סדנת ריענון במתמטיקה - מעודכן

תוכן העניינים

1. חוקי החזקות והשורשים 1
2. משוואות אלגבריות 11
3. הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות .... (ללא ספר)
4. מבוא לתורת הקבוצות 33
5. אי שוויונים אלגבריים 43
6. קווים ותחומים במישור 59
7. חקירת משוואה ממעלה ראשונה 66
8. חקירת משוואה ממעלה שנייה 78
9. נוסחאות וייטה 92
10. חשבון דיפרנציאלי - חילוק פולינומים ופתרון משוואות פולינומיאליות 94
11. משוואות ואי-שוויונים מעריכיים 99
12. חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים 109
13. הפונקציה הממשית - תכונות מתקדמות 125
14. סדרות 147
15. סימן הסכימה (סיגמה) 171
16. אינדוקציה מתמטית 174
17. הבינום של ניוטון 189
18. גיאומטריה אנליטית - נקודה וישר 193
19. גיאומטריה אנליטית - המעגל 218
20. וקטורים גיאומטריים 237
21. טריגונומטריה במשולש ישר זווית 251
22. זהויות טריגונומטריות 256
23. משוואות טריגונומטריות 277

תוכן העניינים

24. טריגונומטריה במישור 298

סדנת ריענון במתמטיקה - מעודכן

פרק 1 - חוקי החזקות והשורשים

תוכן העניינים

1. חוקי החזקות 1
2. חוקי השורשים 6
3. כתיבה מדעית של מספרים 10

חוקי החזקות:

סיכום כללי:

סיכום חוקי החזקות:

1. $a^0=1$
2. $a^1=a$
3. $a^n\cdot a^m=a^{m+n}$
4. $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$
5. $\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$
6. $a^m\cdot b^m=\left(a\cdot b\right)^m$
7. $\frac{a^m}{b^m}=\left(\frac{a}{b}\right)^m$
8. $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$
9. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}=\left(\frac{b}{a}\right)^m$

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^na^m=a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$.

א. a^2a^6
ב. $t^3t^5t^7$
ג. $b^2b^5b^{12}b^3$
ד. $\frac{k^8}{k^3}$
ה. $\frac{n^{14}}{n^9}$
ו. $\frac{c^6}{c^2}$
ז. $\frac{a^3a^{19}}{a^{15}}$
ח. $\frac{x^{30}}{x^9x^{18}}$
ט. $\frac{y^3y^{15}}{y^4y^{14}}$
י. $3^23^33^4$
יא. $\frac{2^{16}2^2}{2^{10}}$
יב. $\frac{5^{20}5^35^{16}}{5^45^{22}5^8}$

2) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^na^m=a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$.

א. $\frac{3^42^7}{2^63^2}$
ב. $\frac{a^{10}b^{13}a^3}{b^4b^6b^2a^{12}}$
ג. $\frac{x^8y^5y^9x^2}{y^4x^4}$

3) לפניך הביטוי הבא: $\frac{3^62^{17}3^32^4}{3^42^32^2}$.
מצא n כך שיתקיים שוויון בין הביטוי $243\cdot 2^n$ לבין הביטוי הנתון.

4) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{2^3\cdot 2^7}{2^4\cdot 2^5}$ ב. $\frac{9^3\cdot 27^2}{3^9\cdot 81}$

ג. $\frac{10^9\cdot 25^5\cdot 8^{-1}}{40^3\cdot 125^5}$ ד. 2^3+2^5

5) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוק: $\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$.

א. $\left(a^2\right)^4$ ב. $\left(c^3\right)^{10}$ ג. $\left(x^3x^{10}\right)^2$

ד. $\frac{\left(b^2\right)^3}{b^2b^3}$ ה. $\frac{n^7n^8}{\left(n^3\right)^4}$ ו. $\frac{d^{20}\left(d^4\right)^2}{d^{12}\left(d^3\right)^2}$

ז. $\frac{2^5\left(2^4\right)^2 2^3}{\left(2^3 2^2\right)^3}$ ח. $\frac{3^6\left(3^3 3^2\right)^6}{3^{28}\left(3^2\right)^3}$ ט. $\frac{\left(8^3\right)^8 8^{11}}{\left(8^2 8\right)^3 8^8}$

י. $\frac{\left(2^4\right)^5\left(3^6\right)^7 2^{20}}{3^{35}2^{40}}$ יא. $\frac{\left(3^2\right)^6 5^{31}3^7}{\left(5^2\right)^{10}5^{11}3^{18}}$ יב. $\frac{\left(3^2\right)^7 5^{10}\left(5^3\right)^2}{3^9 5^{16}}$

6) לפניך הביטויים הבאים: $\left(\left(3^2\right)^3\right)^4$ ו- $\left(\left(3^6\right)^n\right)^2$.

מצא n כך שיתקיים שוויון בין שני הביטויים.

7) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים:

א. $\frac{2^3 3^5}{2^2 3^4}$ ב. $\frac{5^{20}3^{14}3^8}{3^{20}5^{12}5^8}$ ג. $\frac{7^{12}2^2 2^6}{2^5 7^{10} 7}$

8) פשט את הביטויים הבאים:

א. $3^2 9\cdot 81^2$ ב. $64^2 2^3 8^2$ ג. $125\cdot 25\cdot 5^5$

ד. $\frac{2^4\cdot 16^5}{8\cdot 512}$ ה. $\frac{\left(4^2\right)^3 16}{64\cdot 2^3}$ ו. $\frac{\left(\left(3^4\right)^4\right)^5}{81^3 27^4 3^5}$

9) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\dfrac{\left(2a^2b\right)^3\cdot\left(ab^{-3}\right)^2}{4ab^{-2}\cdot\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^4}$

ב. $\dfrac{\left(k^2\right)^{m+2}\cdot k^{1-3m}}{\left(k^{2m}\right)^3\cdot\dfrac{1}{k^{7m-4}}}$

ג. $\dfrac{4^{b+3}}{4^{b+1}+4^{b+2}}$

ד. $\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{x^{n+3}+x^{n+5}}{x^{n+2}}$

10) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $(ab)^n=a^nb^n$ ו- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$

א. $\left(a^2b\right)^3$

ב. $\left(m^4n^3\right)^5$

ג. $\left(x^{12}y^3\right)^3$

ד. $\left(\dfrac{a^3}{b^2}\right)^4$

ה. $\left(\dfrac{i^4}{k^3}\right)^7$

ו. $\left(\dfrac{a^{14}b^4}{a^6ab^3}\right)^3$

ז. $\left(\dfrac{x^3y^5y^2x^6}{y^4x^7}\right)^6$

ח. $\left(\dfrac{t^7r^{20}t^3}{r^2r^{12}t^8}\right)^2$

ט. $\left(\dfrac{\left(b^{12}c\right)^2c^{14}}{c\left(c^3b^5\right)^4b^3}\right)^2$

11) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים:

א. $\left(\dfrac{3^92^62^2}{3^62^53^2}\right)^2$

ב. $\left(\dfrac{\left(5^4\right)^2 3^6}{3^55^7}\right)^2$

ג. $\left(\dfrac{7^3\cdot16\cdot128\cdot49}{\left(2^27\right)^5}\right)^3$

12) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה שלילית:

א. $\dfrac{1}{4^6}$

ב. $\dfrac{1}{5^3}$

ג. $\dfrac{1}{2^{10}}$

ד. $\dfrac{1}{8}$

ה. $\dfrac{1}{81}$

ו. $\dfrac{1}{125}$

13) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה חיובית וחשב את ערכם:

א. $\dfrac{1}{4^{-3}}$

ב. $\dfrac{1}{3^{-2}}$

ג. $\dfrac{1}{5^{-3}}$

14) חשב את הביטויים הבאים:

א. $3^{2}\cdot 3^{-5}\cdot 3^{7}$
ב. $2^{-8}\cdot 512\cdot 2^{2}$
ג. $5^{6}\cdot 5^{-3}\cdot 5^{-2}$
ד. $2^{14}\cdot 3^{-6}\cdot 2^{16}\cdot 3^{4}\cdot 2^{-30}$
ה. $\dfrac{2^{-5}\cdot 5^{3}\cdot 2^{14}}{5^{2}\cdot 5^{-10}\cdot 5^{8}\cdot 2^{6}}$
ו. $\dfrac{3^{-6}\cdot 7^{7}\cdot 7^{-4}}{3^{-4}\cdot 3^{-3}\cdot 7^{3}}$

15) פשט את הביטויים הבאים לצורה ללא חזקות שליליות.

א. $\left(\dfrac{5^{-4}}{3^{2}}\right)^{-6}$
ב. $\dfrac{\left(4^{4}\right)^{-4}3^{-11}}{\left(3^{-2}4^{3}\right)^{-6}}$
ג. $\dfrac{2^{-3}5^{4}}{5^{4}\cdot 125\cdot\left(5^{2}2\right)^{-3}\cdot 2^{-4}}$

16) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\dfrac{a^{n+2}\cdot a^{2-3n}}{\left(a^{3}\right)^{n+1}}$
ב. $\dfrac{\left(k^{2}\right)^{m+2}\cdot k^{1-3m}}{\left(k^{2m}\right)^{3}\cdot\dfrac{1}{k^{7m-4}}}$
ג. $\dfrac{\left(m^{n+2}\right)^{3}\cdot m^{-4n-2}}{\dfrac{1}{m^{6n+2}}\cdot\left(m^{3}\right)^{n-2}}$

תשובות סופיות:

1) א. a^8 ב. t^{15} ג. b^{22} ד. k^5 ה. n^5 ו. c^4
ז. a^7 ח. x^3 ט. 1 י. 3^9 יא. 2^8 יב. 5^5.

2) א. 18 ב. ab ג. x^6y^{10}.

3) $n=16$.

4) א. 2 ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{5}{8}$ ד. 40.

5) א. a^8 ב. c^{30} ג. x^{26} ד. b ה. n^3 ו. d^{10}
ז. 2 ח. 9 ט. 8^{18} י. 3^7 יא. 3 יב. 3^5.

6) $n=2$.

7) א. 6 ב. 9 ג. 56.

8) א. 3^{12} ב. 2^{21} ג. 5^{10} ד. 2^{12} ה. 2^7 ו. 3^{51}.

9) א. $\frac{2b^3}{a}$ ב. k ג. $3\frac{1}{5}$ ד. $\frac{1}{x}+x$.

10) א. a^6b^3 ב. $m^{20}n^{15}$ ג. $x^{36}y^9$ ד. $\frac{a^{12}}{b^8}$ ה. $\frac{i^{28}}{k^{21}}$ ו. $a^{21}b^3$
ז. $x^{12}y^{18}$ ח. t^4r^{12} ט. b^2c^6.

11) א. 576 ב. 225 ג. 8

12) א. 4^{-6} ב. 5^{-3} ג. 2^{-10} ד. 2^{-3} ה. 3^{-4} ו. 5^{-3}.

13) א. 64 ב. 9 ג. 125.

14) א. 81 ב. 8 ג. 5 ד. $\frac{1}{9}$ ה. 1000 ו. 3.

15) א. $5^{24}\cdot 3^{12}$ ב. $\frac{4^2}{3^{23}}$ ג. $5^3\cdot 2^4$.

16) א. a^{1-5n} ב. k ג. m^{2n+12}.

חוקי השורשים:

סיכום כללי:

סיכום חוקי השורשים:

1. $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$
2. $\sqrt[m]{a}=a^{\frac{1}{m}}$
3. $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$
4. $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{a\cdot b}$
5. $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$
6. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$

שאלות:

17) הבא את הביטויים הבאים לצורה: $\sqrt[n]{a^m}$.

א. $3^{\frac{1}{4}}$
ב. $2^{\frac{3}{5}}$
ג. $6^{\frac{5}{6}}$
ד. $-12^{\frac{2}{7}}$
ה. $-(-4)^{\frac{1}{3}}$
ו. $-(-3)^{\frac{3}{4}}$
ז. $5^{-\frac{1}{4}}$
ח. $27^{-\frac{1}{3}}$
ט. $64^{-\frac{5}{6}}$

18) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{49}$
ב. $-\sqrt{25}$
ג. $\sqrt[3]{8}$
ד. $-\sqrt[7]{128}$
ה. $\sqrt[3]{(-2)^6}$
ו. $\left(\sqrt[5]{1024}\right)^2$
ז. $\left(\sqrt[5]{-243}\right)^3$
ח. $\sqrt[4]{-16}$
ט. $\sqrt[4]{-25^2}$
י. $\sqrt[4]{(-25)^2}$

19) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

א. $8^{\frac{2}{3}}$ ב. $32^{-\frac{3}{5}}$ ג. $128^{-\frac{2}{7}}$

ד. $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$ ה. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2.5}$ ו. $\left(\frac{64}{343}\right)^{-\frac{2}{3}}$

ז. $81^{\frac{3}{4}}\cdot 64^{-\frac{1}{3}}$ ח. $343^{-\frac{2}{3}}\cdot 100^{\frac{1}{2}}$ ט. $16^{\frac{1}{4}}\cdot 8^{-\frac{1}{3}}\cdot 4^{-\frac{1}{2}}$

20) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$.

21) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ ב. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$ ג. $\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}$

ד. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ ה. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$ ו. $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$

ז. $\frac{\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$ ח. $\frac{\sqrt[3]{500}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt[4]{25^2}\cdot\sqrt[3]{4}}$ ט. $\frac{\sqrt[3]{8^2}\sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{400}\sqrt{2}}$

22) הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים:

א. $3\sqrt{2}$ ב. $5\sqrt{3}$ ג. $\frac{\sqrt{36}}{2}$

ד. $2\sqrt[3]{3}$ ה. $x\sqrt{x}$

23) הכנס את כל המקדמים בביטויים הבאים לתוך השורש:

א. $2\sqrt{5}$ ב. $4\sqrt[3]{2}$ ג. $2\sqrt[5]{3}$

ד. $\frac{\sqrt{24}}{2}$ ה. $\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$ ו. $\frac{3\sqrt[4]{5000}}{10}$

ז. $-5\sqrt[3]{2}$ ח. $-5\sqrt[4]{2}$ ט. $-5\sqrt[5]{-2}$

24) הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר:

א. $\sqrt{12}$ ב. $\sqrt{48}$ ג. $\sqrt{63}$

ד. $\sqrt[3]{54}$ ה. $\sqrt{x^5}$

25) חלץ מן הביטויים הבאים את המקדם הגבוה ביותר ככל הניתן:

א. $\sqrt{40}$ ב. $\sqrt{50}$ ג. $\sqrt{320}$

ד. $\sqrt[3]{108}$ ה. $\sqrt[3]{56}$ ו. $\sqrt[5]{160}$

ז. $\sqrt[4]{162}$ ח. $\sqrt[5]{972}$ ט. $\sqrt[6]{192}$

26) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{18}-\sqrt{8}$ ב. $\sqrt{7}+\sqrt{63}$ ג. $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{128}$

ד. $\sqrt[4]{405}-\sqrt[4]{80}$ ה. $\frac{20}{\sqrt{5}}$ ו. $\frac{\sqrt{8}}{2}$

ז. $\frac{16}{\sqrt{2}}$ ח. $\frac{6}{\sqrt{3}+\sqrt{12}}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[5]{160}-\sqrt[5]{5}}$

27) פשט את הביטויים הבאים:

א. $3^{\frac{1}{4}}\cdot 9^{-2.5}\cdot 27^{\frac{3}{2}}$ ב. $2^{\frac{3}{4}}\cdot 16^{\frac{1}{2}}\cdot 64^{-3}$ ג. $125^{\frac{1}{6}}\cdot 5^{2}\cdot 5^{-\frac{2}{3}}$

ד. $\frac{27^{\frac{4}{3}}\cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}$ ה. $\frac{49^{\frac{2}{5}}\cdot 7^{-\frac{6}{5}}}{343^{\frac{1}{5}}}$ ו. $\frac{512^{\frac{1}{4}}\cdot 64^{-\frac{3}{4}}}{128^{-\frac{1}{8}}\cdot 2^{-2}}$

תשובות סופיות:

17) א. $\sqrt[4]{3}$ ב. $\sqrt[5]{2^3}$ ג. $\sqrt[6]{6^5}$ ד. $-\sqrt[7]{12^2}$ ה. $-\sqrt[3]{-4}$ ו. ϕ
ז. $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ ח. $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$ או $\frac{1}{3}$ ט. $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}}$ או $\frac{1}{2^5}$.

18) א. 7 ב. -5 ג. 2 ד. -2 ה. 4 ו. 16
ז. -27 ח. ϕ ט. ϕ י. 5.

19) א. 4 ב. $\frac{1}{8}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. 125 ה. $\frac{32}{243}$ ו. $\frac{49}{16}$
ז. $\frac{27}{4}$ ח. $\frac{10}{49}$ ט. $\frac{1}{2}$.

20) $\sqrt{2}$.

21) א. 4 ב. 9 ג. 20 ד. 6 ה. 3 ו. 2
ז. $\sqrt{2}$ ח. $\sqrt{5}$ ט. $\sqrt{2}$.

22) א. $\sqrt{18}$ ב. $\sqrt{75}$ ג. $\sqrt{9}$ ד. $\sqrt[3]{24}$ ה. $\sqrt{x^3}$.

23) א. $\sqrt{20}$ ב. $\sqrt[3]{128}$ ג. $\sqrt[5]{96}$ ד. $\sqrt{6}$ ה. $\sqrt[3]{3}$
ו. $\sqrt[4]{40\frac{1}{2}}$ ז. $\sqrt[3]{-250}$ ח. $-\sqrt[4]{1250}$ ט. $\sqrt[5]{5^5\cdot 2}$.

24) א. $2\sqrt{3}$ ב. $4\sqrt{3}$ ג. $3\sqrt{7}$ ד. $3\sqrt[3]{2}$ ה. $x^2\sqrt{x}$.

25) א. $2\sqrt{10}$ ב. $5\sqrt{2}$ ג. $8\sqrt{5}$ ד. $3\sqrt[3]{4}$ ה. $2\sqrt[3]{7}$ ו. $2\sqrt[5]{5}$
ז. $3\sqrt[4]{2}$ ח. $3\sqrt[5]{4}$ ט. $2\sqrt[6]{3}$.

26) א. $\sqrt{2}$ ב. $4\sqrt{7}$ ג. $6\sqrt[3]{2}$ ד. $\sqrt[4]{5}$ ה. $4\sqrt{5}$ ו. $\sqrt{2}$
ז. $8\sqrt{2}$ ח. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ או $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[5]{5}}$ או $2\sqrt[5]{5^4}$.

27) א. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ ב. $\frac{1}{\sqrt[4]{2^{61}}}$ ג. $\sqrt[6]{5^{11}}$ ד. 27 ה. $\frac{1}{7}$ ו. $\sqrt[8]{2^5}$.

כתיבה מדעית של מספרים:

שאלות:

28) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. 15,000,000
ב. 1,500,000
ג. 150,000,000,000
ד. 23,400,000
ה. 0.0003
ו. 0.00000042
ז. 0.000000042
ח. 0.00000000042

29) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. $(3,000,000)^2$
ב. $(2,000,000)^2$
ג. $(5,000)^3$
ד. $(50,000)^3$
ה. $(0.0002)^4$
ו. $(0.00004)^3$
ז. $(0.000005)^3$
ח. $(0.000000007)^3$

תשובות סופיות:

28) א. $1.5\cdot10^{7}$ ב. $1.5\cdot10^{6}$ ג. $1.5\cdot10^{11}$ ד. $2.34\cdot10^{7}$ ה. $3\cdot10^{-4}$
ו. $4.2\cdot10^{-7}$ ז. $4.2\cdot10^{-8}$ ח. $4.2\cdot10^{-10}$.

29) א. $9\cdot10^{12}$ ב. $4\cdot10^{12}$ ג. $1.25\cdot10^{11}$ ד. $1.25\cdot10^{14}$ ה. $1.6\cdot10^{-15}$
ו. $6.4\cdot10^{-14}$ ז. $1.25\cdot10^{-16}$ ח. $3.43\cdot10^{-25}$.

סדנת ריענון במתמטיקה - מעודכן

פרק 2 - משוואות אלגבריות

תוכן העניינים

1. משוואות ממעלה ראשונה 11
2. מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה 13
3. משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון 16
4. משוואה ממעלה שנייה 17
5. משוואות דו-ריבועיות 19
6. משוואות עם פרמטרים 21
7. משוואות עם שורשים 23
8. משוואות עם ערך מוחלט 25
9. מערכת משוואות ממעלה שנייה 26
10. משוואות מתקדמות מסכמות 28
11. פישוט ביטויים ומשוואות ממעלה שלישית 31

משוואה ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה היא מהצורה: $ax=b$ (כלומר, החזקה של הנעלם היא 1).

פתרון של משוואה ממעלה ראשונה הוא $x=\frac{b}{a}$ כאשר $a\neq 0$.

שלבי הפתרון הם:

1. ביצוע מכנה משותף (במידה וצריך).
2. פתיחת סוגריים אם ישנם.
3. העברת אגפים וכינוס אברים דומים (בידוד הנעלם באגף אחד והמספרים באגף שני).
4. בידוד הנעלם ומציאתו ע"י חילוק במקדם שלו.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות ממעלה ראשונה):

א. $6x+2=8$
ב. $7-2x=7$
ג. $2x+x=24$
ד. $2x+6=8+x$
ה. $-7x+5+2x=4x-13$
ו. $6x-3+5-7x=x-5x-7$
ז. $2-5x+7=-3x+8$
ח. $x-2+5x=4-3x-5+7x+7$

2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פתיחת סוגריים):

א. $3(x-1)-4=2$
ב. $7x-4(3-4x)=-x$
ג. $6(4-x)-(6-x)=3x$
ד. $5x-(3x-7)4=21$
ה. $x(x-5)=x^2-7x+8$
ו. $(7-x)(1-x)-(x-3)^2=0$

3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה מספרי):

א. $\frac{x}{3}-\frac{x}{9}=-4$

ב. $\frac{4x}{15}-\frac{3x}{10}=1$

ג. $\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}x=x-\frac{7}{15}$

ד. $\frac{5x+1}{6}-\frac{6x-1}{5}=\frac{3x+1}{4}-1$

ה. $\frac{2}{5}(x-3)-\frac{3}{15}(4-x)=x+2$

ו. $5\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{7}\right)-x=1$

4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם נעלם במכנה):

א. $\frac{1}{4}-\frac{2}{x}=0$

ב. $\frac{1}{2}-\frac{x}{x-1}=0$

ג. $\frac{3}{x}=\frac{1}{x+2}$

ד. $\frac{5}{2x-1}=\frac{4}{3x+2}$

ה. $\frac{x+5}{3x^2}-\frac{1}{6x}=\frac{1}{x}$

ו. $\frac{1}{4x}+\frac{3}{x}=\frac{13}{2}$

5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה משותף ע"י פירוק לגורמים):

א. $\frac{x^2+2}{3x^2+5x}=\frac{3x-1}{9x+15}$

ב. $\frac{7}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}+\frac{3}{2-2x}=0$

ג. $\frac{3}{(2-x)^2}+\frac{5}{12-3x^2}=0$

ד. $\frac{4x^2-24x+36}{x-3}=12$

תשובות סופיות:

1) א. $x=1$ ב. $x=0$ ג. $x=8$ ד. $x=2$ ה. $x=2$ ו. $x=-3$
ז. $x=\frac{1}{2}$ ח. $x=4$.

2) א. $x=3$ ב. $x=\frac{1}{2}$ ג. $x=2\frac{1}{4}$ ד. $x=1$ ה. $x=4$ ו. $x=-1$.

3) א. $x=-18$ ב. $x=-30$ ג. $x=-1$ ד. $x=1$ ה. $x=-10$ ו. $x=-21$.

4) א. $x=8$ ב. $x=-1$ ג. $x=-3$ ד. $x=-2$ ה. $x=2$ ו. $x=\frac{1}{2}$.

5) א. $x=-6$ ב. $x=-7$ ג. $x=-7$ ד. $x=6$, $x\neq 3$.

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

הגדרה:

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (ליניאריות) היא מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

כאשר $a_1\ ,b_1\ ,c_1$ ו-$a_2\ ,b_2\ ,c_2$ הם מקדמים מספריים.

דוגמאות למערכות של משוואות: $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=1 \end{cases}$, $\begin{cases} y=3x-1 \\ \dfrac{x+3}{2}=y+6 \end{cases}$.

פתרון של מערכת משוואות:

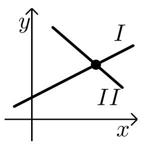
פתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור המקיים את כל המשוואות שבמערכת.

הצגה גרפית של מערכת משוואות:

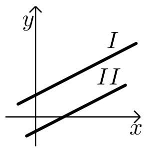
פתרון גרפי של מערכת משוואות הוא נקודת החיתוך של הישרים המייצגים כל משוואה.

יתכנו שלושה מצבים הדדיים בין שני ישרים:

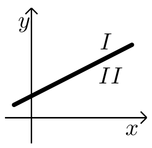
- הישרים נחתכים:
  במקרה זה נקודת החיתוך תהיה פתרון המערכת.



- הישרים מקבילים:
  במקרה זה לא יהיה פתרון למערכת.



- הישרים מתלכדים:
  במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות למערכת המשוואות.



פתרון אלגברי של מערכת משוואות:

- פתרון ע"י שיטת ההצבה:
  נבודד את אחד הנעלמים ממשוואה אחת ונציב אותו במשוואה השנייה.
  נבחר בשיטה זו במקרים בהם קל לבודד נעלם באחת המשוואות.
- פתרון ע"י השוואת מקדמים:

1. כופלים (או מחלקים) משוואה אחת (או שתיהן) במספר השונה מאפס כך שתתקבלנה משוואות שקולות בעלות מקדמים נגדיים או זהים עבור אחד המשתנים.
2. מחברים (או מחסרים) את המשוואות ומקבלים משוואה חדשה עם נעלם אחד.
3. מוצאים את ערך הנעלם מהמשוואה החדשה ומציבים אותו באחת המשוואות המקוריות למציאת ערך הנעלם השני.

הערה:

נוח להשתמש בשיטת השוואת המקדמים ע"י כך שמעבירים את המערכת הנתונה למערכת שקולה שבה המשתנים באגף אחד והמספר החופשי באגף השני.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} 3x+y=11 \\ y=5 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y=x-3 \\ y=2x+4 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} -3x+2y=-16 \\ x=5y+14 \end{cases}$

ד. $\begin{cases} 5x-2y=-2 \\ x+4y=4 \end{cases}$ ה. $\begin{cases} -5x+7y=-26 \\ x+3y=-8 \end{cases}$ ו. $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 5x+7y=11 \end{cases}$

2) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x+3y=5 \\ x-3y=3 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} 5x+2y=14 \\ 5x+3y=23 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 5y=2x \\ 4x=5y+8 \end{cases}$ ד. $\begin{cases} 4x=3y-29 \\ 5y=9-13x \end{cases}$

3) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x+2y=1 \\ 4x+8y=5 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} 2(x-y)+4y=1+x \\ 2-7y+x=3(x-y) \end{cases}$.

4) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} 3y-x+2=4x+2-3y \\ 2x-3-y=5y-4x+3 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} \frac{x-3}{8}-\frac{x+y}{16}=\frac{y-1}{4} \\ 3(2x-y)-4x-11=0 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} \frac{3x-1}{4}-\frac{2}{5}(x-y)=\frac{3}{10}(x+3) \\ \frac{x+1}{4}-\frac{y}{2}=1 \end{cases}$.

5) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=4 \\ \frac{5}{x}-\frac{1}{y}=4 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{3}{y}=2 \\ \frac{9}{x}-\frac{4}{y}=-7 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 4x-\frac{7}{y}=-3 \\ 5x+\frac{2}{y}=7 \end{cases}$

6) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x(y+2)+y=xy-5 \\ x-y=2 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} xy=20 \\ y(3x-4)=20 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 5x-4xy=22 \\ 6x+xy=-20 \end{cases}$

תשובות סופיות:

1) א. $(2,5)$ ב. $(-7,-10)$ ג. $(4,-2)$ ד. $(0,1)$ ה. $(1,-3)$ ו. $(-2,3)$.

2) א. $\left(4,\frac{1}{3}\right)$ ב. $\left(-\frac{4}{5},9\right)$ ג. $(4,1.6)$ ד. $(-2,7)$.

3) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות.

4) א. $(6,5)$ ב. $(7,1)$ ג. $(7,2)$.

5) א. $(1,1)$ ב. $(-3,1)$ ג. $(1,1)$.

6) א. $(-1,-3)$ ב. $(2,10)$ ג. $(-2,4)$.

משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה:

למשוואה ממעלה ראשונה מהצורה: $ax=b$ יתכן פתרון יחיד אם ורק אם $a\neq 0$

מכיוון שניתן לחלק ולכתוב: $x=\frac{b}{a}$.

כאשר $a=0$ מתקבלת המשוואה $0\cdot x=b$ ויתכנו שני מצבים:

1. אם $b=0$ את המשוואה היא $0x=0$ ויש אינסוף פתרונות המקיימים אותה.
2. אם $b\neq 0$ את המשוואה היא $0x=b\neq 0$ ואין אף ערך של x המקיים אותה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $x+4=6+x$

2) $3x+6-x=4+2x+2$

3) $6(x-2)=2x+5+4x$

4) $5x-3+x=4x+2x-3$

5) נתונה המשוואה: $3-2(x+2)=5x+\square$.

א. איזה מספר יש להציב ב- $\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 1?

ב. איזה מספר יש להציב ב- $\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 0?

ג. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- $\square$ על מנת שלמשוואה יהיו אינסוף פתרונות.

ד. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- $\square$ על מנת שלמשוואה לא יהיה פתרון.

תשובות סופיות:

1) אף פתרון.

2) אינסוף פתרונות.

3) אין פתרון.

4) אינסוף פתרונות.

5) א. 8-. ב. 1-. ג. $-7x-1$

ד. $-7x+k$ כאשר k הוא מספר כלשהו השונה מ- 1-.

משוואה ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

משוואה מהצורה: $ax^2+bx+c=0$, $(a\neq 0)$ נקראת משוואה ריבועית.

פתרונות המשוואה יסומנו ב- x_1 ו- x_2 ויחושבו לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

למשוואה ריבועית יתכנו שלושה סוגים של פתרונות:

1. **משוואה עם שני פתרונות ממשיים שונים.**
אם מתקבל מספר חיובי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים.
דוגמא: $x^2+5x-4=0$.

2. **משוואה עם פתרון ממשי אחד בלבד.**
אם מתקבל אפס בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד בלבד.
דוגמא: $x^2+4x+4=0$.

3. **משוואה ללא פתרונות ממשיים כלל.**
אם מתקבל מספר שלילי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה לא יהיו פתרונות ממשיים כלל.
דוגמא: $x^2+x+4=0$.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות:

א. $x^2+3x-10=0$

ב. $-x^2+10x-16=0$

ג. $25x^2-20x+4=0$

ד. $2x^2-6x+5=0$

2) פתור את המשוואות הבאות:

א. $4x^2-5x+7=4-x^2+13$

ב. $-x(x-5)=(1-3x)(1-x)+4$

ג. $2(x-5)^2-(2x-3)^2=10x+21$

ד. $(2x-1)^2+x(2x+3)=(x-1)(x-7)$

3) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת b):

א. $x^2-36=0$
ב. $32x^2-18=0$
ג. $4x-x(x+2)=3(x-1)-x-6$
ד. $(2x-1)^2+(2x+1)^2=10$

4) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת c):

א. $-7x^2-14x=0$
ב. $5x^2-x=0$
ג. $6x(x-2)-1=4x-3(x+1)+2$
ד. $(5x-2)^2=(x-2)(x+3)+10$

5) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\frac{4x+1}{3}-\frac{x+2}{2}=\frac{2}{x}$
ב. $\frac{x^2-9}{x+3}+x=x^2-18$
ג. $\frac{3}{2x+2}-\frac{2x-5}{2(x-1)^2}-\frac{4}{1-x^2}=0$
ד. $\frac{x}{2x^2-72}+\frac{2}{x^2+12x+36}=\frac{8x-15}{24-4x}+2$

תשובות סופיות:

1) א. $x_1=2\,,\,x_2=-5$ ב. $x_1=2\,,\,x_2=8$ ג. $x=\frac{2}{5}$ ד. אין פתרון.

2) א. $x_1=2\,,\,x_2=-1$ ב. $x_1=1\,,\,x_2=1\frac{1}{4}$ ג. $x_1=1\,,\,x_2=-10$
ד. $x_1=0.6\,,\,x_2=-2$.

3) א. $x=\pm6$ ב. $x=\pm\frac{3}{4}$ ג. $x=\pm3$ ד. $x=\pm1$

4) א. $x_1=0\,,\,x_2=-2$ ב. $x_1=0\,,\,x_2=\frac{1}{5}$ ג. $x_1=0\,,\,x_2=2\frac{1}{6}$
ד. $x_1=0\,,\,x_2=\frac{7}{8}$.

5) א. $x_1=2\,,\,x_2=-1.2$ ב. $x=5\,,\,x\neq-3$ ג. $x_1=0\,,\,x_2=-5$
ד. $x_1=-7.6\,,\,x_2=-4\frac{2}{7}$.

משוואות דו-ריבועיות:

סיכום כללי:

משוואה דו-ריבועית היא משוואה מהצורה: $ax^4+bx^2+c=0$ כאשר הנעלם הוא x.
פתרון המשוואה יבוצע ע"י מעבר לפרמטר: $x^2=t \rightarrow at^2+bt+c=0$ ומציאתו.
לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה ולמצוא את ערכי x.

ניתן להביא משוואות לצורה זו ולהגדיר ביטוי המופיע בחזקות 2 ו-4
כגון: $\left(x^2-1\right)^2+3\left(x^2-1\right)-2=0$ באמצעות פרמטר: $t=x^2-1$
ובכך לפתור משוואה: $t^2+3t-2=0$ ולהחזיר את ההצבה עבור מציאת x.
דרך הפתרון תקפה לכל משוואה בה הנעלם מופיע בחזקות כפולות כגון 3 ו-6, או 4 ו-8.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $5x^4+3x^2-8=0$

2) $x^4-3x^2+2=0$

3) $13x^2\left(3x^2-1\right)-2=3\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)$

4) $x^2\left(x^2+1\right)=10\left(3x^2-10\right)$

5) $x^6+x^3=56$

6) $x^3+4=\frac{32}{x^3}$

7) $x-9\sqrt{x}+14=0$

8) $x^8-4x^4-50=31x^4-84$

9) $125x^6-1=124\left(x^6+x^3+1\right)$

10) $\left(2x^2-x\right)^2-4\left(2x^2-x\right)+3=0$

11) $\left(x^2+2x\right)^2+7x^2+14x=-6$

12) $\frac{21}{x^2-4x+10}=6+x^2-4x$

13) $\frac{12}{x^2+2x-8}=1+\frac{7.5}{x^2+2x-3}$

14) $\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\frac{7}{6}-\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}$

15) $\frac{3}{3x^2-15}+\frac{1}{x^2+5}=\frac{10}{x^4-25}$

16) $\frac{x^2-1}{4x^2-28}+2=\frac{9}{x^4-8x^2+7}+\frac{x^2}{2x^2-2}$

17) $\left(2x+\frac{3}{x}\right)^2+35=12\left(2x+\frac{3}{x}\right)$

18) $\frac{3x^4}{(x+2)^2}+\frac{3x^2}{x+2}=6$

19) $\left(2x-x^2+3\right)\left(2x-x^2-2\right)=0$

20) $\left(x^2-5x+6\right)\left(x^2-5x-8\right)=-24$

תשובות סופיות:

1) $x=\pm 1$

2) $x=\pm 1,\pm\sqrt{2}$

3) $x=\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{3}$

4) $x=\pm 2,\pm 5$

5) $x_1=\sqrt[3]{7}$, $x_2=-2$

6) $x=-2,\sqrt[3]{4}$

7) $x_1=4$, $x_2=49$

8) $x_{1,2}=\pm\sqrt[4]{34}$, $x_{3,4}=\pm 1$

9) $x=5,-1$

10) $x_1=1.5$, $x_2=-1$, $x_3=1$, $x_4=-\frac{1}{2}$

11) $x=-1$

12) $x_{1,2}=1,3$

13) $x_1=0$, $x_2=-2$, $x_3=3.06$, $x_4=-5.06$

14) $x_1=0$, $x_2=-2$

15) אין פתרונות.

16) $x=\pm\sqrt{\frac{3}{7}}$

17) $x=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},3$

18) $x=-1,2$

19) $x=3,-1$

20) $x=\pm 1,4,6$

משוואות עם פרמטרים:

סיכום כללי:

משוואה עם פרמטר הינה משוואה שמכילה שני סוגים של גדלים – משתנים ופרמטרים.
את המשתנים מקובל לסמן באותיות x , y , z ואת הפרמטרים מסמנים בשאר האותיות.
פתרון המשוואה יתקבל ע"י בידוד המשתנה כך שיבוטא באמצעות הפרמטר/ים שבמשוואה.

למשל פתרון המשוואה: $mx=4$ (כאשר x הוא הנעלם ו- m הוא פרמטר) הוא $x=\frac{4}{m}$ אשר מבוטא באמצאות הפרמטר m.

בכתיבת פתרון של משוואה עם פרמטרים יש לציין את תחום ההגדרה של הפרמטר עבורו הפתרון הוא בעל משמעות. בדוגמא הנ"ל תחום ההגדרה הוא $m\neq 0$.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות:

א. $3x-b=(b+1)x-6$

ב. $\frac{1}{3}(a-3x)=\frac{1}{a}(ax-3)$

ג. $(x-2a)(x-2b)=x^2-2(a^2+b^2)$

ד. $\frac{m+1}{x-1}=\frac{m-1}{x+1}$

ה. $\frac{x}{a^2-a}-\frac{1}{2a}=\frac{ax+x}{2a^3-4a^2+2a}-\frac{2}{a^3-2a^2+a}$

2) פתור את מערכות המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x+my=1 \\ x+y=m \end{cases}$

ב. $\begin{cases} ax+y=2 \\ x+ay=4 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} \frac{x}{m}+y=m \\ x-m^2y=1 \end{cases}$

ד. $\begin{cases} (m-1)x-(2m+3)y=5 \\ (m+2)x-(2m-1)y=10m \end{cases}$

ה. $\begin{cases} (2a+b)x-(2a-b)y=8ab \\ (2a-b)x+(2a+b)y=8a^2-2b^2 \end{cases}$

3) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

א. $x^2-2mx+m^2-1=0$

ב. $x^2-2x+4a=a^2+3$

ג. $x^2+m(x+10)=2m^2-5x$

ד. $\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+x}=0$

ה. $(m^2+1)x^2-m^2x-1=0$

ו. $\frac{a}{x}+\frac{1}{b}=\frac{x}{a}+b$

ז. $x+\frac{1}{x}=\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}$

תשובות סופיות:

1) א. $x=\frac{b-6}{2-b}$, $b\neq 2$ ב. $x=\frac{a^2+9}{6a}$, $a\neq 0$ ג. $x=a+b$ ד. $x=-m$ ה. $x=a+1$

2) א. $m\neq 1$, $(m+1,-1)$ ב. $a\neq \pm 1$, $\left(\frac{2a-4}{a^2-1},\frac{4a-2}{a^2-1}\right)$

ג. $m\neq 0-1$, $\left(m^2-m+1,\frac{m-1}{m}\right)$ ד. $m\neq 1,-2$, $(2m+1,m-2)$

ה. $b\neq \pm 2a$, $(2a+b,2a-b)$

3) א. $x=m+1,\mathrm{m}-1$ ב. $x=a-1,3-a$ ג. $x=m-5,-2m$

ד. $a\neq 0$, $x\neq \pm a$, $x=\pm a\sqrt{3}$ ה. $x=1,-\frac{1}{m^2+1}$

ו. $a,b\neq 0$, $x=\frac{a}{b},-ab$ ז. $x=\frac{a+b}{a-b},\frac{a-b}{a+b}$, $a\neq \pm b$.

משוואות עם שורשים:

סיכום כללי:

פתרון משוואה מהצורה: $\sqrt{x}=a$ יתקבל ע"י העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה באופן הבא: $x=a^2 \quad \rightarrow \quad \left(\sqrt{x}\right)^2=(a)^2$.

הערות:

1) יש לזכור בעת העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה יש לבדוק את כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבתם במשוואה המקורית.
2) למשוואה מהצורה $\sqrt{x}=a$ שבה $a<0$ אין פתרון.
3) יש לסדר תחילה משוואות שבהן הביטוי עם שורש אינו מבודד.
4) במשוואות שבהן יותר מביטוי אחד עם שורש יש לבודד תחילה את אחד הביטויים, להעלות בריבוע ולאחר מכן לחזור על התהליך ולבצע העלאה בריבוע פעם נוספת.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $\sqrt{2x+5}=7$
2) $\sqrt{x+2}=x$
3) $\sqrt{3x+1}+x=13$
4) $\sqrt{2x+7}+4=x$
5) $\sqrt{x-1}+3=x$
6) $\sqrt{10x+6}+9=x$
7) $\sqrt{x+6}-2=2x$
8) $\sqrt{24-x}+3=2x$
9) $\sqrt{x+16}+4=2x$
10) $2x=16-3\sqrt{x-1}$
11) $\sqrt{3x+5}=\sqrt{x+17}$
12) $\sqrt{x^2-5x+12}=2\sqrt{6-x}$
13) $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x-5}=\sqrt{11-x^2}$
14) $\sqrt{2x-1}+3=\sqrt{7x+1}$
15) $\sqrt{9x-8}-3\sqrt{x+4}=-2$
16) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{3-x}=2$
17) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{4x+1}$
18) $\sqrt{2x-2}+\sqrt{5x-4}=\sqrt{3x-2}$
19) $3\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-3}=2\sqrt{x+2}$

תשובות סופיות:

1) $x=22$
2) $x=2$
3) $x=8$
4) $x=9$
5) $x=5$
6) $x=25$
7) $x=0.25$
8) $x=3.75$
9) $x=4.25$
10) $x=5$
11) $x=6$
12) $x=4,-3$
13) $x=3$
14) $x=5$
15) $x=12$
16) $x=2,2\frac{8}{9}$
17) $x=6$
18) $x=1$
19) $x=2$

משוואות עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

הגדרה:

ערך מוחלט הינו המרחק של מספר מ-0 ומוגדר באופן הבא: $|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$.

משוואה עם ערך מוחלט:

משוואה עם ערך מוחלט היא מהצורה: $|x|=a$.
כדי לפתור משוואה עם ערכים מוחלטים יש למצוא את נקודות האפס של כל ערך מוחלט (קרי: הנקודות בהן הביטוי שבתוך הערך המוחלט מתאפס) ולפצל את המשוואה הנתונה לתחומים עבור כל תחום.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $|3x+14|=7$
2) $|3x-24|=x$
3) $|12-x|=3x$
4) $2x-|8-x|=10$
5) $|4x-5|=|2x+13|$
6) $|14-3x|=2|x+5|$
7) $|x|+7=|2x|$
8) $|x+2|+6=|2x-4|$
9) $|x+2|+|2x-6|=|4x+8|$
10) $|10-3x|-|x+4|=|2x-6|$

תשובות סופיות:

1) $x=-\frac{7}{3},\ -7$
2) $x=6,12$
3) $x=3$
4) $x=6$
5) $x=9,-1\frac{1}{3}$
6) $x=24,\frac{4}{5}$
7) $x=\pm 7$
8) $x=12,-1\frac{1}{3}$
9) $x=0,-12$
10) $x=0$

מערכת משוואות ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

מערכת משוואות ריבועיות מיוחסת למערכת של שתי משוואות (לפחות) שאחת מהן מכילה את אחד מהנעלמים בריבוע. למערכת משוואות ריבועיות יכולים להתקבל עד 4 פתרונות שונים. יש לפתור את המערכת לפי הטכניקות הרגילות של בידוד והצבה או השוואת מקדמים.

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ x+y=6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2+y^2=36 \\ x^2+3y=10 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x^2+4y^2=16 \\ 5x^2-3y^2=17 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2-2y^2=17 \\ xy=-10 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2-xy-20y^2=0 \\ x+6y=1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2-2xy+8y^2=8 \\ 3xy-2y^2=4 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2-y^2=33 \\ x+y=11 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 16x^2-y^2=391 \\ 4x-y=23 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 4xy+x=-15 \\ \dfrac{3}{y}-2x=16 \end{cases}$

10) $\begin{cases} \dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ \dfrac{4}{y}-\dfrac{1}{x}=-19 \end{cases}$

11) $\begin{cases} \dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{y}=21 \\ \dfrac{8}{x}-\dfrac{1}{y}=13 \end{cases}$

12) $\begin{cases} xy=24 \\ (y-x)^2-7(y-x)+10=0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x^2y-xy^2=84 \\ x^2-2xy+y^2+5x-5y=24 \end{cases}$

14) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{10}{3} \\ x^2+y^2=9xy+25 \end{cases}$

תשובות סופיות:

1) $(2,4),(4,2)$

2) $(\pm 4,-2)$

3) $(\pm 2,\pm 1)$

4) $(5,-2),(-5,2)$

5) $\left(-2,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{5}{11},\frac{1}{11}\right)$

6) $\left(3,\frac{1}{2}\right),\left(-3,-\frac{1}{2}\right),(2,1),(-2,-1)$

7) $(7,4)$

8) $(5,-3)$

9) $\left(-5,\frac{1}{2}\right)$, $\left(-24,-\frac{3}{32}\right)$

10) $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{4}\right)$

11) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

12) $(4,6)$, $(-6,-4)$, $(3,8)$, $(-8,-3)$

13) $(-1.65,6.35)$, $(-6.35,1.65)$, $(7,4)$, $(-4,-7)$

14) $(5,45)$, $(-5,-45)$, $(45,5)$, $(-45,-5)$

משוואות מסכמות מתקדמות:

סיכום כללי:

תזכורת מהירה:

- משוואה דו-ריבועית יכולה להופיע בכל תצורה (עם שורשים, עם ערכים מוחלטים וכו').
העיקרון הוא זיהוי תבנית של הנעלם אשר חוזרת על עצמה לאורך המשוואה.
סימון התבנית במשתנה זמני ופתרון עבור משתנה זה תוביל למשוואה מוגדרת ופתירה.
לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה לתבנית של המשתנה המקורי ולמצוא את ערכיו.

- דרך הפתרון של משוואה עם שורשים היא ע"י בידוד השורש והעלאה בריבוע.
במידה ויש יותר משורש אחד המופיעים בחיבור/חיסור יש לבצע את הפעולה פעמיים.
חשוב לוודא נכונות של כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבה במשוואה המקורית לפני ההעלאות בריבוע.

- דרך הפתרון של משוואה עם ערכים מוחלטים היא ע"י פיצול המשוואה לתחומים לפי סימני הערך המוחלט. זאת יש לבצע ע"י איפוס הביטוי שבכל ערך מוחלט ומציאת ערכי הנעלם המקיימים זאת, חלוקת המשוואה לתחומים מתאימים ופתרונה בכל תחום.
יש לזכור לבדוק האם הפתרון המתקבל נמצא בתחום הפתרון – במידה וכן הוא פתרון של המשוואה, אחרת הוא נפסל.

- משוואה עם פרמטר/ים נפתרת בצורה רגילה (התייחסות לפרמטר/ים כאל קבועים מספריים) כאשר יש לציין את תחומי ההגדרה שלהם. יש לבדוק פתרונות שמתקבלים המבוטאים באמצעות הפרמטר/ים במידה וקיימת הגבלת תחום הגדרה במשוואה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $x+\sqrt{x+6}-6=0$

2) $x^2+5x-\sqrt{x^2+5x}-30=0$

3) $4x^2+16x-4\sqrt{x^2+4x}-3=0$

4) $2x^2+6x-\sqrt{x^2+3x+5}=5$

5) $x^2-\sqrt{16x^2+48}+7=0$

6) $x^2-\sqrt{6x^2-15}=1$

7) $\frac{x^2}{\sqrt{3x-2}}-\sqrt{3x-2}=1-x$

8) $\frac{\sqrt{x^2+4x-12}}{\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+5}=\frac{7}{\sqrt{x-1}}$

9) $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2+2x-3}$

10) $\sqrt{x+\sqrt{14x-49}}+\sqrt{x-\sqrt{14x-49}}=\sqrt{14}$

11) $\sqrt{x+6+6\sqrt{x-3}}-\sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}}=2$

12) $\frac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\frac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=\frac{3}{x}$

פתור את המשוואות הבאות עבור $a>0$:

13) $x^2+ax-2a\sqrt{x^2+ax-a^2}=0$

14) $x^2+ax-2a\sqrt{3x^2+3ax-9a^2}=0$

פתור את המשוואות הבאות:

15) $\left|3-|2-x|+|x|\right|=1$

16) $\left|4-|5-x|\right|=|x+3|$

17) $\left|\frac{x+|3-x|}{x+2}\right|=18$

18) $\sqrt{25+|16x^2-25|}=4+4|x+1|$

19) $\frac{x^3-5x}{\sqrt{2x^2-4x-1}-|x|+2}=0$

20) הראה כי אין פתרון למשוואה הבאה: $\frac{|x+2|}{|x|+2}=|2-x|+2$.

תשובות סופיות:

1) $x=3$

2) $x_1=4\ ,\ x_2=-9$

3) $x_1=0.5\ ,\ x_2=-4.5$

4) $x_1=1\ ,\ x_2=-4$

5) $x_{1,2}=\pm 1$

6) $x_{1,2}=\pm 2$

7) $x=1$.

8) $x=3$.

9) $x=2$.

10) $3.5\le x\le 7$.

11) $x=4$.

12) $x=1\ ,\ x=\frac{9}{16}$.

13) $x_1=-2a\ ,\ x_2=a$

14) $x_1=-2a\ ,\ x_2=3a$

15) $x\le 0$.

16) $x=-1$.

17) $x=-\frac{39}{18},-\frac{33}{18}$.

18) $x\le\frac{5}{4}\ ,\ x=-\frac{1}{4}$.

19) $x=-\sqrt{5}$.

20) שאלת הוכחה.

ביטויים ומשוואות ממעלה שלישית:

סיכום כללי:

נוסחאות הכפל המקוצר ממעלה שלישית:

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$$

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$$

שאלות:

פישוט ביטויים:

פשט את הביטויים הבאים:

1) $(x-3)^3$

2) $(2y+5)^3$

3) $8x^3-1$

4) $8y^3+343$

5) a^6-27

6) $x^3y^6z^9-1$

7) $11+88x^{12}$

8) $64mn^4-8m^4n^7$

9) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^3+6x^2+12x+8}$

10) $\dfrac{x^3+64}{x^2+4x}$

משוואות בנעלם אחד עם נוסחאות הכפל המקוצר:

פתור את המשוואות הבאות:

11) $x^3-12x^2+48x-64=0$

12) $125x^3=1-15x+75x^2$

13) $x^3+x-30=0$

14) $x^3-7x-6=0$

משוואות בנעלם אחד עם פירוקים שונים:

פתור את המשוואות הבאות:

15) $2x^3-7x^2+7x-2=0$

16) $2x^3+5x^2-2x-5=0$

מערכת משוואות:

17) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} x^3+y^3=243 \\ x+y=9 \end{cases}$.

18) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} x^3-y^3=91 \\ x^2y-xy^2=30 \end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $x^3-9x+27x-27$

2) $(2x-1)(4x^2+2x+1)$

3) $(a^2-3)(a^4+3a^2+9)$

4) $8(1+2x^4)(1-2x^4+4x^8)$

5) $\frac{1}{x+2}$

6) $x=4$

7) $x=3$

8) $x_{1,2,3}=\frac{1}{2}\ ,\ 1\ ,\ 2$

9) $(3,6)\ ,\ (6,3)$

10) $8y^3+60y^2+150y+125$

11) $(2y+7)(4y^2-17y+49)$

12) $(xy^2z^3-1)(x^2y^4z^6+xy^2z^3+1)$

13) $8mn^4(2-mn)(4+2mn+m^2n^2)$

14) $\frac{x^2-4x+16}{x}$

15) $x=\frac{1}{\ }$

16) $x_{1,2,3}=-2\ ,\ -1\ ,\ 3$

17) $x_{1,2,3}=-2.5\ ,\ -1\ ,\ 1$

18) $(-5,-6)\ ,\ (6,5)$

סדנת ריענון במתמטיקה - מעודכן

פרק 3 - הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות

תוכן העניינים

1. פונקציה - הגדרה ותכונות בסיסיות .... (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית .... (ללא ספר)
3. הפונקציה הריבועית .... (ללא ספר)
4. הפונקציה המעריכית .... (ללא ספר)
5. הפונקציה הלוגריתמית .... (ללא ספר)
6. פונקציות מפורסמות נוספות .... (ללא ספר)
7. הזזות שיקופים מתיחות וכיווצים של פונקציה .... (ללא ספר)
8. הפונקציות הטריגונומטריות .... (ללא ספר)
9. הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות .... (ללא ספר)
10. הפונקציות ההיפרבוליות .... (ללא ספר)
11. הצגה פרמטרית של פונקציה .... (ללא ספר)
12. הצגה פולרית של עקום .... (ללא ספר)

סדנת ריענון במתמטיקה - מעודכן

פרק 4 - מבוא לתורת הקבוצות

תוכן העניינים

1. כללי 33

כללי:

סיכום כללי:

הגדרות יסודיות:

- גרירה חד כיוונית $\Rightarrow$: $A \Rightarrow B$ פירושו: אם A מתקיים אז גם B מתקיים.
- גרירה דו-כיוונית $\Leftrightarrow$ (אם ורק אם): $A \Leftrightarrow B$ פירושו: $A \Rightarrow B$ וגם $B \Rightarrow A$.
- הסימן 'או': $\vee$.
- הסימן 'וגם': $\wedge$.

קבוצה, איבר של קבוצה ושייכות לקבוצה:

- קבוצה היא אוסף של עצמים.
- כל עצם בקבוצה נקרא איבר של הקבוצה.
- שייכות לקבוצה:
  - על מנת לציין שהאיבר a שייך לקבוצה A נרשום $a \in A$.
  - על מנת לציין שהאיבר a אינו שייך לקבוצה A נרשום $a \notin A$.

שוויון בין קבוצות:

שתי קבוצות הן שוות אם יש להן בדיוק את אותם איברים.

פורמלית שוויון בין קבוצות מוגדר באופן הבא: $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

הקבוצה ריקה:

קבוצה שאין בה כלל איברים נקראת הקבוצה הריקה ומסומנת ב- ϕ, כלומר $\phi = \{\ \}$.

קבוצה סופית ואינסופית:

- קבוצה תקרא סופית אם מספר האיברים בה סופי.
- קבוצה תקרא אינסופית אם מספר האיברים בה אינסופי.

עוצמה של קבוצה:

מספר האיברים של קבוצה A נקרא גם העוצמה של הקבוצה ומסומן $|A|$.

תת-קבוצה:

אם קבוצה A מוכלת בקבוצה B, נסמן זאת: $A\subseteq B$.

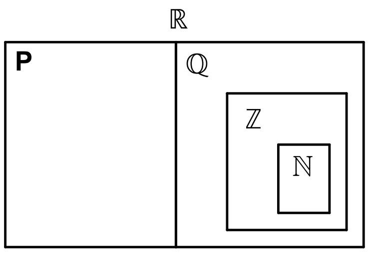
תמיד מתקיים:

- $A\subseteq A$.
- $\phi\subseteq A$.

עבור שוויון קבוצות נדרוש: $A=B\Leftrightarrow(x\in A\Leftrightarrow x\in B)$ או $A=B\Leftrightarrow(A\subseteq B\wedge B\subseteq A)$.

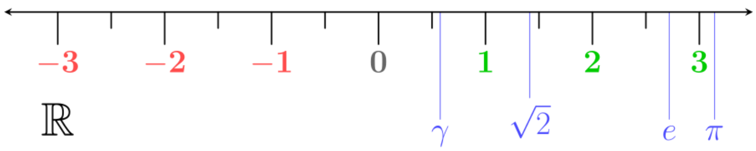
קבוצות מספרים מיוחדות:

- קבוצת המספרים הטבעיים: $\mathbb{N}=\{1,2,3,4,....\}$.
- קבוצת המספרים השלמים: $\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,....\}$.
- קבוצת המספרים הרציונאליים: $\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q}\,\middle|\,p,q\in\mathbb{Z},q\neq0\right\}$.
- קבוצת המספרים האי-רציונאליים (אין סימון ספציפי לקבוצה זו, למעט P).
- קבוצת המספרים הממשיים: $\mathbb{R}$ (כוללת את $\mathbb{Q}$ ואת P).



ציר המספרים:

את קבוצת כל המספרים הממשיים ניתן לתאר על ידי הישר הממשי
שהוא הישר שנקודותיו הן המספרים הממשיים:



קטעים על ציר המספרים:

תיאור מילולי	סימון קבוצות	סימון קטעים
הקטע הפתוח מ-a ל-b לא כולל נקודות הקצה	$\{x \mid a<x<b\}$	(a,b)
הקטע הסגור מ-a ל-b וכולל נקודות קצה	$\{x \mid a\le x\le b\}$	$[a,b]$
קטע חצי סגור וחצי פתוח, מכיל את a ולא את b	$\{x \mid a\le x<b\}$	$[a,b)$
קטע חצי סגור וחצי פתוח, מכיל את b ולא את a	$\{x \mid a<x\le b\}$	$(a,b]$
הקרן הפתוחה מ-a עד ∞ ללא a	$\{x \mid a<x<\infty\}$	(a,∞)
הקרן הסגורה מ-a עד ∞ כולל a	$\{x \mid a\le x<\infty\}$	$[a,\infty)$
הקרן הפתוחה מ- $-\infty$ עד b ללא b	$\{x \mid -\infty<x<b\}$	$(-\infty,b)$
הקרן הסגורה מ- $-\infty$ עד b כולל b	$\{x \mid -\infty<x\le b\}$	$(-\infty,b]$

קבוצת החזקה של קבוצה נתונה:

קבוצת כל התת-קבוצות של קבוצה נתונה נקראת קבוצת החזקה של A ומסומנת $P(A)$.

איחוד וחיתוך קבוצות:

- איחוד קבוצות A ו-B פירושו הגדרת קבוצה חדשה שמכילה את כל האיברים של הקבוצות עצמן ומסומנת: $A\cup B$.
- חיתוך קבוצות A ו-B פירושו הגדרת קבוצה חדשה שמכילה את האיברים המשותפים של הקבוצות עצמן ומסומנת: $A\cap B$.

תכונות האיחוד	תכונות החיתוך	
$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$	
$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$	
$A\cup A=A$	$A\cap A=A$	$A\cup B$
$A\cup\phi=A$	$A\cap\phi=\phi$	
$A\subseteq A\cup B$		

הדיסטריביוטיביות של החיתוך מעל האיחוד ושל האיחוד מעל החיתוך:

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

הפרש קבוצות:

ההפרש של שתי קבוצות A ו-B המסומן $A-B$ הוא קבוצה שאיבריה הם כל איברי A שאינם איברי B, כלומר: $A-B=\{x\,|\,x\in A\wedge x\notin B\}$.

משלים של קבוצה:

ההפרש $U-A$ מסומן ב-A^c או ב-A' ונקרא **המשלים** של A כאשר U היא הקבוצה האוניברסלית.

כללי דה-מורגן:

- $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.
- $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

דיאגרמת וון:

תיאור גרפי של קבוצות ויחסים ביניהם.

שאלות:

1) רשום את הטענות הבאות במילים ובדוק האם הן נכונות:

א. $\forall x \forall y:\ (x+y)^2>0$

ב. $\forall x \exists y:\ (x+y)^2>0$

ג. $\forall x \forall y \exists z:\ xz=\frac{y}{4}$

ד. $\forall x>0, \forall y>0\ ,\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$

ה. $\forall n \exists k, n^3-n=6k$ (k ו- n טבעיים).

הערה: בסעיף זה הטבעיים כוללים את 0.

2) רשום כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון אי־השוויון $x^2>4$, הוא $x>2$ או $x<-2$.

ב. אי השוויון $x^2+4>0$, מתקיים לכל x.

ג. לכל מספר טבעי n, המספר n^3-n מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר x, $|x|<1$ אם ורק אם $-1<x<1$.

3) רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים, ואת מספר איברי הקבוצה:

א. $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2<16\}$

ב. $B=\{x\in\mathbb{Z}\mid x^2<16\}$

ג. $C=\{x\in\mathbb{N}\mid x^2<16\}$

ד. $D=\{x\in\mathbb{Z}\mid (x+4)(x-1)<0\}$

ה. $E=\{x\in\mathbb{N}\mid x^3+x^2-2x=0\}$

ו. $F=\{x\in\mathbb{Z}\mid\ |x|<4\}$

4) הגדר את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן בצורה: $A=\{x\mid$ מקיים תכונה מסוימת $x\}$.

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האי־זוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 4, 3, 2, 1.

5) ציין אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו:

א. $A=\{11,13,17,19\}$

ב. $B=\{x|10<x<20,$ מספר ראשוני $x\}$

ג. $C=\{11,11,17,13,19\}$

ד. $D=\{x\,|\,x=4k,\ k\in\mathbb{Z}\}$

ה. $E=\{x\,|\,x=2m,$ שלם זוגי $m\}$

6) נתונה הקבוצה הבאה: $A=\{1,2,\{2\},\{2,5\},4,\{2,4\}\}$.

מי מבין הטענות הבאות נכונה:

א. $5\in A$
ב. $2\in A$
ג. $\{2\}\in A$
ד. $\{2\}\subseteq A$
ה. $\{\{2\}\}\subseteq A$
ו. $\phi\in A$
ז. $\phi\subseteq A$
ח. $\{2,\{2\}\}\subseteq A$
ט. $\{2,4\}\subseteq A$
י. $\{2,4\}\in A$
יא. $\{\{2,4\}\}\in A$
יב. $\{2,5\}\subseteq A$
יג. $\{2,5\}\in A$
יד. $\{1,4\}\in A$

7) מצא שתי קבוצות, A ו- B, המקיימות:

א. $A\in B$

ב. $A\subseteq B$

8) נתונות הקבוצות הבאות:

$A=\{3,4,5,6,7,8,9\}$, $B=\{4,6,8,10\}$, $C=\{3,5,7,9\}$, $D=\{6,7,8\}$, $E=\{7,8\}$.

קבע איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה X:

א. $X\subseteq A$ וגם $X\not\subseteq D$.

ב. $X\subseteq D$ וגם $X\not\subseteq C$.

ג. $X\subseteq E$ וגם $X\not\subseteq A$.

9) הוכח: $A\subseteq B\wedge B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$.

10) נתונות הקבוצות הבאות:

$A=\{3,4,5,6,7,8,9\}$, $B=\{4,6,8,10\}$, $C=\{3,5,7,9\}$, $D=\{6,7,8\}$.

רשום את:

א. $A\cup B$

ב. $A\cap B$

ג. $(A\cup B)\cap C$

ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)$

ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)$

11) נתונות הקבוצות הבאות:

$A=[1,4)$, $B=(-2,1)$, $C=\{x\in R\,|\,0\le x\le 4\}$, $D=\{x\,|\,2^x=0\}$.

רשום את:

א. $A\cup B$

ב. $A\cap B$

ג. $(A\cup B)\cap C$

ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)$

ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)$

12) נתונות 3 קבוצות: $A=\{4,5,6,7,8\}$, $B=\{5,6,7,8,9\}$, $C=\{4,5,6,10\}$.

א. חשב את $(A-B)-C$.

ב. חשב את $A-(B-C)$.

13) נתון: $B=\{13,15,17\}$, $A=\{12,15,18\}$, $U=\{11,12,13,14,15,16,17,18\}$.

הדגם את כלל דה מורגן $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

14) הוכח את כלל דה מורגן הראשון $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

15) מצא את הקבוצה המשלימה, ביחס ל- $\mathbb{R}$, של הקבוצות הבאות:

א. $A=[1,\infty)$

ב. $B=(-\infty,1)\cup(4,\infty)$

ג. $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2-5x+4>0\}$

ד. $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x-1|<2\ \vee\ x>4\}$

16) הצג באמצעות דיאגרמת וון את הקבוצות הבאות:

א. $A\cap B$

ב. $A\cup B$

ג. A^c

ד. $A\cap B^c$

ה. $A^c\cap B$

ו. $A\cup B^c$

ז. $A^c\cup B$

ח. $A^c\cup B^c=(A\cap B)^c$

ט. $A^c\cap B^c=(A\cup B)^c$

17) נתונה הקבוצה: $A=\{\phi,4,\{4\}\}$.

רשמו את $P(A)$.

18) הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

א. לכל קבוצה A מתקיים $A\subseteq P(A)$.

ב. לכל קבוצה A מתקיים $A\not\subseteq P(A)$.

19) הוכיחו כי: $A\subseteq B\Rightarrow P(A)\subseteq P(B)$.

תשובות סופיות:

1) א. לכל x ולכל y מתקיים $(x+y)^2>0$. הטענה אינה נכונה.

ב. לכל x קיים y, כך ש- $(x+y)^2>0$. הטענה אינה נכונה.

ג. לכל x ולכל y קיים z כך ש- $xz=\frac{y}{4}$. הטענה אינה נכונה.

ד. לכל x חיובי ולכל y חיובי מתקיים $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$. הטענה נכונה.

ה. לכל n טבעי המספר n^3-n מתחלק ב-6. הטענה נכונה.

2) א. $x^2>4\Rightarrow x>2\vee x<-2$ ב. $\forall x: x^2+4>0$

ג. $\forall n\exists k: n^3-n=6k$ ד. $\forall x: |x|<1\Leftrightarrow -1<x<1$

3) א. $A=(-4,4)$, בקבוצה אינסוף איברים.

ב. $B=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$, בקבוצה 7 איברים.

ג. $C=\{1,2,3\}$, בקבוצה 3 איברים.

ד. $D=\{-3,-2,-1,0\}$, בקבוצה 4 איברים.

ה. $E=\{0,1\}$, בקבוצה 2 איברים.

ו. $F=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$, בקבוצה 9 איברים.

4) א. $A=\{x\,|\,x=2n-1,\ n\in\mathbb{N}\}$ ב. $B=\{11,13,17,19\}$

ג. $C=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=4^2\ ,\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\}$ ד. $D=\{1,4,9,16\}$

5) הקבוצות A, B ו- C שוות זו לזו, והקבוצות D ו- E שוות זו לזו.

6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.

ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.

יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.

7) $B=\{\{1,2\},1,2\}$, $A=\{1,2\}$.

8) א. A, C ב. E, D ג. לא קיימת קבוצה כזאת.

9) הוכחה.

10) א. $A\cup B=\{3,4,5,6,7,8,910\}$ ב. $A\cap B=\{4,6,8\}$

ג. $(A\cup B)\cap C=\{3,5,7,9\}$ ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)=\{4,6,7,8,10\}$

ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)=\{6,8\}$.

11) א. $A\cup B=(-2,4)$ ב. $A\cap B=\phi$

ג. $(A\cup B)\cap C=(0,4)$ ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)=(-2,1)$

ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)=[0,1)$.

12) א. ϕ ב. $\{4,5,6\}$.

13) ללא פתרון.

14) הוכחה.

15) א. $A^c=(-\infty,1)$ ב. $B^c=[1,4]$ ג. $C^c=[1,4]$ ד. $D^c=(-\infty,1]\cup[3,4]$.

16) ראו סרטון.

17) $P(A)=\{\phi,\{\phi\},\{4\},\{\{4\}\},\{\phi,4\},\{4,\{4\}\},\{\phi,\{4\}\},\{\phi,4,\{4\}\}\}$.

18) הוכחה.

19) הוכחה.

