

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג



תוכן העניינים

1.	סטטיסטיקה תיאורית- סיווג משתנים וסולמות מדידה	1
5.	סטטיסטיקה תיאורית - טרנספורמציה על סולמות מדידה	5
7.	סטטיסטיקה תיאורית- הצגה של נתונים	7
18.	סטטיסטיקה תיאורית- סכימה	18
5.	סטטיסטיקה תיאורית -מדדי מרכז (ללא ספר)	5
22.	סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - הטווח, השונות וסטיית התקן	22
25.	סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - טווח בין רבעוני	25
29.	סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - ממוצע סטיות מוחלטות מהחציון	29
31.	סטטיסטיקה תיאורית- מדדי מיקום יחסי-ציון תקן	31
33.	סטטיסטיקה תיאורית-אחוזונים בטבלה בדירה	33
35.	סטטיסטיקה תיאורית - טרנספורמציה לינארית	35
38.	סטטיסטיקה תיאורית- תרשים קופסא	38
40.	סטטיסטיקה תיאורית - מדדי אסימטריה	40
44.	סטטיסטיקה תיאורית שאלות אמריקאיות	44
51.	יסודות ההסתברות	51
55.	פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד) - מאורעות זרים ומכילים	55
64.	קומבינטוריקה -כלל המכפלה	64
68.	קומבינטוריקה -דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה	68
70.	קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר וללא החזרה	70
73.	הסתברות מותנית-במרחב מדגם אחיד	73
76.	הסתברות מותנית - מרחב לא אחיד	76
80.	דיאגרמת עצים - נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה	80
85.	תלות ואי תלות בין מאורעות	85

תוכן העניינים

24.	שאלות מסכמות בהסתברות	89
25.	המשתנה המקרי הבדיד - פונקציית ההסתברות	92
26.	המשתנה המקרי הבדיד - תוחלת - שונות וסטיית תקן	96
27.	המשתנה המקרי הבדיד- טרנספורמציה לינארית	99
28.	תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים	102
29.	התפלגויות בדידות מיוחדות-התפלגות בינומית	105
30.	התפלגויות בדידות מיוחדות- התפלגות פואסונית	109
31.	התפלגות מולטינומית	112
32.	התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות נורמלית	115
33.	הסקה סטטיסטית - הקדמה	123
34.	התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי	126
35.	מושגי יסוד באמידה	138
36.	מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים	143
37.	רווח סמך לתוחלת (ממוצע)	149
38.	רווח סמך להפרש תוחלות (ממוצעים) במדגמים בלתי תלויים	159
39.	רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים	163
40.	בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)	165
41.	בדיקת השערות על הפרש פרופורציות	188
42.	בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים	192
43.	בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגמים מזווגים	199
44.	הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות להפרש תוחלות	203
45.	שאלות מסכמות בבדיקת השערות	206
46.	מבחני חי בריבוע	219
47.	מדדי קשר - מדד הקשר של קרמר	223
48.	מדדי קשר - מדד הקשר פי	225
49.	מדד הקשר ספירמן	227
50.	מקדם המתאם (מדד קשר) הלינארי ומובהקותו	230
51.	רגרסיה	250

52. מדדי קשר-רגרסיה -שונות מוסברת ושונות לא מוסברת..... 253
53. מדדי קשר - בחירת מדד מתאים..... 256
54. ניתוח שונות חד כיוונית..... 263
55. ניתוח שונות דו כיוונית..... 272
56. גודל האפקט..... (ללא ספר)

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 1 - סטטיסטיקה תיאורית- סיווג משתנים וסולמות מדידה

תוכן העניינים

1. כללי 1

סטטיסטיקה תיאורית – סיווג משתנים וסולמות מדידה:

רקע:

סטטיסטיקה תיאורית הוא ענף בו לומדים כיצד לאסוף נתונים, להציג אותם ולנתח אותם. בסטטיסטיקה תיאורית אנו פונים לקבוצה מסוימת, ובאותה קבוצה אנו אוספים נתונים על הישויות באותה קבוצה. משתנה – תכונה שיכולה לקבל מספר ערכים: דעה פוליטית, מקום מגורים, גובה של אדם וכדומה. חלוקה אחת של המשתנים הנמדדים היא לפי סולמות מדידה:

מיון משתנים לפי סולמות המדידה:

1. סולם שמי (נומינאלי) – משתנה שלערכיו יש משמעות רק מבחינת הזהות ואין עניין של יותר או פחות. לדוגמה: מצב משפחתי (רווק/נשוי/אלמן/גרש), אזור מגורים. משתנה דיכוטומי (הינו מסולם שמי) אותם משתנים שיש להם רק שני ערכים אפשריות זכר/נקבה. מעשן/לא מעשן.
2. סולם סדר (אורדינאלי) – כאשר לערכים של המשתנה בנוסף לשם ישנה גם משמעות לסדר אבל אין משמעות לגודל ההפרש. למשל, דרגה בצבא.
3. סולם רווחים (אינטרוואלי) – משתנה שלערכים שלו בנוסף לשם ולסדר בניהם יש משמעות לרווחים בין הערכים אבל אין משמעות ליחס בין הערכים. למשל, קומה בבניין. סולם לא כל כך פופולרי.

סולם מנה/יחס:

משתנה שלערכיו בנוסף לשם, לסדר ולרווח יש משמעות גם ליחס בין הערכים. למשל, מספר מכוניות למשפחה, משקל אדם בק"ג. הדרך הקלה ביותר כדי לזהות עם הסולם הוא סולם מנה היא על ידי מבחן האפס. בסולם מנה האפס הוא מוחלט, אבסולוטי, ומייצג אין.

סוגי משתנים:

נבצע סיווג של המשתנים:

משתנה איכותי

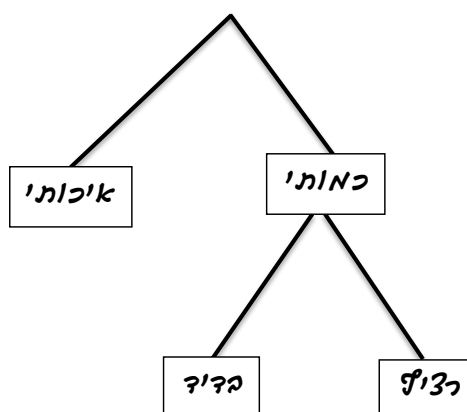
משתנה שלערכיו אין משמעות של יותר או פחות, אין עניין כמותי לערכים המתקבלים. כמו: מקום מגורים של אדם (רעננה, תל אביב, אשדוד...), מין האדם (זכר, נקבה), מצב משפחתי (רווק, נשוי, גרוש, אלמן).

משתנה כמותי

משתנה שערכיו הם מספרים להם יש משמעות כמותית כמו: גובה אדם בס"מ, ציון בבחינה וכדומה. את המשתנה הכמותי נסווג לשני סוגים:

משתנה בדיד: משתנה שערכיו מתקבלים מתוך סידרה של ערכים אפשריים. כמו: מספר ילדים למשפחה (1,2,3,...), ציון בבחינה (מ-0 ועד 100 בקפיצות של 1).

משתנה רציף: משתנה שערכיו מתקבלים מתוך אינסוף ערכים בתחום מסוים, הערכים מתקבלים ברצף – ללא קפיצות של ערכים. דוגמאות: גובה בס"מ – אם הגובה הנמוך ביותר הוא 150 ס"מ ועד 190 ס"מ – הגבהים בקבוצה הם ברצף. גם בין 160 ל-161 ס"מ יש רצף אינסופי של ערכים אפשריים (כמו 160.233 ס"מ, למשל).



שאלות:

(1) באיזה סולם מדידה המשתנים הבאים נחקרים (שמי/סדר/רווחים/מנה):

- א. גובה (בס"מ).
- ב. מספר ילדים למשפחה.
- ג. מידת החרדה לפני מבחן.
- ד. שביעות רצון משירות לקוחות בסקלה מ-1 עד 7 (1 - כלל לא מרוצה עד 7 - מרוצה מאוד)
- ה. השכלה.
- ו. מספר אוטובוס.
- ז. מקום מגורים.
- ח. מין (1=גבר ; 2=אישה).
- ט. מידת נעליים.

(2) להלן התפלגות מספר האיחורים לעבודה בחודש של העובדים בחברת "סטאר":

מספר העובדים	מספר האיחורים
17	0
23	1
85	2
50	3
25	4

בחברה 200 עובדים.

- א. מהו המשתנה הנחקר כאן?
- ב. האם מדובר במשתנה איכותי או כמותי?
- אם הוא כמותי האם הוא בדיד או רציף?
- באיזה סולם מדידה המשתנה?

(3) להלן רשימה של משתנים כמותיים. ציינו האם הוא משתנה רציף/בדיד:

- א. שכר ב-ש.
- ב. ציון בחינת בגרות.
- ג. תוצאה של הטלת קובייה.
- ד. מהירות ריצה בתחרות.
- ה. שיעור התמיכה בממשלה.

תשובות סופיות:

(1	א. מנה.	ב. מנה.	ג. סדר.
	ד. סדר.	ה. מנה/ סדר.	ו. שמי.
	ז. שמי.	ח. שמי.	ט. סדר.
(2	א. מספר האיחורים.	ב. כמותי בדיד בסולם מנה.	
(3	א. רציף.	ב. בדיד.	ג. בדיד.
	ד. רציף.	ה. רציף.	

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 2 - סטטיסטיקה תיאורית - טרנספורמציה על סולמות מדידה

תוכן העניינים

1. כללי 5

סטטיסטיקה תיאורית – טרנספורמציה על סולמות מדידה:

רקע:

טרנספורמציה הינה מצב שבו עושים שינוי לערכים במשתנה הנחקר. להלן נפרט אילו טרנספורמציות מותרות על כל סולם מדידה:

סולם שמי (נומינאלי) –

הטרנספורמציה המותרת היא טרנספורמציה ששומרת על הזהות.

סולם סדר (אורדינאלי) –

הטרנספורמציה המותרת היא טרנספורמציה ששומרת על הסדר.

סולם רווחים (אינטרוואלי) –

הטרנספורמציה המותרת היא טרנספורמציה לינארית חיובית.

סולם מנה/יחס –

הטרנספורמציה המותרת היא הכפלה / חילוק במספר חיובי.

שאלות:

- (1) ציינו באילו סולמות מדידה מותרות הטרנספורמציות הבאות:
- הכפלה באפס.
 - הכפלה ב-2.
 - הכפלה במינוס 1.
 - הוספה של 3.
 - הפחתה של 3.
- (2) איזו טרנספורמציה שומרת על סולם המשתנה "הטמפרטורה בחדר הסגלגל"?
- טרנספורמציה שומרת סדר.
 - טרנספורמציה לינארית חיובית.
 - טרנספורמציה שומרת יחס.
 - תשובות ב' ו-ג' נכונות.
- (3) באיזה סולם/ות מדידה מותרת החסרה של קבוע מכל מספר?
- בסולם שמי בלבד.
 - בסולמות שמי וסדר בלבד.
 - בסולמות שמי, סדר ורווחים בלבד.
 - בכל ארבעת סולמות המדידה.
- (4) איזו טרנספורמציה שומרת על סולם מספרי האוטובוסים של "אגד"?
- טרנספורמציה שומרת סדר.
 - טרנספורמציה לינארית חיובית.
 - טרנספורמציה שומרת יחס.
 - כל התשובות נכונות.

תשובות סופיות:

- (1) א. אף סולם. ב. כל הסולמות. ג. רק על סולם שמי. ד. רווחים, סדר, שמי.
- (2) ד'.
- (3) ג'.
- (4) ד'.

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 3 - סטטיסטיקה תיאורית- הצגה של נתונים

תוכן העניינים

1. כללי 7

סטטיסטיקה תיאורית – הצגה של נתונים:

רקע:

דרכים להצגת נתונים שנאספו:

רשימה של תצפיות:

התצפית היא הערך שנצפה עבור ישות מסוימת בקבוצה. רושמים את התצפיות שהתקבלו כרשומה, יעיל שיש מספר מועט של תצפיות. ההצגה הזו רלבנטית לכל סוגי המשתנים. למשל, להלן מספר החדרים בבניין בן 5 דירות: 3, 4, 3, 5, 4.

טבלת שכיחויות בדידה:

שם המשתנה- X	שכיחות – $f(x)$	שכיחות יחסית באחוזים
X_1	f_1	$\frac{f_1}{N} \cdot 100$
X_2	f_2	$\frac{f_2}{N} \cdot 100$
X_3	f_3	$\frac{f_3}{N} \cdot 100$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_k	f_k	$\frac{f_k}{N} \cdot 100$
סה"כ	$N = \sum_{i=1}^k f_i$	100%

רושמים את התצפיות בטבלה שבה עמודה אחת מבטאת את ערכי המשתנה והשנייה את השכיחות. יעיל עבור משתנה איכותי וכמותי בדיד וכשיש מספר רב של תצפיות. לא יעיל למשתנה כמותי רציף.

דוגמה:

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת:

הציון - X	מספר התלמידים – השכיחות - f	F_i	$\frac{f_i}{n}$
5	2	2	$0.08=2/25$
6	4	6	$0.16=4/25$
7	8	14	$0.32=8/25$
8	5	19	$0.2=5/25$
9	4	23	$0.16=4/25$
10	2	25	$0.08=2/25$

שכיחות מצטברת – צבירה של השכיחויות.

השכיחויות F_i – השכיחות המצטברת נותנת כמה תצפיות קטנות או שוות לערך.

שכיחות יחסית (פרופורציה) – השכיחות מחולקת לכמות התצפיות הכללי:

 $\frac{f_i}{n}$ – איזה חלק מהתצפיות בקבוצה שוות לערך.**טבלת שכיחויות במחלקות:**

משתמשים שהמשתנה כמותי רציף או כאשר יש מספר ערכים רב במשתנה הבדיד
וטבלת שכיחויות תהיה ארוכה מידי.

דוגמה:

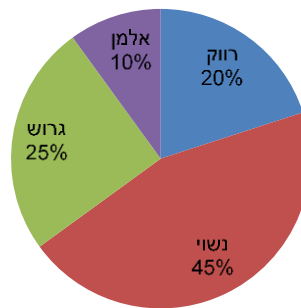
נתנו לקבוצת ילדים לבצע משימה, בדקו את התפלגות זמן הביצוע, בדקות.
להלן ההתפלגות שהתקבלה:

מספר הילדים	זמן בדקות
20	0.5-3.5
18	3.5-9.5
14	9.5-19.5
8	19.5-29.5

דיאגרמת עוגה:

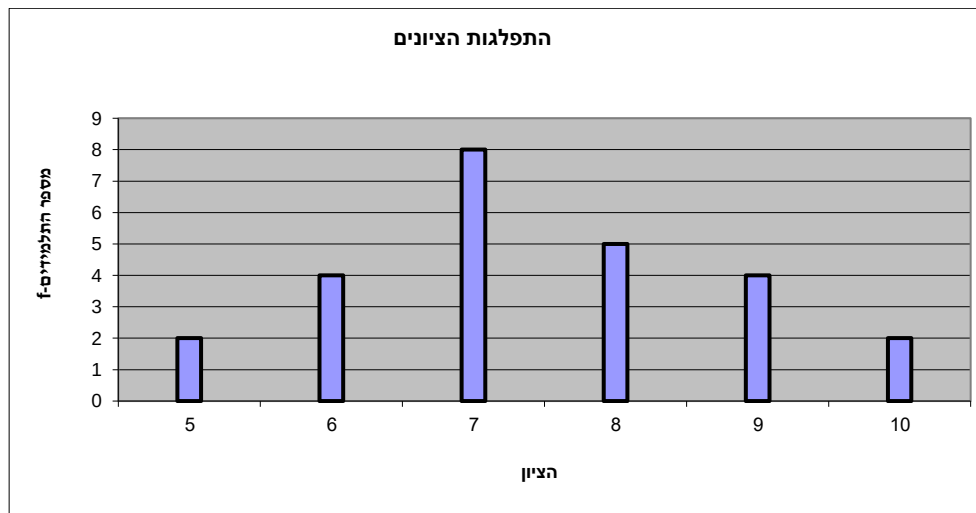
זהו התיאור הגרפי של משתנה איכותי. בדיאגרמת עוגה כל ערך במשתנה מקבל "נתח", שהוא פרופורציונלי לשכיחות היחסית של ערך המשתנה בנתונים.

התפלגות המצב המשפחתי



דיאגרמת מקלות:

הציר האופקי הוא הציר של המשתנה והציר האנכי של השכיחות, כך שהגובה של המקל מעיד על השכיחות. רלבנטי למשתנה כמותי בדיד. לא נהוג להשתמש בתיאור למשתנה איכותי וכמו כן לא למשתנה כמותי רציף, וכן בסולמות מדידה עבור משתנה מסולם סדר.

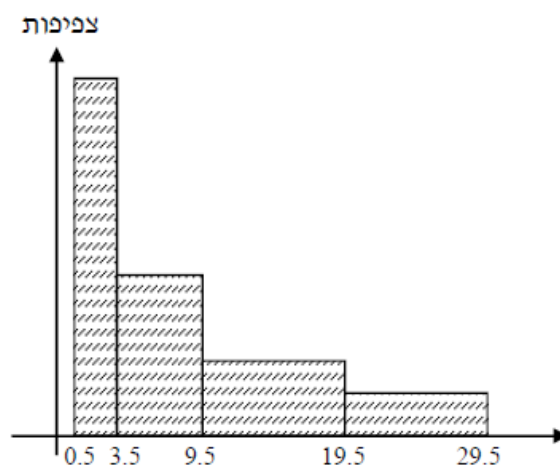


היסטוגרמה:

ההיסטוגרמה היא הדרך הגרפית כדי לתאר טבלת שכיחויות במחלקות, והיא רלוונטית למשתנה כמותי רציף.

בהיסטוגרמה הציר האופקי הוא הציר של המשתנה והציר האנכי הוא הציר של הצפיפות. הצפיפות מחושבת בכל מחלקה על ידי חלוקת השכיחות ברוחב של כל המחלקה, והיא נותנת את מספר התצפיות הממוצע בכל מחלקה ליחידה. אם המחלקות הן שוות ברוחב, ניתן לשרטט את ההיסטוגרמה לפי השכיחות ואין צורך בצפיפות.

צפיפות	מצטברת	שכיחות	אמצע	רוחב	X
6.6667	20	20	2	3	0.5 - 3.5
3	38	18	6.5	6	3.5 - 9.5
1.4	52	14	14.5	10	9.5 - 19.5
0.8	60	8	24.5	10	19.5 - 29.5



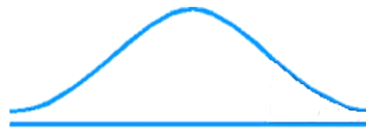
פוליגון – מצולעון:

אם נחבר את אמצע קצה כל מלבן בקווים ישרים. נותן מראה חזותי לצורה של התפלגות המשתנה.

צורות התפלגות נפוצות:

התפלגות סימטרית פעמונית

רוב התצפיות במרכז, וככל שנתרחק מהמרכז יהיו פחות תצפיות באופן סימטרי. לדוגמה, ציוני IQ.

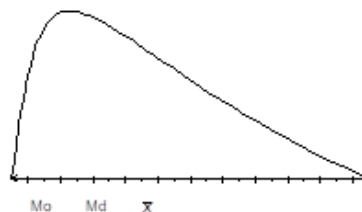


ישנן התפלגויות סימטריות שאינן פעמוניות, כגון:

התפלגות אסימטרית ימנית (חיובית)

רוב התצפיות מקבלות ערכים נמוכים ויש מיעוט הולך וקטן של תצפיות שמקבלות ערכים גבוהים קיצוניים. לדוגמה, שכר במשק.

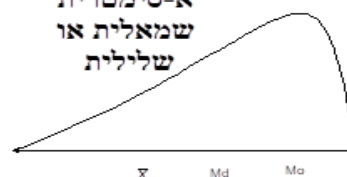
התפלגות א-סימטרית
ימנית או חיובית



התפלגות אסימטרית שמאלית (שלילית)

רוב התצפיות מקבלות ערכים גבוהים ויש מיעוט הולך וקטן של תצפיות שמקבלות ערכים נמוכים קיצוניים. לדוגמה, אורך חיים.

התפלגות
א-סימטרית
שמאלית או
שלילית



שאלות:

- (1) בסקר צפייה בטלוויזיה התקבלו התוצאות הבאות : 25 צפו בערוץ הראשון, 25 צפו בערוץ 10, 75 צפו בערוץ השני, 50 צפו באחד מערוצי הכבלים ו-25 לא צפו בטלוויזיה בזמן הסקר.
- א. רשמו את טבלת השכיחות ואת השכיחות היחסית.
- ב. תארו את הנתונים באופן גרפי.

- (2) להלן נתונים על התפלגות המקצוע המועדף של תלמידי שכבה ו' בבית הספר "מעוף":

מספר התלמידים	המקצוע
44	מתמטיקה
20	תנ"ך
12	אנגלית
26	היסטוריה

- א. מהו המשתנה הנחקר?
- ב. מהי פרופורציית התלמידים שמעדיפים תנ"ך?

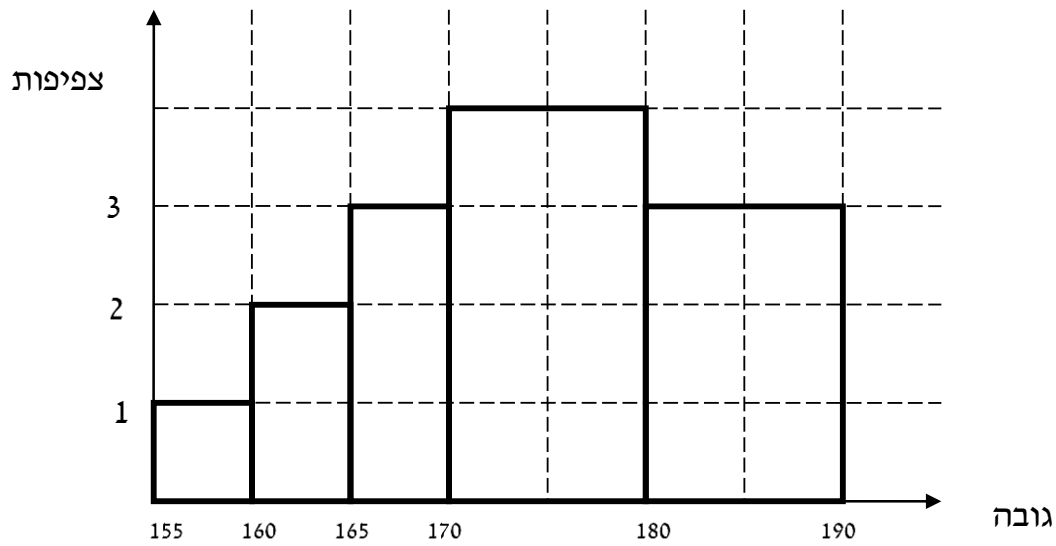
- (3) להלן התפלגות ההשכלה במקום עבודה מסוים:

מספר העובדים	השכלה
60	נמוכה
120	תיכונית
20	אקדמאית

- א. מהו המשתנה הנחקר?
- מאיזה סולם הוא?
- ב. תארו את הנתונים באופן גרפי.

- (4) להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:
- 7, 6, 8, 9, 10, 6, 4, 5, 8, 7, 6, 7, 6, 8, 9, 6, 7, 8, 5, 6.
- א. מהו המשתנה? האם הוא בדיד או רציף?
- ב. תארו את הרשימה בטבלת שכיחויות.
- ג. הוסיפו שכיחויות יחסיות לטבלה.
- ד. תארו את הנתונים באופן גרפי.

5) להלן היסטוגרמה המתארת את התפלגות הגבהים בס"מ של קבוצה מסוימת:



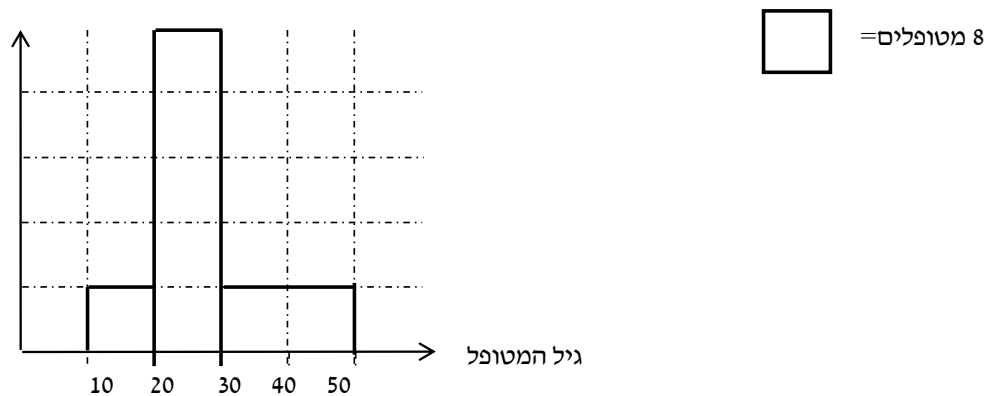
- מהו המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?
- תארו את הנתונים בטבלת שכיחויות במחלקות.
- הוסיפו שכיחות יחסית לטבלה.
- הוסיפו את הצפיפות של כל מחלקה לטבלה.
- מהי צורת ההתפלגות של הגבהים?

6) להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג:

משקל	מספר מקרים
40-45	10
45-50	20
50-60	30
60-65	20
65-70	10

- תארו את ההתפלגות באופן גרפי.
- מה ניתן להגיד על צורת ההתפלגות?

7) להלן גיל המטופלים של ד"ר שוורץ בשנים :
קנה מידה :



- א. מה המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?
- ב. מהי הקבוצה הנחקרת?
- ג. תרגמו את ההסיטוגרמה לטבלת שכיחות.
- ד. מהי הפרופורציה של המטופלים של ד"ר שוורץ בגילאים 20-30?

תשובות סופיות:

(1) א. להלן טבלה: ב. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.

x	$f(x)$	$\frac{f(x)}{n}$	%
ערוץ 1	25	$\frac{25}{200}$	12.5%
ערוץ 10	25	$\frac{25}{200}$	12.5%
ערוץ 2	75	$\frac{75}{200}$	37.5%
כבלים	50	$\frac{50}{200}$	25%
לא צפו	25	$\frac{25}{200}$	12.5%
סה"כ	200	1	100%

- (2) א. מקצוע מועדף. ב. 19.6%.
- (3) א. משתנה נחקר: השכלה, סוג: סדר. ב. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.

(4) א. המשתנה : ציון, משתנה בדיד.
ד. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.

ב+ג. להלן טבלה :

x	$f(x)$	$\frac{f(x)}{n}$	%
4	1	$\frac{1}{20}$	5%
5	2	$\frac{2}{20}$	10%
6	6	$\frac{6}{20}$	30%
7	4	$\frac{4}{20}$	20%
8	4	$\frac{4}{20}$	20%
9	2	$\frac{2}{20}$	10%
10	1	$\frac{1}{20}$	5%
סה"כ	20	20	100%

(5) א. גובה בס"מ, רציף.

ב+ג+ד. להלן טבלה :

ה. אסימטרית.

x	$f(x)$	$\frac{f(x)}{n}$	%	d
155-160	5	$\frac{5}{100}$	5%	1
160-165	10	$\frac{10}{100}$	10%	2
165-170	15	$\frac{15}{100}$	15%	3
170-180	40	$\frac{40}{100}$	40%	4
180-190	30	$\frac{30}{100}$	30%	3

- 6) א. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו. ב. סימטרית.
- 7) א. המשתנה: גיל בשנים, משתנה רציף. ב. המטופלים של ד"ר שוורץ.
- ד. להלן טבלה: ה. 62.5%.

$f(x)$	x
8	10-20
40	20-30
16	30-50

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 4 - סטטיסטיקה תיאורית- סכימה

תוכן העניינים

1. כללי..... 18

סטטיסטיקה תיאורית – סכימה:

רקע:

בסטטיסטיקה ישנה צורת רישום מקובלת לסכום של תצפיות: $\sum_{i=1}^n X_i$.

נסביר את צורת הרישום על ידי הדוגמה הבאה:

i	X_i
1	5
2	0
3	1
4	3
5	2

(הסבר מלא מופיע בסרטונים באתר).

שאלות:

- 1) בבניין 5 דירות. לכל דירה רשמו את מספר החדרים שיש בדירה (X), ומספר הנפשות החיות בדירה (Y). חשבו:

מספר דירה	X	Y
1	2	1
2	3	1
3	2	2
4	4	3
5	3	2

א. $\sum_{i=1}^3 X_i$

ב. $\sum_{i=1}^5 Y_i$

ג. $\sum_{i=1}^4 X_i$

ד. $\left(\sum_{i=1}^4 X_i \right)^2$

ה. $\sum X_i$

ו. $\sum X_i Y_i$

ז. $\sum (X_i) \sum (Y_i)$

- (2) נתון לוח ערכי המשתנים X_i ו- Y_i , כאשר: $i = 1, 2, \dots, 6$, ונתונים הקבועים:
 $a = 2$, $b = 5$. חשבו את הנוסחאות הבאות:

i	1	2	3	4	5	6
X_i	3	2	4	-2	1	4
Y_i	2	0	0	1	-5	2

א. $\sum_{i=1}^4 y_i$

ב. $\sum_{i=1}^6 a$

ג. $\sum_{i=1}^6 x_i y_i$

ד. $\sum_{i=1}^6 (x_i + y_i)$

ה. $\sum_{i=1}^6 x_i + a$

- (3) קבעו לכל זהות האם היא נכונה:

א. $\sum_{i=1}^n bX_i = b \cdot \sum_{i=1}^n X_i$

ב. $\sum_{i=1}^n a = a \cdot n$

ג. $\left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$

- (4) נתון: $\sum_{i=1}^{10} X_i = 80$, $\sum_{i=1}^{10} X_i^2 = 1640$

חשבו: $\sum_{i=1}^{10} (X_i - 4)^2$

תשובות סופיות:

1) א. 7.	ב. 9.	ג. 11.	ד. 121.
ה. 14.	ו. 27.	ז. 126.	
2) א. 3.	ב. 12.	ג. 7.	
ד. 12.	ה. 14.		
3) א. נכונה.	ב. נכונה.	ג. לא נכונה.	
4) 1160.			

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 5 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מרכז

תוכן העניינים

1. כללי (ללא ספר)

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 6 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - הטווח, השונות וסטיית התקן

תוכן העניינים

1. כללי 22

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי פיזור – הטווח, השונות וסטיית התקן:

רקע:

המטרה: למדוד את הפיזור של הנתונים, כלומר כמה הם רחוקים זה מזה ושונים זה מזה.

הטווח / תחום (RANGE):

ההפרש בין התצפית הגבוהה ביותר לנמוכה ביותר: $R = X_{\max} - X_{\min}$.

שונות וסטיית תקן:

שונות היא ממוצע ריבועי של הסטיות מהממוצע וסטיית התקן היא שורש של השונות.

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2 \quad \text{עבור סדרת נתונים}$$

דוגמאות:

(1) נחשב את השונות של סדרת המספרים הבאה: 5, 4, 9.

$$S_x^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{n} = \frac{\sum x^2 \cdot f}{n} - \bar{x}^2 \quad \text{עבור טבלת שכיחויות}$$

(2) להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת בה ממוצע הציונים הוא 7.44.

הציון X	השכיחות F	$x^2 \cdot F$
5	2	50
6	4	144
7	8	392
8	5	320
9	4	324
10	2	200
סה"כ		1430

$$S_x^2 = \frac{\sum x^2 f(x)}{n} - \bar{x}^2 = \frac{1430}{25} - 7.44^2 = 1.8464$$

$$S = \sqrt{S_x^2} = \sqrt{1.8464} = 1.3588$$

כשיש מחלקות נעזר באמצע המחלקה כדי לחשב את השונות.

שאלות:

- (1) להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:
 6, 5, 8, 7, 6, 6, 7, 8, 5, 4, 6, 10, 9, 8, 6, 7.
 חשבו את השונות, סטיית התקן והטווח של הציונים.

- (2) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן":

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

- א. חשבו סטיית התקן.
 ב. חשבו את הטווח של הנתונים.
 הקפידו להסביר לגבי כל סעיף מה משמעות התוצאה שקיבלתם.
- (3) בחברה העוסקת בטלמרקטינג בדקו עבור כל עובד את מספר שנות הוותק שלו. התקבל שממוצע שנות הוותק הוא 4 שנים וסטיית התקן היא שנתיים.
 א. האם הממוצע יגדל/יקטן/לא ישתנה וסטיית התקן תגדל/תקטן/לא תשנה כאשר יתווספו שני עובדים עם וותק של 4 שנים להתפלגות?
 ב. האם הממוצע יגדל/יקטן/לא ישתנה וסטיית התקן תגדל/תקטן/לא תשנה כאשר יתווספו שני עובדים אשר אחד עם וותק של 0 שנים והשני עם וותק של 8 שנים להתפלגות?
- (4) נתונה רשימה של 5 תצפיות, אך רק עבור 4 מהן נרשמו הסטיות שלהן מהממוצע: 2, 3, 2, 1-. חשבו את השונות של חמש התצפיות.
- (5) בשכונה בדקו בכל דירה את מספר החדרים לדירה. בשכונה 200 דירות.

מספר חדרים	פרופורציה
1	0.1
2	0.2
3	0.4
4	0.15
5	

- א. מה הממוצע של מספר החדרים לשכונה בדירה?
 ב. חשבו את סטיית התקן של מספר החדרים לדירה.
 ג. חלק מבעלי הדירות בנות 2 החדרים הפכו את דירתם לדירת חדר. כיצד הדבר ישפיע(יקטין, יגדל, לא ישנה) על כל מדד שחישבתם בסעיפים הקודמים

תשובות סופיות:

- (1) שונות : 2.19, סטיית תקן : 1.48, טווח : 6.
- (2) א. סטיית תקן : 1.106. ב. טווח : 4.
- (3) א. ממוצע לא ישתנה, סטיית התקן תקטן.
ב. ממוצע לא ישתנה, סטיית התקן תגדל.
- (4) 10.8.
- (5) א. 3.05. ב. 1.16. ג. ממוצע: יקטן, סטיית התקן: תגדל.

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 7 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - טווח בין רבעוני

תוכן העניינים

1. טווח בינרבעוני.....25

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי פיזור – טווח בין רבעוני:

רקע:

הטווח הבין-רבעוני (יש הקוראים לו התחום הבין-רבעוני) נותן את הטווח בין הרבעונים בו נמצאים 50% מהתצפיות המרכזיות. הרעיון ליצור מדד פיזורי שלא רגיש לתצפיות החריגות ביותר. כדי לחשב את הטווח הבין-רבעוני יש למצוא את הרבעון התחתון והעליון של התפלגות התצפיות.

רבעון תחתון – ערך שמחלק את ההתפלגות לשניים.
25% מהמקרים נמוכים ממנו או שווים לו ו 75% מהמקרים גבוהים או שווים לו.
סימון: Q_1 .

רבעון עליון – ערך שמחלק את ההתפלגות לשניים.
75% מהמקרים נמוכים ממנו או שווים לו ו 25% מהמקרים גבוהים או שווים לו.
סימון: Q_3 .

הטווח הבין רבעוני הוא הפער בין שני הרבעונים: $IQR = Q_3 - Q_1$.

שלבים במציאת טווח בין-רבעוני בטבלת שכיחויות:

שלב א: נמצא את הרבעון התחתון: הוא הערך שהשכיחות היחסית המצטברת באחוזים עברה לראשונה את 25%.

שלב ב: נמצא את הרבעון העליון: הוא הערך שהשכיחות היחסית המצטברת באחוזים עברה לראשונה את 75%.

שלב ג: נמצא את הטווח הבין-רבעוני: נחסר את הרבעונים: $IQR = Q_3 - Q_1$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בסניף בנק 250 לקוחות. ספרו לכל לקוח את מספר תוכניות החיסכון שלו. מהו הטווח הבין-רבעוני של מספר תוכניות החיסכון בסניף?

# תוכניות החיסכון	$f(x)$	שכיחות מצטברת	שכיחות יחסית מצטברת
0	100		
1	75		
2	25		
3	25		
4	25		

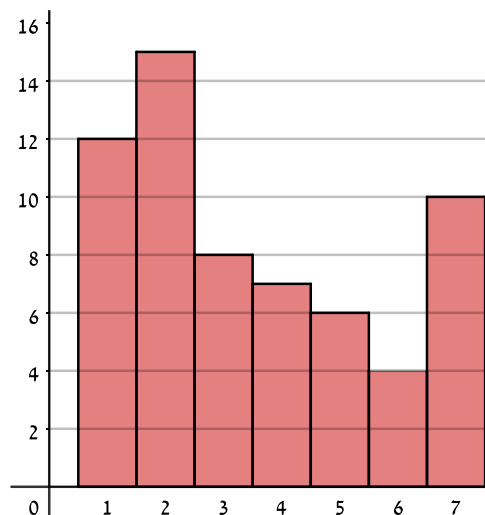
שאלות:

1) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה ב"הגורן":

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

מהו הטווח הבין-רבעוני של מספר המכוניות למשפחה ב"הגורן"?

2) בסקר שנעשה בדקו את מספר ימי המחלה השנתיים של מורים בארץ.



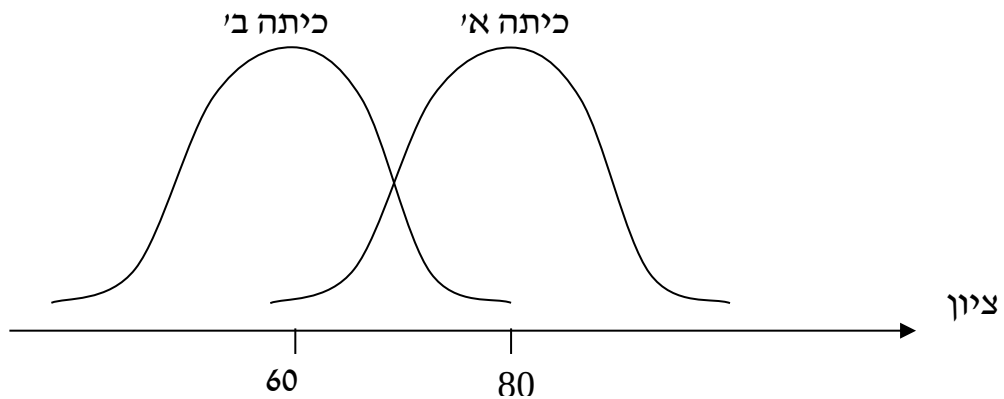
א. מה מייצגים הערכים בציר האופקי?

ב. מהו הטווח הבין-רבעוני של מספר ימי המחלה של המורים?

ג. אם נוסף 25 מורים אשר הצהירו שמספר ימי המחלה השנתיים שלהם הוא 4 ימים, כיצד הדבר ישנה את הטווח הבין-רבעוני? הסבירו.

ד. אם מסתבר שחלק מהמורים בסקר הצהירו שהם חלו 7 ימים בשנה אבל בפועל הם חלו 8 ימים, כיצד הדבר ישנה את הטווח הבין-רבעוני? הסבירו.

3) לפניך שתי עקומות המתארות את התפלגות הציונים בכל כיתה. באיזו כיתה הטווח הבין-רבעוני גדול יותר?



- א. כיתה א.
- ב. כיתה ב'.
- ג. לשתיהן אותו טווח בין-רבעוני.
- ד. לא ניתן לדעת, אין מספיק נתונים.

4) הוספת גודל קבוע לכל תצפיות סדרת נתונים :

- א. תגדיל את הטווח הבין-רבעוני.
- ב. תקטין את הטווח הבין-רבעוני.
- ג. לא תשנה הטווח הבין-רבעוני.
- ד. לא ניתן לדעת מה יקרה לטווח הבין-רבעוני.

5) חושב הטווח הבין-רבעוני עבור התפלגות מסוימת והתקבלה התוצאה אפס. לכן :

- א. לפחות 50% מהתצפיות זהות.
- ב. סטיית התקן היא אפס.
- ג. ההתפלגות היא סימטרית.
- ד. מצב זה כלל לא יתכן.

- (6) סניף מספר 543 של בנק "רווה" בדק ל-80 לקוחות את מספר הפעמים שכל לקוח נכנס לסניף הבנק במשך שבוע. התוצאות שהתקבלו הן:
- 50 אנשים נכנסו 0 פעמים לסניף.
 - 20 אנשים נכנסו פעם אחת לסניף.
 - 5 אנשים נכנסו פעמיים לסניף.
 - 5 אנשים נכנסו יותר מפעמיים.
- מהו הטווח הבין-רבעוני?
- א. 60.
 - ב. 2.
 - ג. 50.
 - ד. 1.

- (7) התפלגות הציונים במבחן ווקסלר היא סימטרית לכן:
- א. טווח הציונים הוא אפס.
 - ב. הטווח הבין רבעוני של הציונים אפס.
 - ג. סעיפים א ו-ב הם נכונים.
 - ד. אף סעיף אינו נכון.

תשובות סופיות:

- (1) 2.
- (2) א. מספר ימי המחלה השנתיים. ב. 3. ג. יקטן. ד. לא ישתנה.
- (3) ג'.
- (4) ג'.
- (5) א'.
- (6) ד'.
- (7) ד'.

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 8 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - ממוצע סטיות מוחלטות
מהחציון

תוכן העניינים

1. כללי 29

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי פיזור – ממוצע סטיות מוחלטות מהחציון:

רקע:

מדד זה הוא מדד לפיזור בנוסף למדדים שנלמדו בפרקים הקודמים כמו סטיית התקן. המדד בודק את הפיזור הממוצע סביב החציון. הרעיון הוא למצוא בכמה התצפיות סוטות בערכן המוחלט מהחציון, בממוצע. כדי לחשב את המדד יש לחשב קודם כל את החציון.

אם מדובר ברשימה של תצפיות, הנוסחה לחישוב המדד:
$$MAD = \frac{\sum_i |X_i - Md|}{n}$$

אם מדובר בטבלת שכיחויות, הנוסחה לחישוב המדד:
$$MAD = \frac{\sum |X_i - Md| \cdot f(X)}{n}$$

כאשר מדובר על טבלת שכיחויות במחלקות ניקח בתור X את אמצע המחלקה.

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

נתונה רשימת המספרים הבאה: 2, 8, 7, 6, 3.
מה ממוצע הסטיות המוחלטות מהחציון?

שאלות:

- (1) נתונה רשימת המספרים הבאה: 3, 5, 6, 9, 12, 8. מה ממוצע הסטיות המוחלטות מהחציון?
- (2) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלויזיה שנספרו עבור כל משפחה ביישוב מסוים:

מספר משפחות	מספר מקלטים
22	0
28	1
18	2
22	3
10	4

- א. חשבו את החציון.
- ב. חשב את ממוצע הסטיות המוחלטות מהחציון.
- ג. הסבירו ללא חישוב כיצד כל מדד שחושב היה משתנה, אם 5 משפחות שהיה להם מקלט יחיד היו מוכרים אותו.

תשובות סופיות:

- (1) 2.5
- (2) א. 1.5 ב. 1.14
- ג. חציון לא ישתנה, ממוצע סטיות מוחלטות מהחציון יגדל.

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 9 - סטטיסטיקה תיאורית- מדדי מיקום יחסי-ציון תקן

תוכן העניינים

1. כללי 31

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי מיקום יחסי – ציון תקן:

רקע:

המטרה למדוד איך תצפית ממוקמת ביחס לשאר התצפיות בהתפלגות.

ציון תקן:

הנוסחה לציון תקן של תצפית היא: $Z = \frac{X - \bar{X}}{S}$.

- ציון התקן נותן כמה סטיות תקן סוטה התצפית מהממוצע. כלומר, ציון התקן מעיד על כמה סטיות תקן התצפית מעל או מתחת לממוצע:
- ציון תקן חיובי אומר שהתצפית מעל הממוצע.
 - ציון תקן שלילי אומר שהתצפית מתחת לממוצע.
 - ציון תקן אפס אומר שהתצפית בדיוק בממוצע.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במקום עבודה מסוים, ממוצע המשכורות הוא 8 אלף ₪, עם סטית תקן של אלפיים ₪. באותו מקום עבודה ההשכלה הממוצעת של העובדים הנה 14 שנים, עם סטית תקן של 1.5 שנים. ערן מרוויח במקום עבודה זה 11 אלף ₪ והשכלתו 16 שנים. מה ערן יותר, באופן יחסי, משכיל או משתכר?

שאלות:

- (1) תלמידי כיתה ח' ניגשו למבחן בלשון ולמבחן במתמטיקה. להלן התוצאות שהתקבלו:

המקצוע	ממוצע	סטיית תקן
לשון	74	12
מתמטיקה	80	16

עודד קיבל: 68 בלשון ו-70 במתמטיקה.

- א. באיזה מקצוע עודד טוב יותר באופן יחסי לשכבה שלו?
 ב. איזה ציון עודד צריך לקבל במתמטיקה כדי שיהיה שקול לציונו בלשון?

- (2) במפעל לייצור מצברים לרכב בדקו במשך 40 ימים את התפוקה היומית (מספר מצברים במאות) ואת מספר הפועלים שעבדו באותו היום. להלן טבלה המסכמת את המידע שנאסף על שני המשתנים:

ממוצע	תפוקה	מספר פועלים
ממוצע	48	15
סטיית תקן	10	2

- באחד הימים מתוך כלל הימים שנבדקו התפוקה הייתה 50 מאות מצברים ובאותו היום עבדו 13 פועלים.
 מה יותר חריג באותו היום, יחסית לשאר הימים שנבדקו: נתוני התפוקה או כמות הפועלים?
 א. התפוקה.
 ב. כמות הפועלים.
 ג. חריגים באותה מידה.
 ד. חסרים נתונים כדי לדעת זאת.

- (3) הגובה הממוצע של המתגייסים לצבא הוא 175 סנטימטר עם סטיית תקן של 10 סנטימטר. המשקל הממוצע הוא 66 ק"ג עם סטיית תקן של 8 ק"ג. ערך התגייס כשגובהו 180 ס"מ ומשקלו 59 ק"ג.
 א. במה ערך חריג יותר ביחס לשאר המתגייסים, גובהו או משקלו?
 ב. כמה ערך אמור לשקול כדי שמשקלו יהיה שקול לגובהו?

תשובות סופיות:

- (1) א. לשון. ב. 72.
 (2) ב'.
 (3) א. משקל. ב. 70.

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 10 - סטטיסטיקה תיאורית-אחוזונים בטבלה בדידה

תוכן העניינים

1. כללי 33

סטטיסטיקה תיאורית – מדדי מיקום יחסי – אחוזונים בטבלה בדידה:

רקע:

האחוזון (המאון) ה- p הוא הערך בנתונים המחלק את הנתונים בצורה כזאת, שעד אליו (כולל) יש $p\%$ מהנתונים. מסמנים את האחוזון ה- p ב- X_p .

חישוב האחוזון מתוך נתונים בטבלת שכיחויות בדידה:

האחוזון הוא הערך שבו בפעם הראשונה השכיחות היחסית המצטברת (באחוזים) גדולה או שווה ל- $p\%$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בסניף בנק 250 לקוחות. ספרו לכל לקוח את מספר תוכניות החיסכון שלו:

שכיחות יחסית מצטברת	שכיחות מצטברת	$F(x)$	# תוכניות החיסכון
		100	0
		75	1
		25	2
		25	3
		25	4

א. מצאו את האחוזון ה-25.

ב. מצאו את הערך ש-20% מהמקרים מעליו.

שאלות:

(1) להלן התפלגות של משתנה כלשהו:

$F(x)$	X
10	0
40	1
30	2
15	3
5	4

מצאו להתפלגות את:

- א. האחוזון ה-60.
- ב. המאון ה-40.
- ג. העשירון העליון.
- ד. הטווח בין הרבעונים.

(2) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן":

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

חשבו את:

- א. העשירון התחתון.
- ב. האחוזון ה-30.
- ג. הערך ש-20% מהתצפית גדולות ממנו.
- ד. רבעון עליון.

תשובות סופיות:

- (1) א. 2. ב. 1. ג. 3. ד. 1.
- (2) א. 1. ב. 2. ג. 4. ד. 4.

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 11 - סטטיסטיקה תיאורית - טרנספורמציה לינארית

תוכן העניינים

1. כללי 35

סטטיסטיקה תיאורית – טרנספורמציה לינארית:

רקע:

מצב שבו מבצעים שינוי מסוג הוספה (או החסרה) של קבוע, והכפלה (או חילוק) של קבוע, לכל התצפיות: $y = a \cdot x + b$. כך יושפעו המדדים השונים:

$$\begin{aligned} MR_y &= a \cdot MR + b \\ MO_y &= a \cdot MO + b \\ \bar{y} &= a \cdot \bar{x} + b \\ Md_y &= a \cdot Md_x + b \end{aligned} \quad \text{מדדי המרכז:}$$

$$\begin{aligned} R_y &= |a| R_x \\ S_y &= |a| S_x \\ S_y^2 &= a^2 S_x^2 \end{aligned} \quad \text{מדדי הפיזור:}$$

$$\begin{aligned} Y_p &= a \cdot X_p + b \\ Z_Y &= \frac{a}{|a|} Z_x \end{aligned} \quad \text{מדדי המיקום היחסי:}$$

שלבי העבודה:

1. נזהה שמדובר בטרנספורמציה לינארית (שינוי קבוע לכל התצפיות).
2. נרשום את כלל הטרנספורמציה לפי נתוני השאלה.
3. נפשט את הכלל ונזהה את ערכי a ו- b .
4. נציב בנוסחאות שלעיל בהתאם למדדים שנשאלים.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

השכר הממוצע של עובדים הינו 9000 ₪ וטווח 6000 ₪. חשבו את המדדים הללו לאחר שהעלו את כל המשכורות ב-10% ואחר כך קנסו אותם ב-100 ₪.

שאלות:

- (1) עבור סדרת נתונים התקבל: $\bar{x} = 80, S = 15, MO = 70$. הוחלט להכפיל את כל התצפיות ב-4 ולהחסיר מהתוצאה 5. חשבו את המדדים הללו לאחר השינוי.
- (2) בחברה מסוימת השכר הממוצע הוא 40 ₪ לשעה עם סטיית תקן של 5 ₪ לשעה. הוחלט להעלות את כל המשכורות ב-10%, אך זה לא סיפק את העובדים ולכן הם קיבלו לאחר מכן תוספת של 2 ₪ לשעה. מה הממוצע ומהי השונות של השכר לשעה לאחר כל השינויים.
- (3) במבחן מסוים הציון החציוני היה 73, טווח הציונים היה 40 נקודות והעשירון העליון היה הציון 87. כיוון שהציונים בבחינה היו נמוכים, המורה החליט לתת פקטור של 4 נק' לכל התלמידים. חשבו את המדדים לאחר הפקטור.
- (4) דגמו מקו ייצור 50 קופסאות של גפרורים. בדקו בכל קופסא בה יש 40 גפרורים את כמות הגפרורים הפגומים. התקבל שבממוצע יש 3 גפרורים פגומים בקופסא, עם סטיית תקן של 1.5 גפרורים. מה יהיה הממוצע ומה תהיה סטיית התקן של מספר התקינים בקופסא?
- (5) חברת בזק הציעה את ההצעה הבאה: שלושים שקלים דמי מנוי חודשיים קבועים וכן 10 אגורות לכל דקה של שיחה יוצאת. אדם בדק במשך שנה את דקות השיחות היוצאות שלו, וקיבל שבממוצע חודשי יש לו 600 דקות שיחות יוצאות עם שונות של 2500 דקות רבועות, כמו כן בחודש ינואר ציון התקן היה 2. חשבו את המדדים הללו עבור חשבון הטלפון החודשי של אותו אדם בשקלים אם היה משתמש בחבילה המוצעת לו על ידי בזק.
- (6) הוכיחו שאם כל התצפיות בהתפלגות עברו טרנספורמציה לינארית: $Y_i = a \cdot X_i + b$, אזי הממוצע והשונות של כלל התצפיות לאחר הטרנספורמציה יהיו בהתאמה: $\bar{y} = a \cdot \bar{x} + b, S_y^2 = a^2 S_x^2$.

תשובות סופיות:

- (1) ממוצע: 315, סטיית תקן: 60, שכיח: 275.
- (2) ממוצע: 46, שונות: 30.25.
- (3) טווח: 40, חציון: 77, עשירון עליון: 91.
- (4) ממוצע: 37, סטיית תקן: 1.5.
- (5) ממוצע: 90, שונות: 25, ציון תקן: 2.
- (6) $a^2 \cdot S_x^2$

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 12 - סטטיסטיקה תיאורית- תרשים קופסא

תוכן העניינים

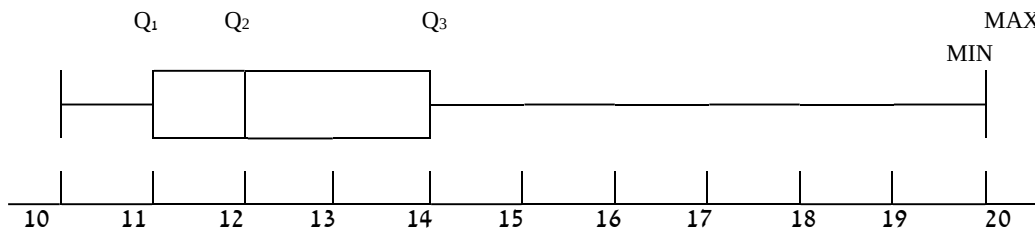
1. כללי 38

סטטיסטיקה תיאורית – תרשים קופסא (Boxplot):

רקע:

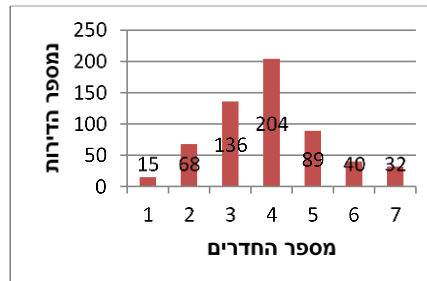
תרשים קופסא הינו תרשים שבעזרתו ניתן לבחון :

- (1) את המרכז של ההתפלגות על ידי החציון (Q_2).
- (2) את הפיזור של הנתונים (הטווח והטווח הבין רבעוני).
- (3) את צורת ההתפלגות (סימטרית \אסימטרית ימנית או אסימטרית שמאלית).



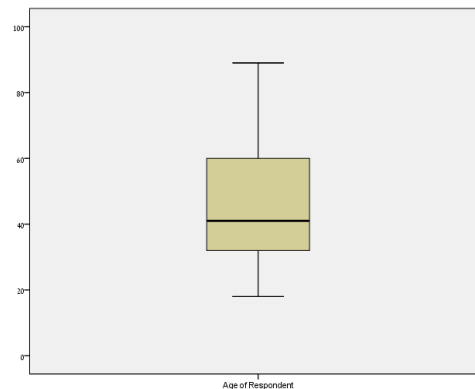
שאלות:

(1) להלן התפלגות מספר החדרים לדירות שנבנו בשנת 2009 בעיר אשדוד:



- א. מצאו את החציון, הרבעון התחתון והרבעון העליון של ההתפלגות.
- ב. שרטטו דיאגרמת קופסא להתפלגות.
- ג. מה ניתן לומר על צורת ההתפלגות?

(2) להלן דיאגרמת קופסא המתארת את התפלגות הגיל (בשנים) באוכלוסייה מסוימת:



- א. מה הגיל החציוני?
- ב. מה בערך טווח הגילאים?
- ג. מה ניתן להגיד על צורת ההתפלגות?

תשובות סופיות:

- (1) א. חציון: 4, רבעון תחתון: 3, רבעון עליון: 5.
 ב. ראה גרף מלא בסרטון וידאו. ג. כמעט סימטרית.
- (2) א. חציון: 40. ב. טווח: 70. ג. התפלגות אסימטרית ימנית.

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 13 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי אסימטריה

תוכן העניינים

1. מדד צידוד המבוסס על המומנט השלישי של ציוני התקן 40

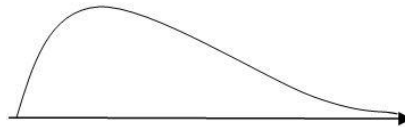
מדד אסימטריה (צידוד) המבוסס על המומנט השלישי של ציוני התקן:

רקע:

המטרה היא למדוד עד כמה ההתפלגות היא אסימטרית. צידוד (או באנגלית skewness) הוא מידת האסימטריה של ההתפלגות.

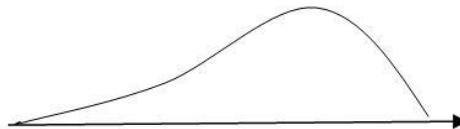
התפלגות אסימטרית חיובית/ימנית:

רוב התצפיות נמצאות בערכים הנמוכים וככל שהערכים גדלים יש פחות ופחות מקרים.



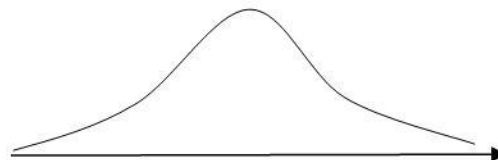
התפלגות אסימטרית שלילית/שמאלית:

רוב התצפיות נמצאות בערכים הגבוהים וככל שהערכים קטנים יש פחות ופחות מקרים.



התפלגות סימטרית פעמונית:

מתקיים שרוב התצפיות במרכז ההתפלגות וככל שהערכים מתרחקים מהמרכז יש פחות מקרים באופן סימטרי.



המדד הבא, נקרא **מדד פישר-פירסון** לאסימטריה. הוא רלבנטי לבדיקת אסימטריה בהתפלגות חד-שיאית, כלומר עם שכיח אחד, והוא בעצם המומנט השלישי של ציוני התקן.

