

סטטיסטיקה ב



תוכן העניינים

1.	הסקה סטטיסטית - הקדמה	1
2.	מושגי יסוד באמידה	4
3.	מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים	9
4.	בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)	15
5.	בדיקת השערות על פרופורציה	40
6.	בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים	53
7.	בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגמים מזווגים	57
8.	שאלות מסכמות בבדיקת השערות	61
9.	מבחני חי בריבוע	77
10.	ניתוח שונות חד כיוונית	87
11.	מבחן הבינום	96
12.	מבחן פישר	106
13.	מקדם המתאם (מדד קשר) הלינארי ומובהקותו	110
14.	מדדי קשר- השפעת טרנספורמציה לינארית על פירסון	130
15.	בניית קו רגרסיה	133
16.	מדדי קשר-רגרסיה -שונות מוסברת ושונות לא מוסברת	136
17.	רגרסיה פשוטה	139
18.	רגרסיה - שאלות ממבחנים	148

סטטיסטיקה ב

פרק 1 - הסקה סטטיסטית - הקדמה

תוכן העניינים

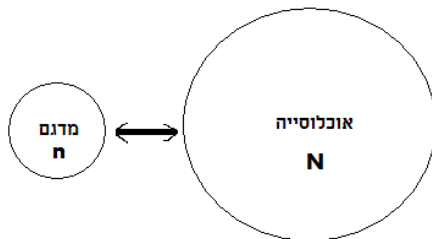
1. כללי 1

הסקה סטטיסטית – הקדמה:

רקע:

אוכלוסייה:

קבוצה שאלה מפנים שאלה מחקרית. למשל, חברת תרופות שמעוניינת לפתח תרופה למחלת הסוכרת מתעניינת באוכלוסיית חולי הסוכרת בעולם.



מדגם:

חלק מתוך האוכלוסייה. למשל, אם נדגום באקראי 10 אנשים מתוך חולי הסוכרת אז זהו מדגם מתוך אוכלוסיית חולי הסוכרת.

במקרים רבים אין אפשרות לחקור את כל האוכלוסייה כיוון שאין גישה לכולה, היא גדולה מידי, אנו מוגבלים בזמן ובאמצעים טכניים ולכן מבצעים מדגם במטרה לבצע הסקה סטטיסטית מהמדגם לאוכלוסייה. הדגימה בקורס תהיה דגימה מקרית - הכוונה לדגימה שבה לכל תצפית באוכלוסייה יש את אותו סיכוי להיכלל במדגם.

סטטיסטי:

גודל המחושב על המדגם.

פרמטר:

גודל המתאר את האוכלוסייה.

הסימונים לפרמטר וסטטיסטי הם שונים:

סטטיסטי (מדגם)	פרמטר (אוכלוסייה)	ממוצע
$\bar{X}$	μ	
$\hat{p}$	P	פרופורציה (שכיחות יחסית)

פרמטר הוא גודל קבוע גם אם אנו לא יודעים אותו סטטיסטי הוא משתנה ממדגם למדגם ולכן יש לו התפלגות הנקראת התפלגות הדגימה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

25% מאזרחי המדינה תומכים בהצעת החוק של חבר כנסת מסוים. הוחלט לדגום 200 אזרחים ומתוכם לבדוק מהו אחוז התומכים בהצעת החוק.

א. מי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מה הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

ה. מהו הסטטיסטי שמתכננים להוציא מהמדגם?

ו. האם הפרמטר או הסטטיסטי הוא משתנה מקרי?

שאלות:

- (1) מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.
- מי האוכלוסייה?
 - מה המשתנה?
 - מהם הפרמטרים?
 - מהו גודל המדגם?
- (2) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלויזיה למשפחה ב"שוב "העוגן". נגדיר את X להיות מספר המקלטים של משפחה אקראית. מתכננים לדגום מאוכלוסייה זו 4 משפחות ולהתבונן בממוצע מספר מקלטי הטלויזיה במדגם.
- מי היא האוכלוסייה ומהו המשתנה הנחקר?
 - מהו הסטטיסטי שיילקח מהמדגם ומה סימונו?

מספר המשפחות	מספר מקלטים
50	0
250	1
350	2
300	3
50	4
סך הכול $N = 1000$	

- (3) נתון כי 20% מהשכירים במדינה הם אקדמאיים. נבחרו באקראי 10 שכירים באותה אוכלוסייה ומתכננים לפרסם את מספר האקדמאיים שנדגמו.
- מהי האוכלוסייה?
 - מה המשתנה באוכלוסייה?
 - מהם הפרמטרים?
 - מהו הסטטיסטי?

תשובות סופיות:

- (1) א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון. ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15. ד. 2.
- (2) א. האוכלוסייה: 1000 משפחות ב"שוב העוגן, המשתנה הנחקר: מס' מקלטים. ב. $\bar{X}$ = ממוצע מדגם.
- (3) א. השכירים במדינה. ב. השכלה: אקדמאי, לא אקדמאי. ג. שיעור ההצלחות באוכלוסייה: 0.2. ג. מס' האקדמאים במדגם.

סטטיסטיקה ב

פרק 2 - מושגי יסוד באמידה

תוכן העניינים

1. כללי 4

מושגי יסוד באמידה:

רקע:

כזכור מהמפגש הקודם, פרמטר הוא גודל המתאר את האוכלוסייה או התפלגות מסוימת. כמו ממוצע הגבהים בקרב מתגייסים לצה"ל - μ . כמו פרופורציית התומכים בממשלה בקרב אזרחי המדינה - p . בדרך כלל הפרמטרים הם גדלים שאינם ידועים באמת, ולכן מבצעים מדגמים במטרה לאמוד אותם. אין אפשרות לחשב אותם הניסיון הוא בלהעריך כמה הם שווים ככל שניתן.

- נסמן באופן כללי פרמטר באות θ ואומד ב- $\hat{\theta}$. $\hat{\theta}$ הוא סטטיסטי המחושב על המדגם ובאמצעותו נאמוד את θ .
- שגיאת אמידה: $|\hat{\theta} - \theta|$ - ההפרש בין האומד לאמת (הפרמטר).

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בכנסת ה-19 קיבלה מפלגת העבודה 15 מנדטים. בערוץ 10 ברגע סגירת הקלפיות העריכו את מספר המנדטים של המפלגה להיות 17 מנדטים וזאת על סמך תוצאות מדגם של הערוץ.

- א. מה הפרמטר בדוגמה זו?
 - ב. מהי טעות האמידה של ערוץ 10?
- $\hat{\theta}$ יהיה אומד חסר הטיה ל- θ אם התוחלת של $\hat{\theta}$ תהיה שווה ל- θ : $E(\hat{\theta}) = \theta$.
 - טעות התקן של אומד היא סטיית התקן שלו, כלומר: $\sigma(\hat{\theta}) = S.E$

פרמטרים מרכזיים והאומדים שלהם:**ממוצע האוכלוסייה μ :**

האומד הנקודתי שלו יהיה: ממוצע המדגם: $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$.

$E(\bar{x}) = \mu$ לכן $\bar{x}$ הינו אומד חסר הטיה ל- μ . כמו כן, טעות תקן: $\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = SE$.

פרופורציה באוכלוסייה p :

האומד הנקודתי שלו יהיה: פרופורציה במדגם: $\hat{p} = \frac{y}{n}$.

$E(\hat{p}) = p$, לכן $\hat{p}$ הינו אומד חסר הטיה ל- p . כמו כן טעות התקן: $\sigma(\hat{p}) = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$.

שונות האוכלוסייה σ^2 :

האומד הנקודתי שלו יהיה: $S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$.

$E(S^2) = \sigma^2$ ולכן S^2 הינו אומד חסר הטיה ל- σ^2 : $S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$.

הערה: אומד הוא הנוסחה הכללית לאמידת הפרמטר ואומדן הוא הערך הספציפי שהתקבל במדגם מסוים.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נדגמו 10 משפחות בתל אביב ונבדק עבור כל משפחה מספר הילדים שלה.
להלן התוצאות שהתקבלו: 2, 1, 3, 2, 1, 4, 5, 2, 1, 3.
אמדו באמצעות אומדים חסרי הטיה את הפרמטרים הבאים:

1. ממוצע מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
2. שונות מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
3. פרופורציית המשפחות בנות שני ילדים.

שאלות:

- (1) מתוך 500 טירונים, נמצאו 120 בעלי שברי הליכה. נתון שהסיכוי שטירון יהיה עם שבר הליכה הוא 0.25.
- מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?
 - מהי טעות התקן של האומדן כשהמדגם בגודל 500?
 - מהו האומדן לפרמטר?
 - מהי טעות האמידה?
- (2) לפי נתוני היצרן, מקרר צורך בממוצע 2400 וואט לשעה עם סטיית תקן של 500 וואט לשעה.
- במדגם של 25 מקררים של היצרן התקבל ממוצע של 2342 וואט לשעה.
- מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?
 - מהי טעות התקן של האומדן?
 - מהו האומדן לפרמטר?
 - מהי טעות האמידה?
- (3) נדגמו עשרה מתגייסים לצה"ל. גובהם נמדד בס"מ. להלן התוצאות שהתקבלו: 168, 184, 192, 171, 180, 177, 187, 168, 177 ו-175.
- מצאו אומדן חסר הטיה לגובה הממוצע של מתגייסי צה"ל.
 - מצאו אומדן חסר הטיה לשונות הגבהים של מתגייסי צה"ל.
 - מצאו אומדן חסר הטיה לפרופורציות המתגייסים בגובה של לפחות 180 ס"מ.
- (4) נדגמו 20 שכירים באקראי. עבור כל שכיר נמדד השכר באלפי שקלים.
- להלן התוצאות שהתקבלו: $\sum_{i=1}^{20} X_i = 162$, $\sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 1502.2$.
- אמדו את השכר הממוצע של השכירים במשק.
 - אמדו את סטיית התקן של שכר השכירים במשק.
- (5) במטרה לאמוד את ממוצע האוכלוסייה, דגמו תצפיות בלתי תלויות מהאוכלוסייה וחישבו את הממוצע שלהם. מהי טעות התקן?
- סטיית התקן של האוכלוסייה.
 - סטיית התקן של ממוצע האוכלוסייה.
 - סטיית התקן של המדגם.
 - סטיית התקן של ממוצע המדגם.

6) משקל הממוצע של אוכלוסייה מסוימת הוא 75 ק"ג עם שונות של 25. אם יבחרו כל המדגמים האפשריים בגודל 10 מאוכלוסייה זו סטיית התקן של ממוצעי המדגמים תהייה:

- א. 3.
- ב. 2.5.
- ג. 1.581.
- ד. אין מספיק נתונים לדעת.

7) במדגם מקרי, מתי סכום ריבועי הסטיות מהממוצע, $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, מחולק ב- $n-1$?

- א. כאשר n קטן.
- ב. כאשר תצפיות המדגם אינן בלתי תלויות.
- ג. כאשר האוכלוסייה אינה מתפלגת נורמאלית.
- ד. כאשר מעוניינים באומד חסר הטיה לשונות האוכלוסייה ממנה הוצא המדגם.
- ה. כאשר מעוניינים לחשב את שונות התפלגות הדגימה של ממוצע המדגם.

8) $X_1, X_2, \dots, X_{16}$ מדגם מקרי מתוך אוכלוסייה בעלת ממוצע μ לא ידוע ושונות: $\sigma^2 = 64$. טעות התקן של האומד ל- μ היא:

- א. 16.
- ב. 8.
- ג. 4.
- ד. 2.

9) מהו אומד חסר הטיה?

- א. אומד שערכו שווה לממוצע התפלגות הדגימה שלו.
- ב. אומד שערכו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.
- ג. אומד שממוצע התפלגות הדגימה שלו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.
- ד. אומד שהסיכוי שערכו יהיה גבוה מערך הפרמטר באוכלוסייה שווה לסיכוי שיהיה נמוך ממנו.

תשובות סופיות:

א. 0.25	ב. 0.019	ג. 0.24	ד. 0.01
א. אוכלוסייה : מקררים של יצרן, תוחלת : 2400, סטיית תקן : 500.			
ב. 100		ג. 2342	ד. 58
א. 177.9	ב. 64.1	ג. 0.4	
א. 8.1	ב. 3.16		
ד'.			
ג'.			
ד'.			
ד'.			
ג'.			

סטטיסטיקה ב

פרק 3 - מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים

תוכן העניינים

9	1. הקדמה
13	2. סוגי טעויות

הקדמה:

רקע:

תהליך של בדיקת השערות הוא תהליך מאד נפוץ בעולם הסטטיסטיקה. בבדיקת השערות על פרמטרים נעבוד לפי השלבים הבאים:

שלב א: נוהה את הפרמטר הנחקר.

שלב ב: נרשום את השערות המחקר.

השערת האפס המסומנות ב- H_0 .

בדרך כלל השערת האפס מסמלת את אשר היה מקובל עד עכשיו, את השגרה, הנורמה.

השערה אלטרנטיבית (השערת המחקר) המסומנת ב- H_1 .

ההשערה האלטרנטיבית מסמלת את החדשנות בעצם ההשערה האלטרנטיבית מדברת על הסיבה שהמחקר נעשה היא שאלת המחקר.

שלב ג: נבדוק האם התנאים לביצוע התהליך מתקיימים ונניח הנחות במידת הצורך.

שלב ד: נרשום את כלל ההכרעה. בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שנקרא כלל הכרעה. הכלל יוצר אזורי שנקראים:

1. **אזור דחייה:**

דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.

2. **אזור קבלה:**

קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה. כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי. אזור הדחייה מוכתב על ידי סיכון שלוקח החוקר מראש שנקרא רמת מובהקות ומסומן ב- α .

שלב ה: בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולחשב את הסטטיסטי המתאים ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה.

שלב ו: להסיק מסקנה בהתאם לתוצאות המדגם.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום לידתם בישראל 3300 גרם. משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון. להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$$n = 20, \bar{X} = 3120, S = 280$$

- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
- ב. מה המשתנה הנחקר?
- ג. מה הפרמטר הנחקר?
- ד. מהן השערות המחקר?

שאלות:

בשאלות הבאות, ענו על הסעיפים הבאים:

- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
- ב. מה המשתנה הנחקר?
- ג. מה הפרמטר הנחקר?
- ד. מהן השערות המחקר?

- (1) ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות. מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים. ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5.
- (2) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25.
- (3) במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה למשפטים היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. מחקר מעוניין לבדוק האם השנה מקשים על הקבלה לפקולטה למשפטים.
- (4) בחודש ינואר השנה פורסם שאחוז האבטלה במשק הוא 8% במדגם עכשווי התקבל שמתוך 200 אנשים 6.5% מובטלים. רוצים לבדוק ברמת מובהקות של 5% האם כיום אחוז האבטלה הוא כמו בתחילת השנה.

תשובות סופיות:

- (1) א. נבחנים בבגרות באנגלית.
 ב. ציון.
 ג. ממוצע הציונים בשיטת לימוד חדשה.
 ד. $H_0: \mu = 72$
 $H_1: \mu > 72$
- (2) א. משקאות בבקבוק של חברה מסוימת.
 ב. נפח משקה בסמ"ק.
 ג. ממוצע נפח המשקה בבקבוק.
 ד. $H_0: \mu = 500$
 $H_1: \mu < 500$
- (3) א. מועמדים לפקולטה למשפטים.
 ב. משתנה דיכוטומי (התקבל, לא התקבל).
 ג. אחוז הקבלה.
 ד. $H_0: p = 0.25$
 $H_1: p < 0.25$
- (4) א. אזרחים בוגרים במשק.
 ב. משתנה דיכוטומי (מובטל, עובד).
 ג. אחוז האבטלה כיום.
 ד. $H_0: p = 0.08$
 $H_1: p \neq 0.08$

סוגי טעויות:

רקע:

בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שניקרא כלל הכרעה.
הכלל יוצר אזורים שנקראים:

1. אזור דחייה – דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.
2. אזור קבלה – קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה.

כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי.
בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה וכך להגיע למסקנה – המסקנה היא בעירבון מוגבל כיוון שהיא תלויה בכלל ההכרעה ובתוצאות המדגם. אם נשנה את כלל ההכרעה אז אנחנו יכולים לקבל מסקנה אחרת. אם נבצע מדגם חדש אז אנחנו עלולים לקבל תוצאה אחרת. לכן יתכנו טעויות במסקנות שלנו:

מציאות	הכרעה		
		H_0	H_1
	H_0	אין טעות	טעות מסוג 1
	H_1	טעות מסוג 2	אין טעות

הגדרת הטעויות:

טעות מסוג ראשון: להכריע לדחות את H_0 למרות שבמציאות H_0 נכונה.

טעות מסוג שני: להכריע לקבל את H_0 למרות שבמציאות H_1 נכונה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

אדם חשוד בביצוע עבירה ונתבע בבית המשפט.
אילו סוגי טעויות אפשריות בהכרעת הדין?

שאלות:

- (1) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25. בסופו של דבר הוחלט להכריע לטובת חברת המשקאות.
- רשמו את השערות המחקר.
 - מה מסקנת המחקר?
 - איזו סוג טעות יתכן וביצעו במחקר?
- (2) במחקר על פרמטר מסוים הוחלט בסופו של דבר לדחות את השערת האפס.
- האם ניתן לדעת אם בוצע טעות במחקר?
 - מה סוג הטעות האפשרית?
- (3) לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. ישנה טענה שכיום ממוצע מספר הילדים במשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות. במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה. על סמך תוצאות המדגם נקבע שלא ניתן לקבוע שבאופן מובהק תוחלת מספר הילדים למשפחה קטנה כיום.
- מהי אוכלוסיית המחקר?
 - מה המשתנה הנחקר?
 - מה הפרמטר הנחקר?
 - מה השערות המחקר?
 - מה מסקנת המחקר?
 - מהי סוג הטעות האפשרית במחקר?

תשובות סופיות:

- (1) א. $H_0: \mu = 500$
 ב. לא דחינו את H_0 .
 ג. טעות מסוג שני.
- (2) א. לא ניתן לדעת.
 ב. טעות מסוג ראשון.
- (3) א. משפחות כיום.
 ב. מס' הילדים.
 ג. תוחלת מספר הילדים למשפחה כיום.
 ד. $H_0: \mu = 2.3$
 $H_1: \mu < 2.3$
 ה. לא לדחות את H_0 . ו. טעות מסוג שני.

סטטיסטיקה ב

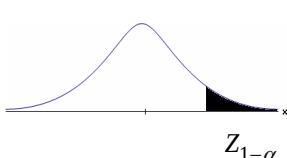
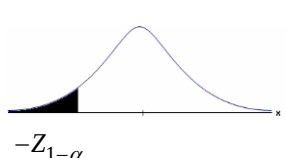
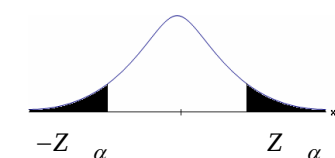
פרק 4 - בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)

תוכן העניינים

1. בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסיה ידועה. 15
2. סיכוי לטעויות ועוצמה (ששונות האוכלוסיה ידועה). 19
3. קביעת גודל מדגם (ששונות האוכלוסיה ידועה). 25
4. מובהקות תוצאה - אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסיה ידועה). 28
5. בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסיה לא ידועה. 33
6. מובהקות תוצאה - אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסיה לא ידועה). 37

בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסייה ידועה:

רקע:

השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:	$H_0: \mu \leq \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu \geq \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$
תנאים:	1. σ ידועה 2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0 :	$Z_{\bar{x}} > Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ דוחים את H_0	$Z_{\bar{x}} < -Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ דוחים את H_0	$Z_{\bar{x}} < -Z_{\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\bar{x}} > Z_{\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ דוחים את H_0

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

סטטיסטי המבחן:

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	נדחה H_0 אם מתקיים:
--	--	--	-----------------------

דוגמה:

יבול העגבניות מתפלג נורמלית עם תוחלת של 10 טון לדונם וסטיית תקן של 2.5 טון לדונם בעונה. משערים ששיטת זיבול חדשה תעלה את תוחלת היבול לעונה מבלי לשנות את סטיית התקן. נדגמו 4 חלקות שזוּבְלו בשיטה החדשה. היבול הממוצע שהתקבל היה 12.5 טון לדונם. בדקו את ההשערה ברמת מובהקות של 1%.

פיתרון:

אוכלוסייה: עגבניות.

המשתנה: $X =$ יבול העגבניות בטון לעונה.

הפרמטר: $\mu =$ תוחלת היבול בשיטת הזיבול החדשה.

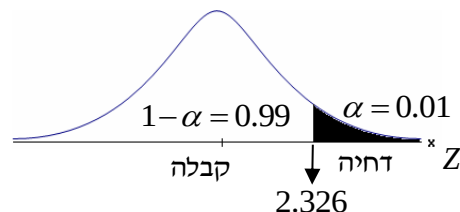
השערות:
 $H_0: \mu = 10$
 $H_1: \mu > 10$

תנאים:

1. $X \sim N$.

2. $\sigma = 2.5$.

כלל הכרעה:



נדחה את H_0 אם $Z_{\bar{X}} > 2.326$

תוצאות: $n = 4$, $\bar{x} = 12.5$

סטטיסטי המבחן: $Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

נציב: $Z_{\bar{X}} = \frac{12.5 - 10}{\frac{2.5}{\sqrt{4}}} = 2 < 2.326$

מסקנה:

לא נדחה H_0 (נקבל H_0).

ברמת מובהקות של 1% לא נוכל לקבל את הטענה ששיטת הזיבול החדשה מעלה את תוחלת היבול של העגבניות.

שאלות:

- (1) ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות. מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים. ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5. בהנחה שגם בשיטתו סטיית התקן תהיה 15 מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
- (2) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25.
 - א. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 2.5%?
 - ב. האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה עבור רמת מובהקות הגבוהה מ-5%?
- (3) מהנדס האיכות מעוניין לבדוק אם מכונה מכיילת (מאופסת). המכונה כוונה לחתוך מוטות באורך 50 ס"מ. לפי נתוני היצרן סטיית התקן בחיתוך המוטות היא 0.5 ס"מ. במדגם של 50 מוטות התקבל ממוצע אורך המוט 50.93 ס"מ. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
- (4) המשקל הממוצע של הספורטאים בתחום ספורט מסוים הוא 90 ק"ג, עם סטיית תקן 8 ק"ג. לפי דעת מומחים בתחום יש צורך בהורדת המשקל ובשימוש בדיאטה מסוימת שצריכה להביא להורדת המשקל. לשם בדיקת יעילות הדיאטה נלקח מדגם מקרי של 50 ספורטאים ובתום שנה של שימוש בדיאטה התברר שהמשקל הממוצע במדגם זה היה 84 ק"ג. יש לבדוק בר"מ של 10%, האם הדיאטה גורמת להורדת המשקל.
- (5) לפי מפרט נתון, על עובי בורג להיות 4 מ"מ עם סטיית תקן של 0.2 מ"מ. במדגם של 25 ברגים העובי הממוצע היה 4.07 מ"מ. קבעו ברמת מובהקות 0.05, האם עובי הברגים מתאים למפרט. הניחו כי עובי של בורג מתפלג נורמלית וסטיית התקן של עובי בורג היא אכן 0.2 מ"מ.
- (6) במחקר נמצא שתוצאה היא מובהקת ברמת מובהקות של 5% מה תמיד נכון? בחרו בתשובה הנכונה.
 - א. הגדלת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.
 - ב. הגדלת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.
 - ג. הקטנת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.
 - ד. הקטנת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.

(7) חוקר ערך מבחן דו צדדי ברמת מובהקות של α והחליט לדחות את השערת האפס.

אם החוקר היה עורך מבחן צדדי ברמת מובהקות של $\frac{\alpha}{2}$ אזי בהכרח:

- א. השערת האפס הייתה נדחית.
- ב. השערת האפס הייתה לא נדחית.
- ג. לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו במקרה זה.

(8) שני סטטיסטיקאים בדקו השערות: $H_0: \mu = \mu_0$ כנגד $H_1: \mu > \mu_0$,

עבור שונות ידועה ובאותה רמת מובהקות.

שני החוקרים קבלו אותו ממוצע במדגם אך לחוקר א' היה מדגם בגודל 100 ולחוקר ב' מדגם בגודל 200.

- א. אם חוקר א' החליט לדחות את H_0 , מה יחליט חוקר ב'? נמקו.
- ב. אם חוקר א' יחליט לא לדחות את H_0 , מה יחליט חוקר ב'? נמקו.

תשובות סופיות:

- (1) נקבל H_0 , בר"מ של 5% לא נקבל את הטענה של המורה ששיטת הלימוד שלו מעלה את ממוצע הציונים.
- (2) א. נדחה H_0 , בר"מ של 2.5% נקבל את תלונת אגודת הצרכנים בדבר הפחתת נפח המשקה בבקבוק.
ב. הגדלנו את רמת המובהקות לכן אנחנו נשארים בדחייה של H_0 והמסקנה לא תשתנה.
- (3) נדחה H_0 , בר"מ של 5% נקבע שהמכונה לא מאופסת.
- (4) נדחה H_0 , בר"מ של 0.1 נקבל את הטענה שהדיאטה יעילה ומפחיתה את המשקל הממוצע.
- (5) נקבל H_0 , בר"מ של 0.05 נכריע שתוחלת עובי הבורג מתים למפרט.
- (6) א'.
- (7) ג'.
- (8) א. לדחות. ב. לא ניתן לדעת.

סיכוי לטעויות ועוצמה (ששונות האוכלוסייה ידועה):

רקע:

מציאות	הכרעה		
		H_0	H_1
	H_0	אין טעות	טעות מסוג 1
	H_1	טעות מסוג 2	אין טעות

הגדרת הסתברויות:

הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 (רמת מובהקות):

$$\alpha = P(H_0 \text{ נכונה} \mid \text{לדחות את } H_0) = P_{H_0}(H_0 \text{ לדחות})$$

הסיכוי לבצע טעות מסוג 2:

$$\beta = P(H_0 \text{ לקבל את } H_0 \mid \text{לדחות את } H_0) = P_{H_1}(H_0 \text{ לקבל})$$

רמת בטחון:

$$(\alpha - 1) = P(H_0 \text{ לקבל את } H_0 \mid \text{לדחות את } H_0) = P_{H_0}(H_0 \text{ לקבל})$$

עוצמה:

$$(\beta - 1) = \pi = P(H_0 \text{ לדחות את } H_0 \mid \text{לדחות את } H_0) = P_{H_1}(H_0 \text{ לדחות})$$

התהליך לחישוב סיכוי לטעות מסוג שני:

השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$
תנאים:	1. σ ידועה 2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0 :	$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
חישוב β :	$P_{\mu_1} \left(\bar{X} < \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$	$P_{\mu_1} \left(\bar{X} > \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$	$P_{\mu_1} \left(\mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \mu_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$

התפלגות ממוצע המדגם: $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

התקנון:

דוגמה:

בתחילת השנה חשבון הטלפון הסלולארי הממוצע לאדם היה 200 ₪ עם סטיית תקן של 80 ₪ לחודש. בעקבות כניסתן של חברות טלפון סלולארית חדשות מעוניינים לבדוק האם כיום ממוצע חשבון הטלפון הסלולארי פחת. לצורך בדיקה דגמו באקראי 36 אנשים וחשבון הטלפון הסלולארי שלהם היה 150 ₪ בממוצע לחודש.

א. רשמו את השערות המחקר ובנו כלל הכרעה במונחי חשבון ממוצע מדגמי ברמת מובהקות של 5%.

ב. מה מסקנתכם? איזה סוג טעות אפשרית במסקנה?

ג. נניח שבמציאות כיום החשבון הממוצע הוא 160 ₪. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני?

ד. אם נקטין את רמת המובהקות מסעיף א', כיצד הדבר ישפיע על התשובה מסעיף ג'?

פתרון:

א. אוכלוסייה: משלמי חשבון טלפון סלולאר כיום.

המשתנה: X = חשבון הטלפון החודשי בשקלים.

הפרמטר: μ .

השערות:
 $H_0: \mu = 200$
 $H_1: \mu < 200$

תנאים:

$$1. \mu = 200.$$

$$2. n = 36.$$

$$\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, K = \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\alpha = 0.05$$

$$Z_{1-\alpha} = Z_{0.95} = 1.645$$

$$\text{נציב: שקלים } K = 200 - 1.645 \cdot \frac{80}{\sqrt{36}} = 178.07$$

כלל ההכרעה: דחה את H_0 אם שקלים $\bar{X} < 178.07$.

ב. ברמת מובהקות של 5% נכריע שאכן ממוצע חשבון הטלפון הסלולרי פחת מתחילת השנה.

ג. השערות:
 $H_0: \mu_0 = 200$
 $H_1: \mu < 200$

כלל ההכרעה: נדחה את H_0 אם $\bar{X} < 178.07$.

$$H_1: \bar{X} \sim N\left(160, \frac{80^2}{36}\right)$$

$$Z = \frac{178.07 - 160}{\frac{80}{\sqrt{36}}} = 1.36$$

$$\beta = P_{H_1} \left(\overset{\text{לקבל את}}{H_0} \right) = P_{H_1} (\bar{X} > 178.07) = 1 - \phi(136) = 1 - 0.9131 = 0.0869$$

ד. הקטנת α מגדילה את β .

שאלות:

(1) נתון ש: $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 1)$.

- להלן השערות של חוקר לגבי הפרמטר μ : $H_0: \mu = 5$, $H_1: \mu = 7$.
 מעוניינים ליצור כלל הכרעה המתבסס על הסמך תצפית בודדת כך שרמת המובהקות תהיה 5%.
 א. עבור אילו ערכים של X שידגם נדחית השערת H_0 ?
 ב. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני?
 ג. אם במדגם התקבל ש- $X = 6.9$ מה תהיה המסקנה ומה הטעות האפשרית?

- (2) לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. מעוניינים לבדוק אם כיום ממוצע מספר הילדים למשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות. במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה.
 א. רשמו כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קריטי ברמת מובהקות של 5%.
 ב. בהמשך לסעיף א' מה תהיה המסקנה ומהי הטעות האפשרית במסקנה?
 ג. אם באמת ממוצע מספר הילדים במשפחה פחת לכדי 2.1 מהי העצמה של הכלל מסעיף א'?

- (3) להלן נתונים על תהליך של בדיקת השערות על תוחלת:

$$H_0: \mu = 200, H_1: \mu \neq 200, \sigma = 30, n = 225$$

- א. רשמו כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קריטי וברמת מובהקות של 10%.
 ב. בהמשך לסעיף א', מהי העצמה אם התוחלת שווה ל-195?
 ג. הסבירו, ללא חישוב, איך העצמה תשתנה אם רמת המובהקות תהיה 5%?