סדנת ריענון במתמטיקה - מעודכן

פרק 5 - אי שוויונים אלגבריים

תוכן העניינים

1. אי שוויונים ממעלה ראשונה 43
2. אי שוויונים ממעלה שנייה 45
3. אי שוויונים ממעלה שלישית 46
4. אי שוויונים עם מנה 47
5. אי שוויונים כפולים מערכות וגם ואו 49
6. שאלות מסכמות 50
7. אי שוויונים עם שורשים 52
8. מציאת תחום הגדרה 54
9. אי שוויונים עם ערך מוחלט 56

אי-שוויונים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

פעולות המותרות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לחבר או לחסור כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

פעולות אסורות לביצור בפתרון אי-שוויון:

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $45x-26>109$

2) $6x>2(3x-1)$

3) $2(x-5)\geq\frac{1}{2}(4x+6)$

4) $(x-2)^2+4<(x+2)^2+20$

5) $\frac{8x-4}{2}<\frac{9(x+1)}{3}$

6) $4(6x-8)<8(3x-4)$

7) $\frac{x-6}{3}-\frac{x-4}{4}\geq 12-x$

8) $\frac{7-x}{10}-\frac{3x-1}{5}+\frac{x+4}{3}<7$

תשובות סופיות:

1) $x>3$
2) כל x
3) אף x
4) $x>-2$
5) $x<5$
6) אף x
7) $x\geq 12$
8) $x>-13$

אי-שוויונים ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

אי שוויון ריבועי הוא מהצורה: $ax^2+bx+c \lessgtr 0$ כאשר $a\neq 0$.

כדי לפתור אי שוויון ריבועי יש למצוא את נקודות האפס של הביטוי הריבועי ולאחר מכן למצוא את תחום ההצבה הביטוי עבורו הביטוי מקיים את אי השוויון עצמו.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $x^2<144$

2) $x^2-12x>-32$

3) $(x+2)(x+5)<0$

4) $(x+2)(x+4)<35$

5) $-x^2+13x+30<0$

6) $(x-3)(x-7)\geq 8x-56$

7) $(x-5)^2+x(x+2)<89$

8) $(5x+6)^2\leq 4(x-3)^2$

9) $-3x^2+12x>0$

10) $x^2-10x+25>0$

11) $(x-3)^2>(x-1)(x+6)-x^2-3x$

12) $2x^2+2x+24\geq 0$

תשובות סופיות:

1) $-12<x<12$

2) $x<4\ ,\ x>8$

3) $-5<x<-2$

4) $-9<x<3$

5) $x<-2\ ,\ x>15$

6) $x\leq 7\ ,\ x\geq 11$

7) $-4<x<8$

8) $-4\leq x\leq 0$

9) $0<x<4$

10) $x>5\ ,\ x<5$

11) $x<3\ ,\ x>5$

12) כל x

אי-שוויונים ממעלה שלישית:

סיכום כללי:

אי שוויונים ממעלה גבוהה מיוחסים לכאלה שניתן לכתוב אותם בצורה של פולינומים, כגון: $x^3-4x^2+4x+1>0$, $x^4+2x^2+1<0$ וכו׳.

בפועל נפתור אותם ע״י פירוק לגורמים ומציאת נקודות האפס של כל גורם.

לאחר מכן נבדוק את כל אחד מתחומי המספרים המתקבלים עבור הנעלם ונראה באלו מהם מתקבל פסוק אמת.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $(x-1)(x-2)(x-3)>0$

2) $x(x^2+x+1)>0$

3) $(-2x^2-3x+2)(x+1)\le 0$

4) $x^3-25x\ge 0$

5) $(x^2+3x+5)(x-2)>0$

6) $(x^2+8x+20)(3x-5)\le 0$

7) $(x^2-x-6)(x-1)<0$

8) $x^3-6x^2+9x\le 0$

9) $(x^2+6)(x+3)>0$

10) $(x-2)(x-4)(x-1)<0$

תשובות סופיות:

1) $1<x<2\ ,\ x>3$

2) $x>0$

3) $-2\le x\le -1\ ,\ x\ge \frac{1}{2}$

4) $-5\le x\le 0\ ,\ x\ge 5$

5) $x>2$

6) $x\le 1\frac{2}{3}$

7) $x<-2\ ,\ 1<x<3$

8) $x\le 0\ ,\ x=3$

9) $x>-3$

10) $x<1\ ,\ 2<x<4$

אי-שוויונים עם מנה:

סיכום כללי:

אי שוויון מהצורה: $\frac{f(x)}{g(x)}>0$ (או $\frac{f(x)}{g(x)}<0$) נקרא אי-שוויון עם מנה, בו $f(x)$ ו-$g(x)$ הם פולינומים כלשהם.

למשל: $\frac{2x+4}{x^2-3x+4}<0$ בו: $f(x)=2x+4$ ו-$g(x)=x^2-3x+4$.

כדי לפתור אי שוויון עם מנה נמצא את נקודות האפס של $f(x)$ ושל $g(x)$ ונציב מספרים בתחומים המתקבלים. אלו שיתנו פסוק אמת יהוו את פתרון אי השוויון.

הערות:

- ניתן לבצע כפל של המכנה בריבוע בכדי להעביר את אי השוויון לצורה של מכפלות.
- ניתן להעביר אי שוויון המכיל מספר מנות ומספרים שלמים לצורה הנ"ל ע"י פעולות אלגבריות מתאימות תחילה.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $\frac{x-1}{x^2-9}>0$

2) $\frac{x-1}{3x+2}\geq -3$

3) $\frac{1}{x^2-16}>0$

4) $\frac{x-3}{2x^2-10x+12}>0$

5) $\frac{2x-1}{x-5}\leq 0$

6) $\frac{1}{-3(x-1)}<0$

7) $\frac{x-1}{x+2}\leq 1$

8) $\frac{1}{x^2-5x+6}<0$

9) $\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7}\geq 0$

10) $\frac{1}{x^2-8x+12}\geq 0$

תשובות סופיות:

1) $-3<x<1\ ,\ x>3$

2) $x<-\frac{2}{3}\ ,\ x\geq -\frac{1}{2}$

3) $x<-4\ ,\ x>4$

4) $2<x<3\ ,\ x>3$

5) $\frac{1}{2}\leq x<5$

6) $x>1$

7) $x>-2$

8) $2<x<3$

9) $1\leq x\leq 6$

10) $x<2\ ,\ x>6$

אי-שוויונים כפולים - מערכת וגם:

סיכום כללי:

אי-שוויון כפול הוא צורה מקוצרת להציג שני אי-שיווינים אשר יש לפתור יחד (קרי: כמערכת 'וגם'). למשל במקום לכתוב: $a<b$ וגם $b<c$, ניתן לכתוב: $a<b<c$.

מכאן כי כדי לפתור אי שוויון כפול יש לפצל אותו תחילה לשני אי-שיווינים ולפתור כל אחד בנפרד. לאחר מכן יש לקחת את חיתוך הפתרונות.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $3<x+1<5$

2) $0<\frac{1}{x+4}<2$

3) $-1<\frac{x-1}{x+1}<1$

4) $0<\frac{8-3x}{5-2x}<4$

5) $6x-38\le x-3\le 5x+7$

6) $6<\frac{2x+10}{3}\le\frac{7x-20}{5}$

7) $-1\le\frac{2x-6}{4}<\frac{x+2}{3}$

8) $\frac{4x+5}{15}>\frac{3x-8}{5}+\frac{9-x}{3}>11$

תשובות סופיות:

1) $2<x<4$

2) $x>-3\frac{1}{2}$

3) $x>0$

4) $x<2\frac{2}{5}$, $x>2\frac{2}{3}$

5) $-2.5\le x\le 7$

6) $x\ge 10$

7) $1\le x<13$

8) ϕ

שאלות מסכמות – אי-שוויונים:

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $x \le -\frac{3}{4} \cap \{-2 < x \le 5 \cup 0 < x < 8\}$

2) $x(x+5) - 3x + 15 \le 2x - 1 - x(4-x)$

3) $\frac{(x-3)(x+4)}{2-x} \le 0$

4) $\frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)} < 0$

5) $\frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)} \ge 0$

6) $x(x+3)(2x-5) < 0$

7) $\frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2} > 0$

8) $\frac{5-2x}{(x-8)^2} \le 0$

9) $\frac{x-3}{x^2+2} > 0$

10) $\frac{x^2-4x}{x^2+2x-3} > 0$

11) $\frac{x^2-6x+9}{x^3-x} > 0$

12) $\frac{x-7}{x^2+x+3} > 0$

13) $\frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2}$

14) $\frac{2x^2}{x^2-6x+8} \ge \frac{x}{x-4} - \frac{x}{x-2}$

15) $6 < 5x - x^2 \cap x^2 > 3x + 10$

16) $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x} > 0 \cup \frac{1}{x-3} < \frac{1}{1-x}$

17) $1 < \frac{x-1}{x-4} \le 2$

18) לאלו ערכי x נמצאת הפונקציה $f(x) = \frac{x}{x-3}$ מעל הפונקציה: $g(x) = \frac{x+1}{x+3}$?

תשובות סופיות:

1) $-2 < x \le -\frac{3}{4}$

2) $x \le -4$

3) $-4 \le x < 2 \, , \, 3 \le x$

4) $x < -7 \, , \, -\frac{1}{3} < x < 2 \, , \, x > 5$

5) $-1 < x \le 1.5 \, , \, 4 < x \le 12$

6) $x < -3 \, , \, 0 < x < 2.5$

7) $x < -1 \, , \, 2 < x < 6 \, , \, x > 6$

8) $2.5 \le x < 8 \, , \, x > 8$

9) $x > 3$

10) $x < -3 \, , \, 0 < x < 1 \, , \, x > 4$

11) $-1 < x < 0 \, , \, 1 < x < 3 \, , \, x > 3$

12) $x > 7$

13) $x < -2 \, , \, 2 < x < 4$

14) $x \le 0 \, , \, 1 \le x < 2 \, , \, x > 4$

15) אף x

16) $x \ne 1$

17) $x \ge 7$

18) $-3 < x < -\frac{3}{5} \, , \, x > 3$

אי שוויונים עם שורשים:

סיכום כללי:

מקרים בפתרון אי-שוויונות עם שורשים:

מקרה	אי השוויון	פתרון
$a\geq 0$	$\sqrt{f(x)}<a$	$0\leq f(x)<a^2$
$a<0$	$\sqrt{f(x)}<a$	אין פתרון
	$\sqrt{f(x)}>a$	כל x בת.ה. של $f(x)$

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

1) $\sqrt{x+3}<7$

2) $\sqrt{2x-5}\geq 1$

3) $\sqrt{2x^2+5x-6}>2-x$

4) $\sqrt{x^2+x-6}<x-3$

5) $\sqrt{x^2+3x+2}-1<\sqrt{x^2-x+1}$

6) $\sqrt{x^2+5x+6}-\sqrt{x^2-x+1}<1$

7) $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}>\frac{3}{2}$

8) $\frac{4}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x}<2$

9) $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}}<\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$

10) $\sqrt{2-\sqrt{3+x}}<\sqrt{4+x}$

11) $\sqrt{x+6}>\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-5}$

12) $\sqrt{1+\frac{9}{x}}+5\sqrt{\frac{x}{x+9}}\geq 4$

תשובות סופיות:

1) $-3 \le x < 46$.
2) $x \ge 3$.
3) $x < -10$, $x > 1$.
4) $\varnothing$.
5) $x \le -2$, $-1 \le x < \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$.
6) $x \le -3$, $-2 \le x < \frac{-13+\sqrt{73}}{16}$.
7) $\frac{12}{25} < x \le \frac{1}{2}$.
8) $x < 2\sqrt{5} - 4$.
9) $1 < x \le \frac{2}{\sqrt{3}}$.
10) $-\frac{3+\sqrt{5}}{2} < x \le 1$ שזה: $-2.618 < x \le 1$.
11) $2.5 \le x < 3$.
12) $x < -9$, $x > 0$.

תחום הגדרה:

שאלות:

1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{3x-4}$

ב. $f(x)=\sqrt{x^2-5x-6}$

ג. $f(x)=\sqrt{12x-x^2-x^3}$

ד. $f(x)=\sqrt{\frac{x+5}{x^2-4}}$

ה. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+2}-x}$

ו. $f(x)=\frac{\sqrt{3x^2-2x-1}}{2x-3}$

2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+2}-3}$

ב. $f(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$

ג. $f(x)=\sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}}$

ד. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$

3) תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x)=\sqrt{ax-x^2-4}$ הוא $1\le x\le 4$.
מצא את ערכו של הפרמטר a.

4) תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$ הוא $x>2$, $x\le -2$.
מצא את ערכו של הפרמטר a.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+6}-a}$, (a פרמטר חיובי).

א. הבע באמצעות a את תחום הגדרתה.

ב. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=\sqrt{\frac{2x}{x+5}}$.
ידוע כי תחום ההגדרה של שתי הפונקציות מכסה את כל ציר המספרים.
מצא את תחום הערכים האפשריי של הפרמטר a.

תשובות סופיות:

1) א. $x \ge 1\frac{1}{3}$ ב. $x \le -1\ ,\ x \ge 6$ ג. $x \le -4\ ,\ 0 \le x \le 3$

ד. $-5 \le x < -2\ ,\ x > 2$ ה. $-2 \le x < 2\ ,\ x > 2$ ו. $x \le -\frac{1}{3}\ ,\ 1 \le x < \frac{3}{2}\ ,\ x > \frac{3}{2}$

2) א. $x \ge 7$ ב. $-6 \le x \ne -2$ ג. $x \le -1\frac{1}{2}\ ,\ x \ge 1$

ד. $x \le -3\ ,\ -2 \le x \ne 1$.

3) $a = 5$.

4) $a = 2$.

5) א. $x \ge a^2 - 6$ ב. $0 < a \le 1$.

אי שוויונים עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

כללים לפתרון אי שוויון עם ערך מוחלט יחיד:

מקרה	$\|x\|<a$	$\|x\|>a$
פתרון	$-a<x<a$	$x<-a \bigcap x>a$

כללים לפתרון אי שוויון עם מספר ערכים מוחלטים:

- נמצא את הנקודות המאפסות כל ביטוי עם ערך מוחלט.
- מחלקים את אי השוויון לתחומים לפי נקודות האפס.
- פותרים את אי השוויון לכל תחום בנפרד.
- כותבים פתרון כללי (מערכת או) לכל התחומים יחדיו.

שאלות:

1) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $|x+2|<3$
ב. $|2x+1|>7$
ג. $|6-2x|<x$
ד. $|2x+1|-3x>4$

2) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $1<|4-3x|<7$
ב. $|2x+3|<8<|5-x|$

3) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $|x^2+6x-4|<12$
ב. $|x^2+x-10|>3x-2$
ג. $|x^2-3x|<4$
ד. $|6x^2-7x-4|>1$
ה. $x^2-6|x|+5\le 0$
ו. $x^2-6|x+1|-1>0$

4) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $|x-3|+|2x+2|>7$

ב. $|x+8|<11-|1-3x|$

ג. $|3-2x|-11>4-|6+x|$

ד. $|2x-6|+|x+5|>14-|1-x|$

ה. $|5+4x|-|3-x|+\left|4-\frac{1}{2}x\right|\le 22$

ו. $|x+3|+|x^2-5x+4|<19$

5) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $\left|\frac{3x-1}{x-2}\right|\ge 3$

ב. $1\le\left|\frac{x+2}{x-2}\right|\le 2$

ג. $\frac{|x-6|+8x}{x-12}\le 12$

ד. $\left|\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}\right|>5$

6) פתור את אי-השוויונים הבאים (ערך מוחלט ושורשים):

א. $\sqrt{x^2-|x-12|}<x$

ב. $2-\sqrt{1-x}\le|x+2|-3$

ג. $\sqrt{|2x+1|-x-1}\le 4-|3x|$

ד. $\frac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}}>0$

תשובות סופיות:

1) א. $-5<x<1$
ב. $3<x$ או $x<-4$
ג. $2<x<6$
ד. $x<-1$.

2) א. $1\frac{2}{3}<x<3\frac{2}{3}$ או $-1<x<1$
ב. $-5\frac{1}{2}<x<-3$

3) א. $-2<x<2$ או $-8<x<-4$
ב. $4<x$ או $x<2$
ג. $-1<x<4$
ד. $x>\frac{5}{3}$, $-\frac{1}{3}<x<\frac{3}{2}$, $x<-\frac{1}{2}$
ה. $1\le x\le 5$ או $-5\le x\le -1$
ו. $x<-5$, $x>7$

4) א. $2<x$ או $x<-2$
ב. $-1<x<1$
ג. $4<x$ או $x<-6$
ד. $4<x$ או $x<-1$
ה. $-7\frac{3}{7}\le x\le 4$
ו. $-2<x<6$.

5) א. $\frac{7}{6}\le x<2$, $x>2$
ב. $0\le x\le\frac{2}{3}$, $x\ge 6$
ג. $x<12$, $x\ge 46$
ד. $\frac{1}{2}<x<1$, $1<x<2$, $2<x\le 4$

6) א. $x=-1$, $x\ge 3$, $x\neq 12$
ב. $x\le\frac{-15+\sqrt{33}}{2}$
ג. $0\le x\le 1$, $-1\le x\le -\frac{2}{3}$
ד. $-1<x<\sqrt[3]{4}$

סדנת ריענון במתמטיקה - מעודכן

פרק 6 - קווים ותחומים במישור

תוכן העניינים

1. קווים ותחומים במישור 59

2. נספח – משטחים ממעלה שנייה 63

קווים ותחומים במישור

שאלות

1) שרטטו במישור את התחומים הבאים:

א. $S=\{(x,y)\,|\,-1\le x\le 1,\ -1\le y\le 4\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,-1\le x^2\le 1,\ -1\le y\le 4\}$

ג. $S=\{(x,y)\,|\,x\le y\le 4\}$

2) שרטטו במישור את התחומים הבאים:

א. $S=\{(x,y)\,|\,x-1\le y\le 2x+1\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,|y-2x|\le 1\}$

ג. $S=\{(x,y)\,|\,|x|+y<4\}$

ד. $S=\{(x,y)\,|\,(x+y)^2\le 4\ ,\ x>1\}$

3) מצאו את המרכז והרדיוס של המעגלים הבאים:

א. $x^2+y^2-2x-3=0$

ב. $x^2+y^2-8y=-15$

ג. $x^2+y^2+2x+4y=0$

4) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטטו אותו.

א. $y=\sqrt{1-x^2}$

ב. $y=-\sqrt{1-x^2}$

ג. $x=\sqrt{1-y^2}$

ד. $x=-\sqrt{1-y^2}$

ה. $y=\sqrt{1-x^2}$ $\quad 0\le x\le 1$

ו. $y=\sqrt{1-x^2}$ $\quad -\frac{3}{5}\le x\le \frac{3}{5}$

5) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטטו אותו.

א. $y=2+\sqrt{1-(x-3)^2}$

ב. $y=2-\sqrt{-x^2+6x-8}$

ג. $x\geq 3.5,\quad x=4-\sqrt{1-y^2}$

6) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 4\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<4\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\geq 4\right\}$

ד. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2>4\right\}$

ה. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\sqrt{4-x^2}\leq y\leq\sqrt{4-x^2}\right\}$

ו. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\sqrt{4-y^2}\leq x\leq\sqrt{4-y^2}\right\}$

ז. $S=\left\{(x,y)\,|\,0\leq y\leq\sqrt{4-x^2}\right\}$

ח. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\sqrt{4-y^2}\leq x\leq 0\right\}$

7) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\leq x^2+y^2\leq 4\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\leq x^2+y^2\leq 4,\ x\geq 0, y\geq 0\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\leq x^2+y^2\leq 4,\ x\geq 0\right\}$

ד. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\leq x^2+y^2\leq 4,\ \ y\geq 0\right\}$

8) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2-2x+4y+1\leq 0\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,0\leq y+1\leq\sqrt{1-x^2}\right\}$

9) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ \ x\le y\le 2x\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,\ y\ge x\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{7}x+\frac{25}{7}\le y\le\sqrt{25-x^2}\right\}$

ד. $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,\ y\ge x^2\}$

ה. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2\le y\le\sqrt{4-x^2}\right\}$

ו. $S=\left\{(x,y)\,|\,|x-1|\le y\le\sqrt{1-(x-1)^2}\right\}$

10) נתונה המשוואה $25x^2+4y^2-50x+16y=59$.

א. הוכיחו שהמשוואה מתארת אליפסה ושרטטו אותה.

ב. רשמו את הפונקציות שמתארות את החצי העליון ואת החצי התחתון של האליפסה.

ג. רשמו את הפונקציות שמתארות את החצי הימני ואת החצי השמאלי של האליפסה.

ד. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה או עליה?

ה. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה ומעל לציר המשני שלה?

11) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\{(x,y)\,|\,4x^2+y^2+8x-4y+4\ge 0\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,0\le y\le\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{2}y+1\le x\le\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}\right\}$

ד. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\le y\le -x^2\right\}$

12) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2\le y\le 2-x^2\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,-2\le y\le -x^2\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,y^2-2\le x\le -y^2\right\}$

ד. $S=\left\{(x,y)\,|\,y^2\le x\le 1-y\right\}$

13) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $\left\{(x,y)\left|\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\le 1\right.\right\}$

ב. $\left\{(x,y)\left|\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\ge 1,\ x^2+y^2\le 16\right.\right\}$

ג. $\left\{(x,y)\left|\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\ge 1,\ y\ge\frac{1}{4}x^2\right.\right\}$

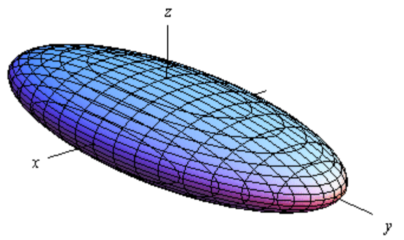
ד. $\left\{(x,y)\left|\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\le 1,\ x^2+y^2\ge 4\right.\right\}$

תשובות סופיות

לפתרונות מלאים ושרטוטים היכנסו לאתר GooL.co.il

נספח – משטחים ממעלה שנייה

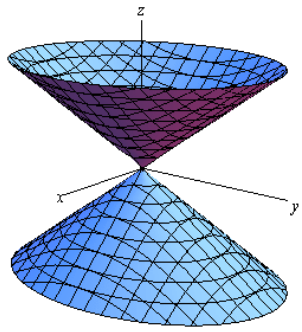
אליפסואיד



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a=b=c$, נקבל **כדור** עם רדיוס a והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

חרוט אליפטי

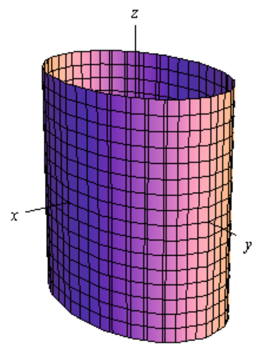


משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות.

* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.

גליל אליפטי

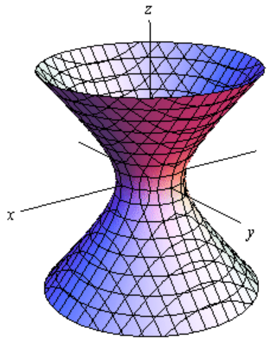


משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא $x^2+y^2=r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים.

* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל.

היפרבולואיד חד-יריעתי

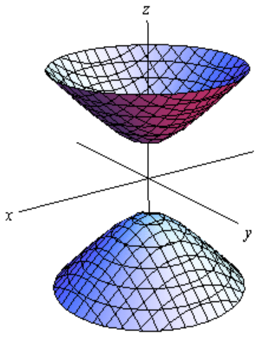


<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

<u>תיאור</u>: החתך במישור xy הוא אליפסה ; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות ; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז ההיפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

היפרבולואיד דו-יריעתי

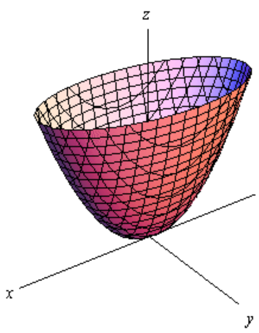


<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

<u>תיאור</u>: למשטח זה אין חתך במישור xy ; החתכים במישורים מקבילים למישור xy, החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות ; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז ההיפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

פרבולואיד אליפטי



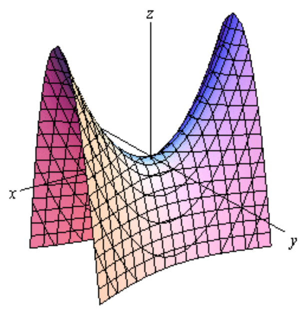
<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

<u>תיאור</u>: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית) ; החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות ; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

פרבולואיד היפרבולי



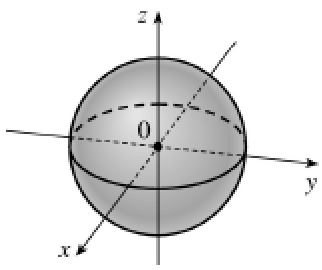
<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

<u>תיאור</u>: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- y ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- x. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

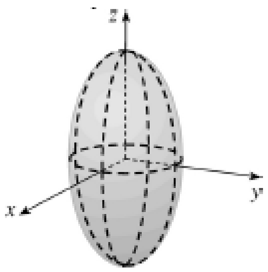
* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

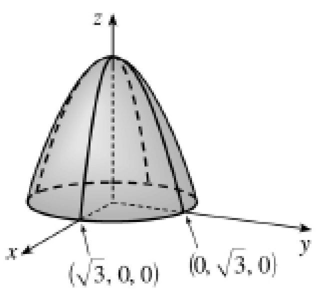
דוגמאות שונות



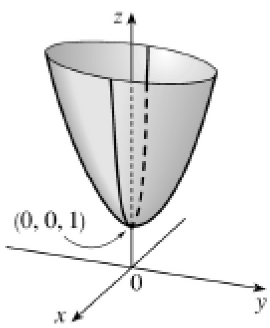
$x^2+y^2+z^2=1$



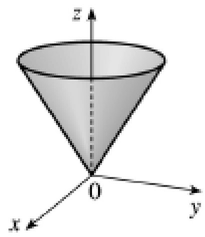
$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$



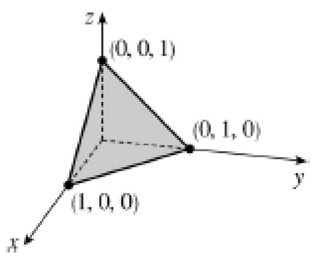
$z=3-x^2-y^2$



$z=4x^2+y^2+1$



$z=\sqrt{x^2+y^2}$



$x+y+z=1$

סדנת ריענון במתמטיקה - מעודכן

פרק 7 - חקירת משוואה ממעלה ראשונה

תוכן העניינים

1. פתרון משוואות ממעלה ראשונה עם פרמטר 66
2. חקירת משוואות ממעלה ראשונה 67
3. חקירה של מערכת שתי משוואות ממעלה ראשונה 70
4. חקירת משוואות ממעלה ראשונה עם שורשים 75
5. חקירת משוואות ממעלה ראשונה עם ערך מוחלט 76

פתרון משוואות ממעלה ראשונה עם פרמטר:

סיכום כללי:

שלבי עבודה:

- נפתור את המשוואה.
- נאתר את ערכי הפרמטר המאפסים את המכנה בכל שלבי הפתרון.
- נבדוק לכל ערך כזה בנפרד כמה פתרונות יש למשוואה על ידי הצבתו במשוואה המקורית.

שאלות:

1) פתרו את המשוואה: $kx+6k=2x+3k^2$.

2) פתרו את המשוואה: $a^2(x-1)=3ax+4(x-a)$.

3) פתרו את מערכת המשוואות: $\begin{cases}2kx+5y=2k^2\\2x-y=-10\end{cases}$.

4) פתרו את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases}bx-(1-2b)y=1\\(2b+1)x+3(by-1)=0\end{cases}$

תשובות סופיות:

1) $(k\neq 2)\quad x=3k$.

2) $x=\dfrac{a}{a+1}$.

3) $(k-5,2k)$.

4) $b\neq 0\ ,\ \pm 1\quad ,\quad \left(\dfrac{2-b}{b(b+1)},\dfrac{1}{b+1}\right)$

חקירה של משוואה ממעלה ראשונה:

שאלות:

1) נתונה המשוואה הבאה: $m^2(2x-1)=9(x-1)-x(6+5m)$.
מצאו לאילו ערכי m יש למשוואה:
א. פתרון יחיד (ומצאו אותו).
ב. אינסוף פתרונות.
ג. אף פתרון.

2) נתונה המשוואה: $k^2(5-2x)=3(15-2kx)$.
א. מצאו לאלו ערכי k למשוואה:
i. פתרון יחיד.
ii. אף פתרון.
iii. אינסוף פתרונות.
ב. מצאו לאלו ערכי k פתרון המשוואה:
i. חיובי.
ii. מקיים את אי-השוויון: $2x-3>x$.

3) נתונה המשוואה: $\frac{mx}{m-2}=\frac{2m}{m-5}-\frac{6x}{m^2-7m+10}$.
מצאו לאלו ערכי m למשוואה:
א. פתרון יחיד.
ב. אף פתרון.
ג. אינסוף פתרונות.

4) לפניכם המשוואה: $m\cdot\frac{x-1}{x}-\frac{m+6}{m}=\frac{-3}{x}$.
א. פתרו את המשוואה בהנחה שיש לה פתרון יחיד.
ב. מצאו עבור אלו ערכי m יש למשוואה:
i. פתרון יחיד.
ii. אינסוף פתרונות.
iii. אף פתרון.
ג. האם עבור ערכי ה- m הנותנים אינסוף פתרונות, כל x יהיה פתרון של המשוואה?
ד. עבור אלו ערכי m יהיה פתרון המשוואה גדול מ-2?

5) נתונה המשוואה: $x\left(m^2-9\right)=2\left(m\left(3x+1\right)+1-x\right)$.

א. פתרו את המשוואה בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

ב. חקרו את המשוואה ומצאו עבור אלו ערכי m יש למשוואה:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ג. עבור איזה ערך של m פתרון המשוואה יהיה: $x=2$?

6) נתונה המשוואה: $\frac{5}{k-4}-\frac{kx}{3k+15}=\frac{k^2+29}{k^2+k-20}$.

א. פתרו את המשוואה בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

ב. האם קיים ערך של k עבורו יש למשוואה אינסוף פתרונות?

ג. עבור איזה ערך של k פתרון המשוואה הוא: 4-?

7) לפניכם המשוואה הבאה: $\frac{m^2x}{m-5}+\frac{2mx-m^2+1}{m-5}=1$.

מצאו עבור אלו ערכי m יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות m).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

8) לפניכם המשוואה הבאה: $\frac{\left(m^2+1\right)x-4}{x-2}=m+1$.

מצאו עבור אלו ערכי m יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות m).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

9) לפניכם המשוואה הבאה: $\frac{5m-2}{mx-1}=-3$.

מצאו עבור אלו ערכי m יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות m).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

10) לפניכם המשוואה הבאה: $\frac{x+1}{x-m+1}=\frac{x}{x+m+2}$.

מצאו עבור אלו ערכי m יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות m).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{1}{2}$, $m\neq -3$, $\frac{m-3}{2m-1}$ ב. $m=-3$ ג. $m=\frac{1}{2}$

2) א. 1. $k\neq 0,3$ 2. $k=0$ 3. $k=3$.
ב. 1. $k>0$ או $k<-3$ וגם $k\neq 3$ 2. $0<k<15$ וגם $k\neq 3$.

3) א. $m\neq 2\,,3\,,5$ ב. $m=2\,,3\,,5$ ג. אף m.

4) א. $m\neq 3$, $x=\frac{1}{m+2}$ ב. פתרון יחיד: $m\neq 0,-2,3$, אף פתרון: $m=0,-2$, אינסוף פתרונות: $m=3$. ג. לא, רק: $x\neq 0$.
ד. $-2<m<-1.5$.

5) א. $m\neq 7,-1$, $x=\frac{1}{m-7}$ ב. פתרון יחיד: $m\neq 7,-1$, אף פתרון: $m=7$, אינסוף פתרונות: $m=-1$.

6) א. $x=\frac{3}{k}-3$, $k\neq 0,4,-5$ ב. אף k ג. $k=-3$.

7) א. $m\neq 0\,,\ -2\,,\ 5$ ב. אף m ג. $m=0\,,\ -2\,,\ 5$

8) א. $m\neq 0\,,\ \pm 1$ ב. $m=1$ ג. $m=0\,,\ -1$

9) א. $m\neq 0\,,\ \frac{2}{5}$ ב. אף m ג. $m=\frac{2}{5}\,,\ 0$

10) א. $m\neq 0\,,\ -1\,,\ -2\,,\ -\frac{1}{2}$ ב. אף m ג. $m=0\,,\ -1\,,\ -2\,,\ -\frac{1}{2}$

חקירה של מערכת שתי משוואות ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

שלבי עבודה:

- נפתור את מערכת המשוואות.
- נאתר את ערכי הפרמטר המאפסים את המכנה בכל שלבי הפתרון.
- נבדוק לכל ערך כזה בנפרד כמה פתרונות יש למערכת על ידי הצבתו.

המשמעות הגרפית של חקירת מערכת משוואות ממעלה ראשונה:

בהינתן מערכת שתי משוואות מהצורה: $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ נאמר כי:

אם: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ אז הישרים נחתכים (כלומר למערכת פתרון יחיד).

אם: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ אז הישרים מקבילים (כלומר למערכת אף פתרון).

אם: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ אז הישרים מתלכדים (כלומר למערכת אינסוף פתרונות).

שאלות:

1) נתונה מערכת המשוואות: $\begin{cases} x+3ay=a \\ ax+3y=4a-3 \end{cases}$.

א. מצאו לאלו ערכי a למערכת המשוואות:

i. פתרון יחיד.

ii. אף פתרון.

iii. אינסוף פתרונות.

ב. מצאו לאלו ערכי a נקודת החיתוך בין הישרים (המיוצגים על ידי המשוואות) נמצאת ברביע השלישי.

2) נתונות מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases}(m+4)x+5y=m+8\\ x+my=m+2\end{cases}$.

א. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

ב. מצאו עבור אלו ערכי m יש למערכת:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ג. פתרון המערכת מייצג נקודה במערכת צירים.
הוכיחו כי נקודה זו נמצאת על הישר: $y(m-1)=2(m-1)x+4-m$.

ד. עבור אלו ערכי m פתרון המערכת:

i. יהיה ברביע השני.

ii. יהיה מתחת לציר ה- x.

iii. יהיה מימין לציר ה- y.

3) לפניכם מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-2x+3y=\left(k-\dfrac{x}{2}\right)^2+4\\ x-10=k(1-y)\end{cases}$.

א. מצאו לאלו ערכי k יש למערכת המשוואות:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ב. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

4) לפניכם מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases}k(x-1)=1-2y\\ \dfrac{2x+3}{k}=3-y\end{cases}$.

א. מצאו לאלו ערכי k יש למערכת המשוואות:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ב. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

5) לפניכם מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} k^2(1-x)=k+9x+12y \\ x=1-\dfrac{2(y+1)}{k} \end{cases}$.

א. מצאו לאלו ערכי k יש למערכת המשוואות:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ב. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

6) נתונה מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} (2-k)x-y=k \\ 3x+ky=-1 \end{cases}$.

א. מצאו את הערך של k עבורו $(2,7)$ הוא פתרון של מערכת המשוואות.

ב. האם יש למשוואה פתרונות נוספים עבור הערך של k שמצאת בסעיף הקודם?

ג. האם קיים ערך של k עבורו למערכת המשוואות לא יהיו פתרונות כלל? אם כן מצאו אותו.

7) לפניכם מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} ax+b^2y=a^2 \\ 3x+by=9b \end{cases}$.

א. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

ב. הראו שכאשר $a=3b$ יש למערכת אינסוף פתרונות.

ג. עבור אלו ערכי a ו- b הפתרון היחיד של המערכת יהיה $(4,3)$?

8) לפניך מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} amx+y=m^2 \\ bx+my=-9m \end{cases}$.

א. מצאו ערכי הפרמטרים a ו- b אם ידוע כי כאשר $m=4$ פתרון המשוואה הוא $(4,0)$.

ב. הוכיחו את הטענות הבאות:

i. לכל ערך של m יש למערכת פתרון ממשי.

ii. פתרון המערכת תמיד יהיה $(m,0)$.

ג. העזרו בסעיף הקודם וקבעו איזו משוואה מבין שלושת המשוואות הבאות לא תכיל את הפתרון היחיד הנ"ל:

i. $7y+2m=2x$.

ii. $my=2x-m$.

iii. $m(y-mx)=2x-m(m^2+2)$.

9) לפניך הישרים הבאים: $\begin{cases} x+(k-9)y=8 \\ x-\dfrac{14y}{k}=1 \end{cases}$.

א. עבור אלו ערכי k הישרים הללו מקבילים?

ב. הביעו באמצעות k את נקודת החיתוך של הישרים.

ג. עבור איזה ערך של k נקודת החיתוך של הישרים תהיה על הישר: $y=x-8$?

10) לפניכם שני הישרים: $\begin{cases} (k^2+6)x+ay=15 \\ kx+ay=3 \end{cases}$, a,k פרמטרים, $a\neq 0$.

א. הוכיחו כי לכל ערך של k הישרים הללו נחתכים.

ב. מצאו את a אם ידוע כי כאשר $k=6$ נקודת החיתוך היא $\left(1,\dfrac{1}{3}\right)$.

ג. עבור איזה ערך של k נקודת החיתוך תהיה $(2,1)$?

ד. הראו כי נקודת החיתוך של הישרים נמצאת על גרף הפונקציה: $\dfrac{4y}{x}=k^2-5k+6$.

תשובות סופיות:

1) א. i. $a \neq \pm 1$ ii. $a=-1$ iii. $a=1$ ב. $-1<a<0$

2) א. $\left(\frac{m-2}{m-1}, \frac{m}{m-1}\right)$, $m \neq 1,-5$

ב. פתרון יחיד: $m \neq 1,-5$, אינסוף פתרונות: $m=-5$, אף פתרון: $m=1$.

ג. הוכחה.

ד. i. $1<m<2$ ii. $0<m<1$ iii. $m>2$, $m<1$, $m \neq -5$.

3) א. i. $k \neq 3,-1$ ii. $k=3$ iii. $k=-1$ ב. $\left(\frac{k^2+3k+10}{k+1}, \frac{8}{k+1}\right)$.

4) א. i. $k \neq 0,\pm 2$ ii. $k=2$ iii. $k=0,-2$ ב. $\left(\frac{k-3}{k+2}, \frac{3k+1}{k+2}\right)$.

5) א. i. $k \neq 0,3$ ii. $k=3$ iii. $k=0$ ב. $\left(\frac{k-4}{k-3}, \frac{6-k}{2k-6}\right)$.

6) א. $k=-1$ ב. כן.   ג. $k=3$.

7) א. $\left(a+3b, -\frac{3a}{b}\right)$ ג. $b=2$, $a=-2$.

8) א. $b=-9$, $a=1$ ג. ii

9) א. $k=2,7$ ב. $\left(\frac{k^2-9k+112}{k^2-9k+14}, \frac{7k}{k^2-9k+14}\right)$ ג. $k=8$

10) א. הוכחה.   ב. $a=1$ ג. $k=1$.

חקירת משוואות ממעלה ראשונה עם שורשים:

שאלות:

1) לפניכם המשוואה: $(m-1)x=\sqrt{m-1}$.

מצאו עבור אלו ערכי m יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות m).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

2) לפניכם המשוואה: $\frac{mx}{\sqrt{3x-2}}=\frac{x-m}{\sqrt{3x-2}}+\sqrt{3x-2}$.

מצאו עבור אלו ערכי m יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות m).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

תשובות סופיות:

1) א. פתרון יחיד: $m>1$ והוא: $x=\frac{1}{\sqrt{m-1}}$ ב. $m=1$ ג. $m<1$.

2) א. פתרון יחיד: $\frac{6}{5}<m<4$ והוא: $x=\frac{m+2}{4-m}$. ב. אינסוף: $\varnothing$. ג. אף פתרון: $m\geq 4$, $m\leq\frac{6}{5}$.

חקירה של משוואות ממעלה ראשונה עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

הגדרת ערך מוחלט: $|x|=\begin{cases} x & x\ge 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$.

- משוואה מהצורה: $|A|=|B|$ תפוצל לשתי משוואות: $A=B$ או: $A=-B$.
יש לחקור כל מקרה בנפרד ולאחד פתרונות.
- עבור משוואות המכילות ביטויים עם ערכים מוחלטים יש להפריד עבור כל מקרה לפי הגדרת הערך המוחלט. לבסוף יש לאחד פתרונות.
- למשוואה מהצורה: $|x|=k$ (כאשר x הוא המשתנה ו- k הוא פרמטר) יתכנו:
  - שני פתרונות אם $k>0$.
  - פתרון אחד (והוא $x=0$) אם $k=0$.
  - אף פתרון אם $k<0$.

שאלות:

1) חקור את המשוואה הבאה: $|x-2m|=|x+1|$.

2) חקור את המשוואה הבאה: $|mx-3x|=|x-m|$.

3) חקור את המשוואה הבאה: $\frac{mx^2}{|x|-1}-m|x|=2m+1$.

4) נתונה מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} y+|x-2|=3 \\ |x+y|=m \end{cases}$.

מצא עבור אלו ערכי m יש למערכת:

א. פתרון אחד בלבד.

ב. שני פתרונות שונים.

ג. אינסוף פתרונות.

תשובות סופיות:

1) פתרון יחיד: $m \neq -\frac{1}{2}$. אף פתרון: $\varnothing$. אינסוף: $m = -\frac{1}{2}$.

2) פתרון יחיד: $m = 0$ והוא $x = 0$. אף פתרון: $\varnothing$.

שני פתרונות: $m \neq 0$ והם: $x_{1,2} = -\frac{2m}{3}, \frac{12m}{5}$.

3) עבור: $m = -\frac{1}{2}$ יש פתרון יחיד: $x = 0$.

עבור: $m > 0$, $-\frac{1}{2} < m < 0$, $m < -1$ יש שני פתרונות.

עבור: $m = 0$, $-1 < m < -0.5$ אין פתרון כלל.

4) א. $m = 0, m > 5$ ב. $0 < m < 5$ ג. $m = 5$.

סדנת ריענון במתמטיקה - מעודכן

פרק 8 - חקירת משוואה ממעלה שנייה

תוכן העניינים

1. פתרון משוואות ממעלה שנייה עם פרמטר 78
2. חקירה של משוואה ממעלה שנייה 79
3. חקירות עם קדקוד פרבולה 88

פתרון משוואות ממעלה שנייה עם פרמטר:

סיכום כללי:

משוואות מהצורה: $ax^2+bx+c=0$ המכילות פרמטר כלשהו, m, המגולם בתוך הביטויים של המקדמים a, b ו-c נקראות משוואות עם פרמטר.

פתרון של משוואה עם פרמטר יתבצע באופן רגיל, אך יכול להכיל את הפרמטר.

שאלות:

1) פתור את המשוואה: $x^2+mx-12m^2=0$.

2) פתור את המשוואה: $2x^2+5m^2=(11m+1)x-5m$.

תשובות סופיות:

1) $x_1=3m\ ,\ x_2=-4m$.

2) $x_1=5m\ ,\ x_2=\frac{m+1}{2}$.

חקירה של משוואה ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

המשוואה הריבועית:

תהא המשוואה הריבועית: $ax^2+bx+c=0$ כאשר $a\neq 0$.
נגדיר: $\Delta=b^2-4ac$ ונאמר כי:

- למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים אם: $\Delta>0$.
- למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד אם: $\Delta=0$.
- למשוואה לא יהיו שני פתרונות ממשיים כלל אם: $\Delta<0$.

אם $a=0$ תתקבל משוואה ליניארית מהצורה: $bx+c=0$.

- למשוואה זו יהיה פתרון ממשי אחד אם $b\neq 0$.
- למשוואה לא יהיו פתרונות כלל אם: $b=0$ ו-$c\neq 0$.

אם $b=0$ וגם $c=0$ למשוואה יהיו אינסוף פתרונות ממשיים.

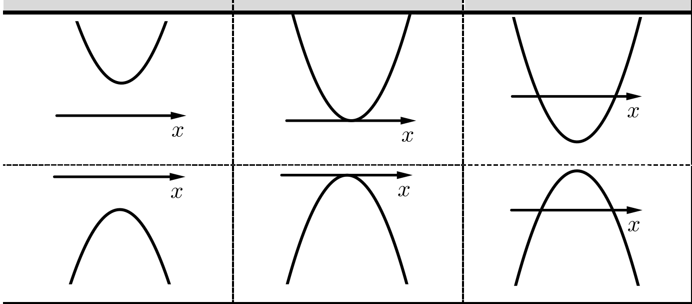
הפונקציה הריבועית:

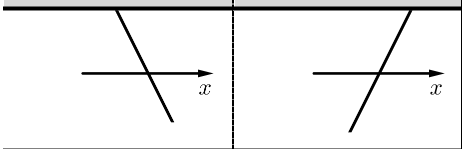
תהא הפונקציה הריבועית: $y=ax^2+bx+c$ כאשר $a\neq 0$.
נגדיר: $\Delta=b^2-4ac$ ונאמר כי לפונקציה נקודות חיתוך עם ציר ה-x באופן הבא:

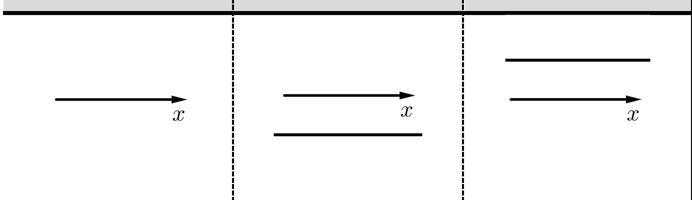
- אם $a>0$ תתקבל פרבולה ישרה (מחייכת):
  - עבור $\Delta>0$ הפרבולה תחתוך את ציר ה-x בשתי נקודות שונות.
  - עבור $\Delta=0$ הפרבולה תשיק לציר ה-x (חיתוך בנקודה אחת).
  - עבור $\Delta<0$ הפרבולה תהיה מרחפת (ללא חיתוך עם ציר ה-x כלל).
- אם $a>0$ תתקבל פרבולה הפוכה (עצובה):
  - עבור $\Delta>0$ הפרבולה תחתוך את ציר ה-x בשתי נקודות שונות.
  - עבור $\Delta=0$ הפרבולה תשיק לציר ה-x (חיתוך בנקודה אחת).
  - עבור $\Delta<0$ הפרבולה תהיה מרחפת (ללא חיתוך עם ציר ה-x כלל).

- אם $a=0$ תתקבל פונקציה ליניארית: $y=bx+c$ ולה:
  - עבור $b>0$ יתקבל ישר עולה החותך את ציר ה-x ב-$\left(-\frac{c}{b},0\right)$.
  - עבור $b<0$ יתקבל יורד עולה החותך את ציר ה-x ב-$\left(-\frac{c}{b},0\right)$.
- אם $b=0$ יתקבל ישר $y=c$ וכעת:
  - אם $c>0$ הישר כולו מעל לציר ה-x ומקביל לו.
  - אם $c<0$ הישר כולו מתחת לציר ה-x ומקביל לו.
  - אם $c=0$ הישר מתלכד עם ציר ה-x.

ניתן לסכם את כל המקרים באופן הבא:

פירוט מילולי	תנאים	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
תיאור גרפי של $y=ax^2+bx+c$ עבור $a\neq 0$	$a>0$			
	$a<0$			

פירוט מילולי	תנאים	$b>0$	$b<0$
תיאור גרפי של $y=bx+c$ כאשר $a=0$ ו-$b\neq 0$	$a=0$ $b\neq 0$		

פירוט מילולי	תנאים	$c>0$	$c<0$	$c=0$
תיאור גרפי של $y=c$ כאשר $a=0$ ו-$b=0$	$a=0$ $b=0$			

שאלות:

1) נתונה המשוואה: $(m\neq 3)$, $(3-m)x^2+4mx-2m=0$.

מצא לאלו ערכי m למשוואה:

א. שני פתרונות ממשיים שונים.

ב. פתרון ממשי אחד.

ג. אין פתרונות ממשיים כלל.

2) נתונה הפונקציה: $y=2mx^2+mx-1$.

מצא לאלו ערכי m הפונקציה אינה חותכת את ציר ה-x.

3) נתונה הפונקציה: $(m\neq \pm 3)$, $y=(m^2-9)x^2+(m+3)x+4$.

מצא לאלו ערכי m הפונקציה נמצאת מעל ציר ה-x לכל ערך של x.

4) נתון אי השוויון: $mx^2>(m+4)(x-1)-x^2$.

מצא לאלו ערכי m אי השוויון מתקיים לכל ערך של x.

5) נתונה המשוואה הבאה: $-m(x-1)^2+2(m+16)=x(6-x(2m-3))+1$.

א. מצא עבור אלו ערכי m יש למשוואה:

i. שני פתרונות ממשיים שונים.

ii. פתרון ממשי אחד.

iii. אף פתרון ממשי.

ב. מצא את הפתרון היחיד עבור ערכי ה-m המתאימים במידה והוא קיים.

6) נתונה המשוואה הבאה: $m^2x(9x+1)+1=0$.

א. מצא עבור אלו ערכי m יש למשוואה:

i. שני פתרונות ממשיים שונים.

ii. פתרון ממשי אחד.

iii. אף פתרון ממשי.

ב. מצא את הפתרון היחיד עבור ערכי ה-m המתאימים במידה והוא קיים.

7) נתונה המשוואה: $mx^2-(9m+4)x+20m+16=0$.

א. הראה שעבור כל ערך של m יש למשוואה לפחות פתרון ממשי אחד.

ב. פתור את משוואה והראה כי אחד השורשים הוא מספר קבוע שאינו תלוי ב- m.

8) לפניך הפונקציה הבאה: $f(x)=(m^2-m-2)x^2+2(m-2)x+4$.

ענה על השאלות הבאות:

א. עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בשתי נקודות שונות?

ב. עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודת אחת בלבד?

ג. עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה לא חותך את ציר ה- x כלל?

ד. עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה חיובי לכל ערך של x?

ה. עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה שלילי לכל ערך של x?

9) נתונה הפונקציה: $f(x)=kx^2-5kx+6k+1$.

א. עבור אלו ערכי k גרף הפונקציה יהיה כולו מעל לציר ה- x?

ב. עבור איזה ערך של k יתקבל גרף פרבולה הנוגעת בציר ה- x?

10) עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה: $f(x)=(k^2-5k-6)x^2+(2-3k)x+2$

הוא אי-שלילי לכל ערך של x?

11) נתונות הפונקציות: $f(x)=x^2+4x+2m+2$ ו- $g(x)=(1-m)x^2-3mx-1.5$.

א. מצא עבור אלו ערכי m נחתכים הגרפים של הפונקציות:

i. בשתי נקודות שונות.

ii. בנקודה אחת בלבד.

iii. באף נקודה.

ב. מצא לאלו ערכי m יהיה גרף הפונקציה $f(x)$ כולו מתחת לגרף הפונקציה $g(x)$.

12) נתונה הפונקציה: $f\left(x\right)=2kx^{2}+6kx+8k+2$.

א. עבור איזה ערך של k גרף הפונקציה יהיה ישר העובר ברביעים הראשון והשני בלבד?

מגדירים פונקציה נוספת: $g\left(x\right)=kx^{2}-6x-10$.

ב. האם קיימים ערכי k עבורם גרף הפונקציה $f\left(x\right)$ הוא מעל גרף הפונקציה $g\left(x\right)$ לכל x? הראה חישוב מתאים.

ג. הוכח כי קיים ערך של k עבורו גרפים של שתי הפונקציות משיקים זה לזה ומצא אותו.

13) נתונה הפונקציה הריבועית: $f\left(x\right)=2x^{2}-\left(5m+7\right)x+3m^{2}+8m+5$.

א. הראה כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה-x לפחות פעם אחת לכל ערך של m.

ב. מצא את שורשי הפונקציה.

ג. עבור אלו ערכי m סכום השורשים גדול מ-3.5.

ד. מהם שורשי הפונקציה כאשר: $m=0$?

14) נתונה המשוואה הבאה: $\left(k+1\right)x^{2}+\left(k^{2}-4k-5\right)x-54=0$.

א. ענה על שני החלקים הבאים:

i. עבור אלו ערכי k יהיו פתרונות המשוואה שני מספרים נגדיים?

ii. מהם פתרונות המשוואה עבור ערכי ה-k שמצאת?

ב. הראה כי לא קיים ערך של k עבורו פתרונות המשוואה: $\left(k-4\right)x^{2}+\left(6k-k^{2}-8\right)x+5k-10=0$ הם מספרים נגדיים.

15) נתונה הפונקציה הבאה: $f\left(x\right)=mx^{2}+\left(m-2\right)x+m^{2}+3m-10$.

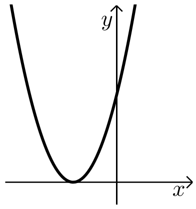
א. מצא עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.

ב. מצא את נקודות החיתוך שבין הגרפים המתקבלים עבור כל ערכי ה-m שמצאת בסעיף א'.

16) מצא עבור אלו ערכי m למשוואה: $\left(4-m\right)x^{2}+\left(m+2\right)x+m^{2}-12m-28=0$ יהיו שני פתרונות ממשיים שונים שאחד מהם הוא אפס.

17) נתונה משפחת הפרבולות הבאה: $f(x)=2x^2+(m+1)x+m^2+2m-2.5$.

א. מצא ערך של m עבורו גרף הפרבולה השייכת למשפחת הפונקציות הנ"ל היא מהצורה:

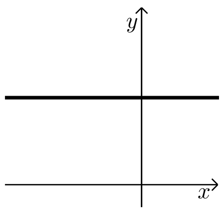


ב. עבור ערך ה-m שמצאת בסעיף הקודם מצא את התחום של k עבורו יהיה לגרף הפרבולה ולישר $y=kx-4$ שתי נקודות חיתוך.

18) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=(m^2-5m+4)x^2+(2m-2)x+1$.

א. עבור אלו ערכים של m הפונקציה תחתוך את ציר ה-x בשתי נקודות שונות?

ב. מצא ערך של m עבורו גרף הפונקציה השייך למשפחת הפונקציות הנ"ל יהיה מהצורה שבצד, וכתוב את משוואת הישר המתקבלת במקרה זה.



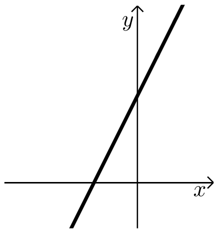
ג. הגרף שאת משוואתו מצאת בסעיף הקודם חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בשתי נקודות שונות. הראה כי אחת מהן אינה תלויה ב-m.

ד. עבור אלו ערכי m נקודת החיתוך שתלויה ב-m תהיה מימין לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם?

19) נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{4x(mx+2)+4-m}{4}$, m פרמטר חיובי.

א. הראה כי לכל הגרפים המייצגים את משפחת הפונקציות הנ"ל יש נקודת חיתוך עם ציר ה-x שאינה תלויה ב-m ומצא את נקודה זו.

ב. עבור איזה ערך של m גרף הפונקציה יהיה מיוצג ע"י ישר מהצורה:



ג. הראה כי קיים תחום של x אשר לא תלוי ב-m ובו גרף הפונקציה נמצא תמיד מתחת לישר שמצאת בסעיף הקודם ומצא את תחום זה.

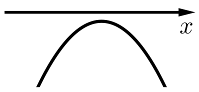
20) נתונה הפונקציה: $f(x)=3m^2x^2+4mx+2$.

א. הוכח כי הפונקציה נמצאת תמיד מעל לציר ה-x עבור כל ערך של m.

ב. מגדירים פונקציה חדשה באופן הבא: $y=\dfrac{mx^2+2x(m+2)+m}{3m^2x^2+4mx+2}$.

מצא עבור אלו ערכי m הפונקציה y היא שלילית.

21) נתונה הפונקציה: $f(x)=mx^2+(2m+1)x-\frac{1}{4}$.



א. עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה השייך למשפחת הפונקציות הנ"ל יהיה מהצורה:

ב. מגדירים פונקציה חדשה באופן הבא: $y=\dfrac{(m^2-9)x^2+(m+3)x-1}{mx^2+(2m+1)x-\frac{1}{4}}$.

הראה כי הפונקציה y חיובית בתחום שמצאת בסעיף הקודם.

ג. דרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה y עם ציר ה- y מעבירים ישר המקביל לציר ה- x.

i. כתוב את משוואת ישר זה.

ii. מצא עבור אלו ערכים של m גרף הפונקציה חותך את הישר בנקודה שבה: $x=-9$.

תשובות סופיות:

1) א. $m>0$ או $m<-3$ וגם $m\neq 3$ ב. $m=0\ ,\ -3$ ג. $-3<m<0$.

2) $-8<m\leq 0$.

3) $m>3\frac{2}{5}$ או $m<-3$.

4) $m>0$.

5) א. i. $m>3$ ii. אף m iii. $m<3$.
ב. לא קיים מקרה בו יש למשוואה פתרון יחיד.

6) א. i. $m>6\ ,\ m<-6$ ii. $m=\pm 6$ iii. $-6<m<6\ ,\ m\neq 0$
ב. בשני המקרים יתקבל: $x=-\frac{1}{18}$.

7) א. מתקבל: $\Delta=(m+4)^2$ שתמיד אי-שלילי ובמקרה הלא-ריבועי מתקבלת משוואה עם פתרון אחד.   ב. $\frac{5m+4}{m}\ ,\ m_{1,2}=4$.

8) א. $-2<m<2\ ,\ m\neq -1$ ב. $m=-1,-2$ ג. $m\geq 2\ ,\ m<-2$
ד. $-2<m<-1\ ,\ m=2$.   ה. אף m.

9) א. $0\leq k<4$ ב. $k=4$.

10) $-26\leq k\leq -2$.

11) א. i. $m<-8\ ,\ m>-2\ ,\ m\neq 0$ ii. $m=0,-2,-8$ iii. $-8<m<-2$.
ב. $-8<m<-2$.

12) א. $k=0$ ב. לא. אין פתרון לאי-שוויון: $f(x)>g(x)$.
ג. עבור אי-השוויון של סעיף ב' מתקבל: $\Delta=4(k+3)^2$ ולכן כאשר $k=-3$ הגרפים נוגעים זה בזה בנקודה אחת.

13) א. הוכחה.   ב. $x_{1,2}=m+1\ ,\ 1.5m+2.5$
ג. $m>0$ ד. $x_{1,2}=1\ ,\ 2.5$.

14) א. i. $k=5$ ii. $x=\pm 3$ ב. הוכחה.

15) א. $m=2,-5$ ב. $(-1,2)\ ,\ (0,0)$.

16) $m=14$.

17) א. $m=1$. כאשר: $m=-3$ נקבל גרף: $y=2x^2-2x+0.5$ המשיק לציר x מימין לראשית ולכן נפסל.   ב. $k<-4\ ,\ k>8$.

18) א. $m>1\ ,\ m\neq 4$ ב. $f(x)=1\ ,\ m=1$ ג. הנקודה היא: $(0,1)$
ד. $m\neq 1\ ,\ m<4$.

19) א. הנקודה היא: $(-0.5,0)$ ב. $m=0$ ג. $-0.5<x<0.5$.

20) א. מתקבל: $\Delta = -8m^2$ ולכן לגרף הפרבולה אין חיתוכים כלל ומכיוון ש-A אי-שלילי הרי שמדובר בפרבולה מרחפת חיובית. במקרה הישר מתקבל ישר המקביל לציר ה-x שגם כן כולו חיובי.
ב. מאחר והמכנה תמיד חיובי (ממקודם) יש לדרוש תנאים שיקיימו מונה שלילי ($a < 0$, $\Delta < 0$) - עבור המונה) נקבל: $m < -1$.

21) א. $-1 < m < -\frac{1}{4}$ ב. הוכחה. ג. i. $y = 4$
ii. $-1\frac{7}{9}$, $m = 5$.

חקירות עם קדקוד פרבולה:

סיכום כללי:

תהא הפונקציה הריבועית: $y=ax^2+bx+c$ כאשר $a\neq 0$. נגדיר: $\Delta=b^2-4ac$.

התיאור הגרפי של הפונקציה הריבועית הוא פרבולה.

עבור $a\neq 0$ נקבל כי קדקוד הפרבולה הוא: $\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$.

- שאלות העוסקות בקדקוד חיובי/שלילי נדרוש: $-\frac{\Delta}{4a}>0$ או $-\frac{\Delta}{4a}<0$ בהתאמה.
- שאלות העוסקות בקדקוד הנמצא מימין/משמאל לציר ה- y נדרוש $-\frac{b}{2a}>0$ או $-\frac{b}{2a}<0$ בהתאמה.
- שאלות העוסקות בקדקוד שנמצא מעל/מתחת לישר $y=n$ או מימין/משמאל לישר $x=k$ נדרוש $n \gtrless -\frac{\Delta}{4a}$ ו- $k \gtrless -\frac{b}{2a}$ בהתאמה.
- שאלות העוסקות בקדקוד שבאחד הרביעים נדרוש $0 \gtrless -\frac{b}{2a}$ ו- $0 \gtrless -\frac{\Delta}{4a}$ לפי הרביע המבוקש.

שאלות:

1) נתונה הפונקציה: $f(x)=(m+3)x^2+(3m+14)x+2m+7$.

א. עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה הוא פרבולה החותכת את ציר ה- x בשתי נקודות?

ב. הבע באמצעות m את שיעורי קדקוד הפרבולה של גרף הפונקציה הנתונה.

ג. עבור אלו ערכי m קדקוד הפרבולה יהיה וודאי מתחת לישר: $y=-4$?

ד. עבור אלו ערכי m מתקיימים התנאים של סעיף א' ו-ג' יחד?

2) נתונה הפרבולה הבאה: $f(x)=x^2-3(m-2)x+2m^2-8m+7$.

א. הוכח את הטענות הבאות:

i. גרף הפרבולה חותך את ציר ה-x בשתי נקודות עבור כל ערך של m.

ii. קדקודי כל הפרבולות המיוצגות ע"י תבנית הפונקציה הנתונה נמצאים מתחת לציר ה-x.

ב. עבור איזה ערך של m גרף הפרבולה יחתוך את ציר ה-x בשתי נקודות הנמצאות באותו מרחק מראשית הצירים?

ג. עבור ערך ה-m שמצאת בסעיף הקודם מצא את נקודות החיתוך על ציר ה-x.

ד. הראה כי קדקוד הפרבולה המתקבלת בעת הצבת ערך ה-m הנ"ל נמצא על ציר ה-y.

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=(m^2-2m-3)x^2+8x+0.5$.

א. עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה הוא פרבולה?

ב. עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה הוא פרבולה החותכת את ציר ה-x בשתי נקודות?

ג. הבע באמצעות m את שיעורי קדקוד הפרבולה.

ד. הוכח כי קדקודי כל הפרבולות נמצאים על הישר: $2y=8x+1$ עבור כל ערך של m עבורו מתקבלת פרבולה.

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=(k^2-2k+15)x^2+kx+12$.

א. הוכח כי עבור כל ערך של k גרף הפונקציה לא נוגע בציר ה-x כלל.

ב. הוכח כי קדקוד הפרבולה המיוצגת ע"י התבנית הנ"ל תמיד מעל לציר ה-x.

ג. עבור איזה ערך של k קדקוד הפרבולה יהיה על ציר ה-y?

ד. מצא את שיעורי קדקוד הפרבולה במקרה זה.

5) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=(k^2-9)x^2+(k+3)x-1$.

א. עבור אלו ערכי k גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה-x?

ב. הבע באמצעות k את שיעורי קדקוד הפרבולה המיוצגת ע"י התבנית של $f(x)$.

ג. מצא עבור אלו ערכי k קדקוד הפרבולה יהיה ברביע הראשון.

ד. האם קיים ערך של k עבורו קדקוד הפרבולה נמצא על ציר ה-y? נמק את תשובתך.

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\left(m^2-4\right)x^2+5mx+6$.

א. הראה כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x לפחות פעם אחת עבור כל ערך של m .

ב. עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה הוא פרבולת מינימום?

ג. הראה כי קדקוד הפרבולה המתקבל עבור ערכי ה- m שמצאת בסעיף הקודם נמצא תמיד מתחת לציר ה- x .

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\left(m^2-8m+12\right)x^2+(m-2)x+2$.

א. עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה יהיה כולו מעל לציר ה- x ?

ב. עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה הוא פרבולה מרחפת חיובית שקדקודה משמאל לישר: $x=-\frac{1}{2}$.

ג. האם ייתכן כי גרף הפונקציה יכול להיות פרבולת מקסימום שקדקודה הוא משמאל לישר: $x=-\frac{1}{2}$? נמק והראה חישוב מתאים.

8) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=\left(m^2-4\right)x^2+2x+1$, $g(x)=(m+2)x^2+(5-m)x+3$.

א. ענה על השאלות הבאות:

i. מצא ערך של m עבורו הגרפים משיקים זה לזה.

ii. מצא ערך של m עבורו הגרפים חותכים זה את זה בנקודה אחת בלבד.

iii. הסבר מדוע בכל מקרה התקבל ערך m שונה.

ב. עבור אלו ערכי m הגרפים של הפונקציות הם פרבולות מינימום המקיימות שקדקוד הפרבולה המיוצגת ע"י הפונקציה $f(x)$ נמצא מימין לקדקוד הפרבולה המיוצגת ע"י $g(x)$?

9) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=\left(m^2-9\right)x^2+7x+5$, $g(x)=(m-3)x^2+(4m-3)x+1$.

א. עבור אלו ערכי m הגרפים נחתכים בשתי נקודות שונות?

ב. ענה על השאלות הבאות:

i. עבור איזה ערך של m הגרפים הם פרבולות נוגעות זו בזו?

ii. עבור איזה ערך של m הגרפים חותכים זה את זה בנקודה אחת בלבד.

iii. הסבר את ההבדל בין הערכים של m שהתקבלו בחלק i ובחלק ii.

ג. מצא את נקודת החיתוך של שני הגרפים.

ד. עבור אלו ערכי m הסכום של שיעורי ה- x של נקודות קדקודי הפרבולות של שתי הפונקציות יהיה קטן מ-1?

תשובות סופיות:

1) א. $m<-28\ ,\ m>-4\ ,\ m\neq-3$ ב. $\left(\frac{-3m-14}{2m+6},\frac{-m^2-32m-112}{4m+12}\right)$

ג. $m>-3$ ד. $m>-3$.

2) א. i. מתקבל: $\Delta=m^2-4m+8$ שחיובי תמיד.

ii שיעור ה- y של הקדקוד הוא: $-\frac{\Delta}{4}$ אשר שלילי תמיד. ב. $m=2$

ג. $(\pm1,0)$ ד. הקדקוד: $(0,-1)$.

3) א. $m\neq3,-1$ ב. $m\neq3,-1\ ,\ -5<m<7$ ג. $\left(\frac{-4}{m^2-2m-3},\frac{m^2-2m-35}{2(m^2-2m-3)}\right)$

ד. יש להציב את הקדקוד בישר ולקבל שוויון אמת.

4) א. המקדם a תמיד חיובי ומתקבל: $\Delta=-47k^2+96k-720$ שתמיד שלילי.
מכאן שמדובר בפרבולה מרחפת עבור כל k. ג. $k=0$ ד. $(0,12)$

5) א. $-3\leq k<1.8$ ב. $\left(\frac{1}{2(3-k)},\frac{9-5k}{4(k-3)}\right)$ ג. $1.8<k<3$.

ד. לא. מכיוון שלא קיים ערך של k עבורו שיעור ה- x של קדקוד הפרבולה יהיה אפס.

6) א. מתקבל: $\Delta=m^2+96$ המעיד כי תמיד יש לפונקציה שני חיתוכים וכאשר $m=\pm2$
מתקבלים שני ישרים החותכים את ציר ה- x. ב. $m<-2\ ,\ m>2$.

7) א. $m\leq2\ ,\ m>6\frac{4}{7}$. ב. $6\frac{4}{7}<m<7$. ג. לא.

