# סדנת ריענון במתמטיקה למדעי החברה



# תוכן העניינים

1. מבוא לאלגברה (חזרה על בית ספר יסודי) ..... 1
2. משוואות אלגבריות ..... 34
3. אי שוויונים אלגבריים ..... 47
4. חוקי החזקות והשורשים, משוואות ואי שוויונות מעריכיים ..... 56
5. חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים ..... 68
6. פונקציות ..... 76
7. מבוא לטריגונומטריה ..... 95
8. מבוא לחשבון דיפרנציאלי ..... 97

# סדנת ריענון במתמטיקה למדעי החברה

## פרק 1 - מבוא לאלגברה (חזרה על בית ספר יסודי)

### תוכן העניינים


1. מספרים מכוונים ..... 1
2. חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים ..... 4
3. סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים ..... 6
4. שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים ..... 7
5. כפל וחילוק שברים ..... 11
6. חיבור וחיסור שברים ..... 12
7. בעיות יסודיות באחוזים ..... 14
8. חזרה על תבניות מספר ..... 15
9. כינוס איברים ..... 16
10. פישוט ביטויים על ידי פתיחת סוגריים ..... 17
11. פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר ..... 19
12. פירוק לגורמים של ביטויים אלגברים ..... 21
13. פירוק הטרינום ..... 23
14. שברים אלגברים ..... 25
15. כפל וחילוק של שברים אלגברים ..... 28
16. חיבור וחיסור של שברים אלגברים ..... 29
17. שברים כפולים ..... 32

# מספרים מכוונים

## סיכום כללי

מספרים מכוונים הם מספרים שיכולים לקבל סימן חיובי או שלילי, כגון:

- בקניון גדול ישנן קומות 1, 2, 3, 4, וכן חניונים הממוקמים בקומות 1-, 2- ו-3-.
- גובה פני הים מוגדר להיות 0 מטרים. העיר חיפה נמצאת כ-103 מטרים מעל פני הים בעוד שים המלח נמצא בגובה 426- מטרים.

### כללים

- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים זהים, מחברים את המספרים עצמם והסימן נשאר.
- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים מנוגדים, מחסירים את המספרים זה מזה (הקטן מהגדול) וסימן התוצאה כסימן המספר הגדול מביניהם.
- כפל וחילוק יתבצע בשני חלקים:
  - ביצוע הפעולה על המספרים עצמם.
  - קביעת הסימן של התוצאה באופן הבא:
    - כפל או חילוק של שני מספרים בעלי אותו סימן - התוצאה תהיה חיובית.
    - כפל או חילוק של שני מספרים שוני סימן - התוצאה תהיה שלילית.

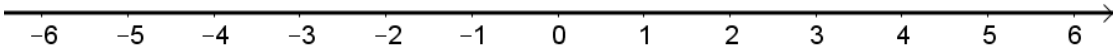
### הערה

אם יש רצף של מכפלות (או חילוקים), סימן התוצאה תלוי במספר הפעמים שבהם מופיע סימן שלילי (-). אם הסימן מופיע מספר זוגי של פעמים התוצאה חיובית, ואם הוא מופיע מספר אי-זוגי של פעמים אזי התוצאה שלילית.

## שאלות

**1)** סמנו את המספרים הבאים על ציר המספרים בהתאמה:

$$-3\frac{1}{2}\ ,\ 4\ ,\ 1\frac{1}{3}\ ,\ -5\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ 2\ ,\ 0\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ -2$$




**2)** חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $5+7-23+1$

ב. $5-8-12+17$

**3)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(-2)\cdot(-3)\cdot(-3)$

ב. $2\cdot3\cdot3$

ג. $(-2)\cdot3\cdot(-3)$

ד. $(-2)\cdot(-3)\cdot3$

ה. $2\cdot3\cdot(-3)$

ו. $(-2)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-2)$

ז. $(-1)\cdot(-2)\cdot(-4)\cdot2$

ח. $1\cdot(-2)\cdot(-4)\cdot2$

**4)** מהו הסימן של תוצאת המכפלה בכל מקרה:

א. $(-2)\cdot(-4)\cdot(-3)\cdot(-10)\cdot(-6)\cdot(-5)$

ב. $(-1)\cdot2\cdot4\cdot(-3)\cdot(-10)\cdot6\cdot(-5)$

ג. $(-1)\cdot2\cdot4\cdot(-3)\cdot(-10)\cdot(-6)\cdot(-5)$

ד. $(-1)\cdot2\cdot4\cdot(-3)\cdot(-10)\cdot6\cdot5$

**5)** חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{-60}{12}$

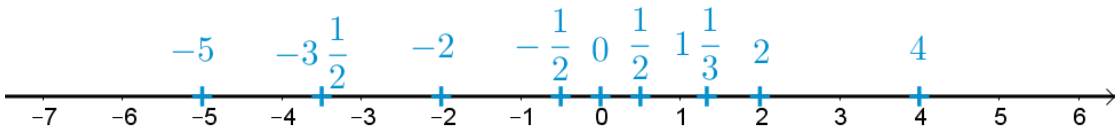
ב. $\frac{42}{-6}$

ג. $\frac{32}{-4}$

ד. $\frac{-12}{-3}$

## תשובות סופיות

**1)** להלן מערכת הצירים:




**2)** א. -10 ב. 2

**3)** א. -18 ב. 18 ג. 18 ד. 18

ה. -18 ו. 36 ז. -16 ח. 16

**4)** א. + ב. + ג. - ד. -

**5)** א. -5 ב. -7 ג. -8 ד. 4

# חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים

## סיכום כללי

**הגדרה:**

פעולת החזקה היא צורה מקוצרת שמייצגת פעולת כפל של אותו מספר בעצמו מספר פעמים. סימון החזקה הוא באופן הבא:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$$

כאשר $a$ נקרא הבסיס ו- $n$ נקראת החזקה.

**הערות**

- כאשר הבסיס חיובי, התוצאה תמיד תהיה חיובית ללא קשר האם החזקה היא זוגית או אי-זוגית.
- כאשר הבסיס שלילי, התוצאה תהיה חיובית אם החזקה היא זוגית ושלילית אם החזקה היא אי-זוגית.

**הגדרה**

פעולת השורש היא הפוכה לפעולת החזקה והיא מאפשרת למצוא את בסיס החזקה. סימון השורש הוא באופן הבא:

$$\sqrt[n]{a}$$

כאשר $a$ נקרא הבסיס ו- $n$ נקרא סדר השורש.

**הערות**

- שורש למספר חיובי יכול להיות מסדר זוגי או אי-זוגי.
- שורש למספר שלילי יכול להיות מסדר אי-זוגי בלבד.

## שאלות

**1)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $3^2$
ב. $3^3$
ג. $(-3)^3$
ד. $(-2)^3$
ה. $4^3$
ו. $3^4$
ז. $(-5)^3$
ח. $10^4$
ט. $-(-3)^4$
י. $-5^4$
יא. $-4^3$
יב. $-(-2)^6$

**2)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sqrt[3]{-27}$
ב. $\sqrt[4]{625}$
ג. $\sqrt[4]{-16}$
ד. $\sqrt[5]{-32}$
ה. $-\sqrt[4]{81}$
ו. $-\sqrt[3]{1000}$

## תשובות סופיות

**1)** א. 9 ב. 27 ג. -27 ד. -8 ה. 64 ו. 81
ז. -125 ח. 10000 ט. -81 י. -625 יא. -64 יב. -64

**2)** א. -3 ב. 5 ג. לא מוגדר ד. -2 ה. -3 ו. -10

# סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים

## סיכום כללי

**סדר פעולות חשבון**

- פעולות כפל וחילוק קודמות לפעולות חיבור וחיסור.
- פעולות חזקה ושורש קודמות לפעולות כפל וחילוק.
- סוגריים קודמים לכל.

## שאלות

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

**1)** $\sqrt{81}+3\cdot 2^3-40:8$

**2)** $(-3)^2:9-2\cdot\left(-4^2\right)$

**3)** $\sqrt{144}-20:4+3\cdot(-2)^2$

**4)** $(-3)^4:(-9)-5\cdot(-2)^3$

**5)** $\left[6\cdot(-1)^4-10\cdot(-1)^3\right]\cdot(-1)^5$

## תשובות סופיות

**1)** 28
**2)** 33
**3)** 19
**4)** 31
**5)** -16

# שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים:

## סיכום כללי:

### הגדרה כללית:

השבר הוא חלק מתוך השלם. מקובל לסמן שבר באמצעות קו שבר המפריד בין המונה (החלק העליון) למכנה (החלק התחתון) באופן הבא:

$$\frac{\text{מונה}}{\text{מכנה}}$$

### ישנם שלושה סוגים אפשריים של שברים:

- שבר פשוט – בו המונה קטן מהמכנה (ולכן תמיד יהיה קטן מ-1).
- שבר מדומה – בו המונה גדול מהמכנה (יהיה גדול בערכו מ-1).
- שבר מעורב – המכיל שילוב של מספר שלם ושבר כלשהו.

### שבר עשרוני:

שבר שהמכנה שלו הוא מספר המהווה כפולות של 10 כגון: 10, 100, 1000 ...
שבר עשרוני מיוצג ע"י נקודה עשרונית אשר מבדילה בין החלק שלם לחלק השברי באופן הבא:

$$\underbrace{XX}_{\text{שלמים}}.\underbrace{YYY}_{\text{שברים}}$$

כדי להמיר שבר פשוט לשבר עשרוני המכנה צריך להיות בכפולות של 10.

### אחוזים - הגדרה:

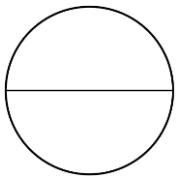
השבר $\frac{1}{100}$ מוגדר להיות אחוז אחד ומסומן באופן הבא: 1%.

באופן זה השבר $\frac{45}{100}$ יכתב: 45% , והשבר $\frac{145}{100}$ יכתב: 145%.

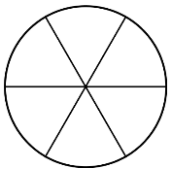
## שאלות:

**1)** צבע את החלקים המתאימים בכל עיגול:

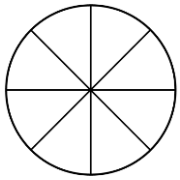
א. צבע $\frac{1}{2}$ מהעיגול



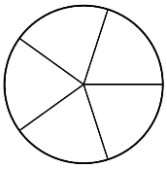
ב. צבע $\frac{1}{6}$ מהעיגול



ג. צבע $\frac{3}{8}$ מהעיגול

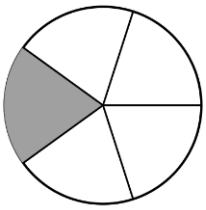


ד. צבע $\frac{2}{5}$ מהעיגול

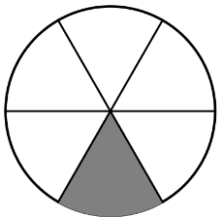


**2)** כתוב את השבר המתאים לחלקים הצבועים בכל אחד מהמקרים הבאים:

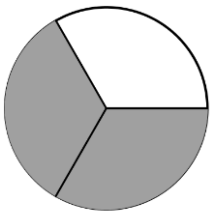
א. שבר:



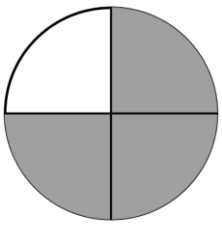
ב. שבר:



ג. שבר:



ד. שבר:



**3)** הרחב את השברים הבאים:

א. השבר $\frac{1}{2}$ לפי בסיס 4, לפי בסיס 18, לפי בסיס 40.

ב. השבר $\frac{3}{5}$ לפי בסיס 10, לפי בסיס 25, לפי בסיס 60.

ג. השבר $\frac{5}{8}$ לפי בסיס 16, לפי בסיס 32, לפי בסיס 88.

**4)** צמצם את השברים הבאים ככל הניתן:

א. $\frac{25}{30}$ ב. $\frac{10}{30}$ ג. $\frac{6}{24}$ ד. $\frac{4}{20}$

ה. $\frac{35}{56}$ ו. $\frac{24}{42}$ ז. $\frac{36}{48}$ ח. $\frac{33}{121}$

**5)** המר את השברים המדומים הבאים לשברים מעורבים:

א. $-\frac{20}{3}$ ב. $\frac{19}{4}$ ג. $\frac{12}{5}$ ד. $\frac{22}{5}$

ה. $-\frac{34}{6}$ ו. $-\frac{50}{7}$ ז. $\frac{47}{8}$ ח. $\frac{60}{9}$

**6)** המר את השברים המעורבים הבאים לשברים מדומים:

א. $1\frac{2}{3}$ ב. $3\frac{5}{6}$ ג. $4\frac{1}{2}$ ד. $6\frac{1}{4}$

ה. $11\frac{3}{4}$ ו. $-2\frac{5}{8}$ ז. $-6\frac{2}{7}$ ח. $12\frac{7}{9}$

## תשובות סופיות:

**1)** תשובה מודגמת בסרטון.

**2)** א. $\frac{1}{5}$ ב. $\frac{1}{6}$ ג. $\frac{2}{3}$ ד. $\frac{3}{4}$

**3)** א. $\frac{40}{80},\frac{18}{36},\frac{4}{8}$ ב. $\frac{180}{300},\frac{75}{125},\frac{30}{50}$ ג. $\frac{440}{700},\frac{160}{256},\frac{80}{128}$

**4)** א. $\frac{5}{6}$ ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. $\frac{1}{5}$ ה. $\frac{5}{8}$ ו. $\frac{4}{7}$

ז. $\frac{3}{4}$ ח. $\frac{3}{11}$

**5)** א. $-6\frac{2}{3}$ ב. $4\frac{3}{4}$ ג. $2\frac{2}{5}$ ד. $4\frac{2}{5}$ ה. $-5\frac{4}{6}$ ו. $-7\frac{1}{7}$

ז. $5\frac{7}{8}$ ח. $6\frac{2}{3}$

**6)** א. $\frac{5}{3}$ ב. $\frac{23}{6}$ ג. $\frac{9}{2}$ ד. $\frac{25}{4}$ ה. $\frac{47}{4}$ ו. $-\frac{21}{8}$

ז. $-\frac{44}{7}$ ח. $\frac{115}{9}$

# כפל וחילוק שברים

## סיכום כללי

- כשכופלים שני שברים יש לכפול מונה במונה ומכנה במכנה.
  - במידה ומדובר במספר שלם הכופל שבר, יש לכפול אותו במונה.
  - במידה ומדובר בשברים מעורבים, יש להפוך אותם תחילה לשברים מדומים ורק אז לבצע את פעולת הכפל.
- כדי לחלק שברים, יש לכפול את השבר הראשון בהופכי של השבר השני.
  - הופכי של שבר מסוים מתקבל ע"י החלפת המונה במכנה.

## שאלות

**1)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}$ ב. $\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}$ ג. $\frac{2}{9}\cdot\frac{8}{10}$

ד. $3\cdot\frac{4}{5}$ ה. $6\cdot\frac{2}{3}$ ו. $\frac{12}{25}\cdot 5$

**2)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{2}{5}:\frac{4}{9}$ ב. $\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$ ג. $\frac{3}{25}:\frac{7}{10}$

## תשובות סופיות

**1)** א. $\frac{9}{20}$ ב. $\frac{5}{21}$ ג. $\frac{8}{45}$ ד. $2\frac{2}{5}$ ה. $4$ ו. $2\frac{2}{5}$

ז. $3\frac{3}{5}$ ח. $15\frac{2}{5}$ ט. $8\frac{8}{35}$ י. $\frac{64}{125}$ יא. $\frac{4}{125}$ יב. $12\frac{4}{5}$

**2)** א. $\frac{9}{10}$ ב. $1\frac{1}{2}$ ג. $\frac{6}{35}$ ד. 36 ה. 15 ו. $\frac{5}{18}$

ז. $\frac{2}{25}$ ח. $\frac{2}{3}$ ט. 2

# חיבור וחיסור שברים

## סיכום כללי

### כפולה משותפת מינימלית

בהינתן זוג מספרים $a$ ו- $b$, המספר הקטן ביותר אשר תוצאת חלוקתו במספרים הנ"ל מניבה מספר שלם נקרא הכפולה המינימלית שלהם.

### הערות

- כפולה מינימלית יכולה להיות גם עבור יותר משני מספרים.
- הכפולה המינימלית תהיה המכנה המשותף בעת פעולות חיבור וחיסור של שברים.

### כללי החיבור והחיסור של שברים

- חיבור וחיסור של שברים בעלי אותו המכנה מתבצע על המספרים שבמונה בלבד כאשר המכנה נשאר כפי שהוא.

  דוגמא: $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$ , $\frac{2}{7}-\frac{3}{7}=\frac{2-3}{7}=\frac{-1}{7}$.

- חיבור וחיסור של שברים בעלי מכנים שונים מתבצע ע"י פעולת מכנה משותף.

  דוגמא: $\frac{1}{4}-\frac{5}{6}=\frac{3}{12}-\frac{10}{12}=\frac{3-10}{12}=-\frac{7}{12}$ , $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{6+5}{15}=\frac{11}{15}$.

- חיבור של שבר עם מספר שלם יתבצע באופן ישיר.

  דוגמא: $3+\frac{1}{4}=3\frac{1}{4}$.

  חיסור של שבר ממספר שלם יתבצע ע"י הוצאת שלמים מהשבר.

  דוגמא: $3-\frac{1}{4}=2\frac{4}{4}-\frac{1}{4}=2\frac{3}{4}$.

דרך נוספת היא ע"י העברת המספר השלם לשבר מדומה: $3-\frac{1}{4}=\frac{12}{4}-\frac{1}{4}=\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$.

- חיבור וחיסור של שברים מעורבים יתבצע ע"י העברתם לשברים מדומים תחילה.

דוגמא: $3\frac{2}{5}+2\frac{1}{6}=\frac{17}{5}+\frac{13}{6}=\frac{17\cdot 6}{30}+\frac{13\cdot 5}{30}=\frac{102+65}{30}=\frac{167}{30}=5\frac{17}{30}$.

ניתן גם לפצל ולבצע את פעולת החיבור (או החיסור) של המספרים השלמים תחילה, ולאחר מכן לבצע את הפעולה עבור השברים.

דוגמא: $2\frac{3}{4}-5\frac{1}{3}=(2-5)+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)=-3+\left(\frac{9}{12}-\frac{4}{12}\right)=-3+\frac{5}{12}=-2\frac{7}{12}$.