ציון תקן של תצפית מוגדר להיות לפי הנוסחה הבאה: $Z_i = \frac{X_i - \bar{X}}{S}$

ציון תקן של תצפית ה- i נותנת בכמה סטיות תקן התצפית סוטה מהממוצע. המומנט השלישי של ציוני התקן הוא בעצם הממוצע של ציוני התקן שהם מועלים

בחזקה שלישית. כלומר, הממד הוא: $SKE = \frac{\sum Z_i^3}{n}$

אם ההתפלגות היא סימטרית פעמוניתית יתקבל: $SKE = 0$

אם ההתפלגות היא אסימטרית ימנית יתקבל: $SKE > 0$

אם ההתפלגות היא אסימטרית שמאלית יתקבל: $SKE < 0$

ככל שהמדד יותר קרוב בערכו לאפס, נגיד שההתפלגות יותר סימטרית וככל שהמדד מתרחק מהאפס נאמר שההתפלגות היא יותר אסימטרית.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בבניין 10 דירות. ספרו בכל דירה את מספר המחשבים שיש בה. להלן התוצאות שהתקבלו:

מספר דירה	מספר מחשבים
1	5
2	7
3	5
4	3
5	2
6	6
7	0
8	5
9	1
10	4

חשבו את מדד האסימטריה על סמך המומנט השלישי של ציוני התקן. האם ההתפלגות היא אסימטרית ולאיזה כיוון הצידוד?

שאלות:

- (1) במחקר שנערך על 300 נערים ונערות בדקו כמה המילים שהם מקלידים ביום. להלן התוצאות שהתקבלו:

מספר המילים	מספר הנערים והנערות
0-200	90
200-400	88
400-600	50
600-800	40
800-1000	25
1000-1200	7

- א. חשבו את הממוצע וסטיית התקן של ההתפלגות (הסתמכו על אמצע כל מחלקה בחישוב).
 ב. חשבו לכל מחלקה את ציון התקן שלה.
 ג. חשבו את מדד האסימטריה של פישר-פירסון.
- (2) בשכבה שלוש כיתות לימוד. להלן נתונים לגבי התפלגות הציונים בכל כיתה:

הכיתה	1	2	3
SKE	0.7	0	-1

- א. דרגו את הכיתות לפי מידת האסימטריה.
 ב. באיזו כיתה רוב הסטודנטים קיבלו ציונים גבוהים יחסית לשאר הכיתה?
- (3) נתון שעבור נתונים מסוימים התקבל: $SKE = 1$. איזה מהמשפטים הבאים נכון?
 א. ההתפלגות היא סימטרית.
 ב. ההתפלגות היא אסימטרית שלילית.
 ג. ההתפלגות היא עם זנב שמאלי.
 ד. ההתפלגות היא עם זנב ימני.
- (4) בהתפלגות מסוימת התקבל שהטווח הוא 0. מה ניתן להגיד על מדד skewness?
 א. 0.
 ב. 1.
 ג. 0.5.
 ד. המדד אינו מוגדר במקרה זה.

- (5) בהתפלגות מספר ימי האשפוז במחלקה מסוימת התקבל שממוצע ציוני התקן הוא אפס. מהי התשובה הנכונה בהכרח לגבי ההתפלגות?
- אסימטרית ימנית.
 - אסימטרית שמאלית.
 - סימטרית פעמונית.
 - אף אחת מהתשובות אינה נכונה בהכרח.

תשובות סופיות:

- (1) א. ממוצע: 395.3, סטיית תקן: 275.4.
 ב. להלן טבלה:
 ג. 0.375.

מספר המילים	מספר הנערים והנערות	ציון תקן למחלקה
0-200	90	-1.072
200-400	88	-1.060
400-600	50	0.380
600-800	40	1.106
800-1000	25	1.833
1000-1200	7	2.559

- (2) א. כיתה 3 < כיתה 2 < כיתה 1.
 ב. כיתה 3.
 (3) ד'.
 (4) ד'.
 (5) ד'.

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 14 - סטטיסטיקה תיאורית שאלות אמריקאיות

תוכן העניינים

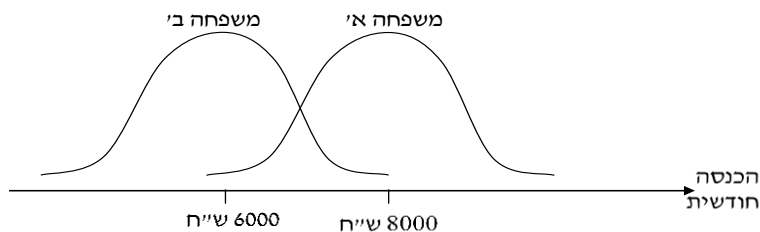
1. כללי 44

סטטיסטיקה תיאורית – שאלות אמריקאיות:

שאלות:

שאלות 1-3 מתייחסות לקטע הבא:

להלן שתי עקומות המתארות את התפלגות ההכנסות החודשיות של שתי משפחות שנבחרו באקראי:



- (1) לאיזו משפחה הכנסה שכיחה גבוהה יותר?
 - א. משפחה א'.
 - ב. משפחה ב'.
 - ג. לשתיהן אותה הכנסה שכיחה.
 - ד. לא ניתן לדעת – אין מספיק נתונים.
- (2) באיזו משפחה ההכנסה החציונית שווה להכנסה הממוצעת?
 - א. משפחה א'.
 - ב. משפחה ב'.
 - ג. בשתיהן ההכנסה החציונית שווה להכנסה הממוצעת.
 - ד. לא ניתן לדעת – אין מספיק נתונים.
- (3) באיזו משפחה סטית התקן של ההכנסה החודשית גבוהה יותר?
 - א. משפחה א'.
 - ב. משפחה ב'.
 - ג. לשתיהן אותה סטית תקן.
 - ד. לא ניתן לדעת – אין מספיק נתונים.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 4-6:

להלן נתונים חלקיים של טבלת שכיחויות:
כמו כן, נתון כי הממוצע הוא 1.66.

$F(x)$	x
?	0
10	1
6	2
15	3
?	4
50	סה"כ

(4) השכיח של הנתונים הוא:

- א. 0.
- ב. 15.
- ג. ישנם שני שכיחים: 0 ו-3.
- ד. על סמך הנתונים החלקיים אי אפשר לקבוע מה יהיה ערכו של השכיח.

(5) חציון הנתונים הוא:

- א. 2.
- ב. 1.5.
- ג. 25.5.
- ד. על סמך הנתונים החלקיים אי אפשר לקבוע מה יהיה ערכו של החציון.

(6) הטווח של הנתונים:

- א. 11.
- ב. 3.
- ג. 4.
- ד. על סמך הנתונים החלקיים אי אפשר לקבוע מה יהיה ערכו של החציון.

(7) בהתפלגות אסימטרית ימנית של משתנה כמותי רציף, הערך המתאים למאון ה-30, ציון התקן שלו הוא בהכרח:

- א. שלילי.
- ב. חיובי.
- ג. אפס.
- ד. לא ניתן לדעת ללא הנתונים.

- 8) סדרת נתונים סטטיסטיים מונה 10 תצפיות. נתון כי סדרת הנתונים סימטרית סביב הממוצע. ממוצע הסדרה-40 ושונות הסדרה-100. בשלב מאוחר יותר נוספו שתי תצפיות נוספות לסדרה : 50 ו-30. השונות של 12 התצפיות :
- א. תקטן.
 - ב. תגדל.
 - ג. לא תשתנה.
 - ד. לא ניתן לחשב את השונות ללא ידיעת התצפיות.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 9-10:

בחברת "טיק" המשכורת הממוצעת היא 4,600 ₪ וסטיית התקן של משכורת זו הינה 200 ₪. לאחר מו"מ עם ועד עובדי ההנהלה סוכם כי המשכורת תוכפל פי 1.5.

- 9) מהי המשכורת הממוצעת החדשה (ב-₪)?

- א. 2,300.
- ב. 6,900.
- ג. 4,650.
- ד. 4,600.
- ה. חסרים נתונים כדי לדעת.

- 10) מהי סטיית התקן של המשכורת לאחר יישום המו"מ לגבי השכר (ב-₪)?

- א. 200.
- ב. 300.
- ג. 675.
- ד. לא ניתן לדעת.

- 11) הוספת גודל קבוע לכל תצפיות סדרת נתונים :

- א. תגדיל את סטיית התקן.
- ב. תקטין את סטיית התקן.
- ג. לא תשנה את סטיית התקן.
- ד. לא ניתן לדעת.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 12-13:

להלן נתונים על ציוני תלמידים שנבחנו במועדים שונים בסטטיסטיקה:

שם התלמיד	ציון	ממוצע הציונים במועד בו נבחן	סטיית התקן של הציונים במועד בו נבחן
צבי	50	50	12
סטף	82	80	5
שרית	65	60	15
לובה	60	63	1.5
מיטב	70	70	10

12) התלמיד הטוב ביותר ביחס לנבחנים באותו מועד בו נבחן הוא:

- א. מיטב.
- ב. צבי.
- ג. לובה.
- ד. שרית.
- ה. סטף.

13) פנינה נבחנה עם סטף וציון התקן שלה שווה לציון התקן של שרית לכן ציונה הוא:

- א. 80.55.
- ב. 65.
- ג. 80.
- ד. 81.66.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 14-17:

בבדיקת פתע של משרד הבריאות במפעל שוקולד, נמצא ש:

שוקולד פגום	0	1	2	3	4	5	6	7
מס' קופסאות	35	63	48	12	13	11	10	8

14) מהו החציון של מספר הפגומים בקופסא:

- א. 1.
- ב. 2.
- ג. 4.
- ד. לא ניתן לדעת.

15) מהו הרבעון התחתון של מספר הפגומים בקופסא?

- א. 1.
- ב. 2.
- ג. 3.
- ד. 4.
- ה. לא ניתן לדעת.

16) מספר הפגומים בקופסא הוא משתנה :

- א. סדר.
- ב. שמי.
- ג. כמותי בדיד.
- ד. כמותי רציף.

17) השכיח של מספר הפגומים בקופסא :

- א. 63.
- ב. 1.
- ג. 200.
- ד. לא ניתן לדעת.

18) ביחס לציר המספרים, רוב הערכים בהתפלגות א-סימטרית ימנית נמצאים :

- א. בערכים הגבוהים.
- ב. בחלוקה זהה בין הערכים הגבוהים והנמוכים.
- ג. בערכים הנמוכים.
- ד. לא ניתן לדעת.
- ה. אף לא תשובה מהנ"ל נכונה.

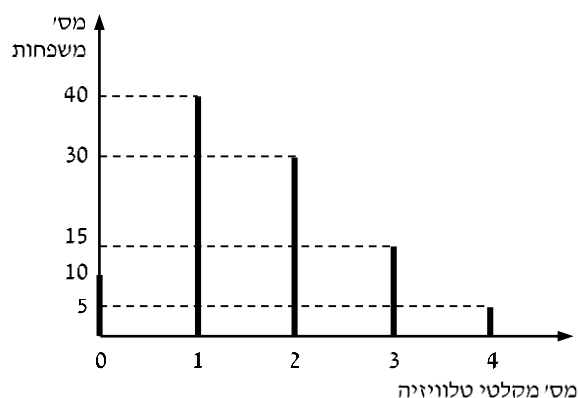
19) בוצע מחקר על מספר העובדים בחברות מזון לעומת חברות תקשורת.

- החציון והממוצע בשתייהן שווה 8.
- איזה מהטענות הבאות היא הנכונה והמלאה ביותר :
- א. השכיחות ב-2 החברות זהה אך שונה מ-8.
- ב. השכיח ב-2 החברות זהה אך לא ניתן לדעת מהו.
- ג. השכיח בשתי חברות הינו בהכרח 8.
- ד. שכיח בחברה אחת שונה מ-8 ובשנייה הוא 8.
- ה. אף תשובה אינה נכונה.

הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 20 עד 24 :

נערך סקר על מספר מקלטי הטלוויזיה הנמצאים בבית.

תוצאות הסקר נתונות בדיאגרמת מקלות הבאה :



(20) המשתנה הנחקר כאן הוא :

- א. משתנה שמי.
- ב. משתנה מסולם סדר.
- ג. משתנה כמותי בדיד.
- ד. משתנה כמותי רציף.

(21) הטווח של ההתפלגות הוא :

- א. 35.
- ב. 4.
- ג. 3.
- ד. 2.

(22) ממוצע מספר מקלטי הטלויזיה למשפחה הוא :

- א. 1.65.
- ב. 1.5.
- ג. 1.
- ד. 2.

(23) השכיח של התפלגות זו היא :

- א. 40.
- ב. 1.5.
- ג. 1.
- ד. 2.

(24) מסתבר שיש בין 2 ל-5 משפחות נוספות שאין להם מקלטי טלויזיה ויש לצרף את המשפחות הללו להתפלגות. כיצד הנתון זה ישפיע על סטיית התקן?

- א. יקטין אותו.
- ב. יגדיל אותו.
- ג. לא ישנה אותו.
- ד. אין לדעת.

תשובות סופיות:

(1 א'	(2 ג'	(3 ג'	(4 ג'	(5 ב'
(6 ג'	(7 א'	(8 ג'	(9 ב'	(10 ב'
(11 ג'	(12 ה'	(13 ד'	(14 ב'	(15 א'
(16 ג'	(17 ב'	(18 ג'	(19 ה'	(20 ג'
(21 ב'	(22 א'	(23 ג'	(24 ב'	

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 15 - יסודות ההסתברות

תוכן העניינים

1. כללי 51

הגדרות יסודיות:

רקע:

ניסוי מקרי: תהליך לו כמה תוצאות אפשריות. התוצאה המתקבלת נודעת רק לאחר ביצוע התהליך. למשל: תוצאה בהטלת קובייה, מזג האוויר בעוד שבועיים.

מרחב מדגם: כלל התוצאות האפשריות בניסוי המקרי. לדוגמה, בהטלת קובייה: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, או: מזג האוויר בעוד שבועיים: $\{\text{נאה, שרבי, מושלג, גשום, מעונן, חלקית, אביד}\}$.

מאורע: תת קבוצה מתוך מרחב במדגם. מסומן באותיות: A, B, C . בהטלת קובייה למשל, המאורע 'לקבל לפחות 5' יסומן: $A = \{5, 6\}$. המאורע 'לקבל תוצאה זוגית' יסומן: $B = \{2, 4, 6\}$.

גודל מרחב המדגם: מספר התוצאות האפשריות במרחב המדגם. בהטלת קובייה למשל נקבל: $|\Omega| = 6$.

גודל המאורע: מספר התוצאות האפשריות במאורע עצמו. למשל, בהטלת הקובייה האירועים הקודמים יסומנו: $|A| = 2, |B| = 3$.

מאורע משלים: מאורע המכיל את כל התוצאות האפשריות במרחב המדגם פרט לתוצאות במאורע אותו הוא משלים. למשל, בהטלת הקובייה: $\bar{A} = \{1, 2, 3, 4\}$, $\bar{B} = \{1, 3, 5\}$.

מרחב מדגם אחיד (סימטרי): מרחב מדגם בו לכל התוצאות במרחב המדגם יש את אותה עדיפות, אותה סבירות למשל, קובייה הוגנת, אך לא כמו מזג האוויר בשבוע הבא.

הסתברות במרחב מדגם אחיד: במרחב מדגם אחיד הסיכוי למאורע יהיה: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

דוגמה: מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל לפחות 5? $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{6}$.

דוגמה: מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל תוצאה זוגית? $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{6}$.

הסתברות במרחב לא אחיד: תחושב לפי השכיחות היחסית: $\frac{f}{n}$.

דוגמה:

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת:

הציון x	מספר התלמידים – השכיחות f
5	2
6	4
7	8
8	5
9	4
10	2

מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה קיבל את הציון 8? $\frac{f}{n} = \frac{5}{25} = 0.2$.

מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה יכשל? $\frac{f}{n} = \frac{2}{25} = 0.08$.

הסתברות למאורע משלים: הסתברות לקבוצת המשלים של המאורע ביחס למרחב המדגם: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. למשל, בדוגמה הקודמת הסיכוי לעבור את הבחינה יכול

להיות מחושב לפי הסיכוי להיכשל: $P(A) = 1 - \frac{2}{25} = \frac{23}{25}$.

שאלות:

(1) מהאותיות E, F ו- G יש ליצור מילה בת 2 אותיות, לא בהכרח בת משמעות.

א. הרכיבו את כל המילים האפשריות.

ב. רשמו את המקרים למאורע:

i. במילה נמצאת האות E .

ii. במילה האותיות שונות.

ג. רשמו את המקרים למאורע $\bar{A}$.

(2) מטילים זוג קוביות.

א. רשמו את מרחב המדגם של הניסוי. האם מרחב המדגם אחיד?

ב. רשמו את כל האפשרויות לאירועים הבאים:

i. סכום התוצאות 7.

ii. מכפלת התוצאות 12.

ג. חשבו את הסיכויים לאירועים שהוגדרו בסעיף ב'.

(3) נבחר באקראי ספרה מבין הספרות 0-9.

א. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה גדולה מ-5?

ב. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא לכל היותר 3?

ג. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא אי זוגית?

(4) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה עבור כל משפחה בישוב מסוים:

מספר משפחות	22	28	18	22	10
מספר מקלטים	0	1	2	3	4

נבחרה משפחה באקראי מהישוב.

א. מה ההסתברות שאין מקלטים למשפחה?

ב. מה ההסתברות שיש מקלטים למשפחה?

ג. מה ההסתברות שיש לפחות 3 מקלטים למשפחה?

(5) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה ביישוב "עדן":

מספר משפחות	20	40	100	30	10
מספר מכוניות	0	1	2	3	4

נבחרה משפחה אקראית מן הישוב.

א. מה ההסתברות שאין לה מכוניות?

ב. מה ההסתברות שבבעלות המשפחה לפחות 3 מכוניות?

ג. מה הסיכוי שבבעלותה פחות מ-3 מכוניות?

- (6) נטיל מטבע רגיל 3 פעמים. בצד אחד של המטבע מוטבע עץ ובצד השני פלי.
 א. רשמו את מרחב המדגם של הניסוי. האם מרחב המדגם הוא אחיד?
 ב. רשמו את כל האפשרויות לאירועים הבאים:
 i. התקבל פעם אחת עץ.
 ii. התקבל לפחות פלי אחד.
 ג. מהו המאורע המשלים ל-D?
 ד. חשבו את הסיכויים לאירועים שהוגדרו בסעיפים ב-ג.

תשובות סופיות:

- (1) א. $\Omega = \{EE, EF, EG, FE, FF, FG, GE, GF, GG\}$
 ב. $A = \{EE, EF, EG, FE, GE\}$, $B = \{EF, EG, FE, FG, GE, GF\}$
 ג. $\bar{A} = \{FF, FG, GF, GG\}$
- (2) א. $\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} (1,1) & (2,1) & (3,1) & (5,1) & (4,1) & (6,1) \\ (1,2) & (2,2) & (3,2) & (4,2) & (5,2) & (6,2) \\ (1,3) & (2,3) & (3,3) & (4,3) & (5,3) & (6,3) \\ (1,4) & (2,4) & (3,4) & (4,4) & (5,4) & (6,4) \\ (1,5) & (2,5) & (3,5) & (4,5) & (5,5) & (6,5) \\ (1,6) & (2,6) & (3,6) & (4,6) & (5,6) & (6,6) \end{pmatrix} \right\}$
 ב. $A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$, $C = \{(2,6), (3,4), (4,3), (6,2)\}$
 ג. הסיכוי ל-A: $\frac{1}{6}$. הסיכוי ל-B: $\frac{1}{9}$.
- (3) א. 0.4 ב. 0.4 ג. 0.5
 (4) א. 0.22 ב. 0.78 ג. 0.32
 (5) א. 0.1 ב. 0.2 ג. 0.8
 (6) א. $\Omega = \{PPP, PPE, PEP, EPP, PEE, EPE, EEP, EEE\}$
 ב. $A = \{PPE, PEP, EPP\}$, $D = \{PPP, PPE, PEP, EPP, PEE, EPE, EEP\}$
 ג. $\bar{D} = \{EEE\}$
 ד. $\frac{1}{8}$

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 16 - פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד) - מאורעות זרים ומכילים

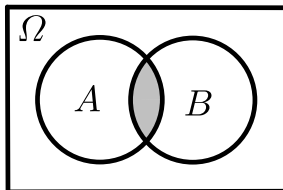
תוכן העניינים

1. כללי 55

פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד) – מאורעות זרים ומכילים:

רקע:

פעולת חיתוך:

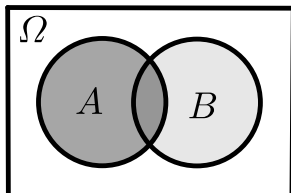


נותנת את המשותף בין המאורעות הנחתכים.
חיתוך בין המאורע A למאורע B יסומן כך: $A \cap B$.
מדובר בתוצאות שנמצאות ב- A וגם ב- B .

דוגמה:

בהטלת קובייה, למשל, האפשרויות לקבל לפחות 5 הן: $A = \{5, 6\}$.
האפשרויות לקבל תוצאה זוגית הן: $B = \{2, 4, 6\}$.
החיתוך שביניהם הוא: $A \cap B = \{6\}$.

פעולת איחוד:



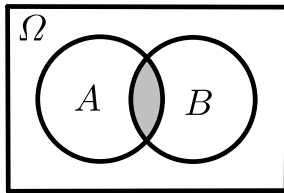
נותנת את כל האפשרויות שנמצאות לפחות באחת מהמאורעות, ומסומנת: $A \cup B$.
הפעולה נותנת את אשר נמצא ב- A או ב- B .
כלומר, לפחות אחד מהמאורעות קורה.

דוגמה:

בהטלת קובייה האפשרויות לקבל לפחות 5 הן: $A = \{5, 6\}$.
האפשרויות לקבל תוצאה זוגית: $B = \{2, 4, 6\}$.
האפשרויות לקבל לפחות 5 וגם תוצאה זוגית: $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$.

דוגמה (הפתרון נמצא בהקלטה):

סטודנט ניגש בסמסטר לשני מבחנים. מבחן בסטטיסטיקה ומבחן בכלכלה. ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הוא 0.9, ההסתברות שלו לעבור את המבחן בכלכלה הוא 0.8 וההסתברות לעבור את המבחן בסטטיסטיקה ובכלכלה היא 0.75.
מה ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה בלבד?
מה ההסתברות שלו להיכשל בשני המבחנים?
מה ההסתברות לעבור לפחות מבחן אחד?

נוסחת החיבור לשני מאורעות:

ההסתברות של איחוד מאורעות תחושב ע"י הקשר הבא:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

חוקי דה מורגן לשני מאורעות:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

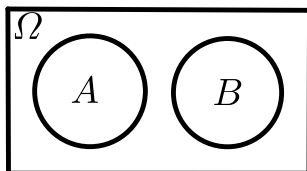
$$P(A \cap B) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B})$$

$$P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

שיטת ריבוע הקסם:

השיטה רלבנטית רק אם יש שני מאורעות במקביל בדומה לתרגיל הקודם:

	$\bar{A}$	A	
B	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(A \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(\bar{A})$	$P(A)$	1

מאורעות זרים:

מאורעות זרים הם כאשר אין להם אף איבר משותף:
 $A \cap B = \{ \}$. כלומר, הם לא יכולים להתרחש בו זמנית.

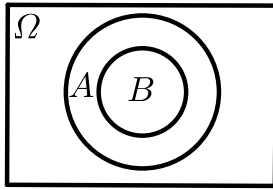
ההסתברות של חיתוך המאורעות היא אפס: $P(A \cap B) = 0$.

ההסתברות של איחוד המאורעות תחושב: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

דוגמה:

בהטלת קובייה, האפשרויות לקבל לפחות 5 הן: $A = \{5, 6\}$ והאפשרות לקבל 3

היא: $B = \{3\}$, ולכן החיתוך ביניהם הוא אפס, כלומר: $A \cap B = \{ \}$.

מאורעות מוכלים:

נתונים שני מאורעות A ו- B , השונים מאפס.
נאמר שהמאורע B מוכל במאורע A אם כל איברי
המאורע B כלולים במאורע A ונרשום: $B \subset A$.

מאורע A מכיל את מאורע B כל התוצאות שנמצאות ב- B
מוכלות בתוך מאורע A .

קשר זה מסומן באופן הבא: $B \subset A$.

$$A \cap B = B \quad P(A \cap B) = P(B)$$

$$A \cup B = A \quad P(A \cup B) = P(A)$$

$$\begin{aligned} A &= \{2, 4, 6\} \\ B &= \{2, 4\} \end{aligned} \quad \text{למשל:}$$

שאלות:

- (1) מהאותיות E, F ו- G יוצרים מילה בת 2 אותיות – לא בהכרח בת משמעות. נגדיר את המאורעות הבאים:
- A - במילה נמצאת האות E .
 - B - במילה אותיות שונות.
- א. רשמו את כל האפשרויות לחיתוך A עם B .
- ב. רשמו את כל האפשרויות לאיחוד של A עם B .
- (2) תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. נגדיר את המאורעות הבאים:
- A - לעבור את המבחן בסטטיסטיקה.
 - B - לעבור את המבחן בכלכלה.
- היעזרו בפעולות חיתוך, איחוד ומשלים בלבד כדי להגדיר את המאורעות הבאים וסמנו בדיאגרמת וון את השטח המתאים:
- א. התלמיד עבר רק את המבחן בכלכלה.
 - ב. התלמיד עבר רק את המבחן בסטטיסטיקה.
 - ג. התלמיד עבר את שני המבחנים.
 - ד. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד.
 - ה. התלמיד נכשל בשני המבחנים.
 - ו. התלמיד נכשל בכלכלה.
- (3) נתבקשתם לבחור ספרה באקראי. נגדיר את A להיות הספרה שנבחרה היא זוגית. נגדיר את B להיות הספרה שנבחרה קטנה מ-5.
- א. רשמו את כל התוצאות למאורעות הבאים:
- $$A \cup B, A \cap B, \bar{B}, B, A$$
- ב. חשבו את ההסתברויות לכל המאורעות מהסעיף הקודם.
- (4) נסמן ב- Ω את מרחב המדגם וב- ϕ קבוצה ריקה.
- נתון כי A הינו מאורע בתוך מרחב המדגם.
- להלן מוגדרים מאורעות שפתרונם הוא Ω או ϕ או A .
- קבעו עבור כל מאורע מה הפתרון שלו:
- $$A \cup \bar{A}, \bar{\phi}, A \cap \bar{A}, A \cup \Omega, A \cap \Omega, A \cup \phi, A \cap \phi, \bar{A}$$

(5) הוגדרו המאורעות הבאים :

A - אדם שגובהו מעל 1.7 מטר

B - אדם שגובהו מתחת ל-1.8 מטר.

קבעו את גובהם של האנשים הבאים :

א. $A \cap B$

ב. $A \cup B$

ג. $\overline{A} \cap B$

ד. $\overline{A} \cup \overline{B}$

ה. $\overline{\overline{A}}$

(6) נגדיר את המאורעות הבאים :

A - אדם דובר עברית.

B - אדם דובר ערבית.

C - אדם דובר אנגלית.

השתמשו בפעולות איחוד, חיתוך והשלמה לתיאור המאורעות הבאים :

א. אדם דובר את כל שלוש השפות.

ב. אדם דובר רק עברית.

ג. אדם דובר לפחות שפה אחת מתוך השפות הללו.

ד. אדם אינו דובר אנגלית.

ה. קבוצת התלמידים שדוברים שתי שפות בדיוק (מהשפות הנ"ל).

(7) שתי מפלגות רצות לכנסת הבאה. מפלגת "גדר" תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.08 ומפלגת "עתיד" תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.20. בהסתברות של 76% שתי המפלגות לא תעבורנה את אחוז החסימה.

א. מה ההסתברות שלפחות אחת מהמפלגות תעבור את אחוז החסימה?

ב. מה ההסתברות ששתי המפלגות תעבורנה את אחוז החסימה?

ג. מה ההסתברות שרק מפלגות "עתיד" תעבור את אחוז החסימה?

(8) במקום עבודה מסוים 40% מהעובדים הם גברים. כמו כן, 20% מהעובדים הם אקדמאים. 10% מהעובדים הינן נשים אקדמאיות.

א. איזה אחוז מהעובדים הם גברים אקדמאיים?

ב. איזה אחוז מהעובדים הם גברים או אקדמאיים?

ג. איזה אחוז מהעובדים הם נשים לא אקדמאיות?

(9) הסיכוי של מניה A לעלות הנו 0.5 ביום מסוים והסיכוי של מניה B לעלות ביום מסוים הנו 0.4. בסיכוי של 0.7 לפחות אחת מהמניות תעלה ביום מסוים. חשבו את ההסתברויות הבאות לגבי שתי המניות הללו ביום מסוים:

א. ששתי המניות תעלנה.

ב. שאף אחת מהמניות לא תעלנה.

ג. שמניה A בלבד תעלה.

(10) מטילים זוג קוביות, אדומה ושחורה. נגדיר את המאורעות הבאים:

A - בקובייה האדומה התקבלה התוצאה 4 ובשחורה 2.

B - סכום התוצאות משתי הקוביות הוא 6.

C - מכפלת התוצאות בשתי הקוביות היא 10.

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

ב. האם המאורע B מכיל את המאורע A?

ג. האם A ו-C מאורעות זרים?

ד. האם A ו-C מאורעות משלימים?

(11) עבור המאורעות A ו-B ידועות ההסתברויות הבאות: $P(A) = 0.6$,

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.1, P(B) = 0.3$$

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

ב. חשבו את $P(\bar{A} \cap B)$.

(12) מטבע הוטל פעמיים. נגדיר את המאורעות הבאים:

A - קיבלנו עץ בהטלה הראשונה.

B - קיבלנו לפחות עץ אחד בשתי ההטלות.

איזו טענה נכונה?

א. A ו-B מאורעות זרים.

ב. A ו-B מאורעות משלימים.

ג. B מכיל את A.

ד. A מכיל את B.

(13) בהגרלה חולקו 100 כרטיסים. על 3 מהם רשום חופשה ועל 2 מהם רשום מחשב. שאר הכרטיסים ריקים. אדם קיבל כרטיס אקראי.

א. מה הסיכוי לזכות בחופשה או במחשב? האם המאורעות הללו זרים?

ב. מה ההסתברות לא לזכות בפרס?

14 נתון כי: $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.25$, $P(A \cup B) = 0.49$

- א. חשבו את הסיכוי ל- $P(A \cap B)$.
- ב. האם A ו- B מאורעות זרים?
- ג. מה ההסתברות שרק A יקרה או שרק B יקרה?

15 A ו- B מאורעות זרים. נתון ש: $2 \cdot P(B \cap \bar{A}) = P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$

מה הסיכוי למאורע A ומה ההסתברות למאורע B ?

16 קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות:

- א. $A \cap B = B \cap A$.
- ב. $\overline{A \cup B} = A \cap B$.
- ג. $A \cap B \cap C = A \cap B \cap (C \cup B)$.
- ד. $\overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$.

17 נתון ש- A ו- B מאורעות במרחב מדגם. נתון ש- $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.2$.

- א. האם יתכן ש- $P(A \cup B) = 0.4$?
- ב. האם יתכן ש- $P(A \cup B) = 0.6$?
- ג. אם A ו- B זרים מה הסיכוי $P(A \cup B)$?
- ד. אם A מכיל את B מה הסיכוי $P(A \cup B)$?

18 מתוך אזרחי המדינה הבוגרים ל-30% חשבון בבנק הפועלים. ל-28% חשבון בבנק לאומי ול-15% חשבון בבנק מזרחי. כמו כן נתון כי 6% מחזיקים חשבון בבנק לאומי ובבנק הפועלים. ל-5% חשבון בבנק פועלים ומזרחי. ול-4% חשבון בבנק לאומי ומזרחי. כמו כן ל-1% מהאוכלוסייה הבוגרת חשבון בנק בשלושת הבנקים יחד.

- א. מה אחוז האזרחים להם חשבון בבנק לאומי בלבד?
- ב. מה ההסתברות שאזרח כלשהו יחזיק חשבון בבנק פועלים ולאומי אבל לא בבנק מזרחי?
- ג. מה ההסתברות שלאזרח יהיה חשבון בפועלים או במזרחי אבל לא בבנק לאומי?
- ד. מה אחוז האזרחים שיש להם חשבון בנק אחד בלבד?
- ה. מה אחוז האזרחים שיש להם בדיוק חשבון בשני בנקים בלבד?
- ו. מה ההסתברות שלאזרח בוגר אין חשבון בנק באף אחד מהבנקים הללו?
- ז. לאיזה אחוז מהאזרחים יש חשבון בנק בלפחות אחד מהבנקים הללו?

- 19** חברה מסוימת פרסמה את הנתונים הבאים לגבי האזרחים מעל גיל 21. הנתונים שהתקבלו היו: 40% מהאנשים מחזיקים כרטיס "ויזה", 52% מחזיקים כרטיס "ישראכרט", 20% מחזיקים כרטיס "אמריקן אקספרס", 15% מחזיקים כרטיס ויזה וגם ישראכרט, 8% מחזיקים כרטיס ישראכרט וגם אמריקן אקספרס ו-7% מחזיקים כרטיס ויזה וגם אמריקן אקספרס. כמו כן, 13% לא מחזיקים באף אחד משלושת הכרטיסים הנ"ל.
- א. מה אחוז מחזיקי שלושת כרטיס האשראי גם יחד?
- ב. מה אחוז מחזיקי ישראכרט וויזה אך לא את אמריקן אקספרס?
- ג. מה אחוז מחזיקי כרטיס אחד בלבד?

20 הוכיחו: $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$.

- 21** A ו- B מאורעות במרחב המדגם. האם נכון לומר שהסיכוי שיתרחש בדיוק מאורע אחד הוא: $P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$?

תשובות סופיות:

- (1) א. $A \cap B = \{EG, EF, FE, GE\}$
 ב. $A \cup B = \{EG, EF, EE, FE, GE, EG, GF\}$
- (2) א. $B \cap \bar{A}$ ב. $A \cap \bar{B}$ ג. $A \cap B$ ד. $A \cup B$ ה. $\bar{A} \cap \bar{B}$ ו. $\bar{B}$
- (3) א. $\bar{B} = 5, 6, 7, 8, 9, B = 0, 1, 2, 3, 4, A = 0, 2, 4, 6, 8$
 $A \cup B = 0, 2, 4, 6, 8, 1, 3, A \cap B = 0, 2, 4$
- ב. $P(A \cup B) = 0.7, P(A \cap B) = 0.3, P(\bar{B}) = 0.5, P(B) = 0.5, P(A) = 0.5$
- (4) $\bar{\bar{A}} = A, A \cap \phi = \phi, A \cup \phi = A, A \cap \Omega = A, A \cup \Omega = \Omega$
 $A \cup \bar{A} = \Omega, \bar{\phi} = \Omega, A \cap \bar{A} = \phi$
- (5) א. $A \cap B$: גובה בין 1.7 ל-1.8.
 ב. $A \cup B$: כל גובה אפשרי.
 ג. $\bar{A} = \bar{A} \cap B$: גובה לכל היותר 1.7.
 ד. $\bar{A} \cup \bar{B}$: לכל היותר 1.7 או לפחות 1.8.
 ה. $A = \bar{\bar{A}}$: גובה מעל 1.7.
- (6) א. $A \cap B \cap C$ ב. $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ ג. $A \cup B \cup C$ ד. $\bar{C}$
 ה. $(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (B \cap C \cap \bar{A}) \cup (A \cap C \cap \bar{B})$
- (7) א. $P(A \cup B) = 0.24$ ב. $P(A \cap B) = 0.04$ ג. $P(B \cap \bar{A}) = 0.16$
- (8) א. $P(A \cap B) = 10\%$ ב. $P(A \cup B) = 50\%$ ג. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 50\%$
- (9) א. $P(A \cap B) = 0.2$ ב. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.3$ ג. $P(A \cup \bar{B}) = 0.3$
- (10) א. לא. ב. כן. ג. כן. ד. לא.
- (11) א. כן. ב. $P(\bar{A} \cap B) = 0.3$
- (12) הטענה הנכונה היא ג'.
- (13) א. 0.05. ב. 0.95.
- (14) א. $P(A \cap B) = 0.06$ ב. לא. ג. $P((A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})) = 0.43$
- (15) $P(B) = \frac{1}{5}, P(A) = \frac{2}{5}$
- (16) א. נכון. ב. לא נכון. ג. לא נכון. ד. נכון.
- (17) א. כן. ב. לא. ג. $P(A \cup B) = 0.5$ ד. $P(A \cup B) = 0.3$
- (18) א. 19%. ב. 0.05. ג. 0.31. ד. 46%. ה. 12%. ו. 0.41.
- (19) א. 5%. ב. 10%. ג. 67%.
- (20) שאלת הוכחה.
- (21) נכון.

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 17 - קומבינטוריקה - כלל המכפלה

תוכן העניינים

1. כללי 64

קומבינטוריקה – כלל המכפלה:

רקע:

כלל המכפלה:

כלל המכפלה הוא כלל שבאמצעותו אפשר לחשב את גודל המאורע או גודל מרחב המדגם.

אם לתהליך יש k שלבים: n_1 אפשרויות לשלב הראשון, n_2 אפשרויות לשלב השני... n_k אפשרויות לשלב k :

מספר האפשרויות לתהליך כולו יהיה: $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$

למשל, כמה אפשרויות יש למשחק בו מטיילים קובייה וגם מטבע? (הסבר בהקלטה)

$$n_1 = 6, n_2 = 2$$

$$n_1 \cdot n_2 = 6 \cdot 2 = 12$$

למשל, כמה לוחיות רישוי בני 5 תווים ניתן ליצור כאשר התו הראשון הוא אות אנגלית והיתר ספרות? (הסבר בהקלטה)

$$n_1 = 26, n_2 = 10, n_3 = 10, n_4 = 10, n_5 = 10$$

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5 = 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 260,000$$

שאלות:

- (1) חשבו את מספר האפשרויות לתהליכים הבאים :
- הטלת קובייה פעמים.
 - מספר תלת ספרתי.
 - בחירת בן ובת מכתה שיש בה שבעה בנים ועשר בנות.
 - חלוקת שני פרסים שונים לעשרה אנשים שונים כאשר אדם לא יכול לקבל יותר מפרס אחד.
- (2) במסעדה מציעים ארוחה עסקית.
- בארוחה עסקית יש לבחור מנה ראשונה, מנה עיקרית ושתייה. האופציות למנה ראשונה הן : סלט ירקות, סלט אנטיפסטי ומרק היום. האופציות למנה עיקרית הן : סטייק אנטריקוט, חזה עוף בגריל, לזניה בשרית ולזניה צמחונית. האופציות לשתייה הן : קפה, תה ולימונדה.
- כמה ארוחות שונות ניתן להרכיב בעזרת התפריט הזה?
 - אדם מזמין ארוחה אקראית. חשב את ההסתברויות הבאות :
 - בארוחה סלט ירקות, לזניה בשרית ולימונדה.
 - בארוחה סלט, לזניה ותה.
- (3) בוחרים באקראי מספר בין חמש ספרות. חשבו את ההסתברויות הבאות :
- המספר הוא זוגי.
 - במספר כל הספרות שונות.
 - במספר כל הספרות זהות.
 - במספר לפחות שתי ספרות שונות.
 - במספר לפחות שתי ספרות זהות.
 - המספר הוא פלינדרום (מספר הנקרא מימין ומשמאל באות הצורה).
- (4) חישה אנשים אקראיים נכנסו למעלית בבניין בן 8 קומות. חשבו את ההסתברויות הבאות :
- כולם ירו בקומה החמישית.
 - כולם ירדו באותה קומה.
 - כולם ירדו בקומה אחרת.
 - ערן ודני ירדו בקומה השישית והיתר בשאר הקומות.

- (5) במפלגה חמישה עשר חברי כנסת. יש לבחור שלושה חברי כנסת לשלושה תפקידים שונים. בכמה דרכים ניתן לחלק את התפקידים הבאים אם:
- א. חבר כנסת יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
 - ב. חבר כנסת לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
- (6) מטילים קובייה 4 פעמים.
- א. מה ההסתברות שכל התוצאות תהינה זהות?
 - ב. מה ההסתברות שכל התוצאות תהינה שונות?
 - ג. מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהינה זהות?
 - ד. מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהינה שונות?
- (7) יש ליצור מילה בת חמש אותיות, לא בהכרח עם משמעות מאותיות ה-ABC (26 אותיות).
- א. מה ההסתברות שבמילה שנוצרה אין האותיות A, D ו-L?
 - ב. מה ההסתברות שבמילה שנוצרה כל האותיות זהות?
 - ג. מה ההסתברות שבמילה שנוצרה לפחות שתי אותיות שונות זו מזו?
 - ד. מה ההסתברות שהמילה היא פלינדרום? (מילה אשר משמאל לימין, ומימין לשמאל נקראת אותו הדבר).
- (8) יוצרים קוד עם a ספרות (מותר לחזור על אותה ספרה בקוד). חשבו את ההסתברויות הבאות: (בטאו את תשובותיכם באמצעות a).
- א. בקוד אין את הספרה 5.
 - ב. בקוד מופיעה הספרה 3.
 - ג. בקוד לא מופיעות ספרות אי זוגיות.
- (9) במשחק מזל יש למלא טופס בו n משבצות. כל משבצת מסומנת בסימן V או X. בכמה דרכים שונות ניתן למלא את טופס משחק המזל?

תשובות סופיות:

- (1) א. 36 ב. 900 ג. 70 ד. 90
- (2) א. 36 ב. i. $\frac{1}{36}$ ב. ii. $\frac{1}{9}$
- (3) א. 0.5 ב. 0.3024 ג. 0.0001 ד. 0.9999 ה. 0.6976 ו. 0.01
- (4) א. $\frac{1}{8^5}$ ב. $\frac{1}{8^4}$ ג. 0.205 ד. $\frac{1 \cdot 1 \cdot 7^3}{8^5}$
- (5) א. 3375 ב. 2730
- (6) א. $\frac{1}{216}$ ב. $\frac{5}{18}$ ג. $\frac{13}{18}$ ד. $\frac{215}{216}$
- (7) א. $\frac{23^5}{26^5}$ ב. $\frac{1}{26^4}$ ג. $1 - \frac{1}{26^4}$ ד. $\frac{1}{26^2}$
- (8) א. 0.9^a ב. $1 - 0.9^a$ ג. 0.5^a
- (9) 2^n

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 18 - קומבינטוריקה - דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה

תוכן העניינים

1. כללי 68

קומבינטוריקה – דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה:

רקע:

מדגם סידור בדגימה עם החזרה:

מספר האפשרויות בדגימת k עצמים מתוך n עצמים שונים כאשר הדגימה היא עם החזרה והמדגם סדור הוא: n^k .

דוגמה:

בחרים שלושה תלמידים מתוך עשרה לייצג ועד בו תפקידים שונים, תלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

כמה ועדים שונים ניתן להרכיב? $10^3 = 1,000$, $k = 3$, $n = 10$.

מדגם סידור ללא החזרה:

מספר האפשרויות בדגימת k עצמים שונים מתוך n עצמים שונים ($n \geq k$) כאשר המדגם סדור ואין החזרה של עצמים נדגמים הינו:

$$(n)_k = n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

דוגמה:

שלושה תלמידים נבחרים מתוך 10 לייצג וועד בו תפקידים שונים.

תלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד: $\frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

שאלות:

- (1) במפלגה 20 חברי כנסת, מעוניינים לבחור שלושה חברי כנסת לשלושה תפקידים שונים.
- א. חבר כנסת יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
כמה קומבינציות ישנן לחלוקת התפקידים?
- ב. חבר כנסת לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
כמה קומבינציות יש לחלוקת התפקידים?
- (2) במשחק מזל יש 4 משבצות ממוספרות מ-A (עד D). בכל משבצת יש למלא סיפרה (0-9). הזוכה הוא זה שניחש נכונה את כל הספרות בכל המשבצות בהתאמה.
- א. מה ההסתברות לזכות במשחק?
- ב. מה ההסתברות שבאף משבצת לא תהיה את הספרה 3 במספר הזוכה?
- ג. מה ההסתברות שהתוצאה 4 תופיע לפחות פעם אחת במספר הזוכה?
- (3) קבוצה מונה 22 אנשים, מה ההסתברות שלפחות לשניים מהם יהיה יום הולדת באותו התאריך?
- (4) שלושה אנשים קבעו להיפגש במלון הילטון בסינגפור. הבעיה היא שבסינגפור ישנם 5 מלונות הילטון.
- א. מה ההסתברות שכל השלושה ייפגשו?
- ב. מה ההסתברות שכל אחד יגיע לבית מלון אחר?
- (5) בכיתה 40 תלמידים. מעוניינים לבחור חמישה מהם לוועד כיתה. בכמה דרכים ניתן להרכיב את הוועד אם:
- א. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
- ב. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

תשובות סופיות:

- (1) א. 8000 ב. 6840
- (2) א. 0.0001 ב. 0.6561 ג. 0.3439
- (3) 0.476
- (4) א. 0.04 ב. 0.48
- (5) א. 40^5 ב. 78,960,960

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 19 - קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר וללא החזרה

תוכן העניינים

1. כללי 70

קומבינטוריקה – דגימה ללא סדר וללא החזרה:

רקע:

מדגם לא סדור בדגימה ללא החזרה:

מספר האפשרויות לדגום k עצמים שונים מתוך n עצמים שונים כאשר אין

משמעות לסדר העצמים הנדגמים ואין החזרה: $\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$

דוגמה:

מתוך 10 תלמידים יש לבחור שלושה נציגים לוועד ללא תפקידים מוגדרים:

$$\cdot \binom{10}{3} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = 120$$

הערות:

$$\cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (1)$$

$$\cdot \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n \quad (2)$$

$$\cdot \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1 \quad (3)$$

שאלות:

- (1) בכיתה 15 בנות ו-10 בנים. יש לבחור 5 תלמידים שונים מהכיתה לנציגות הכיתה. בכמה דרכים אפשר להרכיב את הנציגות, אם:
- א. אין שום הגבלה לבחירה.
 - ב. מעוניינים ש-3 בנות ו-2 בנים ירכיבו את המשלחת.
 - ג. לא יהיו בנים במשלחת.
- (2) סטודנט מעוניין לבחור 5 קורסי בחירה בסמסטר זה. לפניו רשימה של 10 קורסים לבחירה: 5 במדעי הרוח, 3 במדעי החברה, 2 במתמטיקה.
- א. כמה בחירות שונות הוא יכול ליצור לעצמו?
 - ב. כמה בחירות יש לו בהן 3 קורסים הם ממדעי הרוח?
 - ג. כמה בחירות יש לו אם 2 מהן לא ממדעי הרוח?
 - ד. כמה בחירות יש לו אם 2 ממדעי הרוח, 2 ממדעי החברה ו-1 ממתמטיקה?
- (3) בכיתה 30 תלמידים מתוכם 12 תלמידים ו-18 תלמידות.
- יש לבחור למשלחת 4 תלמידים מהכיתה. התלמידים נבחרים באקראי.
- א. מה ההסתברות שהמשלחת תורכב רק מבנות?
 - ב. מה ההסתברות שבמשלחת תהיה רק בת אחת?
 - ג. מה ההסתברות שבמשלחת תהיה לפחות בת אחת?
- (4) במשחק הלוטו יש לבחור 5 מספרים מתוך 45. המספרים הם 1-45.
- א. מה ההסתברות שבמשחק הזוכה כל המספרים הם זוגיים?
 - ב. מה ההסתברות שבמספר הזוכה יש לכל היותר מספר זוגי אחד?
 - ג. מה ההסתברות שבמספר הזוכה לפחות פעם אחת יש מספר זוגי?
 - ד. מה ההסתברות שבמספר הזוכה כל המספרים גדולים מ-30?
- (5) בחפיסת קלפים ישנם 52 קלפים: 13 בצבע שחור בצורת עלה, 13 בצבע אדום בצורת לב, 13 בצבע אדום בצורת יהלום ו-13 בצבע שחור בצורת תלתן. מכל צורה (מתוך ה-4) יש 9 קלפים שמספרם 2-10, שאר הקלפים הם: נסיך, מלכה, מלך ואס (בעצם מדובר בקופסת קלפים רגילה ללא ג'וקר). שני אנשים משחקים פוקר. כל אחד מקבל באקראי 5 קלפים (ללא החזרה).
- א. מה ההסתברות שעודד יקבל את כל המלכים וערן את כל המלכות?
 - ב. מה ההסתברות שאחד השחקנים יקבל את הקלף אס-לב?
 - ג. מה ההסתברות שערן יקבל קלפים שחורים בלבד ועודד יקבל שני קלפים שחורים בדיוק?
 - ד. מה ההסתברות שערן יקבל לפחות 3 קלפים שהם מספר (אס אינו מספר)?

- (6) במכללה 4 מסלולי לימוד. בכל מסלול לימוד 5 מזכירות. יש ליצור וועד של 5 מזכירות מתוך כלל המזכירות במכללה. יוצרים וועד באופן אקראי. חשבו את ההסתברויות הבאות:
- כל המזכירות בוועד יהיו ממסלול "מדעי ההתנהגות".
 - כל המזכירות בוועד יהיו מאותו המסלול.
 - מכל מסלול תבחר לפחות מזכירה אחת.

תשובות סופיות:

(1)	א. 53130	ב. 20475	ג. 3003
(2)	א. 252	ב. 100	ג. 100
(3)	א. 0.1117	ב. 0.1445	ג. 0.9819
(4)	א. 0.02	ב. 0.187	ג. 0.972
(5)	א. 0	ב. 0.1923	ג. 0.009
(6)	א. $6.45 \cdot 10^{-5}$	ב. $2.58 \cdot 10^{-4}$	ג. 0.3225

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 20 - הסתברות מותנית-במרחב מדגם אחד

תוכן העניינים

1. כללי 73

הסתברות מותנית – במרחב מדגם אחיד:

רקע:

לעיתים אנו נדרשים לחשב הסתברות למאורע כלשהו כאשר ברשותנו אינפורמציה לגבי מאורע אחר. הסתברות מותנית הינה סיכוי להתרחשות מאורע כלשהו כאשר ידוע שמאורע אחר התרחש/ לא התרחש.

ההסתברות של A בהינתן ש- B כבר קרה: $P(A|B)$.

כשמרחב המדגם אחיד: $P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נטיל קובייה.

נגדיר:

A - התוצאה זוגית.

B - התוצאה גדולה מ-3.

נרצה לחשב את: $P(A|B)$.

שאלות:

- (1) נבחרה ספרה זוגית באקראי. מה הסיכוי שהספרה גדולה מ-6?
- (2) יוסי הטיל קובייה.
מה הסיכוי שקיבל את התוצאה 4, אם ידוע שהתוצאה שהתקבלה זוגית?
- (3) הוטלו צמד קוביות. נגדיר:
A - סכום התוצאות בשתי ההטלות הינו 7.
B - מכפלת התוצאות 12.
חשבו את $P(A|B)$.
- (4) מטבע הוטל פעמיים.
ידוע שהתקבל לכל היותר ראש אחד, מה הסיכוי שהתקבלו שני ראשים?
- (5) זוג קוביות הוטלו והתקבל שהתוצאות זהות.
מה הסיכוי שלפחות אחת התוצאות 5?
- (6) זוג קוביות הוטלו והתקבל לפחות פעם אחת 4.
מה הסיכוי שאחת התוצאות 5?
- (7) נבחרה משפחה בת שני ילדים, שמהם אחד הוא בן.
מה ההסתברות שבמשפחה שני בנים בקרב הילדים?

תשובות סופיות:

(1) 0.2.

(2) $\frac{1}{3}$.

(3) 0.5.

(4) 0.

(5) $\frac{1}{6}$.

(6) $\frac{2}{11}$.

(7) $\frac{1}{3}$.

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 21 - הסתברות מותנית - מרחב לא אחיד

תוכן העניינים

1. כללי 76

הסתברות מותנית – מרחב לא אחיד:

רקע:

הסיכוי שמאורע A יתרחש, בהינתן שמאורע B כבר קרה: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

במונה: הסיכוי לחיתוך של שני המאורעות, זה הנשאל וזה הנתון שהתרחש.
במכנה: הסיכוי למאורע נתון שהתרחש.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נבחרו משפחות שיש להם שתי מכוניות. ל-30% מהמשפחות הללו המכונית הישנה יותר היא מתוצרת אירופה ואצל 60% מהמשפחות הללו המכונית החדשה יותר מתוצרת אירופה. כמו כן, בקרב 15% מהמשפחות הללו שתי המכוניות הן מתוצרת אירופאית. אם המכונית הישנה של המשפחה היא אירופאית, מה ההסתברות שגם החדשה אירופאית?

שאלות:

- (1) תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים: מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. נגדיר את המאורעות הבאים:
- A - לעבור את המבחן בסטטיסטיקה.
 - B - לעבור את המבחן בכלכלה.
- כמו כן נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8, הסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9 והסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75. חשבו את הסיכויים למאורעות הבאים:
- א. התלמיד עבר בסטטיסטיקה, מה ההסתברות שהוא עבר בכלכלה?
 - ב. התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא עבר בסטטיסטיקה?
 - ג. התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא נכשל בסטטיסטיקה?
 - ד. התלמיד נכשל בסטטיסטיקה, מה ההסתברות שהוא נכשל בכלכלה?
 - ה. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד, מה ההסתברות שהוא יעבור את שניהם?
- (2) במדינה שתי חברות טלפון סלולארי: "סופט" ו"בל". 30% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "בל", 60% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "סופט" ול-15% מהתושבים הבוגרים אין טלפון סלולארי כלל.
- א. איזה אחוז מהתושבים הבוגרים רשומים אצל שתי החברות?
 - ב. נבחר אדם שרשום אצל חברת "סופט", מה ההסתברות שהוא רשום גם אצל חברת "בל"?
 - ג. אם אדם לא רשום אצל חברת "בל", מה ההסתברות שהוא כן רשום בחברת "סופט"?
 - ד. אם אדם רשום אצל חברה אחת בלבד, מה ההסתברות שהוא רשום בחברת "סופט"?
- (3) במכללה שני חניונים: חניון קטן וחניון גדול. בשעה 08:00 יש סיכוי של 60% שבחניון הגדול יש מקום, סיכוי של 30% שבחניון הקטן יש מקום וסיכוי של 20% שבשני החניונים יש מקום.
- א. מה ההסתברות שיש מקום בשעה 08:00 רק בחניון הגדול של המכללה?
 - ב. ידוע שבחניון הקטן יש מקום בשעה 08:00, מה הסיכוי שבחניון הגדול יש מקום?
 - ג. אם בשעה 08:00 בחניון הגדול אין מקום, מה ההסתברות שבחניון הקטן יהיה מקום?
 - ד. נתון שלפחות באחד מהחניונים יש מקום בשעה 08:00, מה ההסתברות שבחניון הגדול יש מקום?

(4) נלקחו 200 שכירים ו-100 עצמאים. מתוך השכירים 20 הם אקדמאיים, ומתוך העצמאיים 30 הם אקדמאיים.

- א. בנו טבלת שכיחות משותפת לנתונים.
- ב. נבחר אדם אקראי מה ההסתברות שהוא שכיר?
- ג. מה ההסתברות שהוא שכיר ולא אקדמאי?
- ד. מה ההסתברות שהוא שכיר או אקדמאי?
- ה. אם האדם שנבחר הוא עצמאי מהי ההסתברות שהוא אקדמאי?
- ו. אם האדם שנבחר הוא לא אקדמאי, מה ההסתברות שהוא שכיר?

(5) חברה מסוימת פרסמה את הנתונים הבאים לגבי האזרחים מעל גיל 21 :
 40% מהאנשים מחזיקים כרטיס "ויזה", 52% מחזיקים כרטיס "ישראכרט",
 20% מחזיקים כרטיס "אמריקן אקספרס", 15% מחזיקים ויזה וגם ישראכרט,
 8% מחזיקים ישראכרט וגם אמריקן אקספרס ו-7% מחזיקים כרטיס ויזה וגם אמריקן אקספרס. כמו כן, 5% מחזיקים בשלושת הכרטיסים הנ"ל.

- א. אם לאדם יש ויזה, מה הסיכוי שאין לו ישראכרט?
- ב. אם לאדם שני כרטיסי אשראי, מה הסיכוי שאין לו ישראכרט?
- ג. אם לאדם לפחות כרטיס אחד, מה הסיכוי שאין לו ישראכרט?

תשובות סופיות:

(1) א. 0.833 ב. 0.9375 ג. 0.0625 ד. 0.5 ה. 0.789

(2) א. 5% ב. 0.0833 ג. 0.786 ד. 0.6875

(3) א. 0.4 ב. $\frac{2}{3}$ ג. 0.25 ד. $\frac{6}{7}$

(4) א. להלן טבלה: ב. $\frac{2}{3}$ ג. 0.6 ד. $\frac{23}{30}$

סה"כ	לא אקדמאי	אקדמאי	
200	180	20	שכיר
100	70	30	עצמאי
300	250	50	סה"כ

ה. 0.3 ו. 0.72

(5) א. 0.625 ב. 0.133 ג. 0.402

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 22 - דיאגרמת עצים - נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה

תוכן העניינים

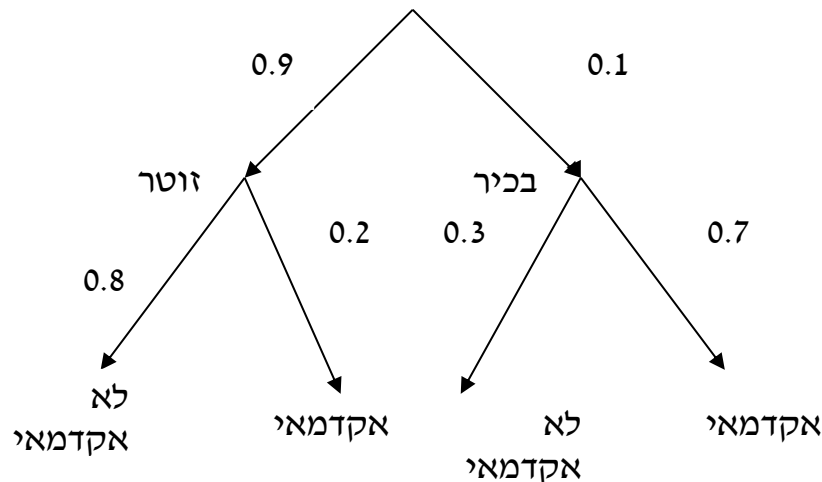
1. כללי 80

דיאגרמת עצים – נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה:

נשתמש בשיטה זו כאשר יש תרגיל שבו התרחשות המאורעות היא בשלבים, כך שכל תוצאה של כל שלב תלויה בשלב הקודם, פרט לשלב הראשון:

דוגמה:

בחברה מסוימת 10% מוגדרים בכירים והיתר מוגדרים זוטרים. מבין הבכירים 20% הם אקדמאים ומבין הזוטרים 80% הם אקדמאים. נשרטט עץ שיתאר את הנתונים, השלב הראשון של העץ אינו מותנה בכלום ואילו השלב השני מותנה בשלב הראשון.



