

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה



תוכן העניינים

1. תיאוריה (הוכחות נבחרות) - ישן	(ללא ספר)
2. אי שוויונים	(ללא ספר)
3. הנדסה אנליטית - הישר	(ללא ספר)
4. חוקי החזקות והשורשים	1
5. משוואות ואי-שוויונים מעריכיים	(ללא ספר)
6. חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמיים	(ללא ספר)
7. טריגונומטריה במשולש ישר זווית	(ללא ספר)
8. זהויות טריגונומטריות	(ללא ספר)
9. משוואות טריגונומטריות	(ללא ספר)
10. טריגונומטריה במישור	(ללא ספר)
11. חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים	11
12. חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית פולינום	26
13. אינדוקציה מתמטית	39

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 1 - תיאוריה (הוכחות נבחרות) - ישן

תוכן העניינים

1. כללי (ללא ספר)

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 2 - אי שוויונים

תוכן העניינים

1. כללי (ללא ספר)

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 3 - הנדסה אנליטית - הישר

תוכן העניינים

1. אמצע קטע (ללא ספר)
2. חזרה כללית (ללא ספר)
3. ישרים מקבילים ומאונכים (ללא ספר)
4. מרחק בין שתי נקודות (ללא ספר)
5. משוואת הישר (ללא ספר)
6. שאלות עם מרובעים (ללא ספר)
7. שאלות עם משולשים (ללא ספר)

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 4 - חוקי החזקות והשורשים

תוכן העניינים

1. חוקי החזקות 1
2. חוקי השורשים 6
3. כתיבה מדעית של מספרים 10

חוקי החזקות:

סיכום כללי:

סיכום חוקי החזקות:

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad a^0 = 1 & 2. \quad a^1 = a & 3. \quad a^n \cdot a^m = a^{m+n} \\
 4. \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} & 5. \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m} & 6. \quad a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m \\
 7. \quad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m & 8. \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m} & 9. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m
 \end{array}$$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^n a^m = a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} \quad a^2 a^6 & \text{ב.} \quad t^3 t^5 t^7 & \text{ג.} \quad b^2 b^5 b^{12} b^3 \\
 \text{ד.} \quad \frac{k^8}{k^3} & \text{ה.} \quad \frac{n^{14}}{n^9} & \text{ו.} \quad \frac{c^6}{c^2} \\
 \text{ז.} \quad \frac{a^3 a^{19}}{a^{15}} & \text{ח.} \quad \frac{x^{30}}{x^9 x^{18}} & \text{ט.} \quad \frac{y^3 y^{15}}{y^4 y^{14}} \\
 \text{י.} \quad 3^2 3^3 3^4 & \text{יא.} \quad \frac{2^{16} 2^2}{2^{10}} & \text{יב.} \quad \frac{5^{20} 5^3 5^{16}}{5^4 5^{22} 5^8}
 \end{array}$$

(2) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^n a^m = a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} \quad \frac{3^4 2^7}{2^6 3^2} & \text{ב.} \quad \frac{a^{10} b^{13} a^3}{b^4 b^6 b^2 a^{12}} & \text{ג.} \quad \frac{x^8 y^5 y^9 x^2}{y^4 x^4}
 \end{array}$$

(3) לפי הביטוי הבא: $\frac{3^6 2^{17} 3^3 2^4}{3^4 2^3 2^2}$

מצא n כך שיתקיים שוויון בין הביטוי $243 \cdot 2^n$ לבין הביטוי הנתון.