## שאלות

**1)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2}+\frac{4}{3}$

ב. $\frac{3}{5}+\frac{1}{10}$

ג. $\frac{4}{6}-\frac{1}{12}$

ד. $\frac{3}{6}-\frac{5}{8}$

ה. $\frac{5}{4}+\frac{7}{2}+\frac{2}{8}$

ו. $\frac{7}{3}+\frac{6}{5}+\frac{3}{10}$

ז. $\frac{4}{7}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}$

ח. $\frac{1}{4}+\frac{2}{8}-\frac{3}{5}$

**2)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2\frac{1}{4}+\frac{5}{6}$

ב. $2\frac{1}{4}-\frac{5}{6}$

ג. $3\frac{2}{3}+4\frac{1}{4}$

ד. $5\frac{7}{8}-6\frac{1}{2}$

## תשובות סופיות

**1)** א. $1\frac{5}{6}$ ב. $\frac{7}{10}$ ג. $\frac{7}{12}$ ד. $-\frac{1}{8}$ ה. 5 ו. $3\frac{5}{6}$

ז. $\frac{19}{21}$ ח. $-\frac{1}{10}$

**2)** א. $3\frac{1}{12}$ ב. $1\frac{5}{12}$ ג. $7\frac{11}{12}$ ד. $-\frac{5}{8}$

# בעיות יסודיות באחוזים

## סיכום כללי

נוסחה לביצוע חישובים עם אחוזים:

$$\text{תמורת האחוז} = \text{שלם} \cdot \frac{\text{אחוז}}{100}$$

למשל, בהינתן גודל שלם 120, אשר יש לחשב כמה הם 40 אחוזים ממנו, נקבל לפי הנוסחה: $\frac{40}{100}\cdot 120 = 48$, כלומר: **תמורת האחוז 40 מהגודל 120 היא 48**.

## שאלות

**1)** בכיתה 30 תלמידים. 60% מתוכם בנות.

א. כמה בנות בכיתה?

ב. כמה בנים בכיתה?

**2)** מחיר בגד-ים הוא 300 ₪. בסוף העונה הוא נמכר ב-20% הנחה.

א. מהו מחירו בסוף העונה?

ב. מה גודל ההנחה?

**3)** מחיר ליטר דלק הוא 5 ₪ לליטר. בחנוכה מוזל מחירו ב-7%.
בפסח מועלה מחירו ב-7%. מה מחירו בסוף השנה?

## תשובות סופיות

**1)** א. 18 בנות. ב. 12 בנים.

**2)** א. 240 ₪ ב. 60 ₪

**3)** 4.9755 ₪

# חזרה על תבניות מספר

## סיכום כללי

משתנה הוא סמל המתאר כמות או גודל כלשהם אשר אינם ידועים ועשויים להשתנות.

תבנית מספר היא ביטוי אלגברי אשר מכיל משתנה (או משתנים).
ניתן להציב במשתנים ערכים מספריים שונים ולקבל תוצאות שונות עבור תבנית המספר עצמה.

במתמטיקה, תפקידה של תבנית המספר הוא להביע גודל מסוים אשר לערכו יש משמעויות שונות. דוגמא לכך היא: קנייה של $x$ פריטים, אשר כל אחד עולה 3 שקלים, יניבו תבנית מספר של $3\cdot x$ אשר מייצגת את הסכום הכולל של הפריטים.

## שאלות

**1)** הצב את הערכים המספריים במקום הפרמטרים וחשב את ערך תבנית המספר:

א. $a^2+2ab+b^2$ עבור: $a=3\ ,\ b=-5$.

ב. $-x^3-2xy+y^4$ עבור: $x=-2\ ,\ y=-1$.

ג. $\frac{4a^2-3b}{c}$ עבור: $a=-1\ ,\ b=2\ ,\ c=-4$.

## תשובות סופיות

**1)** א. 4 ג. 5 ה. $\frac{1}{2}$

# כינוס איברים

## סיכום כללי

תבניות אלגבריות יכולות להכיל איברים רבים ולכן נרצה לכנס אותם על מנת לפשט את התבנית. כדי לכנס איברים ניקח את כל קבוצת האיברים מאותו הסוג ונחבר את המקדמים שלהם. דוגמא: $3x+6x-5x=\left(3+6-5\right)x=4x$.

איברים שונים נבדלים זה מזה בערך התבנית האלגברית שלהם.

כך: $3x$ שונה מ- $4y$ ושונה מ- $2xy$. באותו האופן, האיברים $x$ ו- $x^2$ הם שונים.

## שאלות

כנס איברים דומים:

**1)** $-10xy+15xy+xy-2yx$

**2)** $8a^2+10a-5a^2-11a+a^2$

**3)** $3xy+y-30y+6yx-7y$

**4)** $mn+n-5m+5nm-14n+3m$

**5)** $2-x^3-3-4x^2+2x+x^3+x^2-2$

**6)** $2y^2-4x^3y^2-10y^2-x^3y^2$

## תשובות סופיות

**1)** $4xy$

**2)** $4a^2-a$

**3)** $9xy-36y$

**4)** $-13n-2m+6mn$

**5)** $-3x^2+2x-3$

**6)** $-8y^2-5x^3y^2$

# פישוט ביטויים על ידי פתיחת סוגריים

## סיכום כללי

בעת ביצוע כפל בין שני איברים יש לכפול את המקדמים בנפרד ואת האותיות (משתנים) בנפרד.

כלל הפילוג:

- $a(b+c)=ab+ac$
- $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

## שאלות

**1)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $8m^2\cdot 4m^3$ ב. $3a^3\cdot(-2a^2)$ ג. $-b\cdot 4b^2\cdot\frac{b^2}{2}$

ד. $a\cdot 3b$ ה. $4a^2\cdot 7b^2$ ו. $ab\cdot(-2a^2b)$

**2)** פשט את הביטויים הבאים ע"י פתיחת סוגריים:

א. $2(3x-4)$ ב. $2(-3x^2+5x-1)$

ג. $(7x-2)4$ ד. $(1-2x)(-2)$

ה. $3t^2(4t-t^2+6)$ ו. $\frac{5}{2}(4d^4-3d)d$

**3)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $5x+(3x-2)+(-4-2x)$ ב. $7x+(-4x-5)+3x+(-1+7x)$

ג. $8-(2x-5)-(4x+2)$ ד. $-6x-(-3x-1)-(-7-4x)+1$

ה. $(3-2x^2+4)2+3(x-x^2)-6(7-5x)+4x^2$

**4)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-1)(x+2)$ ב. $(x+3)(x-7)$

ג. $(3-x)(x+4)$ ד. $(3x+4)(5x+1)$

ה. $3(4x+1)(2x-3)$ ו. $-2(3x-1)(5-2x)$

## תשובות סופיות

**1)** א. $32m^5$ ב. $-6a^5$ ג. $-2b^5$ ד. $3ab$ ה. $28a^2b^2$

ו. $-2a^3b^2$

**2)** א. $6x-8$ ב. $-6x^2+10x-2$ ג. $28x-8$ ד. $-2+4x$

ה. $12t^3-3t^4+18t^2$ ו. $10d^5-7.5d^2$

**3)** א. $6x-6$ ב. $13x-6$ ג. $-6x+11$ ד. $x+9$ ה. $-3x^2+33x-28$

**4)** א. $x^2+x-2$ ב. $x^2-4x-21$ ג. $-x^2-x+12$

ד. $15x^2+23x+4$ ה. $24x^2-30x-9$ ו. $12x^2-34x+10$

# פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר

## סיכום כללי

- נוסחת ריבוע של סכום/הפרש: $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.
- נוסחה להפרש ריבועים: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

## שאלות

**1)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+5)^2$ ב. $(x+2)^2$ ג. $(4x+5)^2$

ד. $(6x+2)^2$ ה. $(7x+y)^2$ ו. $(5x+2y)^2$

ז. $(x^2+7)^2$ ח. $(x^2+y^2)^2$ ט. $(x^3+2y^2x)^2$

**2)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-6)^2$ ב. $(x-2)^2$ ג. $(5-x)^2$

ד. $(6x-1)^2$ ה. $\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2$ ו. $\left(\frac{1}{3}x-5\right)^2$

ז. $(3m-2n)^2$ ח. $\left(x^2-\frac{3}{5}y\right)^2$ ט. $(x^2y^2-7)^2$

**3)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-5)(x+5)$ ב. $(3+x)(x-3)$

ג. $(3x-1)(3x+1)$ ד. $(5-7x)(7x+5)$

ה. $\left(\frac{1}{2}x+6\right)\left(\frac{1}{2}x-6\right)$ ו. $\left(5y-\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{1}{4}x+5y\right)$

ז. $(x^2+y)(x^2-y)$ ח. $(3a^2b^3-4)(3a^2b^3+4)$

**4)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+1)(x+2)-3x$

ב. $(x-5)(5x-1)+2(4+x)$

ג. $x(2x-1)(2x+1)-4x^2(x+1)$

ד. $-(y+3x)(y-3x)+(y-3x)^2$

ה. $x(x+3)-(6+x)(6x+2)-(x+2)^2$

ו. $-5(x+7)(x-7)+3(2x+5)(5-x)+(x+1)^2$

## תשובות סופיות

**1)** א. $x^2+10x+25$ ב. $x^2+4x+4$ ג. $16x^2+40x+25$

ד. $36x^2+24x+4$ ה. $49x^2+14xy+y^2$ ו. $25x^2+20xy+4y^2$

ז. $x^4+14x+49$ ח. $x^4+2x^2y^2+y^4$ ט. $x^6+4x^4y^2+4y^4x^2$

**2)** א. $x^2-12x+36$ ב. $x^2-4x+4$ ג. $25-10x+x^2$

ד. $36x^2-12x+1$ ה. $9x^2-3x+\frac{1}{4}$ ו. $\frac{1}{9}x^2-3\frac{1}{3}x+25$

ז. $9m^2-12mn+4n^2$ ח. $x^4-\frac{6}{5}x^2y+\frac{9}{25}y^2$ ט. $x^4y^4-14x^2y^2+49$

**3)** א. $9x^2-1$ ב. $25-49x^2$ ג. $\frac{1}{4}x^2-36$ ד. $25y^2-\frac{1}{16}x^2$

**4)** א. $-4x^2-x$ ב. $18x^2-6xy$ ג. $-6x^2-39x-16$

ד. $-10x^2+17x+321$

# פירוק לגורמים של ביטויים אלגברים

## סיכום כללי

פירוק לגורמים הוא פעולה הפוכה לפתיחת סוגריים – נרצה להוציא את הגורמים המשותפים לאיברים מחוץ לסוגריים.

- פירוק לגורמים ע"י הוצאת איבר אחד משותף:
  - הוצאת מספר משותף: $2x-8=2(x-4)$.
  - הוצאת אות משותפת: $x^2-12x=x(x-12)$.
  - הוצאת מספר ואות יחד: $3x^2-21x=3x(x-7)$.
- פירוק לגורמים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר:
  - נוסחת הבינום של ניוטון: $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$.
  - נוסחה להפרש ריבועים: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

## שאלות

**1)** פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $2x^2-8x$ ב. $3t^2+12t$

ג. $5n^3-20n^2+50n$ ד. $8y^2+6y^3-2y^4$

ה. $4x^2y^2+16x^2y-20xy^2$ ו. $27mn-3n^2m+9n^3m$

**2)** פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר:

א. $x^2+10x+25$ ב. $x^2+12x+36$

ג. $y^2-18y+81$ ד. $y^2-22y+121$

ה. $4x^2+4x+1$ ו. $16y^2-8y+1$

ז. $9x^2-24x+16$ ח. $25x^2+70x+49$

**3)** פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר:

א. $r^2-25$ ב. $x^2-81$

ג. $25y^2-49$ ד. $121x^2-1$

ה. $x^2y^2-4$ ו. $9y^4-169x^4$

**4)** פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף ונוסחאות הכפל המקוצר:

א. $y-y^3$ ב. $x^3-10x^2+25x$

ג. $m^4-1$ ד. $196x^4-140x^3+25x^2$

## תשובות סופיות

**1)** א. $2x(x-4)$ ב. $3t(t+4)$ ג. $5n(n^2-4n+10)$

ד. $2y^2(4+3y-y^2)$ ה. $4xy(xy+4x-5y)$ ו. $3mn(9-n-3n^2)$

**2)** א. $(x+5)^2$ ב. $(x+6)^2$ ג. $(y-9)^2$ ד. $(y-11)^2$

ה. $(2x+1)^2$ ו. $(4y-1)^2$ ז. $(3x-4)^2$ ח. $(5x+7)^2$

**3)** א. $(r+5)(r-5)$ ב. $(x+9)(x-9)$ ג. $(5y+7)(5y-7)$

ד. $(11x+1)(11x-1)$ ה. $(xy+2)(xy-2)$ ו. $(3y^2+13x^2)(3y^2-13x^2)$

**4)** א. $y(1+y)(1-y)$ ב. $x(x-5)^2$ ג. $(m^2+1)(m+1)(m-1)$

ד. $x^2(14x-5)^2$

# פירוק הטרינום

## סיכום כללי

טרינום משמעו תלת איבר מהצורה: $ax^2+bx+c$, כאשר $a$, $b$ ו-$c$ מספרים כלשהם.

שיטת הטרינום מאפשרת לפרק את תלת האיבר ל-4 איברים ע"י פיצול האיבר $bx$ לשני איברים, באופן כזה שמאפשר להוציא גורם משותף.

הכלל הוא למצוא שני מספרים, $m_1$ ו-$m_2$, שמקיימים: $m_1\cdot m_2=ac$ ו-$m_1+m_2=b$.

לאחר מכן ניתן לפרק את הטרינום: $ax^2+bx+c=ax^2+m_1x+m_2x+c$.

השלב האחרון הוא הוצאת גורם משותף מכל זוג: $\underbrace{ax^2+m_1x}+\underbrace{m_2x+c}$.

### הערה

במקרה שנוסחת השורשים ידועה, ניתן להיעזר בה כדי למצוא את המספרים

$m_1$ ו-$m_2$, באופן הבא: $m_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ , $m_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,

ולאחר מכן ניתן לכתוב את הטרינום כמכפלה: $ax^2+bx+c=a\left(x-m_1\right)\left(x-m_2\right)$.

אם קיים פתרון (שורש) אחד $m_1=m_2=\frac{-b}{2a}$, אז נכתוב: $ax^2+bx+c=a\left(x-m_1\right)^2$,

ואם לא קיימים פתרונות, אז לא קיים פירוק כלל.

## שאלות

**1)** פרק את הביטויים הבאים לפי פירוק טרינום:

א. $x^2+5x+4$

ב. $x^2-33x+62$

ג. $3x^2-11x+6$

ד. $x^2-18x+81$

**2)** פרק את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחת השורשים.
**הערה: במידה ולא למדת על נוסחת השורשים התעלם משאלה זו.**

א. $6x^2+5x+1$

ב. $4x^2+20x+25$

ג. $3x^2-x+20$

## תשובות סופיות

**1)** א. $(x+1)(x+4)$ ב. $(x-2)(x-31)$ ג. $(3x-2)(x-3)$ ד. $(x-9)^2$

**2)** א. $6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ ב. $(2x+5)^2$ ג. אין פירוק.

# שברים אלגברים

## סיכום כללי

### הגדרה

שבר אלגברי מורכב משתי תבניות, אשר אחת מחלקת את השנייה.

דוגמא לשברים אלגבריים: $\frac{4}{x-x^3}$ , $\frac{3x}{x^2+1}$ , $\frac{x+1}{x+2}$.

במקרה בו המכנה הוא מספר, לא מדובר בשבר אלגברי מכיוון שניתן לכתוב את הביטוי ללא צורך בחילוק בין ביטויים שונים כגון: $\frac{3x+5}{4}=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$.

### תחום הגדרה של שבר

היות ושבר אלגברי הוא תבנית אשר יכולה לקבל ערכים שונים בעת הצבות שונות, חשוב להגביל את המספרים שניתן להציב באופן כזה שלא תתקבל חלוקה באפס.

דוגמא: השבר $\frac{1}{x+4}$ לא מוגדר כאשר $x=-4$ מכיוון שמתקבל: $\frac{1}{0}$.

במקרים אלו נדרוש **תנאי** על המשתנה אשר יכתב באופן הבא: $x\neq -4$ ומשמעו היא ש- $x$ יכול לקבל על ערך מספרי אפשרי למעט 4-, מכיוון שבמקרה זה השבר לא מוגדר.

### כלל צמצום שברים אלגברים

ניתן לצמצם שברים אלגברים ע"י הבאת המונה והמכנה למכפלה של ביטויים.
במידה וקיימות פעולות החיבור והחיסור בין איברים שונים לא ניתן לבצע צמצום של איברים דומים בין המונה והמכנה. להלן מספר דוגמאות הנוגעות לצמצומים:

- צמצום ע"י הוצאת גורם משותף: $\frac{2x+8}{x+4}=\frac{2\cancel{(x+4)}}{\cancel{x+4}}=\frac{2\cdot 1}{1}=2$.
- צמצום ע"י נוסחת כפל מקוצר: $\frac{3x-15}{x^2-10x+25}=\frac{3\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)^2}}=\frac{3\cdot 1}{x-5}=\frac{3}{x-5}$.

- צמצום ע"י פירוק טרינום: $\frac{x^2-2x-3}{x^2-3x-4}=\frac{\cancel{(x+1)}(x-3)}{\cancel{(x+1)}(x-4)}=\frac{x-3}{x-4}$.

## שאלות

**1)** צמצם את השברים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{3x+12}{x+4}$

ב. $\frac{m^2+4m}{4m+16}$

ג. $\frac{2a-12}{a^2-6a}$

ד. $\frac{x^2-5x}{15-3x}$

ה. $\frac{3-18y^2}{6y^2-1}$

ו. $\frac{4x^3-2x^2}{6x-3}$

ז. $\frac{3y}{y^3-3y^2}$

ח. $\frac{3z^3-12z^2+4z}{z^2+5z}$

**2)** צמצם את השברים הבאים ע"י פירוק לגורמים וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x^2+10x+25}{2x+10}$

ב. $\frac{8n-n^2}{n^2-16n+64}$

ג. $\frac{z^3-4z^2}{2z^2-16z+32}$

ד. $\frac{4m^2+20m+25}{4m^2+10m}$

ה. $\frac{18y^2-24y+8}{2y-3y^2}$

ו. $\frac{a^3+4a^2b+4ab^2}{3ab+6b^2}$

**3)** צמצם את השברים הבאים ע"י טרינום ריבועי וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x+2}{x^2-3x-10}$

ב. $\frac{m^2-12m+32}{m-4}$

ג. $\frac{4y-10}{2y^2+y-15}$

ד. $\frac{3z^2+26z+16}{3z+2}$

ה. $\frac{x^2+5x-36}{x^3+9x^2}$

ו. $\frac{9n^2-12n}{4+5n-6n^2}$

## תשובות סופיות

**1)** א. $3\ ,\ x\neq -4$ ב. $\frac{m}{4}\ ,\ m\neq -4$ ג. $\frac{2}{a}\ ,\ a\neq 0,6$

ד. $-\frac{x}{3}\ ,\ x\neq 5$ ה. $-3\ ,\ y\neq \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ ו. $\frac{2x^2}{3}\ ,\ x\neq \frac{1}{2}$

ז. $\frac{3}{y(y-3)}\ ,\ y\neq 0,3$ ח. $\frac{3z^2-12z+4}{z+5}\ ,\ z\neq 0,-5$

**2)** א. $\frac{x+5}{2}\ ,\ x\neq -5$ ב. $\frac{n}{8-n}\ ,\ n\neq 8$ ג. $\frac{z^2}{2(z-4)}\ ,\ z\neq 4$

ד. $\frac{2m+5}{2m}\ ,\ m\neq 0,-\frac{5}{2}$ ה. $\frac{2(2-3y)}{y}\ ,\ y\neq 0,\frac{2}{3}$ ו. $\frac{a(a+2b)}{3b}\ ,\ b\neq 0,\ a\neq -2b$

**3)** א. $\frac{1}{x-5}\ ,\ x\neq 5,-2$ ב. $m-8\ ,\ m\neq 4$ ג. $\frac{2}{y+3}\ ,\ x\neq -3,\frac{5}{2}$

ד. $z+8\ ,\ z\neq -\frac{2}{3}$ ה. $\frac{x-4}{x^2}\ ,\ x\neq 0,-9$ ו. $\frac{-3n}{2n+1}\ ,\ n\neq -\frac{1}{2},\frac{4}{3}$

# כפל וחילוק של שברים אלגברים

## סיכום כללי

כפל שברים יתבצע ע"י הכפלת כל מונה בנפרד והכפלת כל מכנה בנפרד.