כדי לקבל את הסיכוי לענף מסוים נכפיל את כל ההסתברויות על אותו ענף. נבחר אדם באקראי מאותה חברה.

(1) מה הסיכוי שהוא בכיר אקדמאי ? $0.1 \cdot 0.7 = 0.07$.

(2) מה הסיכוי שהוא זוטר לא אקדמאי ? $0.9 \cdot 0.8 = 0.72$.

כדי לקבל את הסיכוי לכמה ענפים נחבר את הסיכויים של כל ענף (רק אחרי שבתוך הענף הכפלנו את ההסתברויות).

(3) מה הסיכוי שהוא אקדמאי ? $0.1 \cdot 0.7 + 0.9 \cdot 0.2 = 0.25$.

(4) נבחר אקדמאי מה ההסתברות שהוא עובד זוטר? מדובר כאן על שאלה בהסתברות מותנה ולכן נשתמש בעיקרון של הסתברות

$$\text{מותנה: } P(zutar | academay) = \frac{0.9 \cdot 0.2}{0.25} = \frac{0.18}{0.25} = 0.72$$

נוסחת ההסתברות השלמה:

בהינתן B , מאורע כלשהו, וחלוקה של מרחב המדגם Ω ל- $A_1, \dots, A_n$ כך ש- $\bigcup_i A_i = \Omega$,

$$\text{אזי: } P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P\left(\frac{B}{A_i}\right).$$

נוסחת בייס:

$$P\left(\frac{A_j}{B}\right) = \frac{P(A_j) P\left(\frac{B}{A_j}\right)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P\left(\frac{B}{A_i}\right)}$$

שאלות:

- (1) בשקית סוכריות 4 סוכריות תות ו-3 לימון. מוציאים באקראי סוכריה. אם היא בטעם תות אוכלים אותה ומוציאים סוכריה נוספת, ואם היא בטעם לימון מחזירים אותה לשקית ומוציאים סוכריה נוספת.
 - א. מה ההסתברות שהסוכריה הראשונה שהוצאה בטעם תות והשנייה בטעם לימון?
 - ב. מה ההסתברות שהסוכריה השנייה בטעם לימון?
- (2) באוכלוסייה מסוימת 30% הם ילדים, 50% בוגרים והיתר קשישים. לפי נתוני משרד הבריאות הסיכוי שילד יחלה בשפעת במשך החורף הוא 80%, הסיכוי שמבוגר יחלה בשפעת במשך החורף הוא 40% והסיכוי שקשיש יחלה בשפעת במשך החורף הוא 70%.
 - א. איזה אחוז מהאוכלוסייה הינו קשישים שלא יחלו בשפעת במשך החורף?
 - ב. מה אחוז האנשים שיחלו בשפעת במשך החורף?
 - ג. נבחר אדם שחלה במשך החורף בשפעת, מה ההסתברות שהוא קשיש?
 - ד. נבחר ילד, מה ההסתברות שהוא לא יחלה בשפעת במשך החורף?
- (3) בכד א' 5 כדורים כחולים ו-5 כדורים אדומים. בכד ב' 6 כדורים כחולים ו-4 כדורים אדומים. בוחרים באקראי כד, מוציאים ממנו כדור ומבלי להחזירו מוציאים כדור נוסף.
 - א. מה ההסתברות ששני הכדורים שיוצאו יהיו בצבעים שונים?
 - ב. אם הכדורים שהוצאו הם בצבעים שונים, מה ההסתברות שהכדור השני שהוצא יהיה בצבע אדום?
- (4) חברת סלולר מסווגת את לקוחותיה לפי 3 קבוצות גיל: נוער, בוגרים ופנסיונרים. נתון כי: 10% מהלקוחות בני נוער, 70% מהלקוחות בוגרים והיתר פנסיונרים. מתוך בני הנוער 90% מחזיקים בסמארט-פון, מתוך האוכלוסייה הבוגרת ל-70% יש סמארט-פון ומתוך אוכלוסיית הפנסיונרים 30% מחזיקים בסמארט-פון.
 - א. איזה אחוז מלקוחות החברה הם בני נוער עם סמארט-פון?
 - ב. נבחר לקוח אקראי ונתון שיש לו סמארט-פון. מה ההסתברות שהוא פנסיונר?
 - ג. אם ללקוח אין סמארט-פון, מה ההסתברות שהוא לא בן נוער?

- (5) כדי להתקבל למקום עבודה יש לעבור שלושה מבחנים. המבחנים הם בשלבים, כלומר לאחר כישלון במבחן מסוים אין אפשרות לגשת למבחן הבא אחריו. 70% מהמועמדים עוברים את המבחן הראשון. מתוכם, 50% עוברים את המבחן השני. מבין אלה שעוברים את המבחן השני 40% עוברים את המבחן השלישי.
- א. מה ההסתברות להתקבל לעבודה?
 ב. מועמד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא נכשל במבחן הראשון?
 ג. מועמד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא עבר את המבחן השני?
- (6) משרד הבריאות פרסם את הנתונים הבאים:
- מתוך אוכלוסיית הילדים והנוער 80% חולים בשפעת בזמן החורף.
 מתוך אוכלוסיית המבוגרים (עד גיל 65) 60% חולים בשפעת בזמן החורף.
 30% מהתושבים הם ילדים ונוער. 50% הם מבוגרים. היתר קשישים.
 כמו כן נתון ש 68% מהאוכלוסייה תחלה בשפעת בחורף.
- א. מה אחוז החולים בשפעת בקרב האוכלוסייה הקשישה?
 ב. נבחר אדם שלא חלה בשפעת, מה ההסתברות שהוא לא קשיש?
- (7) רדאר שנמצא על החוף צריך לקלוט אנייה הנמצאת ב-1 מ-4 האזורים: A, B, C, D. אם האנייה נמצאת באזור A הרדאר מזהה אותה בסיכוי 0.8, סיכוי זה פוחת ב-0.1 ככל שהאנייה מתקדמת באזור. כמו כן נתון שבהסתברות חצי האנייה נמצאת באזור D, בהסתברות 0.3 באזור C, באזור B היא נמצאת בסיכוי 0.2, אחרת היא נמצאת באזור A.
- א. מה הסיכוי שהאנייה תתגלה ע"י הרדאר?
 ב. אם האנייה התגלתה ע"י הרדאר, מה ההסתברות שהיא נמצאת באזור C?
 ג. אם האנייה התגלתה ע"י הרדאר, מה הסיכוי שהיא לא נמצאת באזור B?
- (8) סימפטום X מופיע בהסתברות של 0.4 במחלה A, בהסתברות של 0.6 במחלה B ובהסתברות של 0.5 במחלה C. סימפטום X מופיע אך ורק במחלות הללו, אדם לא יכול לחלות ביותר ממחלה אחת מבין המחלות הללו. לקליניקה מגיעים אנשים כדלקמן: 8% חולים במחלה A, 10% במחלה B, 2% במחלה C והיתר בריאים. כמו כן נתון שבמחלה A, סימפטום X מתגלה בסיכוי של 80%, ובמחלות B, C הסימפטום מתגלה בסיכוי של 90% בכל מחלה.
- א. מה ההסתברות שאדם הגיע לקליניקה וגילו אצלו את סימפטום X?
 ב. אם התגלה אצל אדם סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולה במחלה A?
 ג. אם לאדם יש את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולה במחלה A?
 ד. אם לא גילו אצל אדם את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא בריא?

- (9) סטודנט ניגש למבחן אמריקאי. הסיכוי שהוא יודע תשובה לשאלה מסוימת הוא P , ואם הוא לא יודע את התשובה הוא מנחש. בכל מקרה הוא עונה על השאלה. נתון שלשאלה יש k תשובות אפשריות. אם הסטודנט ענה נכון על השאלה, מה הסיכוי שהוא ידע אותה?

תשובות סופיות:

(1)	א. $\frac{2}{7}$	ב. $\frac{23}{49}$
(2)	א. 6%	ב. 58%
(3)	א. 0.544	ב. 0.5
(4)	א. 9%	ב. 0.09375
(5)	א. 0.14	ב. 0.3488
(6)	א. 70%	ב. 0.8125
(7)	א. 0.57	ב. 0.3158
(8)	א. 0.0886	ב. 0.2889
(9)	$\frac{kp}{1+p(k-1)}$	

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 23 - תלות ואי תלות בין מאורעות

תוכן העניינים

1. אי תלות בין מאורעות (מורחב) 85

תלות ואי תלות בין מאורעות:

רקע:

אם מתקיים ש: $P(B|A) = P(B)$, נגיד שמאורע B בלתי תלוי ב- A .

הדבר גורר גם ההפך: $P(A|B) = P(A)$, כלומר, גם A אינו תלוי ב- B .

כשהמאורעות בלתי תלויים מתקיים ש: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

הוכחה לכך: $P(A/B) = P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

נשתמש בנוסחאות של מאורעות בלתי תלויים רק אם נאמר במפורש שהמאורעות בלתי תלויים בתרגיל או שמההקשר אפשר להבין ללא צל של ספק שהמאורעות בלתי תלויים.

למשל,

חוקר מבצע שני ניסויים בלתי תלויים הסיכוי להצליח בניסוי הראשון הנו 0.7 והסיכוי להצליח בניסוי השני הוא 0.4.

א. מה הסיכוי להצליח בשני הניסויים יחדו?

כיוון שהמאורעות הללו בלתי תלויים:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.7 \cdot 0.4 = 0.28$$

ב. מה הסיכוי להיכשל בשני הניסויים?

באופן דומה:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = (1 - 0.7)(1 - 0.4) = 0.18$$

הרחבה: אי תלות בין n מאורעות:

n מאורעות $A_1, \dots, A_n$ הם בלתי תלויים אם ורק אם: $P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$.

שאלות:

- (1) נתון: $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.5$, $P(A \cup B) = 0.6$.
האם המאורעות הללו בלתי תלויים?
- (2) תלמיד ניגש לשני מבחנים שהצלחתם לא תלויה זו בזו.
הסיכוי שלו להצליח במבחן הראשון הוא 0.7 והשני 0.4.
א. מה הסיכוי להצליח בשני המבחנים יחד?
ב. מה הסיכוי שניכשל בשני המבחנים?
- (3) במדינה מסוימת יש 8% אבטלה, נבחרו באקראי שני אנשים מהמדינה.
א. מה ההסתברות ששניהם מובטלים?
ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?
- (4) מוצר צריך לעבור בהצלחה ארבע בדיקות בלתי תלויות לפני שיווק, אחרת הוא נפסל ולא יוצא לשוק. הסיכוי לעבור בהצלחה כל אחת מהבדיקות הוא 0.8. בכל מקרה מבוצעות כל 4 הבדיקות.
א. מה הסיכוי שהמוצר יפסל?
ב. מה ההסתברות שהמוצר יעבור בהצלחה לפחות בדיקה אחת?
- (5) במדינה מסוימת יש 8% אבטלה, נבחרו באקראי חמישה אנשים מהמדינה.
א. מה ההסתברות שכולם מובטלים במדגם?
ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?
- (6) עבור שני מאורעות A ו- B המוגדרים על אותו מרחב מדגם נתון ש:
 $P(A|B) = 0.6$, $P(A \cap \bar{B}) = 0.3$, $P(A \cup B) = 0.9$.
האם A ו- B מאורעות בלתי תלויים?
- (7) הוכיח שאם: $P(A/B) = P(B/A)$, אז: $P(A) = P(B)$.

(8) קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות. נמק!

- א. אם : $P(A \cup B) = P(A) \cdot P(B)$, אזי המאורעות בלתי תלויים.
 ב. מאורע A כלול במאורע B : $0 < P(B) < 1$, $P(A) > 0$, לכן : $P(A/B) < P(A)$.
 ג. A ו- B מאורעות זרים שסיכוייהם חיוביים לכן הם מאורעות תלויים.
 ד. A ו- B מאורעות תלויים שסיכוייהם חיוביים לכן A ו- B מאורעות זרים.
 ה. $\bar{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B)$ לכן A ו- B מאורעות זרים.

(9) זוג מעוניין להביא ילד לעולם, בבדיקה גנטית שהם עשו לאב התגלה שהאב אינו נשא של מחלה Q . מערכים את הסיכוי של האם להיות נשאית למחלה Q להיות 0.2. אם האם נשאית היא תלד בכל פעם ילד חולה בסיכוי 0.5 באופן בלתי תלוי בין הלידות. האם ילדה שני ילדים. האם המאורעות "הילד הראשון בריא" ו-"הילד השני בריא" הם מאורעות בלתי תלויים?

(10) מטילים פעמיים מטבע עם הסתברות p לעץ בכל הטלה, $0 < p < 1$.

A – יצא עץ בהטלה ראשונה.

B – יצאו תוצאות שונות.

עבור איזה ערכים של p המאורעות A ו- B בלתי תלויים?

(11) הוכח אם A ו- B בלתי תלויים, אזי $\bar{A}$, $\bar{B}$ בלתי תלויים.

(12) נתונה מערכת חשמלית שבשרטוט, כל מתג יכול להיות פתוח או סגור

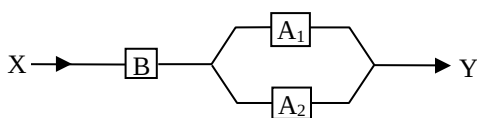
בהסתברויות שונות, אך באופן בלתי תלוי זה בזה.

להלן ההסתברות של כל מתג להיות סגור :

$$P(A_1) = 0.7, P(A_2) = 0.8, P(B) = 0.9$$

א. מה ההסתברות שיעבור זרם במערכת החשמלית?

ב. אם לא עובר זרם במערכת, מה הסיכוי שמתג B סגור?



(13) מטילים שתי קוביות הוגנות. נגדיר שלושה מאורעות :

A – תוצאה של קובייה ראשונה זוגית.

B – תוצאה של קובייה שניה אי זוגית.

C – סכום התוצאות של שתי הקוביות זוגי.

האם המאורעות בלתי-תלויים?

(14) ענה על הסעיפים הבאים:

א. המאורעות A ו- B הם מאורעות זרים של ניסוי כלשהו. חוזרים על אותו ניסוי שוב באופן בלתי תלוי זה בזה. הוכיחו שהסיכוי שמאורע A יתרחש בניסוי לפני שמאורע B יתרחש

$$\frac{P(A)}{P(A) + P(B)}$$

בניסוי הוא:

ב. מטילים קובייה הוגנת פעם אחרי פעם, מה הסיכוי שתתקבל תוצאה זוגית עוד לפני שתתקבל התוצאה 3?

ג. מטילים קובייה הוגנת פעם אחרי פעם, מה הסיכוי שתתקבל תוצאה זוגית עוד לפני שתתקבל תוצאה גדולה מ-4?

תשובות סופיות:

- (1) כן.
- (2) א. 0.28 ב. 0.18
- (3) א. 0.0064 ב. 0.1536
- (4) א. 0.5904 ב. 0.9984
- (5) א. 0.08^5 ב. 0.3409
- (6) לא, הם תלויים.
- (7) שאלת הוכחה.
- (8) א. לא נכון. ב. לא נכון. ג. נכון. ד. לא נכון. ה. נכון.
- (9) תלויים.
- (10) 0.5
- (11) שאלת הוכחה.
- (12) א. 0.846 ב. 0.3506
- (13) תלויים.
- (14) א. שאלת הוכחה. ב. $\frac{3}{4}$ ג. $\frac{1}{2}$

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 24 - שאלות מסכמות בהסתברות

תוכן העניינים

1. כללי 89

שאלות מסכמות בהסתברות:

שאלות:

- (1) נלקחו משפחות שיש להם שתי מכוניות. ל-30% מהמשפחות הללו המכונית הישנה יותר היא מתוצרת אירופה ואצל 60% מהמשפחות הללו המכונית החדשה יותר מתוצרת אירופה. כמו כן 15% מהמשפחות הללו שתי המכוניות הן מתוצרת אירופאית.

 - א. מה ההסתברות שמשפחה אקראית בת שתי מכוניות תהיה ללא מכוניות מתוצרת אירופה?
 - ב. מה ההסתברות שלפחות מכונית אחת תהיה אירופאית?
 - ג. ידוע שלמשפחה יש מכונית אירופאית.
 - ד. אם ההסתברות שרק המכונית החדשה שלה היא מתוצרת אירופאית?
 - ה. אם המכונית הישנה של המשפחה היא אירופאית, מה ההסתברות שגם החדשה אירופאית?
- (2) במדינת "שומקום" 50% מהחלב במרכולים מיוצר במחלבה א', 40% במחלבה ב' והיתר במחלבה ג'. 3% מתוצרת מחלבה א' מגיעה חמוצה למרכולים ואילו במחלבה ב' 10%.

כמו כן ידוע שבמדינת "שומקום" בסך הכול 7.5% מהחלב חמוץ.

 - א. איזה אחוז מהחלב שמגיע למרכול ממחלבה ג' חמוץ?
 - ב. אם נרכש חלב חמוץ במרכול. מה הסיכוי שהוא יוצר במחלבה ג'?
 - ג. ברכישת חלב נמצא שהוא אינו חמוץ. מה הסיכוי שהוא יוצר במחלבה א'?
 - ד. האם המאורעות: "חלב חמוץ" ו-"יוצר במחלבה א'" בלתי תלויים?
- (3) רוני ורונה יצאו לבלות במרכז בילויים עם מספר אפשרויות בילוי: בהסתברות של 0.3 הם ייצאו לבאולינג, בהסתברות של 0.5 הם ייצאו לבית קפה ובהסתברות של 0.7 הם ייצאו לפחות לאחד מהם (באולינג/קפה).

 - א. מה ההסתברות שהם ייצאו רק לבאולינג?
 - ב. האם המאורעות "לצאת לבאולינג" ו-"לצאת לבית קפה" זרים?
 - ג. האם המאורעות "לצאת לבאולינג" ו-"לצאת לבית קפה" תלויים?
 - ד. מה ההסתברות שיום אחד הם ייצאו רק לבאולינג וביום למחרת לא ייצאו לאף אחד מהמקומות?

(4) 70% מהנבחנים בסטטיסטיקה עוברים את מועד א'. כל מי שלא עובר את מועד א' ניגש לעשות מועד ב', מתוכם 80% עוברים אותו. מבין אלה שנכשלים בשני המועדים 50% נרשמים לקורס מחדש, והיתר פורשים מהתואר.

- א. מה הסיכוי שסטודנט אקראי עבר את הקורס?
- ב. אם סטודנט אקראי עבר הקורס, מה הסיכוי שעבר במועד ב'?
- ג. מה אחוז הסטודנטים שפורשים מהתואר?
- ד. נבחרו 2 סטודנטים אקראיים רונית וינאי, מה ההסתברות שרונית עברה במועד א' ושינאי עבר במועד ב'?

(5) באוכלוסייה מסוימת 40% הם גברים והיתר הן נשים. מבין הגברים 10% מובטלים. בסך הכול 13% מהאוכלוסייה מובטלת.

- א. מה אחוז האבטלה בקרב הנשים?
- ב. נבחר אדם מובטל, מה ההסתברות שזו אישה?
- ג. נגדיר את המאורעות הבאים: A - נבחר אדם מובטל, B - נבחר גבר. האם המאורעות הללו זרים? והאם הם בלתי תלויים?

(6) בתיבה 10 מטבעות, מתוכם 7 מטבעות רגילים (ראש, זנב) ו-3 מטבעות שבשני צדדיהם טבוע ראש. אדם בוחר באקראי מטבע ומטיל אותו פעמיים. נסמן ב-A את ההטלה הראשונה ראש, וב-B את ההטלה השנייה ראש.

- א. חשבו את הסיכויים למאורעות A ו-B.
- ב. האם המאורע A ו-B בלתי תלויים?
- ג. ידוע שבהטלה הראשונה התקבל ראש, מה ההסתברות שהמטבע שהוטל הוא מטבע הוגן?

(7) ערן מעוניין למכור את רכבו והוא מפרסם מודעה באינטרנט ומודעה בעיתון. מבין אלה שמעוניינים לרכוש רכב משומש 30% יראו את המודעה באינטרנט, 50% יראו את המודעה בעיתון ו-72% יראו את המודעה בלפחות אחת מהמדיות.

- א. מה אחוז האנשים, מאלה שמעוניינים לרכוש רכב משומש, שיראו את 2 המודעות?
- ב. אם אדם ראה את המודעה באינטרנט, מה ההסתברות שהוא לא ראה את המודעה בעיתון?
- ג. האם המאורעות: "לראות את המודעה באינטרנט" ו-"לראות את המודעה בעיתון" בלתי תלויים?
- ד. אדם שראה את המודעה באינטרנט בלבד יתקשר לערן בהסתברות של 0.7, אם הוא ראה את המודעה בעיתון בלבד הוא יתקשר לערן בהסתברות של 0.6 ואם הוא ראה את שתי המודעות הוא יתקשר לערן בהסתברות של 0.9.
- i. מה ההסתברות שאדם המעוניין לרכוש רכב משומש יתקשר לערן?
- ii. אדם המעוניין לרכוש רכב משומש התקשר לערן. מה ההסתברות שהוא ראה את שתי המודעות?

תשובות סופיות:

1	א. 0.25	ב. 0.75	ג. 0.6	ד. 0.5
2	א. 0.2	ב. 0.267	ג. 0.524	ד. תלויים.
3	א. 0.2	ב. אינם זרים.	ג. תלויים.	ד. 0.06
4	א. 0.94	ב. 0.255	ג. 0.03	ד. 0.168
5	א. 15%	ב. 0.692	ג. לא זרים ותלויים.	
6	א. 0.65	ב. תלויים.	ג. 0.5384	
7	א. 8%	ב. 0.733	ג. תלויים.	ד. i. 0.478
				ד. ii. 0.15

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 25 - המשתנה המקרי הבדיד - פונקציית ההסתברות

תוכן העניינים

1. כללי 92

המשתנה המקרי הבדיד – פונקציית ההסתברות:

רקע:

משתנה מקרי בדיד:

משתנה מקרי בדיד הינו משתנה היכול לקבל כמה ערכים בודדים בהסתברויות שונות.

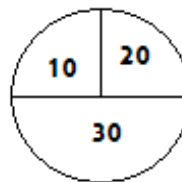
מתארים את המשתנה המקרי על ידי פונקציית ההסתברות.

פונקציית ההסתברות:

פונקציה המתאימה לכל ערך אפשרי של המשתנה את ההסתברות שלה. סכום ההסתברויות על פונקציית ההסתברות חייב להיות 1.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בקזינו יש רולטה כמתואר בשרטוט:



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה ב-ש. בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד.

שאלות:

- (1) ידוע שביישוב מסוים התפלגות מספר המכוניות למשפחה היא:
- 50 משפחות אינן מחזיקות במכונית.
 - 70 משפחות עם מכונית אחת.
 - 60 משפחות עם 2 מכוניות.
 - 20 משפחות עם 3 מכוניות.
- בוחרים באקראי משפחה מהיישוב, נגדיר את X להיות מספר המכוניות של המשפחה שנבחרה. בנו את פונקציית ההסתברות של X .
- (2) מהאותיות: A, B, C יוצרים קוד דו תווי.
- א. כמה קודים ניתן ליצור?
 - ב. רשמו את כל הקודים האפשריים.
 - ג. נגדיר את X להיות מספר הפעמים שהאות B מופיעה בקוד.
- בנו את פונקציית ההסתברות של X .
- (3) תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים: מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. כמו כן, נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8, הסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9 והסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75. יהי X מספר המבחנים שהסטודנט עבר. בנו את פונקציית ההסתברות של X .
- (4) הסיכוי לזכות במשחק מסוים הינו 0.3. אדם משחק את המשחק עד אשר הוא מנצח אך בכל מקרה הוא לא משחק את המשחק יותר מ-4 פעמים. נגדיר את X להיות מספר הפעמים שהוא שיחק את המשחק. בנו את פונקציית ההסתברות של X .
- (5) חברה לניהול פרויקטים מנהלת 3 פרויקטים במקביל. הסיכוי שפרויקט א' יצליח הינו 0.7, הסיכוי שפרויקט ב' יצליח הינו 0.8, והסיכוי שפרויקט ג' יצליח הינו 0.9. נתון שהצלחת כל פרויקט בלתי תלויה זו בזו. נגדיר את X להיות מספר הפרויקטים שיצליחו. בנו את פונקציית ההסתברות של X .
- (6) להלן פונקציית הסתברות של משתנה מקרי כלשהו: $k = 1, 2, \dots, 4$, $P(X = k) = \frac{k}{A}$. מצאו את ערכו של A .

- (7) בסקר שנערך בדקו בקרב אנשים האם הם צופים במהדורת החדשות של ערוצים 1,2,10. להלן הנתונים:
- 20% צופים בערוץ 2.
 - 8% צופים בערוץ 1.
 - 10% צופים בערוץ 10.
 - כמו כן נתון ש 1% צופים בשלושת המהדורות גם יחד.
 - 10% צופים בשתי המהדורות מתוך השלושה.
- נגדיר את X להיות מספר המהדורות מבין 3 המהדורות המדוברות שאדם אקראי צופה. בנו את פונקציות ההסתברות של X .

תשובות סופיות:

(1) להלן טבלה:

3	2	1	0	X
0.1	0.3	0.35	0.25	$P(X)$

(2) להלן טבלה:

2	1	0	X
$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$P(X)$

(3) להלן טבלה:

2	1	0	X
0.75	0.20	0.05	$P(X)$

(4) להלן טבלה:

4	3	2	1	X
0.343	0.147	0.21	0.3	$P(X)$

(5) להלן טבלה:

3	2	1	0	X
0.504	0.398	0.092	0.006	$P(X)$

(6) 10.

(7) להלן טבלה:

4	3	2	1	X
0.01	0.1	0.15	0.74	$P(X)$

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 26 - המשתנה המקרי הבדיד - תוחלת - שונות וסטיית תקן

תוכן העניינים

1. כללי 96

המשתנה המקרי הבדיד – תוחלת, שונות וסטיית תקן:

רקע:

תוחלת:

ממוצע של פונקציית ההסתברות, אם נבצע את התהליך אינסוף פעמים כמה בממוצע נקבל. התוחלת היא צפי של המשתנה המקרי.

$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = \mu \quad \text{הבא :}$$

שונות:

תוחלת ריבועי הסטיות מהתוחלת – נותן אינדיקציה על הפיזור והסיכון של פונקציית ההסתברות.

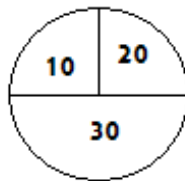
$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) = \sum_i x_i^2 P(x_i) - \mu^2 = \sigma^2 \quad \text{הבא :}$$

סטיית תקן:

שורש של השונות – הפיזור הממוצע הצפוי סביב התוחלת. מסמנים : $STD = \sigma$.

דוגמה:

בקזינו רולטה כמוראה בשרטוט. אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה ב-ש. הסתברות לקבלת הסכומים השונים :



30	20	10	X
0.5	0.25	0.25	$P(X)$

$$E(X) = 10 \cdot 0.25 + 20 \cdot 0.25 + 30 \cdot 0.5 = 22.5 = \mu$$

$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) =$$

$$= (10 - 22.5)^2 \cdot 0.25 + (20 - 22.5)^2 \cdot 0.25 + (30 - 22.5)^2 \cdot 0.5 = 68.75 = \sigma^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{68.75} = 8.29 \quad \text{כדי לחשב את סטיית התקן נוציא שורש לשונות :}$$

שאלות:

- (1) אדם משחק במשחק מזל.
נגדיר את X להיות סכום הזכייה.
להלן פונקציית ההסתברות של X :

40	20	0	-30	X
0.2	0.3	0.1	0.4	$P(X)$

מהי התוחלת, השונות וסטית התקן של X ?

- (2) בישוב מסוים שני סניפי בנק: בנק פועלים ובנק לאומי. מתוך האוכלוסייה הבוגרת בישוב, ל-50% חשבון בנק בסניף הפועלים, ל-40% חשבון בנק בסניף לאומי ול-20% מהתושבים הבוגרים אין חשבון באף אחד מהסניפים.
יהי X מס' סניפי הבנק שלבוגר בישוב יש בהם חשבון.
חשבו את: $E(X)$.

- (3) ידוע של-20% מהמשפחות יש חיבור לווייני בביתם. בסקר אדם מחפש לראיין משפחה המחוברת ללוויין. הוא מטלפן באקראי למשפחה וממשיך עד אשר הוא מגיע למשפחה המחוברת ללוויין. בכל מקרה הסוקר לא יתקשר ליותר מ-5 משפחות. נגדיר את X להיות מספר המשפחות שאליהן האדם יתקשר.
א. בנו את פונקציית ההסתברות של X .
ב. חשבו את התוחלת וסטית התקן של X .

- (4) לאדם צרור מפתחות. בצרור 5 מפתחות אשר רק אחד מתאים לדלת של ביתו. האדם מנסה את המפתחות באופן מקרי. לאחר שניסה מפתח מסוים הוא מוציא אותו מהצרור כדי שלא ישתמש בו שוב.
נסמן ב- X את מספר הניסיונות עד שהדלת תפתח.
א. בנו את פונקציית ההסתברות של X .
ב. חשבו את התוחלת והשונות של X .

(5) נתונה פונקציית ההסתברות של המשתנה המקרי X :

8	6	4	2	X
0.2		0.3		$E(X)$

כמו כן נתון ש: $E(X) = 4.2$.

א. מצאו את ההסתברויות החסרות בטבלה.

ב. חשבו את: $V(X)$.

תשובות סופיות:

(1) תוחלת: 2, שונות: 796

(2) 0.9

(3) א. ראו סרטון. ב. תוחלת: 3.36, סטיית תקן: 1.603

(4) א. ראו טבלה: ב. תוחלת: 3, שונות: 2.

5	4	3	2	1	X
0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	$P(X)$

(5) א. ראו טבלה: ב. 5.16.

8	6	4	2	X
0.2	0.1	0.3	0.4	$P(X)$

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 27 - המשתנה המקרי הבדיד - טרנספורמציה לינארית

תוכן העניינים

1. כללי 99

המשתנה המקרי הבדיד – טרנספורמציה לינארית:

רקע:

טרנספורמציה לינארית היא מצב שבו מבצעים הכפלה של קבוע ו/או הוספה של קבוע על המשתנה המקורי (כולל גם חלוקה של קבוע והחסרה של קבוע).

בניסוח מתמטי נאמר כי אם משתנה אקראי Y מיוצג ע"י משתנה אקראי X כאשר a, b הם קבועים כלשהם: $Y = aX + b$, אזי מתקיימים:

$$E(Y) = aE(X) + b \quad (1)$$

$$V(Y) = a^2 \cdot V(X) \quad (2)$$

$$\sigma_Y = |a| \sigma_X \quad (3)$$

שלבי העבודה:

- (1) נזהה שמדובר בטרנספורמציה לינארית (שינוי קבוע לכל התצפיות).
- (2) נרשום את כלל הטרנספורמציה לפי נתוני השאלה.
- (3) נפשט את הכלל ונזהה את ערכי a ו- b .
- (4) נציב בנוסחאות שלעיל בהתאם למדדים שנשאלים.

דוגמה – הרולטה:

בהמשך לנתוני שאלת הרולטה נתון שעלות השתתפות במשחק 15 ₪. מהי התוחלת והשונות של הרווח במשחק?

פתרון (בהקלטה):

חישובנו קודם ש: $V(X) = 68.75 = \sigma^2$, $E(X) = 22.5 = \mu$.

שאלות:

- (1) סטודנט ניגש ל-5 קורסים הסמסטר. נניח שכל קורס שסטודנט מסיים מזכה אותו ב-4 נקודות אקדמאיות. חשבו את התוחלת והשונות של סך הנקודות שיצבור הסטודנט כאשר נתון שתוחלת מספר הקורסים שיסיים היא 3.5 עם שונות 2.
- (2) תוחלת סכום הזכייה במשחק מזל הינה 10 עם שונות 3. הוחלט להכפיל את סכום הזכייה במשחק. עלות השתתפות במשחק הינה 12. מה התוחלת ומהי השונות של הרווח במשחק?
- (3) תוחלת של משתנה מקרי הינה 10 וסטית התקן 5. הוחלט להוסיף 2 למשתנה ולאחר מכן להעלות אותו ב-10%. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן לאחר השינוי?
- (4) X הינו משתנה מקרי. כמו כן נתון ש- $E(X) = 4$ ו- $V(X) = 3$.
 Y הינו משתנה מקרי חדש, עבורו: $Y = 7 - X$. חשבו את: $E(Y)$ ו- $V(Y)$.
- (5) אדם החליט לבטח את רכבו; שווי הרכב 100,000 ₪ להלן התביעות האפשריות והסתברותן: בהסתברות של 0.001 תהיה תביעה טוטאלוסט (כל שווי הרכב). בהסתברות של 0.02 תהיה תביעה בשווי מחצית משווי הרכב. בהסתברות של 5% תהיה תביעה בשווי רבע משווי הרכב. אחרת אין תביעה בכלל. החברה מאפשרת תביעה אחת בשנה. נסמן ב- X את גובה התביעה השנתית, באלפי₪.
 א. בנו את פונקציית ההסתברות של X .
 ב. חשבו את התוחלת והשונות של גובה התביעה.
 ג. פרמיית הביטוח היא 4,000 ₪.
 מהי התוחלת ומהי השונות של רווח חברת הביטוח לביטוח הרכב הנ"ל?

תשובות סופיות:

- (1) תוחלת: 14, שונות: 32.
- (2) תוחלת: 8, שונות: 12.
- (3) תוחלת: 13.2, סטיית תקן: 5.5.
- (4) תוחלת: 3, שונות: 3.
- (5) א. להלן טבלה: ב. תוחלת: 2350, שונות: $85,727.5^2$.

0	25	50	100	X
0.929	0.05	0.02	0.001	$P(X)$

- ג. תוחלת: 1650, שונות: $85,727.5^2$.

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 28 - תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים

תוכן העניינים

1. כללי 102

תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים:

רקע:

אם: $X_1, X_2, \dots, X_n$ משתנים מקריים אזי:

$$E(T) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

אם: $X_1, X_2, \dots, X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות, אזי:

$$V(T) = V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$$

דוגמה:

אדם משחק בשני משחקי מזל בלתי תלויים. תוחלת סכום הזכייה של המשחק הראשון היא 7 עם סטיית תקן 3. תוחלת סכום הזכייה של המשחק השני היא 2- עם סטיית תקן 4. מה התוחלת ומהי השונות של סכום הזכייה הכולל של שני המשחקים יחד?

שאלות:

(1) הרווח ממניה א' הוא עם תוחלת של 5 ושונות 10. הרווח ממניה ב' הוא עם תוחלת של 4 ושונות. ידוע שההשקעות של שתי המניות בלתי תלויות זו בזו. מה התוחלת והשונות של הרווח הכולל מהשקעה בשתי המניות יחד?

(2) X ו- Y הם משתנים בלתי תלויים, סטיית התקן של X היא 3. סטיית התקן של Y היא 4. מהי סטיית התקן של $X+Y$?

(3) אדם משחק בשני משחקי מזל בלתי תלויים זה בזה:
 X - סכום הזכייה במשחק הראשון.
 Y - סכום הזכייה במשחק השני.
 נתון:

$$\sigma(X) = 3, \quad E(x) = 10$$

$$\sigma(Y) = 4, \quad E(y) = 12$$

מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של סכום הזכייה בשני המשחקים?

(4) ברולטה הסיכוי לזכות ב- 30 ₪ הוא חצי, ב-10 ₪ רבע וכך גם ב-20 ₪. מה היא התוחלת והשונות של סכום הזכייה הכולל לאדם המשחק ברולטה 4 פעמים?

(5) נתון משתנה מקרי בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

$$K = 2, 3, 4, 5, \quad P(X = K) = \frac{A}{K-1}$$

$$0 \text{ אחר } ת$$

מצאו את ערכו של A .

א. חשבו את התוחלת והשונות של X .

ב. נלקחו n משתנים מקריים בלתי תלויים מההתפלגות הנ"ל. בטאו באמצעות n את תוחלת והשונות של סכום המשתנים.

תשובות סופיות:

- (1) תוחלת: 9, שונות: 15.
 - (2) 5.
 - (3) תוחלת: 22, שונות: 5.
 - (4) תוחלת: 90, שונות: 275.
 - (5) א. $A = \frac{12}{25} = 0.48$. ב. תוחלת: 2.92, שונות: 1.1136.
- ג. תוחלת: 2.92, שונות: $1.1136n$.

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 29 - התפלגויות בדידות מיוחדות - התפלגות בינומית

תוכן העניינים

1. כללי 105

התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות בינומית:

רקע:

נגדיר את המושג ניסוי ברנולי :

ניסוי ברנולי הנו ניסוי שיש לו שתי תוצאות אפשריות: "הצלחה" ו"כישלון". למשל מוצר פגום או תקין, אדם עובד או מובטל, עץ או פלי בהטלת מטבע וכדומה. בהתפלגות בינומית חוזרים על אותו ניסוי ברנולי n פעמים באופן בלתי תלוי זה בזה. מגדירים את X להיות מספר ההצלחות שהתקבלו בסך הכול. נסמן ב- P את הסיכוי להצלחה בניסוי בודד, וב- Q את הסיכוי לכישלון בניסוי בודד.

ואז נגיד ש: $X \sim B(n, p)$.

פונקציית ההסתברות של X :

$$P(X = K) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}; \quad n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1; \quad 0! = 1$$

לגודל: $\binom{n}{k}$ ניתן לחשב באמצעות המחשבון.

$$E(X) = np \quad \text{תוחלת:}$$

$$V(X) = npq \quad \text{שונות:}$$

שימו לב, כדי לזהות שמדובר בהתפלגות בינומית צריכים להתקיים כל התנאים הבאים:

- (1) חוזרים על אותו ניסוי ברנולי באופן בלתי תלוי זה בזה.
- (2) חוזרים על הניסוי n פעמים.
- (3) X – מוגדר כמספר ההצלחות המתקבלות בסך הכול.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במדינה מסוימת ל-80% מהתושבים יש רישיון נהיגה. נבחרו 10 תושבים אקראיים מהמדינה.

- א. מה ההסתברות שבדיוק ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?
- ב. מה ההסתברות שלפחות ל-9 מהם יש רישיון נהיגה?
- ג. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר התושבים שנדגמו ושיש להם רישיון נהיגה?

שאלות:

- (1) במדינה 10% מהאוכלוסייה מובטלת. נבחרו 5 אנשים באקראי מאותה אוכלוסייה. נגדיר את X להיות מספר המובטלים שהתקבלו במדגם.
- מהי ההתפלגות של X ?
 - מה ההסתברות שיהיה בדיוק מובטל אחד?
 - מה ההסתברות שכולם יעבדו במדגם?
 - מה ההסתברות ששלושה יעבדו במדגם?
 - מה ההסתברות שלפחות אחד יהיה מובטל?
 - מה תוחלת ומהי השונות של מספר המובטלים במדגם?
- (2) על פי נתוני משרד התקשורת ל-70% מהאוכלוסייה יש סמארטפון. נבחרו 10 אנשים באקראי. נגדיר את X כמספר האנשים שנדגמו עם סמארטפון.
- מהי ההתפלגות של X ? הסבירו.
 - מה ההסתברות שבמדגם ל-8 אנשים יש סמארט-פון?
 - מה ההסתברות שבמדגם לפחות ל-9 יהיו סמארט-פון?
 - מה התוחלת ומה סטיית התקן של מספר האנשים שנדגמו ולהם סמארט-פון?
- (3) בבית הימורים יש שורה של 6 מכונות מזל מאותו סוג. משחק במכונת מזל כזו עולה 5 ₪. ההסתברות לזכות ב-20 ₪ בכל אחת מהמכונות היא 0.1 וההסתברות להפסיד את ההשקעה היא 0.9 בכל מכונה. מהמר נכנס לבית ההימורים ומכניס 5 ₪ לכל אחת מ-6 המכונות.
- מה ההסתברות שיפסיד בכל המכונות?
 - מה ההסתברות שיזכה בדיוק בשתי מכונות?
 - מה ההסתברות שיזכה ביותר כסף מה-30 ₪ שהשקיע?
 - מהן התוחלת וסטיית התקן של הרווח נטו של המהמר (הזכיות בניכוי ההשקעה)?
- (4) במדינה מסוימת התפלגות ההשכלה בקרב האוכלוסייה מעל גיל 30 היא כזו:
- | השכלה | נמוכה | תיכונית | תואר I | תואר II ומעלה |
|-----------|-------|---------|--------|---------------|
| פרופורציה | 0.1 | 0.6 | 0.2 | 0.1 |
- נבחרו 20 אנשים אקראיים מעל גיל 30.
- מה ההסתברות ש-5 מהם אקדמאים?
 - מה התוחלת של מס' בעלי ההשכלה הנמוכה?

- (5) במכללה מסוימת 20% מהסטודנטים גרים בת"א. מבין הסטודנטים שגרים בת"א 30% מגיעים ברכבם, ומבין הסטודנטים שלא גרים בת"א 50% מגיעים ברכבם למכללה.
- א. השומר בשער המכללה בודק לכל סטודנט את תיקו בהיכנסו למכללה. מה ההסתברות שבקרב 5 סטודנטים שנבדקו ע"י השומר רק 1 מתוכם הגיע למכללה ברכבו?
- ב. בהמשך לסעיף הקודם מה ההסתברות שרוב הסטודנטים בקרב ה-5 הגיעו למכללה ברכבם?
- (6) במבחן אמריקאי 20 שאלות. סטודנט ניגש למבחן והסיכוי שהוא יודע שאלה כלשהי הוא 0.8. אם הוא לא יודע הוא מנחש את התשובה. לכל שאלה 4 תשובות אפשריות שרק אחת מהן נכונה.
- א. מה הסיכוי לענות על שאלה מסוימת נכון?
- ב. מה הסיכוי שיענה נכונה על בדיוק 16 שאלות?
- ג. על כל שאלה שענה נכון התלמיד מקבל 5 נקודות, על כל שאלה ששגה מופחתת נקודה, מה התוחלת ומהי השונות של ציון התלמיד?
- (7) 5% מקו היצור פגום. המוצרים נארזים בתוך קופסת קרטון. בכל קופסא 10 מוצרים שונים. הקופסאות נארזות בתוך מכולה. בכל מכולה 20 קופסאות.
- א. מה ההסתברות שבקופסא אקראית לפחות מוצר פגום אחד?
- ב. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר הקופסאות במכולה בהן לפחות מוצר פגום אחד?
- (8) מטבע הוגן מוטל 5 פעמים. נגדיר את X כמספר הפעמים שהתקבל עץ. חשבו את: $E(X^2)$.

תשובות סופיות:

- (1) א. $X \sim B(n=5, p=0.1)$ ב. 0.32805 ג. 0.59049
 ד. 0.0729 ה. 0.40954 ו. תוחלת: 0.5, שונות: 0.45
- (2) א. 0.5314 ב. 0.2335 ג. 0.1493 ד. תוחלת: 7, סטיית תקן: 1.449
- (3) א. 0.5314 ב. 0.0984 ג. 0.1143 ד. תוחלת: 18-, סטיית תקן: 14.697
- (4) א. 0.1789 ב. 2
- (5) א. 0.1956 ב. 0.4253
- (6) א. 0.85 ב. 0.182 ג. תוחלת: 82, שונות: 91.8
- (7) א. 0.401 ב. תוחלת: 8.025, סטיית תקן: 2.193
- (8) 7.5

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 30 - התפלגויות בדידות מיוחדות- התפלגות פואסונית

תוכן העניינים

1. כללי..... 109

התפלגויות בדידות מיוחדות – התפלגות פואסונית:

רקע:

התפלגות פואסונית היא התפלגות שמאפיינת את מספר האירועים שמתרחשים ביחידת זמן.

λ - פרמטר המאפיין את ההתפלגות הנ"ל. הפרמטר מייצג את קצב האירועים ביחידת זמן. כלומר, כמה אירועים בממוצע קורים ביחידת זמן: $X \sim \text{pois}(\lambda)$.
התפלגות פואסונית חייבת להופיע כנתון בשאלה ולכן לא יהיה צורך לזהותה.

פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הפואסונית נתונה:

$$P(X = K) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^K}{K!}, \quad K = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

התוחלת והשונות של ההתפלגות:

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

תכונות מיוחדות של ההתפלגות:

- בהתפלגות הזו הפרמטר λ פרופורציונלי לאינטרוול הזמן שעליו דנים.
- אינטרוולי זמן לא חופפים בלתי תלויים זה בזה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במוקד טלפוני מתקבלות פניות בקצב של 5 פניות לדקה. מספר הפניות בדקה מתפלג פואסונית.

- א. מה ההסתברות שבדקה כלשהי תתקבל פניה 1?
- ב. מה ההסתברות שבשתי דקות יגיעו 12 פניות?
- ג. מה ההסתברות שבדקה אחת תגיע פניה 1 ובשתי דקות שלאחר מכן 12 פניות?
- ד. מה התוחלת וסטיית התקן של מספר הפניות בדקה?

שאלות:

- (1) במוקד טלפוני מתקבלות פניות בקצב של 5 פניות לדקה. מספר הפניות בדקה מתפלג פואסונית.
 - א. מה ההסתברות שבדקה תתקבל פניה 1?
 - ב. מה ההסתברות שבדקה תתקבל לפחות פניה 1?
 - ג. מה ההסתברות שבדקה יתקבלו לכל היותר 2 פניות?
 - ד. מה שונות מספר הפניות בדקה?
- (2) מספר הטעויות לעמוד בעיתון מתפלג פואסונית עם ממוצע של 4 טעויות לעמוד. בחלק מסוים של עיתון ישנם 5 עמודים.
 - א. מה ההסתברות שבחלק זה ישנן בדיוק 18 טעויות?
 - ב. אם בעמוד הראשון אין טעויות, מה ההסתברות שבסך הכול בחלק ישנן 15 טעויות?
 - ג. אם בחלק של העיתון נמצאו בסך הכול 18 טעויות, מה ההסתברות ש-5 מהן בעמוד הראשון?
- (3) מספר תאונות הדרכים הקטלניות במדינת ישראל מתפלג פואסונית עם סטיית תקן של 2 תאונות לשבוע.
 - א. מה תוחלת מספר התאונות בשבוע?
 - ב. מהי ההסתברות שבחודש (הניחו שבחודש יש 4 שבועות) יהיה בדיוק שבוע אחד בו יהיו 3 תאונות דרכים קטלניות?
- (4) לחנות AM:PM השכונתית מספר הלקוחות שנכנסים מתפלג פואסונית עם ממוצע של 2 לקוחות לדקה.
 - א. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יהיו בדיוק 3 לקוחות?
 - ב. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יגיח לפחות לקוח אחד?
 - ג. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יהיו לכל היותר שני לקוחות?
 - ד. מהי התוחלת ומה סטיית התקן של מספר הלקוחות שנכנסים לחנות בדקה?
- (5) מספר הלידות בבית חולים מתפלג פואסונית עם תוחלת של 8 לידות ביום.
 - א. מה ההסתברות שביום א' נולדו 10 תינוקות וביום ב' נולדו 7 תינוקות?
 - ב. מיילדת עובדת במשמרות של 8 שעות. מה ההסתברות שבמשמרת שלה נולדו 3 תינוקות?
 - ג. מהי התוחלת של מספר הימים בשבוע בהם נולדים ביום עשרה תינוקות?

תשובות סופיות:

(1	א. 0.0337	ב. 0.9933	ג. 0.1246	ד. 5.
(2	א. 0.084	ב. 0.099	ג. 0.151	
(3	א. 4.	ב. 0.407		
(4	א. 0.1804	ב. 0.8647	ג. 0.6767	ד. תוחלת : 2, סטיית תקן : 1.41.
(5	א. 0.0139	ב. 0.2196	ג. 0.6948	

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 31 - התפלגות מולטינומית

תוכן העניינים

1. כללי 112

התפלגות מולטינומית:

רקע:

ההתפלגות המולטינומית היא התפלגות רב-ממדית, המציינת את תוצאות סדרה של n ניסויים בלתי תלויים. לכל ניסוי r תוצאות אפשריות עם סדרת הסתברויות

הצלחה: $(p_1, p_2, \dots, p_r)$ כאשר מתקיים ש: $\sum_{i=1}^r p_i = 1$.

עבור: $i = 1, 2, \dots, r$, הרכיבו Y_i של המשתנה המולטינומי מציין את מספר הפעמים

בהן נתקבלה התוצאה ה- i , כאשר: $\sum_{i=1}^r Y_i = n$.

בצורה כללית ניתן לרשום את ההתפלגות המולטינומית באופן הבא:

$$Y \sim \text{multi}(n, p_1, p_2, \dots, p_r)$$

פונקציית ההסתברות המשותפת הרב מימדית היא:

$$P(Y_1 = y_1, \dots, Y_r = y_r) = \binom{n}{y_1, y_2, \dots, y_r} \cdot p_1^{y_1} \cdot p_2^{y_2} \cdot \dots \cdot p_r^{y_r} = \frac{n!}{y_1! \cdot y_2! \cdot \dots \cdot y_r!} p_1^{y_1} \cdot p_2^{y_2} \cdot \dots \cdot p_r^{y_r}$$

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

להלן תוצאות ההצבעה לעיר "מטושן":

המועמד	% מצביעים
טד סול	62%
בוב שפירו	12%
דורית מון	26%

נבחרו באקראי, ועם החזרה, 8 מצביעים מהעיר מטושן.

א. מה ההסתברות ש-4 מהם יצביעו עבור טד סול, 1 עבור בוב שפירו והיתר עבור דורית מון?

ב. רשמו את פונקציית ההסתברות המשותפת של מספר מצביעים במדגם לכל מתמודד.

שאלות:

- (1) בכד 2 כדורים ירוקים, 4 כדורים כחולים ו-4 אדומים. נשלפו באקראי ועם החזרה בין כדור לכדור 12 כדורים. חשבו את ההסתברויות הבאות:
- א. 3 כדורים יהיו ירוקים ו-5 כדורים יהיו כחולים.
 - ב. 3 כדורים יהיו ירוקים.
 - ג. אם נתון שהוצאו 3 כדורים ירוקים, מה הסיכוי שהוצאו 5 כחולים?
- (2) נטיל קובייה הוגנת 10 פעמים.
- א. מה הסיכוי לקבל פעם אחת את התוצאה 1, פעמיים את התוצאה 2 ושלוש פעמים את התוצאה 3?
 - ב. מצאו את התוחלת והשונות של מספר הפעמים שתקבל התוצאה 1?
- (3) X הינו משתנה מקרי המתפלג מולטינומי כאשר:
- $$p_1 = 0.5, p_2 = 0.3, p_3 = 0.2, n = 20$$
- X_i הוא מספר הניסויים שבהם התקבלה התוצאה i כאשר: $i = 1, 2, 3$.
- א. כיצד X_2 מתפלג?
 - ב. כיצד $X_2 + X_3$ מתפלג?
 - ג. האם X_1 ו- X_2 הינם משתנים בלתי תלויים?
 - ד. כיצד $X_2 | X_1 = 5$ מתפלג?
- (4) X הינו משתנה מקרי המתפלג מולטינומי.
- א. יש להוכיח שלכל $i \neq j$ מתקיים ש: $COV(X_i, X_j) = -n \cdot p_i \cdot p_j$.
 - ב. מהו מקדם המתאם בין X_i, X_j ? בטאו התשובה באמצעות n, p_i, p_j .

תשובות סופיות:

- (1) א. 0.0581 ב. 0.2362 ג. 0.246
- (2) א. 0.0169 ב. תוחלת: $\frac{5}{3}$, שונות: $\frac{25}{18}$
- (3) א. בינומי עם $n = 20, p = 0.3$ ב. בינומי עם $n = 20, p = 0.5$
- ג. לא. ד. בינומי עם $n = 20, p = 0.6$
- (4) א. הוכחה. ב. $-\sqrt{\frac{p_i \cdot p_j}{(1-p_i) \cdot (1-p_j)}}$

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 32 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות נורמלית

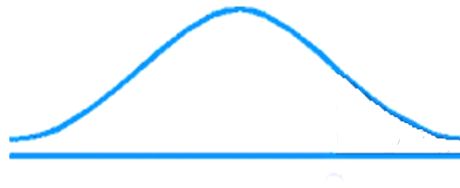
תוכן העניינים

1. כללי 115

התפלגויות רציפות מיוחדות – התפלגות נורמלית:

רקע:

התפלגות נורמלית הינה התפלגות של משתנה רציף. ישנם משתנים רציפים מסוימים שנהוג להתייחס אליהם כנורמליים כגון: זמן ייצור, משקל תינוק ביום היוולדו ועוד. פונקציית הצפיפות של ההתפלגות הנורמלית נראית כמו פעמון:



לעקומה זו קוראים גם עקומת גאוס ועקומה אחת נבדלת מהשנייה באמצעות הממוצע וסטיית התקן שלה.

אלה הם הפרמטרים שמאפיינים את ההתפלגות: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

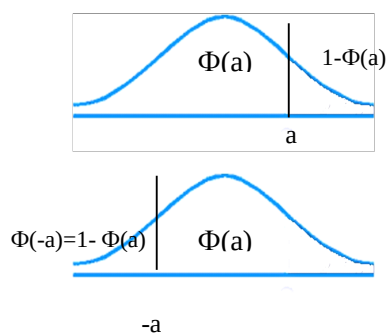
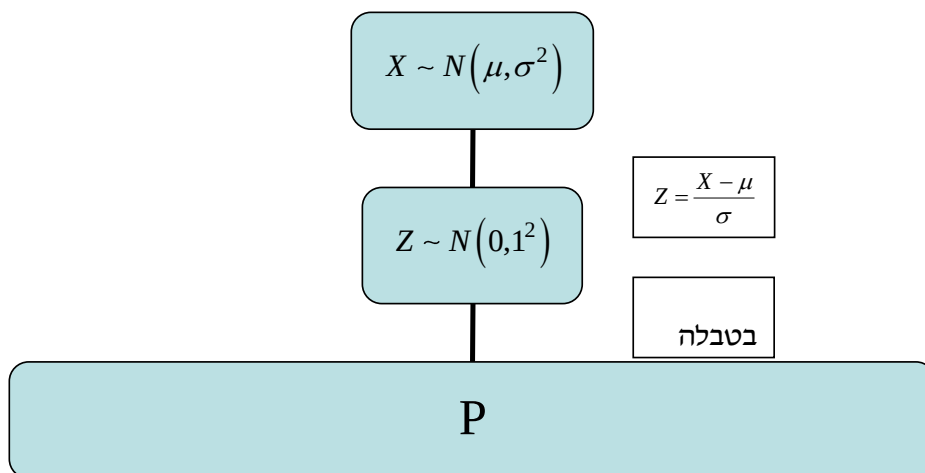
$$\text{נוסחת פונקציית הצפיפות: } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

כדי לחשב הסתברויות בהתפלגות נורמלית יש לחשב את השטחים הרלוונטיים שמתחת לעקומה. כדי לחשב שטחים אלה נמיר כל התפלגות נורמלית להתפלגות נורמלית סטנדרטית על ידי תהליך הנקרא תקנון. התפלגות נורמלית סטנדרטית היא התפלגות נורמלית שהממוצע שלה הוא אפס וסטיית התקן היא אחת, והיא תסומן באות Z : $Z \sim N(0, 1^2)$.

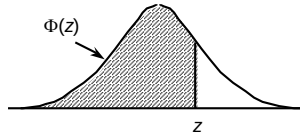
$$\text{תהליך התקנון מבוצע על ידי הנוסחה הבאה: } Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

אחרי תקנון מקבלים ערך הנקרא ציון תקן. ציון התקן משמעו בכמה סטיות תקן הערך סוטה מהממוצע.

לאחר חישוב ציון התקן של ערך מסוים נעזרים בטבלה של ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית לחישוב השטח הרצוי, ובאופן כללי נתאר את הסכמה הבאה:



טבלת ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית – ערכי $\Phi(z)$:



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$\Phi(z)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

משקל חפיסות שוקולד המיוצרות בחברה מתפלג נורמלית עם ממוצע 100 גרם בסטיית תקן של 8 גרם.

- (1) מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מתחת ל-110 גרם?
- (2) מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מעל 110 גרם?
- (3) מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מתחת ל-92 גרם?
- (4) מהו המשקל ש-90% מהחפיסות בקו הייצור שוקלים פחות מהם?

שאלות:

(1) הגובה של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 170 ס"מ וסטית תקן של 10 ס"מ.

- א. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל-182.4 ס"מ?
- ב. מה אחוז האנשים שגובהם מעל 190 ס"מ?
- ג. מה אחוז האנשים שגובהם בדיוק 173.6 ס"מ?
- ד. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל-170 ס"מ?
- ה. מה אחוז האנשים שגובהם לכל היותר 170 ס"מ?

(2) נתון שהזמן שלוקח לתרופה מסוימת להשפיע מתפלג נורמלית עם ממוצע של 30 דקות ושונות של 9 דקות רבועות.

- א. מהי פרופורציית המקרים בהן התרופה תעזור אחרי יותר משעה?
- ב. מה אחוז מהמקרים שבהן התרופה תעזור בין 35 ל-37 דקות?
- ג. מה הסיכוי שהתרופה תעזור בדיוק תוך 36 דקות?
- ד. מה שיעור המקרים שבהן ההשפעה של התרופה תסטה מ-30 דקות בפחות מ-3 דקות?

(3) המשקל של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 60 ק"ג וסטיית תקן של 8 ק"ג.

- א. מה אחוז האנשים שמשקלם נמוך מ-55 ק"ג?
- ב. מהי פרופורציית האנשים באוכלוסייה שמשקלם לפחות 50 ק"ג?
- ג. מהי השכיחות היחסית של האנשים באוכלוסייה שמשקלם בין 60 ל-70 ק"ג?
- ד. לאיזה חלק מהאוכלוסייה משקל הסוטה מהמשקל הממוצע בלא יותר מ-4 ק"ג?
- ה. מה הסיכוי שאדם אקראי ישקול מתחת ל-140 ק"ג?