(4) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים :

א. $\frac{2^3 \cdot 2^7}{2^4 \cdot 2^5}$	ב. $\frac{9^3 \cdot 27^2}{3^9 \cdot 81}$
ג. $\frac{10^9 \cdot 25^5 \cdot 8^{-1}}{40^3 \cdot 125^5}$	ד. $2^3 + 2^5$

(5) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוק : $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

א. $(a^2)^4$	ב. $(c^3)^{10}$	ג. $(x^3 x^{10})^2$
ד. $\frac{(b^2)^3}{b^2 b^3}$	ה. $\frac{n^7 n^8}{(n^3)^4}$	ו. $\frac{d^{20} (d^4)^2}{d^{12} (d^3)^2}$
ז. $\frac{2^5 (2^4)^2 2^3}{(2^3 2^2)^3}$	ח. $\frac{3^6 (3^3 3^2)^6}{3^{28} (3^2)^3}$	ט. $\frac{(8^3)^8 8^{11}}{(8^2 8)^3 8^8}$
י. $\frac{(2^4)^5 (3^6)^7 2^{20}}{3^{35} 2^{40}}$	יא. $\frac{(3^2)^6 5^{31} 3^7}{(5^2)^{10} 5^{11} 3^{18}}$	יב. $\frac{(3^2)^7 5^{10} (5^3)^2}{3^9 5^{16}}$

(6) לפניך הביטויים הבאים : $\left((3^2)^3\right)^4$ ו- $\left((3^6)^n\right)^2$. מצא n כך שיתקיים שוויון בין שני הביטויים.

(7) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים :

א. $\frac{2^3 3^5}{2^2 3^4}$	ב. $\frac{5^{20} 3^{14} 3^8}{3^{20} 5^{12} 5^8}$	ג. $\frac{7^{12} 2^2 2^6}{2^5 7^{10} 7}$
------------------------------	--	--

(8) פשט את הביטויים הבאים :

א. $3^2 9 \cdot 81^2$	ב. $64^2 2^3 8^2$	ג. $125 \cdot 25 \cdot 5^5$
ד. $\frac{2^4 \cdot 16^5}{8 \cdot 512}$	ה. $\frac{(4^2)^3 16}{64 \cdot 2^3}$	ו. $\frac{\left((3^4)^4\right)^5}{81^3 27^4 3^5}$

(9) פשט את הביטויים הבאים :

$$\begin{array}{ll}
 \text{א.} & \frac{(2a^2b)^3 \cdot (ab^{-3})^2}{4ab^{-2} \cdot \left(\frac{a^2}{b}\right)^4} \\
 \text{ב.} & \frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}} \\
 \text{ג.} & \frac{4^{b+3}}{4^{b+1} + 4^{b+2}} \\
 \text{ד.} & \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^{n+3} + x^{n+5}}{x^{n+2}}
 \end{array}$$

(10) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים : $(ab)^n = a^n b^n$ ו- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} & (a^2b)^3 & \text{ב.} & (m^4n^3)^5 & \text{ג.} & (x^{12}y^3)^3 \\
 \text{ד.} & \left(\frac{a^3}{b^2}\right)^4 & \text{ה.} & \left(\frac{i^4}{k^3}\right)^7 & \text{ו.} & \left(\frac{a^{14}b^4}{a^6ab^3}\right)^3 \\
 \text{ז.} & \left(\frac{x^3y^5y^2x^6}{y^4x^7}\right)^6 & \text{ח.} & \left(\frac{t^7r^{20}t^3}{r^2r^{12}t^8}\right)^2 & \text{ט.} & \left(\frac{(b^{12}c)^2c^{14}}{c(c^3b^5)^4b^3}\right)^2
 \end{array}$$

(11) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים :

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} & \left(\frac{3^9 2^6 2^2}{3^6 2^5 3^2}\right)^2 & \text{ב.} & \left(\frac{(5^4)^2 3^6}{3^5 5^7}\right)^2 & \text{ג.} & \left(\frac{7^3 \cdot 16 \cdot 128 \cdot 49}{(2^2 7)^5}\right)^3
 \end{array}$$

(12) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה שלילית :

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} & \frac{1}{4^6} & \text{ב.} & \frac{1}{5^3} & \text{ג.} & \frac{1}{2^{10}} \\
 \text{ד.} & \frac{1}{8} & \text{ה.} & \frac{1}{81} & \text{ו.} & \frac{1}{125}
 \end{array}$$

(13) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה חיובית וחשב את ערכם :