חילוק שברים יתבצע ע"י לקיחת ההופכי של שבר המחלק וביצוע פעולת כפל.

- דוגמא לכפל שברים:
$$\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{x}{3x+3}=\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{x}{3(x+1)}=\frac{\cancel{x}\cancel{(x+1)}}{3x^{\cancel{2}}\cancel{(x+1)}}=\frac{1}{3x}$$

- דוגמא לחילוק שברים:
$$\frac{4x}{y}:\frac{12}{y^2+y}=\frac{4x}{y}\cdot\frac{y^2+y}{12}=\frac{\cancel{4}^{1}x}{\cancel{y}}\cdot\frac{\cancel{y}(y+1)}{\cancel{12}_{3}}=\frac{x(y+1)}{3}$$

## שאלות

**1)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{8}$

ב. $\frac{x}{3}\cdot\frac{9}{x^2}$

ג. $7y\cdot\frac{5}{y^2}$

ד. $6x^2\cdot\frac{3}{40x}$

ה. $\frac{w^2-9}{w}\cdot\frac{w^2}{2w+6}$

ו. $\frac{y+4}{y^2+16}\cdot\frac{y^2-16}{2y+8}$

## תשובות סופיות

**1)** א. $\frac{x^2}{24}$ ב. $\frac{3}{x}$ ג. $\frac{35}{y}$ ד. $\frac{9x}{20}$

ה. $\frac{w(w-3)}{2}$ ו. $\frac{y^2-16}{2y^2+32}$

# חיבור וחיסור של שברים אלגברים

## סיכום כללי

ביצוע פעולת החיבור והחיסור תתבצע באופן זהה לשברים מספריים.
נרצה להרחיב את השברים כך שהמכנה של שניהם יהיה זהה,
ולאחר מכן נחבר את המונים.
כדי להרחיב את השברים נעזר בפעולת מציאת מכנה משותף.
לשם כך נעזר בפירוקים השונים כדי להביא את הביטויים שבכל מכנה
לצורתם המופשטת. להלן דוגמא לחיבור שברים בעלי אותו מכנה:

$$\frac{1}{x}+\frac{x+1}{x}=\frac{1+(x+1)}{x}=\frac{x+2}{x}$$

דוגמא לחיבור מספר לשבר אלגברי:

$$2+\frac{3}{x+2}=\frac{2(x+2)}{x+2}+\frac{3}{x+2}=\frac{2(x+2)+3}{x+2}=\frac{2x+7}{x+2}$$

דוגמא לחיבור שברים עם מכנים שונים (ע"י פעולת מכנה משותף):

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}=\frac{x}{x(x+1)}+\frac{x+1}{x(x+1)}=\frac{x+x+1}{x(x+1)}=\frac{2x+1}{x(x+1)}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י שימוש בפירוק לגורמים (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{1}{x^2-3x}+\frac{3}{x-3}=\frac{1}{x^2-3x}+\frac{3x}{x^2-3x}=\frac{1+3x}{x^2-3x}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{3}{x^2-6x+9}-\frac{2}{x^2-9}=\frac{3}{(x-3)^2}-\frac{2}{(x-3)(x+3)}=\frac{3(x+3)-2(x-3)}{(x-3)^2(x+3)}=\frac{x+15}{(x-3)^2(x+3)}$$

## שאלות

**1)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{a}{6}+\frac{a-5}{6}$

ב. $\frac{5}{x}+\frac{4x+3}{x}$

ג. $\frac{x-2}{x+1}+\frac{3+4x}{x+1}$

ד. $\frac{7z}{2z-3}-\frac{4z}{2z-3}-\frac{z+3}{2z-3}$

**2)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{ab}-\frac{5}{bc}$

ב. $\frac{1}{xy}+\frac{5}{yz}+\frac{4}{xz}$

ג. $\frac{c}{ab}-\frac{ad}{bc}+\frac{2b}{cd}$

ד. $-\frac{5}{x}+\frac{x+1}{xy^2}$

ה. $\frac{1}{(y+1)^2}+\frac{3}{y+1}$

ו. $\frac{3}{z(z-3)}-\frac{2}{z(z-2)}$

**3)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $2+\frac{2}{x+1}$

ב. $3-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x}$

ג. $\frac{a+1}{a^2}-\frac{3-a}{4a}-3$

ד. $\frac{x}{9yz}+\frac{z}{3y^2x}+\frac{3-y}{12xz}-3\frac{1}{2}$

**4)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{a+1}{a+2}+\frac{3}{a}$

ב. $\frac{1}{z+3}+\frac{2}{3z}-\frac{3}{z}$

**5)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{y}{(y-2)^2}+\frac{3y}{4-y^2}$

ב. $\frac{3z}{z^2+4z+3}-\frac{z+0.5}{z^2+2z+1}$

ג. $\frac{x-1}{x^2+3x-40}+\frac{2}{-x^2+8x-15}$

ד. $\frac{2a+3}{2a^2+15a+7}+\frac{a+3}{a^2+14a+49}$

ה. $\frac{x}{x-3}+\frac{9-x}{x^2-8x+15}$

ו. $\frac{1}{a-b}+\frac{2}{a+2b}-\frac{3b}{a^2+ab-2b^2}$

## תשובות סופיות

**1)** א. $\frac{2a-5}{6}$ ב. $\frac{4x+8}{x}$ ג. $\frac{5x+1}{x+1}$ ד. 1

**2)** א. $\frac{c-5a}{abc}$ ב. $\frac{z+5x+4y}{xyz}$ ג. $\frac{c^2d-a^2d^2+2ab^2}{abcd}$

ד. $\frac{-5y^2+x+1}{xy^2}$ ה. $\frac{3y+4}{(y+1)^2}$ ו. $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$

**3)** א. $\frac{2x+4}{x+1}$ ב. $\frac{9x-2}{3x}$ ג. $\frac{-11a^2+a+4}{4a^2}$

ד. $\frac{4x^2y+12z^2+9y^2-3y^3-126xy^2z}{36xy^2z}$

**4)** א. $\frac{a^2+4a+6}{a(a+2)}$ ב. $-\frac{4z+21}{3z(z+3)}$

**5)** א. $\frac{2y(4-y)}{(y-2)^2(y+2)}$ ב. $\frac{(4z+3)(z-1)}{2(z+1)^2(z+3)}$ ג. $\frac{x^2-6x-13}{(x+8)(x-5)(x-3)}$

ד. $\frac{4(a^2+6a+6)}{(a+7)^2(2a+1)}$ ה. $\frac{x-3}{x-5}$ ו. $\frac{3}{a+2b}$

# שברים כפולים

## סיכום כללי

שבר כפול מורכב באופן הבא: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ כאשר מתקיים: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$.

נובע מכאן כי ניתן לצמצם ביטויים בין שני המכנים או שני המונים בלבד.

## שאלות

פשט את הביטויים הבאים:

1) $\frac{\frac{4x}{12}}{x}$

2) $\frac{\frac{y+1}{2y+2}}{5}$

3) $\frac{\frac{5}{t}}{30t^2}$

4) $\frac{\frac{t^2-81}{9t^2}}{6t+54}$

5) $\frac{\frac{3y^3-y^2}{25}}{\frac{y^2}{3-y}}$

6) $\frac{\frac{4x}{x+1}}{\frac{8}{x^2+2x+1}}$

7) $\frac{\frac{8c^2}{3c^3-9c^2-12c}}{\frac{40}{15c+15}}$

8) $\frac{\frac{t^2-t-20}{16t+8}}{\frac{25-t^2}{2t+1}}$

## תשובות סופיות

1) $\frac{x^2}{3}$

2) $2.5$

3) $\frac{1}{6t^3}$

4) $\frac{t-9}{54t^2}$

5) $\frac{(3y-1)(3-y)}{25}$

6) $\frac{x(x+1)}{2}$

7) $\frac{c}{c-4}$

8) $\frac{t+4}{-8(t+5)}$

# סדנת ריענון במתמטיקה למדעי החברה

## פרק 2 - משוואות אלגבריות

### תוכן העניינים

1. משוואות ממעלה ראשונה ..... 34
2. משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון ..... 36
3. מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה ..... 37
4. משוואה ממעלה שנייה ..... 40
5. מערכת משוואות ממעלה שנייה ..... 42
6. משוואות דו-ריבועיות ..... 43
7. משוואות עם פרמטרים ..... 44
8. משוואות עם שורשים ..... 45
9. משוואות עם ערך מוחלט ..... 46

# משוואה ממעלה ראשונה

## סיכום כללי

משוואה ממעלה ראשונה היא מהצורה: $ax=b$ (כלומר, החזקה של הנעלם היא 1).

פתרון של משוואה ממעלה ראשונה הוא $x=\frac{b}{a}$ כאשר $a\neq 0$.

שלבי הפתרון הם:

1. ביצוע מכנה משותף (במידה וצריך).
2. פתיחת סוגריים אם ישנם.
3. העברת אגפים וכינוס אברים דומים
(בידוד הנעלם באגף אחד והמספרים באגף שני).
4. בידוד הנעלם ומציאתו ע"י חילוק במקדם שלו.

## שאלות

**1)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות ממעלה ראשונה):

א. $-7x+5+2x=4x-13$ ב. $x-2+5x=4-3x-5+7x+7$

**2)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פתיחת סוגריים):

א. $3(x-1)-4=2$ ב. $6(4-x)-(6-x)=3x$

**3)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה מספרי):

א. $\frac{x}{3}-\frac{x}{9}=-4$ ב. $\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}x=x-\frac{7}{15}$

ג. $\frac{2}{5}(x-3)-\frac{3}{15}(4-x)=x+2$

**4)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם נעלם במכנה):

א. $\frac{3}{x}=\frac{1}{x+2}$ ב. $\frac{x+5}{3x^2}-\frac{1}{6x}=\frac{1}{x}$

ג. $\frac{1}{4x}+\frac{3}{x}=\frac{13}{2}$

**5)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה משותף ע"י פירוק לגורמים):

א. $\frac{x^2+2}{3x^2+5x}=\frac{3x-1}{9x+15}$

ב. $\frac{7}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}+\frac{3}{2-2x}=0$

ג. $\frac{3}{(2-x)^2}+\frac{5}{12-3x^2}=0$

## תשובות סופיות

**1)** א. $x=2$ ב. $x=4$

**2)** א. $x=3$ ב. $x=2\frac{1}{4}$

**3)** א. $x=-18$ ב. $x=-1$ ג. $x=-10$

**4)** א. $x=-3$ ב. $x=2$ ג. $x=\frac{1}{2}$

**5)** א. $x=-6$ ב. $x=-7$ ג. $x=-7$

# משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון

## סיכום כללי

### משוואה ממעלה ראשונה

למשוואה ממעלה ראשונה מהצורה: $ax=b$ יתכן פתרון יחיד אם ורק אם $a\neq 0$

מכיוון שניתן לחלק ולכתוב: $x=\frac{b}{a}$.

כאשר $a=0$ מתקבלת המשוואה $0\cdot x=b$ ויתכנו שני מצבים:

1. אם $b=0$ את המשוואה היא $0x=0$ ויש אינסוף פתרונות המקיימים אותה.
2. אם $b\neq 0$ את המשוואה היא $0x=b\neq 0$ ואין אף ערך של $x$ המקיים אותה.

## שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

**1)** $x+4=6+x$

**2)** $3x+6-x=4+2x+2$

**3)** $6(x-2)=2x+5+4x$

**4)** $5x-3+x=4x+2x-3$

## תשובות סופיות

**1)** אף פתרון.

**2)** אינסוף פתרונות.

**3)** אין פתרון.

**4)** אינסוף פתרונות.

# מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה

## סיכום כללי

### הגדרה

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (ליניאריות) היא מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

כאשר $a_1$ , $b_1$ , $c_1$ ו- $a_2$ , $b_2$ , $c_2$ הם מקדמים מספריים.

דוגמאות למערכות של משוואות: $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ , $\begin{cases} y=3x-1 \\ \frac{x+3}{2}=y+6 \end{cases}$.

### פתרון של מערכת משוואות

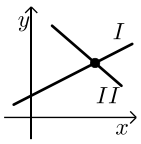
פתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור המקיים את כל המשוואות שבמערכת.

### הצגה גרפית של מערכת משוואות

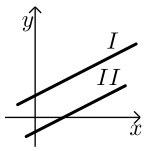
פתרון גרפי של מערכת משוואות הוא נקודת החיתוך של הישרים המייצגים כל משוואה.

יתכנו שלושה מצבים הדדיים בין שני ישרים:

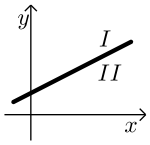
- הישרים נחתכים:
במקרה זה נקודת החיתוך תהיה פתרון המערכת.




- הישרים מקבילים:
במקרה זה לא יהיה פתרון למערכת.




- הישרים מתלכדים:
במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות למערכת המשוואות.



### פתרון אלגברי של מערכת משוואות

- פתרון ע"י שיטת ההצבה:
נבודד את אחד הנעלמים ממשוואה אחת ונציב אותו במשוואה השנייה.
נבחר בשיטה זו במקרים בהם קל לבודד נעלם באחת המשוואות.

- פתרון ע"י השוואת מקדמים:

1. כופלים (או מחלקים) משוואה אחת (או שתיהן) במספר השונה מאפס כך שתתקבלנה משוואות שקולות בעלות מקדמים נגדיים או זהים עבור אחד המשתנים.
2. מחברים (או מחסרים) את המשוואות ומקבלים משוואה חדשה עם נעלם אחד.
3. מוצאים את ערך הנעלם מהמשוואה החדשה ומציבים אותו באחת המשוואות המקוריות למציאת ערך הנעלם השני.

### הערה

נוח להשתמש בשיטת השוואת המקדמים ע"י כך שמעבירים את המערכת הנתונה למערכת שקולה שבה המשתנים באגף אחד והמספר החופשי באגף השני.

## שאלות

**1)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x+3y=5 \\ x-3y=3 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} 5x+2y=14 \\ 5x+3y=23 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 5y=2x \\ 4x=5y+8 \end{cases}$

ד. $\begin{cases} 4x=3y-29 \\ 5y=9-13x \end{cases}$

**2)** פתור את המשוואה הבאה: $\begin{cases} x+2y=1 \\ 4x+8y=5 \end{cases}$.

**3)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} 3y-x+2=4x+2-3y \\ 2x-3-y=5y-4x+3 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} \frac{x-3}{8}-\frac{x+y}{16}=\frac{y-1}{4} \\ 3(2x-y)-4x-11=0 \end{cases}$

**4)** פתור את המשוואה הבאה: $\begin{cases}\frac{3}{x}+\frac{3}{y}=2\\ \frac{9}{x}-\frac{4}{y}=-7\end{cases}$.

**5)** פתור את המשוואה הבאה: $\begin{cases}5x-4xy=22\\ 6x+xy=-20\end{cases}$.

## תשובות סופיות

**1)** א. $\left(4,\frac{1}{3}\right)$ ב. $\left(-\frac{4}{5},9\right)$ ג. $(4,1.6)$ ד. $(-2,7)$

**2)** א. אין פתרון.

**3)** א. $(6,5)$ ב. $(7,1)$

**4)** $(-3,1)$

**5)** $(-2,4)$

# משוואה ממעלה שנייה

## סיכום כללי

משוואה מהצורה: $ax^2+bx+c=0$ , $(a\neq 0)$ נקראת משוואה ריבועית.

פתרונות המשוואה יסומנו ב- $x_1$ ו- $x_2$ ויחושבו לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

למשוואה ריבועית יתכנו שלושה סוגים של פתרונות:

1. **משוואה עם שני פתרונות ממשיים שונים.**
אם מתקבל מספר חיובי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים.
דוגמא: $x^2+5x-4=0$.

2. **משוואה עם פתרון ממשי אחד בלבד.**
אם מתקבל אפס בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד בלבד.
דוגמא: $x^2+4x+4=0$.

3. **משוואה ללא פתרונות ממשיים כלל.**
אם מתקבל מספר שלילי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה לא יהיו פתרונות ממשיים כלל.
דוגמא: $x^2+x+4=0$.

## שאלות

**1)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $x^2+3x-10=0$

ב. $25x^2-20x+4=0$

**2)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $2(x-5)^2-(2x-3)^2=10x+21$

ב. $(2x-1)^2+x(2x+3)=(x-1)(x-7)$

**3)** פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת $b$): $32x^2-18=0$.

**4)** פתור את המשוואה הבאה (משוואה חסרת $c$): $5x^2-x=0$.

**5)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $\frac{4x+1}{3}-\frac{x+2}{2}=\frac{2}{x}$

ב. $\frac{x^2-9}{x+3}+x=x^2-18$

ג. $\frac{3}{2x+2}-\frac{2x-5}{2(x-1)^2}-\frac{4}{1-x^2}=0$

## תשובות סופיות

**1)** א. $x_1=2\ ,\ x_2=-5$ ב. $x=\frac{2}{5}$

**2)** א. $x_1=1\ ,\ x_2=-10$ ב. $x_1=0.6\ ,\ x_2=-2$

**3)** $x=\pm\frac{3}{4}$

**4)** $x_1=0\ ,\ x_2=\frac{1}{5}$

**5)** א. $x_1=2\ ,\ x_2=-1.2$ ב. $x=5\ ,\ x\neq -3$ ג. $x_1=0\ ,\ x_2=-5$

# מערכת משוואות ממעלה שנייה

## סיכום כללי

מערכת משוואות ריבועיות מיוחסת למערכת של שתי משוואות (לפחות),
שאחת מהן מכילה את אחד מהנעלמים בריבוע.
למערכת משוואות ריבועיות יכולים להתקבל עד 4 פתרונות שונים. יש לפתור את המערכת לפי הטכניקות הרגילות של בידוד והצבה או השוואת מקדמים.

## שאלות

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

**1)** $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ x+y=6 \end{cases}$

**2)** $\begin{cases} 3x^2+4y^2=16 \\ 5x^2-3y^2=17 \end{cases}$

**3)** $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=5 \\ \frac{4}{y}-\frac{1}{x}=-19 \end{cases}$

## תשובות סופיות

**4)** $(2,4),(4,2)$

**5)** $(\pm 2,\pm 1)$

**6)** $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{4}\right)$

# משוואות דו-ריבועיות:

## סיכום כללי:

משוואה דו-ריבועית היא משוואה מהצורה: $ax^4+bx^2+c=0$ כאשר הנעלם הוא $x$.
פתרון המשוואה יבוצע ע"י מעבר לפרמטר: $x^2=t\rightarrow at^2+bt+c=0$ ומציאתו.
לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה ולמצוא את ערכי $x$.

