסטית תקן של 6 מ"מ. במחלקת ביקורת האיכות דוגמים בכל יום 81 צינורות ומוודדים את קוטרים, בכדי לבדוק, בעזרת מבחן סטטיסטי, האם מכונת הייצור מכוילת כנדרש או שקוטר הצינורות קטן מהדרוש.
- א. רשמו את ההשערות ואת כלל ההכרעה ברמת מובהקות של 5%.
- ב. אם ביום כלשהו מכונת הייצור התקלקלה והיא מייצרת את הצינורות בקוטר שתוחלתו 48 מ"מ בלבד (סטית התקן לא השתנתה), מה ההסתברות שהתקלה לא תתגלה בביקורת האיכות? כיצד נקראת הסתברות זו?
- ג. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף ב' תשתנה אם רמת המובהקות תגדל.
- ד. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף ב' תשתנה אם התוחלת האמיתית היא 47 ולא 48 מ"מ.

- 5) להלן השערות של מחקר: $H_0: \mu = 50$, $H_1: \mu = 58$. מעוניינים לדגום 100 תצפיות. ידוע שסטיית התקן של ההתפלגות הינה 20.
- בנו כלל הכרעה שהסיכוי לטעות מסוג שני בו הוא 10%. מהי רמת המובהקות?
 - כיצד הייתה משתנה רמת המובהקות אם (כל סעיף בפני עצמו)?
 - סטיית התקן הייתה יותר גדולה.
 - הסיכוי לטעות מסוג שני גדול יותר.

השאלות שלהלן הן שאלות רב-ברירה, בחרו בתשובה הנכונה ביותר:

- 6) אם חוקר החליט להגדיל את רמת המובהקות במחקר שלו אזי:
- הסיכוי לטעות מסוג ראשון גדל.
 - העוצמה של המבחן גדלה.
 - הסיכוי לטעות מסוג שני גדל.
 - תשובות א' ו-ב' נכונות.

- 7) חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן:
- השערת האפס נכונה.
 - השערת האפס נדחתה.
 - השערת האפס לא נדחתה.
 - אף אחת מהתשובות לא נכונה בהכרח.

- 8) מה המצב הרצוי לחוקר המבצע בדיקת השערה:

| $1 - \beta$ | α |
|-------------|----------|
| גדולה | א. גדולה |
| קטנה | ב. גדולה |
| גדולה | ג. קטנה |
| קטנה | ד. קטנה |

- 9) נערך שינוי בכלל ההחלטה של בדיקת השערה מסוימת ובעקבותיו אזור דחיית H_0 קטן. כל שאר הגורמים נשארו ללא שינוי. כתוצאה מכך:
- הן α , והן $1 - \beta$, יקטנו.
 - α יישאר ללא שינוי ואילו $1 - \beta$ יגדל.
 - α יגדל ואילו $1 - \beta$ יקטן.
 - הן α והן $1 - \beta$ יגדלו.

10 ידוע כי לחץ דם תקין באוכלוסייה הוא 120. רופא מניח שלחץ הדם בקרב עיתונאים גבוה יותר מהממוצע באוכלוסייה. הוא לקח מדגם של 60 עיתונאים וקיבל ממוצע 137. על סמך המדגם, הוא בודק טענתו ברמת מובהקות 0.02 ומסיק שלחץ הדם בקרב העיתונאים אינו גבוה יותר. מה הטעות האפשרית שהרופא עושה?


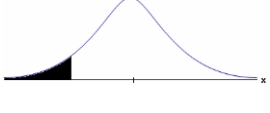
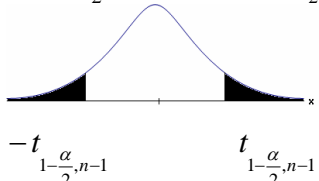
- א. טעות מסוג ראשון.
- ב. טעות מסוג שני.
- ג. טעות מסוג שלישי.
- ד. אין טעות במסקנתו.

תשובות סופיות:

- 1) א. מעל 6.645. ב. 0.3594.
ג. דחינו את H_0 , תתכן טעות מסוג ראשון.
- 2) א. נדחה H_0 אם $\bar{X} < 2.24$. ב. נדחה H_0 . ג. 1.
- 3) א. נדחה H_0 אם $\bar{X} > 203.29$ או $\bar{X} < 196.71$. ב. 0.8051. ג. תקטן.
- 4) א. נדחה H_0 אם $\bar{X} < 48.9$. ב. 0.0885. ג. תקטן. ד. תקטן.
- 5) א. 0.0033. ב. i. רמת המובהקות הייתה קטנה.
ii. רמת המובהקות הייתה גדלה.
- 6) ד'
- 7) ג'
- 8) ג'
- 9) א'
- 10) ב'

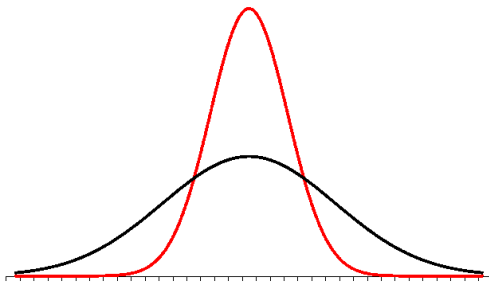
בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסייה לא ידועה:

רקע:

| $H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$ | $H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$ | $H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$ | השערת האפס: השערה אלטרנטיבה: |
|---|---|--|--|
| 1. σ אינה ידועה 2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול | | | תנאים: |
| $t_{\bar{x}} > t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $t_{1-\alpha, n-1}$ - דוחים את H_0 | $t_{\bar{x}} < -t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $-t_{1-\alpha, n-1}$ - דוחים את H_0 | $t_{\bar{x}} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$ או $t_{\bar{x}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$  $-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ - דוחים את H_0 | כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0 : |
| $\bar{X} > \mu_0 + t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ | $\bar{X} < \mu_0 - t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ | $\bar{X} > \mu_0 + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ | חלופה לכלל הכרעה: נדחה H_0 אם מתקיים: |

$$t_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$



התפלגות T:

הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים. התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש.

דרגות החופש הן: $df = n - 1$.

ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה. כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מפעל קיבל הזמנה לייצור משטחים בעובי של 0.1 ס"מ. כדי לבדוק האם המפעל עומד בדרישה נדגמו 10 משטחים ונמצא שהעובי הממוצע הוא 0.104 עם אומדן לסטיית תקן 0.002 ס"מ.

א. מהן השערות המחקר?

ב. מה ההנחה הדרושה לצורך פתרון?

ג. בדוק ברמת מובהקות של 5%.

שאלות:

(1) משך זמן ההחלמה בלקיחת אנטיביוטיקה מסוימת הוא 120 שעות בממוצע עם סטיית תקן לא ידועה. מעוניינים לבדוק האם אנטיביוטיקה אחרת מקטינה את משך זמן ההחלמה. במדגם של 5 חולים שלקחו את האנטיביוטיקה האחרת התקבלו זמני ההחלמה הבאים: 90, 95, 100, 80, 125 שעות. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%. מהי ההנחה הדרושה לצורך הפתרון?

(2) משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום היוולדם בישראל 3300 גר'. משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה ששנים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון. להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$$n = 20$$

$$\bar{x} = 3120$$

$$S = 280$$

מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5% מה יש להניח לצורך פתרון?

(3) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמלית. בארה"ב ממוצע הציונים הוא 100. במדגם שנעשה על 23 נבחנים ישראלים, התקבל ממוצע ציונים 104.5 וסטיית התקן המדגמית 16. האם בישראל ממוצע הציונים שונה מארה"ב? הסיקו ברמת מובהקות של 5%.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750$$

$$\sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

נתון שההתפלגות היא נורמלית.

בדוק ברמת מובהקות של 5% האם התוחלת של ההתפלגות שונה מ-80.

- (5) ליאור ורוני העלו את אותן השערות על ממוצע האוכלוסייה. כמו כן הם התבססו על אותן תוצאות של מדגם. ליאור השתמש בטבלה של התפלגות Z . רוני השתמשה בטבלה של התפלגות t . מה נוכל לומר בנוגע להחלטת המחקר שלהם? בחר בתשובה הנכונה.
- אם ליאור ידחה את השערת האפס אז גם בהכרח רוני.
 - אם רוני תדחה את השערת האפס אז גם בהכרח ליאור.
 - שני החוקרים בהכרח יגיעו לאותה מסקנה.
 - לא ניתן לדעת על היחס בין דחיית השערת האפס של שני החוקרים.

- (6) נתון ש: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ כמו כן נתונות ההשערות הבאות: $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu < \mu_0$

חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות. σ^2 לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5% לאחר מכן כדי לחזק את קביעתו הוא דגם עוד 5 תצפיות ושקלל את תוצאות אלה גם למדגם כך שכלל עכשיו 15 תצפיות. בחר בתשובה הנכונה:

- כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.
- כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.
- כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

תשובות סופיות:

- (1) נדחה H_0 .
- (2) נדחה H_0 .
- (3) נקבל H_0 .
- (4) נקבל H_0 .
- (5) ב'.
- (6) ג'.

הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על תוחלת (ממוצע):

רקע:

ניתן לבצע בדיקת השערות דו צדדית ברמת מובהקות α על μ :

$$H_0 : \mu = \mu_0 , H_1 : \mu \neq \mu_0$$

על ידי בניית רווח סמך ברמת סמך של $1-\alpha$ ל- μ :

אם μ_0 נופל ברווח \leftarrow נקבל את H_0 .

אם μ_0 לא נופל ברווח \leftarrow נדחה את H_0 .

דוגמה:

חוקר ביצע בדיקת השערות לתוחלת. להלן השערותיו :

$$H_0 : \mu = 80 , H_1 : \mu \neq 80 , \alpha = 5\%$$

החוקר בנה רווח סמך ברמה של 90% וקיבל: $79 < \mu < 84$.

האם אפשר לדעת מה מסקנתו, ואם כן מהי?

פתרון (פתרון מלא בהקלטה):

רווח הסמך ברמת סמך של 90% מכיל "80".

ברמת סמך של 95% רווח הסמך יגדל ויכיל "80".

לכן, ברמת מובהקות של 5% נקבל H_0 .

שאלות:

- (1) חוקר רצה לבדוק את ההשערות הבאות: $H_0: \mu = 90$, $H_1: \mu \neq 90$. החוקר בנה רווח סמך לתוחלת ברמת סמך של 95% וקיבל את רווח הסמך הבא: (87, 97). אם החוקר מעוניין לבצע בדיקת השערות ברמת מובהקות של 1% האם ניתן להגיע למסקנה ע"ס רווח הסמך? נמקו.
- (2) חוקר מעוניין לבדוק השפעת דיאטה חדשה על רמת הסוכר בדם. ידוע כי מספר מיליגרם הסוכר בסמ"ק דם הוא משתנה מקרי שמתפלג נורמלית עם סטיית תקן 10.4 מ"ג. נלקח מדגם של 60 נבדקים שניזונו מדיאטה זו. נמצא כי ממוצע מספר המיליגרם סוכר היה 115.5 מ"ג לסמ"ק.
- א. בנה רווח סמך ברמת סמך 95% לתוחלת רמת הסוכר בדם אצל הניזונים מדיאטה זו.
- ב. ידוע שתוחלת רמת הסוכר בדם באוכלוסיה היא 90 מ"ג לסמ"ק. האם לדעתך ניתן להסיק על סמך תוצאת סעיף א שהדיאטה משפיעה על רמת הסוכר בדם? הסבירו.
- (3) יצרן אנטיביוטיקה רושם על גבי התרופות שכמות הפנצילין היא 200 מ"ג לקפסולה. משרד הבריאות ביצע מדגם של 8 קפסולות אקראיות מקו הייצור ומצא שבממוצע יש 196 מ"ג פנצילין לקפסולה עם סטיית תקן מדגמית של 5 מ"ג. בהנחה וכמות הפנצילין בקפסולה מתפלגת נורמלית.
- א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לממוצע כמות הפנצילין לקפסולה המיוצרת על ידי יצרן האנטיביוטיקה.
- ב. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם יש אמת באינפורמציה המסופקת על ידי היצרן.

תשובות סופיות:

- (1) נקבל השערת.
- (2) א. $112.87 \leq \mu \leq 118.13$.
- ב. נכריע שהדיאטה משפיעה על תוחלת רמת הסוכר בדם.
- (3) א. $191.8 \leq \mu \leq 200.2$. ב. נכריע שיש אמת בפרסום.

סטטיסטיקה

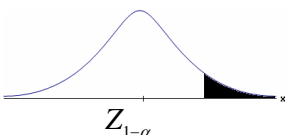
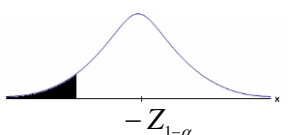
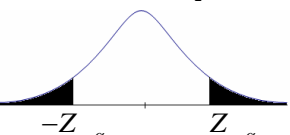
פרק 25 - בדיקת השערות על פרופורציה

תוכן העניינים

| | |
|-----|-------------------------|
| 127 | 1. התהליך |
| 130 | 2. סיכוי לטעויות ועוצמה |

התהליך:

רקע:

| $H_0 : p = p_0$ $H_1 : p > p_0$ | $H_0 : p = p_0$ $H_1 : p < p_0$ | $H_0 : p = p_0$ $H_1 : p \neq p_0$ | השערת האפס: השערה אלטרנטיבית: |
|---|---|--|--------------------------------------|
| $np_0 \geq 5 \text{ \& } n(1-p_0) \geq 5$ | | | תנאים: |
| $Z_{\hat{p}} > Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ דוחים את H_0 | $Z_{\hat{p}} < -Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ דוחים את H_0 | $Z_{\hat{p}} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\hat{p}} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ דוחים את H_0 | כלל הכרעה: אזור הדחייה של H_0 : |

$$Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \quad \text{סטטיסטי המבחן:}$$

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

| כלל הכרעה – אזור הדחייה של H_0 : | | |
|--|--|--|
| $\hat{p} > p_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ | $\hat{p} < p_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ | $\hat{p} > p_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ $\hat{p} < p_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ |

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בחודש ינואר השנה פורסם שאחוז האבטלה במשק הוא 8% במדגם עכשווי התקבל שמתוך 200 אנשים 6.5% מובטלים. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם כיום אחוז האבטלה הוא כמו בתחילת השנה.

שאלות:

- (1) במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה מסוימת היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. ברמת מובהקות של 5% האם השנה הקשו על תנאי הקבלה?
- (2) במדגם של 300 אזרחים 57% מתנגדים להצעת חוק מסוימת. לאור נתונים אלה האם רוב האזרחים מתנגדים להצעת החוק? בדקו ברמת מובהקות של 10%.
- (3) הטילו מטבע 50 פעמים וקיבלו 28 פעמים עץ. האם המטבע הוגן ברמת מובהקות של 5%?
- (4) קפיטריה במכללה מסוימת מעריכה כי אחוז הסטודנטים שקונים קפה בקפיטריה הינו 20%. נערך סקר אשר כלל 200 סטודנטים. התברר כי 33 מהם רוכשים קפה בקפיטריה. מטרת הסקר הייתה לבדוק את אמיתות הערכה של הקפיטריה.
- א. רשמו את ההשערות.
 ב. בדקו את ההשערות ברמת מובהקות של 10%.
 ג. מה תהיה המסקנה אם נקטין את רמת המובהקות?
- (5) חבר כנסת רוצה להעביר חוק. לצורך כך הוא דוגם 400 אזרחים במטרה לבדוק האם רוב האזרחים תומכים בחוק. במדגם התקבל ש-276 אזרחים תומכים בחוק.
- א. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
 ב. האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה אם רמת המובהקות תהיה גדולה יותר? הסבירו.
- (6) שני חוקרים בדקו את ההשערות הבאות: $H_0: p = p_0$, $H_1: p > p_0$. חוקר א' השתמש ברמת מובהקות α_1 וחוקר ב' ברמת מובהקות α_2 החוקר הראשון דחה את H_0 ואילו החוקר השני קיבל את H_0 . שניהם התבססו על אותם תוצאות של מדגם. בחר בתשובה הנכונה:
- א. $\alpha_1 = \alpha_2$.
 ב. $\alpha_1 > \alpha_2$.
 ג. $\alpha_1 < \alpha_2$.
 ד. המצב המתואר לא אפשרי.

תשובות סופיות:

- (1) נדחה H_0 .
- (2) נדחה H_0 .
- (3) נקבל H_0 .
- (4) א. $H_0: p = 0.2$
 ב. $H_1: p \neq 0.2$
 ג. המסקנה לא תשתנה.
- (5) א. נדחה H_0 .
 ב. המסקנה לא תשתנה.
- (6) ג'.

סיכוי לטעויות ועוצמה:

רקע:

הגדרת הסתברויות:

הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 (רמת מובהקות):

$$\alpha = P(H_0 \text{ לדחות את } H_0 \mid H_0 \text{ נכונה}) = P_{H_0}(H_0)$$

הסיכוי לבצע טעות מסוג 2:

$$\beta = P(H_0 \text{ לקבל את } H_0 \mid H_1 \text{ נכונה}) = P_{H_1}(H_0)$$

רמת בטחון:

$$(1-\alpha) = P(H_0 \text{ לקבל את } H_0 \mid H_0 \text{ נכונה}) = P_{H_0}(H_0)$$

עוצמה:

$$\pi = (1-\beta) = P(H_0 \text{ לדחות את } H_0 \mid H_1 \text{ נכונה}) = P_{H_1}(H_0)$$

| | | הכרעה | |
|--------|-------|-------------|-------------|
| | | H_0 | H_1 |
| מציאות | H_0 | טעות מסוג 1 | אין טעות |
| | H_1 | אין טעות | טעות מסוג 2 |

התהליך לחישוב סיכוי לטעות מסוג שני:

| השערת האפס: השערה אלטרנטיבית: | $H_0: p = p_0$ $H_1: p > p_0$ | $H_0: p = p_0$ $H_1: p < p_0$ | $H_0: p = p_0$ $H_1: p \neq p_0$ | השערת האפס: השערה אלטרנטיבית: |
|---------------------------------------|--|--|--|----------------------------------|
| תנאים: | $np_0 \geq 5 \& n(1-p_0) \geq 5$ | | | |
| כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0 : | $\hat{p} > p_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ | $\hat{p} < p_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ | $\hat{p} > p_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ או $\hat{p} < p_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ | |

| חישוב β : |
|--|
| $P_{H_1} \left(\hat{p} < p_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right)$ |
| $P_{H_1} \left(p_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} < \hat{p} < p_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right)$ |
| $P_{H_1} \left(\hat{p} > p_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right)$ |

$$\hat{p} \sim N \left(p, \frac{p(1-p)}{n} \right) \text{ : כאשר}$$

$$Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \text{ : והתקנון}$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

רופאי שיניים טוענים שיותר ממחצית האוכלוסייה הבוגרת בארץ אינם מבקרים אצל רופא שיניים באופן קבוע, כנדרש. כדי לבדוק טענה זו, נערך סקר בקרב 150 אנשים בוגרים.

- רשמו את ההשערות וכלל הכרעה ברמת מובהקות של 10%.
- מהי עוצמת המבחן אם מסתבר ש 60% מהאוכלוסייה אינם מבקרים אצל רופא שיניים באופן קבוע.

שאלות:

- (1) משרד הבריאות פרסם ש-10% מתושבי המדינה סובלים ממחלת האסטמה. מחקר דורש לבדוק האם בחיפה, בגלל זיהום האוויר, שיעור הסובלים מאסטמה גבוה יותר. לצורך המחקר נבדקו 260 מתושבי חיפה.
- א. רשמו את השערות המחקר, וצרו מבחן ברמת מובהקות של 5% לבדיקתן.
 ב. מהי עצמת המבחן של סעיף א' בהנחה ובחיפה 16% מהתושבים סובלים מאסטמה?
 ג. כיצד תשנה התשובה לסעיף ב' אם מסתבר שבחיפה 18% סובלים מאסטמה?
 ד. בהמשך לסעיף א' האם נכון לומר שבהסתברות של 5% ההשערה שבחיפה 10% מהתושבים סובלים מאסטמה אינה נכונה?
- (2) אחוז הסובלים מתופעות הלוואי מתרופה מסוימת הוא 15%. חברת תרופות טוענת שפיתחה תרופה שאמורה לצמצם את אחוז הסובלים מתופעות לוואי. לצורך בדיקת הטענה הוחלט לבצע מחקר שיכלול 120 חולים שיקבלו את התרופה הנבדקת. נניח שהתרופה נבדקת אכן מורידה את פרופורציות הסובלים מתופעות הלוואי ל-10%, מהי עצמת המבחן עבור רמת מובהקות של 5%?
- (3) בעיר מסוימת היו 20% אקדמאים. בעקבות פתיחת מכללה בעיר לפני כמה שנים מעוניינים לבדוק האם אחוז האקדמאים גדל. מעוניינים שהמחקר יכלול 200 אנשים והוא יהיה ברמת מובהקות של 5%.
- א. חשבו את הסיכוי לבצע טעות מסוג שני בהנחה והיום יש 28% אקדמאים.
 ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם תשתנה אם נגדיל את רמת המובהקות?
- (4) מעוניינים לבדוק האם בפקולטה מסוימת ישנה העדפה לגברים. הוחלט לדגום 200 מתקבלים ועל סמך מספר הבנים לקבוע אם טענת המחקר מתקבלת. חוקר א' קבע רמת מובהקות של 5% וחוקר ב' החליט לקבל את טענת המחקר אם במדגם יהיו לפחות 120 בנים. למי מבין החוקרים רמת מובהקות גדולה יותר?
- (5) חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן (בחרו בתשובה הנכונה):
- א. השערת האפס נכונה.
 ב. השערת האפס נדחתה.
 ג. השערת האפס לא נדחתה.
 ד. אף אחת מהתשובות לא נכונה בהכרח.
- (6) קבעו אם הטענה הבאה נכונה: בבדיקת השערות לא ניתן לבצע בו זמנית טעות מסוג ראשון וטעות מסוג שני.

תשובות סופיות:

- (1) א. $H_0 : p = 0.1$
 $H_1 : p > 0.1$
- (2) 0.4404
- (3) א. 0.1446 ב. תקטן.
- (4) חוקר א'.
- (5) ג'.
- (6) נכונה.
- ב. 0.9015 ג. תגדל. ד. טענה לא נכונה.

סטטיסטיקה




פרק 26 - בדיקת השערות על הפרש פרופורציות

תוכן העניינים

1. כללי 134

בדיקת השערות על הפרש פרופורציות

רקע

| $H_0: p_1 - p_2 = 0$ $H_1: p_1 - p_2 > 0$ | $H_0: p_1 - p_2 = 0$ $H_1: p_1 - p_2 < 0$ | $H_0: p_1 - p_2 = 0$ $H_1: p_1 - p_2 \neq 0$ | השערת האפס : השערה אלטרנטיבית: |
|---|---|--|-----------------------------------|
| 2. מדגמים גדולים | | 1. מדגמים בלתי תלויים | תנאים: |
| $Z_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} > Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ - דוחים את H_0 | $Z_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} < -Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ - דוחים את H_0 | או $Z_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} < -Z_{\frac{1-\alpha}{2}}$ $Z_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} > Z_{\frac{1-\alpha}{2}}$  $-Z_{\frac{1-\alpha}{2}}$ $Z_{\frac{1-\alpha}{2}}$ - דוחים את H_0 | כלל ההכרעה: אזור הדחייה של: |

$$Z_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1} + \frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}} \quad \text{סטטיסטי המבחן:}$$

$$\hat{p} = \frac{y_1 + y_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2} \quad \text{כאשר הפרופורציה המשוקללת:}$$

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

| כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0 | |
|---|---|
| $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 < 0 - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1} + \frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}$ | $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 > 0 + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1} + \frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}$ או $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 < 0 - Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1} + \frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}$ |
| $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 > 0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1} + \frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}$ | |

התפלגות של $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$: $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \sim N(p_1 - p_2, \frac{p_1 \cdot q_1}{n_1} + \frac{p_2 \cdot q_2}{n_2})$

$$Z_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{n_2}}}$$

תקנון:

$$Z_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} \Big|_{H_0} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1} + \frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}}$$

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

נדגמו 80 סטודנטים שנבחנו במיקרו-כלכלה. מתוכם 60 עברו את הבחינה. נדגמו 100 סטודנטים שנבחנו בסטטיסטיקה א'. מתוכם 82 עברו את הבחינה. האם שיעור העוברים את הבחינה בסטטיסטיקה גבוה מאשר מהבחינה במיקרו כלכלה? בדקו ברמת מבוהקות של 10%.

שאלות

- (1) במדגם של 200 גברים, 8% היו מובטלים. במדגם של 180 נשים, 10% מהן היו מובטלות.
- האם קיים הבדל מובהק בין פרופורציית המובטלים לפרופורציית המובטלות? בדקו ברמת מובהקות של 5%.
- (2) אחוז בעלי רישיון נהיגה בקרב האוכלוסייה הבוגרת הינו 60%. במדגם של 300 בוגרים מתל אביב 204 היו בעלי רישיון נהיגה. במדגם של 220 בוגרים מירושלים 100 היו בעלי רישיון נהיגה.
- א. ברמת מובהקות של 5% האם תקבלו את הטענה שאחוז בעלי הרישיון בתל אביב גבוה מהאחוז הארצי?
- ב. ברמת מובהקות של 10% האם תקבלו את הטענה שאחוז בעלי הרישיון נהיגה בתל אביב גבוה מאחוז בעלי רישיון הנהיגה בירושלים?
- (3) נדגמו 500 בוגרים מתוכם 200 גברים והיתר נשים. במדגם התקבל: מתוך הגברים ל-48% תעודת בגרות. מתוך הנשים ל-58% תעודת בגרות. מטרת המחקר היא לבדוק האם שיעור הזכאיות לבגרות גבוה משיעור הזכאים.
- א. מהי מובהקות התוצאה?
- ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 8%?
- (4) במדגם שנערך על 100 פרות מחוות בדרום הארץ התקבל כי 20 פרות נושאות וירוס מסוים. במדגם שנערך על 200 פרות מחוות בצפון הארץ התקבל כי 10 מתוכן נושאות וירוס גם כן.
- א. בנו מבחן ברמת מובהקות של 5% לבדיקת הטענה כי הווירוס תקף את פרות הדרום באופן משמעותי יותר מאשר את הפרות בצפון הארץ.
- ב. מהי המסקנה לבדיקת הטענה של סעיף א ומהי הטעות האפשרית במסקנה?
- ג. מהי עוצמת המבחן אם שיעור הפרות בדרום עם הווירוס גבוה ב-10% משיעור הפרות בצפון עם הווירוס?
- ד. כיצד העוצמה תשתנה אם נגדיל את רמת המובהקות?

תשובות סופיות

- (1) לא נדחה את H_0 .
- (2) א. נדחה H_0 .
 ב. נדחה H_0 .
- (3) א. 0.0139
 ב. נדחה H_0 .
- (4) א. ראה סרטון.
 ב. נדחה H_0 .
 ג. 0.8238
 ד. תגדל.

סטטיסטיקה



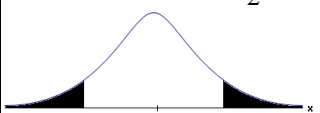
פרק 27 - בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

תוכן העניינים

1. כששונויות האוכלוסייה ידועות..... 138
2. כששונויות האוכלוסייה אינן ידועות והמדגמים גדולים..... 142
3. כששונויות האוכלוסייה לא ידועות ומניחים שהן שוות..... 145

בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

כשהשונות של האוכלוסייה ידועות – רקע

| $H_0 \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \mu_1 - \mu_2 > c$ | $H_0 \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \mu_1 - \mu_2 < c$ | $H_0 \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \mu_1 - \mu_2 \neq c$ | השערת האפס: השערה אלטרנטיבית: |
|---|---|---|--|
| מדגמים בלתי תלויים σ_1, σ_2 ידועות $X_1, X_2 \sim N$ או מדגמים מספיק גדולים | | | תנאים: |
| $Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ דוחים את H_0 | $Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ דוחים את H_0 | או $Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ דוחים את H_0 | כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0 : |

$$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - c}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \text{ : סטטיסטי המבחן}$$

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

| נדחה H_0 אם מתקיים: | |
|---|---|
| $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ | $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ <p style="text-align: center;">או</p> $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ |
| $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ | |

התפלגות הפרש הממוצעים: $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$

$$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

התקנון:

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בשנת 2004 הפער בין השכר הממוצע של הגברים לנשים היה 3000 ₪ לטובת הגברים. מעוניינים לבדוק האם כיום הצטמצם הפער בין הגברים לנשים מבחינת השכר הממוצע. נדגמו 100 עובדים גברים. שכרם הממוצע היה 9,072 ₪. נדגמו 80 עובדות, שכרן הממוצע היה 7809 ₪. לצורך פתרון נניח שסטיות התקן של השכר ידועות ושוות ל-2000 ₪ באוכלוסיית הנשים ו-3000 ₪ באוכלוסיית הגברים. מה המסקנה ברמת מבוהקות של 5%?

שאלות

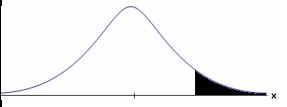

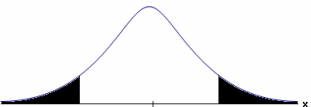
- (1) מחקר טוען שאנשים החיים במרכז הארץ צופים בממוצע בטלוויזיה יותר מאנשים שלא חיים במרכז. נדגמו 100 אנשים מהמרכז ו-107 אנשים לא מהמרכז. אנשים אלה נשאלו כמה שעות ביום הם נוהגים לצפות בטלוויזיה. במדגם של מרכז הארץ התקבל ממוצע 2.7 שעות. במדגם של מחוץ למרכז הארץ התקבל ממוצע 1.8 שעות. לצורך פתרון הניחו שבכל אזור, סטיית התקן היא שעה 1 ביום. בדקו את טענת המחקר ברמת מובהקות של 1%.
- (2) ציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית עם סטיית תקן 100. מכון ללימוד פסיכומטרי טוען שהוא יכול לשפר את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות. במדגם של 20 נבחנים שניגשו למבחן ללא הכנה במכון התקבל ממוצע 508. במדגם של 25 נבחנים שעברו הכנה במכון התקבל ממוצע ציונים 561. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%.
- (3) במדגם אקראי של 20 ימים נבדקה התפוקה של מפעל ביום. התפוקה הממוצעת הייתה של 340 מוצרים ליום. במדגם אקראי של 20 ימים אחרים נבדקה התפוקה של המפעל בלילה והתפוקה הממוצעת הייתה 295. לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של התפוקה ביום היא 40 מוצרים ובלילה 30 מוצרים.
- א. מהי מובהקות התוצאה לבדיקה האם התפוקה הממוצעת היומית גבוהה מהתפוקה הממוצעת הלילית.
- ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 8%?
- (4) במחקר מקיף שנעשה באירופה נקבע שגברים גבוהים מנשים ב-8 ס"מ בממוצע. מחקר ישראלי מתעניין לבדוק האם בישראל הפער גדול יותר. לצורך המחקר נדגמו 40 גברים ו-40 נשים באקראי. כמו כן, נניח שסטיות התקן של הגברים והנשים ידועות ושוות ל-6 ס"מ אצל הנשים ו-12 ס"מ אצל הגברים.
- א. מהן השערות המחקר ומהו כלל ההכרעה ברמת מובהקות של 10%?
- ב. אם בישראל הפער בין גברים לנשים מבחינת הגובה הממוצע הוא 11 ס"מ, מה ההסתברות שהמחקר לא יגלה זאת? איך קוראים להסתברות הזאת?

תשובות סופיות

- (1) נדחה H_0 .
- (2) לא נדחה את H_0 .
- (3) א. 0
ב. נדחה את H_0 .
- (4) א. נדחה את H_0 , אם במדגם הגברים יהיו גבוהים בממוצע מהנשים ביותר מ-10.72 ס"מ.
ב. 0.6331

בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

כשהשונויות של האוכלוסייה לא ידועות והמדגמים גדולים – רקע

| השערת האפס: השערה אלטרנטיבית: | | השערת האפס: השערה אלטרנטיבית: | | השערת האפס: השערה אלטרנטיבית: | | השערת האפס: השערה אלטרנטיבית: | |
|--|--|---|--|----------------------------------|--|----------------------------------|--------|
| $H_0 \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \mu_1 - \mu_2 > c$ | $H_0 \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \mu_1 - \mu_2 < c$ | $H_0 \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \mu_1 - \mu_2 \neq c$ | 1. מדגמים בלתי תלויים 2. σ_1, σ_2 לא ידועות 3. מדגמים מספיק גדולים | | | | תנאים: |
| $Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ דוחים את H_0 | $Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ דוחים את H_0 | או $Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ דוחים את H_0 | כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0 : | | | | |

$$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - c}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \quad \text{סטטיסטי המבחן:}$$

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

| נדחה H_0 אם מתקיים: | |
|---|---|
| $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$ | $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$ <p style="text-align: center;">או</p> $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$ |
| $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$ | |

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נרצה לבדוק האם קיים הבדל בין ממוצע ציוני הפסיכומטרי של חיילים לממוצע ציוני הפסיכומטרי של תלמידי תיכון. במדגם של 46 נבחנים חיילים התקבל ממוצע 543 וסטיית תקן 123. במדגם של 50 תלמידי תיכון התקבל ממוצע 508 וסטיית תקן 178. מה המסקנה ברמת מובהקות 5%?