(4) משקל תינוקות ביום היוולדם מתפלג נורמלית עם ממוצע של 3300 גרם וסטית תקן 400 גרם.

- א. מצאו את העשירון העליון.
- ב. מצאו את האחוזון ה-95.
- ג. מצאו את העשירון התחתון.

- (5) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמלית עם ממוצע 100 ושונות 225.
- א. מה העשירון העליון של הציונים במבחן האינטליגנציה?
 - ב. מה העשירון התחתון של ההתפלגות?
 - ג. מהו הציון ש-20% מהנבחנים מקבלים מעליו?
 - ד. מהו האחוזון ה-20?
 - ה. מהו הציון ש-5% מהנבחנים מקבלים מתחתיו?
- (6) נפח משקה בבקבוק מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 20 מ"ל, ונתון ש-33% מהבקבוקים בעלי נפח שעולה על 508.8 מ"ל.
- א. מה ממוצע נפח משקה בבקבוק?
 - ב. 5% מהבקבוקים המיוצרים עם הנפח הגבוה ביותר נשלחים לבדיקה, החל מאיזה נפח שולחים בקבוק לבדיקה?
 - ג. 1% מהבקבוקים עם הנפח הקטן ביותר נתרמים לצדקה, מהו הנפח המקסימלי לצדקה?
- (7) אורך חיים של מכשיר מתפלג נורמלית. ידוע שמחצית מהמכשירים חיים פחות מ-500 שעות, כמו כן ידוע ש-67% מהמכשירים חיים פחות מ-544 שעות.
- א. מהו ממוצע אורך חיי מכשיר?
 - ב. מהי סטית בתקן של אורך חיי מכשיר?
 - ג. מה הסיכוי שמכשיר אקראי יחיה פחות מ-460 שעות?
 - ד. מהו המאיון העליון של אורך חיי מכשיר?
 - ה. 1% מהמכשירים בעלי אורך החיים הקצר ביותר נשלח למעבדה לבדיקה מעמיקה. מהו אורך החיים המקסימלי לשליחת מכשיר למעבדה?
- (8) להלן שלוש התפלגויות נורמליות של שלוש קבוצות שונות ששורטטו באותה מערכת צירים. ההתפלגויות מוספרו כדי להבדיל ביניהן.
- א. לאיזו התפלגות הממוצע הגבוה ביותר?
 - ב. במה מבין המדדים הבאים התפלגות 1 ו-2 זהות?
 - i. בעשירון העליון.
 - ii. בממוצע.
 - iii. בשונות.
 - ג. לאיזו התפלגות סטיית התקן הקטנה ביותר?
 - i. 1.
 - ii. 2.
 - iii. 3.
 - iv. אין לדעת.



- (9)** הזמן שלוקח לאדם להגיע לעבודתו מתפלג נורמלית עם ממוצע של 40 דקות וסטית תקן של 5 דקות.
- א. מה ההסתברות שמשך הנסיעה של האדם לעבודתו יהיה לפחות שלושת רבעי השעה?
- ב. אדם יצא לעבודתו בשעה 08:10 מביתו. הוא צריך להגיע לעבודתו בשעה 09:00. מה הסיכוי שיאחר לעבודתו?
- ג. אם ידוע שזמן נסיעתו לעבודה היה יותר משלושת רבעי השעה. מה ההסתברות שזמן הנסיעה הכולל יהיה פחות מ-50 דקות?
- ד. מה הסיכוי שבשבוע (חמישה ימי עבודה) בדיוק פעם אחת יהיה זמן הנסיעה לפחות שלושת רבעי השעה?
- (10)** ההוצאה החודשית לבית אב בעיר "טרירה" מתפלגת נורמלית עם ממוצע של 2000 דולר וסטית תקן של 300 דולר. בחרו באקראי 5 בתי אב. ההסתברות שלפחות אחד מהם מוציא בחודש מעל ל- T דולר היא 0.98976.
- א. מה ערכו של T ?
- ב. מה הסיכוי שההוצאה החודשית של בית אב בעיר תהיה לפחות סטיית תקן אחת מעל T ?
- ג. מסתבר שנפלה טעות בנתונים, ויש להוסיף 100 דולר להוצאות החודשית של כל בתי האב בעיר. לאור זאת, מה ההסתברות שההוצאה החודשית של בית אב נמוכה מ-1800 דולר?
- (11)** אורך שיר אקראי המשודר ברדיו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 3.5 דקות וסטית תקן של שלושים שניות.
- א. מה ההסתברות שאורך של שיר אקראי המנוגן ברדיו יהיה בין 3 ל-2.5 דקות?
- ב. מהו הטווח הבין רבעוני של אורך שיר המשודר ברדיו?
- ג. ביום מסוים מנוגנים 200 שירים ברדיו. כמה שירים מתוכם תצפה שיהיו באורך הנמוך מ-3.5 דקות?
- ד. בשעה מסוימת שודרו 8 שירים. מה ההסתברות שרבע מהם בדיוק היו ארוכים מ-4 דקות והיתר לא?

תשובות סופיות:

1	א. 89.25%	ב. 2.28%	ג. 0.	ד. 50%	ה. 50%
2	א. 0%	ב. 3.76%	ג. 0%	ד. 68.26%	
3	א. 26.43%	ב. 89.44%	ג. 39.44%	ד. 0.383	
	ה. 100%				
4	א. 3812.8	ב. 3958	ג. 2787.2		
5	א. 119.2	ב. 80.8	ג. 112.6	ד. 87.4	
6	א. 500	ב. 532.9	ג. 453.48		
7	א. 500	ב. 100	ג. 0.3446	ד. 733	
	ה. 267				
8	א. 3	ב. בממוצע.	ג. 1		
9	א. 0.1587	ב. 0.0228	ג. 0.8563	ד. 0.3975	
10	א. 1925	ב. 0.2266	ג. 0.1587		
11	א. 0.1359	ב. 0.675	ג. 100	ד. 0.25	

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 33 - הסקה סטטיסטית - הקדמה

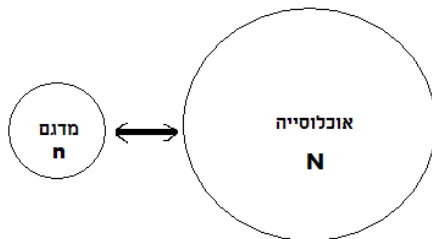
תוכן העניינים

1. כללי..... 123

הסקה סטטיסטית – הקדמה:

רקע:

אוכלוסייה:



קבוצה שאליה מפנים שאלה מחקרית. למשל, חברת תרופות שמעוניינת לפתח תרופה למחלת הסוכרת מתעניינת באוכלוסיית חולי הסוכרת בעולם.

מדגם:

חלק מתוך האוכלוסייה. למשל, אם נדגום באקראי 10 אנשים מתוך חולי הסוכרת אז זהו מדגם מתוך אוכלוסיית חולי הסוכרת.

במקרים רבים אין אפשרות לחקור את כל האוכלוסייה כיוון שאין גישה לכולה, היא גדולה מידי, אנו מוגבלים בזמן ובאמצעים טכניים ולכן מבצעים מדגם במטרה לבצע הסקה סטטיסטית מהמדגם לאוכלוסייה. הדגימה בקורס תהיה דגימה מקרית - הכוונה לדגימה שבה לכל תצפית באוכלוסייה יש את אותו סיכוי להיכלל במדגם.

סטטיסטי:

גודל המחושב על המדגם.

פרמטר:

גודל המתאר את האוכלוסייה.

הסימונים לפרמטר וסטטיסטי הם שונים:

סטטיסטי (מדגם)	פרמטר (אוכלוסייה)	ממוצע
$\bar{X}$	μ	
$\hat{p}$	P	פרופורציה (שכיחות יחסית)

פרמטר הוא גודל קבוע גם אם אנו לא יודעים אותו סטטיסטי הוא משתנה ממדגם למדגם ולכן יש לו התפלגות הנקראת התפלגות הדגימה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

25% מאזרחי המדינה תומכים בהצעת החוק של חבר כנסת מסוים. הוחלט לדגום 200 אזרחים ומתוכם לבדוק מהו אחוז התומכים בהצעת החוק.

א. מי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מה הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

ה. מהו הסטטיסטי שמתכננים להוציא מהמדגם?

ו. האם הפרמטר או הסטטיסטי הוא משתנה מקרי?

שאלות:

- (1) מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.
- מי האוכלוסייה?
 - מה המשתנה?
 - מהם הפרמטרים?
 - מהו גודל המדגם?
- (2) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה ב"העוגן". נגדיר את X להיות מספר המקלטים של משפחה אקראית. מתכננים לדגום מאוכלוסייה זו 4 משפחות ולהתבונן בממוצע מספר מקלטי הטלוויזיה במדגם.
- מיהי האוכלוסייה ומהו המשתנה הנחקר?
 - מהו הסטטיסטי שיילקח מהמדגם ומה סימונו?

מספר המשפחות	מספר מקלטים
50	0
250	1
350	2
300	3
50	4
סך הכול $N = 1000$	

- (3) נתון כי 20% מהשכירים במדינה הם אקדמאיים. נבחרו באקראי 10 שכירים באותה אוכלוסייה ומתכננים לפרסם את מספר האקדמאיים שנדגמו.
- מיהי האוכלוסייה?
 - מה המשתנה באוכלוסייה?
 - מהם הפרמטרים?
 - מהו הסטטיסטי?

תשובות סופיות:

- (1) א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון. ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15. ד. 2.
- (2) א. האוכלוסייה: 1000 משפחות ב"העוגן, המשתנה הנחקר: מס' מקלטים. ב. $\bar{X}$ = ממוצע מדגם.
- (3) א. השכירים במדינה. ב. השכלה: אקדמאי, לא אקדמאי. ג. שיעור ההצלחות באוכלוסייה: 0.2. ג. מס' האקדמאים במדגם.

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 34 - התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי

תוכן העניינים

1. התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי.....126
2. התפלגות מספר ההצלחות במדגם - קירוב נורמלי להתפלגות הבינומית.....133

התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי:

רקע:

בפרק זה נדון בהתפלגות של ממוצע המדגם: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$.

מכיוון שממדגם למדגם אנו יכולים לקבל ממוצע מדגם שונה, אזי ממוצע המדגם הוא משתנה מקרי ויש לו התפלגות.

גדלים המתארים התפלגות כלשהי או אוכלוסייה כלשהי נקראים פרמטרים.

להלן רשימה של פרמטרים החשובים לפרק זה:

ממוצע האוכלוסייה נסמן ב- μ (נקרא גם תוחלת).

שונות אוכלוסייה נסמן ב- σ^2 .

סטיית תקן של אוכלוסייה: σ .

תכונות התפלגות:

ממוצע כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לממוצע האוכלוסייה: $E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \mu$.

שונות כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לשונות האוכלוסייה מחולק ב- n .

תכונה זו נכונה רק במדגם מקרי: $V(\bar{x}) = \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$.

יש יחס הפוך בין גודל המדגם לבין שונות ממוצעי המדגם.

אם נוציא שורש לשונות נקבל סטיית תקן של ממוצע המדגם שנקראת גם

טעות תקן: $\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

השכר הממוצע במשק הינו 9000 ₪ עם סטיית תקן של 4000. דגמו באקראי 25 עובדים.

א. מיהי אוכלוסיית המחקר? מהו המשתנה הנחקר?

ב. מהם הפרמטרים של האוכלוסייה?

ג. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?

דגימה מהתפלגות נורמאלית:

אם נדגום מתוך אוכלוסייה שהמשתנה בה מתפלג נורמאלית עם ממוצע μ ושונות σ^2 .

$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \quad Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

ממוצע המדגם גם יתפלג נורמאלית:

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.
מה ההסתברות שבמדגם של 4 תינוקות אקראיים בעת הולדתם המשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-3.5 ק"ג?

משפט הגבול המרכזי:

אם אוכלוסייה מתפלגת כלשהו עם ממוצע μ ושונות σ^2 אזי עבור מדגם מספיק

$$\bar{x} \rightsquigarrow N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad (n \geq 30)$$

ממוצע המדגם מתפלג בקירוב נורמאלי:

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם וסטיית תקן של 4 גרם.
דגמו מקו הייצור 36 חפיסות שוקולד אקראיות.
מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד שנדגמו יהיה מתחת ל-102 גרם?

שאלות:

- (1) מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.
- מיהי האוכלוסייה?
 - מה המשתנה?
 - מהם הפרמטרים?
 - מהו גודל המדגם?
 - מהו תוחלת ממוצע המדגם?
 - מהי טעות התקן?

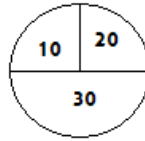
- (2) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה למשפחה ביישוב מסוים:

מספר המשפחות	מספר מקלטים
500	0
2500	1
3500	2
3000	3
500	4
סך הכול $N = 10000$	

- בנו את פונקציית ההסתברות של X .
 - חשבו את התוחלת, השונות וסטיית התקן של X .
 - אם נדגום 4 משפחות מהישוב עם החזרה מה תהיה התוחלת, מהי השונות ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?
- (3) אם נטיל קובייה פעמיים ונתבונן בממוצע התוצאות שיתקבלו, מה תהיה התוחלת ומה תהיה סטיית התקן של ממוצע זה?
- (4) משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.
- מה ההסתברות שתינוק אקראי בעת הלידה ישקול פחות מ-3800 גרם?
- נתון כי ביום מסוים נולדו 4 תינוקות.
- מה ההסתברות שהמשקל הממוצע שלהם יעלה על 4 ק"ג?
 - מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-2.5 ק"ג?
 - מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה רחוק מהתוחלת בלא יותר מ-50 גרם?
 - הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם היה מדובר על יותר מ-4 תינוקות?

- (5) הגובה של המתגייסים לצה"ל מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 175 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ. ביום מסוים התגייסו 16 חיילים.
- א. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה לפחות 190 ס"מ?
 - ב. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה בדיוק 180 ס"מ?
 - ג. מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יסטה מתוחלת הגבהים בפחות מ-5 ס"מ?
 - ד. מהו הגובה שבהסתברות של 90% הגובה הממוצע של המדגם יהיה נמוך ממנו?
- (6) הזמן הממוצע שלוקח לאדם להגיע לעבודתו 30 דקות עם שונות של 16 דקות רבועות. האדם נוסע לעבודה במשך שבוע 5 פעמים.
- לצורך הפתרון הניחו שזמן הנסיעה לעבודה מתפלג נורמאלית.
- א. מה ההסתברות שבמשך שבוע משך הנסיעה הממוצע יהיה מעל 33 דקות?
 - ב. מהו הזמן שבהסתברות של 90% ממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה גבוה ממנו?
 - ג. מה ההסתברות שממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה מרוחק מ-30 דקות בלפחות 2 דקות?
 - ד. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם האדם היה נוסע לעבודה 6 פעמים בשבוע?
- (7) נפח היין בבקבוק מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 750 סמ"ק וסטיית תקן של 10 סמ"ק.
- א. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה בדיוק 755 סמ"ק?
 - ב. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה יותר מ-755 סמ"ק?
 - ג. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה לפחות 755 סמ"ק?
 - ד. בקבוקי היין שבארגז נמזגים לקערה עם קיבולת של שלושה ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהקערה?
- (8) משתנה מתפלג נורמאלית עם תוחלת 80 וסטיית תקן 4.
- א. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה כאשר גודל המדגם הוא 9?
 - ב. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה שגודל המדגם הוא 16?
 - ג. הסבר את ההבדל בתשובות של שני הסעיפים.

9) בקזינו ישנה רולטה. על הרולטה רשומים המס' הבאים כמוראה בשרטוט:



- אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה.
- א. בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד.
- ב. מה התוחלת ומה השונות של סכום הזכייה?
- ג. אם האדם ישחק את המשחק 5 פעמים מה התוחלת ומה השונות של ממוצע סכום הזכייה בחמשת המשחקים?
- ד. אם האדם משחק את המשחק 50 פעם מה ההסתברות שבסה"כ יזכה ב-1050 ₪ ומעלה?

10) לפי הערכות הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה השכר הממוצע במשק הוא 8000 ₪ עם סטיית תקן של 3000 ₪. מה ההסתברות שבמדגם מקרי של 100 עובדים השכר הממוצע יהיה יותר מ-8500 ₪?

11) קובייה הוטלה 50 פעמים. מה ההסתברות שהממוצע של התוצאות יהיה לפחות 3.72?

- 12) אורך צינור שמפעל מייצר הינו עם ממוצע של 70 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ.
- א. נלקחו באקראי 100 מוטות, מה ההסתברות שממוצע אורך המוטות יהיה בין 68 ל-78 ס"מ?
- ב. יש לחבר 2 בניינים באמצעות מוטות. המרחק בין שני הבניינים הינו 7200 ס"מ. מה ההסתברות ש-100 המוטות יספיקו למלאכה?
- ג. מה צריך להיות גודל המדגם המינימאלי, כדי שבהסתברות של 5% ממוצע המדגם יהיה קטן מ-69 ס"מ. היעזרו במשפט הגבול המרכזי.

13) נתון משתנה מקרי בדיד בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

2	4	6	8	X
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$P(X)$

מתוך התפלגות זו נלקח מדגם מקרי בגודל 50. מה הסיכוי שממוצע המדגם יהיה קטן מ-5?

(14) נתון ש- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. דגמו 5 תצפיות מאותה התפלגות והתבוננו בממוצע

המדגם $\bar{X}$ לכן: $P(\bar{X} > \mu)$ יהיה (בחרו בתשובה הנכונה):

- א. 0.
- ב. 0.5.
- ג. 1.
- ד. לא ניתן לדעת.

(15) נתון ש- X מתפלג כלשהו עם תוחלת μ ושונות σ^2 .
החליטו לבצע מדגם בגודל 200 מתוך ההפלגות הנתונה לפי משפט הגבול המרכזי מתקיים (בחרו בתשובה הנכונה):

- א. $X \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$.
- ב. $\mu \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$.
- ג. $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$.
- ד. $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$.

(16) נתון ש- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. אם נדגום n תצפיות מתוך ההתפלגות ונגדיר: $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$,

אזי (בחרו בתשובה הנכונה):

- א. μ ו- $\bar{X}$ יהיו משתנים מקריים.
- ב. μ יהיה משתנה מקרי ו- $\bar{X}$ קבוע.
- ג. $\bar{X}$ יהיה משתנה מקרי ו- μ קבוע.
- ד. μ ו- $\bar{X}$ יהיו קבועים.

תשובות סופיות:

- (1) א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון.
ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15.
ה. 78.
ו. 10.6.

(2) א. להלן טבלה:

4	3	2	1	0	X
0.05	0.3	0.35	0.25	0.05	$P(X)$

ב. $\sigma = 0.973$, $\sigma^2 = 0.9475$, $\mu = 2.05$

ג. $\sigma(\bar{X}) = 0.486$, $\sigma_{\bar{x}}^2 = 0.2369$, $\mu_{\bar{x}} = 2.05$

(3) $\sigma(\bar{X}) = 1.21$, $\mu_{\bar{x}} = 3.5$

(4) א. 0.8413 ב. 0.0013 ג. 0. ד. 0.1974

(5) א. 0 ב. 0 ג. 0.9544 ד. 178.205

(6) א. 0.0465 ב. 27.71 ג. 0.2628 ד. התשובה הייתה קטנה.

(7) א. 0 ב. 0.1587 ג. 0.1587 ד. 0.5

(8) א. 0.5468 ב. 0.6826

(9) א. להלן טבלה:

30	20	10	X
0.5	0.25	0.25	$P(X)$

א. התוחלת: 22.5, השונות: 68.75. ב. התוחלת: 22.5, השונות: 13.75.

ד. 0.8997

(10) 0.0475

(11) 0.1814

(12) א. 0.9772 ב. 0.0228 ג. 0.271

(13) 0.5

(14) ב'.

(15) ד'.

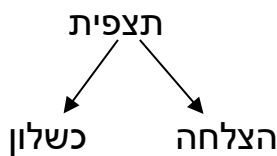
(16) ג'.

התפלגות מספר ההצלחות במדגם – קירוב נורמלי להתפלגות הבינומית:

רקע:

תזכורת על התפלגות בינומית:

בפרק זה נדון בהתפלגות מספר ההצלחות במדגם אקראי (תצפיות בלתי תלויות זו בזו). את מספר ההצלחות במדגם נסמן ב- Y . מחלקים כל תצפית במדגם להצלחה או כישלון.



כעת מה שמשתנה מתצפית לתצפית הוא משתנה דיכוטומי (משתנה שיש לו שני ערכים). הסיכוי להצלחה יסומן עם הפרמטר p וכישלון יסומן ע"י הפרמטר $q = 1 - p$. מבצעים מדגם אקראי בגודל n : $Y \sim B(n, p)$.

פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הבינומית היא: $p(y = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

תוחלת: $E(y) = np$.

שונות: $V(y) = npq$.

קירוב נורמלי עבור התפלגות בינומית:

אם לפנינו התפלגות בינומית: $Y \sim B(n, p)$, ומתקיים ש:

$$1. \quad n \cdot p \geq 5$$

$$2. \quad n \cdot (1 - p) \geq 5$$

$$y \sim N(np, npq)$$

$$\text{אז: } Z_y = \frac{y - np}{\sqrt{npq}}$$

תיקון רציפות:

כאשר משתמשים בקירוב הנורמלי להתפלגות הבינומית יש לבצע תיקון רציפות. הסיבה שעוברים כאן מהתפלגות בדידה להתפלגות נורמלית שהיא התפלגות רציפה. על פי הכללים הבאים:

$$1. \quad p(Y = a) \cong p\left(a - \frac{1}{2} \leq Y \leq a + \frac{1}{2}\right)$$

$$2. \quad P(Y \leq a) \cong P(Y \leq a + 0.5)$$

$$3. \quad P(Y \geq a) \cong P(Y \geq a - 0.5)$$

הערות:

- התנאים למעבר מבינומי לנורמלי הם נזילים, כלומר משתנים ממרצה אחד לשני. התנאי שהצגתי כאן הוא הפופולרי ביותר:

$$1. \quad n \cdot p \geq 5$$

$$2. \quad n \cdot (1 - p) \geq 5$$

- ישנם מרצים שנותנים את התנאי המחמיר הבא:

$$1. \quad n \cdot p \geq 10$$

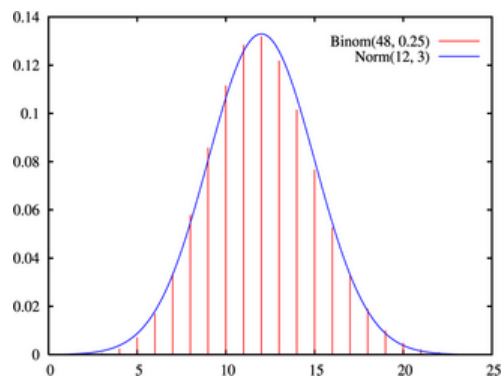
$$2. \quad n \cdot (1 - p) \geq 10$$

- וישנם מרצים שהתנאי שהם נותנים הוא: $(n \geq 30)$.
- תאלצו לבדוק מהו התנאי שנתנו לכם בכיתה כדי לעבור מהתפלגות בינומית לנורמלית.
- הערה נוספת היא לגבי תיקון רציפות. ישנם מרצים שלא מחייבים לבצע תיקון רציפות שהמדגמים גדולים (בדרך כלל מעל 100 תצפיות) בפתרונות שאציג תמיד אבצע תיקון רציפות במעבר מבינומי לנורמלי כיוון שכך הפתרון יהיה יותר מדויק (בכל מקרה שהמדגמים גדולים העניין זניח).

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

נתון שבקרב אוכלוסיית הנוער 25% זקוקים למשקפיים. נדגמו באקראי 48 בני נוער.

1. מה הסיכוי שבדיוק 14 מתוכם יהיו זקוקים למשקפיים?
2. מה הסיכוי שלכל היותר 13 מתוכם זקוקים למשקפיים?



שאלות:

- (1) נתון ש-20% מאוכלוסייה מסוימת אקדמאית. נבחרו באקראי 10 אנשים באותה אוכלוסייה.
 - א. מה ההסתברות ששלושה מהם אקדמאים?
 - ב. מה ההסתברות שלכל היותר אחד מהם אקדמאי?
 - ג. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר האקדמאים במדגם?
- (2) במפעל 10% מהמוצרים פגומים. נלקחו 100 מוצרים באקראי מקו הייצור.
 - א. מה ההסתברות שנדגמו לפחות 6 מוצרים פגומים?
 - ב. מה ההסתברות שמספר המוצרים הפגומים יהיה לכל היותר 11 במדגם?
- (3) ציוני פסיכומטרי בקרב הנרשמים למוסד מסוים מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 500 וסטיית תקן 100. למוסד מסוים הוחלט לקבל אך ורק סטודנטים שקיבלו מעל 600 בפסיכומטרי. 100 סטודנטים אקראיים נרשמו למוסד. מה ההסתברות שלפחות 20 יתקבלו?
- (4) מטילים מטבע 50 פעמים.
 - א. מה ההסתברות לקבל לכל היותר 30 עצים?
 - ב. מה ההסתברות לקבל 28 עצים לפי התפלגות הבינומית ולפי הקירוב הנורמאלי?
- (5) במטוס מקום ל-400 נוסעים. נרשמו לטיסה 430 אנשים (overbooking). מנתונים סטטיסטיים ידוע שהסיכוי שאדם שנרשם לטיסה אכן יגיע הוא 0.9.
 - א. מה ההסתברות שלא יהיו מקומות ישיבה לכל האנשים שהגיעו לטיסה?
 - ב. מה צריך להיות גודל המטוס כדי שבסיכוי שלפחות 95% המטוס יספיק לכמות הנרשמים?
- (6) מפעל לייצור ארטיקים טוען שהסיכוי שארטיק שהוא מייצר יהיה פגום הוא 0.01. מוכר הזמין 1000 ארטיקים מהמפעל. מה ההסתברות שהמוכר יקבל לפחות 980 ארטיקים תקינים אם טענת המפעל מוצדקת?
- (7) מהמר מטיל קובייה הוגנת 100 פעמים. בכל הטלה, אם מתקבל תוצאה זוגית בקובייה המהמר זוכה בשקל. אחרת, המהמר משלם שקל. המהמר הטיל את הקובייה 100 פעמים מה הסיכוי שהרווח של המהמר יהיה לכל היותר 10?

תשובות סופיות:

- (1) א. 0.201 ב. 0.3758 ג. התוחלת: 2, סטיית התקן: 1.2649.
- (2) א. 0.9332 ב. 0.6915
- (3) 0.1611
- (4) א. 0.9406 ב. בינומית - 0.0788, קירוב לנורמלית - 0.0778.
- (5) א. 0.015 ב. 0.398
- (6) 0.9996
- (7) 0.8643

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 35 - מושגי יסוד באמידה

תוכן העניינים

1. כללי 138

מושגי יסוד באמידה:

רקע:

כזכור מהמפגש הקודם, פרמטר הוא גודל המתאר את האוכלוסייה או התפלגות מסוימת. כמו ממוצע הגבהים בקרב מתגייסים לצה"ל - μ . כמו פרופורציית התומכים בממשלה בקרב אזרחי המדינה - p . בדרך כלל הפרמטרים הם גדלים שאינם ידועים באמת, ולכן מבצעים מדגמים במטרה לאמוד אותם. אין אפשרות לחשב אותם הניסיון הוא בלהעריך כמה הם שווים ככל שניתן.

- נסמן באופן כללי פרמטר באות θ ואומד ב- $\hat{\theta}$. הוא סטטיסטי המחושב על המדגם ובאמצעותו נאמוד את θ .
- שגיאת אמידה: $|\hat{\theta} - \theta|$ - ההפרש בין האומד לאמת (הפרמטר).

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בכנסת ה-19 קיבלה מפלגת העבודה 15 מנדטים. בערוץ 10 ברגע סגירת הקלפיות העריכו את מספר המנדטים של המפלגה להיות 17 מנדטים וזאת על סמך תוצאות מדגם של הערוץ.

- א. מה הפרמטר בדוגמה זו?
 - ב. מהי טעות האמידה של ערוץ 10?
- $\hat{\theta}$ יהיה אומד חסר הטיה ל- θ אם התוחלת של $\hat{\theta}$ תהיה שווה ל- θ : $E(\hat{\theta}) = \theta$.
 - טעות התקן של אומד היא סטיית התקן שלו, כלומר: $\sigma(\hat{\theta}) = S.E$.

פרמטרים מרכזיים והאומדים שלהם:

ממוצע האוכלוסייה μ :

האומד הנקודתי שלו יהיה: ממוצע המדגם: $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$

$E(\bar{x}) = \mu$ לכן $\bar{x}$ הינו אומד חסר הטיה ל- μ . כמו כן, טעות תקן: $\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = SE$

פרופורציה באוכלוסייה p :

האומד הנקודתי שלו יהיה: פרופורציה במדגם: $\hat{p} = \frac{y}{n}$

$E(\hat{p}) = p$, לכן $\hat{p}$ הינו אומד חסר הטיה ל- p . כמו כן טעות התקן: $\sigma(\hat{p}) = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$

שונות האוכלוסייה σ^2 :

האומד הנקודתי שלו יהיה: $S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

$E(S^2) = \sigma^2$ ולכן S^2 הינו אומד חסר הטיה ל- σ^2 : $S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$

הערה: אומד הוא הנוסחה הכללית לאמידת הפרמטר ואומדן הוא הערך הספציפי שהתקבל במדגם מסוים.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נדגמו 10 משפחות בתל אביב ונבדק עבור כל משפחה מספר הילדים שלה.
להלן התוצאות שהתקבלו: 2, 1, 3, 2, 1, 4, 5, 2, 1, 3.
אמדו באמצעות אומדים חסרי הטיה את הפרמטרים הבאים:

1. ממוצע מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
2. שונות מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
3. פרופורציית המשפחות בנות שני ילדים.

שאלות:

- (1) מתוך 500 טירונים, נמצאו 120 בעלי שברי הליכה. נתון שהסיכוי שטירון יהיה עם שבר הליכה הוא 0.25.
- מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?
 - מהי טעות התקן של האומדן כשהמדגם בגודל 500?
 - מהו האומדן לפרמטר?
 - מהי טעות האמידה?
- (2) לפי נתוני היצרן, מקרר צורך בממוצע 2400 וואט לשעה עם סטיית תקן של 500 וואט לשעה.
- במדגם של 25 מקררים של היצרן התקבל ממוצע של 2342 וואט לשעה.
- מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?
 - מהי טעות התקן של האומדן?
 - מהו האומדן לפרמטר?
 - מהי טעות האמידה?
- (3) נדגמו עשרה מתגייסים לצה"ל. גובהם נמדד בס"מ. להלן התוצאות שהתקבלו: 175, 168, 184, 192, 171, 180, 177, 187, 168, 177.
- מצאו אומדן חסר הטיה לגובה הממוצע של מתגייסי צה"ל.
 - מצאו אומדן חסר הטיה לשונות הגבהים של מתגייסי צה"ל.
 - מצאו אומדן חסר הטיה לפרופורציות המתגייסים בגובה של לפחות 180 ס"מ.
- (4) נדגמו 20 שכירים באקראי. עבור כל שכיר נמדד השכר באלפי שקלים.
- להלן התוצאות שהתקבלו: $\sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 1502.2$, $\sum_{i=1}^{20} X_i = 162$.
- אמדו את השכר הממוצע של השכירים במשק.
 - אמדו את סטיית התקן של שכר השכירים במשק.
- (5) במטרה לאמוד את ממוצע האוכלוסייה, דגמו תצפיות בלתי תלויות מהאוכלוסייה וחישבו את הממוצע שלהם. מהי טעות התקן?
- סטיית התקן של האוכלוסייה.
 - סטיית התקן של ממוצע האוכלוסייה.
 - סטיית התקן של המדגם.
 - סטיית התקן של ממוצע המדגם.

6) משקל הממוצע של אוכלוסייה מסוימת הוא 75 ק"ג עם שונות של 25. אם יבחרו כל המדגמים האפשריים בגודל 10 מאוכלוסייה זו סטיית התקן של ממוצעי המדגמים תהייה:

- א. 3.
- ב. 2.5.
- ג. 1.581.
- ד. אין מספיק נתונים לדעת.

7) במדגם מקרי, מתי סכום ריבועי הסטיות מהממוצע, $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, מחולק ב- $n-1$?

- א. כאשר n קטן.
- ב. כאשר תצפיות המדגם אינן בלתי תלויות.
- ג. כאשר האוכלוסייה אינה מתפלגת נורמאלית.
- ד. כאשר מעוניינים באומד חסר הטיה לשונות האוכלוסייה ממנה הוצא המדגם.
- ה. כאשר מעוניינים לחשב את שונות התפלגות הדגימה של ממוצע המדגם.

8) $X_1, X_2, \dots, X_{16}$ מדגם מקרי מתוך אוכלוסייה בעלת ממוצע μ לא ידוע ושונות: $\sigma^2 = 64$. טעות התקן של האומד ל- μ היא:

- א. 16.
- ב. 8.
- ג. 4.
- ד. 2.

9) מהו אומד חסר הטיה?

- א. אומד שערכו שווה לממוצע התפלגות הדגימה שלו.
- ב. אומד שערכו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.
- ג. אומד שממוצע התפלגות הדגימה שלו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.
- ד. אומד שהסיכוי שערכו יהיה גבוה מערך הפרמטר באוכלוסייה שווה לסיכוי שיהיה נמוך ממנו.

א. 0.25	ב. 0.019	ג. 0.24	ד. 0.01
א. אוכלוסייה : מקררים של יצרן, תוחלת : 2400, סטיית תקן : 500.			
ב. 100		ג. 2342	ד. 58
א. 177.9	ב. 64.1	ג. 0.4	
א. 8.1	ב. 3.16		
ד'			
ג'			
ד'			
ד'			
ג'			

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 36 - מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים

תוכן העניינים

143	1. הקדמה
147	2. סוגי טעויות

הקדמה:

רקע:

תהליך של בדיקת השערות הוא תהליך מאד נפוץ בעולם הסטטיסטיקה. בבדיקת השערות על פרמטרים נעבוד לפי השלבים הבאים:

שלב א: נוהה את הפרמטר הנחקר.

שלב ב: נרשום את השערות המחקר.

השערת האפס המסומנות ב- H_0 .

בדרך כלל השערת האפס מסמלת את אשר היה מקובל עד עכשיו, את השגרה, הנורמה.

השערה אלטרנטיבית (השערת המחקר) המסומנת ב- H_1 .

ההשערה האלטרנטיבית מסמלת את החדשנות בעצם ההשערה האלטרנטיבית מדברת על הסיבה שהמחקר נעשה היא שאלת המחקר.

שלב ג: נבדוק האם התנאים לביצוע התהליך מתקיימים ונניח הנחות במידת הצורך.

שלב ד: נרשום את כלל ההכרעה. בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שנקרא כלל הכרעה. הכלל יוצר אזורי שנקראים:

1. **אזור דחייה:**

דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.

2. **אזור קבלה:**

קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה. כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי. אזור הדחייה מוכתב על ידי סיכון שלוקח החוקר מראש שנקרא רמת מובהקות ומסומן ב- α .

שלב ה: בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולחשב את הסטטיסטי המתאים ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה.

שלב ו: להסיק מסקנה בהתאם לתוצאות המדגם.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום לידתם בישראל 3300 גרם. משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון. להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$$n = 20, \bar{X} = 3120, S = 280$$

- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
- ב. מה המשתנה הנחקר?
- ג. מה הפרמטר הנחקר?
- ד. מהן השערות המחקר?

שאלות:

בשאלות הבאות, ענו על הסעיפים הבאים:

- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
- ב. מה המשתנה הנחקר?
- ג. מה הפרמטר הנחקר?
- ד. מהן השערות המחקר?

- (1) ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות. מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים. ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5.
- (2) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25.
- (3) במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה למשפטים היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. מחקר מעוניין לבדוק האם השנה מקשים על הקבלה לפקולטה למשפטים.
- (4) בחודש ינואר השנה פורסם שאחוז האבטלה במשק הוא 8% במדגם עכשווי התקבל שמתוך 200 אנשים 6.5% מובטלים. רוצים לבדוק ברמת מובהקות של 5% האם כיום אחוז האבטלה הוא כמו בתחילת השנה.

תשובות סופיות:

- (1) א. נבחנים בבגרות באנגלית.
 ב. ציון.
 ג. ממוצע הציונים בשיטת לימוד חדשה.
 ד. $H_0: \mu = 72$
 $H_1: \mu > 72$
- (2) א. משקאות בבקבוק של חברה מסוימת.
 ב. נפח משקה בסמ"ק.
 ג. ממוצע נפח המשקה בבקבוק.
 ד. $H_0: \mu = 500$
 $H_1: \mu < 500$
- (3) א. מועמדים לפקולטה למשפטים.
 ב. משתנה דיכוטומי (התקבל, לא התקבל).
 ג. אחוז הקבלה.
 ד. $H_0: p = 0.25$
 $H_1: p < 0.25$
- (4) א. אזרחים בוגרים במשק.
 ב. משתנה דיכוטומי (מובטל, עובד).
 ג. אחוז האבטלה כיום.
 ד. $H_0: p = 0.08$
 $H_1: p \neq 0.08$

סוגי טעויות:

רקע:

בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שניקרא כלל הכרעה.
הכלל יוצר אזורים שנקראים:

1. אזור דחייה – דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.
2. אזור קבלה – קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה.

כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי.
בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה וכך להגיע למסקנה – המסקנה היא בעירבון מוגבל כיוון שהיא תלויה בכלל ההכרעה ובתוצאות המדגם. אם נשנה את כלל ההכרעה אז אנחנו יכולים לקבל מסקנה אחרת. אם נבצע מדגם חדש אז אנחנו עלולים לקבל תוצאה אחרת. לכן יתכנו טעויות במסקנות שלנו:

מציאות	הכרעה		
		H_0	H_1
	H_0	אין טעות	טעות מסוג 1
	H_1	טעות מסוג 2	אין טעות

הגדרת הטעויות:

טעות מסוג ראשון: להכריע לדחות את H_0 למרות שבמציאות H_0 נכונה.

טעות מסוג שני: להכריע לקבל את H_0 למרות שבמציאות H_1 נכונה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

אדם חשוד בביצוע עבירה ונתבע בבית המשפט.
אילו סוגי טעויות אפשריות בהכרעת הדין?

שאלות:

- (1) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25. בסופו של דבר הוחלט להכריע לטובת חברת המשקאות.
- א. רשמו את השערות המחקר.
 ב. מה מסקנת המחקר?
 ג. איזו סוג טעות יתכן וביצעו במחקר?
- (2) במחקר על פרמטר מסוים הוחלט בסופו של דבר לדחות את השערת האפס.
- א. האם ניתן לדעת אם בוצע טעות במחקר?
 ב. מה סוג הטעות האפשרית?
- (3) לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. ישנה טענה שכיום ממוצע מספר הילדים במשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות. במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה. על סמך תוצאות המדגם נקבע שלא ניתן לקבוע שבאופן מובהק תוחלת מספר הילדים למשפחה קטנה כיום.
- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
 ב. מה המשתנה הנחקר?
 ג. מה הפרמטר הנחקר?
 ד. מה השערות המחקר?
 ה. מה מסקנת המחקר?
 ו. מהי סוג הטעות האפשרית במחקר?

תשובות סופיות:

- (1) א. $H_0: \mu = 500$
 ב. לא דחינו את H_0 .
 ג. טעות מסוג שני.
- (2) א. לא ניתן לדעת.
 ב. טעות מסוג ראשון.
- (3) א. משפחות כיום.
 ב. מס' הילדים.
 ג. תוחלת מספר הילדים למשפחה כיום.
 ד. $H_0: \mu = 2.3$
 $H_1: \mu < 2.3$
 ה. לא לדחות את H_0 . ו. טעות מסוג שני.

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 37 - רווח סמך לתוחלת (ממוצע)

תוכן העניינים

- 1. רווח סמך כששונות האוכלוסיה ידועה 149
- 2. קביעת גודל מדגם 154
- 3. רווח סמך כששונות האוכלוסיה לא ידועה 156

רווח סמך כששונות האוכלוסייה ידועה:

רקע:

ממוצע המדגם הוא אומדן לממוצע האוכלוסייה, אך לא באמת ניתן להבין ממנו על גודלו של ממוצע האוכלוסייה. ההסתברות שממוצע המדגם יהיה בדיוק כמו הממוצע האמיתי הוא אפסי.

מה שנהוג לעשות כדי לאמוד את ממוצע האוכלוסייה, זה לבנות רווח סמך.

נבנה מרווח בטחון שהסיכוי שהפרמטר μ ייכלל בתוכו הוא: $1-\alpha$.

$1-\alpha$: נקרא רמת בטחון או רמת סמך. כך ש: $P(A \leq \mu \leq B) = 1-\alpha$.

A - גבול התחתון של רווח הסמך.

B - הגבול העליון של רווח הסמך.

$L = B - A$ - אורך רווח הסמך.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

חוקר דגם 25 חיילים שנבחנו במבחן הפסיכומטרי. הוא בנה רווח סמך לממוצע הציונים במבחן הפסיכומטרי בקרב אוכלוסיית החיילים וקיבל בין 510 ל-590. רווח הסמך נבנה ברמת סמך של 95%.

1. מהי אוכלוסיית המחקר?
2. מה המשתנה באוכלוסייה?
3. מה הפרמטר שהחוקר רצה לאמוד?
4. מהו רווח הסמך?
5. מה אורך רווח הסמך?
6. מהי רמת הביטחון של רווח הסמך?

בפרק זה נרצה לבנות רווח סמך לתוחלת (μ) במקרה ש- σ^2 (שונות האוכלוסייה) ידועה.

פרמטר אותו נרצה לאמוד: μ .

אומד נקודתי: $\bar{x}$.

תנאים לבניית רווח הסמך: $X \sim N$ או $n \geq 30$.

σ^2 (שונות האוכלוסייה) ידועה.

נוסחה לרווח הסמך: $\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

על פי נתוני היצרן אורך חיי סוללה מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 1 שעה. מעוניינים לאמוד את תוחלת חיי סוללה. נדגמו באקראי 4 סוללות, אורך החיים הממוצע שהתקבל הוא 13.5 שעות. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת אורך חיי סוללה.

שגיאת האמידה המקסימלית: $\varepsilon = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ε - נותן את שגיאת האמידה המקסימלית, דבר שנקרא גם טעות סטטיסטית, טעות דגימה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בהמשך לשאלה עם הסוללות. מה ניתן להגיד בביטחון של 95% על שגיאת האמידה?

קשרים מתמטיים ברווח הסמך:

- אורך רווח הסמך הוא פעמיים שגיאת האמידה המקסימלית: $L = 2\varepsilon$.
- ממוצע המדגם נופל תמיד באמצע רווח הסמך: $\bar{X} = \frac{A+B}{2}$.
- ככל שמספר התצפיות (n) גבוה יותר, כך יש יותר אינפורמציה ולכן האומד יותר מדויק, ולכן נקבל רווח סמך יותר קצר.
- ככל שרמת הביטחון $(1-\alpha)$ גבוהה יותר, כך: $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ יותר גבוה, ורווח הסמך יותר ארוך.

שאלות:

- (1) חוקר התעניין לאמוד את השכר הממוצע במשק. על סמך מדגם הוא קבע שבביטחון של 95% כי השכר הממוצע במשק נע בין 9200 ל-9800 ₪.
- מי האוכלוסייה במחקר?
 - מה המשתנה הנחקר?
 - מה הפרמטר שאותו רוצים לאמוד?
 - מה רווח הסמך לפרמטר?
 - מהי רמת הסמך לפרמטר?
 - מה אורך רווח הסמך?
 - מה הסיכוי שטעות הדגימה תעלה על 300 ₪?
- (2) מעוניינים לאמוד את התפוקה היומית הממוצעת של מפעל מסוים ברמת סמך של 95%. במדגם אקראי של 100 ימים התקבלה תפוקה ממוצעת 4950 מוצרים ביום. לצורך פתרון הנח שסטיית התקן האמתית ידועה ושווה 150 מוצרים ביום. בנו את רווח הסמך.
- (3) מעוניינים לאמוד את ממוצע אורך החיים של מכשיר. מנתוני היצרן ידוע שאורך החיים מתפלג נורמאלי עם סטיית תקן של 20 שעות. נדגמו 25 מכשירים ונמצא כי ממוצע אורך החיים שלהם היה 230 שעות.
- בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.
 - בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.
 - הסבירו כיצד ומדוע השתנה רווח הסמך.
- (4) דגמו 200 עובדים מהמשק הישראלי. השכר הממוצע שלהם היה 9700 ₪. נניח שסטיית התקן של השכר במשק היא 3000 ₪.
- בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת השכר במשק.
 - מה ניתן לומר בביטחון של 95% על הסטייה המרבית בין ממוצע המדגם לתוחלת השכר?
 - מה היה צריך להיות גודל המדגם אם הינו רוצים להקטין את רווח הסמך ב-50%?
 - אם היינו מגדילים את גודל המדגם ובונים רווח סמך באותה רמת סמך האם היה ניתן לטעון בביטחון רב יותר שרווח הסמך מכיל את הפרמטר?

- (5) בנו רווח סמך לממוצע הציונים של מבחן אינטליגנציה. ידוע שסטיית התקן היא 15 והמדגם מתבסס על 100 תצפיות. רווח הסמך שהתקבל הוא (105,99). שחזרו את:
- א. ממוצע המדגם.
 - ב. שגיאת האמידה המקסימאלית.
 - ג. רמת הסמך.
- (6) זמן החלמה מאנגינה מתפלג עם סטיית תקן של יומיים. חברת תרופות מעוניינת לחקור אנטיביוטיקה חדשה שהיא פיתחה. במחקר השתתפו 60 אנשים שחלו באנגינה וקיבלו את האנטיביוטיקה החדשה. בממוצע הם החלימו לאחר 4 ימים.
- א. בנו רווח סמך לתוחלת זמן ההחלמה תחת האנטיביוטיקה החדשה ברמת סמך של 90%.
 - ב. מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היה תקציב להגדלת גודל המדגם פי 4? הסבירו.
 - ג. מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת סמך גדולה יותר? הסבירו.
- (7) חוקר בנה רווח סמך לממוצע וקיבל את רווח הסמך הבא: $82 < \mu < 92$. נתון שסטיית התקן בהתפלגות שווה ל-10 ושהמדגם מתבסס על 16 תצפיות. התפלגות המשתנה היא נורמאלית.
- א. מהו ממוצע המדגם?
 - ב. מהי רמת הסמך של רווח הסמך שנבנה?
 - ג. מה הסיכוי ששגיאת האמידה באמידת ממוצע האוכלוסייה תעלה על 5?
- (8) חוקר בנה רווח סמך לתוחלת כאשר השונות בהתפלגות ידועה ברמת סמך של 95%. אם החוקר כעת יבנה על סמך אותם נתונים רווח סמך ברמת סמך קטנה מ-95%, איזה מהמשפטים הבאים לא יהיה נכון.
- א. אורך רווח הסמך החדש יהיה קטן יותר.
 - ב. גודל המדגם יהיה כעת קטן יותר.
 - ג. המרחק בין ממוצע המדגם לקצות רווח הסמך יהיו קטנים יותר ברווח הסמך החדש.
 - ד. רמת הביטחון לבנות רווח הסמך החדש תהיה קטנה יותר.

(9) חוקר בנה רווח סמך ל- μ וקיבל: $48 < \mu < 54$. מה נכון בהכרח:

א. $\mu = 51$.

ב. $\bar{X} = 6$.

ג. $\bar{X} = 51$.

ד. אורך רווח הסמך הינו 3.

(10) איזה מהגורמים הבאים אינו משפיע על גודלו של רווח בר סמך, כאשר שונות האוכלוסייה ידועה (בחרו בתשובה הנכונה):

א. רמת הביטחון.

ב. סטיית התקן באוכלוסייה.

ג. מספר המשתתפים.

ד. סטיית התקן במדגם.

תשובות סופיות:

(1) א. העובדים במשק. ב. שכר ב-ש. ג. μ . ד. $9200 < \mu < 9800$.

ה. 0.95. ו. 600. ז. 0.05.

(2) $4920.6 < \mu < 4979.4$

(3) א. $223.42 < \mu < 236.58$. ב. $222.16 < \mu < 237.84$.

ג. ראה סרטון.

(4) א. $9284 < \mu < 10,116$. ב. הסטיה המירבית בין $\bar{x}$ ל- μ היא 416 שם בבטחון של 95%.

ג. 800. ד. לא.

(5) א. 102. ב. 3. ג. 0.9544.

(6) א. $4.42 < \mu < 83.5$. ב. יקטן פי 2. ג. גדל.

(7) א. 87. ב. 5. ג. 0.9544.

(8) ב'.

(9) ג'.

(10) ד'.

קביעת גודל מדגם:

רקע:

אם מעוניינים לאמוד את ממוצע האוכלוסייה כאשר סטיית התקן של האוכלוסייה ידועה: σ ברמת סמך של $1-\alpha$ ושגיאת אמידה שלא תעלה על ε מסוים, נציב

$$.n \geq \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\varepsilon} \right)^2 \quad \text{בנוסחה הבאה:}$$

כדי להציב בנוסחה צריך שהמשתנה הנחקר יתפלג נורמלית או שהמדגם ייצא בגודל של לפחות 30 תצפיות.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

חברת תעופה מעוניינת לאמוד את תוחלת משקל המטען של נוסע. נניח שמשקל מטען של נוסע מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 2 ק"ג. כמה נוסעים יש לדגום אם מעוניינים שבביטחון של 98% הסטייה המרבית בין ממוצע המדגם לממוצע האמיתי לא יעלה על 0.5 ק"ג? (תשובה: 87).

שאלות:

- (1) משתנה מקרי מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן ידועה 12. מה צריך להיות גודל המדגם כדי לבנות רווח סמך ברמת סמך של 98% שאורכו לא יעלה על 2?
- (2) מעוניינים לאמוד את הדופק הממוצע של מתגייסים לצבא. מעוניינים שבביטחון של 95% שגיאת האמידה המרבית תהיה 0.5. נניח שהדופק מתפלג נורמאלית על סטיית תקן של 3 פעימות לדקה.
א. כמה מתגייסים יש לדגום?
ב. אם ניקח מדגם הגדול פי 4 מהמדגם של סעיף א ונאמוד את הממוצע באותה רמת סמך כיצד הדבר ישפיע על שגיאת האמידה?
- (3) יהי X משתנה מקרי עם ממוצע μ וסטיית תקן σ . חוקר רוצה לבנות רווח בר סמך ל- μ ברמת ביטחון של 0.95, כך שהאורך של הרווח יהיה 0.5σ . מהו גודל המדגם הנדרש?

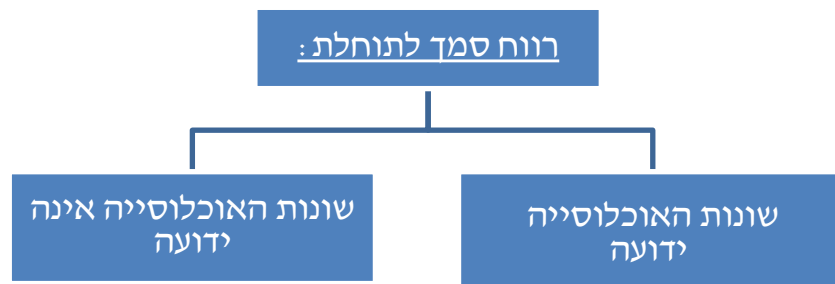
תשובות סופיות:

- (1) 780.
(2) א. 139. ב. הדבר יקטין את ε פי 2.
(3) $n = 62$.

רווח סמך כששונות האוכלוסייה לא ידועה:

רקע:

בבואנו לבנות רווח סמך לתוחלת אנו צריכים להתמקד בשני המצבים הבאים:

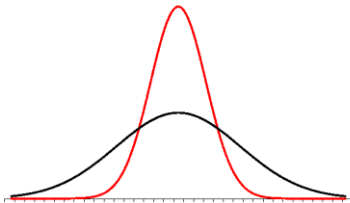


בפרק זה נעסוק במקרה ששונות האוכלוסייה (σ^2) אינה ידועה לנו.

מקרה יותר פרקטי.

התנאי: $X \sim N$ או שהמדגם גדול.

רווח סמך: $\bar{X} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$



$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1} \quad \text{האומד לשונות:}$$

התפלגות T:

הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה

להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים.

התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש. דרגות החופש הן: $df = n-1$.

ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה.

כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

הזמן שלוקח לפתור שאלה מסוימת בחשבון מתפלג אצל תלמידי כיתות ח' נורמאלית.

במטרה לאמוד את תוחלת זמן הפתרון נדגמו 4 תלמידים בכיתה ח'. להלן התוצאות

שהתקבלו בדקות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3.

בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לממוצע זמן הפתרון לשאלה בקרב תלמידי כיתה ח'.

שאלות:

- (1) מחקר מעוניין לדעת כיצד תרופה מסוימת משפיעה על קצב פעימות הלב. ל-5 אנשים שנטלו את התרופה מדדו את הדופק והתקבל מספר פעימות לדקה: 84, 88, 84, 79, 89. הערה: לצורך פתרון הנח שקצב פעימות הלב מתפלג נורמאלית בקירוב.
- א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת הדופק של נוטלי התרופה הנ"ל.
- ב. נתון שהדופק הממוצע ללא לקיחת התרופה הינו 70. לאור זאת, האם בביטחון של 95% התרופה משפיעה על הדופק?
- ג. בהמשך לסעיף א', אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת ביטחון של 99%, כיצד הדבר היה משפיע על רווח הסמך?
- (2) במדגם שנעשה על 25 מתגייסים לצבא האמריקאי התקבל כי גובה ממוצע של חייל הינו 178 ס"מ עם סטיית תקן $S = 13$ ס"מ.
- בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לתוחלת גובה המתגייסים לצבא האמריקאי. מה יש להניח לצורך פתרון?
- (3) אדם מעוניין לאמוד את זמן הנסיעה הממוצע שלו לעבודה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שזמן הנסיעה בהם בדקות הוא: 30, 40, 32, 34, 27.
- א. ברמת ביטחון של 95% אמוד את זמן הנסיעה הממוצע. מהי ההנחה הדרושה לצורך פתרון?
- ב. איך גודל רווח הסמך היה משתנה אם היו דוגמים עוד ימים?
- (4) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמאלית. נדגמו 25 מבחנים והתקבל ממוצע ציונים 102 וסטיית תקן מדגמית 13.
- א. בנו רווח סמך לממוצע הציונים באוכלוסייה ברמת ביטחון של 95%.
- ב. חזרו על סעיף א' אם סטיית התקן הינה סטיית התקן האמיתית של כלל הנבחנים.
- ג. הסבירו את ההבדלים בין שני הסעיפים הנ"ל.
- (5) נשקלו 60 תינוקות אשר נולדו בשבוע ה-40 של ההיריון. המשקל נמדד בקילוגרמים. להלן התוצאות שהתקבלו: $\sum_{i=1}^{60} X_i = 195$, $\sum_{i=1}^{60} X_i^2 = 643.19$.
- בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת משקל תינוק ביום היוולדו.

- (6) נדגמו 120 אנשים אקראיים מעל גיל 50. עבור כל אדם נבדק מספר שנות השכלתו. להלן התוצאות שהתקבלו: $\bar{x} = 13.8$, $S = 2$. בנו רווח סמך ברמת סמך של 96% לממוצע ההשכלה של אזרחים מעל גיל 50.
- (7) שני סטטיסטיקאים בנו רווח בר-סמך לאותו פרמטר μ . לכל אחד מהסטטיסטיקאים מדגם אחר, אך באותו גודל 10. שניהם קבעו אותה רמת סמך. סטטיסטיקאי א': הניח $\sigma = 20$. סטטיסטיקאי ב': חישב לפי המדגם וקיבל $S = 20$. למי משני הסטטיסטיקאים יהיה רווח סמך ארוך יותר?
- סטטיסטיקאי א'.
 - סטטיסטיקאי ב'.
 - אותו אורך רווח סמך לשני הסטטיסטיקאים.
 - תלוי בתוצאות המדגם של כל סטטיסטיקאי.

תשובות סופיות:

- (1) א. $79.88 < \mu < 89.72$. ב. כן. ג. הוא היה גדל.
- (2) ראה בסרטון.
- (3) א. צריך להניח שהמשתנה מתפלג נורמלית. ב. לא ניתן לדעת.
- (4) א. $96.63 < \mu < 107.37$. ב. $96.90 < \mu < 107.10$. ג. ראה בסרטון.
- (5) $3.149 < \mu < 3.351$.
- (6) $13.42 < \mu < 14.18$.
- (7) ב'.

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 38 - רווח סמך להפרש תוחלות (ממוצעים) במדגמים בלתי תלויים

תוכן העניינים

1. כששונות האוכלוסיה לא ידועות והמדגמים גדולים 159
2. כששונות האוכלוסיה לא ידועות ובהנחת שוויון שונות..... 161

כששונויות האוכלוסייה לא ידועות והמדגמים גדולים:

רקע:

המטרה היא לאמוד את פער התוחלות: $\mu_1 - \mu_2$, כלומר ההבדלים של הממוצעים בין שתי האוכלוסיות.

האומד נקודתי: $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$.

התנאים לבניית רווח הסמך:

1. מדגמים גדולים.

2. מדגמים בלתי תלויים.

$$\text{רווח סמך: } (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

אם הערך אפס נופל בגבולות רווח הסמך נגיד שבביטחון של $1-\alpha$, לא קיים הבדל בין התוחלות.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

יבואן רכב מעוניין להשוות בין רכבים יפנים לעומת רכבים אמריקאים מבחינת תצרוכת הדלק שלהם. נדגמו 40 רכבים מכל סוג. לכל רכב נבדק כמות הק"מ שהמכונית נסעה עבור 1 ליטר דלק במהירות של 100 קמ"ש. התוצאות שהתקבלו במדגם הם: ברכבים היפנים ממוצע 12.5 עם סטיית תקן 1.5 וברכבים האמריקאים הממוצע 11.3 עם סטיית תקן של 1.4.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לפער הממוצעים של צריכת הדלק של מכוניות יפניות לעומת אמריקאיות.