ניתן להביא משוואות לצורה זו ולהגדיר ביטוי המופיע בחזקות 2 ו-4
כגון: $\left(x^2-1\right)^2+3\left(x^2-1\right)-2=0$ באמצעות פרמטר: $t=x^2-1$
ובכך לפתור משוואה: $t^2+3t-2=0$ ולהחזיר את ההצבה עבור מציאת $x$.
דרך הפתרון תקפה לכל משוואה בה הנעלם מופיע בחזקות כפולות כגון 3 ו-6, או 4 ו-8.

## שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

**1)** $5x^4+3x^2-8=0$

**2)** $x^2\left(x^2+1\right)=10\left(3x^2-10\right)$

**3)** $x^3+4=\frac{32}{x^3}$

**4)** $x-9\sqrt{x}+14=0$

## תשובות סופיות:

**1)** $x=\pm1$
**2)** $x=\pm2,\pm5$
**3)** $x=-2,\sqrt[3]{4}$
**4)** $x_1=4\ ,\ x_2=49$

# משוואות עם פרמטרים

## סיכום כללי

משוואה עם פרמטר הינה משוואה שמכילה שני סוגי גדלים – משתנים ופרמטרים. את המשתנים מקובל לסמן באותיות $x$ , $y$ ו- $z$ , ואת הפרמטרים בשאר האותיות. פתרון המשוואה יתקבל על ידי בידוד המשתנה, כך שיבוטא באמצעות הפרמטר/ים שבמשוואה, למשל פתרון המשוואה: $mx=4$ (כאשר $x$ הוא הנעלם ו- $m$ הוא פרמטר) הוא $x=\frac{4}{m}$ , אשר מבוטא באמצאות הפרמטר $m$ .

בכתיבת פתרון של משוואה עם פרמטרים יש לציין את תחום ההגדרה של הפרמטר עבורו הפתרון הוא בעל משמעות. בדוגמא הנ"ל, תחום ההגדרה הוא $m\neq 0$ .

## שאלות

**1)** פתור את המשוואות הבאות:

א. $3x-b=(b+1)x-6$ ב. $\frac{m+1}{x-1}=\frac{m-1}{x+1}$

**2)** פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases}x+my=1\\x+y=m\end{cases}$.

**3)** פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

א. $x^2-2mx+m^2-1=0$ ב. $x^2+m(x+10)=2m^2-5x$

## תשובות סופיות

**1)** א. $x=\frac{b-6}{2-b}$ , $b\neq 2$ ב. $x=-m$

**2)** $m\neq 1$ , $(m+1,-1)$

**3)** א. $x=m+1,\mathrm{m}-1$ ב. $x=m-5,-2m$

# משוואות עם שורשים

## סיכום כללי

פתרון משוואה מהצורה $\sqrt{x}=a$, יתקבל על ידי העלאה בריבוע של שני אגפי-המשוואה, באופן הבא: $\left(\sqrt{x}\right)^2=\left(a\right)^2 \rightarrow x=a^2$.

### הערות

1) יש לזכור בעת העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה יש לבדוק את כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבתם במשוואה המקורית.
2) למשוואה מהצורה $\sqrt{x}=a$, שבה $a<0$, אין פתרון.
3) יש לסדר תחילה משוואות שבהן הביטוי עם שורש אינו מבודד.
4) במשוואות שבהן יותר מביטוי אחד עם שורש, יש לבודד תחילה את אחד הביטויים, להעלות בריבוע ולאחר מכן לחזור על התהליך ולבצע העלאה בריבוע פעם נוספת.

## שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $\sqrt{2x+5}=7$
2) $\sqrt{x+2}=x$
3) $\sqrt{3x+1}+x=13$
4) $\sqrt{2x+7}+4=x$
5) $\sqrt{x-1}+3=x$
6) $\sqrt{10x+6}+9=x$
7) $\sqrt{x+6}-2=2x$

## תשובות סופיות

1) $x=22$
2) $x=2$
3) $x=8$
4) $x=9$
5) $x=5$
6) $x=25$
7) $x=0.25$

# משוואות עם ערך מוחלט

## סיכום כללי

### הגדרה

ערך מוחלט הינו המרחק של מספר מ-0 ומוגדר באופן הבא: $|x|=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$.

### משוואה עם ערך מוחלט

משוואה עם ערך מוחלט היא מהצורה: $|x|=a$.
כדי לפתור משוואה עם ערכים מוחלטים יש למצוא את נקודות האפס של כל ערך מוחלט (קרי: הנקודות בהן הביטוי שבתוך הערך המוחלט מתאפס),
ולפצל את המשוואה הנתונה לתחומים עבור כל תחום.

## שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

**1)** $|3x+14|=7$

**2)** $|12-x|=3x$

**3)** $2x-|8-x|=10$

**4)** $|x+2|+6=|2x-4|$

## תשובות סופיות

**1)** $x=-\frac{7}{3},\ -7$ **2)** $x=3$ **3)** $x=6$ **4)** $x=12,-1\frac{1}{3}$

# סדנת ריענון במתמטיקה למדעי החברה

## פרק 3 - אי שוויונים אלגבריים

### תוכן העניינים

1. אי שוויונים ממעלה ראשונה ..... 47
2. אי שוויונים ממעלה שנייה ..... 48
3. אי שוויונים ממעלה שלישית ..... 49
4. אי שוויונים עם מנה ..... 50
5. אי שוויונים כפולים מערכות וגם ואו ..... 52
6. אי שוויונים עם ערך מוחלט ..... 53
7. אי שוויונים עם שורשים ..... 55

# אי-שוויונים ממעלה ראשונה

## סיכום כללי

**פעולות המותרות לביצוע בפתרון אי-שוויון**

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

**פעולות אסורות לביצוע בפתרון אי-שוויון**

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

## שאלות

פתור את אי-השוויונים הבאים:

**1)** $45x-26>109$

**2)** $2(x-5)\geq\frac{1}{2}(4x+6)$

**3)** $\frac{8x-4}{2}<\frac{9(x+1)}{3}$

## תשובות סופיות

**1)** $x>3$

**2)** אף $x$.

**3)** $x<5$

# אי-שוויונים ממעלה שנייה

## סיכום כללי

אי שוויון ריבועי הוא מהצורה: $ax^2+bx+c \begin{matrix}>\\<\end{matrix} 0$ כאשר $a \neq 0$.

כדי לפתור אי שוויון ריבועי יש למצוא את נקודות האפס של הביטוי הריבועי ולאחר מכן למצוא את תחום ההצבה עבורו הביטוי מקיים את אי השוויון עצמו.

## שאלות

פתור את אי-השוויונים הבאים:

**1)** $x^2 < 144$

**2)** $x^2 - 12x > -32$

**3)** $(x+2)(x+5) < 0$

**4)** $(x+2)(x+4) < 35$

**5)** $-x^2 + 13x + 30 < 0$

## תשובות סופיות

**1)** $-12 < x < 12$

**2)** $x < 4 \ , \ x > 8$

**3)** $-5 < x < -2$

**4)** $-9 < x < 3$

**5)** $x < -2 \ , \ x > 15$

# אי-שוויונים ממעלה שלישית

## סיכום כללי

אי שוויונים ממעלה גבוהה מיוחסים לכאלה שניתן לכתוב אותם בצורה של פולינומים, כגון: $x^3-4x^2+4x+1>0$ , $x^4+2x^2+1<0$ וכו'.

נפתור אותם על ידי פירוק לגורמים ומציאת נקודות האפס של כל גורם.

לאחר מכן נבדוק את כל אחד מתחומי המספרים המתקבלים עבור הנעלם, ונראה באלו מהם מתקבל פסוק אמת.

## שאלות

פתור את אי-השוויונים הבאים:

**1)** $(x-1)(x-2)(x-3)>0$

**2)** $(-2x^2-3x+2)(x+1)\le 0$

**3)** $(x^2+3x+5)(x-2)>0$

## תשובות סופיות

**1)** $1<x<2\ ,\ x>3$

**2)** $-2\le x\le -1\ ,\ x\ge \frac{1}{2}$

**3)** $x>2$

# אי-שוויונים עם מנה

## סיכום כללי

אי שוויון מהצורה $\frac{f(x)}{g(x)}>0$ (או $\frac{f(x)}{g(x)}<0$) נקרא אי-שוויון עם מנה,

בו $f(x)$ ו-$g(x)$ פולינומים.

למשל $\frac{2x+4}{x^2-3x+4}<0$, בו $f(x)=2x+4$ ו- $g(x)=x^2-3x+4$.

כדי לפתור אי שוויון עם מנה, נמצא את נקודות האפס של $f(x)$ ושל $g(x)$,

ונציב מספרים בתחומים המתקבלים.

אלו שיתנו פסוק אמת יהוו את פתרון אי-השוויון.

### הערות

- ניתן לבצע כפל של המכנה בריבוע בכדי להעביר את אי השוויון לצורה של מכפלות.
- ניתן להעביר אי שוויון המכיל מספר מנות ומספרים שלמים לצורה הנ"ל,
  על ידי פעולות אלגבריות מתאימות תחילה.

## שאלות

פתור את אי-השוויונים הבאים:

**1)** $\frac{x-1}{x^2-9}>0$

**2)** $\frac{x-1}{3x+2}\geq -3$

**3)** $\frac{x-3}{2x^2-10x+12}>0$

## תשובות סופיות

**1)** $-3 < x < 1 \ , \ x > 3$

**2)** $x < -\frac{2}{3} \ , \ x \geq -\frac{1}{2}$

**3)** $2 < x < 3 \ , \ x > 3$

# אי-שוויונים כפולים – מערכות וגם ואו

## סיכום כללי

אי-שוויון כפול הוא צורה מקוצרת להציג שני אי-שיוונים אשר יש לפתור יחד (קרי: כמערכת 'וגם').

למשל, במקום לכתוב: $a<b$ וגם $b<c$, ניתן לכתוב: $a<b<c$.

מכאן, כדי לפתור אי שוויון כפול יש לפצל אותו תחילה לשני אי-שיוונים,

ולפתור כל אחד בנפרד. לאחר מכן יש לקחת את חיתוך הפתרונות.

## שאלות

פתור את אי-השוויונים הבאים:

**1)** $3<x+1<5$

**2)** $-1<\frac{x-1}{x+1}<1$

**3)** $6x-38\le x-3\le 5x+7$

## תשובות סופיות

**1)** $2<x<4$

**2)** $x>0$

**3)** $-2.5\le x\le 7$

# אי שוויונים עם ערך מוחלט

## סיכום כללי

### כללים לפתרון אי שוויון עם ערך מוחלט יחיד

| מקרה | $\lvert x\rvert < a$ | $\lvert x\rvert > a$ |
|---|---|---|
| פתרון | $-a < x < a$ | $x < -a \cap x > a$ |

### כללים לפתרון אי שוויון עם מספר ערכים מוחלטים

- נמצא את הנקודות המאפסות כל ביטוי עם ערך מוחלט.
- מחלקים את אי השוויון לתחומים לפי נקודות האפס.
- פותרים את אי השוויון לכל תחום בנפרד.
- כותבים פתרון כללי (מערכת או) לכל התחומים יחדיו.

## שאלות

**1)** פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $\lvert x+2\rvert < 3$ ב. $\lvert 2x+1\rvert > 7$

ג. $\lvert 6-2x\rvert < x$ ד. $\lvert 2x+1\rvert - 3x > 4$

**2)** פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $1 < \lvert 4-3x\rvert < 7$ ב. $\lvert 2x+3\rvert < 8 < \lvert 5-x\rvert$

**3)** פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $\lvert x-3\rvert + \lvert 2x+2\rvert > 7$ ב. $\lvert 3-2x\rvert - 11 > 4 - \lvert 6+x\rvert$

## תשובות סופיות

**1)** א. $-5<x<1$ ב. $3<x$ או $x<-4$

ג. $2<x<6$ ד. $x<-1$.

**2)** א. $1\frac{2}{3}<x<3\frac{2}{3}$ או $-1<x<1$ ב. $-5\frac{1}{2}<x<-3$

**3)** א. $2<x$ או $x<-2$ ב. $4<x$ או $x<-6$

# אי שוויונים עם שורשים

## סיכום כללי

**מקרים בפתרון אי-שוויונות עם שורשים**

| מקרה | אי השוויון | פתרון |
|---|---|---|
| $a \geq 0$ | $\sqrt{f(x)} < a$ | $0 \leq f(x) < a^2$ |
| $a < 0$ | $\sqrt{f(x)} < a$ | אין פתרון |
| | $\sqrt{f(x)} > a$ | כל $x$ בת.ה. של $f(x)$ |

## שאלות

פתור את אי השוויונים הבאים:

**1)** $\sqrt{x+3} < 7$

**2)** $\sqrt{2x-5} \geq 1$

**3)** $\sqrt{2x^2+5x-6} > 2-x$

**4)** $\sqrt{x^2+x-6} < x-3$

## תשובות סופיות

**1)** $-3 \leq x < 46$

**2)** $x \geq 3$

**3)** $x < -10 \ , \ x > 1$

**4)** $\varnothing$

# סדנת ריענון במתמטיקה למדעי החברה

## פרק 4 - חוקי החזקות והשורשים, משוואות ואי שוויונות מעריכיים

### תוכן העניינים


1. חוקי החזקות ..... 56
2. חוקי השורשים ..... 60
3. משוואות מעריכיות ..... 63
4. משוואות עם חיבור וחיסור איברים ..... 64
5. משוואות עם קבוע אוילר ..... 66
6. אי שוויונים מעריכיים ..... 67

# חוקי החזקות

## סיכום כללי

### סיכום חוקי החזקות

1. $a^0=1$
2. $a^1=a$
3. $a^n\cdot a^m=a^{m+n}$
4. $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$
5. $\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$
6. $a^m\cdot b^m=\left(a\cdot b\right)^m$
7. $\frac{a^m}{b^m}=\left(\frac{a}{b}\right)^m$
8. $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$
9. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}=\left(\frac{b}{a}\right)^m$

## שאלות

**1)** פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^na^m=a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$.

א. $a^2a^6$
ב. $t^3t^5t^7$
ג. $b^2b^5b^{12}b^3$
ד. $\frac{k^8}{k^3}$
ה. $\frac{n^{14}}{n^9}$
ו. $\frac{c^6}{c^2}$
ז. $\frac{a^3a^{19}}{a^{15}}$
ח. $\frac{x^{30}}{x^9x^{18}}$
ט. $\frac{y^3y^{15}}{y^4y^{14}}$
י. $3^23^33^4$
יא. $\frac{2^{16}2^2}{2^{10}}$
יב. $\frac{5^{20}5^35^{16}}{5^45^{22}5^8}$

**2)** פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^na^m=a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$.

א. $\frac{3^42^7}{2^63^2}$
ב. $\frac{a^{10}b^{13}a^3}{b^4b^6b^2a^{12}}$
ג. $\frac{x^8y^5y^9x^2}{y^4x^4}$

**3)** חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{2^3\cdot2^7}{2^4\cdot2^5}$
ב. $\frac{9^3\cdot27^2}{3^9\cdot81}$
ג. $\frac{10^9\cdot25^5\cdot8^{-1}}{40^3\cdot125^5}$
ד. $2^3+2^5$

**4)** פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוק: $\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m}$.

א. $\left(a^2\right)^4$ ב. $\left(c^3\right)^{10}$ ג. $\left(x^3x^{10}\right)^2$

ד. $\dfrac{\left(b^2\right)^3}{b^2b^3}$ ה. $\dfrac{n^7n^8}{\left(n^3\right)^4}$ ו. $\dfrac{d^{20}\left(d^4\right)^2}{d^{12}\left(d^3\right)^2}$

ז. $\dfrac{2^5\left(2^4\right)^2 2^3}{\left(2^32^2\right)^3}$ ח. $\dfrac{3^6\left(3^33^2\right)^6}{3^{28}\left(3^2\right)^3}$ ט. $\dfrac{\left(8^3\right)^8 8^{11}}{\left(8^28\right)^3 8^8}$

**5)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\dfrac{2^4\cdot 16^5}{8\cdot 512}$ ב. $\dfrac{\left(4^2\right)^3 16}{64\cdot 2^3}$ ג. $\dfrac{\left(\left(3^4\right)^4\right)^5}{81^327^43^5}$

**6)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\dfrac{\left(2a^2b\right)^3\cdot\left(ab^{-3}\right)^2}{4ab^{-2}\cdot\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^4}$ ב. $\dfrac{\left(k^2\right)^{m+2}\cdot k^{1-3m}}{\left(k^{2m}\right)^3\cdot\dfrac{1}{k^{7m-4}}}$

ג. $\dfrac{4^{b+3}}{4^{b+1}+4^{b+2}}$ ד. $\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{x^{n+3}+x^{n+5}}{x^{n+2}}$

**7)** פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $\left(ab\right)^n = a^nb^n$ ו- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

א. $\left(a^2b\right)^3$ ב. $\left(m^4n^3\right)^5$ ג. $\left(x^{12}y^3\right)^3$

ד. $\left(\dfrac{a^3}{b^2}\right)^4$ ה. $\left(\dfrac{i^4}{k^3}\right)^7$ ו. $\left(\dfrac{a^{14}b^4}{a^6ab^3}\right)^3$

ז. $\left(\dfrac{x^3y^5y^2x^6}{y^4x^7}\right)^6$ ח. $\left(\dfrac{t^7r^{20}t^3}{r^2r^{12}t^8}\right)^2$ ט. $\left(\dfrac{\left(b^{12}c\right)^2c^{14}}{c\left(c^3b^5\right)^4b^3}\right)^2$

**8)** בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה שלילית:

א. $\frac{1}{4^6}$ ב. $\frac{1}{5^3}$ ג. $\frac{1}{2^{10}}$

ד. $\frac{1}{8}$ ה. $\frac{1}{81}$ ו. $\frac{1}{125}$

**9)** בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה חיובית וחשב את ערכם:

א. $\frac{1}{4^{-3}}$ ב. $\frac{1}{3^{-2}}$ ג. $\frac{1}{5^{-3}}$

**10)** חשב את הביטויים הבאים:

א. $\frac{2^{-5}\cdot 5^3\cdot 2^{14}}{5^2\cdot 5^{-10}\cdot 5^8\cdot 2^6}$ ב. $\frac{3^{-6}\cdot 7^7\cdot 7^{-4}}{3^{-4}\cdot 3^{-3}\cdot 7^3}$

**11)** פשט את הביטויים הבאים לצורה ללא חזקות שליליות.

א. $\left(\frac{5^{-4}}{3^2}\right)^{-6}$ ב. $\frac{\left(4^4\right)^{-4}3^{-11}}{\left(3^{-2}4^3\right)^{-6}}$ ג. $\frac{2^{-3}5^4}{5^4\cdot 125\cdot\left(5^2 2\right)^{-3}\cdot 2^{-4}}$