- (4) מפעל לייצור צינורות מייצר צינור שקוטרו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 50 מ"מ וסטית תקן של 6 מ"מ. במחלקת ביקורת האיכות דוגמים בכל יום 81 צינורות ומוודדים את קוטרים, בכדי לבדוק, בעזרת מבחן סטטיסטי, האם מכונת הייצור מכוילת כנדרש או שקוטר הצינורות קטן מהדרוש.
 א. רשמו את ההשערות ואת כלל ההכרעה ברמת מובהקות של 5%.
 ב. אם ביום כלשהו מכונת הייצור התקלקלה והיא מייצרת את הצינורות בקוטר שתוחלתו 48 מ"מ בלבד (סטית התקן לא השתנתה), מה ההסתברות שהתקלה לא תתגלה בביקורת האיכות? כיצד נקראת הסתברות זו?
 ג. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף ב תשתנה אם רמת המובהקות תגדל.
 ד. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף ב תשתנה אם התוחלת האמיתית היא 47 ולא 48 מ"מ.

- (5) להלן השערות של מחקר: $H_0: \mu = 50$, $H_1: \mu = 58$. מעוניינים לדגום 100 תצפיות. ידוע שסטיית התקן של ההתפלגות הינה 20.
- א. בנו כלל הכרעה שהסיכוי לטעות מסוג שני בו הוא 10%. מהי רמת המובהקות?
- ב. כיצד הייתה משתנה רמת המובהקות אם (כל סעיף בפני עצמו)?
- i. סטיית התקן הייתה יותר גדולה.
- ii. הסיכוי לטעות מסוג שני גדול יותר.

השאלות שלהלן הן שאלות רב-ברירה, בחרו בתשובה הנכונה ביותר:

- (6) אם חוקר החליט להגדיל את רמת המובהקות במחקר שלו אזי:
- א. הסיכוי לטעות מסוג ראשון גדל.
- ב. העוצמה של המבחן גדלה.
- ג. הסיכוי לטעות מסוג שני גדל.
- ד. תשובות א' ו-ב' נכונות.
- (7) חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן:
- א. השערת האפס נכונה.
- ב. השערת האפס נדחתה.
- ג. השערת האפס לא נדחתה.
- ד. אף אחת מהתשובות לא נכונה בהכרח.

- (8) מה המצב הרצוי לחוקר המבצע בדיקת השערה:

$1 - \beta$	α
גדולה	א. גדולה
קטנה	ב. גדולה
גדולה	ג. קטנה
קטנה	ד. קטנה

- (9) נערך שינוי בכלל ההחלטה של בדיקת השערה מסוימת ובעקבותיו אזור דחיית H_0 קטן. כל שאר הגורמים נשארו ללא שינוי. כתוצאה מכך:
- א. הן α , והן $1 - \beta$, יקטנו.
- ב. α יישאר ללא שינוי ואילו $1 - \beta$ יגדל.
- ג. α יגדל ואילו $1 - \beta$ יקטן.
- ד. הן α והן $1 - \beta$ יגדלו.

- (10) ידוע כי לחץ דם תקין באוכלוסייה הוא 120. רופא מניח שלחץ הדם בקרב עיתונאים גבוה יותר מהממוצע באוכלוסייה. הוא לקח מדגם של 60 עיתונאים וקיבל ממוצע 137. על סמך המדגם, הוא בודק טענתו ברמת מובהקות 0.02 ומסיק שלחץ הדם בקרב העיתונאים אינו גבוה יותר. מה הטעות האפשרית שהרופא עושה?
- טעות מסוג ראשון.
 - טעות מסוג שני.
 - טעות מסוג שלישי.
 - אין טעות במסקנתו.

תשובות סופיות:

- (1) א. מעל 6.645. ב. 0.3594.
ג. דחינו את H_0 , תתכן טעות מסוג ראשון.
- (2) א. נדחה H_0 אם $\bar{X} < 2.24$. ב. נדחה H_0 ג. 1.
- (3) א. נדחה H_0 אם $\bar{X} > 203.29$ או $\bar{X} < 196.71$. ב. 0.8051. ג. תקטן.
- (4) א. נדחה H_0 אם $\bar{X} < 48.9$. ב. 0.0885. ג. תקטן. ד. תקטן.
- (5) א. 0.0033. ב. i. רמת המובהקות הייתה קטנה.
ב. ii. רמת המובהקות הייתה גדלה.
- (6) ד'.
- (7) ג'.
- (8) ג'.
- (9) א'.
- (10) ב'.

קביעת גודל מדגם (ששונות האוכלוסייה ידועה):

רקע:

השערות המחקר הן: $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu = \mu_1$

סטיית התקן של האוכלוסייה ידועה σ ומעוניינים לבצע מחקר שרמת המובהקות לא תעלה על α והסיכוי לטעות מסוג שני לא יעלה על β .

$$n \geq \left(\frac{(Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta}) \times \sigma}{\mu_0 - \mu_1} \right)^2 : \text{הנוסחה הבאה נותנת את גודל המדגם הרצוי}$$

דוגמה:

משרד החינוך מפעיל בגן חובה שיטת חינוך שפותחה בשנת 1995. לפי שיטת חינוך זו תוחלת הציון במבחן אוצר מילים לגיל הרך הוא 70. אנשי חינוך החליטו לבדוק שיטת חינוך שפותחה בהולנד הנותנת שם תוחלת ציון אוצר מילים של 80. נניח שציוני מבחן זה מתפלגים נורמאלית עם $\sigma = 17$. כדי לבדוק האם גם בישראל הפעלת שיטת החינוך ההולנדית תעבוד בגנים, רוצים לבנות מחקר ברמת מובהקות של 5%. כמו כן, מעוניינים שאם בהפעלת השיטה ההולנדית תוחלת הציונים תעלה לכדי 80, המחקר יגלה זאת בסיכוי של 90%. כמה ילדי גן חובה דרושים למחקר?

פתרון:

האוכלוסייה: ילדי גן חובה.

המשתנה: $X =$ ציון במבחן אוצר מילים.

הפרמטר: μ .

השערות:
 $H_0: \mu = 70$
 $H_1: \mu = 80$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2 = 17^2)$$

אם בהפעלת השיטה ההולנדית התוחלת תעלה ל-80, נגלה זאת בסיכוי 90%.

$$n \geq \left(\frac{(Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta}) \times \sigma}{\mu_0 - \mu_1} \right)^2$$

$$\alpha = 0.05$$

$$1 - \beta = 0.9$$

$$\mu_0 = 70$$

$$\mu_1 = 80$$

$$\sigma = 17$$

$$Z_{1-\alpha} = Z_{0.95} = 1.645$$

$$Z_{1-\beta} = Z_{0.9} = 1.282$$

$$n \geq \left(\frac{(1.645 + 1.282) \times 17}{70 - 80} \right)^2 = 24.76 \quad \text{נציב:}$$

$$\text{לכן, } n_{\min} = 25.$$

שאלות:

- (1) במבחן אינטליגנציה הציונים מתפלגים נורמאלית עם סטיית תקן 8 וממוצע 100. פסיכולוג מעוניין לבדוק את הטענה שבאוכלוסיות במצב סוציו אקונומי נמוך תוחלת הציונים היא 95. אם מעוניינים לגלות את הטענה בהסתברות של לפחות 99% כשרמת המובהקות היא 5% מהו גודל המדגם הדרוש?
- (2) משרד התקשורת טוענים שאדם מדבר בממוצע 180 דקות בחודש בטלפון הסלולרי. חברות הטלפון הסלולרי טוענות שאינפורמציה זו אינה נכונה ואדם מדבר בממוצע פחות: כ-160 דקות. לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של זמן השיחה החודשי ידוע ושווה ל-60 דקות. כמה אנשים יש לדגום כך שאם טענת משרד התקשורת נכונה נדחה אותה בסיכוי של 5% (איך קוראים להסתברות זאת?) כמו כן אם טענת חברות הטלפון הסלולרית נכונה המחקר יגלה זאת בסיכוי של 90% (איך קוראים להסתברות זאת?).
- (3) השערות המחקר הן: $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu = \mu_1$. כמו כן נתון שהמשתנה מתפלג נורמלית עם סטיית התקן ידועה σ מעוניינים לבצע מחקר שרמת המובהקות לא תעלה על α והסיכוי לטעות מסוג שני לא יעלה על β . הוכיחו שגודל המדגם הרצוי לכך יהיה:
- $$n \geq \left(\frac{(Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta}) \times \sigma}{\mu_0 - \mu_1} \right)^2$$

תשובות סופיות:

- (1) 41.
- (2) 78.
- (3) שאלת הוכחה.

מובהקות תוצאה – אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסייה ידועה):

רקע:

דרך נוספת להגיע להכרעות שלא דרך כלל הכרעה, היא דרך חישוב מובהקות התוצאה:

באמצעות תוצאות המדגם מחשבים את מובהקות התוצאה שמסומן ב- p_v . את רמת המובהקות החוקר קובע מראש לעומת זאת, את מובהקות התוצאה החוקר יוכל לחשב רק אחרי שיהיו לו את התוצאות. המסקנה של המחקר תקבע לפי העיקרון הבא: אם $p_v \leq \alpha$, דוחים את H_0 . מובהקות התוצאה זה הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = P_{H_0}$.

אם ההשערה היא דו צדדית:

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = 2P_{H_0}$.

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

שערת האפס: השערה אלטרנטיבה:		$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	
1. σ ידועה		תנאים:	
2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול		p-value	
$P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x})$	$P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x})$	אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x}) \Leftarrow \bar{x} > \mu_0$ אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x}) \Leftarrow \bar{x} < \mu_0$	

כאשר בהנחת השערת האפס: $Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, $\bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

דוגמה:

המשקל הממוצע של מתגייסים לצבא לפני 20 שנה היה 65 ק"ג. מחקר מעוניין לבדוק האם כיום המשקל הממוצע של מתגייסים גבוה יותר. נניח שמשקל המתגייסים מתפלג נורמאלי עם סטיית תקן של 12 ק"ג. במדגם של 16 מתגייסים התקבל משקל ממוצע של 71 ק"ג.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה המסקנה אם רמת המובהקות היא 5% ואם רמת המובהקות היא 1%?

פתרון:

א. אוכלוסייה: המתגייסים לצבא כיום.

משתנה: X = משקל בק"ג.

פרמטר: μ .

השערות:
 $H_0: \mu = 65$
 $H_1: \mu > 65$

תנאים:

1. $X \sim N$.

2. $\sigma = 12$.

תוצאות מדגם:

$$n = 16$$

$$\bar{X} = 71$$

$$P_V = P_{H_0} \left(\begin{array}{c} \text{לתוצאות} \\ \text{המדגם} \\ \text{וקיצוני} \end{array} \right) = P_{H_0} (\bar{X} \geq 71) = 1 - \phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{71 - 65}{\frac{12}{\sqrt{16}}} = 2$$

$$\alpha_{\min} = 0.0228$$

שאלות:

- (1) להלן השערות של מחקר: $H_0: \mu = 70$, $H_1: \mu > 70$. המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית עם סטיית תקן 20. במדגם מאותה אוכלוסייה התקבלו התוצאות הבאות: $n = 100$, $\bar{x} = 74$. מהי מובהקות התוצאה?
- (2) השכר הממוצע במשק בשנת 2012 היה 8800 ₪ עם סטיית תקן 2000. במדגם שנעשה אתמול על 100 עובדים התקבל שכר ממוצע 9500 ₪. מטרת המחקר היא לבדוק האם כיום חלה עליה בשכר. עבור אילו רמות מובהקות שיבחר החוקר יוחלט שחלה עליה בשכר הממוצע במשק?
- (3) אדם חושד שחברת ממתקים לא עומדת בהתחייבויותיה, ומשקלו של חטיף מסוים אותו הוא קונה מדי בוקר נמוך מ-100 גרם. חברת הממתקים טוענת מצידה שהיא אכן עומדת בהתחייבויותיה. ידוע כי סטיית התקן של משקל החטיף היא 12 גרם. האדם מתכוון לשקול 100 חפיסות חטיפים ולאחר מכן להגיע להחלטה. לאחר הבדיקה הוא קיבל משקל הממוצע של 98.5 גרם.
 - א. רשמו את השערות המחקר.
 - ב. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה דוחים את השערת האפס?
 - ג. מהי רמת המובהקות המקסימלית עבורה נקבל את השערת האפס?
 - ד. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5?
- (4) מכונה לחיתוך מוטות במפעל חותכת מוטות באורך שמתפלג נורמלית עם תוחלת אליה כוונה המכונה וסטיית תקן 2 ס"מ. ביום מסוים כוונה המכונה לחתוך מוטות באורך 80 ס"מ. אחראי האיכות מעוניין לבדוק האם המכונה מכוילת. לצורך כך נדגמו מקו הייצור 16 מוטות שנחתכו אורכן הממוצע היה 81.7 ס"מ.
 - א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה נכריע שהמכונה לא מכוילת?
 - ב. אם נוסיף עוד תצפית שערכה יהיה 82 ס"מ, כיצד הדבר ישפיע על התשובה של הסעיף הקודם?
 - ג. הכרע ברמת מובהקות של 5% האם המכונה מכוילת.
- (5) אם מקבלים בחישובים אלפא מינימלית (P value) קטנה מאד, סביר להניח כי החוקר ידחה את השערת האפס בקלות. נכון/לא נכון? נמק.

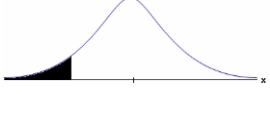
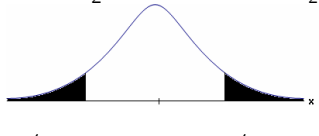
- (6) בבדיקת השערות התקבל שה- $p\text{-value} = 0.02$. מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 1%? בחרו בתשובה הנכונה.
- א. יקבל את השערת האפס בכל מקרה.
 - ב. ידחה את השערת האפס מקרה.
 - ג. ידחה את השערת האפס רק אם המבחן הנו דו צדדי.
 - ד. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.
- (7) מובהקות התוצאה (PV) היא גם (בחרו בתשובה הנכונה):
- א. רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.
 - ב. רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.
 - ג. רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר שטרם קיבל את תוצאות המחקר.
 - ד. רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.
- (8) בבדיקת השערות מסוימת התקבל: $p\text{ value} = 0.0254$ לכן (בחרו בתשובה הנכונה):
- א. ברמת מובהקות של 0.01 אך לא של 0.05 נדחה את H_0 .
 - ב. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 לא נדחה את H_0 .
 - ג. ברמת מובהקות של 0.05 אך לא של 0.01 נדחה את H_0 .
 - ד. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 נדחה את H_0 .

תשובות סופיות:

- (1) 0.0228.
- (2) עבור כל רמת מובהקות סבירה.
- (3) א. $H_0: \mu = 100$
 $H_1: \mu < 100$
 ב. 0.1056 ג. 0.1056.
- ד. נכריע שיש עמידה בהתחייבות של החברה.
- (4) א. 0.0006 ב. יקטן. ג. נכריע שאין כיול.
- (5) נכון.
- (6) א'.
- (7) א'.
- (8) ג'.

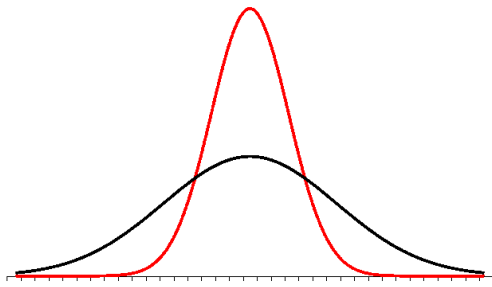
בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסייה לא ידועה:

רקע:

השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$
תנאים:	1. σ אינה ידועה 2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0 :	$t_{\bar{x}} > t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $t_{1-\alpha, n-1}$ - דוחים את H_0	$t_{\bar{x}} < -t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $-t_{1-\alpha, n-1}$ - דוחים את H_0	$t_{\bar{x}} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$ או $t_{\bar{x}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$  $-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ - דוחים את H_0
חלופה לכלל ההכרעה: נדחה H_0 אם מתקיים:	$\bar{X} > \mu_0 + t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} < \mu_0 - t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$

$$. t_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} : \text{סטטיסטי המבחן}$$

$$. S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$



התפלגות T:

הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים. התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש.

דרגות החופש הן: $df = n - 1$.

ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה. כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מפעל קיבל הזמנה לייצור משטחים בעובי של 0.1 ס"מ. כדי לבדוק האם המפעל עומד בדרישה נדגמו 10 משטחים ונמצא שהעובי הממוצע הוא 0.104 עם אומדן לסטיית תקן 0.002 ס"מ.

א. מהן השערות המחקר?

ב. מה ההנחה הדרושה לצורך פתרון?

ג. בדוק ברמת מובהקות של 5%.

שאלות:

(1) משך זמן ההחלמה בלקיחת אנטיביוטיקה מסוימת הוא 120 שעות בממוצע עם סטיית תקן לא ידועה. מעוניינים לבדוק האם אנטיביוטיקה אחרת מקטינה את משך זמן ההחלמה. במדגם של 5 חולים שלקחו את האנטיביוטיקה האחרת התקבלו זמני ההחלמה הבאים: 90, 95, 100, 80, 125 שעות. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%. מהי ההנחה הדרושה לצורך הפתרון?

(2) משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום היוולדם בישראל 3300 גר'. משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון. להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$$n = 20$$

$$\bar{x} = 3120$$

$$S = 280$$

מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5% מה יש להניח לצורך פתרון?

(3) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמלית. בארה"ב ממוצע הציונים הוא 100. במדגם שנעשה על 23 נבחנים ישראלים, התקבל ממוצע ציונים 104.5 וסטיית התקן המדגמית 16. האם בישראל ממוצע הציונים שונה מארה"ב? הסיקו ברמת מובהקות של 5%.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750$$

$$\sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

נתון שההתפלגות היא נורמלית.

בדוק ברמת מובהקות של 5% האם התוחלת של ההתפלגות שונה מ-80.

- (5) ליאור ורוני העלו את אותן השערות על ממוצע האוכלוסייה. כמו כן הם התבססו על אותן תוצאות של מדגם. ליאור השתמש בטבלה של התפלגות Z . רוני השתמשה בטבלה של התפלגות t . מה נוכל לומר בנוגע להחלטת המחקר שלהם? בחר בתשובה הנכונה.
- אם ליאור ידחה את השערת האפס אז גם בהכרח רוני.
 - אם רוני תדחה את השערת האפס אז גם בהכרח ליאור.
 - שני החוקרים בהכרח יגיעו לאותה מסקנה.
 - לא ניתן לדעת על היחס בין דחיית השערת האפס של שני החוקרים.

- (6) נתון ש: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ כמו כן נתונות ההשערות הבאות: $H_0: \mu = \mu_0$. $H_1: \mu < \mu_0$. חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות. σ^2 לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5% לאחר מכן כדי לחזק את קביעתו הוא דגם עוד 5 תצפיות ושקלל את תוצאות אלה גם למדגם כך שכלל עכשיו 15 תצפיות. בחר בתשובה הנכונה:
- א. כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.
 - ב. כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.
 - ג. כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

תשובות סופיות:

- (1) נדחה H_0 .
- (2) נדחה H_0 .
- (3) נקבל H_0 .
- (4) נקבל H_0 .
- (5) ב'.
- (6) ג'.

מובהקות תוצאה – אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסייה לא ידועה):

רקע:

נזכיר שהמסקנה של המחקר תיקבע לפי העיקרון הבא: אם $p_v \leq \alpha$ דוחים את H_0 . מובהקות התוצאה היא הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = P_{H_0}$.

אם ההשערה היא דו צדדית:

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני) $p_v = 2P_{H_0}$.

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:		$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$
תנאים:		1. אינה ידועה או 2. מדגם מספיק גדול $X \sim N$		
p-value		אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x}) \Leftarrow \bar{x} > \mu_0$ אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x}) \Leftarrow \bar{x} < \mu_0$	$P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x})$	$P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x})$

$$t_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$

$$d.f = n-1$$

דוגמה:

ממוצע זמן הנסיעה של אדם לעבודה הינו 40 דקות. הוא מעוניין לבדוק דרך חלופית שאמורה להיות יותר מהירה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שבהם הוא נוסע בדרך החלופית. זמני הנסיעה שקיבל בדקות הם: 34, 40, 30, 32, 27. הניחו שזמן הנסיעה מתפלג נורמלי.

- א. רשמו את השערות המחקר.
- ב. מצאו חסמים למובהקות התוצאה.
- ג. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

פתרון:

אוכלוסייה: כלל הנסיעות לעבודה בדרך החלופית.

משתנה: X = זמן נסיעה בדקות.

תנאים: $X \sim N$.

פרמטר: μ .

א. השערות:
 $H_0: \mu = 40$
 $H_1: \mu < 40$

ב. תוצאות המדגם:

$$n = 5, \bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{34 + 40 + \dots}{5} = 32.6$$

$$S^2 = \frac{\sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} = \frac{34^2 + 40^2 - \dots - 5 \cdot 32.6^2}{5-1} = 23.4$$

$$S = \sqrt{23.4}$$

$$t_{\bar{X}} = \frac{\frac{\bar{X} - \mu_0}{S}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{32.6 - 40}{\frac{4.88}{\sqrt{5}}} = -3.39$$

$$P_V = P_{H_0} = (\bar{X} \leq 32.6) = P(t \leq -3.39)$$

$$d.f = 5 - 1 = 4$$

$$1\% < P_V < 2.5\%$$

$P_V < \alpha = 0.05$, לכן דוחים את H_0 .

מסקנה: בר"מ של 5% נכריע שהדרך החלופית מהירה יותר.

שאלות:

(1) קו ייצור אריזות סוכר נארזות כך שהמשקל הממוצע של אריזות הסוכר צריך להיות אחד קילוגרם. בכל יום דוגמים מקו הייצור 5 אריזות במטרה לבדוק האם קו הייצור תקין. בבדיקה דגמו 5 אריזות סוכר ולהלן משקלן בגרמים: 1024, 1008, 1005, 996, 997.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מהי מובהקות התוצאה? הצג חסמים.

ג. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

(2) חוקר בדק את הטענה כי פועלים העובדים במשמרת לילה איטיים יותר מפועלים העובדים ביום. ידוע כי משך הזמן הממוצע הדרוש לייצר מוצר מסוים ביום הוא 6 שעות. במדגם מיקרי של 25 פועלים שעבדו במשמרת לילה נמצא כי הזמן הממוצע לייצר אותו מוצר הוא 7 שעות עם סטית תקן של 3 שעות. מהי ה- α המינימלית שלפיה ניתן להחליט שאכן העובדים במשמרת לילה איטיים יותר?

(3) הגובה של מתגייסים לצה"ל מתפלג נורמלית. במדגם של 25 מתגייסים מדדו את הגבהים שלהם בס"מ והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\bar{x} = 176.2, \sum (x_i - \bar{x})^2 = 2832$$

מטרת המחקר היא לבדוק האם תוחלת הגבהים של המתגייסים גבוה מ-174 ס"מ באופן מובהק.

מהי בקרוב מובהקות התוצאה ועל פיה מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 6%?

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \begin{array}{ll} \text{א.} & H_0: \mu = 1000 \\ & H_1: \mu \neq 1000 \\ \text{ב.} & 20\% \leq P_v \leq 50\% \end{array}$$

ג. ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקו הייצור אינו תקין.

(2) 10%.

(3) 1.01, נקבל את H_0 .

סטטיסטיקה ב

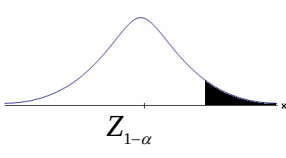
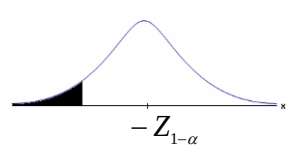
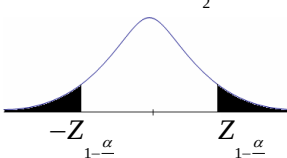
פרק 5 - בדיקת השערות על פרופורציה

תוכן העניינים

40	1. התהליך
43	2. סיכוי לטעויות ועוצמה
47	3. קביעת גודל מדגם
49	4. מובהקות התוצאה - אלפא מינימלית

התהליך:

רקע:

השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:	$H_0: p = p_0$ $H_1: p > p_0$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p < p_0$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p \neq p_0$
תנאים:	$np_0 \geq 5 \text{ \& } n(1-p_0) \geq 5$		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0 :	$Z_{\hat{p}} > Z_{1-\alpha}$  -דוחים את H_0	$Z_{\hat{p}} < -Z_{1-\alpha}$  -דוחים את H_0	או $Z_{\hat{p}} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{\hat{p}} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  -דוחים את H_0

סטטיסטי המבחן:
$$Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

כלל ההכרעה – אזור הדחייה של H_0 :		
$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} < p_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ $\hat{p} < p_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בחודש ינואר השנה פורסם שאחוז האבטלה במשק הוא 8% במדגם עכשווי התקבל שמתוך 200 אנשים 6.5% מובטלים.
בדקו ברמת מובהקות של 5% האם כיום אחוז האבטלה הוא כמו בתחילת השנה.

שאלות:

- (1) במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה מסוימת היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. ברמת מובהקות של 5% האם השנה הקשו על תנאי הקבלה?
- (2) במדגם של 300 אזרחים 57% מתנגדים להצעת חוק מסוימת. לאור נתונים אלה האם רוב האזרחים מתנגדים להצעת החוק? בדקו ברמת מובהקות של 10%.
- (3) הטילו מטבע 50 פעמים וקיבלו 28 פעמים עץ. האם המטבע הוגן ברמת מובהקות של 5%?
- (4) קפיטריה במכללה מסוימת מעריכה כי אחוז הסטודנטים שקונים קפה בקפיטריה הינו 20%. נערך סקר אשר כלל 200 סטודנטים. התברר כי 33 מהם רוכשים קפה בקפיטריה. מטרת הסקר הייתה לבדוק את אמיתות הערכה של הקפיטריה.
 - א. רשמו את ההשערות.
 - ב. בדקו את ההשערות ברמת מובהקות של 10%.
 - ג. מה תהיה המסקנה אם נקטין את רמת המובהקות?
- (5) חבר כנסת רוצה להעביר חוק. לצורך כך הוא דוגם 400 אזרחים במטרה לבדוק האם רוב האזרחים תומכים בחוק. במדגם התקבל ש-276 אזרחים תומכים בחוק.
 - א. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
 - ב. האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה אם רמת המובהקות תהיה גדולה יותר? הסבירו.
- (6) שני חוקרים בדקו את ההשערות הבאות: $H_0: p = p_0$, $H_1: p > p_0$. חוקר א' השתמש ברמת מובהקות α_1 וחוקר ב' ברמת מובהקות α_2 החוקר הראשון דחה את H_0 ואילו החוקר השני קיבל את H_0 . שניהם התבססו על אותם תוצאות של מדגם. בחר בתשובה הנכונה:
 - א. $\alpha_1 = \alpha_2$.
 - ב. $\alpha_1 > \alpha_2$.
 - ג. $\alpha_1 < \alpha_2$.
 - ד. המצב המתואר לא אפשרי.

תשובות סופיות:

- (1) נדחה H_0 .
- (2) נדחה H_0 .
- (3) נקבל H_0 .
- (4) א. $H_0: p = 0.2$
 ב. $H_1: p \neq 0.2$
 ג. המסקנה לא תשתנה.
- (5) א. נדחה H_0 .
 ב. המסקנה לא תשתנה.
- (6) ג'.

סיכוי לטעויות ועוצמה:

רקע:

הגדרת הסתברויות:

הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 (רמת מובהקות):

$$\alpha = P(H_0 \text{ נדחתה} \mid H_0 \text{ נכונה}) = P_{H_0}(H_0 \text{ נדחתה})$$

הסיכוי לבצע טעות מסוג 2:

$$\beta = P(H_0 \text{ נקבל} \mid H_1 \text{ נכונה}) = P_{H_1}(H_0 \text{ נקבל})$$

רמת בטחון:

$$(1-\alpha) = P(H_0 \text{ נקבל} \mid H_0 \text{ נכונה}) = P_{H_0}(H_0 \text{ נקבל})$$

עוצמה:

$$\pi = (1-\beta) = P(H_1 \text{ נדחתה} \mid H_1 \text{ נכונה}) = P_{H_1}(H_1 \text{ נדחתה})$$

מציאות	הכרעה		
		H_0	H_1
	H_0	טעות מסוג 1	אין טעות
	H_1	טעות מסוג 2	אין טעות

התהליך לחישוב סיכוי לטעות מסוג שני:

השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:	$H_0: p = p_0$ $H_1: p \neq p_0$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p < p_0$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p > p_0$
תנאים:	$np_0 \geq 5 \text{ \& } n(1-p_0) \geq 5$		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0 :	$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} < p_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ או $\hat{p} < p_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$

חישוב β :
$P_{H_1} \left(\hat{p} < p_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right)$
$P_{H_1} \left(p_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} < \hat{p} < p_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right)$
$P_{H_1} \left(\hat{p} > p_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right)$

כאשר: $\hat{p} \sim N \left(p, \frac{p(1-p)}{n} \right)$

והתקנון: $Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

רופאי שיניים טוענים שיותר ממחצית האוכלוסייה הבוגרת בארץ אינם מבקרים אצל רופא שיניים באופן קבוע, כנדרש. כדי לבדוק טענה זו, נערך סקר בקרב 150 אנשים בוגרים.

א. רשמו את ההשערות וכלל הכרעה ברמת מובהקות של 10%.

ב. מהי עוצמת המבחן אם מסתבר ש 60% מהאוכלוסייה אינם מבקרים אצל רופא שיניים באופן קבוע.

שאלות:

- (1) משרד הבריאות פרסם ש-10% מתושבי המדינה סובלים ממחלת האסטמה. מחקר דורש לבדוק האם בחיפה, בגלל זיהום האוויר, שיעור הסובלים מאסטמה גבוה יותר. לצורך המחקר נבדקו 260 מתושבי חיפה.
 - א. רשמו את השערות המחקר, וצרו מבחן ברמת מובהקות של 5% לבדיקתן.
 - ב. מהי עצמת המבחן של סעיף א' בהנחה ובחיפה 16% מהתושבים סובלים מאסטמה?
 - ג. כיצד תשנה התשובה לסעיף ב' אם מסתבר שבחיפה 18% סובלים מאסטמה?
 - ד. בהמשך לסעיף א' האם נכון לומר שבהסתברות של 5% ההשערה שבחיפה 10% מהתושבים סובלים מאסטמה אינה נכונה?
- (2) אחוז הסובלים מתופעות הלוואי מתרופה מסוימת הוא 15%. חברת תרופות טוענת שפיתחה תרופה שאמורה לצמצם את אחוז הסובלים מתופעות לוואי. לצורך בדיקת הטענה הוחלט לבצע מחקר שיכלול 120 חולים שיקבלו את התרופה הנבדקת.
 - נניח שהתרופה נבדקת אכן מורידה את פרופורציות הסובלים מתופעות הלוואי ל-10%, מהי עצמת המבחן עבור רמת מובהקות של 5%?
- (3) בעיר מסוימת היו 20% אקדמאים. בעקבות פתיחת מכללה בעיר לפני כמה שנים מעוניינים לבדוק האם אחוז האקדמאים גדל. מעוניינים שהמחקר יכלול 200 אנשים והוא יהיה ברמת מובהקות של 5%.
 - א. חשבו את הסיכוי לבצע טעות מסוג שני בהנחה והיום יש 28% אקדמאים.
 - ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם תשתנה אם נגדיל את רמת המובהקות?
- (4) מעוניינים לבדוק האם בפקולטה מסוימת ישנה העדפה לגברים. הוחלט לדגום 200 מתקבלים ועל סמך מספר הבנים לקבוע אם טענת המחקר מתקבלת. חוקר א' קבע רמת מובהקות של 5% וחוקר ב' החליט לקבל את טענת המחקר אם במדגם יהיו לפחות 120 בנים. למי מבין החוקרים רמת מובהקות גדולה יותר?
- (5) חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן (בחרו בתשובה הנכונה):
 - א. השערת האפס נכונה.
 - ב. השערת האפס נדחתה.
 - ג. השערת האפס לא נדחתה.
 - ד. אף אחת מהתשובות לא נכונה בהכרח.
- (6) קבעו אם הטענה הבאה נכונה: בבדיקת השערות לא ניתן לבצע בו זמנית טעות מסוג ראשון וטעות מסוג שני.