ב. האם על סמך רווח הסמך ניתן לקבוע שקיים הבדל בין שני סוגי הרכבים מבחינת צריכת הדלק?

שאלות:

- (1) במדגם של 45 תלמידים הלומדים משפטים התקבל שבשבוע הם לומדים בממוצע 4 שעות עם סטיית תקן 2 שעות מעבר לשעות הלימוד בכיתה. במדגם של 55 תלמידים הלומדים הנדסה התקבל שבשבוע הם לומדים בממוצע 10 שעות עם סטיית תקן של 3 שעות.
- א. אמדו את הפרש ממוצעי שעות הלמידה של סטודנטים למשפטים לעומת סטודנטים להנדסה ברמת בטחון של 90%.
- ב. האם קיים הבדל בין סטודנטים למשפטים ולסטודנטים להנדסה מבחינת ההשקעה שלהם מעבר לשעות הלימוד בכיתה?
- (2) מחקר טוען שאנשים החיים במרכז הארץ צופים בממוצע בטלוויזיה יותר מאנשים שלא חיים במרכז. נדגמו 100 אנשים מהמרכז ו-107 אנשים לא מהמרכז. אנשים אלו נשאלו כמה שעות ביום הם נוהגים לצפות בטלוויזיה. במדגם של מרכז הארץ התקבל ממוצע 2.7 שעות וסטיית תקן של 0.7 שעות. במדגם של מחוץ למרכז הארץ התקבל ממוצע 1.8 שעות וסטיית תקן של 1.1 שעות.
- מצאו רווח סמך לפער בין ממוצע שעות הצפייה בטלוויזיה בין שני האזורים בביטחון של 95%.

תשובות סופיות:

- (1) א. $-5.17 < \mu_1 - \mu_2 < -6.83$. ב. כן.
- (2) כן, בביטחון של 90% סטודנטים להנדסה לומדים יותר מסטודנטים למשפטים.

כששונויות האוכלוסייה לא ידועות ובהנחת שוויון שונויות:

רקע:

המטרה היא לאמוד את פער התוחלות: $\mu_1 - \mu_2$, כלומר ההבדלים של הממוצעים בין שתי האוכלוסיות.

האומד נקודתי: $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$.

התנאים לבניית רווח הסמך:

$$1. \sigma_1^2 = \sigma_2^2.$$

$$2. X_1, X_2 \sim N.$$

3. מדגמים בלתי תלויים.

השונויות המשוקללת: כיוון שאנו מניחים שבין שתי האוכלוסיות השונויות שוות אנו אומדים את השונויות הזו על ידי שקלול שתי השונויות של שני המדגמים על ידי

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \quad \text{הנוסחה הבאה:}$$

$$d.f = n_1 + n_2 - 2 \quad \text{דרגות החופש:}$$

$$\text{רווח סמך: } (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n_1+n_2-2} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$$

אם הערך אפס נופל בגבולות רווח הסמך נגיד שבביטחון של $1 - \alpha$, לא קיים הבדל בין התוחלות.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מחקר מעוניין לבדוק האם קיים הבדל בין תל אביב לבאר שבע מבחינת ההכנסה הממוצעת של אקדמאים. להלן תוצאות המדגם שנעשה:

מספר האקדמאים	תל אביב	באר שבע
ממוצע הכנסות של אקדמאים	11,000	9500
סטיית התקן של הכנסות אקדמאים	200	250

בנו רווח סמך ברמת ביטחון של 90% להפרש תוחלות ההכנסה בשני האזורים. הניחו שהשכר מתפלג נורמלית עם אותה שונות בכל אחד מהאזורים.

שאלות:

- (1) נדגמו 15 ישראלים ו-15 אמריקאים. כל הנדגמים נגשו למבחן IQ. להלן תוצאות המדגם:

המדינה	ישראל	ארה"ב
גודל המדגם	15	15
סכום הציונים	1560	1470
סכום ריבועי הציונים	165,390	147,560

מצאו רווח סמך ברמת סמך של 95% לסטייה בין ממוצע הציונים בישראל לממוצע הציונים בארה"ב. רשמו את כל ההנחות הדרושות לצורך פתרון התרגיל.

- (2) להלן 4 תצפיות על משתנה X שמתפלג: $N(\mu_x, \sigma^2)$, ומשתנה Y שמתפלג: $N(\mu_y, \sigma^2)$.

X	22	20	21	25
Y	18	25	17	12

חשבו רווח סמך ל- $\mu_y - \mu_x$ ברמת הסמך 90%, בהנחה ששני המדגמים בלתי תלויים.

תשובות סופיות:

- (1) הנחות:
- השונות שווה.
 - שהציונים מתפלגים נורמלית.
 - המדגמים אינם תלויים זה בזה.
- $$-5.52 < \mu_1 - \mu_2 < 17.52$$
- (2)
- $$-9.6 < \mu_y - \mu_x < 1.6$$

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 39 - רווח סמך לתוחלת (ממוצע) הפרשים במדגמים מזווגים

תוכן העניינים

1. רווח סמך לתוחלת (ממוצע) הפרשים במדגמים מזווגים 163

רווח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזווגים:

רקע:

מדגם מזווג: מדגם אחד שבו יש n צמדים. כל תצפית במדגם תנפק זוג ערכים: X ו- Y .

ניצור משתנה חדש: $D = x - y$.

הפרמטר שנרצה לאמוד: μ_D .

התנאים לבניית רווח הסמך:

$$1. \quad x, y \sim N$$

2. המדגם מזווג.

$$\text{נוסחת רווח הסמך: } \bar{D} \pm t_{\frac{1-\alpha}{2}, n-1} \frac{S_D}{\sqrt{n}}$$

כאשר דרגות החופש: $df = n - 1$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מעוניינים לבדוק האם יש הבדל בין מהירות הריצות של שתי תוכנות מחשב. לקחו 5 קבצים אקראיים והריצו אותם בשתי התוכנות:

הקובץ	1	2	3	4	5
הזמן בתוכנה הראשונה	25	48	49	46	38
הזמן בתוכנה השנייה	27	46	42	40	48

הניחו כי זמני הריצות מתפלגים נורמלית. מצאו רווח סמך של 95% להפרש תוחלת הזמן בין שתי התוכנות.

שאלות:

- (1) נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'. להלן הציונים בסמסטר א' ו-ב' :

82	75	90	68	74	סמסטר א'
100	76	87	84	80	סמסטר ב'

נניח שהציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת פער הציונים בין סמסטר א' לבין סמסטר ב'.
- ב. האם על סמך רווח הסמך קיים הבדל בין הסמסטרים מבחינת תוחלת הציונים?
- ג. מה צריך לשנות בנתונים כדי שהמדגמים יהיו בלתי תלויים?
- (2) במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קווי זהב לבזק מבחינת ממוצע המחירים לשיחות בינ"ל. נדגמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. להלן התוצאות :

חברה/ מדינה	ארה"ב	קנדה	הולנד	פולין	מצרים	סין	יפן
בזק - X	1.5	2.1	2.2	3	3.5	3.2	4.2
קווי זהב - Y	1.4	2	1.9	3.1	3.3	3.2	4.2

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית עבור כל חברה, בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לתוחלת הפרש המחירים של שתי החברות.

תשובות סופיות:

- (1) א. $-19 < \mu_0 < 38$. ב. בביטחון של 95% לא קיים הבדל.
- ג. ראה הסבר בסרטון.
- (2) $-0.013 < \mu < 0.185$.

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

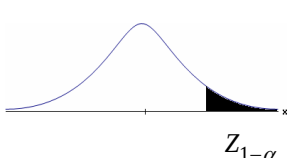
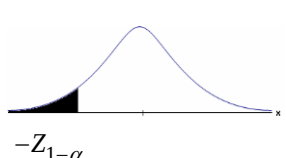
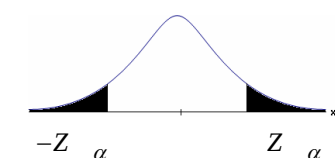
פרק 40 - בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)

תוכן העניינים

165	1. בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסיה ידועה
169	2. סיכוי לטעויות ועוצמה (ששונות האוכלוסיה ידועה)
175	3. קביעת גודל מדגם (ששונות האוכלוסיה ידועה)
178	4. מובהקות תוצאה - אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסיה ידועה)
183	5. הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)
185	6. מובהקות תוצאה - אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסיה לא ידועה)

בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסייה ידועה:

רקע:

השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:	$H_0: \mu \leq \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu \geq \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$
תנאים:	1. σ ידועה 2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0 :	$Z_{\bar{x}} > Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ דוחים את H_0	$Z_{\bar{x}} < -Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ דוחים את H_0	$Z_{\bar{x}} < -Z_{\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\bar{x}} > Z_{\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ דוחים את H_0

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

סטטיסטי המבחן:

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	נדחה H_0 אם מתקיים:

דוגמה:

יבול העגבניות מתפלג נורמלית עם תוחלת של 10 טון לדונם וסטיית תקן של 2.5 טון לדונם בעונה. משערים ששיטת זיבול חדשה תעלה את תוחלת היבול לעונה מבלי לשנות את סטיית התקן. נדגמו 4 חלקות שזוּבְלו בשיטה החדשה. היבול הממוצע שהתקבל היה 12.5 טון לדונם. בדקו את ההשערה ברמת מובהקות של 1%.

פיתרון:

אוכלוסייה: עגבניות.

המשתנה: $X =$ יבול העגבניות בטון לעונה.

הפרמטר: $\mu =$ תוחלת היבול בשיטת הזיבול החדשה.

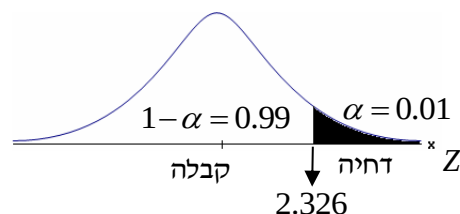
השערות:
 $H_0: \mu = 10$
 $H_1: \mu > 10$

תנאים:

1. $X \sim N$.

2. $\sigma = 2.5$.

כלל הכרעה:



נדחה את H_0 אם $Z_{\bar{X}} > 2.326$

תוצאות: $n = 4$, $\bar{x} = 12.5$

סטטיסטי המבחן: $Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

נציב: $Z_{\bar{X}} = \frac{12.5 - 10}{\frac{2.5}{\sqrt{4}}} = 2 < 2.326$

מסקנה:

לא נדחה H_0 (נקבל H_0).

ברמת מובהקות של 1% לא נוכל לקבל את הטענה ששיטת הזיבול החדשה מעלה את תוחלת היבול של העגבניות.

שאלות:

- (1) ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות. מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים. ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5. בהנחה שגם בשיטתו סטיית התקן תהיה 15 מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
- (2) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25.
 - א. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 2.5%?
 - ב. האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה עבור רמת מובהקות הגבוהה מ-5%?
- (3) מהנדס האיכות מעוניין לבדוק אם מכונה מכיילת (מאופסת). המכונה כוונה לחתוך מוטות באורך 50 ס"מ. לפי נתוני היצרן סטיית התקן בחיתוך המוטות היא 0.5 ס"מ. במדגם של 50 מוטות התקבל ממוצע אורך המוט 50.93 ס"מ. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
- (4) המשקל הממוצע של הספורטאים בתחום ספורט מסוים הוא 90 ק"ג, עם סטיית תקן 8 ק"ג. לפי דעת מומחים בתחום יש צורך בהורדת המשקל ובשימוש בדיאטה מסוימת שצריכה להביא להורדת המשקל. לשם בדיקת יעילות הדיאטה נלקח מדגם מקרי של 50 ספורטאים ובתום שנה של שימוש בדיאטה התברר שהמשקל הממוצע במדגם זה היה 84 ק"ג. יש לבדוק בר"מ של 10%, האם הדיאטה גורמת להורדת המשקל.
- (5) לפי מפרט נתון, על עובי בורג להיות 4 מ"מ עם סטיית תקן של 0.2 מ"מ. במדגם של 25 ברגים העובי הממוצע היה 4.07 מ"מ. קבעו ברמת מובהקות 0.05, האם עובי הברגים מתאים למפרט. הניחו כי עובי של בורג מתפלג נורמלית וסטיית התקן של עובי בורג היא אכן 0.2 מ"מ.
- (6) במחקר נמצא שתוצאה היא מובהקת ברמת מובהקות של 5% מה תמיד נכון? בחרו בתשובה הנכונה.
 - א. הגדלת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.
 - ב. הגדלת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.
 - ג. הקטנת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.
 - ד. הקטנת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.

(7) חוקר ערך מבחן דו צדדי ברמת מובהקות של α והחליט לדחות את השערת האפס.

אם החוקר היה עורך מבחן צדדי ברמת מובהקות של $\frac{\alpha}{2}$ אזי בהכרח:

- א. השערת האפס הייתה נדחית.
- ב. השערת האפס הייתה לא נדחית.
- ג. לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו במקרה זה.

(8) שני סטטיסטיקאים בדקו השערות: $H_0: \mu = \mu_0$ כנגד $H_1: \mu > \mu_0$,

עבור שונות ידועה ובאותה רמת מובהקות.

שני החוקרים קבלו אותו ממוצע במדגם אך לחוקר א' היה מדגם בגודל 100 ולחוקר ב' מדגם בגודל 200.

- א. אם חוקר א' החליט לדחות את H_0 , מה יחליט חוקר ב'? נמקו.
- ב. אם חוקר א' יחליט לא לדחות את H_0 , מה יחליט חוקר ב'? נמקו.

תשובות סופיות:

(1) נקבל H_0 , בר"מ של 5% לא נקבל את הטענה של המורה ששיטת הלימוד שלו מעלה את ממוצע הציונים.

(2) א. נדחה H_0 , בר"מ של 2.5% נקבל את תלונת אגודת הצרכנים בדבר הפחתת נפח המשקה בבקבוק.

ב. הגדלנו את רמת המובהקות לכן אנחנו נשארים בדחייה של H_0 והמסקנה לא תשתנה.

(3) נדחה H_0 , בר"מ של 5% נקבע שהמכונה לא מאופסת.

(4) נדחה H_0 , בר"מ של 0.1 נקבל את הטענה שהדיאטה יעילה ומפחיתה את המשקל הממוצע.

(5) נקבל H_0 , בר"מ של 0.05 נכריע שתוחלת עובי הבורג מתים למפרט.

(6) א'.

(7) ג'.

(8) א. לדחות. ב. לא ניתן לדעת.

סיכוי לטעויות ועוצמה (ששונות האוכלוסייה ידועה):

רקע:

מציאות	הכרעה		
		H_0	H_1
	H_0	אין טעות	טעות מסוג 1
	H_1	טעות מסוג 2	אין טעות

הגדרת הסתברויות:

הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 (רמת מובהקות):

$$\alpha = P(H_0 \text{ נכונה} \mid \text{לדחות את } H_0) = P_{H_0}(H_0 \text{ לדחות})$$

הסיכוי לבצע טעות מסוג 2:

$$\beta = P(H_0 \text{ לקבל את } H_0 \mid \text{לדחות את } H_0) = P_{H_1}(H_0 \text{ לקבל})$$

רמת בטחון:

$$(\alpha - 1) = P(H_0 \text{ לקבל את } H_0 \mid \text{לדחות את } H_0) = P_{H_0}(H_0 \text{ לקבל})$$

עוצמה:

$$(\beta - 1) = \pi = P(H_0 \text{ לדחות את } H_0 \mid \text{לדחות את } H_0) = P_{H_1}(H_0 \text{ לדחות})$$

התהליך לחישוב סיכוי לטעות מסוג שני:

השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$
תנאים:	1. σ ידועה 2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0 :	$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
חישוב β :	$P_{\mu_1} \left(\bar{X} < \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$	$P_{\mu_1} \left(\bar{X} > \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$	$P_{\mu_1} \left(\mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \mu_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$

התפלגות ממוצע המדגם: $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

התקנון:

דוגמה:

בתחילת השנה חשבון הטלפון הסלולארי הממוצע לאדם היה 200 ₪ עם סטיית תקן של 80 ₪ לחודש. בעקבות כניסתן של חברות טלפון סלולארית חדשות מעוניינים לבדוק האם כיום ממוצע חשבון הטלפון הסלולארי פחת. לצורך בדיקה דגמו באקראי 36 אנשים וחשבון הטלפון הסלולארי שלהם היה 150 ₪ בממוצע לחודש.

א. רשמו את השערות המחקר ובנו כלל הכרעה במונחי חשבון ממוצע מדגמי ברמת מובהקות של 5%.

ב. מה מסקנתכם? איזה סוג טעות אפשרית במסקנה?

ג. נניח שבמציאות כיום החשבון הממוצע הוא 160 ₪. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני?

ד. אם נקטין את רמת המובהקות מסעיף א', כיצד הדבר ישפיע על התשובה מסעיף ג'?

פתרון:

א. אוכלוסייה: משלמי חשבון טלפון סלולאר כיום.

המשתנה: X = חשבון הטלפון החודשי בשקלים.

הפרמטר: μ .

השערות:
 $H_0: \mu = 200$
 $H_1: \mu < 200$

תנאים:

1. $\mu = 200$.

2. $n = 36$.

$$\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, K = \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\alpha = 0.05$$

$$Z_{1-\alpha} = Z_{0.95} = 1.645$$

$$\text{נציב: שקלים } K = 200 - 1.645 \cdot \frac{80}{\sqrt{36}} = 178.07$$

כלל ההכרעה: דחה את H_0 אם שקלים $\bar{X} < 178.07$.

ב. ברמת מובהקות של 5% נכריע שאכן ממוצע חשבון הטלפון הסלולרי פחת מתחילת השנה.

ג. השערות:
 $H_0: \mu_0 = 200$
 $H_1: \mu < 200$

כלל ההכרעה: נדחה את H_0 אם $\bar{X} < 178.07$.

$$H_1: \bar{X} \sim N\left(160, \frac{80^2}{36}\right)$$

$$Z = \frac{178.07 - 160}{\frac{80}{\sqrt{36}}} = 1.36$$

$$\beta = P_{H_1} \left(\overset{\text{לקבל את}}{H_0} \right) = P_{H_1} (\bar{X} > 178.07) = 1 - \phi(136) = 1 - 0.9131 = 0.0869$$

ד. הקטנת α מגדילה את β .

שאלות:

(1) נתון ש: $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 1)$.

- להלן השערות של חוקר לגבי הפרמטר μ : $H_0: \mu = 5$, $H_1: \mu = 7$. מעוניינים ליצור כלל הכרעה המתבסס על הסמך תצפית בודדת כך שרמת המובהקות תהיה 5%.
- א. עבור אילו ערכים של X שידגם נדחית השערת H_0 ?
- ב. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני?
- ג. אם במדגם התקבל ש- $X = 6.9$ מה תהיה המסקנה ומה הטעות האפשרית?

- (2) לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. מעוניינים לבדוק אם כיום ממוצע מספר הילדים למשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות. במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה.
- א. רשמו כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קריטי ברמת מובהקות של 5%.
- ב. בהמשך לסעיף א' מה תהיה המסקנה ומהי הטעות האפשרית במסקנה?
- ג. אם באמת ממוצע מספר הילדים במשפחה פחת לכדי 2.1 מהי העצמה של הכלל מסעיף א'?

- (3) להלן נתונים על תהליך של בדיקת השערות על תוחלת:

$$H_0: \mu = 200, H_1: \mu \neq 200, \sigma = 30, n = 225$$

- א. רשמו כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קריטי וברמת מובהקות של 10%.
- ב. בהמשך לסעיף א', מהי העצמה אם התוחלת שווה ל-195?
- ג. הסבירו, ללא חישוב, איך העצמה תשתנה אם רמת המובהקות תהיה 5%?

- (4) מפעל לייצור צינורות מייצר צינור שקוטרו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 50

מ"מ וסטית תקן של 6 מ"מ. במחלקת ביקורת האיכות דוגמים בכל יום 81 צינורות ומוודדים את קוטרים, בכדי לבדוק, בעזרת מבחן סטטיסטי, האם מכונת הייצור מכוילת כנדרש או שקוטר הצינורות קטן מהדרוש.

- א. רשמו את ההשערות ואת כלל ההכרעה ברמת מובהקות של 5%.
- ב. אם ביום כלשהו מכונת הייצור התקלקלה והיא מייצרת את הצינורות בקוטר שתוחלתו 48 מ"מ בלבד (סטית התקן לא השתנתה), מה ההסתברות שהתקלה לא תתגלה בביקורת האיכות? כיצד נקראת הסתברות זו?
- ג. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף ב' תשתנה אם רמת המובהקות תגדל.
- ד. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף ב' תשתנה אם התוחלת האמיתית היא 47 ולא 48 מ"מ.

- (5) להלן השערות של מחקר: $H_0: \mu = 50$, $H_1: \mu = 58$. מעוניינים לדגום 100 תצפיות. ידוע שסטיית התקן של ההתפלגות הינה 20.
- א. בנו כלל הכרעה שהסיכוי לטעות מסוג שני בו הוא 10%. מהי רמת המובהקות?
- ב. כיצד הייתה משתנה רמת המובהקות אם (כל סעיף בפני עצמו)?
- i. סטיית התקן הייתה יותר גדולה.
- ii. הסיכוי לטעות מסוג שני גדול יותר.

השאלות שלהלן הן שאלות רב-ברירה, בחרו בתשובה הנכונה ביותר:

- (6) אם חוקר החליט להגדיל את רמת המובהקות במחקר שלו אזי:
- א. הסיכוי לטעות מסוג ראשון גדל.
- ב. העוצמה של המבחן גדלה.
- ג. הסיכוי לטעות מסוג שני גדל.
- ד. תשובות א' ו-ב' נכונות.
- (7) חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן:
- א. השערת האפס נכונה.
- ב. השערת האפס נדחתה.
- ג. השערת האפס לא נדחתה.
- ד. אף אחת מהתשובות לא נכונה בהכרח.

- (8) מה המצב הרצוי לחוקר המבצע בדיקת השערה:

$1 - \beta$	α
גדולה	א. גדולה
קטנה	ב. גדולה
גדולה	ג. קטנה
קטנה	ד. קטנה

- (9) נערך שינוי בכלל ההחלטה של בדיקת השערה מסוימת ובעקבותיו אזור דחיית H_0 קטן. כל שאר הגורמים נשארו ללא שינוי. כתוצאה מכך:
- א. הן α , והן $1 - \beta$, יקטנו.
- ב. α יישאר ללא שינוי ואילו $1 - \beta$ יגדל.
- ג. α יגדל ואילו $1 - \beta$ יקטן.
- ד. הן α והן $1 - \beta$ יגדלו.

- (10) ידוע כי לחץ דם תקין באוכלוסייה הוא 120. רופא מניח שלחץ הדם בקרב עיתונאים גבוה יותר מהממוצע באוכלוסייה. הוא לקח מדגם של 60 עיתונאים וקיבל ממוצע 137. על סמך המדגם, הוא בודק טענתו ברמת מובהקות 0.02 ומסיק שלחץ הדם בקרב העיתונאים אינו גבוה יותר. מה הטעות האפשרית שהרופא עושה?
- טעות מסוג ראשון.
 - טעות מסוג שני.
 - טעות מסוג שלישי.
 - אין טעות במסקנתו.

תשובות סופיות:

- (1) א. מעל 6.645. ב. 0.3594.
ג. דחינו את H_0 , תתכן טעות מסוג ראשון.
- (2) א. נדחה H_0 אם $\bar{X} < 2.24$. ב. נדחה H_0 ג. 1.
- (3) א. נדחה H_0 אם $\bar{X} > 203.29$ או $\bar{X} < 196.71$. ב. 0.8051. ג. תקטן.
- (4) א. נדחה H_0 אם $\bar{X} < 48.9$. ב. 0.0885. ג. תקטן. ד. תקטן.
- (5) א. 0.0033. ב. i. רמת המובהקות הייתה קטנה.
ב. ii. רמת המובהקות הייתה גדלה.
- (6) ד'.
- (7) ג'.
- (8) ג'.
- (9) א'.
- (10) ב'.

קביעת גודל מדגם (ששונות האוכלוסייה ידועה):

רקע:

השערות המחקר הן: $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu = \mu_1$.

סטיית התקן של האוכלוסייה ידועה σ ומעוניינים לבצע מחקר שרמת המובהקות לא תעלה על α והסיכוי לטעות מסוג שני לא יעלה על β .

$$\text{הנוסחה הבאה נותנת את גודל המדגם הרצוי: } n \geq \left(\frac{(Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta}) \times \sigma}{\mu_0 - \mu_1} \right)^2$$

דוגמה:

משרד החינוך מפעיל בגן חובה שיטת חינוך שפותחה בשנת 1995. לפי שיטת חינוך זו תוחלת הציון במבחן אוצר מילים לגיל הרך הוא 70. אנשי חינוך החליטו לבדוק שיטת חינוך שפותחה בהולנד הנותנת שם תוחלת ציון אוצר מילים של 80. נניח שציוני מבחן זה מתפלגים נורמאלית עם $\sigma = 17$. כדי לבדוק האם גם בישראל הפעלת שיטת החינוך ההולנדית תעבוד בגנים, רוצים לבנות מחקר ברמת מובהקות של 5%. כמו כן, מעוניינים שאם בהפעלת השיטה ההולנדית תוחלת הציונים תעלה לכדי 80, המחקר יגלה זאת בסיכוי של 90%. כמה ילדי גן חובה דרושים למחקר?

פתרון:

האוכלוסייה: ילדי גן חובה.

המשתנה: $X =$ ציון במבחן אוצר מילים.

הפרמטר: μ .

השערות: $H_0: \mu = 70$
 $H_1: \mu = 80$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2 = 17^2)$$

אם בהפעלת השיטה ההולנדית התוחלת תעלה ל-80, נגלה זאת בסיכוי 90%.

$$n \geq \left(\frac{(Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta}) \times \sigma}{\mu_0 - \mu_1} \right)^2$$

$$\alpha = 0.05$$

$$1 - \beta = 0.9$$

$$\mu_0 = 70$$

$$\mu_1 = 80$$

$$\sigma = 17$$

$$Z_{1-\alpha} = Z_{0.95} = 1.645$$

$$Z_{1-\beta} = Z_{0.9} = 1.282$$

$$n \geq \left(\frac{(1.645 + 1.282) \times 17}{70 - 80} \right)^2 = 24.76 \quad \text{נציב:}$$

$$\text{לכן, } n_{\min} = 25.$$

שאלות:

- (1) במבחן אינטליגנציה הציונים מתפלגים נורמאלית עם סטיית תקן 8 וממוצע 100. פסיכולוג מעוניין לבדוק את הטענה שבאוכלוסיות במצב סוציו אקונומי נמוך תוחלת הציונים היא 95. אם מעוניינים לגלות את הטענה בהסתברות של לפחות 99% כשרמת המובהקות היא 5% מהו גודל המדגם הדרוש?
- (2) משרד התקשורת טוענים שאדם מדבר בממוצע 180 דקות בחודש בטלפון הסלולרי. חברות הטלפון הסלולרי טוענות שאינפורמציה זו אינה נכונה ואדם מדבר בממוצע פחות: כ-160 דקות. לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של זמן השיחה החודשי ידוע ושווה ל-60 דקות. כמה אנשים יש לדגום כך שאם טענת משרד התקשורת נכונה נדחה אותה בסיכוי של 5% (איך קוראים להסתברות זאת?) כמו כן אם טענת חברות הטלפון הסלולרית נכונה המחקר יגלה זאת בסיכוי של 90% (איך קוראים להסתברות זאת?).
- (3) השערות המחקר הן: $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu = \mu_1$. כמו כן נתון שהמשתנה מתפלג נורמלית עם סטיית התקן ידועה σ מעוניינים לבצע מחקר שרמת המובהקות לא תעלה על α והסיכוי לטעות מסוג שני לא יעלה על β . הוכיחו שגודל המדגם הרצוי לכך יהיה:
- $$n \geq \left(\frac{(Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta}) \times \sigma}{\mu_0 - \mu_1} \right)^2$$

תשובות סופיות:

- (1) 41.
(2) 78.
(3) שאלת הוכחה.

מובהקות תוצאה – אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסייה ידועה):

רקע:

דרך נוספת להגיע להכרעות שלא דרך כלל הכרעה, היא דרך חישוב מובהקות התוצאה:

באמצעות תוצאות המדגם מחשבים את מובהקות התוצאה שמסומן ב- p_v . את רמת המובהקות החוקר קובע מראש לעומת זאת, את מובהקות התוצאה החוקר יוכל לחשב רק אחרי שיהיו לו את התוצאות.

המסקנה של המחקר תקבע לפי העיקרון הבא: אם $p_v \leq \alpha$, דוחים את H_0 . מובהקות התוצאה זה הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = P_{H_0}$.

אם ההשערה היא דו צדדית:

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = 2P_{H_0}$.

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

שערת האפס: השערה אלטרנטיבה:		$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	
1. σ ידועה		תנאים:	
2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול		p-value	
$P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x})$	$P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x})$	אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x}) \Leftarrow \bar{x} > \mu_0$ אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x}) \Leftarrow \bar{x} < \mu_0$	

כאשר בהנחת השערת האפס: $Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, $\bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

דוגמה:

המשקל הממוצע של מתגייסים לצבא לפני 20 שנה היה 65 ק"ג. מחקר מעוניין לבדוק האם כיום המשקל הממוצע של מתגייסים גבוה יותר. נניח שמשקל המתגייסים מתפלג נורמאלי עם סטיית תקן של 12 ק"ג. במדגם של 16 מתגייסים התקבל משקל ממוצע של 71 ק"ג.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה המסקנה אם רמת המובהקות היא 5% ואם רמת המובהקות היא 1%?

פתרון:

א. אוכלוסייה: המתגייסים לצבא כיום.

משתנה: X = משקל בק"ג.

פרמטר: μ .

השערות:
 $H_0: \mu = 65$
 $H_1: \mu > 65$

תנאים:

1. $X \sim N$.

2. $\sigma = 12$.

תוצאות מדגם:

$$n = 16$$

$$\bar{X} = 71$$

$$P_V = P_{H_0} \left(\begin{array}{c} \text{לתוצאות} \\ \text{המדגם} \\ \text{וקיצוני} \end{array} \right) = P_{H_0} (\bar{X} \geq 71) = 1 - \phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{71 - 65}{\frac{12}{\sqrt{16}}} = 2$$

$$\alpha_{\min} = 0.0228$$

שאלות:

- (1) להלן השערות של מחקר: $H_0: \mu = 70$, $H_1: \mu > 70$. המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית עם סטיית תקן 20. במדגם מאותה אוכלוסייה התקבלו התוצאות הבאות: $n = 100$, $\bar{x} = 74$. מהי מובהקות התוצאה?
- (2) השכר הממוצע במשק בשנת 2012 היה 8800 ₪ עם סטיית תקן 2000. במדגם שנעשה אתמול על 100 עובדים התקבל שכר ממוצע 9500 ₪. מטרת המחקר היא לבדוק האם כיום חלה עליה בשכר. עבור אילו רמות מובהקות שיבחר החוקר יוחלט שחלה עליה בשכר הממוצע במשק?
- (3) אדם חושד שחברת ממתקים לא עומדת בהתחייבויותיה, ומשקלו של חטיף מסוים אותו הוא קונה מדי בוקר נמוך מ-100 גרם. חברת הממתקים טוענת מצידה שהיא אכן עומדת בהתחייבויותיה. ידוע כי סטיית התקן של משקל החטיף היא 12 גרם. האדם מתכוון לשקול 100 חפיסות חטיפים ולאחר מכן להגיע להחלטה. לאחר הבדיקה הוא קיבל משקל הממוצע של 98.5 גרם.
 - א. רשמו את השערות המחקר.
 - ב. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה דוחים את השערת האפס?
 - ג. מהי רמת המובהקות המקסימלית עבורה נקבל את השערת האפס?
 - ד. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5?
- (4) מכונה לחיתוך מוטות במפעל חותכת מוטות באורך שמתפלג נורמלית עם תוחלת אליה כוונה המכונה וסטיית תקן 2 ס"מ. ביום מסוים כוונה המכונה לחתוך מוטות באורך 80 ס"מ. אחראי האיכות מעוניין לבדוק האם המכונה מכוילת. לצורך כך נדגמו מקו הייצור 16 מוטות שנחתכו אורכן הממוצע היה 81.7 ס"מ.
 - א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה נכריע שהמכונה לא מכוילת?
 - ב. אם נוסיף עוד תצפית שערכה יהיה 82 ס"מ, כיצד הדבר ישפיע על התשובה של הסעיף הקודם?
 - ג. הכרע ברמת מובהקות של 5% האם המכונה מכוילת.
- (5) אם מקבלים בחישובים אלפא מינימלית (P value) קטנה מאד, סביר להניח כי החוקר ידחה את השערת האפס בקלות. נכון/לא נכון? נמק.

- (6) בבדיקת השערות התקבל שה- $p\text{-value} = 0.02$. מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 1%? בחרו בתשובה הנכונה.
- א. יקבל את השערת האפס בכל מקרה.
 - ב. ידחה את השערת האפס מקרה.
 - ג. ידחה את השערת האפס רק אם המבחן הנו דו צדדי.
 - ד. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.
- (7) מובהקות התוצאה (PV) היא גם (בחרו בתשובה הנכונה):
- א. רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.
 - ב. רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.
 - ג. רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר שטרם קיבל את תוצאות המחקר.
 - ד. רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.
- (8) בבדיקת השערות מסוימת התקבל: $p\text{ value} = 0.0254$ לכן (בחרו בתשובה הנכונה):
- א. ברמת מובהקות של 0.01 אך לא של 0.05 נדחה את H_0 .
 - ב. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 לא נדחה את H_0 .
 - ג. ברמת מובהקות של 0.05 אך לא של 0.01 נדחה את H_0 .
 - ד. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 נדחה את H_0 .

תשובות סופיות:

- (1) 0.0228.
- (2) עבור כל רמת מובהקות סבירה.
- (3) א. $H_0: \mu = 100$
 $H_1: \mu < 100$
 ב. 0.1056 ג. 0.1056.
- ד. נכריע שיש עמידה בהתחייבות של החברה.
- (4) א. 0.0006 ב. יקטן. ג. נכריע שאין כיול.
- (5) נכון.
- (6) א'.
- (7) א'.
- (8) ג'.

הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על תוחלת (ממוצע):

רקע:

ניתן לבצע בדיקת השערות דו צדדית ברמת מובהקות α על μ :

$$H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$$

על ידי בניית רווח סמך ברמת סמך של $1-\alpha$ ל- μ :

אם μ_0 נופל ברווח $\leftarrow$ נקבל את H_0 .

אם μ_0 לא נופל ברווח $\leftarrow$ נדחה את H_0 .

דוגמה:

חוקר ביצע בדיקת השערות לתוחלת. להלן השערותיו :

$$H_0: \mu = 80, H_1: \mu \neq 80, \alpha = 5\%$$

החוקר בנה רווח סמך ברמה של 90% וקיבל: $79 < \mu < 84$.
האם אפשר לדעת מה מסקנתו, ואם כן מהי?

פתרון (פתרון מלא בהקלטה):

רווח הסמך ברמת סמך של 90% מכיל "80".

ברמת סמך של 95% רווח הסמך יגדל ויכיל "80".

לכן, ברמת מובהקות של 5% נקבל H_0 .

שאלות:

- (1) חוקר רצה לבדוק את ההשערות הבאות: $H_0: \mu = 90$, $H_1: \mu \neq 90$. החוקר בנה רווח סמך לתוחלת ברמת סמך של 95% וקיבל את רווח הסמך הבא: (87, 97).
אם החוקר מעוניין לבצע בדיקת השערות ברמת מובהקות של 1% האם ניתן להגיע למסקנה ע"ס רווח הסמך? נמקו.
- (2) חוקר מעוניין לבדוק השפעת דיאטה חדשה על רמת הסוכר בדם. ידוע כי מספר מיליגרם הסוכר בסמ"ק דם הוא משתנה מקרי שמתפלג נורמלית עם סטיית תקן 10.4 מ"ג. נלקח מדגם של 60 נבדקים שניזונו מדיאטה זו. נמצא כי ממוצע מספר המיליגרם סוכר היה 115.5 מ"ג לסמ"ק.
א. בנה רווח סמך ברמת סמך 95% לתוחלת רמת הסוכר בדם אצל הניזונים מדיאטה זו.
ב. ידוע שתוחלת רמת הסוכר בדם באוכלוסיה היא 90 מ"ג לסמ"ק. האם לדעתך ניתן להסיק על סמך תוצאת סעיף א שהדיאטה משפיעה על רמת הסוכר בדם? הסבירו.
- (3) יצרן אנטיביוטיקה רושם על גבי התרופות שכמות הפנצילין היא 200 מ"ג לקפסולה. משרד הבריאות ביצע מדגם של 8 קפסולות אקראיות מקו הייצור ומצא שבממוצע יש 196 מ"ג פנצילין לקפסולה עם סטיית תקן מדגמית של 5 מ"ג. בהנחה וכמות הפנצילין בקפסולה מתפלגת נורמלית.
א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לממוצע כמות הפנצילין לקפסולה המיוצרת על ידי יצרן האנטיביוטיקה.
ב. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם יש אמת באינפורמציה המסופקת על ידי היצרן.

תשובות סופיות:

- (1) נקבל השערת.
(2) א. $112.87 \leq \mu \leq 118.13$.
ב. נכריע שהדיאטה משפיעה על תוחלת רמת הסוכר בדם.
(3) א. $191.8 \leq \mu \leq 200.2$. ב. נכריע שיש אמת בפרסום.

מובהקות תוצאה – אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסייה לא ידועה):

רקע:

נזכיר שהמסקנה של המחקר תיקבע לפי העיקרון הבא: אם $p_v \leq \alpha$ דוחים את H_0 . מובהקות התוצאה היא הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = P_{H_0}$.

אם ההשערה היא דו צדדית:

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = 2P_{H_0}$.

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:
1. אינה ידועה או 2. מדגם מספיק גדול $X \sim N$			תנאים:
$P_{H_0} \left(\bar{X} \geq \bar{x} \right)$	$P_{H_0} \left(\bar{X} \leq \bar{x} \right)$	אם $2 \cdot P_{H_0} \left(\bar{X} \geq \bar{x} \right) \leftarrow \bar{x} > \mu_0$ אם $2 \cdot P_{H_0} \left(\bar{X} \leq \bar{x} \right) \leftarrow \bar{x} < \mu_0$	p-value

$$t_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$

$$d.f = n-1$$

דוגמה:

ממוצע זמן הנסיעה של אדם לעבודה הינו 40 דקות. הוא מעוניין לבדוק דרך חלופית שאמורה להיות יותר מהירה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שבהם הוא נוסע בדרך החלופית. זמני הנסיעה שקיבל בדקות הם: 34, 40, 30, 32, 27. הניחו שזמן הנסיעה מתפלג נורמלי.

- א. רשמו את השערות המחקר.
- ב. מצאו חסמים למובהקות התוצאה.
- ג. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

פתרון:

אוכלוסייה: כלל הנסיעות לעבודה בדרך החלופית.

משתנה: X = זמן נסיעה בדקות.

תנאים: $X \sim N$.

פרמטר: μ .

א. השערות:
 $H_0: \mu = 40$
 $H_1: \mu < 40$

ב. תוצאות המדגם:

$$n = 5, \bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{34 + 40 + \dots}{5} = 32.6$$

$$S^2 = \frac{\sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} = \frac{34^2 + 40^2 - \dots - 5 \cdot 32.6^2}{5-1} = 23.4$$

$$S = \sqrt{23.4}$$

$$t_{\bar{X}} = \frac{\frac{\bar{X} - \mu_0}{S}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{32.6 - 40}{\frac{4.88}{\sqrt{5}}} = -3.39$$

$$P_V = P_{H_0} = (\bar{X} \leq 32.6) = P(t \leq -3.39)$$

$$d.f = 5 - 1 = 4$$

$$1\% < P_V < 2.5\%$$

$P_V < \alpha = 0.05$, לכן דוחים את H_0 .

מסקנה: בר"מ של 5% נכריע שהדרך החלופית מהירה יותר.

שאלות:

(1) קו ייצור אריזות סוכר נארזות כך שהמשקל הממוצע של אריזות הסוכר צריך להיות אחד קילוגרם. בכל יום דוגמים מקו הייצור 5 אריזות במטרה לבדוק האם קו הייצור תקין. בבדיקה דגמו 5 אריזות סוכר ולהלן משקלן בגרמים: 1024, 1008, 1005, 996, 997.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מהי מובהקות התוצאה? הצג חסמים.

ג. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

(2) חוקר בדק את הטענה כי פועלים העובדים במשמרת לילה איטיים יותר מפועלים העובדים ביום. ידוע כי משך הזמן הממוצע הדרוש לייצר מוצר מסוים ביום הוא 6 שעות. במדגם מיקרי של 25 פועלים שעבדו במשמרת לילה נמצא כי הזמן הממוצע לייצר אותו מוצר הוא 7 שעות עם סטית תקן של 3 שעות. מהי ה- α המינימלית שלפיה ניתן להחליט שאכן העובדים במשמרת לילה איטיים יותר?

(3) הגובה של מתגייסים לצה"ל מתפלג נורמלית. במדגם של 25 מתגייסים מדדו את הגבהים שלהם בס"מ והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\bar{x} = 176.2, \sum (x_i - \bar{x})^2 = 2832$$

מטרת המחקר היא לבדוק האם תוחלת הגבהים של המתגייסים גבוה מ-174 ס"מ באופן מובהק.

מהי בקרוב מובהקות התוצאה ועל פיה מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 6%?

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \begin{array}{ll} \text{א.} & H_0: \mu = 1000 \\ & H_1: \mu \neq 1000 \\ \text{ב.} & 20\% \leq P_v \leq 50\% \end{array}$$

ג. ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקו הייצור אינו תקין.

(2) 10%.

(3) 1.01, נקבל את H_0 .

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

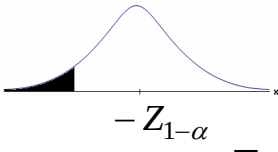
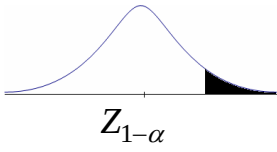
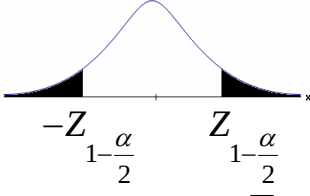
פרק 41 - בדיקת השערות על הפרש פרופורציות

תוכן העניינים

1. כללי 188

בדיקת השערות על הפרש פרופורציות

רקע

השערת האפס : השערה אלטרנטיבית:	1. מדגמים בלתי תלויים	2. מדגמים גדולים	
$H_0: p_1 - p_2 = 0$ $H_1: p_1 - p_2 > 0$	$H_0: p_1 - p_2 = 0$ $H_1: p_1 - p_2 < 0$	$H_0: p_1 - p_2 = 0$ $H_1: p_1 - p_2 \neq 0$	
תנאים:	1. מדגמים בלתי תלויים	2. מדגמים גדולים	כלל ההכרעה: אזור הדחייה של:
	$Z_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} < -Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ - דוחים את H_0	$Z_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} > Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ - דוחים את H_0	
	או $Z_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ - דוחים את H_0		

$$Z_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1} + \frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}} \quad \text{סטטיסטי המבחן:}$$

$$\hat{p} = \frac{y_1 + y_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2} \quad \text{כאשר הפרופורציה המשוקללת:}$$

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0	
$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 < 0 - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1} + \frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}$	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 > 0 + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1} + \frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}$ או $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 < 0 - Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1} + \frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}$
$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 > 0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1} + \frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}$	

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \sim N(p_1 - p_2, \frac{p_1 \cdot q_1}{n_1} + \frac{p_2 \cdot q_2}{n_2}) \quad : \hat{p}_1 - \hat{p}_2 \text{ התפלגות של}$$

$$Z_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{n_2}}}$$

תקנון:

$$Z_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} \stackrel{H_0}{=} \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1} + \frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}}$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נדגמו 80 סטודנטים שנבחנו במיקרו-כלכלה. מתוכם 60 עברו את הבחינה.
 נדגמו 100 סטודנטים שנבחנו בסטטיסטיקה א'. מתוכם 82 עברו את הבחינה.
 האם שיעור העוברים את הבחינה בסטטיסטיקה גבוה מאשר מהבחינה במיקרו כלכלה? בדקו ברמת מבוהקות של 10%.

שאלות

- (1) במדגם של 200 גברים, 8% היו מובטלים. במדגם של 180 נשים, 10% מהן היו מובטלות.
האם קיים הבדל מובהק בין פרופורציית המובטלים לפרופורציית המובטלות?
בדקו ברמת מובהקות של 5%.
- (2) אחוז בעלי רישיון נהיגה בקרב האוכלוסייה הבוגרת הינו 60%. במדגם של 300 בוגרים מתל אביב 204 היו בעלי רישיון נהיגה.
במדגם של 220 בוגרים מירושלים 100 היו בעלי רישיון נהיגה.
א. ברמת מובהקות של 5% האם תקבלו את הטענה שאחוז בעלי הרישיון בתל אביב גבוה מהאחוז הארצי?
ב. ברמת מובהקות של 10% האם תקבלו את הטענה שאחוז בעלי הרישיון נהיגה בתל אביב גבוה מאחוז בעלי רישיון הנהיגה בירושלים?
- (3) נדגמו 500 בוגרים מתוכם 200 גברים והיתר נשים. במדגם התקבל: מתוך הגברים ל-48% תעודת בגרות. מתוך הנשים ל-58% תעודת בגרות. מטרת המחקר היא לבדוק האם שיעור הזכאיות לבגרות גבוה משיעור הזכאים.
א. מהי מובהקות התוצאה?
ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 8%?
- (4) במדגם שנערך על 100 פרות מחוות בדרום הארץ התקבל כי 20 פרות נושאות וירוס מסוים. במדגם שנערך על 200 פרות מחוות בצפון הארץ התקבל כי 10 מתוכן נושאות וירוס גם כן.
א. בנו מבחן ברמת מובהקות של 5% לבדיקת הטענה כי הווירוס תקף את פרות הדרום באופן משמעותי יותר מאשר את הפרות בצפון הארץ.
ב. מהי המסקנה לבדיקת הטענה של סעיף א ומהי הטעות האפשרית במסקנה?
ג. מהי עוצמת המבחן אם שיעור הפרות בדרום עם הווירוס גבוה ב-10% משיעור הפרות בצפון עם הווירוס?
ד. כיצד העוצמה תשתנה אם נגדיל את רמת המובהקות?

תשובות סופיות

- (1) לא נדחה את H_0 .
- (2) א. נדחה H_0 .
ב. נדחה H_0 .
- (3) א. 0.0139
ב. נדחה H_0 .
- (4) א. ראה סרטון.
ב. נדחה H_0 .
ג. 0.8238
ד. תגדל.

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

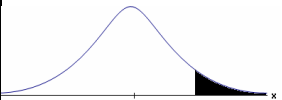
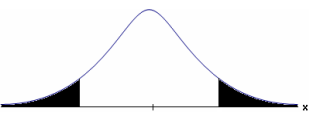
פרק 42 - בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

תוכן העניינים

1. כששונויות האוכלוסייה אינן ידועות והמדגמים גדולים..... 192
2. כששונויות האוכלוסייה לא ידועות ומניחים שהן שוות..... 195

בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

כשהשונות של האוכלוסייה לא ידועות והמדגמים גדולים – רקע

השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:	השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:	השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:	השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:
$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 > c$	$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 < c$	$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 \neq c$	תנאים: 1. מדגמים בלתי תלויים 2. σ_1, σ_2 לא ידועות 3. מדגמים מספיק גדולים
$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ דוחים את H_0	$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ דוחים את H_0	$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ דוחים את H_0	כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0 :

סטטיסטי המבחן:
$$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - c}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

נדחה H_0 אם מתקיים:	
$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$ או $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$
$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$	

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נרצה לבדוק האם קיים הבדל בין ממוצע ציוני הפסיכומטרי של חיילים לממוצע ציוני הפסיכומטרי של תלמידי תיכון. במדגם של 46 נבחנים חיילים התקבל ממוצע 543 וסטיית תקן 123. במדגם של 50 תלמידי תיכון התקבל ממוצע 508 וסטיית תקן 178. מה המסקנה ברמת מובהקות 5%?

שאלות

(1) חברה להנדסת בניין מעוניינת להשוות ברמת הקשיות של שני סוגי ברגים. במדגם של 35 ברגים מסוג א' התקבל רמת קשיות ממוצעת של 28 יחידות וסטיית תקן 4, ובמדגם של 45 ברגים מסוג ב' התקבל רמת קשיות ממוצעת של 25 וסטיית תקן 6. האם על סמך תוצאות המדגם יש הבדל בין סוגי הברגים מבחינת רמת הקשיות שלהם? בדקו ברמת מובהקות של 5%.

(2) כדי לבדוק האם נהגים השותים תחת השפעת אלכוהול נוהגים מהר יותר מאלו שאינם שותים בוצע מדגם שבו בדקו את המהירות המקסימאלית של כל נהג בקמ"ש. להלן התוצאות:

S	$\bar{X}$	גדול מדגם	
20	80	70	נהגים השותים אלכוהול
15	60	100	נהגים שאינם שותים אלכוהול

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

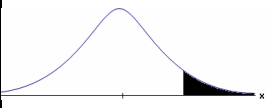
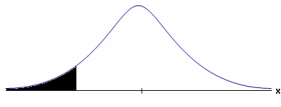
תשובות סופיות

(1) נדחה את H_0 .

(2) א. 0. ב. נדחה את H_0 .

בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

כששונות האוכלוסייה לא ידועות ומניחים שהן שוות – רקע

השערת האפס: השערה אלטרנטיבית: תנאים:	$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 > c$	$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 < c$	$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 \neq c$
1. מדגמים בלתי תלויים 2. σ_1, σ_2 לא ידועות אך שוות 3. המשתנים בכל אוכלוסייה מתפלגים נורמלית	$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$  $t_{1-\alpha, n_1+n_2-2}$ דוחים את H_0	$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$  $-t_{1-\alpha, n_1+n_2-2}$ דוחים את H_0	$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}$ או $t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}$  $-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}$ דוחים את H_0

$$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - c}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}}$$

סטטיסטי המבחן:

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

השונות המשוקללת:

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

נדחה H_0 אם מתקיים:	
$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$ או $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$
$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$	

דוגמה (פתרון בהקלטה):

חברה המייצרת מוצרי בנייה טוענת שפיתחה סגסוגת (תערובת מתכות) שטמפרטורת ההתכה שלה גבוהה משמעותית מטמפרטורת ההתכה של הסגסוגת לבנייה שמשתמשים בה כיום לבניית בניינים. לצורך בדיקת טענת המחקר נדגמו 10 יחידות של מתכות מהסוג הישן ו-12 יחידות של מתכות מהסוג החדש. להלן תוצאות המדגם:

טמפרטורת ההתכה הממוצעת במתכת הישנה 1170 מעלות עם אומד חסר הטיה לשונות $S^2 = 200$.

טמפרטורת ההתכה הממוצעת במתכת החדשה 1317 מעלות עם אומד חסר הטיה לשונות $S^2 = 260$.

נניח לצורך פתרון שטמפרטורת ההתכה מתפלגת נורמאלית עם אותה שונות במתכות השונות. בדקו ברמת מובהקות של 5%.

שאלות

- (1) להלן נתונים של שטחי דירות מתוך דירות שנבנו בשנת 2012 ובשנת 2013 (במ"ר):

120	94	90	130	95	112	120	2012
	69	74	105	91	82	100	2013

בדקו שבשנת 2013 הייתה ירידה משמעותית בשטחי הדירות לעומת שנת 2012 עבור רמת מובהקות של 5%.
הניחו ששטחי הדירות בכל שנה מתפלגים נורמלית עם אותה שונות.

- (2) נדגמו 15 ישראלים ו-15 אמריקאים. כל הנדגמים נגשו למבחן IQ. להלן תוצאות המדגם:

המדינה	ישראל	ארה"ב
גודל המדגם	15	15
סכום הציונים	1560	1470
סכום ריבועי הציונים	165,390	147,560

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל של נקודה בין ישראלים לאמריקאים מבחינת ממוצע הציונים במבחן ה-IQ לטובת ישראל.
רשמו את כל ההנחות הדרושות לצורך פתרון התרגיל.

- (3) להלן תוצאות מדגם הבדק אורך חיים של נורות מסוג W60 ומסוג W100. אורך החיים נמדד בשעות.

הקבוצה	60W	100W
$\bar{X}$	1007	956
S	80	72
n	13	15

- א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W60 דולקות בממוצע יותר מאשר נורות מסוג W100. רשמו את כל ההנחות הדרושות לפתרון.
ב. עבור איזו רמת מובהקות ניתן לקבוע שנוורות מסוג W60 דולקות בממוצע יותר מאשר נורות מסוג 100?
ג. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W60 דולקות יותר מ 1000 שעות. רשמו את כל ההנחות הדרושות.

תשובות סופיות

- (1) נדחה את H_0 .
- (2) הנחות:
1. סטיות התקן שוות.
 2. המשתנים מתפלגים נורמלית.
- נקבל את H_0 .
- (3) א. נדחה את H_0 . ב. רמת מובהקות של לפחות 5%.
- ג. לא נדחה את H_0 .

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

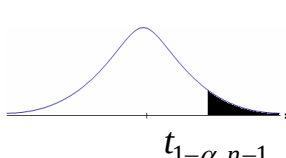
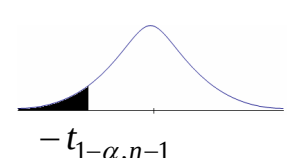
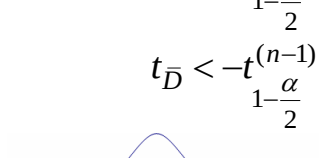
פרק 43 - בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגמים מזווגים

תוכן העניינים

1. בדיקת השערות למדגמים מזווגים.....199

בדיקת השערות על תוחלת ההפרשים במדגמים מזווגים (תלויים)

בדיקת השערות למדגמים מזווגים – רקע

השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:	$H_0: \mu_D = C$ $H_1: \mu_D > C$	$H_0: \mu_D = C$ $H_1: \mu_D < C$	$H_0: \mu_D = C$ $H_1: \mu_D \neq C$
תנאים:	1. σ_D אינה ידועה 2. $D \sim N$ או מדגם מספיק גדול		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0 :	$t_{\bar{D}} > t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $t_{1-\alpha, n-1}$ - דוחים את H_0	$t_{\bar{D}} < -t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $-t_{1-\alpha, n-1}$ - דוחים את H_0	$t_{\bar{D}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$ או $t_{\bar{D}} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$  $-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ - דוחים את H_0
חלופה לכלל הכרעה: נדחה H_0 אם מתקיים:	$\bar{D} > C + t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$	$\bar{D} < C - t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$	$\bar{D} > C + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$ ו $\bar{D} < C - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$

$$S_D^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n D_i^2 - n\bar{D}^2}{n-1}, \quad t_{\bar{D}} = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}}$$

סטטיסטי המבחן:

דוגמה (פתרון בהקלטה):

חברה שיווקית מעוניינת לבדוק את טענת רשת השיווק "מגה בעיר" הטוענת שמחירה נמוכים מהמחירים מרשת השיווק "שופרסל". לצורך הבדיקה נבחרו באקראי 4 מוצרים שונים. המחירים נבדקו בשתי הרשתות. להלן המחירים:

המוצר / רשת	מגה בעיר	שופרסל
שמפו	17	18
ג'ל כביסה	48	57
עוגת גבינה	35	35
לחם	12	10
קפה נמס	49	47
בקבוק יין	113	142
גבינה בולגרית	20	26

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמאלית, בדקו ברמת מובהקות של 5% את טענת רשת "מגה בעיר".

שאלות

- (1) במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין חברת X לחברת Y מבחינת המחירים לשיחות בינ"ל. נדגמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. להלן התוצאות:

חברה/מדינה	ארה"ב	קנדה	הולנד	פולין	מצרים	סין	יפן
X	1.5	2.1	2.2	3	3.5	3.2	4.2
Y	1.4	2	1.9	3.1	3.2	3.2	4.2

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית בכל חברה, בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין החברות מבחינת המחירים במוצא?

- (2) מכון המכין לפסיכומטרי טוען שהוא מעלה את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות. 8 נבחנים נבדקו לפני ואחרי שהם למדו במכון. להלן התוצאות שהתקבלו:

לפני	506	470	420	640	670	390	500	590
אחרי	570	540	430	610	680	510	520	580

מה מסקנתכם ברמת מובהקות 5%? הניחו שציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית.

- (3) נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'. להלן הציונים שלהם בסמסטר א' ו- ב':

סטטיסטיקה א'	74	68	90	75	82
סטטיסטיקה ב'	80	84	87	76	100

פורסם שתלמידים שמסיימים את סמסטר ב' משפרים במוצא את הציונים ב-5 נקודות לעומת סמסטר א'. הניחו שהציונים מתפלגים נורמלית.

- א. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שהשיפור הוא יותר מ-5 נקודות?
 ב. על סמך הסעיף הקודם, מהי רמת המובהקות המינימלית להכרעה שהשיפור הוא יותר מ-5 נקודות?
 ג. לאור זאת, מה המסקנה ברמת מובהקות של 10%?