שאלות

(1) חברה להנדסת בניין מעוניינת להשוות ברמת הקשיות של שני סוגי ברגים. במדגם של 35 ברגים מסוג א' התקבל רמת קשיות ממוצעת של 28 יחידות וסטיית תקן 4, ובמדגם של 45 ברגים מסוג ב' התקבל רמת קשיות ממוצעת של 25 וסטיית תקן 6. האם על סמך תוצאות המדגם יש הבדל בין סוגי הברגים מבחינת רמת הקשיות שלהם? בדקו ברמת מובהקות של 5%.

(2) כדי לבדוק האם נהגים השותים תחת השפעת אלכוהול נוהגים מהר יותר מאלו שאינם שותים בוצע מדגם שבו בדקו את המהירות המקסימאלית של כל נהג בקמ"ש. להלן התוצאות:

| S | \bar{X} | גדול מדגם | |
|----|-----------|-----------|---------------------------|
| 20 | 80 | 70 | נהגים השותים אלכוהול |
| 15 | 60 | 100 | נהגים שאינם שותים אלכוהול |

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

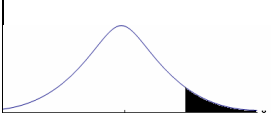
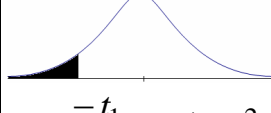
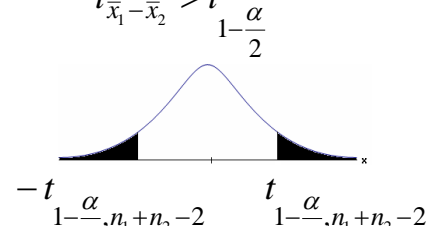
תשובות סופיות

(1) נדחה את H_0 .

(2) א. 0. ב. נדחה את H_0 .

בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

כששונויות האוכלוסייה לא ידועות ומניחים שהן שוות – רקע

| $H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 > c$ | $H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 < c$ | $H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 \neq c$ | השערת האפס: השערה אלטרנטיבית: תנאים: |
|--|--|---|--|
| 1. מדגמים בלתי תלויים 2. σ_1, σ_2 לא ידועות אך שוות 3. המשתנים בכל אוכלוסייה מתפלגים נורמלית | | | |
| $t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$  $t_{1-\alpha, n_1+n_2-2}$ דוחים את H_0 | $t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$  $-t_{1-\alpha, n_1+n_2-2}$ דוחים את H_0 | $t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}$ או $t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}$  $-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}$ דוחים את H_0 | אזור הדחייה של H_0 |

$$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - c}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}}$$

סטטיסטי המבחן:

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

השונויות המשוקללת:

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

| נדחה H_0 אם מתקיים: | |
|---|---|
| $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$ | $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$ <p style="text-align: center;">או</p> $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$ |
| $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$ | |

דוגמה (פתרון בהקלטה):

חברה המייצרת מוצרי בנייה טוענת שפיתחה סגסוגת (תערובת מתכות) שטמפרטורת ההתכה שלה גבוהה משמעותית מטמפרטורת ההתכה של הסגסוגת לבנייה שמשמשים בה כיום לבניית בניינים. לצורך בדיקת טענת המחקר נדגמו 10 יחידות של מתכות מהסוג הישן ו-12 יחידות של מתכות מהסוג החדש. להלן תוצאות המדגם:

טמפרטורת ההתכה הממוצעת במתכת הישנה 1170 מעלות עם אומד חסר הטיה לשונות $S^2 = 200$.

טמפרטורת ההתכה הממוצעת במתכת החדשה 1317 מעלות עם אומד חסר הטיה לשונות $S^2 = 260$.

נניח לצורך פתרון שטמפרטורת ההתכה מתפלגת נורמאלית עם אותה שונות במתכות השונות. בדקו ברמת מובהקות של 5%.

שאלות

1) להלן נתונים של שטחי דירות מתוך דירות שנבנו בשנת 2012 ובשנת 2013 (במ"ר):

| | | | | | | | |
|-----|----|----|-----|----|-----|-----|------|
| 120 | 94 | 90 | 130 | 95 | 112 | 120 | 2012 |
| | 69 | 74 | 105 | 91 | 82 | 100 | 2013 |

בדקו שבשנת 2013 הייתה ירידה משמעותית בשטחי הדירות לעומת שנת 2012 עבור רמת מובהקות של 5%.
הניחו ששטחי הדירות בכל שנה מתפלגים נורמלית עם אותה שונות.

2) נדגמו 15 ישראלים ו-15 אמריקאים. כל הנדגמים נגשו למבחן IQ. להלן תוצאות המדגם:

| המדינה | ישראל | ארה"ב |
|---------------------|---------|---------|
| גודל המדגם | 15 | 15 |
| סכום הציונים | 1560 | 1470 |
| סכום ריבועי הציונים | 165,390 | 147,560 |

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל של נקודה בין ישראלים לאמריקאים מבחינת ממוצע הציונים במבחן ה-IQ לטובת ישראל.
רשמו את כל ההנחות הדרושות לצורך פתרון התרגיל.

3) להלן תוצאות מדגם הבדק אורך חיים של נורות מסוג W60 ומסוג W100. אורך החיים נמדד בשעות.

| 100W | 60W | הקבוצה |
|------|------|-----------|
| 956 | 1007 | \bar{x} |
| 72 | 80 | S |
| 15 | 13 | n |

- בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W60 דולקות בממוצע יותר מאשר נורות מסוג W100. רשמו את כל ההנחות הדרושות לפתרון.
- עבור איזו רמת מובהקות ניתן לקבוע שנורות מסוג W60 דולקות בממוצע יותר מאשר נורות מסוג 100?
- בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W60 דולקות יותר מ 1000 שעות. רשמו את כל ההנחות הדרושות.

תשובות סופיות

- (1) נדחה את H_0 .
- (2) הנחות:
1. סטיות התקן שוות.
2. המשתנים מתפלגים נורמלית.
נקבל את H_0 .
- (3) א. נדחה את H_0 .
ב. רמת מובהקות של לפחות 5%.
ג. לא נדחה את H_0 .

סטטיסטיקה

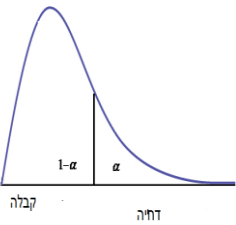
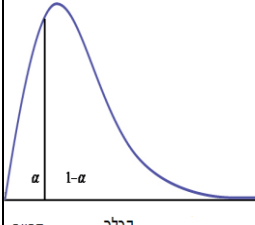
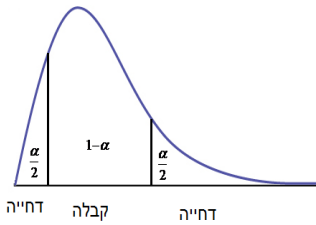
פרק 28 - בדיקת השערות על שוניות

תוכן העניינים

1. בדיקת השערות על שתי שוניות.....149

בדיקת השערות על שתי שוניות:

רקע:

| השערת האפס : השערה אלטרנטיבית : | תנאים : | השערת האפס : השערה אלטרנטיבית : | השערת האפס : השערה אלטרנטיבית : |
|---|---|---|--|
| $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ $H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$ | $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ $H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$ | $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ $H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$ | השערת האפס : השערה אלטרנטיבית : |
| $X_1, X_2 \sim N$.2 | | 1. מדגמים בלתי תלויים | |
|  <p>קבלה דחייה</p> $F \geq f_{1-\alpha}^{(n_1-1, n_2-1)}$ |  <p>דחייה קבלה</p> $F \leq \frac{1}{f_{1-\alpha}^{(n_2-1, n_1-1)}}$ |  <p>דחייה קבלה דחייה</p> $F \geq f_{1-\alpha/2}^{(n_1-1, n_2-1)}$ <p>או</p> $F \leq \frac{1}{f_{1-\alpha/2}^{(n_2-1, n_1-1)}}$ | נדחה את השערת האפס אם : |

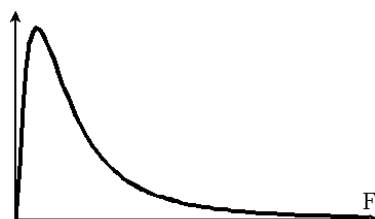
סטטיסטי המבחן: $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$

התפלגות F:

אם $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ ו- $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma^2)$ אזי: $\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$

התפלגות F הינה התפלגות אסימטרית חיובית התלויה בדרגות חופש של המונה ושל המכנה.

כמו כן בהתפלגות F מתקיימת התכונה הבאה: $F_\alpha(n_1-1, n_2-1) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_2-1, n_1-1)}$



$df_1 = n_1 - 1$

$df_2 = n_2 - 1$

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

מעוניינים להשוות בין נשים וגברים מבחינת השונות בזמנים שלהם לבצע משימה מסוימת. במדגם של 10 גברים התקבלו התוצאות הבאות לגבי זמני

$$\sum (y_i - \bar{y})^2 = 204 \quad \cdot$$

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 200 \quad \cdot$$

במדגם של 13 נשים התקבלו התוצאות הבאות :
 בדקו ברמת מובהקות של 2% האם קיים הבדל בין השונות? מה יש להניח?

| α = 0.05 | | טבלת ערכים קריטיים לפי התפלגות F | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----------------|--------|----------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| ד"ח מנהל"ח מנחה | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 16 | 20 | 24 | 60 | 120 | ∞ |
| 1 | 161.45 | 199.50 | 215.71 | 224.58 | 230.16 | 233.99 | 236.77 | 238.88 | 240.54 | 241.88 | 243.91 | 246.46 | 248.01 | 249.05 | 252.20 | 253.25 | 254.31 |
| 2 | 18.51 | 19.00 | 19.16 | 19.25 | 19.30 | 19.33 | 19.35 | 19.37 | 19.38 | 19.40 | 19.41 | 19.43 | 19.45 | 19.45 | 19.48 | 19.49 | 19.50 |
| 3 | 10.13 | 9.55 | 9.28 | 9.12 | 9.01 | 8.94 | 8.89 | 8.85 | 8.81 | 8.79 | 8.74 | 8.69 | 8.66 | 8.64 | 8.57 | 8.55 | 8.53 |
| 4 | 7.71 | 6.94 | 6.59 | 6.39 | 6.26 | 6.16 | 6.09 | 6.04 | 6.00 | 5.96 | 5.91 | 5.84 | 5.80 | 5.77 | 5.69 | 5.66 | 5.63 |
| 5 | 6.61 | 5.79 | 5.41 | 5.19 | 5.05 | 4.95 | 4.88 | 4.82 | 4.77 | 4.74 | 4.68 | 4.60 | 4.56 | 4.53 | 4.43 | 4.40 | 4.37 |
| 6 | 5.99 | 5.14 | 4.76 | 4.53 | 4.39 | 4.28 | 4.21 | 4.15 | 4.10 | 4.06 | 4.00 | 3.92 | 3.87 | 3.84 | 3.74 | 3.70 | 3.67 |
| 7 | 5.59 | 4.74 | 4.35 | 4.12 | 3.97 | 3.87 | 3.79 | 3.73 | 3.68 | 3.64 | 3.57 | 3.49 | 3.44 | 3.41 | 3.30 | 3.27 | 3.23 |
| 8 | 5.32 | 4.46 | 4.07 | 3.84 | 3.69 | 3.58 | 3.50 | 3.44 | 3.39 | 3.35 | 3.28 | 3.20 | 3.15 | 3.12 | 3.01 | 2.97 | 2.93 |
| 9 | 5.12 | 4.26 | 3.86 | 3.63 | 3.48 | 3.37 | 3.29 | 3.23 | 3.18 | 3.14 | 3.07 | 2.99 | 2.94 | 2.90 | 2.79 | 2.75 | 2.71 |
| 10 | 4.96 | 4.10 | 3.71 | 3.48 | 3.33 | 3.22 | 3.14 | 3.07 | 3.02 | 2.98 | 2.91 | 2.83 | 2.77 | 2.74 | 2.62 | 2.58 | 2.54 |
| 11 | 4.84 | 3.98 | 3.59 | 3.36 | 3.20 | 3.09 | 3.01 | 2.95 | 2.90 | 2.85 | 2.79 | 2.70 | 2.65 | 2.61 | 2.49 | 2.45 | 2.40 |
| 12 | 4.75 | 3.89 | 3.49 | 3.26 | 3.11 | 3.00 | 2.91 | 2.85 | 2.80 | 2.75 | 2.69 | 2.60 | 2.54 | 2.51 | 2.38 | 2.34 | 2.30 |
| 13 | 4.67 | 3.81 | 3.41 | 3.18 | 3.03 | 2.92 | 2.83 | 2.77 | 2.71 | 2.67 | 2.60 | 2.51 | 2.46 | 2.42 | 2.30 | 2.25 | 2.21 |
| 14 | 4.60 | 3.74 | 3.34 | 3.11 | 2.96 | 2.85 | 2.76 | 2.70 | 2.65 | 2.60 | 2.53 | 2.44 | 2.39 | 2.35 | 2.22 | 2.18 | 2.13 |
| 15 | 4.54 | 3.68 | 3.29 | 3.06 | 2.90 | 2.79 | 2.71 | 2.64 | 2.59 | 2.54 | 2.48 | 2.38 | 2.33 | 2.29 | 2.16 | 2.11 | 2.07 |
| 16 | 4.49 | 3.63 | 3.24 | 3.01 | 2.85 | 2.74 | 2.66 | 2.59 | 2.54 | 2.49 | 2.42 | 2.33 | 2.28 | 2.24 | 2.11 | 2.06 | 2.01 |
| 17 | 4.45 | 3.59 | 3.20 | 2.96 | 2.81 | 2.70 | 2.61 | 2.55 | 2.49 | 2.45 | 2.38 | 2.29 | 2.23 | 2.19 | 2.06 | 2.01 | 1.96 |
| 18 | 4.41 | 3.55 | 3.16 | 2.93 | 2.77 | 2.66 | 2.58 | 2.51 | 2.46 | 2.41 | 2.34 | 2.25 | 2.19 | 2.15 | 2.02 | 1.97 | 1.92 |
| 19 | 4.38 | 3.52 | 3.13 | 2.90 | 2.74 | 2.63 | 2.54 | 2.48 | 2.42 | 2.38 | 2.31 | 2.21 | 2.16 | 2.11 | 1.98 | 1.93 | 1.88 |
| 20 | 4.35 | 3.49 | 3.10 | 2.87 | 2.71 | 2.60 | 2.51 | 2.45 | 2.39 | 2.35 | 2.28 | 2.18 | 2.12 | 2.08 | 1.95 | 1.90 | 1.84 |
| 21 | 4.32 | 3.47 | 3.07 | 2.84 | 2.68 | 2.57 | 2.49 | 2.42 | 2.37 | 2.32 | 2.25 | 2.16 | 2.10 | 2.05 | 1.92 | 1.87 | 1.81 |
| 22 | 4.30 | 3.44 | 3.05 | 2.82 | 2.66 | 2.55 | 2.46 | 2.40 | 2.34 | 2.30 | 2.23 | 2.13 | 2.07 | 2.03 | 1.89 | 1.84 | 1.78 |
| 23 | 4.28 | 3.42 | 3.03 | 2.80 | 2.64 | 2.53 | 2.44 | 2.37 | 2.32 | 2.27 | 2.20 | 2.11 | 2.05 | 2.01 | 1.86 | 1.81 | 1.76 |
| 24 | 4.26 | 3.40 | 3.01 | 2.78 | 2.62 | 2.51 | 2.42 | 2.36 | 2.30 | 2.25 | 2.18 | 2.09 | 2.03 | 1.98 | 1.84 | 1.79 | 1.73 |
| 25 | 4.24 | 3.39 | 2.99 | 2.76 | 2.60 | 2.49 | 2.40 | 2.34 | 2.28 | 2.24 | 2.16 | 2.07 | 2.01 | 1.96 | 1.82 | 1.77 | 1.71 |
| 26 | 4.23 | 3.37 | 2.98 | 2.74 | 2.59 | 2.47 | 2.39 | 2.32 | 2.27 | 2.22 | 2.15 | 2.05 | 1.99 | 1.95 | 1.80 | 1.75 | 1.69 |
| 27 | 4.21 | 3.35 | 2.96 | 2.73 | 2.57 | 2.46 | 2.37 | 2.31 | 2.25 | 2.20 | 2.13 | 2.04 | 1.97 | 1.93 | 1.79 | 1.73 | 1.67 |
| 28 | 4.20 | 3.34 | 2.95 | 2.71 | 2.56 | 2.45 | 2.36 | 2.29 | 2.24 | 2.19 | 2.12 | 2.02 | 1.96 | 1.91 | 1.77 | 1.71 | 1.65 |
| 29 | 4.18 | 3.33 | 2.93 | 2.70 | 2.55 | 2.43 | 2.35 | 2.28 | 2.22 | 2.18 | 2.10 | 2.01 | 1.94 | 1.90 | 1.75 | 1.70 | 1.64 |
| 30 | 4.17 | 3.32 | 2.92 | 2.69 | 2.53 | 2.42 | 2.33 | 2.27 | 2.21 | 2.16 | 2.09 | 1.99 | 1.93 | 1.89 | 1.74 | 1.68 | 1.62 |
| 40 | 4.08 | 3.23 | 2.84 | 2.61 | 2.45 | 2.34 | 2.25 | 2.18 | 2.12 | 2.08 | 2.00 | 1.90 | 1.84 | 1.79 | 1.64 | 1.58 | 1.51 |
| 50 | 4.03 | 3.18 | 2.79 | 2.56 | 2.40 | 2.29 | 2.20 | 2.13 | 2.07 | 2.03 | 1.95 | 1.85 | 1.78 | 1.74 | 1.58 | 1.51 | 1.44 |
| 60 | 4.00 | 3.15 | 2.76 | 2.53 | 2.37 | 2.25 | 2.17 | 2.10 | 2.04 | 1.99 | 1.92 | 1.82 | 1.75 | 1.70 | 1.53 | 1.47 | 1.39 |
| 90 | 3.95 | 3.10 | 2.71 | 2.47 | 2.32 | 2.20 | 2.11 | 2.04 | 1.99 | 1.94 | 1.86 | 1.76 | 1.69 | 1.64 | 1.46 | 1.39 | 1.30 |
| 120 | 3.92 | 3.07 | 2.68 | 2.45 | 2.29 | 2.18 | 2.09 | 2.02 | 1.96 | 1.91 | 1.83 | 1.73 | 1.66 | 1.61 | 1.43 | 1.35 | 1.25 |
| ∞ | 3.84 | 3.00 | 2.60 | 2.37 | 2.21 | 2.10 | 2.01 | 1.94 | 1.88 | 1.83 | 1.75 | 1.64 | 1.57 | 1.52 | 1.32 | 1.22 | 1.00 |

| טבלת ערכים קריטיים לפי התפלגות F $\alpha = 0.01$ ראה איור מסה. | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|----------|
| ד"ח מונה/ד"ח מכנה | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 16 | 20 | 24 | 60 | 120 | ∞ |
| 1 | 4052.18 | 4999.50 | 5403.35 | 5624.58 | 5763.65 | 5858.99 | 5928.36 | 5981.07 | 6022.47 | 6055.85 | 6106.32 | 6170.10 | 6208.73 | 6234.63 | 6313.03 | 6339.39 | 6365.86 |
| 2 | 98.50 | 99.00 | 99.17 | 99.25 | 99.30 | 99.33 | 99.36 | 99.37 | 99.39 | 99.40 | 99.42 | 99.44 | 99.45 | 99.46 | 99.48 | 99.49 | 99.50 |
| 3 | 34.12 | 30.82 | 29.46 | 28.71 | 28.24 | 27.91 | 27.67 | 27.49 | 27.35 | 27.23 | 27.05 | 26.83 | 26.69 | 26.60 | 26.32 | 26.22 | 26.13 |
| 4 | 21.20 | 18.00 | 16.69 | 15.98 | 15.52 | 15.21 | 14.98 | 14.80 | 14.66 | 14.55 | 14.37 | 14.15 | 14.02 | 13.93 | 13.65 | 13.56 | 13.46 |
| 5 | 16.26 | 13.27 | 12.06 | 11.39 | 10.97 | 10.67 | 10.46 | 10.29 | 10.16 | 10.05 | 9.89 | 9.68 | 9.55 | 9.47 | 9.20 | 9.11 | 9.02 |
| 6 | 13.75 | 10.92 | 9.78 | 9.15 | 8.75 | 8.47 | 8.26 | 8.10 | 7.98 | 7.87 | 7.72 | 7.52 | 7.40 | 7.31 | 7.06 | 6.97 | 6.88 |
| 7 | 12.25 | 9.55 | 8.45 | 7.85 | 7.46 | 7.19 | 6.99 | 6.84 | 6.72 | 6.62 | 6.47 | 6.28 | 6.16 | 6.07 | 5.82 | 5.74 | 5.65 |
| 8 | 11.26 | 8.65 | 7.59 | 7.01 | 6.63 | 6.37 | 6.18 | 6.03 | 5.91 | 5.81 | 5.67 | 5.48 | 5.36 | 5.28 | 5.03 | 4.95 | 4.86 |
| 9 | 10.56 | 8.02 | 6.99 | 6.42 | 6.06 | 5.80 | 5.61 | 5.47 | 5.35 | 5.26 | 5.11 | 4.92 | 4.81 | 4.73 | 4.48 | 4.40 | 4.31 |
| 10 | 10.04 | 7.56 | 6.55 | 5.99 | 5.64 | 5.39 | 5.20 | 5.06 | 4.94 | 4.85 | 4.71 | 4.52 | 4.41 | 4.33 | 4.08 | 4.00 | 3.91 |
| 11 | 9.65 | 7.21 | 6.22 | 5.67 | 5.32 | 5.07 | 4.89 | 4.74 | 4.63 | 4.54 | 4.40 | 4.21 | 4.10 | 4.02 | 3.78 | 3.69 | 3.60 |
| 12 | 9.33 | 6.93 | 5.95 | 5.41 | 5.06 | 4.82 | 4.64 | 4.50 | 4.39 | 4.30 | 4.16 | 3.97 | 3.86 | 3.78 | 3.54 | 3.45 | 3.36 |
| 13 | 9.07 | 6.70 | 5.74 | 5.21 | 4.86 | 4.62 | 4.44 | 4.30 | 4.19 | 4.10 | 3.96 | 3.78 | 3.66 | 3.59 | 3.34 | 3.25 | 3.17 |
| 14 | 8.86 | 6.51 | 5.56 | 5.04 | 4.69 | 4.46 | 4.28 | 4.14 | 4.03 | 3.94 | 3.80 | 3.62 | 3.51 | 3.43 | 3.18 | 3.09 | 3.00 |
| 15 | 8.68 | 6.36 | 5.42 | 4.89 | 4.56 | 4.32 | 4.14 | 4.00 | 3.89 | 3.80 | 3.67 | 3.49 | 3.37 | 3.29 | 3.05 | 2.96 | 2.87 |
| 16 | 8.53 | 6.23 | 5.29 | 4.77 | 4.44 | 4.20 | 4.03 | 3.89 | 3.78 | 3.69 | 3.55 | 3.37 | 3.26 | 3.18 | 2.93 | 2.84 | 2.75 |
| 17 | 8.40 | 6.11 | 5.18 | 4.67 | 4.34 | 4.10 | 3.93 | 3.79 | 3.68 | 3.59 | 3.46 | 3.27 | 3.16 | 3.08 | 2.83 | 2.75 | 2.65 |
| 18 | 8.29 | 6.01 | 5.09 | 4.58 | 4.25 | 4.01 | 3.84 | 3.71 | 3.60 | 3.51 | 3.37 | 3.19 | 3.08 | 3.00 | 2.75 | 2.66 | 2.57 |
| 19 | 8.18 | 5.93 | 5.01 | 4.50 | 4.17 | 3.94 | 3.77 | 3.63 | 3.52 | 3.43 | 3.30 | 3.12 | 3.00 | 2.92 | 2.67 | 2.58 | 2.49 |
| 20 | 8.10 | 5.85 | 4.94 | 4.43 | 4.10 | 3.87 | 3.70 | 3.56 | 3.46 | 3.37 | 3.23 | 3.05 | 2.94 | 2.86 | 2.61 | 2.52 | 2.42 |
| 21 | 8.02 | 5.78 | 4.87 | 4.37 | 4.04 | 3.81 | 3.64 | 3.51 | 3.40 | 3.31 | 3.17 | 2.99 | 2.88 | 2.80 | 2.55 | 2.46 | 2.36 |
| 22 | 7.95 | 5.72 | 4.82 | 4.31 | 3.99 | 3.76 | 3.59 | 3.45 | 3.35 | 3.26 | 3.12 | 2.94 | 2.83 | 2.75 | 2.50 | 2.40 | 2.31 |
| 23 | 7.88 | 5.66 | 4.76 | 4.26 | 3.94 | 3.71 | 3.54 | 3.41 | 3.30 | 3.21 | 3.07 | 2.89 | 2.78 | 2.70 | 2.45 | 2.35 | 2.26 |
| 24 | 7.82 | 5.61 | 4.72 | 4.22 | 3.90 | 3.67 | 3.50 | 3.36 | 3.26 | 3.17 | 3.03 | 2.85 | 2.74 | 2.66 | 2.40 | 2.31 | 2.21 |
| 25 | 7.77 | 5.57 | 4.68 | 4.18 | 3.85 | 3.63 | 3.46 | 3.32 | 3.22 | 3.13 | 2.99 | 2.81 | 2.70 | 2.62 | 2.36 | 2.27 | 2.17 |
| 26 | 7.72 | 5.53 | 4.64 | 4.14 | 3.82 | 3.59 | 3.42 | 3.29 | 3.18 | 3.09 | 2.96 | 2.78 | 2.66 | 2.58 | 2.33 | 2.23 | 2.13 |
| 27 | 7.68 | 5.49 | 4.60 | 4.11 | 3.78 | 3.56 | 3.39 | 3.26 | 3.15 | 3.06 | 2.93 | 2.75 | 2.63 | 2.55 | 2.29 | 2.20 | 2.10 |
| 28 | 7.64 | 5.45 | 4.57 | 4.07 | 3.75 | 3.53 | 3.36 | 3.23 | 3.12 | 3.03 | 2.90 | 2.72 | 2.60 | 2.52 | 2.26 | 2.17 | 2.06 |
| 29 | 7.60 | 5.42 | 4.54 | 4.04 | 3.73 | 3.50 | 3.33 | 3.20 | 3.09 | 3.00 | 2.87 | 2.69 | 2.57 | 2.49 | 2.23 | 2.14 | 2.03 |
| 30 | 7.56 | 5.39 | 4.51 | 4.02 | 3.70 | 3.47 | 3.30 | 3.17 | 3.07 | 2.98 | 2.84 | 2.66 | 2.55 | 2.47 | 2.21 | 2.11 | 2.01 |
| 40 | 7.31 | 5.18 | 4.31 | 3.83 | 3.51 | 3.29 | 3.12 | 2.99 | 2.89 | 2.80 | 2.66 | 2.48 | 2.37 | 2.29 | 2.02 | 1.92 | 1.80 |
| 50 | 7.17 | 5.06 | 4.20 | 3.72 | 3.41 | 3.19 | 3.02 | 2.89 | 2.78 | 2.70 | 2.56 | 2.38 | 2.27 | 2.18 | 1.91 | 1.80 | 1.68 |
| 60 | 7.08 | 4.98 | 4.13 | 3.65 | 3.34 | 3.12 | 2.95 | 2.82 | 2.72 | 2.63 | 2.50 | 2.31 | 2.20 | 2.12 | 1.84 | 1.73 | 1.60 |
| 90 | 6.93 | 4.85 | 4.01 | 3.53 | 3.23 | 3.01 | 2.84 | 2.72 | 2.61 | 2.52 | 2.39 | 2.21 | 2.09 | 2.00 | 1.72 | 1.60 | 1.46 |
| 120 | 6.85 | 4.79 | 3.95 | 3.48 | 3.17 | 2.96 | 2.79 | 2.66 | 2.56 | 2.47 | 2.34 | 2.15 | 2.03 | 1.95 | 1.66 | 1.53 | 1.38 |
| ∞ | 6.63 | 4.61 | 3.78 | 3.32 | 3.02 | 2.80 | 2.64 | 2.51 | 2.41 | 2.32 | 2.18 | 2.00 | 1.88 | 1.79 | 1.47 | 1.32 | 1.00 |

שאלות:

- (1) להלן נתונים על שטחי דירות במ"ר עבור דירות חדשות שנבנו בשנת 2012 ובשנת 2013:

| | | | | | | | |
|-----|----|----|-----|----|-----|-----|------|
| 120 | 94 | 90 | 130 | 95 | 112 | 120 | 2012 |
| | 69 | 74 | 105 | 91 | 82 | 100 | 2013 |

- א. בדקו ברמת מובהקות של 10% את ההשערה ששוניות שטחי הדירות החדשות בשנת 2012 ובשנת 2013 שוות. מה הן ההנחות הדרושות לביצוע הבדיקה?
 ב. האם וכיצד הייתה משתנה המסקנה מהסעיף הקודם אם מסתבר שחלה טעות ברישום ויש להפחית 10 מ"ר מכל הדירות שמופיעות במדגם?

- (2) בתחום הבינוי משתמשים בשני סוגי מתכות: מתכת A ומתכת B. מחקר מעוניין לבדוק האם קיים הבדל בין שני סוגי המתכות מבחינת החוזק שלהן. דגמו מספר

| B | A | סוג המתכת |
|-----|----|--------------|
| 10 | 8 | n |
| 30 | 16 | $\sum X_i$ |
| 198 | 60 | $\sum X_i^2$ |

- יחידות מתכת מכל סוג והתקבלו התוצאות הבאות:
 יש להניח שרמת החוזק של המתכות מתפלגת נורמאלית.
 א. האם קיים הבדל בין שוניות החוזק של מתכות?
 ב. האם קיים הבדל בין תוחלות החוזק של מתכות?
 בכל סעיף רמת מובהקות של 10%.

תשובות סופיות:

- (1) א. לא נדחה את H_0 . ב. מסקנה לא תשתנה.
 (2) א. לא נדחה את H_0 . ב. לא נדחה את H_0 .

סטטיסטיקה

פרק 29 - שאלות מסכמות בבדיקת השערות

תוכן העניינים

1. שאלות רב ברירה (אמריקאיות) 153

שאלות סיכום – שאלות רב ברירה על בדיקת השערות

(1) בבדיקת השערה חד-צדדית ימנית ברמת מובהקות $\alpha = 0.01$, נדחתה השערת האפס. מה הייתה המסקנה לו נבדקה אותה ההשערה באמצעות אותם נתונים ברמת מובהקות $\alpha = 0.05$?

- השערת האפס הייתה נדחית.
- השערת האפס לא הייתה נדחית.
- ההשערה המחקרית הייתה נדחית.
- בהעדר נתונים נוספים, לא ניתן לדעת.

(2) על מנת לבדוק האם ההסתברות ללידת בן הינה חצי, נבחר מדגם מקרי של 200 ילדים, ונמצא שישנם 120 בנים. מהן ההשערות האלטרנטיביות להשערת האפס?

א. $H_1 : p = 0.5$

ב. $H_1 : p = 0.6$

ג. $H_1 : p > 0.5$

ד. $H_1 : p \neq 0.5$

(3) לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה. לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים נורמאלית ללא ידיעת השונות האמיתית. המבחן שיש לבצע כאן הוא:

א. מבחן Z למדגם יחיד.

ב. מבחן T למדגם יחיד.

ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.

ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

(4) כדי לבדוק את הטענה שגברים רווקים שוקלים פחות מגברים נשואים לקח חוקר מדגם מקרי של 4 גברים ומדד את משקלם לפני נישואיהם ולאחר נישואיהם. הנה התוצאות:

מהן ההשערות הנבדקות? (ההפרש חושב $X - Y$)

| | | | | |
|----|----|----|----|-------------------|
| 68 | 82 | 93 | 69 | לפני הנישואין - X |
| 71 | 84 | 88 | 80 | לאחר הנישואין - Y |

א. $H_1 : \mu_d < 0, H_0 : \mu_d = 0$

ב. $H_1 : \mu_x - \mu_y < 0, H_0 : \mu_x - \mu_y = 0$

ג. $H_1 : \mu_x - \mu_y < 0, H_0 : \mu_x - \mu_y = 0$

ד. $H_1 : \mu_d > 0, H_0 : \mu_d = 0$

(5) חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן :

- השערת האפס נכונה.
- השערת האפס נדחתה.
- השערת האפס לא נדחתה.
- אף אחת מהתשובות לא נכונה בהכרח.

(6) ידוע כי ילד בגיל שנתיים ישן בממוצע 9 שעות בלילה. במדגם של 20 תינוקות

בני שנתיים המתגוררים בצפון נמצא, כי ממוצע שעות השינה בלילה הינו 10 עם סטיית תקן של 1.1 במדגם של 10 תינוקות בדרום נמצא, כי ממוצע שעות השינה בלילה הינו 7.9 עם סטיית תקן של 1.1. על מנת להשוות בין ממוצע שעות השינה של ילדים מהצפון לבין זה של כלל הילדים יש לערוך _____, ועל מנת להשוות בין ממוצע שעות השינה של ילדים מהדרום לזה של ילדים המתגוררים בצפון יש לערוך _____.