**12)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{a^{n+2}\cdot a^{2-3n}}{\left(a^3\right)^{n+1}}$ ב. $\frac{\left(k^2\right)^{m+2}\cdot k^{1-3m}}{\left(k^{2m}\right)^3\cdot\frac{1}{k^{7m-4}}}$ ג. $\frac{\left(m^{n+2}\right)^3\cdot m^{-4n-2}}{\frac{1}{m^{6n+2}}\cdot\left(m^3\right)^{n-2}}$

## תשובות סופיות

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1) | א. $a^8$ | ב. $t^{15}$ | ג. $b^{22}$ | ד. $k^5$ | ה. $n^5$ | ו. $c^4$ |
| | ז. $a^7$ | ח. $x^3$ | ט. 1 | י. $3^9$ | יא. $2^8$ | יב. $5^5$ |
| 2) | א. 18 | ב. $ab$ | ג. $x^6y^{10}$ | | | |
| 3) | א. 2 | ב. $\frac{1}{3}$ | ג. $\frac{5}{8}$ | ד. 40 | | |
| 4) | א. $a^8$ | ב. $c^{30}$ | ג. $x^{26}$ | ד. $b$ | ה. $n^3$ | ו. $d^{10}$ |
| | ז. 2 | ח. 9 | ט. $8^{18}$ | | | |
| 5) | א. $2^{12}$ | ב. $2^7$ | ג. $3^{51}$ | | | |
| 6) | א. $\frac{2b^3}{a}$ | ב. $k$ | ג. $3\frac{1}{5}$ | ד. $\frac{1}{x}+x$ | | |
| 7) | א. $a^6b^3$ | ב. $m^{20}n^{15}$ | ג. $x^{36}y^9$ | ד. $\frac{a^{12}}{b^8}$ | ה. $\frac{i^{28}}{k^{21}}$ | ו. $a^{21}b^3$ |
| | ז. $x^{12}y^{18}$ | ח. $t^4r^{12}$ | ט. $b^2c^6$. | | | |
| 8) | א. $4^{-6}$ | ב. $5^{-3}$ | ג. $2^{-10}$ | ד. $2^{-3}$ | ה. $3^{-4}$ | ו. $5^{-3}$ |
| 9) | א. 64 | ב. 9 | ג. 125 | | | |
| 10) | א. 1000 | ב. 3 | | | | |
| 11) | א. $5^{24}\cdot 3^{12}$ | ב. $\frac{4^2}{3^{23}}$ | ג. $5^3\cdot 2^4$ | | | |
| 12) | א. $a^{1-5n}$ | ב. $k$ | ג. $m^{2n+12}$ | | | |

# חוקי השורשים

## סיכום כללי

### סיכום חוקי השורשים

1. $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$
2. $\sqrt[m]{a}=a^{\frac{1}{m}}$
3. $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$
4. $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{a\cdot b}$
5. $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$
6. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$

## שאלות

**1)** הבא את הביטויים הבאים לצורה: $\sqrt[n]{a^m}$.

א. $3^{\frac{1}{4}}$ ב. $2^{\frac{3}{5}}$ ג. $6^{\frac{5}{6}}$

ד. $-12^{\frac{2}{7}}$ ה. $-(-4)^{\frac{1}{3}}$ ו. $-(-3)^{\frac{3}{4}}$

ז. $5^{-\frac{1}{4}}$ ח. $27^{-\frac{1}{3}}$ ט. $64^{-\frac{5}{6}}$

**2)** חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{49}$ ב. $-\sqrt{25}$ ג. $\sqrt[3]{8}$

ד. $-\sqrt[7]{128}$ ה. $\sqrt[3]{(-2)^6}$ ו. $\left(\sqrt[5]{1024}\right)^2$

ז. $\left(\sqrt[5]{-243}\right)^3$ ח. $\sqrt[4]{-16}$ ט. $\sqrt[4]{-25^2}$

י. $\sqrt[4]{(-25)^2}$

**3)** חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

א. $8^{\frac{2}{3}}$ ב. $32^{-\frac{3}{5}}$ ג. $128^{-\frac{2}{7}}$

ד. $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$ ה. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2.5}$ ו. $\left(\frac{64}{343}\right)^{-\frac{2}{3}}$

ז. $81^{\frac{3}{4}}\cdot 64^{-\frac{1}{3}}$ ח. $343^{-\frac{2}{3}}\cdot 100^{\frac{1}{2}}$ ט. $16^{\frac{1}{4}}\cdot 8^{-\frac{1}{3}}\cdot 4^{-\frac{1}{2}}$

**4)** פשט את הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ ב. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$ ג. $\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}$

ד. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ ה. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$ ו. $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$

ז. $\frac{\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$ ח. $\frac{\sqrt[3]{500}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt[4]{25^2}\cdot\sqrt[3]{4}}$ ט. $\frac{\sqrt[3]{8^2}\sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{400}\sqrt{2}}$

**5)** הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים:

א. $3\sqrt{2}$ ב. $5\sqrt{3}$ ג. $\frac{\sqrt{36}}{2}$

ד. $2\sqrt[3]{3}$ ה. $x\sqrt{x}$

**6)** הכנס את כל המקדמים בביטויים הבאים לתוך השורש:

א. $2\sqrt{5}$ ב. $4\sqrt[3]{2}$ ג. $2\sqrt[5]{3}$

ד. $\frac{\sqrt{24}}{2}$ ה. $\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$ ו. $\frac{3\sqrt[4]{5000}}{10}$

ז. $-5\sqrt[3]{2}$ ח. $-5\sqrt[4]{2}$ ט. $-5\sqrt[5]{-2}$

**7)** הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר:

א. $\sqrt{12}$ ב. $\sqrt{48}$ ג. $\sqrt{63}$

ד. $\sqrt[3]{54}$ ה. $\sqrt{x^5}$

**8)** חלץ מן הביטויים הבאים את המקדם הגבוה ביותר ככל הניתן:

| | | |
|---|---|---|
| א. $\sqrt{40}$ | ב. $\sqrt{50}$ | ג. $\sqrt{320}$ |
| ד. $\sqrt[3]{108}$ | ה. $\sqrt[3]{56}$ | ו. $\sqrt[5]{160}$ |
| ז. $\sqrt[4]{162}$ | ח. $\sqrt[5]{972}$ | ט. $\sqrt[6]{192}$ |

## תשובות סופיות

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **1)** | א. $\sqrt[4]{3}$ | ב. $\sqrt[5]{2^3}$ | ג. $\sqrt[6]{6^5}$ | ד. $-\sqrt[7]{12^2}$ | ה. $-\sqrt[3]{-4}$ | ו. $\phi$ |
| | ז. $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ | ח. $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$ או $\frac{1}{3}$ | | ט. $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}}$ או $\frac{1}{2^5}$ | | |
| **2)** | א. 7 | ב. $-5$ | ג. 2 | ד. $-2$ | ה. 4 | ו. 16 |
| | ז. $-27$ | ח. $\phi$ | ט. $\phi$ | י. 5 | | |
| **3)** | א. 4 | ב. $\frac{1}{8}$ | ג. $\frac{1}{4}$ | ד. 125 | ה. $\frac{32}{243}$ | ו. $\frac{49}{16}$ |
| | ז. $\frac{27}{4}$ | ח. $\frac{10}{49}$ | ט. $\frac{1}{2}$ | | | |
| **4)** | א. 4 | ב. 9 | ג. 20 | ד. 6 | ה. 3 | ו. 2 |
| | ז. $\sqrt{2}$ | ח. $\sqrt{5}$ | ט. $\sqrt{2}$ | | | |
| **5)** | א. $\sqrt{18}$ | ב. $\sqrt{75}$ | ג. $\sqrt{9}$ | ד. $\sqrt[3]{24}$ | ה. $\sqrt{x^3}$ | |
| **6)** | א. $\sqrt{20}$ | ב. $\sqrt[3]{128}$ | ג. $\sqrt[5]{96}$ | ד. $\sqrt{6}$ | ה. $\sqrt[3]{3}$ | |
| | ו. $\sqrt[4]{40\frac{1}{2}}$ | ז. $\sqrt[3]{-250}$ | ח. $-\sqrt[4]{1250}$ | ט. $\sqrt[5]{5^5 \cdot 2}$. | | |
| **7)** | א. $2\sqrt{3}$ | ב. $4\sqrt{3}$ | ג. $3\sqrt{7}$ | ד. $3\sqrt[3]{2}$ | ה. $x^2\sqrt{x}$ | |
| **8)** | א. $2\sqrt{10}$ | ב. $5\sqrt{2}$ | ג. $8\sqrt{5}$ | ד. $3\sqrt[3]{4}$ | ה. $2\sqrt[3]{7}$ | ו. $2\sqrt[5]{5}$ |
| | ז. $3\sqrt[4]{2}$ | ח. $3\sqrt[5]{4}$ | ט. $2\sqrt[6]{3}$ | | | |

# משוואות מעריכיות יסודיות

## סיכום כללי

- פתרון כללי של משוואת מעריכית מהצורה: $a^x = a^y$ הוא: $x = y$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = 1$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = 1 = a^0$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = b^x$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = b^x = 1$ ללא תלות בבסיסים.

## שאלות

**1)** פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי החזקות היסודיים):

א. $5^x \cdot 25^{x+2} = 125$

ב. $\left(2^x \cdot 32\right)^3 = 8$

ג. $\left(5^{x^2}\right)^5 \cdot \frac{1}{5^5} = 625^{x-1}$

**2)** פתור את המשוואה הבאה (הבסיס הוא שבר): $27 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{5x+2} = 8$.

**3)** פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי השורשים):

א. $\sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3}$

ב. $\left(9\sqrt{27}\right)^{3x} \cdot 3^{2-x} = \frac{1}{9}$

ג. $\sqrt[x]{16} \cdot \left(\frac{1}{2^x}\right)^3 = \frac{1}{16}$

## תשובות סופיות

**1)** א. $x = -\frac{1}{3}$ ב. $x = -4$ ג. $x = 1, -\frac{1}{5}$

**2)** $x = \frac{1}{5}$

**3)** א. $x = -\frac{1}{2}$ ב. $x = -8$ ג. $x = 2, -\frac{2}{3}$

# משוואות עם חיבור וחיסור איברים

## סיכום כללי

במשוואות הכוללות חיבור וחיסור של איברים, נאתר את הבסיס עם המעריך הקטן ביותר ונסמן אותו ב- $t$, למשל במשוואה: $4^x-3\cdot 2^x=4$ נסמן: $2^x=t$.

נבטא את כל איברים המשוואה באמצעות $t$ ונפתור אותה עבורו.

לאחר מכן נחזיר את ההצבה למציאת ערכי ה- $x$ המתאימים.

## שאלות

**1)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם חיבור וחיסור ממעלה ראשונה):

א. $2^x+6\cdot 2^x=56$ ב. $5\cdot 3^x-3^{x+1}=162$

**2)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם חיבור וחיסור ממעלה ראשונה):

א. $81^{x+1}+18\cdot 3^{4x-3}=735$ ב. $5^{3x+2}+4\cdot 125^x=29$

**3)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחיסור ממעלה שנייה):

א. $9^x-36\cdot 3^x+243=0$ ב. $16^{x+1}-65\cdot 4^x+4=0$

**4)** פתור את המשוואה הבאה (משוואות כלליות): $\frac{20}{9^x+1}=3-\frac{8}{9^x-1}$.

**5)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות מסכמות):

א. $\frac{1}{25^{1-x}}-6\cdot 5^{x-1.5}+1=0$ ב. $3^x-\sqrt{16\cdot 3^{x+1}}=-9$

## תשובות סופיות

1) א. $x=3$ ב. $x=4$

2) א. $x=\frac{1}{2}$ ב. $x=0$

3) א. $x=2,3$ ב. $x=1,-2$

4) $x=1,-\frac{1}{2}$

5) א. $x=\frac{1}{2},1\frac{1}{2}$ ב. $x=1,3$

# משוואות עם קבוע אוילר

## סיכום כללי

קבוע אוילר מסומן באות $e$ וערכו שווה (בערך) ל-2.71828.

למספר זה משמעויות רבות במתמטיקה ובמדעים ועל כן הוחלט לסמן אותו באות משלו ולשלב אותו במשוואות מתמטיות.

דרך הפתרון של משוואה שבה הבסיס הוא $e$ זהה לחלוטין לזו של משוואה מעריכית רגילה, כפי שנלמד בפרק זה.

## שאלות

**1)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם קבוע אוילר):

א. $e^{3x}=e^{2x-1}$

ב. $e^{x-5}=\left(e^{1-x}\right)^3$

**2)** פתור את המשוואה הבאה (עם חיבור וחיסור): $e^{2x}+e^{x}-2=0$.

**3)** פתור את המשוואה הבאה (המשתנה גם בבסיס): $xe^{x}=\sqrt[4]{e}\cdot x$.

## תשובות סופיות

**1)** א. $x=-1$ ב. $x=2$

**2)** $x=0$

**3)** $x=0\ ,\ \frac{1}{4}$

# אי שוויונים מעריכיים:

## סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $a^x > a^y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

## שאלות:

פתור את אי השיוויונים הבאים:

**1)** $3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x}$

**2)** $e^{\sqrt{x}+1} > e^{2x}$

**3)** $25^x + 5 < 6 \cdot 5^x$

**הערה**

השאלות הבאות דורשות הכרות עם מושג הלוגריתם הטבעי (ln) וכן חוקי הלוגריתמים אשר ילמדו בהמשך.

**4)** $e^{2x} - 5e^x + 4 > 0$

## תשובות סופיות

**1)** $x < \frac{2}{3}$

**2)** $0 \le x < 1$

**3)** $0 < x < 1$

**4)** $x > \ln 4$ או $x < 0$

# סדנת ריענון במתמטיקה למדעי החברה

## פרק 5 - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים

### תוכן העניינים

1. הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות ..... 68
2. חוקי הלוגריתמים ..... 70
3. הלוגריתם הטבעי ..... 72
4. משוואות עם בסיסים שונים ..... 74
5. אי-שוויונים לוגריתמים ..... 75

# הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות

## סיכום כללי

### הגדרה

הלוגריתם מוגדר באופן הבא: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, כאשר: $a \neq 1$, $b > 0$, $a > 0$.

### הסבר

לוגריתם על בסיס $a$ של $b$ מוגדר בתור החזקה שיש להעלות את $a$, על מנת שיהיה שווה ל- $b$. ערך חזקה זו הוא $x$.

ערך לוגריתם יכול להיות חיובי, שלילי או אפס.

נחשב ערכי לוגריתמים ונפתור משוואות לוגריתמיות על ידי מעבר לפי ההגדרה למשוואה מעריכית מתאימה.

### כללים יסודיים בלוגריתמים

מהגדרת הלוגריתם נובע כי: $\log_a a = 1$ וכן: $\log_a 1 = 0$, לכל $a > 0$, $a \neq 1$.

## שאלות

**1)** חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמים הבאים:

א. $\log_2 32$ ב. $\log 1000$ ג. $\log_{25} 5$

ד. $\log_8 4$ ה. $\log_4 \frac{1}{16}$ ו. $\log_a a^4$

ז. $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$

**2)** פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (יסודי - שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\log_{36} 6 = x$ ב. $\log_2 x = 16$

ג. $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$ ד. $\log_x 64 = 3$

ה. $\log_x 25 = 2$ ו. $\log_x (3x+4) = 2$

**3)** פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (כללי - שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\log_6(4x-2)=1$ ב. $\log_8(x^4-73)=1$

ג. $\log_3\frac{x+3}{3-3x}=-2$

**4)** פתור את המשוואה הלוגריתמית הבאה: $\log_4(\log_3 x)=1$.
(שימוש בהגדרת הלוג מספר פעמים)

**5)** פתור את המשוואה הלוגריתמית הבאה: $\log_2(3^x+37)=6$.
(מתקבלת משוואה מעריכית)

**6)** פתור את המשוואה הלוגריתמית הבאה (הצבה): $(\log_2 x)^4=10000$.

## תשובות סופיות

**1)** א. 5 ב. 3 ג. $\frac{1}{2}$ ד. $\frac{2}{3}$ ה. -2
ו. 4 ז. -1.5

**2)** א. $x=\frac{1}{2}$ ב. $x=65,536$ ג. $x=27$ ד. $x=4$
ה. $x=5$ ו. $x=4$

**3)** א. $x=2$ ב. $x=\pm3$ ג. $x=-2$

**4)** $x=81$

**5)** $x=3$

**6)** $x=1024,\ \frac{1}{1024}$

# חוקי הלוגריתמים:

## סיכום כללי:

להלן 3 חוקי הלוגריתמים עבור בסיס $a>0\neq 1$ וארגומנטים $x$ ו- $y$ חיוביים:

- מכפלה לסכום: $\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$.
- מנה להפרש: $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$.
- מקדם למעריך: $\log_a b^n=n\log_a b$ (כאשר $b>0$ ו- $n$ מספר ממשי כלשהו).

## שאלות:

### שאלות חישוב כלליות:

**1)** חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

א. $\log_3 12+\log_3 2.25$

ב. $\log_{\frac{1}{5}} 40+\log_{\frac{1}{5}} 12.5+\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{4}$

ג. $\log_2 200-\log_2 100$

**2)** חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

א. $\frac{\log_5 16}{\log_5 8}$

ב. $\frac{\log_9 62.5+\log_9 2}{\log_9 0.2}$

### משוואות לוגריתמיות:

**3)** פתור את המשוואות הבאות (שימוש ישיר בחוקי הלוגריתמים):

א. $\log_2 x+\log_2(x-6)=4$

ב. $\log_3 x+\log_3(x+2)=1$

**4)** פתור את המשוואות הבאות (פתרון בשיטת לוג שווה לוג):

א. $\log_5(4x-3)=\log_5 7$.

ב. $2\log_2(2x-2)-\log_2(16-x)=\log_2(x-1)+1$.

**5)** פתור את המשוואות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א. $\log_3\left(3\cdot 5^x+39\right)=3+\log_3\left(5^x-3\right)$.

## תשובות סופיות:

**1)** א. 3 ב. -3 ג. 1

**2)** א. $\frac{4}{3}$ ב. -3

**3)** א. $x=8$ ב. $x=3,\frac{1}{27}$

**4)** א. $x=2.5$ ב. $x=6$.

**5)** $x=1$

# הלוגריתם הטבעי

## סיכום כללי

לוגריתם על בסיס $e$ (קבוע אוילר) מסומן: $\log_e \Rightarrow \ln$ ונקרא הלוגריתם הטבעי.

למשל: $\ln 3 = \log_e 3$ או $\ln \frac{1}{4} = \log_e \frac{1}{4}$. לוג זה נקרא בשם לן.

מהגדרת הלוגריתם מתקיים: $\ln a = b \to e^b = a$, כאשר $a > 0$ ו- $b$ מספרים.