- (4) לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה. לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים נורמלית ללא ידיעת השונות האמתית. המבחן שיש לבצע כאן הוא:

- א. מבחן Z למדגם יחיד.
 ב. מבחן T למדגם יחיד.
 ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
 ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

- (5) בתחנת טיפת חלב מסוימת יש שני מכשירי שקילה. על מנת להשוות בין שני המשקלים נדגמו 4 תינוקות. כל תינוק בן חודשיים נשקל בכל אחד מהמשקלים. להלן תוצאות השקילה (בק"ג):

משקל במכשיר 1	2.5	0.7	9.6	4.5
משקל במכשיר 2	0.5	1.7	6.9	3.5

נניח שהמשקלים מתפלגים נורמלית, המבחן שיש לבצע כאן הוא:

- מבחן Z למדגם יחיד.
 - מבחן T למדגם יחיד.
 - מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
 - מבחן T למדגמים מזווגים.
- (6) כדי להשוות בין שני אצנים נדגמו 5 תוצאות מריצת 100 מטר של כל אצן. זמני הריצה נרשמו ויש להניח שמתפלגים נורמלית. המטרה להשוות בין האצנים. המבחן שיש לבצע כאן הוא:
- מבחן Z למדגם יחיד.
 - מבחן T למדגם יחיד.
 - מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
 - מבחן T למדגמים מזווגים.

תשובות סופיות

- לא נדחה H_0 .
- לא נדחה H_0 .
- א. $0.25 \leq p \leq 0.5$ ב. 0.5 ג. לא נדחה H_0 .
- ד'.
- ד'.
- ג'.

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 44 - הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות להפרש תוחלות

תוכן העניינים

1. הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות להפרש תוחלות 203

הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על הפרש תוחלות

רקע

ניתן לבצע בדיקת השערות דו צדדית ברמת מובהקות α על $\mu_1 - \mu_2$:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = C, \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq C$$

על ידי בניית רווח סמך ברמת סמך של $1 - \alpha$ ל- $\mu_1 - \mu_2$:

אם C נופל ברווח $\leftarrow$ נקבל את H_0 .

אם C לא נופל ברווח $\leftarrow$ נדחה את H_0 .

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

חוקר ביצע בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגם מזווג.

להלן השערותיו: $\alpha = 5\%$, $H_0: \mu_D = 80$, $H_1: \mu_D \neq 80$.

החוקר בנה רווח סמך ברמה של 90%, $78 < \mu_D < 83$.

האם אפשר לדעת מה מסקנתו, ואם כן מהי?

שאלות

(1) נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'.

להלן ציוניהם בסמסטר א' ו- ב' :

סמסטר א'	סמסטר ב'
74	80
68	84
90	87
75	76
82	100

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת פער הציונים בין סמסטר א' לבין סמסטר ב'.

ב. פורסם שתלמידים שמסיימים את סמסטר ב' משפרים בממוצע את הציונים ב-5 נק' לעומת סמסטר א'. האם יש אמת בפרסום?

(2) הוחלט להשוות הציונים אצל מרצה X ואצל מרצה Y. נבחרו באקראי 6

סטודנטים, 3 סטודנטים של מרצה X ו-3 סטודנטים של מרצה Y, עבורם התקבלו הציונים הבאים :

68	90	82	מרצה X
64	81	68	מרצה Y

א. חשבו רווח סמך ברמת סמך 90% להפרש בין התוחלות של הציונים אצל שני המרצים.

ב. האם ברמת מובהקות של 10% נכריע שיש הבדל בין תוחלות הציונים אצל שני המרצים?

שאלות רב-ברירה :

(3) סטטיסטיקאי נתבקש לאמוד את הפרש הממוצעים של שני טיפולים לפי שני מדגמים מקריים בלתי תלויים.

הוא חישב רווח סמך להפרש ברמת סמך 0.98, וקיבל את הרווח $-2 < \mu_1 - \mu_2 < 4.5$.

אילו יתבקש החוקר לבדוק לפי אותם נתונים את ההשערות :

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$; $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ ברמת מובהקות 0.05, מסקנתו תהיה :

א. לדחות את השערת האפס.

ב. לא לדחות את השערת האפס.

ג. שלא ניתן לדעת את המסקנה עבור רמת מובהקות 0.05.

ד. שלא נתונות בשאלה סטיות התקן של האוכלוסיות, ולכן לא ניתן להסיק דבר.

- (4) במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קווי זהב לבזק מבחינת ממוצע המחירים לשיחות בינ"ל. נגדמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. בהנחה והמחירים מתפלים נורמלית בנו רווח סמך לממוצע ההפרשים וקיבלו : $-0.0293 < \mu_D < 0.2145$, רווח הסמך הוא ברמת סמך של 95%.
לכן מסקנת המחקר היא :
- ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקיים הבדל בין החברות.
 - ברמת מובהקות של 5% נקבע שקיים הבדל מובהק בין החברות.
 - לא ניתן לדעת מה המסקנה ברמת מובהקות של 5% כיוון שלא נאמר מה ההגדרה של D .

תשובות סופיות

- (1) א. $-3.8 \leq \mu_D \leq 19$ ב. נכריע שיש אמת בפרסום.
- (2) א. $-8.5 \leq \mu_X - \mu_Y \leq 26.5$ ב. נכריע שאין הבדל.
- (3) ג'.
- (4) א'.

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 45 - שאלות מסכמות בבדיקת השערות

תוכן העניינים

1. שאלות רב ברירה (אמריקאיות).....206

שאלות סיכום – שאלות רב ברירה על בדיקת השערות

(1) בבדיקת השערה חד-צדדית ימנית ברמת מובהקות $\alpha = 0.01$, נדחתה השערת האפס. מה הייתה המסקנה לו נבדקה אותה ההשערה באמצעות אותם נתונים ברמת מובהקות $\alpha = 0.05$?

- השערת האפס הייתה נדחית.
- השערת האפס לא הייתה נדחית.
- ההשערה המחקרית הייתה נדחית.
- בהעדר נתונים נוספים, לא ניתן לדעת.

(2) על מנת לבדוק האם ההסתברות ללידת בן הינה חצי, נבחר מדגם מקרי של 200 ילדים, ונמצא שישנם 120 בנים. מהן ההשערות האלטרנטיביות להשערת האפס?

א. $H_1: p = 0.5$

ב. $H_1: p = 0.6$

ג. $H_1: p > 0.5$

ד. $H_1: p \neq 0.5$

(3) לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה. לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים נורמאלית ללא ידיעת השונות האמיתית. המבחן שיש לבצע כאן הוא:

- מבחן Z למדגם יחיד.
- מבחן T למדגם יחיד.
- מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- מבחן T למדגמים מזווגים.

(4) כדי לבדוק את הטענה שגברים רווקים שוקלים פחות מגברים נשואים לקח חוקר מדגם מקרי של 4 גברים ומדד את משקלם לפני נישואיהם ולאחר נישואיהם. הנה התוצאות:

מהן ההשערות הנבדקות? (ההפרש חושב $X - Y$)

68	82	93	69	לפני הנישואין - X
71	84	88	80	לאחר הנישואין - Y

א. $H_1: \mu_d < 0, H_0: \mu_d = 0$

ב. $H_1: \mu_x - \mu_y < 0, H_0: \mu_x - \mu_y = 0$

ג. $H_1: \mu_x - \mu_y < 0, H_0: \mu_x - \mu_y = 0$

ד. $H_1: \mu_d > 0, H_0: \mu_d = 0$

(5) חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן :

- השערת האפס נכונה.
- השערת האפס נדחתה.
- השערת האפס לא נדחתה.
- אף אחת מהתשובות לא נכונה בהכרח.

(6) ידוע כי ילד בגיל שנתיים ישן בממוצע 9 שעות בלילה. במדגם של 20 תינוקות

בני שנתיים המתגוררים בצפון נמצא, כי ממוצע שעות השינה בלילה הינו 10 עם סטיית תקן של 1.1 במדגם של 10 תינוקות בדרום נמצא, כי ממוצע שעות השינה בלילה הינו 7.9 עם סטיית תקן של 1.1. על מנת להשוות בין ממוצע שעות השינה של ילדים מהצפון לבין זה של כלל הילדים יש לערוך _____, ועל מנת להשוות בין ממוצע שעות השינה של ילדים מהדרום לזה של ילדים המתגוררים בצפון יש לערוך _____.

יש להניח שההנחות הדרושות מתקיימות.

- מבחן Z למדגם יחיד ; מבחן T למדגם יחיד.
- מבחן T למדגם יחיד ; מבחן T למדגמים תלויים.
- מבחן T למדגם יחיד ; מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- מבחן T למדגמים בלתי תלויים ; מבחן T לממוצע יחיד.

(7) מובהקות התוצאה (PV) היא גם :

- רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.
- רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.
- רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר טרם קיבל את תוצאות המחקר.
- רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.

(8) כדי לבדוק את הטענה שגברים רווקים שוקלים פחות מגברים נשואים לקח

חוקר מדגם מקרי של 4 גברים ומדד את משקלם לפני נישואיהם ולאחר

נישואיהם. הנה התוצאות :

68	82	93	69	לפני הנישואין
71	84	88	80	לאחר הנישואין

לבדיקת

באיזה התפלגות משתמשים

ההשערות, ובכמה דרגות חופש :

- ההתפלגות Z ללא דרגות חופש.
- ההתפלגות T ו-3 דרגות חופש.
- ההתפלגות T ו-6 דרגות חופש.
- ההתפלגות χ^2 ו-3 דרגות חופש.

- (9) שני סטטיסטיקאים בודקים השערות ברמת מובהקות $\alpha = 0.05$ על סמך אותו מדגם. סטטיסטיקאי א' בודק את ההשערה: $H_0: \mu = 20$ כנגד האלטרנטיבה $H_1: \mu \neq 20$ ומחליט לא לדחות את השערת האפס. סטטיסטיקאי ב' בודק את ההשערה $H_0: \mu \leq 20$ כנגד האלטרנטיבה $H_1: \mu > 20$ מה יחליט סטטיסטיקאי ב'?
- לדחות את השערת האפס.
 - לא לדחות את השערת האפס.
 - ללא נתונים נוספים אי אפשר לדעת מה יחליט.
- (10) חוקר בדק השערה מסוימת והחליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות 5%. מה נכון לומר?
- הוא בוודאות ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% ואילו ברמת מובהקות 2% יש לבדוק מחדש.
 - הוא בוודאות לא ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% ואילו ברמת מובהקות 2% יש לבדוק מחדש.
 - הוא בוודאות ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% וברמת מובהקות 2%.
 - הוא בוודאות לא ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% ואילו ברמת מובהקות 2% יש לבדוק מחדש.
- (11) רמת הכולסטרול בדמם של אנשים מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 180 מ"ג (ל 100 סמ"ק דם). וסטיית תקן של 10 מ"ג. מעוניינים לבדוק את הטענה שצמחונים הם בעלי רמת כולסטרול נמוכה יותר. נניח שסטיית התקן אצל צמחונים זהה לסטיית התקן של כלל האנשים. במדגם של 20 צמחונים התקבל ממוצע רמת כולסטרול 174.5 מ"ג. אם הוחלט לקבל את הטענה שצמחונים הם בעלי רמת כולסטרול נמוכה יותר איזה סוג טעות אפשרית במסקנה?
- טעות מסוג ראשון.
 - טעות מסוג שני.
 - טעות מסוג שלישי.
 - לא ניתן לדעת כיוון שאנו לא יודעים מה התוחלת האמתית אצל הצמחונים.

12 בסקר שנערך התקבל ש 60% מתוך 220 נשאלים מבקרים אצל השיננית לפחות פעם אחת בשנה. עבור אילו רמות מובהקות ניתן יהיה לקבוע שרוב האוכלוסייה מבקרת אצל השיננית לפחות פעם בשנה?

- א. רמת מובהקות הגדולה מ-5%.
- ב. רמת מובהקות הקטנה מ-5%.
- ג. רמת מובהקות הגדלה מ-0.0015.
- ד. רמת מובהקות הקטנה מ-0.0015.

13 שני חוקרים העוסקים בתחום מחקרי משותף החליטו להסתמך על נתונים של מדגם שפורסם על ידי הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה.

חוקר א' ניסח השערה דו צדדית ואילו חוקר ב' ניסח השערה חד צדדית. מסקנתו של איזה מבין המשפטים הבאים הוא הנכון בנוגע למסקנות החוקרים?

- א. אם חוקר א' ידחה את השערת האפס לא ניתן לדעת מה יחליט חוקר ב' באותה רמת מובהקות.
- ב. אם חוקר א' יקבל את השערת האפס גם חוקר ב' יקבל את השערת האפס באותה רמת מובהקות.
- ג. אם חוקר ב' ידחה את השערת האפס גם חוקר א' ידחה את השערת האפס באותה רמת מובהקות.
- ד. אם חוקר א' ידחה את השערת האפס גם חוקר ב' ידחה את השערת האפס בתנאי שרמת המובהקות כפולה בגודלה.

14 ידוע מנתוני העבר כי תוחלת הציונים בבחינה בפסיכולוגיה היא 79. הועלתה השערה כי תוחלת הציונים בקרב העולים החדשים נמוכה יותר. לצורך בדיקת הטענה נלקח מדגם מקרי של 47 סטודנטים עולים ונמצא ממוצע של 75. מה משמעות הפרמטר בניסוח ההשערות?

- א. תוחלת ציוני העולים באוכלוסייה.
- ב. ממוצע ציוני העולים במדגם.
- ג. תוחלת ציוני האוכלוסייה מנתוני העבר.
- ד. ממוצע ציוני שאר האוכלוסייה במדגם.

15 חוקר ביצע מחקר וידוע כי עשה טעות מסוג 1. מה מהבאים נכון?

- א. החוקר דחה את השערת H_0 כאשר היא הייתה נכונה.
- ב. החוקר דחה את השערת H_1 כאשר היא הייתה נכונה.
- ג. החוקר לא דחה את השערת H_0 כאשר היא הייתה לא נכונה.
- ד. המדגם של החוקר שייך בפועל להתפלגות הדגימה של H_1 .

- 16** חוקר ביקש לבחון האם תאומים זהים אשר הופרדו בילדותם שונים מתאומים זהים אשר גדלו יחדיו מבחינת מידת הפער בין התאומים בלחץ הדם. הוא דגם 20 זוגות תאומים מכל אוכלוסייה ומדד את הפרש בין לחץ הדם בכל זוג תאומים. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?
- מבחן T למדגמים בלתי תלויים עם 38 דרגות חופש.
 - מבחן T למדגמים מזווגים, עם 39 דרגות חופש.
 - מבחן T למדגמים בלתי תלויים עם 39 דרגות חופש.
 - מבחן T למדגמים מזווגים עם 38 דרגות חופש.

- 17** בינואר השנה פורסם שהשכר הממוצע במשק הוא 8,900 ₪. במדגם שנעשה בחודש יוני על 60 עובדים נרשם עבור כל עובד במדגם האם השכר שלו נמוך או לא נמוך מהשכר הממוצע שפורסם בחודש ינואר. מהו המבחן המתאים כדי לבדוק שרוב העובדים בחודש יוני קיבלו שכר הנמוך מהשכר הממוצע שפורסם בחודש ינואר?
- מבחן Z על פרופורציה.
 - מבחן T על תוחלת אחת.
 - מבחן T על שתי תוחלות במדגמים בלתי תלויים.
 - מבחן T על שתי תוחלות במדגמים תלויים.

- 18** שלושה חוקרים רצו לבדוק את השפעתו של שידור פרסומות נגד תאונות דרכים על מהירות הנהיגה של נהגים בישראל (השונות של מהירות הנהיגה בישראל אינה ידועה). עידו השווה את מהירות הנהיגה של קבוצת נהגים אחת, חודש לפני שידור הפרסומות וחודש לאחר שידור הפרסומות. רון השווה את מהירות הנהיגה של קבוצת נהגים, שראו את הפרסומות, למהירות הנהיגה של קבוצת נהגים, שלא ראו את הפרסומות. יואב השווה את מהירות הנהיגה של קבוצת נהגים בחודש בו שודרו הפרסומות, למהירות הנהיגה הממוצעת בישראל על פי נתוני משרד התחבורה. המבחנים בהם צריכים החוקרים להשתמש הם:
- שלושתם במבחן T למדגמים בלתי תלויים.
 - עידו במבחן T למדגמים מזווגים, ורון ויואב במבחן T למדגמים בלתי תלויים.
 - עידו במבחן T למדגמים מזווגים, רון במבחן T למדגמים בלתי תלויים ויואב במבחן T למדגם יחיד.
 - עידו במבחן T למדגמים מזווגים, רון ויואב במבחן T למדגם יחיד.

- 19** במחקר נמצא שתוצאה היא מובהקת ברמת מובהקות של 5%. מה תמיד נכון?
- הגדלת רמת המובהקות לא תשתנה את מסקנת המחקר.
 - הגדלת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.
 - הקטנת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.
 - הקטנת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.
- 20** חוקר ערך מבחן דו צדדי ברמת מובהקות של α והחליט לדחות את השערת האפס. אם החוקר היה עורך מבחן חד צדדי ברמת מובהקות של $\frac{\alpha}{2}$ אזי בהכרח:
- השערת האפס הייתה נדחית.
 - השערת האפס הייתה לא נדחית.
 - לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו במקרה זה.
- 21** ליאור ורוני העלו את אותן השערות על ממוצע האוכלוסייה. כמו כן הם התבססו על אותן תוצאות של מדגם.
- ליאור השתמש בטבלה של התפלגות Z.
 - רוני השתמשה בטבלה של התפלגות T.
 - מה נוכל לומר בנוגע להחלטת המחקר שלהם?
 - אם ליאור ידחה את השערת האפס אז גם בהכרח רוני.
 - אם רוני תדחה את השערת האפס אז גם בהכרח ליאור.
 - שני החוקרים בהכרח יגיעו לאותה מסקנה.
 - לא ניתן לדעת על היחס בין דחיית השערת האפס של שני החוקרים.
- 22** נתון ש $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ כמו כן נתונות ההשערות הבאות: $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu < \mu_0$.
- חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות. σ^2 לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5% לאחר מכן כדי לחזק את קביעתו הוא דגם עוד 5 תצפיות ושקלל את תוצאות אלה גם למדגם כך שכלל עכשיו 15 תצפיות.
- כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.
 - כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.
 - כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.
- 23** אם חוקר החליט להגדיל את רמת המובהקות במחקר שלו אזי:
- הסיכוי לטעות מסוג ראשון גדל.
 - העוצמה של המבחן גדלה.
 - הסיכוי לטעות מסוג שני גדל.
 - תשובות א ו-ב נכונות.

(24) חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן :

- א. השערת האפס נכונה.
- ב. השערת האפס נדחתה.
- ג. השערת האפס לא נדחתה.
- ד. אף אחת מהתשובות לא נכונה בהכרח.

(25) מה המצב הרצוי לחוקר המבצע בדיקת השערה :

$1 - \beta$	α
א. גדולה	א. גדולה
ב. קטנה	ב. גדולה
ג. גדולה	ג. קטנה
ד. קטנה	ד. קטנה

(26) נערך שינוי בכלל ההחלטה של בדיקת השערה מסוימת ובעקבותיו אזור דחיית H_0 קטן. כל שאר הגורמים נשארו ללא שינוי. כתוצאה מכך :

- א. הן α , והן $(1 - \beta)$, יקטנו.
- ב. α יישאר ללא שינוי ואילו $(1 - \beta)$ יגדל.
- ג. α יגדל ואילו $(1 - \beta)$ יקטן.
- ד. הן α והן $(1 - \beta)$ יגדלו.

(27) ידוע כי לחץ דם תקין באוכלוסייה הוא 120. רופא מניח שלחץ הדם בקרב עיתונאים גבוה יותר מהממוצע באוכלוסייה. הוא לקח מדגם של 60 עיתונאים וקיבל ממוצע 137. על סמך המדגם, הוא בודק טענתו ברמת מובהקות 0.02 ומסיק שלחץ הדם בקרב העיתונאים אינו גבוה יותר. מה הטעות האפשרית שהרופא עושה?

- א. טעות מסוג ראשון.
- ב. טעות מסוג שני.
- ג. טעות מסוג שלישי.
- ד. אין טעות במסקנתו.

(28) בבדיקת השערות התקבל שה- $p\text{-value} = 0.02$. מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 1%? בחר בתשובה הנכונה :

- א. יקבל את השערת האפס בכל מקרה.
- ב. ידחה את השערת האפס מקרה.
- ג. ידחה את השערת האפס רק אם המבחן הנו דו צדדי.
- ד. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.

(29) מובהקות התוצאה (PV) היא גם :

- א. רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.
- ב. רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.
- ג. רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר טרם קיבל את תוצאות המחקר.
- ד. רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.

(30) בבדיקת השערות מסוימת התקבל $p \text{ value} = 0.0254$, לכן :

- א. ברמת מובהקות של 0.01 אך לא של 0.05 נדחה את H_0 .
- ב. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 לא נדחה את H_0 .
- ג. ברמת מובהקות של 0.05 אך לא של 0.01 נדחה את H_0 .
- ד. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 נדחה את H_0 .

(31) רמת המובהקות במחקר הייתה 2% לכן.

- א. בסיכוי של 2% נדחה את השערת האפס.
- ב. בסיכוי של 2% לא נדחה את השערת האפס.
- ג. בסיכוי של 2% השערת האפס לא נכונה.
- ד. אף תשובה לא נכונה.

(32) נתון ש: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. כמו כן נתונות ההשערות הבאות: $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu < \mu_0$.

- חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות.
- σ^2 לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5%. אם הוא היה מגדיל את רמת המובהקות ל-10% אזי :
- א. כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.
- ב. כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.
- ג. כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

(33) לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים

- זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה.
- לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים נורמאלית ללא ידיעת השונות האמתית. מספר דרגות החופש במבחן הוא :

א. 9

ב. 19

ג. 18

ד. 8

34) בתחנת טיפת חלב מסוימת יש שני מכשירי שקילה. על מנת להשוות בין שני המשקלים נדגמו 4 תינוקות. כל תינוק בן חודשיים נשקל בכל אחד מהמשקלים. להלן תוצאות השקילה (בק"ג):

משקל במכשיר 1	2.5	0.7	9.6	4.5
משקל במכשיר 2	0.5	1.7	6.9	3.5

נניח שהמשקלים מתפלגים נורמלית.

המבחן שיש לבצע כאן הוא:

- מבחן Z למדגם יחיד.
- מבחן T למדגם יחיד.
- מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- מבחן T למדגמים מזווגים.

35) כדי להשוות בין שני אצים נדגמו 5 תוצאות מריצת 100 מטר של כל אצן. זמני הריצה נרשמו ויש להניח שמתפלגים נורמלית. המטרה להשוות בין האצנים. המבחן שיש לבצע כאן הוא:

- מבחן Z למדגם יחיד.
- מבחן T למדגם יחיד.
- מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- מבחן T למדגמים מזווגים.

36) סטטיסטיקאי ערך מבחן סטטיסטי. הוא חישב את עוצמת המבחן וקיבל 0. המשמעות של תוצאה זו היא:

- לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא לא נכונה.
- תמיד לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.
- לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.
- תמיד לדחות את השערת האפס כאשר היא לא נכונה.

37) סטטיסטיקאי נתבקש לאמוד את הפרש הממוצעים של שני טיפולים לפי שני מדגמים מקריים בלתי תלויים. הוא חישב רווח סמך להפרש ברמת סמך 0.98, וקיבל את הרווח $-2 < \mu_1 - \mu_2 < 4.5$. אילו יתבקש החוקר לבדוק לפי אותם נתונים את ההשערות: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$; $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$,

ברמת מובהקות 0.05 מסקנתו תהיה:

- לדחות את השערת האפס.
- לא לדחות את השערת האפס.
- שלא ניתן לדעת את המסקנה עבור רמת מובהקות 0.05.
- שלא נתונות בשאלה סטיות התקן של האוכלוסיות, ולכן לא ניתן להסיק דבר.

(38) במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קווי זהב לבזק מבחינת ממוצע המחירים לשיחות בינ"ל. נגדמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. בהנחה והמחירים מתפללים נורמלית בנו רווח סמך לממוצע ההפרשים וקיבלו: $-0.0293 < \mu_D < 0.2145$ רווח הסמך הוא ברמת סמך של 95%. לכן מסקנת המחקר היא:

- א. ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקיים הבדל בין החברות.
- ב. ברמת מובהקות של 5% נקבע שקיים הבדל מובהק בין החברות.
- ג. לא ניתן לדעת מה המסקנה ברמת מובהקות של 5% כיוון שלא נאמר מה ההגדרה של D .

(39) אם רמת מובהקות של מבחן סטטיסטי הינה 0, הכוונה היא:

- א. תמיד נדחה H_0 כאשר היא נכונה, אך לא תמיד נדחה אותה כאשר היא לא נכונה.
- ב. לא נדחה את H_0 אף פעם.
- ג. לא נדחה את H_0 כאשר היא נכונה אך יתכן ונדחה אותה כאשר היא לא נכונה.
- ד. כל התשובות לא נכונות.

(40) חוקר ביצע ניסוי. הוא ניסח את ההשערות הבאות: $H_0: \mu = 10$, $H_1: \mu \neq 10$. לצורך בדיקה הוא לקח מדגם מקרי בגודל 5 מתוך אוכלוסייה המתפלגת נורמאלית עם שונות לא ידועה. על סמך תוצאות המדגם הוא חישב וקיבל: $t_x = -2.63$. לכן המסקנה היא:

- א. הוא ידחה H_0 ברמת מובהקות 0.1 אך לא כן ברמת מובהקות 0.05.
- ב. הוא ידחה H_0 ברמת מובהקות 0.05 אך לא כן ברמת מובהקות 0.025.
- ג. הוא ידחה H_0 ברמת מובהקות 0.025 אך לא כן ברמת מובהקות 0.01.
- ד. הוא לא ידחה H_0 ברמת מובהקות 0.1.

(41) האיגוד האמריקני לרפואת ילדים מפרסם הנחיות חדשות הקובעות כי יש ליטול תוספת יוד במהלך תקופת ההיריון וההנקה. מחסור במינרל זה עלול לגרום לפגיעה מוחית אצל העובר והתינוק. החלטה זו נקבעה על סמך מחקר בו השתתפו 1050 נשים שנטלו יוד במהלך תקופת ההיריון וההנקה. מתוך הנשים שהשתתפו במחקר, רק ל-21 נמצאו ילדים בעלי פגיעה מוחית לעומת 3% באוכלוסייה הכללית. בנוסף, פורסם שהאיגוד האמריקאי מגיע למסקנותיו על סמך רמת מובהקות של 0.5%. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג ראשון במחקר?

- א. 0.005
- ב. 0.03
- ג. 0.0287
- ד. 0.05

- 42) חוקרת שיערה, כי משקלן של נשים כשנה לאחר החתונה גבוה ממשקלן בעת החתונה. החוקרת דגמה 15 נשים, ובדקה את משקלן בשתי נקודות הזמן (בעת החתונה, ושנה לאחריה), אך לא מצאה הבדל מובהק ברמת מובהקות 0.01. בהנחה, כי **במצאות** השערתה של החוקרת נכונה, **סביר** כי אם היא תגדיל את גודל המדגם, אזי:
- א. יקטן הסיכוי לטעות מסוג שני (β).
 - ב. תגדל רמת הביטחון ($1 - \alpha$).
 - ג. אף תשובה לא נכונה.
 - ד. כל התשובות נכונות.

43) איזה מהמשפטים הבאים נכון תמיד?

- א. $POWER + \alpha + \beta = 1$
- ב. $POWER = 0.5 - \beta$
- ג. $POWER + \alpha = 1$
- ד. $\beta + \alpha = 1$
- ה. הכול לא נכון.

44) מה נכון לומר לגבי הנחת שיוויון השונויות במבחן T למדגמים בלתי תלויים?

- א. היא אומרת שהשונויות המדגמיות שוות.
- ב. בלעדיה אין שום דרך לבדוק השערה על הפרש בין תוחלות.
- ג. היא חשובה הן עבור מדגמים מזווגים והן עבור מדגמים בלתי תלויים.
- ד. אף תשובה אינה נכונה.

45) חוקר החליט לא לדחות השערה ברמת מובהקות של α . במידה וחוקר זה היה בודק השערה זו ברמת מובהקות של 2α על סמך אותם נתונים, האם ההשערה תדחה?

- א. ההשערה תדחה.
- ב. ההשערה לא תדחה.
- ג. התשובה תלויה בעוצמת המבחן.
- ד. לא ניתן לדעת בוודאות אם ההשערה תדחה או לא.

46) חוקרת שיערה, כי בגילאי הגן בנות יותר תקשורתיות מבנים. אם החוקרת תדגום אקראית 30 בנים ו-30 בנות, ובמדגם יתקבל אותו ממוצע של ציון תקשורת. סטטיסטי המבחן יהיה:

- א. אפס
- ב. חיובי
- ג. שלילי
- ד. לא ניתן לדעת

(47) עוצמה שווה ל-1 פרושה :

- א. לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.
- ב. תמיד לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.
- ג. לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא לא נכונה.

(48) מה מהבאים נכון לגבי מבחן T מדגמים מזווגים?

- א. כל התצפיות במחקר אינן תלויות זו בזו.
- ב. כל התצפיות במחקר תלויות זו בזו.
- ג. כל הצמדים של תצפיות במחקר אינם תלויים זה בזה.
- ד. התצפיות בתוך כל צמד אינן תלויות זו בזו.

(49) לבדיקת ההשערה החד צדדית על התוחלת של התפלגות נורמלית $H_0: \mu \geq 10$, נלקח מדגם והתקבלה רמת מובהקות מינימאלית לדחיית השערת האפס 0.058. לו רצינו לבדוק את ההשערה הדו צדדית $H_0: \mu = 10$, $H_1: \mu \neq 10$, אז על סמך תוצאת אותו המדגם ברמת מובהקות 0.05 :

- א. ניתן להכריע בין ההשערות רק אם שונות האוכלוסייה נתונה.
- ב. מקבלים את השערת האפס.
- ג. דוחים את השערת האפס.
- ד. לא ניתן להכריע בין ההשערות שכן חסרים נתונים.

(50) לבדיקת ההשערה החד צדדית ימנית $H_0: \mu = 55$, $H_1: \mu = 65$,

נלקח מדגם מקרי בגודל n מאוכלוסייה בעלת התפלגות נורמלית ושונות σ^2 . רמת המובהקות היא 5%. נמצא שהעוצמה היא 0.9. להלן 3 טענות :

- עבור מדגם בגודל n וברמת מובהקות 5% לבדיקת ההשערות : $H_0: \mu = 55$, $H_1: \mu = 60$ העוצמה תהיה גדולה מ-0.9.
- עבור מדגם בגודל $2n$ ורמת מובהקות 5% לבדיקת ההשערות : $H_0: \mu = 55$, $H_1: \mu = 65$ העוצמה תהיה גדולה מ-0.9.
- עבור מדגם בגודל n ורמת מובהקות 10% לבדיקת ההשערות : $H_0: \mu = 55$, $H_1: \mu = 65$ העוצמה תהיה קטנה מ-0.9.

- א. שלושת הטענות אינן נכונות.
- ב. טענות 2 ו-3 אינן נכונות וטענה 1 נכונה.
- ג. טענות 1 ו-2 נכונות וטענה 3 אינה נכונה.
- ד. טענות 1 ו-3 אינן נכונות וטענה 2 נכונה.

תשובות סופיות:

שאלה	תשובה	שאלה	תשובה
1	א	26	א
2	ד	27	ב
3	ד	28	א
4	א	29	א
5	ג	30	ג
6	ג	31	ד
7	א	32	א
8	ב	33	א
9	ג	34	ד
10	א	35	ג
11	א	36	א
12	ג	37	ג
13	א	38	א
14	א	39	ג
15	א	40	א
16	א	41	א
17	א	42	א
18	ג	43	ה
19	א	44	ד
20	ג	45	ד
21	ב	46	א
22	ג	47	ד
23	ד	48	ג
24	ג	49	ב
25	ג	50	ד

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 46 - מבחני חי בריבוע

תוכן העניינים

1. מבחן טיב התאמה..... (ללא ספר)
2. מבחן לאי תלות..... (ללא ספר)
3. קשר בין מבחן אי תלות לבדיקת השערות להפרש פרופרציות..... 219
4. מקדם המתאם של קרמר..... 221

הקשר בין מבחן לאי תלות ובדיקת השערות להפרש פרופורציות – רקע

מבחן לאי תלות שבו לכל משתנה יש שתי קטגוריות שקול לבדיקת השערות דו צדדית על הפרש פרופורציות כאשר השערת האפס היא שהפרופורציות שוות. כל זאת, כמובן, אם התנאים למבחנים מתקיימים.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

בקרב מדגם של 200 נשים 120 טענו שהן תצבענה למועמד R לראשות העיר. בקרב מדגם של 200 גברים 80 טענו שהם יצביעו למועמד R האם קיים הבדל בין דפוס ההצבעה של הנשים ושל הגברים? האם אפשר לבדוק זאת גם על ידי מבחן לאי תלות וגם על ידי בדיקת השערות לשתי פרופורציות?

שאלות

- 1) בקרב מדגם של 200 נשים 120 טענו שהן תצבענה למועמד R לראשות העיר. בקרב מדגם של 200 גברים 80 טענו שהם יצביעו למועמד R האם קיים הבדל בין דפוס ההצבעה של הנשים ושל הגברים? בדוק ברמת מובהקות של 5%.
א. על ידי מבחן לאי תלות.
ב. על ידי בדיקת השערות לשתי פרופורציות.
- 2) נלקחו 200 אנשים שמתוכם 60 הצהירו שהם עוסקים בפעילות גופנית סדירה. מתוך אלו שעוסקים בפעילות גופנית סדירה 50 נמצאו במצב בריאותי תקין. מתוך אלו שלא עוסקים בפעילות גופנית סדירה 90 נמצאו במצב בריאותי תקין.
א. בנו טבלת שכיחות משותפת לנתונים שהוצגו בשאלה.
ב. האם ניתן להגיד שהסיכוי להימצא במצב בריאותי תקין גבוה יותר כאשר עוסקים בפעילות גופנית סדירה לעומת המצב שלא עוסקים בפעילות גופנית סדירה? בדוק ברמת בטחון של 90%.

תשובות סופיות

- (1) נדחה את השערת האפס לפירוט הדרך ראה וידאו.
 (2) א. להלן טבלה: ב. נדחה את השערת האפס.

	לא תקין	תקין	פעילות/מצב בריאותי
60	10	50	סדירה
140	50	90	לא סדירה
200	60	140	

מדדי קשר-מדד הקשר של קרמר – רקע

מתי משתמשים במדד הזה? - כאשר אחד המשתנים הוא מסולם שמי והשני מכל סולם אפשרי. מדד הקשר מקבל ערכים בין 0 ל-1. ככל שהמדד יותר קרוב לאחד קיים קשר בעוצמה יותר חזקה בין המשתנים.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

במחקר רוצים לבדוק את הקשר בין מין לדעה בנושא מסוים, שאלו 100 גברים ו-100 נשים האם הם בעד/נגד/נמנעים באיזשהו נושא. להלן טבלת השכיחויות המשותפת שהתקבלה.

$f(x)$	נמנע	נגד	בעד	X/Y
100	10	40	50	גבר
100	10	60	30	אישה
$n = 200$	20	100	80	$f(y)$

בהקשר של קרמר הטבלה נקראת טבלת O (observed)

X - מין (גבר/אישה) – סולם שמי.

Y - דעה (בעד/נמנע/נגד) – סולם שמי/סדר.

שלבים בחישוב r_c :

שלב א' :

נבנה את טבלת E (Expected)

נעתיק את המסגרת של טבלת O ואז כל $E_i = \frac{f(x) \cdot f(y)}{n}$.

$f(x)$	נמנע	נגד	בעד	X/Y
100				גבר
100				אישה
$n=200$	20	100	80	$f(y)$

שלב ב' :

נחשב $\chi^2 = \sum_i \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$.

שלב ג' :

נחשב: $r_c = \sqrt{\frac{1}{n(L-1)} \chi^2}$

כאשר L מבטא את המספר הקטן מבין מספר השורות או העמודות.

שאלות

- (1) להלן תוצאות מחקר שבדק את הקשר בין מין להשכלה. לגבי כל נחקר נבדק המין שלו והשכלתו.

מין / השכלה	נמוכה	תיכונית	גבוהה
גבר	120	40	20
אישה	20	20	80

להלן התוצאות:

האם קיים קשר בין מין להשכלה? נמקו!

- (2) נלקחו 200 אנשים שמתוכם 60 הצהירו שהם עוסקים בפעילות גופנית סדירה. מתוך אלו שעוסקים בפעילות גופנית סדירה 50 נמצאו במצב בריאותי תקין. מתוך אלו שלא עוסקים בפעילות גופנית סדירה 90 נמצאו במצב בריאותי תקין.

א. בנו טבלת שכיחות משותפת לנתונים שהוצגו בשאלה.

ב. האם קיים קשר בין פעילות גופנית למצב בריאותי?

חשבו לפי מדד הקשר של קרמר.

תשובות סופיות

- (1) קיים קשר בעוצמה בינונית בין המין להשכלה מקדם המתאם של קרמר הוא 0.595.
- (2) א. להלן טבלה: ב. מדד קרמר 0.19 מעיד על קשר בעוצמה נמוכה.

y/x	תקין	לא תקין	$f(x)$
כן	50	10	60
לא	90	50	140
$f(y)$	140	60	200

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 47 - מדדי קשר - מדד הקשר של קרמר

תוכן העניינים

1. כללי 223

מדדי קשר – מדד הקשר של קרמר:

רקע:

משתמשים במדד זה כאשר אחד המשתנים הוא מסולם שמי והשני מכל סולם אפשרי. מדד הקשר מקבל ערכים בין 0 ל-1. ככל שהמדד יותר קרוב לאחד קיים קשר בעוצמה יותר חזקה בין המשתנים.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במחקר רוצים לבדוק את הקשר בין מין לדעה בנושא מסוים. שאלו 100 גברים ו-100 נשים על דעתם באיזשהו נושא. להלן טבלת השכיחויות המשותפת שהתקבלה:

$F(x)$	נמנע	נגד	בעד	Y/X
100	10	40	50	גבר
100	10	60	30	אישה
$n = 200$	20	100	80	$F(y)$

הטבלה נקראת טבלת O (observe):

X - מין (גבר/אישה) – סולם שמי.

Y - דעה (בעד/נמנע/נגד) – סולם שמי/סדר.

שלבים בחישוב r_c :

שלב א': נבנה את טבלת E (Expected).

נעתיק את המסגרת של טבלת O ואז כל: $E_i = (F(x) \cdot F(y)) / n$.

$f(x)$	נמנע	נגד	בעד	$\frac{Y}{X}$
100				גבר
100				אישה
$n = 200$	20	100	80	$f(y)$

שלב ב': נחשב $\chi^2 = \sum_i \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$.

שלב ג': נחשב: $r_c = \sqrt{\frac{1}{n(L-1)} \chi^2}$.

כאשר L מבטא את המספר הקטן מבין מספר השורות או העמודות.

שאלות:

- (1) להלן תוצאות מחקר שבדק את הקשר בין מין להשכלה. לגבי כל נחקר נבדק המין שלו והשכלתו. האם קיים קשר בין מין להשכלה? נמקו!

מין/השכלה	נמוכה	תיכונית	גבוהה
גבר	120	40	20
אישה	20	20	80

- (2) נלקחו 200 אנשים שמתוכם 60 הצהירו שהם עוסקים בפעילות גופנית סדירה. מתוך אלו שעוסקים בפעילות גופנית סדירה 50 נמצאו במצב בריאותי תקין. מתוך אלו שלא עוסקים בפעילות גופנית סדירה 90 נמצאו במצב בריאותי תקין. א. בנו טבלת שכיחות משותפת לנתונים שהוצגו בשאלה. ב. האם קיים קשר בין פעילות גופנית למצב בריאותי? חשבו לפי מדד הקשר של קרמר.

תשובות סופיות:

- (1) ישנו קשר בעוצמה בינונית, מקדם המתאם של קרמר: 0.595.
(2) א. להלן טבלה: ב. 0.19.

$f(x)$	לא תקין	תקין	y/x
60	10	50	כן
140	50	90	לא
$n = 200$	60	140	$f(y)$

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 48 - מדדי קשר - מדד הקשר פי

תוכן העניינים

1. כללי 225

מדדי קשר – מדד הקשר פי:

רקע:

מדד הקשר פי הינו דרך קיצור על מנת לחשב את מדד הקשר של קרמר. המדד רלבנטי רק כשטבלת השכיחות המשותפת היא מסוג 2/2 כלומר שני משתנים שהם דיכוטומיים.

$$\phi = \sqrt{\frac{(a \cdot d - b \cdot c)^2}{e \cdot f \cdot r \cdot k}} \quad \text{הנוסחה:}$$

b	a	
d	c	

דוגמה:

מפעל עובד בשתי משמרות, משמרת יום ומשמרת ליל, דגמו 300 מוצרים ממשמרת היום ו-200 ממשמרת הלילה, מתוך המוצרים שנדגמו ביום 10 היו פגומים, מתוך המוצרים שנדגמו בלילה 150 היו תקינים. האם יש קשר בין סוג המשמרת לטיב המוצר?

שאלות:

- (1) להלן תוצאות מחקר שבדק את הקשר בין מין לדעה מסוימת. לגבי כל נחקר נבדק המין שלו ודעתו האישית בדבר סוגיה מסוימת. הנחקרים היו צריכים לענות האם הם בעד, נמנעים או נגד הדעה שהוצגה להם. להלן התוצאות:

מין/ דעה	בעד	נמנע	נגד
גבר	120	40	20
אישה	20	20	80

האם אפשר לחשב במקרה זה את מדד הקשר פי? אם כן חשבו.

- (2) נלקחו 200 אנשים שמתוכם 60 הצהירו שהם עוסקים בפעילות גופנית סדירה. מתוך אלו שעוסקים בפעילות גופנית סדירה 50 נמצאו במצב בריאותי תקין. מתוך אלו שלא עוסקים בפעילות גופנית סדירה 90 נמצאו במצב בריאותי תקין. האם ניתן לחשב את מדד הקשר של ϕ ? אם כן חשבו והסבירו את המשמעות.

תשובות סופיות:

- (1) לא ניתן לחשב את מדד הקשר פי.
 (2) ניתן לחשב, מדד הקשר פי : 0.19.

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 49 - מדד הקשר ספירמן

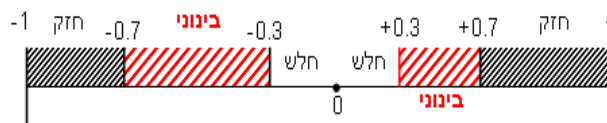
תוכן העניינים

1. כללי 227

מדדי קשר – מדד הקשר של ספירמן:

רקע:

מתי נשתמש במדד ספירמן?
כאשר אחד המשתנים מסולם סדר והשני מסולם סדר ומעלה.
הקשר שהמדד בודק הוא קשר דירוגי.
מדד הקשר בודק את:



1. כיוון הקשר.

2. עצמת הקשר.

המדד מקבל ערכים בסקלה מ-(-1) ועד 1.

קשר דירוגי חיובי מלא:

מדד הקשר של ספירמן יוצא 1.
ככל שמשנתנה אחד עולה, השני עולה ללא יוצא מן הכלל.

קשר דירוגי חיובי חלקי:

מקדם המתאם בין 0 ל-1.
ככל שמשנתנה אחד עולה, לשני יש נטייה לעלות אך לא באופן מוחלט.

קשר דירוגי שלילי מלא:

מדד הקשר של ספירמן יוצא -1.
ככל שמשנתנה אחד עולה השני יורד ללא יוצא מן הכלל.

קשר דירוגי שלילי חלקי:

מקדם המתאם הוא בין 0 ל-(-1).
ככל שמשנתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אך לא באופן מוחלט.
על מנת לחשב את הקשר יש לבצע פעולת דירוג (RANK).
כאשר מדרגים, אם יש כמה תצפיות שתופסות את אותו הערך אז הדירוג שלהם הוא הממוצע של המקומות שהן תופסות.

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

הנוסחה של מדד הקשר:

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בתחרות רוקדים עם כוכבים השתתפו 7 זוגות, 2 שופטים נתנו את ציוניהם לריקוד של כל זוג. להלן התוצאות שהתקבלו:

מספר הזוג	ציון שופט א'	R_x	ציון שופט ב'	R_y	$d = r_x - r_y$	d^2
1	4		5			
2	5		5			
3	6		7			
4	5		7			
5	8		9			
6	7		9			
7	3		7			

מהי מידת ההתאמה בין ציוני השופטים?

X - ציון שופט א' (סולם סדר).

Y - ציון שופט ב' (סולם סדר).

שאלות:

(1) בתחרות יופי חילקו שני שופטים ציונים למועמדות:

מספר מועמדת	1	2	3	4	5	6	7
ציון שופט א'	7	8	6	8	9	5	6
ציון שופט ב'	8	8	7	8	9	5	7

האם קיים קשר בין שתי הערכות השופטים? נמקו והסבירו!

(2) משרד רצה לבחון האם קיים קשר בין מידת המוטיבציה של העובדים שלו לבין מספר החיסורים של העובדים בחודש עבודה. להלן התוצאות שהתקבלו:

מספר חיסורים	מידת מוטיבציה
0	גבוהה
4	נמוכה
2	בינונית
5	נמוכה
1	גבוהה

האם קיים קשר בין רמת המוטיבציה של העובד ומספר החיסורים שלו? חשבו באמצעות מדד הקשר המתאים והסבירו.

(3) אם: $r_s = 1$, הדבר אומר שערכי X תמיד שווים לערכי Y . האם הטענה נכונה? הסבר.

תשובות סופיות:

- (1) קיים קשר דירוג חיובי חזק בין הערכת שופט א' להערכת שופט ב'. מדד הקשר: 0.973.
- (2) קיים קשר שלילי בעוצמה חזקה בין רמת המוטיבציה של העובד למס' החיסורים שלו. מדד הקשר: -0.85.
- (3) לא נכון.

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 50 - מקדם המתאם (מדד קשר) הלינארי ומובהקותו

תוכן העניינים

1. מקדם המתאם הלינארי (פירסון) 230
2. חישוב מקדם המתאם הלינארי (פירסון) 241
3. בדיקת השערות על מקדם המתאם הלינארי 246

מקדם המתאם (מדד קשר) הלינארי ומובהקותו

מדד הקשר הלינארי (פירסון) – מבוא

מעוניינים לבדוק עד כמה קיים קשר מסוג קשר לינארי (קו ישר) בין שני משתנים. שני המשתנים שאנו בודקים לגביהם קשר צריכים להיות משתנים כמותיים. מבחינת סולמות מדידה כל משתנה נחקר צריך להיות מסולם רווחים או מנה. בדרך כלל המשתנה המוצג כ- Y הוא המשתנה התלוי והמשתנה המוצג ב- X הוא המשתנה הבלתי תלוי. תיאור גרפי לנתונים נעשה על ידי דיאגרמת פיזור. בדיאגרמת פיזור אנחנו מסמנים כל תצפית בנקודה לפי שיעור ה- X ושיעור ה- Y שלה. דיאגרמת הפיזור נותנת אינדיקציה גרפית על הקשר בין שני המשתנים.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

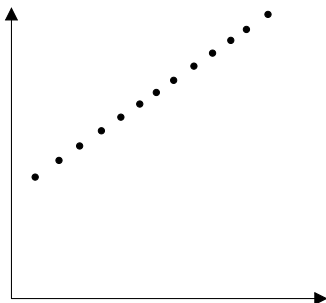
בבניין 8 דירות בדקו לכל דירה את מספר החדרים שלה וכמו כן את מספר הנפשות הגרות בדירה. להלן התוצאות שהתקבלו :

4	4	3	3	2	3	2	2	מספר חדרים בדירה
5	4	4	3	2	2	1	0	מספר הנפשות בדירה

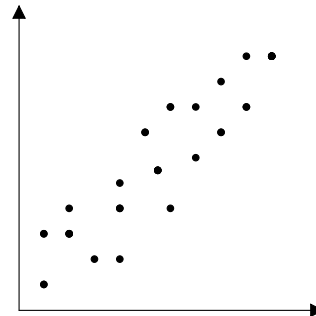
- (1) כמה תצפיות ישנן בדוגמה?
- (2) כמה משתנים ישנם בדוגמה, מי הם?
- (3) שרטטו לנתונים דיאגרמת פיזור.
- (4) מי המשתנה התלוי ומיהו המשתנה הבלתי תלוי?

דיאגרמות פיזור לקשר בין משתנים וניתוחם

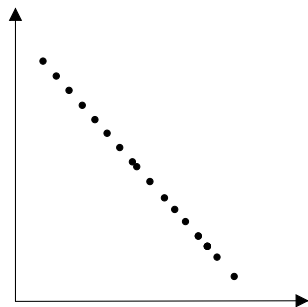
קשר לינארי חיובי מלא



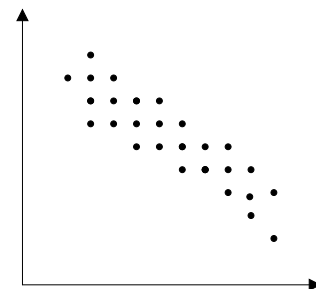
קשר לינארי חיובי חלקי



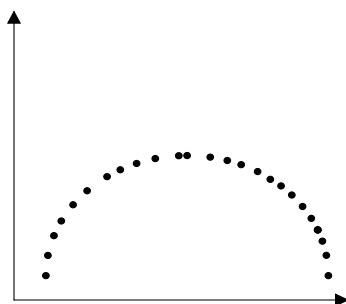
קשר לינארי שלילי מלא



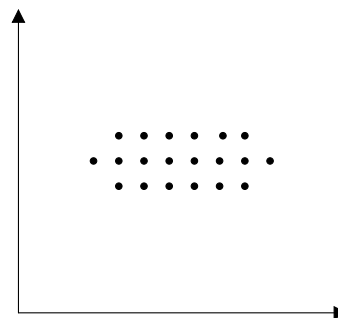
קשר לינארי שלילי חלקי



אין קשר לינארי



אין קשר



משמעות מקדם המתאם:

כדי לבדוק עד כמה קיים קשר לינארי בין שני המשתנים ישנו מדד קשר שנקרא גם מקדם המתאם הלינארי הידוע גם בשם מקדם המתאם של פירסון. מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין 1 ל-1.

-1

0

1

מקדם מתאם 1-או 1 אומר שקיים קשר לינארי מלא בין המשתנים שניתן לבטאו על ידי נוסחה של קו ישר: $y = ax + b$.

מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1):

קיים קשר לינארי מלא בו השיפוע a יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי (מקדם מתאם -1) מלא אומר שקיים קשר לינארי מלא בו השיפוע a שלילי.

מתאם חיובי חלקי:

ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט ואילו מתאם שלילי חלקי אומר שככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט. ככל שמקדם המתאם קרוב לאפס עוצמת הקשר יותר חלשה וככל שהמדד רחוק יותר מהאפס העוצמה יותר חזקה. לסיכום, מקדם המתאם בודק את עוצמת הקשר הלינארי, ואת כיוון הקשר.

מקדם המתאם הלינארי אינו מושפע מיחידות המדידה. כל שינוי ביחידות המדידה של המשתנים, לא ישנה את מקדם המתאם.

מדד הקשר הלינארי באוכלוסייה, שנקרא גם מקדם המתאם של פירסון או מדד הקשר של פירסון באוכלוסייה מסומן ב: ρ - פרמטר המאפיין את עוצמת הקשר הלינארי באוכלוסייה וכיוונו בין שני המשתנים הנחקרים. כאשר:

r - מדד הקשר הלינארי במדגם שמהווה אומד לפרמטר ρ .

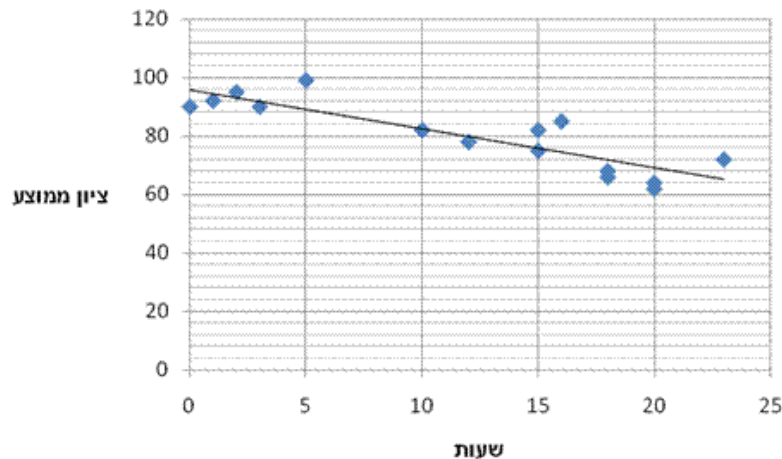
קיומו של מתאם בין שני משתנים אינו מצביע על סיבתיות בהכרח. למשל, אם נמצא מתאם חיובי בין כמות הסוכרזית שאדם אוכל לבין במשקל שלו אין זה אומר שהסיבה להשמנה היא הסוכרזית. מדד הקשר של פירסון הוא מדד קשר סימטרי, כלומר אם נחליף את X ב- Y התוצאה תהיה זהה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

- מה ניתן להגיד על מקדם המתאם של שני המשתנים על סמך דיאגרמת הפיזור ששרטטנו?
- אם היינו משנים את השרטוט כך שבציר האנכי היה המשתנה "מספר החדרים" ובציר האופקי היה "מספר הנפשות", האם הדבר היה משפיע על מדד הקשר של פירסון?

שאלות

- (1) חוקר רצה לאפיין את הקשר בין מספר השעות בשבוע שסטודנט מקדיש לבילויים לבין הציון הממוצע שלו בסוף הסמסטר. לשם כך הוא אסף נתונים של 15 סטודנטים ויצר דיאגרמת פיזור:



- א. מיהו המשתנה הבלתי תלוי?
 ב. מה ניתן לומר על כיוון הקשר בין מספר שעות הבילוי השבועיות לבין הציון הממוצע של הסמסטר? מה ניתן להגיד על עוצמת הקשר?
- (2) להלן טבלה המסכמת את מקדמי המתאם הלינארי בין ציוני מבחנים שונים שהתקבלו עבור תלמידים בכיתה מסוימת:

מתמטיקה	לשון	ספורט	
?	-0.7	?	ספורט
0.6	?	?	לשון
?	?	-0.1	מתמטיקה

- א. השלימו את מקדמי המתאם שמסומנים בסימן שאלה בטבלה.
 ב. בין אילו שני ציוני מקצועות שונים קיים מתאם בעל העוצמה החזקה ביותר?

- (3) במחקר נתבקשו לבדוק את הקשר בין מספר שעות התרגול של קורס לבין הציון הסופי שלו. להלן תוצאות מדגם שהתקבל:

שעות תרגול	ציון סופי
20	90
25	90
30	95
15	60
30	90
20	85
10	50

- א. מיהו המשתנה התלוי ומיהו המשתנה הבלתי תלוי בדוגמה זו?
 ב. שרטטו דיאגרמת פיזור לנתונים.
 ג. מה ניתן לומר על הקשר בין המשתנים במדגם?
 ד. מסתבר שבסופו של דבר נתנו פקטור של 5 נקודות לציון הסופי. כיצד הדבר היה משנה את מקדם המתאם של המדגם?

4) בתחנה המטאורולוגית רצו לבדוק את הקשר שבין הטמפרטורה במעלות צלזיוס לכמות המשקעים במ"מ. הם אספו נתונים על 10 ימים במהלך חודש ינואר. המתאם שהתקבל היה 0.8.

א. השלימו את המשפט:

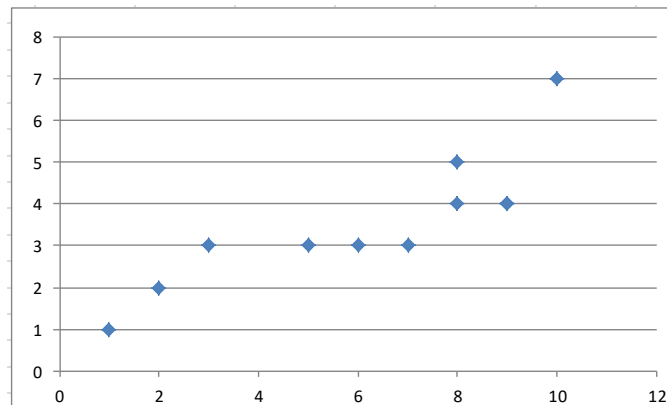
בחודש ינואר ככל שהטמפרטורה היומית נוטה לרדת, כך כמות המשקעים נוטה _____.

ב. הוחלט להעביר את הטמפרטורה למעלות פרנהייט על מנת שיוכלו

להשוות אותה לנתונים מארה"ב. נוסחת המעבר היא $F^0 = 32 + \frac{9}{5}C^0$.

כיצד הדבר ישפיע על מקדם המתאם בין הטמפרטורה במעלות פרנהייט לכמות המשקעים במ"מ?

5) להלן דיאגרמת פיזור המראה קשר בין שני משנים:



א. השלימו: ניתן לראות שהקשר הוא לינארי _____ (מלאו חלקי) כיוון הקשר הוא (חיובי/שלילי).

ב. השלימו: אם היינו מוסיפים תצפית שערך ה- X שלה הוא 4 וערך ה- Y שלה הוא 7, מקדם המתאם של פירסון היה _____ (גדלו קטן/לא משתנה).

שאלות רב ברירה (יש לבחור את התשובה הנכונה):

6) חוקר אקלים דגם כמה ימים בשנה ומדד את הטמפרטורה בטורונטו שבקנדה ואת הטמפרטורה בסידני שבאוסטרליה באותו היום. הוא חישב ומצא מקדם מתאם שלילי בין הטמפרטורה היומית בטורונטו לבין הטמפרטורה היומית בסידני. משמעות מקדם המתאם השלילי במדגם:

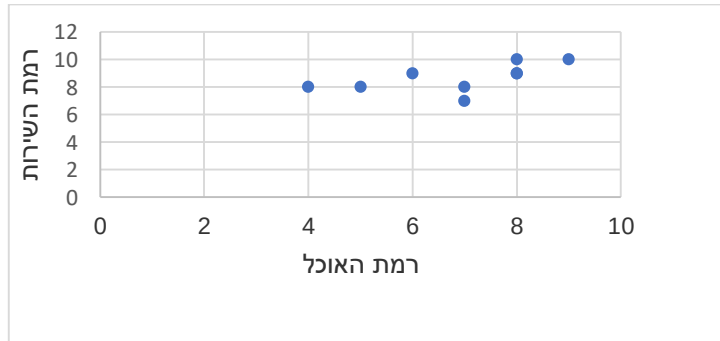
א. אין קשר בין הטמפרטורה בטורונטו לבין הטמפרטורה בסידני בימים שנדגמו.