יש להניח שההנחות הדרושות מתקיימות.

- מבחן Z למדגם יחיד ; מבחן T למדגם יחיד.
- מבחן T למדגם יחיד ; מבחן T למדגמים תלויים.
- מבחן T למדגם יחיד ; מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- מבחן T למדגמים בלתי תלויים ; מבחן T לממוצע יחיד.

(7) מובהקות התוצאה (PV) היא גם :

- רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.
- רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.
- רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר טרם קיבל את תוצאות המחקר.
- רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.

(8) כדי לבדוק את הטענה שגברים רווקים שוקלים פחות מגברים נשואים לקח

חוקר מדגם מקרי של 4 גברים ומדד את משקלם לפני נישואיהם ולאחר

נישואיהם. הנה התוצאות :

| | | | | |
|----|----|----|----|---------------|
| 68 | 82 | 93 | 69 | לפני הנישואין |
| 71 | 84 | 88 | 80 | לאחר הנישואין |

לבדיקת

באיזה התפלגות משתמשים

ההשערות, ובכמה דרגות חופש :

- ההתפלגות Z ללא דרגות חופש.
- ההתפלגות T ו-3 דרגות חופש.
- ההתפלגות T ו-6 דרגות חופש.
- ההתפלגות χ^2 ו-3 דרגות חופש.

- 9) שני סטטיסטיקאים בודקים השערות ברמת מובהקות $\alpha = 0.05$ על סמך אותו מדגם. סטטיסטיקאי א' בודק את ההשערה: $H_0: \mu = 20$ כנגד האלטרנטיבה $H_1: \mu \neq 20$ ומחליט לא לדחות את השערת האפס. סטטיסטיקאי ב' בודק את ההשערה $H_0: \mu \leq 20$ כנגד האלטרנטיבה $H_1: \mu > 20$ מה יחליט סטטיסטיקאי ב'?
- לדחות את השערת האפס.
 - לא לדחות את השערת האפס.
 - ללא נתונים נוספים אי אפשר לדעת מה יחליט.
- 10) חוקר בדק השערה מסוימת והחליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות 5%. מה נכון לומר?
- הוא בוודאות ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% ואילו ברמת מובהקות 2% יש לבדוק מחדש.
 - הוא בוודאות לא ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% ואילו ברמת מובהקות 2% יש לבדוק מחדש.
 - הוא בוודאות ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% וברמת מובהקות 2%.
 - הוא בוודאות לא ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% ואילו ברמת מובהקות 2% יש לבדוק מחדש.
- 11) רמת הכולסטרול בדמם של אנשים מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 180 מ"ג (ל 100 סמ"ק דם). וסטיית תקן של 10 מ"ג. מעוניינים לבדוק את הטענה שצמחונים הם בעלי רמת כולסטרול נמוכה יותר. נניח שסטיית התקן אצל צמחונים זהה לסטיית התקן של כלל האנשים. במדגם של 20 צמחונים התקבל ממוצע רמת כולסטרול 174.5 מ"ג. אם הוחלט לקבל את הטענה שצמחונים הם בעלי רמת כולסטרול נמוכה יותר איזה סוג טעות אפשרית במסקנה?
- טעות מסוג ראשון.
 - טעות מסוג שני.
 - טעות מסוג שלישי.
 - לא ניתן לדעת כיוון שאנו לא יודעים מה התוחלת האמתית אצל הצמחונים.

12 בסקר שנערך התקבל ש 60% מתוך 220 נשאלים מבקרים אצל השיננית לפחות פעם אחת בשנה. עבור אילו רמות מובהקות ניתן יהיה לקבוע שרוב האוכלוסייה מבקרת אצל השיננית לפחות פעם בשנה?

- א. רמת מובהקות הגדולה מ-5%.
- ב. רמת מובהקות הקטנה מ-5%.
- ג. רמת מובהקות הגדלה מ-0.0015.
- ד. רמת מובהקות הקטנה מ-0.0015.

13 שני חוקרים העוסקים בתחום מחקרי משותף החליטו להסתמך על נתונים של מדגם שפורסם על ידי הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה.

חוקר א' ניסח השערה דו צדדית ואילו חוקר ב' ניסח השערה חד צדדית. מסקנתו של איזה מבין המשפטים הבאים הוא הנכון בנוגע למסקנות החוקרים?

- א. אם חוקר א' ידחה את השערת האפס לא ניתן לדעת מה יחליט חוקר ב' באותה רמת מובהקות.
- ב. אם חוקר א' יקבל את השערת האפס גם חוקר ב' יקבל את השערת האפס באותה רמת מובהקות.
- ג. אם חוקר ב' ידחה את השערת האפס גם חוקר א' ידחה את השערת האפס באותה רמת מובהקות.
- ד. אם חוקר א' ידחה את השערת האפס גם חוקר ב' ידחה את השערת האפס בתנאי שרמת המובהקות כפולה בגודלה.

14 ידוע מנתוני העבר כי תוחלת הציונים בבחינה בפסיכולוגיה היא 79. הועלתה השערה כי תוחלת הציונים בקרב העולים החדשים נמוכה יותר. לצורך בדיקת הטענה נלקח מדגם מקרי של 47 סטודנטים עולים ונמצא ממוצע של 75. מה משמעות הפרמטר בניסוח ההשערות?

- א. תוחלת ציוני העולים באוכלוסייה.
- ב. ממוצע ציוני העולים במדגם.
- ג. תוחלת ציוני האוכלוסייה מנתוני העבר.
- ד. ממוצע ציוני שאר האוכלוסייה במדגם.

15 חוקר ביצע מחקר וידוע כי עשה טעות מסוג 1. מה מהבאים נכון?

- א. החוקר דחה את השערת H_0 כאשר היא הייתה נכונה.
- ב. החוקר דחה את השערת H_1 כאשר היא הייתה נכונה.
- ג. החוקר לא דחה את השערת H_0 כאשר היא הייתה לא נכונה.
- ד. המדגם של החוקר שייך בפועל להתפלגות הדגימה של H_1 .

- 16) חוקר ביקש לבחון האם תאומים זהים אשר הופרדו בילדותם שונים מתאומים זהים אשר גדלו יחדיו מבחינת מידת הפער בין התאומים בלחץ הדם. הוא דגם 20 זוגות תאומים מכל אוכלוסייה ומדד את הפרש בין לחץ הדם בכל זוג תאומים. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?
- מבחן T למדגמים בלתי תלויים עם 38 דרגות חופש.
 - מבחן T למדגמים מזווגים, עם 39 דרגות חופש.
 - מבחן T למדגמים בלתי תלויים עם 39 דרגות חופש.
 - מבחן T למדגמים מזווגים עם 38 דרגות חופש.

- 17) בינואר השנה פורסם שהשכר הממוצע במשק הוא 8,900 ₪. במדגם שנעשה בחודש יוני על 60 עובדים נרשם עבור כל עובד במדגם האם השכר שלו נמוך או לא נמוך מהשכר הממוצע שפורסם בחודש ינואר. מהו המבחן המתאים כדי לבדוק שרוב העובדים בחודש יוני קיבלו שכר הנמוך מהשכר הממוצע שפורסם בחודש ינואר?
- מבחן Z על פרופורציה.
 - מבחן T על תוחלת אחת.
 - מבחן T על שתי תוחלות במדגמים בלתי תלויים.
 - מבחן T על שתי תוחלות במדגמים תלויים.

- 18) שלושה חוקרים רצו לבדוק את השפעתו של שידור פרסומות נגד תאונות דרכים על מהירות הנהיגה של נהגים בישראל (השונות של מהירות הנהיגה בישראל אינה ידועה). עידו השווה את מהירות הנהיגה של קבוצת נהגים אחת, חודש לפני שידור הפרסומות וחודש לאחר שידור הפרסומות. רון השווה את מהירות הנהיגה של קבוצת נהגים, שראו את הפרסומות, למהירות הנהיגה של קבוצת נהגים, שלא ראו את הפרסומות. יואב השווה את מהירות הנהיגה של קבוצת נהגים בחודש בו שודרו הפרסומות, למהירות הנהיגה הממוצעת בישראל על פי נתוני משרד התחבורה. המבחנים בהם צריכים החוקרים להשתמש הם:
- שלושתם במבחן T למדגמים בלתי תלויים.
 - עידו במבחן T למדגמים מזווגים, ורון ויואב במבחן T למדגמים בלתי תלויים.
 - עידו במבחן T למדגמים מזווגים, רון במבחן T למדגמים בלתי תלויים ויואב במבחן T למדגם יחיד.
 - עידו במבחן T למדגמים מזווגים, רון ויואב במבחן T למדגם יחיד.

- 19** במחקר נמצא שתוצאה היא מובהקת ברמת מובהקות של 5%. מה תמיד נכון?
- הגדלת רמת המובהקות לא תשתנה את מסקנת המחקר.
 - הגדלת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.
 - הקטנת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.
 - הקטנת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.
- 20** חוקר ערך מבחן דו צדדי ברמת מובהקות של α והחליט לדחות את השערת האפס. אם החוקר היה עורך מבחן חד צדדי ברמת מובהקות של $\frac{\alpha}{2}$ אזי בהכרח:
- השערת האפס הייתה נדחית.
 - השערת האפס הייתה לא נדחית.
 - לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו במקרה זה.
- 21** ליאור ורוני העלו את אותן השערות על ממוצע האוכלוסייה. כמו כן הם התבססו על אותן תוצאות של מדגם. ליאור השתמש בטבלה של התפלגות Z. רוני השתמשה בטבלה של התפלגות T. מה נוכל לומר בנוגע להחלטת המחקר שלהם?
- אם ליאור ידחה את השערת האפס אז גם בהכרח רוני.
 - אם רוני תדחה את השערת האפס אז גם בהכרח ליאור.
 - שני החוקרים בהכרח יגיעו לאותה מסקנה.
 - לא ניתן לדעת על היחס בין דחיית השערת האפס של שני החוקרים.
- 22** נתון ש $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ כמו כן נתונות ההשערות הבאות: $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu < \mu_0$. חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות. σ^2 לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5% לאחר מכן כדי לחזק את קביעתו הוא דגם עוד 5 תצפיות ושקלל את תוצאות אלה גם למדגם כך שכלל עכשיו 15 תצפיות.
- כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.
 - כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.
 - כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.
- 23** אם חוקר החליט להגדיל את רמת המובהקות במחקר שלו אזי:
- הסיכוי לטעות מסוג ראשון גדל.
 - העוצמה של המבחן גדלה.
 - הסיכוי לטעות מסוג שני גדל.
 - תשובות א ו-ב נכונות.

24) חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן :

- השערת האפס נכונה.
- השערת האפס נדחתה.
- השערת האפס לא נדחתה.
- אף אחת מהתשובות לא נכונה בהכרח.

25) מה המצב הרצוי לחוקר המבצע בדיקת השערה :

| | |
|-------------|----------|
| $1 - \beta$ | α |
| א. גדולה | א. גדולה |
| ב. קטנה | ב. גדולה |
| ג. גדולה | ג. קטנה |
| ד. קטנה | ד. קטנה |

26) נערך שינוי בכלל ההחלטה של בדיקת השערה מסוימת ובעקבותיו אזור דחיית H_0 קטן. כל שאר הגורמים נשארו ללא שינוי. כתוצאה מכך :

- הן α , והן $(1 - \beta)$, יקטנו.
- α יישאר ללא שינוי ואילו $(1 - \beta)$ יגדל.
- α יגדל ואילו $(1 - \beta)$ יקטן.
- הן α והן $(1 - \beta)$ יגדלו.

27) ידוע כי לחץ דם תקין באוכלוסייה הוא 120. רופא מניח שלחץ הדם בקרב עיתונאים גבוה יותר מהממוצע באוכלוסייה. הוא לקח מדגם של 60 עיתונאים וקיבל ממוצע 137. על סמך המדגם, הוא בודק טענתו ברמת מובהקות 0.02 ומסיק שלחץ הדם בקרב העיתונאים אינו גבוה יותר. מה הטעות האפשרית שהרופא עושה?

- טעות מסוג ראשון.
- טעות מסוג שני.
- טעות מסוג שלישי.
- אין טעות במסקנתו.

28) בבדיקת השערות התקבל שה- $p\text{-value} = 0.02$. מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 1%? בחר בתשובה הנכונה :

- יקבל את השערת האפס בכל מקרה.
- ידחה את השערת האפס מקרה.
- ידחה את השערת האפס רק אם המבחן הנו דו צדדי.
- לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.

(29) מובהקות התוצאה (PV) היא גם :

- א. רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.
- ב. רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.
- ג. רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר טרם קיבל את תוצאות המחקר.
- ד. רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.

(30) בבדיקת השערות מסוימת התקבל $p \text{ value} = 0.0254$, לכן :

- א. ברמת מובהקות של 0.01 אך לא של 0.05 נדחה את H_0 .
- ב. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 לא נדחה את H_0 .
- ג. ברמת מובהקות של 0.05 אך לא של 0.01 נדחה את H_0 .
- ד. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 נדחה את H_0 .

(31) רמת המובהקות במחקר הייתה 2% לכן.

- א. בסיכוי של 2% נדחה את השערת האפס.
- ב. בסיכוי של 2% לא נדחה את השערת האפס.
- ג. בסיכוי של 2% השערת האפס לא נכונה.
- ד. אף תשובה לא נכונה.

(32) נתון ש: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. כמו כן נתונות ההשערות הבאות: $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu < \mu_0$.

- חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות.
- σ^2 לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5%. אם הוא היה מגדיל את רמת המובהקות ל-10% אזי :
- א. כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.
- ב. כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.
- ג. כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

(33) לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים

- זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה.
- לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים נורמאלית ללא ידיעת השונות האמתית. מספר דרגות החופש במבחן הוא :

א. 9

ב. 19

ג. 18

ד. 8

34) בתחנת טיפת חלב מסוימת יש שני מכשירי שקילה. על מנת להשוות בין שני המשקלים נדגמו 4 תינוקות. כל תינוק בן חודשיים נשקל בכל אחד מהמשקלים. להלן תוצאות השקילה (בק"ג):

| | | | | |
|---------------|-----|-----|-----|-----|
| משקל במכשיר 1 | 2.5 | 0.7 | 9.6 | 4.5 |
| משקל במכשיר 2 | 0.5 | 1.7 | 6.9 | 3.5 |

נניח שהמשקלים מתפלגים נורמלית.
 המבחן שיש לבצע כאן הוא:
 א. מבחן Z למדגם יחיד.
 ב. מבחן T למדגם יחיד.
 ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
 ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

35) כדי להשוות בין שני אצים נדגמו 5 תוצאות מריצת 100 מטר של כל אצן. זמני הריצה נרשמו ויש להניח שמתפלגים נורמלית. המטרה להשוות בין האצנים. המבחן שיש לבצע כאן הוא:

א. מבחן Z למדגם יחיד.
 ב. מבחן T למדגם יחיד.
 ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
 ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

36) סטטיסטיקאי ערך מבחן סטטיסטי. הוא חישב את עוצמת המבחן וקיבל 0. המשמעות של תוצאה זו היא:

א. לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא לא נכונה.
 ב. תמיד לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.
 ג. לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.
 ד. תמיד לדחות את השערת האפס כאשר היא לא נכונה.

37) סטטיסטיקאי נתבקש לאמוד את הפרש הממוצעים של שני טיפולים לפי שני מדגמים מקריים בלתי תלויים. הוא חישב רווח סמך להפרש ברמת סמך 0.98, וקיבל את הרווח $-2 < \mu_1 - \mu_2 < 4.5$. אילו יתבקש החוקר לבדוק לפי אותם נתונים את ההשערות: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$; $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$,

ברמת מובהקות 0.05 מסקנתו תהיה:
 א. לדחות את השערת האפס.
 ב. לא לדחות את השערת האפס.
 ג. שלא ניתן לדעת את המסקנה עבור רמת מובהקות 0.05.
 ד. שלא נתונות בשאלה סטיות התקן של האוכלוסיות, ולכן לא ניתן להסיק דבר.

38 במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קווי זהב לבזק מבחינת ממוצע המחירים לשיחות בינ"ל. נגדמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. בהנחה והמחירים מתפלים נורמלית בנו רווח סמך למוצע ההפרשים וקיבלו: $-0.0293 < \mu_D < 0.2145$ רווח הסמך הוא ברמת סמך של 95%.
 לכן מסקנת המחקר היא:

- ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקיים הבדל בין החברות.
- ברמת מובהקות של 5% נקבע שקיים הבדל מובהק בין החברות.
- לא ניתן לדעת מה המסקנה ברמת מובהקות של 5% כיוון שלא נאמר מה ההגדרה של D .

39 אם רמת מובהקות של מבחן סטטיסטי הינה 0, הכוונה היא:

- תמיד נדחה H_0 כאשר היא נכונה, אך לא תמיד נדחה אותה כאשר היא לא נכונה.
- לא נדחה את H_0 אף פעם.
- לא נדחה את H_0 כאשר היא נכונה אך יתכן ונדחה אותה כאשר היא לא נכונה.
- כל התשובות לא נכונות.

40 חוקר ביצע ניסוי. הוא ניסח את ההשערות הבאות: $H_0: \mu = 10$, $H_1: \mu \neq 10$. לצורך בדיקה הוא לקח מדגם מקרי בגודל 5 מתוך אוכלוסייה המתפלגת נורמאלית עם שונות לא ידועה. על סמך תוצאות המדגם הוא חישב וקיבל:
 $t_x = -2.63$. לכן המסקנה היא:

- הוא ידחה H_0 ברמת מובהקות 0.1 אך לא כן ברמת מובהקות 0.05.
- הוא ידחה H_0 ברמת מובהקות 0.05 אך לא כן ברמת מובהקות 0.025.
- הוא ידחה H_0 ברמת מובהקות 0.025 אך לא כן ברמת מובהקות 0.01.
- הוא לא ידחה H_0 ברמת מובהקות 0.1.

41 האיגוד האמריקני לרפואת ילדים מפרסם הנחיות חדשות הקובעות כי יש ליטול תוספת יוד במהלך תקופת ההיריון וההנקה. מחסור במינרל זה עלול לגרום לפגיעה מוחית אצל העובר והתינוק. החלטה זו נקבעה על סמך מחקר בו השתתפו 1050 נשים שנטלו יוד במהלך תקופת ההיריון וההנקה.
 מתוך הנשים שהשתתפו במחקר, רק ל-21 נמצאו ילדים בעלי פגיעה מוחית לעומת 3% באוכלוסייה הכללית. בנוסף, פורסם שהאיגוד האמריקאי מגיע למסקנותיו על סמך רמת מובהקות של 0.5%. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג ראשון במחקר?

- 0.005
- 0.03
- 0.0287
- 0.05

- 42) חוקרת שיערה, כי משקלן של נשים כשנה לאחר החתונה גבוה ממשקלן בעת החתונה. החוקרת דגמה 15 נשים, ובדקה את משקלן בשתי נקודות הזמן (בעת החתונה, ושנה לאחריה), אך לא מצאה הבדל מובהק ברמת מובהקות 0.01. בהנחה, כי **במצאות** השערתה של החוקרת נכונה, סביר כי אם היא תגדיל את גודל המדגם, אזי:
- יקטן הסיכוי לטעות מסוג שני (β).
 - תגדל רמת הביטחון ($1 - \alpha$).
 - אף תשובה לא נכונה.
 - כל התשובות נכונות.

- 43) איזה מהמשפטים הבאים נכון תמיד?

- $POWER + \alpha + \beta = 1$
- $POWER = 0.5 - \beta$
- $POWER + \alpha = 1$
- $\beta + \alpha = 1$
- הכול לא נכון.

- 44) מה נכון לומר לגבי הנחת שיוויון השונויות במבחן T למדגמים בלתי תלויים?

- היא אומרת שהשונויות המדגמיות שוות.
- בלעדיה אין שום דרך לבדוק השערה על הפרש בין תוחלות.
- היא חשובה הן עבור מדגמים מזווגים והן עבור מדגמים בלתי תלויים.
- אף תשובה אינה נכונה.

- 45) חוקר החליט לא לדחות השערה ברמת מובהקות של α . במידה וחוקר זה היה בודק השערה זו ברמת מובהקות של 2α על סמך אותם נתונים, האם ההשערה תדחה?

- ההשערה תדחה.
- ההשערה לא תדחה.
- התשובה תלויה בעוצמת המבחן.
- לא ניתן לדעת בוודאות אם ההשערה תדחה או לא.

- 46) חוקרת שיערה, כי בגילאי הגן בנות יותר תקשורתיות מבנים. אם החוקרת תדגום אקראית 30 בנים ו-30 בנות, ובמדגם יתקבל אותו ממוצע של ציון תקשורת. סטטיסטי המבחן יהיה:

- אפס
- חיובי
- שלילי
- לא ניתן לדעת

47) עוצמה שווה ל-1 פרושה :

- לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.
- תמיד לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.
- לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא לא נכונה.

48) מה מהבאים **נכון** לגבי מבחן T מדגמים מזווגים?

- כל התצפיות במחקר אינן תלויות זו בזו.
- כל התצפיות במחקר תלויות זו בזו.
- כל הצמדים של תצפיות במחקר אינם תלויים זה בזה.
- התצפיות בתוך כל צמד אינן תלויות זו בזו.

49) לבדיקת ההשערה החד צדדית על התוחלת של התפלגות נורמלית $H_0: \mu \geq 10$, נלקח מדגם והתקבלה רמת מובהקות מינימאלית לדחיית השערת האפס 0.058. לו רצינו לבדוק את ההשערה הדו צדדית $H_0: \mu = 10$, $H_1: \mu \neq 10$, אז על סמך תוצאת אותו המדגם ברמת מובהקות 0.05:

- ניתן להכריע בין ההשערות רק אם שונות האוכלוסייה נתונה.
- מקבלים את השערת האפס.
- דוחים את השערת האפס.
- לא ניתן להכריע בין ההשערות שכן חסרים נתונים.

50) לבדיקת ההשערה החד צדדית ימנית $H_0: \mu = 55$, $H_1: \mu = 65$

נלקח מדגם מקרי בגודל n מאוכלוסייה בעלת התפלגות נורמלית ושונות σ^2 . רמת המובהקות היא 5%. נמצא שהעוצמה היא 0.9. להלן 3 טענות:

- עבור מדגם בגודל n וברמת מובהקות 5% לבדיקת ההשערות: $H_0: \mu = 55$, $H_1: \mu = 60$ העוצמה תהיה גדולה מ-0.9.
- עבור מדגם בגודל $2n$ ורמת מובהקות 5% לבדיקת ההשערות: $H_0: \mu = 55$, $H_1: \mu = 65$ העוצמה תהיה גדולה מ-0.9.
- עבור מדגם בגודל n ורמת מובהקות 10% לבדיקת ההשערות: $H_0: \mu = 55$, $H_1: \mu = 65$ העוצמה תהיה קטנה מ-0.9.

- שלושת הטענות אינן נכונות.
- טענות 2 ו-3 אינן נכונות וטענה 1 נכונה.
- טענות 1 ו-2 נכונות וטענה 3 אינה נכונה.
- טענות 1 ו-3 אינן נכונות וטענה 2 נכונה.

תשובות סופיות:

| שאלה | תשובה | שאלה | תשובה |
|------|-------|------|-------|
| 1 | א | 26 | א |
| 2 | ד | 27 | ב |
| 3 | ד | 28 | א |
| 4 | א | 29 | א |
| 5 | ג | 30 | ג |
| 6 | ג | 31 | ד |
| 7 | א | 32 | א |
| 8 | ב | 33 | א |
| 9 | ג | 34 | ד |
| 10 | א | 35 | ג |
| 11 | א | 36 | א |
| 12 | ג | 37 | ג |
| 13 | א | 38 | א |
| 14 | א | 39 | ג |
| 15 | א | 40 | א |
| 16 | א | 41 | א |
| 17 | א | 42 | א |
| 18 | ג | 43 | ה |
| 19 | א | 44 | ד |
| 20 | ג | 45 | ד |
| 21 | ב | 46 | א |
| 22 | ג | 47 | ד |
| 23 | ד | 48 | ג |
| 24 | ג | 49 | ב |
| 25 | ג | 50 | ד |

סטטיסטיקה

פרק 30 - ניתוח שונות חד כיוונית

תוכן העניינים

1. כללי 166

ניתוח שונות חד כיוונית

רקע תיאורטי

ניתוח שונות (חד כיוונית) הוא מבחן להשוואת תוחלות (μ_1, \dots, μ_k) של k אוכלוסיות שונות. לכן, בנייתוח שונות, השערות המחקר הן:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k \quad (\text{התוחלות של כל האוכלוסיות שוות})$$

$$H_1: \quad \text{אחרת} \quad (\text{לפחות שתיים מהתוחלות שונות})$$

ההנחות הדרושות לביצוע התהליך:

- (1) בכל אוכלוסייה מתוך k האוכלוסיות ההתפלגות נורמלית.
- (2) כל האוכלוסיות הן עם אותה שונות σ^2 .
- (3) המדגמים בלתי תלויים זה בזה.

ישנו משתנה המבדיל בין הקבוצות השונות, הוא המשתנה הבלתי תלוי הנקרא גורם (factor). משתנה זה הוא קטגוריאלי עם k רמות (levels). כדי לבצע את התהליך יש לבצע מדגם מכל אוכלוסייה: נסמן ב- n_i את גודל המדגם בקבוצה i .

$$n = \sum_{i=1}^k n_i \quad \text{- מספר התצפיות סך הכול (בכל המדגמים).}$$

$$\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k \quad \text{- ממוצע המדגם הראשון, \dots, ממוצע המדגם ה-} k \text{-י.}$$

$$\bar{X} \quad \text{- ממוצע כללי (של כל המדגמים).}$$

$$SS_B = \sum_{i=1}^k n_i [\bar{X}_i - \bar{X}]^2 \quad \text{סכום ריבועים בין הקבוצות:}$$

$$SS_W = \sum_{i=1}^k n_i [n_i - 1] \cdot \hat{S}_i^2 \quad \text{סכום ריבועים בתוך הקבוצות:}$$

$$SS_T = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_j} [X_{ij} - \bar{X}]^2 \quad \text{סכום ריבועים כללי:}$$

$$SST = SSB + SSW$$

יש למלא את טבלת ניתוח השונות הבאה :

| מקור השונות | סכום הריבועים SS | דרגות חופש df | ממוצע הריבועים MS | F |
|------------------|---------------------|--------------------|----------------------|-------------------|
| B - בין הקבוצות | SSB | $k - 1$ | $\frac{SSB}{k - 1}$ | $\frac{MSB}{MSW}$ |
| W - בתוך הקבוצות | SSW | $n - k$ | $\frac{SSW}{n - k}$ | |
| T - סה"כ | SST | $n - 1$ | | |

$$F = \frac{\frac{SSB}{k-1}}{\frac{SSW}{n-k}} \sim F(k-1, n-k)$$

אזור דחיית $H_0 : 1 - \alpha : F_{(k-1, n-k)}$

שאלות

- (1)** מחקר מעוניין להשוות בין שלוש תרופות לשיכוך כאבים במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין התרופות מבחינת הזמן בדקות שלוקח עד שהתרופה משפיעה. לצורך הבדיקה נלקחו 15 אנשים שסובלים מכאבי ראש. אנשים אלה חולקו באקראי לשלוש קבוצה 1 קיבלה "אקמול" קבוצה 2 קיבלה "אופטלגין" קבוצה 3 קיבלה "נורופן". כל אדם במחקר מסר את מספר הדקות עד שהתרופה השפיעה עליו.
- מהו המשתנה התלוי ומהו המשתנה הבלתי תלוי במחקר?
 - מהו ה"גורם" וכמה רמות יש לו?
 - מהו המבחן הסטטיסטי המתאים כאן? רשמו את ההשערות.
 - מה הן ההנחות הדרושות כדי לבצע את המבחן הסטטיסטי שהצעת בסעיף הקודם?

- (2)** בעיר מסוימת שלושה בתי ספר תיכון. ראש העיר התעניין לבדוק האם קיים הבדל בהצלחה של בתי הספר במקצוע מתמטיקה. לצורך כך הוא דגם מספר תלמידים שנבחנו במבחן הבגרות במתמטיקה ברמה של 3 יחידות בעירו ובדק עבור כל תלמיד מה ציון הבגרות שלו במתמטיקה. להלן הציונים שהתקבלו:

| "הס" | "רבין" | "המתמיד" |
|------|--------|----------|
| 85 | 98 | 78 |
| 83 | 62 | 65 |
| 74 | 55 | 70 |
| 85 | 80 | 90 |
| 75 | | 56 |

- מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?
- רשמו את ההשערות ואת ההנחות של המבחן.
- מהו גודל המדגם? מהו המשתנה הבלתי תלוי (factor) כמה רמות יש לו?
- חשבו את הממוצע ואת סטיית התקן של הציונים בכל אחד מהמדגמים.
- מלאו את טבלת ANOVA.
- רשמו את כלל ההכרעה למבחן שהוצע בסעיף א ברמת מובהקות של 5%.
- האם קיים הבדל בין בתי הספר בעיר מבחינת רמת הצלחת התלמידים במקצוע המתמטיקה? ענה על סמך הסעיפים הקודמים.

- (3)** מעוניינים לבדוק האם יש הבדל בהשפעה של שיטות טפול שונות על לחץ הדם הסיסטולי (SBP) באוכלוסייה של קשישים. נבדקו 4 שיטות שונות. בטבלה המצורפת מרוכזים ממצאי המחקר.

| השיטה | A | B | C | D |
|------------|-----|-----|-----|-----|
| גודל המדגם | 12 | 14 | 8 | 12 |
| הממוצע | 178 | 172 | 180 | 182 |
| סטיית התקן | 4 | 8 | 5 | 3 |

- רשמו את השערות המחקר וההנחות הדרושות כדי לבצע את המבחן המתאים.
- מה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 5%?
- האם יש צורך לבצע השוואות מרובות?

4) שלושה אופים נתבקשו להכין עוגת שוקולד. לכל אופה בדקו את משך זמן ההכנה בדקות. כל אופה נדרש לאפות בכל יום 4 עוגות.

האם קיים הבדל בין האופים מבחינת תוחלת זמני ההכנה של העוגות? בדקו ברמת מובהקות של 5%.

| האופה | ניר | מוזס | שלום |
|--------------------|-------|-------|------|
| סכום הזמנים | 206 | 212 | 182 |
| סכום ריבועי הזמנים | 10644 | 11250 | 8982 |

5) להלן טבלת ניתוח שונות חד כיוונית. במחקר בחנו 4 סוגי סוללות. רצו לבדוק האם לסוג הסוללה השפעה על תוחלת אורך החיים שלה. הפעילו את כל הסוללות על אותו מכשיר ובדקו את אורך החיים של כל סוללה בשעות. מה המסקנה ברמת מובהקות של 10%? רשמו את ההשערות וההנחות הדרושות.

ANOVA

| | Sum of Squares | df | Mean Square | F | Sig. |
|----------------|----------------|----|-------------|-------|------|
| Between Groups | 10.317 | 3 | 3.439 | 1.361 | .279 |
| Within Groups | 60.648 | 24 | 2.527 | | |
| Total | 70.964 | 27 | | | |

6) להלן טבלת ANOVA בטבלה הושמטו חלקים. השלימו את החלקים בטבלה שהושמטו ומסומנים באותיות.

ANOVA

| | Sum of Squares | df | Mean Square | F | Sig. |
|----------------|----------------|----|-------------|---|------|
| Between Groups | 357.450 | ב | ג | ה | .000 |
| Within Groups | א | 17 | ד | | |
| Total | 522.950 | 19 | | | |

7) חברת תרופות לקחה 15 אנשים ברמת בריאות דומה. החברה חילקה את האנשים ל שלוש קבוצות שוות בגודלן. לכל קבוצה ניתנה אותה תרופה במינון שונה (dosage). המינונים שניתנו הם: 10 מ"ג, 20 מ"ג ו-30 מ"ג. לאחר שעה מזמן לקיחת התרופה נבדק קצב פעימות הלב של כל אדם (pulse). הנתונים הוזנו לתוכנה סטטיסטית והתקבלו התוצאות הבאות:

| ANOVA | | | | | | pulse | | | |
|----------------|----------------|----|-------------|--------|------|------------------------|---|-------------------------|---------|
| pulse | | | | | | Tukey HSD ^a | | | |
| | Sum of Squares | df | Mean Square | F | Sig. | dosage | N | Subset for alpha = 0.05 | |
| | | | | | | | | 1 | 2 |
| Between Groups | 414.400 | 2 | 207.200 | 19.733 | .000 | 30.00 | 5 | 71.0000 | |
| Within Groups | 126.000 | 12 | 10.500 | | | 20.00 | 5 | | 80.2000 |
| Total | 540.400 | 14 | | | | 10.00 | 5 | | 83.4000 |
| | | | | | | Sig. | | 1.000 | .299 |

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.
a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 5.000.