תשובות סופיות:

- (1) א. $H_0 : p = 0.1$
 ב. 0.9015 ג. תגדל. ד. טענה לא נכונה.
 $H_1 : p > 0.1$
- (2) 0.4404
- (3) א. 0.1446 ב. תקטן.
- (4) חוקר א'.
- (5) ג'.
- (6) נכונה.

קביעת גודל מדגם:

רקע:

השערות המחקר הן: $H_0: p = p_0$, $H_1: p = p_1$: מעוניינים לבצע מחקר שרמת המובהקות לא תעלה על α והסיכוי לטעות מסוג שני לא יעלה על β .

הנוסחה הבאה נותנת את גודל המדגם הרצוי:

$$n \geq \left(\frac{Z_{1-\alpha} \sqrt{p_0 q_0} + Z_{1-\beta} \sqrt{p_1 q_1}}{p_0 - p_1} \right)^2$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

רוצים לבדוק האם אחוז האנשים השוהים בשמש ללא הגנה ירד בעקבות הפרסומת על נזקי השמש.
 בעבר 60% מהאוכלוסייה שהתה בשמש ללא הגנה. מה גודל המדגם המינימלי שיש לקחת כדי לבדוק שהאחוז הנ"ל ירד ל-48% אם מעוניינים שהסיכוי לטעות מסוג ראשון יהיה 5% והסיכוי לטעות מסוג שני יהיה 1%?

שאלות:

- (1) משרד התמ"ת פרסם שאחוז האבטלה במשק היום עומד על 8%. לעומתו, משרד הפנים טוען שחלה עלייה בשיעור האבטלה עד לכדי 11%. כדי לבדוק מי מבניהם צודק, מה צריך להיות גודל המדגם שיענה על שני התנאים הבאים:
- א. אם משרד התמ"ת צודק, נדחה את טענתו בסיכוי של 10%.
- ב. אם משרד הפנים צודק, נדחה את טענתו בסיכוי של 4%.
- (2) מפעיל קזינו מפרסם שהסיכוי לזכות במכונת מזל הינו 0.42. אדם טוען שהסיכויים לזכות במשחק נמוכים יותר. כמה פעמים יש לשחק את המשחק כדי שאם טענת מפעיל הקזינו נכונה נקבל את טענת האדם בסיכוי של 1% ואם במציאות הסיכוי לזכות במכונה הוא 0.3 נקבל את מפעיל הקזינו בסיכוי של 8%?

תשובות סופיות:

(1) .891

(2) .224

מובהקות התוצאה – אלפא מינימלית:

רקע:

דרך נוספת להגיע להכרעות שלא דרך כלל הכרעה, היא דרך חישוב מובהקות התוצאה: באמצעות תוצאות המדגם מחשבים את מובהקות התוצאה שמסומן ב- p_v . את רמת המובהקות החוקר קובע מראש לעומת זאת, את מובהקות התוצאה החוקר יוכל לחשב רק אחרי שיהיו לו את התוצאות. המסקנה של המחקר תקבע לפי העיקרון הבא:

אם $p_v \leq \alpha$ דוחים את H_0 .

מובהקות התוצאה זה הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני $p_v = P_{H_0}$.

אם ההשערה היא דו צדדית:

לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני $p_v = 2P_{H_0}$.

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p > p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p < p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p \neq p_0$
תנאים:	$np_0 \geq 5 \& n(1-p_0) \geq 5$		
p-value	$P_{H_0}(\hat{p} \geq \hat{p})$	$P_{H_0}(\hat{p} \leq \hat{p})$	אם $2 \cdot P_{H_0}(\hat{p} \geq \hat{p}) \Leftarrow \hat{p} > p_0$ אם $2 \cdot P_{H_0}(\hat{p} \leq \hat{p}) \Leftarrow \hat{p} < p_0$

כאשר בהנחת השערת האפס: $\hat{P} \sim N\left(p_0, \frac{p_0(1-p_0)}{n}\right)$

התקנון: $Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

ישנה טענה שיש הבדל בין אחוז הבנים ואחוז הבנות הפונים ללמוד להנדסאי מחשבים. לשם כך נלקח מדגם מקרי של 200 תלמידים הלומדים מחשבים והתברר כי 112 מהם בנים.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

שאלות:

- (1) במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה מסוימת היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. רוצים לבדוק האם השנה הקשו על תנאי הקבלה.
א. מהי מובהקות התוצאה?
ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 1% וברמת מובהקות של 5%?
- (2) נהוג לחשוב ש-60% מהילדים בגיל שלוש קמים מהמיטה במהלך הלילה לפחות פעם אחת. ישנה טענה שללא שנת צהריים פחות מ-60% מהילדים בגיל זה יקומו לפחות פעם אחת במהלך הלילה. נדגמו 80 ילדים בגיל 3 אשר אינם ישנים בצהריים מתוכם התקבל ש-41 קמו במהלך הלילה.
א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה תתקבל הטענה במחקר?
ב. מהי רמת המובהקות המקסימלית עבורה לא תתקבל טענת המחקר?
ג. עבור אילו רמות מובהקות נקבל את טענת המחקר?
ד. מה תהיה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 6%?
- (3) במטרה לבדוק האם מטבע הוא הוגן מטילים אותו 80 פעמים. התקבל ש-60 מההטלות הראו עץ. רשמו את השערות המחקר, חשבו את מובהקות התוצאה והסיקו מסקנה ברמת מובהקות של 5%.
- (4) בבדיקת השערות על פרופורציה התקבל שה- $p\text{-value} = 0.02$.
מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 5%:
(בחרו בתשובה הנכונה)
א. יקבל את השערת האפס
ב. ידחה את השערת האפס.
ג. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.
- (5) קבעו אם הטענה הבאה נכונה:
"במבחן לבדיקת השערות חד-צדדי התקבל ערך $p\text{-value}$ של 3%,
לכן אם היינו מבצעים מבחן דו-צדדי (כאשר יתר הנתונים ללא שינוי),
היינו מקבלים ערך $p\text{-value}$ של 6%".
- (6) במפעל 10% מהעובדים נפגעים לפחות פעם אחת בשנה מתאונות עבודה. לאור זאת, המפעל החליט לצאת בתוכנית לצמצום שיעור הנפגעים. תכנית זו נוסתה על 100 עובדים. מתוכם 12 נפגעו בתאונות עבודה במשך השנה. מהי רמת המובהקות הקטנה ביותר עבורה יוחלט שהתכנית יעילה?

תשובות סופיות:

- (1) א. 0.0455.
 ב. ברמת מובהקות של 1% : לא דוחים את H_0 .
 ברמת מובהקות של 5% : נדחה את H_0 .
- (2) א. 0.0548. ב. 0.0548. ג. מעל 0.0548.
 ד. נכריע לטובת טענת המחקר.
- (3) $p_v = 0$, נדחה את H_0 .
- (4) ב'.
- (5) הטענה נכונה.
- (6) 0.7486.

סטטיסטיקה ב

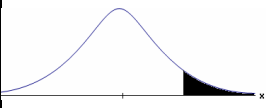
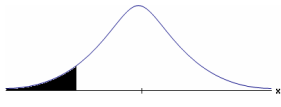
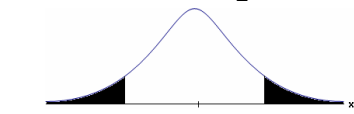
פרק 6 - בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

תוכן העניינים

1. כששונויות האוכלוסיה לא ידועות ומניחים שהן שוות.....53

בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

כששונות האוכלוסייה לא ידועות ומניחים שהן שוות – רקע

השערת האפס: השערה אלטרנטיבית: תנאים:	$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 > c$	$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 < c$	$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 \neq c$
1. מדגמים בלתי תלויים 2. σ_1, σ_2 לא ידועות אך שוות 3. המשתנים בכל אוכלוסייה מתפלגים נורמלית	$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$  $t_{1-\alpha, n_1+n_2-2}$ דוחים את H_0	$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$  $-t_{1-\alpha, n_1+n_2-2}$ דוחים את H_0	$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}$ או $t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}$  $-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}$ דוחים את H_0

$$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - c}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}}$$

סטטיסטי המבחן:

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

השונות המשוקללת:

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

נדחה H_0 אם מתקיים:	
$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$ או $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$
$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$	

דוגמה (פתרון בהקלטה):

חברה המייצרת מוצרי בנייה טוענת שפיתחה סגסוגת (תערובת מתכות) שטמפרטורת ההתכה שלה גבוהה משמעותית מטמפרטורת ההתכה של הסגסוגת לבנייה שמשתמשים בה כיום לבניית בניינים. לצורך בדיקת טענת המחקר נדגמו 10 יחידות של מתכות מהסוג הישן ו-12 יחידות של מתכות מהסוג החדש. להלן תוצאות המדגם:

טמפרטורת ההתכה הממוצעת במתכת הישנה 1170 מעלות עם אומד חסר הטיה לשונות $S^2 = 200$.

טמפרטורת ההתכה הממוצעת במתכת החדשה 1317 מעלות עם אומד חסר הטיה לשונות $S^2 = 260$.

נניח לצורך פתרון שטמפרטורת ההתכה מתפלגת נורמאלית עם אותה שונות במתכות השונות. בדקו ברמת מובהקות של 5%.

שאלות

- (1) להלן נתונים של שטחי דירות מתוך דירות שנבנו בשנת 2012 ובשנת 2013 (במ"ר):

120	94	90	130	95	112	120	2012
	69	74	105	91	82	100	2013

בדקו שבשנת 2013 הייתה ירידה משמעותית בשטחי הדירות לעומת שנת 2012 עבור רמת מובהקות של 5%.
הניחו ששטחי הדירות בכל שנה מתפלגים נורמלית עם אותה שונות.

- (2) נדגמו 15 ישראלים ו-15 אמריקאים. כל הנדגמים נגשו למבחן IQ. להלן תוצאות המדגם:

המדינה	ישראל	ארה"ב
גודל המדגם	15	15
סכום הציונים	1560	1470
סכום ריבועי הציונים	165,390	147,560

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל של נקודה בין ישראלים לאמריקאים מבחינת ממוצע הציונים במבחן ה-IQ לטובת ישראל.
רשמו את כל ההנחות הדרושות לצורך פתרון התרגיל.

- (3) להלן תוצאות מדגם הבדק אורך חיים של נורות מסוג W60 ומסוג W100. אורך החיים נמדד בשעות.

הקבוצה	60W	100W
$\bar{X}$	1007	956
S	80	72
n	13	15

- א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W60 דולקות בממוצע יותר מאשר נורות מסוג W100. רשמו את כל ההנחות הדרושות לפתרון.
ב. עבור איזו רמת מובהקות ניתן לקבוע שנורות מסוג W60 דולקות בממוצע יותר מאשר נורות מסוג 100?
ג. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W60 דולקות יותר מ 1000 שעות. רשמו את כל ההנחות הדרושות.

תשובות סופיות

- (1) נדחה את H_0 .
- (2) הנחות:
 1. סטיות התקן שוות.
 2. המשתנים מתפלגים נורמלית.נקבל את H_0 .
- (3) א. נדחה את H_0 . ב. רמת מובהקות של לפחות 5%.
- ג. לא נדחה את H_0 .

סטטיסטיקה ב

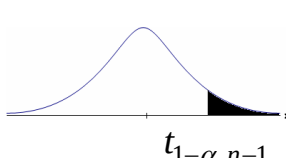
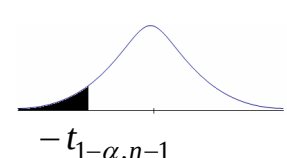
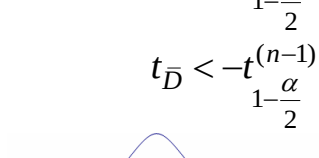
פרק 7 - בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגמים מזווגים

תוכן העניינים

1. בדיקת השערות למדגמים מזווגים 57

בדיקת השערות על תוחלת ההפרשים במדגמים מזווגים (תלויים)

בדיקת השערות למדגמים מזווגים – רקע

השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:	$H_0: \mu_D = C$ $H_1: \mu_D > C$	$H_0: \mu_D = C$ $H_1: \mu_D < C$	$H_0: \mu_D = C$ $H_1: \mu_D \neq C$
תנאים:	1. σ_D אינה ידועה 2. $D \sim N$ או מדגם מספיק גדול		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של H_0 :	$t_{\bar{D}} > t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $t_{1-\alpha, n-1}$ - דוחים את H_0	$t_{\bar{D}} < -t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $-t_{1-\alpha, n-1}$ - דוחים את H_0	$t_{\bar{D}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$ או $t_{\bar{D}} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$  $-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ - דוחים את H_0
חלופה לכלל הכרעה: נדחה H_0 אם מתקיים:	$\bar{D} > C + t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$	$\bar{D} < C - t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$	$\bar{D} > C + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$, או $\bar{D} < C - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$

$$S_D^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n D_i^2 - n\bar{D}^2}{n-1}, \quad t_{\bar{D}} = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}}$$

סטטיסטי המבחן:

דוגמה (פתרון בהקלטה):

חברה שיווקית מעוניינת לבדוק את טענת רשת השיווק "מגה בעיר" הטוענת שמחירה נמוכים מהמחירים מרשת השיווק "שופרסל". לצורך הבדיקה נבחרו באקראי 4 מוצרים שונים. המחירים נבדקו בשתי הרשתות. להלן המחירים:

המוצר / רשת	מגה בעיר	שופרסל
שמפו	17	18
ג'ל כביסה	48	57
עוגת גבינה	35	35
לחם	12	10
קפה נמס	49	47
בקבוק יין	113	142
גבינה בולגרית	20	26

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמאלית, בדקו ברמת מובהקות של 5% את טענת רשת "מגה בעיר".

שאלות

- (1) במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין חברת X לחברת Y מבחינת המחירים לשיחות בינ"ל. נדגמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. להלן התוצאות:

חברה/מדינה	ארה"ב	קנדה	הולנד	פולין	מצרים	סין	יפן
X	1.5	2.1	2.2	3	3.5	3.2	4.2
Y	1.4	2	1.9	3.1	3.2	3.2	4.2

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית בכל חברה, בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין החברות מבחינת המחירים במוצא?

- (2) מכון המכין לפסיכומטרי טוען שהוא מעלה את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות. 8 נבחנים נבדקו לפני ואחרי שהם למדו במכון. להלן התוצאות שהתקבלו:

לפני	506	470	420	640	670	390	500	590
אחרי	570	540	430	610	680	510	520	580

מה מסקנתכם ברמת מובהקות 5%? הניחו שציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית.

- (3) נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'. להלן הציונים שלהם בסמסטר א' ו- ב':

סטטיסטיקה א'	74	68	90	75	82
סטטיסטיקה ב'	80	84	87	76	100

פורסם שתלמידים שמסיימים את סמסטר ב' משפרים במוצא את הציונים ב-5 נקודות לעומת סמסטר א'. הניחו שהציונים מתפלגים נורמלית.

- א. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שהשיפור הוא יותר מ-5 נקודות?
 ב. על סמך הסעיף הקודם, מהי רמת המובהקות המינימלית להכרעה שהשיפור הוא יותר מ-5 נקודות?
 ג. לאור זאת, מה המסקנה ברמת מובהקות של 10%?

- (4) לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה. לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים נורמלית ללא ידיעת השונות האמתית. המבחן שיש לבצע כאן הוא:

- א. מבחן Z למדגם יחיד.
 ב. מבחן T למדגם יחיד.
 ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
 ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

(5) בתחנת טיפת חלב מסוימת יש שני מכשירי שקילה. על מנת להשוות בין שני המשקלים נדגמו 4 תינוקות. כל תינוק בן חודשיים נשקל בכל אחד מהמשקלים. להלן תוצאות השקילה (בק"ג):

משקל במכשיר 1	2.5	0.7	9.6	4.5
משקל במכשיר 2	0.5	1.7	6.9	3.5

נניח שהמשקלים מתפלגים נורמלית, המבחן שיש לבצע כאן הוא:

- א. מבחן Z למדגם יחיד.
- ב. מבחן T למדגם יחיד.
- ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

(6) כדי להשוות בין שני אצנים נדגמו 5 תוצאות מריצת 100 מטר של כל אצן. זמני הריצה נרשמו ויש להניח שמתפלגים נורמלית. המטרה להשוות בין האצנים. המבחן שיש לבצע כאן הוא:

- א. מבחן Z למדגם יחיד.
- ב. מבחן T למדגם יחיד.
- ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

תשובות סופיות

- (1) לא נדחה H_0 .
- (2) לא נדחה H_0 .
- (3) א. $0.25 \leq p \leq 0.5$ ב. 0.5 ג. לא נדחה H_0 .
- (4) ד'.
- (5) ד'.
- (6) ג'.

סטטיסטיקה ב

פרק 8 - שאלות מסכמות בבדיקת השערות

תוכן העניינים

1. שאלות פתוחות מסכמות 61
2. שאלות רב ברירה (אמריקאיות) 64

שאלות מסכמות בבדיקת השערות על פרמטרים

שאלות

(1) שני חוקרים נתבקשו לבדוק את ההשערות הבאות: $H_0: \mu = 520$, $H_1: \mu > 520$.

כל חוקר בדק מדגם של 225 נחקרים. ידוע ש- $\sigma = 20$.

חוקר א' קבע את כלל ההכרעה לפי $\alpha = 0.05$.

חוקר ב' מחליט לדחות H_0 אם $\bar{X} > 522$.

א. למי מהחוקרים הסתברות לטעות מסוג ראשון קטנה יותר?

ב. מהי ההסתברות לטעות מסוג שני של חוקר ב' עבור $\mu_1 = 525$.

ג. הסבר ללא חישוב נוסף, האם ההסתברות לטעות מסוג שני עבור

$\mu_1 = 525$, של חוקר א' שווה/קטנה/גדולה לזו של חוקר ב'.

ד. חוקר א' קיבל במדגם שלו $\bar{X} = 523$. מהי מסקנתו?

(2) ידוע כי תוחלת מספר הלייקים היומי של דנה היא 12 עם סטיית תקן 5.

דני טוען שהוא יותר פופולארי מדנה בכך שהוא מקבל יותר לייקים מדנה

ביום. על-מנת לבדוק זאת ספר דני כמה לייקים הוא קיבל בכל יום במהלך 7

שבועות (כלומר, ב-49 ימים) וקיבל סך-הכול 637 לייקים. נניח כי סטיית

התקן של מספר הלייקים שדני מקבל ביום זהה לסטיית התקן של דנה.

א. מהי רמת המובהקות שכדאי לדני לדרוש, כדי שדנה תשתכנע בצדקת

טענתו (שדני פופולרי יותר בכך שהוא מקבל יותר לייקים מדנה ביום).

ב. אם דני משער שתוחלת מספר ה"לייקים" שהוא מקבל ביום היא 14

וקובע רמת מובהקות 2.5%, מהי עוצמת המבחן של דני?

מוצר / רשת	A	B
1	5	5
2	4	5
3	5	3
4	7	4

(3) ברצוננו להשוות בין רשתות A לבין B. לשם כך בחרנו 4 מוצרים,

ובדקנו את מחיריהם בשתי הרשתות. להלן התוצאות:

הניחו כי המחירים מתפלגים נורמלית.

אם יש הנחות נוספות כדי לבצע את המבחן הפרמטרי רשמו אותן.

א. בדקו האם קיים הבדל בין הרשתות מבחינת תוחלת המחירים. רמת

מובהקות של 5%.

ב. חזרו על הסעיף הקודם בהנחה ונבחרו בכל רשת מוצרים באקראי ולא

בהכרח אותם מוצרים.

- 4) במטרה לבדוק האם סטודנטים הלומדים במכללות משקיעים יותר זמן ללימודים מאשר סטודנטים באוניברסיטאות נדגמו 12 סטודנטים ובדקו לכל סטודנט את הזמן שהוא משקיע ביום ללימודים. הזמנים נמדדו בדקות:

סטודנטים באוניברסיטאות	176	156	189	171	140	180
סטודנטים במכללות	180	190	191	186	204	150

- א. נסחו את ההשערות ובדוק אותן ברמת מובהקות של 5%. רשום את כלל ההכרעה ואת ההנחות הדרושות לביצוע המבחן הפרמטרי.
- ב. חשבו את p-value.
- ג. ישנה טענה שממוצע זמן ההשקעה בלימודים במכללות הוא 3.5 שעות ביום. בדוק את הטענה כאשר רמת המובהקות הינה 5%.

- 5) בשנת 2000 ל-60% היה מדיח כלים בבית. מחקר רוצה לבדוק האם כיום פרופורציית המשפחות עם מדיח כלים עלה. הוחלט לבצע מדגם אקראי של 150 משפחות.

- א. רשמו את השערות המחקר.
- ב. מה היא מסקנת המחקר מובהקות של 5% אם
- ל-102 משפחות היה מדיח כלים.
- ג. מהי הטעות האפשרית במסקנה מהסעיף הקודם. האם ניתן לדעת את הסתברותה?

גברים	2	0.9	0.7	1.2	1.1
נשים	1.4	1.1	1.9	1.8	1.2

ברמת
במדגם

- 6) נערך מחקר על הקשר בין עישון ויתר לחץ דם. נבדק מדגם מקרי של 200 מעשנים ונמצא כי 30 סבלו מיתר לחץ דם. ידוע שבאוכלוסייה 18% סובלים מיתר לחץ דם.
- א. בדקו ברמת מובהקות 0.1 את ההשערה כי אחוז הסובלים מיתר לחץ דם בקרב המעשנים גדול מאשר כלל האוכלוסייה.
- ב. מהי רמת המובהקות המינימלית לקבלת הטענה שאחוז הסובלים מיתר לחץ דם בקרב המעשנים גדול מאשר כלל האוכלוסייה.
- ג. מהי עצמת המבחן, אם אחוז הסובלים מיתר לחץ דם בקרב אוכלוסיית המעשנים היא בפועל 25%.

- 7) להלן התפלגות מספר הנסיעות לחופשה השנתית במדגם של משפחות ישראליות. בדקו ברמת מובהקות של 5%:

מספר הנסיעות	0	1	2	3	4
מספר המשפחות	84	102	26	20	12

- א. באיטליה משפחות נוסעות בממוצע פעמיים בשנה לחופשה. האם בישראל משפחות נוסעות פחות מאשר באיטליה?
- ב. בהולנד 80% מהמשפחות נוסעות לפחות פעם אחת בשנה לחופשה, האם בישראל אחוז המשפחות שנוסעות לפחות פעם אחת בשנה לחופשה נמוך מאשר בהולנד?

(8) נתון כי: $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 10^2)$.

מעוניינים לבדוק את ההשערות: $H_0: \mu = 40$, $H_1: \mu > 40$.

דגמו 25 תצפיות מהאוכלוסייה והתקבל $\bar{X} = 45$.

א. חשבו את p-value (מובהקות התוצאה).

ב. חזרו על סעיף א אם ההשערה האלטרנטיבית הייתה: $H_1: \mu < 40$.

ג. חזרו על סעיף א אם ההשערה האלטרנטיבית הייתה: $H_1: \mu \neq 40$.

תשובות סופיות

- | | | | |
|---|--------------------|------------------------------------|-----------------|
| (1) א. חוקר א' | ב. 0.0122 | ג. גדלה. | ד. נדחה H_0 . |
| (2) א. לפחות 0.0808 | ב. 0.7995 | | |
| (3) א. לא נדחה H_0 . | ב. לא נדחה H_0 . | | |
| (4) א. לא נדחה H_0 . | ב. בין 5% ל-10%. | ג. נדחה H_0 . | |
| (5) א. $H_0: p = 0.6$
$H_1: p > 0.6$ | ב. נדחה H_0 . | ג. טעות מסוג ראשון בסיכוי של 0.05. | |
| (6) א. לא נדחה H_0 . | ב. 0.8643 | ג. 0.8749. | |
| (7) א. נדחה H_0 . | ב. נדחה H_0 . | | |
| (8) א. 0.0062 | ב. 0.9938 | ג. 0.0124. | |

שאלות סיכום – שאלות רב ברירה על בדיקת השערות

(1) בבדיקת השערה חד-צדדית ימנית ברמת מובהקות $\alpha = 0.01$, נדחתה השערת האפס. מה הייתה המסקנה לו נבדקה אותה ההשערה באמצעות אותם נתונים ברמת מובהקות $\alpha = 0.05$?

- השערת האפס הייתה נדחית.
- השערת האפס לא הייתה נדחית.
- ההשערה המחקרית הייתה נדחית.
- בהעדר נתונים נוספים, לא ניתן לדעת.

(2) על מנת לבדוק האם ההסתברות ללידת בן הינה חצי, נבחר מדגם מקרי של 200 ילדים, ונמצא שישנם 120 בנים. מהן ההשערות האלטרנטיביות להשערת האפס?

א. $H_1: p = 0.5$

ב. $H_1: p = 0.6$

ג. $H_1: p > 0.5$

ד. $H_1: p \neq 0.5$

(3) לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה. לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים נורמאלית ללא ידיעת השונות האמיתית. המבחן שיש לבצע כאן הוא:

- מבחן Z למדגם יחיד.
- מבחן T למדגם יחיד.
- מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- מבחן T למדגמים מזווגים.

(4) כדי לבדוק את הטענה שגברים רווקים שוקלים פחות מגברים נשואים לקח חוקר מדגם מקרי של 4 גברים ומדד את משקלם לפני נישואיהם ולאחר נישואיהם. הנה התוצאות:

מהן ההשערות הנבדקות? (ההפרש חושב $X - Y$)

68	82	93	69	לפני הנישואין - X
71	84	88	80	לאחר הנישואין - Y

א. $H_1: \mu_d < 0, H_0: \mu_d = 0$

ב. $H_1: \mu_x - \mu_y < 0, H_0: \mu_x - \mu_y = 0$

ג. $H_1: \mu_x - \mu_y < 0, H_0: \mu_x - \mu_y = 0$

ד. $H_1: \mu_d > 0, H_0: \mu_d = 0$

(5) חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן :

- השערת האפס נכונה.
- השערת האפס נדחתה.
- השערת האפס לא נדחתה.
- אף אחת מהתשובות לא נכונה בהכרח.

(6) ידוע כי ילד בגיל שנתיים ישן בממוצע 9 שעות בלילה. במדגם של 20 תינוקות בני שנתיים המתגוררים בצפון נמצא, כי ממוצע שעות השינה בלילה הינו 10 עם סטיית תקן של 1.1 במדגם של 10 תינוקות בדרום נמצא, כי ממוצע שעות השינה בלילה הינו 7.9 עם סטיית תקן של 1.1. על מנת להשוות בין ממוצע שעות השינה של ילדים מהצפון לבין זה של כלל הילדים יש לערוך _____, ועל מנת להשוות בין ממוצע שעות השינה של ילדים מהדרום לזה של ילדים המתגוררים בצפון יש לערוך _____. יש להניח שההנחות הדרושות מתקיימות.

- מבחן Z למדגם יחיד ; מבחן T למדגם יחיד.
- מבחן T למדגם יחיד ; מבחן T למדגמים תלויים.
- מבחן T למדגם יחיד ; מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- מבחן T למדגמים בלתי תלויים ; מבחן T לממוצע יחיד.

(7) מובהקות התוצאה (PV) היא גם :

- רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.
- רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.
- רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר טרם קיבל את תוצאות המחקר.
- רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.

(8) כדי לבדוק את הטענה שגברים רווקים שוקלים פחות מגברים נשואים לקח חוקר מדגם מקרי של 4 גברים ומדד את משקלם לפני נישואיהם ולאחר נישואיהם. הנה התוצאות :

68	82	93	69	לפני הנישואין
71	84	88	80	לאחר הנישואין

לבדיקת

באיזה התפלגות משתמשים

ההשערות, ובכמה דרגות חופש :

- ההתפלגות Z ללא דרגות חופש.
- ההתפלגות T ו-3 דרגות חופש.
- ההתפלגות T ו-6 דרגות חופש.
- ההתפלגות χ^2 ו-3 דרגות חופש.

- (9) שני סטטיסטיקאים בודקים השערות ברמת מובהקות $\alpha = 0.05$ על סמך אותו מדגם. סטטיסטיקאי א' בודק את ההשערה: $H_0: \mu = 20$ כנגד האלטרנטיבה $H_1: \mu \neq 20$ ומחליט לא לדחות את השערת האפס. סטטיסטיקאי ב' בודק את ההשערה $H_0: \mu \leq 20$ כנגד האלטרנטיבה $H_1: \mu > 20$ מה יחליט סטטיסטיקאי ב'?
- לדחות את השערת האפס.
 - לא לדחות את השערת האפס.
 - ללא נתונים נוספים אי אפשר לדעת מה יחליט.
- (10) חוקר בדק השערה מסוימת והחליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות 5%. מה נכון לומר?
- הוא בוודאות ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% ואילו ברמת מובהקות 2% יש לבדוק מחדש.
 - הוא בוודאות לא ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% ואילו ברמת מובהקות 2% יש לבדוק מחדש.
 - הוא בוודאות ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% וברמת מובהקות 2%.
 - הוא בוודאות לא ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% ואילו ברמת מובהקות 2% יש לבדוק מחדש.
- (11) רמת הכולסטרול בדמם של אנשים מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 180 מ"ג (ל 100 סמ"ק דם). וסטיית תקן של 10 מ"ג. מעוניינים לבדוק את הטענה שצמחונים הם בעלי רמת כולסטרול נמוכה יותר. נניח שסטיית התקן אצל צמחונים זהה לסטיית התקן של כלל האנשים. במדגם של 20 צמחונים התקבל ממוצע רמת כולסטרול 174.5 מ"ג. אם הוחלט לקבל את הטענה שצמחונים הם בעלי רמת כולסטרול נמוכה יותר איזה סוג טעות אפשרית במסקנה?
- טעות מסוג ראשון.
 - טעות מסוג שני.
 - טעות מסוג שלישי.
 - לא ניתן לדעת כיוון שאנו לא יודעים מה התוחלת האמתית אצל הצמחונים.

12 בסקר שנערך התקבל ש 60% מתוך 220 נשאלים מבקרים אצל השיננית לפחות פעם אחת בשנה. עבור אילו רמות מובהקות ניתן יהיה לקבוע שרוב האוכלוסייה מבקרת אצל השיננית לפחות פעם בשנה?