## שאלות

**1)** חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הטבעיים הבאים:

א. $\ln e^2$ ב. $\ln \frac{1}{e^4}$ ג. $\ln \frac{1}{e\sqrt{e}}$

**2)** פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\ln x = 2$ ב. $\ln x = -\frac{1}{2}$

**3)** פתור את המשוואות הבאות (הצבה וחוקי הלוגריתמים):

א. $\ln\left(e^{2x} - \frac{1}{2}\right) + \ln 2 = x$

ב. $3\ln^2 x + \ln x = 2$

ג. $\ln\left(e^2 x^3\right) \cdot \ln \frac{1}{x} = \ln\left(ex^2\right)$

**4)** פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הוצאת לוג משני אגפי המשוואה)

א. $x^{\ln x} = e^6 x$ ב. $\left(\frac{1}{x}\right)^{2-3\ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x}$

**5)** חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א. $e^{\ln 3}$ ב. $e^{2\ln 3}$

## תשובות סופיות

1) א. 2 ב. -4 ג. -1.5

2) א. $x=e^2$ ב. $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$

3) א. $x=0$ ב. $x=\sqrt[3]{e^2},\frac{1}{e}$ ג. $x=\frac{1}{\sqrt[3]{e}},\frac{1}{e}$

4) א. $x=e^3,\frac{1}{e^2}$ ב. $x=\sqrt{e},e$

5) א. 3 ב. 9

# משוואות עם בסיסים שונים:

## סיכום כללי:

לעיתים תתקבל משוואה מעריכית שבה לא ניתן למצוא חזקה שלמה, כגון: $3^x = 4$.
במקרים אלו נעזר בהגדרת הלוג כדי לבטא את ערך המעריך: $x = \log_3 4$.

את ערך הביטוי $\log_3 4$ ניתן לחשב ע"י מחשבון או ע"י מעבר לבסיס 10: $\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3}$.

## שאלות:

**1)** פתור את המשוואות הבאות (בסיסים שונים):

א. $3^x = 6$ ב. $2^x - 9 = 0$

**2)** פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם בסיס ולוגריתם טבעי): $e^{3x} = 3$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $x = \log_3 6 = 1.63$ ב. $x = \log_2 9 = 3.17$

**2)** $x = \frac{1}{3}\ln 3 = 0.36$

# אי-שוויונים לוגריתמים

## סיכום כללי

פתרון אי-השוויון $\log_a x > \log_a y$ הוא $x > y$ עבור $a > 1$, ו- $x < y$ עבור $0 < a < 1$.

## שאלות

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $\log_2 x < \log_2 (5x - 20)$

2) $\ln x \geq \ln\left(x^2 - 12\right)$

3) $\ln x < 3$

4) $\ln^2 x - 6\ln x < 7$

5) $\frac{6}{\ln^2 x} \geq 2 - \frac{1}{\ln x}$

## תשובות סופיות

1) $x > 5$

2) $2\sqrt{3} < x \leq 4$

3) $0 < x < e^3$

4) $\frac{1}{e} < x < e^7$

5) $\frac{1}{\sqrt{e^3}} \leq x \leq e^2$ וגם $x \neq 1$

# סדנת ריענון במתמטיקה למדעי החברה

## פרק 6 - פונקציות

### תוכן העניינים

1. פונקציה - הגדרה ותכונות בסיסיות ..... (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית ..... 76
3. הפונקציה הריבועית ..... 86
4. הפונקציה המעריכית ..... (ללא ספר)
5. הפונקציה הלוגריתמית ..... (ללא ספר)
6. פונקציות מפורסמות נוספות ..... (ללא ספר)
7. הזזות שיקופים מתיחות וכיווצים של פונקציה ..... (ללא ספר)
8. הפונקציות הטריגונומטריות ..... (ללא ספר)
9. הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות ..... (ללא ספר)

# הפונקציה הליניארית

## סיכום כללי

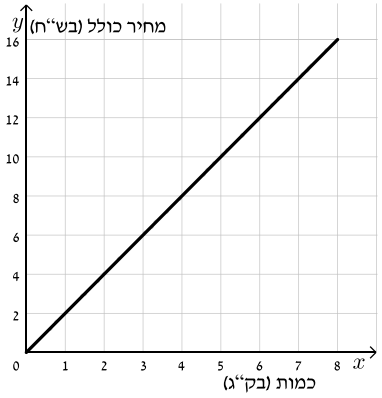
ניתן להציג תהליכים שונים באמצעות יחס ישר בין שני משתנים.

יחס זה מוצג בתור קו ישר מהצורה: $\frac{y}{x}=m$ או $y=mx$.

הפונקציה מהצורה: $y=mx$ מתאר יחס ישר בין $x$ ל- $y$.

## שאלות

**1)** המחיר של 1 ק"ג עגבניות הוא 2 ₪.
הקו הישר שבסרטוט מתאר את מחיר העגבניות הכולל כפונקציה של משקל העגבניות.




א. מה המחיר של 3 ק"ג עגבניות?

ב. מהי כמות העגבניות שניתן לקנות ב-12 ₪?

ג. מהו היחס בין כמות העגבניות (בק"ג) שניתן לרכוש לבין מחירם?

ד. כתוב ביטוי אלגברי שייצג את המחיר הכולל של העגבניות כתלות במשקלם.

### שיפוע ישר – סיכום

ישר שמשוואתו היא $y=mx$ הוא בעל שיפוע $m$ כאשר:

- אם $m>0$ הישר עולה.
- אם $m<0$ הישר יורד.
- אם $m=0$ הישר קבוע (אינו עולה ואינו יורד).

### חישוב שיפוע בשיטת המדרגות

בכל התקדמות של יחידה אחת לאורך ציר $x$ נבדוק כמה יחידות עלינו או ירדנו לאורך ציר $y$. שיפוע הישר יתאים להתקדמות בציר ה- $y$.

**שיפוע בין שתי נקודות**

ניתן לחשב שיפוע בין שתי נקודות כלליות הנמצאות על ישר.

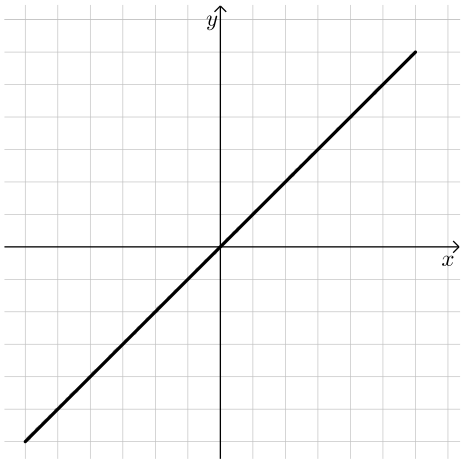
נניח ישר העובר דרך שתי נקודות $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$.

שיפוע הישר יחושב: $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (כאשר $\Delta x\neq 0$).

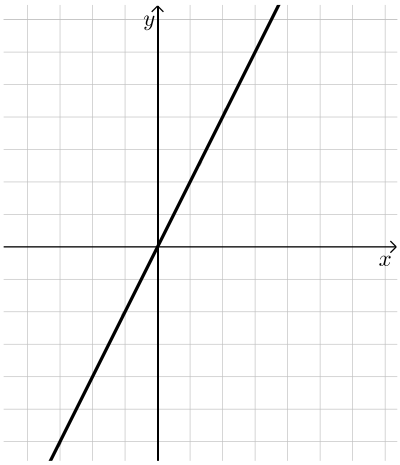
חשוב להקפיד על חיסור של אותן הנקודות במונה ובמכנה.

**2)** לפניך הגרפים של הישרים הבאים:

i.




ii.

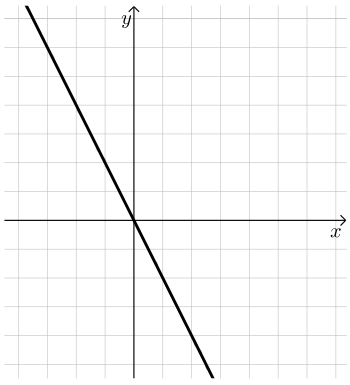



א. מצא את השיפוע של כל אחד מהם.

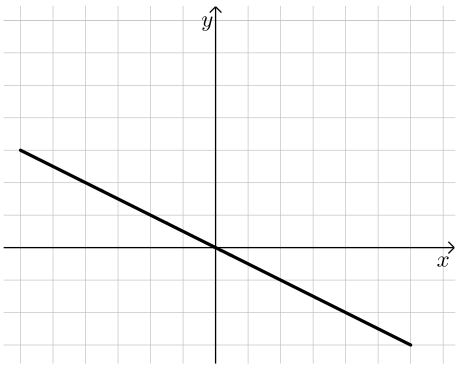
ב. רשום פונקציה מהצורה: $y=mx$ לכל אחד מהישרים.

**3)** לפניך הגרפים של הישרים הבאים:

i.




ii.



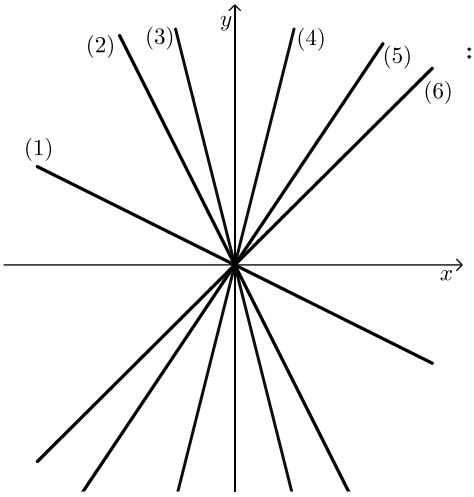

א. מצא את השיפוע של כל אחד מהם.

ב. רשום פונקציה מהצורה: $y=mx$ לכל אחד מהישרים.

**4)** לפניך 6 ישרים במערכת צירים אחת ו-6 שיפועים:

$$-\frac{2}{3}\ ,\ 2\ ,\ -2\ ,\ 1.2\ ,\ -4\ ,\ 4\ .$$

התאם כל שיפוע לכל ישר.




## הקו הישר הכללי – סיכום

- משוואת הקו הישר הכללית היא מהצורה: $y=mx+b$
כאשר $m$ הוא שיפוע הישר ו- $b$ הוא האיבר החופשי כמשוואה.
- האיבר החופשי מייצג את נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- $y$
אשר תמיד תהיה $(0,b)$.
- ישרים המקבילים זה לזה על בעלי אותו השיפוע (אותו $m$) ואיברים חופשיים שונים ($b$ שונה), למשל: $y=4x-5$, $y=4x+1$.
- ישרים המקבילים לצירים הם מהצורות הבאות:
  - ישר המקביל לציר ה- $x$: $y=n$.
  - ישר המקביל לציר ה- $y$: $x=k$.

**5)** כתוב מהו $m$ ומהו $b$ במשוואות הישרים הבאות:

א. $y=3x-2$

ב. $y=x+6$

ג. $y=\frac{x}{3}+\frac{2}{5}$

ד. $y=\frac{x-3}{2}$

ה. $y=3+2(x-1)$

ו. $3y-2x+1=0$

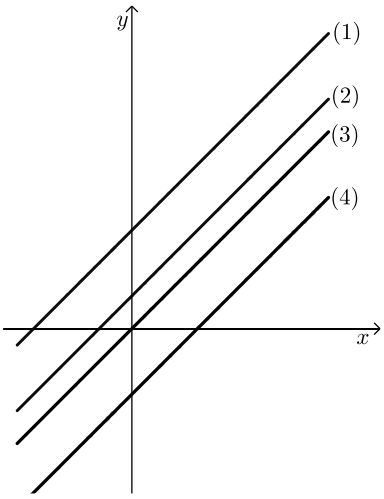
**6)** כתוב את משוואות הישרים הבאות:

א. ישר בעל שיפוע $m=3$ אשר חותך את ציר ה- $y$ בנקודה שבה $y=-1$.

ב. ישר בעל שיפוע 5- שפוגש את ציר ה- $y$ כאשר $y=6$.

ג. ישר קבוע שחותך את ציר ה- $y$ ב-4.

**7)** התאם בין הגרפים למשוואות הישרים:




א. $y=x+3$

ב. $y=x+1$

ג. $y=x$

ד. $y=x-2$

## מציאת משוואת ישר – סיכום

### שיפוע ישר לפי שתי נקודות

שיפוע ישר העובר דרך שתי נקודות $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$ יחושב: $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

(כאשר $\Delta x\neq 0$).

### משוואת ישר

ניתן למצוא משוואת ישר מהצורה $y=mx+b$ כאשר נתונות שתי נקודות הנמצאות עליו לפי השלבים הבאים:

- מציאת הפרמטר $m$ (שיפוע הישר) לפי: $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.
- מציאת הפרמטר $b$ (האיבר החופשי) ע"י הצבת $m$ ואחת מן הנקודות הנתונות במשוואת הישר.

לחילופין ניתן לבצע את שתי הפעולות יחד לפי הנוסחה: $y-y_1=m(x-x_1)$.

### חישוב שיפוע בין שתי נקודות

**8)** חשב את השיפוע של ישר העובר דרך הזוגות הבאים:

א. $(0,4)$ , $(8,0)$

ב. $(0,0)$ , $(3,-4)$

ג. $(1,8)$ , $(7,-9)$

ד. $\left(\frac{2}{3},2\right)$ , $\left(1\frac{1}{3},5\right)$

### מציאת משוואת ישר באמצעות נקודה ושיפוע

**9)** מצא את משוואת הישרים הבאות:

א. שיפועו 3 והוא עובר דרך הנקודה $(2,8)$.

ב. שיפועו 0.5- והוא עובר דרך הנקודה $(0,-7)$.

ג. שיפועו 0 והוא עובר דרך הנקודה $(-1,-3)$.

ד. שיפועו $-\frac{5}{8}$ והוא עובר דרך הנקודה $(-8,2)$.

ה. שיפועו 1 והוא עובר דרך ראשית הצירים.

**10)** מצא משוואת ישר המקביל לישר $y=3x-1$ וחותך את ציר ה-$y$ בנקודה $(0,4)$.

**11)** מצא משוואת ישר המקביל לישר $y=-4x+9$ ועובר דרך הנקודה $(-5,7)$.

**12)** מצא משוואת ישר המקביל לישר $5y-4x+9=0$ ועובר דרך ראשית הצירים.

### מציאת משוואת ישר באמצעות שתי נקודות

**13)** מצא את משוואות הישרים העוברים דרך הנקודות הבאות:

א. $(3,6)$ , $(1,8)$ ב. $(-4,-6)$ , $(0,6)$

**14)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודות $(2,-6)$ ו-$(5,3)$.

ב. מצא את משוואת הישר המקביל לישר שמצאת בסעיף הקודם ועובר דרך הנקודה $(-1,10)$.

### חיוביות ושליליות של קו ישר – סיכום

### חיתוך של פונקציה קווית עם הצירים

- כדי למצוא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה הקווית $y=mx+b$ עם ציר ה-$y$ יש להציב $x=0$ במשוואתה. מתקבל: $y=b$, כלומר: $(0,b)$ היא נקודת החיתוך של הפונקציה הקווית עם ציר ה-$y$.
- כדי למצוא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה הקווית עם ציר ה-$x$ יש להציב $y=0$. זו היא נקודת האפס של של הפונקציה.

### חיתוך בין פונקציות קוויות

כדי למצוא את נקודת החיתוך בין שתי פונקציות קוויות $f(x)$ ו-$g(x)$ יש להשוות את משוואותיהם: $f(x)=g(x)$ ולהציב את ערך ה-$x$ המתקבל כפתרון באחת המשוואות כדי לקבל את ערך ה-$y$ של נקודת החיתוך.

### תחומי חיוביות ושליליות של פונקציה

- תחום החיוביות של פונקציה הוא אוסף כל ערכי ה-$x$ המקיימים: $f(x)>0$.
- תחום השליליות של פונקציה הוא אוסף כל ערכי ה-$x$ המקיימים: $f(x)<0$.

ניתן למצוא תחומי חיוביות ושליליות ע"י ידיעת נקודת האפס של הפונקציה תחילה.

**15)** מצא את נקודות החיתוך של כל ישר עם הצירים:

א. $y=2x+5$

ב. $y=3x-1$

**16)** נתונה הפונקציה: $f(x)=3x-4$.

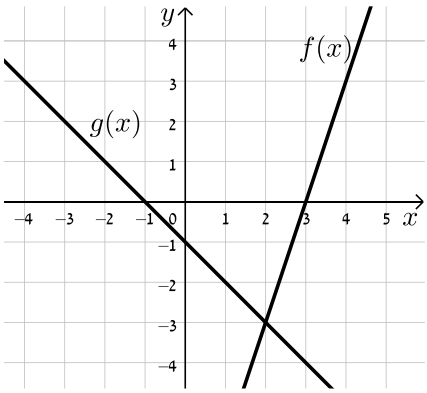
א. מצא את הנקודה שבה: $f(x)=0$.

ב. מצא את התחום שבו $f(x)>0$ ואת התחום שבו $f(x)<0$.

ג. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$y$.

ד. סרטט את הפונקציה במערכת צירים והראה את התחומים שמצאת.

**17)** לפניך שני גרפים של פונקציות קוויות.
(הרווח בין השנתות מתאר יחידה אחת).




א. מהן נקודות האפס של כל פונקציה?

ב. מהם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$?

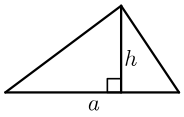
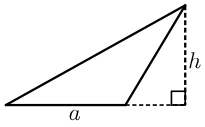
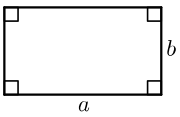
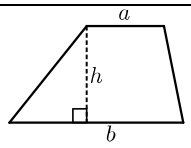
ג. מהם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$?

ד. מהי נקודת החיתוך של הפונקציות?

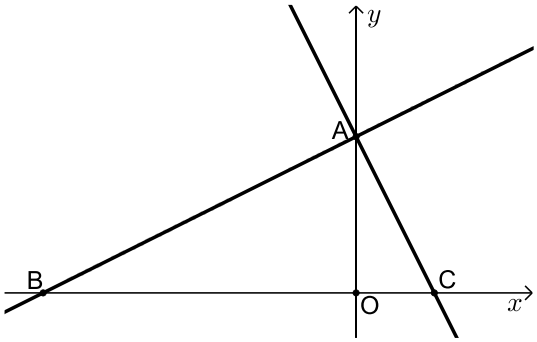
ה. מהו התחום בו $f(x)>g(x)$ ומהו התחום בו $f(x)<g(x)$.

## חישובי שטחים עם הפונקציה הקווית – סיכום

### שטחים של משולשים ומרובעים

| שם הצורה | איור | אופן החישוב |
|---|---|---|
| משולש |   | $S=\frac{a\cdot h}{2}$ |
| משולש קהה זווית |   | $S=\frac{a\cdot h}{2}$ |
| מלבן |   | $S=a\cdot b$ |
| טרפז |   | $S=\frac{(a+b)h}{2}$ |

**18)** בסרטוט שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=\frac{1}{2}x+4$ ו- $g(x)=-2x+4$.



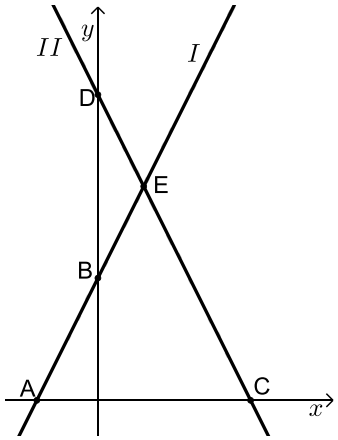

א. מצא את שיעורי נקודת המפגש של שתי הפונקציות (הנקודה A).