Post Hoc Tests

Multiple Comparisons

| (I) dosage | | (J) dosage | Mean Difference (I-J) | Std. Error | Sig. | 95% Confidence Interval | |
|------------|-------|------------|------------------------|------------|------|-------------------------|-------------|
| | | | | | | Lower Bound | Upper Bound |
| 10.00 | 20.00 | | 3.20000 | 2.04939 | .299 | -2.2675 | 8.6675 |
| | | 30.00 | 12.40000 [*] | 2.04939 | .000 | 6.9325 | 17.8675 |
| 20.00 | 10.00 | | -3.20000 | 2.04939 | .299 | -8.6675 | 2.2675 |
| | | 30.00 | 9.20000 [*] | 2.04939 | .002 | 3.7325 | 14.6675 |
| 30.00 | 10.00 | | -12.40000 [*] | 2.04939 | .000 | -17.8675 | -6.9325 |
| | | 20.00 | -9.20000 [*] | 2.04939 | .002 | -14.6675 | -3.7325 |

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

- א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין המינונים השונים מבחינת תוחלת הדופק של האנשים? רשמו את ההשערות וההנחות הדרושות לצורך פתרון.
- ב. הסבירו ללא חישוב כיצד הייתה משתנה התשובה לסעיף הקודם אם הינו מעלים את הדופק של כל התצפיות במחקר ב-2.
- ג. האם יש צורך במחקר בהשוואת מרובות. נמקו!
- ד. לטבלת ANOVA צורפו טבלאות של השוואות מרובות בשיטה הנקראת "טוקי". ברמת בטחון של 95% מה הם הממצאים לפי שיטה זו?

- 8) בעיר מסוימת רצו לבדוק האם קיים הבדל ברמה של התלמידים בין בתי הספר השונים בעיר. ביצעו מדגם מכל בית ספר ונתנו מבחן זהה לכל הנדגמים. לאחר מכן ריכזו את הנתונים בתוכנה סטטיסטית והפעילו ניתוח שונות. מצורפים הפלטים שהתקבלו. ענו על הסעיפים הבאים:
- כמה בתי ספר יש בעיר?
 - כמה תלמידים השתתפו בסך הכול במחקר?
 - האם קיים הבדל בין בתי הספר בעיר מבחינה רמת הציונים? בדקו ברמת מובהקות של 1%
 - בביטחון של 95% אילו בתי ספר שונים זה מזה ברמת התלמידים? נמקו והסבירו.

Oneway

ANOVA

| grade | | | | | |
|----------------|----------------|----|-------------|--------|------|
| | Sum of Squares | df | Mean Square | F | Sig. |
| Between Groups | 7799.600 | 4 | 1949.900 | 13.586 | .000 |
| Within Groups | 2870.400 | 20 | 143.520 | | |
| Total | 10670.000 | 24 | | | |

Post Hoc Tests

Multiple Comparisons

grade

Scheffe

| (I) school | (J) school | Mean Difference (I-J) | Std. Error | Sig. | 95% Confidence Interval | |
|------------|------------|-----------------------|------------|-------|-------------------------|-------------|
| | | | | | Lower Bound | Upper Bound |
| 1.00 | 2.00 | 5.40000 | 7.57681 | .971 | -20.2543 | 31.0543 |
| | 3.00 | 36.80000* | 7.57681 | .003 | 11.1457 | 62.4543 |
| | 4.00 | 36.40000* | 7.57681 | .003 | 10.7457 | 62.0543 |
| | 5.00 | -2.60000 | 7.57681 | .998 | -28.2543 | 23.0543 |
| 2.00 | 1.00 | -5.40000 | 7.57681 | .971 | -31.0543 | 20.2543 |
| | 3.00 | 31.40000* | 7.57681 | .011 | 5.7457 | 57.0543 |
| | 4.00 | 31.00000* | 7.57681 | .013 | 5.3457 | 56.6543 |
| | 5.00 | -8.00000 | 7.57681 | .888 | -33.6543 | 17.6543 |
| 3.00 | 1.00 | -36.80000* | 7.57681 | .003 | -62.4543 | -11.1457 |
| | 2.00 | -31.40000* | 7.57681 | .011 | -57.0543 | -5.7457 |
| | 4.00 | -.40000 | 7.57681 | 1.000 | -26.0543 | 25.2543 |
| | 5.00 | -39.40000* | 7.57681 | .001 | -65.0543 | -13.7457 |
| 4.00 | 1.00 | -36.40000* | 7.57681 | .003 | -62.0543 | -10.7457 |
| | 2.00 | -31.00000* | 7.57681 | .013 | -56.6543 | -5.3457 |
| | 3.00 | .40000 | 7.57681 | 1.000 | -25.2543 | 26.0543 |
| | 5.00 | -39.00000* | 7.57681 | .001 | -64.6543 | -13.3457 |
| 5.00 | 1.00 | 2.60000 | 7.57681 | .998 | -23.0543 | 28.2543 |
| | 2.00 | 8.00000 | 7.57681 | .888 | -17.6543 | 33.6543 |
| | 3.00 | 39.40000* | 7.57681 | .001 | 13.7457 | 65.0543 |
| | 4.00 | 39.00000* | 7.57681 | .001 | 13.3457 | 64.6543 |

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Homogeneous Subsets

grade

Scheffe^a

| school | N | Subset for alpha = 0.05 | |
|--------|---|-------------------------|---------|
| | | 1 | 2 |
| 3.00 | 5 | 45.0000 | |
| 4.00 | 5 | 45.4000 | |
| 2.00 | 5 | | 76.4000 |
| 1.00 | 5 | | 81.8000 |
| 5.00 | 5 | | 84.4000 |
| Sig. | | 1.000 | .888 |

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.

a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 5.000.

תשובות סופיות

1) א. משתנה בלתי תלוי : סוג התרופה. ב. ניתוח שונות חד כיווני

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$H_1 : otherwise$$
 משתנה תלוי : הזמן עד להשפעת התרופה בדקות.

ג. 1. מדגמים בלתי תלויים.

2. שוויון שונויות.

3. משתנים מתפלגים נורמלית.

2) א. המבחן לניתוח שונות חד כיוונית.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$H_1 : otherwise$$

הנחות :

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. משתנים מתפלגים נורמלית.

3. שוויון שונויות.

ב. גודל המדגם : 14. משתנה ב"ת : בית הספר, בעל 3 רמות.

ג. $\bar{X} = 71.8, \hat{S} = 12.93, \bar{X} = 80.4, \hat{S} = 5.46, \bar{X} = 73.75, \hat{S} = 19.29$

ד. להלן טבלה :

| F | MS | df | SS | מקור השונות |
|------|-------|----|---------|-------------|
| | 100.3 | 2 | 200.6 | B |
| | 173.2 | 11 | 1904.75 | W |
| 0.58 | | 13 | 2105.35 | סה"כ |

ה. $F > 3.98$.

ו. נקבל את H_0 .

3) א. $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$. ב. נדחה את H_0 . ג. כן.

$$H_1 : otherwise$$

הנחות :

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. שוויון שונויות.

3. משתנים מתפלגים נורמלית.

4) נקבל את H_0 : נכריע שאין הבדל מובהק בין האופים מבחינת תוחלת זמן הכנה.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 \quad (5)$$

$$H_1 : otherwise$$

הנחות :

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. שוויון שונות.

3. משתנים מתפלגים נורמלית.

נקבל את H_0 : לסוג סוללה אין השפעה של תוחלת החיים ברמת ביטחון של 10%.

6) להלן טבלה :

ANOVA

| | Sum of Squares | df | Mean Square | F | Sig. |
|----------------|----------------|-----|-------------|---------|------|
| Between Groups | 357.450 | 2 ב | 178.725 ג | 18.36 ה | .000 |
| Within Groups | 165.5 א | 17 | 9.735 ד | | |
| Total | 522.950 | 19 | | | |

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \quad (7) \quad \text{א.}$$

$$H_1 : otherwise$$

הנחות :

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. משתנים מתפלגים נורמלית.

3. שוויון שונות.

נדחה את H_0 : ברמת ביטחון של 5% קיים הבדל במינונים השונים מבחינת תוחלת הדופק.

$$\text{ב. ראה וידאו. ג. כן. ד. } \mu_{20} = \mu_{10} > \mu_{30} .$$

$$5 \text{ א. } 25 \text{ ב.} \quad (8)$$

ג. נדחה את H_0 : יש לפחות שני בתי ספר בעיר עם תוחלת רמת ציונים שונה.

$$\text{ד. } (\mu_3 = \mu_4) < (\mu_1 = \mu_2 = \mu_3) .$$

סטטיסטיקה

פרק 31 - ניתוח שונות דו כיווני

תוכן העניינים

| | |
|-----|---------------------------------------|
| 175 | 1. הקדמה |
| 185 | 2. אפקטים פשוטים, עיקריים ואינטראקציה |
| 197 | 3. תהליך ניתוח שונות דו כיווני |

ניתוח שונות דו-כיווני - הקדמה

רקע

ראשית, נחזור על עיקרי ניתוח השונות החד-כיווני (חד-גורמי).

בניתוח שונות חד-כיווני יש משתנה תלוי יחיד, שהוא כמותי, ומשתנה בלתי תלוי יחיד, שהוא משתנה קטגוריאלי (משתנה שהערכים שלו שייכים למספר סופי של קטגוריות). המשתנה הקטגוריאלי נקרא לעתים גם גורם (פקטור), והקטגוריות שלו נקראות רמות. המטרה בניתוח שונות חד-כיווני היא לבדוק האם לגורם יש השפעה מובהקת על המשתנה התלוי. השערת האפס של המחקר בניתוח שונות חד-כיווני היא שבכל הקטגוריות יש אותה התוחלת, והשערת המחקר טוענת שיש לפחות שתי קטגוריות שבהן התוחלות שונות.

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

נבדקו שלושה סוגי דיאטות על אנשים בעלי משקל עודף. נבחרו 30 מטופלים בעלי משקל עודף, והם חולקו באקראי לשלוש קבוצות שוות בגודלן, כך שכל קבוצה קיבלה דיאטה נחקרת אחרת. כעבור שלושה חודשים בדקו את מספר הקילוגרמים שהפחית כל מטופל ממשקלו בתקופה זו. מטרת המחקר הייתה לבדוק האם קיים הבדל בין הדיאטות מבחינת ההפחתה במשקל.

- מהו המשתנה התלוי במחקר?
- מהו המשתנה הבלתי תלוי במחקר? כמה רמות יש לו?
- מה הן השערות המחקר?
- מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?

בניתוח שונות דו-כיווני אנו מוסיפים עוד משתנה בלתי תלוי למחקר, כלומר עוד גורם שאנו רוצים לבדוק איך הוא משפיע על המשתנה התלוי. לכן בניתוח שונות דו-כיווני יש משתנה תלוי כמותי יחיד ושני משתנים בלתי תלויים שכל אחד מהם קטגוריאלי. כזכור, למשתנים הבלתי תלויים אנו קוראים גם גורמים (פקטורים), ומספר הקטגוריות של כל גורם נקרא גם מספר הרמות שלו. ניתוח שונות רב-כיווני או רב-גורמי הוא ניתוח שונות שבו יש יותר מגורם אחד, כלומר יותר ממשתנה בלתי תלוי קטגוריאלי אחד. בניתוח שונות דו-כיווני יש שני גורמים, בניתוח שונות תלת-גורמי יש שלושה גורמים וכו'. ככל שנוסיף גורמים, הניתוח הסטטיסטי יהיה מורכב יותר ויידרשו יותר תצפיות למחקר אבל כיוון שהוא יקטין את שונות הטעויות (שונות מקרית) וייתן יותר הסבר לשונות הכללית, כך שהמבחן יהיה עוצמתי יותר.

המשך הדוגמה:

מבין 30 המטופלים שבמחקר 15 היו גברים ו-15 היו נשים. המטופלים חולקו כך שבכל דיאטה השתתפו 5 גברים ו-5 נשים.

מה הם המשתנים הבלתי תלויים? כמה רמות יש לכל משתנה?

בניתוח שונות דו-כיווני אנו בעצם רוצים לבדוק סימולטנית שלוש שאלות מחקר על אוכלוסיית כבדי המשקל:

- האם יש הבדלים משמעותיים בין שיעורי הפחתת המשקל של מטופלים כבדי משקל כתוצאה משימוש בדיאטות שונות?
- האם יש הבדלים משמעותיים בין שיעורי הפחתת המשקל של מטופלים כבדי משקל כתוצאה ממגדר שונה?
- האם יש השפעה משולבת (אינטראקציה) של שני הגורמים הנבדקים על הפחתת המשקל של מטופלים כבדי משקל, כלומר האם צירוף של דיאטה מסוימת ומגדר מסוים מביא להפחתת משקל גדולה יותר או קטנה יותר מצירופים אחרים?

נסמן גורם אחד ב- a ואת מספר הרמות שלו ב- A . באותו האופן הגורם האחר יסומן ב- b , ואת מספר הרמות שלו נסמן ב- B . מספר הקבוצות הכולל שאנו יוצרים הוא $A \cdot B$.

המשך הדוגמה:

- בחרו גורם אחד להיות a וגורם אחר להיות b . מהו A ומהו B ?
- כמה קבוצות שונות נוצרו במחקר?

נסמן ב- m את מספר התצפיות בכל תא (בהנחה שהוא יהיה מספר קבוע). תא הוא שילוב של רמה מסוימת של גורם a עם רמה מסוימת של גורם b .

המשך הדוגמה:

- כמה תאים (קבוצות) יש במחקר?
- מה ערכו של m ?
- מהו הקשר המתמטי בין m לבין n , גודל המדגם?

נסמן ב- a_1 את הרמה הראשונה של a , ב- a_2 את הרמה השנייה שלו וכך הלאה.
 נסמן ב- b_1 את הרמה הראשונה של b , ב- b_2 את הרמה השנייה שלו וכך הלאה.
 נסמן ב- μ_i את התוחלת ברמה a_i . נסמן ב- μ_j את התוחלת ברמה b_j . נסמן ב- μ_{ij} את התוחלת של תא ij .

המשך הדוגמה :

- מה המשמעות של μ_1 ושל μ_2 ?
- מה המשמעות של μ_{12} ושל μ_{21} ?

השערות המחקר בניתוח שונות דו-כיווני

את השערות המחקר בניתוח שונות דו-כיווני אפשר לרשום בצורות רבות :

לגורם a אין השפעה על המשתנה התלוי : H_0

אחרת : H_1

לגורם b אין השפעה על המשתנה התלוי : H_0

אחרת : H_1

אין אינטראקציה בין שני הגורמים : H_0

אחרת : H_1

דרך אחרת היא שימוש בתוחלות:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_A.$$

H_1 : אחרת

$$H_0: \mu_{.1} = \mu_{.2} = \dots = \mu_{.B}$$

H_1 : אחרת

H_0 : אין אינטראקציה בין שני הגורמים

H_1 : אחרת

המשך הדוגמה:

אם אנחנו מעוניינים לבצע ניתוח שונות דו-כיווני, מה הן ההשערות הנחקרות?

שאלות

- (1) בחברת טקסטיל בחנו 4 סוגי בדים שונים מבחינת חוזקם. דגמו 5 חתיכות בד מכל סוג ובדקו את חוזק הקריעה של כל סוג בד.
- מהו המשתנה התלוי במחקר?
 - כמה משתנים בלתי תלויים יש במחקר? מה הם?
 - מהו המבחן הסטטיסטי המתאים במקרה זה?
- (2) במחקר בתחום הפסיכולוגיה נדגמו אנשים הסובלים מחרדות מסוגים שונים. כל מטופל סווג כסובל מאחד מסוגי החרדות הבאים: חרדה חברתית, חרדה כללית או אגורפוביה. במחקר השתתפו 6 מטופלים מכל סוג חרדה שצוין. המטופלים במחקר חולקו כך שכל מטופל היה צריך לעבור במשך שנה את אחד מהטיפולים הבאים: טיפול קוגניטיבי התנהגותי (CBT), טיפול קבוצתי או טיפול דיאלקטי התנהגותי (DBT). בכל סוג טיפול השתתפו 2 מטופלים מכל סוג חרדה. בסוף השנה נבדקו כל המטופלים וקיבלו ציון כמותי על השיפור במצבם הנפשי (משתנה כמותי). מטרת המחקר הייתה לבדוק האם סוג החרדה, סוג הטיפול והשילוב ביניהם משפיעים על המצב הנפשי של המטופלים.
- מהו גודל המדגם?
 - מהו המשתנה התלוי במחקר הזה ומה הם המשתנים הבלתי תלויים?
 - כמה קטגוריות יש לכל משתנה בלתי תלוי?
 - כמה קבוצות שונות יש במערך המחקרי?
 - מהו המבחן הסטטיסטי המתאים במערך מחקרי זה?

3) מחקר שיווקי בדק את השפעת גובה המדף בסופרמרקט והשפעת החומר שממנו עשוי הבקבוק (זכוכית או פלסטיק) על היקף המכירות של משקאות קלים. נבדקו שני סופרמרקטים. בכל סופרמרקט נבחן כל צירוף אפשרי של גובה המדף וחומר הבקבוק, ועבור כל צירוף כזה נבדק מספר בקבוקי המשקה הקל שנמכרו באותו סופרמרקט ביום מסוים. הנה התוצאות שהתקבלו:

| פלסטיק | זכוכית | סוג בקבוק |
|--------|--------|-----------|
| | | גובה המדף |
| 59 | 23 | נמוך |
| 63 | 32 | |
| 88 | 47 | בינוני |
| 90 | 55 | |
| 51 | 40 | גבוה |
| 56 | 48 | |

- א. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים? נמקו.
- ב. מהו מספר הרמות של כל גורם מחקרי?
- ג. מה יהיו השערות המחקר אם יתבצע ניתוח שונות דו-כיווני?
- ד. מהו ערכו של m ומהו ערכו של n ?

4) יצרן של נוזל כביסה מעוניין לבחון שני נוזלי ניקוי מבחינת יעילותם בהסרת כתמים בשלוש רמות טמפרטורה. בכל אחד מששת הצירופים של סוג נוזל וטמפרטורה נבחנה יכולת הסרת הכתמים מבדים דומים, וניתן ציון בין 0 ל-15 (הציון הטוב ביותר).

| מספר סידורי | סוג הנוזל | טמפרטורה במעלות צלזיוס | ציון הסרת כתמים |
|-------------|-----------|------------------------|-----------------|
| 1 | C | 30 | 4 |
| 2 | C | 30 | 5 |
| 3 | C | 30 | 4 |
| 4 | C | 30 | 6 |
| 5 | C | 40 | 6 |
| 6 | C | 40 | 6 |
| 7 | C | 40 | 7 |
| 8 | C | 40 | 6 |
| 9 | C | 60 | 9 |
| 10 | C | 60 | 8 |
| 11 | C | 60 | 7 |
| 12 | C | 60 | 10 |
| 13 | w | 30 | 9 |
| 14 | w | 30 | 9 |
| 15 | w | 30 | 9 |
| 16 | w | 30 | 10 |
| 17 | w | 40 | 12 |
| 18 | w | 40 | 13 |
| 19 | w | 40 | 11 |
| 20 | w | 40 | 11 |
| 21 | w | 60 | 14 |
| 22 | w | 60 | 14 |
| 23 | w | 60 | 15 |
| 24 | w | 60 | 13 |

- א. כמה משתנים יש במחקר?
 ב. לגבי כל משתנה קבעו האם הוא משתנה תלוי או בלתי תלוי.
 ג. כמה רמות יש לכל גורם?
 ד. אם נבצע ניתוח שונות דו-כיוונית, מה יהיו השערות המחקר?
 ה. רכזו את נתוני המחקר בטבלה שבה בשורות גורם אחד, בעמודות גורם שני ובתאים התוצאות שהתקבלו למשתנה התלוי.

5) קבעו לגבי כל אחד מהבאים האם הוא משתנה קטגוריאל:

- א. מספר הניתוחים שעבר אדם בחייו.
 ב. אחוז האבטלה בישראל בחודש זה.
 ג. סוג הדם של חולה.
 ד. שונות הציונים בבחינת הבגרות באנגלית במועד האחרון.
 ה. משקל חבילה בדואר בגרמים.
 ו. היבשת שאירחה את משחקי המונדיאל.

בשאלות הבאות יש לבחור את התשובה הנכונה ביותר:

- 6) משרד החינוך רוצה לבדוק עד כמה שיטת הוראה (יש 3 שיטות הוראה מקובלות) ומגדר משפיעים על ציוני הבגרות בהיסטוריה. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים למחקר זה?
 א. מבחן T להשוואת תוחלות.
 ב. ניתוח שונות חד-כיוונית.
 ג. ניתוח שונות דו-כיוונית.
 ד. מבחן T לתוחלת אחת.

- 7) מחלקת שירות הלקוחות של חברת החשמל דגמה עובדים כדי לבחון האם ככל שמספר שנות הוותק של נותן השירות גדול יותר גדל גם מספר הלקוחות שבו הוא מטפל במהלך משמרת. מהו המבחן הסטטיסטי שיכול לבדוק זאת?
 א. מבחן T להשוואת תוחלות.
 ב. ניתוח שונות חד-כיוונית.
 ג. ניתוח שונות דו-כיוונית.
 ד. אף אחת מהאפשרויות שלעיל.

8) האיחוד האירופי המשותף דגם 10 עובדים מתחום ההוראה בכל אחת מהמדינות הבאות: הולנד, צרפת, בלגיה, גרמניה ואוסטריה. לכל עובד בדקו את גובה המשכורת החודשית שלו ביורו. אם נרצה להשוות בין המדינות הללו מבחינת תוחלת השכר של עובדי ההוראה במדינה, מה יהיה המבחן הסטטיסטי המתאים?

- א. מבחן T להשוואת תוחלות
- ב. ניתוח שונות חד-כיווני
- ג. ניתוח שונות דו-כיווני
- ד. אף אחת מהאפשרויות שלעיל

9) בקו ייצור 2 סוגים של מכונות ו-3 רמות ותק של מפעיל המכונה (עד שנתיים במפעל, בין שנתיים ל- חמש שנים במפעל, יותר מחמש שנים במפעל). מנהל הייצור רוצה לבדוק אם קיימת השפעה של סוג המכונה והוותק של המפעיל על מספר המוצרים הפגומים שיוצאים מהמכונה. מה יהיה המבחן הסטטיסטי המתאים במקרה זה?

- א. מבחן T להשוואת תוחלות.
- ב. ניתוח שונות חד-כיווני.
- ג. ניתוח שונות דו-כיווני.
- ד. ניתוח שונות תלת-כיווני.

10) במחקר נאספו הנתונים הבאים על קבוצת נחקרים:

1. כמה כוסות קפה הנחקר שותה ביום: לא שותה / 1-2 כוסות/ יותר מ-2 כוסות.
2. מין הנחקר: גבר/אישה.
3. דופק (מספר פעימות בדקה) שעתיים אחרי הקימה.

מטרת המחקר הייתה לבדוק האם מספר כוסות הקפה שאדם שותה ביום משפיע על הדופק אצל גברים אחרת מאשר אצל נשים. מה יהיה המבחן הסטטיסטי המתאים במקרה זה?

- א. מבחן T להשוואת תוחלות.
- ב. ניתוח שונות חד-כיווני.
- ג. ניתוח שונות דו-כיווני.
- ד. ניתוח שונות תלת-כיווני.

- 11) במחקר יש משתנה כמותי אחד ושני גורמים שלכל אחד מהם שתי רמות. אילו מהמשפטים הבאים אינו נכון?
- א. אפשר מבחינה טכנית לבדוק כיצד כל גורם בנפרד משפיע על המשתנה התלוי באמצעות ניתוח שונות חד-כיווני שייערך לכל גורם בנפרד.
- ב. אפשר מבחינה טכנית להשוות בין התוחלות של כל רמה בגורם הראשון על ידי מבחן T להשוואת תוחלות.
- ג. אפשר מבחינה טכנית לבצע ניתוח שונות דו-כיווני במערך מחקרי זה.
- ד. כיוון שבמחקר יש בסך הכול שלושה משתנים, אפשר מבחינה טכנית לבצע ניתוח שונות תלת-כיווני.

תשובות סופיות

- 1) א. חוזק הקריעה.
ג. ניתוח שונות חד גורמי.
- 2) א. 18
ב. המשתנה התלוי: ציון במצב הנפש. המשתנים הב"ת: סוג חרדה, סוג הטיפול.
ג. 3,3
ד. 9
- 3) א. ניתוח שונות דו גורמי.
ב. ניתוח שונות דו גורמי.
ג. H_0 : אין אינטראקציה, H_1 : יש אינטראקציה.
ד. $m = 2, n = 12$
- 4) א. 3
ב. משתנים ב"ת: סוג הנוזל, טמפרטורה. משתנה תלוי: ציון הסרת כתמים.
ג. 3,2
ד. H_0 : אין אינטראקציה בין הגורמים, H_1 : אחרת.
- 5) א. כן.
ב. לא.
ג. כן.
ד. לא.
ה. תלוי.
ו. כן.
- 6) ג.
7) ד.
8) ב.
9) ג.
10) ג.
11) ד.

אפקטים פשוטים, עיקריים ואינטראקציה

רקע

בניתוח שונות דו-כיווני אנו דנים במשתנה כמותי תלוי יחיד ובשני משתנים בלתי תלויים (גורמים) המחולקים כל אחד למספר רמות. מטרת המחקר היא לבדוק שלוש השערות שונות:

לגורם a אין השפעה על המשתנה התלוי: H_0

אחרת: H_1

לגורם b אין השפעה על המשתנה התלוי: H_0

אחרת: H_1

אין אינטראקציה בין שני הגורמים: H_0

אחרת: H_1

נרצה להבין מה בדיוק כל השערה בודקת לגבי האוכלוסייה הנחקרת.

אפקט עיקרי: אם יש שתי קטגוריות (רמות) לפחות של גורם מסוים שהתוחלות שלהן שונות, נאמר שלגורם זה יש השפעה על המשתנה התלוי. השפעה זאת נקראת "אפקט עיקרי". למשל, אם יימצאו לפחות שתי תרופות נוגדות דיכאון שונות שמביאות לתוחלות שונות במצב הנפשי, נגיד שלסוג התרופה יש השפעה על המצב הנפשי, כלומר יש אפקט עיקרי. כמות האפקטים העיקריים שאפשר למצוא היא כמות הגורמים במחקר.

אפקט אינטראקציה: מצב שבו גורם אחד משפיע על המשתנה התלוי באופן שונה בקטגוריות שונות של הגורם השני. למשל, תרופה נוגדת דיכאון אחת מביאה את הגברים למצב רוח טוב יותר מאשר את הנשים לעומת תרופה אחרת שמביאה דווקא את הנשים למצב רוח טוב יותר מאשר את הגברים. אפקט האינטראקציה הוא יחיד, כלומר נאמר אם יש או אין אינטראקציה. כמו כן הוא אפקט סימטרי: אם קיימת אינטראקציה בין מגדר לסוג התרופה, יש גם אינטראקציה בין סוג התרופה למגדר.

אפקט פשוט: אפקט פשוט מתייחס להשפעת גורם אחד על המשתנה התלוי בתוך קטגוריה מסוימת של הגורם השני. למשל, נרצה לבדוק רק בקטגוריה של הגברים האם קיים הבדל בין התרופות נוגדות הדיכאון. אם נמצא הבדלים כאלה נאמר שיש

אפקט פשוט של סוג התרופה בקרב אוכלוסיית הגברים. כמות האפקטים הפשוטים שאפשר למצוא היא סכום מספר הקטגוריות (רמות) של כל גורם. למשל, אם יש שלושה סוגי תרופות ושתי אפשרויות למגדר, בסך הכול נוכל לבדוק 5 אפקטים פשוטים.

דוגמה

נבדקו שלושה סוגי דיאטות על אנשים בעלי משקל עודף. כעבור שלושה חודשים בדקו כמה קילוגרמים הפחית כל מטופל ממשקלו באותה התקופה. נניח שאנו יודעים את תוחלת הפחתת המשקל של כל דיאטה בחלוקה למגדרים.

נתאר כמה מצבים אפשריים לגבי האוכלוסייה הנחקרת וננתח כל מצב מבחינת ההשפעה של כל גורם על תוחלת המשתנה התלוי ומבחינת אפקט האינטראקציה.

שימו לב שהמצבים שנתאר להלן מתייחסים לתוחלות האמיתיות. בניתוח שונות אין לנו נתוני אמת, אלא רק נתוני מדגם, ונרצה לבדוק האם האפקטים שהתקבלו במדגם הם מובהקים, כנדרש בכל תהליך של הסקה סטטיסטית.

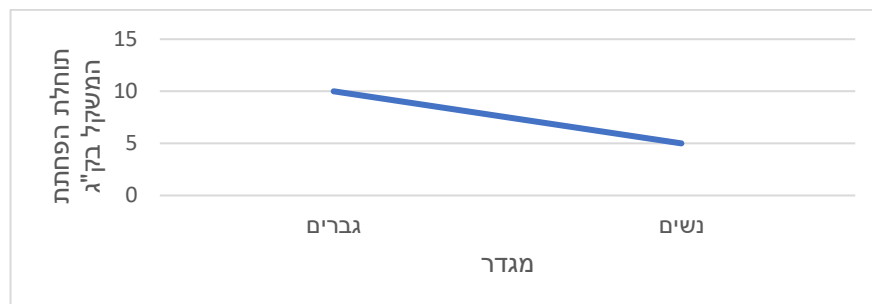
אם התוצאות שלנו יהיו ממוצעי מדגם ולא תוחלות, נוכל לבדוק אם קיימים אפקטים במדגם, אך אין זה אומר שקיימים אפקטים באוכלוסייה, כלומר לא נוכל לדעת אם האפקטים במדגם הם מובהקים. כדי לבדוק אם האפקטים הם מובהקים נצטרך לעשות את מבחן ניתוח השונות.

מצב א:

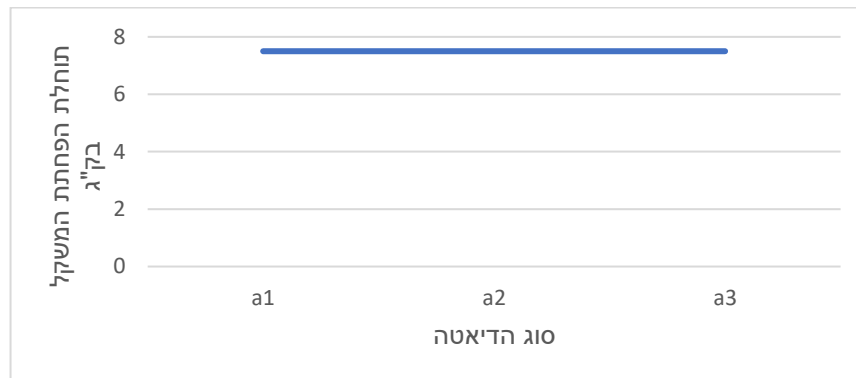
הטבלה הבאה מתארת את תוחלת הפחתת המשקל בק"ג לכל קבוצה:

| נשים | גברים | |
|------|-------|-------|
| 5 | 10 | a_1 |
| 5 | 10 | a_2 |
| 5 | 10 | a_3 |

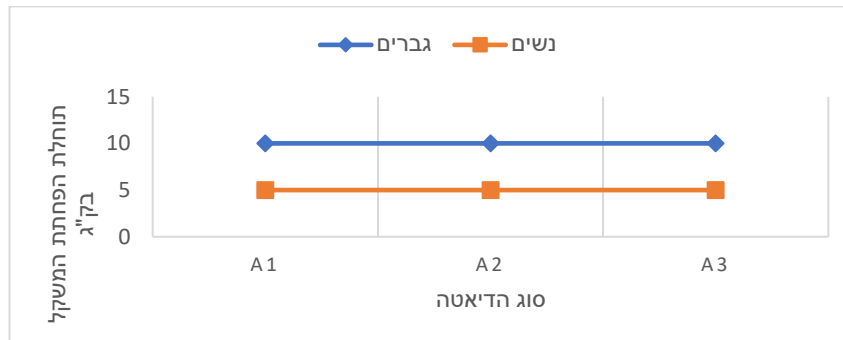
תיאור גרפי לבדיקת אפקט למגדר



תיאור גרפי לבדיקת אפקט לסוג הדיאטה



גרף אפקטים פשוטים



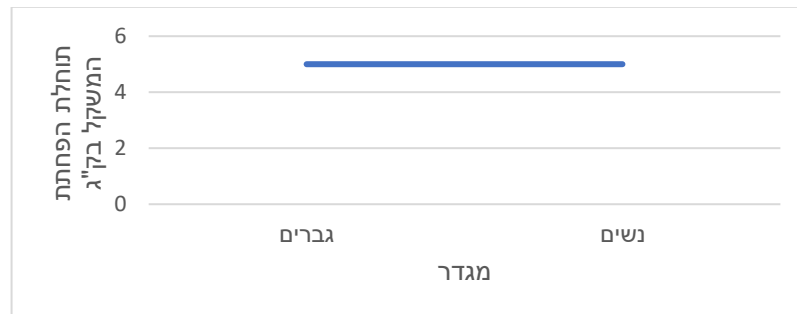
ניתוח המצב: למגדר יש אפקט, לסוג הדיאטה אין אפקט, אין אפקט אינטראקציה. הערה: אם הקווים הנוצרים בגרף האפקטים הפשוטים מקבילים או מתלכדים, אנו אומרים שאין אפקט אינטראקציה.