- א. רמת מובהקות הגדולה מ-5%.
- ב. רמת מובהקות הקטנה מ-5%.
- ג. רמת מובהקות הגדלה מ-0.0015.
- ד. רמת מובהקות הקטנה מ-0.0015.

13 שני חוקרים העוסקים בתחום מחקרי משותף החליטו להסתמך על נתונים של מדגם שפורסם על ידי הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה.

חוקר א' ניסח השערה דו צדדית ואילו חוקר ב' ניסח השערה חד צדדית. מסקנתו של איזה מבין המשפטים הבאים הוא הנכון בנוגע למסקנות החוקרים?

- א. אם חוקר א' ידחה את השערת האפס לא ניתן לדעת מה יחליט חוקר ב' באותה רמת מובהקות.
- ב. אם חוקר א' יקבל את השערת האפס גם חוקר ב' יקבל את השערת האפס באותה רמת מובהקות.
- ג. אם חוקר ב' ידחה את השערת האפס גם חוקר א' ידחה את השערת האפס באותה רמת מובהקות.
- ד. אם חוקר א' ידחה את השערת האפס גם חוקר ב' ידחה את השערת האפס בתנאי שרמת המובהקות כפולה בגודלה.

14 ידוע מנתוני העבר כי תוחלת הציונים בבחינה בפסיכולוגיה היא 79. הועלתה השערה כי תוחלת הציונים בקרב העולים החדשים נמוכה יותר. לצורך בדיקת הטענה נלקח מדגם מקרי של 47 סטודנטים עולים ונמצא ממוצע של 75. מה משמעות הפרמטר בניסוח ההשערות?

- א. תוחלת ציוני העולים באוכלוסייה.
- ב. ממוצע ציוני העולים במדגם.
- ג. תוחלת ציוני האוכלוסייה מנתוני העבר.
- ד. ממוצע ציוני שאר האוכלוסייה במדגם.

15 חוקר ביצע מחקר וידוע כי עשה טעות מסוג 1. מה מהבאים נכון?

- א. החוקר דחה את השערת H_0 כאשר היא הייתה נכונה.
- ב. החוקר דחה את השערת H_1 כאשר היא הייתה נכונה.
- ג. החוקר לא דחה את השערת H_0 כאשר היא הייתה לא נכונה.
- ד. המדגם של החוקר שייך בפועל להתפלגות הדגימה של H_1 .

- 16** חוקר ביקש לבחון האם תאומים זהים אשר הופרדו בילדותם שונים מתאומים זהים אשר גדלו יחדיו מבחינת מידת הפער בין התאומים בלחץ הדם. הוא דגם 20 זוגות תאומים מכל אוכלוסייה ומדד את הפרש בין לחץ הדם בכל זוג תאומים. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?
- מבחן T למדגמים בלתי תלויים עם 38 דרגות חופש.
 - מבחן T למדגמים מזווגים, עם 39 דרגות חופש.
 - מבחן T למדגמים בלתי תלויים עם 39 דרגות חופש.
 - מבחן T למדגמים מזווגים עם 38 דרגות חופש.
- 17** בינואר השנה פורסם שהשכר הממוצע במשק הוא 8,900 ₪. במדגם שנעשה בחודש יוני על 60 עובדים נרשם עבור כל עובד במדגם האם השכר שלו נמוך או לא נמוך מהשכר הממוצע שפורסם בחודש ינואר. מהו המבחן המתאים כדי לבדוק שרוב העובדים בחודש יוני קיבלו שכר הנמוך מהשכר הממוצע שפורסם בחודש ינואר?
- מבחן Z על פרופורציה.
 - מבחן T על תוחלת אחת.
 - מבחן T על שתי תוחלות במדגמים בלתי תלויים.
 - מבחן T על שתי תוחלות במדגמים תלויים.
- 18** שלושה חוקרים רצו לבדוק את השפעתו של שידור פרסומות נגד תאונות דרכים על מהירות הנהיגה של נהגים בישראל (השונות של מהירות הנהיגה בישראל אינה ידועה). עידו השווה את מהירות הנהיגה של קבוצת נהגים אחת, חודש לפני שידור הפרסומות וחודש לאחר שידור הפרסומות. רון השווה את מהירות הנהיגה של קבוצת נהגים, שראו את הפרסומות, למהירות הנהיגה של קבוצת נהגים, שלא ראו את הפרסומות. יואב השווה את מהירות הנהיגה של קבוצת נהגים בחודש בו שודרו הפרסומות, למהירות הנהיגה הממוצעת בישראל על פי נתוני משרד התחבורה. המבחנים בהם צריכים החוקרים להשתמש הם:
- שלושתם במבחן T למדגמים בלתי תלויים.
 - עידו במבחן T למדגמים מזווגים, ורון ויואב במבחן T למדגמים בלתי תלויים.
 - עידו במבחן T למדגמים מזווגים, רון במבחן T למדגמים בלתי תלויים ויואב במבחן T למדגם יחיד.
 - עידו במבחן T למדגמים מזווגים, רון ויואב במבחן T למדגם יחיד.

- 19** במחקר נמצא שתוצאה היא מובהקת ברמת מובהקות של 5%. מה תמיד נכון?
- הגדלת רמת המובהקות לא תשתנה את מסקנת המחקר.
 - הגדלת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.
 - הקטנת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.
 - הקטנת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.
- 20** חוקר ערך מבחן דו צדדי ברמת מובהקות של α והחליט לדחות את השערת האפס. אם החוקר היה עורך מבחן חד צדדי ברמת מובהקות של $\frac{\alpha}{2}$ אזי בהכרח:
- השערת האפס הייתה נדחית.
 - השערת האפס הייתה לא נדחית.
 - לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו במקרה זה.
- 21** ליאור ורוני העלו את אותן השערות על ממוצע האוכלוסייה. כמו כן הם התבססו על אותן תוצאות של מדגם.
- ליאור השתמש בטבלה של התפלגות Z.
- רוני השתמשה בטבלה של התפלגות T.
- מה נוכל לומר בנוגע להחלטת המחקר שלהם?
- אם ליאור ידחה את השערת האפס אז גם בהכרח רוני.
 - אם רוני תדחה את השערת האפס אז גם בהכרח ליאור.
 - שני החוקרים בהכרח יגיעו לאותה מסקנה.
 - לא ניתן לדעת על היחס בין דחיית השערת האפס של שני החוקרים.
- 22** נתון ש $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ כמו כן נתונות ההשערות הבאות: $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu < \mu_0$.
- חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות. σ^2 לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5% לאחר מכן כדי לחזק את קביעתו הוא דגם עוד 5 תצפיות ושקלל את תוצאות אלה גם למדגם כך שכלל עכשיו 15 תצפיות.
- כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.
 - כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.
 - כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.
- 23** אם חוקר החליט להגדיל את רמת המובהקות במחקר שלו אזי:
- הסיכוי לטעות מסוג ראשון גדל.
 - העוצמה של המבחן גדלה.
 - הסיכוי לטעות מסוג שני גדל.
 - תשובות א ו-ב נכונות.

(24) חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן :

- השערת האפס נכונה.
- השערת האפס נדחתה.
- השערת האפס לא נדחתה.
- אף אחת מהתשובות לא נכונה בהכרח.

(25) מה המצב הרצוי לחוקר המבצע בדיקת השערה :

- | | |
|-------------|----------|
| $1 - \beta$ | α |
| א. גדולה | א. גדולה |
| ב. קטנה | ב. גדולה |
| ג. גדולה | ג. קטנה |
| ד. קטנה | ד. קטנה |

(26) נערך שינוי בכלל ההחלטה של בדיקת השערה מסוימת ובעקבותיו אזור דחיית H_0 קטן. כל שאר הגורמים נשארו ללא שינוי. כתוצאה מכך :

- הן α , והן $(1 - \beta)$, יקטנו.
- α יישאר ללא שינוי ואילו $(1 - \beta)$ יגדל.
- α יגדל ואילו $(1 - \beta)$ יקטן.
- הן α והן $(1 - \beta)$ יגדלו.

(27) ידוע כי לחץ דם תקין באוכלוסייה הוא 120. רופא מניח שלחץ הדם בקרב עיתונאים גבוה יותר מהממוצע באוכלוסייה. הוא לקח מדגם של 60 עיתונאים וקיבל ממוצע 137. על סמך המדגם, הוא בודק טענתו ברמת מובהקות 0.02 ומסיק שלחץ הדם בקרב העיתונאים אינו גבוה יותר. מה הטעות האפשרית שהרופא עושה?

- טעות מסוג ראשון.
- טעות מסוג שני.
- טעות מסוג שלישי.
- אין טעות במסקנתו.

(28) בבדיקת השערות התקבל שה- $p\text{-value} = 0.02$. מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 1%? בחר בתשובה הנכונה :

- יקבל את השערת האפס בכל מקרה.
- ידחה את השערת האפס מקרה.
- ידחה את השערת האפס רק אם המבחן הנו דו צדדי.
- לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.

(29) מובהקות התוצאה (PV) היא גם :

- א. רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.
- ב. רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.
- ג. רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר טרם קיבל את תוצאות המחקר.
- ד. רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.

(30) בבדיקת השערות מסוימת התקבל $p \text{ value} = 0.0254$, לכן :

- א. ברמת מובהקות של 0.01 אך לא של 0.05 נדחה את H_0 .
- ב. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 לא נדחה את H_0 .
- ג. ברמת מובהקות של 0.05 אך לא של 0.01 נדחה את H_0 .
- ד. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 נדחה את H_0 .

(31) רמת המובהקות במחקר הייתה 2% לכן.

- א. בסיכוי של 2% נדחה את השערת האפס.
- ב. בסיכוי של 2% לא נדחה את השערת האפס.
- ג. בסיכוי של 2% השערת האפס לא נכונה.
- ד. אף תשובה לא נכונה.

(32) נתון ש: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. כמו כן נתונות ההשערות הבאות: $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu < \mu_0$.

- חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות.
- σ^2 לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5%. אם הוא היה מגדיל את רמת המובהקות ל-10% אזי :
- א. כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.
- ב. כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.
- ג. כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

(33) לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים

- זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה.
- לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים נורמאלית ללא ידיעת השונות האמתית. מספר דרגות החופש במבחן הוא :

א. 9

ב. 19

ג. 18

ד. 8

34) בתחנת טיפת חלב מסוימת יש שני מכשירי שקילה. על מנת להשוות בין שני המשקלים נדגמו 4 תינוקות. כל תינוק בן חודשיים נשקל בכל אחד מהמשקלים. להלן תוצאות השקילה (בק"ג):

משקל במכשיר 1	2.5	0.7	9.6	4.5
משקל במכשיר 2	0.5	1.7	6.9	3.5

נניח שהמשקלים מתפלגים נורמלית.

המבחן שיש לבצע כאן הוא:

- מבחן Z למדגם יחיד.
- מבחן T למדגם יחיד.
- מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- מבחן T למדגמים מזווגים.

35) כדי להשוות בין שני אצים נדגמו 5 תוצאות מריצת 100 מטר של כל אצן. זמני הריצה נרשמו ויש להניח שמתפלגים נורמלית. המטרה להשוות בין האצנים.

המבחן שיש לבצע כאן הוא:

- מבחן Z למדגם יחיד.
- מבחן T למדגם יחיד.
- מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- מבחן T למדגמים מזווגים.

36) סטטיסטיקאי ערך מבחן סטטיסטי. הוא חישב את עוצמת המבחן וקיבל 0. המשמעות של תוצאה זו היא:

- לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא לא נכונה.
- תמיד לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.
- לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.
- תמיד לדחות את השערת האפס כאשר היא לא נכונה.

37) סטטיסטיקאי נתבקש לאמוד את הפרש הממוצעים של שני טיפולים לפי שני מדגמים מקריים בלתי תלויים. הוא חישב רווח סמך להפרש ברמת סמך 0.98, וקיבל את הרווח $-2 < \mu_1 - \mu_2 < 4.5$. אילו יתבקש החוקר לבדוק לפי אותם נתונים את ההשערות:

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0; H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

ברמת מובהקות 0.05 מסקנתו תהיה:

- לדחות את השערת האפס.
- לא לדחות את השערת האפס.
- שלא ניתן לדעת את המסקנה עבור רמת מובהקות 0.05.
- שלא נתונות בשאלה סטיות התקן של האוכלוסיות, ולכן לא ניתן להסיק דבר.

(38) במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קווי זהב לבזק מבחינת ממוצע המחירים לשיחות בינ"ל. נגדמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. בהנחה והמחירים מתפללים נורמלית בנו רווח סמך לממוצע ההפרשים וקיבלו: $-0.0293 < \mu_D < 0.2145$ רווח הסמך הוא ברמת סמך של 95%. לכן מסקנת המחקר היא:

- א. ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקיים הבדל בין החברות.
- ב. ברמת מובהקות של 5% נקבע שקיים הבדל מובהק בין החברות.
- ג. לא ניתן לדעת מה המסקנה ברמת מובהקות של 5% כיוון שלא נאמר מה ההגדרה של D .

(39) אם רמת מובהקות של מבחן סטטיסטי הינה 0, הכוונה היא:

- א. תמיד נדחה H_0 כאשר היא נכונה, אך לא תמיד נדחה אותה כאשר היא לא נכונה.
- ב. לא נדחה את H_0 אף פעם.
- ג. לא נדחה את H_0 כאשר היא נכונה אך יתכן ונדחה אותה כאשר היא לא נכונה.
- ד. כל התשובות לא נכונות.

(40) חוקר ביצע ניסוי. הוא ניסח את ההשערות הבאות: $H_0: \mu = 10$, $H_1: \mu \neq 10$. לצורך בדיקה הוא לקח מדגם מקרי בגודל 5 מתוך אוכלוסייה המתפלגת נורמאלית עם שונות לא ידועה. על סמך תוצאות המדגם הוא חישב וקיבל: $t_x = -2.63$. לכן המסקנה היא:

- א. הוא ידחה H_0 ברמת מובהקות 0.1 אך לא כן ברמת מובהקות 0.05.
- ב. הוא ידחה H_0 ברמת מובהקות 0.05 אך לא כן ברמת מובהקות 0.025.
- ג. הוא ידחה H_0 ברמת מובהקות 0.025 אך לא כן ברמת מובהקות 0.01.
- ד. הוא לא ידחה H_0 ברמת מובהקות 0.1.

(41) האיגוד האמריקני לרפואת ילדים מפרסם הנחיות חדשות הקובעות כי יש ליטול תוספת יוד במהלך תקופת ההיריון וההנקה. מחסור במינרל זה עלול לגרום לפגיעה מוחית אצל העובר והתינוק. החלטה זו נקבעה על סמך מחקר בו השתתפו 1050 נשים שנטלו יוד במהלך תקופת ההיריון וההנקה. מתוך הנשים שהשתתפו במחקר, רק ל-21 נמצאו ילדים בעלי פגיעה מוחית לעומת 3% באוכלוסייה הכללית. בנוסף, פורסם שהאיגוד האמריקאי מגיע למסקנותיו על סמך רמת מובהקות של 0.5%. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג ראשון במחקר?

- א. 0.005
- ב. 0.03
- ג. 0.0287
- ד. 0.05

- 42) חוקרת שיערה, כי משקלן של נשים כשנה לאחר החתונה גבוה ממשקלן בעת החתונה. החוקרת דגמה 15 נשים, ובדקה את משקלן בשתי נקודות הזמן (בעת החתונה, ושנה לאחריה), אך לא מצאה הבדל מובהק ברמת מובהקות 0.01. בהנחה, כי **במצאות** השערתה של החוקרת נכונה, **סביר** כי אם היא תגדיל את גודל המדגם, אזי:
- א. יקטן הסיכוי לטעות מסוג שני (β).
 - ב. תגדל רמת הביטחון ($1 - \alpha$).
 - ג. אף תשובה לא נכונה.
 - ד. כל התשובות נכונות.

43) איזה מהמשפטים הבאים נכון תמיד?

- א. $POWER + \alpha + \beta = 1$
- ב. $POWER = 0.5 - \beta$
- ג. $POWER + \alpha = 1$
- ד. $\beta + \alpha = 1$
- ה. הכול לא נכון.

44) מה נכון לומר לגבי הנחת שיוויון השונויות במבחן T למדגמים בלתי תלויים?

- א. היא אומרת שהשונויות המדגמיות שוות.
- ב. בלעדיה אין שום דרך לבדוק השערה על הפרש בין תוחלות.
- ג. היא חשובה הן עבור מדגמים מזווגים והן עבור מדגמים בלתי תלויים.
- ד. אף תשובה אינה נכונה.

45) חוקר החליט לא לדחות השערה ברמת מובהקות של α . במידה וחוקר זה היה בודק השערה זו ברמת מובהקות של 2α על סמך אותם נתונים, האם ההשערה תדחה?

- א. ההשערה תדחה.
- ב. ההשערה לא תדחה.
- ג. התשובה תלויה בעוצמת המבחן.
- ד. לא ניתן לדעת בוודאות אם ההשערה תדחה או לא.

46) חוקרת שיערה, כי בגילאי הגן בנות יותר תקשורתיות מבנים. אם החוקרת תדגום אקראית 30 בנים ו-30 בנות, ובמדגם יתקבל אותו ממוצע של ציון תקשורת. סטטיסטי המבחן יהיה:

- א. אפס
- ב. חיובי
- ג. שלילי
- ד. לא ניתן לדעת

(47) עוצמה שווה ל-1 פרושה :

- א. לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.
- ב. תמיד לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.
- ג. לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא לא נכונה.

(48) מה מהבאים נכון לגבי מבחן T מדגמים מזווגים?

- א. כל התצפיות במחקר אינן תלויות זו בזו.
- ב. כל התצפיות במחקר תלויות זו בזו.
- ג. כל הצמדים של תצפיות במחקר אינם תלויים זה בזה.
- ד. התצפיות בתוך כל צמד אינן תלויות זו בזו.

(49) לבדיקת ההשערה החד צדדית על התוחלת של התפלגות נורמלית $H_0: \mu \geq 10$, נלקח מדגם והתקבלה רמת מובהקות מינימאלית לדחיית השערת האפס 0.058. לו רצינו לבדוק את ההשערה הדו צדדית $H_0: \mu = 10$, $H_1: \mu \neq 10$, אז על סמך תוצאת אותו המדגם ברמת מובהקות 0.05:

- א. ניתן להכריע בין ההשערות רק אם שונות האוכלוסייה נתונה.
- ב. מקבלים את השערת האפס.
- ג. דוחים את השערת האפס.
- ד. לא ניתן להכריע בין ההשערות שכן חסרים נתונים.

(50) לבדיקת ההשערה החד צדדית ימנית $H_0: \mu = 55$, $H_1: \mu = 65$,

נלקח מדגם מקרי בגודל n מאוכלוסייה בעלת התפלגות נורמלית ושונות σ^2 . רמת המובהקות היא 5%. נמצא שהעוצמה היא 0.9. להלן 3 טענות:

- עבור מדגם בגודל n וברמת מובהקות 5% לבדיקת ההשערות: $H_0: \mu = 55$, $H_1: \mu = 60$ העוצמה תהיה גדולה מ-0.9.
- עבור מדגם בגודל $2n$ ורמת מובהקות 5% לבדיקת ההשערות: $H_0: \mu = 55$, $H_1: \mu = 65$ העוצמה תהיה גדולה מ-0.9.
- עבור מדגם בגודל n ורמת מובהקות 10% לבדיקת ההשערות: $H_0: \mu = 55$, $H_1: \mu = 65$ העוצמה תהיה קטנה מ-0.9.

- א. שלושת הטענות אינן נכונות.
- ב. טענות 2 ו-3 אינן נכונות וטענה 1 נכונה.
- ג. טענות 1 ו-2 נכונות וטענה 3 אינה נכונה.
- ד. טענות 1 ו-3 אינן נכונות וטענה 2 נכונה.

תשובות סופיות:

שאלה	תשובה	שאלה	תשובה
1	א	26	א
2	ד	27	ב
3	ד	28	א
4	א	29	א
5	ג	30	ג
6	ג	31	ד
7	א	32	א
8	ב	33	א
9	ג	34	ד
10	א	35	ג
11	א	36	א
12	ג	37	ג
13	א	38	א
14	א	39	ג
15	א	40	א
16	א	41	א
17	א	42	א
18	ג	43	ה
19	א	44	ד
20	ג	45	ד
21	ב	46	א
22	ג	47	ד
23	ד	48	ג
24	ג	49	ב
25	ג	50	ד

סטטיסטיקה ב

פרק 9 - מבחני חי בריבוע

תוכן העניינים

77	1. מבחן טיב התאמה
82	2. מבחן לאי תלות

מבחני חי בריבוע

מבחן טיב התאמה – רקע

מבחן זה בא לבדוק האם אוכלוסייה מסוימת מתפלגת לפי התפלגות נתונה. המשתנה הנחקר מחולק למספר קטגוריות ויש לבדוק האם תוצאות המדגם תואמות להתפלגות הנתונה.

מבנה המבחן:

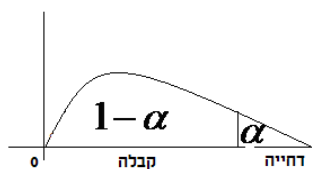
השערות:

המשתנה מתפלג לפי התפלגות מסוימת - H_0 .

אחרת - H_1 .

כלל הכרעה:

הערך הקריטי נקבע על סמך התפלגות חי בריבוע. התפלגות זו היא אסימטרית חיובית ותלויה בדרגות החופש. $d.f = K - 1$, כאשר K - מספר הקטגוריות.



הערך הקריטי הוא: $\chi^2_{1-\alpha, K-1}$, כלומר האחוזון ה- $1-\alpha$ בהתפלגות חי בריבוע שדרגות החופש הן $K-1$.

אם $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha, K-1}$, דוחים את השערת האפס.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad \text{סטטיסטי המבחן}$$

O_i - השכיחות שנצפתה במדגם בקטגוריה i .

p_i - הסתברות לקטגוריה i לפי השערת האפס.

$E_i = np_i$ - שכיחות צפויה במדגם לקטגוריה i בהנחת השערת האפס.

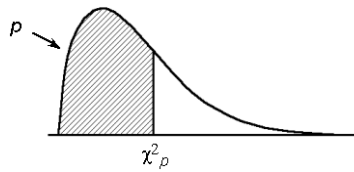
הערה:

תנאי כדי לבצע את המבחן הוא $E_i \geq 5$ לכל i . במידה ותנאי זה לא מתקיים יש אפשרות לאחד קטגוריות סמוכות עד שהתנאי יתקיים.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

במדינה מסוימת שלוש מפלגות. בפרלמנט הנוכחי התפלגות מספר המושבים היא 30% למפלגה A, 60% למפלגה B ו-10% למפלגה C. לקראת הבחירות המתוכננות בשבוע הבא נעשה סקר שכלל 300 אזרחים. בסקר התקבל ש-40% יצביעו למפלגה A, 50% למפלגה B ו-10% למפלגה C. האם תוצאות הסקר תואמות להתפלגות המושבים בפרלמנט הנוכחי? בדקו ברמת מובהקות של 5%.

טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה



	p												
df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.0 ⁴ 393	0.0 ³ 157	0.0 ³ 982	0.0 ² 393	0.0158	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

שאלות

- (1) במטרה לבדוק האם קובייה הוגנת, מטילים אותה 120 פעמים. התקבל 17 פעמים 1, 23 פעמים 2, 20 פעמים 3, 25 פעמים 4, 18 פעמים 5 ו-17 פעמים 6. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
- (2) מפעל מייצר סוכריות בצבעים כחול, אדום, ירוק וכתום. מעוניינים לבדוק שפרופורציית הסוכריות הכחולות גדולה פי 2 מכל צבע אחר. לצורך כך נדגמו באקראי 200 סוכריות והתקבל: 70 כחולות, 50 אדומות, 40 ירוקות והיתר כתומות. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
- (3) משרד החינוך טוען שבקרב השכירים במשק היחס בין השכירים בעלי השכלה נמוכה, תיכונית ואקדמאית הוא 1:2:1 בהתאמה. במדגם של 200 שכירים התקבלו 56 אנשים בעלי השכלה נמוכה, 105 בעלי השכלה תיכונית והיתר בעלי השכלה גבוהה.
- א. על סמך תוצאות המדגם, האם התפלגות ההשכלה היא כמו שמשדרד החינוך מפרסם? בדוק ברמת מובהקות של 5%.
- ב. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לפרופורציית השכירים במשק בעלי השכלה אקדמאית.
- (4) 200 איש נתבקשו לבחור ספרה באקראי והנה התוצאות שהתקבלו:
- 18 איש בחרו בספרה 0, 24 איש בחרו בספרה 1, 17 איש בחרו בספרה 2, 19 איש בחרו בספרה 3, 20 איש בחרו בספרה 4, 18 איש בחרו בספרה 5, 22 איש בחרו בספרה 6 והיתר בחרו בספרות 7-9.
- א. על סמך התוצאות הללו האם בחירת הספרות אקראית? בדקו ברמת מובהקות של 2.5%.
- ב. תנו הערכה למובהקות התוצאה.
- ג. אם נגדיל את גודל המדגם פי 2 ונשמור על אותם יחסים של כמות האנשים במדגם שבחרו בספרות, כיצד הדבר ישפיע על ערכו של הסטטיסטי χ^2 ? מה תהיה המסקנה במקרה זה?
- (5) מעוניינים לבדוק האם קובייה היא הוגנת. הטילו את הקובייה פעמיים והתבוננו בסכום הוצאות. חזרו על התהליך 72 פעמים.
- להלן התוצאות שהתקבלו במדגם:
- מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

מספר הטלות	סכום התוצאות
20	2-5
17	6-8
20	9-10
15	11-12

- (6) בפנס יש 4 סוללות. בבדיקה שנערכה ב-400 פנסים נמצאו סוללות פגומות לפי השכיחויות הבאות:

3 ומעלה	2	1	0	מספר הסוללות הפגומות
8	12	104	276	שכיחות

מעוניינים לבדוק על סמך תוצאות מדגם אלה האם הסיכוי לסוללה פגומה הוא 20%. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה נכריע שהסיכוי לסוללה פגומה אינו 20%?

- (7) להלן השערות מחקר: $H_0: X \sim N(40, 2^2)$, $H_1: \text{else}$.

X	מתחת 36	36-40	40-44	מעל 44
מספר הדגימות	3A	50A	45A	2A

תוצאות המדגם הן:

מהו ערכו המקסימלי של A עבורו נקבל את H_0 ברמת מובהקות של 5%?

תשובות סופיות

- (1) לא נדחה H_0 .
- (2) לא נדחה H_0 .
- (3) א. לא נדחה H_0 . ב. (0.14, 0.25).
- (4) א. לא נדחה H_0 . ב. בין 0.95 ל-0.975.
- ג. יגדל פי 2; המסקנה לא תשתנה.
- (5) נכריע שהקובייה אינה הוגנת.
- (6) 0.005.
- (7) 14.

מבחן חי בריבוע לאי תלות בין משתנים – רקע

מבחן לאי תלות מטרתו לבדוק האם קיים קשר בין שני משתנים. שני המשתנים שנבדקים צריכים להיות מחולקים למספר קטגוריות.

מבנה המבחן:

השערות:

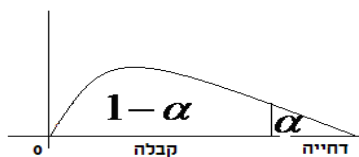
אין תלות בין המשתנים H_0 .

יש תלות בין המשתנים H_1 .

כלל הכרעה:

הערך הקריטי נקבע על סמך התפלגות חי בריבוע. התפלגות זו היא אסימטרית חיובית ותלויה בדרגות החופש $d.f = (r-1)(c-1)$. כאשר: r - מספר הקטגוריות של המשתנה שבשורות. c - מספר הקטגוריות של המשתנה שבעמודות.

הערך הקריטי הוא: $\chi^2_{1-\alpha, (r-1)(c-1)}$, כלומר האחוזון ה- $1-\alpha$ בהתפלגות חי בריבוע שדרגות החופש הן $(r-1)(c-1)$. אם $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha, (r-1)(c-1)}$ אז דוחים את השערת האפס.



$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

כאשר:

O_i - השכיחות נצפית במדגם בתא i .

E_i - שכיחות צפויה במדגם בתא i בהנחת השערת האפס.

$$E_i = \frac{f(x) \cdot f(y)}{n}$$

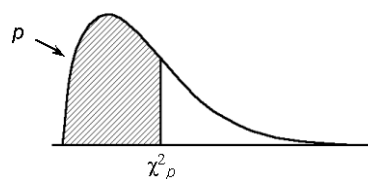
הערה:

תנאי כדי לבצע את המבחן הוא $E_i \geq 5$ לכל i . במידה ותנאי זה לא מתקיים יש אפשרות לאחד קטגוריות סמוכות עד שהתנאי יתקיים.
תנאי חלופי: אין E קטן מ-1 וגם אין ביותר מ 20% מהתאים E קטן מ-5.

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

האם יש תלות בין המגדר לבין דעה מסוימת?
יש לבדוק ברמת מובהקות של 5% על סמך תוצאות הסקר:

המגדר / דעה	בעד	נגד	נמנע	סה"כ
גברים	50	40	10	
נשים	20	60	20	
סה"כ				

טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה χ^2_p 

df	p												
	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.00457	0.004982	0.005393	0.0058	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

שאלות

- (1) נבדקה התלות בין גודל הארגון לבין שביעות הרצון של העובדים. להלן התוצאות:

שביעות רצון גודל המפעל	נמוכה	בינונית	גבוהה	סה"כ
גדול	182	203	215	600
קטן	154	110	136	400
סה"כ	336	313	351	1000

מה המסקנה ברמת מובהקות של 2.5%?

- (2) מפעל עובד בשלוש משמרות. להלן מספר המוצרים הפגומים והתקינים בכל אחת מן המשמרות לפי מדגם שנעשה:

	לילה	ערב	יום
פגומים	70	60	50
תקינים	800	700	600

האם יש הבדל בין שיעורי הפגומים במשמרות השונות? הסיקו עבור רמת מובהקות $\alpha = 0.05$.

- (3) נדגמו 50 מוצרים ממפעל מסוים מתוך 30 מוצרים שיוצרו ביום 17 נבחרו לייצוא מתוך המוצרים שיוצרו בלילה 10 נבחרו לייצוא. האם יש קשר בין היות מוצר לייצוא למועד שבו הוא יוצר? בדקו ברמת בטחון של 95%.

- (4) במטרה לבדוק האם השתנו דפוסי ההצבעה למפלגות השונות בין שבוע שעבר לשבוע נלקחו שני סקרים אחד מהשבוע שעבר והאחר מהשבוע. להלן דפוסי ההצבעה שהתקבלו בסקרים אלה.

א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה ניתן להחליט שהשתנו דפוסי ההצבעה משבוע שעבר לשבוע באופן מובהק?

ב. כיצד הייתה התשובה לסעיף א משתנה אם כל השכיחויות בטבלה של תוצאות המדגם היו מוכפלות פי 2?