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} & \frac{1}{4^{-3}} & \text{ב.} & \frac{1}{3^{-2}} & \text{ג.} & \frac{1}{5^{-3}}
 \end{array}$$

(14) חשב את הביטויים הבאים :

ג. $5^6 \cdot 5^{-3} \cdot 5^{-2}$

ב. $2^{-8} \cdot 512 \cdot 2^2$

א. $3^2 \cdot 3^{-5} \cdot 3^7$

ו. $\frac{3^{-6} \cdot 7^7 \cdot 7^{-4}}{3^{-4} \cdot 3^{-3} \cdot 7^3}$

ה. $\frac{2^{-5} \cdot 5^3 \cdot 2^{14}}{5^2 \cdot 5^{-10} \cdot 5^8 \cdot 2^6}$

ד. $2^{14} \cdot 3^{-6} \cdot 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 2^{-30}$

(15) פשט את הביטויים הבאים לצורה ללא חזקות שליליות.

ג. $\frac{2^{-3} 5^4}{5^4 \cdot 125 \cdot (5^2 2)^{-3} \cdot 2^{-4}}$

ב. $\frac{(4^4)^{-4} 3^{-11}}{(3^{-2} 4^3)^{-6}}$

א. $\left(\frac{5^{-4}}{3^2}\right)^{-6}$

(16) פשט את הביטויים הבאים :

ג. $\frac{(m^{n+2})^3 \cdot m^{-4n-2}}{\frac{1}{m^{6n+2}} \cdot (m^3)^{n-2}}$

ב. $\frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}}$

א. $\frac{a^{n+2} \cdot a^{2-3n}}{(a^3)^{n+1}}$

תשובות סופיות:

- (1) א. a^8 ב. t^{15} ג. b^{22} ד. k^5 ה. n^5 ו. c^4
 ז. a^7 ח. x^3 ט. 1 י. 3^9 יא. 2^8 יב. 5^5
- (2) א. 18 ב. ab ג. $x^6 y^{10}$
- (3) $n=16$
- (4) א. 2 ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{5}{8}$ ד. 40
- (5) א. a^8 ב. c^{30} ג. x^{26} ד. b ה. n^3 ו. d^{10}
 ז. 2 ח. 9 ט. 8^{18} י. 3^7 יא. 3 יב. 3^5
- (6) $n=2$
- (7) א. 6 ב. 9 ג. 56
- (8) א. 3^{12} ב. 2^{21} ג. 5^{10} ד. 2^{12} ה. 2^7 ו. 3^{51}
- (9) א. $\frac{2b^3}{a}$ ב. k ג. $3\frac{1}{5}$ ד. $\frac{1}{x} + x$
- (10) א. $a^6 b^3$ ב. $m^{20} n^{15}$ ג. $x^{36} y^9$ ד. $\frac{a^{12}}{b^8}$ ה. $\frac{i^{28}}{k^{21}}$ ו. $a^{21} b^3$
- ז. $x^{12} y^{18}$ ח. $t^4 r^{12}$ ט. $b^2 c^6$
- (11) א. 576 ב. 225 ג. 8
- (12) א. 4^{-6} ב. 5^{-3} ג. 2^{-10} ד. 2^{-3} ה. 3^{-4} ו. 5^{-3}
- (13) א. 64 ב. 9 ג. 125
- (14) א. 81 ב. 8 ג. 5 ד. $\frac{1}{9}$ ה. 1000 ו. 3
- (15) א. $5^{24} \cdot 3^{12}$ ב. $\frac{4^2}{3^{23}}$ ג. $5^3 \cdot 2^4$
- (16) א. a^{1-5n} ב. k ג. m^{2n+12}

חוקי השורשים:

סיכום כללי:

סיכום חוקי השורשים:

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} & 2. \quad \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}} & 3. \quad \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}} \\
 4. \quad \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a \cdot b} & 5. \quad \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}} & 6. \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}
 \end{array}$$

שאלות:

17) הבא את הביטויים הבאים לצורה: $\sqrt[n]{a^m}$.