מצב ב

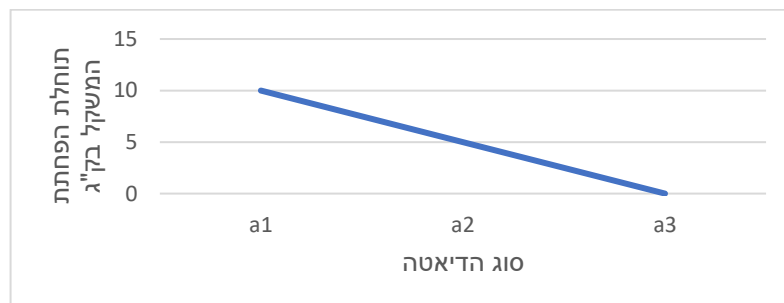
הטבלה הבאה מתארת את תוחלת הפחתת המשקל בק"ג לכל קבוצה:

| נשים | גברים | |
|------|-------|-------|
| 10 | 10 | a_1 |
| 5 | 5 | a_2 |
| 0 | 0 | a_3 |

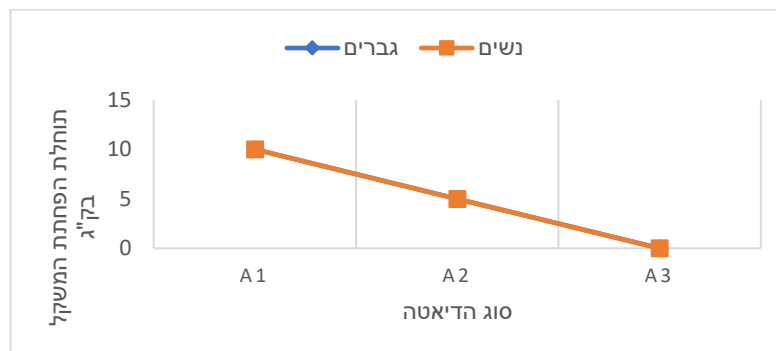
תיאור גרפי לבדיקת אפקט למגדר



תיאור גרפי לבדיקת אפקט לסוג הדיאטה



גרף אפקטים פשוטים



ניתוח המצב: למגדר אין אפקט, לסוג הדיאטה יש אפקט, אין אפקט אינטראקציה.

מצב ג

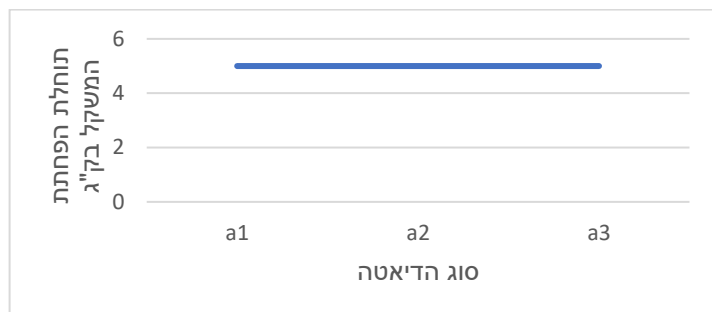
הטבלה הבאה מתארת את תוחלת הפחתת המשקל בק"ג לכל קבוצה:

| נשים | גברים | |
|------|-------|-------|
| 0 | 10 | a_1 |
| 5 | 5 | a_2 |
| 10 | 0 | a_3 |

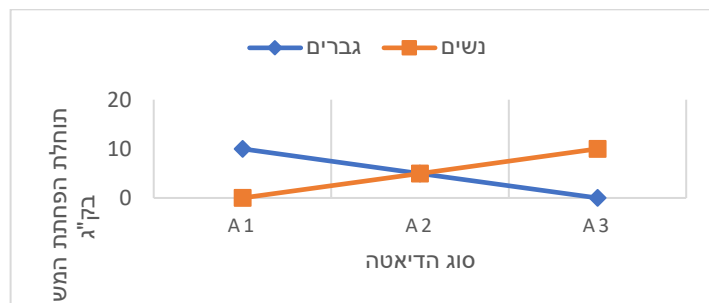
תיאור גרפי לבדיקת אפקט למגדר



תיאור גרפי לבדיקת אפקט לסוג הדיאטה



גרף אפקטים פשוטים



ניתוח המצב: למגדר אין אפקט, לסוג הדיאטה אין אפקט, יש אפקט אינטראקציה.

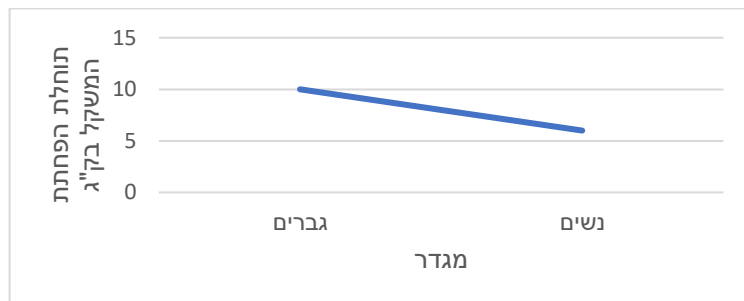
אינטראקציה דיסאורדינלית (נקראת גם "אינטראקציה מהותית"): אפשר לזהות מצב של אינטראקציה כזו באמצעות גרף של אפקטים פשוטים, כאשר נוצרים קווים נחתכים שאחד מהם עולה והאחר יורד. המשמעות היא שגורם אחד משפיע על המשתנה התלוי ברמה מסוימת של הגורם השני באופן הפוך משהוא משפיע על המשתנה התלוי ברמה אחרת של הגורם השני. במצב זה אין להתייחס לאפקטים עיקריים. יש להתייחס רק לאפקטים הפשוטים.

מצבה

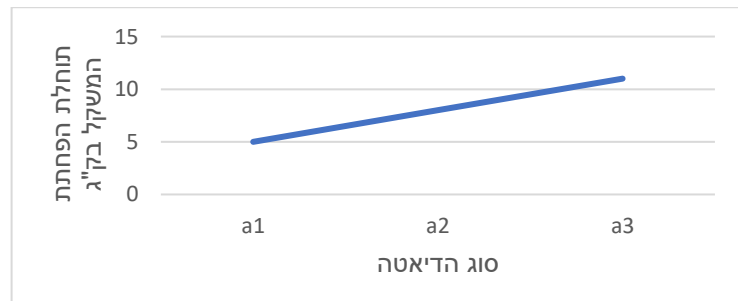
הטבלה הבאה מתארת את תוחלת הפחתת המשקל בק"ג לכל קבוצה:

| נשים | גברים | |
|------|-------|-------|
| 5 | 5 | a_1 |
| 6 | 10 | a_2 |
| 7 | 15 | a_3 |

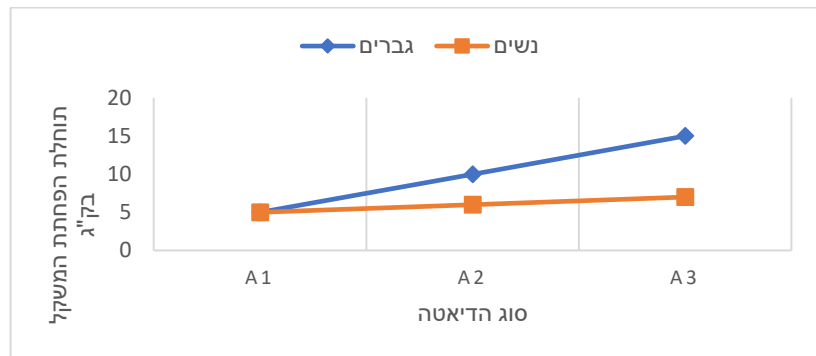
תיאור גרפי לבדיקת אפקט למגדר



תיאור גרפי לבדיקת אפקט לסוג הדיאטה



גרף אפקטים פשוטים



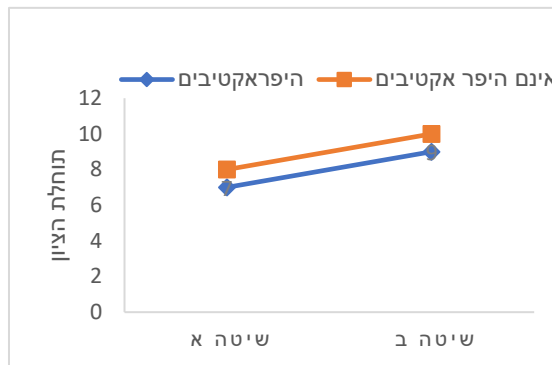
ניתוח המצב: למגדר יש אפקט, לסוג הדיאטה יש אפקט, יש אפקט אינטראקציה.

אינטראקציה אורדינלית (נקראת גם "אינטראקציה לא מהותית"): אפשר לזהות מצב של אינטראקציה כזו כאשר בגרף האפקטים הפשוטים נוצרים קווים נחתכים עם אותו הכיוון (כולם עולים או כולם יורדים אבל לא באותו השיפוע). המשמעות היא שבמעבר של גורם אחד מרמה אחת לרמה אחרת שלו הוא משפיע על המשתנה התלוי באותו אופן בכל רמה של המשתנה האחר אבל עם גודל אפקט שונה.

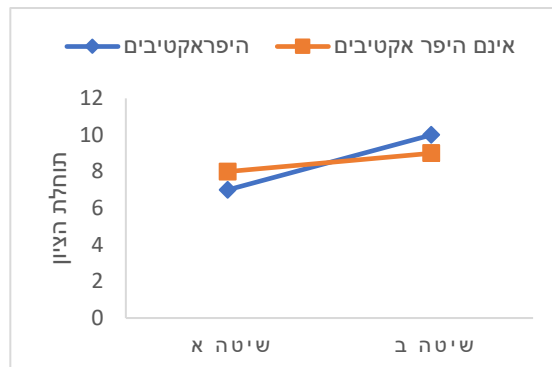
שאלות

1) בגני החובה יש שתי שיטות הוראה. שיטות אלו נוסו על ילדים היפראקטיביים וילדים שאינם היפראקטיביים. בתרשימים הבאים מיוצגים גרפים שמתארים את תוחלת הציון במבחן אוצר המילים שניתן לילדים בסוף השנה. בכל אחד מהמקרים יש לקבוע האם קיימת אינטראקציה בין שני הגורמים. אם קיימת אינטראקציה, יש לקבוע האם היא אינטראקציה אורדינלית או דיסאורדינלית.

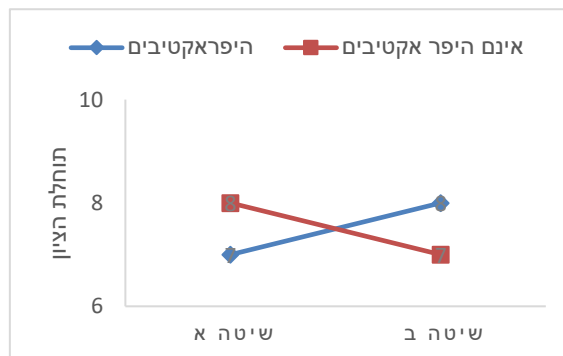
א.

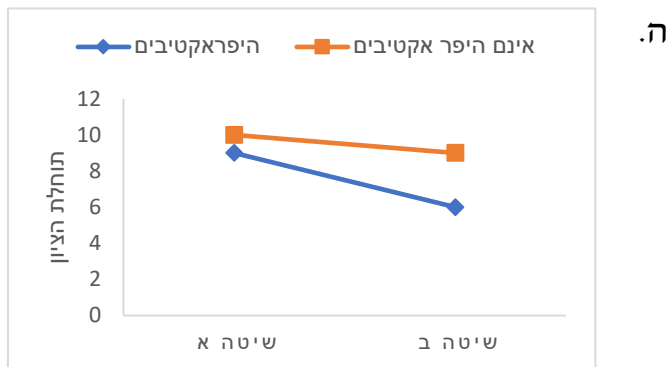
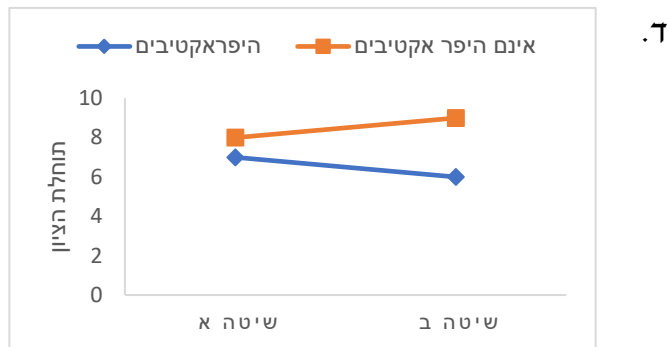


ב.



ג.





2) משרד האוצר פרסם נתונים על המחיר הממוצע של דירות גן ודירות גג של 4 חדרים ב-3 ערים בארץ. מחיר הדירות נמדד במיליוני שקלים. להלן התוצאות שהתקבלו:

| דירות גג | דירות גן | |
|----------|----------|--------|
| 3 | 4 | הרצליה |
| 1 | 2 | אשדוד |
| 2 | 3 | חולון |

- א. מהו המשתנה התלוי ומה הם המשתנים הבלתי תלויים?
- ב. האם קיים אפקט לעיר? היעזרו בגרף מתאים.
- ג. האם קיים אפקט לסוג הדירה? היעזרו בגרף מתאים.
- ד. האם קיימת אינטראקציה בין הגורמים? אם כן, מהו סוג האינטראקציה? היעזרו בגרף מתאים.
- ה. האם יש אפקט פשוט לעיר עבור דירות גן?
- ו. האם יש אפקט פשוט לעיר עבור דירות גג?
- ז. האם יש אפקט פשוט לסוג הדירה בהרצליה?
- ח. האם יש אפקט פשוט לסוג הדירה באשדוד?
- ט. האם יש אפקט פשוט לסוג הדירה בחולון?

3) משרד החינוך פרסם נתונים על תוחלת הציונים בבחינת הבגרות באנגלית לפי עיר וסוג בית הספר (עיוני או מקצועי). להלן התוצאות שהתקבלו:

| מקצועי | עיוני | |
|--------|-------|-----------|
| 70 | 85 | רעננה |
| 75 | 75 | תל אביב |
| 85 | 70 | פתח תקווה |

- א. תארו את הנתונים באמצעות גרף אפקטים פשוטים.
 ב. האם קיימת אינטראקציה בין הגורמים? אם כן, מה סוג האינטראקציה?
 ג. באילו ערים קיים אפקט פשוט לסוג בית הספר?

4) משרד התחבורה פרסם נתונים על תוחלת מספר עבירות התנועה לבעלי רישיון נהיגה לפי עיר ולפי מגדר. להלן התוצאות שהתקבלו:

| אישה | גבר | |
|------|-----|--------|
| 1 | 2 | חיפה |
| 1 | 2 | אשקלון |
| 1 | 2 | רמת גן |

- א. האם קיים אפקט עיקרי לעיר?
 ב. האם קיים אפקט עיקרי למגדר?
 ג. האם יש אפקט פשוט לעיר אצל הגברים?
 ד. האם קיימת אינטראקציה בין הגורמים? אם כן, מהו סוג האינטראקציה?

5) המשרד לאיכות הסביבה פרסם נתונים על תוחלת רמת זיהום האוויר בערים שונות בארץ בחורף ובקיץ. להלן התוצאות שהתקבלו:

| חורף | קיץ | |
|------|-----|---------|
| 20 | 20 | חיפה |
| 10 | 10 | ירושלים |
| 15 | 15 | באר שבע |

- א. האם קיים אפקט עיקרי לעיר?
 ב. האם קיים אפקט עיקרי לעונה?
 ג. האם קיימת עיר שבה יש אפקט פשוט לעונה?
 ד. האם קיימת אינטראקציה בין הגורמים? אם כן, מה סוג האינטראקציה?

6) המשרד לאיכות הסביבה פרסם נתונים על תוחלת רמת זיהום האוויר בערים שונות בארץ בחורף ובקיץ. להלן התוצאות שהתקבלו:

| | | |
|------|-----|---------|
| חורף | קיץ | |
| 10 | 10 | רמת גן |
| 10 | 10 | גבעתיים |
| 10 | 10 | בת ים |

האם קיים אפקט עיקרי לגורם כלשהו? האם קיימת אינטראקציה?

בשאלות הבאות יש לבחור את התשובה הנכונה ביותר:

7) במחקר נדגמו 5 אנשים מכל אחת מ-4 הקבוצות הבאות: 1. מתעמלים באופן קבוע ושומרים על תזונה בריאה; 2. מתעמלים באופן קבוע ולא שומרים על תזונה בריאה; 3. לא מתעמלים באופן קבוע ושומרים על תזונה בריאה; 4. לא מתעמלים באופן קבוע ולא שומרים על תזונה בריאה. להלן טבלה המסכמת את ממוצע הטריגליצרידים בדם (מ"ג לדציליטר) שנמצא בכל מדגם:

| | | |
|----------------|-------------|------------|
| לא תזונה בריאה | תזונה בריאה | |
| 100 | 90 | מתעמלים |
| 160 | 100 | לא מתעמלים |

- קיים אפקט עיקרי מובהק לגורם ההתעמלות.
- קיים אפקט עיקרי מובהק לגורם התזונה.
- קיים אפקט אינטראקציה מובהק בין שני הגורמים במחקר.
- אי אפשר לדעת אם קיים אפקט מובהק כלשהו על סמך תוצאות המדגם בלבד ללא ביצוע מבחן מתאים וללא קביעת רמת המובהקות של המחקר.

8) במחקר בדקו 3 טיפולים שונים לחולי פסוריאזיס. המחקר השווה גם בין גברים לנשים ובדק את זמן התגובה לטיפול. מסקנת המחקר הייתה שאצל גברים נמצאו הבדלים מובהקים בין הטיפולים השונים מבחינת תוחלת זמן התגובה. לאיזה סוג אפקט המסקנה מתייחסת?

- אפקט אינטראקציה.
- אפקט עיקרי של גורם המין.
- אפקט עיקרי של גורם סוג הטיפול.
- אפקט פשוט.

- 9) במחקר בדקו 3 טיפולים שונים לחולי פסוריאזיס. המחקר השווה גם בין גברים לנשים ובדק את זמן התגובה לטיפול. במדגם היה ממוצע זמן התגובה של הגברים שונה מממוצע זמן התגובה של הנשים.
- א. אפשר להגיד שבמדגם קיים אפקט עיקרי, אך אי אפשר לדעת אם האפקט העיקרי מובהק.
- ב. אפשר להגיד שבמדגם קיימת אינטראקציה, אך אי אפשר לדעת אם האינטראקציה מובהקת.
- ג. אפשר להגיד שקיים אפקט עיקרי מובהק.
- ד. אפשר להגיד שקיימת אינטראקציה מובהקת.
- 10) במחקר בדקו 3 טיפולים שונים לחולי פסוריאזיס. המחקר השווה גם בין גברים לנשים ובדק את זמן התגובה לטיפול. אחת המסקנות של המחקר הייתה שהטיפולים השונים משפיעים במידה משמעותית יותר על זמן התגובה של הגברים מאשר על זה של הנשים, אם כי באותו האופן.
- א. המסקנה היא שאין אינטראקציה בין הגורמים במחקר.
- ב. המסקנה היא שיש אינטראקציה אורדינלית בין הגורמים במחקר.
- ג. המסקנה היא שיש אינטראקציה דיסאורדינלית בין הגורמים במחקר.
- ד. המסקנה היא שיש אפקט עיקרי של המגדר.

תשובות סופיות

- 1) א. אין אינטראקציה.
 ג. אינטראקציה דיסאורדנלית.
 ה. אינטראקציה אורדינלית.
- 2) א. המשתנים הבי"ת: העיר, סוג הדירה. המשתנה התלוי: מחיר.
 ב. קיים.
 ד. לא קיים.
 ו. קיים.
 ח. קיים.
- 3) א. עיין בסרטון הוידאו.
 ג. רעננה ופתח תקווה.
- 4) א. לא.
 ג. לא.
- 5) א. כן.
 ג. לא.
- 6) לא, לא.
- 7) ד
- 8) ד
- 9) א
- 10) ב

תהליך ניתוח שונות דו כיווני – הליך מבחן

רקע

כפי שכבר ציינו, ניתוח שונות דו-כיווני נעשה כאשר יש שני גורמים מחקרניים ומשתנה כמותי תלוי אחד. מטרת המחקר היא לבדוק האם הגורמים משפיעים על המשתנה התלוי. מערך מחקר זה נקרא "מערך מחקר פקטוריאלי", כיוון שאנו בונים את המחקר לפי גורמים. מערך דו-גורמי יסומן כמערך מסוג $A \times B$, כאשר A מייצג את מספר הרמות של גורם a , ו- B מייצג את מספר הרמות של גורם b .

במערך מחקרי תלת-גורמי נסמן את סוג המערך $A \times B \times C$, וכך הלאה.

דוגמה

נבדקו שלושה סוגי דיאטות על אנשים בעלי משקל עודף. נבחרו 18 מטופלים בעלי משקל עודף, 9 מהם גברים ו-9 נשים. המטופלים חולקו כך שבכל דיאטה השתתפו 3 גברים ו-3 נשים. כעבור שלושה חודשים מתחילת הדיאטה נשקלו כלל המטופלים ונבדק המשקל בק"ג שהם הפחיתו. הטבלה הבאה מסכמת את המשקל שכל מטופל במדגם הפחית כעבור שלושה חודשים.

| סוג הדיאטה \ מין | b_1 | b_2 | b_3 | סה"כ |
|------------------|-------|-------|-------|------|
| נשים | 8 | 6 | 4 | 54 |
| | 4 | 8 | 6 | |
| | 0 | 10 | 8 | |
| גברים | 6 | 0 | 9 | 72 |
| | 10 | 2 | 12 | |
| | 14 | 4 | 15 | |
| סה"כ | 42 | 30 | 54 | 126 |

מטרת המחקר היא לבדוק האם יש השפעה של סוג הדיאטה, המין והשילוב ביניהם על ההפחתה במשקל.

- באיזה סוג מערך מחקרי מדובר?
- מהו המבחן הסטטיסטי המתאים לבדיקת ההשערות?
- מה הן השערות המחקר?

בדומה לניתוח שונות חד-כיווני גם התהליך של ניתוח שונות דו-כיווני דורש הנחות. ההנחות הן:

1. $A \times B$ הקבוצות שנוצרות בלתי תלויות זו בזו.
2. בכל $A \times B$ האוכלוסיות המשתנה התלוי מתפלג נורמלית.
3. בכל $A \times B$ האוכלוסיות אותה שונות, σ^2 .

הערה: ניתוח שונות הוא מבחן רובסטי, כלומר יש לו רגישות נמוכה להנחות. התיאוריה הסטטיסטית שפותחה התבססה על ההנחות האלה, אבל הלכה למעשה השיטה תעבוד טוב גם אם ההנחות הללו לא יתקיימו במדויק במלואן. זו הסיבה שהשיטה הזו נפוצה כל כך בעולם הסטטיסטיקה.

בהמשך לדוגמה

רשמו את כל ההנחות הדרושות לביצוע ניתוח השונות.

הליך המבחן

בניית טבלת ממוצעים

נבנה טבלת ממוצעים לכל רמה ולכל תא:

$$\bar{X}_{i.} - \text{ממוצע המדגם ברמה } i \text{ של גורם } a$$

$$\bar{X}_{.j} - \text{ממוצע המדגם ברמה } j \text{ של גורם } b$$

$$\bar{X}_{ij} - \text{ממוצע המדגם בתא } ij$$

בהמשך לדוגמה

- מלאו את טבלת הממוצעים הבאה:

| סוג הדיאטה \ מין | b_1 | b_2 | b_3 | $\bar{X}_{i.}$ |
|------------------|-------|-------|-------|----------------|
| נשים | | | | |
| גברים | | | | |
| $\bar{X}_{.j}$ | | | | |

- שרטטו גרפים מתאימים לבדיקת אפקטים עיקריים ולבדיקת אינטראקציה במדגם. האם אפשר להגיד שיש אפקט מובהק?

בניית טבלת ריבועי הפרשים מהממוצעים

נמלא את הטבלה הבאה. בתוך תא ij נחשב: $(\bar{X}_{ij} - \bar{X}_i - \bar{X}_j + \bar{X})^2$

בהמשך לדוגמה

- מלאו את טבלת הפרשי הממוצעים:

| סוג הדיאטה | b_1 | b_2 | b_3 | $(\bar{X}_i - \bar{X})^2$ |
|---------------------------|-------|-------|-------|---------------------------|
| מין | | | | |
| נשים | | | | |
| גברים | | | | |
| $(\bar{X}_j - \bar{X})^2$ | | | | |

חישוב סכום ריבועי הסטיות מהממוצע

מתוך טבלת ריבועי הסטיות מהממוצע נחשב את סכום ריבועי הסטיות מהממוצע הבאים :

הסימון SS הוא ראשי התיבות של "sum of squares" (סכום הריבועים).

סכום ריבועי הסטיות מהממוצע של גורם a : $SS_a = m \cdot B \sum_{i=1}^A (\bar{X}_{i.} - \bar{X})^2$

סכום ריבועי הסטיות מהממוצע של גורם b : $SS_b = m \cdot A \sum_{j=1}^B (\bar{X}_{.j} - \bar{X})^2$

סכום ריבועי הסטיות של האינטראקציה : $SS_{ab} = m \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^B (\bar{X}_{ij} - \bar{X}_{i.} - \bar{X}_{.j} + \bar{X})^2$

סכום ריבועי השגיאות (סכום ריבועי הסטיות של התצפיות בתא מהממוצע בתא) :

$$SS_W = \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^B \sum_{k=1}^m (X_{ijk} - \bar{X}_{ij})^2 = (m-1) \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^B S_{ij}^2$$

סכום ריבועי הסטיות של כלל התצפיות מהממוצע הכללי :

$$SS_T = \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^B \sum_{k=1}^m (X_{ijk} - \bar{X})^2 = (n-1) \cdot S^2$$

הקשר המתמטי בין סכום הריבועים הללו הוא :

$$SS_T = SS_a + SS_b + SS_{ab} + SS_W$$

לכן אין אנו צריכים לחשב את כל חמשת המרכיבים הללו.

החלק הזה של הנוסחה מתייחס לשונות השיטתית : $SS_a + SS_b + SS_{ab}$. השונות השיטתית היא שונות שמקורה בגורמים עצמם.

החלק הזה של הנוסחה מתייחס לשונות המקרית : SS_W . השונות המקרית היא שונות שנקראת גם "שונות טעויות" או "שונות בתוך הקבוצות". זוהי שונות בין התצפיות שאינה נובעת מהגורמים הנחקרים. האות W מייצגת את המילה "Within", כלומר שונות בתוך התאים.



בהמשך לדוגמה

- חשבו את ריבועי הסטיות הבאים :

$$SS_a =$$

$$SS_b =$$

$$SS_{ab} =$$

$$SS_T =$$

$$SS_w =$$

חישוב ממוצע ריבועי הסטיות וסטטיסטי המבחן

MS הוא הסימון של ממוצע ריבועי הסטיות (Mean Square) שמהווה אומד לשונות של כל גורם. החישוב ייעשה על ידי חלוקת ה-SS המתאים בדרגות החופש המתאימות. לאחר מכן נחשב שלושה סטטיסטי מבחן, בהתאם לשלוש ההשערות הנבדקות.

נרכז את כלל החישובים הללו בטבלה הנקראת טבלת ניתוח שונות, ANOVA (Analysis of Variance).

| מקור השונות Source of Variation | דרגות החופש Degrees of Freedom | סכום ריבועי הסטיות מהממוצע Sum of Squares | ממוצע ריבוע הסטייה Mean Square | F |
|------------------------------------|-----------------------------------|---|--------------------------------------|---------------------------|
| a | $A - 1$ | SS_a | MS_a | $F_a = MS_a / MS_w$ |
| b | $B - 1$ | SS_b | MS_b | $F_b = MS_b / MS_w$ |
| ab | $(A - 1)(B - 1)$ | SS_{ab} | MS_{ab} | $F_{ab} = MS_{ab} / MS_w$ |
| Within | $AB(m - 1)$ | SS_w | MS_w | |
| Total | $n - 1 = ABm - 1$ | SS_T | | |

בהמשך לדוגמה : מלאו את טבלת ניתוח השונות

| מקור השונות Source of Variation | דרגות החופש Degrees of Freedom | סכום ריבועי הסטיות מהממוצע Sum of Squares | ממוצע ריבוע הסטייה Mean Square | F |
|------------------------------------|-----------------------------------|---|--------------------------------------|---|
| a | | | | |
| b | | | | |
| ab | | | | |
| Within | | | | |
| Total | | | | |

כללי ההכרעה לבדיקת ההשערות

הסטטיסטי F_a מייצג את היחס בין השונות המדגמית של גורם a ובין השונות המקרית. לכן ככל שהערכים שלו גבוהים יותר, נרצה להגיד שלגורם a יש השפעה גדולה יותר על המשתנה התלוי. F_a יקבל ערכים גבוהים אם השונות המדגמית של גורם A תגדל או אם השונות המדגמית המקרית תקטן. הסטטיסטי מתפלג התפלגות F, ואזור הדחייה שלו יהיה בצד ימין.

- כלל ההכרעה לבדיקת המובהקות של גורם a :

דחה את השערת H_0 ברמת מובהקות של α אם

$$F_a > F_{1-\alpha}(df_a, df_w)$$

לפי אותו עיקרון שאר כללי ההכרעה יהיו :

- כלל ההכרעה לבדיקת המובהקות של גורם b :

דחה את השערת H_0 ברמת מובהקות של α אם

$$F_b > F_{1-\alpha}(df_b, df_w)$$

- כלל ההכרעה לבדיקת המובהקות של האינטראקציה :

דחה את השערת H_0 ברמת מובהקות של α אם

$$F_{ab} > F_{1-\alpha}(df_{ab}, df_w)$$

בהמשך לדוגמה

רשמו את כל כללי ההכרעה המתאימים והסיקו מסקנות מתאימות ברמת מובהקות של 5%.

הערות

1. אם מכריעים שקיימת אינטראקציה מובהקת, יש לבדוק האם היא אורדינלית או דיסאורדינלית. אם האינטראקציה דיסאורדינלית, יש לבדוק האם האפקטים העיקריים נמצאו מובהקים. אם לפחות אחד מהם נמצא מובהק נאמר שהוא אינו משמעותי כיוון שהוא נובע מהאינטראקציה בין הגורמים ולא מהגורם עצמו.
2. אם אחד מהאפקטים נמצא מובהק, אין זה אומר אילו רמות שונות זו מזו בתוחלת. למשל, אם נמצא הבדל מובהק בין סוגי הטיפולים, לא נוכל לדעת לפי זה איזה טיפול שונה מאחר באופן מובהק. לכן יש להמשיך בתהליך של השוואות מרובות כדי להסיק ממה נובע השוני.

בהמשך לדוגמה

האם יש סיבה לבצע השוואות מרובות במחקר?

שאלות

1) מחקר שיווקי בדק את השפעת גובה המדף בסופרמרקט והשפעת החומר שממנו עשוי הבקבוק (זכוכית או פלסטיק) על היקף המכירות של משקאות קלים. נבדקו שני סופרמרקטים. בכל סופרמרקט נבחן כל צירוף אפשרי של גובה המדף וחומר הבקבוק, ועבור כל צירוף כזה נבדק מספר בקבוקי המשקה הקל שנמכרו באותו סופרמרקט ביום מסוים. הנה התוצאות שהתקבלו:

| פלסטיק | זכוכית | סוג בקבוק |
|--------|--------|-----------|
| | | גובה המדף |
| 59 | 23 | נמוך |
| 63 | 32 | |
| 88 | 47 | בינוני |
| 90 | 55 | |
| 51 | 40 | גבוה |
| 56 | 48 | |

בצעו ניתוח שונות דו-כיווני על נתוני מחקר זה ברמת מובהקות של 5%. סכמו את המסקנות מתוך ניתוח השונות שביצעתם. מה הן ההנחות הדרושות לביצוע המבחן?

2) במחקר בתחום החקלאות נדגמו 8 חלקות אדמה : 4 חלקות בנגב ו-4 בעמק יזרעאל. בכל חלקה ההשקיה הייתה או באמצעות ממטרות או באמצעות טפטפות. בדקו את יבול העגבניות (בטונה לדונם) בכל חלקה. להלן התוצאות שהתקבלו :

| מספר חלקה | מיקום החלקה | שיטת השקיה | יבול העגבניות |
|-----------|-------------|------------|---------------|
| 1 | נגב | ממטרות | 12 |
| 2 | נגב | ממטרות | 10 |
| 3 | נגב | טפטפות | 15 |
| 4 | נגב | טפטפות | 17 |
| 5 | עמק יזרעאל | ממטרות | 12 |
| 6 | עמק יזרעאל | ממטרות | 14 |
| 7 | עמק יזרעאל | טפטפות | 17 |
| 8 | עמק יזרעאל | טפטפות | 19 |

- א. רשמו את כלל המשתנים במחקר וציינו לגבי כל אחד מהם האם הוא משתנה תלוי או בלתי תלוי.
- ב. הציגו את נתוני המחקר באמצעות גרפים מתאימים. האם נראה שבמדגם יש אפקט עיקרי לכל גורם? האם יש אינטראקציה בין הגורמים במדגם? האם האפקטים מובהקים?
- ג. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם האפקט העיקרי של כל גורם הוא מובהק והאם האינטראקציה היא מובהקת. מה הן ההנחות הדרושות?