ג. בנו רווח סמך לשיעור המצביעים למפלגה א השבוע ברמת סמך של 95%.

	מפלגה א	מפלגה ב	מפלגות אחרות	סה"כ
שבוע שעבר				
השבוע	143		253	550
סה"כ	243	314		1050

- (5) בחנות בגדים A בדקו את התפלגות הצבעים של הבגדים הנמכרים ביום מסוים. כמו כן בדקו את התפלגות הצבעים בחנות שכנה B:

מספר פריטים / צבע	שחור	לבן	אדום	כחול
חנות A	15	20	15	50
חנות B	60	20	10	20

- א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם התפלגות הצבעים בחנות A היא ביחס של 1:1:1:3 לטובת הכחול.
 ב. בדקו ברמת מובהקות של 2.5% האם קיים הבדל בין החנויות מבחינת התפלגות הצבעים של הפריטים הנמכרים.

- (6) סטודנט קיבל בבדיקת השערות ערך χ^2 (chi-square) השוו לאפס. הסטודנט הסיק כי לא קיימת תלות בין שני המשתנים שבדק, בכל רמת מובהקות. נכון / לא נכון? נמקו.

- (7) להלן טבלת O של שני משתנים שהתקבל במדגם כלשהו:

$f(x)$	Y_4	Y_3	Y_2	Y_1	
200					X_1
200					X_2
	160	120	60	60	$f(y)$

- מה צריכות להיות השכיחויות בתוך הטבלה כדי שמובהקות התוצאה (PV) תהיה 100%?

תשובות סופיות

- (1) נסיק שיש קשר בין גודל הארגון לשביעות הרצון של העובדים.
 (2) נסיק שאין הבדל מובהק בין שיעור הפגומים במשמרות השונות.
 (3) נסיק שאין קשר בין היות מוצא לייצוא למועד שבו הוא יוצר.
 (4) א. 10% ב. קטן ג. (0.223, 0.297)
 (5) א. נסיק שהתפלגות הצבעים בחנות היא כמו שמצוין.
 ב. נסיק שיש הבדל בין החנויות מבחינת התפלגות הצבעים.
 (6) נכון
 (7) להלן טבלה:

$f(x)$	Y_4	Y_3	Y_2	Y_1	
200	80	60	30	30	X_1
200	-8	60	30	30	X_2
400	160	120	60	60	$f(y)$

סטטיסטיקה ב

פרק 10 - ניתוח שונות חד כיוונית

תוכן העניינים

1. כללי 87

ניתוח שונות חד כיוונית

רקע תיאורטי

ניתוח שונות (חד כיוונית) הוא מבחן להשוואת תוחלות $(\mu_1, \dots, \mu_k)$ של k אוכלוסיות שונות. לכן, בניתוח שונות, השערות המחקר הן:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k \quad (\text{התוחלות של כל האוכלוסיות שוות})$$

$$H_1: \quad \text{אחרת} \quad (\text{לפחות שתיים מהתוחלות שונות})$$

ההנחות הדרושות לביצוע התהליך:

(2) בכל אוכלוסייה מתוך k האוכלוסיות ההתפלגות נורמלית.

(3) כל האוכלוסיות הן עם אותה שונות σ^2 .

(4) המדגמים בלתי תלויים זה בזה.

ישנו משתנה המבדיל בין הקבוצות השונות, הוא המשתנה הבלתי תלוי הנקרא גורם (factor). משתנה זה הוא קטגוריאלי עם k רמות (levels). כדי לבצע את התהליך יש לבצע מדגם מכל אוכלוסייה: נסמן ב- n_i את גודל המדגם בקבוצה i .

$$n = \sum_{i=1}^k n_i \quad \text{- מספר התצפיות סך הכול (בכל המדגמים).}$$

$\bar{X}_1$ - ממוצע המדגם הראשון, $\dots, \bar{X}_k$ - ממוצע המדגם ה- k .
 $\bar{X}$ - ממוצע כללי (של כל המדגמים).

$$SS_B = \sum_{i=1}^k n_i [\bar{X}_i - \bar{X}]^2 \quad \text{סכום ריבועים בין הקבוצות:}$$

$$SS_W = \sum_{i=1}^k n_i [n_i - 1] \cdot \hat{S}_i^2 \quad \text{סכום ריבועים בתוך הקבוצות:}$$

$$SS_T = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} [X_{ij} - \bar{X}]^2 \quad \text{סכום ריבועים כללי:}$$

$$SST = SSB + SSW$$

יש למלא את טבלת ניתוח השונות הבאה:

מקור השונות	סכום הריבועים SS	דרגות חופש df	ממוצע הריבועים MS	F
B - בין הקבוצות	SSB	$k-1$	$\frac{SSB}{k-1}$	$\frac{MSB}{MSW}$
W - בתוך הקבוצות	SSW	$n-k$	$\frac{SSW}{n-k}$	
T - סה"כ	SST	$n-1$		

$$F = \frac{\frac{SSB}{k-1}}{\frac{SSW}{n-k}} \sim F(k-1, n-k)$$

אזור דחיית $H_0 : 1-\alpha : F_{(k-1, n-k)}$

שאלות

- (1) מחקר מעוניין להשוות בין שלוש תרופות לשיכוך כאבים במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין התרופות מבחינת הזמן בדקות שלוקח עד שהתרופה משפיעה. לצורך הבדיקה נלקחו 15 אנשים שסובלים מכאבי ראש. אנשים אלה חולקו באקראי לשלוש: קבוצה 1 קיבלה "אקמול" קבוצה 2 קיבלה "אופטלגין" קבוצה 3 קיבלה "נורופן". כל אדם במחקר מסר את מספר הדקות עד שהתרופה השפיעה עליו.
- מהו המשתנה התלוי ומהו המשתנה הבלתי תלוי במחקר?
 - מהו המבחן הסטטיסטי המתאים כאן? רשמו את ההשערות.
 - מה הן ההנחות הדרושות כדי לבצע את המבחן הסטטיסטי שהצעת בסעיף הקודם?

- (2) בעיר מסוימת שלושה בתי ספר תיכון. ראש העיר התעניין לבדוק האם קיים הבדל בהצלחה של בתי הספר במקצוע מתמטיקה. לצורך כך הוא דגם מספר תלמידים שנבחנו במבחן הבגרות במתמטיקה ברמה של 3 יחידות בעירו ובדק עבור כל תלמיד מה ציון הבגרות שלו במתמטיקה.

"הס"	"רביץ"	"המתמיד"
85	98	78
83	62	65
74	55	70
85	80	90
75		56

- מהו המבחן הסטטיסטי המתאים? רשמו את ההשערות ואת ההנחות של המבחן.
- מהו גודל המדגם? מהו המשתנה הבלתי תלוי (factor) כמה רמות יש לו?
- חשבו את הממוצע ואת סטיית התקן של הציונים בכל אחד מהמדגמים.
- מלאו את טבלת ANOVA.
- רשמו את כלל ההכרעה למבחן שהוצע בסעיף א ברמת מובהקות של 5%.
- האם קיים הבדל בין בתי הספר בעיר מבחינת רמת הצלחת התלמידים במקצוע המתמטיקה? ענה על סמך הסעיפים הקודמים.

- (3) מעוניינים לבדוק האם יש הבדל בהשפעה של שיטות טפול שונות על לחץ הדם הסיסטולי (SBP) באוכלוסייה של קשישים. נבדקו 4 שיטות שונות. בטבלה המצורפת מרוכזים ממצאי המחקר.

השיטה	A	B	C	D
גודל המדגם	12	14	8	12
הממוצע	178	172	180	182
סטיית התקן	4	8	5	3

- רשמו את השערות המחקר וההנחות הדרושות כדי לבצע את המבחן המתאים.
- מה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 5%?
- האם יש צורך לבצע השוואות מרובות?

(4) שלושה אופים נתבקשו להכין עוגת שוקולד. לכל אופה בדקו את משך זמן ההכנה בדקות. כל אופה נדרש לאפות בכל יום 4 עוגות.

האם קיים הבדל בין האופים מבחינת תוחלת זמני ההכנה של העוגות?

בדקו ברמת מובהקות של 5%.

האופה	ניר	מוזס	שלום
סכום הזמנים	206	212	182
סכום ריבועי הזמנים	10644	11250	8982

(5) להלן טבלת ניתוח שונות חד כיוונית. במחקר בחנו 4 סוגי סוללות. רצו לבדוק האם לסוג הסוללה השפעה על תוחלת אורך החיים שלה. הפעילו את כל הסוללות על אותו מכשיר ובדקו את אורך החיים של כל סוללה בשעות. מה המסקנה ברמת מובהקות של 10%? רשמו את ההשערות וההנחות הדרושות.

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	10.317	3	3.439	1.361	.279
Within Groups	60.648	24	2.527		
Total	70.964	27			

(6) להלן טבלת ANOVA בטבלה הושמטו חלקים. השלימו את החלקים בטבלה שהושמטו ומסומנים באותיות.

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	357.450	ב	ג	ה	.000
Within Groups	א	17	ד		
Total	522.950	19			

7) חברת תרופות לקחה 15 אנשים ברמת בריאות דומה. החברה חילקה את האנשים ל שלוש קבוצות שוות בגודלן. לכל קבוצה ניתנה אותה תרופה במינון שונה (dosage). המינונים שניתנו הם: 10 מ"ג, 20 מ"ג ו-30 מ"ג. לאחר שעה מזמן לקיחת התרופה נבדק קצב פעימות הלב של כל אדם (pulse). הנתונים הוזנו לתוכנה סטטיסטית והתקבלו התוצאות הבאות:

ANOVA

pulse

ANOVA						Tukey HSD ^a			
pulse						pulse			
	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	dosage	N	Subset for alpha = 0.05	
								1	2
Between Groups	414.400	2	207.200	19.733	.000	30.00	5	71.0000	
Within Groups	126.000	12	10.500			20.00	5		80.2000
Total	540.400	14				10.00	5		83.4000
						Sig.		1.000	.299

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.

a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 5.000.

Post Hoc Tests

Multiple Comparisons

 pulse
 Tukey HSD

(I) dosage	(J) dosage	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Lower Bound	Upper Bound
10.00	20.00	3.20000	2.04939	.299	-2.2675	8.6675
	30.00	12.40000*	2.04939	.000	6.9325	17.8675
20.00	10.00	-3.20000	2.04939	.299	-8.6675	2.2675
	30.00	9.20000*	2.04939	.002	3.7325	14.6675
30.00	10.00	-12.40000*	2.04939	.000	-17.8675	-6.9325
	20.00	-9.20000*	2.04939	.002	-14.6675	-3.7325

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

- בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין המינונים השונים מבחינת תוחלת הדופק של האנשים? רשמו את ההשערות וההנחות הדרושות לצורך פתרון.
- הסבירו ללא חישוב כיצד הייתה משתנה התשובה לסעיף הקודם אם הינו מעלים את הדופק של כל התצפיות במחקר ב-2.
- האם יש צורך במחקר בהשוואת מרובות. נמקו!
- לטבלת ANOVA צורפו טבלאות של השוואות מרובות בשיטה הנקראת "טוקי". ברמת בטחון של 95% מה הם הממצאים לפי שיטה זו?

- (8) בעיר מסוימת רצו לבדוק האם קיים הבדל ברמה של התלמידים בין בתי הספר השונים בעיר. ביצעו מדגם מכל בית ספר ונתנו מבחן זהה לכל הנדגמים. לאחר מכן ריכזו את הנתונים בתוכנה סטטיסטית והפעילו ניתוח שונות. מצורפים הפלטים שהתקבלו. ענו על הסעיפים הבאים :
- כמה בתי ספר יש בעיר?
 - כמה תלמידים השתתפו בסך הכול במחקר?
 - האם קיים הבדל בין בתי הספר בעיר מבחינה רמת הציונים? בדקו ברמת מובהקות של 1%
 - בביטחון של 95% אילו בתי ספר שונים זה מזה ברמת התלמידים? נמקו והסבירו.

Oneway

ANOVA

grade

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	7799.600	4	1949.900	13.586	.000
Within Groups	2870.400	20	143.520		
Total	10670.000	24			

Post Hoc Tests

Multiple Comparisons

grade

Scheffe

(I) school	(J) school	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Lower Bound	Upper Bound
1.00	2.00	5.40000	7.57681	.971	-20.2543	31.0543
	3.00	36.80000*	7.57681	.003	11.1457	62.4543
	4.00	36.40000*	7.57681	.003	10.7457	62.0543
	5.00	-2.60000	7.57681	.998	-28.2543	23.0543
2.00	1.00	-5.40000	7.57681	.971	-31.0543	20.2543
	3.00	31.40000*	7.57681	.011	5.7457	57.0543
	4.00	31.00000*	7.57681	.013	5.3457	56.6543
	5.00	-8.00000	7.57681	.888	-33.6543	17.6543
3.00	1.00	-36.80000*	7.57681	.003	-62.4543	-11.1457
	2.00	-31.40000*	7.57681	.011	-57.0543	-5.7457
	4.00	-.40000	7.57681	1.000	-26.0543	25.2543
	5.00	-39.40000*	7.57681	.001	-65.0543	-13.7457
4.00	1.00	-36.40000*	7.57681	.003	-62.0543	-10.7457
	2.00	-31.00000*	7.57681	.013	-56.6543	-5.3457
	3.00	.40000	7.57681	1.000	-25.2543	26.0543
	5.00	-39.00000*	7.57681	.001	-64.6543	-13.3457
5.00	1.00	2.60000	7.57681	.998	-23.0543	28.2543
	2.00	8.00000	7.57681	.888	-17.6543	33.6543
	3.00	39.40000*	7.57681	.001	13.7457	65.0543
	4.00	39.00000*	7.57681	.001	13.3457	64.6543

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Homogeneous Subsets

grade

Scheffe^a

school	N	Subset for alpha = 0.05	
		1	2
3.00	5	45.0000	
4.00	5	45.4000	
2.00	5		76.4000
1.00	5		81.8000
5.00	5		84.4000
Sig.		1.000	.888

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.

a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 5.000.

תשובות סופיות

(1) א. משתנה בלתי תלוי : סוג התרופה. ב. ניתוח שונות חד כיוונית

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$H_1 : otherwise$$

משתנה תלוי : הזמן עד להשפעת התרופה בדקות.

ג. 1. מדגמים בלתי תלויים.

2. שוויון שונויות.

3. משתנים מתפלגים נורמלית.

(2) א. המבחן לניתוח שונות חד כיוונית.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$H_1 : otherwise$$

הנחות :

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. משתנים מתפלגים נורמלית.

3. שוויון שונויות.

ב. גודל המדגם : 14. משתנה ב"ת : בית הספר, בעל 3 רמות.

$$\bar{X} = 80.4, \hat{S} = 5.46, \bar{X} = 73.75, \hat{S} = 19.29, \bar{X} = 71.8, \hat{S} = 12.93$$

ד. להלן טבלה :

מקור השונות	SS	df	MS	F
B	200.6	2	100.3	
W	1904.75	11	173.2	
סה"כ	2105.35	13		0.58

$$F > 3.98$$

ו. נקבל את H_0 .

(3) א. $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$
 $H_1 : otherwise$
 ב. נדחה את H_0 .
 ג. כן.

הנחות :

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. שוויון שונויות.

3. משתנים מתפלגים נורמלית.

(4) נקבל את H_0 : נכריע שאין הבדל מובהק בין האופים מבחינת תוחלת זמן הכנה.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 \quad (5)$$

$$H_1 : otherwise$$

הנחות :

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. שוויון שונות.

3. משתנים מתפלגים נורמלית.

נקבל את H_0 : לסוג סוללה אין השפעה של תוחלת החיים ברמת ביטחון של 10%.

(6) להלן טבלה :

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	357.450	2 ב	178.725 ג	18.36 ה	.000
Within Groups	165.5 א	17	9.735 ד		
Total	522.950	19			

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \quad (7)$$

$$H_1 : otherwise$$

הנחות :

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. משתנים מתפלגים נורמלית.

3. שוויון שונות.

נדחה את H_0 : ברמת ביטחון של 5% קיים הבדל במינונים השונים מבחינת תוחלת הדופק.

$$\mu_{20} = \mu_{10} > \mu_{30} \quad \text{ד.} \quad \text{ג. כן.} \quad \text{ב. ראה וידאו.} \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$25 \quad \text{ב.} \quad 5 \quad \text{א.} \quad (8)$$

ג. נדחה את H_0 : יש לפחות שני בתי ספר בעיר עם תוחלת רמת ציונים שונה.

$$(\mu_3 = \mu_4) < (\mu_1 = \mu_2 = \mu_3) \quad \text{ד.}$$

סטטיסטיקה ב

פרק 11 - מבחן הבינום

תוכן העניינים

96	1. מבחן הבינום
101	2. חישוב רמת מובהקות ועוצמת מבחן במבחן הבינום

מבחנים אפרמטריים למדגם יחיד

מבחן הבינום – רקע

מבחן הבינום הינו מבחן סטטיסטי על הפרמטר p . הפרמטר p מייצג את פרופורציית ההצלחות באוכלוסייה כלומר, הסיכוי בניסוי בודד להצלחה. ההשערות האפשריות על הפרמטר הן:

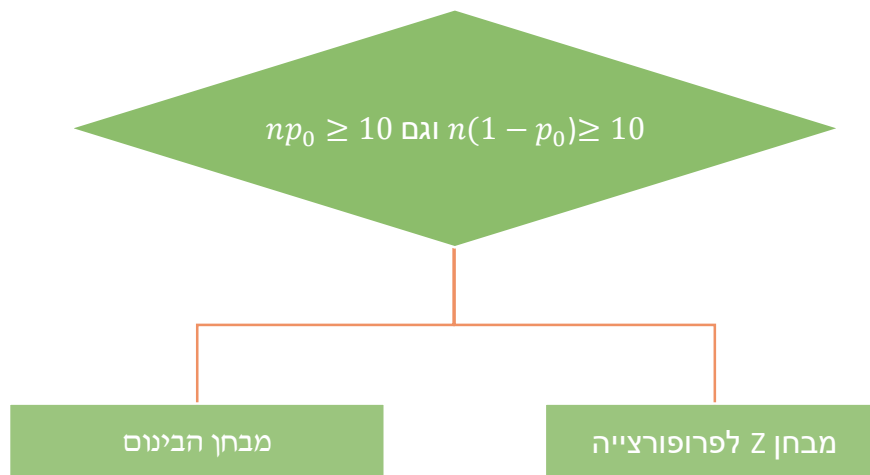
$H_0 : p = p_0$	$H_0 : p = p_0$	$H_0 : p = p_0$	השערת האפס:
$H_1 : p > p_0$	$H_1 : p < p_0$	$H_1 : p \neq p_0$	השערה אלטרנטיבית:

דוגמה:

במדינה אירופאית התנהל לפני 4 שנים משאל עם בדבר לגליזציה של הקנאביס. במשאל העם 40% מהאזרחים היו בעד לגליזציה של הקנאביס ובשל כך חוק הלגליזציה לא עבר באותה המדינה. במדגם שנעשה כיום בו השתתפו 15 אזרחים מהמדינה 10 ענו שהם תומכים בלגליזציה של הקנאביס במדינה. פרלמנטר מהמדינה חוקר האם כיום אחוז התומכים בלגליזציה של הקנאביס במדינה עלה יחסית לאחוז שהתקבל במשאל העם במדינה לפני 4 שנים. רשמו את השערות המחקר.

במבחן הבינום מבצעים מדגם אקראי בגודל n ומתבוננים במספר ההצלחות שהתקבלו במדגם, אותן נסמן ב- Y . בהנחה והתצפיות במדגם בלתי תלויות זו בזו אנו אומרים ש: $Y \sim B(n, p)$.

מבחן הבינום נכנס לקטגוריה של מבחנים אפרמטרים והוא בא כחלופה למבחן הפרמטרי על פרופורציה אחת כאשר התנאים לקירוב הנורמלי אינם מתקיימים.



דוגמה:

מהו המבחן הסטטיסטי המתאים? נמקו.

הטכניקה הנוחה ביותר למבחן הבינום היא לחשב את מובהקות התוצאה ולדחות את השערת האפס אם $\alpha \geq PV$. מובהקות התוצאה היא הסיכוי לתוצאות של המדגם וקיצוני יותר בהנחת השערת האפס. כזכור, פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הבינומית היא:

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

כאשר התוחלת של ההתפלגות הבינומית היא: $E(Y) = np$. בעמוד הבא מצורפת טבלה של התפלגות בינומית מצטברת. זו טבלה שיכולה לעזור בתהליך החישוב.

דוגמה:

חשבו את מובהקות התוצאה. מה תהיה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 5%?

טבלת התפלגות בינומית מצטברת

n	x	p									
		0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
5	0	0.5905	0.3277	0.2373	0.1681	0.0778	0.0312	0.0102	0.0024	0.0003	0.0000
	1	0.9185	0.7373	0.6328	0.5282	0.3370	0.1875	0.0870	0.0308	0.0067	0.0005
	2	0.9914	0.9421	0.8965	0.8369	0.6826	0.5000	0.3174	0.1631	0.0579	0.0086
	3	0.9995	0.9933	0.9844	0.9692	0.9130	0.8125	0.6630	0.4718	0.2627	0.0815
	4	1.0000	0.9997	0.9990	0.9976	0.9898	0.9688	0.9222	0.8319	0.6723	0.4095
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10	0	0.3487	0.1074	0.0563	0.0282	0.0060	0.0010	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.7361	0.3758	0.2440	0.1493	0.0464	0.0107	0.0017	0.0001	0.0000	0.0000
	2	0.9298	0.6778	0.5256	0.3828	0.1673	0.0547	0.0123	0.0016	0.0001	0.0000
	3	0.9872	0.8791	0.7759	0.6496	0.3823	0.1719	0.0548	0.0106	0.0009	0.0000
	4	0.9984	0.9672	0.9219	0.8497	0.6331	0.3770	0.1662	0.0474	0.0064	0.0002
	5	0.9999	0.9936	0.9803	0.9527	0.8338	0.6230	0.3669	0.1503	0.0328	0.0016
	6	1.0000	0.9991	0.9965	0.9894	0.9452	0.8281	0.6177	0.3504	0.1209	0.0128
	7	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9877	0.9453	0.8327	0.6172	0.3222	0.0702
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9983	0.9893	0.9536	0.8507	0.6242	0.2639
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9990	0.9940	0.9718	0.8926	0.6513
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
15	0	0.2059	0.0352	0.0134	0.0047	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.5490	0.1671	0.0802	0.0353	0.0052	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.8159	0.3980	0.2361	0.1268	0.0271	0.0037	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9444	0.6482	0.4613	0.2969	0.0905	0.0176	0.0019	0.0001	0.0000	0.0000
	4	0.9873	0.8358	0.6865	0.5155	0.2173	0.0592	0.0094	0.0007	0.0000	0.0000
	5	0.9978	0.9389	0.8516	0.7216	0.4032	0.1509	0.0338	0.0037	0.0001	0.0000
	6	0.9997	0.9819	0.9434	0.8689	0.6098	0.3036	0.0951	0.0152	0.0008	0.0000
	7	1.0000	0.9958	0.9827	0.9500	0.7869	0.5000	0.2131	0.0500	0.0042	0.0000
	8	1.0000	0.9992	0.9958	0.9848	0.9050	0.6964	0.3902	0.1311	0.0181	0.0003
	9	1.0000	0.9999	0.9992	0.9963	0.9662	0.8491	0.5968	0.2784	0.0611	0.0023
	10	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9907	0.9408	0.7827	0.4845	0.1642	0.0127
	11	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9981	0.9824	0.9095	0.7031	0.3518	0.0556
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9963	0.9729	0.8732	0.6020	0.1841
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9948	0.9647	0.8329	0.4510
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9953	0.9648	0.7941
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
20	0	0.1216	0.0115	0.0032	0.0008	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.3917	0.0692	0.0243	0.0076	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.6769	0.2061	0.0913	0.0355	0.0036	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.8670	0.4114	0.2252	0.1071	0.0160	0.0013	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9568	0.6296	0.4148	0.2375	0.0510	0.0059	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.9887	0.8042	0.6172	0.4164	0.1256	0.0207	0.0016	0.0000	0.0000	0.0000
	6	0.9976	0.9133	0.7858	0.6080	0.2500	0.0577	0.0065	0.0003	0.0000	0.0000
	7	0.9996	0.9679	0.8982	0.7723	0.4159	0.1316	0.0210	0.0013	0.0000	0.0000
	8	0.9999	0.9900	0.9591	0.8867	0.5956	0.2517	0.0565	0.0051	0.0001	0.0000
	9	1.0000	0.9974	0.9861	0.9520	0.7553	0.4119	0.1275	0.0171	0.0006	0.0000
	10	1.0000	0.9994	0.9961	0.9829	0.8725	0.5881	0.2447	0.0480	0.0026	0.0000
	11	1.0000	0.9999	0.9991	0.9949	0.9435	0.7483	0.4044	0.1133	0.0100	0.0001
	12	1.0000	1.0000	0.9998	0.9987	0.9790	0.8684	0.5841	0.2277	0.0321	0.0004
	13	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9935	0.9423	0.7500	0.3920	0.0867	0.0024
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9984	0.9793	0.8744	0.5836	0.1958	0.0113
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9941	0.9490	0.7625	0.3704	0.0432
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9987	0.9840	0.8929	0.5886	0.1330
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9964	0.9645	0.7939	0.3231
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9924	0.9308	0.6083
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9992	0.9885	0.8784
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

שאלות

- (1) אחוז האנשים שאוכלים גלילות בחודשי החורף הינו 30%, קיים חשש בקרב מיצרי הגלילות כי השנה פחת אחוז אוכלי הגלילות בחודשי החורף. לשם כך נדגמו 12 אנשים אשר מתוכם 2 טענו שהם אוכלים גלילה בחודשי החורף.
- א. רשמו את השערות המוצגות בשאלה זו וציינו מהו המבחן הסטטיסטי המתאים.
- ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 10%?
- ג. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות גדולה יותר מ- 10%?
- (2) מטבע הוטל 15 פעמים במטרה לבדוק האם המטבע סימטרי.
- בסך הכול התקבלו בהטלות 3 פעמים עץ.
- א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם המטבע הוא סימטרי.
- ב. עבור אילו רמות מובהקות נוכל להסיק שהמטבע אינו סימטרי?
- (3) אחוז המובטלים במשק לפני 5 שנים היה 10%. מעוניינים לבדוק האם כיום אחוז המובטלים קטן לעומת זה שהיה לפני 5 שנים. במדגם של 20 אנשים התקבל מובטל אחד ויחיד.
- א. מהי רמת המובהקות הקטנה ביותר עבורה יוסק שכיום אחוז האבטלה נמוך מאשר לפני 5 שנים?
- ב. מה תהיה המסקנה אם רמת המובהקות תהיה 5%?
- (4) נניח ש 40% מהאוכלוסייה מכירה את המוצרים של חברת "רמקס". החברה מתכננת לצאת בקמפיין פרסום שמטרתו להעלות את המודעות לקיומם של המוצרים של החברה באוכלוסייה. בזמן הקמפיין נדגמו 20 אנשים אקראיים מתוכם 70% טענו שהם מכירים את המוצרים של חברת "רמקס".
- א. מהי מובהקות התוצאה?
- ב. כיצד מובהקות התוצאה הייתה משתנה אם במדגם 80% היו טוענים שהם מכירים את המוצרים של חברת "רמקס"?

- (5) חברה לתוספי מזון דיווחה שנטילת מולטי ויטמין מקטינה את הסיכוי לחלות במחלות חורף במהלך החורף. לפי משרד הבריאות 70% מהאוכלוסייה חולים במחלות חורף במהלך החורף. במחקר השתתפו 20 אנשים אשר נטלו במהלך שנה מולטי ויטמין. במהלך החורף נמצא ש 12 מתוכם חלו במחלות חורף במהלך החורף. את המחקר יש לבצע ברמת מובהקות של 5%. נסמן ב: PV את מובהקות התוצאה של המחקר.
- א. האם המשפט הבא נכון?
 "אם כלל האוכלוסייה הייתה נוטלת מולטי ויטמין אז בסיכוי של 5% ניתן להגיד ש-70% מהאוכלוסייה הייתה חולה במחלת חורף".
- ב. האם המשפט הבא נכון?
 "אם כלל האוכלוסייה הייתה נוטלת מולטי ויטמין אז בסיכוי של PV 70% מהאוכלוסייה הייתה חולה במחלת חורף".
- ג. חשבו את PV.

תשובות סופיות

- (1) א. מבחן הבינום.
 $H_0 : p = 0.3$
 $H_1 : p < 0.3$
- (2) א. נדחה את H_0 .
 ב. לפחות 0.0352
- (3) א. 0.3917
 ב. לא נדחה את H_0 .
- (4) א. 0.0065
 ב. תקטן.
- (5) א. לא נכון.
 ב. לא נכון.
 ג. 0.2277.

חישוב הסתברויות לטעויות ועוצמת המבחן במבחן הבינום – רקע

מבחן הבינום הינו מבחן סטטיסטי על הפרמטר p . הפרמטר p מייצג את פרופורציית ההצלחות באוכלוסייה כלומר, הסיכוי בניסוי בודד להצלחה. ההשערות האפשריות על הפרמטר הן:

$H_0 : p = p_0$	$H_0 : p = p_0$	$H_0 : p = p_0$	השערת האפס:
$H_1 : p > p_0$	$H_1 : p < p_0$	$H_1 : p \neq p_0$	השערה אלטרנטיבית:

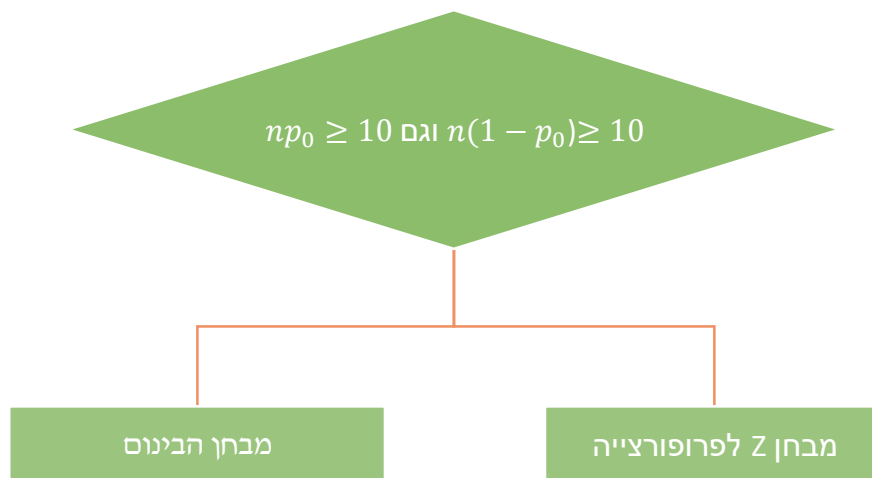
דוגמה:

בחברת פז 40% מעובדי החברה מאחרים לעבודה. מנכ"ל החברה מעוניין לצמצם את אחוז העובדים המאחרים בחברה. לצורך כך, בוחר המנכ"ל מחלקה אקראית במטרה לבדוק עליה שיטת תמריצים שאמורה לצמצם את אחוז המאחרים. במחלקה שנבחרה 10 עובדים והופעלה עליה שיטת התמריצים הנבדקת. הוסכם שאם מספר המאחרים במחלקה יהיה לכל היותר עובד אחד לאחר הפעלת שיטת התמריצים, תופעל שיטת התמריצים על כלל החברה.