8) א. i. $m=-1\frac{4}{9}$ ii. $m=-2$ iii. במקרה i מדובר בפרבולות אשר
יכולות להשיק ובמקרה ii מדובר בשני ישרים אשר רק נחתכים. ב. $3<m<4$.

9) א. $m\neq3,-2\ ,\ m<3\frac{1}{16}$ ב. i. $m=3\frac{1}{16}$ ii. $m=3,-2$

iii. במקרה i מדובר במשוואה ריבועית ובנקודת השקה, ובמקרה ii מדובר
במשוואה ליניארית ובנקודת חיתוך.

ג. עבור $m=-2$ מתקבלת: $\left(-\frac{2}{9},3\frac{16}{81}\right)$, עבור: $m=3$ מתקבלת: $(2,19)$.

ד. $m<-3\ ,\ -2.72<m<1.22\ ,\ m>3$.

סדנת ריענון במתמטיקה - מעודכן

פרק 9 - נוסחאות וייטה

תוכן העניינים

1. הגדרת נוסחאות וייטה וחישובים יסודיים 92

2. חקירת משוואות עם נוסחאות וייטה .... (ללא ספר)

הגדרת נוסחאות וייטה וחישובים יסודיים:

סיכום כללי:

הגדרה:

נתונה הפונקציה הריבועית: $y = ax^2 + bx + c$, כאשר: $\Delta > 0$, $a \neq 0$.

אם x_1 ו- x_2 הם שורשי המשוואה: $ax^2 + bx + c = 0$ אז מתקיים: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.

לקשרים אלו קוראים בשם **נוסחאות וייטה** והם תקפים רק במשוואה ריבועית שבה $\Delta > 0$.

שאלות:

1) לפניך משוואות ריבועיות. מבלי לפתור, מצא את הסכום ואת מכפלת השורשים שלהם:

א. $x^2 + 5x - 8 = 0$.

ב. $3x^2 - 7x + 4 = 0$.

ג. $x^2 + 9x - 14 = 0$.

ד. $13x - 6x^2 + 7 = 0$.

2) נתונה משוואה ריבועית: $ax^2 + 3x + 5 = 0$. מצא את a אם ידוע כי למשוואה שני שורשים ממשיים שונים אשר סכומם הוא 3.

3) נתונה משוואה ריבועית: $\alpha x^2 + (\beta - \alpha)x - 16 = 0$, ($\beta$, α פרמטרים).
מצא את ערכי הפרמטרים α ו- β אם ידוע כי למשוואה שני שורשים ממשיים שונים אשר סכומם הוא 2- ומכפלתם היא 16-.

4) כתוב משוואה ריבועית אשר לה שני שורשים ממשיים שונים, x_1 ו- x_2 שמקיימים: $x_1 + x_2 = 5$ ו- $x_1 \cdot x_2 = -2$.
כמה משוואות כאלה תיתכנה? נמק.

תשובות סופיות:

1) א. $x_1+x_2=-5$, $x_1x_2=-8$ ב. $x_1+x_2=2\frac{1}{3}$, $x_1x_2=1\frac{1}{3}$

ג. $x_1+x_2=-9$, $x_1x_2=-14$ ד. $x_1+x_2=\frac{6}{13}$, $x_1x_2=\frac{7}{13}$.

2) $a=-1$.

3) $\alpha=1$, $\beta=3$.

4) אם $a=1$ אז: $x^2-5x-2=0$.

יש אינסוף משוואות מהצורה: $ax^2-5ax-2a=0$.

סדנת ריענון במתמטיקה - מעודכן

פרק 10 - חשבון דיפרנציאלי - חילוק פולינומים ופתרון משוואות פולינומיאליות

תוכן העניינים

1. חילוק פולינומים 94
2. פתרון משוואות 95
3. שאלות מסכמות 96

חילוק פולינומים:

סיכום כללי:

בחילוק פולינום $p(x)$ בפולינום $q(x)$ (נכתב: $q(x)\overline{\big)p(x)}$) יש לבצע 4 שלבים:

1) חלוקת האיבר במעלה הגבוהה ביותר של $p(x)$ באיבר במעלה הגבוהה ביותר של $q(x)$.
2) רישום תוצאת החילוק בצד והכפלתה בכל הפולינום המחלק $q(x)$.
3) חיסור של תוצאת ההכפלה בפולינום המחולק $p(x)$.
4) חזרה לשלב הראשון כאשר מבצעים את חילוק האיבר במעלה הגבוהה ביותר של $q(x)$ בתוצאת החיסור.

התהליך מסתיים כאשר לא ניתן לחלק עוד.
במידה ותוצאת החיסור האחרונה מניבה ביטוי שמעלתו קטנה משל האיבר המחלק ב- $q(x)$ אז נתייחס לביטוי זה כאל שארית החלוקה.

שאלות:

בצע את חילוק הפולינומים הבאים:

1) $\frac{x^2-5x-14}{x+2}$
2) $\frac{x^3+x^2+3x-5}{x-1}$
3) $\frac{x^4+x^3-x^2+14x-3}{x+3}$
4) $\frac{x^3-4x^2+9}{x-3}$
5) $\frac{x^3+5x^2-4x-20}{x+5}$
6) $\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$
7) $\frac{4x^4+6x^3+31x^2+99x+10}{x^2-x+10}$
8) $\frac{4x^2+x-1}{x-2}$

תשובות סופיות:

1) $x-7$
2) x^2+2x+5
3) x^3-2x^2+5x-1
4) x^2-x-3
5) x^2-4
6) x^2+1
7) $4x^2+10x+1$
8) $4x+9+\frac{17}{x-2}$

פתרון משוואות:

סיכום כללי:

משפטים כלליים:

- לכל משוואה פולינומיאלית ממעלה n יש בדיוק n שורשים.
- אם לפולינום שורש מרוכב $a+bi$ אז גם המספר הצמוד $a-bi$ הוא שורש שלו.
- יהי $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ פולינום שכל מקדמיו מספרים שלמים.
  אם לפולינום שורש שהוא מספר שלם, אז הוא מחלק את האיבר החופשי a_0.
- אם $x=a$ שורש של פולינום $p(x)$, אז הפולינום $p(x)$ מתחלק ב-$x-a$ ללא שארית.
- אם $p(x)$ פולינום ואם $p(a)=0$ וגם $p'(a)=0$ אז $x=a$ הוא שורש כפול.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $k^4+3k^3-15k^2-19k+30=0$

2) $k^3+2k^2-3k+20=0$

3) $k^5+3k^4+2k^3-2k^2-3k-1=0$

4) $k^3-6k^2+12k-8=0$

5) $k^6-3k^4+3k^2-1=0$

6) $k^3-k^2+k-1=0$

7) $k^4-3k^3+6k^2-12k+8=0$

תשובות סופיות:

1) $k_1=1\ ,\ k_2=-2\ ,\ k_3=3\ ,\ k_4=-5$

2) $k_1=-4\ ,\ k_{2,3}=1\pm 2i$

3) $k_1=1\ ,\ k_2=-1\ ,\ k_3=-1\ ,\ k_4=-1\ ,\ k_5=-1$

4) $k_1=2\ ,\ k_2=2\ ,\ k_3=2$

5) $k_1=1\ ,\ k_2=-1\ ,\ k_3=1\ ,\ k_4=-1,\ k_5=1,\ k_6=-1$

6) $k_1=1\ ,\ k_{2,3}=\pm i$

7) $k_1=1\ ,\ k_2=2\ ,\ k_{3,4}=\pm 2i$

שאלות מסכמות:

שאלות:

1) לפניך הפולינום הבא: $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

א. מצא את המקדמים של הפולינום אם נתון כי:

i. הפולינום מתחלק ב-$2x+3$ ללא שארית.

ii. הפולינום מקיים: $P(4.5)=27$.

iii. לפונקציה $y=P(x)$ יש מקסימום מקומי עבור $x=0$ ומינימום מקומי עבור $x=\frac{1}{2}$.

ב. הצב את המקדמים שקיבלת וסרטט את גרף הפונקציה $y=P(x)$.

2) מצא את ערכי הפרמטרים a ו-b של הפולינום: $P(x)=ax^3+bx^2-9ax-3b-24a$ אם נתון ש-$P(x)$ מתחלק ב-x^2-9 ללא שארית וגם: $P(1)=-10$.

3) הוכח כי: $P(x)=x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n+1}-1$ מתחלק ב-$(x-1)^3$ ללא שארית לכל n טבעי.

4) עבור אלו ערכים של a ו-b מתחלק הפולינום: $P(x)=ax^6+4x^5+bx^4+2$ ב-$(x-1)^2$ ללא שארית?

5) אם מחלקים את הפולינום $P(x)$ ב-$(3x-4)$ מקבלים שארית 2, ואם מחלקים אותו ב-$(x-1)$ מקבלים שארית 2-.

מצא את שארית החילוק של הפולינום $P(x)$ ב-$(x-1)(3x-4)$.

6) נתון הפולינום $P(x)$. אם נחלק אותו ב-$4-x^2$ נקבל שארית 1, ואם נחלק אותו ב-$x-3$ נקבל שארית 4. מצא את שארית החילוק של הפולינום $P(x)$ ב-$(4-x^2)(x-3)$.

7) הפולינום : $P(x)=x^5+bx^4+cx^2+2x-1$, (b ו- c פרמטרים) מתחלק ב- $x-1$

עם שארית $R_1=2\frac{3}{4}$ ומתחלק ב- $x-2$ עם שארית $R_2=41$.

א. מצא את b ו- c .

ב. מהן המנה והשארית בחלוקת $P(x)$ ב- x^2-3x ?

8) נתון הפולינום : $P(x)=x^4-5x^3+ax^2-10x-28$.

ידוע כי $P(x)$ מתחלק ללא שארית בפולינום x^2-5x+b .

א. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

ב. חשב את שורשי המשוואה $P(x)=0$ מעל המספרים המרוכבים.

9) עבור אילו ערכים של הקבוע k למשוואה $-x^3+(1-k^2)x^2+(1-3k)x-1=0$

יש פתרון $x=1$? מצא את כל הפתרונות של המשוואה עבור k שמצאת.

הערה:

השאלה הבאה מיועדת רק לתלמידים שלמדו נוסחאות וייטה למשוואה ממעלה שלישית :

10) מצא את כל שורשי המשוואה $t^3-2t^2(2+\sqrt{3})+t(\sqrt{192}+1)-\sqrt{12}=0$

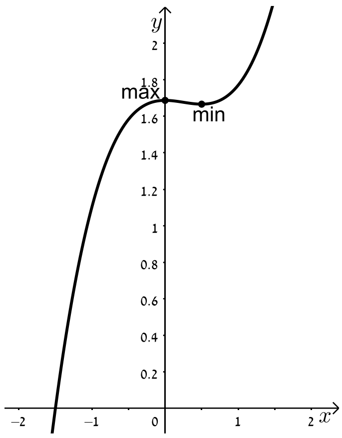
אם ידוע כי מכפלה של שניים משורשיה שווה ל-1.

11) מצא פולינום ממשי ממעלה רביעית ששורשיו הם : $1+\sqrt{2}i$, 2 , -1 .

12) פתור את המשוואה $z^4-2z^3+z^2+2z-2=0$ אם ידוע שאחד מפתרונותיה הוא $z=1+i$.

תשובות סופיות:

1) א. $P(x)=\frac{1}{3}x^3+-\frac{1}{4}x^2+\frac{27}{16}$ ב. להלן גרף:



2) $a=\frac{1}{4}$, $b=1$.

3) שאלת הוכחה.

4) $a=2$, $b=-8$.

5) $R(x)=12x-14$.

6) $R(x)=\frac{3}{5}x^2-\frac{7}{5}$.

7) א. $b=\frac{1}{4}$, $c=\frac{1}{2}$

ב. שארית: $91.25x-1$, מנה: $x^3+3.25x^2+9.75x+29.75$

8) א. $a=-12$, $b=-14$. ב. $x_{1,2}=-2,7$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{2}i$.

9) עבור $k=0$ מקבלים: $x_1=x_2=1$, $x_3=-1$.

עבור $k=-3$ מקבלים: $x_1=1$, $x_{2,3}=\frac{1}{2}\left(-9\pm\sqrt{85}\right)$.

10) $t_{1,2}=2\pm\sqrt{3}$, $t_3=\sqrt{12}$.

11) $P(x)=x^4-3x^3+3x^2+x-6$.

12) $z_{1,2}=1\pm i$, $z_{3,4}=\pm1$.

סדנת ריענון במתמטיקה - מעודכן

פרק 11 - משוואות ואי-שוויונים מעריכיים

תוכן העניינים

1. משוואות מעריכיות יסודיות 99
2. משוואות עם חיבור וחיסור איברים 101
3. משוואות בהן המשתנה גם בבסיס 103
4. משוואות מסכמות שונות 104
5. משוואות עם קבוע אוילר 105
6. מערכת משוואות מעריכיות 106
7. אי שוויונים מעריכיים 107
8. אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך 108

משוואות מעריכיות יסודיות:

סיכום כללי:

- פתרון כללי של משוואת מעריכית מהצורה: $a^x = a^y$ הוא: $x = y$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = 1$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = 1 = a^0$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = b^x$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = b^x = 1$ ללא תלות בבסיסים.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי החזקות היסודיים):

א. $2^x = 16$

ב. $5^x \cdot 25^{x+2} = 125$

ג. $10^{x-2} = 10000^{x+1}$

ד. $9^x \cdot 3^{x^2} = 81^{3x-4}$

ה. $\left(2^x \cdot 32\right)^3 = 8$

ו. $\left(5^{x^2}\right)^5 \cdot \frac{1}{5^5} = 625^{x-1}$

ז. $\frac{7^x}{343^3} = 1$

ח. $\left(25 \cdot 0.2^{2x}\right)^2 = \left(\frac{1}{125}\right)^{1-x}$

2) פתור את המשוואות הבאות (הבסיס הוא שבר):

א. $27 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{5x+2} = 8$

ב. $\left(\frac{3}{4}\right)^{2-x} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{9}{16}\right)^{7+x}$

ג. $25\left(\frac{7}{5}\right)^{x^2-2x} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{4-x} = 49$

3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי השורשים):

א. $\sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3}$

ב. $\sqrt{3^{x+7}} = 81$

ג. $\left(9\sqrt{27}\right)^{3x} \cdot 3^{2-x} = \frac{1}{9}$

ד. $\sqrt[x]{16} \cdot \left(\frac{1}{2^x}\right)^3 = \frac{1}{16}$

ה. $2^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2^x}} = 8\left(\sqrt{8}\right)^{-\sqrt{x}}$

ו. $5^x \frac{1}{25^5} = 125^{\sqrt{x}}$

4) פתור את המשוואות הבאות (מכפלת בסיסים שונים):

א. $2^x = 7^x$

ב. $3^x \cdot \frac{625}{\sqrt{25^x}} = 81$

ג. $2^{3x} \cdot 5^{3x} = 1000000$

ד. $2^{x+1} \cdot 3^{x-2} \cdot 7^x = 392$

ה. $243 \cdot 2^{x-1} \cdot 18^{x-9} = \frac{1}{3^{x-2}}$

ו. $108 \cdot \frac{1}{2^{1-2x}} = 72^x \cdot \sqrt{0.5}$

ז. $2^{2x+2} \cdot 5^{x+1} = \left(2\sqrt{5}\right)^{4-x}$

תשובות סופיות:

1) א. $x=4$ ב. $x=-\frac{1}{3}$ ג. $x=-2$ ד. $x=2,8$ ה. $x=-4$
ו. $x=1,-\frac{1}{5}$ ז. $x=9$ ח. $x=1$.

2) א. $x=-1$ ב. $x=-2$ ג. $x=3,-2$.

3) א. $x=-\frac{1}{2}$ ב. $x=1$ ג. $x=-\frac{8}{19}$ ד. $x=2,-\frac{2}{3}$ ה. $x=4,9$ ו. $x=25$.

4) א. $x=0$ ב. $x=4$ ג. $x=2$ ד. $x=2$ ה. $x=5$
ו. $x=1.5$ ז. $x=\frac{2}{3}$.

משוואות עם חיבור וחיסור איברים:

סיכום כללי:

במשוואות הכוללות חיבור וחיסור של איברים, נאתר את הבסיס עם המעריך הקטן ביותר ונסמן אותו ב- t, למשל במשוואה: $4^x-3\cdot 2^x=4$ נסמן: $2^x=t$.

נבטא את כל איברים המשוואה באמצעות t ונפתור אותה עבורו.
לאחר מכן נחזיר את ההצבה למציאת ערכי ה- x המתאימים.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם חיבור וחיסור ממעלה ראשונה):

א. $2^x+6\cdot 2^x=56$
ב. $8^x+3\cdot 8^x=256$
ג. $5\cdot 3^x-3^{x+1}=162$
ד. $2\cdot 6^x+6^{x+2}-6^{x-1}=227$

2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם חיבור וחיסור ממעלה ראשונה):

א. $81^{x+1}+18\cdot 3^{4x-3}=735$
ב. $5^{3x+2}+4\cdot 125^x=29$
ג. $\left(2^{3x+1}\right)^2-64^{x-\frac{1}{3}}=15$
ד. $\sqrt{10000^{x+1}}-\sqrt[4]{10^{8x+1}}=\sqrt[4]{1000}\cdot\left(\sqrt[4]{10^7}-1\right)$
ה. $6^{-x}-5\cdot 36^{-\left(\frac{x}{2}+1\right)}=186$
ו. $5^{-x}+25^{\frac{1}{2}-\frac{x}{2}}-5^{-x-1}=145$
ז. $2\cdot 10^{x+1}+10^{x+2}=3\cdot 5^{x+1}$
ח. $4^{x+2}-6\cdot 4^x=7\cdot 12^{x+1}+6\cdot 12^x$

3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחיסור ממעלה שנייה):

א. $9^x-36\cdot 3^x+243=0$
ב. $16^{x+1}-65\cdot 4^x+4=0$
ג. $6^x-4\cdot 6^{-x}+3=0$
ד. $4^{-x}-3\cdot 4^x+2=0$
ה. $\left(\frac{4}{9}\right)^x-\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1}=-\frac{2}{3}$
ו. $\left(2^{\frac{1}{3}x+2}\right)^2-5\cdot 2^{\frac{1}{3}x+1}+1=0$

4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות):

א. $\frac{20}{9^x+1}=3-\frac{8}{9^x-1}$
ב. $\frac{7^x}{7^x-4}+\frac{8}{7^x+5}=3$

5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות מסכמות):

א. $\frac{1}{25^{1-x}}-6\cdot5^{x-1.5}+1=0$

ב. $3^x-\sqrt{16\cdot3^{x+1}}=-9$

ג. $36^x-6^{x+1}\cdot3^x+8\cdot9^x=0$

ד. $4\cdot9^x-10\cdot6^x+6\cdot4^x=0$

ה. $25\cdot5^{2x}+16\cdot15^x=9^{x+1}$

ו. $9^x+4^x-6^x=\frac{7}{6^{1-x}}$

ז. $\frac{8^{2x}-8}{7}=4^x-2$

ח. $2^{3x}-2^{2x+2}-2^x+4=0$

תשובות סופיות:

1) א. $x=3$ ב. $x=2$ ג. $x=4$ ד. $x=1$.

2) א. $x=\frac{1}{2}$ ב. $x=0$ ג. $x=\frac{1}{3}$ ד. $x=\frac{1}{4}$
ה. $x=-3$ ו. $x=-2$ ז. $x=-3$ ח. $x=-2$

3) א. $x=2,3$ ב. $x=1,-2$ ג. $x=0$ ד. $x=0$
ה. $x=0,1$ ו. $x=-6,-9$.

4) א. $x=1,-\frac{1}{2}$ ב. $x=1$.

5) א. $x=\frac{1}{2},1\frac{1}{2}$ ב. $x=1,3$ ג. $x=1,2$ ד. $x=1,0$
ה. $x=-2$ ו. $x=1,-1$ ז. $x=0,\frac{1}{2}$ ח. $x=0,2$.

משוואות בהן המשתנה גם בבסיס:

סיכום כללי:

במשוואות עם משתנה בבסיס יש לדרוש תנאי עבורו הבסיס חיובי.
יש לקחת את חיתוך תחומי ההגדרה (במידה וקיימים ביטויים עם שורשים או שברים) יחד עם תוצאת השוואת המעריכים.

הערה:

יש לבדוק את ערכי ה-x עבורם הבסיס שווה ל-1 ולראות האם מתקבל פסוק אמת או פסוק שקר. בהתאם יש להוסיף או להוריד אותו מתחום המספרים המהווים את פתרון המשוואה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $\left(\sqrt{3-x}\right)^{\sqrt{x}}=\left(\sqrt[3]{3-x}\right)^{x}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{3-x}}$.

2) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2+x}=1$.

3) $\frac{|x-3|^{x^2-2}}{|x-3|^{x-1}}=|x-3|^{-1}$.

תשובות סופיות:

1) $x=\frac{1}{4}\ ,\ 1\ ,\ 2$

2) אין פתרון.

3) $x=0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,4$

משוואות מסכמות שונות:

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $5\left(2^x-2\right)+2=4^x-2^x$.

2) $\frac{2^x+4}{2^x-2}=\frac{2^{x+1}}{2^x+2}+\frac{6}{4^{x-1}-1}$.

3) $\frac{32}{16^x-4^{x+2}+60}=\frac{4^x}{4^x-10}-\frac{4}{2^{2x-1}-3}$.

4) $3^{2x^2+2}-3^{x^2+3}+9=3^{x^2+1}$.

5) $\sqrt[x]{10}=4\cdot\sqrt[2x]{10}+60$.

6) $\sqrt[x-1]{8\cdot 2^{x+1}}=\left(\sqrt[x]{2}\right)^2\cdot\sqrt[x-1]{\sqrt[x]{32}}$.

7) $10\cdot 4^{x+2}-16\cdot 10^x-90\cdot 6^x+36\cdot 15^x=0$.

תשובות סופיות:

1) $x=1,2$.

2) $x=3$.

3) $x=1.5$.

4) $x=1,-1$.

5) $x=\frac{1}{2}$.

6) $x=-3$.

7) $x=1,-2$.

משוואות עם קבוע אוילר:

סיכום כללי:

קבוע אוילר מסומן באות e וערכו שווה (בערך) ל-2.71828.
למספר זה משמעויות רבות במתמטיקה ובמדעים ועל כן הוחלט לסמן אותו באות משלו ולשלב אותו במשוואות מתמטיות ועוד.

דרך הפתרון של משוואה שבה הבסיס הוא e זהה לחלוטין לשל משוואה מעריכית רגילה כפי שנלמד בפרק זה.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם קבוע אוילר):

א. $e^{3x}=e^{2x-1}$

ב. $e^{5x-1}=e\cdot e^{6x+1}$

ג. $e^{x-5}=\left(e^{1-x}\right)^3$

ד. $e^x\cdot\sqrt{e^{3x-1}}=\left(\frac{1}{e^x}\right)^{1-3x}$

2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחיסור):

א. $e^2\cdot e^x-e^{x+1}=e-1$

ב. $\sqrt[3]{e^{x+1}}\cdot e^2=e^x\sqrt{e}$

ג. $e^{2x}+e^x-2=0$

ד. $e^{1+x}+e^{1-x}=e^2+1$

3) פתור את המשוואות הבאות (המשתנה גם בבסיס):

א. $xe^x=\sqrt[4]{e}\cdot x$

ב. $e^{3x}=x\cdot e^{3x}$

ג. $xe^{x^2}=\frac{x}{\sqrt{e^x}}$

ד. $\sqrt[3]{e^{3x-1}}\cdot x=xe^x$

תשובות סופיות:

1) א. $x=-1$ ב. $x=-3$ ג. $x=2$ ד. $x=1\ ,\ \frac{1}{6}$.

2) א. $x=-1$ ב. $x=\frac{11}{4}$ ג. $x=0$ ד. $x=1\ ,\ -1$.

3) א. $x=0\ ,\ \frac{1}{4}$ ב. $x=1$ ג. $x=0\ ,\ -\frac{1}{2}$ ד. $x=0$.

מערכת משוואות מעריכיות:

שאלות:

1) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} y=3^x \\ y=18-3^x \end{cases}$.

2) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 5^{2x}-5^y=5^x-25 \\ y-x=2 \end{cases}$.

3) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} \dfrac{1}{3^y-4}+\dfrac{3}{3^x-2}-\dfrac{1}{3^x+2}=3 \\ 4^y=\sqrt{256^x} \end{cases}$.

4) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 5^x+2^y=13 \\ 2\cdot 5^x-2^y=2 \end{cases}$.

5) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 2\cdot 3^x-3\cdot 2^y=42 \\ 3^{x+1}-2^{y+1}=73 \end{cases}$.

6) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 5^{2x+1}+8\cdot 10^x-2^{2y+4}=0 \\ \left(\sqrt{3}\right)^y=27^{\frac{x-1}{6}} \end{cases}$.

7) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 6\cdot 4^x-7\cdot 6^{y-1}+2\cdot 3^{x+y}=6^y \\ \sqrt[4]{5^x}\cdot\sqrt{\left(5\sqrt{5}\right)^y}=\sqrt[4]{125}\cdot 5^x \end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $(2,9)$ 2) $(0,2)$, $(2,4)$ 3) $(1,2)$ 4) $(1,3)$

5) $(3,2)$ 6) $(-1,-2)$ 7) $(1,2)$, $(-1,0)$

אי שוויונים מעריכיים:

סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $a^x > a^y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

שאלות:

פתור את אי השיוויונים הבאים:

1) $3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x}$

2) $\sqrt{2^x} \le 4^{x^2-1\frac{1}{4}}$

3) $e^{\sqrt{x}+1} > e^{2x}$

4) $\left(\frac{1}{7}\right)^{5x} \ge \left(\frac{1}{7}\right)^{1-3x}$

5) $25^x + 5 < 6 \cdot 5^x$

6) $e^{2x} - 2e^x + 1 \le 0$

הערה:

השאלות הבאות דורשות הכרות עם מושג הלוגריתם הטבעי (ln) וכן חוקי הלוגריתמים אשר ילמדו בהמשך.

7) $e^x > 3$

8) $e^{2x} - 5e^x + 4 > 0$

תשובות סופיות:

1) $x < \frac{2}{3}$

2) $x \ge 1\frac{1}{4}$ או $x \le -1$

3) $0 \le x < 1$

4) $x \le \frac{1}{8}$

5) $0 < x < 1$

6) $x = 0$

7) $x > \ln 3$

8) $x > \ln 4$ או $x < 0$

אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך:

סיכום כללי:

דרך הפתרון של אי שוויון עם משתנה בבסיס ובמעריך:

- יש לדרוש בסיס חיובי ולחבר אי-שוויון בהתאם.
- יש לפתור את אי השוויון לפי השוואת מעריכים.
- יש למצוא את חיתוך הפתרונות.

נתון: $f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)}$ נדרוש: $f(x)>0$.

דרך הפתרון: אם: $f(x)>1$ אז: $g(x)>h(x)$.

אם: $0<f(x)<1$ אז: $g(x)<h(x)$.

לבסוף נמצא את חיתוך התחומים.

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

1) $x^{2x-1} > x^{x+2}$

2) $(x-2)^{2x-5} < (x-2)^{x+1}$

3) $x^{2x-6} < 1$

4) $x^{2x^2+2} < x^{5x}$

5) $(x^2-6x+13)^{x^2-2x} \ge (x^2-6x+13)^3$

6) $(x+1)^{|x|} < x^2+2x+1$

תשובות סופיות:

1) $0<x<1$, $x>3$.

2) $3<x<6$.

3) $1<x<3$.

4) $0<x<0.5$, $1<x<2$.

5) $x\le -1$, $x\ge 3$.

6) $0<x<2$.

סדנת ריענון במתמטיקה - מעודכן

פרק 12 - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים

תוכן העניינים

1. הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות 109
2. חוקי הלוגריתמים 112
3. חישובים עם חזקה לוגריתמית 116
4. מעבר בין בסיסים 117
5. הלוגריתם הטבעי 119
6. משוואות עם בסיסים שונים 121
7. מערכת משוואות לוגריתמיות 122
8. מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות 123
9. אי-שוויונים לוגריתמים 124
10. אי-שוויונים לוגריתמים עם משתנה בבסיס .... (ללא ספר)

הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות:

סיכום כללי:

הגדרה:

הלוגריתם מוגדר באופן הבא: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ כאשר: $a \neq 1\ ,\ a\ ,\ b > 0$.

הסבר:

לוגריתם על בסיס a של b מוגדר בתור החזקה שיש להעלות את a על מנת שיהיה שווה ל- b. ערך חזקה זו הוא x. ערך לוגריתם יכול להיות חיובי, שלילי או אפס. נחשב ערכי לוגריתמים ונפתור משוואות לוגריתמיות ע"י מעבר לפי ההגדרה למשוואה מעריכית מתאימה.

כללים יסודיים בלוגריתמים:

מהגדרת הלוגריתם נובע כי: $\log_a a = 1$ וכן: $\log_a 1 = 0$ לכל $a > 0\ ,\ a \neq 1$.

שאלות:

1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמים הבאים:

א. $\log_2 32$
ב. $\log 1000$
ג. $\log_{25} 5$
ד. $\log_8 4$
ה. $\log_4 \frac{1}{16}$
ו. $\log_a a^4$
ז. $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$

2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (יסודי - שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\log_{36} 6 = x$
ב. $\log_2 x = 16$
ג. $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$
ד. $\log_x 64 = 3$
ה. $\log_x 25 = 2$
ו. $\log_x (3x+4) = 2$

3) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (כללי - שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\log_6(4x-2)=1$

ב. $\log_4(4-x)=\frac{1}{2}$

ג. $\log_8(x^4-73)=1$

ד. $\log_3\frac{x+3}{3-3x}=-2$

ה. $\log_x(2x^2+x-12)=2$

ו. $\log_{\sqrt{x+1}}(2x^2-5)=2$

4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג מספר פעמים):

א. $\log_4(\log_3 x)=1$

ב. $3\log_{27}(\log_2(x+3))=1$

ג. $\log_{\frac{1}{16}}(\log_3(5x^2+1))=-\frac{1}{2}$

ד. $\log_6(3+\log_2(6+\log_4(x^2+15)))=1$

5) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א. $\log_2(3^x+37)=6$

ב. $\log_3(3\cdot 2^x-303)=4$

ג. $\log_5(126\cdot 5^x-25)=2x+1$

ד. $3\log_2\left(3\cdot 4^{1+\frac{1}{3}x}-11\cdot 2^{\frac{x}{3}}+3\right)=12+2x$

6) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הצבה):

א. $(\log_2 x)^4=10000$

ב. $2(\log_3 x)^2+\log_3 x=10$

ג. $\frac{3\cdot\log_{14}x+1}{(\log_{14}x)^2}=4$

ד. $\sqrt{\log_{\frac{1}{81}}x}+\sqrt{\log_{\frac{1}{81}}x+2}=2$

תשובות סופיות:

1) א. 5 ב. 3 ג. $\frac{1}{2}$ ד. $\frac{2}{3}$ ה. -2
ו. 4 ז. -1.5

2) א. $x=\frac{1}{2}$ ב. $x=65,536$ ג. $x=27$ ד. $x=4$
ה. $x=5$ ו. $x=4$

3) א. $x=2$ ב. $x=2$ ג. $x=\pm 3$ ד. $x=-2$ ה. $x=3$ ו. $x=2$

4) א. $x=81$ ב. $x=5$ ג. $x=\pm 4$ ד. $x=\pm 1$

5) א. $x=3$ ב. $x=7$ ג. $x=-1,\ 2$ ד. $x=-6$

6) א. $x=1024,\ \frac{1}{1024}$ ב. $x=9,\ \frac{1}{9\sqrt{3}}$
ג. $x=14,\ \frac{1}{\sqrt[4]{14}}$ ד. $x=\frac{1}{3}$

חוקי הלוגריתמים:

סיכום כללי:

להלן 3 חוקי הלוגריתמים עבור בסיס $a>0\neq 1$ וארגומנטים x ו- y חיוביים:

- מכפלה לסכום: $\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$.
- מנה להפרש: $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$.
- מקדם למעריך: $\log_a b^n=n\log_a b$ (כאשר $b>0$ ו- n מספר ממשי כלשהו).

שאלות:

שאלות חישוב כלליות:

1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

א. $\log_3 12+\log_3 2.25$

ב. $\log_{\frac{1}{5}} 40+\log_{\frac{1}{5}} 12.5+\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{4}$

ג. $\log_2 200-\log_2 100$

ד. $\log_3 60-\log_3 540$

ה. $\log_4 8+\log_4 12-\log_4 6$

ו. $\log_7 1.5-\log_7 147+\log_7 2$

ז. $3\log_5 2-\log_5 1.6$

ח. $\log_{\sqrt{4}} 6.4+2\log_{\sqrt{4}}\sqrt{10}$

ט. $\frac{1}{2}\left(\log_7\frac{7}{2}+\log_7 2\right)+\log_7 14-\frac{1}{3}\log_7 8$

י. $\frac{1}{4}\log 81-\log 1.5-\frac{1}{2}\log 40$

2) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

א. $\frac{\log_5 16}{\log_5 8}$

ב. $\frac{\log_9 62.5+\log_9 2}{\log_9 0.2}$

ג. $\frac{\log_3 5-\log_3 2+\log_3 50}{\log_3 225-2}$

ד. $\frac{2-2\log_3 4+\log_3 8\frac{8}{9}}{4-\log_3 0.01-2\log_3 18}$

משוואות לוגריתמיות:

3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש ישיר בחוקי הלוגריתמים):

א. $\log_2 x+\log_2(x-6)=4$

ב. $\log_3 x+\log_3(x+2)=1$

ג. $\log_2(x+30)-\log_2 x=4$

ד. $\log_5(x+146)-\log_5(x+2)=2$

ה. $2\log_3(2x-1)-\log_3(22x+9)=-1$

ו. $2\log_5(x-2)=\log_5(4x-15)+\log_5 x$

4) פתור את המשוואות הבאות (פתרון בשיטת לוג שווה לוג):

א. $\log_5(4x-3)=\log_5 7$.

ב. $2\log_2(2x-2)-\log_2(16-x)=\log_2(x-1)+1$.

5) פתור את המשוואות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א. $\log_3(3\cdot 5^x+39)=3+\log_3(5^x-3)$.

ב. $\log_2(3-4^{x+1})-\log_2 11=x$.

6) פתור את המשוואות הבאות (שימוש הפוך בחוקי הלוגריתמים):

א. $\log_4 x\cdot\log_4(16x)=8$.

ב. $\log_2\left(\frac{x}{4}\right)\cdot\log_2(1024x)=-11$.

ג. $\log_2 x^2\log_2\left(\frac{x}{16}\right)=-\log_2(64x)$.

ד. $(\log_4 4x)^2=\log_4 4x^2+1$.

ה. $\log_3(9x^2)\cdot\log_3(9x^3)=\log_3\left(\frac{81}{x}\right)+2$.

ו. $\frac{\log_2\left(\frac{x^3}{32}\right)}{(\log_2 x)^2}+\frac{\log_2(2x)}{\log_2 x}=1\frac{7}{9}$.

שאלות הבעה:

7) נתון: $\log_3 2 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_3 16$ ב. $\log_3 6$

ג. $\log_3 24$ ד. $\log_3 1.5$

8) נתון: $\log_2 5 = b$, $\log_2 3 = a$. הבע באמצעות a ו- b את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_2 45$ ב. $\log_2 60$ ג. $\log_2 \sqrt{7.5}$

9) נתון: $\log_{18} 2 + \log_{18} 3 = a$.

הבע באמצעות a את $\log_{18} 27$ ואת $\log_{18} 16$.

שאלות נוספות:

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

10) $\log 4 \log 40 + \log 5 \log 16 = \log 64$.

11) $2\log^2 2 + \log 25 \cdot \log 20 = 2$.

12) $\log_{12} 16 \cdot \log_{12} 4 + \log_{12} 9 \cdot \log_{12} 48 = 2$

13) $\log_5 10 \cdot \log_5 75 - \log_5 3 \cdot \log_5 2 - \log_5 3 - \log_5 4 = 2$.

תשובות סופיות:

1) א. 3 ב. -3 ג. 1 ד. -2 ה. 2
ו. -2 ז. 1 ח. 6 ט. 1.5 י. -0.5.

2) א. $\frac{4}{3}$ ב. -3 ג. 1.5 ד. 0.5.

3) א. $x=8$ ב. $x=3,\frac{1}{27}$ ג. $x=2$ ד. $x=4$ ה. $x=3$ ו. $x=4$.

4) א. $x=2.5$ ב. $x=6$.

5) א. $x=1$ ב. $x=-2$.

6) א. $x=16,\frac{1}{256}$ ב. $x=2,\ \frac{1}{512}$ ג. $x=4,\ 2\sqrt{2}$ ד. $x=4,\frac{1}{4}$
ה. $x=\frac{1}{9},\sqrt[6]{3}$ ו. $x=8,\ \sqrt[7]{2^{15}}$.

7) א. $4a$ ב. $a+1$ ג. $3a+1$ ד. $1-a$.

8) א. $2a+b$ ב. $2+a+b$ ג. $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}$.

9) $3(1-a)$, $4(2a-1)$.

10) הוכחה.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

13) הוכחה.

חישובים עם חזקה לוגריתמית:

סיכום כללי:

מהגדרת הלוגריתם ניתן לנסח את הקשר הבא: $a^{\log_a x}=x$ כאשר $a>0\neq 1$.

שאלות:

1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א. $6^{\log_6 8}$
ב. $4^{\log_2 5}$

2) נתונה התבנית: $3\cdot 4^x$. חשב את ערכה עבור:

א. $x=\log_4 7$
ב. $x=\log_4\sqrt{3}$
ג. $x=2\log_4 0.1$
ד. $x=\sqrt{\log_2 5}$

3) נתונה התבנית: $\frac{1}{6}\cdot 9^x-2\cdot 3^x+1$. חשב את ערכה עבור:

א. $x=-1$
ב. $x=\log_3 5$
ג. $x=\log_3\sqrt{6}$

4) חשב:

א. $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_{\sqrt{36}}81}$
ב. $\sqrt[3]{2^{3-\log_{\sqrt{8}}5}}$

תשובות סופיות:

1) א. 8 ב. 25.

2) א. 21 ב. $3\sqrt{3}$ ג. 0.03 ד. 15.

3) א. $\frac{19}{54}$ ב. $-4\frac{5}{6}$ ג. $2-2\sqrt{6}$.

4) א. $\frac{1}{81}$ ב. $\frac{2}{\sqrt[9]{25}}$.

מעבר בין בסיסים:

סיכום כללי:

מעבר מבסיס a לבסיס m (כאשר: $a>0\ \neq 1$ ו-$m>0\neq 1$, וכן: $b>0$)

יתבצע באופן הבא: $\log_a b=\frac{\log_m b}{\log_m a}$.

שאלות:

שאלות חישוב כלליות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_4 7\cdot\log_7 4$
ב. $\log_{0.1}3\cdot\log_9 1000$
ג. $\log_{\sqrt{3}}5\cdot\log_{\sqrt{125}}9$
ד. $\log_4 169\cdot\log_{25}64\cdot\log_{13}625$

2) הוכח את השוויונים הבאים:

א. $\log_2 25\cdot\log_5 3\cdot\log_9 2=1$.
ב. $\log_{16}9\cdot\log_5 4\cdot\log_3 5=1$

משוואות לוגריתמיות:

3) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\log_2 x+\log_{32}x=6$
ב. $\log_3 x\cdot\log_{27}x=3$
ג. $\log_2 4x\cdot\log_8\frac{x}{16}=-\frac{5}{3}$
ד. $\log_x 5-6\log_{125}x=1$

שאלות הבעה:

4) נתון: $\log_4 6=a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_2 3$
ב. $\log_{32}36$
ג. $\log_{216}96$.

5) נתון: $\log_3 5=b$, $\log_2 3=a$. הבע באמצעות a ו- b את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_3 50$
ב. $\log_2\sqrt{30}$
ג. $\log_5 22.5$

6) נתון $\log 9 = 2b$, $\log_3 7 = a$. הבע באמצעות a ו- b את:

א. $\log 21$.

ב. $\log_3\left(\frac{10}{7}\right)$.

ג. $\log_7 10$.

ד. $\log_{30} 63$.

שאלות נוספות:

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

7) $\log_6 9 \cdot \log_{15} 30 + \log_6 5 \cdot \log_{15} 4 = 2$.

8) $\log\sqrt{3} \cdot \log_6 50 + \log\sqrt{2} \cdot \log_6 300 = 1$.

תשובות סופיות:

1) א. 1 ב. -1.5 ג. $2\frac{2}{3}$ ד. 12.

2) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

3) א. $x = 32$ ב. $x = 27, \frac{1}{27}$ ג. $x = 8, \frac{1}{2}$ ד. $x = \frac{1}{5}, \sqrt{5}$.

4) א. $2a - 1$ ב. $0.8a$ ג. $\frac{a+2}{3a}$.

5) א. $2b + \frac{1}{a}$ ב. $\frac{a}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{1}{2}$ ג. $\frac{2}{b} + 1 - \frac{1}{ab}$.

6) א. $b + ab$ ב. $\frac{1}{b} - a$ ג. $\frac{1}{ab}$ ד. $\frac{ab+2b}{b+1}$.

7) הוכחה.

8) הוכחה.

הלוגריתם הטבעי:

סיכום כללי:

לוגריתם על בסיס e (קבוע אוילר) מסומן: $\log_e \Rightarrow \ln$ והוא נקרא הלוגריתם הטבעי.

למשל: $\ln 3 = \log_e 3$ או $\ln\frac{1}{4} = \log_e\frac{1}{4}$. לוג זה נקרא בשם לן.

מהגדרת הלוגריתם מתקיים: $\ln a = b \to e^b = a$ כאשר $a > 0$ ו- b מספרים כלשהם.

שאלות:

1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הטבעיים הבאים:

א. $\ln e^2$ ב. $\ln\frac{1}{e^4}$ ג. $\ln\frac{1}{e\sqrt{e}}$

2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\ln x = 2$ ב. $\ln x = -\frac{1}{2}$

3) פתור את המשוואות הבאות (הצבה וחוקי הלוגריתמים):

א. $\ln\left(e^{2x} - \frac{1}{2}\right) + \ln 2 = x$

ב. $3\ln^2 x + \ln x = 2$

ג. $\ln\left(e^2x^3\right)\cdot\ln\frac{1}{x} = \ln\left(ex^2\right)$

4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הוצאת לוג משני אגפי המשוואה)

א. $x^{\ln x} = e^6 x$ ב. $\left(\frac{1}{x}\right)^{2-3\ln x} = \frac{1}{e}\cdot x^{1+\ln x}$

5) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א. $e^{\ln 3}$ ב. $e^{2\ln 3}$

תשובות סופיות:

1) א. 2 ב. -4 ג. -1.5.

2) א. $x=e^2$ ב. $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

3) א. $x=0$ ב. $x=\sqrt[3]{e^2},\frac{1}{e}$ ג. $x=\frac{1}{\sqrt[3]{e}},\frac{1}{e}$.

4) א. $x=e^3,\frac{1}{e^2}$ ב. $x=\sqrt{e},e$.

5) א. 3 ב. 9.

משוואות עם בסיסים שונים:

סיכום כללי:

לעיתים תתקבל משוואה מעריכית שבה לא ניתן למצוא חזקה שלמה, כגון: $3^x=4$.
במקרים אלו נעזר בהגדרת הלוג כדי לבטא את ערך המעריך: $x=\log_3 4$.
את ערך הביטוי $\log_3 4$ ניתן לחשב ע"י מחשבון או ע"י מעבר לבסיס 10: $\log_3 4=\frac{\log 4}{\log 3}$.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות (בסיסים שונים):

א. $3^x=6$
ב. $2^x-9=0$
ג. $49^x-8\cdot 7^x+15=0$
ד. $2\cdot 3^{\frac{2x}{3}}+5\cdot 3^{\frac{x}{3}}+2=0$

2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם בסיס ולוגריתם טבעי):

א. $e^{3x}=3$
ב. $4+3e^x=9$
ג. $3e^{2x}-4e^x+1=0$
ד. $e\left(e^x+1\right)=2\sqrt{e^{x+2}}+9e$

3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם פתרונות לא שלמים):

א. $\log_2\left(7-5^x\right)=\log_2\frac{10}{5^x}$
ב. $\log_2\left(4e^{2x}+6\right)-1=\log_2\left(7e^x\right)$

תשובות סופיות:

1) א. $x=\log_3 6=1.63$ ב. $x=\log_2 9=3.17$
ג. $x=\log_7 3=0.564$, $x=\log_7 5=0.827$ ד. אין פתרון.

2) א. $x=\frac{1}{3}\ln 3=0.36$ ב. $x=\ln\frac{5}{3}=0.51$ ג. $x=0$, $x=-\ln 3=-1.09$
ד. $x=\ln 16=2.7725$.

3) א. $x=1$, $x=\log_5 2=0.43$ ב. $x_1=\ln\frac{1}{2}=-0.693$, $x=\ln 3=1.098$

מערכת משוואות לוגריתמיות:

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

1) $\begin{cases} y=\log_2 x \\ y=6-\log_2 x \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_6^2 x-\log_6(2y-2)=2 \\ \frac{1}{2}x=y-1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_3(x+y)=\log_3(4x+y)-2 \\ \log_5(5x+3y)=2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_2(\log_3(x-y))=1 \\ \log_5(x+y-11)=\log_{25} x+\frac{1}{2}\log_5(y+2) \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_5 x+6\log_4 y=11 \\ 10\log_5 x-2\log_4 y=17 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \log_2 x^2+\log_3 \frac{1}{y}=9 \\ \log_2 \sqrt{x}+\log_{\sqrt[3]{3}} y=-1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \log_5 x+2^{\log_2 y}=6 \\ x^y=5^8 \end{cases}$

8) $\begin{cases} xy=27 \\ x^{\log_3 y}=9 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2^{\log_{\frac{1}{2}}(2x-y)}=7^{\log_7 \frac{2x+y}{15}} \\ \log_3 x+\log_3 y=\frac{1}{\log_{28} 3} \end{cases}$

תשובות סופיות:

1) $(8,3)$
2) $(36,19),\left(\frac{1}{6},1\frac{1}{12}\right)$
3) $(8,-5)$
4) $(16,7)$
5) $(25,8)$
6) $\left(16,\frac{1}{3}\right)$
7) $(25,4),(625,2)$
8) $(3,9),(9,3)$
9) $(4,7)$

מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות:

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

1) $\begin{cases} y=\log_2\left(4^x-2\right) \\ y=2x-1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 25^y=\left(5\sqrt{5}\right)^{x+1} \\ \log_5\sqrt{x}+\log_5\sqrt{y}=\log_5 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3y+5\log_6 x=1 \\ 216\cdot x^{2-y}=6^{1-4y} \end{cases}$

4) $\begin{cases} x\cdot\log_2 3=\dfrac{y}{\log_9 2} \\ \log_3\left(9^x+27\right)=2y+\log_3 12 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \left(2^x-1\right)^2-4y+3=0 \\ x=\log_2\left(y+1\right) \end{cases}$

6) $\begin{cases} x=\log_4\left(5-9^y\right) \\ \log_2\left(2^x+3\right)=\log_4\left(29-\left(3^y-3\right)^2\right) \end{cases}$

תשובות סופיות:

1) $(1,1)$

2) $(3,3)$

3) $(36,-3),\left(6,-1\frac{1}{3}\right)$

4) $\left(1,\frac{1}{2}\right),(2,1)$

5) $(1,1),(2,3)$

6) $(1,0)$

אי-שוויונים לוגריתמים:

סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $\log_a x > \log_a y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $\log_2 x < \log_2 (5x - 20)$

2) $\log_6 \left(x^2 - 5x\right) < 1$

3) $\log_3 x > \log_9 (15 - 2x)$

4) $\log_{\frac{1}{2}} (1 - 3x) \ge \log_{\frac{1}{2}} (7 - x)$

5) $\ln x \ge \ln\left(x^2 - 12\right)$

6) $\ln x < 3$

7) $\ln^2 x - 6\ln x < 7$

8) $\dfrac{6}{\ln^2 x} \ge 2 - \dfrac{1}{\ln x}$

תשובות סופיות:

1) $x > 5$

2) $-1 < x < 0 \,,\, 5 < x < 6$

3) $3 < x < 7\frac{1}{2}$

4) $-3 \le x \le \frac{1}{3}$

5) $2\sqrt{3} < x \le 4$

6) $0 < x < e^3$

7) $\frac{1}{e} < x < e^7$

8) $\frac{1}{\sqrt{e^3}} \le x \le e^2$ וגם $x \ne 1$

GOOL
בשביל התירגול

סדנת ריענון במתמטיקה - מעודכן

פרק 13 - הפונקציה הממשית - תכונות מתקדמות

תוכן העניינים

1. תחום הגדרה של פונקציה 125
2. הרכבת פונקציות 127
3. הפונקציה ההפוכה 130
4. פונקציה זוגית ופונקציה אי זוגית 134
5. פונקציה מחזורית 139
6. פונקציה מפוצלת ופונקציה אלמנטרית 142
7. תרגילים משולבים 143

תחום הגדרה של פונקציה

שאלות

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

1) $y=x^3-x^2-4x+1$

2) $y=\frac{1}{x^2-4}$

3) $y=\frac{4x+1}{x^2+1}$

4) $y=\frac{1}{x^3-x}$

5) $y=\frac{x^2}{x^2-x-2}$

6) $y=\sqrt{x-4}$

7) $y=\sqrt{x^2+x-2}$

8) $y=\sqrt[3]{x^2+x-1}$

9) $y=\frac{1}{\sqrt{1-|x|}}$

10) $y=\ln\left(x^2+x-2\right)$

11) $y=\log x+\frac{1}{\log x}$

12) $y=e^{x^2+x+1}$

13) $y=\log_x\left(x+4\right)$

14) $y=\tan\left(10x\right)$

15) $y=\cot\left(4x\right)$

16) $y=\arctan\left(x+4\right)$

17) $y=\arcsin\left(x-4\right)$

18) $y=\arccos\left(x+1\right)$

תשובות סופיות

1) כל x.

2) $x \neq \pm 2$

3) כל x.

4) $x \neq 0, 1, -1$

5) $x \neq 2, -1$

6) $x \geq 4$

7) $x \leq -2$, $x \geq 1$

8) כל x.

9) $-1 < x < 1$

10) $x < -2$, $x > 1$

11) $x > 0$, $x \neq 1$

12) כל x.

13) $x > 0$, $x \neq 1$

14) $x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}$

15) $x \neq \frac{\pi k}{4}$

16) כל x.

17) $3 < x < 5$

18) $-2 < x < 0$

הרכבת פונקציות

שאלות

1) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=x-4$, $g(x)=x^2$, $h(x)=\frac{4}{x}$.

חשבו את הפונקציות המורכבות הבאות:

א. $f(g(1))$ ב. $h(g(f(5)))$ ג. $f(g(x))$

ד. $h(f(x))$ ה. $f(f(x))$ ו. $h(h(x))$

2) נתון: $f(x)=\frac{x-2}{x-1}$.

חשבו $f(f(x))$ עבור $x=3$.

3) נתון: $g(x)=\frac{5-x}{x-7}$ $f(x)=\frac{x-3}{x+2}$.

חשבו $f(g(x))+g(f(x))$ עבור $x=8$.

4) נתון: $g(x)=\ln x$, $f(x)=x^2-7x$.

חשבו $f(g(x))$ עבור $x=e^2$.

5) נתון: $g(x)=\ln x$ $f(x)=e^{2x}$.

חשבו $f(g(x))$ עבור $x=2$.

6) נתון: $g(x)=\begin{cases} x+3 & x>4 \\ 3x & x\le 4 \end{cases}$, $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x>0 \\ x^2 & x\le 0 \end{cases}$.

חשבו $g(f(x)), f(g(x))$.

7) נתונות הפונקציות:

$g(x)=\begin{cases} x^2-4 & x<1 \\ -x^2-2x-1 & x\ge 1 \end{cases}$ ו- $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & x\le -1 \\ \sqrt{x+1} & x>-1 \end{cases}$.

מצאו נוסחה עבור ההרכבה $z(x)=g(f(x))$.

8) נתונות הפונקציות:

$g(x)=\begin{cases} x^2-4 & x<1 \\ -x^2-2x-1 & x\geq 1 \end{cases}$ ו- $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & x\leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x>-1 \end{cases}$.

א. מצאו נוסחה עבור ההרכבה $h(x)=f(g(x))$.

ב. נתון ש- $n\in\mathbb{Z}$ ו- $h(n)\notin\mathbb{Z}$.

מה ניתן להסיק בוודאות?

1. $n\leq -3$
2. $n\geq 1$
3. n אי-זוגי שלילי.
4. אף תשובה אינה נכונה.

9) נתון $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

מצאו את $f^n(x)=\underbrace{f(f(f(...(f(x))))}_{n \text{ times}}$.

תשובות סופיות

1) א. -3 ב. 4 ג. x^2-4 ד. $\frac{4}{x-4}$ ה. $x-8$ ו. x

2) 3

3) $\frac{69}{13}$

4) -10

5) 4

6) $g\left(f\left(x\right)\right)=\begin{cases} x^2+3 & x<2 \\ 3x^2 & -2\le x\le 0 \\ \frac{1}{x}+3 & 0<x<\frac{1}{4} \\ 3\frac{1}{x} & x\ge\frac{1}{4} \end{cases}$, $f\left(g\left(x\right)\right)=\begin{cases} \frac{1}{x+3} & x>4 \\ \frac{1}{3x} & 0<x\le 4 \\ \left(3x\right)^2 & x\le 0 \end{cases}$

7) $z(x)=\begin{cases} 4x^2+16x+12 & x<-1.5 \\ -4x^2-20x-25 & -1.5\le x\le -1 \\ x-3 & -1<x<0 \\ -x-2-2\sqrt{x+1} & x\ge 0 \end{cases}$

8) א. $h(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2-3} & x<-\sqrt{3} \\ 2x^2-4 & -\sqrt{3}\le x<1 \\ -2x^2-4x+2 & x\ge 1 \end{cases}$ ב. $n\le -3$

9) $f^n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$

הפונקציה ההפוכה

שאלות

בתרגילים **1-4** הוכיחו שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצאו את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה.

1) $f(x)=\frac{x-1}{3}$ **2)** $f(x)=\frac{x+1}{x}$

3) $f(x)=\frac{3x-2}{x-2}$ **4)** $f(x)=x^2-4 \quad (x\geq 0)$

בתרגילים **5-7**, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע.
בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה:

5) $f(x)=x+\frac{1}{x}$ **6)** $f(x)=x^2-x$ **7)** $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

בתרגילים **8-10**, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע,
אם כן, מצאו את הפונקציה ההפוכה ואת התמונה של הפונקציה.

8) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ **9)** $y=\frac{x^2+3}{2x-1}$ **10)** $f(x)=\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^3$

11) נתונה $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x-1}}$.
האם הפונקציה היא חח"ע?
מצאו את התמונה של הפונקציה.

12) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו את תחום ההגדרה, הטווח והתמונה וקבעו האם היא פונקציה על:

א. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\frac{x-1}{3}$

ב. $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\frac{x+1}{x}$

ג. $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}\setminus\{3\}$ $\quad f(x)=\frac{3x-2}{x-2}$

ד. $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=x^2-4$

13) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו תחום הגדרה, טווח ותמונה.
בנוסף, קבעו האם הפונקציה הנתונה היא על.

א. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

ב. $f:\mathbb{R}\to(0,1]$ $\quad g(x)=\frac{1}{x^2+1}$

ג. $f:(1,\infty)\to(0,1]$ $\quad h(x)=\frac{1}{x^2+1}$

14) תהיינה שתי פונקציות $f:A\to B,\ g:B\to C$,
ותהי $h:A\to C$ ההרכבה המוגדרת על ידי $h(x)=g(f(x))$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם f ו- g חח"ע, אז h חח"ע.
ב. אם f ו- g חח"ע, אז h על.
ג. אם f ו- g על, אז h על.
ד. אם f ו- g על, אז h חח"ע.
ה. אם f חח"ע ו- g על, אז h חח"ע.
ו. אם f חח"ע ו- g על, אז h על.
ז. אם f על ו- g חח"ע, אז h חח"ע.
ח. אם f על ו- g חח"ע, אז h על.

15) תהיינה שתי פונקציות $f:A\to B,\ g:B\to C$,
ותהי $h:A\to C$ ההרכבה המוגדרת על ידי $h(x)=g(f(x))$.
נתון כי h על.
הוכיחו או הפריכו:

א. f חח"ע.
ב. f על.
ג. g חח"ע.
ד. g על.

16) תהיינה שתי פונקציות $f:A\to B,\ g:B\to C$,
ותהי $h:A\to C$ ההרכבה המוגדרת על ידי $h(x)=g\left(f\left(x\right)\right)$.
נתון כי h חח״ע.
הוכיחו או הפריכו :

א. g על.

ב. f על.

ג. g חח״ע.

ד. f חח״ע.

תשובות סופיות

1) $f^{-1}(x)=3x+1$, כל y .

2) $f^{-1}(x)=\frac{1}{x-1}$, $y\neq 1$

3) $y\neq 3$, $f^{-1}(x)=\frac{2x-2}{x-3}$

4) $y\geq -4$, $f^{-1}(x)=\sqrt{x+4}$

5) לא חח״ע. תמונה: $y\leq -2$ או $y\geq 2$.

6) לא חח״ע. תמונה: $y\geq -\frac{1}{4}$.

7) לא חח״ע. תמונה $0\leq y\leq 1$.

8) כן חח״ע. תמונה: $y>0$. פונקציה הפוכה: $x>0$ $f^{-1}(x)=1-\frac{1}{x^2}$.

9) לא חח״ע. תמונה: $y\geq 2.3$ או $y\leq -1.3$

10) כן חח״ע. תמונה: $y\neq 1$. פונקציה הפוכה: $f^{-1}(x)=\frac{1}{1-\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{2}$.

11) לא חח״ע. תמונה: $y\geq \frac{6}{\sqrt{3}}$.

12) א. תחום הגדרה, טווח ותמונה: $\mathbb{R}$; על.

ב. תחום הגדרה $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, טווח $\mathbb{R}$, תמונה: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; לא על.

ג. תחום הגדרה $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, טווח ותמונה: $\mathbb{R}\setminus\{3\}$; על.

ד. תחום הגדרה $[0,\infty)$, טווח $\mathbb{R}$, תמונה: $[-4,\infty)$; לא על.

13) א. תחום הגדרה וטווח: $\mathbb{R}$, תמונה: $(0,1]$; לא על

ב. תחום הגדרה $\mathbb{R}$, טווח ותמונה: $(0,1]$; על.

ג. תחום הגדרה $[1,\infty)$, טווח $(0,1]$, תמונה: $(0,0.5)$; לא על.

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה.

פונקציה זוגית ואי זוגית

שאלות

מצאו אילו מבין הפונקציות בשאלות **1-8** הן אי-זוגיות ואיזה זוגיות:

1) $y=4x^3$ **2)** $y=x^4+x^{10}$ **3)** $y=1$

4) $y=\frac{1}{x}$ **5)** $y=x^2+\sin^2 x$ **6)** $y=2^x$

7) $y=\ln x+x^2$ **8)** $y=\sin x\cdot\cos x$

9) נתונה פונקציה אי-זוגית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
נסמן: $k(x)=-f(x),\ z(x)=f(x^2)$.
בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות k,z, האם היא זוגית או אי-זוגית.

10) נתונה פונקציה אי-זוגית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ופונקציה זוגית $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
נסמן: $z(x)=-g(x^3)$ ו- $k(x)=-f(x^3)$.
טענה א': $z(x)$ אי-זוגית.
טענה ב': $k(x)$ אי-זוגית.
איזו טענה נכונה?

11) נתונה פונקציה אי-זוגית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ונתונה פונקציה זוגית $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
נסמן: $k(x)=f(-x)+x^{11}g(|x|)$, $z(x)=-g(-4x)\cdot f(x^4)$
בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות z,k, האם היא זוגית או אי-זוגית.

12) נתון כי $f(x)$ פונקציה אי-זוגית ב- $\mathbb{R}$ ומקיימת $|f(x)|<1$.
נתון כי $g(x)$ פונקציה זוגית ב- $\mathbb{R}$.
הוכיחו שהפונקציה $z(x)=g(x)\ln\left(\frac{1-f(x)}{1+f(x)}\right)$ היא אי-זוגית ב- $\mathbb{R}$.

13) הוכיחו כי:

א. סכום פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית
ב. מכפלת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
ג. מנת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
ד. הרכבה של פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.
ה. הרכבה של פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה אי-זוגית.

14) הוכיחו כי:

א. סכום פונקציות אי-זוגיות הוא פונקציה אי-זוגית.
ב. מכפלת פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.
ג. מנת פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.
ד. מכפלה של פונקציה זוגית בפונקציה אי-זוגית היא פונקציה אי-זוגית.
ה. הרכבה של פונקציה זוגית על פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.
ו. הרכבה של פונקציה אי-זוגית על פונקציה זוגית היא פונקציה זוגית.
ז. הפונקציה היחידה שהיא גם זוגית וגם אי-זוגית לכל x היא פונקציית האפס.

15) הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

נגדיר $z(x)=\left(f(x)\right)^n$ כאשר $n>1$ טבעי.

קבעו האם הפונקציה z היא זוגית, אי-זוגית או כללית.

16) נתונה הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x.

נגדיר: $f_{even}(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$, $f_{odd}(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

א. הוכיחו כי $f_{odd}(x)$ היא פונקציה אי-זוגית ו-$f_{even}(x)$ היא פונקציה זוגית.
ב. הוכיחו כי $f(x)=f_{odd}(x)+f_{even}(x)$ והסבירו במילים את התוצאה שקיבלת.
ג. הציגו את הפונקציה $f(x)=x^2+x+1$ כסכום של פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית.

17) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם f פונקציה אי-זוגית אז $f(0)=0$.
ב. אם f פונקציה אי-זוגית המוגדרת ב-$x=0$ אז $f(0)=0$.

18) הוכיחו את הטענות הבאות:

א. הפונקציה $f(x)=\cos x$ היא זוגית.

ב. הפונקציה $f(x)=\sin x$ היא אי-זוגית.

ג. הפונקציה $f(x)=\tan x$ היא אי-זוגית.

ד. הפונקציה $f(x)=\cot x$ היא אי-זוגית.

19) נתון כי $f(x)$ פונקציה אי-זוגית וחד-חד ערכית המוגדרת בקטע $(-a,a)$ $(a>0)$.

הוכיחו כי גם f^{-1} פונקציה אי-זוגית.

20) הוכיחו שהפונקציות הבאות הן אי זוגיות:

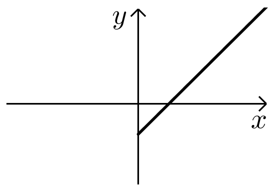
א. $y=\arctan x$

ב. $y=\arcsin x$

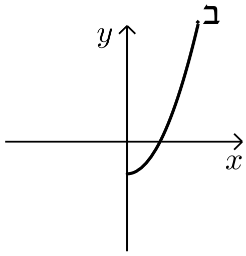
21) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x.

השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה זוגית:

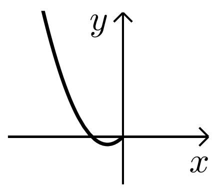
א.



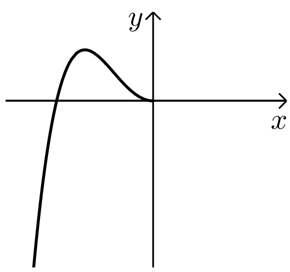
ב.



ג.

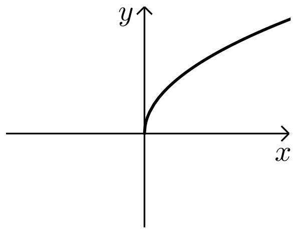


ד.

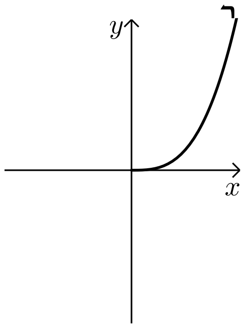


22) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x.
השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה אי-זוגית:

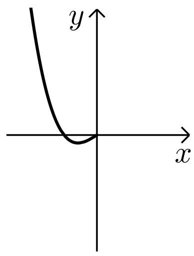
א.



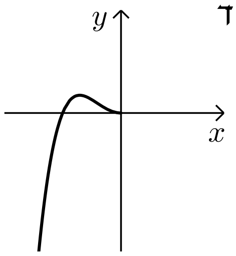
ב



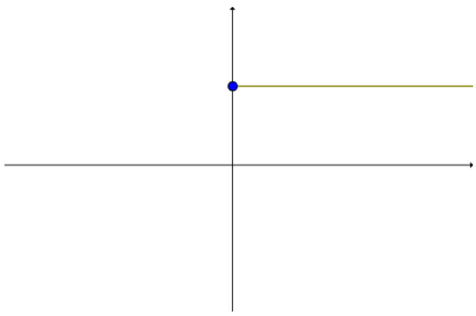
ג.

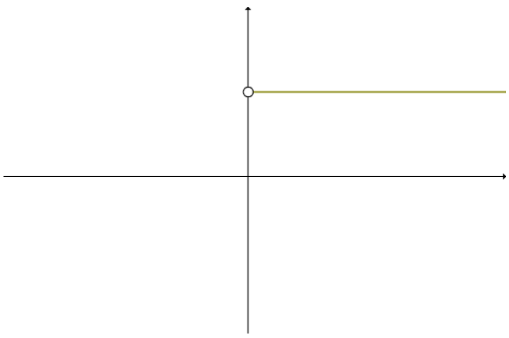


ד



23) השלימו (אם ניתן) את גרף הפונקציות הבאות לפונקציה זוגית ולפונקציה אי-זוגית.





תשובות סופיות

שאלות 1-8: זוגית: **2,3,5,8**; אי- זוגית: **1,4**; כללית: **6,7**.

9) k אי-זוגית, z זוגית.

10) טענה ב'.

11) k אי-זוגית, z זוגית.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) כאשר n זוגי – זוגית, וכאשר n אי-זוגי – אי-זוגית.

16) א.+ב. שאלת הוכחה. ג. $f(x) = \underbrace{x}_{odd} + \underbrace{x^2+1}_{even}$

17) שאלת הוכחה.

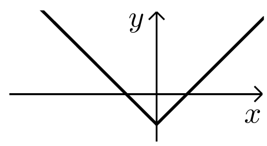
18) שאלת הוכחה.

19) שאלת הוכחה.

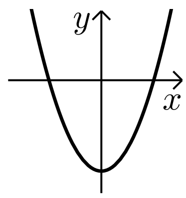
20) שאלת הוכחה.

21) להלן הגרפים:

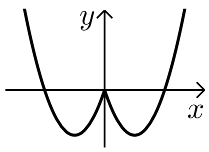
א.



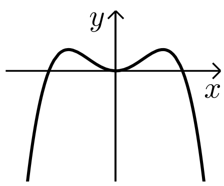
ב.



ג.

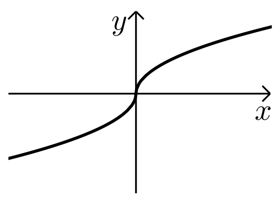


ד.

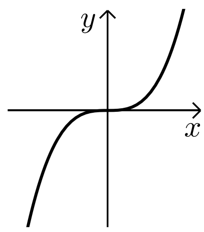


22) להלן הגרפים:

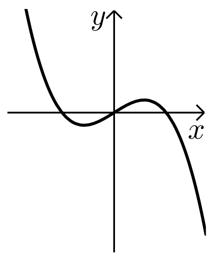
א.



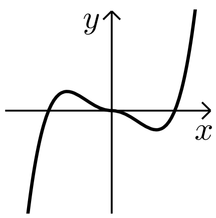
ב.



ג.