ב. מצא את נקודות החיתוך של כל פונקציה עם ציר ה-$x$ (הנקודות B ו-C).

ג. מצא את אורך הקטע BC ואת אורך הקטע AO.

ד. חשב את $S_{\Delta ABC}$.

**19)** נתונים הישרים: $y=2x+4$ ו- $y=-2x+10$ המתוארים באיור הבא:

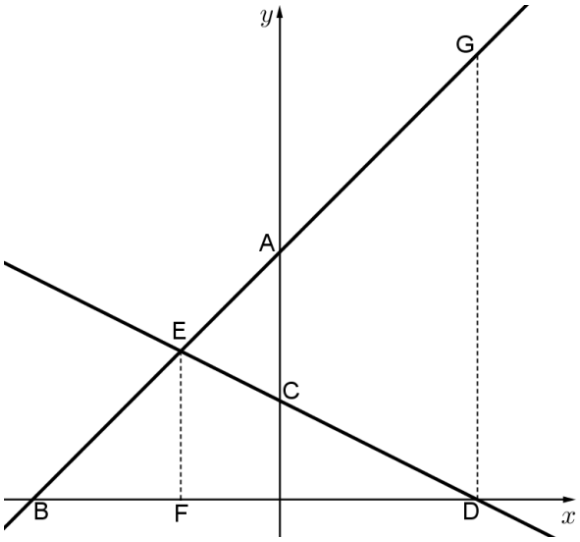



א. התאם לכל משוואה את הישר המתאים ונמק.

ב. מצא את שיעורי הנקודות A , B , C , D , E.

ג. מצא את שטחי המשולשים ACE ו-BDE.

**20)** בסרטוט שלפניך מתוארים הישרים AE ו-DE.




משוואת הישר DE היא $y=-\frac{1}{2}x+2$.

נתון כי: 3 יחידות אורך = EF

(מקביל לציר ה-$y$) וכן: $A(0,5)$.

א. חשב את שיעורי הנקודה E.

ב. מצא את משוואת הישר AE.

ג. חשב את שיעורי הנקודות B ו-D.

ד. נתון כי DG מקביל לציר ה-$y$.

חשב את שטח הטרפז EFDG.

## תשובות סופיות

**1)** א. 6 ש"ח  ב. 6 ק"ג  ג. 2:1  ד. $y=2x$

**2)** i. א. $m=1$  ב. $y=x$  ii. א. $m=2$  ב. $y=2x$

**3)** i. א. $m=-2$  ב. $y=-2x$  ii. א. $m=-\frac{1}{2}$  ב. $y=-\frac{1}{2}x$

**4)** $m_{(1)}=-\frac{2}{3}$ , $m_{(2)}=-2$ , $m_{(3)}=-4$ , $m_{(4)}=4$ , $m_{(5)}=2$ , $m_{(6)}=1.2$

**5)** א. $m=3,b=-2$  ב. $m=1,b=6$  ג. $m=\frac{1}{3},b=\frac{2}{5}$

ד. $m=\frac{1}{2},b=-\frac{3}{2}$  ה. $m=2,b=1$  ו. $m=\frac{2}{3},b=-\frac{1}{3}$

**6)** א. $y=3x-1$  ב. $y=-5x+6$  ג. $y=4$ .

**7)** א. (1)  ב. (2)  ג. (3)  ד. (4)

**8)** ג. -0.5  ד. $-\frac{4}{3}$  ה. $-2\frac{5}{6}$  ו. 4.5

**9)** א. $y=3x+2$  ב. $y=-\frac{1}{2}x-7$  ג. $y=-3$  ד. $y=-\frac{5}{8}x-3$

ה. $y=x$

**10)** $y=3x+4$

**11)** $y=-4x-13$

**12)** $y=\frac{4}{5}x$

**13)** א. $y=-x+9$  ב. $y=3x+6$

**14)** א. $y=3x-12$  ב. $y=3x+13$

**15)** א. $(-2.5,0)$ , $(0,5)$  ב. $\left(\frac{1}{3},0\right)$ , $(0,-1)$

**16)** א. $\left(\frac{4}{3},0\right)$  ב. $f(x)<0:\ x<\frac{4}{3}$ , $f(x)>0:\ x>\frac{4}{3}$

ג. $(0,-4)$  ד. לאיור מלא עיין בסרטון.

**17)** א. $g(x):\ (-1,0)$ ; $f(x):\ (3,0)$

ב. חיובית: $x>3$, שלילית: $x<3$  ג. חיובית: $x<-1$, שלילית: $x>-1$ .

ד. $(2,-3)$  ה. עבור: $f(x)>g(x)$ , $x>2$ ו-עבור: $f(x)<g(x)$ $x<2$ .

**18)** א. $(0,4)$ ב. $B(-8,0)$ , $C(2,0)$  ג. $BC=10$ , $AO=4$  ה. 20 יח"ש.

**19)** א. $I: y=2x+4$ , $II: y=-2x+10$

ב. $A(-2,0)$ , $B(0,4)$ , $C(5,0)$ , $D(0,10)$ , $E(1.5,7)$

ג. $S_{ACE}=$ 24.5 יח"ש , $S_{BDE}=$ 4.5 יח"ש .

**20)** א. $E(-2,3)$ ב. $y=x+5$ ג. $B(-5,0)$ , $D(4,0)$

ד. 36 יחידות שטח.

# הפונקציה הריבועית

## סיכום כללי

**ניתן להציג את משוואת הפונקציה הריבועית במספר צורות:**

הצגה סטנדרטית: $y=ax^2+bx+c$ (כאשר: $a\ ,\ b\ ,\ c$ הם פרמטרים ו-$a\neq 0$).

הצגה קודקודית: $y=a\left(x-p\right)^2+k$ (כאשר: $a\ ,\ p\ ,\ k$ הם פרמטרים ו-$a\neq 0$).

הצגה כמכפלה: $y=a\left(x-m\right)\left(x-n\right)$ (כאשר: $a\ ,\ m\ ,\ n$ הם פרמטרים ו-$a\neq 0$).

**הערה**

הצגה כמכפלה אפשרית רק כאשר יש לפחות נקודת אפס אחת לגרף הפרבולה.

## שאלות

**1)** כתוב פונקציה ריבועית המתאימה לערכי המקדמים הבאים:

א. $a=1\ ,\ b=0\ ,\ c=-4$

ב. $a=-1\ ,\ b=2\ ,\ c=5$

ג. $a=b=3\ ,\ c=-5$

ד. $a=\frac{1}{2}\ ,\ b=\frac{1}{3}\ ,\ c=0$

ה. $a=-\frac{1}{5}\ ,\ b=0\ ,\ c=\frac{1}{20}$

ו. $a=7\ ,\ b=\frac{1}{4}\ ,\ c=-1$

**2)** נתונה הפונקציה: $y=2x^2+bx-3$.

ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $\left(1,-1\right)$.

א. מצא את ערך המקדם $b$.

ב. מצא את ציר הסימטריה של הפרבולה ואת שיעורי נקודת הקדקוד שלה.

ג. תאר אלו פעולות הזזה/מתיחה נעשו על גרף הפונקציה $y=x^2$ לקבלת גרף הפונקציה הנתונה.

## סרטוט של גרף הפונקציה הריבועית הכללית – סיכום

בפונקציה הריבועית הנתונה בהצגתה הסטנדרטית: $y=ax^2+bx+c$ , $(a\neq 0)$:

- הפרמטר $a$ קובע האם הפרבולה היא ישרה או הפוכה וכן את מידת המתיחה שלה.
- הפרמטר $c$ קובע את שיעור ה-$y$ של נקודת החיתוך של גרף הפרבולה עם ציר ה-$y$.
- נוסחה למציאת ציר הסימטריה: $x=-\frac{b}{2a}$ .
- שיעורי נקודת הקדקוד עבור פונקציה הנתונה בהצגה סטנדרטית הם: $\left(-\frac{b}{2a},c-\frac{b^2}{4a}\right)$.

**3)** עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

i. חשב את שיעורי נקודת הקדקוד של הפרבולה המתאימה.

ii. רשום את משוואת ציר הסימטריה של הפרבולה המתאימה.

iii. סרטט סרטוט סכמתי (מקורב) של הפרבולה המתאימה.

א. $y=-2x^2+10$

ב. $y=-x^2+3x$

ג. $y=3x^2-6x+7$

ד. $y=-8x^2-4x+1$

ה. $y=4x^2+20x+25$

## מציאת נקודות האפס של פונקציה ריבועית עם a כללי – סיכום

### פונקציות ריבועיות חלקיות

- פונקציה חסרת $b$ היא מהצורה: $y=ax^2+c$ , $(a\neq 0)$ .

אם $a$ ו-$c$ אם שוני סימן אז לפונקציה שתי נקודות אפס ששיעוריהן: $\left(\pm\sqrt{\frac{-c}{a}},0\right)$.

- פונקציה חסרת $c$ היא מהצורה: $y=ax^2+bx$ , $(a\neq 0)$ .

לפונקציה שתי נקודות אפס ששיעוריהן: $\left(-\frac{b}{a},0\right)$ , $(0,0)$.

**שיטות לפתרון משוואה ריבועית**

- פירוק טרינום (במידה וישנם שני שורשים או שורש כפול).
- השלמה לריבוע.
- נוסחת השורשים: $\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$

**שאלות עם פונקציות**

**4)** מצא את נקודות החיתוך עם ציר ה-$x$ של הפונקציות הריבועיות הבאות:

א. $y=x^2+4x-5$ ב. $y=x^2+6x+10$

**5)** בכל אחד מהמקרים שלפניך נתון ציר הסימטריה של פרבולה ושיעורי אחת מנקודות האפס שלה. מצא את שיעורי נקודת האפס הנוספת.

א. $x=4\ ;\ (5,0)$ ב. $x=-1\ ;\ (7,0)$

**6)** נתונה הפונקציה: $y=x^2-2x-15$.

א. מהם שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפרבולה עם ציר ה-$y$?

ב. רשום פונקציה ריבועית נוספת בעלת אותה נקודת חיתוך עם ציר ה-$y$.

ג. מהם שיעורי נקודות האפס של הפרבולה?

ד. כמה נקודות חיתוך יש לפרבולה עם הישרים הבאים:

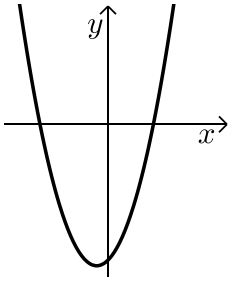
i. $y=-15$.

ii. $y=15$.

iii. $y=-25$.

ה. רשום פונקציה ריבועית נוספת שיש לה את אותן נקודות האפס כמו לפונקציה הנתונה.

**7)** לפניך הפרבולה: $y=x^2+x-6$.

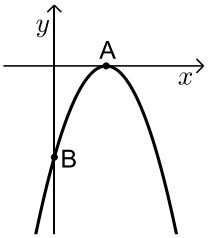



א. חשב את נקודות החיתוך של הפרבולה עם הצירים.

ב. חשב את המרחק של נקודת החיתוך של הפרבולה עם ציר ה-$y$ מראשית הצירים.

ג. חשב את המרחק שבין שתי נקודות החיתוך עם ציר ה-$x$.

**8)** לפניך סרטוט של גרף הפונקציה: $y=-x^2+4x-4$ .

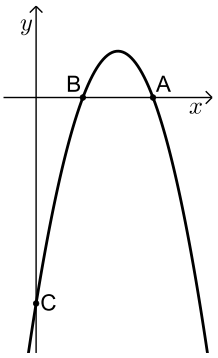



א. מצא את נקודות החיתוך של הגרף עם הצירים.

ב. מצא את מרחק הנקודה A (ראה ציור) מראשית הצירים.

ג. מצא את מרחק הנקודה B מראשית הצירים.

**9)** לפניך סרטוט של גרף הפונקציה: $y=-x^2+7x-10$ .




א. חשב את שיעורי נקודות החיתוך של
גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

ב. חשב את שיעורי נקודת החיתוך של
גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .

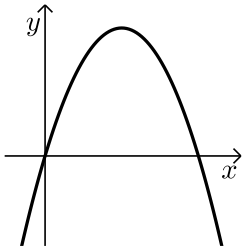
ג. מהו המרחק בין הנקודה C לראשית הצירים?

ד. מצא את המרחק בין נקודה A לנקודה B (ראה סרטוט).

ה. מצא את המרחק בין נקודה A לראשית הצירים.

**10)** מצא את תחומי העלייה והירידה של הפרבולה שמשוואתה: $y=-x^2+4x$ .

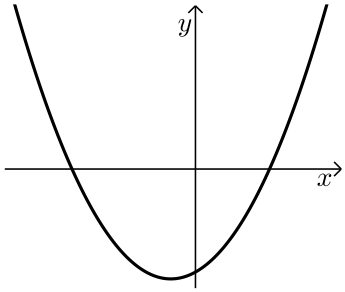
**11)** נתונה הפרבולה: $y=-2x^2+12x$ .




א. מצא את שיעורי קדקוד הפרבולה.

ב. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפרבולה.

**12)** נתונה הפרבולה: $y=x^2+2x-15$ .




א. לאלו ערכים של $x$ הפונקציה חיובית?

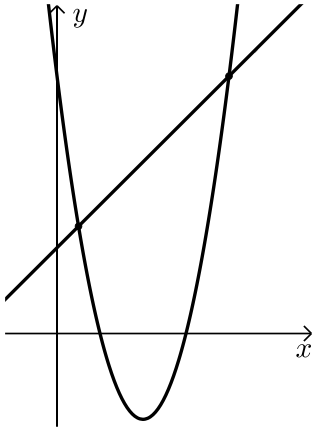
ב. לאלו ערכים של $x$ הפונקציה שלילית?

**חיתוך בין ישר ופרבולה – סיכום**

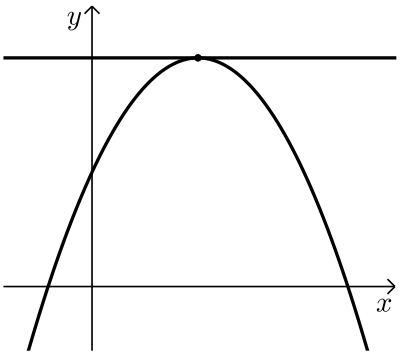
כדי למצוא חיתוך בין ישר $y=mx+b$ ופרבולה: $f(x)=ax^2+bx+c$ אנו נשווה בין משוואותיהם ונפתור עבור $x$ . לאחר מכן נמצא את שיעורי ה- $y$ ע"י הצבה באחת המשוואות (של הישר או הפרבולה). יתכנו 3 מקרים:

- הישר חותך את הפרבולה בשתי נקודות שונות.
- הישר חותך (משיק) לגרף הפרבולה בנקודה אחת בלבד.
- הישר והפרבולה לא חותכים זה את זה כלל.

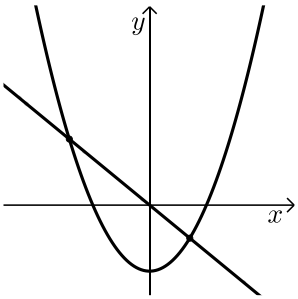
**13)** לפניך הגרפים של שתי הפונקציות:
$f(x)=x^2-8x+12$ ו- $g(x)=x+4$
מצא את נקודות החיתוך שבין שני הגרפים.




**14)** מצא את שיעורי הנקודה המשותפת
לגרף הפרבולה $f(x)=-x^2+10x+25$
ו- $y=50$.

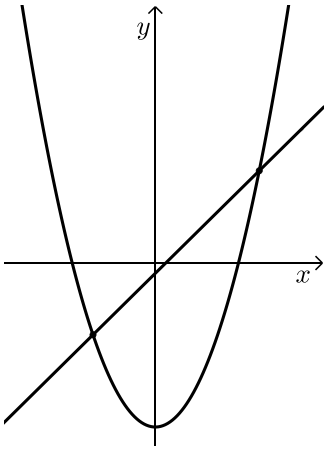



**15)** נתונים פרבולה $y=x^2-8$ וישר $y=-2x$.




א. מצא את נקודות החיתוך בין גרף הפרבולה והישר.
ב. מצא נקודת החיתוך של הפרבולה עם ציר ה- $y$
ואת נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- $y$.
ג. מצא את המרחק שבין נקודת החיתוך של גרף הפרבולה
עם ציר ה- $y$ לבין נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- $y$.
ד. מצא את קדקוד הפרבולה.
ה. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפרבולה.

**16)** נתונים פרבולה וישר שהמשוואות שלהם: $y=x^2-16$ ו- $y=2x-1$.

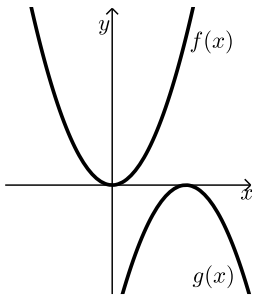



א. מצא את נקודות החיתוך שבין הישר והפרבולה.
ב. תן דוגמא ל- $x$ עבורו הישר נמצא מעל לפרבולה.
ג. תן דוגמא ל- $x$ עבורו הפרבולה נמצאת מעל לישר.
ד. תן דוגמא לנקודה על הפרבולה שערך ה- $y$ שלה חיובי.
ה. תן דוגמא לנקודה על הפרבולה שערך ה- $y$ שלה שלילי.
ו. מצא את נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- $x$.
ז. מצא את תחום השליליות של הישר.

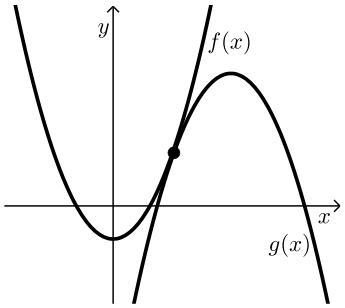
### חיתוך בין שתי פרבולות – סיכום

הגרפים של שתי פרבולות $f(x)$ ו-$g(x)$ יכולים להיות באחד משלושה מצבים:

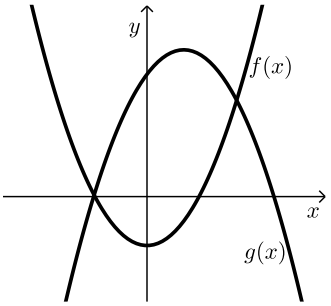
**אין חיתוכים**




**נקודת חיתוך (השקה) אחת**




**שתי נקודות חיתוך**



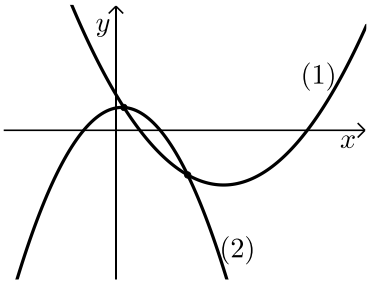

כדי למצוא את נקודות החיתוך עצמן נשווה בין משוואותיהם: $f(x)=g(x)$.
לפי מספר הפתרונות של המשוואה המתקבלת נוכל להסיק באיזה מקרה מדובר.

**17)** מצא את נקודות החיתוך בין זוגות הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^2+4x+5$ ו- $g(x)=-2x^2+x+11$.

ב. $f(x)=x^2-3x+6$ ו- $g(x)=-x^2+5x-2$.