• מהן השערות המחקר?

במבחן הבינום מבצעים מדגם אקראי בגודל n ומתבוננים במספר ההצלחות שהתקבלו במדגם, אותן נסמן ב- Y . בהנחה והתצפיות במדגם בלתי תלויות זו בזו אנו אומרים ש: $Y \sim B(n, p)$.

מבחן הבינום נכנס לקטגוריה של מבחנים אפרמטריים והוא בא כחלופה למבחן הפרמטרי על פרופורציה אחת כאשר התנאים לקירוב הנורמלי אינם מתקיימים.



דוגמה:

- מהו המבחן הסטטיסטי המתאים? נמקו.

כזכור, פונקציית ההסתברות של ההתפלגות הבינומית היא:

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

בעמוד הבא מצורפת טבלה של התפלגות בינומית מצטברת. זו טבלה שיכולה לעזור בתהליך החישוב.

נזכיר את המצבים האפשריים בבדיקת השערות:

מציאות	הכרעה		
		H0	H1
	H0	אין טעות	טעות מסוג 1
	H1	טעות מסוג 2	אין טעות

הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 (רמת מובהקות):

$$\alpha = P(H_0 \text{ נכונה} \mid \text{לדחות את } H_0) = P_{H_0}(H_0 \text{ לדחות})$$

הסיכוי לבצע טעות מסוג 2:

$$\beta = P(H_0 \text{ לקבל} \mid \text{לדחות את } H_0) = P_{H_1}(H_0 \text{ לקבל})$$

רמת בטחון:

$$1 - \alpha = P(H_0 \text{ לקבל} \mid \text{לדחות את } H_0) = P_{H_0}(H_0 \text{ לקבל})$$

עוצמה:

$$\pi = 1 - \beta = P(H_1 \text{ נכונה} \mid \text{לדחות את } H_0) = P_{H_1}(H_0 \text{ לדחות})$$

דוגמה:

- מהי רמת המובהקות של המחקר המוצע?
- אם בשיטת התמריצים, הסיכוי לאחר הוא 10%, מה ההסתברות שהמחקר יגלה זאת?

טבלת הסתברות בינומית (מצטברת) עבור n - ים שונים

n	x	p									
		0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
5	0	0.5905	0.3277	0.2373	0.1681	0.0778	0.0312	0.0102	0.0024	0.0003	0.0000
	1	0.9185	0.7373	0.6328	0.5282	0.3370	0.1875	0.0870	0.0308	0.0067	0.0005
	2	0.9914	0.9421	0.8965	0.8369	0.6826	0.5000	0.3174	0.1631	0.0579	0.0086
	3	0.9995	0.9933	0.9844	0.9692	0.9130	0.8125	0.6630	0.4718	0.2627	0.0815
	4	1.0000	0.9997	0.9990	0.9976	0.9898	0.9688	0.9222	0.8319	0.6723	0.4095
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10	0	0.3487	0.1074	0.0563	0.0282	0.0060	0.0010	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.7361	0.3758	0.2440	0.1493	0.0464	0.0107	0.0017	0.0001	0.0000	0.0000
	2	0.9298	0.6778	0.5256	0.3828	0.1673	0.0547	0.0123	0.0016	0.0001	0.0000
	3	0.9872	0.8791	0.7759	0.6496	0.3823	0.1719	0.0548	0.0106	0.0009	0.0000
	4	0.9984	0.9672	0.9219	0.8497	0.6331	0.3770	0.1662	0.0474	0.0064	0.0002
	5	0.9999	0.9936	0.9803	0.9527	0.8338	0.6230	0.3669	0.1503	0.0328	0.0016
	6	1.0000	0.9991	0.9965	0.9894	0.9452	0.8281	0.6177	0.3504	0.1209	0.0128
	7	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9877	0.9453	0.8327	0.6172	0.3222	0.0702
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9983	0.9893	0.9536	0.8507	0.6242	0.2639
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9990	0.9940	0.9718	0.8926	0.6513
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
15	0	0.2059	0.0352	0.0134	0.0047	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.5490	0.1671	0.0802	0.0353	0.0052	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.8159	0.3980	0.2361	0.1268	0.0271	0.0037	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9444	0.6482	0.4613	0.2969	0.0905	0.0176	0.0019	0.0001	0.0000	0.0000
	4	0.9873	0.8358	0.6865	0.5155	0.2173	0.0592	0.0094	0.0007	0.0000	0.0000
	5	0.9978	0.9389	0.8516	0.7216	0.4032	0.1509	0.0338	0.0037	0.0001	0.0000
	6	0.9997	0.9819	0.9434	0.8689	0.6098	0.3036	0.0951	0.0152	0.0008	0.0000
	7	1.0000	0.9958	0.9827	0.9500	0.7869	0.5000	0.2131	0.0500	0.0042	0.0000
	8	1.0000	0.9992	0.9958	0.9848	0.9050	0.6964	0.3902	0.1311	0.0181	0.0003
	9	1.0000	0.9999	0.9992	0.9963	0.9662	0.8491	0.5968	0.2784	0.0611	0.0023
	10	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9907	0.9408	0.7827	0.4845	0.1642	0.0127
	11	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9981	0.9824	0.9095	0.7031	0.3518	0.0556
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9963	0.9729	0.8732	0.6020	0.1841
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9948	0.9647	0.8329	0.4510
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9953	0.9648	0.7941
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
20	0	0.1216	0.0115	0.0032	0.0008	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.3917	0.0692	0.0243	0.0076	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.6769	0.2061	0.0913	0.0355	0.0036	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.8670	0.4114	0.2252	0.1071	0.0160	0.0013	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9568	0.6296	0.4148	0.2375	0.0510	0.0059	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.9887	0.8042	0.6172	0.4164	0.1256	0.0207	0.0016	0.0000	0.0000	0.0000
	6	0.9976	0.9133	0.7858	0.6080	0.2500	0.0577	0.0065	0.0003	0.0000	0.0000
	7	0.9996	0.9679	0.8982	0.7723	0.4159	0.1316	0.0210	0.0013	0.0000	0.0000
	8	0.9999	0.9900	0.9591	0.8867	0.5956	0.2517	0.0565	0.0051	0.0001	0.0000
	9	1.0000	0.9974	0.9861	0.9520	0.7553	0.4119	0.1275	0.0171	0.0006	0.0000
	10	1.0000	0.9994	0.9961	0.9829	0.8725	0.5881	0.2447	0.0480	0.0026	0.0000
	11	1.0000	0.9999	0.9991	0.9949	0.9435	0.7483	0.4044	0.1133	0.0100	0.0001
	12	1.0000	1.0000	0.9998	0.9987	0.9790	0.8684	0.5841	0.2277	0.0321	0.0004
	13	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9935	0.9423	0.7500	0.3920	0.0867	0.0024
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9984	0.9793	0.8744	0.5836	0.1958	0.0113
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9941	0.9490	0.7625	0.3704	0.0432
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9987	0.9840	0.8929	0.5886	0.1330
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9964	0.9645	0.7939	0.3231
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9924	0.9308	0.6083
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9992	0.9885	0.8784
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

שאלות

- (1) במטרה לבדוק האם במוסד לימוד מסוים פרופורציית הבנים נמוכה מפרופורציית הבנות נדגמו באקראי 10 תלמידים. הוחלט שאם מספר הבנים במדגם יהיה לכל היותר 2 תתקבל הטענה שפרופורציית הבנים נמוכה מפרופורציית הבנות.
- א. מהי רמת המובהקות במבחן המוצע?
 - ב. מהי העוצמה במבחן המוצע בהנחה ובמוסד 30% בנים?
 - ג. כיצד התשובות לסעיפים הקודמים ישתנו אם ישנו את המבחן כך שיוחלט שאם מספר הבנים במדגם יהיה לכל היותר 3 תתקבל הטענה שפרופורציית הבנים נמוכה מפרופורציית הבנות? הסבירו ללא חישוב מחדש.
- (2) הסיכוי לזכות במשחק מסוים הינו 70%. מעוניינים לבדוק האם שיטת משחק מסוימת מעלה את סיכויי הזכייה לצורך כך מחליטים לשחק את המשחק 20 פעמים תוך שימוש בשיטה הנבדקת. מחליטים שאם מספר הזכיות במדגם יהיה לפחות 18 נקבל את הטענה שאכן השיטה עובדת והיא מעלה את סיכויי ההצלחה להיות 90%.
- מה הסיכוי לבצע טעות מסוג ראשון ומה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני במבחן שהוצע?
- (3) במטרה לבדוק האם מטבע הוא סימטרי הטילו אותו 8 פעמים. הוחלט שאם מספר העצים יהיה בין 1 ל 7 כולל, יוחלט שהמטבע הוגן, אחרת נחליט שהמטבע לא הוגן.
- א. רשמו את השערות המחקר.
 - ב. מה ההסתברות להחליט שהמטבע אינו סימטרי למרות שבפועל המטבע הינו סימטרי?
 - ג. מהי ההסתברות שאם במטבע הסיכוי לעץ הוא 20%, אכן נגלה זאת?
 - ד. כיצד התשובה לסעיף הקודם תשתנה אם הסיכוי לעץ במטבע אף נמוך מ-20%?
- (4) נתון ש- $X \sim B(15, p)$ ההשערות של המחקר הן: $H_0: p = 0.3$ $H_1: p > 0.3$.
- כלל ההכרעה הוא: נדחה את השערת האפס אם $X \geq 8$.
- א. מהי רמת המובהקות במחקר זה?
 - ב. מה יקרה לרמת המובהקות אם כלל ההכרעה יהיה: נדחה את השערת האפס אם $X \geq 7$? הסבירו ללא חישוב.
 - ג. מה יקרה לרמת המובהקות אם השערות המחקר יהיו $H_0: p = 0.3$ $H_1: p \neq 0.3$ אבל כלל ההכרעה לא ישתנה? הסבירו ללא חישוב.

תשובות סופיות

- (1) א. 0.0547 ב. 0.3828 ג. תגדלנה.
- (2) $\beta = 0.3231$ $\alpha = 0.0355$
- (3) א. $H_0: p = 0.5$
 $H_1: p \neq 0.5$ ב. 0.0078 ג. 0.1678
- ד. העוצמה תגדל.
- (4) א. 0.05 ב. תגדל. ג. לא תשתנה.

סטטיסטיקה ב

פרק 12 - מבחן פישר

תוכן העניינים

1. מבחן פישר 106

מבחן פישר – רקע

מבחן זה הוא מבחן הנכנס לקטגוריית המבחנים האפרמטריים. משתמשים במבחן כאשר מתעניינים להשוות בין שתי אוכלוסיות והמשתנה התלוי הוא דיכוטומי, כלומר משתנה שיש לו שני ערכים אפשריים. במבחן זה יוצרים מדגם אחד שמקבל טיפול כלשהו ומדגם אחר המהווה קבוצת ביקורת ואינו מקבל את הטיפול. מבחן זה הוא החלופה האפרמטרית למבחן הפרמטרי להשוואת שתי פרופורציות על סמך שני מדגמים בלתי תלויים. במבחן הפרמטרי דורשים שבכל מדגם מספר ההצלחות וגם מספר הכישלונות יהיה לפחות 10 (הפחות מחמירים דורשים לפחות 5). מבחן פישר, אותו נעשה בפרק זה, נקרא בספרות המקצועית: "Fisher exact probability test".

דוגמה:

מעוניינים לבדוק האם שיעורי עזר יעילים בשיפור ההישגים בקורס סטטיסטיקה. נלקחו 2 כיתות הלומדות סטטיסטיקה בנות 15 תלמידים כל אחת. בכיתה אחת ניתנו שיעורי עזר ובכיתה השנייה לא ניתנו שיעורי עזר. בכיתה בה ניתנו שיעורי עזר נכשל בקורס ובכיתה שבה לא ניתנו שיעורי עזר 3 נכשלו בקורס. מהן השערות המחקר ומהו המבחן הסטטיסטי המתאים?

הטכניקה הנוחה ביותר למבחן פישר היא לחשב את מובהקות התוצאה ולדחות את השערת האפס אם $\alpha \geq PV$. מובהקות התוצאה היא הסיכוי לתוצאות של המדגם וקיצוני יותר בהנחת השערת האפס. כדי לחשב את מובהקות התוצאה נבנה טבלת שכיחות משותפת במבנה הבא:

סה"כ	"הצלחה"	"כישלון"	
A+B	B	A	קבוצת טיפול
C+D	D	C	קבוצת ביקורת
N	B+D	A+C	סה"כ

בנו את טבלת השכיחות המשותפת המתאימה לדוגמה:

סה"כ			
A+B	B	A	קבוצת טיפול
C+D	D	C	קבוצת ביקורת
N	B+D	A+C	סה"כ

דוגמה:

בהנחת השערת האפס התפלגות של A הינו משתנה מקרי היפר גיאומטרי שבו יש אוכלוסייה בגודל N , מתוכם $C + A$ "מיוחדים" ואנו דוגמים מתוכם מדגם בגודל $B + A$.

פונקציית ההסתברות של ההתפלגות ההיפר גיאומטרית במקרה זה,

$$\text{כאשר } X \text{ מייצג את השכיחות } A \text{ תהיה: } \frac{\binom{A+C}{x} \binom{B+D}{A+B-x}}{\binom{N}{A+B}}.$$

חשבו את מובהקות התוצאה בדוגמה ומה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

שאלות

(1) פסיכיאטרים נשאלו האם תרופה אנטי דיכאונית מסוימת אכן משפיעה על מצב הרוח. נלקחו 28 אנשים שהתלוננו על דיכאון ברמה דומה והם חולקו באקראי לשתי קבוצות: 16 נטלו את התרופה האנטי דיכאונית הנחקרת והיתר היוו קבוצת ביקורת ונטלו פלסיבו. כעבור 3 חודשים נבדק מצבם הנפשי של כל משתתפי המחקר. בקרב אלו שנטלו את התרופה רק 2 התלוננו על דיכאון ובקרב אלו שנטלו הפלסבו 6 התלוננו על דיכאון. מה המסקנה ברמת מובהקות של 10%?

(2) חנות פרחים מעוניינת לבדוק את הטענה שתאורה אולטרה סגולה מגדילה את אורך החיים של הפרחים. נדגמו 20 פרחים מאותו סוג. הם חולקו באקראי ל-2 קבוצות: 10 פרחים יהיו בקבוצת הניסוי, כלומר בתאורה אולטרה סגולה והפרחים הנותרים יהיו בקבוצת הביקורת – באותם התנאים בדיוק אך ללא תאורה אולטרה סגולה. כעבור 5 ימים נבדקו כלל הפרחים.

תקין	נבול	תאורה / מצב הפרח לאחר 5 ימים
9	1	אולטרה סגולה
3	7	רגילה

א. מה היא רמת המובהקות המינימלית עבורה יוסק שתאורה אולטרה סגולה מגדילה את אורך החיים של הפרחים?
 ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם בקבוצת הביקורת היו נמצאים פחות פרחים נבולים?

(3) משרד החינוך הזמין מחקר שמטרתו היה לבדוק האם שנת צהריים קבועה בזמן לימודי התיכון משפיעה על הזכאות לבגרות. נדגמו בוגרי תיכון אקראיים שנשאלו שתי שאלות:
 Q1 - האם בזמן התיכון נהגת לישון צהריים באופן קבוע?
 Q2 - האם את/ה זכאית לתעודת בגרות?
 להלן התוצאות שהתקבלו.

א. רשמו את השערות המבחן. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים? נמקו.
 ב. מהי מובהקות התוצאה?
 ג. בדקו את השערות המחקר ברמת מובהקות של 6%.

שאלון/ מספר נשאל	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Q1	כן	לא	לא	לא	כן	כן	לא	לא	לא	לא	לא	כן	לא	לא
Q2	כן	כן	כן	לא	כן	כן	לא	לא	כן	כן	לא	כן	כן	לא

תשובות סופיות

- (1) נדחה את H_0 .
- (2) א. 0.0099 ב. תקטן.
- (3) א. מבחן פישר. ב. 0.8112 ג. לא נדחה H_0 .

סטטיסטיקה ב

פרק 13 - מקדם המתאם (מדד קשר) הלינארי ומובהקותו

תוכן העניינים

1. מקדם המתאם הלינארי (פירסון) 110
2. חישוב מקדם המתאם הלינארי (פירסון) 121
3. בדיקת השערות על מקדם המתאם הלינארי 126

מקדם המתאם (מדד קשר) הלינארי ומובהקותו

מדד הקשר הלינארי (פירסון) – מבוא

מעוניינים לבדוק עד כמה קיים קשר מסוג קשר לינארי (קו ישר) בין שני משתנים. שני המשתנים שאנו בודקים לגביהם קשר צריכים להיות משתנים כמותיים. מבחינת סולמות מדידה כל משתנה נחקר צריך להיות מסולם רווחים או מנה. בדרך כלל המשתנה המוצג כ- Y הוא המשתנה התלוי והמשתנה המוצג ב- X הוא המשתנה הבלתי תלוי. תיאור גרפי לנתונים נעשה על ידי דיאגרמת פיזור. בדיאגרמת פיזור אנחנו מסמנים כל תצפית בנקודה לפי שיעור ה- X ושיעור ה- Y שלה. דיאגרמת הפיזור נותנת אינדיקציה גרפית על הקשר בין שני המשתנים.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

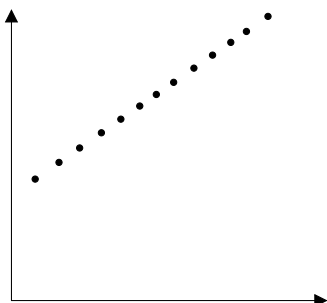
בבניין 8 דירות בדקו לכל דירה את מספר החדרים שלה וכמו כן את מספר הנפשות הגרות בדירה. להלן התוצאות שהתקבלו :

4	4	3	3	2	3	2	2	מספר חדרים בדירה
5	4	4	3	2	2	1	0	מספר הנפשות בדירה

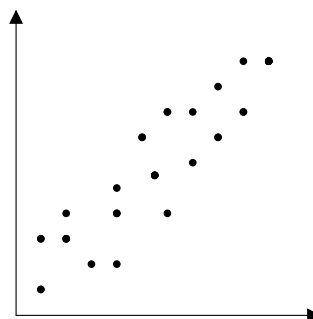
- (1) כמה תצפיות ישנן בדוגמה?
- (2) כמה משתנים ישנם בדוגמה, מי הם?
- (3) שרטטו לנתונים דיאגרמת פיזור.
- (4) מי המשתנה התלוי ומיהו המשתנה הבלתי תלוי?

דיאגרמות פיזור לקשר בין משתנים וניתוחם

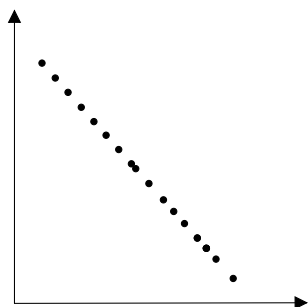
קשר לינארי חיובי מלא



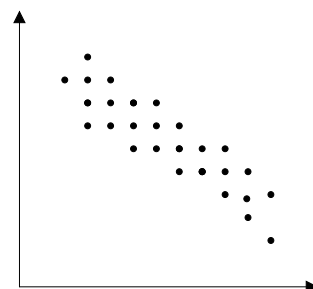
קשר לינארי חיובי חלקי



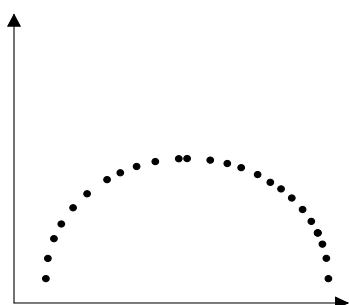
קשר לינארי שלילי מלא



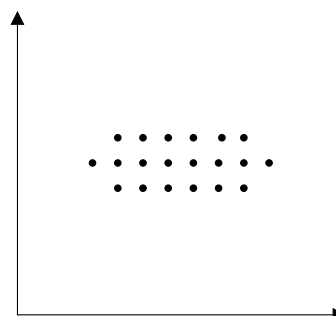
קשר לינארי שלילי חלקי



אין קשר לינארי



אין קשר



משמעות מקדם המתאם:

כדי לבדוק עד כמה קיים קשר לינארי בין שני המשתנים ישנו מדד קשר שנקרא גם מקדם המתאם הלינארי הידוע גם בשם מקדם המתאם של פירסון. מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין 1 ל-1.

-1

0

1

מקדם מתאם 1-או 1 אומר שקיים קשר לינארי מלא בין המשתנים שניתן לבטאו על ידי נוסחה של קו ישר: $y = ax + b$.

מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1):

קיים קשר לינארי מלא בו השיפוע a יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי (מקדם מתאם-1) מלא אומר שקיים קשר לינארי מלא בו השיפוע a שלילי.

מתאם חיובי חלקי:

ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט ואילו מתאם שלילי חלקי אומר שככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט. ככל שמקדם המתאם קרוב לאפס עוצמת הקשר יותר חלשה וככל שהמדד רחוק יותר מהאפס העוצמה יותר חזקה. לסיכום, מקדם המתאם בודק את עוצמת הקשר הלינארי, ואת כיוון הקשר.

מקדם המתאם הלינארי אינו מושפע מיחידות המדידה. כל שינוי ביחידות המדידה של המשתנים, לא ישנה את מקדם המתאם.

מדד הקשר הלינארי באוכלוסייה, שנקרא גם מקדם המתאם של פירסון או מדד הקשר של פירסון באוכלוסייה מסומן ב: ρ - פרמטר המאפיין את עוצמת הקשר הלינארי באוכלוסייה וכיוונו בין שני המשתנים הנחקרים. כאשר:

r - מדד הקשר הלינארי במדגם שמהווה אומדן לפרמטר ρ .

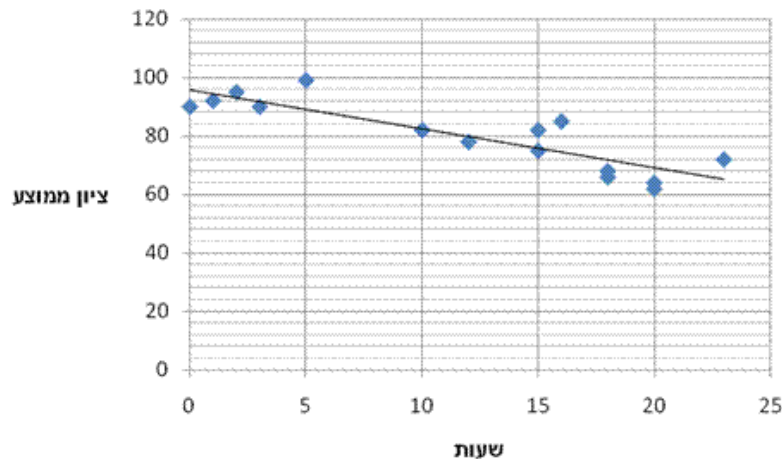
קיומו של מתאם בין שני משתנים אינו מצביע על סיבתיות בהכרח. למשל, אם נמצא מתאם חיובי בין כמות הסוכרזית שאדם אוכל לבין במשקל שלו אין זה אומר שהסיבה להשמנה היא הסוכרזית. מדד הקשר של פירסון הוא מדד קשר סימטרי, כלומר אם נחליף את X ב- Y התוצאה תהיה זהה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

- מה ניתן להגיד על מקדם המתאם של שני המשתנים על סמך דיאגרמת הפיזור ששרטטנו?
- אם היינו משנים את השרטוט כך שבציר האנכי היה המשתנה "מספר החדרים" ובציר האופקי היה "מספר הנפשות", האם הדבר היה משפיע על מדד הקשר של פירסון?

שאלות

- (1) חוקר רצה לאפיין את הקשר בין מספר השעות בשבוע שסטודנט מקדיש לבילויים לבין הציון הממוצע שלו בסוף הסמסטר. לשם כך הוא אסף נתונים של 15 סטודנטים ויצר דיאגרמת פיזור:



- א. מיהו המשתנה הבלתי תלוי?
 ב. מה ניתן לומר על כיוון הקשר בין מספר שעות הבילוי השבועיות לבין הציון הממוצע של הסמסטר? מה ניתן להגיד על עוצמת הקשר?
- (2) להלן טבלה המסכמת את מקדמי המתאם הלינארי בין ציוני מבחנים שונים שהתקבלו עבור תלמידים בכיתה מסוימת:

מתמטיקה	לשון	ספורט	
?	-0.7	?	ספורט
0.6	?	?	לשון
?	?	-0.1	מתמטיקה

- א. השלימו את מקדמי המתאם שמסומנים בסימן שאלה בטבלה.
 ב. בין אילו שני ציוני מקצועות שונים קיים מתאם בעל העוצמה החזקה ביותר?

- (3) במחקר נתבקשו לבדוק את הקשר בין מספר שעות התרגול של קורס לבין הציון הסופי שלו. להלן תוצאות מדגם שהתקבל:

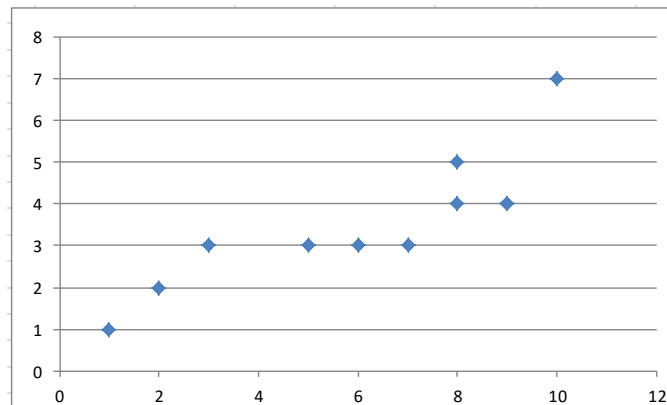
שעות תרגול	ציון סופי
20	90
25	90
30	95
15	60
30	90
20	85
10	50

- א. מיהו המשתנה התלוי ומיהו המשתנה הבלתי תלוי בדוגמה זו?
 ב. שרטטו דיאגרמת פיזור לנתונים.
 ג. מה ניתן לומר על הקשר בין המשתנים במדגם?
 ד. מסתבר שבסופו של דבר נתנו פקטור של 5 נקודות לציון הסופי. כיצד הדבר היה משנה את מקדם המתאם של המדגם?

4) בתחנה המטאורולוגית רצו לבדוק את הקשר שבין הטמפרטורה במעלות צלזיוס לכמות המשקעים במ"מ. הם אספו נתונים על 10 ימים במהלך חודש ינואר. המתאם שהתקבל היה 0.8.

- א. השלימו את המשפט:
בחדש ינואר ככל שהטמפרטורה היומית נוטה לרדת, כך כמות המשקעים נוטה _____.
- ב. הוחלט להעביר את הטמפרטורה למעלות פרנהייט על מנת שיוכלו להשוות אותה לנתונים מארה"ב. נוסחת המעבר היא $F^0 = 32 + \frac{9}{5}C^0$.
- כיצד הדבר ישפיע על מקדם המתאם בין הטמפרטורה במעלות פרנהייט לכמות המשקעים במ"מ?

5) להלן דיאגרמת פיזור המראה קשר בין שני משנים:

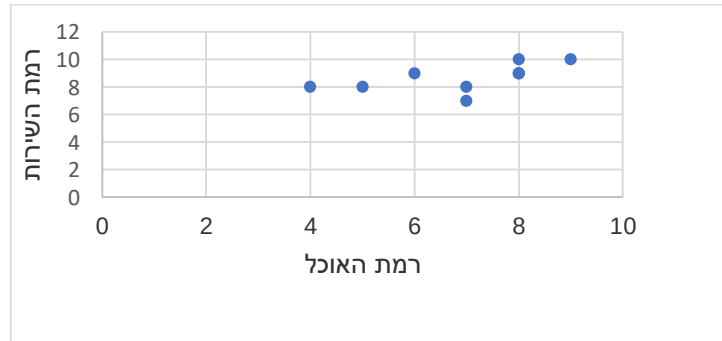


- א. השלימו: ניתן לראות שהקשר הוא לינארי _____ (מלאו חלקי) כיוון הקשר הוא (חיובי/שלילי).
- ב. השלימו: אם היינו מוסיפים תצפית שערך ה- X שלה הוא 4 וערך ה- Y שלה הוא 7, מקדם המתאם של פירסון היה _____ (גדלו קטן/לא משתנה).

שאלות רב ברירה (יש לבחור את התשובה הנכונה):

- 6) חוקר אקלים דגם כמה ימים בשנה ומדד את הטמפרטורה בטורונטו שבקנדה ואת הטמפרטורה בסידני שבאוסטרליה באותו היום. הוא חישב ומצא מקדם מתאם שלילי בין הטמפרטורה היומית בטורונטו לבין הטמפרטורה היומית בסידני. משמעות מקדם המתאם השלילי במדגם:
- א. אין קשר בין הטמפרטורה בטורונטו לבין הטמפרטורה בסידני בימים שנדגמו.
- ב. במדגם, רוב הטמפרטורות בטורונטו היו שליליות.
- ג. ההפרש בין הטמפרטורה בטורונטו לבין הטמפרטורה באוסטרליה, במדגם זה, הוא שלילי.
- ד. במדגם יש נטייה שהטמפרטורה יורדת בטורונטו לטמפרטורה לעלות בסידני.

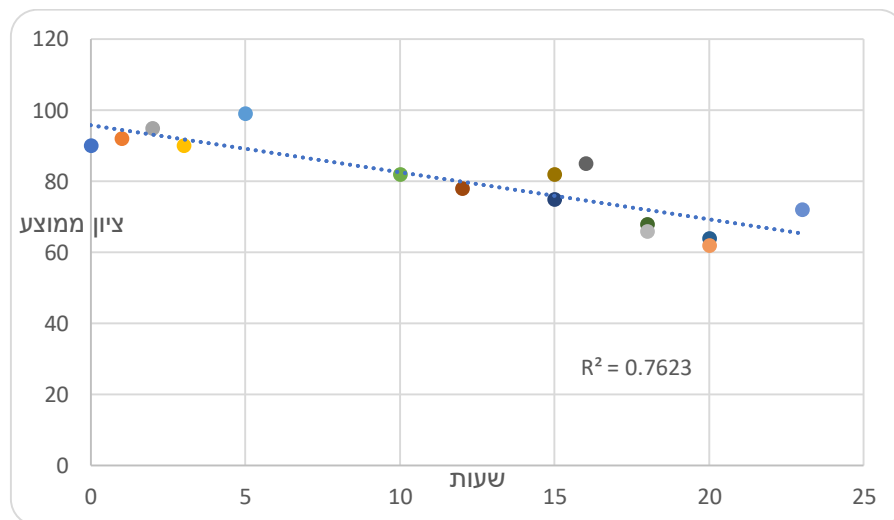
- 7) בסקר שביעות רצון שנערך בבית הקפה "פת לחם" התבקשו הלקוחות לדרג את מידת שביעות הרצון שלהם (בסולם 1-10) בשני נושאים: רמת האוכל ורמת השירות.