ד.



23) ראו בסרטון.

פונקציה מחזורית

שאלות

מצאו את המחזור של כל אחת מהפונקציות בשאלות **1-20**:

1) $y=1+10\sin(0.5x+4)$

2) $y=1+14\cos 20x$

3) $y=-4+20\tan 4x$

4) $y=-1+14\sec 2x$

5) $y=\sin^2 4x$

6) $y=\cos^2 2x$

7) $y=\cos^4 x-\sin^4 x$

8) $y=(\sin x+\cos x)^2$

9) $y=\cos^4 x+\sin^4 x$

10) $y=\cot^2 x$

11) $y=\sin\frac{x}{4}+\cos\frac{x}{10}$

12) $y=\sin 4x+\sin 14x$

13) $y=\sin 4x+\sin 14x+\sin x$

14) $y=\cos 2x\cos x$

15) $y=\sin^3 x$

16) $y=\sin^4 x$

17) $y=\dfrac{\sin 5x}{\cos 2x\cos 3x}$

18) $y=|\sin x|$

19) $y=\sin^2 x+\cos^2 x$

20) $y=\cot x-\tan x$

הוכיחו שהפונקציות בשאלות **21-26** אינן מחזוריות:

21) $y=x+\sin x$

22) $y=x+\cos x$

23) $y=x\sin x$

24) $y=x^2\cos x$

25) $y=\dfrac{\sin x}{x}$

26) $y=\cos 5x+\cos\sqrt{5x}$

הערה: בשאלות **21** ו-**22** נדרש ידע בחקירת פונקציה.

27) הוכיחו:

אם $f(x)$ מחזורית בעלת מחזור p,

אז $y=a+b\cdot f(cx+d)$ מחזורית בעלת מחזור $\frac{p}{c}$.

28) הוכיחו: אם T הוא מחזור של $f(x)$, אז לכל n שלם $f(x+nT)=f(x)$.

29) נתון כי f,g מוגדרות לכל x ובעלת מחזור p_1,p_2, בהתאמה.
נתון כי היחס $\frac{p_1}{p_2}$ הוא מספר רציונלי.
הוכיחו כי גם הפונקציות $(g\neq 0)$ $\frac{f}{g}$, $f\cdot g$, $f\pm g$ הן מחזוריות.

30) נתונה הפונקציה $f(x)=x-[x]$.
א. שרטטו את גרף הפונקציה.
ב. על סמך הגרף, מהו מחזור הפונקציה?
ג. הוכיחו את התשובה בסעיף ב.

31) נתונה הפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[0,1]$.
ציירו את גרף הפונקציה המחזורית והאי-זוגית $g(x)$, המוגדרת לכל x,
שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם $f(x)$ בקטע $[0,1]$, ורשמו נוסחה עבור f.

32) נתונה הפונקציה $f(x)=x^2$ בקטע $[0,1]$.
ציירו את גרף הפונקציה המחזורית והזוגית $g(x)$, המוגדרת לכל x,
שהיא בעלת מחזור 2 ומתלכדת עם $f(x)$ ב-$[0,1]$, ורשמו נוסחה עבור g.

תשובות סופיות

1) 4π	2) $\frac{\pi}{10}$	3) $\frac{\pi}{4}$	4) π	5) $\frac{\pi}{4}$
6) $\frac{\pi}{2}$	7) π	8) π	9) $\frac{\pi}{2}$	10) π
11) 40π	12) π	13) 2π	14) 2π	15) 2π
16) π	17) π	18) π		

19) הפונקציה היא למעשה $y=1$, כלומר פונקציה קבועה ולכן מחזורית.
כל מספר חיובי הוא מחזור שלה ואין לה מחזור קטן ביותר.

20) $\frac{\pi}{2}$

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

23) שאלת הוכחה.

24) שאלת הוכחה.

25) שאלת הוכחה.

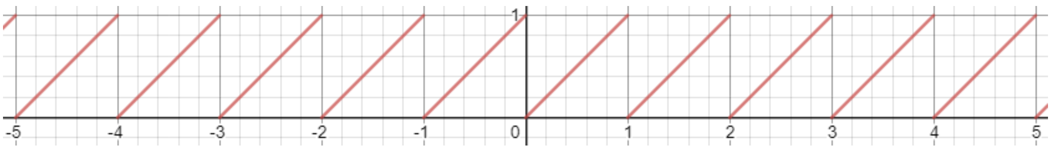
26) שאלת הוכחה.

27) שאלת הוכחה.

28) שאלת הוכחה.

29) שאלת הוכחה.

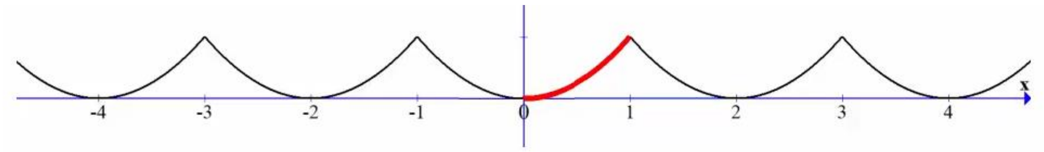
30) א.



ב. 1   ג. שאלת הוכחה.

31) $g(x)=x-k,\ k-1\le x\le k+1$ עבור k שלם, זוגי.

32) $g(x)=(x-k)^2,\ k-1\le x\le k+1$ עבור k שלם, זוגי.



פונקציה מפוצלת ופונקציה אלמנטרית

שאלות

רשמו כל אחת מהפונקציות **1-4** כפונקציה מפוצלת ושרטטו את גרף הפונקציה:

1) $y=|x-2|$

2) $y=3|x+1|$

3) $y=x^2+2|x-1|$

4) $y=\frac{|x|}{x}$

5) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x\le 4 \\ -x & x<0 \end{cases}$.

א. חשבו $f(1),\ f(4),\ f(-4),\ f(0),\ f(7)$.

ב. שרטטו את גרף הפונקציה.

ג. בדקו האם הפונקציה זוגית, אי-זוגית או כללית.

תשובות סופיות

1) $y=\begin{cases} x-2 & x\ge 2 \\ 2-x & x<2 \end{cases}$

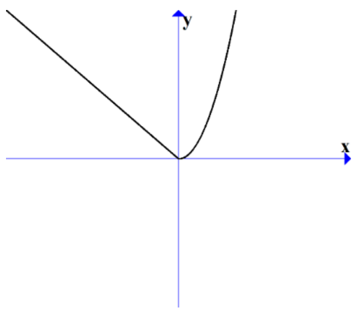
2) $y=\begin{cases} 3x+3 & x\ge -1 \\ -3x-3 & x<-1 \end{cases}$

3) $y=\begin{cases} x^2+2x-2 & x\ge 1 \\ x^2-2x+2 & x<1 \end{cases}$

4) $y=\begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$

5) א. $f(1)=1,\ f(4)=16,\ f(-4)=4,\ f(0)=0,\ f(7)=\text{undefind}$

ב.



ג. כללית.

תרגילים משולבים

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases} x+1 & x>1 \\ x^3+1 & -1\le x\le 1 \\ x+1 & x<-1 \end{cases}$.

שרטטו את הפונקציה, וקבעו האם היא:

א. עולה.

ב. יורדת.

ג. אי-זוגית.

ד. זוגית.

ה. חסומה.

ו. לא חסומה.

ז. חח״ע.

ח. על $\mathbb{R}$.

הערה: ניתן להתבסס על הציור כנימוק.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases} \frac{2}{x} & x>1 \\ x^5+1 & -1\le x\le 1 \\ x+1 & x<-1 \end{cases}$.

בכל אחד מהסעיפים הבאים יש טענה.
קבעו האם הטענה נכונה או לא נכונה.

א. הפונקציה מונוטונית עולה ממש.

ב. הפונקציה על $\mathbb{R}$.

ג. הפונקציה אי-זוגית.

ד. הפונקציה זוגית.

ה. הפונקציה חח״ע.

הערה: ניתן לשרטט ולהתבסס על הציור כנימוק.

3) נתונה פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, זוגית ומונוטונית עולה ממש,
ופונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, אי-זוגית ומונוטונית יורדת ממש.
נסמן: $z(x)=-g\left(x^3\right)$ ו- $k(x)=-f\left(x^3\right)$.
טענה א': $k(x)$ מונוטונית עולה ממש.
טענה ב': $z(x)$ מונוטונית עולה ממש.
טענה ג': $h(x)=k(x)z(x)$ זוגית.
מי מבין הטענות נכונה?

4) נתונות שתי פונקציות, $f,g:[0,1]\to[0,1]$.
נתון ש- f מונוטונית עולה ממש, ואילו g מונוטונית יורדת חלש,
אך אינה יורדת ממש.
תהי $h(x)=f\left(g(x)\right)$.
איזו טענה נכונה?
א. h יורדת חלש.
ב. h עולה ממש.
ג. h עולה חלש, אך אינה עולה ממש.
ד. h אינה חסומה בהכרח.

5) נתונות הפונקציות $g(x)=\begin{cases}x^2-4 & x<0\\ -x^2-2x-1 & x\geq 0\end{cases}$ ו- $f(x)=\begin{cases}x+4 & x\leq 0\\ \sqrt{x} & x>0\end{cases}$.
תהי $h(x)=f(g(x))$.
א. מצאו את h בקטע $[-2,0)$.
ב. קבעו האם h חח"ע בקטע $[-2,0)$.
ג. קבעו האם h חסומה בקטע $[-2,0)$.
ד. קבעו האם $h:[-2,0)\to[0,4]$ היא על.
* בסעיפים ב-ד ניתן להסתמך על גרף הפונקציה.

6) נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$: $f(x)=x^3,\ g(x)=(-1)^{\lfloor x\rfloor}$.
קבעו מי מבין הטענות הבאות נכונה.
הפונקציה $h(x)=f\left(g(x)\right)$ היא:
א. חסומה.
ב. אי-זוגית.
ג. חח"ע.
ד. מונוטונית.

7) נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$: $f(x)=x^3,\ \ g(x)=-\lfloor x \rfloor$.

א. בדקו את מונוטוניות $z(x)=f\left(g\left(x\right)\right)$.

ב. בדקו את מונוטוניות $k(x)=g\left(f\left(x\right)\right)$.

ג. בדקו האם $h(x)=\sqrt[3]{f(x)}-g(-x)$ חסומה.

תזכורת לסעיפים א+ב:

אם $a<b \ \Leftarrow\ f(a)\geq f(b)$, אז הפונקציה f יורדת חלש.

8) נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$: $\begin{matrix} f(x)=\left(3\lfloor x \rfloor\right)^3+27\lfloor x \rfloor \\ g(x)=f(x)+x^3-28 \end{matrix}$.

הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה f עולה ממש וחח"ע.

ב. הפונקציה g עולה ממש וחח"ע.

9) מצאו את הפונקציה ההפוכה לפונקציה $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$,

וקבעו את תחום הגדרתה.

הוכיחו שהפונקציה על $\mathbb{R}$.

הערה: פונקציה זו נקראת סינוס היפרבולי.

10) חקרו את מונוטוניות הפונקציה $f(x)=\frac{2x+3}{3x-1}$.

הערה: אין להשתמש בנגזרות.

11) נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{2+x-x^2}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את התמונה של הפונקציה.

ג. הוכיחו שהפונקציה חסומה.

ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

תשובות סופיות

1) א. כן. ב. לא. ג. לא. ד. לא. ה. לא. ו. כן.
ז. כן. ח. כן.

2) אף טענה אינה נכונה.

3) טענה ב' נכונה.

4) טענה א' נכונה.

5) א. $h(x)=x^2$ ב. הפונקציה חח"ע בקטע.
ג. הפונקציה חסומה בקטע. ד. הפונקציה לא על.

6) א. הפונקציה חסומה. ב. הפונקציה לא זוגית ולא אי זוגית.
ג. הפונקציה לא חח"ע. ד. הפונקציה לא מונוטונית.

7) א. הפונקציה $z(x)$ יורדת חלש. ב. הפונקציה $k(x)$ יורדת חלש.
ג. הפונקציה חסומה.

8) שאלת הוכחה.

9) $f^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$; תחום הגדרתה: כל x.

10) ראו באתר.

11) א. $-1\le x\le 2$ ב. $0\le y\le \frac{3}{2}$ ג. שאלת הוכחה.
ד. $-1\le x<\frac{1}{2}$ עלייה, $\frac{1}{2}<x\le 2$ ירידה.

סדנת ריענון במתמטיקה - מעודכן

פרק 14 - סדרות

תוכן העניינים

1. הקדמה כללית .... (ללא ספר)
2. סדרה חשבונית 147
3. סדרה הנדסית 154
4. סדרות מעורבות 159
5. סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת 161
6. סדרת נסיגה 167

סדרה חשבונית:

סיכום כללי:

- **נוסחת האיבר הכללי:**

נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית המתחילה באיבר a_1 והפרשה הוא d נתונה ע"י: $a_n=a_1+d(n-1)$, כאשר: n הוא מיקום האיבר שערכו a_n בסדרה.

- **כלל נסיגה של סדרה חשבונית:**

כלל נסיגה של סדרה חשבונית a_n שהפרשה הוא d ואיברה הראשון הוא a_1 נתון ע"י: $a_{n+1}-a_n=d$.

- **נוסחת הסכום של סדרה חשבונית:**

סכום n האיברים הראשונים של סדרה חשבונית a_n שהפרשה הוא d ואיברה הראשון הוא a_1 נתון ע"י: $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$.

בהצבת נוסחת האיבר הכללי מקבלים: $S_n=\frac{n(2a_1+d(n-1))}{2}$.

שאלות:

1) נתונה הסדרה החשבונית: $17, 11, 5, -1, -7...$.
מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 43 איברים.

2) בסדרה חשבונית האיבר השישי הוא 15 והאיבר העשירי הוא 31.
מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהו הפרש הסדרה.

3) מצא כמה איברים יש בסדרה החשבונית: $2, 4.5, 7, 9.5, 12, 14.5, ..., 49.5$.

4) בסדרה חשבונית סכום האיברים השני, החמישי והשמיני הוא 87 וההפרש בין האיבר השנים-עשר לאיבר השישי הוא 24.
מצא כמה איברים בסדרה אם ידוע שהאיבר האחרון בה הוא 201.

5) תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 3 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 46 קפיצות?

6) כמה מספרים תלת ספרתיים שמתחלקים ב-6 יש בין 201 ל-550?

7) כמה איברים חיוביים ישנם בסדרה החשבונית: $91, 88, 85, 82, \ldots$.

8) מצא את ערכו של x אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית: $x-3, 3x-4, x^2-1$.

9) נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1}=a_n+3 \\ a_1=5 \end{cases}$.
הוכח שהסדרה חשבונית ומצא מהו האיבר התשעה-עשר שלה.

10) בסדרה חשבונית $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ידוע כי סכום ארבעת האיברים הראשונים וסכום האיברים ה-6 עד ה-9 הם מספרים נגדיים.

א. הוכח: $a_5=0$.

ב. נתון: $a_3-a_{11}=24$. מצא את a_1 ואת d.

ג. מגדירים סדרה חשבונית חדשה b_n המקיימת: $b_n=2a_n-3$.
מצא את ערך האיבר השלילי הראשון בסדרה ואת מיקומו הסידורי.

11) מצא את סכום ארבעה-עשר האיברים הראשונים בסדרה החשבונית: $-3, 2, 7, 12, \ldots$.

12) נתונה הסדרה החשבונית : $-13\,,-7\,,-1\,,5,...$.
כמה איברים יש לחבר בסדרה (החל מהראשון) כדי להגיע לסכום של 987?

13) תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגה של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 11 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 2 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 416 קפיצות?

14) נתונה הסדרה החשבונית : $-71\,,-67\,,-63,...$.
כמה איברים לכל הפחות יש לחבר בסדרה כדי שהסכום המתקבל יהיה חיובי?

15) נתונה הסדרה החשבונית : $4\,,13\,,22\,,31,...$.
בסדרה יש 36 איברים. חשב את סכום ארבעה-עשר האיברים האחרונים בסדרה.

16) נתונה הסדרה החשבונית : $4\,,9\,,14\,,19,...,599$.
מחקו כל איבר שלישי בסדרה. מצא את סכום האיברים שנותרו.

17) סכום n האיברים האחרונים בסדרה חשבונית בת $3n$ איברים גדול ב- 1024 מסכום n האיברים הראשונים שבה.
א. בטא את n באמצעות הפרש הסדרה, d .
ב. נתון כי הפרש הסדרה הוא 8. כמה איברים בסדרה?

18) נתונה סדרה שבה $S_n=2n^2+4n$.
א. מצא את ערכם של שלושת האיברים הראשונים בסדרה.
ב. הוכח כי הסדרה חשבונית ומצא את הפרשה.

19) בסדרה חשבונית ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות ה-5 , ה-7 וה- 16 הוא אפס. כמו כן ידוע כי סכום שלושת האיברים הראשונים הוא 132.
א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת הפרש הסדרה.
ב. מצא את האיבר השלילי הראשון בסדרה.
ג. מצא כמה איברים יש לחבר (החל מהאיבר הראשון) כדי לקבל סכום 210.

20) נתונים שני טורים חשבוניים: $\begin{cases}150\,,144\,,138,...\\90\,,93\,,96,...\end{cases}$.

לשני הטורים אותו מספר איברים. ידוע כי סכום האיברים האחרונים של שני הטורים (האיבר האחרון מהטור הראשון והאיבר אחרון מהטור השני) הוא אפס.

א. מצא את מספר האיברים שבכל טור.

ב. מחברים את n האיברים הראשונים מהטור הראשון יחד עם n האיברים הראשונים מהטור השני. ידוע כי חיבור הסכומים הוא 3480. מצא את n אם ידוע שהוא קטן מ-20.

21) נתונות שתי סדרות החשבוניות הבאות: a_n שהפרשה הוא d_1 ו- b_n שהפרשה הוא d_2. ידוע כי: $d_1=-2d_2$.

סכום 50 האיברים הראשונים של שתי הסדרות שווה והאיבר העומד במקום ה-20 בסדרה a_n גדול ב-1 מהאיבר העומד במקום ה-37 בסדרה b_n.

א. מצא את הפרש הסדרה a_n - d_1.

ב. ידוע כי האיבר a_{10} קטן ב-1 מ-5 פעמים האיבר b_{50}.
מצא את a_1 ואת b_1.

22) נתונה הסדרה החשבונית: $-21\,,-17\,,-13,...$.

בסדרה יש 18 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

23) בסדרה חשבונית שהפרשה d ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות האי-זוגיים הוא 552 וסכום האיברים במקומות הזוגיים הוא 612.

הוכח כי $nd=60$.

24) בסדרה חשבונית עולה, שכל איבריה חיוביים ובה מספר אי-זוגי של איברים, גדול סכום כל איברי הסדרה פי $1\frac{14}{15}$ מסכום איברי הסדרה הנמצאים במקומות האי-זוגיים. כמה איברים יש בסדרה?

25) לפניך שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית: $x-5$, $x-16$, $2x+23$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את x.

ii. מצא את הפרש הסדרה.

ב. ידוע כי: $a_{12}=0$. מצא את a_1.

ג. האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n=308$.
מצא את סכום כל האיברים החיוביים העומדים במקומות האי-זוגיים.

26) בסדרה חשבונית שבה מספר זוגי של איברים נתון כי סכום ריבועי האיברים העומדים במקומות ה-4 וה-5 שווה לריבוע האיבר העומד במקום ה-6.
האיבר הראשון אינו אפס.

א. הוכח את הטענות הבאות:

i. $a_1=-4d$.

ii. $S_9=0$.

ב. האיבר העומד במקום ה-6 גדול ב-2 מהאיבר העומד במקום ה-5.
מצא את a_1 ואת d.

ג. מצא את מספר איברי הסדרה אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים הוא 504.

27) בסדרה חשבונית שבה $2n$ איברים ידוע כי סכום כל האיברים גדול ב-66 מפעמיים סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

א. הוכח כי $nd=66$.

ב. ידוע כי הפרש הסדרה הוא 3. הבע באמצעות a_1 את סכום n האיברים הראשונים.

ג. סכום n האיברים הראשונים הוא 187. מצא את האיבר החיובי הקטן ביותר בסדרה ואת מיקומו הסידורי בסדרה.

28) אדם המעוניין לקנות רכב קיבל שתי הצעות מחיר.
ההצעה הראשונה:
לשלם בתשלום הראשון 1000 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הגדול ב-500 ₪ מהתשלום הקודם.
ההצעה השנייה:
לשלם בתשלום הראשון 7200 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הקטן ב-450 ₪ מהתשלום הקודם.
ידוע כי מספר התשלומים בהצעה השנייה קטן ב-4 ממספר התשלומים שבהצעה הראשונה.

א. כמה תשלומים יצטרך לשלם לפי כל הצעה.

ב. מה מחיר הרכב?

תשובות סופיות:

1) $a_{43}=-235$.
2) $d=4$, $a_1=-5$.
3) 20 איברים.
4) 48 איברים.
5) 15 קפיצות.
6) 58 מספרים.
7) 31 איברים חיוביים.
8) $x=4$, $x=1$.
9) $a_{19}=59$.
10) א. הוכחה. ב. $a_1=12$, $d=-3$ ג. $b_5=-3$.
11) $S_{14}=413$.
12) 21 איברים.
13) 16 דקות.
14) 37 איברים.
15) 3647.
16) 23920.
17) א. $n=\sqrt{\frac{512}{d}}$ ב. 24 איברים.
18) א. $a_1=6$, $a_2=10$, $a_3=14$ ב. $d=4$.
19) א. $a_1=50$, $d=-6$ ב. $a_{10}=-4$ ג. $n=6$.
20) א. $n=81$ ב. $n=16$.
21) א. $d_1=4$ ב. $a_1=-52$, $b_1=95$.
22) אי-זוגיים: $S=99$ זוגיים: $S=135$.
23) שאלת הוכחה.
24) 29 איברים.
25) א. i. $x=-50$ ii. $d=11$ ב. $a_1=-121$ ג. $S=2156$.
26) א. הוכחה. ב. $a_1=-8$, $d=2$ ג. $n=36$.
27) א. הוכחה. ב. $S=22a_1+693$ ג. $a_9=1$.
28) א. 12 לפי ההצעה הראשונה ו-8 לפי ההצעה השנייה. ב. 45000 ש"ח.

סדרה הנדסית:

סיכום כללי:

- **נוסחת האיבר הכללי:**

נוסחת האיבר הכללי של סדרה הנדסית המתחילה באיבר a_1 ומנתה היא q נתונה ע"י הנוסחה: $a_n = a_1 q^{n-1}$, כאשר: n הוא מיקום האיבר שערכו a_n בסדרה.

- **כלל נסיגה של סדרה הנדסית:**

כלל נסיגה של סדרה הנדסית a_n שמנתה היא q ואיברה הראשון הוא a_1 נתון ע"י הקשר הבא: $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

- **נוסחת הסכום של סדרה הנדסית:**

סכום n האיברים הראשונים של סדרה הנדסית a_n שמנתה היא q ואיברה הראשון הוא a_1 נתון ע"י: $S_n = \dfrac{a_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}$.

שאלות:

1) נתונה הסדרה ההנדסית: $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, \ldots$.
מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 9 איברים.

2) מצא כמה איברים יש בסדרה ההנדסית: $\frac{9}{64}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{64}{81}$.

3) בסדרה הנדסית האיבר השישי הוא 8 והאיבר העשירי הוא 128.
מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

4) בסדרה הנדסית ההפרש בין האיבר השביעי לאיבר החמישי הוא 432 וההפרש בין האיבר החמישי לשלישי הוא 48. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

5) בסדרה הנדסית עולה ההפרש בין האיבר השמיני לאיבר הרביעי הוא 3120 וסכום האיברים השני והרביעי הוא 5.2.
מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

6) תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 3 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 324 קפיצות?

7) מצא את ערכו של x אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה הנדסית: $x-6,\ x+4,\ 4x+1$. מצא גם את מנת הסדרה.

8) נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n \\ a_1 = 3 \end{cases}$.
הוכח שהסדרה הנדסית ומצא מהו האיבר השמיני בה.

9) מצא את סכום תשעת האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית: $5, 10, 20, 40, ...$.

10) תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגה של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 2 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 5 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 1562 קפיצות?

11) סכום n האיברים האחרונים בסדרה הנדסית בת $3n$ איברים שמנתה 2, גדול פי 256 מסכום n האיברים הראשונים בה. כמה איברים בסדרה?

12) בסדרה הנדסית עולה שבה n איברים, סכום $n-3$ האיברים האחרונים גדול פי 8 מסכום $n-3$ האיברים הראשונים בה. מצא את מנת הסדרה.

13) סכום כל האיברים בסדרה הנדסית הוא 252. האיבר האחרון בסדרה גדול ב- 120 מהאיבר השני בה. מצא כמה איברים יש בסדרה אם ידוע שמנתה 2.

14) המספרים: $2x-3$, $x-9$, $x-13$ הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית עולה שכל איבריה חיוביים.
א. מצא את x.
ב. ענה על הסעיפים הבאים:
i. כתוב את נוסחת האיבר הכללי בסדרה זו.
ii. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 18750.
ג. ידוע כי האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n=5^{11}$.
מצא את סכום 7 האיברים האחרונים בסדרה.

15) נתונה הסדרה ההנדסית הבאה: a_{n+1} ,...., 36 , 12 , 4. מוסיפים לכל איבר בסדרה זו שישית מהאיבר הבא אחריו ויוצרים סדרה חדשה b_n באופן הבא:

$$b_1=a_1+\frac{a_2}{6}\ ,\ b_2=a_2+\frac{a_3}{6}\ ,\ b_3=a_3+\frac{a_4}{6}\ ,\ ......\ ,\ b_n=a_n+\frac{a_{n+1}}{6}.$$

א. הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.
ב. הראה כי היחס בין סכום n האיברים הראשונים של הסדרה a_n ובין סכום n האיברים הראשונים של הסדרה b_n הוא $\frac{2}{3}$.
ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה b_n שסכומם מהווה $\frac{2}{9}$ מ- a_8.

16) נתונה הסדרה ההנדסית: $7, 14, 28, ...$.
בסדרה יש 8 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

17) בסדרה הנדסית ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות הזוגיים גדול פי 4 מסכום האיברים במקומות האי-זוגיים. חשב את מנת הסדרה.

18) נתונה סדרה הנדסית שמנתה q ובה מספר זוגי של איברים.
בטא באמצעות q את היחס בין סכום איברי הסדרה כולה לסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים שבה.

19) בסדרה הנדסית שבה $2n+1$ איברים, סכום n האיברים הראשונים קטן פי 9 מסכום n האיברים הבאים אחריהם. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-30 מהאיבר הראשון שבה. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

20) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הראה כי בסדרה הנדסית שבה $2n$ איברים היחס בין סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים לבין סכום כל איברי הסדרה תלוי במנת בסדרה.

בסדרה הנדסית שבה מספר זוגי של איברים ידוע כי סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים קטן פי 4 מסכום כל איברי הסדרה. האיבר הראשון בסדרה זו קטן ב-2 ממנת הסדרה.

ב. כתוב נוסחה לאיבר כללי של סדרה זו.

ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 324.

21) בסדרה הנדסית שבה 12 איברים סכום כל איברי הסדרה גדול פי 3 מסכום האיברים כאשר מחליפים את סימני כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

א. מצא את מנת הסדרה.

ב. ידוע כי ההפרש בין האיבר החמישי לאיבר הרביעי בסדרה הוא 8. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

ג. חשב את סכום כל האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה.

22) באחת ממדינות המזרח היה מלך שאהב משחקי חשיבה. לכבוד יום הולדתו הכין לו השר הבכיר שבממלכתו משחק מיוחד המכיל 25 משבצות ו-2 חיילי משחק. המלך, מרוב התלהבות ושמחה לא ידע כיצד לגמול לשר החכם ושאל אותו מה ירצה בתמורה. השר סרב לקבל דבר על מתנתו עד שלבסוף החליט המלך לתת לשר מחצית מכל אוצרות הממלכה המונים כ-40 מיליון אבנים יקרות. לאחר ששמע על כך השר, הוא החליט לאתגר את המלך והעלה את ההצעה הבאה:

תן לי אבן יקרה אחת והכפל אותה בכל משבצת שבמשבצות המשחק באופן הבא: כנגד המשבצת הראשונה - אבן אחת,
כנגד השנייה - שתי אבנים,
כנגד השלישית - ארבע אבנים וכן הלאה...
המלך הסכים להצעה.

א. כמה אבנים המלך ייתן לשר כנגד המשבצת האחרונה במשחק?

ב. העזר בכמות האבנים שברשותו של השר וקבע האם הצעתו שוות-ערך יותר מהחלטת המלך לתת לו מחצית מאוצרות הממלכה.

ג. סמוך לפני שנתן המלך את האבנים לשר, הציעה בתו של המלך הצעה נוספת והיא: תן עבור כל משבצת זוגית 2^n אבנים,
כאשר n הוא מספר המשבצת. האם כדאי למלך לקבל את הצעת בתו או להישאר עם ההצעה המקורית של השר?

תשובות סופיות:

1) $a_9=729$.
2) $n=7$.
3) $a_1=\pm\frac{1}{4}\ ,\ q=\pm2$.
4) $a_1=\frac{2}{3}\ ,\ q=\pm3$.
5) $a_1=\frac{1}{25}\ ,\ q=5$.
6) 5 דקות.
7) $x=11\to q=3\ ,\ x=-\frac{2}{3}\to q=-\frac{1}{2}$.
8) $a_8=384$.
9) $S_9=2555$.
10) 5 דקות.
11) $n=4$, יש 12 איברים בסדרה.
12) $q=2$.
13) $n=6$.
14) א. $x=14$ ב.i. $a_n=5^{n-1}$ ב.ii. $a_6\ ,\ a_7$ ג. $S_7^*=61{,}034{,}375$.
15) א. $q=3$. ג. $b_5\ ,\ b_6$
16) אי-זוגיים: $S=595$, זוגיים: $S=1190$.
17) $q=4$.
18) $\frac{q+1}{q}$.
19) $a_1=\frac{3}{8}$.
20) א. $\frac{S_{n(o)}}{S_{2n}}=\frac{1}{q+1}$ ב. $a_n=3^{n-1}$ ג. $a_5\ ,\ a_6$.
21) א. $q=2$ ב. $a_1=1$ ג. $S_{6(p)}=2730$.
22) א. $a_{25}=16{,}777{,}216$
ב. לפי הצעת השר יהיו לו 33,554,431 אבנים ולפי הצעת המלך יהיו לו 20,000,000 אבנים.
ג. $4,16,64,\ldots,2^{24}$, $S_n=22{,}369{,}620$.

סדרות מעורבות:

שאלות:

1) נתונים שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית שמנתה 3.
אם נכפול את המספר הראשון ב-3, נוסיף למספר השני 4 ונחסיר מהמספר השלישי 4 תתקבל סדרה חשבונית. מצא את המספרים.

2) נתונות שתי סדרות שמתחילות במספר 2 ובשתיהן 3 איברים.
סדרה אחת היא חשבונית והשנייה הנדסית. האיבר השלישי בשתי הסדרות זהה והאיבר השני בסדרה ההנדסית קטן ב-4 מהאיבר השני בסדרה החשבונית.
מצא את מנת הסדרה ההנדסית.

3) נתונים ארבעה מספרים בעלי התכונות הבאות:
הראשון, השני והרביעי מהווים שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית שמנתה 2.
הראשון, השלישי והרביעי מהווים שלושה איברים עוקבים בסדרה חשבונית וסכומם $22\frac{1}{2}$. מצא את ארבעת המספרים.

4) ההפרש של סדרה חשבונית שווה למנה של סדרה הנדסית עולה.
האיבר הראשון בסדרה ההנדסית הוא 6 וידוע כי סכום 2 האיברים הראשונים בסדרה החשבונית שווה לסכום שני האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית.
האיבר השלישי בסדרה ההנדסית גדול פי 2 מהאיבר השלישי בסדרה החשבונית.

א. מצא את שלושת האיברים של הסדרה החשבונית.

ב. מצא כמה איברים יש לחבר בסדרה החשבונית החל מהאיבר הראשון כדי לקבל את הסכום 60.

ג. מצא את מיקומו הסידורי של איבר בסדרה ההנדסית הגדול פי 12 מהאיבר האחרון שחובר בסכום הסדרה החשבונית שחישבת בסעיף הקודם.

5) נתונות שתי הסדרות הבאות: סדרה חשבונית: $a_1 , a_2 , a_3 , ...$
וסדרה הנדסית: $b_1 , b_2 , b_3 , ...$. ידוע כי האיבר הראשון בשתי הסדרות שווה.
האיבר השלישי בסדרה ההנדסית גדול פי 4 מהאיבר הראשון בסדרה החשבונית.

א. מצא את מנת הסדרה ההנדסית אם ידוע כי היא אינה עולה.

ב. נתון גם כי האיבר החמישי בסדרה ההנדסית שווה לאיבר הרביעי בסדרה החשבונית. הוכח כי הפרש הסדרה החשבונית גדול פי 5 מהאיבר הראשון.

ג. בכל סדרה יש 10 איברים. הסכום של כל האיברים של שתי הסדרות יחד הוא 212-. מצא את האיבר הראשון של שתי הסדרות.

תשובות סופיות:

1) המספרים הם: 18, 6, 2.

2) $q=-1$ או $q=3$.

3) המספרים הם: 12 , 7.5 , 6 , 3.

4) א. 12, 10, 8 ב. 5 ג. 6.

5) א. $q=-2$ ג. $a_1=2$.

סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

סיכום כללי:

- **הגדרה:**

סדרה הנדסית a_n המקיימת: $|q|<1$, $(q\neq 0)$ נקראת סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת.

- **נוסחת הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:**

הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת a_n ניתן לחישוב ע"י שימוש בכלל: $\lim_{n\to\infty} q^n=0$ והצבתו בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית.

מתקבל הכלל הבא: $S=\dfrac{a_1}{1-q}$.

- **סכום סופי של איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:**

  - כאשר מתבקשים לחשב סכום של n איברים ראשונים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה: $S_n=\dfrac{a_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$.

  - כאשר מתבקשים לחשב סכום של n איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת המתחילים באיבר a_k יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה באופן הבא: $S_n=\dfrac{a_k\left(q^n-1\right)}{q-1}$.

שאלות:

1) מצא את סכום כל איברי הסדרה ההנדסית הבאה: $12\ ,\ 4\ ,\ 1\frac{1}{3}\ ,\ \ldots$.

2) סכום כל איברי סדרה הנדסית אינסופית שמנתה $\frac{1}{4}$ הוא 32.
מצא את האיבר הראשון בסדרה.

3) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 62.5. ידוע כי האיבר השני בסדרה הוא 10. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה (שתי אפשרויות).

4) האיבר הראשון בסדרה הנדסית אינסופית יורדת הוא 14. סכום האיברים במקומות הזוגיים הוא $9\frac{1}{3}$. מצא את סכום האיברים במקומות האי-זוגיים.

***הערה:** **שתי השאלות הבאות מסכמות את סוגי הסכומים וייצוג סדרות שונות באמצעות סדרה נתונה כפי שמקובל בנושא זה ואינן מייצגות אורך של שאלת בגרות.**

5) נתונה סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת a_n שמנתה q, $\left(q\neq 0\ ,\ |q|<1\right)$
מגדירים שלוש סדרות חדשות: b_n , c_n ו- d_n באופן הבא:

הסדרה:	b_n	c_n	d_n
הכלל:	$b_1=a_1$ $b_2=a_1+a_2$ $b_3=a_1+a_2+a_3$ $\vdots$ $b_n=a_1+a_2+a_3+..+a_n=S_{a(n)}$	$c_1=a_2^2-a_1^2$ $c_2=a_3^2-a_2^2$ $c_3=a_4^2-a_3^2$ $\vdots$ $c_n=a_{n+1}^2-a_n^2$	$d_1=S_a+a_1$ $d_2=S_a+a_2$ $d_3=S_a+a_3$ $\vdots$ $d_n=S_a+a_n$

הסכום S_a הוא סכום הסדרה a_n, והסכום: $S_{a(n)}$ הוא סכום n האיברים הראשונים של הסדרה a_n.

א. קבע אלו מבין הסדרות b_n , c_n ו- d_n הן הנדסיות והבע את מנתן ע״י q.

ב. הבע באמצעות a_1 בלבד את סכום הסדרה ההנדסית שמצאת בסעיף הקודם.

ג. מסמנים את סכום ריבועי האיברים של הסדרה ההנדסית שמצאת בסעיף א׳ ב- $S_{(S)}$. הוכח כי לא קיים ערך של q עבורו סכום ריבועי האיברים, $S_{(S)}$, שווה לסכום הסדרה הנ״ל בריבוע.

6) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת: a_n שמנתה q.
מגדירים סדרה חדשה b_n באופן הבא:

$$b_1 = S_1^* = \frac{a_1}{1-q} \;,\; b_2 = S_2^* = \frac{a_2}{1-q} \;,\; b_3 = S_3^* = \frac{a_3}{1-q} \;,\ldots,\; b_n = S_n^* = \frac{a_n}{1-q} \;,\ldots$$

כאשר: S_n^* מייצג את סכום הסדרה a_n החל מהאיבר a_n (ועד אינסוף).

א. הוכח כי הסדרה b_n היא גם הנדסית אינסופית יורדת וכתוב את נוסחת האיבר הכללי שלה באמצעות a_1 ו- q.

ב. ידוע כי סכום הסדרה b_n הוא 126 וכי סכום 8 האיברים הראשונים בסדרה a_n גדול פי 6560 מהאיבר התשיעי בסדרה b_n. מצא את a_1 ו- q.

ג. היעזר בסעיף הקודם והוכח כי מתקיים: $b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots = 42$.

ד. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה b_n.

ה. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה b_n.

ו. מחליפים את סימני האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה b_n כך שנוצרת הסדרה: b_n^*. חשב את סכום הסדרה b_n^*.

ז. מחליפים את סימני האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה b_n כך שנוצרת הסדרה: b_n^{**}. חשב את סכום הסדרה b_n^{**}.

ח. מעלים בריבוע את כל איברי הסדרה b_n. מסמנים את הסכום המתקבל ב- $S_{(S)}$ (מלשון: square). כמו כן, מסמנים את סכום הסדרה המקורית b_n ב- S_b.
הראה כי: $S_b^2 \neq S_{(S)}$.

ט. הוכח כי היחס בין סכום איברי הסדרה a_n וסכום איברי הסדרה b_n הוא $\frac{2}{3}$.

7) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 24. מאיברי הסדרה הנתונה יצרו את סדרה חדשה באופן הבא: $a_1+a_2,\ a_2+a_3,\ a_3+a_4,\ a_4+a_5,\ ...$.

א. הוכח שהסדרה החדשה היא הנדסית אינסופית יורדת.

ב. ידוע שסכום כל איברי הסדרה החדשה הוא 32.
מצא את האיבר הראשון והמנה של הסדרה המקורית.

8) בסדרה הנדסית אינסופית יורדת a_n ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים גדול פי $1\frac{2}{3}$ מסכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.

א. מצא את מנת הסדרה.

מחברים כל שני איברים סמוכים בסדרה הנתונה ויוצרים סדרה חדשה b_n .

ב. הוכח כי הסדרה b_n גם היא הנדסית יורדת ומצא את מנתה.

ג. הראה כי סכום הסדרה b_n שווה לסכום הסדרה a_n .

ד. סכום שתי הסדרות יחד הוא 1000. מצא את האיבר הראשון בסדרה a_n .

9) נתונה סדרה הנדסית אינסופית $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ .....$ שמנתה היא q , $(0<q<1)$.
נגדיר את הסכומים הבאים: $V=a_3+a_7+a_{11}+...$, $T=a_1+a_2+a_5+a_6+a_9+a_{10}\ ,\ ...$.
נתון כי: $T=6V$.

א. מצא את מנת הסדרה q .

ב. פי כמה קטן V מסכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה?

ג. מצא את האיבר הראשון אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים הוא $1365\frac{1}{3}$.

10) נתונה הסדרה ההנדסית הבאה: $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ .....\ ,\ a_{2n}$ שמנתה היא q .
בונים סדרה חדשה מריבועי כל האיברים הסדרה באופן הבא: $a_1^2\ ,\ a_2^2\ ,\ a_3^2\ ,\ .....\ ,\ a_{2n}^2$.

א. הוכח כי היחס בין סכום n האיברים הראשונים בסדרת הריבועים ובין סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה הנתונה תלוי רק באיבר הראשון של הסדרה.

בסדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 640 ידוע כי סכום 10 האיברים הראשונים כאשר מעלים אותם בריבוע גדול פי 320 מסכום 10 האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.

ב. מצא את מנת הסדרה.

ג. מחברים את כל איברי הסדרה החל מאיבר a_n כלשהו.
ידוע כי סכום זה קטן פי 16 מסכום הסדרה המקורי. מצא את האיבר a_n .

11) נתונה סדרה הנדסית אינסופית $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ .....$ שמנתה היא q , $\left(q \neq 0\ ,\ |q|<1\right)$.

נגדיר את הסכומים הבאים: $T = a_1 + a_3 + a_6 + a_8 + a_{11} + a_{13}\ ,\ ..,V = a_2 + a_7 + a_{12} + ...$.

נתון כי: $V = 0.3T$.

א. מצא את מנת הסדרה q.

מחליפים את הסימנים של כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים
ומתקבלת סדרה חדשה שסכומה הוא 12.

ב. מצא את האיבר הראשון בסדרה המקורית.

ג. מעלים את כל איברי הסדרה בריבוע. חשב את סכום הסדרה כעת.

תשובות סופיות:

1) $S=18$.

2) $a_1=24$.

3) $a_1=50$, $q=\frac{1}{5}$ או $a_1=12\frac{1}{2}$, $q=\frac{4}{5}$.

4) $S=18\frac{2}{3}$.

5) א. הסדרה b_n : $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{\frac{a_{n+1}\left(q^{n+1}-1\right)}{q-1}}{\frac{a_n\left(q^n-1\right)}{q-1}}=\frac{a_{n+1}\left(q^{n+1}-1\right)}{a_n\left(q^n-1\right)}=q\cdot\frac{q^{n+1}-1}{q^n-1}$

היות והיא תלויה ב-n היא אינה הנדסית.

הסדרה c_n הנדסית: $\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{a_{n+2}^2-a_{n+1}^2}{a_{n+1}^2-a_n^2}=\frac{a_n^2q^4-a_n^2q^2}{a_n^2q^2-a_n^2}=\frac{a_n^2q^2\left(q^2-1\right)}{a_n^2\left(q^2-1\right)}=q^2$.

הסדרה d_n : $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{S+a_{n+1}}{S+a_n}=\frac{\frac{a_1}{1-q}+a_{n+1}}{\frac{a_1}{1-q}+a_n}=\frac{a_1+(1-q)a_{n+1}}{a_1+(1-q)a_n}=\frac{a_1\left(1+(1-q)q^n\right)}{a_1\left(1+(1-q)q^{n-1}\right)}=\frac{q^n-q^{n+1}+1}{q^{n-1}-q^n+1}$

היות והיא תלויה ב-n היא אינה הנדסית. ב. $S_{(c_n)}=\frac{c_1}{1-q_c}=\frac{a_2^2-a_1^2}{1-q^2}=\frac{a_1^2\left(q^2-1\right)}{1-q^2}=-a_1^2$.

ג. מהשוואה: $S_{(s)}=S^2$ מקבלים כי פתרון המשוואה הוא: $q=0,\pm1$.
כולם נפסלים מכיוון שמנת הסדרה הנתונה a_n היא שבר.
עבור $|q|>1$ הסדרות אינן מתכנסות ולכן לא קיים ערך של q עבורו השוויון יתקיים. מש״ל.

6) א. $b_n=\frac{a_1}{1-q}q^{n-1}$ ב. $a_1=56$, $q=\frac{1}{3}$ ג. הוכחה. ד. 31.5
ה. 94.5 ו. -63 ז. 63 ח. 7938
ט. הסכום: S^2 משמעו: $\left(b_1+b_2+...+b_n+..\right)^2$.
הסכום: $S_{(s)}$ משמעו: $b_1^2+b_2^2+...+b_n^2+..$. ברור כי הביטויים אינם שווים.

7) א. הוכחה. ב. $a_1=16$, $q=\frac{1}{3}$.

8) א. $q=0.6$ ב. $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{2n+1}+a_{2n+2}}{a_{2n-1}+a_{2n}}=q^2$ ד. $a_1=200$

9) א. $q=\frac{1}{2}$ ב. פי 5 ג. $a_1=1024$

10) א. הוכחה. ב. $q=0.5$ ג. $a_5=20$.

11) א. $q=\frac{1}{3}$ ב. $a_1=-16$ ג. $S=288$.

סדרת נסיגה:

שאלות:

1) נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2n - 11 \\ a_1 = -6 \end{cases}$.

א. מצא את האיבר השלישי בסדרה.

ב. נתון כי האיבר השלושה-עשר בסדרה הוא 18. מצא את a_{14} ו- a_{12}.

ג. נתון כי האיבר השלושים ואחת בסדרה הוא k.
הבע באמצעות k את a_{32} ו- a_{30}.

ד. מצא את מיקומם של שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 133.

ה. הסבר מדוע אין שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 62.

2) נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2n \\ a_1 = 0 \end{cases}$.

נתון כי $a_k = 72$. הבע באמצעות k את a_{k+2}.

3) נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + n^2 - 31 \\ a_7 = t \end{cases}$

מצא את ערכו של t שבעבורו האיברים a_7, a_8, a_9 הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית.

4) סדרה שהאיבר הכללי בה הוא a_n מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1} = a_n + 6n - 2$
מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא b_n באופן הבא: $b_n = a_{n+1} - a_n$.

א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה חשבונית ומצא את הפרשה.

ב. חשב את b_1.

5) סדרה שהאיבר הכללי בה הוא a_n מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1} = 3a_n + 4$.
מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא b_n באופן הבא: $b_n = a_n + 2$.

א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.

ב. נתון: $b_5 = 162$. חשב את a_1.

6) סדרה מוגדרת ע"י הכלל: $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 3a_n + 10n - 5$.
מגדירים סדרה חדשה המקיימת לכל n טבעי: $b_n = a_n + 5n$.
א. הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית.
ב. חשב את האיבר b_5.
ג. חשב את הסכום: $b_2 + b_4 + b_6 + ... + b_{12}$.

7) סדרה מוגדרת לכל n טבעי ע"י הנוסחה: $a_1 = k$, $a_{n+1} = 8n - a_n + 3$.
א. הבע באמצעות k את ארבעת האיברים הראשונים בסדרה.
ב. הוכח כי סדרת האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים וסדרת האיברים העומדים במקומות הזוגיים הן חשבוניות ומצא את הפרשן.
ג. חשב את סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה.

8) סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה הבא: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{3a_n}{2a_n + 3}$.
מגדירים סדרה חדשה לפי: $b_n = \dfrac{4 - 7a_n}{a_n}$.
א. הוכח כי הסדרה b_n היא חשבונית ומצא את הפרשה.
ב. חשב את הסכום הבא: $b_2 + b_4 + b_6 + ... + b_{22}$.

9) סדרה מקיימת את כלל הנסיגה: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3n - a_n - 7$.
א. חשב את 5 האיברים הראשונים וקבע האם הסדרה היא חשבונית.
ב. הוכח כי לכל n טבעי מתקיים: $a_{n+2} = a_n + 3$.
ג. כתוב נוסחה לסכום n האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.
ד. חשב את הסכום הבא: $a_1 + a_3 + a_5 + ... + a_{17}$.

10) סדרה מוגדרת לפי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1}=a_n+2\cdot 3^n+2$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הבע את a_{n+2} באמצעות a_n.

ii. מצא את מיקומו הסידורי של איבר הגדול ב-652 מהאיבר העומד שני מקומות לפניו.

ב. הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של אחת מהסדרות המיוצגות ע"י כלל הנסיגה הנ"ל היא: $S_n=1.5\cdot 3^n+n^2+n-1.5$.

חשב את הסכום הבא: $a_6+a_7+a_8+....+a_{11}$.

ג. מהו האיבר הראשון של הסדרה המיוצגת ע"י כלל הנסיגה ונוסחת הסכום הנ"ל?

11) סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה: $a_1=6\ ,\ a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+5}$.

מגדירים סדרה חדשה b_n המקיימת לכל n טבעי: $b_n=\dfrac{a_n+3}{a_n}$.

א. הוכח כי הסדרה b_n היא הנדסית ומצא את מנתה.

ב. כתוב נוסחה ל- b_n באמצעות n בלבד.

ג. חשב את הסכום הבא: $b_1-b_2+b_3-b_4+.....-b_{10}$.

תשובות סופיות:

1) א. $a_3=-22$ ב. $a_{12}=5\ ,a_{14}=33$ ג. $a_{30}=k-49\ ,a_{32}=k+51$
ד. a_{62},a_{63}

2) $a_{k+2}=74+4k$

3) $t=-33$

4) א. $d=6$ ב. $b_1=4$

5) א. $q=3$ ב. $a_1=0$

6) א. $b_{n+1}=3b_n$ ב. $b_5=648$ ג. $S=1594320$

7) א. $a_1=k\ ,a_2=11-k\ ,a_3=k+8\ ,a_4=19-k$ ב. 8
ג. 830

8) ב. $S_{11(p)}=267\frac{2}{3}$

9) א. $a_1=1\ ,a_2=-5\ ,a_3=4\ ,a_4=-2\ ,a_5=7$ ג. $S_{n(o)}=1.5n^2-0.5n$
ד. $S_{9(o)}=117$

10) א. i. $a_{n+2}=a_n+8\cdot 3^n+4$ ii. a_4
ב. $S_{6-11}=265458$ ג. $a_1=5$.

11) א. $q=2.5$ ב. $b_n=1.5\cdot 2.5^{n-1}$ ג. $S_{10}^*=-4086.74$

סדנת ריענון במתמטיקה - מעודכן

פרק 15 - סימן הסכימה (סיגמה)

תוכן העניינים

1. כללי 171

סימן הסכימה (סיגמה):

שאלות:

1) כתוב בפירוט את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{n=0}^{10} 4^n$ ב. $\sum_{k=1}^{4} 2k$ ג. $\sum_{n=4}^{10} na_n$

ד. $\sum_{i=7}^{11} 4i^2a_i$ ה. $\sum_{t=1}^{8} tx^t$ ו. $\sum_{k=4}^{10} na_k$

ז. $\sum_{k=1}^{10} 4n$ ח. $\sum_{k=-1}^{3}\left(k^2+1\right)$ ט. $\sum_{l=1}^{3}\left(l^2-x_l-4\right)$

2) כתוב את הסכומים הבאים בעזרת סימן הסכימה:

א. $1+2+4+8+16+32+64+128$

ב. $2+4+6+8+10+12+14+16+18+20$

ג. $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$

ד. $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5+5\cdot6+6\cdot7+7\cdot8$

ה. $1\cdot2+3\cdot4+5\cdot6+...+44\cdot45$

ו. $3\cdot2+6\cdot3+9\cdot4+12\cdot5+15\cdot6+18\cdot7+21\cdot8$

ז. $5^2+7^2+...+27^2$

ח. $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+....+\frac{1}{10\cdot11}$

ט. $\frac{2}{3}+\frac{6}{9}+\frac{10}{27}+\frac{14}{81}+\frac{18}{243}$

י. $4+\frac{8}{5}+\frac{12}{25}+\frac{16}{125}+\frac{20}{625}$

3) חשב את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{k=1}^{10} 4k$ ב. $\sum_{k=1}^{10}\left(2k+4k^2\right)$ ג. $\sum_{k=10}^{24} k(k-1)$

ד. $\sum_{k=10}^{24}\frac{k^3-k}{k+1}$ ה. $\sum_{k=4}^{10}(k-2)(k+2)$ ו. $\sum_{k=1}^{10}\left(2k^2+1\right)(k-2)$

* תוכל להיעזר בנוסחאות הבאות: $\sum_{k=1}^{n} k^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

4) חשב את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{k=1}^{20}\frac{5\cdot 4^k+8^k}{2^k}$

ב. $\sum_{k=1}^{11}\frac{2\cdot 4^{k+2}+10^k}{0.4^k}$

ג. $\sum_{k=10}^{20}2^{2k+10}$

* תוכל להיעזר בנוסחה הבאה: $(a\neq 1)$ $\sum_{k=1}^{n}a^k=\frac{a\left(a^n-1\right)}{a-1}$.

5) חשב את הסכומים הבאים:

א. $1^2+2^2+3^2+...+20^2$

ב. $4^2+5^2+6^2+...+24^2$

ג. $2^2+4^2+6^2+...+22^2$

ד. $1^2+3^2+5^2+...+17^2$

6) הוכח כי:

א. $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^{2k+6}}{k+3}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2k+4}}{k+2}$

ב. $\sum_{k=8}^{n+1}\frac{4k+1+2^{2k-8}}{k-3}=\sum_{k=4}^{n-3}\frac{4k+17+2^{2k}}{k+1}$

7) חשב את הסכומים הבאים ללא פיצול הסכום:

א. $\sum_{4}^{11}k^2$

ב. $\sum_{10}^{20}4^{2k}$

תשובות סופיות:

1) א. $4^0+4^1+4^2+4^3+4^4+4^5+4^6+4^7+4^8+4^9+4^{10}$

ב. $2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+2\cdot4$

ג. $4a_4+4a_5+4a_6+4a_7+4a_8+4a_9+4a_{10}$

ד. $4\cdot7^2a_7+4\cdot8^2a_8+4\cdot9^2a_9+4\cdot10^2a_{10}+4\cdot11^2a_{11}+4\cdot7^2a_7$

ה. $1x^1+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5+6x^6+7x^7+8x^8$

ו. $na_5+na_6+na_7+na_8+na_9+na_{10}+na_{11}$

ז. $4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n+4n$

ח. $\left((-1)^2+1\right)+\left(0^2+1\right)+\left(1^2+1\right)+\left(2^2+1\right)+\left(3^2+1\right)$

ט. $\left(1^2-x_2-4\right)+\left(2^2-x_4-4\right)+\left(3^2-x_6-4\right)$

2) א. $\sum_{k=0}^{7}2^k$ ב. $\sum_{k=1}^{10}2k$ ג. $\sum_{k=0}^{9}(2k+1)$ ד. $\sum_{k=1}^{7}k(k+1)$

ה. $\sum_{k=1}^{22}(2k-1)2k$ ו. $\sum_{k=1}^{7}3k(k+1)$ ז. $\sum_{n=3}^{14}(2n-1)^2$

ח. $\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n(n+1)}$ ט. $\sum_{k=1}^{5}\frac{4k-2}{3^k}$ י. $\sum_{k=1}^{4}\frac{4k}{5^{k-1}}$

3) א. 220 ב. 1650 ג. 255 ד. 9160 ה. 28 ו. 4545

4) א. $5\cdot\left(2^{21}-2\right)+\frac{4}{3}\left(4^{20}-1\right)$ ב. $32\cdot\frac{10\left(10^{11}-1\right)}{10-1}+\frac{25\left(25^{11}-1\right)}{25-1}$

ג. $2^{10}\left[\frac{4\left(4^{20}-1\right)}{4-1}-\frac{4\left(4^{9}-1\right)}{4-1}\right]$

5) א. 2870 ב. 2856 ג. 2024 ד. 969

6) הוכחה.

7) א. $\frac{8(8+1)(2\cdot8+1)}{6}+6\cdot\frac{8(8+1)}{2}+9\cdot8$ ב. $4^{18}\cdot\frac{16\left(16^{11}-1\right)}{16-1}$

סדנת ריענון במתמטיקה - מעודכן

פרק 16 - אינדוקציה מתמטית

תוכן העניינים

1. שאלות העוסקות בתכונות התחלקות 174
2. סדרות 177
3. עצרת 179
4. אינדוקציות עם רקורסיה 180
5. שאלות שבהן האיבר הכללי מורכב ממספר מחוברים 181
6. שאלות העוסקות באינדוקציות עם איברים משתנים 182
7. שאלות העוסקות בהוכחת באי-שוויונים באינדוקציה 183
8. שאלות כוללות ומסכמות 185
9. מושג הסכימה וכתיבה מקוצרת של אינדוקציות 187

שאלות העוסקות בתכונות התחלקות:

סיכום כללי:

מבנה כללי של רישום הוכחה באינדוקציה:

בדיקה:

בדיקה נכונות האינדוקציה עבור $n=1$ (ולעיתים כדאי לבדוק גם עבור $n=2,3$).

הנחת האינדוקציה:

נניח כי עבור $n=k$ (k טבעי כלשהו) כי טענת האינדוקציה נכונה.

הוכחת האינדוקציה:

נוכיח כי עבור $n=k+1$ טענת האינדוקציה מתקיימת.

סיכום:

לסיכום, הראנו כי הטענה נכונה עבור $n=1$ והראנו כי נכונות הטענה עבור $n=k$ גוררת את נכונותה עבור $n=k+1$, לפיכך, על פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

שאלות:

1) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 8^n-3^n מתחלק ב-5 ללא שארית לכל n טבעי.

2) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 11^n-4^n מתחלק ב-7 ללא שארית לכל n טבעי.

3) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $8\cdot 7^n+4^{n+2}$ מתחלק ב-24 ללא שארית לכל n טבעי.

4) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $5\cdot 3^{2n}-5^{n+1}$ מתחלק ב-20 ללא שארית לכל n טבעי.

5) a_n הוא האיבר במקום ה-n בסדרה החשבונית: $1,3,5,7,\ldots$ הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $2^{a_n}+4$ מתחלק ב-12 ללא שארית לכל n טבעי הגדול מ-1.

6) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי n^2+n מתחלק ב-2 ללא שארית לכל n טבעי.

7) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי n^3+5n מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.

8) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 3^n-2n-1 מתחלק ב-4 ללא שארית לכל n טבעי.

9) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $9\left(9^n-1\right)-40n$ מתחלק ב-32 ללא שארית לכל n טבעי.

10) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^n+5^n-2^n\left(2^n+1\right)$ מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.

11) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 7^n+2^{2n} מתחלק ב-11 ללא שארית לכל n טבעי אי זוגי.

12) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי a^n-b^n מתחלק ב- $(a+b)$ ללא שארית לכל n טבעי זוגי.

13) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^{n+2}+1$ מותיר שארית 2 בחלוקתו ב- 3 לכל n טבעי.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

סדרות:

סיכום כללי:

תזכורת:

- סדרה היא אוסף מספרים: $a_1, a_2, ..., a_n$, כאשר n הוא מיקום האיבר בסדרה ו- a_n הוא ערך האיבר העומד במקום ה- n-י בסדרה.
    - סדרה כללית – סדרה שבה כל איבר מוגדר לפי מקומו בסדרה.
    - סכום n האיברים הראשונים בסדרה יסומן ב- S_n והוא מקיים: $S_n = a_1 + ... + a_n$.

- סדרה חשבונית – סדרת מספרים שבה ההפרש בין כל שני איברים סמוכים הוא גודל קבוע. נוסחת האיבר הכללי היא: $a_n = a_1 + d(n-1)$ כאשר d הפרש הסדרה.
    - סכום n האיברים הראשונים הוא: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n}{2}\left[2a_1 + d(n-1)\right]$.

- סדרה הנדסית – סדרת מספרים שבה המנה בין כל שני איברים סמוכים היא גודל קבוע. נוסחת האיבר הכללי היא: $a_n = a_1 q^{n-1}$ כאשר q היא מנת הסדרה.
    - סכום n האיברים הראשונים הוא: $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$.

שאלות:

14) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי
מתקיים: $1+2+3+4+...+n=\frac{n}{2}(n+1)$.

15) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי
מתקיים: $4+7+10+13+...+(3n+1)=\frac{n}{2}(3n+5)$.

16) נתונה סדרה שבה: $a_n=n(n+2)$.
הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $S_n=\frac{n}{6}(n+1)(2n+7)$.

17) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:
$$\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}.$$

18) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:
$$\frac{6}{1\cdot3\cdot5}+\frac{6}{3\cdot5\cdot7}+\cdots+\frac{6}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{2n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}.$$

19) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:
$$1\cdot1+2\cdot3+3\cdot9+...+n\cdot3^{n-1}=\frac{1}{4}\left[3^n(2n-1)+1\right].$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

עצרת:

סיכום כללי:

תזכורת – מושג העצרת:

עצרת מוגדרת להיות מכפלת האיברים עד לערך הנקוב: $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$.

מגדירים: $0!=1$ ותמיד מתקיימים השוויונות: $n!=n\cdot(n-1)!$, $(n+1)!=n!\cdot(n+1)$.

שאלות:

20) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

21) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1\cdot 2!}{2}+\frac{2\cdot 3!}{4}+\frac{3\cdot 4!}{8}+\ldots+\frac{n(n+1)!}{2^n}=\frac{(n+2)!}{2^n}-2$$

22) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$p!+\frac{(p+1)!}{1!}+\frac{(p+2)!}{2!}+\ldots+\frac{(p+n-1)!}{(n-1)!}=\frac{(p+n)!}{(n-1)!(p+1)}$$

23) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)\ldots\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{n!}$$

24) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{5}{1\cdot 4}-\frac{11}{4\cdot 7}+\frac{17}{7\cdot 10}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(6n-1)}{(3n-2)(3n+1)}=1+\frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

אינדוקציות עם רקורסיה

שאלות

1) נתון כי $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$.
הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים :
א. $a_n \le 2$
ב. $a_n \le a_{n+1}$
הערה : תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו מהי סדרה רקורסיביות.

2) הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי,
אם $a_1=-1,\ a_2=0$, $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$,
אז $a_n=n^2-2n$.
הערה : תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו מהי סדרה רקורסיבית.

3) הוכיחו באינדוקציה שלכל n טבעי,
אם $a_1=1,\ a_2=1$, $a_{n+1}=2a_n+3a_{n-1}$,
אז $a_n=\frac{1}{6}\cdot 3^n-\frac{1}{2}(-1)^n$.
הערה : תרגיל זה מיועד רק למי שלמדו מהי סדרה רקורסיביות.

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר GooL.co.il

שאלות שבהן האיבר הכללי מורכב ממספר מחוברים:

שאלות:

25) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1+2+3+4+...+2n=n(2n+1)$$

26) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$$

27) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1\cdot2^0+2\cdot2^1+3\cdot2^2+4\cdot2^3+...+3n\cdot2^{3n-1}=(3n-1)2^{3n}+1$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות העוסקות באינדוקציות עם איברים משתנים:

שאלות:

28) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:
$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+\ldots+(3n)=2n(2n+1)$$

29) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:
$$(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+\ldots+(2n)^2=\frac{n}{6}(2n+1)(7n+1)$$

30) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:
$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\left(1-\frac{1}{n+3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}$$

31) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:
$$(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n)=2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$$

32) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות העוסקות בהוכחת באי-שוויונים באינדוקציה:

שאלות:

33) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי הגדול מ-1 מתקיים:

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{n}{n+1}$$

34) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\le 2-\frac{1}{n}$$

35) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי הגדול מ-2 מתקיים:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{3}{5}$$

36) נתונה סדרה שבה: $a_n=n^n$. נגדיר: $T_n=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n$.

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $T_n\le n^{\frac{n}{2}(n+1)}$.

37) נתון אי-השוויון: $2^n>n^2$. מצא את ה-n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה-n שמצאת.

38) נתון אי-השוויון: $4^n>5n^2+1$. מצא את ה-n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה-n שמצאת.

39) נתון אי-השוויון: $n^3-n<5^{n-1}$. מצא את ה-n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה-n שמצאת.

40) נתון אי-השוויון: $3^n+4^n+5^n<6^n$. מצא את ה-n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה-n שמצאת.

41) נתון אי-השוויון : $n^n \geq n!$. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי.

42) נתון אי-השוויון : $a^n + b^n < (a+b)^n$, $(a,b>0)$.
הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי הגדול מ-1.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות כוללות ומסכמות:

שאלות:

43) נתון השוויון: $4+7+10+13+...=\frac{n}{2}(3n+5)$.

א. מצא את האיבר במקום ה-n.

ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

ג. חשב את הסכום: $37+40+43+...+85$.

44) נתון השוויון: $\frac{2}{3}+\frac{6}{9}+\frac{10}{27}+...=2-\frac{2n+2}{3^n}$. מצא את האיבר במקום ה-$n$.

45) נתון השוויון: $\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\cdots=\frac{n}{4n+1}$.

א. מצא את האיבר במקום ה-n.

ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

ג. חשב את הסכום: $\frac{1}{25\cdot29}+\frac{1}{29\cdot33}+\frac{1}{33\cdot37}+\cdots+\frac{1}{89\cdot93}$.

46) נתון השוויון: $(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+...+(2n)^2=\frac{n}{6}(2n+1)(7n+1)$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

ב. חשב באמצעות סעיף א' את הסכום: $26^2+27^2+28^2+...+48^2$.

47) נתון השוויון: $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

ב. הבע באמצעות n את הסכום: $4^2+6^2+8^2+\cdots+(4n)^2$.

48) נתונים השוויונים הבאים:

א. $3n+(3n+1)+(3n+2)+\cdots+4n=\frac{7}{3}(n^2+3n-1)$.

ב. $3n+(3n+1)+(3n+2)+\cdots+4n=n^2+11n-5$.

ג. $3n+(3n+1)+(3n+2)+\cdots+4n=\frac{7n}{2}(n+1)$.

קבע איזה מהשוויונים נכון לכל n טבעי, והוכח אותו באינדוקציה.

49) נתון השוויון: $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+...+(3n)=an(2n+b)$.

א. נתון כי השוויון נכון עבור $n=1$ ו-$n=2$. מצא את ערכי a ו-b.

ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

50) נתון אי-השוויון: $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{3}{5}$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי הגדול מ-2.

ב. הוכח באמצעות סעיף א' כי מתקיים: $\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\cdots+\frac{1}{18}>\frac{1}{2}$.

51) נתון אי-השוויון: $n^2<2^n$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי הגדול מ-4.

ב. הוכח באמצעות סעיף א' כי מתקיים: $5^2\cdot 6^2\cdot 7^2\cdot 8^2\cdot ...\cdot 20^2<2^{200}$.

52) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הסכום: $9+27+81+\cdots+3^{3n+1}$ מתחלק ב-117 ללא שארית לכל n טבעי.

53) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי n^3+5n מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.

ב. נתון כי $a+b$ מתחלק ב-6 ללא שארית.
הוכח כי a^3+b^3 מתחלק ב-6 ללא שארית.

54) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח את הטענה: אם ל-n טבעי מסוים 3^n+5^n מתחלק ב-16 ללא שארית אז גם $3^{n+2}+5^{n+2}$ מתחלק ב-16 ללא שארית.

ב. האם מהטענה בסעיף א' נובע כי 3^n+5^n מתחלק ב-16 ללא שארית עבור כל n טבעי אי-זוגי?

ג. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 3^n+5^n מתחלק ב-8 ללא שארית לכל n טבעי אי-זוגי.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

מושג הסכימה וכתיבה מקוצרת של אינדוקציות:

סיכום כללי:

סימון הסכימה (קרי: סיגמה) מוגדר באופן הבא: $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

מקור הסימון נובע מהמילה Sum ומשמעו הוא סכימה של איברים המתחילים בערך המצוין בתחתית הסימון $\left(\sum_{\boxed{k=1}}^{n}\right)$ עד לערך המצוין בחלקו העליון $\left(\sum_{k=1}^{\boxed{n}}\right)$.

דוגמאות:

- $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$.
- $\sum_{k=3}^{12} k^2 = 3^2 + 4^2 + \ldots + 12^2$.
- $\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{4n+1}$.

שאלות:

1) הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$.

2) הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

3) הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{n}{4n+1}$.

4) הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2\left(2^n - 1\right)$.

5) הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{4^{k-1}}=4-\frac{1}{4^{n-1}}$.

6) הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{3n}k=1\frac{1}{2}n(3n+1)$.

7) הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{3n}(4k-1)=3n(6n+1)$.

8) הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n}(n+k)=\frac{n}{2}(3n+1)$.

9) הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n}3^{n+k}=\frac{3^{n+1}(3^{n}-1)}{2}$.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

סדנת ריענון במתמטיקה - מעודכן

פרק 17 - הבינום של ניוטון

תוכן העניינים

1. כללי 189

הבינום של ניוטון:

סיכום כללי:

מושג העצרת:

מסמנים: $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot .....\cdot n$ כאשר n מספר טבעי.
מגדירים: $0!=1$.

המקדם הבינומי:

הביטוי $\binom{n}{k}$ נקרא המקדם הבינומי ומוגדר ע"י: $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ לכל n,k טבעיים כאשר $0\le k\le n$.

הבינום של ניוטון:

נוסחת הבינום של ניוטון ניתנת לכתיבה באופן הבא: $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

לכל n טבעי.

ניתן לחשב את האיבר העומד במקום ה- k ע"י: $T_k=\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^{k-1}$.

משולש פסקל:

משולש מספרים שבו כל מספר בשורה מסוימת שווה לסכום המספרים שבשורה שמעליו באופן המתואר:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\iddots & & & & & & \vdots & & & & & & \ddots
\end{array}$$

שאלות:

1) חשב, ללא מחשבון:

א. $\frac{4!\cdot 7!}{0!\cdot 10!}$.

ב. $\frac{14!\cdot 20!}{10!\cdot 17!}$.

2) הוכח את הזהויות הבאות:

א. $(n-2)!(n^2-n)=n!$

ב. $(n-1)!n^2+n!=(n+1)!$

ג. $\frac{(n+2)^2}{(n+2)!}+\frac{n^2-2}{(n+1)!}=\frac{1}{(n-1)!}$

3) חשב:

א. $\binom{5}{3}$ ב. $\binom{4}{1}$ ג. $\binom{10}{0}$ ד. $\binom{14}{11}$

4) הוכח את הזהויות הבאות:

א. $\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=1$.

ב. $\binom{n-1}{k-1}=\frac{k}{n}\binom{n}{k}$.

ג. $\binom{n+1}{k+1}=\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$.

5) הוכח באינדוקציה שלכל $n\geq 2$ טבעי מתקיים: $\binom{n}{2}=\binom{n-1}{n-2}+\ldots+\binom{3}{2}+\binom{2}{1}+\binom{1}{0}$.

6) רשום את פיתוח הבינום בכל אחד מהסעיפים הבאים:

א. $(a+b)^4$ ב. $(x+2)^5$ ג. $(x-4)^3$

7) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$ לכל $0\le k\le n$, $k,n\in\mathbb{N}$.

ב. נסח והוכח (באינדוקציה) את נוסחת הבינום.

8) הוכח שלכל $n\ge 1$ טבעי מתקיים:

א. $2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}$.

ב. $0=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}$.

ג. $4^n=\binom{n}{0}+3\binom{n}{1}+9\binom{n}{2}-\ldots+3^n\binom{n}{n}$.

9) מצא את האיבר הרביעי בפיתוח הבינום $\left(\frac{1}{2a}+2a^2\right)^{10}$.

10) בפיתוח של $\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt{a}\right)^{12}$, ישנו איבר שאחד מגורמיו הוא a^7.
מצא את מקום האיבר ואת ערכו.

11) מצא, בפיתוח של $\left(\frac{1}{x^2}+\sqrt{x}\right)^{10}$, איבר שאינו מכיל את x, וחשב את ערכו.

12) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא, בפיתוח של $\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{a}+\frac{b}{\sqrt[4]{x}}\right)^{18}$, את המקדם של $\frac{1}{x}$.

ב. חשב את סכום כל המקדמים בפיתוח, אם $a=b=1$.

13) המקדם של האיבר השלישי בפיתוח הבינום $(a+b)^n$, הוא 15.
מצא את n.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{1}{30}$ ב. $\frac{1001}{285}$.

2) הוכחה.

3) א. 10 ב. 4 ג. 1 ד. 364.

4) הוכחה.

5) הוכחה.

6) א. $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

ב. $(x+2)^5 = x^5+10x^4+40x^3+80x^2+80x+32$.

ג. $(x-4)^3 = x^3-12x^2+48x-64$.

7) הוכחה.

8) הוכחה.

9) $T_4 = \frac{15}{2a}$.

10) $T_7 = 924a^7$.

11) $T_9 = 45$.

12) א. $\frac{18564\cdot b^{12}}{a^6}$ ב. 2^{18}.

13) $n=6$.

סדנת ריענון במתמטיקה - מעודכן

פרק 18 - גיאומטריה אנליטית - נקודה וישר

תוכן העניינים

1. מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית 193
2. משוואת הישר 197
3. מצבים הדדיים בין ישרים 202
4. מציאת משוואות ישר 204
5. שאלות יסודיות שונות עם משוואת הישר 205
6. נושאים מתקדמים עם משוואת הישר .... (ללא ספר)
7. חלוקת קטע ביחס נתון 211
8. מרחק נקודה מישר 212
9. מיקום נקודה ביחס לישר 214
10. מרחק בין ישרים מקבילים 216

מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית:

סיכום כללי:

נוסחאות כלליות:

- המרחק בין הנקודות $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$ יחושב לפי: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.
- אמצע הקטע M שקצותיו הם: $A(x_1,y_1)$ ו-$B(x_2,y_2)$ הוא: $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}, y_M=\frac{y_1+y_2}{2}$.

שאלות:

שאלות העוסקות באמצע קטע:

1) מצא את אמצעי הקטעים שקדקודיהם נתונים ע"י הנקודות A ו-B:

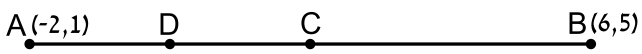
א. $A(1,4)\ ,\ B(5,-8)$
ב. $A(-3,0)\ ,\ B(3,-2)$
ג. $A(4,5)\ ,\ B(-4,-5)$
ד. $A\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)\ ,\ B\left(7\frac{1}{2},-2\right)$
ה. $A(6,-1)\ ,\ B(-3,-1)$
ו. $A(4,7)\ ,\ B(4,-12)$

2) נתון קטע AB שאמצעו בנקודה M.
מצא את שיעורי נקודת הקצה B אם נתונים שיעורי הנקודות של A ושל M:

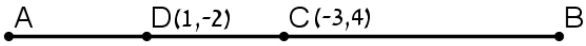
א. $A(4,-2)\ ,\ M(2,1)$
ב. $A(-6,-8)\ ,\ M(0,0)$
ג. $A(13,-11)\ ,\ M(4,-7)$
ד. $A\left(\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)\ ,\ M\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$

3) נתון משולש שווה שוקיים ABC שבו A הוא קדקוד הראש.
ידוע כי שיעורי הקדקודים B ו-C הם $B(2,-4)\ ,\ C(6,1)$.
מעבירים תיכון AD לבסיס BC. מצא את שיעורי הנקודה D.

4) באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.
ידוע כי: $A(-2,1)\ ,\ B(6,5)$. מצא את שיעורי הנקודה D.



5) באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.
ידוע כי: $D(1,-2)$, $C(-3,4)$. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.



6) הנקודות $B(-10,4)$, $A(2,-7)$ ו-$C(6,11)$ הן שלושה קדקודים של מקבילית ABCD.
מצא את שיעורי הקדקוד הרביעי, D.

שאלות העוסקות במרחק בין שתי נקודות:

7) מצא את המרחק בין זוגות הנקודות הבאות:

א. $A(4,7)$, $B(-3,7)$ ב. $A(6,2)$, $B(1,2)$

ג. $A(-3,10)$, $B(0,6)$ ד. $A(6,-9)$, $B(1,3)$

ה. $A(4,7)$, $B(13,-1)$ ו. $A(6,6)$, $B(-9,-9)$

8) חשב את היקף המשולש ABC שקודקודיו הם: $A(3,-2)$, $B(4,9)$, $C(0,14)$.

9) נתונות נקודות $B(6,y)$, $A(14,4)$ שמרחקן הוא 10 יחידות אורך.
מצא את y.

10) נתונות נקודות $B(15,-2)$, $A(x,-12)$ שמרחקן הוא 26 יחידות אורך.
מצא את x.

11) נתונה נקודה B ברביע השלישי, ששיעור ה-y שלה גדול פי 3 משיעור ה-x שלה ומרחקה מהנקודה $A(-4,1)$ הוא 5. מצא את שיעורי הנקודה B.

12) במשולש שווה שוקיים ABC $(AB=AC)$ ידוע כי אורכי השוקיים הוא $\sqrt{45}$ יחידות אורך. שיעורי הקדקוד A הם $(0,4)$ ושיעורי ה-y של הקדקודים B ו-C הוא 2-. מצא את קדקודי המשולש B ו-C (הנח B ברביע הרביעי).

13) אורך האלכסון AC במלבן ABCD הוא $d_{AC}=\sqrt{50}$
וידוע כי: $B(-4,1)$, $A(-3,-2)$. מצא את היקף המלבן.

שאלות העוסקות בשיפוע בין שתי נקודות:

14) מצא את השיפוע בין זוגות הנקודות הבאים:

א. $A(5,2)$, $B(4,1)$
ב. $A(3,-2)$, $B(-3,1)$
ג. $A(7,8)$, $B(6,15)$
ד. $A(0,5)$, $B(7,0)$
ה. $A(6,9)$, $B(6,-7)$
ו. $A(4,-1)$, $B(18,-1)$

15) מצא את שיפועי הישרים שצלעות המשולש שקודקודיו
הם: $A(6,5)$, $B(2,13)$, $C(4,-7)$ מונחים עליהם.

תשובות סופיות:

1) א. $(3,-2)$ ב. $(0,-1)$ ג. $(0,0)$
ד. $\left(4,-\frac{5}{8}\right)$ ה. $(1.5,-1)$ ו. $(4,-2.5)$.

2) א. $B(0,4)$ ב. $B(6,8)$ ג. $B(-5,-3)$ ד. $B\left(1,\frac{2}{3}\right)$.

3) $D(4,-1.5)$.

4) $D(0,2)$.

5) $A(5,-8)$, $B(-11,16)$.

6) $D(18,0)$.

7) א. $d_{AB}=7$ ב. $d_{AB}=5$ ג. $d_{AB}=5$ ד. $d_{AB}=13$
ה. $d_{AB}=\sqrt{145}$ ו. $d_{AB}=15\sqrt{2}$.

8) $P_{ABC}\approx$ 33.862 יחידות אורך.

9) $y=10$ או $y=-2$.

10) $x=-9$ או $x=39$.

11) $B(-1,-3)$.

12) $C(-3,-2)$, $B(3,-2)$.

13) $P_{ABCD}=6\sqrt{10}\approx$ 18.97 יחידות אורך.

14) א. $m_{AB}=1$ ב. $m_{AB}=-\frac{1}{2}$ ג. $m_{AB}=-7$ ד. $m_{AB}=-\frac{5}{7}$
ה. שיפוע לא מוגדר. ו. $m_{AB}=0$.

15) $m_{AC}=6$, $m_{BC}=-10$, $m_{AB}=-2$.

משוואת הישר:

סיכום כללי:

נוסחאות כלליות:

- שיפוע ישר בין שתי נקודות $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$ הוא: $m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$.

שיפועים של ישרים:

- שיפועי ישרים מאונכים מקיימים: $m_1\cdot m_2=-1$.
- הקשר בין שיפוע ישר לזווית שהוא יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x : $m=\tan\alpha$.

משוואת הישר:

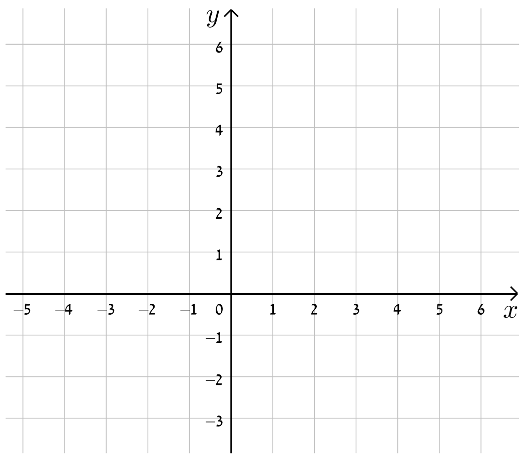
- משוואת ישר מפורשת היא מהצורה: $y=mx+n$.
- כאשר: m הוא שיפוע הישר ו- n הוא ערך ה- y של נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y.

נוסחה למציאת משוואת ישר: $y-y_1=m(x-x_1)$.

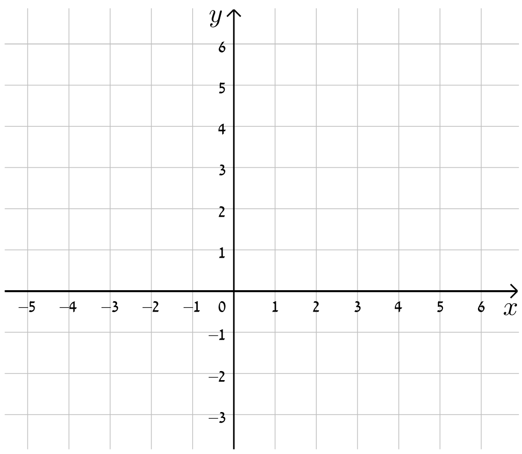
שאלות:

16) עבור כל אחד ממשוואות הישרים הבאות, מצא את נקודות החיתוך עם הצירים וסרטט את הישרים במערכת הצירים שלפניך.

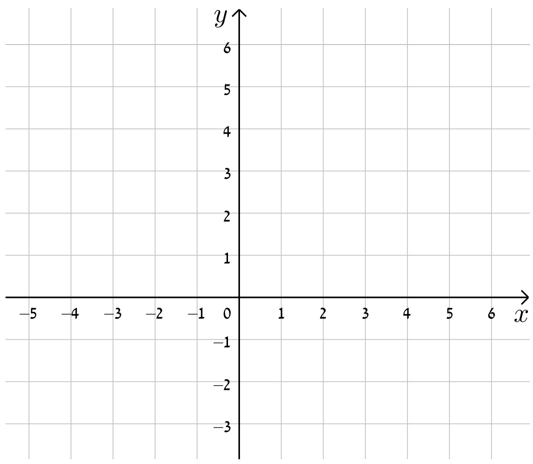
א. $y=x+4$



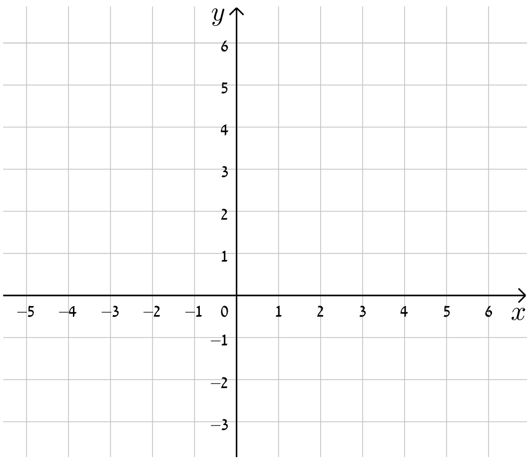
ב. $y=-x+5$



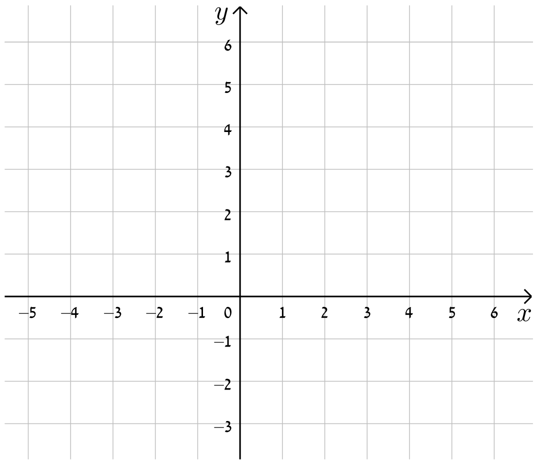
ג. $y=2x-3$



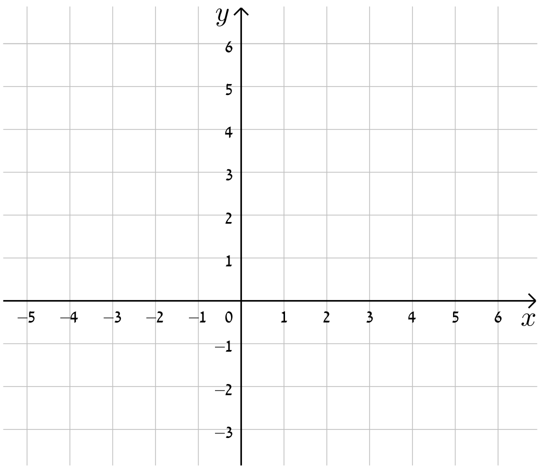
ד. $y=-3x+5$



ה. $y=3x-1$

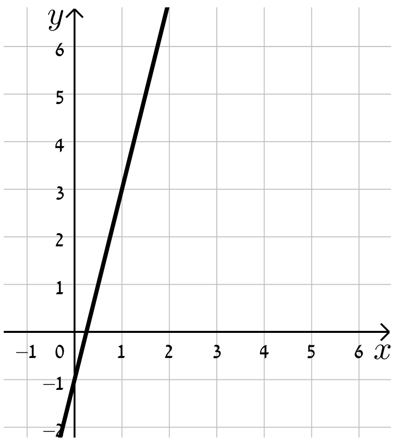


ו. $y=8-4x$

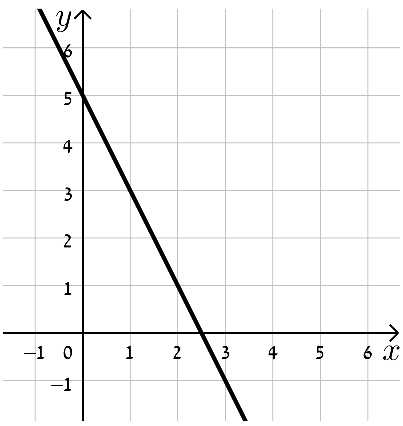


17) כתוב את משוואת הישר המתאימה לכל אחד מהישרים הבאים:

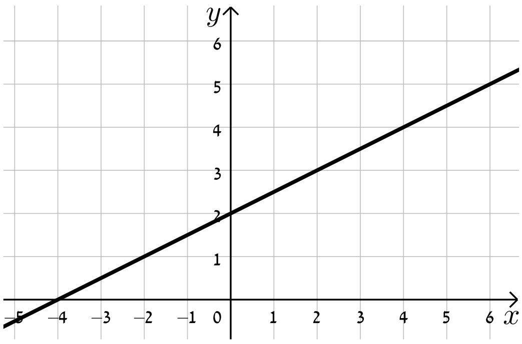
א.



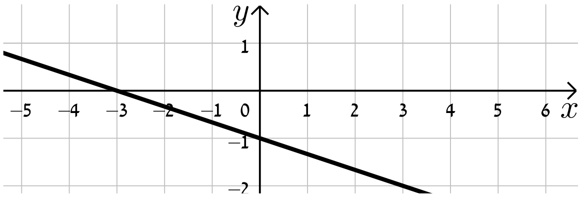
ב.



ג.



ד.



18) התאם בין משוואות הישרים הבאים לישרים בשרטוט:

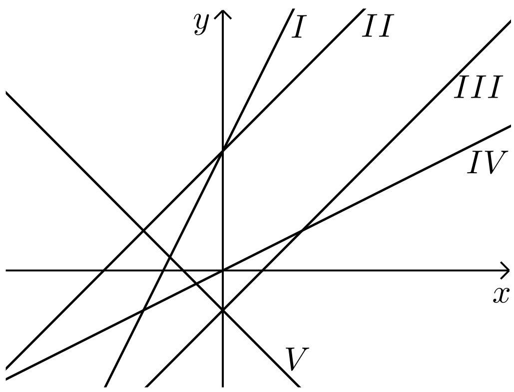
א. $y = x + 3$

ב. $y = -x - 1$

ג. $y = 2x + 3$

ד. $y = x - 1$

ה. $y = \frac{1}{2}x$



19) נתונה משוואת הישר הבאה: $y = 2x + 3$. קבע אלו מבין הנקודות הבאות נמצאות עליו: $D(6,15)$, $C(0,4)$, $B(3,3)$, $A(-1,1)$.

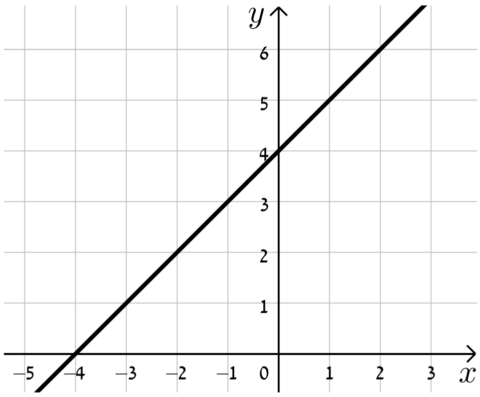
20) נתונה משוואת הישר הבאה: $y = mx - 2.5$. ידוע כי הנקודה $A(4,2)$ נמצאת על הישר. מצא את m וקבע האם גם הנקודה $B(7,-2)$ נמצאת עליו.

21) הנקודות $B(4,1)$, $A(5,-3)$ נמצאות על ישר שמשוואתו היא: $y = mx + n$.
מצא את m ואת n.

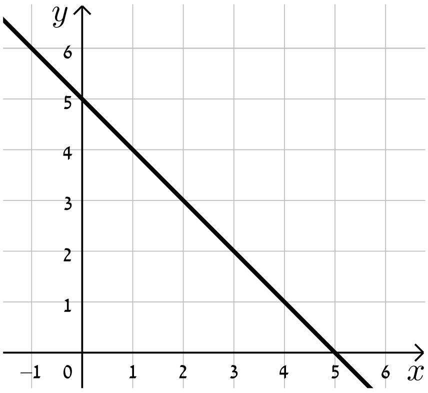
תשובות סופיות:

16) להלן הגרפים של משוואות הישרים:

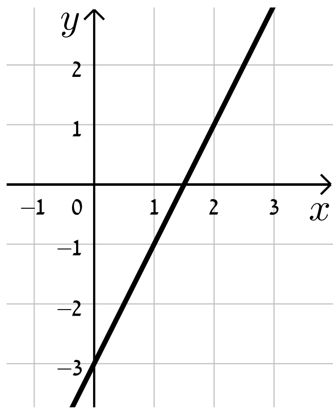
א.



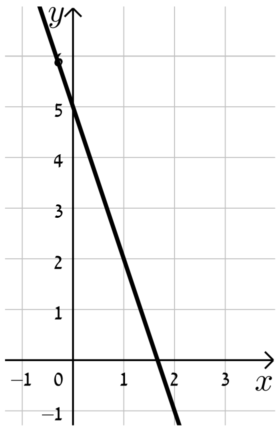
ב.



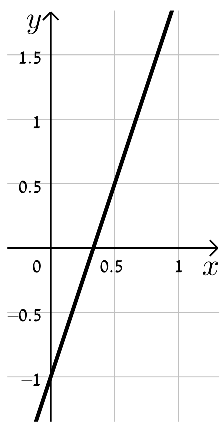
ג.



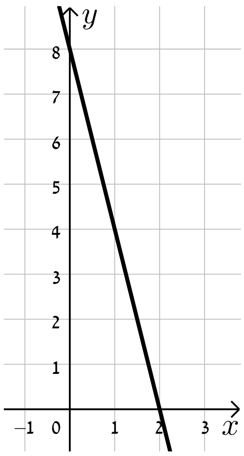
ד.



ה.



ו.



17) א. $y=4x-1$ ב. $y=-2x+5$ ג. $y=\frac{1}{2}x+2$ ד. $y=-\frac{1}{3}x-1$.

18) א. II. ב. V. ג. I. ד. III. ה. IV.

19) נמצאות: A, D. לא נמצאות: B, C.

20) $m=\frac{9}{8}$, B לא נמצאת.

21) $n=17$, $m=-4$.

מצבים הדדיים בין ישרים:

סיכום כללי:

מצב הדדי בין שני ישרים:

- ישרים מקבילים מקיימים: $m_1 = m_2$, $n_1 \neq n_2$.
- ישרים חותכים מקיימים: $m_1 \neq m_2$.
- ישרים מתלכדים מקיימים: $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2$.

שאלות:

22) מצא את נקודות החיתוך שבין זוגות הישרים הבאים:

א. $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y = x - 12 \\ y = 4x + 6 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = x + 6 \end{cases}$

23) קבע את המצב ההדדי בין זוגות הישרים הבאים:

א. $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y = x - 7 \\ y = x + 6 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} y = 6x - 15 \\ y = 3x + 41 \end{cases}$ ד. $\begin{cases} y = x + 8 \\ y = x + 8 \end{cases}$

24) קבע אלו מבין זוגות הישרים הבאים הם מאונכים זה לזה:

א. $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} y = -4x - 5 \\ y = \frac{1}{4}x + 5 \end{cases}$ ד. $\begin{cases} y = x - 6 \\ y = -x + 6 \end{cases}$

25) משוואת הצלע AB של המלבן ABCD היא $y=6x-2$.

א. מה הם שיפועי הצלעות האחרות של המלבן?

ב. כיצד תשתנה תשובתך לסעיף הקודם אם משוואת הישר הנ"ל הייתה שייכת לצלע BC במקום AB?

26) במשולש ABC נתונים שיעורי הקודקודים: $A(5,-1)$, $B(3,7)$, $C(-5,5)$.
הוכח שהמשולש ישר זווית ושווה שוקיים.

תשובות סופיות:

22) א. $(-1,1)$ ב. $(-6,-18)$ ג. $(10,16)$.

23) א. נחתכים. ב. מקבילים. ג. נחתכים. ד. מתלכדים.

24) מאונכים: ג', ד'. לא מאונכים: א', ב'.

25) א. $m_{AB}=m_{CD}=6$, $m_{BC}=m_{AD}=-\frac{1}{6}$.

ב. הכל הפוך: $m_{BC}=m_{AD}=6$, $m_{AB}=m_{CD}=-\frac{1}{6}$.

26) שאלת הוכחה.

מציאת משוואות ישר:

שאלות:

27) מצא את משוואות הישרים הבאים:

א. ישר העובר דרך הנקודה $A(1,3)$ ושיפועו $m=2$.

ב. ישר העובר דרך הנקודה $A(0,-4)$ ושיפועו $m=\frac{1}{3}$.

ג. ישר העובר דרך הנקודה $A(5,9)$ ושיפועו $m=0$.

ד. ישר העובר דרך הנקודות $A(5,-12)$ ו- $B(6,-6)$.

ה. ישר העובר דרך הנקודה $A(-6,4)$ ומקביל לישר: $y=2x-3$.

ו. ישר העובר דרך הנקודה $A(3,-5)$ ומקביל לציר ה- y.

ז. ישר העובר דרך הנקודה $A(-7,-3)$ ומאונך לישר: $y=x+3$.

ח. ישר העובר דרך נקודת החיתוך של הישרים: $y=11x-4$ ו- $y=3x-12$ ומקביל לישר: $y=7x+5$.

תשובות סופיות:

27) א. $y=2x+1$ ב. $y=\frac{1}{3}x-4$ ג. $y=9$ ד. $y=6x-42$

ה. $y=2x+16$ ו. $x=3$ ז. $y=-x-10$ ח. $y=7x-8$.

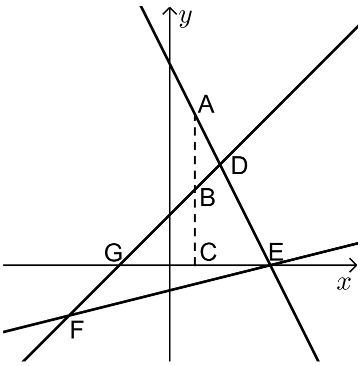
שאלות יסודיות שונות עם משוואת הישר:

שאלות:

28) במשולש ABC מעבירים את התיכון AD לצלע BC.
ידוע כי: $\mathrm{A}(3,-2)$, $\mathrm{B}(2,4)$, $\mathrm{D}(-2,2)$.
א. כתוב את משוואת הישר של התיכון AD.
ב. מצא את שיעורי הקדקוד C.
ג. כתוב את משוואת הישר של הצלע AC.

29) נתון מעוין ABCD שבו נתונים הקודקודים $\mathrm{A}(-9,1)$ ו- $\mathrm{B}(5,-7)$.
משוואת הישר עליו מונח האלכסון AC היא $x+3y+6=0$.
א. מצא את משוואת הישר עליו מונח האלכסון BD.
ב. מצא את משוואת הישר עליו מונחת הצלע BC.

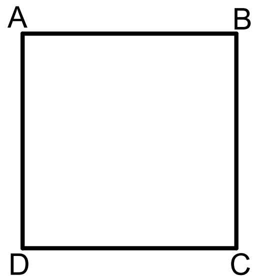
30) שלוש המשוואות הבאות מייצגות את הישרים המופיעים בשרטוט: $x-4y-4=0$, $x-y+2=0$ ו- $2x+y-8=0$.
הקטע AC מקביל לציר ה- y .
א. חשב את שטח המשולש DEF.
ב. נתון: $d_{\mathrm{BC}}=3$.
חשב את אורך הקטע AB.



31) BD הוא התיכון לצלע AC במשולש ABC שבו נתון הקודקוד $\mathrm{A}(-6,1)$.
משוואת התיכון BD היא $x-y=1$ ומשוואת הצלע BC היא $3x+5y=67$.
מצא את שיעורי הקדקוד C.

32) נתון טרפז ABCD $(\mathrm{AB}\,||\,\mathrm{CD})$ ובו משוואת השוק BC היא: $x=2$.
משוואת הבסיס CD היא $2x+3y=7$ וידוע כי $\mathrm{A}(-4,1)$.
א. מצא את משוואת הבסיס AB.
ב. מצא את שיעורי הקדקודים B ו-C.
ג. מעבירים את האלכסון AC.
הראה כי המשולש ABC הוא ישר זווית ומצא את שטחו.

33) במרובע ABCD ידוע כי שיפוע הצלע BC הוא 3 ושיעורי הנקודה A הם: $(1,4)$.



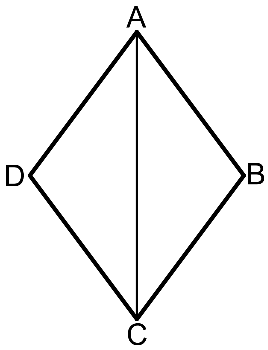
א. איזה מרובע הוא המרובע ABCD? הראה חישוב מתאים.

ב. נתון גם: $D(4,13)$, $m_{CD}=-\frac{1}{3}$ ו- $\sqrt{90}$ ס"מ $=BC$.
איזה מרובע הוא המרובע ABCD כעת? הראה חישוב מתאים.

ג. נתון גם: $B(-8,7)$.
איזה מרובע הוא המרובע ABCD כעת? הראה חישוב מתאים.

ד. חשב את שטח המרובע ABCD.

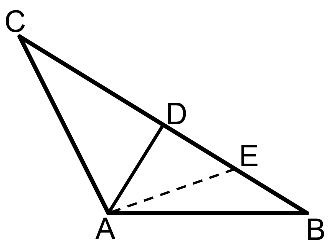
34) המרובע ABCD הוא מעוין.
ידוע כי שיעורי אחת הנקודות במעוין הם: $(0,6)$.
כמו כן, ידוע גם כי משוואת האלכסון AC היא: $y=-1.5x+6$ ואחת ממשוואות הצלעות היא: $5y+x=4$.



א. מצא את משוואת האלכסון השני.

ב. מצא את שאר קדקודי המעוין

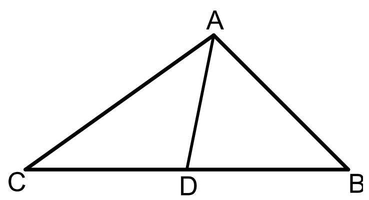
35) המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים $(AB=AC)$.
ב- ΔABC מעבירים את הגובה AD לבסיס BC ומסמנים נקודה E כך שמתקיים: $DE=BE$.
קדקוד הראש A נמצא בראשית הצירים ונתון כי: $E(8.5,2.5)$, $D(5,7)$.



א. מצא את שיעורי שאר קודקודי המשולש.

ב. כתוב את משוואת השוק AC.

36) נתון משולש ABC. הנקודה D נמצאת על הצלע BC של המשולש ABC כך שהקטע AD מחלק אותו לשני משולשים שווי שטח ABD ו-ACD.
הצלע BC מונחת על הישר: $y=4$ וידוע כי שיעור ה- x של הנקודה C הוא: $x_C=-1$.
כמו כן נתון: $A(7,8)$, $m_{AB}=-2$.



א. מצא את משוואת הצלע AB.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. איזה קטע הוא AD בתוך המשולש ABC?

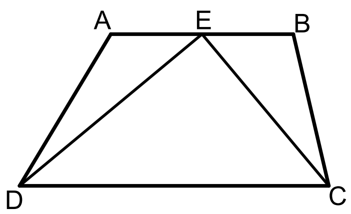
ii. מצא את שיעורי הנקודות B ו-D.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. חשב את אורך הצלע BC ואת אורך הקטע AD.

ii. איזה משולש הוא המשולש ABC?

37) המרובע ABCD הוא טרפז. הנקודה E היא אמצע הבסיס AB וידוע כי היא נמצאת על ציר ה-x.
שיעורי הנקודה B הם $(3,2)$ והצלע AD מונחת על הישר: $x=-5$. אורך הקטע DE הוא $\sqrt{80}$ כך ש-D ברביע השלישי וכן: $\sphericalangle DEC = 90°$.



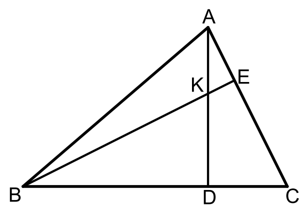
א. מצא את שיעורי הנקודות A , D ו-E.

ב. מצא את משוואת הקטע CE ואת משוואת הבסיס CD.

ג. מצא את שיעורי הנקודה C.

ד. חשב את שטח המשולש DEC.

38) AD ו-BE הם בהתאמה גבהים לצלעות BC ו-AC במשולש ABC.
ידוע כי שיעורי נקודת פגישת הגבהים K הם: $(1,3)$.
שיעורי הנקודות D ו-E הם: $E(3,5)$, $D(-2,4)$.



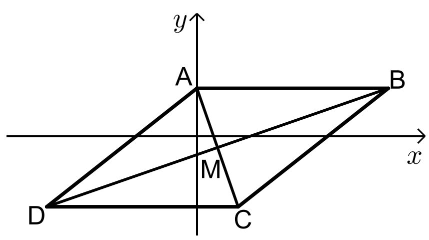
א. מצא את משוואת הגובה AD ואת משוואת הצלע AC.

ב. מצא את שיעורי הקדקוד A.

ג. מצא את משוואת הגובה BE ואת משוואת הצלע BC.

ד. מצא את שיעורי הקדקוד B.

39) נתון מעוין ABCD. ידוע כי הצלע CD מונחת על $y=-7$.
אלכסוני המעוין AC ו-BD נפגשים בנקודה: $M(-0.5,-3)$. שיפוע האלכסון AC הוא 4-.

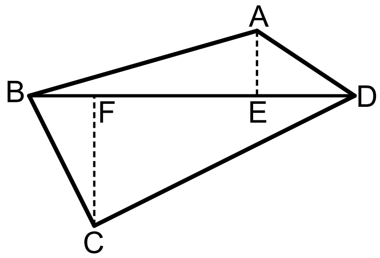


א. מצא את משוואת האלכסון AC.

ב. מצא את שיעורי הנקודה C.

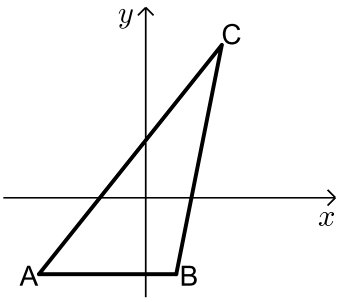
ג. חשב את שטח המשולש BMC.

40) נתון מרובע ABCD שקודקודיו הם: $D(8,14)$, $C(9,3)$, $B(-2,4)$, $A(3,13)$.
מורידים גבהים AE ו-CF לאלכסון BD.



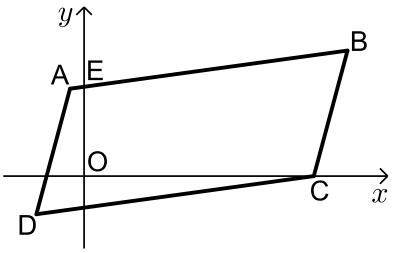
א. מצא את משוואת האלכסון BD ואת אורכו.
ב. מצא את שיעורי הנקודות E ו-F.
ג. מצא את אורכי הגבהים AE ו-CF.
ד. חשב את שטח המרובע ABCD.

41) על הישר $y=-5$ מסמנים את הנקודות: $B(2,-5)$, $A(-7,-5)$.
הנקודה C נמצאת על הישר: $y=x-5$.
נסמן את שיעור ה-x של הנקודה C ב-t.



א. הבע באמצעות t את שיעור ה-y של הנקודה C.
ב. ידוע כי אורך הצלע AC הוא 17 ס"מ.
הבע באמצעות t את המרחקים של C מ-A ומ-B.
ג. מצא את t ואת אורך הצלע BC.
ד. מסמנים נקודה D על המשך הצלע AB.
ידוע כי D נמצאת ברביע השלישי.
מצא את שיעורי הנקודה D המקיימת ששטח המשולש DAC יהיה גדול ב-16 יחידות משטח המשולש ABC.

42) המשולש ABC הוא שווה שוקיים $(AB=BC)$
ובו נתון: $A(-4,12)$, $B(x,6)$ ו-$C(4,8)$.
א. מצא את x.
ב. הוכח כי המשולש הוא ישר זווית.
ג. ענה על הסעיפים הבאים:
i. מצא את משוואת הצלע AC.
ii. מסמנים את נקודת החיתוך של הצלע AC עם ציר ה-y ב-D.
מצא את שיעורי הנקודה D.
ד. ענה על הסעיפים הבאים:
i. מצא נקודה E ברביע הראשון $(x_E<5)$ כך שהמשולש DCE יהיה גם שווה שוקיים וישר זווית $(\sphericalangle C=90^\circ)$.
ii. חשב את יחס השטחים בין המשולשים: $\frac{S_{DCE}}{S_{ABC}}$.



43) באיור שלפניך נתונה מקבילית ABCD.
ידועים קודקודי המקבילית הבאים: $A(-1,y)$
ו- $B(x,4)$. (x ו- y נעלמים).
שיפוע הצלע CD הוא 0.2 ואורכה הוא: $d_{CD}=\sqrt{104}$.

א. מצא את x ו- y אם ידוע כי B ברביע הראשון.

ב. נתון גם כי הקדקוד C נמצא על ציר ה- x בחלקו החיובי וכי: $d_{BC}=\sqrt{17}$. מצא את שיעורי הקדקוד C (מצא שתי אפשרויות).

ג. סמן את נקודת החיתוך של הצלע AB עם ציר ה- y ב-E.
שטח המרובע EOCB הוא 25.9 יח"ש. מצא את האפשרות הנכונה עבור הנקודה C מבין אלו שמצאת בסעיף הקודם.

תשובות סופיות:

28) א. $y=-\frac{4}{5}x+\frac{2}{5}$ ב. $C(-6,0)$ ג. $y=-\frac{2}{9}x-\frac{4}{3}$.

29) א. $l_{BD}: y=3x-22$. ב. $l_{BC}: y=-\frac{1}{8}x-6\frac{3}{8}$.

30) א. 18 יח"ש $= S_{EDF}$. ב. 3 יחידות אורך $= AB$.

31) $C(14,5)$.

32) א. $y=-\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$ ב. $B(2,-3)$, $C(2,1)$ ג. 12 יחידות שטח $= S_{ABC}$.

33) א. מרובע כללי כלשהו. לא ניתן להצביע על אף תכונה.
ב. מלבן. ניתן להראות כי יש למרובע שני זוגות צלעות נגדיות מקבילות ושוות וזווית ישרה.
ג. ריבוע. ניתן להראות כי קיימות זוג צלעות סמוכות שווה. ד. 90 יח"ש $= S$.

34) א. $y=\frac{2}{3}x+1\frac{2}{3}$ ב. $(-1,1)$, $(4,0)$, $(5,5)$.

35) א. $B(12,-2)$, $C(-2,16)$ ב. $y=-8x$.

36) א. $y=-2x+22$ ב. i. תיכון - קטע במשולש שחוצה אותו לשני משולשים שווי שטח הוא תיכון.
ב. ii. $B(9,4)$, $D(4,4)$.
ג. ii. $AD=5$, $BC=10$. ג. ii. משולש ישר זווית - אם במשולש יש תיכון לצלע ששווה למחציתה אז המשולש הוא ישר זווית.

37) א. $D(-5,-8)$, $A(-5,-2)$, $E(-1,0)$. ב. $CE: y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$, $CD: y=\frac{1}{2}x-5\frac{1}{2}$
ג. $C(5,-3)$. ד. 30 יח"ש $= S_{DEC}$.

38) א. $AC: y=-x+8$, $AD: y=-\frac{1}{3}x+3\frac{1}{3}$. ב. $A(7,1)$.
ג. $BC: y=3x+10$, $BE: y=x+2$. ד. $B(-4,-2)$.

39) א. $y=-4x-5$ ב. $C(0.5,-7)$ ג. 34 סמ"ר $= S_{BMC}=S_{DMC}$.

40) א. $d_{BD}=\sqrt{200}$, $y=x+6$ ב. $E(5,11)$, $F(3,9)$
ג. $d_{CF}=\sqrt{72}$, $d_{AE}=\sqrt{8}$ ד. $S_{ABCD}=80$.

41) א. $C(t,t-5)$. ב. i. $AC=\sqrt{2t^2+14t+49}$, $BC=\sqrt{2t^2-4t+4}$
ii. $t=8$, 10 ס"מ $= BC$ ג. $D(-20,-5)$.

42) א. $x=-2$ ג. i. $y=-0.5x+10$ ii. $D(0,10)$ ד. i. $E(2,4)$
ii. $\frac{S_{DCE}}{S_{ABC}}=\frac{1}{2}$.

43) א. $x=9$, $y=2$ ב. $C(8,0)$, $C(10,0)$ ג. $C(8,0)$.

חלוקת קטע ביחס נתון:

סיכום כללי:

- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $\mathrm{A}(x_1,y_1)$ ו- $\mathrm{B}(x_2,y_2)$ ביחס של $k:l$ הם: $y_{\mathrm{P}}=\frac{k\cdot y_1+l\cdot y_2}{k+l}$, $x_{\mathrm{P}}=\frac{k\cdot x_1+l\cdot x_2}{k+l}$ (בהצלבה).

שאלות:

1) הנקודה P נמצאת על הקטע AB. נתון: $\mathrm{B}(-12,16)$, $\mathrm{A}(2,-5)$.
מצא את ערכי הנקודה P, אם נתון כי: $\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}=\frac{2}{5}$.

2) קודקודי משולש ABC הם: $\mathrm{C}(4,-12)$, $\mathrm{B}(6,0)$, $\mathrm{A}(-1,3)$.
מצא את שיעורי מרכז הכובד של המשולש.
(מרכז כובד של משולש הוא מפגש תיכוני המשולש).

3) מצא את שיעורי מרכז הכובד של משולש ABC
שקודקודיו הם: $\mathrm{C}(x_3,y_3)$, $\mathrm{B}(x_2,y_2)$, $\mathrm{A}(x_1,y_1)$.

4) קודקודי המשולש ABC הם: $\mathrm{C}(-1,4)$, $\mathrm{B}(7,-3)$, $\mathrm{A}(5,1)$.
מצא את אורכו של חוצה הזווית היוצא מקודקוד A.

תשובות סופיות:

1) $\mathrm{P}(-2,1)$

2) $\mathrm{M}(3,-3)$

3) $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

4) 1.697 יחידות אורך.

מרחק נקודה מישר:

סיכום כללי:

הצגה כללית של ישר ומרחקים:

- הצגה כללית של ישר (צורה סתומה): $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$.
- מרחק הנקודה $\mathrm{A}(x_1,y_1)$ מהישר $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$ הוא: $d=\left|\frac{\mathrm{A}x_1+\mathrm{B}y_1+\mathrm{C}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}\right|$.

  כאשר $\mathrm{B}>0$:
  - אם הנקודה מעל הישר מורידים את הערך המוחלט.
  - אם הנקודה מתחת לישר מורידים את הערך המוחלט ומוסיפים מינוס לאחד האגפים.

שאלות:

5) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את מרחק הנקודה $(-2,4)$ מהישר $4x+3y+11=0$.

ב. מצא את מרחק הנקודה $(4,3)$ מהישר $y=3x-1$.

ג. מצא את מרחק הנקודה $(3,-11)$ מהישר $x-5=0$.

6) מצא את המרחק בין הנקודה הנתונה לישר הנתון:

א. $3x-4y+6=0$, $\mathrm{A}(-5,-1)$

ב. $12x+5y-17=0$, $\mathrm{A}(-3,8)$

ג. $2y+7=0$, $\mathrm{A}(11,-2)$

ד. $3x-14=0$, $\mathrm{A}\left(6,-\frac{1}{2}\right)$

7) מצא את שיעורי הנקודות על הישר $x+y-7=0$ שמרחקן מהישר $2x-y+5=0$ הוא: $\sqrt{20}$.

8) מצא את שטחה של מקבילית ששיעורי קודקודיה הם: $\mathrm{D}(11,2)$, $\mathrm{C}(-1,7)$, $\mathrm{B}(-5,4)$, $\mathrm{A}(7,-1)$.

9) מצא את שטחו של המשולש ΔABC שבו שיעורי קדקוד A הם $A(5,-3)$ ושניים מתיכוני המשולש מונחים על הישרים $x-4=0$ ו- $2x-y-1=0$.

10) מצא את שטחו של משולש שקודקודיו הם: $C(-5,-2)$, $B(-1,1)$, $A(2,2)$.

11) מצא את שיעורי הנקודות על הישר $3x-2y+6=0$, שמרחקן מהישר: $2x-y-14=0$ הוא $3\sqrt{5}$.

12) מצא את שיעורי הנקודות על הישר $4x+3y-20=0$, שמרחקן מהישר: $3x+2y+13=0$ הוא $2\sqrt{13}$.

תשובות סופיות:

5) א. 3 ב. $\frac{8}{\sqrt{10}}$ ג. 2.

6) א. 1 ב. 1 ג. $1\frac{1}{2}$ ד. $1\frac{1}{3}$.

7) $\left(-2\frac{2}{3},9\frac{2}{3}\right)$, $(4,3)$

8) $S_{ABCD}=$ 56 יח"ש

9) $S_{ABC}=$ 18 יח"ש

10) $S_{ABC}=$ 2.5 יח"ש

11) $(64,99)$, $(4,9)$

12) $(-157,216)$, $(-1,8)$

מיקום נקודה ביחס לישר:

שאלות:

13) מצא את שיעורי הנקודה על הישר $3x-2y+6=0$, שמרחקה מהישר: $2x-y-14=0$ הוא $3\sqrt{5}$ והיא נמצאת מתחתיו.

14) מצא את שיעורי הנקודה על הישר $4x+3y-20=0$, שמרחקה מהישר: $3x+2y+13=0$ הוא $2\sqrt{13}$ והיא נמצאת מעליו.

15) נתון משולש ABC שבו נתונים הקודקודים: $B(13,6)$, $A(1,1)$.
הקדקוד C נמצא על הישר $2x-y-19=0$ ונמצא מתחת לצלע AB.
מצא את שיעורי הקדקוד C אם ידוע ששטח המשולש הוא 13.

16) נתון משולש שצלעותיו מונחות על הישרים:
$\mathrm{I}: x+2y+1=0$, $\mathrm{II}: x-2y-11=0$, $\mathrm{III}: 2x-y+6=0$
מצא שיעורי נקודה הנמצאת בתוך המשולש, שמרחקה מישר I שווה למרחקה מישר III ושמרחקה מישר II הוא מחצית מהמרחק משני ישרים אלה.

17) מצא את שיעורי מרכז המעגל, החסום במשולש, שצלעותיו מונחות על הישרים: $\mathrm{I}: 4x-3y+2=0$, $\mathrm{II}: 3x-4y-51=0$, $\mathrm{III}: 3x+4y-11=0$.

18) מצא משוואת ישר ששיפועו 3 אם ידוע שהנקודה $G(7,-3)$ נמצאת מתחתיו ובמרחק $2\sqrt{10}$ ממנו.

19) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(-2,6)$ ומרחקו מהנקודה $B(2,9)$ הוא $\sqrt{5}$.

20) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(9,10)$ ומרחקו מהנקודה $B(8,-3)$ הוא $5\sqrt{5}$.

21) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(3,6)$ ומרחקו מהנקודה $B(-9,2)$ הוא 4.

22) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(1,2)$ ומרחקו מהנקודה $B(-3,10)$ הוא 4.

23) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(10,8)$ ומרחקו מהנקודה $B(7,-1)$ הוא 3.

24) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(-6,1)$ ומרחקו מהנקודה $B(2,7)$ הוא 10.

תשובות סופיות:

13) $(64,99)$

14) $(-1,8)$

15) $C(11,3)$

16) $(-1,-4)$

17) $(2,-5)$

18) $y=3x-4$

19) $y=2x+10$, $y=\frac{2}{11}x+6\frac{4}{11}$

20) $y=\frac{1}{2}x+5\frac{1}{2}$, $y=-\frac{22}{31}x+16\frac{12}{31}$

21) $y=6$, $y=\frac{3}{4}x+3\frac{3}{4}$

22) $y=-\frac{3}{4}x+2\frac{3}{4}$ או $x=1$

23) $y=1\frac{1}{3}x-5\frac{1}{3}$ או $x=10$

24) $y=-\frac{4}{3}x-7$

מרחק בין ישרים מקבילים:

סיכום כללי:

- מרחק בין שני ישרים מקבילים: $Ax+By+C_1=0$ ו- $Ax+By+C_2=0$ כאשר: $B>0$
הוא: $d=\left|\frac{C_1-C_2}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$ ומתקיים בהעדר הערך המוחלט:
  - אם: $C_1>C_2$, $(d>0)$ אז הישר $Ax+By+C_1=0$ מתחת ל- $Ax+By+C_2=0$.
  - אם: $C_1<C_2$, $(d<0)$ אז הישר $Ax+By+C_1=0$ מעל ל- $Ax+By+C_2=0$.

שאלות:

25) מצא משוואת ישר, המקביל לישר $3x-4y+8=0$ ונמצא במרחק 4 ממנו.

26) מצא את המרחק בין הישרים המקבילים: $5x+12y-14=0$, $5x+12y+25=0$.

27) נתונים הישרים: $y=6x+5$, $12x-2y-15=0$.
הראה שהישרים מקבילים ומצא את המרחק ביניהם.

28) נתון המלבן ABCD. משוואותיהן של שתיים מצלעות המלבן הן $AB: 3x+y=0$
ו- $CD: 3x+y-6=0$. הקדקוד B נמצא בראשית הצירים. נתון כי הצלע AB
ארוכה פי 4 מהצלע BC. מצא את שטח המלבן ואת מפגש אלכסוני המלבן,
אם ידוע שהוא ברביע הרביעי.

29) צלע של ריבוע מונחת על הישר $3x-2y+5=0$.
אלכסוני הריבוע נפגשים בנקודה $B(1,-1)$.
מצא את משוואות הישרים עליהם מונחות הצלעות האחרות של הריבוע.

30) נתון ישר שעובר בראשית הצירים ושיפועו חיובי.
מצא את משוואת הישר אם נתון שהוא נמצא מעל הנקודות $P(4,1)$ ו- $Q(7,2)$
וסכום המרחקים ממנו לנקודות אלה הוא $3\sqrt{10}$.

31) במשולש BKP נתון כי הצלע BK מונחת על הישר $x-y+3=0$ והצלע BP מונחת על הישר $x+2y+3=0$. אורך הגובה לצלע BP הוא $3\sqrt{5}$ ואורך הגובה לצלע KP הוא 5. מצא את שיעורי קדקוד P אם ידוע שראשית הצירים נמצאת בתוך המשולש.

תשובות סופיות:

25) $3x-4y+28=0$, $3x-4y-12=0$

26) 3

27) $\frac{25}{\sqrt{148}}$

28) $S=$ 14.4 יח"ש , $(2.1,-3.3)$

29) $y=-\frac{2}{3}x+3$, $y=-\frac{2}{3}x-3\frac{2}{3}$, $3x-2y-15=0$

30) $y=3x$

31) $P\left(2,-2\frac{1}{2}\right)$

סדנת ריענון במתמטיקה - מעודכן

פרק 19 - גיאומטריה אנליטית - המעגל

תוכן העניינים

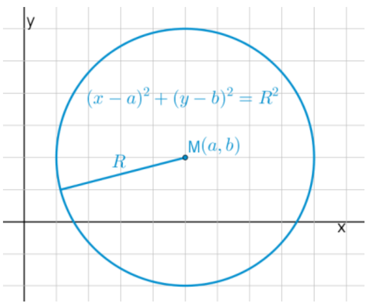
1. הכרות עם משוואת המעגל 218
2. מעגל המשיק לצירים 222
3. משיק למעגל 224
4. שאלות יסודיות שונות 225
5. נושאים מתקדמים במעגל .... (ללא ספר)
6. כתיבת משוואת מעגל עם השלמה לריבוע 232
7. משוואות המשיקים למעגל 233
8. מיתר המחבר שתי נקודות השקה 235
9. שאלות מסכמות שונות 236

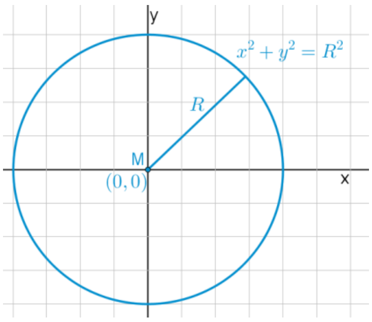
הכרות עם משוואת המעגל:

סיכום כללי:

הגדרה:

המקום הגאומטרי של כל הנקודות, הנמצאות במרחק קבוע מנקודה קבועה במישור נקרא מעגל.





משוואת מעגל:

משוואת מעגל שמרכזו בנקודה $\mathrm{M}(a,b)$
ורדיוסו R היא: $(x-a)^2=(y-b)^2=R^2$.

משוואת מעגל קנוני:

משוואת מעגל קנוני (שמרכזו בראשית הצירים $\mathrm{M}(0,0)$)
ורדיוסו R היא: $x^2+y^2=R^2$.

שאלות:

1) מצא את מרכזו ורדיוסו של המעגלים הבאים:

א. $(x-3)^2+(y+5)^2=49$.

ב. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=10$.

ג. $(x-m)^2+(y+n)^2=m^2+n^2$.

2) כתוב את משוואות המעגלים שמרכזם M ורדיוסם R:

א. $\mathrm{M}(4,-2)$, $R=3$

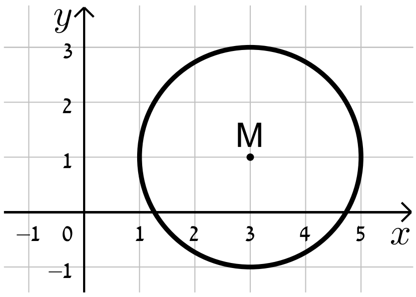
ב. $\mathrm{M}(-3,5)$, $R=10$

ג. $\mathrm{M}(5,5)$, $R=\sqrt{40}$

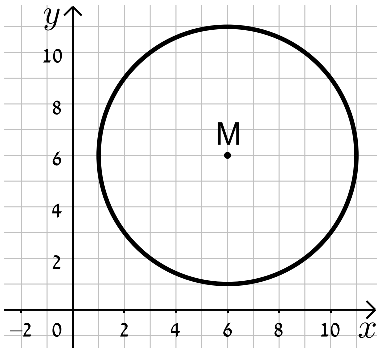
ד. $\mathrm{M}(10,-12)$, $R=\sqrt{30}$

3) כתוב את משוואות המעגלים הבאים בכל מקרה:

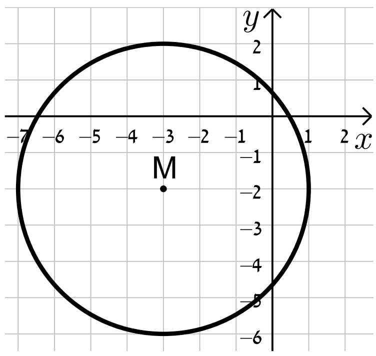
א.



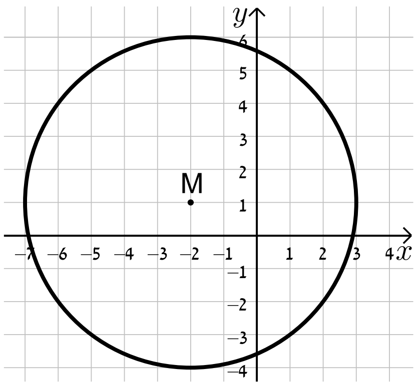
ב.



ג.



ד.



4) מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה $A(-4,5)$ ומרכזו בנקודה $O(2,-1)$.

5) מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה $M(-5,6)$ והוא חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x=9$.

6) מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה $M(0,-7)$ והוא חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y=3$.

7) מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה $A(11,2)$, רדיוסו 13 ומרכזו נמצא על הישר $y=2x-1$.

8) מצא את משוואתו של מעגל שהנקודות $A(-2,3)$ ו- $B(4,-3)$ הן קצות הקוטר שלו.

9) מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו נמצא על הישר $x=4$, רדיוסו 10 והוא חותך מציר ה-x מיתר שאורכו 12.

10) מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו $M(4,-3)$ אם ידוע כי הישר $y=-3x+7$ חותך אותו בשתי נקודות A ו-B כך שאורכו של המיתר AB הוא 4 יחידות אורך.

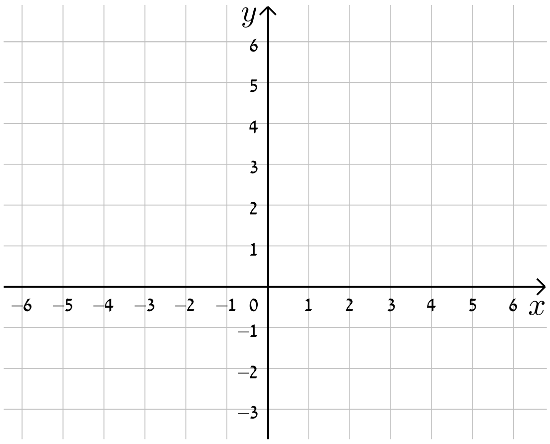
11) מצא את משוואתו של מעגל החוסם משולש שקודקודיו הם $A(22,-24)$, $B(-10,40)$, $C(-30,28)$.

12) נתונים שני מעגלים בעלי אותו המרכז $M(3,-1)$, האחד הוא בעל רדיוס R והשני בעל רדיוס של $2R$.

א. כתוב את המשוואות של שני המעגלים (בטא באמצעות R).

ב. מה תהיינה המשוואות עבור $R=2$?

ג. צייר את שני המעגלים במערכת הצירים שלפניך.



13) שני מעגלים שמרכזיהם $M_1(6,2)$ ו-$M_2(-3,-4)$ חותכים זה את זה בנקודה $(-2,3)$. מצא את משוואות המעגלים.

14) נתונה משוואת המעגל הבאה: $x^2+y^2-10x-10y+a=0$ כאשר a פרמטר.

א. מצא ביטוי של רדיוס המעגל באמצעות a.

ב. איזה מהערכים הבאים יכול להיות הגיוני עבור a? נמק ומצא את תחום ההגדרה של a.

i. $a=5$.

ii. $a=55$.

תשובות סופיות:

1) א. $\mathrm{M}(3,-5)\ ,\ R=7$ ב. $\mathrm{M}(-0.5,0)\ ,\ R=\sqrt{10}$

ג. $\mathrm{M}(m,-n)\ ,\ R=\sqrt{m^2+n^2}$.

2) א. $(x-4)^2+(y+2)^2=9$ ב. $(x+3)^2+(y-5)^2=100$

ג. $(x-5)^2+(y-5)^2=40$ ד. $(x-10)^2+(y+12)^2=30$.

3) א. $(x-3)^2+(y-1)^2=4$ ב. $(x-6)^2+(y-6)^2=25$

ג. $(x+3)^2+(y+2)^2=16$ ד. $(x+2)^2+(y-1)^2=25$.

4) $(x-2)^2+(y+1)^2=72\ ,\ \mathrm{M}(3,-3)$.

5) $(x+5)^2+(y-6)^2=232$.

6) $x^2+(y+7)^2=100$.

7) $(x+1)^2+(y+3)^2=169$ או $(x-7.8)^2+(y+14.6)^2=169$.

8) $(x-1)^2+y^2=18$.

9) $(x-4)^2+(y-8)^2=100$ או $(x-4)^2+(y+8)^2=100$

10) $(x-4)^2+(y+3)^2=4\frac{2}{5}$.

11) $(x+2)^2+(y-4)^2=1360$.

12) א. $(x-3)^2+(y+1)^2=4R^2\ ,\ (x-3)^2+(y+1)^2=R^2$

ב. $(x-3)^2+(y+1)^2=16\ ,\ (x-3)^2+(y+1)^2=4$.

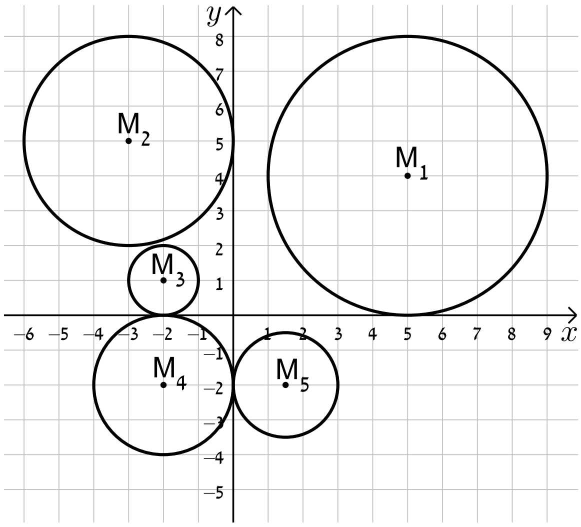
13) $(x-6)^2+(y-2)^2=65\ ,\ (x+3)^2+(y+4)^2=50$

14) א. $R=\sqrt{50-a}$ ב. $a=5$, ת.ה: $a<50$.

מעגל המשיק לצירים:

שאלות:

15) כתוב את משוואות המעגלים הבאים:



16) מצא את משוואתו של מעגל המשיק לשני הצירים ורדיוסו 4.

17) מצא את משוואת המעגל שמשיק לציר ה- x ומרכזו בנקודה $M(16,8)$.

18) מצא את משוואת המעגל שמרכזו נמצא על הישר $2x+3y+6=0$ והוא משיק לשני הצירים.

19) מצא את משוואתו של מעגל שמשיק לציר ה- y ולישר $y=6$ ומרכזו על הישר $y=3x-2$ ברביע הראשון.

תשובות סופיות:

15) $M_1 : (x-5)^2+(y-4)^2=16$, $M_2 : (x+3)^2+(y-5)^2=9$

, $M_3 : (x+2)^2+(y-1)^2=1$, $M_4 : (x+2)^2+(y+2)^2=4$

. $M_5 : (x-1.5)^2+(y+2)^2=2\frac{1}{4}$

16) $(x\pm 4)^2+(y\pm 4)^2=16$.

17) $(x-16)^2+(y-8)^2=64$.

18) $(x-6)^2+(y+6)^2=36$, $\left(x+1\frac{1}{5}\right)^2+\left(y+1\frac{1}{5}\right)^2=\frac{36}{25}$.

19) $(x-2)^2+(y-4)^2=4$.

משיק למעגל:

סיכום כללי:

משוואת המשיק למעגל $(x-a)^2=(y-b)^2=R^2$ בנקודה $A(x_1,y_1)$
שעליו היא: $(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=R^2$.

שאלות:

20) מצא את משוואות המשיקים למעגל $(x+1)^2+(y-2)^2=25$ בנקודות על המעגל שבהן $y=5$.

21) נתונה משוואת המעגל: $(x-1)^2+(y-3)^2=20$ ומשוואת הישר $y=2x+m$ כאשר m פרמטר. מצא עבור אלו ערכים של m הישר ישיק למעגל ולאלו ערכים הישר יחתוך את המעגל.

תשובות סופיות:

20) $4x-3y+35=0$ ו- $4x+3y=27$.

21) משיק: $m=11,-9$, חותך: $-9<m<11$.

שאלות יסודיות שונות:

שאלות:

22) נתון מעגל שמשוואתו $(x-3)^2+(y+4)^2=25$.

א. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.

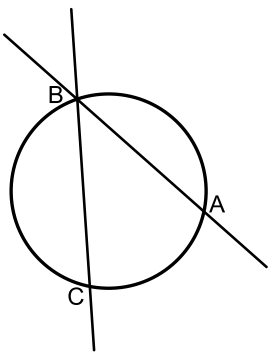
ב. העבירו קוטר במעגל, המאונך לציר ה-x.
מצא את שטח המרובע הנוצר על ידי נקודות החיתוך שמצאת בסעיף א' ונקודת החיתוך של הקוטר עם המעגל הנמצאת ברביע הראשון.

23) נתון ישר שמשוואתו $y=2x-10$. הישר חותך את ציר ה-x בנקודה A ואת ציר ה-y בנקודה B. בנקודה A מעבירים משיק למעגל שהקטע AB הוא קוטרו.
המשיק חותך את ציר ה-y בנקודה C.
מצא את אורך הקטע BC.

24) נתון המעגל שמשוואתו $x^2+y^2=81$. מסמנים ב-A את נקודת החיתוך החיובית של המעגל עם ציר ה-x. הנקודה A היא מרכזו של מעגל נוסף בעל רדיוס של 12. מסמנים את נקודות החיתוך של שני המעגלים ב-B ו-C.
מצא את שטח המשולש שנוצר בין הנקודות B, C ו- O (O ראשית הצירים).

25) נתון ישר שמשוואתו $y=x$. הישר חותך מעגל קנוני שמשוואתו $x^2+y^2=32$ בשתי נקודות, A ו- B, כאשר A ברביע הראשון. בנקודה A עובר מעגל נוסף, המשיק למעגל הקנוני ובעל אותו רדיוס.
מצא את משוואת המעגל הנוסף ואת משוואת המשיק המשותף לשני המעגלים העובר בנקודה A.

26) הישרים: $9y+11x=94$ ו- $y=-3x+14$ נחתכים בנקודה B.
דרך נקודה זו עובר מעגל שמרכזו הוא: $M(-9,1)$.
ידוע כי מעגל זה חותך את הישרים (חוץ מהנקודה B) בשתי נקודות A ו-C (ראה איור).

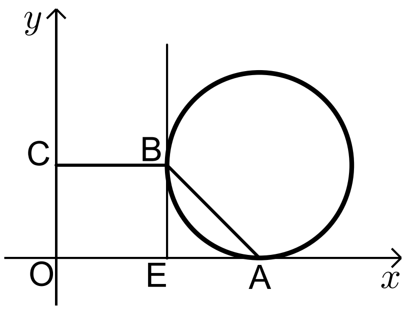


א. מצא את שיעורי הנקודה B.

ב. מצא את משוואת המעגל.

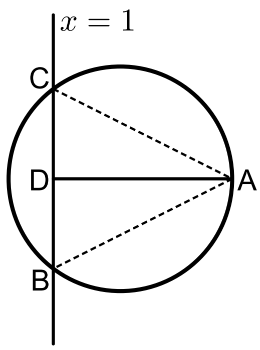
ג. מצא את שיעורי הנקודה A – נקודת החיתוך של הישר שמשוואתו: $y=-3x+14$ עם המעגל.