3) חברה לייצור מוצרי שיער פיתחה נוסחה חדשנית לצבע לשיער שאינו דורש תוספת חמצן בעת תהליך הצביעה. החברה השוותה את צבע השיער החדש לצבע השיער הרגיל מבחינת כושר הכיסוי וזאת על שלושה סוגי שיער: בהיר, כהה ושיבה. ציון רמת הכיסוי הוא משתנה שמתפלג נורמלית עם שונות קבועה לכל סוג שיער ולכל סוג צבע. לכל קבוצה של סוג צבע וסוג שיער נדגמו 4 צביעות שנוסו על אנשים שונים, וניתן ציון מספרי על רמת הכיסוי. להלן סיכום תוצאות המדגם שהתקבלו:

| שונות | ממוצע | הקבוצה |
|-------|-------|-----------------------|
| 40 | 62 | צבע רגיל על שיער בהיר |
| 44 | 51 | צבע רגיל על שיער כהה |
| 42 | 45 | צבע רגיל על שיער שיבה |
| 46 | 60 | צבע חדש על שיער בהיר |
| 40 | 54 | צבע חדש על שיער כהה |
| 42 | 44 | צבע חדש על שיער שיבה |

בצעו ניתוח שונות דו-כיווני על הנתונים ברמת מובהקות של 5%. סכמו את כל המסקנות המתקבלות.

4) בוצע ניתוח שונות על נתונים. במערך המחקרי לגורם a יש 4 רמות ולגורם b יש 3 רמות. נערכו 3 תצפיות לכל אחת מ-12 הקבוצות שנוצרו. להלן טבלת ניתוח שונות דו-גורמי שבוצע:

| מקור השונות | df | SS | MS | F |
|-------------|------|-----|----|---|
| a | ? | 318 | ? | ? |
| b | ? | ? | ? | ? |
| אינטראקציה | ? | 190 | ? | ? |
| W | ? | 156 | ? | |
| T | ? | 674 | | |

א. מלאו את כל התאים בטבלה המסומנים בסימני שאלה.

ב. בצעו את הבדיקות הבאות ברמת מובהקות של 5%:

- i. האם האינטראקציה מובהקת?
- ii. האם גורם a משפיע על המשתנה התלוי הנחקר?
- iii. האם לגורם b יש לפחות שתי רמות עם תוחלות שונות?

5) במחקר בדקו האם ארץ מוצא ומגדר של אדם משפיעים על שנות ההשכלה שלו. הנתונים סוכמו בטבלת ניתוח שונות:

| מקור השונות | df | SS | MS | F |
|-------------|----|----|-----|---|
| ארץ מוצא | 4 | 34 | | |
| מגדר | | | 2 | |
| אינטראקציה | | 18 | 4.5 | |
| W | 10 | 12 | | |
| T | | | | |

- א. כמה ארצות מוצא נבדקו במחקר זה?
- ב. מהו גודל המדגם הכולל במחקר זה?
- ג. חשבו את ערכי F הסטטיסטי עבור ארץ המוצא, המגדר והאינטראקציה.
- ד. מה הם האפקטים המובהקים במחקר זה ברמת מובהקות של 5%?

6) בטבלה הבאה מסוכמים הממוצעים של מערך מחקרי דו-גורמי עם משתנה כמותי תלוי:

| | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| | b_1 | b_2 | b_3 |
| a_1 | 8 | 14 | 11 |
| a_2 | 6 | 13 | 16 |

מספר התצפיות בכל תא הוא 5.

הטבלה הבאה היא טבלה מסכמת של ניתוח השונות על סמך נתוני מחקר זה:

| מקור השונות | df | SS | MS | F |
|-------------|----|-------|----|---|
| a | | | | |
| b | | 281.7 | | |
| ab | | 71.7 | | |
| W | | 190.1 | | |
| T | | | | |

- א. מלאו את טבלת ניתוח השונות.
- ב. הסיקו מסקנות ברמת מובהקות של 5%.
- ג. שרטטו גרף אינטראקציות והסבירו את משמעות הממצאים.

תשובות סופיות

- 1) עיין בסרטון הוידאו.
- 2) א. משתנים ב"ת: מיקום החלקה, שיטת השקיה. משתנה תלוי: יבול בטונה לדונם.
ב. עיין בסרטון הוידאו.
ג. עיין בסרטון הוידאו.
- 3) עיין בסרטון הוידאו.
- 4) א. עיין בסרטון הוידאו. ב. i. כן. ii. כן. iii. לא.
- 5) א. 4. ב. 20. ג. עיין בסרטון הוידאו.
- 6) א. עיין בסרטון הוידאו. ב. עיין בסרטון הוידאו. ג. עיין בסרטון הוידאו.

סטטיסטיקה

פרק 32 - מקדם המתאם (מדד קשר) הלינארי ומובהקותו

תוכן העניינים

1. מקדם המתאם הלינארי (פירסון) 211
2. חישוב מקדם המתאם הלינארי (פירסון) 222
3. בדיקת השערות על מקדם המתאם הלינארי 227
4. ניתוח פלטים על מקדם המתאם הלינארי 231

מקדם המתאם (מדד קשר) הלינארי ומובהקותו

מדד הקשר הלינארי (פירסון) – מבוא

מעוניינים לבדוק עד כמה קיים קשר מסוג קשר לינארי (קו ישר) בין שני משתנים. שני המשתנים שאנו בודקים לגביהם קשר צריכים להיות משתנים כמותיים. מבחינת סולמות מדידה כל משתנה נחקר צריך להיות מסולם רווחים או מנה. בדרך כלל המשתנה המוצג כ- Y הוא המשתנה התלוי והמשתנה המוצג ב- X הוא המשתנה הבלתי תלוי. תיאור גרפי לנתונים נעשה על ידי דיאגרמת פיזור. בדיאגרמת פיזור אנחנו מסמנים כל תצפית בנקודה לפי שיעור ה- X ושיעור ה- Y שלה. דיאגרמת הפיזור נותנת אינדיקציה גרפית על הקשר בין שני המשתנים.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

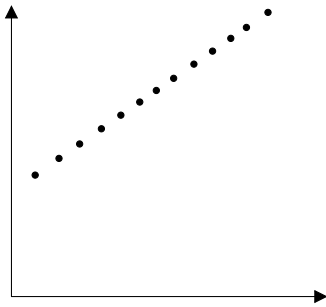
בבניין 8 דירות בדקו לכל דירה את מספר החדרים שלה וכמו כן את מספר הנפשות הגרות בדירה. להלן התוצאות שהתקבלו :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|-------------------|
| 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 | מספר חדרים בדירה |
| 5 | 4 | 4 | 3 | 2 | 2 | 1 | 0 | מספר הנפשות בדירה |

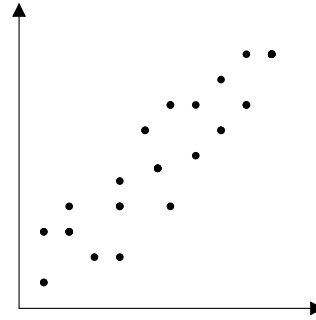
- (1) כמה תצפיות ישנן בדוגמה?
- (2) כמה משתנים ישנם בדוגמה, מי הם?
- (3) שרטטו לנתונים דיאגרמת פיזור.
- (4) מי המשתנה התלוי ומיהו המשתנה הבלתי תלוי?

דיאגרמות פיזור לקשר בין משתנים וניתוחם

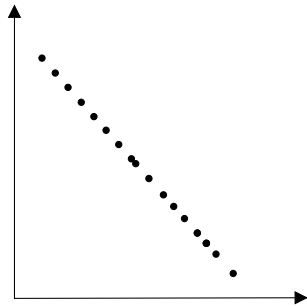
קשר לינארי חיובי מלא



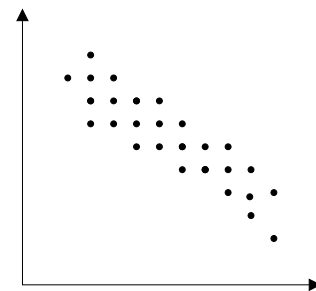
קשר לינארי חיובי חלקי



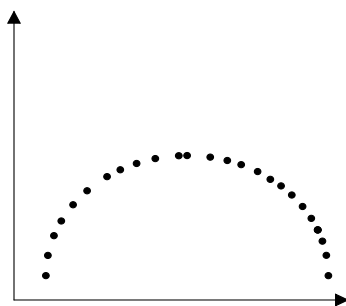
קשר לינארי שלילי מלא



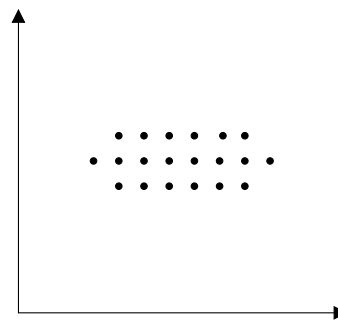
קשר לינארי שלילי חלקי



אין קשר לינארי



אין קשר



משמעות מקדם המתאם:

כדי לבדוק עד כמה קיים קשר לינארי בין שני המשתנים ישנו מדד קשר שנקרא גם מקדם המתאם הלינארי הידוע גם בשם מקדם המתאם של פירסון. מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין 1 ל-1.

-1

0

1

מקדם מתאם 1-1 או 1 אומר שקיים קשר לינארי מלא בין המשתנים שניתן לבטאו על ידי נוסחה של קו ישר: $y = ax + b$.

מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1):

קיים קשר לינארי מלא בו השיפוע a יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי (מקדם מתאם-1) מלא אומר שקיים קשר לינארי מלא בו השיפוע a שלילי.

מתאם חיובי חלקי:

ככל שמשנתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט ואילו מתאם שלילי חלקי אומר שככל שמשנתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט. ככל שמקדם המתאם קרוב לאפס עוצמת הקשר יותר חלשה וככל שהמדד רחוק יותר מהאפס העוצמה יותר חזקה. לסיכום, מקדם המתאם בודק את עוצמת הקשר הלינארי, ואת כיוון הקשר. מקדם המתאם הלינארי אינו מושפע מיחידות המדידה. כל שינוי ביחידות המדידה של המשתנים, לא ישנה את מקדם המתאם.

מדד הקשר הלינארי באוכלוסייה, שנקרא גם מקדם המתאם של פירסון או מדד הקשר של פירסון באוכלוסייה מסומן ב: ρ - פרמטר המאפיין את עוצמת הקשר הלינארי באוכלוסייה וכיוונו בין שני המשתנים הנחקרים. כאשר: r - מדד הקשר הלינארי במדגם שמהווה אומדן לפרמטר ρ .

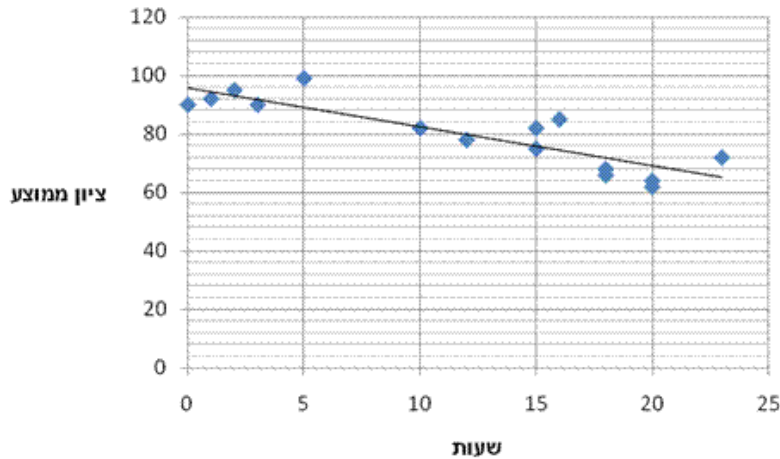
קיומו של מתאם בין שני משתנים אינו מצביע על סיבתיות בהכרח. למשל, אם נמצא מתאם חיובי בין כמות הסוכרזית שאדם אוכל לבין במשקל שלו אין זה אומר שהסיבה להשמנה היא הסוכרזית. מדד הקשר של פירסון הוא מדד קשר סימטרי, כלומר אם נחליף את X ב- Y התוצאה תהיה זהה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

- מה ניתן להגיד על מקדם המתאם של שני המשתנים על סמך דיאגרמת הפיזור ששרטטנו?
- אם היינו משנים את השרטוט כך שבציר האנכי היה המשתנה "מספר החדרים" ובציר האופקי היה "מספר הנפשות", האם הדבר היה משפיע על מדד הקשר של פירסון?

שאלות

1) חוקר רצה לאפיין את הקשר בין מספר השעות בשבוע שסטודנט מקדיש לבילויים לבין הציון הממוצע שלו בסוף הסמסטר. לשם כך הוא אסף נתונים של 15 סטודנטים ויצר דיאגרמת פיזור:



- א. מיהו המשתנה הבלתי תלוי?
- ב. מה ניתן לומר על כיוון הקשר בין מספר שעות הבילוי השבועיות לבין הציון הממוצע של הסמסטר? מה ניתן להגיד על עוצמת הקשר?

2) להלן טבלה המסכמת את מקדמי המתאם הלינארי בין ציוני מבחנים שונים שהתקבלו עבור תלמידים בכיתה מסוימת:

| מתמטיקה | לשון | ספורט | ? |
|---------|------|-------|---------|
| ? | -0.7 | ? | ספורט |
| 0.6 | ? | ? | לשון |
| ? | ? | -0.1 | מתמטיקה |

- א. השלימו את מקדמי המתאם שמסומנים בסימן שאלה בטבלה.
- ב. בין אילו שני ציוני מקצועות שונים קיים מתאם בעל העוצמה החזקה ביותר?

3) במחקר נתבקשו לבדוק את הקשר בין מספר שעות התרגול של קורס לבין הציון הסופי שלו. להלן תוצאות מדגם שהתקבל:

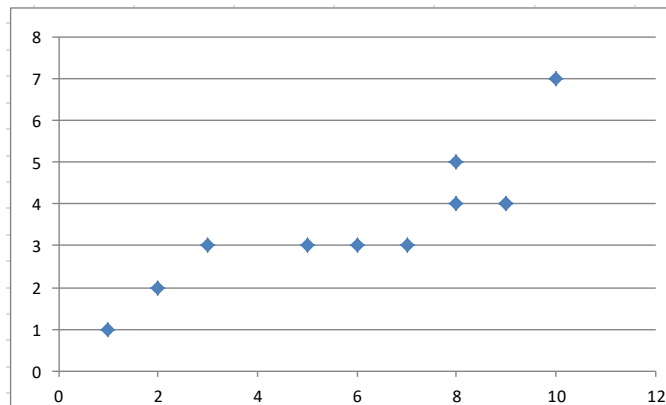
| שעות תרגול | ציון סופי |
|------------|-----------|
| 20 | 90 |
| 25 | 90 |
| 30 | 95 |
| 15 | 60 |
| 30 | 90 |
| 20 | 85 |
| 10 | 50 |

- א. מיהו המשתנה התלוי ומיהו המשתנה הבלתי תלוי בדוגמה זו?
- ב. שרטטו דיאגרמת פיזור לנתונים.
- ג. מה ניתן לומר על הקשר בין המשתנים במדגם?
- ד. מסתבר שבסופו של דבר נתנו פקטור של 5 נקודות לציון הסופי. כיצד הדבר היה משנה את מקדם המתאם של המדגם?

4) בתחנה המטאורולוגית רצו לבדוק את הקשר שבין הטמפרטורה במעלות צלזיוס לכמות המשקעים במ"מ. הם אספו נתונים על 10 ימים במהלך חודש ינואר. המתאם שהתקבל היה 0.8.

- א. השלימו את המשפט:
בחודש ינואר ככל שהטמפרטורה היומית נוטה לרדת, כך כמות המשקעים נוטה _____.
- ב. הוחלט להעביר את הטמפרטורה למעלות פרנהייט על מנת שיוכלו להשוות אותה לנתונים מארה"ב. נוסחת המעבר היא $F^0 = 32 + \frac{9}{5}C^0$.
כיצד הדבר ישפיע על מקדם המתאם בין הטמפרטורה במעלות פרנהייט לכמות המשקעים במ"מ?

5) להלן דיאגרמת פיזור המראה קשר בין שני משנים:

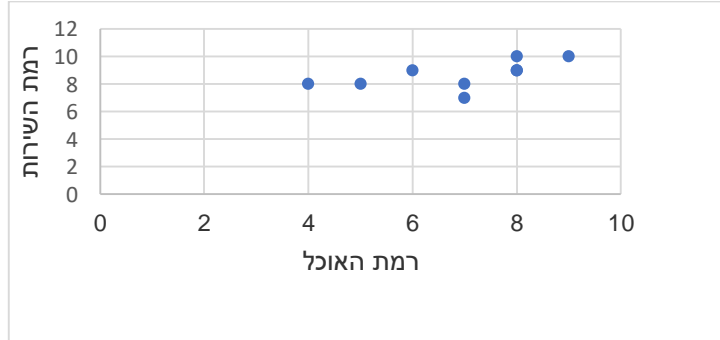


- א. השלימו: ניתן לראות שהקשר הוא לינארי _____ (מלאו חלקי) כיוון הקשר הוא (חיובי/שלילי).
- ב. השלימו: אם היינו מוסיפים תצפית שערך ה- X שלה הוא 4 וערך ה- Y שלה הוא 7, מקדם המתאם של פירסון היה _____ (גדלו קטן/לא משתנה).

שאלות רב ברירה (יש לבחור את התשובה הנכונה):

- 6) חוקר אקלים דגם כמה ימים בשנה ומדד את הטמפרטורה בטורונטו שבקנדה ואת הטמפרטורה בסידני שבאוסטרליה באותו היום. הוא חישב ומצא מקדם מתאם שלילי בין הטמפרטורה היומית בטורונטו לבין הטמפרטורה היומית בסידני. משמעות מקדם המתאם השלילי במדגם:
- א. אין קשר בין הטמפרטורה בטורונטו לבין הטמפרטורה בסידני בימים שנדגמו.
ב. במדגם, רוב הטמפרטורות בטורונטו היו שליליות.
ג. ההפרש בין הטמפרטורה בטורונטו לבין הטמפרטורה באוסטרליה, במדגם זה, הוא שלילי.
ד. במדגם יש נטייה שהטמפרטורה יורדת בטורונטו לטמפרטורה לעלות בסידני.

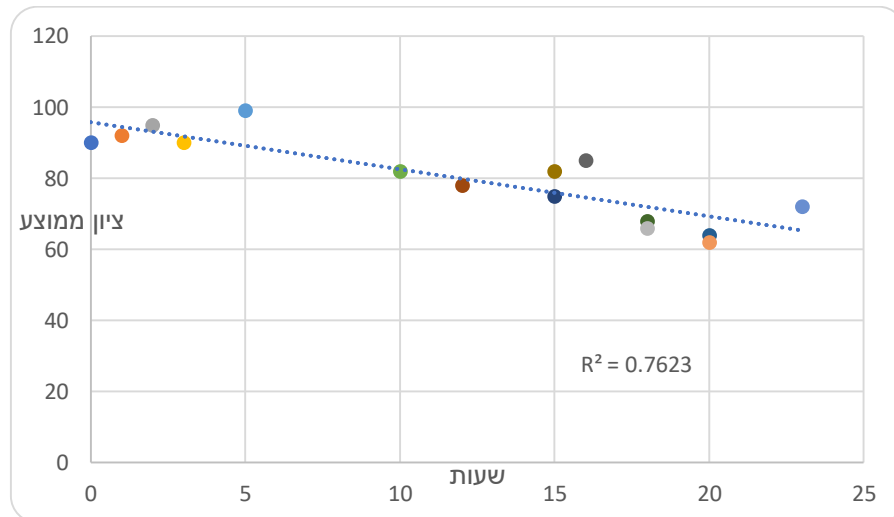
- 7) בסקר שביעות רצון שנערך בבית הקפה "פת לחם" התבקשו הלקוחות לדרג את מידת שביעות הרצון שלהם (בסולם 1-10) בשני נושאים: רמת האוכל ורמת השירות.



מה יהיה ערכו של מקדם המתאם (r)?

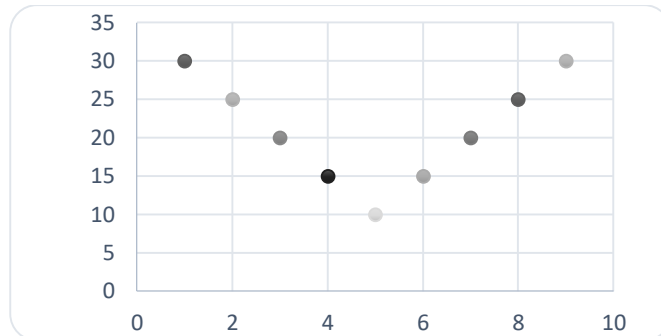
- א. $r = -0.3$
 ב. $r = 0$
 ג. $r = 1.125$
 ד. $r = 0.593$

- 8) חוקר רצה לאפיין את הקשר בין מספר השעות בשבוע שסטודנט מקדיש לבילויים לבין הציון הממוצע שלו בסוף הסמסטר. לשם כך הוא אסף נתונים של 15 סטודנטים ויצר דיאגרמת פיזור.



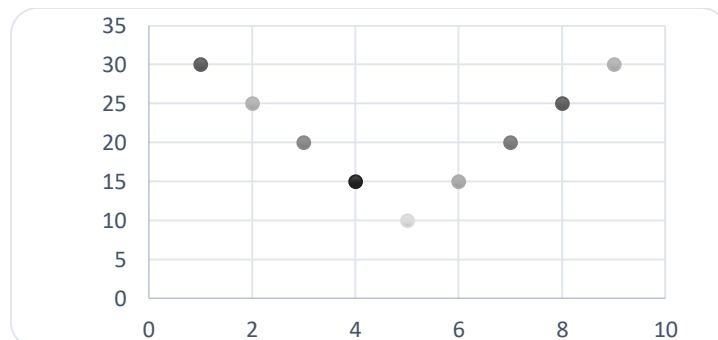
- מה ניתן לומר על כיוון הקשר במדגם בין מספר שעות הבילוי השבועיות לבין הציון הממוצע של הסמסטר?
- א. ככל שמבלים יותר הציון נוטה לרדת.
 ב. אין קשר בין שעות הבילוי לציון.
 ג. ככל שמבלים פחות הציון נוטה לרדת.
 ד. ככל שהציון נוטה לרדת הסטודנט מבלה פחות.

9) התרשים הבא מתאר קשר בין שני משתנים, איזה מהמתאמים הבאים הוא המתאים ביותר לתיאור הקשר בין שני המשתנים?



- א. $r = 1$ היות ושני המשתנים יוצרים קוים ישרים.
 ב. $r = 2$ היות ויש שני קוים בעלי קשר מושלם.
 ג. $r = 0$ היות והקו יורד ואחר כך עולה באותו האופן.
 ד. $r = \pm 1$ היות ויש קו עולה וגם קו יורד.

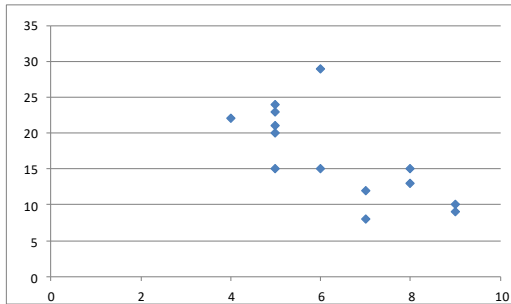
10) התרשים הבא מתאר דיאגרמת פיזור.



איזו טענה נכונה?

- א. בתרשים מוצג הקשר בין שני משתנים.
 ב. בתרשים מוצג הקשר בין 9 משתנים.
 ג. בתרשים מוצג הקשר בין 10 משתנים.
 ד. אין לדעת כמה משתנים מוצגים בתרשים.

בגרף הבא מתוארת דיאגרמת פיזור של שני משתנים:



X - (משתנה בלתי תלוי בציר האופקי)

Y - (משתנה תלוי).

במדגם התקבל $r^2 = 0.52$.

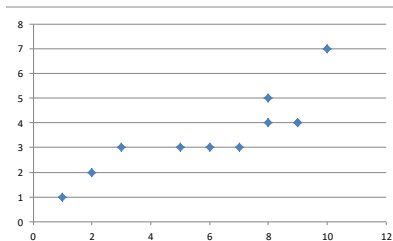
11) לאור הנתונים המופיעים בדיאגרמה, איזה מבין הערכים הבאים מתאים להיות התוצאה של r ?

- א. -0.52
- ב. 0.72
- ג. -0.72
- ד. 0.52

12) אם מקדם המתאם בין שני משתנים הוא 1, אזי:

- א. הערכים של המשתנים הם חיוביים.
- ב. עבור כל תצפית ערך של משתנה אחד שווה לערך של המשתנה השני.
- ג. הקשר הלינארי הוא בעוצמה חזקה.
- ד. אף אחת מהתשובות לא בהכרח נכונה.

13) להלן דיאגרמת פיזור:



מה יהיה מקדם המתאם בין שני המשתנים?

- א. 1
- ב. 0.85
- ג. 0.15
- ד. 0

14) בבדיקת קשר בין שני משתנים התקבל: $r = -1$.

- א. קיימת נוסחה לינארית הקושרת בין כל התצפיות.
- ב. לא קיים קשר בין שני המשתנים.
- ג. ככל שמשתנה אחד נוטה לרדת גם לשני יש נטייה לרדת.
- ד. קיים קשר בין שני המשתנים, אך לא ניתן לדעת מאיזה סוג.

15) לפי הפתגם "רחוק מהעין, רחוק מהלב", יש קשר ____ בין קרבה פיזית לקרבה נפשית.

- א. חיובי
- ב. שלילי
- ג. אפסי
- ד. לא ניתן לדעת.

16) מבחן אמי"ר הינו מבחן מיון באנגלית של המרכז הארצי לבחינות והערכה. הציון המינימלי בבחינה הינו 150 והמקסימלי הינו 250. בקורס הכנה למבחן השתתפו 19 תלמידים. להלן הציונים שלהם על פי פלט שהתקבל:

| | |
|--------|---------|
| | 159 |
| | 170 |
| | 180 |
| | 185 |
| | 204 |
| | 224 |
| | 236 |
| | 212 |
| | 168 |
| | 189 |
| | 195 |
| | 163 |
| | 187 |
| | 206 |
| | 201 |
| | 223 |
| | 242 |
| | 203 |
| | 205 |
| 197.47 | AVERAGE |
| 536.25 | VARPA |

יש להוסיף עמודה נוספת לצד עמודת הציונים שתראה לכל תלמיד כמה נקודות חסרות לו כדי להשלים לציון המקסימלי בבחינה.

מה יהיה מקדם המתאם בין שתי העמודות (כלומר, מקדם המתאם בין הציון לבין הנקודות החסרות)?

- א. -1
- ב. 1
- ג. -0.5
- ד. 0.5

17) מקדם המתאם בין שטחי דירה למחיר שלהם חושב ונמצא 1.2. מה נובע מכך?

- א. ככל שהדירה גדולה יותר בשטחה כך היא יקרה יותר.
- ב. ככל שהדירה קטנה יותר בשטחה כך היא זולה יותר.
- ג. לא קיים קשר בין שטח הדירה למחיר הדירה.
- ד. מצב כזה שמתואר הנתונים לא אפשרי.

18) אם ניקח 10 אנשים ונרשום לכל אדם את הגובה במטר וכמו כן את הגובה בס"מ. מה יהיה מקדם המתאם בין גובה האדם במטר לגובה האדם בס"מ?

- א. 1
- ב. 0
- ג. -1
- ד. לא ניתן לדעת.

- 19) נמצא מתאם חיובי בעוצמה גבוהה בין X – ציון בבגרות בלשון ל Y – ציון בבגרות במתמטיקה. אילו מהמשפטים הבאים נכון?
- א. ניתן לומר שאחת מהסיבות להבדלים שיש לסטודנטים במתמטיקה נובעים מההבדלים שיש להם בלשון.
- ב. קיימת נוסחה של קו ישר שקושרת בין ציון בבגרות במתמטיקה לציון בבגרות בלשון.
- ג. ללא יוצא מן הכלל, ניתן להגיד שכל תלמיד שמצליח יותר מתלמיד אחר בלשון גם יצליח יותר מאותו תלמיד במתמטיקה.
- ד. אף אחד מהטענות שהוצגו אינה בהכרח נכונה.

- 20) עבור סדרה של תצפיות מדדו את X ואת Y . נמצא שעבור כל התצפיות שהערך של Y ירד הערך של X בהכרח ירד ללא יוצא מן הכלל. מקדם המתאם של פירסון יהיה בהכרח:
- א. 1
- ב. -1
- ג. 0
- ד. אף אחת מהתשובות.

תשובות סופיות

- (1) א. שעות בילוי.
 ב. הקשר חלקי, כיוון הקשר שלילי.
 (2) א. להלן טבלה:

| מתמטיקה | לשון | ספורט | |
|---------|------|-------|---------|
| 0.1 | -0.7 | 1 | ספורט |
| 0.6 | 1 | -0.7 | לשון |
| 1 | 0.6 | -0.1 | מתמטיקה |

- (3) א. ב"ת- מס' שעות התרגול, תלוי- ציון.
 ג. קשר לינארי חיובי חלקי.
 (4) א. לעלות.
 (5) א. חלקי, חיובי.
 (6) ד' (7) ד' (8) א' (9) ג' (10) א'
 (11) ג' (12) ד' (13) ב' (14) א' (15) א'
 (16) א' (17) ד' (18) א' (19) ד' (20) ד'

מדדי קשר – מדד הקשר הלינארי (פירסון) – רקע

המטרה היא לבדוק האם קיים קשר (קורלציה, מתאם) של קו ישר בין שני משתנים כמותיים. מבחינת סולמות המדידה קשר בין סולמות רווחים ומנה. בדרך כלל, X הוא המשתנה המסביר (הבלתי תלוי) ו- Y הוא המשתנה המוסבר (התלוי).

דוגמה:

נרצה להסביר כיצד השכלה של אדם הנמדדת בשנות לימוד X מסבירה את ההכנסה שלו Y . במקרה זה שנות ההשכלה זהו המשתנה המסביר (או הבלתי תלוי) ואנחנו מעוניינים לבדוק כיצד שינויים בשנות ההשכלה של אדם יכולים להסביר את השינויים שלו בהכנסה, ולכן רמת ההכנסה זהו המשתנה המוסבר התלוי במשתנה המסביר אותו.

שלב ראשון: נהוג לשרטט דיאגרמת פיזור. זו דיאגרמה שנותנת אינדיקציה ויזואלית על טיב הקשר בין שני המשתנים.

דוגמה:

| מס' דירה | X | Y |
|----------|-----|-----|
| 1 | 3 | 2 |
| 2 | 2 | 2 |
| 3 | 4 | 3 |
| 4 | 3 | 3 |
| 5 | 5 | 4 |

בבניין של 5 דירות בדקו את הנתונים הבאים:
 X - מס' חדרים בדירה. Y - מס' נפשות הגרות בדירה.
 להלן התוצאות שהתקבלו:

נשרטט מנתונים אלה דיאגרמת פיזור (הדיאגרמה המלאה בסרטון). נתבונן בכמה מקרים של דיאגרמות פיזור ונתח אותן (הדיאגרמות המלאות בסרטון).

שלב שני: מחשבים את מקדם המתאם (מדד הקשר) שבודק עד כמה קיים קשר לינארי בין שני המשתנים. המדד (ניקרא גם מדד הקשר של פירסון) מכמת את מה שניראה בשלב הראשון רק בעין.

המדד בודק את כיוון הקשר (חיובי או שלילי) ואת עוצמת הקשר (חלש עד חזק). מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין -1 ל-1.
 מקדם מתאם -1 או 1 אומר שקיים קשר לינארי מוחלט ומלא בין המשתנים שניתן לבטאו על ידי הנוסחה: $y = bx + a$.

מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1):

קיים קשר לינארי מלא בו השיפוע b יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי מלא אומר שקיים קשר לינארי מלא בו השיפוע b שלילי (מקדם מתאם -1).

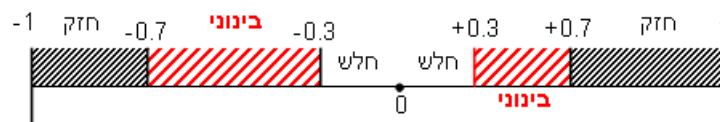
מתאם חיובי חלקי:

ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט.

מתאם שלילי חלקי:

ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט.

ככל שערך מקדם המתאם קרוב לאפס נאמר שעוצמת הקשר חלשה יותר וככל שמקדם המתאם רחוק מהאפס נאמר שעוצמת הקשר חזקה יותר:



מקדם המתאם יסומן באות r .

כדי לחשב את מקדם המתאם, יש לחשב את סטיות התקן של כל משתנה ואת השונות המשותפת.

$$COV(x, y) = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{n} = \frac{\sum xy}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y} : \text{שונות משותפת}$$

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2 : \text{שונות של המשתנה } X$$

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n} - \bar{y}^2 : \text{שונות המשתנה } Y$$

$$r_{xy} = \frac{COV(x, y)}{S_x \cdot S_y} : \text{מקדם המתאם הלינארי}$$

שאלות

1) להלן נתונים לגבי שישה תלמידים שנגשו למבחן. בדקו לגבי כל תלמיד את הציון שלו בסוף הקורס וכמו כן את מספר החיסורים שלו מהקורס.

| | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|--------------|
| 4 | 3 | 2 | 0 | 1 | 2 | מספר חיסורים |
| 50 | 70 | 70 | 90 | 90 | 80 | ציון |

- א. שרטטו דיאגרמת פיזור לנתונים. מה ניתן להסיק מהדיאגרמה על טיב הקשר בין מספר החיסורים של תלמיד לציונו? מיהו המשתנה הבלתי תלוי ומיהו המשתנה התלוי?
- ב. חשבו את מדד הקשר של פירסון. האם התוצאה מתיישבת עם תשובתך לסעיף א'?
- ג. הסבירו, ללא חישוב, כיצד מקדם המתאם היה משתנה אם היה מתווסף תלמיד שהחסיר 4 פעמים וקיבל ציון 80?