מה יהיה ערכו של מקדם המתאם (r)?

- א. $r = -0.3$
- ב. $r = 0$
- ג. $r = 1.125$
- ד. $r = 0.593$

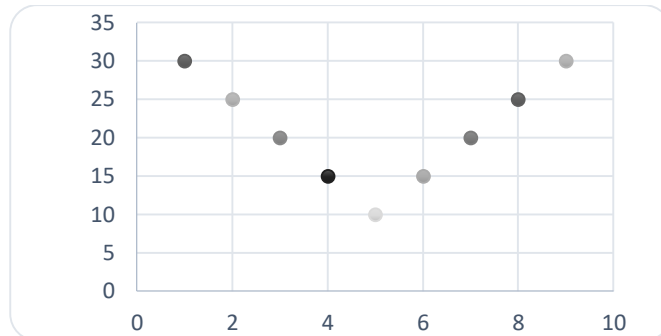
- 8) חוקר רצה לאפיין את הקשר בין מספר השעות בשבוע שסטודנט מקדיש לבילויים לבין הציון הממוצע שלו בסוף הסמסטר. לשם כך הוא אסף נתונים של 15 סטודנטים ויצר דיאגרמת פיזור.



מה ניתן לומר על כיוון הקשר במדגם בין מספר שעות הבילוי השבועיות לבין הציון הממוצע של הסמסטר?

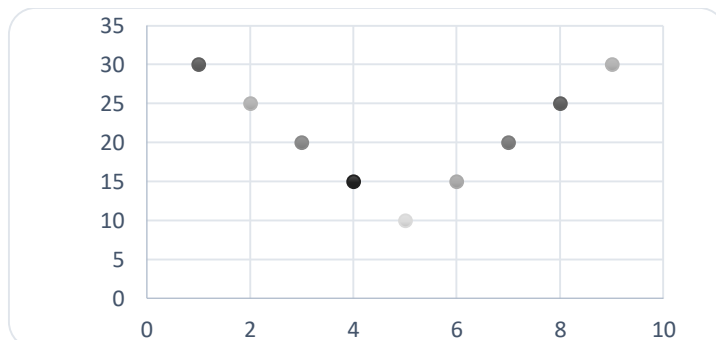
- א. ככל שמבלים יותר הציון נוטה לרדת.
- ב. אין קשר בין שעות הבילוי לציון.
- ג. ככל שמבלים פחות הציון נוטה לרדת.
- ד. ככל שהציון נוטה לרדת הסטודנט מבלה פחות.

9) התרשים הבא מתאר קשר בין שני משתנים, איזה מהמתאמים הבאים הוא המתאים ביותר לתיאור הקשר בין שני המשתנים?



- א. $r = 1$ היות ושני המשתנים יוצרים קוים ישרים.
- ב. $r = 2$ היות ויש שני קוים בעלי קשר מושלם.
- ג. $r = 0$ היות והקו יורד ואחר כך עולה באותו האופן.
- ד. $r = \pm 1$ היות ויש קו עולה וגם קו יורד.

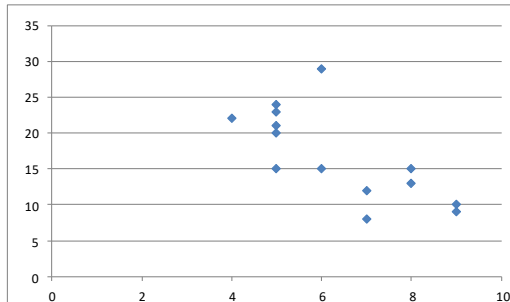
10) התרשים הבא מתאר דיאגרמת פיזור.



איזו טענה נכונה?

- א. בתרשים מוצג הקשר בין שני משתנים.
- ב. בתרשים מוצג הקשר בין 9 משתנים.
- ג. בתרשים מוצג הקשר בין 10 משתנים.
- ד. אין לדעת כמה משתנים מוצגים בתרשים.

בגרף הבא מתוארת דיאגרמת פיזור של שני משתנים:



X - (משתנה בלתי תלוי בציר האופקי)

Y - (משתנה תלוי).

במדגם התקבל $r^2 = 0.52$.

11) לאור הנתונים המופיעים בדיאגרמה, איזה מבין הערכים הבאים מתאים להיות התוצאה של r ?

א. -0.52

ב. 0.72

ג. -0.72

ד. 0.52

12) אם מקדם המתאם בין שני משתנים הוא 1, אזי:

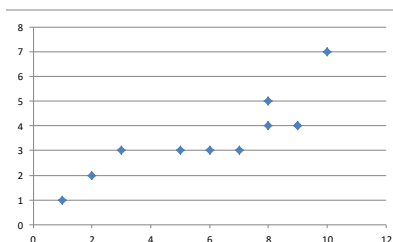
א. הערכים של המשתנים הם חיוביים.

ב. עבור כל תצפית ערך של משתנה אחד שווה לערך של המשתנה השני.

ג. הקשר הלינארי הוא בעוצמה חזקה.

ד. אף אחת מהתשובות לא בהכרח נכונה.

13) להלן דיאגרמת פיזור:



מה יהיה מקדם המתאם בין שני המשתנים?

א. 1

ב. 0.85

ג. 0.15

ד. 0

14) בבדיקת קשר בין שני משתנים התקבל: $r = -1$.

א. קיימת נוסחה לינארית הקושרת בין כל התצפיות.

ב. לא קיים קשר בין שני המשתנים.

ג. ככל שמשתנה אחד נוטה לרדת גם לשני יש נטייה לרדת.

ד. קיים קשר בין שני המשתנים, אך לא ניתן לדעת מאיזה סוג.

15) לפי הפתגם "רחוק מהעין, רחוק מהלב", יש קשר _____ בין קרבה פיזית לקרבה נפשית.

- א. חיובי
- ב. שלילי
- ג. אפסי
- ד. לא ניתן לדעת.

16) מבחן אמי"ר הינו מבחן מיון באנגלית של המרכז הארצי לבחינות והערכה. הציון המינימלי בבחינה הינו 150 והמקסימלי הינו 250. בקורס הכנה למבחן השתתפו 19 תלמידים. להלן הציונים שלהם על פי פלט שהתקבל:

	159
	170
	180
	185
	204
	224
	236
	212
	168
	189
	195
	163
	187
	206
	201
	223
	242
	203
	205
197.47	AVERAGE
536.25	VARPA

יש להוסיף עמודה נוספת לצד עמודת הציונים שתראה לכל תלמיד כמה נקודות חסרות לו כדי להשלים לציון המקסימלי בבחינה.

מה יהיה מקדם המתאם בין שתי העמודות (כלומר, מקדם המתאם בין הציון לבין הנקודות החסרות)?

- א. -1
- ב. 1
- ג. -0.5
- ד. 0.5

17) מקדם המתאם בין שטחי דירה למחיר שלהם חושב ונמצא 1.2. מה נובע מכך?

- א. ככל שהדירה גדולה יותר בשטחה כך היא יקרה יותר.
- ב. ככל שהדירה קטנה יותר בשטחה כך היא זולה יותר.
- ג. לא קיים קשר בין שטח הדירה למחיר הדירה.
- ד. מצב כזה שמתואר הנתונים לא אפשרי.

18) אם ניקח 10 אנשים ונרשום לכל אדם את הגובה במטר וכמו כן את הגובה בס"מ. מה יהיה מקדם המתאם בין גובה האדם במטר לגובה האדם בס"מ?

- א. 1
- ב. 0
- ג. -1
- ד. לא ניתן לדעת.

- 19** נמצא מתאם חיובי בעוצמה גבוהה בין X – ציון בבגרות בלשון ל Y – ציון בבגרות במתמטיקה. אילו מהמשפטים הבאים נכון?
- א. ניתן לומר שאחת מהסיבות להבדלים שיש לסטודנטים במתמטיקה נובעים מההבדלים שיש להם בלשון.
- ב. קיימת נוסחה של קו ישר שקושרת בין ציון בבגרות במתמטיקה לציון בבגרות בלשון.
- ג. ללא יוצא מן הכלל, ניתן להגיד שכל תלמיד שמצליח יותר מתלמיד אחר בלשון גם יצליח יותר מאותו תלמיד במתמטיקה.
- ד. אף אחד מהטענות שהוצגו אינה בהכרח נכונה.

- 20** עבור סדרה של תצפיות מדדו את X ואת Y . נמצא שעבור כל התצפיות שהערך של Y ירד הערך של X בהכרח ירד ללא יוצא מן הכלל. מקדם המתאם של פירסון יהיה בהכרח :

- א. 1
- ב. -1
- ג. 0
- ד. אף אחת מהתשובות.

תשובות סופיות

- (1) א. שעות בילוי.
ב. הקשר חלקי, כיוון הקשר שלילי.
(2) א. להלן טבלה:
ב. ספורט ולשון.

מתמטיקה	לשון	ספורט	
0.1	-0.7	1	ספורט
0.6	1	-0.7	לשון
1	0.6	-0.1	מתמטיקה

- (3) א. ב"ת- מס' שעות התרגול, תלוי- ציון.
ג. קשר לינארי חיובי חלקי.
(4) א. לעלות.
(5) א. חלקי, חיובי.
ב. קטן.
ב. ראה גרף בפתרון וידאו.
ד. מקדם המתאם לא היה משתנה.
ב. לא ישפיע על מקדם המתאם.

(6) ד' (7) ד' (8) א' (9) ג' (10) א'

(11) ג' (12) ד' (13) ב' (14) א' (15) א'

(16) א' (17) ד' (18) א' (19) ד' (20) ד'

מדדי קשר – מדד הקשר הלינארי (פירסון) – רקע

המטרה היא לבדוק האם קיים קשר (קורלציה, מתאם) של קו ישר בין שני משתנים כמותיים. מבחינת סולמות המדידה קשר בין סולמות רווחים ומנה. בדרך כלל, X הוא המשתנה המסביר (הבלתי תלוי) ו- Y הוא המשתנה המוסבר (התלוי).

דוגמה:

נרצה להסביר כיצד השכלה של אדם הנמדדת בשנות לימוד X מסבירה את ההכנסה שלו Y . במקרה זה שנות ההשכלה זהו המשתנה המסביר (או הבלתי תלוי) ואנחנו מעוניינים לבדוק כיצד שינויים בשנות ההשכלה של אדם יכולים להסביר את השינויים שלו בהכנסה, ולכן רמת ההכנסה זהו המשתנה המוסבר התלוי במשתנה המסביר אותו.

שלב ראשון: נהוג לשרטט דיאגרמת פיזור. זו דיאגרמה שנותנת אינדיקציה ויזואלית על טיב הקשר בין שני המשתנים.

דוגמה:

מס' דירה	X	Y
1	3	2
2	2	2
3	4	3
4	3	3
5	5	4

בבניין של 5 דירות בדקו את הנתונים הבאים:
 X - מס' חדרים בדירה. Y - מס' נפשות הגרות בדירה.
 להלן התוצאות שהתקבלו:

נשרטט מנתונים אלה דיאגרמת פיזור (הדיאגרמה המלאה בסרטון). נתבונן בכמה מקרים של דיאגרמות פיזור וננתח אותן (הדיאגרמות המלאות בסרטון).

שלב שני: מחשבים את מקדם המתאם (מדד הקשר) שבודק עד כמה קיים קשר לינארי בין שני המשתנים. המדד (ניקרא גם מדד הקשר של פירסון) מכמת את מה שניראה בשלב הראשון רק בעין.
 המדד בודק את כיוון הקשר (חיובי או שלילי) ואת עוצמת הקשר (חלש עד חזק).
 מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין -1 ל-1.
 מקדם מתאם -1 או 1 אומר שקיים קשר לינארי מוחלט ומלא בין המשתנים שניתן לבטאו על ידי הנוסחה: $y = bx + a$.

מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1):

קיים קשר לינארי מלא בו השיפוע b יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי מלא אומר שקיים קשר לינארי מלא בו השיפוע b שלילי (מקדם מתאם -1).

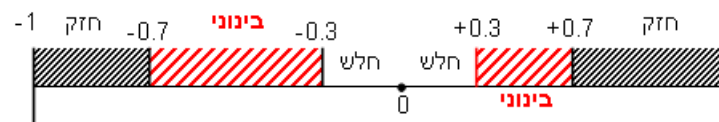
מתאם חיובי חלקי:

ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט.

מתאם שלילי חלקי:

ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט.

ככל שערך מקדם המתאם קרוב לאפס נאמר שעוצמת הקשר חלשה יותר וככל שמקדם המתאם רחוק מהאפס נאמר שעוצמת הקשר חזקה יותר:



מקדם המתאם יסומן באות r .

כדי לחשב את מקדם המתאם, יש לחשב את סטיות התקן של כל משתנה ואת השונות המשותפת.

$$COV(x, y) = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{n} = \frac{\sum xy}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y} : \text{שונות משותפת}$$

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2 : \text{שונות של המשתנה } X$$

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n} - \bar{y}^2 : \text{שונות המשתנה } Y$$

$$r_{xy} = \frac{COV(x, y)}{S_x \cdot S_y} : \text{מקדם המתאם הלינארי}$$

שאלות

- 1) להלן נתונים לגבי שישה תלמידים שנגשו למבחן. בדקו לגבי כל תלמיד את הציון שלו בסוף הקורס וכמו כן את מספר החיסורים שלו מהקורס.

מספר חיסורים	2	1	0	2	3	4
ציון	80	90	90	70	70	50

- א. שרטטו דיאגרמת פיזור לנתונים. מה ניתן להסיק מהדיאגרמה על טיב הקשר בין מספר החיסורים של תלמיד לציונו? מיהו המשתנה הבלתי תלוי ומיהו המשתנה התלוי?
- ב. חשבו את מדד הקשר של פירסון. האם התוצאה מתיישבת עם תשובתך לסעיף א'?
- ג. הסבירו, ללא חישוב, כיצד מקדם המתאם היה משתנה אם היה מתווסף תלמיד שהחסיר 4 פעמים וקיבל ציון 80?

X	Y
10	12
14	15
15	15
18	17
20	21

- 2) במחקר רפואי רצו לבדוק האם קיים קשר בין רמת ההורמון X בדם החולה לרמת ההורמון Y שלו. לצורך כך מדדו את רמת ההורמונים ההלו עבור חמישה חולים. להלן התוצאות שהתקבלו:
- א. מה הממוצע של כל רמת הורמון?
- ב. מהו מקדם המתאם בין ההורמונים? ומה משמעות התוצאה?

- 3) נסמן ב-X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב-Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 200 \qquad \sum_{i=1}^{20} X_i = 240$$

$$\sum_{i=1}^{20} (Y_i - \bar{Y})^2 = 76 \qquad \sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})^2 = 76$$

$$\sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = 60.8$$

- א. חשב את מדד הקשר הלינארי בין X ל-Y. מיהו המשתנה התלוי?
- ב. מה המשמעות של התוצאה שקיבלת בסעיף א'?

- (4) נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 200 \quad \sum_{i=1}^{20} X_i = 240$$

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i^2 = 2080 \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 2960$$

$$\sum_{i=1}^{20} X_i Y_i = 2464$$

חשבו את מדד הקשר הלינארי בין X ל- Y .

- (5) במוסד אקדמי ציון ההתאמה מחושב כך: מכפילים את הציון הממוצע בבגרות ב-3 ומפחיתים 2 נקודות. ידוע שעבור 40 מועמדים סטיית התקן של ממוצע הציון בבגרות הייתה 2.
מה מקדם המתאם בין ציון ההתאמה לציון הממוצע בבגרות שלהם?

- (6) להלן רשימת טענות, לגבי כל טענה קבעו נכון/לא נכון ונמקו.
- מתווך דירות המיר מחירי דירות מדולר לשקל. נניח שדולר אחד הוא 3.5 ₪. אם מתווך הדירות יחשב את מדד הקשר של פירסון בין מחיר הדירה בשקלים למחיר הדירה בדולרים הוא יקבל 1.
 - לסדרה של נתונים התקבל $\bar{X} = \bar{Y} = 6$, $S_x = S_y = 1$. לכן, מדד הקשר של פירסון יהיה 1.
 - אם השונות המשותפת של X ושל Y הינה 0 אז בהכרח גם מקדם המתאם של פירסון יהיה 0.

שאלות רב-ברירה:

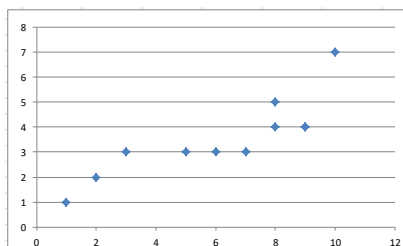
- (7) נמצא שקיים מקדם מתאם שלילי בין הציון בעברית לציון בחשבון בבחינה לכן:
- הדבר מעיד שהציונים בכתה היו שליליים.
 - ככל שהציון של תלמיד יורד בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.
 - ככל שהציון של תלמיד עולה בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.
 - אף אחת מהתשובות לא נכונה.

8) נלקחו 20 מוצרים ונבדק ביום מסוים המחיר שלהם בדולרים והמחיר שלהם בש"ח (באותו היום ערך הדולר היה-4.2ש"ח). מהו מקדם המתאם בין המחיר בדולר למחיר בש"ח?

- א. 1
- ב. 0
- ג. 4.2
- ד. לא ניתן לדעת.

9) להלן דיאגרמת פיזור:

מה יהיה מקדם המתאם בין שני המשתנים?



- א. 1
- ב. 0.85
- ג. 0.15
- ד. 0

תשובות סופיות

- 1) א. משתנה תלוי: ציון, משתנה ב"ת: מס' חיסורים. ראה דיאגרמה בוידאו. ניתן להסיק שקיים קשר לינארי שלילי וחלקי בין מספר החיסורים לציון התלמיד.
ב. -0.9325.
ג. הקשר יישאר לינארי שלילי חלקי אך עוצמתו תחלש.
- 2) א. $\bar{y} = 16$, $\bar{x} = 15.4$ ב. $r_{xy} = 0.96$.
- 3) א. 0.8
- 4) 0.8
- 5) 1
- 6) א. נכון. ב. לא נכון. ג. נכון.
- 7) ג'.
- 8) א'.
- 9) ב'.

בדיקת השערות על מקדם המתאם הלינארי – רקע

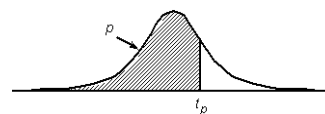
מדד הקשר הלינארי באוכלוסייה, שנקרא גם מקדם המתאם של פירסון או מדד הקשר של פירסון באוכלוסייה מסומן ב: ρ - פרמטר המאפיין את עוצמת הקשר הלינארי וכיוונו בין שני המשתנים הנחקרים באוכלוסייה. כאשר:
 r - מדד הקשר הלינארי במדגם שמהווה אומדן לפרמטר ρ .

השערת האפס: תהיה שבאוכלוסייה לא קיים כלל קשר לינארי בין שני המשתנים $H_0: \rho = 0$.
 ההנחה שעליה אנו מתבססים בתהליך היא ששני המשתנים הנחקרים מתפלגים דו נורמלית.

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \sim t(n-2)$$

סטטיסטי זה מתפלג t עם $n-2$ דרגות חופש.

$H_0: \rho = 0$	$H_0: \rho = 0$	$H_0: \rho = 0$	השערת האפס:
$H_1: \rho > 0$	$H_1: \rho < 0$	$H_1: \rho \neq 0$	השערת המחקר:
$t \geq t_{1-\alpha}$	$t \leq -t_{1-\alpha}$	$t \geq t_{1-\alpha}$ ו $t \leq -t_{1-\alpha}$	כלל ההכרעה: אזור דחייה של השערת האפס

טבלת ערכים קריטיים של t - נספח: טבלת התפלגות T
 P 

דרגות חופש	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9995
1	1.000	3.078	6.314	12.709	31.821	63.657	636.619
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.941
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

שאלות

(1) להלן נתונים על הוותק בעבודה (בשנים) ועל השכלה (בשנים) במדגם של 10 עובדים:

נחקר	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X - וותק	13	18	2	8	16	9	5	28	17	24
Y - השכלה	12	14	17	8	11	12	13	8	12	15

מקדם המתאם חושב והתקבל: -0.31 .

- א. האם קיים מתאם בין וותק העובד להשכלתו? בדקו ברמת מובהקות של 5%?
 ב. אם הוותק של העובד היה נמדד בחודשים האם התשובה לסעיף א' הייתה משתנה?

(2) מחקר התעניין לבדוק את הקשר בין גיל נשים בהריון לרמת ההמוגלובין שלהן בדם בזמן הריון. נדגמו 7 נשים והתקבלו התוצאות הבאות:

נחקרת	1	2	3	4	5	6	7
המוגלובין	14.7	13.5	9.7	12	10.8	13	10.3
גיל	39	34	30	29	28	26	23

במדגם חושב מדד הקשר של פירסון להיות 0.7 .

- א. האם ניתן לומר שבמדגם אם אישה היא יותר מבוגרת אזי בהכרח יש לה יותר המוגלובין בדם?
 ב. האם ניתן לומר, ברמת מובהקות של 5%, שקיים מתאם בין גיל האישה שבהריון לבין רמת ההמוגלובין שלה בדם?

(3) בתחנה המטאורולוגית רצו לבדוק את הקשר שבין הטמפרטורה במעלות צלזיוס לכמות המשקעים במ"מ. הם אספו נתונים על 10 ימים במהלך חודש ינואר. המתאם שהתקבל היה -0.8 .

- א. בדקו ברמת מובהקות של 2.5% האם קיים קשר לינארי שלילי בחודש ינואר בין הטמפרטורה במעלות צלזיוס לבין המשקעים במעלות צלזיוס.
 ב. כיצד הייתה משתנה התשובה לסעיף א אם הינו מוסיפים עוד תצפיות למדגם?
 ג. על סמך טבלת T המצורפת עבור אילו רמות מובהקות ניתן להחליט שקיים קשר לינארי שלילי מובהק?

(4) מתווך דירות חישב את מקדם המתאם בין שטח דירה במרכז תל אביב לבין המחיר של הדירה עבור 17 דירות. מקדם המתאם שקיבל היה 0.6 .

- א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם ניתן להגיד שקיים קשר ישר עולה בין שטח הדירה לבין מחיר הדירה במרכז תל אביב?
 ב. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת ההשערה שקיים קשר ישר עולה בין שטח הדירה לבין מחיר הדירה בתל אביב.

תשובות סופיות

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| ב. לא תשתנה. | (1) א. לא נדחה את H_0 . |
| ב. לא נדחה את H_0 . | (2) א. לא |
| ב. לא ניתן לדעת. | (3) א. נדחה את H_0 . |
| | ג. לפחות 0.005. |
| ב. $0.005 < P_v < 0.01$. | (4) א. נדחה את H_0 . |

סטטיסטיקה ב

פרק 14 - מדדי קשר- השפעת טרנספורמציה לינארית על פירסון

תוכן העניינים

1. כללי.....130

מדדי קשר – השפעת טרנספורמציה לינארית על פירסון:

רקע:

טרנספורמציה לינארית, בין אם נעשית על X , בין אם נעשית על Y , ובין אם נעשית על שניהם, אינה משנה את עוצמת הקשר. היא עלולה רק לשנות את כיוונו אם השיפועים של שתי הטרנספורמציות שוני סימן.

$$r_{[(aX+b), (cY+d)]} = \begin{cases} r_{x,y} & \text{if } a \cdot c > 0 \\ -r_{x,y} & \text{if } a \cdot c < 0 \end{cases}$$

שאלות:

- (1) מבחן בנוי משני חלקים : חלק כמוותי וחלק מילולי. מקדם המתאם בין שני הציונים של שני החלקים הוא 0.9.
- א. אם יעלו את כל הציונים בחלק המילולי ב-20%, מה יהיה מקדם המתאם בין הציון המילולי החדש לציון הכמותי ובין הציון המילולי הישן לציון המילולי החדש?
- ב. נגדיר משתנה חדש W להיות המרחק של הציון בחשיבה מילולית מהציון המקסימאלי בבחינה-150. מצאו את מקדם המתאם בין הציון המילולי ל- W ובין W לציון הכמותי.
- (2) מקדם המתאם בין ההכנסה לבין ההוצאה של 10 משפחות חושב והתקבל 0.7. אם חל גידול של 5% בהכנסת האוכלוסייה כולה וגידול של 7% בהוצאה שלה, מה יהיה מקדם המתאם בין ההכנסה החדשה להוצאה החדשה?
- (3) חברת "לק" המייצרת גלידה החליטה לערוך מחקר לבדיקת הקשר בין מספר חבילות הגלידה הנמכרות ביום לבין הטמפרטורה באותו יום. נבדקו 10 ימים והתקבל מתאם לינארי 0.85. חברת "לק" דואגת להתחיל כל יום עם מלאי של 150 חבילות גלידה. בנוסף, מעוניינים כי הטמפרטורה תבוטא במעלות פרנהייט במקום במעלות צלסיוס. מה ערכו של מקדם המתאם בין מספר חבילות הגלידה שנשארות בסוף היום לבין הטמפרטורה במעלות פרנהייט?
- הקשר בין מעלות צלסיוס (C°) למעלות פרנהייט (F°) נתון ע"י: $F = \frac{9}{5}C + 32$.
- בחרו בתשובה הנכונה:
- א. 0.85.
- ב. 0.85-.
- ג. 1.
- ד. לא ניתן לדעת.
- (4) מקדם המתאם בין X ל- Y הנו 0.4. כל ערכי ה- X הוכפלו ב-2. מה יהיה מקדם המתאם החדש בין שני המשתנים?
- א. 0.8.
- ב. 0.4.
- ג. 0.4-.
- ד. לא ניתן לדעת.

תשובות סופיות:

- (1) א. בין הציון המילולי הישן לחדש : 1. בין הציון המילולי החדש לכמותי : 0.9.
ב. בין W לציון המילולי : -1, בין W לציון הכמותי : -0.9.
- (2) 0.7.
- (3) ב'.
- (4) ב'.

סטטיסטיקה ב

פרק 15 - בניית קו רגרסיה

תוכן העניינים

1. כללי 133

מדדי קשר – רגרסיה ליניארית:

רקע:

במידה וקיים קשר חזק בין שני המשתנים הכמותיים נהוג לבצע ניבוי. לבנות קו ניבויים הנקרא גם קו רגרסיה המנבא משתנה אחד על סמך האחר. מדובר בקו שמנבא את Y על סמך X .

השיטה למציאת הקו הנ"ל נקראת שיטת הריבועים הפחותים והקו המתקבל נקרא קו הרגרסיה או קו הניבויים או קו הריבועים הפחותים.

a - נותן את ערך Y כאשר X הנו אפס על גבי קו הניבויים. הוא נקרא החותך של הקו.

b - הוא שיפוע הקו נותן בכמה בעצם Y משתנה כאשר X גדל ביחידה אחת על גבי קו הניבויים.

להלן המשוואות למציאת הפרמטרים של קו הרגרסיה: $Y = bX + a$, $b = r \frac{S_y}{S_x}$.

לצורך בניית קו ניבויים לניבוי X על סמך Y נצטרך לעדכן את הנוסחאות בהתאם.

שאלות:

- (1) נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 200, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i = 240$$

$$\sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})^2 = 76, \quad \sum_{i=1}^{20} (Y_i - \bar{Y}) = 76$$

$$\sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = 60.8$$

- א. חשבו את מדד הקשר הלינארי בין X ל- Y . מיהו המשתנה התלוי?
 ב. מצאו את קו הרגרסיה לניבוי ההוצאה של משפחה על סמך הכנסה שלה. הסבירו את משמעות הפרמטרים של קו הרגרסיה.
 ג. משפחת כהן הכניסה 15,000 ₪. מה ההוצאה הצפויה שלה?

- (2) נסמן ב- X את ההשכלה של אדם בשנות לימוד. נסמן ב- Y את הכנסתו באלפי ₪. במחקר התקבלו התוצאות הבאות:

$$S_x = 2, \quad S_y = 5, \quad \bar{X} = 14, \quad \bar{Y} = 8, \quad \text{COV}(X, Y) = 7.5$$

- א. חשבו את מדד הקשר של פירסון בין ההשכלה להכנסה.
 ב. מה ההכנסה הצפויה לאדם שהשכלתו 12 שנים?
 ג. מה ההשכלה הצפויה לאדם שהכנסתו 10,000 ₪?

- (3) חוקר רצה לחקור את הקשר הקווי שבין הציון המבחן בסטטיסטיקה לבין מספר שעות ההכנה של הסטודנטים למבחן. במדגם של 100 סטודנטים שנבחנו בקורס נרשמו התוצאות הבאות: הציון הממוצע של הסטודנטים היה 65 עם סטיית תקן של 27. מספר שעות ההכנה הממוצע היה 30 עם סטיית תקן של 18. מקדם המתאם בין הציון לשעות ההכנה היה 0.8.
 א. על פי משוואת הרגרסיה, שעת הכנה נוספת משפרת את ציון המבחן ב-?
 ב. על פי משוואת הרגרסיה, תלמיד שייגש למבחן ללא שעות הכנה כלל יקבל ציון?
 ג. מהו קו הרגרסיה לניבוי הציון לפי שעות ההכנה?

- (4) נתונים 2 משתנים X ו- Y . כמו כן נתון: $\bar{X} = 1.5, S_x = S_y = 4$,
 וכן שקו הרגרסיה של Y על בסיס X הינו: $Y = -0.2X + 0.5$.
 חשבו מהו מקדם המתאם בין X ל- Y .

תשובות סופיות:

- | | | |
|----------------------|-----------------------|-------------|
| ג. 12.4 אלפי ₪. | ב. $Y = 0.8X + 0.4$. | א. 0.8. (1 |
| ג. 14.6 שנים. | ב. 4.25 אלפי ₪. | א. 0.75. (2 |
| ג. $Y = 1.2X + 29$. | ב. 29. | א. 1.2. (3 |
| | | א. -0.2. (4 |

סטטיסטיקה ב

פרק 16 - מדדי קשר-רגרסיה - שונות מוסברת ושונות לא מוסברת

תוכן העניינים

1. כללי 136

מדדי קשר – רגרסיה – שונות מוסברת ושונות לא מוסברת:

רקע:

המטרה ברגרסיה היא להסביר את השונות של המשתנה התלוי. למשל, להסביר את השונות של המשכורת באמצעות הוותק או להסביר את השוני בציונים באמצעות כמות החיסורים.

r^2 - החלק מהשונות של המשתנה התלוי מוסבר. השונות המוסברת נקראת גם שונות ניבויים. השונות הלא מוסברת נקראת גם שונות טעויות.