27) נתון מעגל המשיק לציר ה- x בנקודה A.
מהנקודה E שעל ציר ה- x מעלים אנך המשיק
למעגל בנקודה B (ראה איור).
הקטע BC מקביל לציר ה- x ו-O היא נקודת
ראשית הצירים. יוצרים טרפז ישר זווית ABCO
ששטחו הוא 170 סמ"ר.
ידוע כי: $C(0,10)$ ו- 10 ס"מ $= AE$.



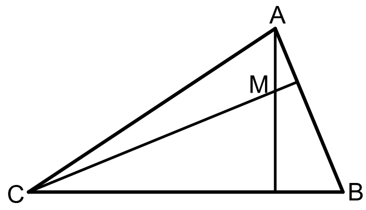
א. ענה על הסעיפים הבאים:
i. מצא את שיעורי הנקודה B.
ii. מצא את שיעורי הנקודה A.
ב. כתוב את משוואת המעגל.

28) הנקודה $A(17,4)$ נמצאת על המעגל
שמשוואתו: $(x-7)^2+(y-4)^2=R^2$.
הישר $x=1$ חותך את המעגל בשתי נקודות B ו-C כך
ש-B נמצאת ברביע הרביעי. מעבירים את הקטע AD
המאונך לישר BC וידוע כי הנקודה D היא אמצע BC.



א. מצא את רדיוס המעגל.
ב. מצא את שיעורי הנקודות B ו-C.
ג. ענה על הסעיפים הבאים:
i. חשב את מרחק הנקודה A מהישר: $x=1$
ii. חשב את שטח המשולש ABC.

29) נתון משולש ABC. משוואות הצלעות AB ו-BC
במשולש ABC הן בהתאמה: $2y-x=56$
ו- $8y+x=104$.
מעבירים גבהים לצלעות AB ו-BC אשר
נחתכים בנקודה $M(0,-2)$ שבתוך המשולש.



א. מצא את משוואות הגבהים.
ב. מצא את שיעורי הנקודה B.
ג. מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה M
ורדיוסו הוא הקטע BM.

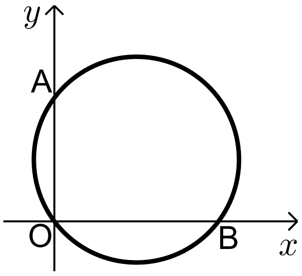
30) באיור שלפניך מתואר המעגל: $(x-4)^2+(y-3)^2=25$.

המעגל חותך את הצירים בנקודות A, B ו-O.

א. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.

ב. מצא נקודה C הנמצאת על היקף המעגל ברביע הראשון כך שהמרובע ABCO יהיה מלבן.

ג. חשב את היקף המלבן.



31) המעגל: $(x+a)^2+(y-1)^2=a+4$, $a>0$ חותך את ציר ה-x בנקודה שבה: $x=1$.

א. מצא את a.

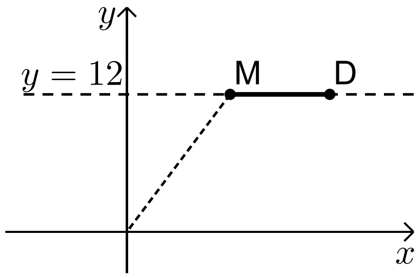
ב. מצא את נקודות החיתוך של המעגל הנתון עם המעגל $(x-1)^2+(y-2)^2=10$.

ג. כתוב את משוואת הישר העובר דרך נקודות החיתוך של שני המעגלים.

ד. חשב את שטח המשולש שיוצר הישר שמצאת בסעיף הקודם עם הצירים.

32) הנקודות M ו-D נמצאות על הישר $y=12$ ידוע כי שיעור ה-x של הנקודה M הוא 9 וכי המרחק של הנקודה M מראשית הצירים גדול ב- 6 מהמרחק בין הנקודות D ו-M (ראה איור).

בונים מעגל שמרכזו נמצא בנקודה M ורדיוסו הוא האורך DM.



א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את מרחק הנקודה M מראשית הצירים.

ii. מצא את שיעור ה-x של הנקודה D.

ב. כתוב את משוואת המעגל.

ג. האם המעגל הזה חותך את הצירים? הראה חישוב מתאים לטענתך.

33) מעגל שמרכזו בנקודה $M(15,12)$ משיק לציר ה-y בנקודה B וחותך את ציר ה-x בשתי נקודות A ו-C כמתואר באיור.

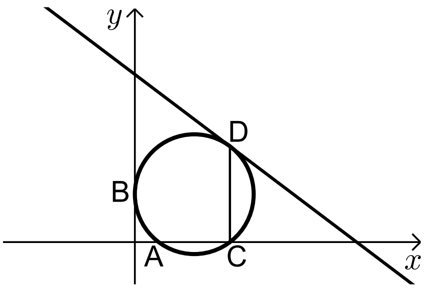
א. כתוב את משוואת המעגל.

מהנקודה C מעלים אנך לציר ה-x שחותך את המעגל בנקודה נוספת D.

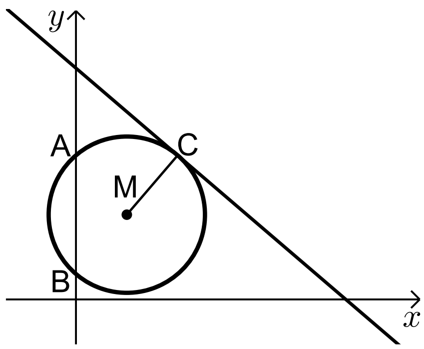
דרך הנקודה D עובר משיק למעגל.

ב. מצא את שיעורי הנקודות C ו-D.

ג. מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה D.

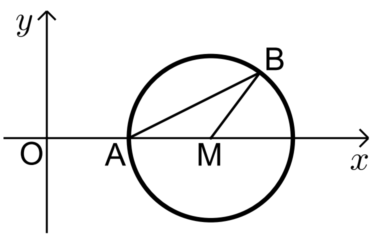


34) באיור שלפניך נתון מעגל שמרכזו בנקודה M.
המעגל חותך את ציר ה- y בנקודות A ו-B.
מעבירים משיק למעגל: $6x+7y=191$
דרך הנקודה: $C(12,17)$.



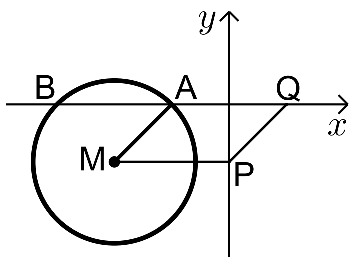
א. כתוב את משוואת הרדיוס MC.
ב. ידוע כי הנקודה M נמצאת על הישר $y=10$.
i. מצא את שיעורי הנקודה M.
ii. מצא את אורך רדיוס המעגל.
iii. כתוב את משוואת המעגל.
ג. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- y.
ד. חשב את שטח המשולש AMB.

35) באיור שלפניך נתון מעגל שמרכזו בנקודה M הנמצאת על ציר ה- x. המעגל חותך את ציר ה- x בנקודה A.
מסמנים את ראשית הצירים ב-O.
ידוע כי A היא אמצע הקטע MO ושיעוריה הם: $A(5,0)$.



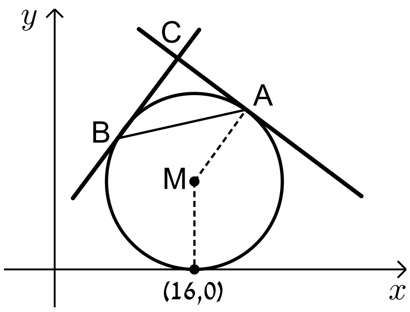
א. מצא את משוואת המעגל.
ב. כתוב את משוואת הישר שעובר דרך הנקודה A ושיפועו הוא 0.5.
ג. מצא את נקודת החיתוך הנוספת של הישר שמצאת עם המעגל.
ד. סמן את הנקודה שמצאת בסעיף הקודם ב-B וחשב את שטח המשולש AMB.

36) באיור שלפניך נתון מעגל שמשוואתו
היא: $(x+4)^2+(y+2)^2=8$.
מסמנים את נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- x ב-A ו-B (ראה איור).



א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.
מעבירים אנך לציר ה- y מנקודת מרכז המעגל M ומסמנים את חיתוכם ב- P.
ב. מצא נקודה Q כך שהמרובע AMPQ יהיה מקבילית. נמק.
ג. כתוב את משוואת הישר PQ.
ד. הוכח כי הישר שמצאת בסעיף הקודם משיק למעגל בנקודה $(-2,-4)$.

37) נתון מעגל שרדיוסו R $(R<16)$ ומשיק לציר ה- x
בנקודה שבה : $x=16$.



א. הבע באמצעות R את משוואת המעגל וציין האם הוא חותך את ציר ה- y או לא. נמק.

מהנקודה $A(22,18)$ שעל המעגל מעבירים משיק.

ב. מצא את R וכתוב את משוואת המעגל.

ג. כתוב את משוואת המשיק למעגל בנקודה A.

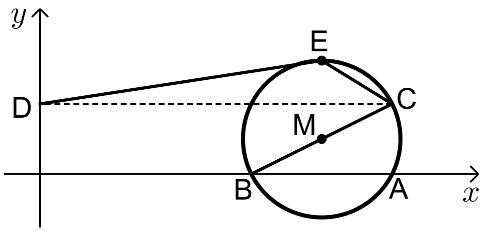
ד. מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה B שבה $x_B < x_M$ אם ידוע כי הוא המאונך למשיק הקודם.

ה. המשיקים נחתכים בנקודה C.

i. מצא את שיעורי הנקודה C.

ii. מצא את שטח המשולש ABC.

38) באיור שלפניך נתון מעגל
שמשוואתו : $(x+a)^2+(y-1)^2=5$, a פרמטר.
ידוע כי המעגל חותך את ציר ה- x בנקודה $A(10,0)$.



א. מצא את a אם ידוע כי $a>-10$.

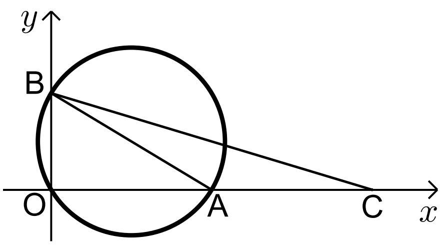
ב. מצא את הנקודה B - נקודת החיתוך השנייה של המעגל עם ציר ה- x .

ג. כתוב את משוואת הקוטר העובר דרך הנקודה B ומרכז המעגל M.

ד. מצא את נקודת החיתוך השנייה של הקוטר עם המעגל.

ה. מעבירים אנך מנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם לציר ה- y בנקודה D.
הנקודה E היא הנקודה בעלת שיעור ה- y הגדול ביותר על המעגל.
מחברים את הנקודות E ו-D כך שנוצר המחומש DECBO. חשב את שטחו.

39) באיור שלפניך נתון מעגל שמשוואתו : $(x-5)^2+(y-3)^2=R^2$, R רדיוס המעגל.
ידוע כי המעגל עובר בראשית הצירים.



א. מצא את רדיוס המעגל
וכתוב את משוואת המעגל.

ב. מצא את הנקודות A ו- B - החיתוך של המעגל עם הצירים (ראה איור).

ג. מסמנים נקודה C על ציר ה- x
כך ש-A היא אמצע הקטע CO.

i. מצא את שיעורי הנקודה C.

ii. חשב את שטח המשולש ABC.

תשובות סופיות:

22) א. $(0,0)$, $(6,0)$, $(0,-8)$ ב. 27 יח"ש.

23) 12.5 יחידות אורך.

24) $\sqrt{80}$ יח"ש $= S_{\Delta BOC}$.

25) $(x-8)^2+(y-8)^2=32$, $y=-x+8$.

26) א. $(2,8)$ ב. $(x+9)^2+(y-1)^2=170$ ג. $(4,2)$.

27) א. i. $B(12,10)$ ii. $A(22,0)$ ב. $(x-22)^2+(y-10)^2=100$.

28) א. $R=10$ ב. $B(1,-4)$, $C(1,12)$ ג. i. $d=16$
ii. $S=128$

29) א. $y=8x-2$, $y=-2x-2$ ב. $(-24,16)$ ג. $x^2+(y+2)^2=900$.

30) א. $O(0,0)$, $A(0,6)$, $B(8,0)$ ב. $C(8,6)$ ג. 28 יח"א $= P$.

31) א. $a=1$ ב. $(0,-1)$, $(-2,3)$ ג. $y=-2x-1$
ד. $S=\frac{1}{4}$.

32) א. i. $d=15$ ii. $x=18$. ב. $(x-9)^2+(y-12)^2=81$.
ג. המעגל אינו חותך את ציר ה- x -כאשר מציבים ב- y אפס מתקבלת משוואה ריבועית ללא פתרון. המעגל חותך את ציר ה- x בנקודה אחת- $(12,0)$.

33) א. $(x-15)^2+(y-12)^2=225$ ב. $C(24,0)$, $D(24,24)$. ג. $y=-\frac{3}{4}x+42$.

34) א. $y=\frac{7}{6}x+3$ ב. i. $M(6,10)$ ii. $\sqrt{85}$
iii. $(x-6)^2+(y-10)^2=85$ ג. $A(0,17)$, $B(0,3)$ ד. 42 יח"ש.

35) א. $(x-10)^2+y^2=25$ ב. $y=0.5x-2.5$ ג. $B(13,4)$
ד. 10 יח"ש $= S_{AMB}$.

36) א. $A(-2,0)$, $B(-6,0)$ ב. $Q(2,0)$ ג. $y=x-2$.

37) א. $(x-16)^2+(y-R)^2=R^2$, המעגל אינו חותך את ציר ה- y.
ב. $R=10$, $(x-16)^2+(y-10)^2=100$ ג. $y=-\frac{3}{4}x+34\frac{1}{2}$
ד. $y=\frac{4}{3}x+5\frac{1}{3}$ ה. i. $C(14,24)$ ii. 50 יח"ש.

38) א. $a=-8$ ב. $B(6,0)$ ג. $y=0.5x-3$
ד. $(10,2)$.   ה. $S_{\text{DECBO}}=$ $11+5\sqrt{5}$ יח"ש.

39) א. $R=\sqrt{34}$ יחידות אורך , $(x-5)^2+(y-3)^2=34$.   ב. $A(10,0)$, $B(0,6)$
ג. i. $C(20,0)$.   ii. $S_{\text{ABC}}=$ 30 יח"ש.

כתיבת משוואת מעגל עם השלמה לריבוע:

שאלות:

1) מצא את מרכזם ורדיוסם של המעגלים הבאים:

א. $x^2+10x+y^2+6y-2=0$
ב. $x^2-2x+y^2+20y+1=0$
ג. $x^2-8x+y^2-14y=0$
ד. $x^2+y^2+2y=0$
ה. $x^2+x+y^2-3\frac{3}{4}=0$
ו. $x^2-2mx+y^2+6my+m^2=0$

2) משוואתו של מעגל היא $x^2+y^2-6mx-2(m+2)y+4m+4=0$.
מצא את ערכו של m אם ידוע שמרכז המעגל נמצא על הישר $y=2x+7$.

3) משוואתו של מעגל היא $x^2+y^2-8x+12y-48=0$.
מצא את אורכו של המיתר שחותך הישר $y=2x-4$ מהמעגל בלי למצוא את נקודות הקצה של המיתר.

תשובות סופיות:

1) א. $M(-5,-3)$, $R=6$
ב. $M(1,-10)$, $R=10$
ג. $M(4,7)$, $R=\sqrt{65}$
ד. $M(0,-1)$, $R=1$
ה. $M\left(-\frac{1}{2},0\right)$, $R=2$
ו. $M(m,-3m)$, $R=3m$.

2) $m=-1$.

3) $2\sqrt{80}$.

משוואות המשיקים למעגל:

שאלות:

4) מצא משוואת מעגל העובר בנקודה $(1,8)$ המשיק לשני הצירים.

5) מצא את אורך המשיק למעגל שמשוואתו $x^2+y^2-4x+14y+37=0$ היוצא מהנקודה $A(10,-3)$.

6) מצא את משוואת המשיק ואת משוואת הנורמל למעגל שמשוואתו $x^2+y^2-4x+6y+3=0$ בנקודה $A(5,-4)$.

7) מצא את נקודת החיתוך של המשיקים למעגל שמשוואתו $x^2+(y-1)^2=5$ בנקודות שבהן $x=-1$.

8) נתון מעגל שמרכזו בנקודה $(-2,6)$ והוא עובר בראשית הצירים. המעגל חותך את הצירים בשתי נקודות נוספות, A ו-B.
א. הוכח כי המשיקים למעגל בנקודות A ו-B מקבילים זה לזה.
ב. הוכח את סעיף א' בלי למצוא את משוואות המשיקים או את שיפועיהם.

9) נתון המעגל $(x-1)^2+(y-3)^2=20$ והישר $y=2x+m$.
לאלו ערכים של הפרמטר m הישר משיק למעגל ולאלו ערכים של m הישר חותך את המעגל?

תשובות סופיות:

4) $(x-5)^2+(y-5)^2=25$ או $(x-13)^2+(y-13)^2=169$.

5) 8.

6) משיק: $y=3x-19$, נורמל: $x+3y+7=0$.

7) $(-5,1)$.

8) שאלת הוכחה.

9) משיק: $m=-9,11$, חותך: $-9<m<11$.

מיתר המחבר שתי נקודות השקה:

סיכום כללי:

משוואת המיתר, המחבר את שתי נקודות ההשקה של שני המשיקים למעגל $(x-a)^2=(y-b)^2=R^2$ היוצאים מהנקודה $\mathrm{A}(x_1,y_1)$ שמחוץ למעגל היא: $(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=R^2$.

שאלות:

10) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את משוואת המיתר במעגל שמשוואתו $x^2+y^2+2x-19=0$, המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים מהנקודה $\mathrm{A}(-3,8)$

ב. מצא את משוואת המיתר במעגל שמשוואתו $x^2+(y-1)^2=5$, המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים מהנקודה $\mathrm{A}(-5,1)$.

11) נתון מעגל שמשוואתו $x^2+y^2+16x+48=0$ ונקודה P, שנמצאת על החלק החיובי של ציר ה- y. הישר המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים למעגל מנקודה P חותך את ציר ה- y בנקודה Q. נתון: $\mathrm{PQ}=14$.
מצא את שיעורי הנקודה Q.

תשובות סופיות:

10) א. $x-4y+11=0$ ב. $x=-1$.

11) $\mathrm{Q}(0,-8)$ או $\mathrm{Q}(0,-6)$.

שאלות מסכמות שונות:

שאלות:

12) נתון מעגל שמשוואתו $x^2+y^2+16x-12y+64=0$. המעגל משיק מבחוץ למעגל קנוני. מצא את משוואת המעגל הקנוני, את נקודת ההשקה בין המעגלים ואת משוואת המשיק המשותף העובר בנקודה זו.

13) המעגלים $x^2+y^2+22x-6y=m$ ו- $x^2+y^2=26$ נחתכים בזווית ישרה.
מצא את ערכו של m.

14) בטרפז שווה שוקיים ABCD נתון כי הבסיס הגדול, DC, מונח על הישר: $3x-y-9=0$ והשוק AD מונחת על הישר $x+y-3=0$.
שיעורי הקודקוד B הם $(3,-8)$.
מצא את משוואת המעגל החוסם את הטרפז ABCD.

15) מצא את משוואתו של מעגל החוסם ריבוע, שאחד מקדקודיו נמצא בראשית הצירים ומשוואת אחד מאלכסוניו היא $3x-y+10=0$.

תשובות סופיות:

12) $4x-3y+20=0$, $A(-3.2,2.4)$, $x^2+y^2=16$.

13) $m=-26$.

14) $(x-1)^2+(y+4)^2=20$.

15) $(x+3)^2+(y-1)^2=10$.

סדנת ריענון במתמטיקה - מעודכן

פרק 20 - וקטורים גיאומטריים

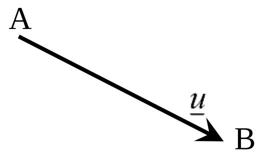
תוכן העניינים

1. הגדרות וכללים יסודיים 237
2. וקטורים הפורשים מישור 242
3. מכפלה סקלרית וחישוב גודל של וקטור 246

הגדרות וכללים יסודיים:

סיכום כללי:

הגדרה כללית:



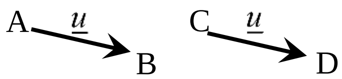
להלן תיאור של וקטור גיאומטרי: וקטור שמוצאו בנקודה A ומסתיים בנקודה B יסומן באופן הבא: $\overrightarrow{AB}$.

ניתן לסמן וקטור באות קטנה באופן הבא: $\underline{u}$ (אותיות מקובלות לסימון הן: $\underline{u},\ \underline{v},\ \underline{w}$).

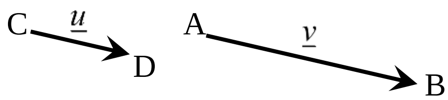
מהאיור לעיל מתקיים: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.

קשרים בין וקטורים:

- וקטורים שווים: שני וקטורים נקראים שווים אם הם זהים בגודלם ובכיוונם.
  דוגמא לווקטורים שווים: מתקיים: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

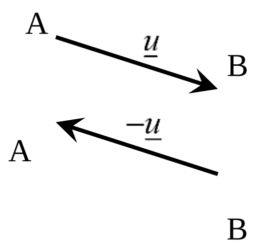


- וקטורים מקבילים: שני וקטורים שכיוונם זהה נקראים מקבילים.
  ניתן להביע את האחד באמצעות השני ע"י כפל בסקלר.
  וקטורים מקבילים נקראים גם "וקטורים תלויים ליניארית".
  דוגמא לתלות בין וקטורים מקבילים:
  עבור $\alpha>1$ מתקיים: $\underline{v}=\alpha\underline{u}$, או: $\overrightarrow{AB}=\alpha\cdot\overrightarrow{CD}$.



- אם זוג וקטורים במרחב: $\overrightarrow{AB}=\alpha\underline{u}+\beta\underline{v}+\gamma\underline{w}$ ו- $\overrightarrow{CD}=a\underline{u}+b\underline{v}+c\underline{w}$ מקבילים
  אז מתקיים: $\frac{\alpha}{a}=\frac{\beta}{b}=\frac{\gamma}{c}$.

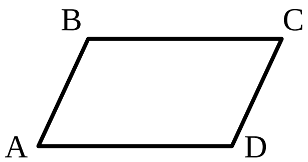
- וקטור המסומן $\overrightarrow{BA}$ הוא בעל גודל זהה לווקטור $\overrightarrow{AB}$
  וכיוון הפוך לו. במקרה זה מתקיים: $\overrightarrow{BA}=-\underline{u}$.



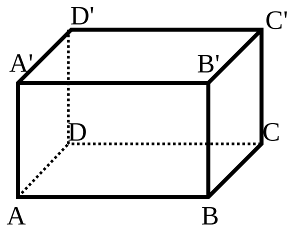
הערה:

שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ יקראו מקבילים אם מתקיים: $\underline{v}=\alpha\underline{u}$ כאשר הגודל α יכול לקבל כל ערך מספרי בתחום $\alpha\neq 0$. בפרט עבור $\alpha<0$ כיוונם הפוך ב- $180°$.

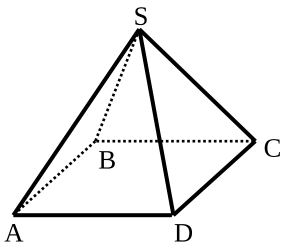
שאלות:



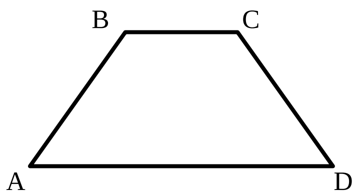
1) במקבילית ABCD נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$
מצא את כל הווקטורים במקבילית ששווים
ל- $\underline{u}$ או $\underline{v}$.



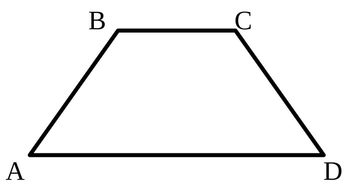
2) בתיבה ABCDA'B'C'D'
נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$.
מצא את כל הווקטורים בתיבה ששווים
ל- $\underline{u}$, $\underline{v}$ או $\underline{w}$.



3) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע
נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$.
מצא את כל הווקטורים שבפירמידה השווים
ל- $\underline{u}$, $\underline{v}$ או $\underline{w}$.



4) בטרפז ABCD שבשרטוט
נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $AD=3BC$.
מצא את כל הווקטורים בטרפז שניתן להביע
באמצעות $\underline{u}$ או $\underline{v}$.



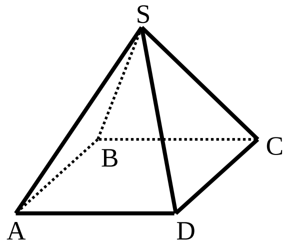
5) בטרפז ABCD שבשרטוט
נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $AD=3BC$

א. הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את
הווקטורים $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{DC}$.

ב. הנקודה E היא אמצע הצלע AD.
הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטור $\overrightarrow{BE}$.

ג. הנקודה F היא אמצע הצלע CD.
הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטור $\overrightarrow{AF}$.

6) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע



נתון: $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{SC}$.

ב. הנקודה N היא אמצע המקצוע SD.
הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הווקטור $\overrightarrow{BN}$.

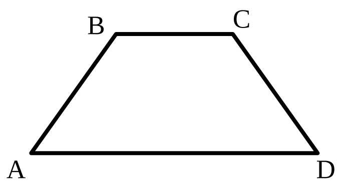
7) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $AP:PB=2:3$. נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

8) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $AP:PB=3:5$. נתון: $\overrightarrow{AP}=\underline{u}$.
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{PB}$ ו- $\overrightarrow{AB}$.

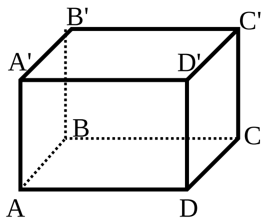
9) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $\frac{AP}{AB}=\alpha$. נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

10) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $\frac{AP}{PB}=\alpha$. נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

11) בטרפז ABCD שבשרטוט



נתון: $AD=3BC$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הנקודה F נמצאת על הצלע CD
ומקיימת: $\frac{DF}{FC}=\beta$.
הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- β את הווקטור $\overrightarrow{AF}$.

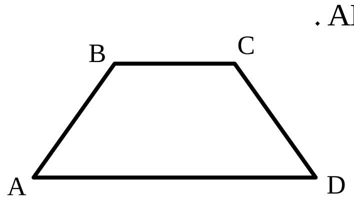


12) בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$

הנקודה P נמצאת על המקצוע $A'B'$ ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'}=\alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'}=\beta$

הבע באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$, α ו- β את הווקטור: $\overrightarrow{PQ}$.

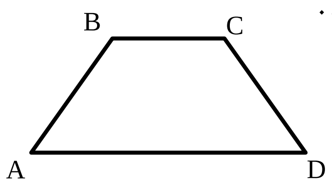


13) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $AD=3BC$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.

הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת: $\frac{AF}{FD}=\alpha$

מצא את ערכו של α שעבורו מתקיים $\overrightarrow{FE}\parallel\overrightarrow{AB}$.

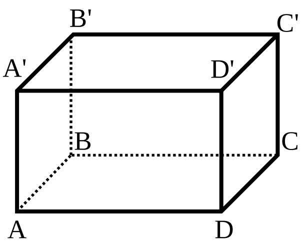


14) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $AD=3BC$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.

הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת: $\frac{AF}{FD}=\alpha$

מצא את ערכו של α שעבורו מתקיים: $\overrightarrow{FE}\parallel\overrightarrow{AC}$.



15) בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$.

הנקודה P נמצאת על המקצוע $A'B'$ ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'}=\alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'}=\beta$.

א. הבע באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$, α ו- β את הווקטור $\overrightarrow{PQ}$.

ב. האם קיימים ערכי α ו- β שעבורם $\overrightarrow{PQ}\parallel\overrightarrow{AC}$? נמק.

ג. הנקודה E היא מפגש אלכסוני הפאה $ABB'A'$.

מצא את ערכי α ו- β אם נתון כי $\overrightarrow{PQ}\parallel\overrightarrow{EC}$.

תשובות סופיות:

1) $\underline{u}=\overrightarrow{DC}$, $\underline{v}=\overrightarrow{BC}$.

2) $\underline{v}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{B'C'}$, $\underline{u}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{D'C'}=\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}$, $\underline{w}=\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{BB'}$.

3) $\underline{w}=\overrightarrow{AS}$, $\underline{v}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, $\underline{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

4) $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\underline{v}$.

5) א. $\overrightarrow{AC}=\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}$, $\overrightarrow{DC}=\underline{u}-\frac{2}{3}\underline{v}$ ב. $\overrightarrow{BE}=-\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}$ ג. $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{2}{3}\underline{v}$.

6) א. $\overrightarrow{AC}=\underline{u}+\underline{v}$, $\overrightarrow{SC}=\underline{u}+\underline{v}-\underline{w}$ ב. $\overrightarrow{BN}=-\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w}$.

7) $\overrightarrow{BP}=\frac{3}{5}\underline{u}$, $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\underline{u}$.

8) $\overrightarrow{PB}=\frac{5}{3}\underline{u}$, $\overrightarrow{AB}=\frac{8}{3}\underline{u}$.

9) $\overrightarrow{PB}=(1-\alpha)\underline{u}$, $\overrightarrow{AP}=\alpha\underline{u}$.

10) $\overrightarrow{PB}=\frac{1}{1+\alpha}\underline{u}$, $\overrightarrow{AP}=\frac{\alpha}{1+\alpha}\underline{u}$.

11) $\overrightarrow{AF}=\frac{\beta}{1+\beta}\underline{u}+\frac{3+\beta}{3+3\beta}\underline{v}$.

12) $\overrightarrow{PQ}=(1-\alpha)\underline{u}+\underline{v}-\frac{1}{1+\beta}\underline{w}$.

13) $\alpha=2$.

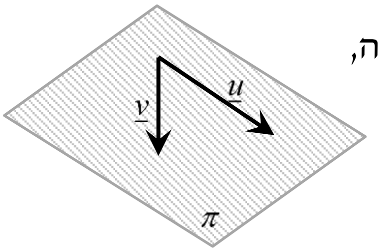
14) $\alpha=1$.

15) א. $\overrightarrow{PQ}=(1-\alpha)\underline{u}+\underline{v}-\frac{1}{1+\beta}\underline{w}$ ב. לא ג. $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=1$.

ווקטורים הפורשים מישור:

סיכום כללי:

ווקטורים הפורשים מישור:



כל שני ווקטורים שאינם מקבילים, כלומר, בלתי תלויים זה בזה, פורשים מישור.

דוגמא:

הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ בעלי כוונים שונים ולכן פורשים את המישור π.

קומבינציה לינארית של ווקטורים:

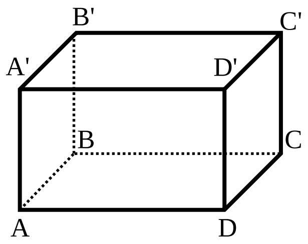
- כל ווקטור שנמצא במישור (או מקביל למישור זה) ניתן להצגה ע"י קומבינציה ליניארית של שני ווקטורים הפורשים את המישור.
- כל ווקטור שהוא קומבינציה ליניארית של שני ווקטורים הפורשים את המישור, מקביל למישור.
- אם ניתן להביע ווקטור שקומבינציה לינארית של שני ווקטורים אחרים (או יותר) אז שלושת הווקטורים נקראים תלויים ליניארית (ניתן לבטא כל ווקטור באמצעות האחרים).

דוגמא:

עבור המישור הנפרש לעיל, ניתן להציג כל ווקטור $\underline{w}$ המוכל, או מקביל למישור π באופן הבא: $\underline{w}=\alpha\cdot\underline{u}+\beta\cdot\underline{v}$ כאשר: α, β מספרים ממשיים כלשהם.

במקרה זה שלושת הווקטורים $\underline{v}$, $\underline{u}$ ו- $\underline{w}$ נקראים תלויים ליניארית.

שאלות:



16) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

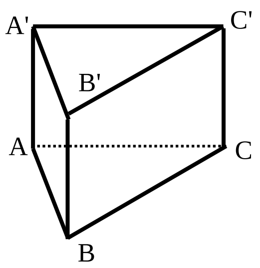
הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'} = \beta$

א. הבע באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$, α ו- β את הווקטור $\overrightarrow{PQ}$.

ב. מהו ערכו של α שבעבורו הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ מקביל לפאה ADD'A'?

ג. האם קיים ערך של β שבעבורו הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ מקביל לבסיס ABCD?



17) נתונה מנסרה משולשת ABCA'B'C'

ובה נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

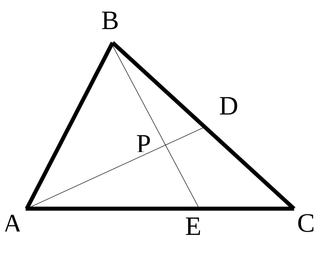
הנקודה M נמצאת על המקצוע A'C' ומקיימת: $\frac{A'M}{MC'} = \alpha$

והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת: $\frac{BN}{BC} = \beta$.

א. הבע באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$, α ו- β את הווקטור $\overrightarrow{NM}$.

ב. מהו ערכו של β שבעבורו הווקטור $\overrightarrow{NM}$ מקביל לפאה ACC'A'?

ג. נתון כי הווקטור $\overrightarrow{NM}$ מקביל לפאה ABB'A'.
הבע את α באמצעות β .



18) במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע BC

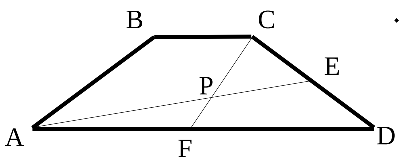
והנקודה E נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים: $\frac{AE}{CE} = 2$.

הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.

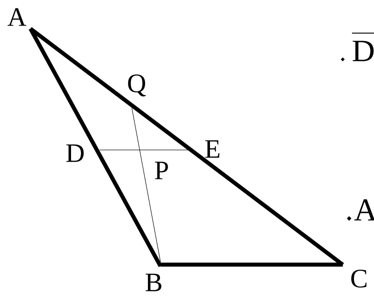
נגדיר: $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, וכן: $\overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BP} = s \cdot \overrightarrow{BE}$.

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, t ו- s את הווקטור $\overrightarrow{AP}$ בשתי דרכים שונות.

ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AD ואת הקטע BE.



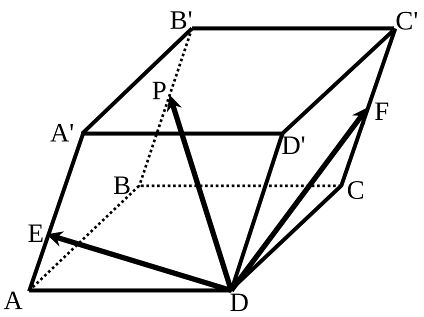
19) בטרפז ABCD, ($AD \parallel BC$) שבשרטוט נתון: $AD = 3BC$.
הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD
והנקודה F נמצאת באמצע הצלע AD.
הנקודה P היא מפגש הקטעים AE ו-CF.
מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AE ואת הקטע CF.



20) במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע AB
והנקודה E נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים: $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BC}$.
הנקודה P היא אמצע הקטע DE והמשך הקטע BP
חותך את הצלע AC בנקודה Q.

א. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה Q את הצלע AC.

ב. חשב את היחס: $\dfrac{S_{\Delta QPE}}{S_{\Delta DPB}}$.



21) במקבילון ABCDA'B'C'D'
נתון: $\overrightarrow{DA} = \underline{u}$, $\overrightarrow{DC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{DD'} = \underline{w}$.
הנקודה F נמצאת באמצע המקצוע CC',
הנקודה E נמצאת על המקצוע AA'
ומקיימת: $A'E = 2AE$ והנקודה P נמצאת על
המקצוע BB' ומקיימת: $\overrightarrow{B'P} = k \cdot \overrightarrow{B'B}$.
נתון: $\overrightarrow{DP} = t \cdot \overrightarrow{DE} + s \cdot \overrightarrow{DF}$.

א. הבע באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$ ו-k את הווקטור $\overrightarrow{DP}$.

ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את המקצוע BB'.

ג. האם הנקודות D , E, F ו- P נמצאות על אותו מישור? נמק.

תשובות סופיות:

16) א. $\overrightarrow{PQ}=(1-\alpha)\underline{u}+\underline{v}-\frac{1}{1+\beta}\underline{w}$ ב. $\alpha=1$ ג. לא.

17) א. $\overrightarrow{NM}=(\beta-1)\underline{u}+\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}-\beta\right)\underline{v}+\underline{w}$ ב. $\beta=1$ ג. $\alpha=\frac{\beta}{1-\beta}$

18) א. $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}t\underline{u}+\frac{1}{2}t\underline{v}$, $\overrightarrow{AP}=(1-s)\underline{u}+\frac{2}{3}s\underline{v}$ ב. $BP:PE=3:2$, $AP:PD=4:1$

19) $AP:PE=2:1$, $CP:PF=2:1$

20) א. $AQ:QC=1:2$ ב. $\frac{S_{QPE}}{S_{DPB}}=\frac{1}{3}$

21) א. $\overrightarrow{DP}=\underline{u}+\underline{v}+(1-k)\underline{w}$ ב. $B'P:PB=1:5$ ג. כן.

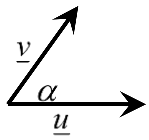
מכפלה סקלרית וחישוב גודל של וקטור:

סיכום כללי:

מכפלה סקלרית של שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ תסומן: $\underline{u}\cdot\underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה:

$$\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha$$

כאשר α היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים כמתואר באיור.



ניתן למצוא את הזווית שבין שני וקטורים ע"י: $\cos\alpha=\frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}$.

גודל של וקטור נתון ע"י: $|\underline{u}|=\sqrt{\underline{u}^2}$, או: $|\underline{u}|^2=\underline{u}^2$.

הערה:

המכפלה הסקלרית $\underline{u}\cdot\underline{v}$ בין שני וקטורים מקבלת ערך מספרי בלבד! היא יכולה להיות חיובית, שלילית או אפס כפי שנראה בהמשך.

שאלות:

22) חשב את המכפלה הסקלרית של הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ על פי הנתונים על גודלם והזווית שביניהם:

א. $|\underline{u}|=3$, $|\underline{v}|=2$, $\alpha=60^\circ$
ב. $|\underline{u}|=4$, $|\underline{v}|=5$, $\alpha=120^\circ$
ג. $|\underline{u}|=2$, $|\underline{v}|=6$, $\alpha=30^\circ$
ד. $|\underline{u}|=8$, $|\underline{v}|=3$, $\alpha=180^\circ$
ה. $|\underline{u}|=3$, $|\underline{v}|=5$, $\alpha=0^\circ$
ו. $|\underline{u}|=7$, $|\underline{v}|=4$, $\alpha=90^\circ$

23) חשב את הזווית בין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ על פי הנתונים על גודלם והמכפלה הסקלרית שלהם:

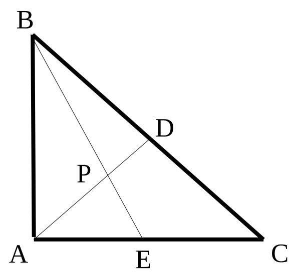
א. $|\underline{u}|=3$, $|\underline{v}|=4$, $\underline{u}\cdot\underline{v}=6$
ב. $|\underline{u}|=4$, $|\underline{v}|=2$, $\underline{u}\cdot\underline{v}=-4\sqrt{3}$
ג. $|\underline{u}|=9$, $|\underline{v}|=5$, $\underline{u}\cdot\underline{v}=0$
ד. $|\underline{u}|=2$, $|\underline{v}|=6$, $\underline{u}\cdot\underline{v}=12$

24) נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ שאורכם: $|\underline{u}|=6$, $|\underline{v}|=3$. הזווית ביניהם היא 120°.
חשב את גודלו של הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ שמוגדר: $\overrightarrow{PQ}=2\underline{u}-3\underline{v}$.

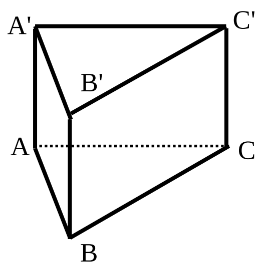
25) נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ המאונכים זה לזה שאורכם: $|\underline{u}|=4$, $|\underline{v}|=5$.
חשב את גודלו של הווקטור $\overrightarrow{MN}$ שמוגדר: $\overrightarrow{MN}=0.5\underline{u}-\underline{v}$.

26) נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ שאורכם: $|\underline{u}|=6$, $|\underline{v}|=3$. הזווית ביניהם היא 120°.
חשב את גודל הזווית $\sphericalangle QPM$ אם נתון: $\overrightarrow{PM}=4\underline{u}+\underline{v}$, $\overrightarrow{PQ}=2\underline{u}-3\underline{v}$.

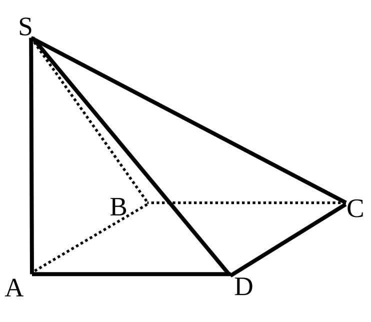
27) המשולש ABC הוא משולש ישר זווית ($\sphericalangle BAC=90^\circ$).
הנקודה D היא אמצע היתר BC והנקודה E נמצאת על הניצב AC.
הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.
נתון: $\frac{AP}{PD}=3$, $AB=8$, $AC=12$.
חשב את גודל הזווית $\sphericalangle DPC$.



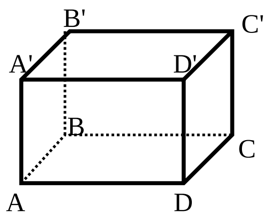
28) נתונה מנסרה משולשת וישרה ABCA'B'C' שבסיסה משולש שווה צלעות שאורך כל אחת מצלעותיו הוא 6. גובה המנסרה הוא 8.
הנקודה M היא אמצע המקצוע A'C' והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת: $BN=2CN$.
נסמן: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$.
חשב את גודל הזווית: $\sphericalangle MAN$.



29) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע המקצוע SA הוא גובה הפירמידה.
נתון: $AB=AD=\frac{1}{2}AS=k$.
נסמן: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$.
הנקודה Q היא אמצע המקצוע SC והנקודה P היא אמצע המקצוע SB.
חשב את גודל הזווית: $\sphericalangle PAQ$.



30) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $AB=\frac{1}{\sqrt{2}}AD=AA'$.



הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'}=\alpha$

והנקודה Q היא אמצע המקצוע DD'.

א. מהו ערכו של α שבעבורו מתקיים: $|\overrightarrow{AP}|=\frac{5}{6}|\overrightarrow{AQ}|$?

ב. הבע באמצעות α את $\cos\sphericalangle PAQ$
והראה כי לכל ערך של α הזווית $\sphericalangle PAQ$ חדה.

ג. מהו ערכו של α שבעבורו הזווית $\sphericalangle PAQ$ מקיימת: $\cos\sphericalangle PAQ=\frac{2}{3\sqrt{5}}$?

31) הוכח כי בכל מרובע ABCD מתקיים: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$.

32) נתון מלבן ABCD. הוכח כי לכל נקודה כלשהי P מתקיים: $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}$.

33) נתון ריבוע ABCD. הנקודה P היא אמצע הצלע BC והנקודה Q היא אמצע הצלע CD.
הוכח כי מתקיים: $S_{ABCD}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$.

34) נתון מרובע ABCD. הנקודה P היא אמצע הצלע AB והנקודה Q היא אמצע הצלע CD.
הוכח כי מתקיים: $\overrightarrow{PQ}=\frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}}{2}$.

35) נתונה פירמידה משולשת SABC שבה $\overrightarrow{AS}\perp\overrightarrow{BC}$ ו- $\overrightarrow{BS}\perp\overrightarrow{AC}$.
הוכח: $\overrightarrow{CS}\perp\overrightarrow{AB}$.

36) הוכח: וקטור המאונך לשני וקטורים בלתי תלויים במישור מאונך לכל הווקטורים שבמישור.

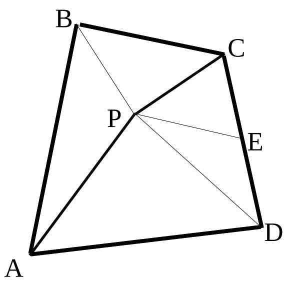
37) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הנקודה M היא מפגש התיכונים במשולש ABC.
הוכח: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=0$.

ב. נתונה פירמידה משולשת SABC. הנקודה P היא מפגש התיכונים בפאה SBC.
הוכח: $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AS}\right)$.

ג. נתון בנוסף כי $\overrightarrow{AS}$ ו- $\overrightarrow{AP}$ מאונכים ל- $\overrightarrow{BC}$.
הוכח כי $AB=AC$. (הדרכה: סמן $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$).

38) הנקודה P נמצאת בתוך מרובע כלשהו ABCD
כך שהמשולשים APD ו-BPC הם משולשים
ישרי זווית ושו"ש ($AP=PD$, $BP=PC$).
הנקודה E היא אמצע הצלע CD. הוכח: $\overrightarrow{PE}\perp\overrightarrow{AB}$.
(הדרכה: סמן $\overrightarrow{PB}=\underline{a}$, $\overrightarrow{PC}=\underline{b}$, $\overrightarrow{PA}=\underline{c}$, $\overrightarrow{PD}=\underline{d}$).



39) בטטראדר SABC נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$.
הנקודה P נמצאת על המקצוע AS ומקיימת: $\overrightarrow{AP}=\alpha\cdot\overrightarrow{AS}$.
הנקודה Q נמצאת על הפאה SBC ומקיימת: $\overrightarrow{SQ}=\beta\left(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)$.

א. מצא את הקשר בין α ו- β שבעבורו $\overrightarrow{PQ}$ מקביל למישור ABC.

ב. נתון: $\alpha=\beta=\frac{1}{3}$, $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{BC}$. הוכח: $AB=AC$.

40) נתונה פירמידה שבסיסה מלבן. הוכח כי אם שלושה המקצועות הצדדיים שבה שווים, אז גם המקצוע הצדדי הרביעי שווה להם.

תשובות סופיות:

22) א. 3 ב. -10 ג. $6\sqrt{3}$ ד. -24 ה. 15 ו. 0.

23) א. $60°$ ב. $150°$ ג. $90°$ ד. $0°$.

24) $\left|\overrightarrow{PQ}\right|=18.248$

25) $\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{29}$

26) $31.87°$

27) $55.49°$

28) $70.623°$

29) $24.095°$

30) א. $\alpha=\frac{3}{4}$ ב. $\cos(\sphericalangle PAQ)=\frac{1}{3\sqrt{1+\alpha^2}}$ ג. $\alpha=\frac{1}{2}$

31) שאלת הוכחה.

32) שאלת הוכחה.

33) שאלת הוכחה.

34) שאלת הוכחה.

35) שאלת הוכחה.

36) שאלת הוכחה.

37) שאלת הוכחה.

38) שאלת הוכחה.

39) א. $\alpha+2\beta=1$ ב. שאלת הוכחה.

40) שאלת הוכחה.

סדנת ריענון במתמטיקה - מעודכן

פרק 21 - טריגונומטריה במשולש ישר זווית

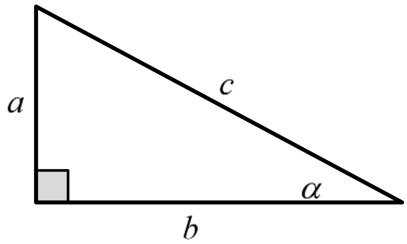
תוכן העניינים

1. משולש ישר זווית 251

משולש ישר זווית:

סיכום כללי:

הגדרות הפונקציות הטריגונומטריות:



$$\sin\alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{b}{c}$$

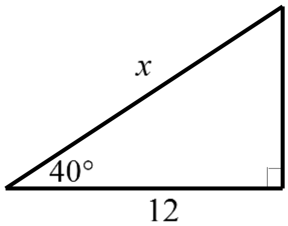
$$\tan\alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{הניצב שליד הזווית}} = \frac{a}{b}$$

משפט פיתגורס: $a^2+b^2=c^2$

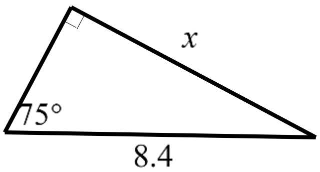
שאלות:

1) מצא את ערכו של α / x במשולשים ישרי הזווית הבאים:

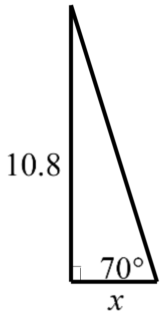
א.



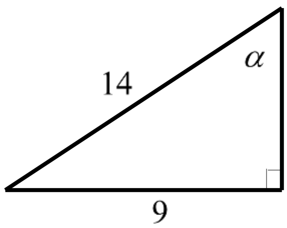
ב.



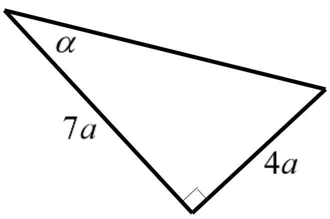
ג.



ד.



ה.

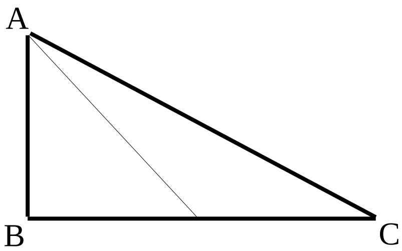


2) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\measuredangle B=90^\circ)$.

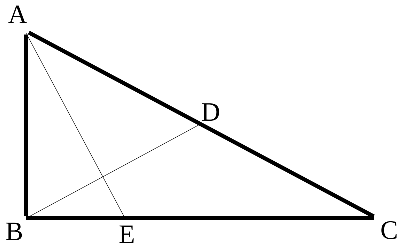
AD הוא התיכון לניצב BC.

נתון: $\measuredangle C=28^\circ$, AB = 6 ס"מ.

מצא את AD ואת $\measuredangle BAD$.

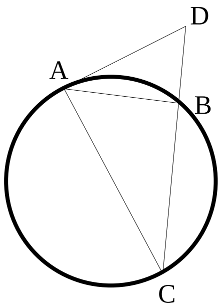


3) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle B=90^\circ)$. BD הוא התיכון ליתר ו-AE הוא חוצה הזווית $\sphericalangle A$.
נתון: BD = 5.6 ס"מ, BC = 8 ס"מ.
מצא את BE ואת $\sphericalangle BAE$.



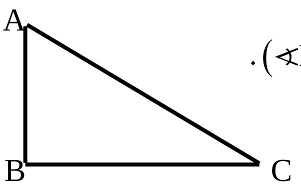
4) מצא את זוויותיו של מעוין שאורכי אלכסוניו 24 ס"מ ו-18 ס"מ.

5) המשולש ABC חסום במעגל כך שהצלע AC היא קוטר המעגל.
המשיק למעגל בנקודה A והמשך הצלע CB נפגשים בנקודה D.
נתון: BD=4 ס"מ, $\sphericalangle DAB=32^\circ$.
מצא את אורכו של רדיוס המעגל.

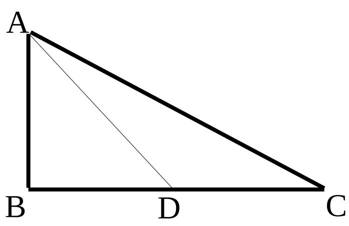


6) במשולש שווה שוקיים שבו השוק ארוכה ב-4 ס"מ מהבסיס נתון כי זווית הראש היא 34.92°. מצא את שטח המשולש.

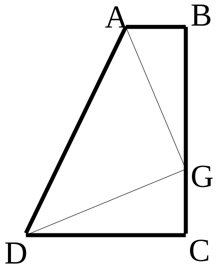
7) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle B=90^\circ)$.
נתון: $\sphericalangle A=\alpha$, $AB=a$.
הבע באמצעות α ו-a את היקף המשולש.



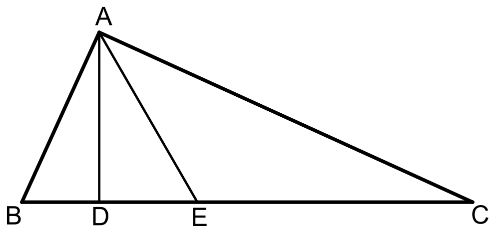
8) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle B=90^\circ)$.
AD הוא התיכון לניצב BC.
נתון: $\sphericalangle C=\alpha$, $AB=b$.
הבע באמצעות α ו-b את אורכי הקטעים BD ו-AD.



9) במשולש ישר זווית אחת הזוויות החדות היא α ואורך חוצה זווית זו הוא k.
הבע באמצעות α ו-k את שטח המשולש ואת אורך היתר.



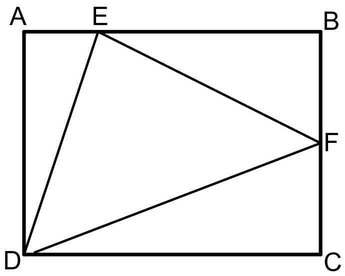
10) טרפז ABCD הוא טרפז ישר זווית $(\measuredangle B=\measuredangle C=90^\circ)$.
הנקודה G נמצאת על השוק BC כך ש- $AG\perp DG$.
נתון: $AG=DG=m$, $\measuredangle BAG=\beta$.
הבע באמצעות β ו- m את שטח הטרפז.



11) המשולש ABC הוא ישר זווית $(\measuredangle A=90^\circ)$.
הקטעים AD ו-AE הם בהתאמה גובה ליתר וחוצה זווית.
מסמנים: $DE=k$, $\measuredangle DAE=\alpha$.

א. הבע באמצעות k ו- α את שטח המשולש ABC.

ב. חשב את שטח המשולש ABC אם ידוע כי: $\alpha=30$ ו- $k=2$.



12) במלבן ABCD מסמנים את הנקודות E ו-F הנמצאות על הצלעות AB ו-BC בהתאמה כך ש-E מקיימת: $3AE=BE$ ו-F היא אמצע הצלע BC.
אורך הצלע AD שווה לאורך הקטע BE.
מעבירים את הקטעים EF , DF ו-DE כך שנוצר במשולש DEF.

א. סמן ב- t את אורך הקטע AE והבע באמצעות t את אורכי צלעות המשולש DEF.

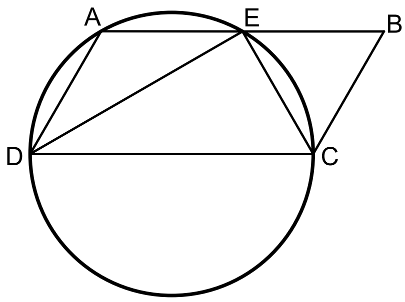
ב. חשב את זוויות המשולש EDF.

13) משולש שווה שוקיים שאורך שוקו k וזווית הבסיס שלו היא β חוסם מעגל.
הבע באמצעות β ו- k את רדיוס המעגל.

14) בטרפז ישר זווית חסום מעגל. אורך השוק הארוכה בטרפז היא b והזווית שהיא יוצרת עם הבסיס הגדול היא α .
הבע באמצעות α ו- b את אורכו של הבסיס הגדול בטרפז ואת שטחו.

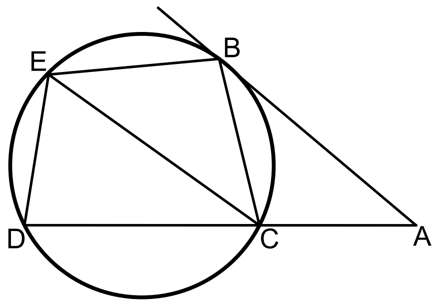
הערה: השאלות הבאות משלבות ידע בגיאומטריה ובטריגונומטריה יחד:

15) דרך הקודקודים A , C ו-D של המקבילית ABCD מעבירים מעגל. היקף המעגל חוצה את הצלע AB בנקודה E, $(AE = BE)$.
נתון כי DC הוא קוטר במעגל וכי המיתר DE חוצה את זווית D.



א. הוכח כי המיתר CE חוצה את זוויות C.
ב. רדיוס המעגל יסומן ב- R.
הבע באמצעות R את היקף המקבילית.
ג. מצא את רדיוס המעגל אם ידוע כי שטח המקבילית הוא $16\sqrt{3}$ סמ"ר.

16) מהנקודה A שמחוץ למעגל מעבירים משיק AB וישר חותך ACD.
מעבירים את המיתרים BC ו-BE אשר זהים באורכם.
כמו כן מעבירים את המיתר DE.
אורך המיתר CE שונה מאורך המשיק AB.



א. הוכח כי המרובע ABEC הוא טרפז.
ב. הוכח כי: $2\cdot\sphericalangle BEC = \sphericalangle EDC$.
ג. נתונים: $\sphericalangle A = 40^\circ$, AC = 6 ס"מ, AB = 9 ס"מ , CE = 8 ס"מ.
חשב את שטח המרובע ABEC.

תשובות סופיות:

1) א. $x=15.665$ ב. $x=8.114$ ג. $x=3.931$ ד. $\alpha=40.005°$ ה. $\alpha=29.745°$.

2) $\sphericalangle BAD=43.24°$, AD = 8.236 ס"מ.

3) $\sphericalangle BAE=22.792°$, BE = 3.294 ס"מ.

4) $106.26°$, $106.26°$, $73.74°$, $73.74°$.

5) $R=$ 6.04 ס"מ.

6) $S=$ 28.618 סמ"ר.

7) $P=a\left(1+\tan\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}\right)$.

8) $\text{BD}=\frac{b}{2\tan\alpha}$, $\text{AD}=\sqrt{b^2+\frac{b^2}{4\tan^2\alpha}}$.

9) $S=\frac{k^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\tan\alpha}{2}$, $\text{AC}=\frac{k\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.

10) $\frac{(m\sin\beta+m\cos\beta)^2}{2}$.

11) א. $S=\frac{k^2}{\cos2\alpha\tan^2\alpha}$ ב. 24 סמ"ר.

12) א. $\text{DF}=t\sqrt{18.25}$, $\text{EF}=t\sqrt{11.25}$, $\text{DE}=t\sqrt{10}$ ב. $47.14°$, $51°$, $81.86°$.

13) $R=k\cos\beta\tan\frac{\beta}{2}$.

14) $S=\frac{1}{2}b^2\sin\alpha(1+\sin\alpha)$, $\frac{1}{2}b\sin\alpha+\frac{\frac{1}{2}b\sin\alpha}{\tan\frac{\alpha}{2}}$.

15) א. שאלת הוכחה. ב. $6R$ ג. 4 ס"מ.

16) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. 32.78 סמ"ר.

סדנת ריענון במתמטיקה - מעודכן

פרק 22 - זהויות טריגונומטריות

תוכן העניינים

1. זהויות יסוד 256
2. ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות 260
3. מעגל היחידה 262
4. סכום והפרש זוויות 265
5. זווית כפולה 269
6. סכום והפרש פונקציות 272
7. מכפלת פונקציות 275

זהויות יסוד:

סיכום כללי:

קשרים בין פונקציות	$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$
זוויות משלימות ל- $90°$	$\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)$	$\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$
	$\cot\alpha=\tan(90°-\alpha)$	$\tan\alpha=\cot(90°-\alpha)$
קשרים בין פונקציות	$\cot^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}$	$\tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

שאלות:

הוכחת זהויות יסודיות:

הוכח את הזהויות הבאות תוך שימוש בזהויות היסוד:

1) $\tan\alpha\cdot\cos\alpha=\sin\alpha$

2) $\frac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=1$

3) $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\tan\alpha$

4) $\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha=1+\cos^2\alpha$

5) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}=2$

6) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$

7) $\frac{\cos(90°-\alpha)}{\cos\alpha}=\tan\alpha$

8) $\sin^2(\alpha+45°)+\sin^2(45°-\alpha)=1$

9) $\sqrt{1+\tan^2\alpha}\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\tan\alpha$

10) $\frac{\sin\alpha(1-\cos^2\alpha)}{\cos^3\alpha}=\tan^3\alpha$

11) $\frac{\sin(90°-\alpha)-\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha}=\cot\alpha$

12) $\cos^2\alpha(1+\tan^2\alpha)=1$

13) $\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\cot\alpha$

14) $\frac{\sin^3\alpha}{\sin(90°-\alpha)-\cos^3\alpha}=\tan\alpha$

15) $\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\tan^2\alpha\sin^2\alpha$

16) $\frac{1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha+\cot^2\alpha$

הוכחות מתקדמות:

17) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}+\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=2+4\cot^2\alpha$.

18) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}+\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{2}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$.

19) הוכח את הזהות הבאה: $(\cot\alpha-\tan\alpha)(\cot\alpha+\tan\alpha)=(1+\cot^2\alpha)(1+\tan\alpha)(1-\tan\alpha)$.

20) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{\sin^4\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\cot^4\alpha$.

21) הוכח את הזהות הבאה: $1-\sin^2\alpha(1+\cos^2\alpha)=\cos^4\alpha$.

22) הוכח את הזהות הבאה: $\left(\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\right)^2=4+4\cot^2\alpha$.

23) הוכח את הזהות הבאה: $\sin^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\beta\cos^2\alpha=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

24) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}=\tan\alpha\tan\beta$.

הבעת ביטויים וחישובים באמצעות זהויות יסוד:

25) נתון כי: $\sin\alpha+\cos\alpha=k$.
הבע באמצעות k את ערכי הביטויים הבאים:
א. $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.
ב. $\sin\alpha-\cos\alpha$.
ג. $\tan\alpha+\cot\alpha$.
ד. $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$.

26) נתון כי: $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$.
מבלי למצוא את α חשב את: $\tan^2\alpha-2\cot^2\alpha$.

27) נתון כי: $\tan\alpha=\sqrt{7}$.

מבלי למצוא את α חשב את: $\frac{\sqrt{7}\sin\alpha+6\cos\alpha}{\sqrt{28}\sin\alpha-\cos\alpha}$.

28) חשב את ערך המכפלה הבאה: $\tan1^\circ\cdot\tan2^\circ\cdot\tan3^\circ\cdot\cdots\cdot\tan88^\circ\cdot\tan89^\circ$.

תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.
11) שאלת הוכחה.
12) שאלת הוכחה.
13) שאלת הוכחה.
14) שאלת הוכחה.
15) שאלת הוכחה.
16) שאלת הוכחה.
17) שאלת הוכחה.
18) שאלת הוכחה.
19) שאלת הוכחה.
20) שאלת הוכחה.
21) שאלת הוכחה.
22) שאלת הוכחה.
23) שאלת הוכחה.
24) שאלת הוכחה.
25) א. $\frac{k^2-1}{2}$ ב. $\pm\sqrt{2-k^2}$ ג. $\frac{2}{k^2-1}$ ד. $\frac{k}{2}\left(3-k^2\right)$
26) -7.75
27) 1
28) 1

ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות:

סיכום כללי:

	$\alpha=0°$	$\alpha=30°$	$\alpha=45°$	$\alpha=60°$	$\alpha=90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ϕ
$\cot\alpha$	ϕ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

הערות:

- ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות של $0°$ ו- $90°$ תִלמדנהּ בהמשך אך ניתנו כעת כדי להשלים את תמונת ערכי הזוויות.
- ניתן לזכור את הטבלה ע"י כתיבה של שורת הסינוס לפי: $\frac{\sqrt{0}}{2},\frac{\sqrt{1}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{4}}{2}$ אשר נותנים את הערכים של השורה הראשונה לאחר פישוט קל.
עבור שורת ה- $\cos\alpha$ יש להפוך את הערכים ולבסוף יש לחלק כל זוג ביטויים כדי לכתוב את ערכי $\tan\alpha$ ולסובב עבור ערכי $\cot\alpha$.

שאלות:

חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בערכי הפונקציות הטריגונומטריות של זוויות מיוחדות:

1) $\sin 30° + \cos 30°$.

2) $\frac{\sin 30° \cdot \cos 30°}{\sin 60°}$.

3) $\tan 45° + \frac{\sin 45°}{\cos 45°}$.

4) $\frac{1+\cos 60°}{2\sin 60°}$.

5) $\cos^2 45° + \sin^2 30°$.

6) $\frac{\tan^2 60° \cdot \cos^2 30°}{\cos^2 60°}$.

7) $\frac{\tan 30° \cdot \cot 60° - \cot 45° \cdot \tan 45°}{4\left(\sin^2 60° - \frac{1}{4}\right)}$.

8) $\frac{27\cot^4 60°}{\sin 30° \cdot \cos 45° \cdot \tan 60°}$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

2) $\frac{1}{2}$

3) 2

4) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$

5) $\frac{3}{4}$

6) 9

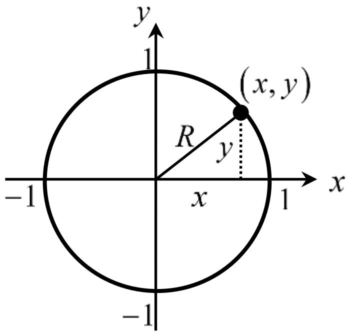
7) $-\frac{1}{3}$

8) $2\sqrt{6}$

מעגל היחידה – הגדרה וזהויות:

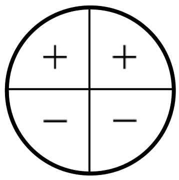
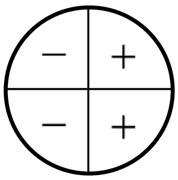
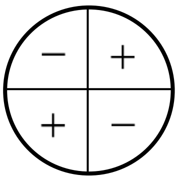
סיכום כללי:

הגדרת מעגל היחידה:



- מעגל קנוני שרדיוסו 1 מוגדר להיות המעגל הטריגונומטרי.
- הנקודות $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ מתאימות לזוויות של $0°$, $90°$, $180°$, $270°$.

הזהויות של המעגל הטריגונומטרי:

<table>
<tr><th>רביע</th><th>סינוס</th><th>קוסינוס</th><th>טנגנס</th></tr>
<tr><td>II
III
VI</td><td>$\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$
$\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha$
$\sin(-a)=-\sin\alpha$</td><td>$\cos(180^o-\alpha)=-\cos\alpha$
$\cos(180^o+\alpha)=-\cos\alpha$
$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$</td><td>$\tan(180^o-\alpha)=-\tan\alpha$
$\tan(180^o+\alpha)=\tan\alpha$
$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$</td></tr>
<tr><td>סימנים</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

זהויות עבור זווית הגדולות מ-360 מעלות:

ניתן להוסיף או להוריד 'סיבובים' שלמים לזווית לפי:

$$\boxed{\begin{array}{l}\tan(\alpha+180°k)=\tan\alpha\\ \cot(\alpha+180°k)=\cot\alpha\end{array}} \quad , \quad \boxed{\begin{array}{l}\sin(\alpha+360°k)=\sin\alpha\\ \cos(\alpha+360°k)=\cos\alpha\end{array}}$$

כאשר k הוא מספר שלם מציין את מספר הסיבובים.

שאלות:

1) העבר את הביטויים הבאים לביטויים עם זווית ברביע הראשון.
אין צורך לחשב את ערך הביטוי:

א. $\sin 120°$
ב. $\cos 150°$
ג. $\tan 160°$
ד. $\cot 130°$
ה. $\sin 215°$
ו. $\cos 245°$
ז. $\tan 230°$
ח. $\cot 200°$
ט. $\sin 300°$
י. $\cos 310°$

2) חשב את ערכי הביטויים הבאים ע"י שימוש בזהויות המעגל הטריגונומטרי:

א. $\sin 150°$
ב. $\cos 210°$
ג. $\tan 120°$
ד. $\sin 330°$
ה. $\tan 225°$
ו. $\sin 315°$
ז. $\cos 120°$
ח. $\tan(-30°)$
ט. $\cos(-45°)$
י. $\sin 510°$
יא. $\cos 930°$
יב. $\tan(-225°)$

3) חשב את ערכי הביטויים הבאים ללא שימוש במחשבון:

א. $\left(\sin 240° \cdot \tan 150° + \cos(-60°)\right)^2$.
ב. $8\sin^2 150° \cdot \tan 135° - 2 \cdot \sin 135° \cdot \cos(-135°)$.
ג. $\dfrac{\cot 225°}{\sin(-225°) - \cos 135°} + \tan^2 210°$.