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } 3^{\frac{1}{4}} & \text{ב. } 2^{\frac{3}{5}} & \text{ג. } 6^{\frac{5}{6}} \\
 \text{ד. } -12^{\frac{2}{7}} & \text{ה. } -(-4)^{\frac{1}{3}} & \text{ו. } -(-3)^{\frac{3}{4}} \\
 \text{ז. } 5^{-\frac{1}{4}} & \text{ח. } 27^{-\frac{1}{3}} & \text{ט. } 64^{-\frac{5}{6}}
 \end{array}$$

18) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } \sqrt{49} & \text{ב. } -\sqrt{25} & \text{ג. } \sqrt[3]{8} \\
 \text{ד. } -\sqrt[7]{128} & \text{ה. } \sqrt[3]{(-2)^6} & \text{ו. } (\sqrt[5]{1024})^2 \\
 \text{ז. } (\sqrt[5]{-243})^3 & \text{ח. } \sqrt[4]{-16} & \text{ט. } \sqrt[4]{-25^2} \\
 \text{י. } \sqrt[4]{(-25)^2} & &
 \end{array}$$

(19) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

- | | | |
|---|---|---|
| א. $8^{\frac{2}{3}}$ | ב. $32^{\frac{3}{5}}$ | ג. $128^{-\frac{2}{7}}$ |
| ד. $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$ | ה. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2.5}$ | ו. $\left(\frac{64}{343}\right)^{-\frac{2}{3}}$ |
| ז. $81^{\frac{3}{4}} \cdot 64^{-\frac{1}{3}}$ | ח. $343^{-\frac{2}{3}} \cdot 100^{\frac{1}{2}}$ | ט. $16^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{-\frac{1}{3}} \cdot 4^{-\frac{1}{2}}$ |

(20) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$

(21) פשט את הביטויים הבאים:

- | | | |
|---|--|--|
| א. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ | ב. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$ | ג. $\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$ |
| ד. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ | ה. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$ | ו. $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$ |
| ז. $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$ | ח. $\frac{\sqrt[3]{500} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[4]{25^2} \cdot \sqrt[3]{4}}$ | ט. $\frac{\sqrt[3]{8^2} \sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{400} \sqrt{2}}$ |

(22) הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים:

- | | | |
|-------------------|----------------|--------------------------|
| א. $3\sqrt{2}$ | ב. $5\sqrt{3}$ | ג. $\frac{\sqrt{36}}{2}$ |
| ד. $2\sqrt[3]{3}$ | ה. $x\sqrt{x}$ | |

(23) הכנס את כל המקדמים בביטויים הבאים לתוך השורש:

- | | | |
|--------------------------|-----------------------------|---------------------------------|
| א. $2\sqrt{5}$ | ב. $4\sqrt[3]{2}$ | ג. $2\sqrt[5]{3}$ |
| ד. $\frac{\sqrt{24}}{2}$ | ה. $\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$ | ו. $\frac{3\sqrt[4]{5000}}{10}$ |
| ז. $-5\sqrt[3]{2}$ | ח. $-5\sqrt[4]{2}$ | ט. $-5\sqrt[5]{-2}$ |

(24) הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר :

- א. $\sqrt{12}$ ב. $\sqrt{48}$ ג. $\sqrt{63}$
- ד. $\sqrt[3]{54}$ ה. $\sqrt{x^5}$

(25) חלץ מן הביטויים הבאים את המקדם הגבוה ביותר ככל הניתן :

- א. $\sqrt{40}$ ב. $\sqrt{50}$ ג. $\sqrt{320}$
- ד. $\sqrt[3]{108}$ ה. $\sqrt[3]{56}$ ו. $\sqrt[5]{160}$
- ז. $\sqrt[4]{162}$ ח. $\sqrt[5]{972}$ ט. $\sqrt[6]{192}$

(26) פשט את הביטויים הבאים :