שאלות:

- (1) נמצא קשר חיובי בעוצמה של 0.7 בין שטח דירה למחירה. כמו כן, נתון שסטיית התקן של מחירי הדירות הינה 200.
- איזה אחוז מהשונות של מחירי הדירות מוסבר על ידי שטח הדירה?
 - איזה אחוז מהשונות של מחירי הדירות לא מוסבר על ידי שטח הדירה?
 - מהי השונות המוסברת ומהי השונות הלא מוסברת של מחירי הדירות?
- (2) להלן רשימת טענות, לגבי כל טענה קבעו נכון/לא נכון ונמקו:
- אם שונות הטעויות שווה ל-0 (השונות הלא מוסברת) אז מקדם המתאם של פירסון יהיה 1.
 - אם מקדם המתאם של פירסון בין שני משתנים הוא 1 אזי שונות הטעויות (השונות הלא מוסברת) תהיה 0.
 - אם השונות המשותפת של X ושל Y היא 0 אז בהכרח גם מקדם המתאם של פירסון יהיה 0.

שאלות רב-ברירה:

- (3) בקשר בין שני משתנים התקבל: $r^2 = 0.64$, לכן:
- ללא יוצא מן הכלל ככל שערכי משתנה אחד עולה השני יעלה.
 - 64% מהשונות של משתנה אחד מוסבר על ידי המשתנה השני.
 - הקשר בין שני המשתנים הוא בעוצמה של 0.64.
 - כל התשובות נכונות.
- (4) אם מגדילים את r^2 , ניתן לומר כי:
- אחוז השונות המוסברת יקטן.
 - אחוז השונות המוסברת יגדל.
 - אחוז השונות המוסברת יישאר ללא שינוי.
 - סטיית התקן משתנה.
 - לא ניתן לדעת.

- (5) בקורס מבוא לכלכלה ניתנו במשך השנה שני מבחנים : מבחן בסוף סמסטר א' X ומבחן בסוף סמסטר ב' Y . כאשר בנו את קו הרגרסיה של הציון במבחן סוף סמסטר ב' לפי הציון במבחן סוף סמסטר א' התקבלה שונות טעויות של 80, ושונות ניבויים של 20.
- לפי נתונים אלו, מקדם המתאם בין הציון במבחן סוף סמסטר א' לבין הציון במבחן סוף סמסטר ב' הוא :
- א. 0.44
 - ב. - 0.44
 - ג. עוצמת ההקשר הלינארי היא 0.44, אך אין אפשרות לדעת את סימנה.
 - ד. אין אפשרות לחשב את מקדם המתאם.
 - ה. 0.35

תשובות סופיות:

- (1) א. 49% ב. 51%
ג. שונות מוסברת : 19,600, שונות לא מוסברת : 20,400
- (2) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון.
- (3) ב'.
- (4) ב'.
- (5) ג'.

סטטיסטיקה ב

פרק 17 - רגרסיה פשוטה

תוכן העניינים

1. כללי 139

הגרסיה פשוטה:

רקע:

הגרסיה ליניארית פשוטה מסתמכת על המתאם הליניארי בין המשתנה התלוי (המנובא) לב"ת (המנבא).

$$r = \frac{\text{cov}(x, y)}{S_x \cdot S_y} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2\right)} \cdot \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2\right)}} = \frac{S_{XY}}{\sqrt{S_{XX}} \cdot \sqrt{S_{YY}}} : \text{מקדם המתאם}$$

המודל באוכלוסייה: $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$

כאשר:

β_0 הוא החותך.

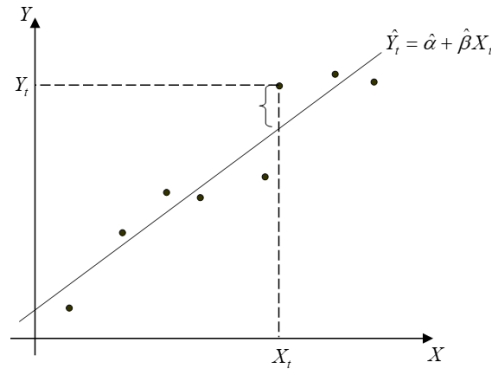
β_1 הוא שיפוע.

ε_i הינו גורם הטעות מסביב לקו הליניארי.

המודל הנאמד (על סמך מדגם): $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$

לסיכום:

1. במודל $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$, α ו- β הם מספרים קבועים אך לא ידועים. אנו יכולים להעריך אותם ולקבל אומדים (תהליך קבלת האומדנים נקרא אמידה).
2. $\hat{\alpha}$ הוא האומד ל- α . $\hat{\beta}$ הוא האומד ל- β .
3. אומדי ריבועים פחותים (אר"פ) הם אומדים שחושבו בשיטת הריבועים הפחותים. אומדי הריבועים הפחותים מסומנים בד"כ ע"י 'כובעי' - $\hat{\beta}, \hat{\alpha}$.
4. בעוד α ו- β הם קבועים, $\hat{\alpha}$ ו- $\hat{\beta}$ הם משתנים מקריים. מדוע? מפני שבכל מדגם מתקבלים $\hat{\alpha}$ ו- $\hat{\beta}$ אחרים.
5. את α ו- β אי אפשר לדעת, ולכן אי אפשר לדעת מהו הקו האמיתי, וכן אי אפשר לדעת את ε .
6. אפשר לדעת את e , שהיא הסטייה מקו הרגרסיה. נגדיר זאת באופן הבא:
 - עבור X_i , הערך הצפוי של המשתנה המוסבר ($\hat{Y}_i$) המתקבל לפי הרגרסיה הוא: $\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i$.
 - הסטייה של התצפית (Y_i) מהערך הצפוי לפי הרגרסיה ($\hat{Y}_i$) היא: $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$.



האומדים של הרגרסיה $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$:

שיטת האמידה של α ושל β נקראת שיטת הריבועים הפחותים
Ordinary Least Squares (OLS).

השאלה הנשאלת בשיטת אמידה זו היא:

איזה $\hat{\alpha}$ ו- $\hat{\beta}$ יביאו למינימום את סכום ריבועי טעויות האמידה.

ובתרגום מתמטי:

$$\min_{\hat{\alpha}, \hat{\beta}} \sum e_t^2 = \min_{\hat{\alpha}, \hat{\beta}} \sum (y_t - \hat{y}_t)^2 = \min_{\hat{\alpha}, \hat{\beta}} \sum \left[y_t - (\hat{\alpha} + \hat{\beta} x_t) \right]^2 = ?$$

מתוך גזירת הפונקציה הזו מתקבלים האומדים $\hat{\alpha}$ ו- $\hat{\beta}$:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{COV(X, Y)}{V(X)} = r \frac{S_Y}{S_X}$$

מבחני המובהקות:

השערות: $H_0: \beta = 0$

$H_1: \beta \neq 0$

ברגרסיה פשוטה בה יש לנו רק מנבא אחד: ניתן לבצע מבחן F למובהקות משוואת הרגרסיה או מבחן T למובהקות מקדם הרגרסיה (הביטא).

משמעות דחיית השערת האפס: משוואת הרגרסיה מובהקת, מקדם הרגרסיה

מובהק, הקשר בין X ל- Y מובהק.

ולהיפך – אם השערת האפס לא נדחית: אין הוכחה לקשר בין המשתנים X ו- Y ,

משוואת הרגרסיה איננה מובהקת וכך גם מקדם הרגרסיה.

אמידת שונות הטעויות:

$$\hat{\sigma}^2 = MSE = \frac{SSE}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n-2} = \frac{(1-r^2)SST}{n-2}$$

מבחן F :

מבחן זה נעשה על מנת לבדוק האם משוואת הרגרסיה מובהקת.

המבחן מתבסס על פירוק סכום הריבועים: $SST = SSR + SSE$

$$S_Y^2 = r^2 S_Y^2 + (1-r^2) S_Y^2$$

טבלת ניתוח שונות (טבלת ANOVA):

מקור	סכום ריבועים SS	דרגות חופש d.f.	ממוצע סכום ריבועים $MS = \frac{SS}{d.f.}$	F
מודל הרגרסיה	SSR	1	$MSR = \frac{SSR}{1}$	$\frac{MSR}{MSE}$
שאריות	SSE	n-2	$MSE = \frac{SSE}{n-2}$	
סה"כ	SST	n-1		

כלל הכרעה:

אם: $F_{st} > F_c \alpha(1, n-2)$ נדחה את השערת האפס.

מבחן t:

מבחן זה נעשה על מנת לבדוק האם מקדם הרגרסיה מובהק.

$$t_{st} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{1,0}}{s.e.(\hat{\beta}_1)} \sim t_{c(n-2)} \quad \text{סטטיסטי המבחן}$$

$$t_{stt} = \frac{r^2 \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \quad \text{אם השערת האפס מתייחסת ל-} \beta_0 \text{ (בדרי"כ):}$$

כלל הכרעה:

השערה דו צדדית $H_1: \beta_1 \neq \beta_{1,0}$	השערה חד צדדית שמאלית $H_1: \beta_1 < \beta_{1,0}$	השערה חד צדדית ימנית $H_1: \beta_1 > \beta_{1,0}$	
$t_{statistic} \geq t_{n-2, 1-\alpha}$			סטטיסטי המבחן
$P(t_{n-2} > t_{statistic})$	$ t_{statistic} \geq t_{n-2, 1-\alpha/2}$	$t_{statistic} \leq -t_{n-2, 1-\alpha}$	אזור דחייה
$t_{statistic} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{1,0}}{s.e.(\hat{\beta}_1)} = \frac{r^2 \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$	$2 * P(t_{n-2} > t_{statistic})$	$P(t_{n-2} > t_{statistic})$	P-VALUE

שימו לב כי במודל של רגרסיה ליניארית פשוטה ערך ה- t סטטיסטי

שהתקבל שווה בדיוק לשורש של ערך F המחושב: $t = \sqrt{F}$
 $Pvalue = Pvalue$

שאלות:

קו הרגרסיה:

(1) מתווך דירות בתל אביב רצה לבדוק איך משפיע גודלה של דירה על המחיר שבו

היא נמכרת. הוא הניח 2 הנחות מקדימות:

1. רק גודל הדירה משפיע על מחיר הדירה באופן שיטתי. כל שאר הדברים המשפיעים על מחיר הדירה הם אקראיים ולא ניתנים לחיזוי.

2. ההשפעה של גודל הדירה על מחיר הדירה היא ליניארית.

גודל הדירה הינו X ומחיר הדירה הינו Y . מודל המתווך: $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon$.

המתווך אסף נתונים על 6 דירות, שנמכרו בחודש האחרון באותו אזור:

מספר הדירה	גודל הדירה במ"ר	מחיר הדירה באלפי דולרים
1	$X_1 = 70$	$Y_1 = 190$
2	$X_2 = 70$	$Y_2 = 210$
3	$X_3 = 80$	$Y_3 = 250$
4	$X_4 = 100$	$Y_4 = 290$
5	$X_5 = 120$	$Y_5 = 360$
6	$X_6 = 120$	$Y_6 = 380$

א. מקדם המתאם בין גודל הדירה למחיר הדירה. מה משמעותו?

ב. קו הרגרסיה לניבוי מחיר הדירה באמצעות גודל הדירה ופרשו את משמעות המקדמים.

ג. המחיר החזוי על פי קו הרגרסיה של דירה בגודל 100 מ"ר.

מבחן F:

(2) בצעו מבחן F לבדיקת הקשר בין גודל הדירה למחירה ברמת מובהקות של 1%.

מבחן t:

(3) בהמשך לדוגמא הנ"ל:

א. בצעו מבחן t למובהקות מקדם הרגרסיה ברמת מובהקות של 1%.

ב. בדקו את הטענה כי עליה במ"ר אחד תעלה את מחיר הדירה ביותר מ-\$2000.

ג. מהו ה-pvalue של מובהקות הקשר בין גודל הדירה למחירה. מה משמעותו?

קשר בין מבחן F למבחן t:

4) חשבו את סטטיסטי המבחן F על סמך סטטיסטי המבחן t שקיבלתם. מה ה-pvalue של מבחן F?

5) חשבו רב"ס לאמידת מקדם הרגרסיה ברמת סמך של 0.99. השוו עם תוצאות מבחן t.

6) חשבו את אחוז השונות המוסברת של מחיר הדירה על ידי גודלה.

תרגול מסכם:

7) בפיצוציית "שלמה המלך" חושדים כי מספר הלקוחות המבקרים בפיצוצייה תלוי במחיר המכירה של הבירה במקום. לשם בדיקת הנושא ערכו ניסוי בו בכל שבוע שינו את מחיר הבירה במקום ומנו את מספר הלקוחות שהגיעו במשך אותו שבוע. משך הניסוי 7 שבועות עוקבים. להלן נתוני הניסוי:

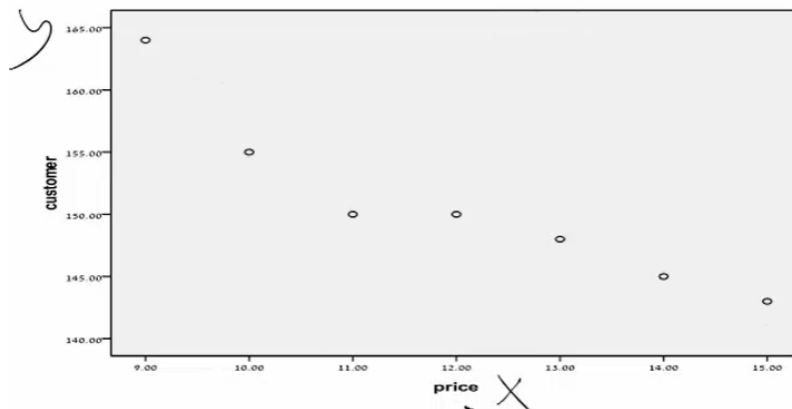
שבוע 7	שבוע 6	שבוע 5	שבוע 4	שבוע 3	שבוע 2	שבוע 1	
9	10	11	12	13	14	15	מחיר הבירה
164	155	150	150	148	145	143	כמות הלקוחות

- אמדו את מודל הרגרסיה ע"י חישוב מקדמי הרגרסיה.
- חשבו את מקדם המתאם r_{xy} .
- אמדו את השונות של שאריות המודל.
- בצעו בדיקה גראפית של אקראיות השאריות.
- חשבו את אחוז השונות המוסברת. מה משמעותה?
- בצעו חיזוי לכמות הלקוחות אם מחיר הבירה יהיה 16 ש"ח. האם להערכתכם ניתן להסתמך על חיזוי זה?
- בצעו מבחן F לבדיקה האם קיים קשר בין מחיר הבירה לבין כמות הלקוחות.
- בצעו מבחן t לבדיקה האם קיים קשר בין מחיר הבירה לבין כמות הלקוחות המבקרים בפיצוצייה ברמת מובהקות 5%. השוו את התוצאות.
- אמדו את מקדם הרגרסיה ברמת סמך של 0.95. השוו את התוצאה עם הסעיף הקודם.
- כתבו דו"ח קצר על הממצאים.

קריאת פלטים של SPSS:

8) על סמך הנתונים של השאלה הקודמת התקבלו הפלטים הבאים:

דיאגרמת הפיזור (scatter plot):



סטטיסטיקה תיאורית (descriptive statistics):

Descriptive Statistics			
	Mean	Std. Deviation	N
customer	150.7143	7.01699	7
Price	12.0000	2.16025	7

פלט מקדם המתאם (correlations):

Correlations			
		customer	Price
Pearson Correlation	customer	1.000	-.935
	price	-.935	1.000
Sig. (1-tailed)	customer	.	.001
	price	.001	.
N	customer	7	7
	price	7	7

פלט model summary :

Model Summary ^b				
Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.935 ^a	.873	.848	2.73470

a. Predictors: (Constant), price

b. Dependent Variable: customer

פלט ניתוח שונות (ANOVA) :

ANOVA ^b						
Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	258.036	1	258.036	34.503	.002
	Residual	37.393	5	7.479		
	Total	295.429	6			

a. Predictors: (Constant), price

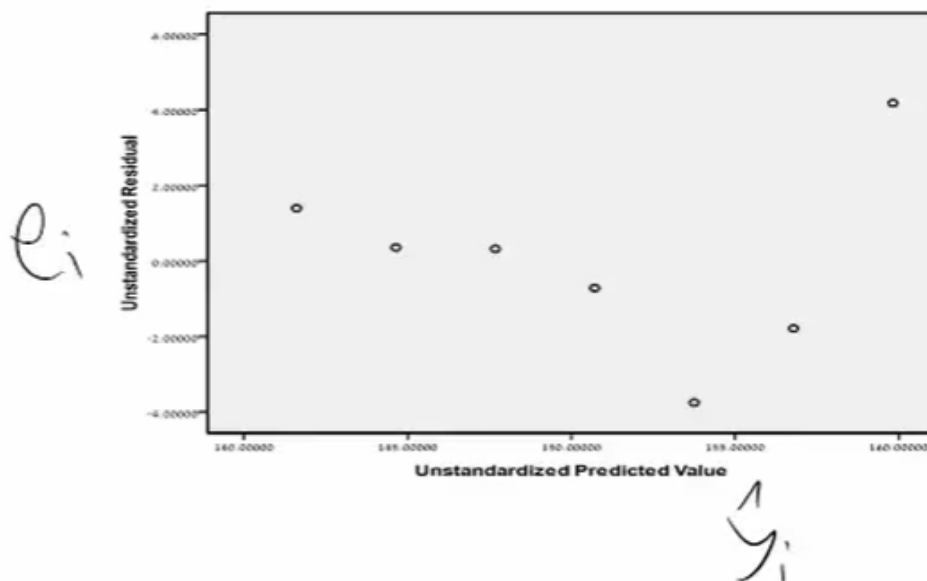
b. Dependent Variable: customer

פלט מקדמי הרגרסיה (coefficients) :

Coefficients ^a						
		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	187.143	6.287		29.765	.000
	Price	-3.036	.517	-.935	-5.874	.002

a. Dependent Variable: customer

גרף ניתוח שאריות:



על סמך הפלטים הנתונים :

- א. מהו מודל הרגרסיה שנאמד?
- ב. מהו מקדם המתאם r_{xy} ?
- ג. מהי השונות של שארית המודל?
- ד. האם נמצא דפוס מיוחד בשאריות?
- ה. מהו אחוז השונות המוסברת?
- ו. על פי מבחן F: האם קיים קשר בין מחיר הבירה לבין כמות הלקוחות המבקרים בפיצוצייה ברמת מובהקות 5%?
- ז. על פי מבחן t: האם קיים קשר בין מחיר הבירה לבין כמות הלקוחות המבקרים בפיצוצייה ברמת מובהקות 5%? השוו את התוצאות.
- ח. מה ה-pvalue של המבחנים הסטטיסטיים? מה משמעותו?
- ט. בדקו האם קיים קשר חיובי מובהק בין המשתנים ברמת מובהקות 5%?

תשובות סופיות:

- (1) א. $r = 0.987$. ב. $\hat{Y}_t = -27.32 + 3.29X_t$. ג. 301.68 אלף דולר.
- (2) $F_{st} = 21.198$, יש עדות לקשר מובהק.
- (3) א. $t_{stt} = 4.604$. ב. יש עדות לכך. ג. $pvalue < 0.001$.
- (4) $t_{stt}^2 = 147$, $pvalue < 0.001$.
- (5) $p(2.061 \leq \beta \leq 4.519) = 0.99$.
- (6) 97.4% .
- (7) א. $\hat{y}_i = 187.143 - 3.0357x_i$. ב. $r = -0.93457$. ג. $\hat{\sigma}^2 = 7.4785$.
- ד. ראו סרטון. ה. $R^2 = 0.873$. ו. $\hat{y} = 138.5714$, כן.
- ז. $F_{stt} = 34.5 > F_c 0.05(1,5) = 6.6$, יש עדות לכך. ח. $t_{st} = -5.87395$.
- ט. $p(-4.36 \leq \beta \leq -1.709) = 0.95$. י. ראו סרטון.
- (8) א. $\hat{y}_i = 187.143 - 3.036x_i$. ב. $r_{xy} = 0.935$. ג. $MSE = 7.479$.
- ד. לא. ה. $R^2 = 0.874$. ו. $F = 34.503$.
- ז. $t = -5.874$. ח. $pvalue = 0.002$. ט. ראו סרטון.

סטטיסטיקה ב

פרק 18 - רגרסיה - שאלות ממבחנים

תוכן העניינים

148	1. מבחן 1
152	2. מבחן 2

מבחן 1:

שאלות:

1) להלן תוצאות הרצת רגרסיה של Y בתלות ב-X עבור 10 תצפיות (חלק מהנתונים הושמטו בכוונה מהפלט, אך ניתנים לחישוב על ידך).

$$\sum (X_i - \bar{X})^2 = 1475.6 \quad \text{נתון כי:}$$

מקור	סכום ריבועים SS
רגרסיה	SSR = 2148.6
שאריות	SSE = ?
סה"כ	SST = ?

משתנה	מקדם	טעות תקן	ערך סטטיסטי (מתוקנן)	p-value מובהקות
	b_i	S_{b_i}	t	
קבוע (חותך)	-24.7	11.3	?	?
X	1.20	?	10.5	

א. מהו SST?

i. לא ניתן לקבוע.

ii. 1994.42

iii. 2304.1

iv. 1629.78

ב. האם הרגרסיה מובהקת? בדוק לפי p value.

i. הרגרסיה מובהקת.

ii. הרגרסיה אינה מובהקת.

(2) לפניך פלט רגרסיה פשוטה (ממנו הושמטו נתונים שבאפשרותך להשלים), המתאר את ציון המבחן כפונקציה של מספר התרגילים שהגיש הסטודנט במהלך הסמסטר, ידוע כי כל הנחות המודל תקפות.

SUMMARY OUTPUT

Regression Statistics	
Multiple R	0.842105598
R Square	0.709141839
Adjusted R Square	0.688366256
Standard Error	5.315523758
Observations	16

ANOVA

	Df	SS	MS	F	Significance F
Regression	1	964.4329004	964.4329004	34.13343	4.28E-05
Residual	14	395.5670996	28.25479283		
Total	15	1360			

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value
Intercept	50.99134199	4.318918368	11.80650747	1.15E-08
מספר התרגילים	4.086580087	0.699471573	5.842381939	4.28E-05

א. ע"פ הנתונים, אחוז השונות של ציוני המבחן המוסברת ע"י מספר התרגילים שהגיש הסטודנט, היא _____. אם נוסיף משתנים נוספים, אחוז השונות המוסברת _____, ו-Adjusted R _____.

i. 84%, יגדל, לא ניתן לקבוע ללא נתונים נוספים.

ii. 84%, יקטן, יגדל.

iii. 70.9%, יגדל, לא ניתן לקבוע ללא נתונים נוספים.

iv. 70.9%, יגדל, יקטן.

v. 68.8%, יגדל, יגדל.

vi. 68.8%, יקטן, יקטן.

ב. מהו הרב"ס של שיפוע הרגרסיה β_1 ? (בר"מ של 1%).

i. $2.58 < \beta < 5.58$

ii. $2 < \beta < 6.17$

iii. $1.74 < \beta < 6.88$

iv. $2.86 < \beta < 5.3$

במטרה לנבא בצורה טובה יותר את הצלחת הסטודנטים בבחינה, החליט החוקר להוסיף 2 משתנים נוספים לניתוח הרגרסיה. מספר השיעורים בהם נכח הסטודנט, ומספר השעות שלמד לבחינה. לפניכם הפלט החסר:

SUMMARY OUTPUT				
Regression Statistics				
Multiple R	0.880163577			
R Square	0.774687922			
Adjusted R Square	0.718359902			
Standard Error	5.053253294			
Observations	16			
ANOVA				
	df	SS	MS	F
Regression	3	?	351.1918579	13.75315
Residual	12	306.4244263	25.53536886	
Total	15	?		

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value
Intercept	37.08959571	8.726136945	4.250402663	0.001127
מספר השיעורים	2.610000755	1.429904588	1.82529714	0.092932
מספר התרגילים	3.198068014	1.239162836	2.58082951	0.024061
שעות לימוד לבחינה	-0.108373802	1.021202927	-0.106123669	0.917238

ג. בדוק את ההשערה כי הרגרסיה מובהקת לכל אחד מהמשתנים המסבירים בר"מ של 1%.

- i. הרגרסיה אינה מובהקת לכל המשתנים שנבדקו.
- ii. לא ניתן לקבוע מהנתונים האם הרגרסיה מובהקת.
- iii. הרגרסיה מובהקת למשתנה מספר התרגילים, אך אינה מובהקת למשתנים מספר השיעורים ומספר שעות הלימוד לבחינה.
- iv. הרגרסיה מובהקת למשתנה מספר התרגילים ומספר השיעורים, אך אינה מובהקת למשתנה שעות הלימוד לבחינה.

ד. מהו SSR של הרגרסיה המרובה?

- i. $SSR = 964.4$
- ii. $SSR = 1053.57$
- iii. $SSR = 694.57$
- iv. $SSR = 853.57$
- v. לא ניתן לחשב את SSR מהנתונים שהתקבלו.

תשובות סופיות:

- (1) א. iii. ב. i.
(2) א. iii. ב. ii. ג. i. ד. ii.

מבחן 2:

שאלות:

- (1) הועלתה השערה שהוצאות האחזקה של מערכת לעיבוד נתונים קשורות למספר שעות השימוש השבועיות במערכת. להלן תוצאות חלקיות של פלט EXCEL של ניתוח רגרסיה בין Y הוצאות אחזקה שנתיות (במאות \$) ו-X מספר שעות השימוש השבועיות.

SUMMARY OUTPUT

Regression Statistics					
Multiple R					
R Square					
Adjusted R Square					
Standard Error					
Observations 10					
ANOVA					
	df	SS	MS	F	Significance F
Regression		860.051			0.00012
Residual					
Total		1004.525			
	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	
Intercept	10.528	3.745		0.023	
שעות שימוש	0.953		6.901		

א. לאור התוצאות ה-p-value בבדיקת ההשערה: $H_0: \beta_1 \leq 0.5$.
 $H_1: \beta_1 > 0.5$

- i. $P_v < 0.005$
- ii. $0.005 < P_v < 0.01$
- iii. $0.01 < p_v < 0.025$
- iv. $0.025 < p_v < 0.05$
- v. $P_v > 0.05$

ב. אם היינו מריצים רגרסיה בה Y מספר שעות השימוש השבועיות ואילו המשתנה המסביר X , הוצאות אחזקה שנתיות (במאות \$), אזי השיפוע של קו הרגרסיה יהיה:

- i. 0.953
- ii. 1.049
- iii. 10.528
- iv. 0.095
- v. 0.898

2) הועלתה השערה שמספר התקלות ברכב Y קשורה לגיל הנהג X . לשם כך נלקח מדגם של 10 נהגים.

כמו כן חושבו הסכומים הבאים:

$$\sum X_i^2 = 14,227, \sum X_i = 363, \sum Y_i = 13, \sum Y_i^2 = 29, \sum X_i Y_i = 366$$

$$\hat{Y} = 4.96 - 0.1X_i \quad \text{על ידי:}$$

א. ערכו של מקדם המתאם הליניארי בין מספר התקלות לבין גיל הנהג הוא:

- i. -10.59
- ii. -0.9395
- iii. 0.8826
- iv. -0.1

החוקר לא היה מרוצה מעוצמת הקשר ולכן החליט להוסיף לרגרסיה את המשתנים הבאים: מספר הק"מ שהמכונית נסעה (באלפי ק"מ) וסוג הרכב. במדגם נכללו 2 סוגי רכבים: A ו-B כאשר סוג B קודד כערך 0 וסוג רכב A קודד כערך 1. להלן פלט הרגרסיה המרובה. שימו לב כי חלק מהערכים בפלט חסרים:

SUMMARY OUTPUT

Regression Statistics	
Multiple R	
R Square	
Adjusted R Square	
Standard Error	0.204047
Observations	10

ANOVA				
	df	SS	MS	F
Regression	3			0.00002
Residual	6	0.249811		
Total	9			

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value
Intercept	1.407943	0.71094		
X1 גיל הנהג	-0.03094	0.014611		
X2 סוג הרכב	0.239574	0.152994		
X3 ק"מ באלפים	0.027666	0.005329		

- ב. להלן מספר טענות לגבי מובהקות הרגרסיה ומובהקות המשתנה סוג הרכב ברמת מובהקות 0.1 :
- הרגרסיה מובהקת והמשתנה סוג הרכב מובהק ברמת מובהקות 0.1.
 - הרגרסיה מובהקת, אך המשתנה סוג הרכב אינו מובהק ברמת מובהקות 0.1.
 - הרגרסיה אינה מובהקת, אך המשתנה סוג הרכב מובהק ברמת מובהקות 0.1.
 - הרגרסיה והמשתנה סוג הרכב אינם מובהקים ברמת מובהקות 0.1.
- ג. SST בפלט הרגרסיה המרובה שווה ל :
- 12.1
 - 16.0
 - 20.0
 - אין מספיק נתונים לחשב.
- ד. לאור התוצאות, רב"ס למקדם המשתנה מספר הקילומטרים, בר"מ 5% :
- (0.015, 0.04)
 - (0.017, 0.038)
 - (0.02, 0.035)
 - אין מספיק נתונים לחשב.

ה. אם היינו מקודדים את סוג רכב B כערך 1 וסוג רכב A קודד בערך 0 משוואת הרגרסיה הייתה:

i. נשאר ללא שינוי.

$$\hat{Y} = 1.4079 - 0.0309X_{1i} - 0.2395X_{2i} + 0.0276X_{3i} \quad \text{ii.}$$

$$\hat{Y} = 1.6475 - 0.0309X_{1i} - 0.2395X_{2i} + 0.0276X_{3i} \quad \text{iii.}$$

iv. לא ניתן לדעת ללא הרצה מחדש.

ו. החוקר רצה להוסיף משתנה מסביר נוסף X_4 מספר השנים שחלפו מאז קבלת רישיון הנהיגה. להלן פלט הרגרסיה (חלק מהנתונים חסרים) עם 4 המשתנים המסבירים:

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value
Intercept	1.5	0.71		
X1 גיל הנהג	5.1	14.1		
X2 סוג הרכב	0.25	0.2		
X3 ק"מ באלפים	0.02	0.008		
מס' השנים שחלפו מאז	-5.13094			
X4 קבלת רישיון		0.8		

על סמך נתונים אלו:

- חשש סביר למולטיקוליניאריות.
- התחזית הנקודתית של מספר התקלות תהיה דומה לזו של הרגרסיה (הקודמת) עם 3 המשתנים המסבירים.
- קיימת קורלציה גבוהה בין חלק מהמשתנים המסבירים.
- כל התשובות נכונות.

3 במפעל מסוים הורץ מודל של רגרסיה ליניארית פשוטה על 8 עובדים כאשר Y תפוקת העובד ו- X גיל העובד. נמצא שהחלק המוסבר על ידי הרגרסיה הוא 74. הטעויות שהתקבלו מופיעות בחלקן בטבלה שלהלן:

e_8	e_7	e_6	e_5	e_4	e_3	e_2	e_1
0	2	-2	2	?	2	-3	0

אחת מהטענות שלהלן נכונה:

- מקדם ההסבר בין X ל- Y הוא 0.74.
- לא ניתן לחשב את מקדם המתאם המרובה.
- $SSR = 18$.
- $SSE = 74$.
- אף אחת מהטענות איננה נכונה.

תשובות סופיות:

- (1) א. ii. ב. v.
(2) א. ii. ב. i. ג. i. ד. i. ה. ii. ו. iv.
(3) א'.