4) הוכח כי אם α, β ו- γ הן זוויות במשולש, אז מתקיים:

א. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma$.
ב. $\sin\left(\dfrac{\gamma+\beta}{2}\right) = \cos\dfrac{\alpha}{2}$.

תשובות סופיות:

1) א. $\sin 60^\circ$ ב. $-\cos 30^\circ$ ג. $-\tan 20^\circ$ ד. $-\cot 50^\circ$
ה. $-\sin 35^\circ$ ו. $-\cos 65^\circ$ ז. $\tan 50^\circ$ ח. $\cot 20^\circ$
ט. $-\sin 60^\circ$ י. $\cos 50^\circ$

2) א. $\frac{1}{2}$ ב. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ג. $-\sqrt{3}$ ד. $-\frac{1}{2}$
ה. 1 ו. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ז. $-\frac{1}{2}$ ח. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
ט. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ י. $\frac{1}{2}$ יא. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ יב. -1

3) א. 1 ב. -1 ג. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3}$.

4) שאלת הוכחה.

סכום והפרש זוויות:

סיכום כללי:

סכום והפרש עבור $\sin(\alpha\pm\beta)$ ו- $\cos(\alpha\pm\beta)$ יחושב לפי:

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha\\&\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}}.$$

סכום והפרש עבור $\tan(\alpha\pm\beta)$ ו- $\cot(\alpha\pm\beta)$

$$\boxed{\begin{aligned}&\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}\\&\cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}\end{aligned}}.$$

הערה:

בסרטון התיאוריה אין התייחסות מיוחדת לזהויות עבור $\tan(\alpha\pm\beta)$ ו- $\cot(\alpha\pm\beta)$.

שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בזהויות של סכום והפרש זוויות וללא שימוש במחשבון:

א. $\sin 75^\circ$ ב. $\sin 15^\circ$ ג. $\sin 105^\circ$

ד. $\sin(-15^\circ)$ ה. $\cos 75^\circ$ ו. $\cos 15^\circ$

ז. $\cos(-105^\circ)$ ח. $\cos 165^\circ$ ט. $\cos(-195^\circ)$

2) חשב ללא שימוש במחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sin 65^\circ\cos 25^\circ+\sin 25^\circ\cos 65^\circ$.

ב. $5\cos 50^\circ\cos 20^\circ+5\sin 50^\circ\sin 20^\circ$.

3) הוכח את הזהויות הבאות:

א. $\sin\left(60^\circ+\alpha\right)+\sin\left(60^\circ-\alpha\right)=\sqrt{3}\cos\alpha$.

ב. $\cos\left(45^\circ-\alpha\right)-\cos\left(45^\circ+\alpha\right)=\sqrt{2}\sin\alpha$.

ג. $\sin\left(\alpha+\beta\right)\cdot\sin\left(\alpha-\beta\right)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

ד. $\tan\alpha-\tan\beta=\dfrac{\sin\left(\alpha-\beta\right)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

4) נתון: $\cos\beta=\dfrac{8}{17}$, $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$ ו- α,β זוויות חדות.

מבלי למצוא את הערכים של α ו- β חשב:

א. $\sin\left(\alpha+\beta\right)$.

ב. $\cos\left(\alpha+\beta\right)$.

ג. $\tan\left(\alpha+\beta\right)$.

5) הוכח את הזהות: $\sin\left(\alpha+\beta\right)-\sin\left(\alpha-\beta\right)=2\sin\beta\cos\alpha$.

6) הוכח את הזהות: $\left(\sin\alpha+\cos\alpha\right)\left(\sin2\alpha+\cos2\alpha\right)=\sin3\alpha+\cos\alpha$.

7) הוכח את הזהות: $\tan7\alpha-\tan5\alpha-\tan2\alpha=\tan7\alpha\tan5\alpha\tan2\alpha$.

8) הוכח את הזהות: $\dfrac{\sin\left(\alpha-\beta\right)}{\cos\left(\alpha+\beta\right)}=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$.

9) הוכח את הזהות: $\cot\alpha-\cot\beta=\dfrac{\sin\left(\beta-\alpha\right)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

10) הוכח את הזהות הבאה:

$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\sin\left(\alpha+\beta+\gamma\right)$.

11) הוכח כי מתקיים: $\sin 65^\circ \cos 25^\circ + \sin 25^\circ \cos 65^\circ = 1$.

12) הוכח כי מתקיים: $\tan 18^\circ \tan 27^\circ + \tan 18^\circ + \tan 27^\circ = 1$.

13) נתון כי: $\sin 76^\circ = m$. הבע את $\sin 31^\circ$ באמצעות m.

14) הזוויות α ו- β הן זוויות חדות.

נתון כי: $\tan\alpha = \frac{(2-k)\sqrt{3}}{3k}$ ו- $\tan\beta = \frac{(2k-1)\sqrt{3}}{3}$.

הראה כי מתקיים: $\alpha + \beta = 60^\circ$.

15) היעזר בנוסחה: $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \tan\beta}$ ומצא את $\tan x$ ו- $\tan y$

אם ידוע כי: $\tan(x+y) = -3$ ו- $\tan(x-y) = \frac{1}{3}$. הבחן בין שני מקרים.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ב. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ג. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ד. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ ה. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

ו. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ז. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ ח. $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ט. $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2) א. 1 ב. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

3) שאלת הוכחה.

4) א. $\frac{84}{85}$ ב. $-\frac{13}{85}$ ג. $-6\frac{6}{13}$

5) שאלת הוכחה.

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(m-\sqrt{1-m^2}\right)$.

15) שאלת הוכחה.

16) 1 ו-2 או $-\frac{1}{2}$ ו- -1.

זווית כפולה:

סיכום כללי:

נפתח זווית כפולה לפי הצורות הבאות:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha \end{array}}$$

שאלות:

1) הוכח את הזהויות הבאות:

א. $4\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha = \sin 4\alpha$

ב. $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$

ג. $(\sin 3\alpha - \cos 3\alpha)^2 = 1 - \sin 6\alpha$

ד. $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$

ה. $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2\cot 2\alpha$

ו. $\frac{\cos 2\alpha - 2\sin^2\alpha\cos 2\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{1}{2}\cot 2\alpha$

ז. $\cos^2 2\alpha = 4\sin^4\alpha - 4\sin^2\alpha + 1$

ח. $\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$

2) הוכח את הזהות: $\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}$ ע"י כתיבה של $\sin 3\alpha$ לפי: $\sin(\alpha + 2\alpha)$ ושימוש בזהויות שנלמדו.

3) הוכח את הזהות: $\cos^3\alpha = \frac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4}$ ע"י כתיבה של $\cos 3\alpha$ לפי: $\cos(\alpha + 2\alpha)$ ושימוש בזהויות שנלמדו.

4) נתונה זווית חדה α המקיימת: $\sin\alpha = \frac{40}{41}$. מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א. $\cos\alpha$.

ב. $\tan\alpha$.

ג. $\sin 2\alpha$.

ד. $\cos 2\alpha$.

ה. $\tan 2\alpha$.

5) נתונה זווית חדה α המקיימת: $\tan\alpha = \frac{5}{12}$. מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א. $\sin\alpha$.

ב. $\cos\alpha$.

ג. $\sin 2\alpha$.

ד. $\cos 2\alpha$.

6) נתונה זווית α ברביע הראשון וזווית β ברביע השני המקיימות: $\sin\alpha = \frac{5}{13}$
ו- $\cos\beta = -0.8$. מבלי למצוא את α ו- β חשב את הביטויים הבאים:

א. $\sin(\alpha+\beta)$.

ב. $\cos(\alpha+\beta)$.

ג. $\sin(2\alpha+\beta)$.

7) נתון כי $\sin\alpha + \cos\alpha = 1.2$ עבור $0° < \alpha < 90°$. חשב את $\sin 2\alpha$.

8) פשט את הביטוי הבא: $\sqrt{\frac{1+\cos 8\alpha}{2}}$.

9) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sin 16° \cos 16°}{3-6\sin^2 29°}$.

10) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sin^2 78° - \cos^2 78°}{\sin 66°}$.

11) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא: $\frac{5\tan 15°\left(1-2\cos^2 15°\right)}{1-\tan^2 15°}$.

תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.

2) שאלת הוכחה.

3) שאלת הוכחה.

4) א. $\frac{9}{41}$ ב. $4\frac{4}{9}$ ג. $\frac{720}{1681}$ ד. $-\frac{1519}{1681}$
ה. $-\frac{720}{1519}$

5) א. $\frac{5}{13}$ ב. $\frac{12}{13}$ ג. $\frac{120}{169}$ ד. $\frac{119}{169}$

6) א. $\frac{16}{65}$ ב. $-\frac{63}{65}$ ג. $-\frac{123}{845}$

7) 0.44.

8) $\cos 4\alpha$.

9) $\frac{1}{6}$.

10) 1.

11) -1.25.

סכום והפרש פונקציות טריגונומטריות:

סיכום כללי:

להלן נוסחאות הסכום וההפרש של פונקציות טריגונומטריות:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

הערה:

בסרטון התיאוריה אין התייחסות לזהויות הסכום וההפרש של טנגנס ושל קוטנגנס עקב חוסר השימוש בהן בפתרון שאלות.

שאלות:

1) הוכח את הזהות הבאה: $\sin 5\alpha+\sin 3\alpha=2\sin 4\alpha\cos\alpha$.

2) הוכח את הזהות הבאה: $\sin 7\alpha-\sin 2\alpha=2\sin 2.5\alpha\cos 4.5\alpha$.

3) הוכח את הזהות הבאה: $\cos\alpha+\cos 5\alpha=2\sin 2\alpha\cos 3\alpha$.

4) הוכח את הזהות הבאה: $\cos 5\alpha-\cos 2\alpha=-2\sin 3.5\alpha\cos 1.5\alpha$.

5) הוכח את הזהות הבאה: $\sin 3\alpha=2\sin 2\alpha\cos\alpha-\sin\alpha$.

6) הוכח את הזהות הבאה: $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

7) הוכח את הזהות הבאה: $\sin(2\alpha+\beta)-2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\sin\beta$.

8) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{\sin 5\alpha-\sin\alpha}{\sin 4\alpha-\sin 2\alpha}=2\cos\alpha$.

9) הוכח את הזהות הבאה: $2\sin\alpha = \frac{\sin 7\alpha - \sin 3\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 6\alpha}$.

10) הוכח את הזהות הבאה: $\tan 2\alpha = \frac{\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}$.

11) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{2\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha} = \tan\alpha + \tan 3\alpha$.

12) פשט את הביטוי: $\frac{1+\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1}$ ומצא את ערכו מבלי להיעזר
במחשבון אם ידוע כי $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{6}$.

13) נתון כי α ו- β הן זוויות חדות המקיימות: $\sin\alpha = \frac{2mn}{m^2+n^2}$ ו- $\sin\beta = \frac{n^2-m^2}{m^2+n^2}$.
הראה כי: $\alpha + \beta = 90^\circ$.

14) היעזר במעבר מכפל לסכום או הפרש
והוכח כי: $\cos 6\alpha\cos 2\alpha - \cos 5\alpha\cos\alpha = -\sin 7\alpha\sin\alpha$.

15) היעזר במעבר מכפל לסכום או הפרש
והוכח כי: $\sin 4\alpha\sin 2\alpha - \sin 5\alpha\sin\alpha + \cos 3\alpha\cos\alpha = \cos 2\alpha$.

16) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\sin 52.5^\circ \cdot \sin 7.5^\circ$.

17) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sin 35^\circ \sin 55^\circ}{\cos 40^\circ \cos 20^\circ - 0.25}$.

18) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$.

19) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\sin 5^\circ \cdot \sin 25^\circ \cdot \sin 35^\circ \cdot \sin 55^\circ \cdot \sin 65^\circ \cdot \sin 85^\circ$.

תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.
11) שאלת הוכחה.
12) $-\frac{7}{9}$.
13) שאלת הוכחה.
14) שאלת הוכחה.
15) שאלת הוכחה.
16) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$.
17) 1.
18) $\frac{1}{8}$.
19) $\frac{1}{64}$.

מכפלת פונקציות:

סיכום כללי:

להלן נוסחאות המעבר מסכום למכפלה וממכפלה לסכום:

$$\begin{cases} \sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right] \\ \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right] \\ \sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \end{cases}$$

שאלות:

1) הוכח את הזהות הבאה: $\sin 7\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}(\sin 8\alpha+\sin 6\alpha)$.

2) הוכח את הזהות הבאה: $\cos 11\alpha\sin 3\alpha=\frac{1}{2}(\sin 14\alpha-\sin 8\alpha)$.

3) הוכח את הזהות הבאה: $\cos 4\alpha\cos 10\alpha=\frac{1}{2}(\cos 6\alpha+\cos 14\alpha)$.

4) הוכח את הזהות הבאה: $\sin 3\alpha\sin 7\alpha=\frac{1}{2}(\cos 4\alpha-\cos 10\alpha)$.

5) הוכח את הזהות הבאה: $2\sin 7\alpha\sin 2\alpha+\cos 9\alpha=\cos 5\alpha$.

6) הוכח את הזהות הבאה: $\sin 7\alpha\cos 4\alpha-\sin 4\alpha\cos\alpha=\sin 3\alpha\cos 8\alpha$.

7) הוכח את הזהות הבאה: $\sin\alpha\sin 3\alpha=\cos 2\alpha-\cos 3\alpha\cos\alpha$.

8) הוכח את הזהות הבאה: $2\left(\sin^2\beta-\sin^2\alpha\right)=\cos 2\alpha-\cos 2\beta$.

9) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{2}{\cot\beta-\tan\alpha}=\tan(\alpha+\beta)-\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.
7) הוכחה.
8) הוכחה.
9) הוכחה.

סדנת ריענון במתמטיקה - מעודכן

פרק 23 - משוואות טריגונומטריות

תוכן העניינים

1. משוואות טריגונומטריות כלליות 277
2. משוואות הנפתרות עי טכניקה אלגברית 280
3. משוואות הנפתרות על ידי זהויות יסוד 282
4. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של מעגל היחידה 284
5. משוואות הנפתרות על ידי חלוקה בקוסינוס 285
6. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש זוויות 286
7. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של זווית כפולה 287
8. משוואות מהצורה $a \sin(x)+b \cos(x)=c$ 288
9. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש פונקציות 289
10. משוואות עם תחום נתון 291
11. משוואות עם זוויות ברדיאנים 292
12. אי שוויונים טריגונומטריים 296

משוואות טריגונומטריות כלליות:

סיכום כללי:

פתרון כללי של משוואות טריגונומטריות (במעלות):

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריגונומטריות היסודיות
כאשר x הוא משתנה ו- α היא זווית נתונה/ידועה :

המשוואה	הפתרון
$\sin x = \sin\alpha$	$x_1 = \alpha + 360°k \ \ , \ x_2 = 180° - \alpha + 360°k$
$\cos x = \cos\alpha$	$x_{1,2} = \pm\alpha + 360°k$
$\tan x = \tan\alpha$	$x = \alpha + 180°k$
$\cot x = \cot\alpha$	$x = \alpha + 180°k$

כאשר k מספר שלם.

שאלות:

1) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הסינוס) :

א. $\sin x = \frac{1}{2}$ ב. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ג. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ד. $\sin x = -\frac{1}{2}$

2) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הקוסינוס) :

א. $\cos x = \frac{1}{2}$ ב. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הטנגנס) :

א. $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ב. $\tan x = -1$

4) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (זווית כללית):

א. $\sin x = 0.7$
ב. $\cos x = -0.6$
ג. $\tan x = 5$

5) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות לא מסודרות):

א. $\sin 3x = \frac{1}{2}$
ב. $2\cos 2x = -\sqrt{3}$
ג. $\tan 5x = -1$
ד. $3\sin 2x = 2$
ה. $3\cos 3x = 1$
ו. $2\tan 4x = 1$

6) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (ארגומנט מורכב):

א. $\sin(2x + 30°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
ב. $\cos(75° - 3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
ג. $\tan(50° - x) = 1.3$

7) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציות עם ארגומנטים שונים):

א. $\sin x = \sin 3x$
ב. $\sin 2x = \sin(x + 30°)$
ג. $\sin x = \sin(120° - x)$
ד. $\cos x = \cos 3x$
ה. $\cos x = \cos(40° - x)$
ו. $\tan x = \tan 3x$
ז. $\tan 2x = \tan(60° - x)$

8) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות מיוחדות):

א. $\sin x = 0$
ב. $\sin x = 1$
ג. $\sin x = -1$
ד. $\cos x = 0$
ה. $\cos x = 1$
ו. $\cos x = -1$
ז. $\tan x = 0$
ח. $\tan x = 1$

תשובות סופיות:

1) א. $x_1=30^\circ+360^\circ k\ ,\ x_2=150^\circ+360^\circ k$ ב. $x_1=45^\circ+360^\circ k\ ,\ x_2=135^\circ+360^\circ k$

ג. $x_1=-60^\circ+360^\circ k\ ,\ x_2=240^\circ+360^\circ k$ ד. $x_1=-30^\circ+360^\circ k\ ,\ x_2=210^\circ+360^\circ k$.

2) א. $x_{1,2}=\pm60^\circ+360^\circ k$ ב. $x_{1,2}=\pm150^\circ+360^\circ k$.

3) א. $x=30^\circ+180^\circ k$ ב. $x=135^\circ+180^\circ k$.

4) א. $x_1=44.427^\circ+360^\circ k\ ,\ x_2=135.573^\circ+360^\circ k$

ב. $x_{1,2}=126.87^\circ+360^\circ k$ ג. $x=78.69^\circ+180^\circ k$.

5) א. $x_1=10^\circ+120^\circ k\ ,\ x_2=50^\circ+120^\circ k$ ב. $x_1=75^\circ+180^\circ k\ ,\ x_2=-75^\circ+180^\circ k$

ג. $x=-9^\circ+36^\circ k$ ד. $x_1=20.9^\circ+180^\circ k\ ,\ x_2=69.09^\circ+180^\circ k$

ה. $x_{1,2}=\pm23.5^\circ+120^\circ k$ ו. $x=6.64^\circ+45^\circ k$.

6) א. $x_1=105^\circ+180^\circ k\ ,\ x_2=-45^\circ+180^\circ k$

ב. $x_1=10^\circ+120^\circ k\ ,\ x_2=40^\circ+120^\circ k$ ג. $x=-2.431^\circ+180^\circ k$.

7) א. $x_1=180^\circ k\ ,\ x_2=45^\circ+90^\circ k$ ב. $x_1=30^\circ+360^\circ k\ ,\ x_2=50^\circ+120^\circ k$

ג. $x=60^\circ+180^\circ k$ ד. $x=90^\circ k$

ה. $x=20^\circ+180^\circ k$ ו. $x=180^\circ k$ ז. $x=20^\circ+60^\circ k$.

8) א. $x=180^\circ k$ ב. $x=90^\circ+360^\circ k$ ג. $x=180^\circ+360^\circ k$

ד. $x=90^\circ+180^\circ k$ ה. $x=360^\circ k$ ו. $x=180^\circ+360^\circ k$

ז. $x=180^\circ k$ ח. $x=45^\circ+180^\circ k$.

משוואות הנפתרות ע"י טכניקה אלגברית:

סיכום כללי:

נעזר בטכניקה אלגברית בכדי להביא משוואה מורכבת לצורה של משוואה יסודית.

טכניקות שכיחות:

- הוצאת שורש ריבועי.
- פירוק לגורמים (ע״י הוצאת גורם משותף, ע״י נוסחאות הכפל המקוצר וע״י פירוק טרינום).
- פתרון משוואה ריבועית.

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (טכניקה אלגברית):

1) $\cos^2 x = \frac{3}{4}$

2) $\sin^2 x = \frac{1}{4}$

3) $\tan^2 2x = 3$

4) $\sin x \cos 3x = 0$

5) $\sin 2x - 2\sin^2 2x = 0$

6) $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x = 0$

7) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

8) $3\sin^2 x - \sin x = 2$

9) $6\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

10) $\cos^2 x + 2\cos x = 3$

11) $\tan^2 x - 3\tan x - 4 = 0$

12) $\tan^2 x = 4\tan x - 1$

13) $\cos x - \frac{2}{\cos x} + 1 = 0$

14) $\frac{\sin x}{\cos x - 1} = 0$

15) $\frac{\cos 2x}{\tan x + 1} = 0$

תשובות סופיות:

1) $x_{1,2}=\pm30°+360°k\ ,\ x_{3,4}=\pm150°+360°k$.

2) $x_1=30°+360°k\ ,\ x_2=150°+360°k\ ,\ x_3=330°+360°k\ ,\ x_4=210°+360°k$.

3) $x_1=30°+90°k\ ,\ x_2=-30°+90°k$.

4) $x_1=180°k\ ,\ x_2=30°+60°k$.

5) $x_1=90°k\ ,\ x_2=15°+180°k\ ,\ x_3=75°+180°k$.

6) $x_1=90°+180°k\ ,\ x_{2,3}=\pm150°+360°k$.

7) $x_1=90°+360°k\ ,\ x_2=210°+360°k\ ,\ x_3=-30°+360°k$.

8) $x_1=90°+360°k\ ,\ x_2=-41.8°+360°k\ ,\ x_3=221.8°+360°k$.

9) $x_1=30°+360°k,\ x_2=150°+360°k,\ x_3=-19.4°+360°k,\ x_4=199.4°+360°k$.

10) $x=360°k$.

11) $x_1=-45°+180°k\ ,\ x_2=75.964°+180°k$.

12) $x_1=75°+180°k\ ,\ x_2=15°+180°k$.

13) $x=360°k$.

14) $x=180°+360°k$.

15) $x=45°+90°k\ ,\ x\neq-45°+180°k$.

משוואות הנפתרות ע"י זהויות יסוד:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת.
לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות היסוד הטריגונומטריות:

קשרים בין פונקציות	$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$
זוויות משלימות ל- $90°$	$\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)$	$\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$
	$\cot\alpha=\tan(90°-\alpha)$	$\tan\alpha=\cot(90°-\alpha)$
קשרים בין פונקציות	$\cot^2\alpha+1=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$	$\tan^2\alpha+1=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

1) $\sin x=\cos x$

2) $\sin x=\cos(x+45°)$

3) $\cos x=\dfrac{2}{3}\sin^2 x$

4) $2\cos^2 x=3\sin x$

5) $\sin^2 x-\cos x=\dfrac{1}{4}$

6) $\cos^2 x-\sin^2 x=\sin x$

7) $\sin^2 x+2\cos^2 x=1.5$

8) $\sin x-\tan x=0$

תשובות סופיות:

1) $x=45°+180°k$.

2) $x=22.5°+180°k$.

3) $x_{1,2}=\pm60°+360°k$.

4) $x_1=30°+360°k$, $x_2=150°+360°k$.

5) $x_{1,2}=\pm60°+360°k$.

6) $x_1=30°+120°k$, $x_2=-90°+360°k$

7) $x_{1,2}=\pm45°+360°k$, $x_{3,4}=\pm135°+360°k$.

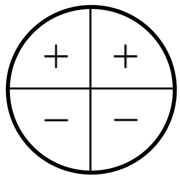
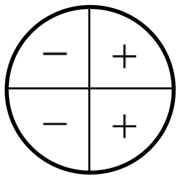
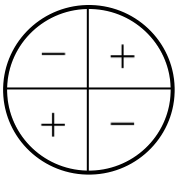
8) $x=180°k$.

משוואות הנפתרות ע"י זהויות של מעגל היחידה:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת.
לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של מעגל היחידה:

רביע	סינוס	קוסינוס	טנגנס
I II III	$\sin\left(180^o-\alpha\right)=\sin\alpha$ $\sin\left(180^o+\alpha\right)=-\sin\alpha$	$\cos\left(180^o-\alpha\right)=-\cos\alpha$ $\cos\left(180^o+\alpha\right)=-\cos\alpha$ $\cos\left(-\alpha\right)=\cos\alpha$	$\tan\left(180^o-\alpha\right)=-\tan\alpha$ $\tan\left(180^o+\alpha\right)=\tan\alpha$ $\tan\left(-\alpha\right)=-\tan\alpha$
סימנים			

זהויות עבור זוויות הגדולות מ-360 מעלות:

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin\left(\alpha+360°k\right)=\sin\alpha\\ \cos\left(\alpha+360°k\right)=\cos\alpha\end{array}}\quad,\quad\boxed{\begin{array}{l}\tan\left(\alpha+180°k\right)=\tan\alpha\\ \cot\left(\alpha+180°k\right)=\cot\alpha\end{array}}$$

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

1) $\sin x=-\sin 3x$
2) $\cos 2x=-\cos 3x$
3) $\sin\left(x+30°\right)=-\cos x$
4) $\sin 3x=-\cos\left(180°-x\right)$

תשובות סופיות:

1) $x_1=90°k\ ,\ x_2=-90°+180°k$
2) $x_1=180°+360°k\ ,\ x_2=36°+72°k$
3) $x=120°+180°k$
4) $x_1=22.5°+90°k\ ,\ x_2=45°+180°k$

משוואות הנפתרות על ידי חלוקה בקוסינוס:

סיכום כללי:

טכניקה יעילה כדי להעביר משוואה מהצורה: $\sin x = a\cos x$ לפונקציה טריגונומטרית אחת היא ע"י חלוקה ב- $\cos x$ (בתנאי ש- $\cos x \neq 0$).
כך מתקבלת המשוואה:

$$\sin x = a\cos x \quad /:\cos x \neq 0$$
$$\frac{\sin x}{\cos x} = a\frac{\cos x}{\cos x}$$
$$\tan x = a$$
$$x = \tanh^{-1}(a) + 180°k$$

הערה:

יש לבדוק האם ערכי x שמקיימים $\cos x = 0$ מהווים פתרון למשוואה.
אם כן אז יש להוסיף אותם לפתרון הסופי.

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

1) $\sin x = 2\cos x$

2) $3\sin x = \cos x$

3) $4\sin x = 7\cos x$

4) $2\sin x = -5\cos x$

5) $\sin^2 x = 8\cos^2 x$

6) $3\sin^2 x = \cos^2 x$

תשובות סופיות:

1) $x = 63.43° + 180°k$.

2) $x = 18.43° + 180°k$.

3) $x = 60.25° + 180°k$.

4) $x = -68.19° + 180°k$.

5) $x_1 = 70.52° + 180°k$, $x_2 = -70.52° + 180°k$.

6) $x_1 = 30° + 180°k$, $x_2 = -30° + 180°k$.

משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש זוויות:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת.
לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של סכום והפרש זוויות:

סכום והפרש עבור סינוס וקוסינוס	$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha$ $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$
סכום והפרש עבור טנגנס וקוטנגנס	$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$ $\cot(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}$

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

1) $2\sin x=\sin(60^\circ-x)$

2) $\sin(x+45^\circ)\sin(x-45^\circ)=\dfrac{1}{2}$

3) $\dfrac{\cos 3x}{\sin x}-\dfrac{\sin 3x}{\cos x}=2$

4) $3\cos^2 x-\sin^2 x=\sin 3x$

תשובות סופיות:

1) $x=19.11^\circ+180^\circ k$.

2) $x=90^\circ+180^\circ k$.

3) $x=15^\circ+60^\circ k$.

4) $x_{1,2}=\pm60^\circ+180^\circ k$, $x_3=90^\circ+360^\circ k$.

משוואות הנפתרות ע"י זהויות של זווית כפולה:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת.
לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של זווית כפולה:

סינוס זווית כפולה	$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
קוסינוס זווית כפולה	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

1) $\sin x - \sin 2x = 0$

2) $\sqrt{2}\sin x + \sin 2x = 0$

3) $4\cos x = \sin 2x$

4) $2\cos 2x + \sin 4x = 0$

5) $3\cos x - \cos 2x = 0$

6) $\cos 2x = 2\sin x$

7) $\sin x + \cos 2x = 1$

8) $2\sin^2 x = \cos 2x + 2$

תשובות סופיות:

1) $x_1 = 360°k\ ,\ x_2 = 60° + 120°k$

2) $x_1 = 180°k\ ,\ x_{2,3} = \pm 135° + 360°k$

3) $x = 90° + 180°k$

4) $x_1 = 45° + 90°k\ ,\ x_2 = 135° + 180°k$

5) $x_{1,2} = \pm 106.307° + 360°k$

6) $x_1 = 21.1° + 360°k\ ,\ x_2 = 158.9° + 360°k$

7) $x_1 = 180°k\ ,\ x_2 = 30° + 360°k\ ,\ x_3 = 150° + 360°k$.

8) $x_1 = -60 + 360°k\ ,\ x_2 = 60° + 360°k\ ,\ x_3 = 120° + 360°k\ ,\ x_4 = 240° + 360°k$.

משוואות מהצורה: a sin(x) + b cos(x) = c :

סיכום כללי:

ניתן להביא משוואה מהצורה: $a\sin x+b\cos x=c$ לצורה: $\sin x+\frac{b}{a}\cos x=\frac{c}{a}$.

מציאת זווית α המקיימת: $\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ תאפשר לכתוב: $\sin x+\tan\alpha\cdot\cos x=\frac{c}{a}$.

שימוש בזהות: $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ובזהות: $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$ יובילו:

$$\sin x+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos x=\frac{c}{a}\quad /\cdot\cos\alpha$$

$$\sin x\cos\alpha+\sin\alpha\cos x=\frac{c}{a}\cos\alpha$$

$$\sin(x+\alpha)=\frac{c}{a}\cos\alpha$$

אם נסמן: $\frac{c}{a}\cos\alpha=k$ נקבל את המשוואה: $\sin(x+\alpha)=k$ כאשר α ו-k ידועים.
מכאן הפתרון הוא ישיר לפי משוואת סינוס.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $10\sin x+3\cos x=5$

2) $5\cos x-6\sin x=1$

3) $\sqrt{3}\sin 2x+3\cos 2x=\sqrt{12}$

4) $\frac{1}{2}\sin x+\sqrt{3}\cos^2\frac{x}{2}=\cos\frac{x}{2}$

5) $\cos x+\cos(60^\circ+x)=\sqrt{2}+\cos(60^\circ-x)$

תשובות סופיות:

1) $x_1=11.91^\circ+360^\circ k\ ,\ x_2=134.69^\circ+360^\circ k$

2) $x_1=227.156^\circ+360^\circ k\ ,\ x_2=32.44^\circ+360^\circ k$

3) $x=15^\circ+180^\circ k$

4) $x_1=-60^\circ+720^\circ k\ ,\ x_2=180^\circ+360^\circ k$

5) $x_1=-105^\circ+360^\circ k\ ,\ x_2=15^\circ+360^\circ k$

משוואות הנפתרות ע"י זהויות של סכום והפרש פונקציות:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת.
לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של סכום והפרש פונקציות:

סכום והפרש פונקציות עבור סינוס	$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$
סכום והפרש פונקציות עבור קוסינוס	$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

1) $\sin x+\sin 3x=\sin 2x$.

2) $\cos 2x-\cos 6x=\sin 2x$.

3) $\sin x+\sin 3x=4\sin^3 x$.

4) $\sin 6x-\sin 4x=1-\cos 2x$.

5) $(\sin 5x+\sin 7x)^2=(\cos 5x+\cos 7x)^2$.

6) $2\cos^2\frac{x}{2}+\cos 3x+\cos 5x=1$.

7) $1+\sin x+\sin 7x=\cos 8x$.

8) $2\sin 3x(\cos 2x+\cos x)=\sin x+\sin 2x$.

9) $\sin(x+60°)-\sin x=\sin(2x+60°)-\sin 2x$.

10) $\cos^2 3x - \cos^2 x = \sin x \cos x$.

11) $\sin 8x \sin 2x + \cos 10x = 0$.

12) $\cos x + 3\sin x = 1 + 2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

13) $4\sin 2x \sin 5x \sin 7x - \sin 4x = 0$.

14) $4\cos x \cos 2x \cos 3x = 1$.

תשובות סופיות:

1) $x_{1,2} = \pm 60° + 360°k \ , \ x_3 = 90°k$.

2) $x_1 = 45° + 90°k \ , \ x_2 = 180°k$.

3) $x_1 = 37.5° + 90°k \ , \ x_2 = 7.5° + 90°k \ , \ x_3 = 90°k$.

4) $x_1 = 15° + 60°k \ , \ x_2 = 180°k \ , \ x_3 = -22.5° + 90°k$.

5) $x_1 = 36°k \ , \ x_2 = \left(\frac{180}{7}\right)° + \left(\frac{180}{7}\right)°k$.

6) $x_{1,2} = \pm 30° + 90°k \ , \ x_3 = 90° + 180°k$.

7) $x_1 = -\left(12\frac{6}{7}\right)°k + \left(51\frac{3}{7}\right)°k \ , \ x_2 = 45°k$.

8) $x_1 = 40°k \ , \ x_2 = 180° + 360°k$.

9) $x_1 = -20° + 120°k \ , \ x_2 = 360°k$.

10) $x_1 = 52.5° + 90°k \ , \ x_2 = -7.5° + 90°k \ , \ x_3 = 90°k$.

11) $x_1 = 45° + 90°k \ , \ x_2 = 11.25° + 22.5°k$.

12) $x_1 = 30° + 360°k \ , \ x_2 = 150° + 360°k$.

13) $x_1 = 7.5° + 15°k \ , \ x_2 = 90°k$.

14) $x_1 = 60° + 180°k \ , \ x_2 = 22.5 + 45°k$.

משוואות עם תחום נתון:

סיכום כללי:

כדי למצוא את הפתרונות של משוואה טריגונומטרית בתחום נתון, נמצא תחילה את הפתרון הכללי שלה ולאחר מכן נציב ערכים ב- k ונבחר את הערכים שנמצאים בתחום הנתון.

שאלות:

מצא את כל הפתרונות של המשוואות הבאות בתחום הנתון לידן:

1) $8\sin x-4=0$, $[0°:180°]$.

2) $\sin 2x=\sin(x+60°)$, $[-90°:90°]$.

3) $3\cos(2x+30°)+1=0$, $[-90°:90°]$.

4) $\cos(50°-x)=-\cos x$, $[0°:360°]$.

5) $2\sin 3x-5\cos 3x=0$, $[-30°:30°]$.

6) $2\cos^2 3x=\sin 6x+1$, $[0°:180°]$.

7) $\cos 4x+1=3\sin 2x$, $[-180°:180°]$.

8) $\cos 2x+\cos^2 x+\sin x=0$, $[-180°:180°]$.

תשובות סופיות:

1) $x=30°\ ,\ 150°$.

2) $x=-80°\ ,\ 40°\ ,\ 60°$.

3) $x=39.736°\ ,\ -69.736°$.

4) $x=115°\ ,\ 295°$.

5) $x=22.733°$.

6) $x=7.5°\ ,\ 37.5°\ ,\ 67.5°\ ,\ 97.5°\ ,\ 127.5°\ ,\ 157.5°$.

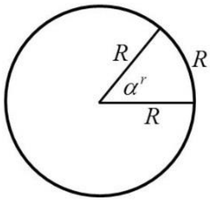
7) $x=-165°\ ,\ -105°\ ,\ 15°\ ,\ 75°$.

8) $x=-138.19°\ ,\ -41.81°\ ,\ 90°$.

משוואות עם זוויות ברדיאנים:

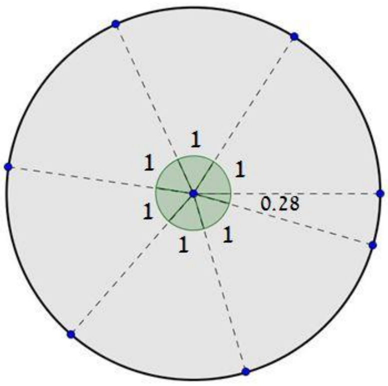
סיכום כללי:

הגדרת הרדיאן:



זווית של רדיאן אחד מוגדרת להיות הזווית המרכזית המתאימה לקשת שאורכה שווה לרדיוס המעגל.

עבור מעגל שרדיוסו R, תימצאנה 2π רדיאנים על היקפו, שכן היקף מעגל הוא $P=2\pi\cdot R$.



באיור שלפניך ניתן לראות חלוקה של מעגל ל-$2\pi=6.28$ קשתות אשר שוות לרדיוס המעגל.
הזווית של כל קשת כזאת שווה לרדיאן אחד,
כאשר הזווית האחרונה שווה ל-0.28 מרדיאן.
מקבלים 2π רדיאנים.

קשר בין רדיאנים למעלות:

- נוסחת מעבר מזווית α° (במעלות) לזווית α^r (ברדיאנים): $\alpha^r=\frac{\pi}{180}\alpha^\circ$.
- נוסחת מעבר מזווית α^r (ברדיאנים) לזווית α° (במעלות): $\alpha^\circ=\frac{180}{\pi}\alpha^r$.

פתרונות משוואות טריגונומטריות ברדיאנים:

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריגונומטריות היסודיות כאשר x הוא משתנה ו-α היא זווית ידועה הנתונה ברדיאנים:

המשוואה	הפתרון
$\sin x=\sin\alpha$	$x_1=\alpha+2\pi k \ , \ x_2=\pi-\alpha+2\pi k$
$\cos x=\cos\alpha$	$x_{1,2}=\pm\alpha+2\pi k$
$\tan x=\tan\alpha$	$x=\alpha+\pi k$
$\cot x=\cot\alpha$	$x=\alpha+\pi k$

כאשר k מספר שלם.

שאלות:

1) המר את הזוויות הבאות ממעלות לרדיאנים:

א. 30° ב. 90° ג. 75° ד. 120°

ה. 210° ו. 315° ז. 18° ח. 285°

ט. -15° י. -80° יא. 510° יב. -390°

2) המר את הזוויות הבאות מרדיאנים למעלות:

א. π ב. 2π ג. 4π ד. 1.5π

ה. $\frac{1}{2}\pi$ ו. $\frac{\pi}{4}$ ז. $\frac{\pi}{6}$ ח. $\frac{1}{18}\pi$

ט. $\frac{13}{18}\pi$ י. $\frac{19}{12}\pi$ יא. $1\frac{1}{6}\pi$ יב. $2\frac{1}{4}\pi$

3) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (משוואות יסודיות שונות):

א. $2\sin 3x = 1 \;,\; \left[0 : \frac{1}{3}\pi\right]$ ב. $\sqrt{3} + 2\cos x = 0 \;,\; [0 : \pi]$

ג. $3 - 3\tan\frac{x}{2} = 0 \;,\; [0 : 2\pi]$ ד. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \;,\; [0 : \pi]$

ה. $4\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2 = 0 \;,\; \left[0 : \frac{1}{2}\pi\right]$ ו. $\sin x = \sin\left(\frac{2}{3}\pi - 2x\right) \;,\; \left[-\frac{5\pi}{18} : \frac{5\pi}{18}\right]$

ז. $5 - 5\tan(4x - 0.1\pi) = 0 \;,\; \left[0 : \frac{\pi}{3}\right]$ ח. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 0.7 \;,\; \left[-\frac{\pi}{4} : \frac{\pi}{4}\right]$

4) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (טכניקה אלגברית):

א. $\sin^2 x = \frac{3}{4} \;,\; \left[0 : \frac{\pi}{2}\right]$ ב. $16\cos^2 2x - 1 = 0 \;,\; \left[-\frac{\pi}{8} : \frac{\pi}{8}\right]$

ג. $2\tan^2 x - 18 = 0 \;,\; [0 : \pi]$ ד. $3\sin x\cos x + 3\cos x = 0 \;,\; \left[-\frac{\pi}{3} : \frac{\pi}{3}\right]$

ה. $\sin^2 x - 5\sin x\cos x = 0 \;,\; \left[-\frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2}\right]$ ו. $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0 \;,\; [-\pi : \pi]$

ז. $4\cos^2 x - \sqrt{2}\cos x - 1 = 0 \;,\; [-\pi : 0]$ ח. $\tan^2 x - 7\tan x + 10 = 0 \;,\; [0 : 2\pi]$

5) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות יסוד):

א. $0\le x\le \pi\ ,\ \sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

ב. $0\le x\le \pi\ ,\ \tan x=4\sin x$

ג. $0\le x\le 2\pi\ ,\ 2\sin^2 x=3\cos x$

6) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות ממעגל היחידה):

א. $[-\pi:\pi]\ ,\ \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin x$

ב. $[0:\pi]\ ,\ \sin\left(2x+\frac{2}{9}\pi\right)=-\cos 2x$

ג. $[0:\pi]\ ,\ \sin 4x=-\cos(\pi-x)$

ד. $\left[-\frac{\pi}{2}:\frac{\pi}{2}\right]\ ,\ \tan x=-\tan 2x$

7) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (זהויות של זווית כפולה):

א. $-\pi\le x\le \pi\ ,\ \sin 2x+\cos^2 x=0$

ב. $[-\pi:\pi]\ ,\ \cos 4x+1=3\sin 2x$

ג. $-\frac{\pi}{2}\le x\le \frac{\pi}{2}\ ,\ 2\sin^2 x=\cos 2x+2$

ד. $0\le x\le \pi\ ,\ \cos 4x+\sin^2 x=1$

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{\pi}{6}$ ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. $\frac{5\pi}{12}$ ד. $\frac{2\pi}{3}$ ה. $\frac{7\pi}{6}$

ו. $\frac{7\pi}{4}$ ז. $\frac{\pi}{10}$ ח. $\frac{19\pi}{12}$ ט. $-\frac{\pi}{12}$ י. $-\frac{4\pi}{9}$

יא. $\frac{17\pi}{6}$ יב. $-\frac{13\pi}{6}$.

2) א. 180° ב. 360° ג. 720° ד. 270° ה. 90°

ו. 45° ז. 30° ח. 10° ט. 130° י. 285°

יא. 210° יב. 405°.

3) א. $x=\frac{\pi}{18}\ ,\ \frac{5\pi}{18}$ ב. $x=\frac{5\pi}{6}$ ג. $x=\frac{\pi}{2}$ ד. $x=\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{\pi}{2}$

ה. $x=0$ ו. $x=\frac{2\pi}{9}$ ז. $x=0.0875\pi$ ח. $x=0.224\pi$.

4) א. $x=\frac{\pi}{3}$ ב. ϕ ג. $x=0.398\pi, 0.602\pi$ ד. ϕ

ה. $x=0, 0.437\pi$ ו. $x=\frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{5\pi}{6}$

ז. $x=-\frac{\pi}{4}\ ,\ -0.615\pi$ ח. $x=0.352\pi\ ,\ 0.437\pi\ ,\ 1.352\pi\ , 1.437\pi$.

5) א. $x=\frac{\pi}{8}$ ב. $x=0\ ,\ 0.42\pi\ ,\ \pi$ ג. $x=\frac{\pi}{3}\ ,\ \frac{5\pi}{3}$

6) א. $x=\frac{\pi}{12}\ ,\ -\frac{11\pi}{12}$ ב. $x=\frac{23\pi}{72}\ ,\ \frac{59\pi}{72}$

ג. $x=\frac{\pi}{10}\ ,\ \frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{5\pi}{6}\ ,\ \frac{9\pi}{10}$ ד. $x=\pm\frac{\pi}{3}\ ,\ 0$.

7) א. $x=\pm\frac{\pi}{2}\ ,\ -0.148\pi\ ,\ 0.852\pi$ ב. $x=-\frac{7\pi}{12}\ ,\ \frac{\pi}{12}\ ,\ \frac{5\pi}{12}\ ,\ \frac{11\pi}{12}$

ג. $x=\pm\frac{\pi}{3}$ ד. $x=0\ ,\ 0.38\pi\ ,\ 0.61\pi\ ,\ \pi$.

אי שוויונים טריגונומטריים:

סיכום כללי:

כדי לפתור אי-שוויון טריגונומטרי בתחום מסוים נבצע את השלבים הבאים:

1. נהפוך את סימן אי השוויון לסימן שוויון ונפתור את המשוואה המתקבלת.
2. נסדר את כל הפתרונות על ציר מספרים ונבחר ערך בכל תחום.
3. נציב את הערכים באי השוויון המקורי ונאמר כי:
   - אם מתקבל פסוק אמת אז תחום זה מהווה פתרון של אי השוויון.
   - אם מתקבל פסוק שקר אז תחום זה אינו פתרון של אי השוויון.
4. נרכז את כל התחומים ונכתוב את הפתרון המלא.

הערה:

במידה והמשוואה אינה מוגדרת עבור ערך מסוים הערך הזה מוכנס גם לציר המספרים.

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

1) $[0,180^\circ]\ \sin x<\frac{1}{2}$

2) $[0,1.5\pi]\ 2\cos x-\sqrt{3}\ge 0$

3) $(-90^\circ,90^\circ)\ 2\cos^2 x+\sin x\ge 1$

4) $[0,\pi]\ \sin x+\sin 2x+\sin 3x<0$

5) $[0^\circ,180^\circ]\ 1<2\sin(x+10^\circ)<\sqrt{3}$

6) $(0<x<\pi)\ \sin x+\sqrt{3}\cos x\ge 1$

7) $[0,2\pi]\ \tan x+\cot x>0$

8) $(-\pi<x<\pi)\ |\tan(x)|>\frac{1}{\sqrt{3}}$

תשובות סופיות:

1) $0° \le x < 30°$, $150° \le x \le 180°$.

2) $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$.

3) $-30° \le x < 90°$.

4) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3}$.

5) $20° < x < 50°$, $110° < x < 140°$.

6) $0 < x \le \frac{\pi}{2}$.

7) $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

8) $x \ne \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ או: $x \ne -\frac{\pi}{2}$, $-\frac{5\pi}{6} < x < -\frac{\pi}{6}$.

סדנת ריענון במתמטיקה - מעודכן

פרק 24 - טריגונומטריה במישור

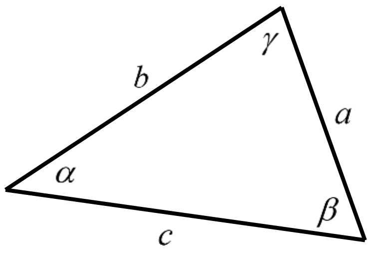
תוכן העניינים

1. שאלות יסודיות עם משפט הסינוסים והקוסינוסים 298
2. שאלות העוסקות בנוסחת שטח משולש 306
3. שאלות המשלבות ידע בגיאומטריה 315
4. שאלות מסכמות 319

שאלות יסודיות עם משפט הסינוסים והקוסינוסים:

סיכום כללי:

משפט הסינוסים:



במשולש, צלע חלקי סינוס הזווית שמולה הוא גודל קבוע והוא שווה לפעמיים רדיוס המעגל החוסם.

בצורה מתמטית: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$.

משפט הקוסינוסים:

במשולש, ריבוע צלע אחת שווה לסכום ריבועי שתי הצלעות האחרות פחות מכפלתן בקוסינוס הזווית שביניהן: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ או $\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

מתי נשתמש בכל משפט:

- נשתמש במשפט הסינוסים כאשר:
  א. נתונות שתי זוויות וצלע.
  ב. נתונות שתי צלעות והזווית מול אחת מהן.
  ג. נתון רדיוס המעגל החוסם וצלע/זווית נוספת.

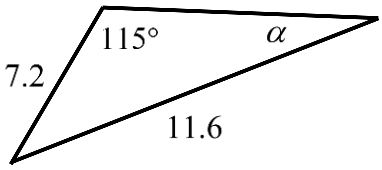
- נשתמש במשפט הקוסינוסים כאשר:
  א. נתונות שתי צלעות והזווית ביניהן.
  ב. נתונות שלוש צלעות.

- כאשר ישנם יותר נתונים מאשר בסעיפים שלהלן ייתכן שנוכל להשתמש בשני המשפטים. בבחירת המשפט שבו נשתמש כדאי לזכור שבמשפט הסינוסים ייתכנו שתי תשובות לזווית, גם אם בפועל רק אחת נכונה, ובמשפט הקוסינוסים תתקבל בוודאות הזווית הנכונה.

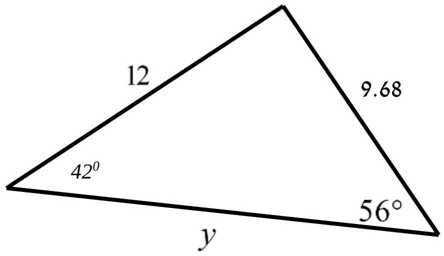
שאלות:

1) מצא את ערכו של $a / x / y$ במשולשים הבאים
(R הוא רדיוס המעגל החוסם, נתוני הצלעות בס"מ):

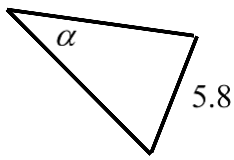
א.



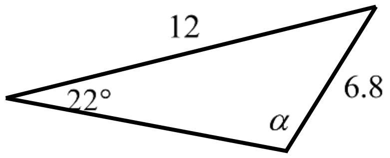
ב.



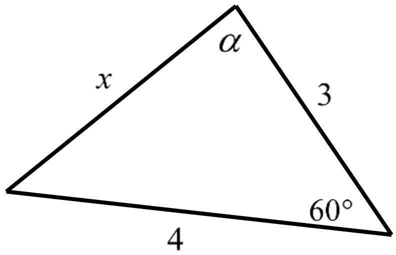
ג. רדיוס המעגל: $R=7$.



ד.

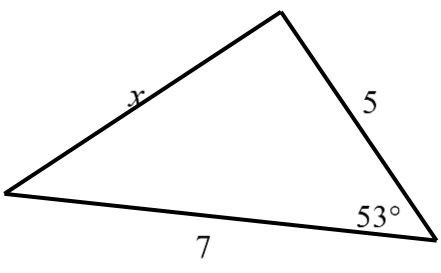


ה.

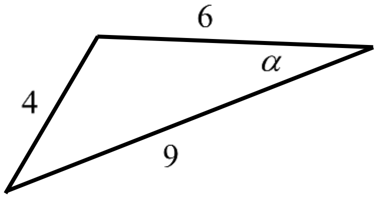


2) מצא את ערכו של α / x במשולשים הבאים:

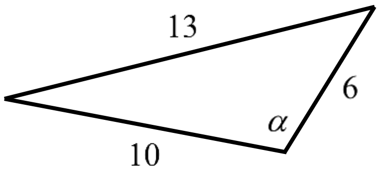
א.



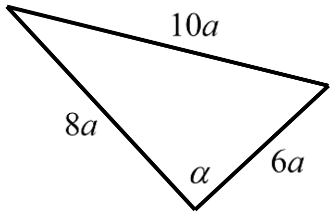
ב.



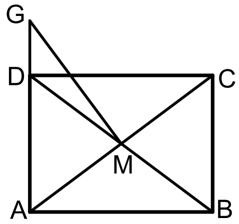
ג.



ד.

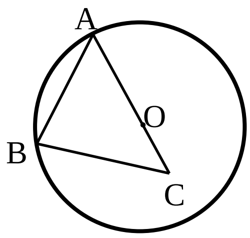


3) נתון משולש שווה שוקיים ABC ‏(AB=AC) שאורך השוק שלו הוא 22 ס״מ וגודלה של זווית הבסיס בו הוא $70°$. CD הוא חוצה זווית הבסיס $\measuredangle C$.
מצא את אורכו של הקטע AD.



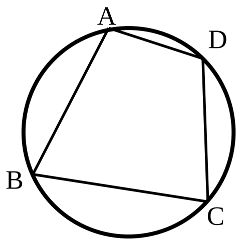
4) אלכסוני המלבן ABCD נפגשים בנקודה M.
הנקודה G נמצאת על המשך הצלע AD.
נתון: $AD =$ 3 ס״מ , $AB =$ 4 ס״מ , $DG =$ 1.2 ס״מ.
מצא את גודלו של הקטע GM.

5) מרובע שאורכי אלכסוניו 8 ס״מ ו-11 ס״מ חסום במעגל שאורך רדיוסו הוא 6 ס״מ.
חשב את זוויות המרובע.



6) הצלע AB במשולש ABC היא מיתר במעגל שמרכזו O.
הצלע AC עוברת במרכז המעגל כמתואר בשרטוט.
נתון: $BC =$ 9 ס״מ , $OC =$ 3 ס״מ , $\measuredangle BAC = 38°$.
מצא את אורכם של רדיוס המעגל ושל הצלע AB.

7) אחד האלכסונים במקבילית יוצר זווית של $30°$ עם צלע אחת של המקבילית וזווית של $61.05°$ עם הצלע הסמוכה לה.
אחת מצלעות המקבילית גדולה ב-3 ס״מ מהצלע הסמוכה לה.
חשב את היקף המקבילית.



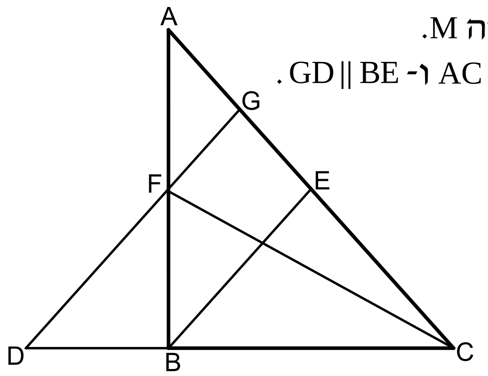
8) המרובע ABCD חסום במעגל.
נתון: $AB =$ 6 ס״מ , $BC =$ 9 ס״מ , $CD =$ 10 ס״מ ו-4 ס״מ $= AD$.
מצא את אורכם של האלכסון AC ושל רדיוס המעגל.

9) BE ו-CF הם תיכונים במשולש ABC הנפגשים בנקודה M.
מהנקודה F מעבירים קטע GD כך שמתקיים: AC = DC ו- $GD \parallel BE$.

א. הוכח: $\frac{AG}{BD} = \frac{3}{4}$.

ב. נתון כי: 4 ס"מ = ME.
חשב את אורך הקטע DG.

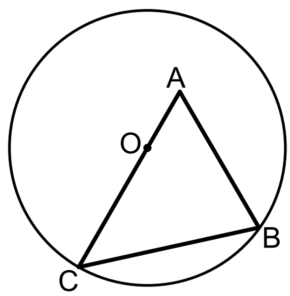
ג. נתון כי: $\sphericalangle ACD = 48.189^\circ$
הוכח כי המשולש DGC הוא שווה-שוקיים.



10) נתון משולש ABC. הקודקודים B ו-C של המשולש ABC נמצאים על מעגל שמרכזו O. מרכז המעגל O מונח על הצלע AC. אורך הצלע AB הוא 12 ס"מ ואורך הקטע AO הוא 4.5 ס"מ. זווית BAC היא 60°.

א. חשב את רדיוס המעגל.

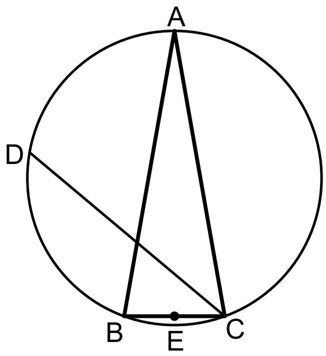
ב. מעבירים את הקוטר BD ואת הקטע AD כך שנוצר המשולש ADB.
חשב את זווית ADB.



11) המשולש ABC הוא שווה שוקיים (AB = AC) החסום במעגל שרדיוסו R.
הנקודה E היא אמצע הבסיס BC והנקודה D היא אמצע הקשת $\overset{\frown}{AB}$.
ידוע כי זווית הבסיס של המשולש היא 80°.

א. הבע באמצעות R את הקטעים CD ו-DE.

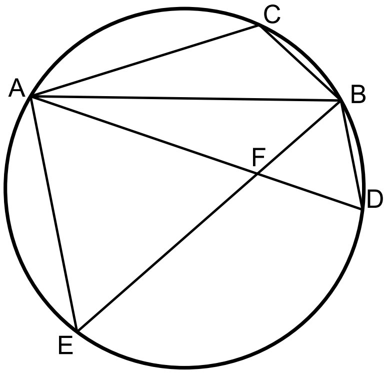
ב. r הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש CED.
הבע באמצעות R את r.



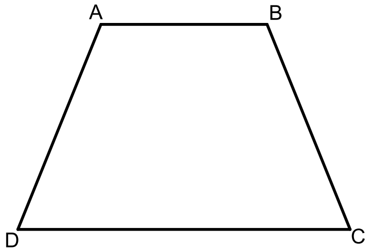
12) AB, AC ו-AD הם מיתרים במעגל המקיימים: $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD}$.
מהנקודה E שעל המעגל מעבירים את המיתרים AE ו-BE.
המיתרים BE ו-AD נחתכים בנקודה F.
נתון כי: AC = AF = EF.

א. הוכח: $\Delta ABF \cong \Delta ABC$.

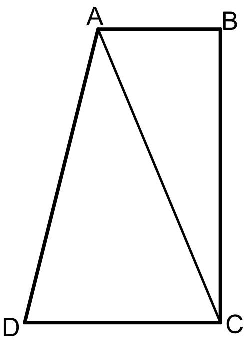
ב. נתון גם: $3 \cdot \sphericalangle CAB = \sphericalangle DAE$.
הוכח כי המשולש AFE הוא שווה צלעות.



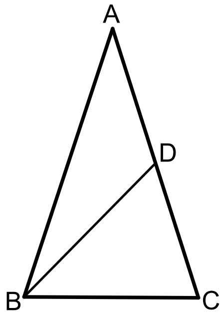
13) המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים $(AB \parallel CD\,,\, AD = BC)$.
מידות הטרפז הן:
AB = 6 ס"מ , BC = 8 ס"מ , CD = 12 ס"מ.
א. מצא את זווית C (עגל למספר שלם).
ב. מצא את אורך אלכסון הטרפז.
ג. חשב את רדיוס המעגל החוסם את הטרפז.



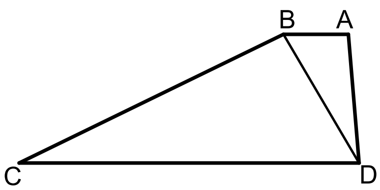
14) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית $(AB \parallel CD\,,\, \sphericalangle B = 90^\circ)$.
מסמנים את הבסיס: $AB = t$ וידוע כי: $DC = 1.6t$, $AD = 3t$.
היקף הטרפז הוא: 40 ס"מ.
א. הבע באמצעות t את אורך האלכסון AC.
ב. ידוע גם כי: $\sphericalangle D = 60^\circ$.
i. חשב את אורך הקטע AC.
ii. חשב את שטח הטרפז.



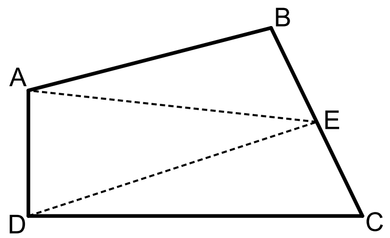
15) המשולש ABC הוא שווה שוקיים (AB = AC) בעל זווית ראש 36° החסום במעגל שקוטרו 16 ס"מ. מעבירים תיכון לשוק BD.
א. מצא את אורך הבסיס BC במשולש.
ב. חשב את אורך התיכון BD.
ג. מסמנים:
r_1 - רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD.
r_2 - רדיוס המעגל החוסם את המשולש BCD.
הוכח את היחס הבא: $\frac{r_1}{r_2} = 2\cos 36$.



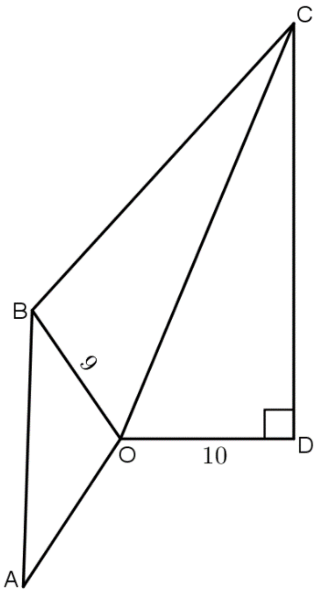
16) המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.
מעבירים את האלכסון BD המקיים: $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ADB$.
נתון כי: CD = 20 ס"מ , AD = 10 ס"מ , AB = 5 ס"מ.
כמו כן ידוע כי השוק BC גדולה פי 2 מהאלכסון BD.
א. הראה כי השוק BC שווה לבסיס CD.
ב. חשב את זווית C.
ג. ממשיכים את שוקי הטרפז AD ו-BC עד לנקודה E שמחוץ לטרפז.
חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש CDE.



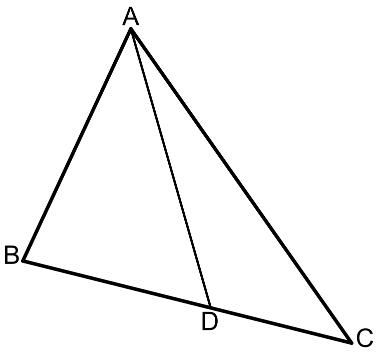
17) באיור שלפניך נתון המרובע ABCD.
ידוע כי: $\sphericalangle D = 90°$.
נסמן את הצלעות באופן הבא: $AB = 6x$, $BC = 5x$, $CD = 8x$, $AD = 3x$.
א. חשב את זווית BCD.
ב. E היא נקודה הנמצאת על אמצע הצלע BC.
מעבירים את הקטעים AE ו-DE כך
ש-DE מקביל ל-AB.
חשב את היחס הבא: $\frac{S_{ABE}}{S_{BCD}}$.



18) מהנקודה O מעבירים את הקטעים OA , OB , OC ו-OD.
ידוע כי זווית AOB שווה לזווית COD והיא מסומנת ב- α.
המשולש COD הוא ישר זווית $\sphericalangle CDO = 90°$.
נתונים האורכים: $BO = 9$, $DO = 10$.
מסמנים: $BC = 1.4m$, $CD = 1.5m$.
א. הבע באמצעות m את $\sin\alpha$.
(העזר במשולש COD ובטא תחילה את CO).
ב. נתון גם כי: $AB = m$.
מצא את m אם ידוע כי רדיוס המעגל החוסם
את המשולש AOB הוא $8\frac{2}{3}$.
ג. חשב את זווית BOC.



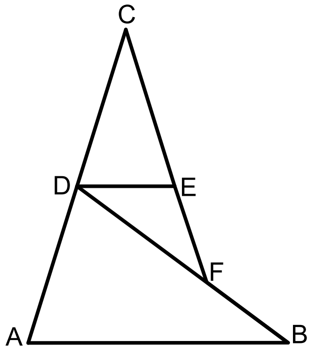
19) במשולש ABC הזווית A היא בת $60°$.
מעבירים את הקטע AD כך שנוצרת זווית: $\sphericalangle ADB = 60°$.
ידוע כי $AB = \sqrt{28}$ וכי הצלע AD במשולש ABD
גדולה פי 1.5 מהצלע BD.
א. מצא את אורך הצלע BD.
ב. היקף המשולש ABC הוא: $P = 5\sqrt{7} + 7$.
i. סמן: $DC = t$ והבע באמצעות t
את אורך הצלע AC.
ii. מצא את t.
ג. חשב את שטח המשולש ABC.



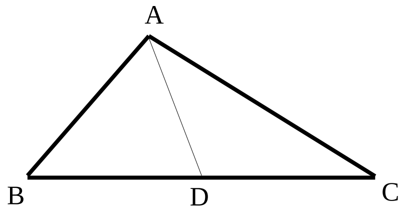
20) מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB ו-AC.
הנקודה D היא אמצע AC וממנה מעבירים את DE המקביל ל-AB.
הנקודות C , E ו-F נמצאות על אותו הישר.
ידוע כי המשולשים ABD , DEF ו-DCE הם
שווי שוקיים (AB = BD , DC = CE , EF = DE).
נתון כי: AD = 8.

א. חשב את אורך הקטע BF.

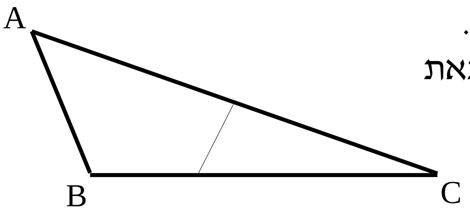
ב. מחברים את הנקודות B ו-C.
חשב את אורך הצלע BC.



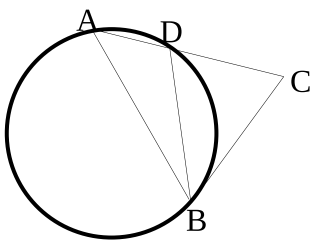
21) בשרטוט נתון: AB = 6 ס"מ , AC = 8 ס"מ ,
AD = 5 ס"מ. הנקודה D היא אמצע הצלע BC.
חשב את אורך הקטע BC.



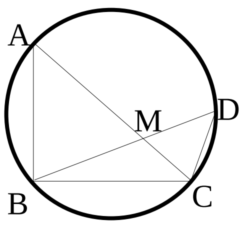
22) הצלע AC במשולש ABC גדולה פי 4 מהצלע AB.
הנקודה E היא אמצע הצלע AC והנקודה D נמצאת
על הצלע BC כך שמתקיים $DC = 2BD$.
נתון: $AB = a$, $BC = b$.
הבע באמצעות a ו-b את אורך הקטע DE.



23) המשולש ABD חסום במעגל שרדיוסו R.
המשך הצלע AD והמשיק למעגל בנקודה B
נפגשים בנקודה C. נתון: $\sphericalangle C = \alpha$, $\sphericalangle ADB = \beta$.
הבע באמצעות R, α ו-β את אורך הקטע BC.



24) AC ו-BD הם מיתרים במעגל שרדיוסו R,
שנפגשים בנקודה M. זווית $\sphericalangle B$ היא זווית ישרה.
נתון: $AB = k$, $DM = p$, $DC = q$.
הבע באמצעות R, k, p ו-q את אורך הקטע MC.



תשובות סופיות:

1) א. $\alpha=34.231^\circ$ ב. $y=14.33$ ס"מ ג. $\alpha=155.526^\circ$ או $\alpha=24.474^\circ$

ד. $\alpha=41.382^\circ$ או $\alpha=138.618^\circ$ ה. $x=3.606$ ס"מ , $\alpha=73.898^\circ$

2) א. $x=5.646$ ס"מ ב. $\alpha=20.742^\circ$ ג. $\alpha=105.962^\circ$ ד. $\alpha=90^\circ$

3) AD = 13.064 ס"מ

4) GM = 3.360 ס"מ

5) 138.190° , 41.810° , 113.556° , 66.444°

6) AB = 14.56 ס"מ , $R=9.242$ ס"מ

7) $P=22$ ס"מ

8) AC = 10.790 ס"מ , $R=5.395$ ס"מ

9) DG = 18

10) $R=10.5$ ס"מ ב. 24.32°

11) א. $\mathrm{CD}=R\sqrt{3}$, $\mathrm{DE}=1.48R$ ב. $r=1.15R$

13) א. 68° ב. 11.66 ס"מ ג. $R=6.29$ ס"מ

14) א. $\mathrm{AC}=\sqrt{32.36t^2-448t+1600}$ ב.i. 13 ס"מ ב.ii. 78 סמ"ר

15) א. 9.4 ס"מ ב.i. 10 ס"מ

16) ב. $\sphericalangle C=28.9^\circ$ ג. $R=13.77$

17) א. 64.04° ב. $\frac{S_{\mathrm{ABE}}}{S_{\mathrm{ECD}}}=0.817$

18) א. $\sin\alpha=\frac{1.5m}{\sqrt{100+2.25m^2}}$ ב. $m=16$ ג. 56.94°

19) א. 4 ב.i. $1.5\sqrt{28}+3-t$ ב.ii. 3 ג. $S=18.18$

20) א. 4.94 ס"מ ב. 17.19 ס"מ

21) BC = 10 ס"מ

22) $\mathrm{DE}=\sqrt{\frac{1}{9}b^2-a^2}$

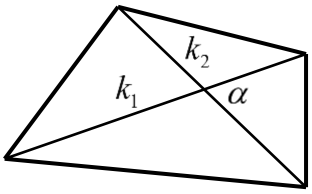
23) $\mathrm{BC}=\frac{2R\sin\beta\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha}$

24) $\mathrm{MC}=\sqrt{p^2+q^2-\frac{pqk}{R}}$

שאלות העוסקות בנוסחת שטח משולש:

סיכום כללי:

שטחים של משולשים ומרובעים:

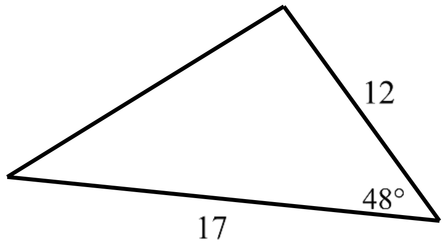


- שטח משולש ניתן לחישוב ע״י: $S=\frac{a\cdot h}{2}=\frac{ab\sin\gamma}{2}=\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}$.
- שטח מרובע ניתן לחישוב ע״י אלכסוניו: $S=\frac{k_1k_2\sin\alpha}{2}$.