- א. $\sqrt{18} - \sqrt{8}$ ב. $\sqrt{7} + \sqrt{63}$ ג. $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128}$
- ד. $\sqrt[4]{405} - \sqrt[4]{80}$ ה. $\frac{20}{\sqrt{5}}$ ו. $\frac{\sqrt{8}}{2}$
- ז. $\frac{16}{\sqrt{2}}$ ח. $\frac{6}{\sqrt{3} + \sqrt{12}}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[5]{160} - \sqrt[5]{5}}$

(27) פשט את הביטויים הבאים :

- א. $3^{\frac{1}{4}} \cdot 9^{-2.5} \cdot 27^{\frac{3}{2}}$ ב. $2^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{\frac{1}{2}} \cdot 64^{-3}$ ג. $125^{\frac{1}{6}} \cdot 5^2 \cdot 5^{\frac{2}{3}}$
- ד. $\frac{27^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}$ ה. $\frac{49^{\frac{2}{5}} \cdot 7^{\frac{6}{5}}}{343^{\frac{1}{5}}}$ ו. $\frac{512^{\frac{1}{4}} \cdot 64^{\frac{3}{4}}}{128^{\frac{1}{8}} \cdot 2^{-2}}$

תשובות סופיות:

- (17) א. $\sqrt[4]{3}$ ב. $\sqrt[5]{2^3}$ ג. $\sqrt[6]{6^5}$ ד. $-\sqrt[7]{12^2}$ ה. $-\sqrt[3]{-4}$ ו. ϕ
- ז. $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ ח. $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$ או $\frac{1}{3}$ ט. $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}}$ או $\frac{1}{2^5}$
- (18) א. 7 ב. -5 ג. 2 ד. -2 ה. 4 ו. 16
- ז. -27 ח. ϕ ט. ϕ י. 5
- (19) א. 4 ב. $\frac{1}{8}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. 125 ה. $\frac{32}{243}$ ו. $\frac{49}{16}$
- ז. $\frac{27}{4}$ ח. $\frac{10}{49}$ ט. $\frac{1}{2}$
- (20) $\sqrt{2}$
- (21) א. 4 ב. 9 ג. 20 ד. 6 ה. 3 ו. 2
- ז. $\sqrt{2}$ ח. $\sqrt{5}$ ט. $\sqrt{2}$
- (22) א. $\sqrt{18}$ ב. $\sqrt{75}$ ג. $\sqrt{9}$ ד. $\sqrt[3]{24}$ ה. $\sqrt{x^3}$
- (23) א. $\sqrt{20}$ ב. $\sqrt[3]{128}$ ג. $\sqrt[5]{96}$ ד. $\sqrt{6}$ ה. $\sqrt[3]{3}$
- ו. $\sqrt[4]{40\frac{1}{2}}$ ז. $\sqrt[3]{-250}$ ח. $-\sqrt[4]{1250}$ ט. $\sqrt[5]{5^5 \cdot 2}$
- (24) א. $2\sqrt{3}$ ב. $4\sqrt{3}$ ג. $3\sqrt{7}$ ד. $3\sqrt[3]{2}$ ה. $x^2\sqrt{x}$
- (25) א. $2\sqrt{10}$ ב. $5\sqrt{2}$ ג. $8\sqrt{5}$ ד. $3\sqrt[3]{4}$ ה. $2\sqrt[3]{7}$ ו. $2\sqrt[5]{5}$
- ז. $3\sqrt[4]{2}$ ח. $3\sqrt[5]{4}$ ט. $2\sqrt[8]{3}$
- (26) א. $\sqrt{2}$ ב. $4\sqrt{7}$ ג. $6\sqrt[3]{2}$ ד. $\sqrt[4]{5}$ ה. $4\sqrt{5}$ ו. $\sqrt{2}$
- ז. $8\sqrt{2}$ ח. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ או $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[5]{5}}$ או $2\sqrt[5]{5^4}$
- (27) א. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ ב. $\frac{1}{\sqrt[4]{2^{61}}}$ ג. $\sqrt[6]{5^{11}}$ ד. 27 ה. $\frac{1}{7}$ ו. $\sqrt[8]{2^5}$

כתיבה מדעית של מספרים:

שאלות:

(28) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. 15,000,000	ב. 1,500,000
ג. 150,000,000,000	ד. 23,400,000
ה. 0.0003	ו. 0.00000042
ז. 0.000000042	ח. 0.00000000042

(29) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. $(3,000,000)^2$	ב. $(2,000,000)^2$
ג. $(5,000)^3$	ד. $(50,000)^3$
ה. $(0.0002)^4$	ו. $(0.00004)^3$
ז. $(0.000005)^3$	ח. $(0.000000007)^3$

תשובות סופיות:

(28) א. $1.5 \cdot 10^7$	ב. $1.5 \cdot 10^6$	ג. $1.5 \cdot 10^{11}$	ד. $2.34 \cdot 10^7$	ה. $3 \cdot 10^{-4}$
ו. $4.2 \cdot 10^{-7}$	ז. $4.2 \cdot 10^{-8}$	ח. $4.2 \cdot 10^{-10}$		
(29) א. $9 \cdot 10^{12}$	ב. $4 \cdot 10^{12}$	ג. $1.25 \cdot 10^{11}$	ד. $1.25 \cdot 10^{14}$	ה. $1.6 \cdot 10^{-15}$
ו. $6.4 \cdot 10^{-14}$	ז. $1.25 \cdot 10^{-16}$	ח. $3.43 \cdot 10^{-25}$		

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 5 - משוואות ואי-שוויונים מעריכיים

תוכן העניינים

1. משוואות מעריכיות יסודיות (ללא ספר)
2. משוואות עם חיבור וחסור איברים (ללא ספר)
3. משוואות עם קבוע אוילר (ללא ספר)
4. מערכת משוואות מעריכיות (ללא ספר)
5. אי-שוויונים מעריכיים (ללא ספר)

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 6 - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמיים

תוכן העניינים

1. הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות (ללא ספר)
2. חוקי הלוגריתמים (ללא ספר)
3. חישובים עם חזקה לוגריתמית (ללא ספר)
4. מעבר בין בסיסים (ללא ספר)
5. הלוגריתם הטבעי (ללא ספר)
6. משוואות עם בסיסים שונים (ללא ספר)
7. מערכת משוואות לוגריתמיות (ללא ספר)
8. מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות (ללא ספר)
9. אי-שוויונים לוגריתמיים (ללא ספר)

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 7 - טריגונומטריה במשולש ישר זווית

תוכן העניינים

1. הגדרות הפונקציות הטריגונומטריות (ללא ספר)

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 8 - זהויות טריגונומטריות

תוכן העניינים

1. זהויות היסוד (ללא ספר)
2. ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות (ללא ספר)
3. מעגל היחידה (ללא ספר)
4. סכום והפרש זוויות (ללא ספר)
5. זווית כפולה (ללא ספר)
6. סכום והפרש פונקציות (ללא ספר)

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 9 - משוואות טריגונומטריות

תוכן העניינים

1. משוואות טריגונומטריות כלליות (ללא ספר)
2. משוואות הנפתרות על ידי טכניקה אלגברית (ללא ספר)
3. משוואות הנפתרות על ידי שימוש בזהויות (ללא ספר)
4. משוואות עם תחום נתון (ללא ספר)
5. משוואות עם זוויות ברדיאנים (ללא ספר)

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 10 - טריגונומטריה במישור

תוכן העניינים

1. טריגונומטריה במישור (ללא ספר)
2. שאלות מסכמות (ללא ספר)

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 11 - חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים

תוכן העניינים

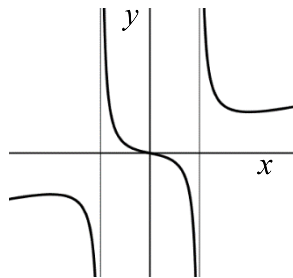
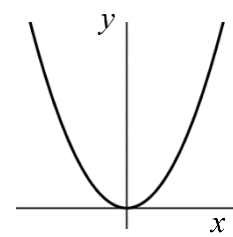
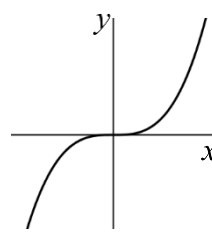
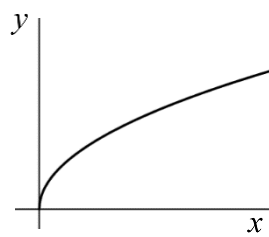
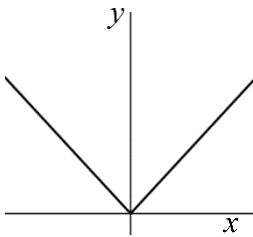
11	1. הקדמה כללית
12	2. גזירת פונקציות
18	3. מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה
19	4. מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה
22	5. שאלות עם פרמטרים
24	6. שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית

הקדמה כללית:

סיכום כללי:

פונקציות נפוצות:

הפונקציה $f(x) = x^2$: הפונקציה $f(x) = x^3$: הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$: הפונקציה $f(x) = |x|$:



פונקציה עם מכנה, למשל: $f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1}$:

שיפוע של פונקציה:

- השיפוע m של פונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעל הפונקציה הוא ערך הנגזרת בנקודה $A(x_1, y_1)$, כלומר: $m = f'(x_1)$.
- השיפוע של המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעל הפונקציה שווה לשיפוע הפונקציה בנקודה $A(x_1, y_1)$.
- משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעליה מתקבלת על ידי הנוסחה למציאת ישר: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

הנגזרת:

לכל פונקציה $f(x)$ קיימת פונקציה, הנקראת פונקציית הנגזרת (או רק "הנגזרת") ומסומנת $f'(x)$, המתקבלת ממנה על פי כללי הגזירה.

גזירת פונקציות:

סיכום כללי:

כללי הגזירה:

- כלל גזירה מס' 1: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
- כלל גזירה מס' 2 (כפל בקבוע): $f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$
- כלל גזירה מס' 3 (נגזרת של קבוע): $f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$
- כלל גזירה מס' 4 (סכום והפרש): $f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$
- כלל גזירה מס' 5 (פונקציה מורכבת): $f(x) = u^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
- כלל גזירה מס' 6 (נגזרת של $\frac{1}{x}$): $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
- כלל גזירה מס' 7 (מכפלה): $f(x) = u \cdot v \Rightarrow f'(x) = u'v + v'u$
- כלל גזירה מס' 8 (מנה): $f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- כלל גזירה מס' 9 (שורש): $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

שאלות:

1) גזור את הפונקציות הבאות:

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| א. $f(x) = x^3$ | ב. $f(x) = x^7$ | ג. $f(x) = x^2$ |
| ד. $f(x) = x$ | ה. $f(x) = x^{-3}$ | ו. $f(x) = x^{-1}$ |
| ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ | ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ | ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ |

2) גזור את הפונקציות הבאות:

- | | | |
|---------------------------|------------------------------|---------------------------------------|
| א. $f(x) = 2x^3$ | ב. $f(x) = 3x^7$ | ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$ |
| ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$ | ה. $f(x) = 8x$ | ו. $f(x) = 3x^{-2}$ |
| ז. $f(x) = \frac{4}{x}$ | ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$ | ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$ |

(3) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = 12 \quad \text{ב. } f(x) = \frac{7}{8}$$

(4) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5 \quad \text{ב. } f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$$

$$\text{ג. } f(x) = 7x^2 + 23x - 6 \quad \text{ד. } f(x) = 6x^2 + 8x + 4$$

$$\text{ה. } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^3 \quad \text{ו. } f(x) = \frac{x^4}{8} + 67$$

(5) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = (5x - 2)^3 \quad \text{ב. } f(x) = (x^3 + 6)^5 \quad \text{ג. } f(x) = 3(x - x^2)^2$$

$$\text{ד. } f(x) = \frac{(5-x)^3}{4} \quad \text{ה. } f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3}$$