2) במחקר רפואי רצו לבדוק האם קיים קשר בין רמת ההורמון X בדם החולה לרמת ההורמון Y שלו. לצורך כך מדדו את רמת ההורמונים ההלו עבור חמישה חולים. להלן התוצאות שהתקבלו:

א. מה הממוצע של כל רמת הורמון?

ב. מהו מקדם המתאם בין ההורמונים? ומה משמעות התוצאה?

| | |
|-----|-----|
| X | Y |
| 10 | 12 |
| 14 | 15 |
| 15 | 15 |
| 18 | 17 |
| 20 | 21 |

3) נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 200 \qquad \sum_{i=1}^{20} X_i = 240$$

$$\sum_{i=1}^{20} (Y_i - \bar{Y})^2 = 76 \qquad \sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})^2 = 76$$

$$\sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = 60.8$$

- א. חשב את מדד הקשר הלינארי בין X ל- Y . מיהו המשתנה התלוי?
- ב. מה המשמעות של התוצאה שקיבלת בסעיף א'?

- (4) נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 200 \quad \sum_{i=1}^{20} X_i = 240$$

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i^2 = 2080 \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 2960$$

$$\sum_{i=1}^{20} X_i Y_i = 2464$$

חשבו את מדד הקשר הלינארי בין X ל- Y .

- (5) במוסד אקדמי ציון ההתאמה מחושב כך: מכפילים את הציון הממוצע בבגרות ב-3 ומפחיתים 2 נקודות. ידוע שעבור 40 מועמדים סטיית התקן של ממוצע הציון בבגרות הייתה 2.
מה מקדם המתאם בין ציון ההתאמה לציון הממוצע בבגרות שלהם?

- (6) להלן רשימת טענות, לגבי כל טענה קבעו נכון/לא נכון ונמקו.
- מתווך דירות המיר מחירי דירות מדולר לשקל. נניח שדולר אחד הוא 3.5 ₪. אם מתווך הדירות יחשב את מדד הקשר של פירסון בין מחיר הדירה בשקלים למחיר הדירה בדולרים הוא יקבל 1.
 - לסדרה של נתונים התקבל $\bar{X} = \bar{Y} = 6$, $S_x = S_y = 1$. לכן, מדד הקשר של פירסון יהיה 1.
 - אם השונות המשותפת של X ושל Y הינה 0 אז בהכרח גם מקדם המתאם של פירסון יהיה 0.

שאלות רב-ברירה:

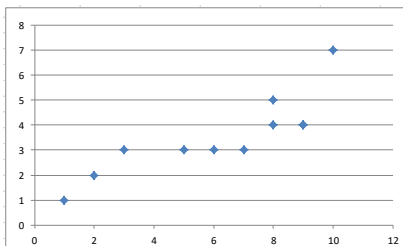
- (7) נמצא שקיים מקדם מתאם שלילי בין הציון בעברית לציון בחשבון בבחינה לכן:
- הדבר מעיד שהציונים בכיתה היו שליליים.
 - ככל שהציון של תלמיד יורד בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.
 - ככל שהציון של תלמיד עולה בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.
 - אף אחת מהתשובות לא נכונה.

8) נלקחו 20 מוצרים ונבדק ביום מסוים המחיר שלהם בדולרים והמחיר שלהם בש"ח (באותו היום ערך הדולר היה-4.2ש"ח). מהו מקדם המתאם בין המחיר בדולר למחיר בש"ח?

- א. 1
 ב. 0
 ג. 4.2
 ד. לא ניתן לדעת.

9) להלן דיאגרמת פיזור:

מה יהיה מקדם המתאם בין שני המשתנים?



- א. 1
 ב. 0.85
 ג. 0.15
 ד. 0

תשובות סופיות

- 1) א. משתנה תלוי: ציון, משתנה ב"ת: מס' חיסורים. ראה דיאגרמה בוידאו. ניתן להסיק שקיים קשר לינארי שלילי וחלקי בין מספר החיסורים לציון התלמיד.
 ב. -0.9325.
 ג. הקשר יישאר לינארי שלילי חלקי אך עוצמתו תחלש.
- 2) א. $\bar{y} = 16$, $\bar{x} = 15.4$ ב. $r_{xy} = 0.96$.
- 3) א. 0.8
 4) 0.8
 5) 1
 6) א. נכון. ב. לא נכון. ג. נכון.
 7) ג'.
 8) א'.
 9) ב'.

בדיקת השערות על מקדם המתאם הלינארי – רקע

מדד הקשר הלינארי באוכלוסייה, שנקרא גם מקדם המתאם של פירסון או מדד הקשר של פירסון באוכלוסייה מסומן ב: ρ - פרמטר המאפיין את עוצמת הקשר הלינארי וכיוונו בין שני המשתנים הנחקרים באוכלוסייה. כאשר: r - מדד הקשר הלינארי במדגם שמהווה אומדן לפרמטר ρ .

השערת האפס: תהיה שבאוכלוסייה לא קיים כלל קשר לינארי בין שני המשתנים $H_0: \rho = 0$. ההנחה שעליה אנו מתבססים בתהליך היא ששני המשתנים הנחקרים מתפלגים דו נורמלית.

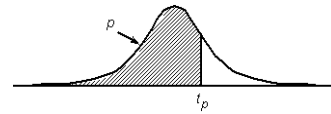
$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \sim t(n-2)$$

סטטיסטי זה מתפלג t עם $n-2$ דרגות חופש.

| | | | |
|-----------------------|------------------------|---|---|
| $H_0: \rho = 0$ | $H_0: \rho = 0$ | $H_0: \rho = 0$ | השערת האפס: |
| $H_1: \rho > 0$ | $H_1: \rho < 0$ | $H_1: \rho \neq 0$ | השערת המחקר: |
| $t \geq t_{1-\alpha}$ | $t \leq -t_{1-\alpha}$ | $t \geq t_{1-\alpha}$ γ א $t \leq -t_{1-\alpha}$ | כלל ההכרעה: אזור דחייה של השערת האפס |

טבלת ערכים קריטיים של t - נספח: טבלת התפלגות T

P



| דרגות חופש | 0.75 | 0.90 | 0.95 | 0.975 | 0.99 | 0.995 | 0.9995 |
|------------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|---------|
| 1 | 1.000 | 3.078 | 6.314 | 12.709 | 31.821 | 63.657 | 636.619 |
| 2 | 0.816 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 | 31.598 |
| 3 | 0.765 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 | 12.941 |
| 4 | 0.741 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 | 8.610 |
| 5 | 0.727 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 | 6.859 |
| 6 | 0.718 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 | 5.959 |
| 7 | 0.711 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 | 5.405 |
| 8 | 0.706 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 | 5.041 |
| 9 | 0.703 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 | 4.781 |
| 10 | 0.700 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 | 4.587 |
| 11 | 0.697 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 | 4.437 |
| 12 | 0.695 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 | 4.318 |
| 13 | 0.694 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 | 4.221 |
| 14 | 0.692 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 | 4.140 |
| 15 | 0.691 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 | 4.073 |
| 16 | 0.690 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 | 4.015 |
| 17 | 0.689 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 | 3.965 |
| 18 | 0.688 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 | 3.922 |
| 19 | 0.688 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 | 3.883 |
| 20 | 0.687 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 | 3.850 |
| 21 | 0.686 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 | 3.819 |
| 22 | 0.686 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 | 3.792 |
| 23 | 0.685 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 | 3.767 |
| 24 | 0.685 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 | 3.745 |
| 25 | 0.684 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 | 3.725 |
| 26 | 0.684 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 | 3.707 |
| 27 | 0.684 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 | 3.690 |
| 28 | 0.683 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 | 3.674 |
| 29 | 0.683 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 | 3.659 |
| 30 | 0.683 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 | 3.646 |
| 40 | 0.681 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.704 | 3.551 |
| 60 | 0.679 | 1.296 | 1.671 | 2.000 | 2.390 | 2.660 | 3.460 |
| 120 | 0.677 | 1.289 | 1.658 | 1.980 | 2.358 | 2.617 | 3.373 |
| ∞ | 0.674 | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 | 3.291 |

שאלות

1) להלן נתונים על הוותק בעבודה (בשנים) ועל השכלה (בשנים) במדגם של 10 עובדים :

| | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|---|----|----|----|---------|
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | נחקר |
| 24 | 17 | 28 | 5 | 9 | 16 | 8 | 2 | 18 | 13 | X-ווקט |
| 15 | 12 | 8 | 13 | 12 | 11 | 8 | 17 | 14 | 12 | Y-השכלה |

מקדם המתאם חושב והתקבל : -0.31 .

- א. האם קיים מתאם בין ווקט העובד להשכלתו? בדקו ברמת מובהקות של 5%?
- ב. אם הוותק של העובד היה נמדד בחודשים האם התשובה לסעיף א' הייתה משתנה?

2) מחקר התעניין לבדוק את הקשר בין גיל נשים בהריון לרמת ההמוגלובין שלהן בדם בזמן הריון. נדגמו 7 נשים והתקבלו התוצאות הבאות :

| | | | | | | | |
|-----------|------|------|-----|----|------|----|------|
| נחקרת | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| המוגלובין | 14.7 | 13.5 | 9.7 | 12 | 10.8 | 13 | 10.3 |
| גיל | 39 | 34 | 30 | 29 | 28 | 26 | 23 |

במדגם חושב מדד הקשר של פירסון להיות 0.7 .

- א. האם ניתן לומר שבמדגם אם אישה היא יותר מבוגרת אזי בהכרח יש לה יותר המוגלובין בדם?
- ב. האם ניתן לומר, ברמת מובהקות של 5%, שקיים מתאם בין גיל האישה שבהריון לבין רמת ההמוגלובין שלה בדם?

3) בתחנה המטאורולוגית רצו לבדוק את הקשר שבין הטמפרטורה במעלות צלזיוס לכמות המשקעים במ"מ. הם אספו נתונים על 10 ימים במהלך חודש ינואר. המתאם שהתקבל היה -0.8 .

- א. בדקו ברמת מובהקות של 2.5% האם קיים קשר לינארי שלילי בחודש ינואר בין הטמפרטורה במעלות צלזיוס לבין המשקעים במעלות צלזיוס.
- ב. כיצד הייתה משתנה התשובה לסעיף א אם הינו מוסיפים עוד תצפיות למדגם?
- ג. על סמך טבלת T המצורפת עבור אילו רמות מובהקות ניתן להחליט שקיים קשר לינארי שלילי מובהק?

4) מתווך דירות חישב את מקדם המתאם בין שטח דירה במרכז תל אביב לבין המחיר של הדירה עבור 17 דירות. מקדם המתאם שקיבל היה 0.6 .

- א. בדוק ברמת מובהקות של 5% האם ניתן להגיד שקיים קשר ישר עולה בין שטח הדירה לבין מחיר הדירה במרכז תל אביב?
- ב. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת ההשערה שקיים קשר ישר עולה בין שטח הדירה לבין מחיר הדירה בתל אביב.

תשובות סופיות

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| ב. לא תשתנה. | (1) א. לא נדחה את H_0 . |
| ב. לא נדחה את H_0 . | (2) א. לא |
| ב. לא ניתן לדעת. | (3) א. נדחה את H_0 . |
| ב. $0.005 < P_v < 0.01$. | ג. לפחות 0.005. |
| | (4) א. נדחה את H_0 . |

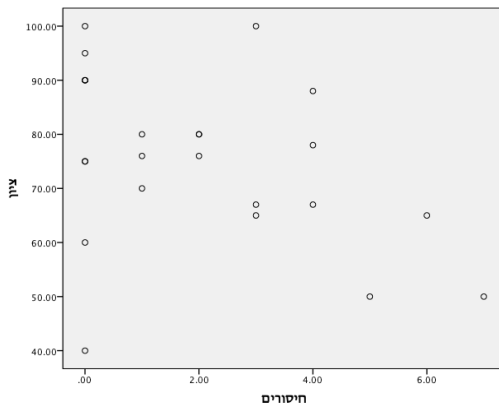
מדד הקשר הלינארי – ניתוח פלטים – רקע

מדד הקשר הלינארי באוכלוסייה, שנקרא גם מקדם המתאם של פירסון או מדד הקשר של פירסון באוכלוסייה מסומן ב: ρ - פרמטר המאפיין את עוצמת הקשר הלינארי באוכלוסייה וכיוונו בין שני המשתנים הנחקרים. כאשר:

r - מדד הקשר הלינארי במדגם שמהווה אומדן לפרמטר ρ .

השערת האפס: תהיה שבאוכלוסייה לא קיים כלל קשר לינארי בין שני המשתנים: $H_0: \rho = 0$.
ההנחה שעליה אנו מתבססים בתהליך היא ששני המשתנים הנחקרים מתפלגים דו נורמלית.
דוגמה (פתרון בהקלטה):

הדיקן ביקש לדגום סטודנטים כדי לבדוק את הקשר בין ציון הסטודנט בקורס למספר הפעמים שהוא החסיר שיעור בקורס. דיאגרמת הפיזור שהתקבלה במדגם שבוצע:



- מיהו המשתנה התלוי ומיהו המשתנה הבלתי תלוי במחקר?
- מה ניתן לראות לגבי הקשר הלינארי בין המשתנים שהתקבל בהתקבל במדגם?

Correlations

| | | חיסורים | ציון |
|---------|---------------------|---------|-------|
| חיסורים | Pearson Correlation | 1 | -.389 |
| | Sig. (2-tailed) | | .060 |
| | N | 24 | 24 |
| ציון | Pearson Correlation | -.389 | 1 |
| | Sig. (2-tailed) | .060 | |
| | N | 24 | 24 |

- מהו מקדם המתאם שהתקבל במדגם? מה המשמעות שלו?
- האם ניתן להגיד ברמת מובהקות של 5% שקיים מתאם לינארי שלילי בין מספר החיסורים של הסטודנטים מהקורס לבין הציון של הסטודנטים בקורס?

שאלות

1) מחקר רפואי התעניין לבדוק האם קיים קשר לינארי בין גיל האישה בהריון לרמת ההמוגלובין שלה. להלן תוצאות מדגם שהתקבלו, עבור נשים בהריון:

Correlations

| | | age | hemoglobin |
|------------|-----------------|------|------------|
| age | Pearson | 1 | .565 |
| | Correlation | | |
| | Sig. (2-tailed) | 23 | .005 |
| | N | | |
| hemoglobin | Pearson | .565 | 1 |
| | Correlation | | |
| | Sig. (2-tailed) | 23 | .005 |
| | N | | |

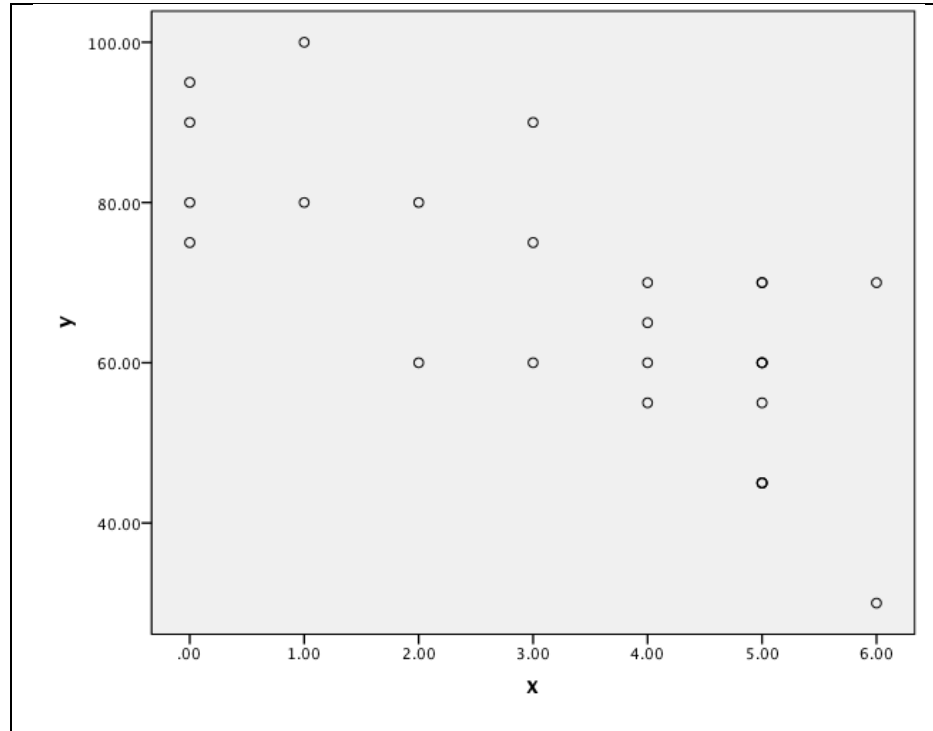
- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
- ב. מהן השערות המחקר?
- ג. מהו המשתנה הבלתי תלוי ומהו המשתנה התלוי במחקר?
- ד. מהי מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 5%?

2) במדגם שנעשה נבדקו מספר משתנים על התצפיות שנדגמו. להלן פלט שהופק על המדגם:

| | | x | y | z | w |
|---|-----------------|-------|-------|-------|-------|
| x | Pearson | ??? | -.682 | .134 | .176 |
| | Correlation | | | | |
| | Sig. (2-tailed) | | .005 | .634 | .530 |
| | N | 15 | 15 | 15 | 15 |
| y | Pearson | -.682 | 1 | ??? | -.555 |
| | Correlation | | | | |
| | Sig. (2-tailed) | .005 | | .544 | .032 |
| | N | 15 | 15 | 15 | 15 |
| z | Pearson | .134 | .170 | 1 | -.247 |
| | Correlation | | | | |
| | Sig. (2-tailed) | ??? | .544 | | .374 |
| | N | 15 | 15 | 15 | 15 |
| w | Pearson | .176 | -.555 | -.247 | 1 |
| | Correlation | | | | |
| | Sig. (2-tailed) | .530 | .032 | .374 | |
| | N | 15 | 15 | 15 | 15 |

- א. בין אילו שני משתנים שונים הקשר הלינארי במדגם נמצא עם העוצמה הכי חזקה?
- ב. ברמת מובהקות של 5%, אילו שני משתנים בעל קשר לינארי מובהק?
- ג. השלימו את המספרים המסומנים בפלט בסימני שאלה.

3) נדגמו מספר תלמידים בכיתה יב' ובדקו לכל תלמיד: X - מספר שעות שבועיות שהתלמיד צופה בטלוויזיה ביום Y - ציון הבגרות שלו במתמטיקה. להלן התוצאות שהתקבלו במחקר:



Correlations

| | | x | y | |
|---|-----------------|---------|---------|------|
| x | Pearson | 1 | -.741** | |
| | Correlation | | | |
| | Sig. (2-tailed) | | | .000 |
| | N | | | 26 |
| y | Pearson | -.741** | 1 | |
| | Correlation | | | |
| | Sig. (2-tailed) | | | .000 |
| | N | | | 26 |

** . Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

- מהו המשתנה התלוי ומהו המשתנה הבלתי תלוי?
- מהו כיוון הקשר שהתקבל במדגם ומהו עוצמתו?
- האם ניתן להגיד שבאופן מובהק ככל שתלמיד צופה יותר בטלוויזיה הוא מצליח פחות בבגרות במתמטיקה?
- בהמשך לסעיף הקודם, האם ניתן להגיד שהסיבה להצלחה או אי הצלחה בבגרות במתמטיקה היא זמן הצפייה בטלוויזיה?

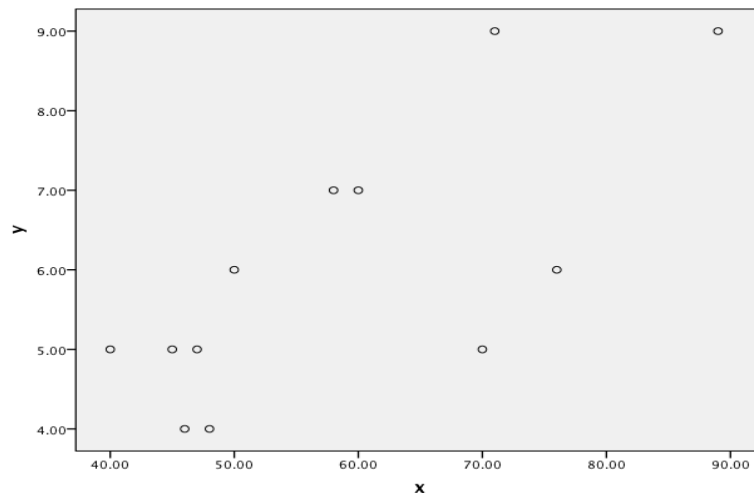
4) נדגמו ילדים בגיל 8 ונבדק עבור כל ילד גובהו בס"מ ומשקלו בק"ג. להלן הפלט שהתקבל עבור תוצאות המדגם:

Correlations

| | | גובה | משקל |
|------|-----------------|------|------|
| גובה | Pearson | | |
| | Correlation | 1 | .552 |
| | Sig. (2-tailed) | | .062 |
| | N | 12 | 12 |
| משקל | Pearson | | |
| | Correlation | .552 | 1 |
| | Sig. (2-tailed) | .062 | |
| | N | 12 | 12 |

- בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים קשר לנארי חיובי בין המשקל והגובה.
- באילו רמות מובהקות ניתן לקבוע שקיים קשר לנארי חיובי בין במשקל והגובה?
- כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם היו מתווספות עוד 3 תצפיות למדגם?

5) בתהליך כימי מסוים חוקר בדק את הקשר בין הטמפרטורה בתהליך (X) לבין אחוז החומר (Y) בתהליך. דיאגרמת הפיזור שהתקבלה היא:



Correlations

| | | x | y |
|---|---------------------|--------|--------|
| x | Pearson Correlation | 1 | .732** |
| | Sig. (2-tailed) | | .007 |
| | N | 12 | 12 |
| | | | |
| y | Pearson Correlation | .732** | 1 |
| | Sig. (2-tailed) | .007 | |
| | N | 12 | 12 |
| | | | |

** . Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

- א. מה ניתן להגיד על סמך הפלט על הקשר שנימצא במדגם בין הטמפרטורה בתהליך לאחוז החומר?
- ב. האם הקשר בין הטמפרטורה בתהליך לבין אחוז החומר הוא קווי חיובי מובהק? בדקו ברמת מובהקות של 5%.
- ג. מה היה קורה למקדם המתאם במדגם ומובהקות התוצאה אם הייתה מתווספת תצפיות שבה הטמפרטורה היא 40 ואחוז החומר 9?

תשובות סופיות

- (1) א. נשים בהריון. ב. $H_0 : p = 0$
 $H_1 : p \neq 0$
- ג. משתנה תלוי – רמת ההמוגלובין, משתנה בלתי תלוי- גיל.
 ד. קיים קשר לינארי בין גיל האישה בהריון לרמת ההמוגלובין שלה בדם.
- (2) א. בין X ל- Y . ב. X ו- Y . כמו כן, W ו- Y . ג. ראה וידאו.
 ד. לא.
- (3) א. משתנה תלוי – ציון בבגרות במתמטיקה, משתנה בלתי תלוי- שעות צפייה.
 ב. כיוון שלילי ועוצמה של 0.741. ג. כן. ד. לא.
- (4) א. נדחה את H_0 . ב. לפחות 0.032. ג. לא ניתן לדעת.
- (5) א. קיים קשר לינארי חיובי וחלקי שעוצמתו: 0.732. ב. נדחה את H_0 .
 ג. מקדם המתאם קטן ומובהקות התוצאה גדלה.

סטטיסטיקה

פרק 33 - רגרסיה

תוכן העניינים

238 1. כללי

מדדי קשר – רגרסיה ליניארית:

רקע:

במידה וקיים קשר חזק בין שני המשתנים הכמותיים נהוג לבצע ניבוי. לבנות קו ניבויים הנקרא גם קו רגרסיה המנבא משתנה אחד על סמך האחר. מדובר בקו שמנבא את Y על סמך X . השיטה למציאת הקו הנ"ל נקראת שיטת הריבועים הפחותים והקו המתקבל נקרא קו הרגרסיה או קו הניבויים או קו הריבועים הפחותים. a - נותן את ערך Y כאשר X הנו אפס על גבי קו הניבויים. הוא נקרא החותך של הקו. b - הוא שיפוע הקו נותן בכמה בעצם Y משתנה כאשר X גדל ביחידה אחת על גבי קו הניבויים.

להלן המשוואות למציאת הפרמטרים של קו הרגרסיה: $Y = bX + a$, $b = r \frac{S_y}{S_x}$.

לצורך בניית קו ניבויים לניבוי X על סמך Y נצטרך לעדכן את הנוסחאות בהתאם.

שאלות:

- (1) נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 200, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i = 240$$

$$\sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})^2 = 76, \quad \sum_{i=1}^{20} (Y_i - \bar{Y}) = 76$$

$$\sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = 60.8$$

- א. חשבו את מדד הקשר הלינארי בין X ל- Y . מיהו המשתנה התלוי?
 ב. מצאו את קו הרגרסיה לניבוי ההוצאה של משפחה על סמך הכנסה שלה. הסבירו את משמעות הפרמטרים של קו הרגרסיה.
 ג. משפחת כהן הכניסה 15,000₪. מה ההוצאה הצפויה שלה?

- (2) נסמן ב- X את ההשכלה של אדם בשנות לימוד. נסמן ב- Y את הכנסתו באלפי ₪. במחקר התקבלו התוצאות הבאות:

$$S_x = 2, \quad S_y = 5, \quad \bar{X} = 14, \quad \bar{Y} = 8, \quad \text{COV}(X, Y) = 7.5$$

- א. חשבו את מדד הקשר של פירסון בין ההשכלה להכנסה.
 ב. מה ההכנסה הצפויה לאדם שהשכלתו 12 שנים?
 ג. מה ההשכלה הצפויה לאדם שהכנסתו 10,000₪?

- (3) חוקר רצה לחקור את הקשר הקווי שבין הציון המבחן בסטטיסטיקה לבין מספר שעות ההכנה של הסטודנטים למבחן. במדגם של 100 סטודנטים שנבחנו בקורס נרשמו התוצאות הבאות: הציון הממוצע של הסטודנטים היה 65 עם סטיית תקן של 27. מספר שעות ההכנה הממוצע היה 30 עם סטיית תקן של 18. מקדם המתאם בין הציון לשעות ההכנה היה 0.8.

- א. על פי משוואת הרגרסיה, שעת הכנה נוספת משפרת את ציון המבחן ב-?
 ב. על פי משוואת הרגרסיה, תלמיד שייגש למבחן ללא שעות הכנה כלל יקבל ציון?
 ג. מהו קו הרגרסיה לניבוי הציון לפי שעות ההכנה?

- (4) נתונים 2 משתנים X ו- Y . כמו כן נתון: $\bar{X} = 1.5, S_x = S_y = 4$,
 וכן שקו הרגרסיה של Y על בסיס X הינו: $Y = -0.2X + 0.5$.
 חשבו מהו מקדם המתאם בין X ל- Y .

תשובות סופיות:

- | | | |
|----------------------|-----------------------|-------------|
| ג. 12.4 אלפי ₪. | ב. $Y = 0.8X + 0.4$. | א. 0.8 (1) |
| ג. 14.6 שנים. | ב. 4.25 אלפי ₪. | א. 0.75 (2) |
| ג. $Y = 1.2X + 29$. | ב. 29. | א. 1.2 (3) |
| | | א. -0.2 (4) |

סטטיסטיקה

פרק 34 - מדדי קשר-רגרסיה - שונות מוסברת ושונות לא מוסברת

תוכן העניינים

1. כללי 241

מדדי קשר – רגרסיה – שונות מוסברת ושונות לא מוסברת:

רקע:

המטרה ברגרסיה היא להסביר את השונות של המשתנה התלוי. למשל, להסביר את השונות של המשכורת באמצעות הוותק או להסביר את השוני בציונים באמצעות כמות החיסורים.

r^2 - החלק מהשונות של המשתנה התלוי מוסבר. השונות המוסברת נקראת גם שונות ניבויים. השונות הלא מוסברת נקראת גם שונות טעויות.

שאלות:

- (1) נמצא קשר חיובי בעוצמה של 0.7 בין שטח דירה למחירה. כמו כן, נתון שסטיית התקן של מחירי הדירות הינה 200.
- איזה אחוז מהשונות של מחירי הדירות מוסבר על ידי שטח הדירה?
 - איזה אחוז מהשונות של מחירי הדירות לא מוסבר על ידי שטח הדירה?
 - מהי השונות המוסברת ומהי השונות הלא מוסברת של מחירי הדירות?
- (2) להלן רשימת טענות, לגבי כל טענה קבעו נכון/לא נכון ונמקו!
- אם שונות הטעויות שווה ל-0 (השונות הלא מוסברת) אז מקדם המתאם של פירסון יהיה 1.
 - אם מקדם המתאם של פירסון בין שני משתנים הוא 1 אזי שונות הטעויות (השונות הלא מוסברת) תהיה 0.
 - אם השונות המשותפת של X ושל Y היא 0 אז בהכרח גם מקדם המתאם של פירסון יהיה 0.

שאלות רב-ברירה:

- (3) בקשר בין שני משתנים התקבל: $r^2 = 0.64$, לכן:

- ללא יוצא מן הכלל ככל שערכי משתנה אחד עולה השני יעלה.
- 64% מהשונות של משתנה אחד מוסבר על ידי המשתנה השני.
- הקשר בין שני המשתנים הוא בעוצמה של 0.64.
- כל התשובות נכונות.

- (4) אם מגדילים את r^2 , ניתן לומר כי:

- אחוז השונות המוסברת יקטן.
- אחוז השונות המוסברת יגדל.
- אחוז השונות המוסברת יישאר ללא שינוי.
- סטיית התקן משתנה.
- לא ניתן לדעת.

- (5) בקורס מבוא לכלכלה ניתנו במשך השנה שני מבחנים : מבחן בסוף סמסטר א' X ומבחן בסוף סמסטר ב' Y . כאשר בנו את קו הרגרסיה של הציון במבחן סוף סמסטר ב' לפי הציון במבחן סוף סמסטר א' התקבלה שונות טעויות של 80, ושונות ניבויים של 20.
- לפי נתונים אלו, מקדם המתאם בין הציון במבחן סוף סמסטר א' לבין הציון במבחן סוף סמסטר ב' הוא :
- א. 0.44 .
 ב. - 0.44 .
 ג. עוצמת ההקשר הלינארי היא 0.44, אך אין אפשרות לדעת את סימנה.
 ד. אין אפשרות לחשב את מקדם המתאם.
 ה. 0.35 .

תשובות סופיות:

- (1) א. 49% . ב. 51% .
 ג. שונות מוסברת : 19,600, שונות לא מוסברת : 20,400 .
- (2) א. לא נכון . ב. נכון . ג. נכון .
- (3) ב' .
- (4) ב' .
- (5) ג' .

סטטיסטיקה

פרק 35 - מדד הקשר ספירמן

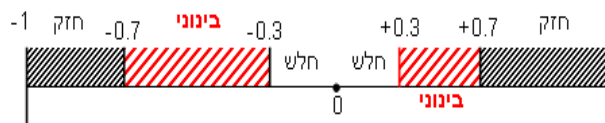
תוכן העניינים

244 1. כללי

מדדי קשר – מדד הקשר של ספירמן:

רקע:

מתי נשתמש במדד ספירמן?
 כאשר אחד המשתנים מסולם סדר והשני מסולם סדר ומעלה.
 הקשר שהמדד בודק הוא קשר דירוגי.
 מדד הקשר בודק את:



1. כיוון הקשר.

2. עצמת הקשר.

המדד מקבל ערכים בסקלה מ-(-1) ועד 1.

קשר דירוגי חיובי מלא:

מדד הקשר של ספירמן יוצא 1.
 ככל שמשנתנה אחד עולה, השני עולה ללא יוצא מן הכלל.

קשר דירוגי חיובי חלקי:

מקדם המתאם בין 0 ל-1.
 ככל שמשנתנה אחד עולה, לשני יש נטייה לעלות אך לא באופן מוחלט.

קשר דירוגי שלילי מלא:

מדד הקשר של ספירמן יוצא -1.
 ככל שמשנתנה אחד עולה השני יורד ללא יוצא מן הכלל.

קשר דירוגי שלילי חלקי:

מקדם המתאם הוא בין 0 ל-(-1).
 ככל שמשנתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אך לא באופן מוחלט.
 על מנת לחשב את הקשר יש לבצע פעולת דירוג (RANK).
 כאשר מדרגים, אם יש כמה תצפיות שתופסות את אותו הערך אז הדירוג שלהם הוא הממוצע של המקומות שהן תופסות.