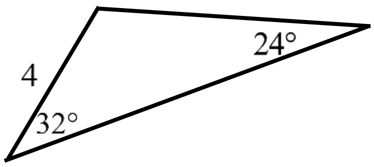
שאלות:

25) חשב את שטחי המשולשים הבאים:

א.



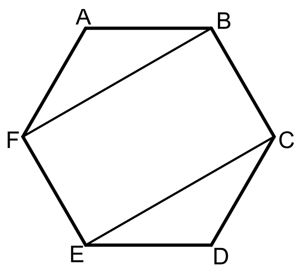
ב.



26) חשב את שטחו של טרפז שווה שוקיים שאורך האלכסון שלו 8 ס״מ והוא יוצר זווית של $15°$ עם הבסיסים.

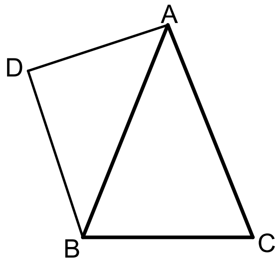
27) אורכו של מלבן הוא m ורוחבו n. הזווית שבין אלכסוני המלבן היא θ.
הוכח כי מתקיים: $\sin\theta=\frac{2mn}{m^2+n^2}$.

28) במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle B=90°$), BD חוצה את הזווית $\sphericalangle B$.
נתון: $AB=m$, $\sphericalangle A=\alpha$.
הבע באמצעות α ו-m את שטח המשולש BCD.



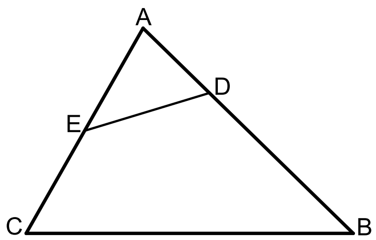
29) באיור שלפניך נתון משושה משוכלל ששטחו הכולל הוא S.
א. הבע באמצעות S את אורך צלע המשושה.
ב. מעבירים אלכסונים במשושה כך שנוצר המלבן BFEC.
הבע באמצעות S את שטח המלבן.

30) המשולש ABC הוא שווה שוקיים בעל זווית ראש α, (AB = AC).
אורך הבסיס BC הוא k.
על השוק AB בונים משולש ישר זווית ABD ובו $\sphericalangle D = 90°$.



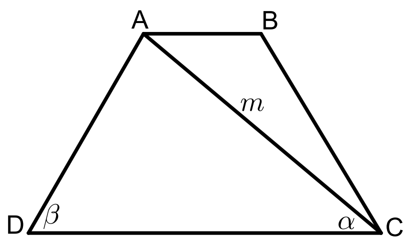
א. הבע באמצעות k ו- α את אורך שוק המשולש ABC.
ב. הניצב AD במשולש ABD שווה ל- $0.85k$
וכי: $\sphericalangle ABD = 40°$. מצא את זוויות המשולש ABC.
ג. חשב את שטח המרובע ACBD אם ידוע כי $k = 6$.

31) במשולש ABC אורך הצלע AC הוא 8 ס"מ ואורך הצלע AB הוא 10 ס"מ.
הנקודה E היא אמצע הצלע AC
והנקודה D מקיימת: 3 ס"מ = AD.
ידוע כי: $\frac{2}{5} = \frac{DE}{BC}$.



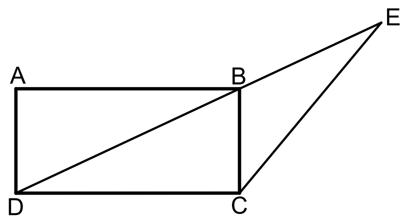
א. מצא את אורך הקטע DE.
ב. חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ADE.
ג. חשב את שטח המרובע BCED.

32) המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$. הקטע AC הוא אלכסון בטרפז.
מסמנים: $\sphericalangle ADC = \beta$, $\sphericalangle ACD = \alpha$, $AC = m$.

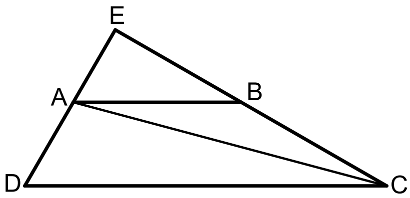


א. הבע באמצעות α, β ו- m את אורך הבסיס הגדול DC.
ב. נתון כי האלכסון AC מקיים: $\frac{S_{ADC}}{S_{ABC}} = 3$.
הבע באמצעות α, β ו- m את הבסיס AB.
ג. חשב את שטח הטרפז אם ידוע כי: $\beta = 60°$, $\alpha = 40°$ ו- $m = 8$.

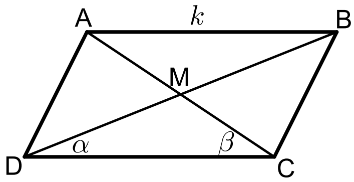
33) המרובע ABCD הוא מלבן. מעבירים את האלכסון BD וממשיכים אותו עד לנקודה E שמחוץ למלבן.
מחברים את הנקודה E עם הקודקוד C.
ידוע כי אורך הצלע AD של המלבן הוא 6 ס"מ וכי אורך הקטע BE הוא 9 ס"מ. הזווית CBE היא $115°$.



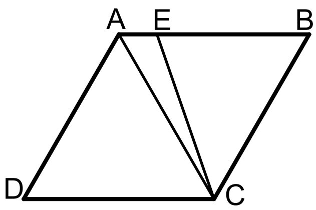
א. מצא את אורך הקטע CE.
ב. מצא את אורך האלכסון BD.
ג. חשב את שטח המשולש DCE.



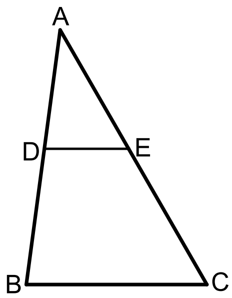
34) המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \| CD)$.
ממשיכים את השוקיים AD ו-BC עד לפגישתם
בנקודה E. ידוע כי: $DE \perp CE$.
מעבירים את האלכסון AC אשר חוצה את זווית C.
מסמנים את הבסיס הגדול DC ב- k ואת: $\sphericalangle ACD=\alpha$.
א. הבע באמצעות k ו- α את הבסיס הקטן AB.
ב. הבע באמצעות k ו- α את שטח המשולש ABC.
ג. חשב את שטח המשולש ABC כאשר: $\alpha=15°$, 12 ס"מ $=k$.



35) נתונה מקבילית ABCD ובה מעבירים
את האלכסונים AC ו-BD אשר נחתכים
בנקודה M כמתואר באיור.
מסמנים: $\sphericalangle ACD=\beta$, $\sphericalangle BDC=\alpha$, $AB=k$.
א. הוכח כי אלכסוני המקבילית מקיימים: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{AC}{BD}$.
ב. ענה על השאלות הבאות:
i. הבע באמצעות α , β ו- k את שטח המשולש DMC.
ii. הבע באמצעות α , β ו- k את שטח המקבילית ABCD.
ג. נתון כי: $\frac{AC}{BD}=2$. הראה כי שטח המקבילית הוא: $\frac{4k^2\sin^2\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

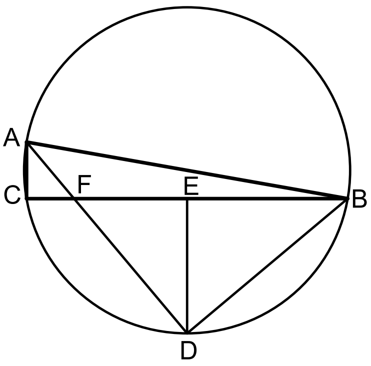


36) המרובע ABCD הוא מעוין ובו $\sphericalangle D=60°$.
מעבירים את האלכסון AC ואת הקטע CE
כך שהנקודה E נמצאת על הצלע AB ומחלקת
אותה ביחס: $\frac{BE}{AE}=4$.
א. חשב את זווית AEC.
ב. נתון כי שטח המשולש AEC הוא 8.66 סמ"ר. חשב את שטח המעוין.

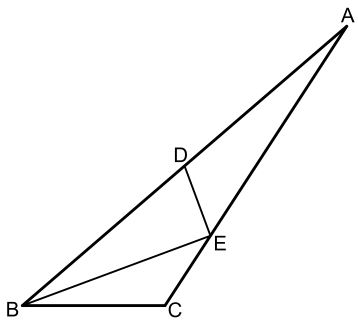


37) הקטע DE מקביל לצלע BC במשולש ABC כמתואר באיור.
נתון כי: $CE=13$, $BC=15$, $BD=\sqrt{129}$.
ידוע כי זווית AED היא $60°$.
א. חשב את אורך הקטע DE אם ידוע
ב. כי הוא קטן מ-10 ס"מ.
ג. חשב את שטח המשולש ADE.

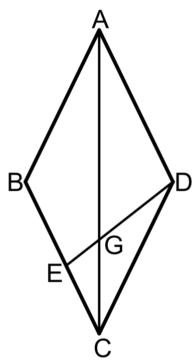
38) המשולש ABC חסום במעגל כך ש-AB הוא קוטר.
הנקודה D היא אמצע הקשת BC וממנה
מעבירים את המיתרים AD ו-BD ומעלים
גובה DE לצלע BC.
מסמנים: $DE = k$ ונתון כי: $\sphericalangle ABC = 10^\circ$.
א. הבע באמצעות k את רדיוס המעגל.
ב. הבע באמצעות k את שטח המשולש ABF.
ג. מצא את k אם ידוע כי שטח המשולש ABF הוא 15.363 סמ"ר.



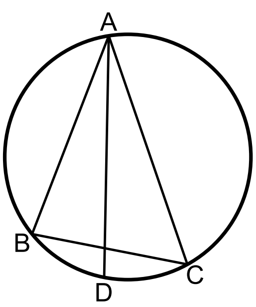
39) במשולש ABC הקטע BE חוצה את זווית B.
הנקודה D היא אמצע הצלע AB ומקיימת: DE = CE.
ידוע כי: BC = 6 , BE = 8 , BD = 9.
א. מצא את זווית B.
ב. חשב את שטח המשולש ADE.



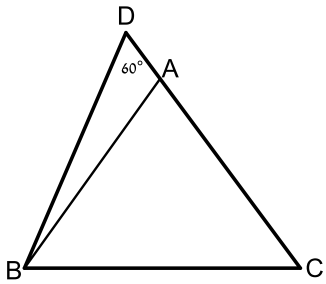
40) נתון המעוין ABCD. אורך האלכסון הגדול במעוין AC גדול פי 1.8 מצלע המעוין.
א. חשב את זוויות המעוין.
ב. מהקודקוד D מעבירים את הקטע DE שאורכו הוא m.
הקטע DE חותך את האלכסון AC בנקודה G.
הזווית EDC תסומן ב- α.
i. הבע באמצעות m ו- α את אורך הקטע CE.
ii. הבע באמצעות m ו- α את שטח המשולש EGC.



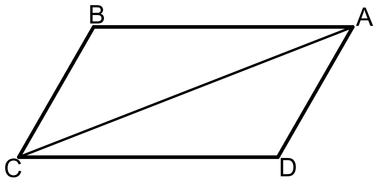
41) המשולש ABC חסום במעגל כמתואר באיור.
מעבירים את המיתר AD החוצה את זווית BAC.
ידוע כי: $\sphericalangle ACB = 60^\circ$, $\sphericalangle BAC = 40^\circ$.
מסמנים: $AD = k$.
א. הבע באמצעות k את אורך המיתר BD.
ב. ידוע כי שטח המשולש ABD הוא 7.368 סמ"ר.
מצא את k (עגל למספר שלם).



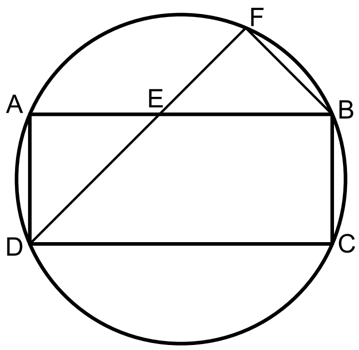
42) המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$).
ממשיכים את הצלע AC עד לנקודה D כך
שאורך שוק המשולש גדולה פי 3.8 מהקטע AD.
ידוע כי: $\sphericalangle D = 60°$.
אורך הקטע BD הוא 21 ס"מ.
א. מצא את אורך הקטע AD.
ב. חשב את שטח המשולש ABC.



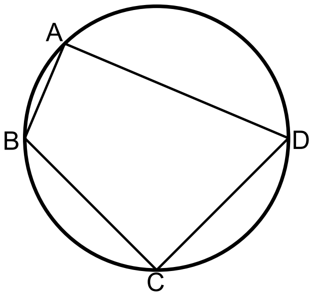
43) במקבילית ABCD אורך האלכסון AC הוא $\sqrt{79}$ ס"מ.
היקף המקבילית הוא 20 ס"מ וידוע כי: $\sphericalangle B = 120°$.
א. מצא את אורכי צלעות המקבילית.
ב. חשב את שטח המקבילית.
ג. מסמנים נקודה E על האלכסון AC כך שהמרובע CBED הוא בר חסימה.
חשב את רדיוס המעגל החוסם את המרובע CBED.



44) המרובע ABCD הוא מלבן החסום במעגל.
מהקודקוד D מעבירים את המיתר DF
החותך את הצלע AB בנקודה E.
ידוע כי: $\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{CF}$.
הצלע AD של המלבן תסומן ב- a.
א. הוכח כי המשולש DAE הוא שווה שוקיים.
ב. נתון גם כי: $BC = BF$.
i. הבע באמצעות a את רדיוס המעגל.
ii. חשב את הזוויות המרכזיות של הקשתות: $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{AB}$
(אין צורך לסרטט אותן).



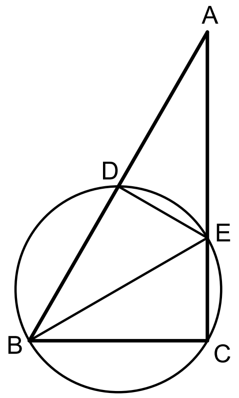
45) המרובע ABCD חסום במעגל כמתואר באיור.
ידוע כי: $AB = b$, $BC = a$, $CD = a$, $AD = 3b$.
א. הבע באמצעות a ו- b את $\cos\sphericalangle BCD$.
ב. הוכח כי אם BD קוטר אז מתקיים: $a = b\sqrt{5}$.
ג. נתון כי רדיוס המעגל הוא 3 ס"מ.
הסתמך על סעיף ב' וחשב את שטח המרובע ABCD.



46) המשולש ABC הוא ישר זווית $\sphericalangle C = 90°$ ובו: $\sphericalangle B = 2\alpha$.
מעבירים מעגל שרדיוסו R דרך הקודקודים B ו-C
אשר חותך את צלעות המשולש בנקודות D ו-E.
המיתר BE חוצה את זווית B.

א. הבע באמצעות R ו- α את שטח המשולש ABE.

ב. ידוע כי המשולש ABE הוא שווה שוקיים
וכי אורך המיתר CE הוא 6 ס"מ.
חשב את שטח המשולש ABE.



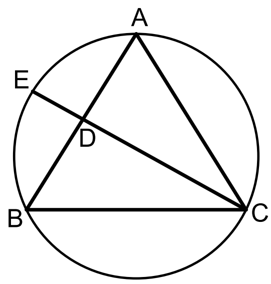
47) במשולש שווה שוקיים ABC (AB = AC) שאורך השוק בו הוא k וזווית הבסיס שלו היא β, BE חוצה את זווית $\sphericalangle B$ ו- CD הוא הגובה לשוק AB.

הוכח כי שטח המשולש ADE הוא: $S_{\text{ADE}} = -\dfrac{k^2 \sin\frac{\beta}{2} \sin 4\beta}{4\sin\frac{3\beta}{2}}$.

48) נתון משולש שווה שוקיים ABC (AB = AC) החסום במעגל.
מהקודקוד C מעבירים את המיתר CE החותך את השוק AB בנקודה D.
ידוע כי E היא אמצע הקשת $\overset{\frown}{AB}$ והיחס בין
הקטעים BD ו-CD הוא 7 :4.
מסמנים: $\sphericalangle ACD = \alpha$.

א. מצא את זוויות המשולש ABC
(עגל למספרים שלמים).

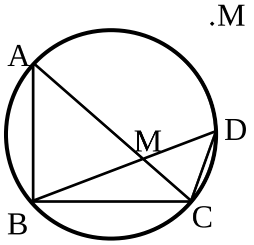
ב. חשב את אורך המיתר BE אם ידוע כי
רדיוס המעגל החוסם שווה ל-8 ס"מ.



49) AC ו-BD הם מיתרים במעגל שרדיוסו R, שנפגשים בנקודה M.
זווית $\sphericalangle B$ היא זווית ישרה.
נתון: $\sphericalangle MBC = \alpha$, $\sphericalangle MCB = \beta$.

א. הבע באמצעות R, α ו- β את שטח המשולש BDC.

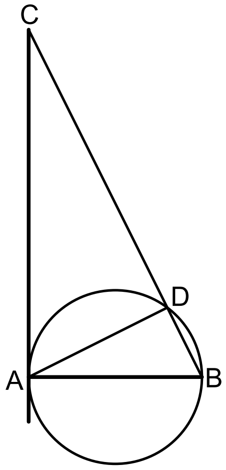
ב. נתון: $\beta = 2\alpha$, $S_{\text{BDC}} = \frac{1}{2}R^2$.
חשב את α.



50) בטרפז שווה שוקיים, שאורך השוק שבו הוא b והזווית שליד הבסיס הגדול היא γ נתון שהאלכסונים מאונכים זה לזה.

א. הבע באמצעות γ ו-b את אורכי בסיסי הטרפז.

ב. חשב את γ אם ידוע שהבסיס הגדול ארוך פי $\sqrt{3}$ מהבסיס הקטן.

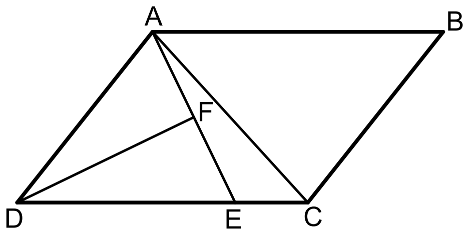


51) המיתר AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R ו-AD הוא מיתר.
ממשיכים את המיתר BD ומעבירים משיק מהנקודה A.
המשיק והמשך המיתר נפגשים בנקודה C.
מסמנים: $\sphericalangle BAD = \alpha$.

א. הבע באמצעות α ו-R את שטח המשולש ABD.

ב. הבע באמצעות α ו-R את שטח המשולש ACD.

ג. מצא את α אם ידוע כי שטח המשולש ABD קטן פי 4 משטח המשולש ACD.



52) המרובע ABCD הוא מקבילית.
הקטע AE מקצה על הצלע DC קטעים המקיימים: 3CE = DE.
מעבירים תיכון DF לצלע AE במשולש ADE.
ידוע כי: $\sphericalangle ADF = \sphericalangle CDF = \alpha$.
מסמנים: $CE = k$.

א. הבע באמצעות k ו-α את אורך הקטע AE.

ב. מעבירים את האלכסון AC.
הבע באמצעות k ו-α את היקף המשולש ACE.

ג. היקף המשולש ACE הוא $4.5k$. מצא את α.

תשובות סופיות:

25) א. $S =$ 75.801 סמ"ר ב. $S =$ 8.641 סמ"ר

26) $S =$ 16 סמ"ר

27) $S_{\Delta BCD} = \frac{m^2 \tan^2 \alpha \sin 45° \cos \alpha}{2\sin(\alpha + 45°)}$

28) א. $\sqrt{\frac{2S}{\sqrt{27}}} \approx 0.62S$ ב. $\frac{2}{3}S$

29) א. $\frac{k}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ ב. $67.78°$, $67.78°$, $44.4°$ ג. $S = 37.18$

30) א. $DE = \sqrt{1.6} = 1.26$ ב. $R = 2$ ג. $S = 21.48$

31) א. $DC = \frac{m\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$ ב. $AB = \frac{m\sin(\alpha+\beta)}{3\sin\beta}$ ג. $S_{ABCD} = 31.2$

32) א. 12.75 ס"מ ב. 14.19 ס"מ ג. 63.05 ס"מ

33) א. $\frac{k\tan\alpha}{\tan 2\alpha}$ ב. $\frac{k^2 \tan\alpha \sin 2\alpha}{2\tan^2 2\alpha}$ ג. $S =$ 7.754 ס"מ

34) ב.i. $\frac{k^2 \sin\alpha \sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$ ב.ii. $\frac{2k^2 \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

35) א. $109.1°$ ב. $S = 86.6$

36) א. 7 ס"מ ב. 34.48 סמ"ר

37) א. $R = \frac{k}{2\sin^2 40} = 1.21k$ ב. $S = \frac{k^2 \sin 10}{2\sin 50 \sin^3 40}$ ג. $k = 6$

38) א. $40.72°$ ב. $S = 12.52$

39) א. $128.32°$; $51.68°$ ב. $1.27m\sin\alpha$ ג. $\frac{0.35m^2 \sin^2\alpha \sin(128.32-\alpha)}{\sin(25.84+\alpha)}$

40) א. $BD = \frac{k\sin 20}{\sin 100}$ ב. $k = 7$

41) א. 5 ס"מ ב. $S = 172.77$

42) א. BC = 3 ס"מ ו-AB = 7 ס"מ ב. $S =$ 18.18 סמ"ר ג. $R = \sqrt{\frac{37}{3}}$

43) ב. i. $R=a\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\approx 1.3a$ ב. ii. $45°\ ,\ 135°$

44) א. $\cos\sphericalangle BCD=\frac{a^2-5b^2}{a^2+3b^2}$ ג. $S=$ 14.4 סמ"ר.

45) א. $S=R^2\tan 2\alpha$ ב. $S=$ $36\sqrt{3}$ סמ"ר.

48) א. $58°\ ,\ 58°\ ,\ 64°$ ב. $BE=7.75$.

49) א. $S=2R^2\sin\alpha\cos\beta\sin(90°-\alpha+\beta)$ ב. $\alpha=22.5°$.

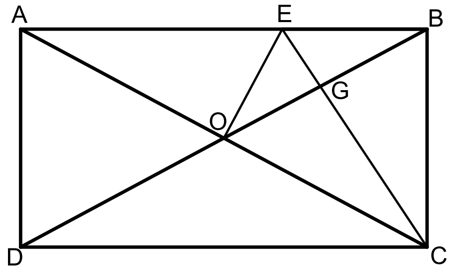
50) א. $\frac{b\sin(\gamma-45°)}{\sin 45°}\ ,\ \frac{b\sin(135°-\gamma)}{\sin 45°}$ ב. $\gamma=75°$.

51) א. $S=R^2\sin 2\alpha$ ב. $S=\frac{2R^2\cos^3\alpha}{\sin\alpha}$ ג. $\alpha=26.56°$.

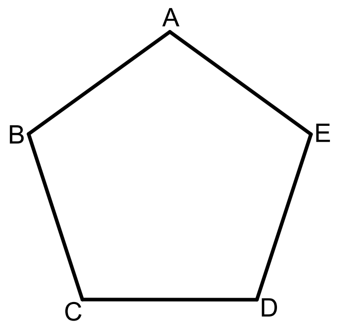
52) א. $AE=6k\sin\alpha$ ב. $P_{ACE}=k+6k\sin\alpha+k\sqrt{25-24\cos 2\alpha}$
ג. $\alpha=14.47°$.

שאלות המשלבות ידע בגיאומטריה:

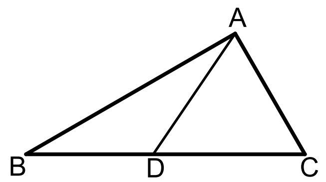
שאלות:



53) המרובע ABCD הוא מלבן.
מעבירים את האלכסונים AC ו-BD .
הנקודה E נמצאת על הצלע AB של המלבן
ומחלקת אותה כך ש- AE = 2BE .
ידוע כי הקטע OE מאונך לאלכסון AC
ושווה ל-BE.
הקטע CE חותך את האלכסון BD בנקודה G.
א. הוכח כי הקטע CE מאונך לאלכסון BD.
ב. הוכח כי מתקיים : AE = 4GE .
ג. נתון כי שטח המשולש BEG הוא 5 סמ"ר.
חשב את שטח המלבן ABCD.

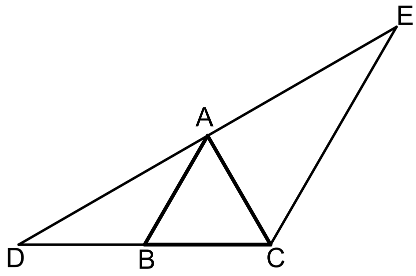


54) באיור שלפניך נתון מחומש משוכלל ACBDE
(כל זוויותיו הן 108°) בעל אורך צלע α .
א. הבע באמצעות α את אלכסון המחומש AD.
ב. הבע באמצעות α את רדיוס המעגל
החוסם את המחומש.
ג. הבע באמצעות α את שטח המחומש.
ד. אורך רדיוס המעגל החוסם את המחומש הוא 6 ס"מ.
חשב את שטח המחומש.



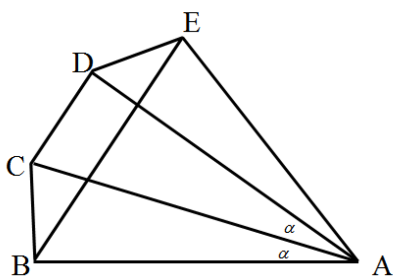
55) במשולש ABC הזווית C היא 60° .
מעבירים את הקטע AD כך שנוצרים
המשולשים ACD ו-ABD.
ידוע כי רדיוס המעגל החוסם את
המשולש ACD הוא : $\sqrt{3}$ ס"מ $=R_1$.
כמו כן רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא : 3 ס"מ $=R_2$.
א. הוכח כי המשולש ABC הוא ישר זווית.
ב. היקף המשולש ABC הוא : $12+4\sqrt{3}$ ס"מ = P .
חשב את שטח המשולש.

56) המשולש ABC הוא שווה צלעות.
הקטע DE עובר דרך הקודקוד A כך שנוצרים שני משולשים ABD ו-ACE.
ידוע כי AC חוצה את זווית DCE במשולש DCE.



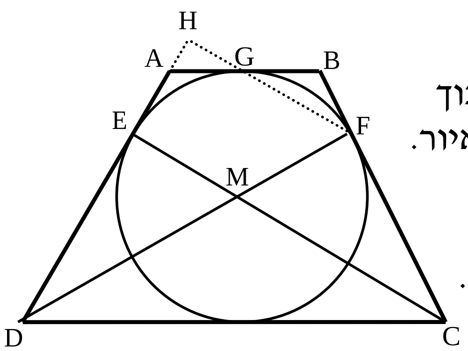
א. הוכח: $AB \parallel CE$.
ב. הוכח: $BC \cdot DE = DC \cdot AE$.
ג. נתון: DC = 8 ס"מ
וכי: $AC \perp DE$.
i. חשב את שטח המשולש DCE.
ii. חשב את שטח המשולש ABD.

57) מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB , AC , AD ו-AE
כך שמתקיים: $\angle BAC = \angle CAD = \alpha$ ו- AB = AE.
מעבירים את האלכסון BE במחומש ABCDE.
מתקיים: $BE \parallel CD$.
ידוע כי המרובע BCDE הוא בר חסימה.



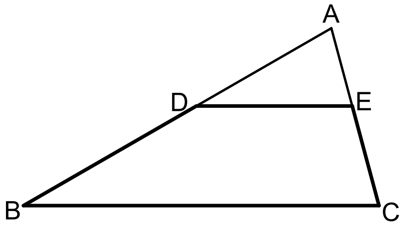
א. הוכח כי המרובע BCDE הוא טרפז שווה שוקיים.
ב. נתון כי המשולש ACD הוא ש"ש (AC = AD).
הוכח כי: $\Delta ABD \cong \Delta ACE$.
ג. ידוע כי: $\angle ADC = 3\alpha + 2.5$ ו- $\angle ADE = 3\alpha - 10$.
הוכח כי משולש ADE הוא ישר זווית.
ד. נסמן: $AB = m$.
i. הבע באמצעות m את צלעות הטרפז BCDE.
ii. הבע באמצעות m את שטח המחומש ABCDE.
iii. מצא את m אם ידוע כי שטח המחומש ABCDE הוא 46.284 סמ"ר. (עגל למספר שלם).

58) הטרפז ABCD הוא שווה שוקיים. חוסמים מעגל בתוך הטרפז אשר משיק לו בנקודות E, F ו-G כמתואר באיור.
הקטעים DF ו-CE חוצים את זוויות הטרפז ונחתכים בנקודה M.



א. הוכח כי הנקודה M היא מרכז המעגל החסום.
ב. חשב את זוויות הטרפז.
ג. ממשיכים את GF ואת AD כך שהם נפגשים בנקודה H.
חשב את היחס $\frac{EM}{FH}$.

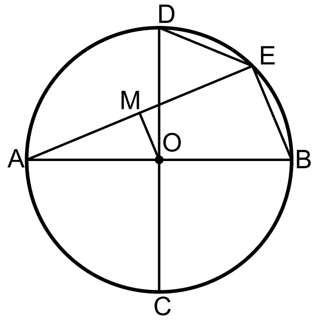
59) המרובע BDEC הוא טרפז $BC \parallel DE$.
המשכי השוקיים BD ו-CE נפגשים בנקודה A
כך שהמשולש ABC הוא שווה שוקיים (AB = BC).
נתון: 18 ס"מ = AB, $\sphericalangle ADE = 30^\circ$.



א. סמן את אורך הבסיס DE ב-x
ואת שטח הטרפז BDEC ב- S.
הבע את S באמצעות x.

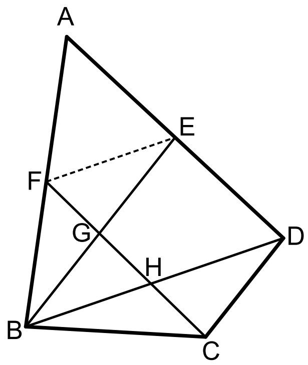
ב. על הקטע AD בונים ריבוע.
ידוע כי שטחו קטן ב-1 סמ"ר משטח הטרפז BDEC.
חשב את היחס: $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}$.

60) במעגל שמרכזו O מעבירים את הקטרים AB ו- CD
המאונכים זה לזה. E היא נקודה על היקף
המעגל המקיימת: 15 ס"מ = BE + DE.
מעבירים את המיתר AE.
הקטע OM מאונך למיתר AE ושווה למיתר DE.



א. הוכח כי המרובע OMEB הוא טרפז ישר זווית.
ב. מצא את אורך המיתר BE.
נתון כי שטח הטרפז הוא 90 סמ"ר.
ג. מצא את רדיוס המעגל.
ד. חשב את זווית B.

61) BD הוא אלכסון במרובע הבר-חסימה ABCD.
הנקודות E ו- F הן בהתאמה אמצעי
הצלעות AD ו- AB במרובע.
מעבירים את הקטעים BE ו-CF כך ש- $BE \parallel CD$.
נתון כי הזוויות $\sphericalangle A$ ו- $\sphericalangle BFE$ משלימות ל- 180°.



א. הוכח: $\Delta BFE \sim \Delta BCD$.
ב. נתון כי: BE = 7.5 וכי: $GE \cdot HD = 17\frac{1}{15}$.
חשב את אורך הקטע FE.
ג. נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש BED
הוא: 4.001 ס"מ = R. מצא את זווית $\sphericalangle EBD$.

תשובות סופיות:

53) ג. 120 סמ"ר

54) א. 1.618α ב. 0.85α ג. $1.72\alpha^2$ ד. $S=85.57$

55) ב. $S=8\sqrt{3}$

56) ג.i. $S_{\text{CDE}}=16\sqrt{3}$ ג.ii. $S_{\text{ABD}}=4\sqrt{3}$

57) ד.i. $\text{BE}=1.2175m$, $\text{CD}=0.4776m$, $\text{DE}=0.4663m$, $\text{BC}=0.4663m$

62) ד.ii. $0.7232m^2$ ד.iii. $m=$ 8 ס"מ

58) ב. $60°$, $120°$ ג. $\frac{2}{3}$

59) א. $S=81-0.25x^2$ ב. $\frac{S_{\text{ADE}}}{S_{\text{ABC}}}=\frac{16}{81}$

60) ב. BE = 10 ג. R = 13 ד. $\sphericalangle B=67.38°$

61) ב. FE = 4 ג. $16.73°$

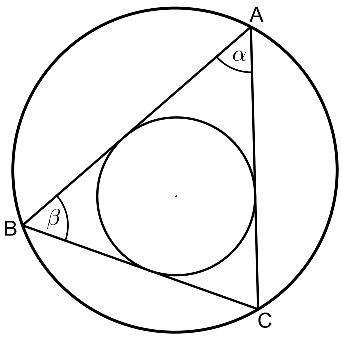
שאלות מסכמות:

שאלות:

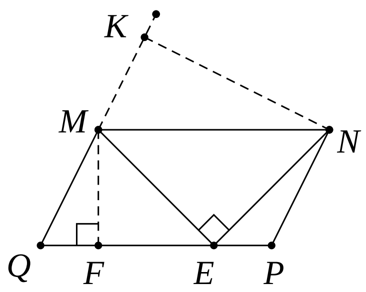
1) המשולש ABC חסום מעגל שרדיוסו R.
נתון כי $\sphericalangle B=\beta$, $\sphericalangle A=\alpha$.

א. הבע את רדיוס המעגל החסום במשולש בעזרת R, β , α.

ב. נתון כי: $\alpha=\beta=60^\circ$.
חשב את רדיוס המעגל החסום במשולש בעזרת R.



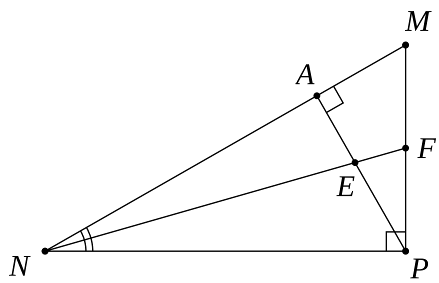
2) במקבילית MNQP נקודה E נמצאת על הצלע PQ כך ש-$\sphericalangle MEN=90^\circ$ (ראה ציור).
נתון: MQ = 12 ס"מ , $\sphericalangle MQP=70^\circ$, $\sphericalangle MNE=40^\circ$.
מצא את הגובה MF, ואת הגובה NK.



3) במשולש ישר-זווית MNP, $(\sphericalangle P=90^\circ)$
PA הוא גובה ליתר ו-NF חוצה את הזווית $\sphericalangle MNP$.
PA ו-NF נחתכים בנקודה E (ראה ציור).
נתון: NP = 24 ס"מ , $\sphericalangle MNP=40^\circ$.

א. מצא את אורך הקטע NA.

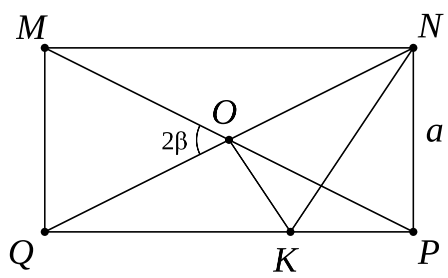
ב. מצא את אורך הקטע EF.



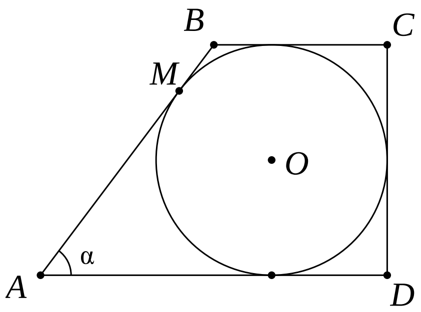
4) אלכסוני המלבן MNPQ נחתכים בנקודה O.
מנקודה O מעלים אנך ל-QN החותך את QP בנקודה K (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle MOQ=2\beta$, $NP=a$.

א. הבע את אורך הקטע OK באמצעות β ו-a.

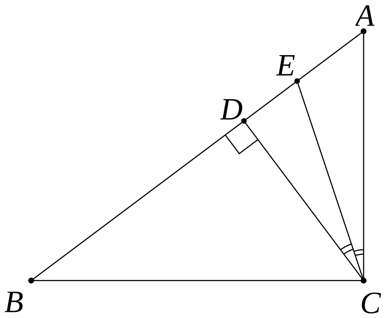
ב. הבע את היקף המשולש NOK באמצעות β ו-a.



5) בטרפז ישר-זווית ABCD חסום מעגל שמרכזו O.
הנקודה M היא נקודת ההשקה של המעגל עם השוק AB.
נתון: 12 ס"מ = AM , $\sphericalangle BAD=\alpha$.
א. הבע את רדיוס המעגל בעזרת α .
ב. הבע את היקף הטרפז בעזרת α .



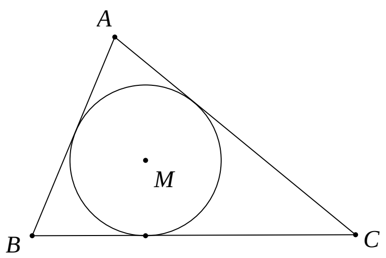
6) במשולש ישר-זווית ABC (ראה ציור) נתון:
8 ס"מ = $\sphericalangle ACB=90°$, BC , $\sphericalangle ABC=\beta$.
CD הוא הגובה ליתר.
CE הוא חוצה-הזווית $\sphericalangle ACD$.
הבע את אורך הקטע AE באמצעות β .



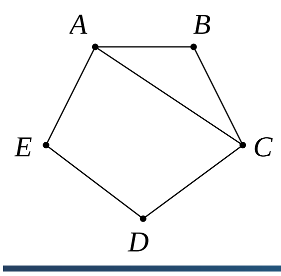
7) נתון מעגל שרדיוסו R . מצולע משוכלל בעל 9 צלעות חוסם את המעגל הזה.
מצולע משוכלל אחר בעל 9 צלעות חסום בתוך מעגל זה.
חשב את היחס בין שטח המצולע החוסם את המעגל לשטח המצולע החסום במעגל זה.

8) ΔABC הוא משולש שווה-שוקיים (AB = AC) שאורך בסיסו 12 ס"מ.
AD הוא הגובה לבסיס BC ו-CE הוא הגובה לשוק AB.
שני הגבהים נחתכים בנקודה O. נתון: $\sphericalangle ABC=\alpha$ $(\alpha>45°)$.
א. הבע את היחס $AO:DO$ באמצעות α .
ב. הראה כי בעבור $\alpha=60°$ הביטוי שמצאת בסעיף א' מתאים לתכונות הגאומטריות של משולש שווה-צלעות.

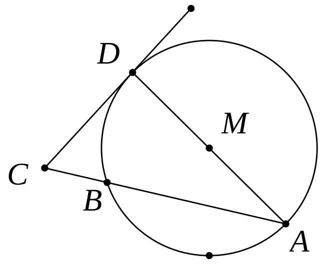
9) במשולש ABC חסום מעגל שמרכזו M ורדיוסו r (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle C=46°$, $\sphericalangle B=62°$.
א. הבע באמצעות r את אורך הצלע BC .
ב. נתון: 16 ס"מ = BC. מצא את r .



10) במחומש משוכלל ABCDE (ראה ציור)
אורך האלכסון AC הוא 15 ס"מ.
חשב את שטח המחומש.



11) מנקודה C הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו M ורדיוסו R מעבירים משיק CD וחותך CBA למעגל (ראה ציור).

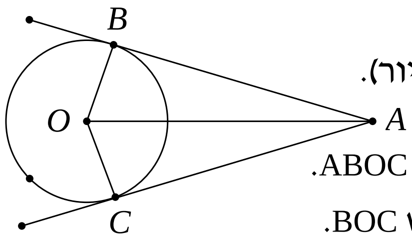


נתון: $\mathrm{CD}=\frac{3}{5}R$.

א. מצא את זוויות המשולש CAD.

ב. הבע באמצעות R את שטח המשולש BCD.

12) מנקודה A, הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו O, יוצאים שני משיקים למעגל, AB ו-AC (ראה ציור).



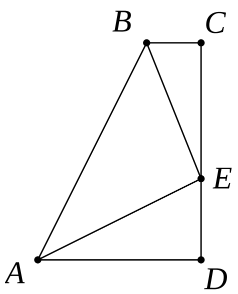
נתון: $\sphericalangle\mathrm{BAC}=2\alpha$, AO = 10 ס"מ.

א. הבע באמצעות α את S_1, שטח המרובע ABOC.

ב. הבע באמצעות α את S_2, שטח המשולש BOC.

ג. הראה שאם $\alpha=30^\circ$, אזי: $S_1=4\cdot S_2$.

13) ABCD הוא טרפז ישר-זווית $(\sphericalangle\mathrm{C}=\sphericalangle\mathrm{D}=90^\circ)$.



נקודה E נמצאת על הצלע DC (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle\mathrm{AEB}=90^\circ$, $\mathrm{AE}=\mathrm{BE}=k$ ו- $\sphericalangle\mathrm{CBE}=\beta$.

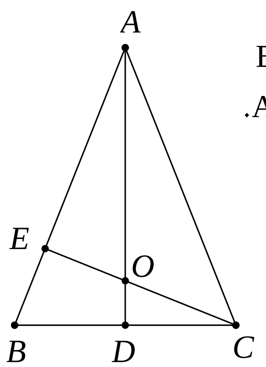
הבע באמצעות k ו- β את שטח הטרפז.

14) ענה על השאלות הבאות:

א. במעושר משוכלל, ששטחו 100 סמ"ר, חוסמים מעגל. מצא את רדיוס המעגל החסום במעושר.

ב. מעושר משוכלל חסום במעגל, שאת רדיוסו מצאת בסעיף א'. מצא את שטח המעושר המשוכלל הזה.

15) ABC הוא משולש שווה-שוקיים (AB = AC) שבו זווית הראש היא זווית חדה. נתון כי זווית הבסיס היא β ואורך הבסיס BC הוא 2α. AD הוא הגובה לבסיס BC ו-CE הוא הגובה לשוק AB. הגבהים AD ו-CE נפגשים בנקודה O (ראה ציור).

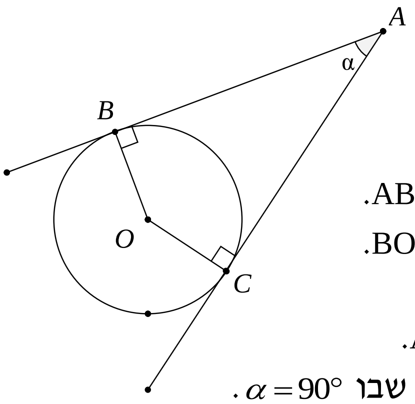


א. הבע באמצעות α ו- β את אורכי הקטעים CO ו-CE.

ב. הבע באמצעות β את היחס $\frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{CE}}$.

ג. חשב את היחס שמצאת בסעיף ב' כאשר $\beta=60^\circ$, והסבר מהי המשמעות הגאומטרית של התוצאה שקיבלת.

16) מנקודה A יוצאים שני משיקים למעגל שמרכזו O, שאורכם m (כלומר: $AB=AC=m$).
נקודות ההשקה הן B ו-C, והזווית שבין המשיקים היא $\sphericalangle BAC=\alpha$ (ראה ציור).



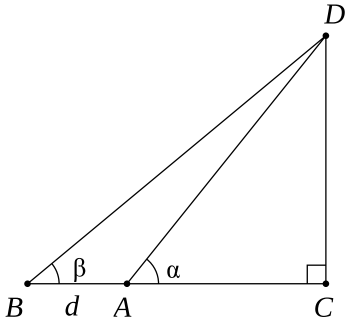
א. הבע באמצעות m ו- α את שטח המשולש ABC.

ב. הבע באמצעות m ו- α את שטח המשולש BOC.

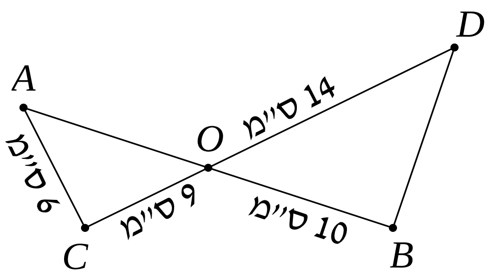
ג. הבע באמצעות α את היחס שבין שטחו של המשולש BOC לבין שטחו של המשולש ABC.

ד. בדוק את תשובתך לסעיף ג' למקרה המיוחד שבו $\alpha=90°$.

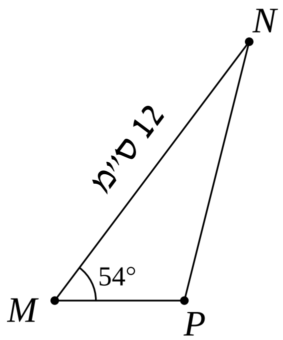
17) במשולש ישר-זווית DAC נתון $\sphericalangle DAC=\alpha$.
מאריכים את הניצב AC כך ש- $AB=d$.
נתון כי: $\sphericalangle DBA=\beta$ (ראה ציור).
סמן: $AC=x$.
הבע את x באמצעות d, α ו- β.



18) הקטעים AB ו-CD נחתכים בנקודה O.
נתון כי: $\sphericalangle OAC=60°$,
CO = 9 ס"מ, AC = 6 ס"מ,
OD = 14 ס"מ, OB = 10 ס"מ.
חשב את $\sphericalangle ODB$.



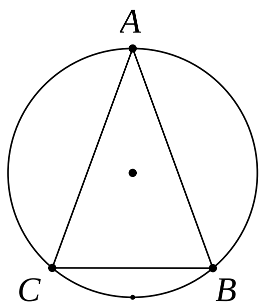
19) במשולש MNP גודל הזווית M הוא $54°$.
נתון כי אורך הצלע MN הוא 12 ס"מ
(ראה ציור), והצלע NP ארוכה ב-7 ס"מ מהצלע MP.



א. חשב את אורך הצלע NP.

ב. PA הוא תיכון לצלע MN.
חשב את שטח המשולש PAN.

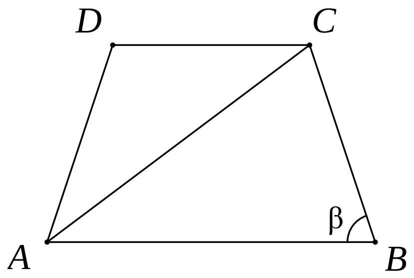
20) המשולש השווה-שוקיים ABC (AB = AC)
חסום במעגל (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle ABC=\beta$.
כמו כן ידוע שאורך רדיוס המעגל הוא 20 ס"מ.



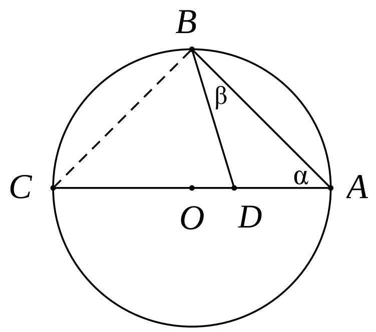
א. הבע בעזרת β את שטח המשולש ABC.

ב. חשב את שטח המשולש ABC בעבור $\beta=45°$.

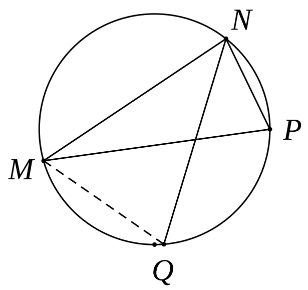
21) במשולש ABC הזווית $\sphericalangle C$ היא בת $60°$, אורך הצלע AB הוא $\sqrt{13}$ ס"מ, והיקף המשולש הוא $7+\sqrt{13}$ ס"מ. חשב את שטח המשולש.



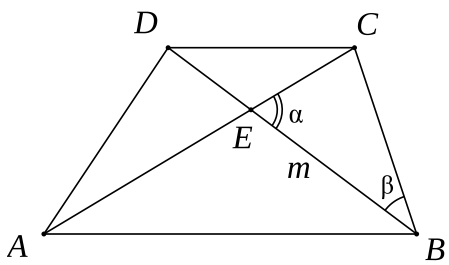
22) בטרפז שווה-שוקיים ABCD (AD = BC)
אורך הבסיס הגדול AB שווה לאורך האלכסון.
זווית הבסיס היא β $(\beta > 60°)$, (ראה ציור).
הבע באמצעות β את היחס שבין שטח המשולש ACD לשטח המשולש ABC.



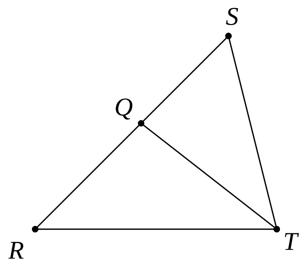
23) הקודקודים A ו- B של המשולש ABD נמצאים על היקף מעגל שאורך רדיוסו 12 ס"מ ומרכזו O.
הקודקוד D של המשולש ABD נמצא על הרדיוס OA.
א. הבע בעזרת α ו- β את שטח המשולש ABD.
ב. הבע בעזרת α ו- β את היחס שבין שטח המשולש ABC לשטח המשולש ABD.



24) משולש MNP חסום במעגל.
המיתר NQ חוצה את הזווית $\sphericalangle MNP$.
נתון: $\sphericalangle MNP = 80°$, $\sphericalangle MPN = 70°$,
NP = 12 ס"מ.
חשב את אורך המיתר MQ.



25) נתון טרפז ABCD $(AB \| CD)$.
הנקודה E היא נקודת המפגש של אלכסוני הטרפז.
נתון: $DC = BC$, $BE = m$,
$\sphericalangle CEB = \alpha$, $\sphericalangle CBD = \beta$ (ראה ציור).
הבע את אורכי בסיס הטרפז:
AB ו- CD באמצעות m, α ו- β.



26) במשולש RST נתון: QT הוא חוצה-הזווית $\measuredangle RTS$
(ראה ציור), $QS = m$, $RQ = \sqrt{2}$,
$\measuredangle RST = \alpha$, $\measuredangle TRQ = 45°$.

א. הבע את $\sin\alpha$ באמצעות m.

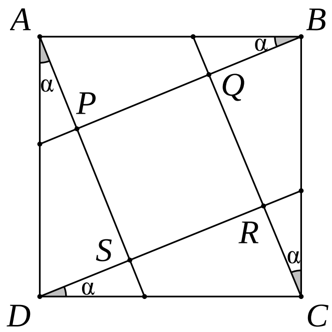
ב. נתון כי: $m = \frac{2}{\sqrt{3}}$.
חשב את זוויות המשולש RST.

27) במשולש שווה שוקיים ABC (AB = AC) התיכון לשוק שווה באורכו לרדיוס המעגל החוסם את המשולש. חשב את זווית הבסיס של המשולש.

28) נתון משולש שצלעותיו kt , $2t$, t.

א. לאיזה ערכים של הקבוע k המשולש הוא קהה זווית?

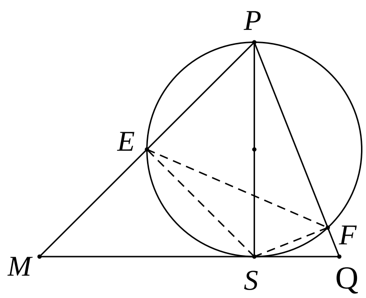
ב. נתון $k = \sqrt{7}$. הבע ע״י t את אורך חוצה הזווית הקהה.



29) בתוך הריבוע ABCD נתון, העבירו ארבעה קטעים היוצרים את אותה זווית α עם צלעות הריבוע כך שהתקבל ריבוע פנימי PQRS.

א. הוכח כי: $\frac{PQ}{AB} = \cos\alpha - \sin\alpha$.

ב. לאיזו זווית α מתקיים: $PR = AB$?



30) PS הוא גובה במשולש PMQ (ראה ציור).
נתון $\measuredangle SPQ = \beta$, $\measuredangle MPS = \alpha$, $PS = h$.

א. הבע את שטח המשולש PMQ
באמצעות h , α ו- β.

ב. מעגל שקוטרו PS חותך את
הצלעות PM ו-PQ בנקודות E
ו-F בהתאמה (ראה ציור).

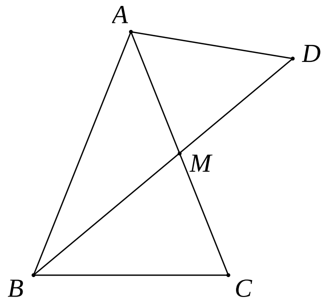
i. הבע באמצעות α ו- β את $\measuredangle ESF$.

ii. הבע באמצעות α ו- β את היחס בין
שטח המשולש ESF לשטח המשולש PMQ.

31) במשולש ABC הצלעות הן a, b ו- c והזוויות שמונחות מולן הן: α, β ו- γ בהתאמה.

א. הבע את אורך התיכון m_a (התיכון לצלע a) באמצעות הצלעות b ו- c והזווית α.

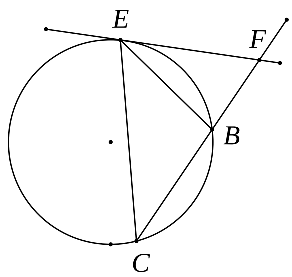
ב. בדוק את הנוסחה שמצאת למקרה שבו המשולש ABC הוא שווה צלעות.



32) במשולש שווה שוקיים ABC ‏(AB = AC),
BM הוא תיכון לשוק (ראה ציור).
נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא 10 ס"מ וכן נתון ש- $\sphericalangle BAC = 50°$.

א. מצא את גודל הזווית $\sphericalangle BMC$.

ב. ממשיכים את BM עד לנקודה D, כך שרדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא 14 ס"מ. מצא את שטח המשולש AMD.

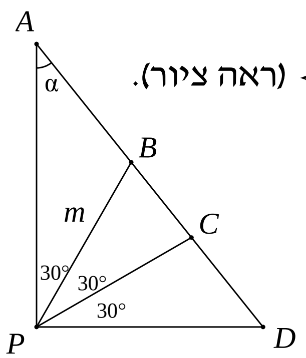


33) משולש שווה שוקיים BCE ‏(BC = BE) חסום במעגל שרדיוסו R.
זווית הבסיס של המשולש BCE היא α.
בנקודה E העבירו משיק למעגל החותך את המשך השוק BC בנקודה F (ראה ציור).

א. בטא את שטח המשולש BEF באמצעות R ו- α.

ב. מצא את הערך של α שבעבורו שטח המשולש BCE שווה לשטח המשולש BEF.

34) בטרפז BCDE ‏$(BC \| ED)$ אורך הבסיס BC הוא 12 ס"מ.
הזווית שבין הבסיס BC לשוק DC היא $80°$.
אורך האלכסון BD הוא 16 ס"מ, והוא חוצה את הזווית $\sphericalangle CBE$.
חשב את היקף הטרפז.

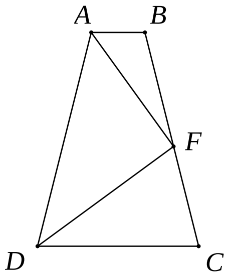


35) במשולש ישר-זווית APD מחלקים את הזווית הישרה $\sphericalangle P$ לשלוש זוויות שוות, כלומר $\sphericalangle APB = \sphericalangle BPC = \sphericalangle CPD = 30°$ (ראה ציור).
נתון כי: $PB = m$, $\sphericalangle PAD = \alpha$.

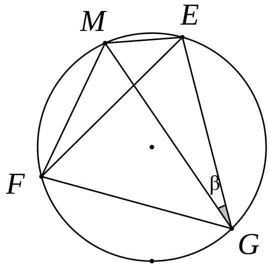
א. היעזר במשפט הסינוסים, והבע את AB , AC , BD ו- CD באמצעות m ו- α.

ב. הוכח כי: $\frac{AC \cdot BD}{AB \cdot CD} = 3$.

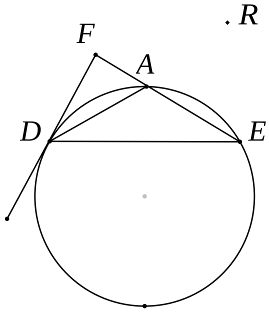
36) בטרפז שווה שוקיים ABCD $(AD = BC\ ,\ AB \| DC)$,
F היא נקודה על השוק BC, כך ש-DF חוצה את
הזווית $\sphericalangle CDA$ ו-AF חוצה את הזווית $\sphericalangle DAB$ (ראה ציור).
נתון: $AB = \beta\ ,\ \sphericalangle FAB = \beta$.
הבע באמצעות b ו- β את אורך הבסיס DC.



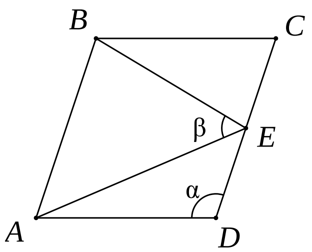
37) משולש שווה צלעות EFG חסום במעגל שרדיוסו R.
M היא נקודה על המעגל. נתון: $\sphericalangle MGE = \beta$ (ראה ציור).
א. הוכח כי: $ME + MF = MG$.
ב. אם $ME = R$ מה תוכל לומר על MG?



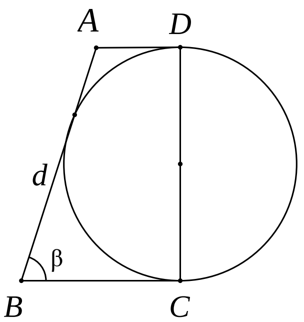
38) משולש שווה שוקיים ADE (AD = AE) חסום במעגל שרדיוסו R.
ישר המשיק למעגל בנקודה D חותך את המשך
הצלע AE בנקודה F (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle AE = \alpha$ $(60° < \alpha < 180°)$.
א. הבע את שטח המשולש ADF באמצעות R ו- α.
ב. הבע באמצעות α את היחס שבין שטח
המשולש ADE ובין שטח המשולש ADF.
ג. חשב את α אם שטח המשולש ADE שווה לשטח המשולש ADF.



39) במעוין ABCD הנקודה E היא אמצע הצלע CD.
נתון: $\sphericalangle ADC = \alpha\ ,\ \sphericalangle AEB = \beta$ (ראה ציור).
הוכח כי: $\cos\beta = \dfrac{3}{\sqrt{25 - 16\cos^2\alpha}}$.



40) נתון טרפז ABCD ונתון מעגל. השוק DC הוא קוטר המעגל.
השוק AB משיקה למעגל, והבסיסים AD ו- BC
משיקים גם הם למעגל בנקודות D ו- C בהתאמה (ראה ציור).
נתון כי: $\sphericalangle B = \beta\ ,\ AB = d$.
א. הבע באמצעות d את סכום בסיסיו של הטרפז.
ב. הבע באמצעות d ו- β את היקף הטרפז ואת השטח
של הטרפז.
ג. נתון שהיקף הטרפז 25 ס״מ ושטחו 25 סמ״ר.
חשב את הזווית החדה β.



41) במשולש שווה שוקיים PMN ‏(PM = PN),

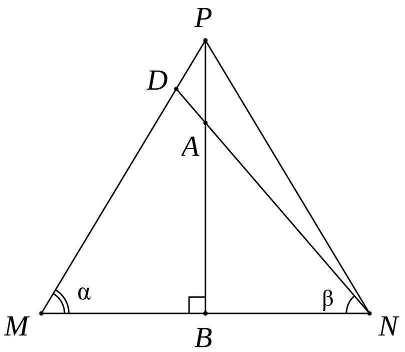
A היא נקודה על הגובה PB, כך ש- $PA = \frac{1}{5} \cdot PB$.

הישר NA חותך את השוק PM בנקודה D (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle DNM = \alpha$, $\sphericalangle DNB = \beta$ ו- $BN = \alpha$.

א. חשב את היחס $\tan\alpha : \tan\beta$.

ב. חשב את היחס PM:DM.



42) במעגל שמרכזו O ורדיוסו R מעבירים שני

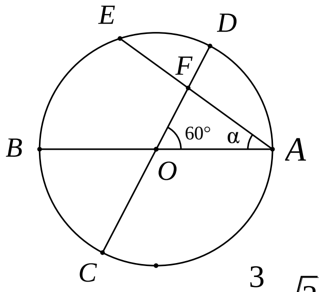
קטרים AB ו- CD הנחתכים בזווית של $60°$.

מיתר AE, היוצר זווית α עם הקוטר AB,

חותך את הקוטר CD בנקודה F (ראה ציור).

א. הבע את שטח המשולש ACF באמצעות R ו- α.

ב. הוכח שכאשר $\alpha = 30°$, שטח המשולש ACF הוא $\frac{3}{8} \cdot \sqrt{3} \cdot R^2$.



תשובות סופיות:

1) א. $r=\dfrac{2R\sin(\alpha+\beta)\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\alpha}{2}}{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}=4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ ב. $\frac{1}{2}R$

2) MF = 11.28 ס"מ , KN = 21.52 ס"מ

3) א. NA = 18.385 ס"מ ב. EF = 5.975 ס"מ

4) א. $OK=\dfrac{a}{2\cos\beta}$ ב. $\dfrac{a}{2\sin\beta}\cdot\left[1+\tan\beta+\dfrac{1}{\cos\beta}\right]$

5) א. $12\cdot\tan\frac{\alpha}{2}$ ב. $24\cdot\left(1+\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2$

6) $AE=8\sin\beta\cdot\left[\tan\beta-\tan\left(\frac{1}{2}\beta\right)\right]=8\tan\beta\cdot\tan\left(\frac{1}{2}\beta\right)$

7) $2\cdot\dfrac{\tan 20^\circ}{\sin 40^\circ}=\dfrac{1}{\cos^2 20^\circ}\approx 1.132$

8) א. $-2\cdot\dfrac{\tan\alpha}{\tan 2\alpha}=-\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha-1$

ב. מתקיים: $AO=2\cdot DO$ (מפגש הגבהים הוא גם מפגש התיכונים).

9) א. $BC=r\cdot(\tan 59^\circ+\tan 67^\circ)\approx 4.02\cdot r$ ב. $r=\dfrac{16}{\tan 59^\circ+\tan 67^\circ}\approx 3.98$

10) $S=$ 147.86 סמ"ר

11) א. $\sphericalangle A=16.7^\circ$, $\sphericalangle D=90^\circ$, $\sphericalangle C=73.3^\circ$ ב. $S\approx 0.0495\cdot R^2$

12) א. $S_1=100\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=50\cdot\sin 2\alpha$

ב. $S_2=50\cdot\sin^2\alpha\cdot\sin(180^\circ-2\alpha)=50\cdot\sin^2\alpha\cdot\sin 2\alpha$

13) א. $S=\frac{1}{2}k^2\cdot(1+2\sin\beta\cos\beta)$ (או כל תשובה שקולה). ב. 27 יח"ש.

14) א. $r\approx$ 5.548 ס"מ ב. $S\approx$ 90.45 סמ"ר

15) א. $CO=\dfrac{a}{\sin\beta}$, $CE=2a\cdot\sin\beta$ ב. $\dfrac{CO}{CE}=\dfrac{1}{2\sin^2\beta}$

ג. היחס הוא: $\frac{2}{3}$ (בדומה למפגש התיכונים במשולש)

16) א. $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}m^2\cdot\sin\alpha$ ב. $S_{\Delta BOC}=\frac{1}{2}m^2\cdot\sin\alpha\cdot\tan^2\frac{\alpha}{2}$

ג. יחס השטחים: $\tan^2\frac{\alpha}{2}$

ד. במקרה זה $ABOC$ הוא ריבוע, ויחס השטחים שווה ל-1 $\left(\tan^2 45^\circ=1\right)$.

17) $AC=x=d\cdot\frac{\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$

18) $\sphericalangle ODB\approx 44.7^\circ$

19) א. $NP=$ 10.38 ס"מ ב. $S_{\Delta PAN}=$ 8.2 סמ"ר

20) א. $S=800\cdot\sin^2\beta\cdot\sin 2\beta$ ב. 400 סמ"ר

21) $S_{\Delta ABC}=3\cdot\sqrt{3}\approx$ 5.196 סמ"ר

22) יחס השטחים הוא: $1-4\cos^2\beta=\left(-\frac{\sin 3\beta}{\sin\beta}\right)$ או כל תשובה שקולה.

23) א. $S_{\Delta ABD}=288\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ ב. $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta\cdot\cos\alpha}$

24) $MQ\approx$ 15.43 ס"מ

25) $AB=m\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$, $DC=m\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

26) א. $\sin\alpha=\frac{1}{m}$ ב. 15° , 120° , 45° או 75° , 60° , 45°

27) $\alpha\approx 20.7$

28) א. $\sqrt{5}<k<3$ או $1<k<\sqrt{3}$ ב. $\frac{2}{3}\cdot t\approx 0.667t$

29) $\alpha=15^\circ$

30) א. $S_{\Delta MPQ}=\frac{1}{2}\cdot h^2\cdot(\tan\alpha+\tan\beta)$ ב. i. $\sphericalangle ESF=180^\circ-(\alpha+\beta)$

ב. ii. $S_{\Delta EFS}:S_{\Delta MPQ}=\frac{1}{4}\cdot\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta$

31) א. $m_a=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{b^2+c^2+2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha}$ ב. $m_a=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot b$

32) א. $\sphericalangle BMC=79.5^\circ$ ב. $S_{\Delta AMD}=$ 54.1 סמ"ר

33) א. $S_{\Delta BEF}=\frac{2R^2\cdot\sin^3\alpha\cdot\sin2\alpha}{\sin3\alpha}$ ב. $\alpha=45^\circ$

34) $P_{BCDE}=51.09$

35) א. $AC=\frac{\sqrt{3}\cdot m\cdot\sin(30^\circ+\alpha)}{2\cdot\sin(60^\circ+\alpha)\cdot\sin\alpha}$, $AB=\frac{m}{2\cdot\sin\alpha}$, $BD=\frac{\sqrt{3}\cdot m}{2\cdot\cos\alpha}$,

$CD=\frac{m\cdot\sin(30^\circ+\alpha)}{2\cdot\sin(60^\circ+\alpha)\cdot\cos\alpha}$ ב. הוכחה.

36) $DC=\frac{-b\cdot\tan\beta}{\tan3\beta}$

37) ב. MG הוא קוטר במעגל.

38) א. $S_{\Delta ADF}=\frac{-2R^2\cdot\cos^3\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\alpha}{\cos(1.5\alpha)}$ ב. $\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ADF}}=-\frac{\cos(1.5\alpha)}{\cos(0.5\alpha)}$

ג. $\alpha=90^\circ$

40) א. $AD+BC=d$ ב. $P=2d+d\sin\beta$, $S=\frac{1}{2}d^2\cdot\sin\beta$

ג. $\beta=30^\circ$

41) א. $\tan\beta:\tan\alpha=\frac{4}{5}=0.8$ ב. $PM:DM=\frac{9}{8}=1.125$

42) א. $S=\frac{3R^2\cdot\sin(30^\circ+\alpha)}{4\cdot\sin(60^\circ+\alpha)}$.