ב. במדגם, רוב הטמפרטורות בטורונטו היו שליליות.

ג. ההפרש בין הטמפרטורה בטורונטו לבין הטמפרטורה באוסטרליה, במדגם זה, הוא שלילי.

ד. במדגם יש נטייה שהטמפרטורה יורדת בטורונטו לטמפרטורה לעלות בסידני.

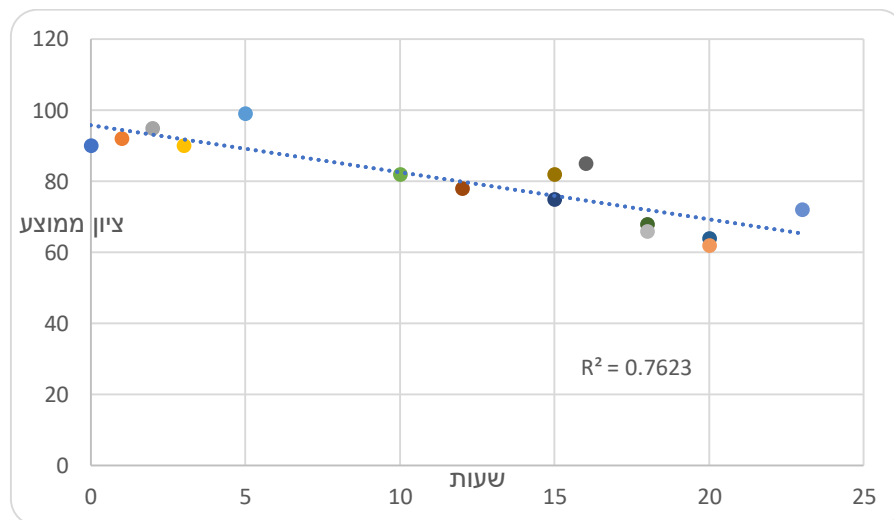
- 7) בסקר שביעות רצון שנערך בבית הקפה "פת לחם" התבקשו הלקוחות לדרג את מידת שביעות הרצון שלהם (בסולם 1-10) בשני נושאים: רמת האוכל ורמת השירות.



מה יהיה ערכו של מקדם המתאם (r)?

- א. $r = -0.3$
 ב. $r = 0$
 ג. $r = 1.125$
 ד. $r = 0.593$

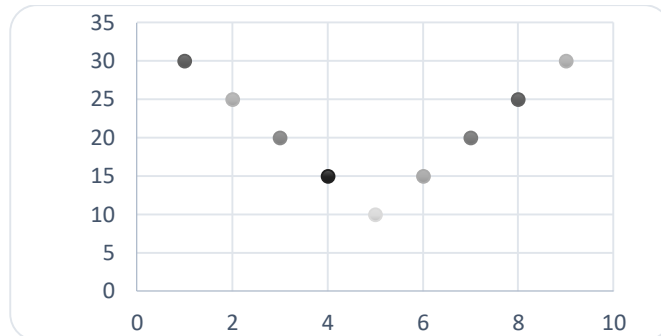
- 8) חוקר רצה לאפיין את הקשר בין מספר השעות בשבוע שסטודנט מקדיש לבילויים לבין הציון הממוצע שלו בסוף הסמסטר. לשם כך הוא אסף נתונים של 15 סטודנטים ויצר דיאגרמת פיזור.



מה ניתן לומר על כיוון הקשר במדגם בין מספר שעות הבילוי השבועיות לבין הציון הממוצע של הסמסטר?

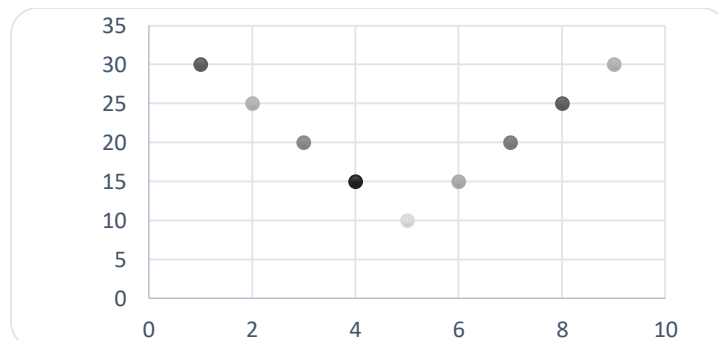
- א. ככל שמבליים יותר הציון נוטה לרדת.
 ב. אין קשר בין שעות הבילוי לציון.
 ג. ככל שמבליים פחות הציון נוטה לרדת.
 ד. ככל שהציון נוטה לרדת הסטודנט מבלה פחות.

9) התרשים הבא מתאר קשר בין שני משתנים, איזה מהמתאמים הבאים הוא המתאים ביותר לתיאור הקשר בין שני המשתנים?



- א. $r = 1$ היות ושני המשתנים יוצרים קוים ישרים.
- ב. $r = 2$ היות ויש שני קוים בעלי קשר מושלם.
- ג. $r = 0$ היות והקו יורד ואחר כך עולה באותו האופן.
- ד. $r = \pm 1$ היות ויש קו עולה וגם קו יורד.

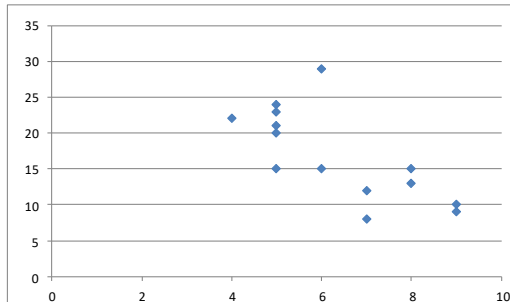
10) התרשים הבא מתאר דיאגרמת פיזור.



איזו טענה נכונה?

- א. בתרשים מוצג הקשר בין שני משתנים.
- ב. בתרשים מוצג הקשר בין 9 משתנים.
- ג. בתרשים מוצג הקשר בין 10 משתנים.
- ד. אין לדעת כמה משתנים מוצגים בתרשים.

בגרף הבא מתוארת דיאגרמת פיזור של שני משתנים :



X - (משתנה בלתי תלוי בציר האופקי)

Y - (משתנה תלוי).

במדגם התקבל $r^2 = 0.52$.

11) לאור הנתונים המופיעים בדיאגרמה, איזה מבין הערכים הבאים מתאים להיות התוצאה של r ?

א. -0.52

ב. 0.72

ג. -0.72

ד. 0.52

12) אם מקדם המתאם בין שני משתנים הוא 1, אזי :

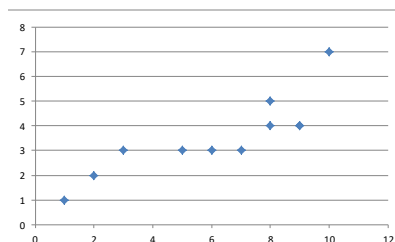
א. הערכים של המשתנים הם חיוביים.

ב. עבור כל תצפית ערך של משתנה אחד שווה לערך של המשתנה השני.

ג. הקשר הלינארי הוא בעוצמה חזקה.

ד. אף אחת מהתשובות לא בהכרח נכונה.

13) להלן דיאגרמת פיזור :



מה יהיה מקדם המתאם בין שני המשתנים ?

א. 1

ב. 0.85

ג. 0.15

ד. 0

14) בבדיקת קשר בין שני משתנים התקבל : $r = -1$.

א. קיימת נוסחה לינארית הקושרת בין כל התצפיות.

ב. לא קיים קשר בין שני המשתנים.

ג. ככל שמשתנה אחד נוטה לרדת גם לשני יש נטייה לרדת.

ד. קיים קשר בין שני המשתנים, אך לא ניתן לדעת מאיזה סוג.

15) לפי הפתגם "רחוק מהעין, רחוק מהלב", יש קשר ____ בין קרבה פיזית לקרבה נפשית.

- א. חיובי
- ב. שלילי
- ג. אפסי
- ד. לא ניתן לדעת.

16) מבחן אמי"ר הינו מבחן מיון באנגלית של המרכז הארצי לבחינות והערכה. הציון המינימלי בבחינה הינו 150 והמקסימלי הינו 250. בקורס הכנה למבחן השתתפו 19 תלמידים. להלן הציונים שלהם על פי פלט שהתקבל:

	159
	170
	180
	185
	204
	224
	236
	212
	168
	189
	195
	163
	187
	206
	201
	223
	242
	203
	205
197.47	AVERAGE
536.25	VARPA

יש להוסיף עמודה נוספת לצד עמודת הציונים שתראה לכל תלמיד כמה נקודות חסרות לו כדי להשלים לציון המקסימלי בבחינה.

מה יהיה מקדם המתאם בין שתי העמודות (כלומר, מקדם המתאם בין הציון לבין הנקודות החסרות)?

- א. -1
- ב. 1
- ג. -0.5
- ד. 0.5

17) מקדם המתאם בין שטחי דירה למחיר שלהם חושב ונמצא 1.2. מה נובע מכך?

- א. ככל שהדירה גדולה יותר בשטחה כך היא יקרה יותר.
- ב. ככל שהדירה קטנה יותר בשטחה כך היא זולה יותר.
- ג. לא קיים קשר בין שטח הדירה למחיר הדירה.
- ד. מצב כזה שמתואר הנתונים לא אפשרי.

18) אם ניקח 10 אנשים ונרשום לכל אדם את הגובה במטר וכמו כן את הגובה בס"מ. מה יהיה מקדם המתאם בין גובה האדם במטר לגובה האדם בס"מ?

- א. 1
- ב. 0
- ג. -1
- ד. לא ניתן לדעת.

- 19** נמצא מתאם חיובי בעוצמה גבוהה בין X – ציון בבגרות בלשון ל Y – ציון בבגרות במתמטיקה. אילו מהמשפטים הבאים נכון?
- א. ניתן לומר שאחת מהסיבות להבדלים שיש לסטודנטים במתמטיקה נובעים מההבדלים שיש להם בלשון.
- ב. קיימת נוסחה של קו ישר שקושרת בין ציון בבגרות במתמטיקה לציון בבגרות בלשון.
- ג. ללא יוצא מן הכלל, ניתן להגיד שכל תלמיד שמצליח יותר מתלמיד אחר בלשון גם יצליח יותר מאותו תלמיד במתמטיקה.
- ד. אף אחד מהטענות שהוצגו אינה בהכרח נכונה.

- 20** עבור סדרה של תצפיות מדדו את X ואת Y . נמצא שעבור כל התצפיות שהערך של Y ירד הערך של X בהכרח ירד ללא יוצא מן הכלל. מקדם המתאם של פירסון יהיה בהכרח :

- א. 1
- ב. -1
- ג. 0
- ד. אף אחת מהתשובות.

תשובות סופיות

- (1) א. שעות בילוי.
ב. הקשר חלקי, כיוון הקשר שלילי.
(2) א. להלן טבלה:
ב. ספורט ולשון.

מתמטיקה	לשון	ספורט	
0.1	-0.7	1	ספורט
0.6	1	-0.7	לשון
1	0.6	-0.1	מתמטיקה

- (3) א. ב"ת- מס' שעות התרגול, תלוי- ציון.
ג. קשר לינארי חיובי חלקי.
(4) א. לעלות.
(5) א. חלקי, חיובי.
ב. קטן.
ב. ראה גרף בפתרון וידאו.
ד. מקדם המתאם לא היה משתנה.
ב. לא ישפיע על מקדם המתאם.

(6) ד' (7) ד' (8) א' (9) ג' (10) א'

(11) ג' (12) ד' (13) ב' (14) א' (15) א'

(16) א' (17) ד' (18) א' (19) ד' (20) ד'

מדדי קשר – מדד הקשר הלינארי (פירסון) – רקע

המטרה היא לבדוק האם קיים קשר (קורלציה, מתאם) של קו ישר בין שני משתנים כמותיים. מבחינת סולמות המדידה קשר בין סולמות רווחים ומנה. בדרך כלל, X הוא המשתנה המסביר (הבלתי תלוי) ו- Y הוא המשתנה המוסבר (התלוי).

דוגמה:

נרצה להסביר כיצד השכלה של אדם הנמדדת בשנות לימוד X מסבירה את ההכנסה שלו Y . במקרה זה שנות ההשכלה זהו המשתנה המסביר (או הבלתי תלוי) ואנחנו מעוניינים לבדוק כיצד שינויים בשנות ההשכלה של אדם יכולים להסביר את השינויים שלו בהכנסה, ולכן רמת ההכנסה זהו המשתנה המוסבר התלוי במשתנה המסביר אותו.

שלב ראשון: נהוג לשרטט דיאגרמת פיזור. זו דיאגרמה שנותנת אינדיקציה ויזואלית על טיב הקשר בין שני המשתנים.

דוגמה:

מס' דירה	X	Y
1	3	2
2	2	2
3	4	3
4	3	3
5	5	4

בבניין של 5 דירות בדקו את הנתונים הבאים:
 X - מס' חדרים בדירה. Y - מס' נפשות הגרות בדירה.
 להלן התוצאות שהתקבלו:

נשרטט מנתונים אלה דיאגרמת פיזור (הדיאגרמה המלאה בסרטון). נתבונן בכמה מקרים של דיאגרמות פיזור ונתח אותן (הדיאגרמות המלאות בסרטון).

שלב שני: מחשבים את מקדם המתאם (מדד הקשר) שבודק עד כמה קיים קשר לינארי בין שני המשתנים. המדד (ניקרא גם מדד הקשר של פירסון) מכמת את מה שניראה בשלב הראשון רק בעין.
 המדד בודק את כיוון הקשר (חיובי או שלילי) ואת עוצמת הקשר (חלש עד חזק).
 מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין -1 ל-1.
 מקדם מתאם -1 או 1 אומר שקיים קשר לינארי מוחלט ומלא בין המשתנים שניתן לבטאו על ידי הנוסחה: $y = bx + a$.

מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1):

קיים קשר לינארי מלא בו השיפוע b יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי מלא אומר שקיים קשר לינארי מלא בו השיפוע b שלילי (מקדם מתאם -1).

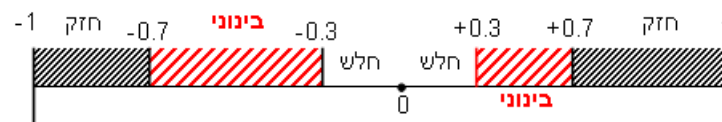
מתאם חיובי חלקי:

ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט.

מתאם שלילי חלקי:

ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט.

ככל שערך מקדם המתאם קרוב לאפס נאמר שעוצמת הקשר חלשה יותר וככל שמקדם המתאם רחוק מהאפס נאמר שעוצמת הקשר חזקה יותר:



מקדם המתאם יסומן באות r .

כדי לחשב את מקדם המתאם, יש לחשב את סטיות התקן של כל משתנה ואת השונות המשותפת.

$$COV(x, y) = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{n} = \frac{\sum xy}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y} : \text{שונות משותפת}$$

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2 : \text{שונות של המשתנה } X$$

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n} - \bar{y}^2 : \text{שונות המשתנה } Y$$

$$r_{xy} = \frac{COV(x, y)}{S_x \cdot S_y} : \text{מקדם המתאם הלינארי}$$

שאלות

- 1) להלן נתונים לגבי שישה תלמידים שנגשו למבחן. בדקו לגבי כל תלמיד את הציון שלו בסוף הקורס וכמו כן את מספר החיסורים שלו מהקורס.

מספר חיסורים	2	1	0	2	3	4
ציון	80	90	90	70	70	50

- א. שרטטו דיאגרמת פיזור לנתונים. מה ניתן להסיק מהדיאגרמה על טיב הקשר בין מספר החיסורים של תלמיד לציונו? מיהו המשתנה הבלתי תלוי ומיהו המשתנה התלוי?
- ב. חשבו את מדד הקשר של פירסון. האם התוצאה מתיישבת עם תשובתך לסעיף א'?
- ג. הסבירו, ללא חישוב, כיצד מקדם המתאם היה משתנה אם היה מתווסף תלמיד שהחסיר 4 פעמים וקיבל ציון 80?

- 2) במחקר רפואי רצו לבדוק האם קיים קשר בין רמת ההורמון X בדם החולה לרמת ההורמון Y שלו. לצורך כך מדדו את רמת ההורמונים ההלו עבור חמישה חולים. להלן התוצאות שהתקבלו:
- א. מה הממוצע של כל רמת הורמון?
- ב. מהו מקדם המתאם בין ההורמונים? ומה משמעות התוצאה?

X	Y
10	12
14	15
15	15
18	17
20	21

- 3) נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 200 \qquad \sum_{i=1}^{20} X_i = 240$$

$$\sum_{i=1}^{20} (Y_i - \bar{Y})^2 = 76 \qquad \sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})^2 = 76$$

$$\sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = 60.8$$

- א. חשב את מדד הקשר הלינארי בין X ל- Y . מיהו המשתנה התלוי?
- ב. מה המשמעות של התוצאה שקיבלת בסעיף א'?

- (4) נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 200 \quad \sum_{i=1}^{20} X_i = 240$$

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i^2 = 2080 \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 2960$$

$$\sum_{i=1}^{20} X_i Y_i = 2464$$

חשבו את מדד הקשר הלינארי בין X ל- Y .

- (5) במוסד אקדמי ציון ההתאמה מחושב כך: מכפילים את הציון הממוצע בבגרות ב-3 ומפחיתים 2 נקודות. ידוע שעבור 40 מועמדים סטיית התקן של ממוצע הציון בבגרות הייתה 2.
מה מקדם המתאם בין ציון ההתאמה לציון הממוצע בבגרות שלהם?

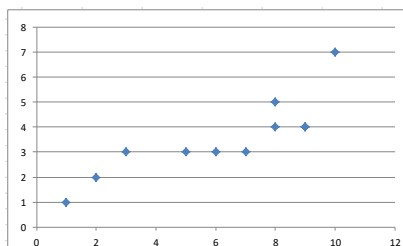
- (6) להלן רשימת טענות, לגבי כל טענה קבעו נכון/לא נכון ונמקו.
- מתווך דירות המיר מחירי דירות מדולר לשקל. נניח שדולר אחד הוא 3.5 ₪. אם מתווך הדירות יחשב את מדד הקשר של פירסון בין מחיר הדירה בשקלים למחיר הדירה בדולרים הוא יקבל 1.
 - לסדרה של נתונים התקבל $\bar{X} = \bar{Y} = 6$, $S_x = S_y = 1$. לכן, מדד הקשר של פירסון יהיה 1.
 - אם השונות המשותפת של X ושל Y הינה 0 אז בהכרח גם מקדם המתאם של פירסון יהיה 0.

שאלות רב-ברירה:

- (7) נמצא שקיים מקדם מתאם שלילי בין הציון בעברית לציון בחשבון בבחינה לכן:
- הדבר מעיד שהציונים בכתה היו שליליים.
 - ככל שהציון של תלמיד יורד בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.
 - ככל שהציון של תלמיד עולה בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.
 - אף אחת מהתשובות לא נכונה.

8) נלקחו 20 מוצרים ונבדק ביום מסוים המחיר שלהם בדולרים והמחיר שלהם בש"ח (באותו היום ערך הדולר היה-4.2ש"ח). מהו מקדם המתאם בין המחיר בדולר למחיר בש"ח?

- א. 1
 ב. 0
 ג. 4.2
 ד. לא ניתן לדעת.



9) להלן דיאגרמת פיזור: מה יהיה מקדם המתאם בין שני המשתנים?

- א. 1
 ב. 0.85
 ג. 0.15
 ד. 0

תשובות סופיות

- 1) א. משתנה תלוי: ציון, משתנה ב"ת: מס' חיסורים. ראה דיאגרמה בוידאו. ניתן להסיק שקיים קשר לינארי שלילי וחלקי בין מספר החיסורים לציון התלמיד.
 ב. -0.9325.
 ג. הקשר יישאר לינארי שלילי חלקי אך עוצמתו תחלש.
- 2) א. $\bar{y} = 16$, $\bar{x} = 15.4$ ב. $r_{xy} = 0.96$.
- 3) א. 0.8
 4) 0.8
 5) 1
 6) א. נכון. ב. לא נכון. ג. נכון.
 7) ג'.
 8) א'.
 9) ב'.

בדיקת השערות על מקדם המתאם הלינארי – רקע

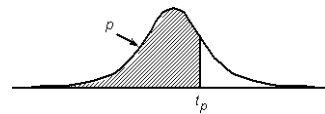
מדד הקשר הלינארי באוכלוסייה, שנקרא גם מקדם המתאם של פירסון או מדד הקשר של פירסון באוכלוסייה מסומן ב: ρ - פרמטר המאפיין את עוצמת הקשר הלינארי וכיוונו בין שני המשתנים הנחקרים באוכלוסייה. כאשר: r - מדד הקשר הלינארי במדגם שמהווה אומדן לפרמטר ρ .

השערת האפס: תהיה שבאוכלוסייה לא קיים כלל קשר לינארי בין שני המשתנים $H_0: \rho = 0$.
ההנחה שעליה אנו מתבססים בתהליך היא ששני המשתנים הנחקרים מתפלגים דו נורמלית.

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \sim t(n-2)$$

סטטיסטי זה מתפלג t עם $n-2$ דרגות חופש.

$H_0: \rho = 0$	$H_0: \rho = 0$	$H_0: \rho = 0$	השערת האפס:
$H_1: \rho > 0$	$H_1: \rho < 0$	$H_1: \rho \neq 0$	השערת המחקר:
$t \geq t_{1-\alpha}$	$t \leq -t_{1-\alpha}$	$t \geq t_{1-\alpha}$ ו $t \leq -t_{1-\alpha}$	כלל ההכרעה: אזור דחייה של השערת האפס

טבלת ערכים קריטיים של t - נספח: טבלת התפלגות T
 P 

דרגות חופש	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9995
1	1.000	3.078	6.314	12.709	31.821	63.657	636.619
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.941
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

שאלות

(1) להלן נתונים על הוותק בעבודה (בשנים) ועל השכלה (בשנים) במדגם של 10 עובדים:

נחקר	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X - וותק	13	18	2	8	16	9	5	28	17	24
Y - השכלה	12	14	17	8	11	12	13	8	12	15

מקדם המתאם חושב והתקבל: -0.31 .

- א. האם קיים מתאם בין וותק העובד להשכלתו? בדקו ברמת מובהקות של 5%?
 ב. אם הוותק של העובד היה נמדד בחודשים האם התשובה לסעיף א' הייתה משתנה?

(2) מחקר התעניין לבדוק את הקשר בין גיל נשים בהריון לרמת ההמוגלובין שלהן בדם בזמן הריון. נדגמו 7 נשים והתקבלו התוצאות הבאות:

נחקרת	1	2	3	4	5	6	7
המוגלובין	14.7	13.5	9.7	12	10.8	13	10.3
גיל	39	34	30	29	28	26	23

במדגם חושב מדד הקשר של פירסון להיות 0.7 .

- א. האם ניתן לומר שבמדגם אם אישה היא יותר מבוגרת אזי בהכרח יש לה יותר המוגלובין בדם?
 ב. האם ניתן לומר, ברמת מובהקות של 5%, שקיים מתאם בין גיל האישה שבהריון לבין רמת ההמוגלובין שלה בדם?

(3) בתחנה המטאורולוגית רצו לבדוק את הקשר שבין הטמפרטורה במעלות צלזיוס לכמות המשקעים במ"מ. הם אספו נתונים על 10 ימים במהלך חודש ינואר. המתאם שהתקבל היה -0.8 .

- א. בדקו ברמת מובהקות של 2.5% האם קיים קשר לינארי שלילי בחודש ינואר בין הטמפרטורה במעלות צלזיוס לבין המשקעים במעלות צלזיוס.
 ב. כיצד הייתה משתנה התשובה לסעיף א אם הינו מוסיפים עוד תצפיות למדגם?
 ג. על סמך טבלת T המצורפת עבור אילו רמות מובהקות ניתן להחליט שקיים קשר לינארי שלילי מובהק?

(4) מתווך דירות חישב את מקדם המתאם בין שטח דירה במרכז תל אביב לבין המחיר של הדירה עבור 17 דירות. מקדם המתאם שקיבל היה 0.6 .

- א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם ניתן להגיד שקיים קשר ישר עולה בין שטח הדירה לבין מחיר הדירה במרכז תל אביב?
 ב. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת ההשערה שקיים קשר ישר עולה בין שטח הדירה לבין מחיר הדירה בתל אביב.

תשובות סופיות

ב. לא תשתנה.	(1) א. לא נדחה את H_0 .
ב. לא נדחה את H_0 .	(2) א. לא
ב. לא ניתן לדעת.	(3) א. נדחה את H_0 .
	ג. לפחות 0.005.
ב. $0.005 < P_v < 0.01$.	(4) א. נדחה את H_0 .

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 51 - רגרסיה

תוכן העניינים

1. כללי 250

מדדי קשר – רגרסיה ליניארית:

רקע:

במידה וקיים קשר חזק בין שני המשתנים הכמותיים נהוג לבצע ניבוי. לבנות קו ניבויים הנקרא גם קו רגרסיה המנבא משתנה אחד על סמך האחר. מדובר בקו שמנבא את Y על סמך X .

השיטה למציאת הקו הנ"ל נקראת שיטת הריבועים הפחותים והקו המתקבל נקרא קו הרגרסיה או קו הניבויים או קו הריבועים הפחותים.

a - נותן את ערך Y כאשר X הנו אפס על גבי קו הניבויים. הוא נקרא החותך של הקו.

b - הוא שיפוע הקו נותן בכמה בעצם Y משתנה כאשר X גדל ביחידה אחת על גבי קו הניבויים.

להלן המשוואות למציאת הפרמטרים של קו הרגרסיה: $Y = bX + a$, $b = r \frac{S_y}{S_x}$.

לצורך בניית קו ניבויים לניבוי X על סמך Y נצטרך לעדכן את הנוסחאות בהתאם.

שאלות:

- (1) נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 200, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i = 240$$

$$\sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})^2 = 76, \quad \sum_{i=1}^{20} (Y_i - \bar{Y}) = 76$$

$$\sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = 60.8$$

- א. חשבו את מדד הקשר הלינארי בין X ל- Y . מיהו המשתנה התלוי?
 ב. מצאו את קו הרגרסיה לניבוי ההוצאה של משפחה על סמך הכנסה שלה. הסבירו את משמעות הפרמטרים של קו הרגרסיה.
 ג. משפחת כהן הכניסה 15,000 ₪. מה ההוצאה הצפויה שלה?

- (2) נסמן ב- X את ההשכלה של אדם בשנות לימוד. נסמן ב- Y את הכנסתו באלפי ₪. במחקר התקבלו התוצאות הבאות:

$$S_x = 2, \quad S_y = 5, \quad \bar{X} = 14, \quad \bar{Y} = 8, \quad \text{COV}(X, Y) = 7.5$$

- א. חשבו את מדד הקשר של פירסון בין ההשכלה להכנסה.
 ב. מה ההכנסה הצפויה לאדם שהשכלתו 12 שנים?
 ג. מה ההשכלה הצפויה לאדם שהכנסתו 10,000 ₪?

- (3) חוקר רצה לחקור את הקשר הקווי שבין הציון המבחן בסטטיסטיקה לבין מספר שעות ההכנה של הסטודנטים למבחן. במדגם של 100 סטודנטים שנבחנו בקורס נרשמו התוצאות הבאות: הציון הממוצע של הסטודנטים היה 65 עם סטיית תקן של 27. מספר שעות ההכנה הממוצע היה 30 עם סטיית תקן של 18. מקדם המתאם בין הציון לשעות ההכנה היה 0.8.
 א. על פי משוואת הרגרסיה, שעת הכנה נוספת משפרת את ציון המבחן ב-?
 ב. על פי משוואת הרגרסיה, תלמיד שייגש למבחן ללא שעות הכנה כלל יקבל ציון?
 ג. מהו קו הרגרסיה לניבוי הציון לפי שעות ההכנה?

- (4) נתונים 2 משתנים X ו- Y . כמו כן נתון: $\bar{X} = 1.5, S_x = S_y = 4$,
 וכן שקו הרגרסיה של Y על בסיס X הינו: $Y = -0.2X + 0.5$.
 חשבו מהו מקדם המתאם בין X ל- Y .

תשובות סופיות:

ג. 12.4 אלפי ₪.	ב. $Y = 0.8X + 0.4$.	א. 0.8. (1)
ג. 14.6 שנים.	ב. 4.25 אלפי ₪.	א. 0.75. (2)
ג. $Y = 1.2X + 29$.	ב. 29.	א. 1.2. (3)
		א. -0.2. (4)

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 52 - מדדי קשר-רגרסיה - שונות מוסברת ושונות לא מוסברת

תוכן העניינים

1. כללי 253

מדדי קשר – רגרסיה – שונות מוסברת ושונות לא מוסברת:

רקע:

המטרה ברגרסיה היא להסביר את השונות של המשתנה התלוי. למשל, להסביר את השונות של המשכורת באמצעות הוותק או להסביר את השוני בציונים באמצעות כמות החיסורים.

r^2 - החלק מהשונות של המשתנה התלוי מוסבר. השונות המוסברת נקראת גם שונות ניבויים. השונות הלא מוסברת נקראת גם שונות טעויות.

שאלות:

- (1) נמצא קשר חיובי בעוצמה של 0.7 בין שטח דירה למחירה. כמו כן, נתון שסטיית התקן של מחירי הדירות הינה 200.
- איזה אחוז מהשונות של מחירי הדירות מוסבר על ידי שטח הדירה?
 - איזה אחוז מהשונות של מחירי הדירות לא מוסבר על ידי שטח הדירה?
 - מהי השונות המוסברת ומהי השונות הלא מוסברת של מחירי הדירות?
- (2) להלן רשימת טענות, לגבי כל טענה קבעו נכון/לא נכון ונמקו:
- אם שונות הטעויות שווה ל-0 (השונות הלא מוסברת) אז מקדם המתאם של פירסון יהיה 1.
 - אם מקדם המתאם של פירסון בין שני משתנים הוא 1 אזי שונות הטעויות (השונות הלא מוסברת) תהיה 0.
 - אם השונות המשותפת של X ושל Y היא 0 אז בהכרח גם מקדם המתאם של פירסון יהיה 0.

שאלות רב-ברירה:

- (3) בקשר בין שני משתנים התקבל: $r^2 = 0.64$, לכן:
- ללא יוצא מן הכלל ככל שערכי משתנה אחד עולה השני יעלה.
 - 64% מהשונות של משתנה אחד מוסבר על ידי המשתנה השני.
 - הקשר בין שני המשתנים הוא בעוצמה של 0.64.
 - כל התשובות נכונות.
- (4) אם מגדילים את r^2 , ניתן לומר כי:
- אחוז השונות המוסברת יקטן.
 - אחוז השונות המוסברת יגדל.
 - אחוז השונות המוסברת יישאר ללא שינוי.
 - סטיית התקן משתנה.
 - לא ניתן לדעת.

- (5) בקורס מבוא לכלכלה ניתנו במשך השנה שני מבחנים : מבחן בסוף סמסטר א' X ומבחן בסוף סמסטר ב' Y . כאשר בנו את קו הרגרסיה של הציון במבחן סוף סמסטר ב' לפי הציון במבחן סוף סמסטר א' התקבלה שונות טעויות של 80, ושונות ניבויים של 20.
- לפי נתונים אלו, מקדם המתאם בין הציון במבחן סוף סמסטר א' לבין הציון במבחן סוף סמסטר ב' הוא :
- א. 0.44
 - ב. - 0.44
 - ג. עוצמת ההקשר הלינארי היא 0.44, אך אין אפשרות לדעת את סימנה.
 - ד. אין אפשרות לחשב את מקדם המתאם.
 - ה. 0.35

תשובות סופיות:

- (1) א. 49% ב. 51%
ג. שונות מוסברת : 19,600, שונות לא מוסברת : 20,400
- (2) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון.
- (3) ב'.
- (4) ב'.
- (5) ג'.

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 53 - מדדי קשר - בחירת מדד מתאים

תוכן העניינים

1. בחירת מדד מתאים..... 256

מדדי קשר – בחירת מדד מתאים:

רקע:

בפרק זה נתרגל את התהליך של בחירת מדד הקשר (מקדם המתאם) המתאים. נתרכז בשלושת מדדי הקשר הנפוצים ביותר:

- מדד הקשר של קרמר.
- מדד הקשר של ספירמן.
- מדד הקשר של פירסון (מדד הקשר הלינארי).

בחירת מדד הקשר נעשה לפי סולמות המדידה של שני המשתנים שאנחנו רוצים לבדוק את הקשר בינם. הנושא של סולמות מדידה נלמד כבר בפרק אחר, כמו כן כל מדד קשר נלמד בפרק נפרד. אנו מתרכזים ב 3 סולמות מדידה:

- סולם שמי/ זהות (nominal).
- סולם סדר (ordinal).
- סולם כמותי (scale): לכאן אנו מאחדים את סולם רווחים ומנה יחד.

שלושת מדדי הקשר שלעיל דנים בקשר בין שני משתנים. מדדי הקשר הם סימטריים, כלומר אין זה משנה איזה משתנה נגדיר בתור משתנה X ואיזה יוגדר בתור משתנה Y .

להלן טבלה שמסכמת את בחירת המדד המתאים:

X / Y	שמי	סדר	כמותי
שמי	קרמר	קרמר	קרמר
סדר	קרמר	ספירמן	ספירמן
כמותי	קרמר	ספירמן	פירסון

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במפעל לייצור מצברים לרכב בדקו במשך 40 ימים את התפוקה היומית (מספר מצברים במאות) ואת מספר הפועלים שעבדו באותו היום. איזה מדד קשר מתאים כדי לבדוק האם קיים קשר בין התפוקה היומית לכמות עובדים באותו היום במפעל?

- א. פירסון.
- ב. ספירמן.
- ג. קרמר.
- ד. חסרים נתונים כדי לדעת זאת.

שאלות:

- (1) בקרב תלמידי כיתות א' בבית הספר גבריאלי אשר בתל אביב בדקו לכל תלמיד את גובהו בס"מ ואת משקלו בק"ג. מהו מדד הקשר המתאים כדי לבדוק האם קיים קשר בין גובה התלמיד למשקלו?
- פירסון.
 - ספירמן.
 - קרמר.
 - אין מספיק נתונים כדי לדעת.
- (2) בסקר שנעשה על אזרחים במדינה בדקו לכל אזרח את השכלתו ואת שכרו. מהו מדד הקשר המתאים כדי לבדוק האם קיים קשר בין השכלה לשכר?
- פירסון.
 - ספירמן.
 - קרמר.
 - אין מספיק נתונים כדי לדעת.
- (3) בגן הילדים של שולה אספו נתונים על 25 הילדים שבגן. על כל ילד בדקו את רמת הביטחון העצמי שלו (X = מדד שמקבל ערכים בין 1 - נמוך ועד 5 - גבוה), ואת אוצר המילים שלו (Y = לפי מבחן שנעשה לכל ילד בו ספרו את מספר המילים שידע מתוך רשימה של 20 מילים). איסוף הנתונים נעשה על ידי איש מקצוע שצפה בילדים ובחן אותן.
- מהו מקדם המתאם המתאים לבדיקת התלות בין X לבין Y ?
- פירסון.
 - ספירמן.
 - קרמר.
 - אין מספיק נתונים כדי לדעת.
- (4) הועלתה השערה בבית הספר למדעי ההתנהגות שיש קשר בין המרצה להצלחת הסטודנט. לצורך בדיקת הטענה בדקו לגבי כל סטודנט שלמד סטטיסטיקה אצל איזה מרצה הוא למד (היו 3 מרצים שונים) והאם הוא עבר את הבחינה. מהו מדד הקשר המתאים במקרה זה?
- פירסון.
 - ספירמן.
 - קרמר.
 - אין מספיק נתונים כדי לדעת.

(5) בבורסה בתל אביב רצו לבדוק את הקשר בין גובה הריבית במשק בסוף החודש (באחוזים), לבין תשואת מניית אקטר (באחוזים) בסוף החודש. מהו מדד הקשר המתאים?

- א. פירסון.
- ב. ספירמן.
- ג. קרמר.
- ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

(6) בעל מסעדה ביצע סקר על לקוחותיו, בין השאלות שנשאלו בסקר :
 • מה מידת שביעות הרצון של הלקוח מאדיבות השירות של המלצר בסקלה של 1 עד 5.
 • מה גילו של הלקוח בשנים.
 • מה גובה התשר (טיפ) ב-₪ אשר נתן הלקוח למלצר בלכתו מהמסעדה.

מהו המדד המתאים כדי לבדוק האם קיים מתאם חיובי בין מידת שביעות הרצון של הלקוח מאדיבות השירות לבין גובה התשר שהוא נתן למלצר?

- א. פירסון.
- ב. ספירמן.
- ג. קרמר.
- ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

(7) בעל מסעדה ביצע סקר על לקוחותיו, בין השאלות שנשאלו בסקר :
 • מה מידת שביעות הרצון של הלקוח מאדיבות השירות של המלצר בסקלה של 1 עד 5.
 • מה גילו של הלקוח בשנים.
 • מה גובה התשר (טיפ) ב-₪ אשר נתן הלקוח למלצר בלכתו מהמסעדה.

מהו המדד המתאים כדי לבדוק האם קיים מתאם בין גיל הלקוח לגובה התשר שהעניק לשירות?

- א. פירסון.
- ב. ספירמן.
- ג. קרמר.
- ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

הנתונים הבאים מתאימים ל-3 השאלות הבאות:

חוקרים ערכו מדגם של ילדים מכיתות ב' ו-ג' מ-4 בתי ספר שונים. הועבר לילדים שאלון בו תואר מצב מסוים והילדים התבקשו לציין את רמת החרדה שלהם באשר לאותו מצב. המשתנים שלגביהם נאספו נתונים:

- מגדר (1 - בן, 2 - בת).
- כיתה (0 - ג', 1 - ב').
- בית ספר (A, B, C, D).
- רמת חרדה (ציון שהילד היה צריך לתת בסקלה של 1 עד 10).
- גיל התלמיד בחודשים.

8) מהו מדד הקשר המתאים כדי לבדוק את הקשר בין גיל התלמיד לבין רמת החרדה שלו מהמצב?

- א. פירסון.
- ב. ספירמן.
- ג. קרמר.
- ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

9) מהו מדד הקשר המתאים כדי לבדוק את הקשר בין המגדר לבין רמת החרדה שלו מהמצב?

- א. פירסון.
- ב. ספירמן.
- ג. קרמר.
- ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

10) מהו מדד הקשר המתאים כדי לבדוק את הקשר בין המגדר לבין בית הספר?

- א. פירסון.
- ב. ספירמן.
- ג. קרמר.
- ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

11) בטבלה שלהלן נתונות שכיחויות ההצלחה והכישלון של 150 חולים :

תוצאה/ התרופה	A	B	C
נרפא	35	13	45
לא נרפא	15	37	5

החולים קיבלו 3 תרופות שונות ובדקו עבור כל חולה אם התרופה הצליחה בריפוי. מהו מדד הקשר המתאים?

- א. פירסון.
- ב. ספירמן.
- ג. קרמר.
- ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

12) שני מוסיקאים מפורסמים נתנו ציון בסולם של 1-10 לקולם של 8 מתמודדים בתוכנית ריאליטי ידועה. ציון 10 ניתן לקול שמצא חן ביותר בעיני המוסיקאי. מפיק התוכנית רצה לבדוק האם יש קורלציה בין המוסיקאים מבחינת הטעם. בטבלה הבאה נתונים הציונים של כל אחד מהמוסיקאים את שמונת המתמודדים :

	1	2	3	4	5	6	7	8
מוסיקאי א'	6	5	7	4	3	1	1	4
מוסיקאי ב'	5	7	5	2	3	3	2	7

מהו מדד הקשר המתאים?

- א. פירסון.
- ב. ספירמן.
- ג. קרמר.
- ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

13) להלן טבלה המסכמת את השכר באלפי ₪ של עובדים בחברה ואת רמת המוטיבציה שלהם מ-1 עד 5 :

שכר	12	18	20	15	30
מוטיבציה	4	4	5	3	5

מהו מקדם המתאם המתאים לבדיקת רמת ההתאמה בין המוטיבציה לשכר של העובד?

- א. פירסון.
- ב. ספירמן.
- ג. קרמר.
- ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

14) להלן טבלה על נתונים שנאספו על מספר תצפיות:

5	4	3	2	1	X
20	17	17	14	12	Y

אם מעוניינים לבדוק עד כמה קיים קשר לנארי בין שני המשתנים.
מהו המדד המתאים?

- א. פירסון.
- ב. ספירמן.
- ג. קרמר.
- ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

תשובות סופיות:

א' (5	ג' (4	ב' (3	ד' (2	א' (1
ג' (10	ג' (9	ב' (8	א' (7	ב' (6
	א' (14	ב' (13	ב' (12	ג' (11

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 54 - ניתוח שונות חד כיוונית

תוכן העניינים

1. כללי..... 263

ניתוח שונות חד כיוונית

רקע תיאורטי

ניתוח שונות (חד כיוונית) הוא מבחן להשוואת תוחלות $(\mu_1, \dots, \mu_k)$ של k אוכלוסיות שונות. לכן, בניתוח שונות, השערות המחקר הן:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k \quad (\text{התוחלות של כל האוכלוסיות שוות})$$

$$H_1: \quad \text{אחרת} \quad (\text{לפחות שתיים מהתוחלות שונות})$$

ההנחות הדרושות לביצוע התהליך:

(2) בכל אוכלוסייה מתוך k האוכלוסיות ההתפלגות נורמלית.

(3) כל האוכלוסיות הן עם אותה שונות σ^2 .

(4) המדגמים בלתי תלויים זה בזה.

ישנו משתנה המבדיל בין הקבוצות השונות, הוא המשתנה הבלתי תלוי הנקרא גורם (factor). משתנה זה הוא קטגוריאלי עם k רמות (levels). כדי לבצע את התהליך יש לבצע מדגם מכל אוכלוסייה: נסמן ב- n_i את גודל המדגם בקבוצה i .

$$n = \sum_{i=1}^k n_i \quad \text{- מספר התצפיות סך הכול (בכל המדגמים).}$$

$\bar{X}_1$ - ממוצע המדגם הראשון, $\dots, \bar{X}_k$ - ממוצע המדגם ה- k .
 $\bar{X}$ - ממוצע כללי (של כל המדגמים).

$$SS_B = \sum_{i=1}^k n_i [\bar{X}_i - \bar{X}]^2 \quad \text{סכום ריבועים בין הקבוצות:}$$

$$SS_W = \sum_{i=1}^k n_i [n_i - 1] \cdot \hat{S}_i^2 \quad \text{סכום ריבועים בתוך הקבוצות:}$$

$$SS_T = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_j} [X_{ij} - \bar{X}]^2 \quad \text{סכום ריבועים כללי:}$$

$$SST = SSB + SSW$$

יש למלא את טבלת ניתוח השונות הבאה:

מקור השונות	סכום הריבועים SS	דרגות חופש df	ממוצע הריבועים MS	F
B - בין הקבוצות	SSB	$k-1$	$\frac{SSB}{k-1}$	$\frac{MSB}{MSW}$
W - בתוך הקבוצות	SSW	$n-k$	$\frac{SSW}{n-k}$	
T - סה"כ	SST	$n-1$		

$$F = \frac{\frac{SSB}{k-1}}{\frac{SSW}{n-k}} \sim F(k-1, n-k)$$

אזור דחיית H_0 : $1-\alpha : F_{(k-1, n-k)}$

שאלות

- (1) מחקר מעוניין להשוות בין שלוש תרופות לשיכוך כאבים במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין התרופות מבחינת הזמן בדקות שלוקח עד שהתרופה משפיעה. לצורך הבדיקה נלקחו 15 אנשים שסובלים מכאבי ראש. אנשים אלה חולקו באקראי לשלוש: קבוצה 1 קיבלה "אקמול" קבוצה 2 קיבלה "אופטלגין" קבוצה 3 קיבלה "נורופן". כל אדם במחקר מסר את מספר הדקות עד שהתרופה השפיעה עליו.
- מהו המשתנה התלוי ומהו המשתנה הבלתי תלוי במחקר?
 - מהו ה"גורם" וכמה רמות יש לו?
 - מהו המבחן הסטטיסטי המתאים כאן? רשמו את ההשערות.
 - מה הן ההנחות הדרושות כדי לבצע את המבחן הסטטיסטי שהצעת בסעיף הקודם?

- (2) בעיר מסוימת שלושה בתי ספר תיכון. ראש העיר התעניין לבדוק האם קיים הבדל בהצלחה של בתי הספר במקצוע מתמטיקה. לצורך כך הוא דגם מספר תלמידים שנבחנו במבחן הבגרות במתמטיקה ברמה של 3 יחידות בעירו ובדק עבור כל תלמיד מה ציון הבגרות שלו במתמטיקה.

"הס"	"רביץ"	"המתמיד"
85	98	78
83	62	65
74	55	70
85	80	90
75		56

- מהו המבחן הסטטיסטי המתאים? רשמו את ההשערות ואת ההנחות של המבחן.
- מהו גודל המדגם? מהו המשתנה הבלתי תלוי (factor) כמה רמות יש לו?
- חשבו את הממוצע ואת סטיית התקן של הציונים בכל אחד מהמדגמים.
- מלאו את טבלת ANOVA.
- רשמו את כלל ההכרעה למבחן שהוצע בסעיף א ברמת מובהקות של 5%.
- האם קיים הבדל בין בתי הספר בעיר מבחינת רמת הצלחת התלמידים במקצוע המתמטיקה? ענה על סמך הסעיפים הקודמים.

- (3) מעוניינים לבדוק האם יש הבדל בהשפעה של שיטות טפול שונות על לחץ הדם הסיסטולי (SBP) באוכלוסייה של קשישים. נבדקו 4 שיטות שונות. בטבלה המצורפת מרוכזים ממצאי המחקר.

השיטה	A	B	C	D
גודל המדגם	12	14	8	12
הממוצע	178	172	180	182
סטיית התקן	4	8	5	3

- רשמו את השערות המחקר וההנחות הדרושות כדי לבצע את המבחן המתאים.
- מה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 5%?
- האם יש צורך לבצע השוואות מרובות?

(4) שלושה אופים נתבקשו להכין עוגת שוקולד. לכל אופה בדקו את משך זמן ההכנה בדקות. כל אופה נדרש לאפות בכל יום 4 עוגות.

האם קיים הבדל בין האופים מבחינת תוחלת זמני ההכנה של העוגות?

בדקו ברמת מובהקות של 5%.

האופה	ניר	מוזס	שלום
סכום הזמנים	206	212	182
סכום ריבועי הזמנים	10644	11250	8982

(5) להלן טבלת ניתוח שונות חד כיוונית. במחקר בחנו 4 סוגי סוללות. רצו לבדוק האם לסוג הסוללה השפעה על תוחלת אורך החיים שלה. הפעילו את כל הסוללות על אותו מכשיר ובדקו את אורך החיים של כל סוללה בשעות. מה המסקנה ברמת מובהקות של 10%? רשמו את ההשערות וההנחות הדרושות.

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	10.317	3	3.439	1.361	.279
Within Groups	60.648	24	2.527		
Total	70.964	27			

(6) להלן טבלת ANOVA בטבלה הושמטו חלקים. השלימו את החלקים בטבלה שהושמטו ומסומנים באותיות.

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	357.450	ב	ג	ה	.000
Within Groups	א	17	ד		
Total	522.950	19			

7) חברת תרופות לקחה 15 אנשים ברמת בריאות דומה. החברה חילקה את האנשים ל שלוש קבוצות שוות בגודלן. לכל קבוצה ניתנה אותה תרופה במינון שונה (dosage). המינונים שניתנו הם: 10 מ"ג, 20 מ"ג ו-30 מ"ג. לאחר שעה מזמן לקיחת התרופה נבדק קצב פעימות הלב של כל אדם (pulse). הנתונים הוזנו לתוכנה סטטיסטית והתקבלו התוצאות הבאות:

ANOVA

pulse

ANOVA						Tukey HSD ^a			
pulse						pulse			
	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	dosage	N	Subset for alpha = 0.05	
								1	2
Between Groups	414.400	2	207.200	19.733	.000	30.00	5	71.0000	
Within Groups	126.000	12	10.500			20.00	5		80.2000
Total	540.400	14				10.00	5		83.4000
						Sig.		1.000	.299

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.

a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 5.000.

Post Hoc Tests

Multiple Comparisons

pulse
Tukey HSD

(I) dosage	(J) dosage	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Lower Bound	Upper Bound
10.00	20.00	3.20000	2.04939	.299	-2.2675	8.6675
	30.00	12.40000 [*]	2.04939	.000	6.9325	17.8675
20.00	10.00	-3.20000	2.04939	.299	-8.6675	2.2675
	30.00	9.20000 [*]	2.04939	.002	3.7325	14.6675
30.00	10.00	-12.40000 [*]	2.04939	.000	-17.8675	-6.9325
	20.00	-9.20000 [*]	2.04939	.002	-14.6675	-3.7325

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

- בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין המינונים השונים מבחינת תוחלת הדופק של האנשים? רשמו את ההשערות וההנחות הדרושות לצורך פתרון.
- הסבירו ללא חישוב כיצד הייתה משתנה התשובה לסעיף הקודם אם הינו מעלים את הדופק של כל התצפיות במחקר ב-2.
- האם יש צורך במחקר בהשוואת מרובות. נמקו!
- לטבלת ANOVA צורפו טבלאות של השוואות מרובות בשיטה הנקראת "טוקי". ברמת בטחון של 95% מה הם הממצאים לפי שיטה זו?

- (8) בעיר מסוימת רצו לבדוק האם קיים הבדל ברמה של התלמידים בין בתי הספר השונים בעיר. ביצעו מדגם מכל בית ספר ונתנו מבחן זהה לכל הנדגמים. לאחר מכן ריכזו את הנתונים בתוכנה סטטיסטית והפעילו ניתוח שונות. מצורפים הפלטים שהתקבלו. ענו על הסעיפים הבאים :
- כמה בתי ספר יש בעיר?
 - כמה תלמידים השתתפו בסך הכול במחקר?
 - האם קיים הבדל בין בתי הספר בעיר מבחינה רמת הציונים? בדקו ברמת מובהקות של 1%
 - בביטחון של 95% אילו בתי ספר שונים זה מזה ברמת התלמידים? נמקו והסבירו.

Oneway

ANOVA

grade

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	7799.600	4	1949.900	13.586	.000
Within Groups	2870.400	20	143.520		
Total	10670.000	24			

Post Hoc Tests

Multiple Comparisons

grade

Scheffe

(I) school	(J) school	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Lower Bound	Upper Bound
1.00	2.00	5.40000	7.57681	.971	-20.2543	31.0543
	3.00	36.80000*	7.57681	.003	11.1457	62.4543
	4.00	36.40000*	7.57681	.003	10.7457	62.0543
	5.00	-2.60000	7.57681	.998	-28.2543	23.0543
2.00	1.00	-5.40000	7.57681	.971	-31.0543	20.2543
	3.00	31.40000*	7.57681	.011	5.7457	57.0543
	4.00	31.00000*	7.57681	.013	5.3457	56.6543
	5.00	-8.00000	7.57681	.888	-33.6543	17.6543
3.00	1.00	-36.80000*	7.57681	.003	-62.4543	-11.1457
	2.00	-31.40000*	7.57681	.011	-57.0543	-5.7457
	4.00	-.40000	7.57681	1.000	-26.0543	25.2543
	5.00	-39.40000*	7.57681	.001	-65.0543	-13.7457
4.00	1.00	-36.40000*	7.57681	.003	-62.0543	-10.7457
	2.00	-31.00000*	7.57681	.013	-56.6543	-5.3457
	3.00	.40000	7.57681	1.000	-25.2543	26.0543
	5.00	-39.00000*	7.57681	.001	-64.6543	-13.3457
5.00	1.00	2.60000	7.57681	.998	-23.0543	28.2543
	2.00	8.00000	7.57681	.888	-17.6543	33.6543
	3.00	39.40000*	7.57681	.001	13.7457	65.0543
	4.00	39.00000*	7.57681	.001	13.3457	64.6543

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Homogeneous Subsets

grade

Scheffe^a

school	N	Subset for alpha = 0.05	
		1	2
3.00	5	45.0000	
4.00	5	45.4000	
2.00	5		76.4000
1.00	5		81.8000
5.00	5		84.4000
Sig.		1.000	.888

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.

a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 5.000.

תשובות סופיות

(1) א. משתנה בלתי תלוי : סוג התרופה. ב. ניתוח שונות חד כיוונית

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$H_1 : otherwise$$

משתנה תלוי : הזמן עד להשפעת התרופה בדקות.

ג. 1. מדגמים בלתי תלויים.

2. שוויון שונויות.

3. משתנים מתפלגים נורמלית.

(2) א. המבחן לניתוח שונות חד כיוונית.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$H_1 : otherwise$$

הנחות :

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. משתנים מתפלגים נורמלית.

3. שוויון שונויות.

ב. גודל המדגם : 14. משתנה ב"ת : בית הספר, בעל 3 רמות.

$$\bar{X} = 80.4, \hat{S} = 5.46, \bar{X} = 73.75, \hat{S} = 19.29, \bar{X} = 71.8, \hat{S} = 12.93$$

ד. להלן טבלה :

מקור השונות	SS	df	MS	F
B	200.6	2	100.3	
W	1904.75	11	173.2	
סה"כ	2105.35	13		0.58

$$F > 3.98$$

ו. נקבל את H_0 .

(3) א. $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$
 $H_1 : otherwise$
 ב. נדחה את H_0 .
 ג. כן.

הנחות :

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. שוויון שונויות.

3. משתנים מתפלגים נורמלית.

(4) נקבל את H_0 : נכריע שאין הבדל מובהק בין האופים מבחינת תוחלת זמן הכנה.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 \quad (5)$$

$$H_1 : otherwise$$

הנחות :

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. שוויון שונות.

3. משתנים מתפלגים נורמלית.

נקבל את H_0 : לסוג סוללה אין השפעה של תוחלת החיים ברמת ביטחון של 10%.

(6) להלן טבלה :

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	357.450	2 ב	178.725 ג	18.36 ה	.000
Within Groups	165.5 א	17	9.735 ד		
Total	522.950	19			

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \quad (7)$$

$$H_1 : otherwise$$

הנחות :

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. משתנים מתפלגים נורמלית.

3. שוויון שונות.

נדחה את H_0 : ברמת ביטחון של 5% קיים הבדל במינונים השונים מבחינת תוחלת הדופק.

$$\mu_{20} = \mu_{10} > \mu_{30} \quad \text{ד.} \quad \text{ג. כן.} \quad \text{ב. ראה וידאו.} \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$25 \quad \text{ב.} \quad 5 \quad \text{א.} \quad (8)$$

ג. נדחה את H_0 : יש לפחות שני בתי ספר בעיר עם תוחלת רמת ציונים שונה.

$$(\mu_3 = \mu_4) < (\mu_1 = \mu_2 = \mu_3) \quad \text{ד.}$$

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 55 - ניתוח שונות דו כיווני

תוכן העניינים

272	1. הקדמה
282	2. אפקטים פשוטים, עיקריים ואינטראקציה
294	3. תהליך ניתוח שונות דו כיווני

ניתוח שונות דו-כיווני - הקדמה

רקע

ראשית, נחזור על עיקרי ניתוח השונות החד-כיווני (חד-גורמי).

בניתוח שונות חד-כיווני יש משתנה תלוי יחיד, שהוא כמותי, ומשתנה בלתי תלוי יחיד, שהוא משתנה קטגוריאלי (משתנה שהערכים שלו שייכים למספר סופי של קטגוריות). המשתנה הקטגוריאלי נקרא לעתים גם גורם (פקטור), והקטגוריות שלו נקראות רמות. המטרה בניתוח שונות חד-כיווני היא לבדוק האם לגורם יש השפעה מובהקת על המשתנה התלוי. השערת האפס של המחקר בניתוח שונות חד-כיווני היא שבכל הקטגוריות יש אותה התוחלת, והשערת המחקר טוענת שיש לפחות שתי קטגוריות שבהן התוחלות שונות.

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

נבדקו שלושה סוגי דיאטות על אנשים בעלי משקל עודף. נבחרו 30 מטופלים בעלי משקל עודף, והם חולקו באקראי לשלוש קבוצות שוות בגודלן, כך שכל קבוצה קיבלה דיאטה נחקרת אחרת. כעבור שלושה חודשים בדקו את מספר הקילוגרמים שהפחית כל מטופל ממשקלו בתקופה זו. מטרת המחקר הייתה לבדוק האם קיים הבדל בין הדיאטות מבחינת ההפחתה במשקל.

- מהו המשתנה התלוי במחקר?
- מהו המשתנה הבלתי תלוי במחקר? כמה רמות יש לו?
- מה הן השערות המחקר?
- מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?

בניתוח שונות דו-כיווני אנו מוסיפים עוד משתנה בלתי תלוי למחקר, כלומר עוד גורם שאנו רוצים לבדוק איך הוא משפיע על המשתנה התלוי. לכן בניתוח שונות דו-כיווני יש משתנה תלוי כמותי יחיד ושני משתנים בלתי תלויים שכל אחד מהם קטגוריאלי. כזכור, למשתנים הבלתי תלויים אנו קוראים גם גורמים (פקטורים), ומספר הקטגוריות של כל גורם נקרא גם מספר הרמות שלו. ניתוח שונות רב-כיווני או רב-גורמי הוא ניתוח שונות שבו יש יותר מגורם אחד, כלומר יותר ממשתנה בלתי תלוי קטגוריאלי אחד. בניתוח שונות דו-כיווני יש שני גורמים, בניתוח שונות תלת-גורמי יש שלושה גורמים וכו'. ככל שנוסיף גורמים, הניתוח הסטטיסטי יהיה מורכב יותר ויידרשו יותר תצפיות למחקר אבל כיוון שהוא יקטין את שונות הטעויות (שונות מקרית) וייתן יותר הסבר לשונות הכללית, כך שהמבחן יהיה עוצמתי יותר.