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

הנוסחה של מדד הקשר:

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בתחרות רוקדים עם כוכבים השתתפו 7 זוגות, 2 שופטים נתנו את ציוניהם לריקוד של כל זוג. להלן התוצאות שהתקבלו:

| מספר הזוג | ציון שופט א' | R_x | ציון שופט ב' | R_y | $d = r_x - r_y$ | d^2 |
|-----------|--------------|-------|--------------|-------|-----------------|-------|
| 1 | 4 | | 5 | | | |
| 2 | 5 | | 5 | | | |
| 3 | 6 | | 7 | | | |
| 4 | 5 | | 7 | | | |
| 5 | 8 | | 9 | | | |
| 6 | 7 | | 9 | | | |
| 7 | 3 | | 7 | | | |

מהי מידת ההתאמה בין ציוני השופטים?

X - ציון שופט א' (סולם סדר).

Y - ציון שופט ב' (סולם סדר).

שאלות:

(1) בתחרות יופי חילקו שני שופטים ציונים למועמדות:

| מספר מועמדת | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|--------------|---|---|---|---|---|---|---|
| ציון שופט א' | 7 | 8 | 6 | 8 | 9 | 5 | 6 |
| ציון שופט ב' | 8 | 8 | 7 | 8 | 9 | 5 | 7 |

האם קיים קשר בין שתי הערכות השופטים? נמקו והסבירו!

(2) משרד רצה לבחון האם קיים קשר בין מידת המוטיבציה של העובדים שלו לבין מספר החיסורים של העובדים בחודש עבודה. להלן התוצאות שהתקבלו:

| מספר חיסורים | מידת מוטיבציה |
|--------------|---------------|
| 0 | גבוהה |
| 4 | נמוכה |
| 2 | בינונית |
| 5 | נמוכה |
| 1 | גבוהה |

האם קיים קשר בין רמת המוטיבציה של העובד ומספר החיסורים שלו? חשבו באמצעות מדד הקשר המתאים והסבירו.

(3) אם: $r_s = 1$, הדבר אומר שערכי X תמיד שווים לערכי Y . האם הטענה נכונה? הסבר.

תשובות סופיות:

- (1) קיים קשר דירוג חיובי חזק בין הערכת שופט א' להערכת שופט ב'.
מדד הקשר: 0.973.
- (2) קיים קשר שלילי בעוצמה חזקה בין רמת המוטיבציה של העובד למס' החיסורים שלו.
מדד הקשר: -0.85.
- (3) לא נכון.

סטטיסטיקה

פרק 36 - מבחני חי בריבוע

תוכן העניינים

1. מבחן טיב התאמה 247
2. מבחן טיב התאמה והקשר שלו לבדיקת השערות על פרופורציה אחת 252
3. מבחן לאי תלות 254
4. קשר בין מבחן אי תלות לבדיקת השערות להפרש פרופורציות 259

מבחני חי בריבוע

מבחן טיב התאמה – רקע

מבחן זה בא לבדוק האם אוכלוסייה מסוימת מתפלגת לפי התפלגות נתונה. המשתנה הנחקר מחולק למספר קטגוריות ויש לבדוק האם תוצאות המדגם תואמות להתפלגות הנתונה.

מבנה המבחן:

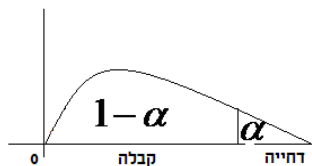
השערות:

המשתנה מתפלג לפי התפלגות מסוימת - H_0 .

אחרת - H_1 .

כלל הכרעה:

הערך הקריטי נקבע על סמך התפלגות חי בריבוע. התפלגות זו היא אסימטרית חיובית ותלויה בדרגות החופש. $d.f = K - 1$, כאשר K - מספר הקטגוריות.



הערך הקריטי הוא: $\chi^2_{1-\alpha, K-1}$, כלומר האחוזון ה- $1 - \alpha$ בהתפלגות חי בריבוע שדרגות החופש הן $K - 1$.

אם $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha, K-1}$, דוחים את השערת האפס.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

סטטיסטי המבחן:

O_i - השכיחות שנצפתה במדגם בקטגוריה i .

p_i - הסתברות לקטגוריה i לפי השערת האפס.

$E_i = np_i$ - שכיחות צפויה במדגם לקטגוריה i בהנחת השערת האפס.

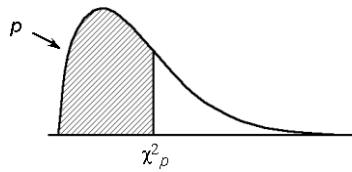
הערה:

תנאי כדי לבצע את המבחן הוא $E_i \geq 5$ לכל i . במידה ותנאי זה לא מתקיים יש אפשרות לאחד קטגוריות סמוכות עד שהתנאי יתקיים.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במדינה מסוימת שלוש מפלגות. בפרלמנט הנוכחי התפלגות מספר המושבים היא 30% למפלגה A, 60% למפלגה B ו-10% למפלגה C. לקראת הבחירות המתוכננות בשבוע הבא נעשה סקר שכלל 300 אזרחים. בסקר התקבל ש-40% יצביעו למפלגה A, 50% למפלגה B ו-10% למפלגה C. האם תוצאות הסקר תואמות להתפלגות המושבים בפרלמנט הנוכחי? בדקו ברמת מובהקות של 5%.

טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה



| df | p | | | | | | | | | | | | |
|----|----------|---------|----------|----------|--------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|
| | .005 | .01 | .025 | .05 | .10 | .25 | .50 | .75 | .90 | .95 | .975 | .99 | .995 |
| 1 | 0.004393 | 0.00457 | 0.004982 | 0.005393 | 0.0158 | 0.102 | 0.455 | 1.32 | 2.71 | 3.84 | 5.02 | 6.63 | 7.88 |
| 2 | 0.0100 | 0.0201 | 0.0506 | 0.103 | 0.211 | 0.575 | 1.39 | 2.77 | 4.61 | 5.99 | 7.38 | 9.21 | 10.6 |
| 3 | 0.0717 | 0.115 | 0.216 | 0.352 | 0.584 | 1.21 | 2.37 | 4.11 | 6.25 | 7.81 | 9.35 | 11.3 | 12.8 |
| 4 | 0.207 | 0.297 | 0.484 | 0.711 | 1.06 | 1.92 | 3.36 | 5.39 | 7.78 | 9.49 | 11.1 | 13.3 | 14.9 |
| 5 | 0.412 | 0.554 | 0.831 | 1.15 | 1.61 | 2.67 | 4.35 | 6.63 | 9.24 | 11.1 | 12.8 | 15.1 | 16.7 |
| 6 | 0.676 | 0.872 | 1.24 | 1.64 | 2.20 | 3.45 | 5.35 | 7.84 | 10.6 | 12.6 | 14.4 | 16.8 | 18.5 |
| 7 | 0.989 | 1.24 | 1.69 | 2.17 | 2.83 | 4.25 | 6.35 | 9.04 | 12.0 | 14.1 | 16.0 | 18.5 | 20.3 |
| 8 | 1.34 | 1.65 | 2.18 | 2.73 | 3.49 | 5.07 | 7.34 | 10.2 | 13.4 | 15.5 | 17.5 | 20.1 | 22.0 |
| 9 | 1.73 | 2.09 | 2.70 | 3.33 | 4.17 | 5.90 | 8.34 | 11.4 | 14.7 | 16.9 | 19.0 | 21.7 | 23.6 |
| 10 | 2.16 | 2.56 | 3.25 | 3.94 | 4.87 | 6.74 | 9.34 | 12.5 | 16.0 | 18.3 | 20.5 | 23.2 | 25.2 |
| 11 | 2.60 | 3.05 | 3.82 | 4.57 | 5.58 | 7.58 | 10.3 | 13.7 | 17.3 | 19.7 | 21.9 | 24.7 | 26.8 |
| 12 | 3.07 | 3.57 | 4.40 | 5.23 | 6.30 | 8.44 | 11.3 | 14.8 | 18.5 | 21.0 | 23.3 | 26.2 | 28.3 |
| 13 | 3.57 | 4.11 | 5.01 | 5.89 | 7.04 | 9.30 | 12.3 | 16.0 | 19.8 | 22.4 | 24.7 | 27.7 | 29.8 |
| 14 | 4.07 | 4.66 | 5.63 | 6.57 | 7.79 | 10.2 | 13.3 | 17.1 | 21.1 | 23.7 | 26.1 | 29.1 | 31.3 |
| 15 | 4.60 | 5.23 | 6.26 | 7.26 | 8.55 | 11.0 | 14.3 | 18.2 | 22.3 | 25.0 | 27.5 | 30.6 | 32.8 |
| 16 | 5.14 | 5.81 | 6.91 | 7.96 | 9.31 | 11.9 | 15.3 | 19.4 | 23.5 | 26.3 | 28.8 | 32.0 | 34.3 |
| 17 | 5.70 | 6.41 | 7.56 | 8.67 | 10.1 | 12.8 | 16.3 | 20.5 | 24.8 | 27.6 | 30.2 | 33.4 | 35.7 |
| 18 | 6.26 | 7.01 | 8.23 | 9.39 | 10.9 | 13.7 | 17.3 | 21.6 | 26.0 | 28.9 | 31.5 | 34.8 | 37.2 |
| 19 | 6.84 | 7.63 | 8.91 | 10.1 | 11.7 | 14.6 | 18.3 | 22.7 | 27.2 | 30.1 | 32.9 | 36.2 | 38.6 |
| 20 | 7.43 | 8.26 | 9.59 | 10.9 | 12.4 | 15.5 | 19.3 | 23.8 | 28.4 | 31.4 | 34.2 | 37.6 | 40.0 |
| 21 | 8.03 | 8.90 | 10.3 | 11.6 | 13.2 | 16.3 | 20.3 | 24.9 | 29.6 | 32.7 | 35.5 | 38.9 | 41.4 |
| 22 | 8.64 | 9.54 | 11.0 | 12.3 | 14.0 | 17.2 | 21.3 | 26.0 | 30.8 | 33.9 | 36.8 | 40.3 | 42.8 |
| 23 | 9.26 | 10.2 | 11.7 | 13.1 | 14.8 | 18.1 | 22.3 | 27.1 | 32.0 | 35.2 | 38.1 | 41.6 | 44.2 |
| 24 | 9.89 | 10.9 | 12.4 | 13.8 | 15.7 | 19.0 | 23.3 | 28.2 | 33.2 | 36.4 | 39.4 | 43.0 | 45.6 |
| 25 | 10.5 | 11.5 | 13.1 | 14.6 | 16.5 | 19.9 | 24.3 | 29.3 | 34.4 | 37.7 | 40.6 | 44.3 | 46.9 |
| 26 | 11.2 | 12.2 | 13.8 | 15.4 | 17.3 | 20.8 | 25.3 | 30.4 | 35.6 | 38.9 | 41.9 | 45.6 | 48.3 |
| 27 | 11.8 | 12.9 | 14.6 | 16.2 | 18.1 | 21.7 | 26.3 | 31.5 | 36.7 | 40.1 | 43.2 | 47.0 | 49.6 |
| 28 | 12.5 | 13.6 | 15.3 | 16.9 | 18.9 | 22.7 | 27.3 | 32.6 | 37.9 | 41.3 | 44.5 | 48.3 | 51.0 |
| 29 | 13.1 | 14.3 | 16.0 | 17.7 | 19.8 | 23.6 | 28.3 | 33.7 | 39.1 | 42.6 | 45.7 | 49.6 | 52.3 |
| 30 | 13.8 | 15.0 | 16.8 | 18.5 | 20.6 | 24.5 | 29.3 | 34.8 | 40.3 | 43.8 | 47.0 | 50.9 | 53.7 |

שאלות

- (1) במטרה לבדוק האם קובייה הוגנת, מטילים אותה 120 פעמים. התקבלו 17 פעמים 1, 23 פעמים 2, 20 פעמים 3, 25 פעמים 4, 18 פעמים 5 ו-17 פעמים 6. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
- (2) מפעל מייצר סוכריות בצבעים כחול, אדום, ירוק וכתום. מעוניינים לבדוק שפרופורציית הסוכריות הכחולות גדולה פי 2 מכל צבע אחר. לצורך כך נדגמו באקראי 200 סוכריות והתקבל: 70 כחולות, 50 אדומות, 40 ירוקות והיתר כתומות. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
- (3) משרד החינוך טוען שבקרב השכירים במשק היחס בין השכירים בעלי השכלה נמוכה, תיכונית ואקדמאית הוא 1:2:1 בהתאמה. במדגם של 200 שכירים התקבלו 56 אנשים בעלי השכלה נמוכה, 105 בעלי השכלה תיכונית והיתר בעלי השכלה גבוהה.
- א. על סמך תוצאות המדגם, האם התפלגות ההשכלה היא כמו שמשרד החינוך מפרסם? בדוק ברמת מובהקות של 5%.
- ב. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לפרופורציית השכירים במשק בעלי השכלה אקדמאית.
- (4) 200 איש נתבקשו לבחור ספרה באקראי והנה התוצאות שהתקבלו: 18 איש בחרו בספרה 0, 24 איש בחרו בספרה 1, 17 איש בחרו בספרה 2, 19 איש בחרו בספרה 3, 20 איש בחרו בספרה 4, 18 איש בחרו בספרה 5, 22 איש בחרו בספרה 6 והיתר בחרו בספרות 7-9.
- א. על סמך התוצאות הללו האם בחירת הספרות אקראית? בדקו ברמת מובהקות של 2.5%.
- ב. תנו הערכה למובהקות התוצאה.
- ג. אם נגדיל את גודל המדגם פי 2 ונשמור על אותם יחסים של כמות האנשים במדגם שבחרו בספרות, כיצד הדבר ישפיע על ערכו של הסטטיסטי χ^2 ? מה תהיה המסקנה במקרה זה?
- (5) מעוניינים לבדוק האם קובייה היא הוגנת. הטילו את הקובייה פעמיים והתבוננו בסכום הוצאות. חזרו על התהליך 72 פעמים. להלן התוצאות שהתקבלו במדגם: מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

| מספר הטלות | סכום התוצאות |
|------------|--------------|
| 20 | 2-5 |
| 17 | 6-8 |
| 20 | 9-10 |
| 15 | 11-12 |

6) בפנס יש 4 סוללות. בבדיקה שנערכה ב-400 פנסים נמצאו סוללות פגומות לפי השכיחויות הבאות:

| | | | | |
|----------------------|-----|-----|----|---------|
| מספר הסוללות הפגומות | 0 | 1 | 2 | 3 ומעלה |
| שכיחות | 276 | 104 | 12 | 8 |

מעוניינים לבדוק על סמך תוצאות מדגם אלה האם הסיכוי לסוללה פגומה הוא 20%. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה נכריע שהסיכוי לסוללה פגומה אינו 20%?

7) להלן השערות מחקר: $H_0: X \sim N(40, 2^2)$, $H_1: else$

| | | | | |
|--------|-------|-------|---------|--------------|
| מעל 44 | 40-44 | 36-40 | מתחת 36 | X |
| 2A | 45A | 50A | 3A | מספר הדגימות |

תוצאות המדגם הן:

מהו ערכו המקסימלי של A עבורו נקבל את H_0 ברמת מובהקות של 5%?

תשובות סופיות

1) לא נדחה H_0 .

2) לא נדחה H_0 .

3) א. לא נדחה H_0 . ב. (0.14, 0.25).

4) א. לא נדחה H_0 . ב. בין 0.95 ל-0.975.

ג. יגדל פי 2; המסקנה לא תשתנה.

5) נכריע שהקובייה אינה הוגנת.

6) 0.005.

7) 14.

הקשר בין מבחן טיב התאמה לבדיקת השערות על הפרופורציה – רקע

אם אנו רוצים לבצע מבחן טיב התאמה על משתנה שיש לו שתי קטגוריות בלבד (משתנה דיכוטומי), הדבר זהה לתהליך של בדיקת השערות דו צדדית על פרופורציה בודדת.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

הטילו מטבע 80 פעמים וקיבלו 48 פעמים את התוצאה "ראש".
בדקו האם המטבע הוא הוגן ברמת מובהקות של 5%.

א. באמצעות מבחן טיב התאמה.

ב. באמצעות מבחן Z לפרופורציה בודדת.

שאלות

(1) בסקר שנעשה על 320 נשאלים, 43.75% טענו שהחיה המועדפת עליהם היא כלב. עד היום היה נהוג לחשוב ש-40% מהאנשים מעדיפים כלבים. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם הסקר יישנה את הסברה שהייתה נהוגה עד היום לגבי העדפת כלב.

- א. באמצעות מבחן טיב התאמה.
ב. באמצעות מבחן על פרופורציה.

(2) לסוכנות מכוניות שלושה סניפים ברחבי הארץ. המכוניות נמכרות בסניפים השונים. מתוך 100 מכוניות נמצא ש-65 נמכרו בסניף תל-אביב, 23 בסניף ירושלים והיתר בסניף חיפה.

- א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם שיעור המכוניות שנמכרות בסניף ת"א גדול פי 2 מכל סניף אחר.
ב. בדקו באמצעות מבחן טיב התאמה האם 60% מהמכוניות נהוגות להימכר בסניף תל אביב. האם יש דרך אחרת לבדוק את ההשערה?

(3) בתחרות ריצה בית ספרית שלושה מסלולי ריצה.

ב-50 תחרויות בדקו באיזה מסלול היה הניצחון. התוצאות שהתקבלו מסוכמות בטבלה הבאה:

| המסלול | 1 | 2 | 3 |
|----------------|----|----|----|
| מספר הניצחונות | 20 | 15 | 15 |

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם יש מסלול מועדף לניצחון.

ב. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם הסיכוי לנצח במסלול מספר 1

$$\text{גבוה מ-} \frac{1}{3}.$$

תשובות סופיות

(1) לא נדחה H_0 .

(2) א. נדחה H_0 . ב. לא נדחה H_0 .

(3) א. לא נדחה H_0 . ב. לא נדחה H_0 .

מבחן חי בריבוע לאי תלות בין משתנים – רקע

מבחן לאי תלות מטרתו לבדוק האם קיים קשר בין שני משתנים. שני המשתנים שנבדקים צריכים להיות מחולקים למספר קטגוריות.

מבנה המבחן:

השערות:

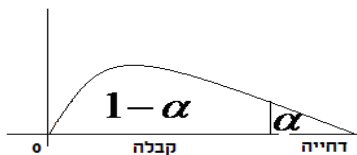
אין תלות בין המשתנים H_0 .

יש תלות בין המשתנים H_1 .

כלל הכרעה:

הערך הקריטי נקבע על סמך התפלגות חי בריבוע. התפלגות זו היא אסימטרית חיובית ותלויה בדרגות החופש $d.f = (r-1)(c-1)$. כאשר: r - מספר הקטגוריות של המשתנה שבשורות. c - מספר הקטגוריות של המשתנה שבעמודות.

הערך הקריטי הוא: $\chi^2_{1-\alpha, (r-1)(c-1)}$, כלומר האחוזון ה- $1-\alpha$ בהתפלגות חי בריבוע שדרגות החופש הן $(r-1)(c-1)$. אם $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha, (r-1)(c-1)}$ אז דוחים את השערת האפס.



$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

כאשר:

O_i - השכיחות נצפית במדגם בתא i .

E_i - שכיחות צפויה במדגם בתא i בהנחת השערת האפס.

$$E_i = \frac{f(x) \cdot f(y)}{n}$$

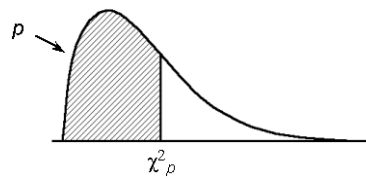
הערה:

תנאי כדי לבצע את המבחן הוא $E_i \geq 5$ לכל i . במידה ותנאי זה לא מתקיים יש אפשרות לאחד קטגוריות סמוכות עד שהתנאי יתקיים.
 תנאי חלופי: אין E קטן מ-1 וגם אין ביותר מ 20% מהתאים E קטן מ-5.

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

האם יש תלות בין המגדר לבין דעה מסוימת?
 יש לבדוק ברמת מובהקות של 5% על סמך תוצאות הסקר:

| המגדר / דעה | בעד | נגד | נמנע | סה"כ |
|-------------|-----|-----|------|------|
| גברים | 50 | 40 | 10 | |
| נשים | 20 | 60 | 20 | |
| סה"כ | | | | |

טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה χ^2_p 

| df | p | | | | | | | | | | | | |
|----|---------|--------|---------|---------|--------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|
| | .005 | .01 | .025 | .05 | .10 | .25 | .50 | .75 | .90 | .95 | .975 | .99 | .995 |
| 1 | 0.00393 | 0.0157 | 0.00982 | 0.02393 | 0.0158 | 0.102 | 0.455 | 1.32 | 2.71 | 3.84 | 5.02 | 6.63 | 7.88 |
| 2 | 0.0100 | 0.0201 | 0.0506 | 0.103 | 0.211 | 0.575 | 1.39 | 2.77 | 4.61 | 5.99 | 7.38 | 9.21 | 10.6 |
| 3 | 0.0717 | 0.115 | 0.216 | 0.352 | 0.584 | 1.21 | 2.37 | 4.11 | 6.25 | 7.81 | 9.35 | 11.3 | 12.8 |
| 4 | 0.207 | 0.297 | 0.484 | 0.711 | 1.06 | 1.92 | 3.36 | 5.39 | 7.78 | 9.49 | 11.1 | 13.3 | 14.9 |
| 5 | 0.412 | 0.554 | 0.831 | 1.15 | 1.61 | 2.67 | 4.35 | 6.63 | 9.24 | 11.1 | 12.8 | 15.1 | 16.7 |
| 6 | 0.676 | 0.872 | 1.24 | 1.64 | 2.20 | 3.45 | 5.35 | 7.84 | 10.6 | 12.6 | 14.4 | 16.8 | 18.5 |
| 7 | 0.989 | 1.24 | 1.69 | 2.17 | 2.83 | 4.25 | 6.35 | 9.04 | 12.0 | 14.1 | 16.0 | 18.5 | 20.3 |
| 8 | 1.34 | 1.65 | 2.18 | 2.73 | 3.49 | 5.07 | 7.34 | 10.2 | 13.4 | 15.5 | 17.5 | 20.1 | 22.0 |
| 9 | 1.73 | 2.09 | 2.70 | 3.33 | 4.17 | 5.90 | 8.34 | 11.4 | 14.7 | 16.9 | 19.0 | 21.7 | 23.6 |
| 10 | 2.16 | 2.56 | 3.25 | 3.94 | 4.87 | 6.74 | 9.34 | 12.5 | 16.0 | 18.3 | 20.5 | 23.2 | 25.2 |
| 11 | 2.60 | 3.05 | 3.82 | 4.57 | 5.58 | 7.58 | 10.3 | 13.7 | 17.3 | 19.7 | 21.9 | 24.7 | 26.8 |
| 12 | 3.07 | 3.57 | 4.40 | 5.23 | 6.30 | 8.44 | 11.3 | 14.8 | 18.5 | 21.0 | 23.3 | 26.2 | 28.3 |
| 13 | 3.57 | 4.11 | 5.01 | 5.89 | 7.04 | 9.30 | 12.3 | 16.0 | 19.8 | 22.4 | 24.7 | 27.7 | 29.8 |
| 14 | 4.07 | 4.66 | 5.63 | 6.57 | 7.79 | 10.2 | 13.3 | 17.1 | 21.1 | 23.7 | 26.1 | 29.1 | 31.3 |
| 15 | 4.60 | 5.23 | 6.26 | 7.26 | 8.55 | 11.0 | 14.3 | 18.2 | 22.3 | 25.0 | 27.5 | 30.6 | 32.8 |
| 16 | 5.14 | 5.81 | 6.91 | 7.96 | 9.31 | 11.9 | 15.3 | 19.4 | 23.5 | 26.3 | 28.8 | 32.0 | 34.3 |
| 17 | 5.70 | 6.41 | 7.56 | 8.67 | 10.1 | 12.8 | 16.3 | 20.5 | 24.8 | 27.6 | 30.2 | 33.4 | 35.7 |
| 18 | 6.26 | 7.01 | 8.23 | 9.39 | 10.9 | 13.7 | 17.3 | 21.6 | 26.0 | 28.9 | 31.5 | 34.8 | 37.2 |
| 19 | 6.84 | 7.63 | 8.91 | 10.1 | 11.7 | 14.6 | 18.3 | 22.7 | 27.2 | 30.1 | 32.9 | 36.2 | 38.6 |
| 20 | 7.43 | 8.26 | 9.59 | 10.9 | 12.4 | 15.5 | 19.3 | 23.8 | 28.4 | 31.4 | 34.2 | 37.6 | 40.0 |
| 21 | 8.03 | 8.90 | 10.3 | 11.6 | 13.2 | 16.3 | 20.3 | 24.9 | 29.6 | 32.7 | 35.5 | 38.9 | 41.4 |
| 22 | 8.64 | 9.54 | 11.0 | 12.3 | 14.0 | 17.2 | 21.3 | 26.0 | 30.8 | 33.9 | 36.8 | 40.3 | 42.8 |
| 23 | 9.26 | 10.2 | 11.7 | 13.1 | 14.8 | 18.1 | 22.3 | 27.1 | 32.0 | 35.2 | 38.1 | 41.6 | 44.2 |
| 24 | 9.89 | 10.9 | 12.4 | 13.8 | 15.7 | 19.0 | 23.3 | 28.2 | 33.2 | 36.4 | 39.4 | 43.0 | 45.6 |
| 25 | 10.5 | 11.5 | 13.1 | 14.6 | 16.5 | 19.9 | 24.3 | 29.3 | 34.4 | 37.7 | 40.6 | 44.3 | 46.9 |
| 26 | 11.2 | 12.2 | 13.8 | 15.4 | 17.3 | 20.8 | 25.3 | 30.4 | 35.6 | 38.9 | 41.9 | 45.6 | 48.3 |
| 27 | 11.8 | 12.9 | 14.6 | 16.2 | 18.1 | 21.7 | 26.3 | 31.5 | 36.7 | 40.1 | 43.2 | 47.0 | 49.6 |
| 28 | 12.5 | 13.6 | 15.3 | 16.9 | 18.9 | 22.7 | 27.3 | 32.6 | 37.9 | 41.3 | 44.5 | 48.3 | 51.0 |
| 29 | 13.1 | 14.3 | 16.0 | 17.7 | 19.8 | 23.6 | 28.3 | 33.7 | 39.1 | 42.6 | 45.7 | 49.6 | 52.3 |
| 30 | 13.8 | 15.0 | 16.8 | 18.5 | 20.6 | 24.5 | 29.3 | 34.8 | 40.3 | 43.8 | 47.0 | 50.9 | 53.7 |

שאלות

1) נבדקה התלות בין גודל הארגון לבין שביעות הרצון של העובדים. להלן התוצאות:

| גודל המפעל | שביעות רצון | נמוכה | בינונית | גבוהה | סה"כ |
|------------|-------------|-------|---------|-------|------|
| גדול | 182 | 203 | 215 | 600 | |
| קטן | 154 | 110 | 136 | 400 | |
| סה"כ | 336 | 313 | 351 | 1000 | |

מה המסקנה ברמת מובהקות של 2.5%?

2) מפעל עובד בשלוש משמרות. להלן מספר המוצרים הפגומים והתקינים בכל אחת מן המשמרות לפי מדגם שנעשה:

| | לילה | ערב | יום |
|--------|------|-----|-----|
| פגומים | 70 | 60 | 50 |
| תקינים | 800 | 700 | 600 |

האם יש הבדל בין שיעורי הפגומים במשמרות השונות? הסיקו עבור רמת מובהקות $\alpha = 0.05$.

3) נדגמו 50 מוצרים ממפעל מסוים מתוך 30 מוצרים שיוצרו ביום 17 נבחרו לייצוא מתוך המוצרים שיוצרו בלילה 10 נבחרו לייצוא. האם יש קשר בין היות מוצר לייצוא למועד שבו הוא יוצר? בדקו ברמת בטחון של 95%.

4) במטרה לבדוק האם השתנו דפוסי ההצבעה למפלגות השונות בין שבוע שעבר לשבוע נלקחו שני סקרים אחד מהשבוע שעבר והאחר מהשבוע. להלן דפוסי ההצבעה שהתקבלו בסקרים אלה.

- א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה ניתן להחליט שהשתנו דפוסי ההצבעה משבוע שעבר לשבוע באופן מובהק?
- ב. כיצד הייתה התשובה לסעיף א משתנה אם כל השכיחויות בטבלה של תוצאות המדגם היו מוכפלות פי 2?
- ג. בנו רווח סמך לשיעור המצביעים למפלגה א השבוע ברמת סמך של 95%.

| שבוע שעבר | מפלגה א | מפלגה ב | מפלגות אחרות | סה"כ |
|-----------|---------|---------|--------------|------|
| השבוע | 143 | | 253 | 550 |
| סה"כ | 243 | 314 | | 1050 |

- 5) בחנות בגדים A בדקו את התפלגות הצבעים של הבגדים הנמכרים ביום מסוים. כמו כן בדקו את התפלגות הצבעים בחנות שכנה B:

| מספר פריטים / צבע | שחור | לבן | אדום | כחול |
|-------------------|------|-----|------|------|
| חנות A | 15 | 20 | 15 | 50 |
| חנות B | 60 | 20 | 10 | 20 |

- א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם התפלגות הצבעים בחנות A היא ביחס של 1:1:1:3 לטובת הכחול.
 ב. בדקו ברמת מובהקות של 2.5% האם קיים הבדל בין החניות מבחינת התפלגות הצבעים של הפריטים הנמכרים.

- 6) סטודנט קיבל בבדיקת השערות ערך χ^2 (chi-square) השוו לאפס. הסטודנט הסיק כי לא קיימת תלות בין שני המשתנים שבדק, בכל רמת מובהקות. נכון / לא נכון? נמקו.

- 7) להלן טבלת O של שני משתנים שהתקבל במדגם כלשהו:

| $f(x)$ | Y_4 | Y_3 | Y_2 | Y_1 | |
|--------|-------|-------|-------|-------|--------|
| 200 | | | | | X_1 |
| 200 | | | | | X_2 |
| | 160 | 120 | 60 | 60 | $f(y)$ |

- מה צריכות להיות השכיחויות בתוך הטבלה כדי שמובהקות התוצאה (PV) תהיה 100%?

תשובות סופיות

- 1) נסיק שיש קשר בין גודל הארגון לשביעות הרצון של העובדים.
- 2) נסיק שאין הבדל מובהק בין שיעור הפגומים במשמרות השונות.
- 3) נסיק שאין קשר בין היות מוצא לייצוא למועד שבו הוא יוצר.
- 4) א. 10% ב. קטן ג. (0.223, 0.297)
- 5) א. נסיק שהתפלגות הצבעים בחנות היא כמו שמצוין. ב. נסיק שיש הבדל בין החנויות מבחינת התפלגות הצבעים.
- 6) נכון
- 7) להלן טבלה:

| $f(x)$ | Y_4 | Y_3 | Y_2 | Y_1 | |
|--------|-------|-------|-------|-------|--------|
| 200 | 80 | 60 | 30 | 30 | X_1 |
| 200 | -8 | 60 | 30 | 30 | X_2 |
| 400 | 160 | 120 | 60 | 60 | $f(y)$ |

הקשר בין מבחן לאי תלות ובדיקת השערות להפרש פרופורציות – רקע

מבחן לאי תלות שבו לכל משתנה יש שתי קטגוריות שקול לבדיקת השערות דו צדדית על הפרש פרופורציות כאשר השערת האפס היא שהפרופורציות שוות. כל זאת, כמובן, אם התנאים למבחנים מתקיימים.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

בקרב מדגם של 200 נשים 120 טענו שהן תצבענה למועמד R לראשות העיר. בקרב מדגם של 200 גברים 80 טענו שהם יצביעו למועמד R האם קיים הבדל בין דפוס ההצבעה של הנשים ושל הגברים? האם אפשר לבדוק זאת גם על ידי מבחן לאי תלות וגם על ידי בדיקת השערות לשתי פרופורציות?

שאלות

- 1) בקרב מדגם של 200 נשים 120 טענו שהן תצבענה למועמד R לראשות העיר. בקרב מדגם של 200 גברים 80 טענו שהם יצביעו למועמד R האם קיים הבדל בין דפוס ההצבעה של הנשים ושל הגברים? בדוק ברמת מובהקות של 5%.
 - א. על ידי מבחן לאי תלות.
 - ב. על ידי בדיקת השערות לשתי פרופורציות.

- 2) נלקחו 200 אנשים שמתוכם 60 הצהירו שהם עוסקים בפעילות גופנית סדירה. מתוך אלו שעוסקים בפעילות גופנית סדירה 50 נמצאו במצב בריאותי תקין. מתוך אלו שלא עוסקים בפעילות גופנית סדירה 90 נמצאו במצב בריאותי תקין.
 - א. בנו טבלת שכיחות משותפת לנתונים שהוצגו בשאלה.
 - ב. האם ניתן להגיד שהסיכוי להימצא במצב בריאותי תקין גבוה יותר כאשר עוסקים בפעילות גופנית סדירה לעומת המצב שלא עוסקים בפעילות גופנית סדירה? בדוק ברמת בטחון של 90%.

תשובות סופיות

- (1) נדחה את השערת האפס לפירוט הדרך ראה וידאו.
 (2) א. להלן טבלה: ב. נדחה את השערת האפס.

| | לא תקין | תקין | פעילות/מצב בריאותי |
|-----|---------|------|-----------------------|
| 60 | 10 | 50 | סדירה |
| 140 | 50 | 90 | לא סדירה |
| 200 | 60 | 140 | |