**18)** לפניך סרטוט של שתי פונקציות ריבועיות:
$f(x)=x^2-9x+8$ ו-$g(x)=-2x^2+x+5$.




א. התאם לכל גרף (1) ו-(2) את הפונקציה המתאימה לו.

ב. מה הם תחומי החיוביות והשליליות של גרף (1)?

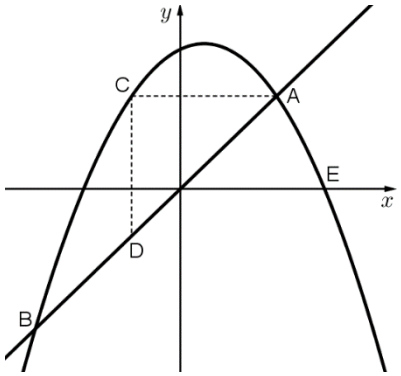
ג. מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

### שאלות מסכמות שונות

### הערה כללית

בנושא זה ישנן שאלות מסכמות העוסקות בכל הנושאים שנלמדו בפרקים על הישר, הפרבולה וחישובי שטחים של צורות הנדסיות. שאלות אלו ברמה הגבוהה משאלות בגרות ומטרתן היא תרגול העשרה של כל החומר הנלמד בפונקציות וגרפים.

**19)** בסרטוט שלפניך מתוארים
הישר: $y=2x$ והפרבולה: $y=-x^2+x+6$.

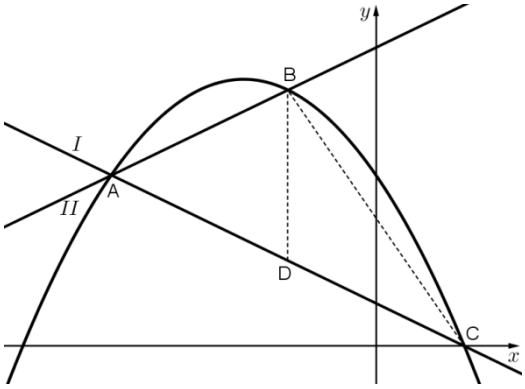



א. חשב את שיעורי נקודות החיתוך
של הישר והפרבולה, A ו-B.

ב. הישר AC מקביל לציר ה-$x$
והישר CD מקביל לציר ה-$y$.
חשב את שטח המשולש ACD.

ג. מצא את משוואת הישר המקביל
לישר הנתון ועובר דרך הנקודה E, נקודת החיתוך של גרף הפרבולה עם
ציר ה-$x$ הנמצאת מימין לראשית הצירים.

**20)** בסרטוט שלפניך מתוארים הגרפים
של שני ישרים $I$ ו-$II$.
ושל הפרבולה $y=-\frac{1}{2}x^2-3x+8$.




שני הישרים והפרבולה נחתכים בנקודה A.
משוואת הישר $II$ היא: $y=x+14$.

ד. חשב את שיעורי הנקודה A.

ה. חשב את שיעורי הנקודה C,
נקודת החיתוך של גרף הפרבולה עם
ציר ה-$x$ הנמצאת מימין לראשית הצירים.

ו. מצא את משוואת הישר $I$.

ז. חשב את שיעורי הנקודה B.

ח. הקטע BD מקביל לציר ה-$y$ וחותך את ישר $I$ בנקודה D.
חשב את שטח המשולש BCD.

**21)** נתונות שתי הפרבולות: $y=x^2-x+6$ ו- $y=ax^2-6x-8$, $a\neq 0$ פרמטר.

ט. לשתי הפרבולות נקודת חיתוך משותפת: $(-2,12)$.
מצא את ערך הפרמטר $a$.

י. מצא את נקודת החיתוך שנייה של שתי הפרבולות.

יא. סרטט סקיצה של גרף הפרבולה: $y=x^2-x+6$.
(היעזר בנקודות החיתוך עם הצירים ובקדקוד הפרבולה).

## תשובות סופיות

**1)** א. $y=x^2-4$ ב. $y=-x^2+2x+5$

ג. $y=3x^2+3x-5$ ד. $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x$

ה. $y=-\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{20}$ ו. $y=7x^2+\frac{1}{4}x-1$.

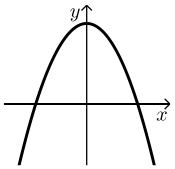
**2)** א. $b=0$ ב. $x=0$ , $(0,-3)$ ג. כיווץ פי 2 והזזה 3 יחידות למטה.

**3)** א. $x=0$ ,$(0,10)$ ב. $x=1\frac{1}{2}$ ,$\left(1\frac{1}{2},2\frac{1}{4}\right)$ ג. $x=1$ ,$(1,4)$

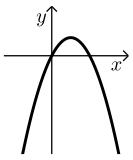
ד. $x=-\frac{1}{4}$ ,$\left(-\frac{1}{4},1\frac{1}{2}\right)$ ה. $x=-2.5$ ,$(-2.5,0)$

איורים לסעיפים:

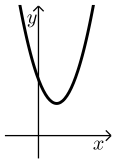
א.



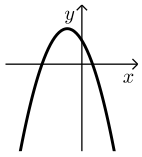

ב.



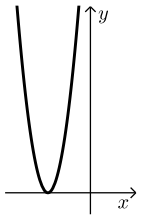

ג.




ד.




ה.




**4)** א. $(-5,0)$ , $(1,0)$ ב. אין חיתוכים.

**5)** א. $(3,0)$ ב. $(-9,0)$ ג. $(8,0)$ ד. $\left(-15\frac{1}{2},0\right)$.

**6)** א. $(0,-15)$ ב. $y=x^2-15$ ג. $(-3,0)$ , $(5,0)$

ד. i. שתיים. ii. שתיים. iii. אפס. ה. $y=2x^2-4x-30$ .

**7)** א. $(2,0)$ , $(-3,0)$ ב. 6 יחידות. ג. 5 יחידות.

**8)** א. $(0,-4)$ , $(2,0)$ ב. 2 יחידות. ג. 4 יחידות.

**9)** א. $(5,0)$ , $(2,0)$ ב. $(0,-10)$ ג. 10 יחידות. ד. 3 יחידות.

ה. 5 יחידות.

**10)** עולה: $x<2$ , יורדת: $x>2$ .

**11)** א. $(3,18)$ ב. עולה: $x<3$, יורדת: $x>3$.

**12)** א. $x>3$, $x<-5$ ב. $-5<x<3$.

**13)** $(1,5)$, $(8,12)$

**14)** $(5,50)$.

**15)** א. $(-4,8)$, $(2,-4)$ ב. $(0,-8)$, $(0,0)$ ג. 8 יחידות.

ד. $(0,-8)$ ה. עולה: $x>0$, יורדת: $x<0$.

**16)** א. $(-3,-7)$, $(5,9)$ ב. כל $x$ הגדול מ-5 או קטן מ-3-.

ג. כל $x$ שבין 3- ל-5. ד. כל נקודה שערך ה-$x$ שלה גדול מ-4 או קטן מ-4-.

ה. כל נקודה שערך ה-$x$ שלה בין 4- ל-4. ו. $(0.5,0)$ ז. $x<0.5$

**17)** א. $(1,10)$, $(-2,1)$ ב. $(2,4)$

**18)** א. $(1)\to f(x)$, $(2)\to g(x)$

ב. חיובית: $x<1$, $x>8$, שלילית: $1<x<8$. ג. $\left(\frac{1}{3},5\frac{1}{9}\right)$, $(3,-10)$.

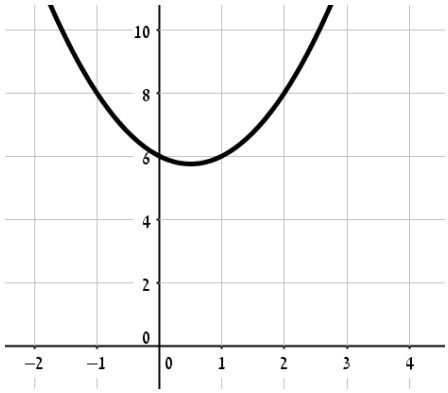
**19)** א. $A(2,4)$, $B(-3,-6)$ ב. 4.5 יחידות שטח. ג. $y=2x-6$.

**20)** א. $A(-6,8)$ ב. $C(2,0)$ ג. $y=-x+2$

ד. $B(-2,12)$ ה. 16 יחידות שטח.

**21)** א. $a=2$ ב. $(7,48)$.

ג. להלן סקיצה:



# סדנת ריענון במתמטיקה למדעי החברה

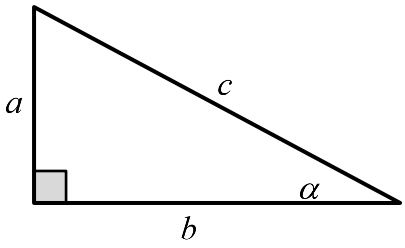
## פרק 7 - מבוא לטריגונומטריה

### תוכן העניינים

1. משולש ישר זווית ..... 95

# מבוא לטריגונומטריה

## הגדרות הפונקציות הטריגונומטריות




$$\sin\alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{b}{c}$$

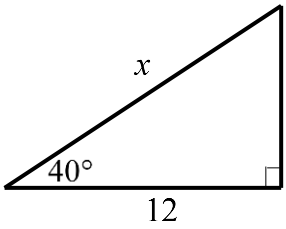
$$\tan\alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{הניצב שליד הזווית}} = \frac{a}{b}$$

משפט פיתגורס: $a^2 + b^2 = c^2$

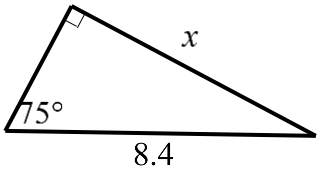
## שאלות

**1)** מצא את ערכו של $\alpha / x$ במשולשים ישרי הזווית הבאים:

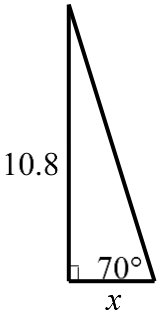
א.



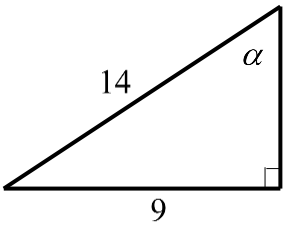

ב.



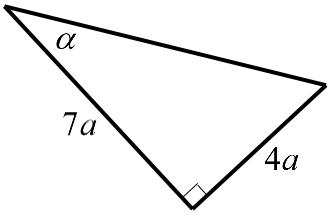

ג.




ד.




ה.

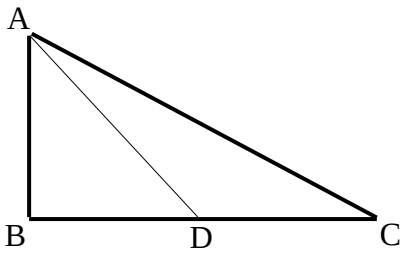



**2)** המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle B = 90°)$.

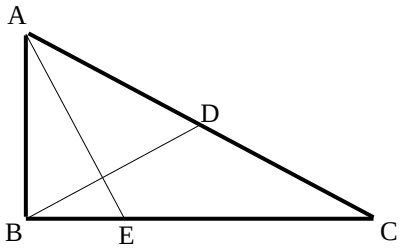
AD הוא התיכון לניצב BC.

נתון: $\sphericalangle C = 28°$ , 6 ס"מ = AB.

מצא את AD ואת $\sphericalangle BAD$.

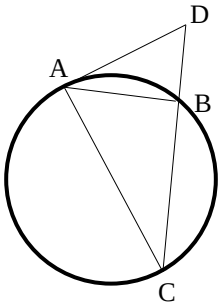


**3)** המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle B = 90°)$. BD הוא התיכון ליתר ו-AE הוא חוצה הזווית $\sphericalangle A$.
נתון: $BD = 5.6$ ס"מ , $BC = 8$ ס"מ.
מצא את BE ואת $\sphericalangle BAE$.




**4)** מצא את זוויותיו של מעוין שאורכי אלכסוניו 24 ס"מ ו-18 ס"מ.

**5)** המשולש ABC חסום במעגל כך שהצלע AC היא קוטר המעגל.
המשיק למעגל בנקודה A והמשך הצלע CB נפגשים בנקודה D.
נתון: $\sphericalangle DAB = 32°$ , $BD = 4$ ס"מ.
מצא את אורכו של רדיוס המעגל.




**6)** במשולש שווה שוקיים שבו השוק ארוכה ב- 4 ס"מ מהבסיס נתון כי זווית הראש היא $34.92°$. מצא את שטח המשולש.

## תשובות סופיות

**1)** א. $x = 15.665$ ב. $x = 8.114$ ג. $x = 3.931$ ד. $\alpha = 40.005°$ ה. $\alpha = 29.745°$

**2)** $\sphericalangle BAD = 43.24°$ , $AD = 8.236$ ס"מ.

**3)** $\sphericalangle BAE = 22.792°$ , $BE = 3.294$ ס"מ.

**4)** $106.26°$ , $106.26°$ , $73.74°$ , $73.74°$

**5)** $R = 6.04$ ס"מ.

**6)** $S = 28.618$ סמ"ר.

# סדנת ריענון במתמטיקה למדעי החברה

## פרק 8 - מבוא לחשבון דיפרנציאלי

### תוכן העניינים

1. הקדמה כללית ..... (ללא ספר)
2. גזירת פונקציות ..... 97
3. מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה ..... 102

# גזירת פונקציות

## שאלות

**1)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3$ ב. $f(x)=x^7$ ג. $f(x)=x^2$

ד. $f(x)=x$ ה. $f(x)=x^{-3}$ ו. $f(x)=x^{-1}$

ז. $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ ח. $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ ט. $f(x)=x^{\frac{3}{4}}$

**2)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=2x^3$ ב. $f(x)=3x^7$ ג. $f(x)=\frac{1}{2}x^4$

ד. $f(x)=\frac{x^6}{7}$ ה. $f(x)=8x$ ו. $f(x)=3x^{-2}$

ז. $f(x)=\frac{4}{x}$ ח. $f(x)=6x^{\frac{1}{2}}$ ט. $f(x)=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$

**3)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=12$ ב. $f(x)=\frac{7}{8}$

**4)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3+2x^2-3x+5$ ב. $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{x^3}{6}+\frac{3x}{4}-\frac{2}{5}$

ג. $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x^3$

**5)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x-2)^3$ ב. $f(x)=(x^3+6)^5$ ג. $f(x)=3(x-x^2)^2$

ד. $f(x)=\frac{(5-x)^3}{4}$ ה. $f(x)=\frac{2(x+1)^4}{3}$

**6)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3}{x}$ ב. $f(x)=-\frac{2}{x}$ ג. $f(x)=\frac{1}{x^2}$

ד. $f(x)=\frac{3}{x^3}$ ה. $f(x)=\frac{1}{x^2-3x}$ ו. $f(x)=\frac{2}{3-x}$

ז. $f(x)=\frac{6}{x+5}$

**7)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x+1)(x-3)$ ב. $f(x)=(5x+1)^3(x-3)$

ג. $f(x)=x^3(6-x)^4$ ד. $f(x)=x(3x+7)$

**8)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3x-1}{1+2x}$ ב. $f(x)=\frac{x^2+1}{5x-12}$ ג. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+3}$

ד. $f(x)=\frac{x^2+8}{x-1}$ ה. $f(x)=\frac{1}{x}$ ו. $f(x)=\frac{3}{x^3}$

**9)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x}$ ב. $f(x)=4\sqrt{x+1}$ ג. $f(x)=\sqrt{x^3-1}$

ד. $f(x)=(3x+1)\sqrt{x}$ ה. $f(x)=x^2\sqrt{x+3}$ ו. $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x}}$

**10)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{3x^2+1}$ ב. $f(x)=3x^2-8\sqrt{x}$

**11)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=ax^4-bx$ ב. $f(x)=\frac{ax^2}{3}-\frac{x}{b}+c$ ג. $f(x)=\frac{x-2a}{x-4a}$

ד. $f(x)=a\sqrt{bx^2+c}$

**12)** גזור פעמיים את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{x^2+2x+4}{2x}$

ב. $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{2x+10}$

## תשובות סופיות

**1)** א. $3x^2$ ב. $7x^6$ ג. $2x$ ד. 1. ה. $-\frac{3}{x^4}$
ו. $-\frac{1}{x^2}$ ז. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ח. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ט. $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$.

**2)** א. $6x^2$ ב. $21x^6$ ג. $2x^3$ ד. $\frac{6x^5}{7}$ ה. 8.
ו. $-\frac{6}{x^3}$ ז. $-\frac{4}{x^2}$ ח. $\frac{3}{\sqrt{x}}$ ט. $\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$.

**3)** א. 0 ב. 0.

**4)** א. $3x^2+4x-3$ ב. $x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{4}$ ג. $x-3x^2$ ד. $0.5x^3$

**5)** א. $15(5x-2)^2$ ב. $15x^2(x^3+6)^4$ ג. $6(x-x^2)(1-2x)$
ד. $-\frac{3}{4}(5-x)^2$ ה. $\frac{8(x+1)^3}{3}$.

**6)** א. $-\frac{3}{x^2}$ ב. $\frac{2}{x^2}$ ג. $-\frac{2}{x^3}$ ד. $-\frac{9}{x^4}$
ה. $-\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2}$ ו. $\frac{2}{(3-x)^2}$ ז. $-\frac{6}{(x+5)^2}$.

**7)** א. $10x-14$ ב. $(5x+1)^2(20x-44)$ ג. $x^2(6-x)^3(18-7x)$.
ד. $6x+7$

**8)** א. $\frac{5}{(1+2x)^2}$ ב. $\frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2}$ ג. $\frac{8x}{(x^2+3)^2}$ ד. $\frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$
ה. $-\frac{1}{x^2}$ ו. $-\frac{9}{x^4}$
ח. $\frac{2x(x^2+3)(x^2-7)}{(x^2-2)^2}$ ט. $-x$ י. $-\frac{1}{(x+2)^2}$.

**9)** א. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ב. $\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ ג. $\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$ ד. $\frac{9x+1}{2\sqrt{x}}$
ה. $\frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}}$ ו. $\frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$

**10)** א. $\frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}$ ב. $6x-\frac{4}{\sqrt{x}}$

**11)** א. $4ax^3-b$ ב. $\frac{2ax}{3}-\frac{1}{b}$ ג. $\frac{-2a}{(x-4a)^2}$ ד. $\frac{abx}{\sqrt{bx^2+c}}$.

**12)** א. $f'(x)=\frac{2x^2-8}{4x^2}$ , $f''(x)=\frac{4}{x^3}$

ב. $f'(x)=\frac{2x^2+20x-62}{(2x+10)^2}$ , $f''(x)=\frac{448}{(2x+10)^3}$

# מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה

## שאלות

**1)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=2(4x+3)^3$ בנקודה בה $x=-1$.

**2)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{8}{x+1}$ בנקודה בה $y=2$.

**3)** מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x)=x^2-2x-8$ בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- $x$.

**4)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=x^4-2x$ ששיפועו 2.

## תשובות סופיות

**1)** $y=24x+22$

**2)** $y=-\frac{1}{2}x+3\frac{1}{2}$

**3)** $y=6x-24$ , $y=-6x-12$

**4)** $y=2x-3$