המשך הדוגמה:

מבין 30 המטופלים שבמחקר 15 היו גברים ו-15 היו נשים. המטופלים חולקו כך שבכל דיאטה השתתפו 5 גברים ו-5 נשים.

מה הם המשתנים הבלתי תלויים? כמה רמות יש לכל משתנה?

בניתוח שונות דו-כיוונית אנו בעצם רוצים לבדוק סימולטנית שלוש שאלות מחקר על אוכלוסיית כבדי המשקל:

- האם יש הבדלים משמעותיים בין שיעורי הפחתת המשקל של מטופלים כבדי משקל כתוצאה משימוש בדיאטות שונות?
- האם יש הבדלים משמעותיים בין שיעורי הפחתת המשקל של מטופלים כבדי משקל כתוצאה ממגדר שונה?
- האם יש השפעה משולבת (אינטראקציה) של שני הגורמים הנבדקים על הפחתת המשקל של מטופלים כבדי משקל, כלומר האם צירוף של דיאטה מסוימת ומגדר מסוים מביא להפחתת משקל גדולה יותר או קטנה יותר מצירופים אחרים?

נסמן גורם אחד ב- a ואת מספר הרמות שלו ב- A . באותו האופן הגורם האחר יסומן ב- b , ואת מספר הרמות שלו נסמן ב- B . מספר הקבוצות הכולל שאנו יוצרים הוא $A \cdot B$.

המשך הדוגמה:

- בחרו גורם אחד להיות a וגורם אחר להיות b . מהו A ומהו B ?
- כמה קבוצות שונות נוצרו במחקר?

נסמן ב- m את מספר התצפיות בכל תא (בהנחה שהוא יהיה מספר קבוע). תא הוא שילוב של רמה מסוימת של גורם a עם רמה מסוימת של גורם b .

המשך הדוגמה:

- כמה תאים (קבוצות) יש במחקר?
- מה ערכו של m ?
- מהו הקשר המתמטי בין m לבין n , גודל המדגם?

נסמן ב- a_1 את הרמה הראשונה של a , ב- a_2 את הרמה השנייה שלו וכך הלאה.
 נסמן ב- b_1 את הרמה הראשונה של b , ב- b_2 את הרמה השנייה שלו וכך הלאה.
 נסמן ב- μ_i את התוחלת ברמה a_i . נסמן ב- μ_j את התוחלת ברמה b_j . נסמן ב- μ_{ij} את התוחלת של תא ij .

המשך הדוגמה:

- מה המשמעות של μ_1 ושל μ_2 ?
- מה המשמעות של μ_{12} ושל μ_{21} ?

השערות המחקר בניתוח שונות דו-כיווני

את השערות המחקר בניתוח שונות דו-כיווני אפשר לרשום בצורות רבות:

לגורם a אין השפעה על המשתנה התלוי: H_0

אחרת: H_1

לגורם b אין השפעה על המשתנה התלוי: H_0

אחרת: H_1

אין אינטראקציה בין שני הגורמים: H_0

אחרת: H_1

דרך אחרת היא שימוש בתוחלות:

$$H_0 : \mu_{1.} = \mu_{2.} = \dots = \mu_{A.}$$

H_1 : אחרת

$$H_0 : \mu_{.1} = \mu_{.2} = \dots = \mu_{.B}$$

H_1 : אחרת

H_0 : אין אינטראקציה בין שני הגורמים

H_1 : אחרת

המשך הדוגמה:

אם אנחנו מעוניינים לבצע ניתוח שונות דו-כיווני, מה הן ההשערות הנחקרות?

שאלות

- (1) בחברת טקסטיל בחנו 4 סוגי בדים שונים מבחינת חוזקם. דגמו 5 חתיכות בד מכל סוג ובדקו את חוזק הקריעה של כל סוג בד.
 - א. מהו המשתנה התלוי במחקר?
 - ב. כמה משתנים בלתי תלויים יש במחקר? מה הם?
 - ג. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים במקרה זה?

- (2) במחקר בתחום הפסיכולוגיה נדגמו אנשים הסובלים מחרדות מסוגים שונים. כל מטופל סווג כסובל מאחד מסוגי החרדות הבאים: חרדה חברתית, חרדה כללית או אגורפוביה. במחקר השתתפו 6 מטופלים מכל סוג חרדה שצוין. המטופלים במחקר חולקו כך שכל מטופל היה צריך לעבור במשך שנה את אחד מהטיפולים הבאים: טיפול קוגניטיבי התנהגותי (CBT), טיפול קבוצתי או טיפול דיאלקטי התנהגותי (DBT). בכל סוג טיפול השתתפו 2 מטופלים מכל סוג חרדה. בסוף השנה נבדקו כל המטופלים וקיבלו ציון כמותי על השיפור במצבם הנפשי (משתנה כמותי). מטרת המחקר הייתה לבדוק האם סוג החרדה, סוג הטיפול והשילוב ביניהם משפיעים על המצב הנפשי של המטופלים.
 - א. מהו גודל המדגם?
 - ב. מהו המשתנה התלוי במחקר הזה ומה הם המשתנים הבלתי תלויים?
 - ג. כמה קטגוריות יש לכל משתנה בלתי תלוי?
 - ד. כמה קבוצות שונות יש במערך המחקרי?
 - ה. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים במערך מחקרי זה?

(3) מחקר שיווקי בדק את השפעת גובה המדף בסופרמרקט והשפעת החומר שממנו עשוי הבקבוק (זכוכית או פלסטיק) על היקף המכירות של משקאות קלים. נבדקו שני סופרמרקטים. בכל סופרמרקט נבחן כל צירוף אפשרי של גובה המדף וחומר הבקבוק, ועבור כל צירוף כזה נבדק מספר בקבוקי המשקה הקל שנמכרו באותו סופרמרקט ביום מסוים. הנה התוצאות שהתקבלו:

פלסטיק	זכוכית	סוג בקבוק / גובה המדף
		גובה המדף
59	23	נמוך
63	32	
88	47	בינוני
90	55	
51	40	גבוה
56	48	

- מהו המבחן הסטטיסטי המתאים? נמקו.
- מהו מספר הרמות של כל גורם מחקרי?
- מה יהיו השערות המחקר אם יתבצע ניתוח שונות דו-כיוונית?
- מהו ערכו של m ומהו ערכו של n ?

4) יצרן של נוזל כביסה מעוניין לבחון שני נוזלי ניקוי מבחינת יעילותם בהסרת כתמים בשלוש רמות טמפרטורה. בכל אחד מששת הצירופים של סוג נוזל וטמפרטורה נבחנה יכולת הסרת הכתמים מבדים דומים, וניתן ציון בין 0 ל-15 (הציון הטוב ביותר).

מספר סידורי	סוג הנוזל	טמפרטורה במעלות צלזיוס	ציון הסרת כתמים
1	C	30	4
2	C	30	5
3	C	30	4
4	C	30	6
5	C	40	6
6	C	40	6
7	C	40	7
8	C	40	6
9	C	60	9
10	C	60	8
11	C	60	7
12	C	60	10
13	w	30	9
14	w	30	9
15	w	30	9
16	w	30	10
17	w	40	12
18	w	40	13
19	w	40	11
20	w	40	11
21	w	60	14
22	w	60	14
23	w	60	15
24	w	60	13

- א. כמה משתנים יש במחקר?
- ב. לגבי כל משתנה קבעו האם הוא משתנה תלוי או בלתי תלוי.
- ג. כמה רמות יש לכל גורם?
- ד. אם נבצע ניתוח שונות דו-כיוונית, מה יהיו השערות המחקר?
- ה. רכזו את נתוני המחקר בטבלה שבה בשורות גורם אחד, בעמודות גורם שני ובתאים התוצאות שהתקבלו למשתנה התלוי.

(5) קבעו לגבי כל אחד מהבאים האם הוא משתנה קטגוריאלי:

- א. מספר הניתוחים שעבר אדם בחייו.
- ב. אחוז האבטלה בישראל בחודש זה.
- ג. סוג הדם של חולה.
- ד. שונות הציונים בבחינת הבגרות באנגלית במועד האחרון.
- ה. משקל חבילה בדואר בגרמים.
- ו. היבשת שאירחה את משחקי המונדיאל.

בשאלות הבאות יש לבחור את התשובה הנכונה ביותר:

- (6) משרד החינוך רוצה לבדוק עד כמה שיטת הוראה (יש 3 שיטות הוראה מקובלות) ומגדר משפיעים על ציוני הבגרות בהיסטוריה. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים למחקר זה?**
- א. מבחן T להשוואת תוחלות.
 - ב. ניתוח שונות חד-כיוונית.
 - ג. ניתוח שונות דו-כיוונית.
 - ד. מבחן T לתוחלת אחת.

- (7) מחלקת שירות הלקוחות של חברת החשמל דגמה עובדים כדי לבחון האם ככל שמספר שנות הוותק של נותן השירות גדול יותר גדל גם מספר הלקוחות שבו הוא מטפל במהלך משמרת. מהו המבחן הסטטיסטי שיכול לבדוק זאת?**
- א. מבחן T להשוואת תוחלות.
 - ב. ניתוח שונות חד-כיוונית.
 - ג. ניתוח שונות דו-כיוונית.
 - ד. אף אחת מהאפשרויות שלעיל.

(8) האיחוד האירופי המשותף דגם 10 עובדים מתחום ההוראה בכל אחת מהמדינות הבאות: הולנד, צרפת, בלגיה, גרמניה ואוסטריה. לכל עובד בדקו את גובה המשכורת החודשית שלו ביורו. אם נרצה להשוות בין המדינות הללו מבחינת תוחלת השכר של עובדי ההוראה במדינה, מה יהיה המבחן הסטטיסטי המתאים?

- א. מבחן T להשוואת תוחלות
- ב. ניתוח שונות חד-כיוונית
- ג. ניתוח שונות דו-כיוונית
- ד. אף אחת מהאפשרויות שלעיל

(9) בקו ייצור 2 סוגים של מכונות ו-3 רמות ותק של מפעיל המכונה (עד שנתיים במפעל, בין שנתיים ל- חמש שנים במפעל, יותר מחמש שנים במפעל). מנהל הייצור רוצה לבדוק אם קיימת השפעה של סוג המכונה והוותק של המפעיל על מספר המוצרים הפגומים שיוצאים מהמכונה. מה יהיה המבחן הסטטיסטי המתאים במקרה זה?

- א. מבחן T להשוואת תוחלות.
- ב. ניתוח שונות חד-כיוונית.
- ג. ניתוח שונות דו-כיוונית.
- ד. ניתוח שונות תלת-כיוונית.

(10) במחקר נאספו הנתונים הבאים על קבוצת נחקרים:

1. כמה כוסות קפה הנחקר שותה ביום: לא שותה / 1-2 כוסות / יותר מ-2 כוסות.

2. מין הנחקר: גבר/אישה.

3. דופק (מספר פעימות בדקה) שעתיים אחרי הקימה.

מטרת המחקר הייתה לבדוק האם מספר כוסות הקפה שאדם שותה ביום משפיע על הדופק אצל גברים אחרת מאשר אצל נשים. מה יהיה המבחן הסטטיסטי המתאים במקרה זה?

- א. מבחן T להשוואת תוחלות.
- ב. ניתוח שונות חד-כיוונית.
- ג. ניתוח שונות דו-כיוונית.
- ד. ניתוח שונות תלת-כיוונית.

- 11) במחקר יש משתנה כמותי אחד ושני גורמים שלכל אחד מהם שתי רמות. אילו מהמשפטים הבאים אינו נכון?
- א. אפשר מבחינה טכנית לבדוק כיצד כל גורם בנפרד משפיע על המשתנה התלוי באמצעות ניתוח שונות חד-כיווני שייערך לכל גורם בנפרד.
- ב. אפשר מבחינה טכנית להשוות בין התוחלות של כל רמה בגורם הראשון על ידי מבחן T להשוואת תוחלות.
- ג. אפשר מבחינה טכנית לבצע ניתוח שונות דו-כיווני במערך מחקרי זה.
- ד. כיוון שבמחקר יש בסך הכול שלושה משתנים, אפשר מבחינה טכנית לבצע ניתוח שונות תלת-כיווני.

תשובות סופיות

- 1) א. חוזק הקריעה.
ג. ניתוח שונות חד גורמי.
- 2) א. 18
ב. המשתנה התלוי : ציון במצב הנפש. המשתנים הב"ת : סוג חרדה, סוג הטיפול.
ג. 3,3
ה. ניתוח שונות דו גורמי.
- 3) א. ניתוח שונות דו גורמי.
ג. H_0 : אין אינטראקציה, H_1 : יש אינטראקציה. ד. $m = 2, n = 12$
- 4) א. 3
ב. משתנים ב"ת : סוג הנוזל, טמפרטורה. משתנה תלוי : ציון הסרת כתמים.
ג. 3,2
ד. H_0 : אין אינטראקציה בין הגורמים, H_1 : אחרת.
- ה. עיין בסרטון הוידאו.
- 5) א. כן.
ב. לא.
ג. כן.
ד. לא.
ה. תלוי.
ו. כן.
- 6) ג.
7) ד
8) ב
9) ג
10) ג
11) ד

אפקטים פשוטים, עיקריים ואינטראקציה

רקע

בניתוח שונות דו-כיווני אנו דנים במשתנה כמותי תלוי יחיד ובשני משתנים בלתי תלויים (גורמים) המחולקים כל אחד למספר רמות. מטרת המחקר היא לבדוק שלוש השערות שונות:

לגורם a אין השפעה על המשתנה התלוי: H_0

אחרת: H_1

לגורם b אין השפעה על המשתנה התלוי: H_0

אחרת: H_1

אין אינטראקציה בין שני הגורמים: H_0

אחרת: H_1

נרצה להבין מה בדיוק כל השערה בודקת לגבי האוכלוסייה הנחקרת.

אפקט עיקרי: אם יש שתי קטגוריות (רמות) לפחות של גורם מסוים שהתוחלות שלהן שונות, נאמר שלגורם זה יש השפעה על המשתנה התלוי. השפעה זאת נקראת "אפקט עיקרי". למשל, אם יימצאו לפחות שתי תרופות נוגדות דיכאון שונות שמביאות לתוחלות שונות במצב הנפשי, נגיד שלסוג התרופה יש השפעה על המצב הנפשי, כלומר יש אפקט עיקרי. כמות האפקטים העיקריים שאפשר למצוא היא כמות הגורמים במחקר.

אפקט אינטראקציה: מצב שבו גורם אחד משפיע על המשתנה התלוי באופן שונה בקטגוריות שונות של הגורם השני. למשל, תרופה נוגדת דיכאון אחת מביאה את הגברים למצב רוח טוב יותר מאשר את הנשים לעומת תרופה אחרת שמביאה דווקא את הנשים למצב רוח טוב יותר מאשר את הגברים. אפקט האינטראקציה הוא יחיד, כלומר נאמר אם יש או אין אינטראקציה. כמו כן הוא אפקט סימטרי: אם קיימת אינטראקציה בין מגדר לסוג התרופה, יש גם אינטראקציה בין סוג התרופה למגדר.

אפקט פשוט: אפקט פשוט מתייחס להשפעת גורם אחד על המשתנה התלוי בתוך קטגוריה מסוימת של הגורם השני. למשל, נרצה לבדוק רק בקטגוריה של הגברים האם קיים הבדל בין התרופות נוגדות הדיכאון. אם נמצא הבדלים כאלה נאמר שיש

אפקט פשוט של סוג התרופה בקרב אוכלוסיית הגברים. כמות האפקטים הפשוטים שאפשר למצוא היא סכום מספר הקטגוריות (רמות) של כל גורם. למשל, אם יש שלושה סוגי תרופות ושתי אפשרויות למגדר, בסך הכול נוכל לבדוק 5 אפקטים פשוטים.

דוגמה

נבדקו שלושה סוגי דיאטות על אנשים בעלי משקל עודף. כעבור שלושה חודשים בדקו כמה קילוגרמים הפחית כל מטופל ממשקלו באותה התקופה. נניח שאנו יודעים את תוחלת הפחתת המשקל של כל דיאטה בחלוקה למגדרים.

נתאר כמה מצבים אפשריים לגבי האוכלוסייה הנחקרת וננתח כל מצב מבחינת ההשפעה של כל גורם על תוחלת המשתנה התלוי ומבחינת אפקט האינטראקציה.

שימו לב שהמצבים שנתאר להלן מתייחסים לתוחלות האמיתיות. בניתוח שונות אין לנו נתוני אמת, אלא רק נתוני מדגם, ונרצה לבדוק האם האפקטים שהתקבלו במדגם הם מובהקים, כנדרש בכל תהליך של הסקה סטטיסטית.

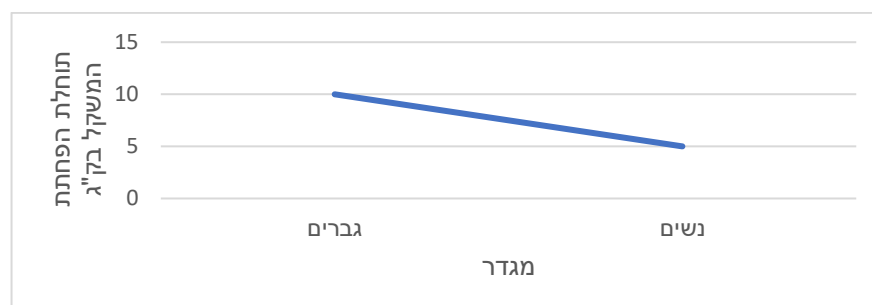
אם התוצאות שלנו יהיו ממוצעי מדגם ולא תוחלות, נוכל לבדוק אם קיימים אפקטים במדגם, אך אין זה אומר שקיימים אפקטים באוכלוסייה, כלומר לא נוכל לדעת אם האפקטים במדגם הם מובהקים. כדי לבדוק אם האפקטים הם מובהקים נצטרך לעשות את מבחן ניתוח השונות.

מצב א:

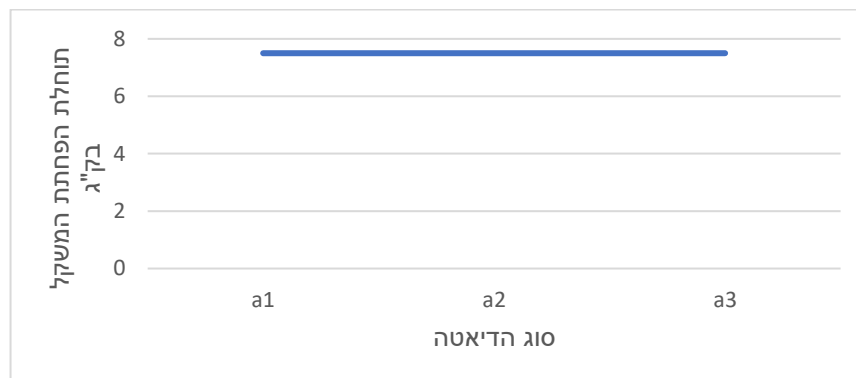
הטבלה הבאה מתארת את תוחלת הפחתת המשקל בק"ג לכל קבוצה:

נשים	גברים	
5	10	a_1
5	10	a_2
5	10	a_3

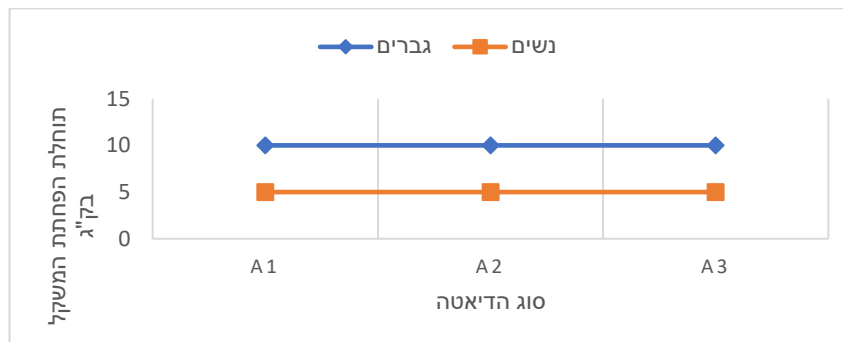
תיאור גרפי לבדיקת אפקט למגדר



תיאור גרפי לבדיקת אפקט לסוג הדיאטה



גרף אפקטים פשוטים



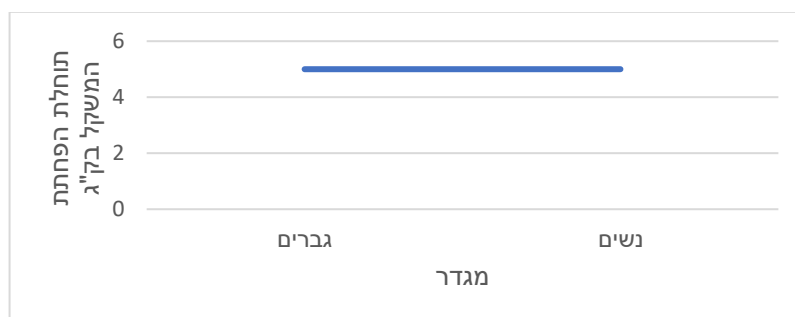
ניתוח המצב: למגדר יש אפקט, לסוג הדיאטה אין אפקט, אין אפקט אינטראקציה. הערה: אם הקווים הנוצרים בגרף האפקטים הפשוטים מקבילים או מתלכדים, אנו אומרים שאין אפקט אינטראקציה.

מצב ב

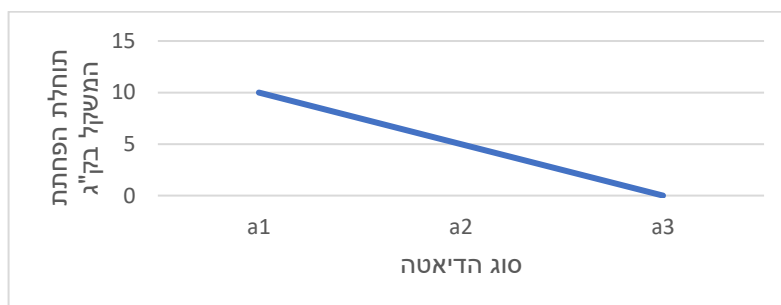
הטבלה הבאה מתארת את תוחלת הפחתת המשקל בק"ג לכל קבוצה:

נשים	גברים	
10	10	a_1
5	5	a_2
0	0	a_3

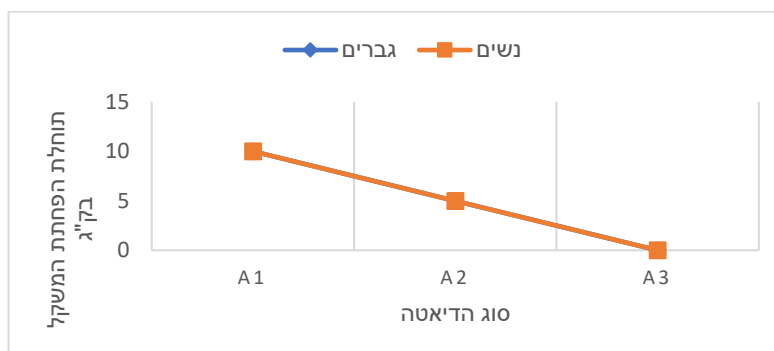
תיאור גרפי לבדיקת אפקט למגדר



תיאור גרפי לבדיקת אפקט לסוג הדיאטה



גרף אפקטים פשוטים



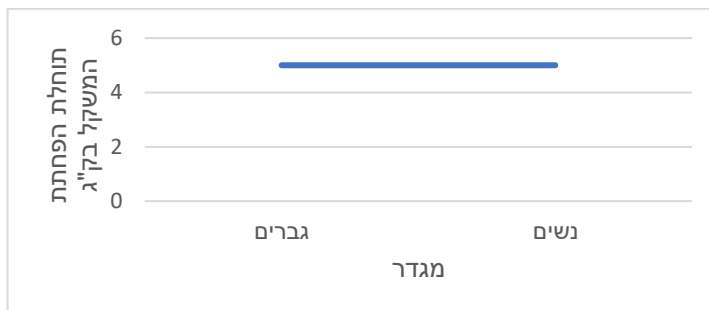
ניתוח המצב: למגדר אין אפקט, לסוג הדיאטה יש אפקט, אין אפקט אינטראקציה.

מצב ג

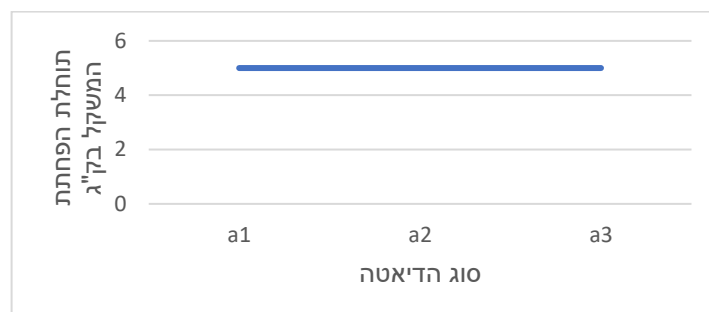
הטבלה הבאה מתארת את תוחלת הפחתת המשקל בק"ג לכל קבוצה:

נשים	גברים	
0	10	a_1
5	5	a_2
10	0	a_3

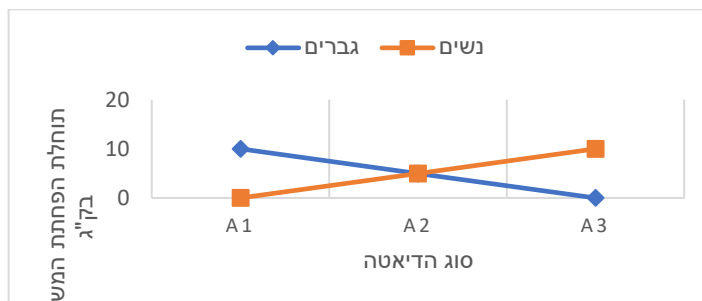
תיאור גרפי לבדיקת אפקט למגדר



תיאור גרפי לבדיקת אפקט לסוג הדיאטה



גרף אפקטים פשוטים



ניתוח המצב: למגדר אין אפקט, לסוג הדיאטה אין אפקט, יש אפקט אינטראקציה.

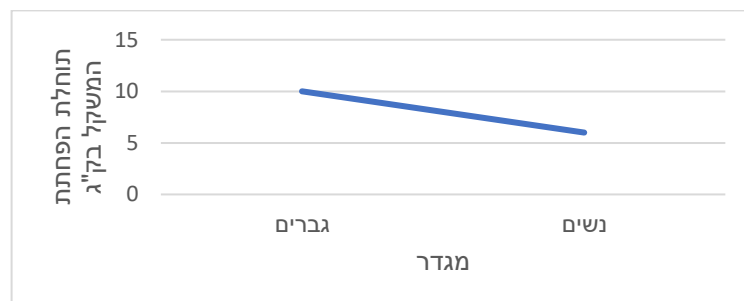
אינטראקציה דיסאורדינלית (נקראת גם "אינטראקציה מהותית"): אפשר לזהות מצב של אינטראקציה כזו באמצעות גרף של אפקטים פשוטים, כאשר נוצרים קווים נחתכים שאחד מהם עולה והאחר יורד. המשמעות היא שגורם אחד משפיע על המשתנה התלוי ברמה מסוימת של הגורם השני באופן הפוך משהוא משפיע על המשתנה התלוי ברמה אחרת של הגורם השני. במצב זה אין להתייחס לאפקטים עיקריים. יש להתייחס רק לאפקטים הפשוטים.

מצב ה

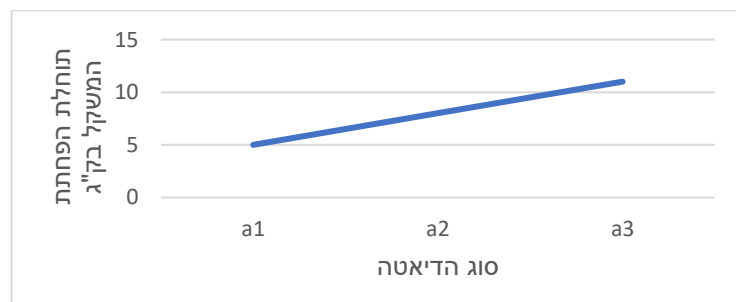
הטבלה הבאה מתארת את תוחלת הפחתת המשקל בק"ג לכל קבוצה:

נשים	גברים	
5	5	a_1
6	10	a_2
7	15	a_3

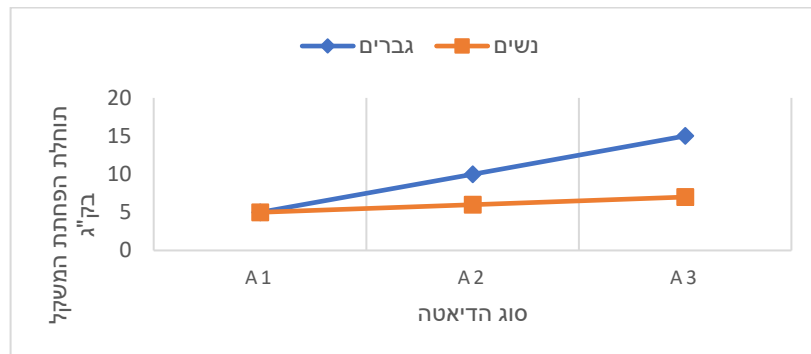
תיאור גרפי לבדיקת אפקט למגדר



תיאור גרפי לבדיקת אפקט לסוג הדיאטה



גרף אפקטים פשוטים



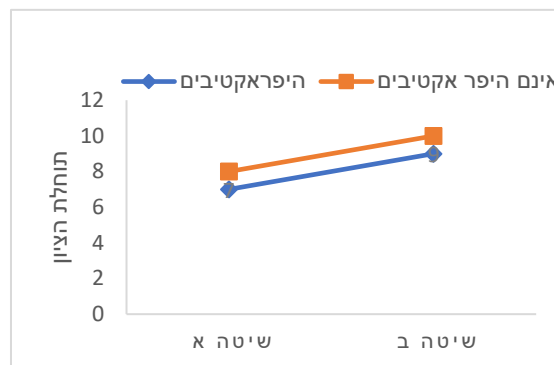
ניתוח המצב: למגדר יש אפקט, לסוג הדיאטה יש אפקט, יש אפקט אינטראקציה.

אינטראקציה אורדינלית (נקראת גם "אינטראקציה לא מהותית"): אפשר לזהות מצב של אינטראקציה כזו כאשר בגרף האפקטים הפשוטים נוצרים קווים נחתכים עם אותו הכיוון (כולם עולים או כולם יורדים אבל לא באותו השיפוע). המשמעות היא שבמעבר של גורם אחד מרמה אחת לרמה אחרת שלו הוא משפיע על המשתנה התלוי באותו אופן בכל רמה של המשתנה האחר אבל עם גודל אפקט שונה.

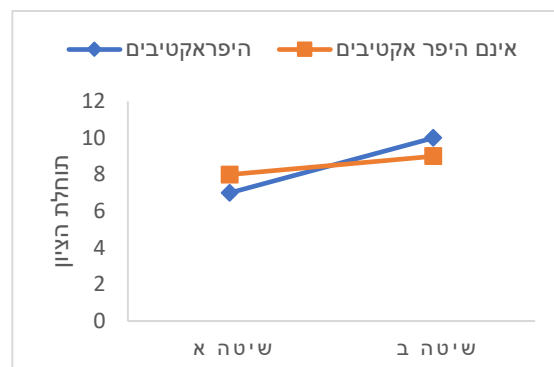
שאלות

1) בגני החובה יש שתי שיטות הוראה. שיטות אלו נוסו על ילדים היפראקטיביים וילדים שאינם היפראקטיביים. בתרשימים הבאים מיוצגים גרפים שמתארים את תוחלת הציון במבחן אוצר המילים שניתן לילדים בסוף השנה. בכל אחד מהמקרים יש לקבוע האם קיימת אינטראקציה בין שני הגורמים. אם קיימת אינטראקציה, יש לקבוע האם היא אינטראקציה אורדינלית או דיסאורדינלית.

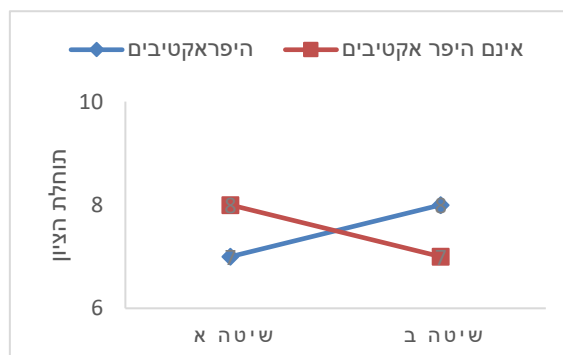
א.



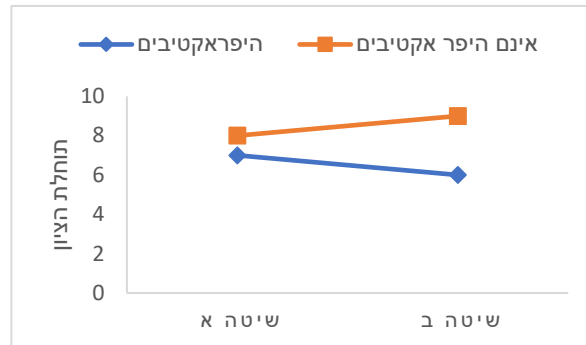
ב.



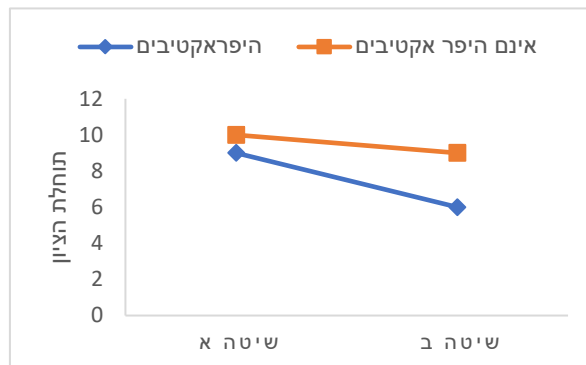
ג.



ד.



ה.



2) משרד האוצר פרסם נתונים על המחיר הממוצע של דירות גן ודירות גג של 4 חדרים ב-3 ערים בארץ. מחיר הדירות נמדד במיליוני שקלים. להלן התוצאות שהתקבלו:

דירות גן	דירות גג	
4	3	הרצליה
2	1	אשדוד
3	2	חולון

- מהו המשתנה התלוי ומה הם המשתנים הבלתי תלויים?
- האם קיים אפקט לעיר? היעזרו בגרף מתאים.
- האם קיים אפקט לסוג הדירה? היעזרו בגרף מתאים.
- האם קיימת אינטראקציה בין הגורמים? אם כן, מהו סוג האינטראקציה? היעזרו בגרף מתאים.
- האם יש אפקט פשוט לעיר עבור דירות גן?
- האם יש אפקט פשוט לעיר עבור דירות גג?
- האם יש אפקט פשוט לסוג הדירה בהרצליה?
- האם יש אפקט פשוט לסוג הדירה באשדוד?
- האם יש אפקט פשוט לסוג הדירה בחולון?

3) משרד החינוך פרסם נתונים על תוחלת הציונים בבחינת הבגרות באנגלית לפי עיר וסוג בית הספר (עיוני או מקצועי). להלן התוצאות שהתקבלו:

מקצועי	עיוני	
70	85	רעננה
75	75	תל אביב
85	70	פתח תקווה

- תארו את הנתונים באמצעות גרף אפקטים פשוטים.
- האם קיימת אינטראקציה בין הגורמים? אם כן, מה סוג האינטראקציה?
- באילו ערים קיים אפקט פשוט לסוג בית הספר?

4) משרד התחבורה פרסם נתונים על תוחלת מספר עבירות התנועה לבעלי רישיון נהיגה לפי עיר ולפי מגדר. להלן התוצאות שהתקבלו:

אישה	גבר	
1	2	חיפה
1	2	אשקלון
1	2	רמת גן

- האם קיים אפקט עיקרי לעיר?
- האם קיים אפקט עיקרי למגדר?
- האם יש אפקט פשוט לעיר אצל הגברים?
- האם קיימת אינטראקציה בין הגורמים? אם כן, מהו סוג האינטראקציה?

5) המשרד לאיכות הסביבה פרסם נתונים על תוחלת רמת זיהום האוויר בערים שונות בארץ בחורף ובקיץ. להלן התוצאות שהתקבלו:

קיץ	חורף	
20	20	חיפה
10	10	ירושלים
15	15	באר שבע

- האם קיים אפקט עיקרי לעיר?
- האם קיים אפקט עיקרי לעונה?
- האם קיימת עיר שבה יש אפקט פשוט לעונה?
- האם קיימת אינטראקציה בין הגורמים? אם כן, מה סוג האינטראקציה?

6) המשרד לאיכות הסביבה פרסם נתונים על תוחלת רמת זיהום האוויר בערים שונות בארץ בחורף ובקיץ. להלן התוצאות שהתקבלו:

חורף	קיץ	
10	10	רמת גן
10	10	גבעתיים
10	10	בת ים

האם קיים אפקט עיקרי לגורם כלשהו? האם קיימת אינטראקציה?

בשאלות הבאות יש לבחור את התשובה הנכונה ביותר:

7) במחקר נדגמו 5 אנשים מכל אחת מ-4 הקבוצות הבאות: 1. מתעמלים באופן קבוע ושומרים על תזונה בריאה; 2. מתעמלים באופן קבוע ולא שומרים על תזונה בריאה; 3. לא מתעמלים באופן קבוע ושומרים על תזונה בריאה; 4. לא מתעמלים באופן קבוע ולא שומרים על תזונה בריאה. להלן טבלה המסכמת את ממוצע הטריגליצרידים בדם (מ"ג לדציליטר) שנמצא בכל מדגם:

לא תזונה בריאה	תזונה בריאה	
100	90	מתעמלים
160	100	לא מתעמלים

- קיים אפקט עיקרי מובהק לגורם ההתעמלות.
- קיים אפקט עיקרי מובהק לגורם התזונה.
- קיים אפקט אינטראקציה מובהק בין שני הגורמים במחקר.
- אי אפשר לדעת אם קיים אפקט מובהק כלשהו על סמך תוצאות המדגם בלבד ללא ביצוע מבחן מתאים וללא קביעת רמת המובהקות של המחקר.

8) במחקר בדקו 3 טיפולים שונים לחולי פסוריאזיס. המחקר השווה גם בין גברים לנשים ובדק את זמן התגובה לטיפול. מסקנת המחקר הייתה שאצל גברים נמצאו הבדלים מובהקים בין הטיפולים השונים מבחינת תוחלת זמן התגובה. לאיזה סוג אפקט המסקנה מתייחסת?

- אפקט אינטראקציה.
- אפקט עיקרי של גורם המין.
- אפקט עיקרי של גורם סוג הטיפול.
- אפקט פשוט.

- (9)** במחקר בדקו 3 טיפולים שונים לחולי פסוריאזיס. המחקר השווה גם בין גברים לנשים ובדק את זמן התגובה לטיפול. במדגם היה ממוצע זמן התגובה של הגברים שונה מממוצע זמן התגובה של הנשים.
- א. אפשר להגיד שבמדגם קיים אפקט עיקרי, אך אי אפשר לדעת אם האפקט העיקרי מובהק.
- ב. אפשר להגיד שבמדגם קיימת אינטראקציה, אך אי אפשר לדעת אם האינטראקציה מובהקת.
- ג. אפשר להגיד שקיים אפקט עיקרי מובהק.
- ד. אפשר להגיד שקיימת אינטראקציה מובהקת.
- (10)** במחקר בדקו 3 טיפולים שונים לחולי פסוריאזיס. המחקר השווה גם בין גברים לנשים ובדק את זמן התגובה לטיפול. אחת המסקנות של המחקר הייתה שהטיפול השונים משפיעים במידה משמעותית יותר על זמן התגובה של הגברים מאשר על זה של הנשים, אם כי באותו האופן.
- א. המסקנה היא שאין אינטראקציה בין הגורמים במחקר.
- ב. המסקנה היא שיש אינטראקציה אורדינלית בין הגורמים במחקר.
- ג. המסקנה היא שיש אינטראקציה דיסאורדינלית בין הגורמים במחקר.
- ד. המסקנה היא שיש אפקט עיקרי של המגדר.

תשובות סופיות

- (1)** א. אין אינטראקציה.
ג. אינטראקציה דיסאורדינלית.
ה. אינטראקציה אורדינלית.
- (2)** א. המשתנים הב"ת: העיר, סוג הדירה. המשתנה התלוי: מחיר.
ב. קיים.
ד. לא קיים.
ו. קיים.
ח. קיים.
- (3)** א. עיין בסרטון הוידאו.
ג. רעננה ופתח תקווה.
- (4)** א. לא.
ג. לא.
- (5)** א. כן.
ג. לא.
- (6)** לא, לא.
- (7)** ד
- (8)** ד
- (9)** א
- (10)** ב
- ב. אינטראקציה אורדינלית.
ד. אינטראקציה דיסאורדינלית.
- ג. קיים.
ה. קיים.
ז. קיים.
ט. קיים.
- ב. אינטראקציה דיסאורדינלית.
- ב. כן.
ד. לא.
ב. לא.
ד. לא.

תהליך ניתוח שונות דו כיווני – הליך מבחן

רקע

כפי שכבר ציינו, ניתוח שונות דו-כיווני נעשה כאשר יש שני גורמים מחקרניים ומשתנה כמותי תלוי אחד. מטרת המחקר היא לבדוק האם הגורמים משפיעים על המשתנה התלוי. מערך מחקר זה נקרא "מערך מחקר פקטוריאלי", כיוון שאנו בונים את המחקר לפי גורמים. מערך דו-גורמי יסומן כמערך מסוג $A \times B$, כאשר A מייצג את מספר הרמות של גורם a , ו- B מייצג את מספר הרמות של גורם b . במערך מחקרי תלת-גורמי נסמן את סוג המערך $A \times B \times C$, וכך הלאה.

דוגמה

נבדקו שלושה סוגי דיאטות על אנשים בעלי משקל עודף. נבחרו 18 מטופלים בעלי משקל עודף, 9 מהם גברים ו-9 נשים. המטופלים חולקו כך שבכל דיאטה השתתפו 3 גברים ו-3 נשים. כעבור שלושה חודשים מתחילת הדיאטה נשקלו כלל המטופלים ונבדק המשקל בק"ג שהם הפחיתו. הטבלה הבאה מסכמת את המשקל שכל מטופל במדגם הפחית כעבור שלושה חודשים.

סוג הדיאטה \ מין	b_1	b_2	b_3	סה"כ
נשים	8 4 0	6 8 10	4 6 8	54
גברים	6 10 14	0 2 4	9 12 15	72
סה"כ	42	30	54	126

מטרת המחקר היא לבדוק האם יש השפעה של סוג הדיאטה, המין והשילוב ביניהם על ההפחתה במשקל.

- באיזה סוג מערך מחקרי מדובר?
- מהו המבחן הסטטיסטי המתאים לבדיקת ההשערות?
- מה הן השערות המחקר?

בדומה לניתוח שונות חד-כיווני גם התהליך של ניתוח שונות דו-כיווני דורש הנחות. ההנחות הן:

1. $A \times B$ הקבוצות שנוצרות בלתי תלויות זו בזו.
2. בכל $A \times B$ האוכלוסיות המשתנה התלוי מתפלג נורמלית.
3. בכל $A \times B$ האוכלוסיות אותה שונות, σ^2 .

הערה: ניתוח שונות הוא מבחן רובסטי, כלומר יש לו רגישות נמוכה להנחות. התיאוריה הסטטיסטית שפותחה התבססה על ההנחות האלה, אבל הלכה למעשה השיטה תעבוד טוב גם אם ההנחות הללו לא יתקיימו במדויק במלואן. זו הסיבה שהשיטה הזו נפוצה כל כך בעולם הסטטיסטיקה.

בהמשך לדוגמה

רשמו את כל ההנחות הדרושות לביצוע ניתוח השונות.

הליך המבחן

בניית טבלת ממוצעים

נבנה טבלת ממוצעים לכל רמה ולכל תא :

$\bar{X}_{i.}$ – ממוצע המדגם ברמה i של גורם a

$\bar{X}_{.j}$ – ממוצע המדגם ברמה j של גורם b

$\bar{X}_{ij}$ – ממוצע המדגם בתא ij

בהמשך לדוגמה

- מלאו את טבלת הממוצעים הבאה :

סוג הדיאטה מין	b_1	b_2	b_3	$\bar{X}_{i.}$
נשים				
גברים				
$\bar{X}_{.j}$				

- שרטטו גרפים מתאימים לבדיקת אפקטים עיקריים ולבדיקת אינטראקציה במדגם. האם אפשר להגיד שיש אפקט מובהק?

בניית טבלת ריבועי הפרשים מהממוצעים

נמלא את הטבלה הבאה. בתוך תא ij נחשב: $(\bar{X}_{ij} - \bar{X}_i - \bar{X}_j + \bar{X})^2$

בהמשך לדוגמה

- מלאו את טבלת הפרשי הממוצעים:

סוג הדיאטה מין \	b_1	b_2	b_3	$(\bar{X}_i - \bar{X})^2$
נשים				
גברים				
$(\bar{X}_j - \bar{X})^2$				

חישוב סכום ריבועי הסטיות מהממוצע

מתוך טבלת ריבועי הסטיות מהממוצע נחשב את סכום ריבועי הסטיות מהממוצע הבאים:

הסימון SS הוא ראשי התיבות של "sum of squares" (סכום הריבועים).

$$SS_a = m \cdot B \sum_{i=1}^A (\bar{X}_{i.} - \bar{X})^2 \quad \text{סכום ריבועי הסטיות מהממוצע של גורם } a:$$

$$SS_b = m \cdot A \sum_{j=1}^B (\bar{X}_{.j} - \bar{X})^2 \quad \text{סכום ריבועי הסטיות מהממוצע של גורם } b:$$

$$SS_{ab} = m \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^B (\bar{X}_{ij} - \bar{X}_{i.} - \bar{X}_{.j} + \bar{X})^2 \quad \text{סכום ריבועי הסטיות של האינטראקציה:}$$

סכום ריבועי השגיאות (סכום ריבועי הסטיות של התצפיות בתא מהממוצע בתא):

$$SS_W = \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^B \sum_{k=1}^m (X_{ijk} - \bar{X}_{ij})^2 = (m-1) \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^B S_{ij}^2$$

סכום ריבועי הסטיות של כלל התצפיות מהממוצע הכללי:

$$SS_T = \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^B \sum_{k=1}^m (X_{ijk} - \bar{X})^2 = (n-1) \cdot S^2$$

הקשר המתמטי בין סכום הריבועים הללו הוא:

$$SS_T = SS_a + SS_b + SS_{ab} + SS_W$$

לכן אין אנו צריכים לחשב את כל חמשת המרכיבים הללו.

החלק הזה של הנוסחה מתייחס לשונות השיטתית: $SS_a + SS_b + SS_{ab}$. השונות השיטתית היא שונות שמקורה בגורמים עצמים.

החלק הזה של הנוסחה מתייחס לשונות המקרית: SS_W . השונות המקרית היא שונות שנקראת גם "שונות טעויות" או "שונות בתוך הקבוצות". זוהי שונות בין התצפיות שאינה נובעת מהגורמים הנחקרים. האות W מייצגת את המילה "Within", כלומר שונות בתוך התאים.



בהמשך לדוגמה

- חשבו את ריבועי הסטיות הבאים :

$$SS_a =$$

$$SS_b =$$

$$SS_{ab} =$$

$$SS_T =$$

$$SS_W =$$

חישוב ממוצע ריבועי הסטיות וסטטיסטי המבחן

MS הוא הסימון של ממוצע ריבועי הסטיות (Mean Square) שמהווה אומד לשונות של כל גורם. החישוב יעשה על ידי חלוקת ה-SS המתאים בדרגות החופש המתאימות. לאחר מכן נחשב שלושה סטטיסטי מבחן, בהתאם לשלוש ההשערות הנבדקות.

נרכז את כלל החישובים הללו בטבלה הנקראת טבלת ניתוח שונות, ANOVA (Analysis of Variance).

מקור השונות Source of Variation	דרגות החופש Degrees of Freedom	סכום ריבועי הסטיות מהממוצע Sum of Squares	ממוצע ריבוע הסטייה Mean Square	F
a	$A - 1$	SS_a	MS_a	$F_a = MS_a / MS_w$
b	$B - 1$	SS_b	MS_b	$F_b = MS_b / MS_w$
ab	$(A - 1)(B - 1)$	SS_{ab}	MS_{ab}	$F_{ab} = MS_{ab} / MS_w$
Within	$AB(m - 1)$	SS_w	MS_w	
Total	$n - 1 = ABm - 1$	SS_T		

בהמשך לדוגמה: מלאו את טבלת ניתוח השונות

מקור השונות Source of Variation	דרגות החופש Degrees of Freedom	סכום ריבועי הסטיות מהממוצע Sum of Squares	ממוצע ריבוע הסטייה Mean Square	F
a				
b				
ab				
Within				
Total				

כללי ההכרעה לבדיקת ההשערות

הסטטיסטי F_a מייצג את היחס בין השונות המדגמית של גורם a ובין השונות המקרית. לכן ככל שהערכים שלו גבוהים יותר, נרצה להגיד שלגורם a יש השפעה גדולה יותר על המשתנה התלוי. F_a יקבל ערכים גבוהים אם השונות המדגמית של גורם A תגדל או אם השונות המדגמית המקרית תקטן. הסטטיסטי מתפלג התפלגות F , ואזור הדחייה שלו יהיה בצד ימין.

- כלל ההכרעה לבדיקת המובהקות של גורם a :

דחה את השערת H_0 ברמת מובהקות של α אם

$$F_a > F_{1-\alpha}(df_a, df_w)$$

לפי אותו עיקרון שאר כללי ההכרעה יהיו:

- כלל ההכרעה לבדיקת המובהקות של גורם b :

דחה את השערת H_0 ברמת מובהקות של α אם

$$F_b > F_{1-\alpha}(df_b, df_w)$$

- כלל ההכרעה לבדיקת המובהקות של האינטראקציה:

דחה את השערת H_0 ברמת מובהקות של α אם

$$F_{ab} > F_{1-\alpha}(df_{ab}, df_w)$$

בהמשך לדוגמה

רשמו את כל כללי ההכרעה המתאימים והסיקו מסקנות מתאימות ברמת מובהקות של 5%.

הערות

1. אם מכריעים שקיימת אינטראקציה מובהקת, יש לבדוק האם היא אורדינלית או דיסאורדינלית. אם האינטראקציה דיסאורדינלית, יש לבדוק האם האפקטים העיקריים נמצאו מובהקים. אם לפחות אחד מהם נמצא מובהק נאמר שהוא אינו משמעותי כיוון שהוא נובע מהאינטראקציה בין הגורמים ולא מהגורם עצמו.
2. אם אחד מהאפקטים נמצא מובהק, אין זה אומר אילו רמות שונות זו מזו בתוחלת. למשל, אם נמצא הבדל מובהק בין סוגי הטיפולים, לא נוכל לדעת לפי זה איזה טיפול שונה מאחר באופן מובהק. לכן יש להמשיך בתהליך של השוואות מרובות כדי להסיק ממה נובע השוני.

בהמשך לדוגמה

האם יש סיבה לבצע השוואות מרובות במחקר?

שאלות

1) מחקר שיווקי בדק את השפעת גובה המדף בסופרמרקט והשפעת החומר שממנו עשוי הבקבוק (זכוכית או פלסטיק) על היקף המכירות של משקאות קלים. נבדקו שני סופרמרקטים. בכל סופרמרקט נבחן כל צירוף אפשרי של גובה המדף וחומר הבקבוק, ועבור כל צירוף כזה נבדק מספר בקבוקי המשקה הקל שנמכרו באותו סופרמרקט ביום מסוים. הנה התוצאות שהתקבלו:

סוג בקבוק	זכוכית	פלסטיק
גובה המדף		
נמוך	23	59
	32	63
בינוני	47	88
	55	90
גבוה	40	51
	48	56

בצעו ניתוח שונות דו-כיווני על נתוני מחקר זה ברמת מובהקות של 5%. סכמו את המסקנות מתוך ניתוח השונות שביצעתם. מה הן ההנחות הדרושות לביצוע המבחן?

(2) במחקר בתחום החקלאות נדגמו 8 חלקות אדמה: 4 חלקות בנגב ו-4 בעמק יזרעאל. בכל חלקה ההשקיה הייתה או באמצעות ממטרות או באמצעות טפטפות. בדקו את יכול העגבניות (בטונה לדונם) בכל חלקה. להלן התוצאות שהתקבלו:

מספר חלקה	מיקום החלקה	שיטת השקיה	יכול העגבניות
1	נגב	ממטרות	12
2	נגב	ממטרות	10
3	נגב	טפטפות	15
4	נגב	טפטפות	17
5	עמק יזרעאל	ממטרות	12
6	עמק יזרעאל	ממטרות	14
7	עמק יזרעאל	טפטפות	17
8	עמק יזרעאל	טפטפות	19

- א. רשמו את כלל המשתנים במחקר וציינו לגבי כל אחד מהם האם הוא משתנה תלוי או בלתי תלוי.
- ב. הציגו את נתוני המחקר באמצעות גרפים מתאימים. האם נראה שבמדגם יש אפקט עיקרי לכל גורם? האם יש אינטראקציה בין הגורמים במדגם? האם האפקטים מובהקים?
- ג. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם האפקט העיקרי של כל גורם הוא מובהק והאם האינטראקציה היא מובהקת. מה הן ההנחות הדרושות?

- (3) חברה לייצור מוצרי שיער פיתחה נוסחה חדשנית לצבע לשיער שאינו דורש תוספת חמצן בעת תהליך הצביעה. החברה השוותה את צבע השיער החדש לצבע השיער הרגיל מבחינת כושר הכיסוי וזאת על שלושה סוגי שיער: בהיר, כהה ושיבה. ציון רמת הכיסוי הוא משתנה שמתפלג נורמלית עם שונות קבועה לכל סוג שיער ולכל סוג צבע. לכל קבוצה של סוג צבע וסוג שיער נדגמו 4 צביעות שנוסו על אנשים שונים, וניתן ציון מספרי על רמת הכיסוי. להלן סיכום תוצאות המדגם שהתקבלו:

שונות	ממוצע	הקבוצה
40	62	צבע רגיל על שיער בהיר
44	51	צבע רגיל על שיער כהה
42	45	צבע רגיל על שיער שיבה
46	60	צבע חדש על שיער בהיר
40	54	צבע חדש על שיער כהה
42	44	צבע חדש על שיער שיבה

בצעו ניתוח שונות דו-כיווני על הנתונים ברמת מובהקות של 5%. סכמו את כל המסקנות המתקבלות.

- (4) בוצע ניתוח שונות על נתונים. במערך המחקרי לגורם a יש 4 רמות ולגורם b יש 3 רמות. נערכו 3 תצפיות לכל אחת מ-12 הקבוצות שנוצרו. להלן טבלת ניתוח שונות דו-גורמי שבוצע:

מקור השונות	df	SS	MS	F
a	?	318	?	?
b	?	?	?	?
אינטראקציה	?	190	?	?
W	?	156	?	
T	?	674		

- מלאו את כל התאים בטבלה המסומנים בסימני שאלה.
- בצעו את הבדיקות הבאות ברמת מובהקות של 5%:
 - האם האינטראקציה מובהקת?
 - האם גורם a משפיע על המשתנה התלוי הנחקר?
 - האם לגורם b יש לפחות שתי רמות עם תוחלות שונות?

5) במחקר בדקו האם ארץ מוצא ומגדר של אדם משפיעים על שנות ההשכלה שלו. הנתונים סוכמו בטבלת ניתוח שונות:

מקור השונות	df	SS	MS	F
ארץ מוצא	4	34		
מגדר			2	
אינטראקציה		18	4.5	
W	10	12		
T				

- א. כמה ארצות מוצא נבדקו במחקר זה?
- ב. מהו גודל המדגם הכולל במחקר זה?
- ג. חשבו את ערכי F הסטטיסטי עבור ארץ המוצא, המגדר והאינטראקציה.
- ד. מה הם האפקטים המובהקים במחקר זה ברמת מובהקות של 5%?

6) בטבלה הבאה מסוכמים הממוצעים של מערך מחקרי דו-גורמי עם משתנה כמותי תלוי :

	b_1	b_2	b_3
a_1	8	14	11
a_2	6	13	16

מספר התצפיות בכל תא הוא 5.

הטבלה הבאה היא טבלה מסכמת של ניתוח השונות על סמך נתוני מחקר זה :

מקור השונות	df	SS	MS	F
a				
b		281.7		
ab		71.7		
W		190.1		
T				

א. מלאו את טבלת ניתוח השונות.

ב. הסיקו מסקנות ברמת מובהקות של 5%.

ג. שרטטו גרף אינטראקציות והסבירו את משמעות הממצאים.

תשובות סופיות

- 1) עיין בסרטון הוידאו.
- 2) א. משתנים ב"ת : מיקום החלקה, שיטת השקיה. משתנה תלוי : יבול בטונה לדונם.
ב. עיין בסרטון הוידאו.
ג. עיין בסרטון הוידאו.
- 3) עיין בסרטון הוידאו.
- 4) א. עיין בסרטון הוידאו. ב. i. כן. ii. כן. iii. לא.
- 5) א. 4 ב. 20 ג. עיין בסרטון הוידאו.
- ד. עיין בסרטון הוידאו.
- 6) א. עיין בסרטון הוידאו. ב. עיין בסרטון הוידאו. ג. עיין בסרטון הוידאו.

סטטיסטיקה לתואר שני במדרשת פיינברג

פרק 56 - גודל האפקט

תוכן העניינים

1. גודל האפקט בהסקה על תוחלת שהשונות ידועה (ללא ספר)
2. גודל האפקט בהסקה על תוחלת שהשונות לא ידועה (ללא ספר)
3. גודל האפקט בהסקה על תוחלת ההפרש במדגמים מזווגים (ללא ספר)
4. גודל האפקט בהסקה על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים ובהנחת שוויון שונויות . (ללא ספר)
5. גודל האפקט במבחן לניתוח שונות (ללא ספר)