(6) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \frac{3}{x} \quad \text{ב. } f(x) = -\frac{2}{x} \quad \text{ג. } f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\text{ד. } f(x) = \frac{3}{x^3} \quad \text{ה. } f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{2}{3-x}$$

$$\text{ז. } f(x) = \frac{6}{x+5}$$

(7) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = (5x+1)(x-3) \quad \text{ב. } f(x) = (5x+1)^3(x-3)$$

$$\text{ג. } f(x) = x^3(6-x)^4 \quad \text{ד. } f(x) = 3x^2 \cdot x$$

$$\text{ה. } f(x) = x^2 \cdot x^3 \quad \text{ו. } f(x) = x(3x+7)$$

$$\text{ז. } f(x) = 3x^3(3x-1) \quad \text{ח. } f(x) = (x-2)(2x^2+3)$$

$$\text{ט. } f(x) = (3x-2)(x^2+10x) \quad \text{י. } f(x) = (3x^4-4x)(2x^2+5x+2)$$

$$\text{יא. } f(x) = x(x-2)(3x-4)$$

(8) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = (x^2 - 4)^2 & \text{ב. } f(x) = 2x^3(3x + 5)^2 \\ \text{ג. } f(x) = (x^3 + 2)^2(x - 1)^3 & \text{ד. } f(x) = (x^2 + 1)^3(2x - 1)^2 \end{array}$$

(9) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\begin{array}{lll} \text{א. } f(x) = \frac{3x - 1}{1 + 2x} & \text{ב. } f(x) = \frac{x^2 + 1}{5x - 12} & \text{ג. } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3} \\ \text{ד. } f(x) = \frac{x^2 + 8}{x - 1} & \text{ה. } f(x) = \frac{1}{x} & \text{ו. } f(x) = \frac{3}{x^3} \\ \text{ז. } f(x) = \frac{(x - 1)^2}{x + 1} & \text{ח. } f(x) = \frac{(x^2 + 3)^2}{x^2 - 2} & \text{ט. } f(x) = \frac{x^3 - x^2}{2(1 - x)} \\ \text{י. } f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 4} \end{array}$$

(10) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\begin{array}{lll} \text{א. } f(x) = \sqrt{x} & \text{ב. } f(x) = 4\sqrt{x + 1} & \text{ג. } f(x) = \sqrt{x^3 - 1} \\ \text{ד. } f(x) = (3x + 1)\sqrt{x} & \text{ה. } f(x) = x^2\sqrt{x + 3} & \text{ו. } f(x) = \frac{x + 3}{\sqrt{x}} \end{array}$$

(11) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = \sqrt{x + 1} & \text{ב. } f(x) = \sqrt{2x} \\ \text{ג. } f(x) = \sqrt{3x^2 + 1} & \text{ד. } f(x) = \sqrt{10 - 3x} \\ \text{ה. } f(x) = \sqrt{2x^2 + 7x} & \text{ו. } f(x) = 3x^2 - 8\sqrt{x} \\ \text{ז. } f(x) = x^2\sqrt{1 - 2x} & \text{ח. } f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} \\ \text{ט. } f(x) = \frac{x\sqrt{x^2 + 4}}{2} & \text{י. } f(x) = \frac{x + 3}{\sqrt{1 - x^2}} \\ \text{יא. } f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + x - 5\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} & \text{יב. } f(x) = \sqrt{\frac{3 - x}{x}} \\ \text{יג. } f(x) = \sqrt{\frac{1 + x^2}{1 - x}} & \text{יד. } f(x) = \frac{x^2 + 7}{\sqrt{x^2 - 5}} \end{array}$$

$$\text{טז. } f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$$

$$\text{טו. } f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$$

(12) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{ג. } f(x) = \frac{x-2a}{x-4a}$$

$$\text{ב. } f(x) = \frac{ax^2}{3} - \frac{x}{b} + c$$

$$\text{א. } f(x) = ax^4 - bx$$

$$\text{ד. } f(x) = a\sqrt{bx^2 + c}$$

(13) גזור פעמיים את הפונקציות הבאות:

$$\text{ב. } f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10}$$

$$\text{א. } f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x}$$

$$\text{ד. } f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

$$\text{ג. } f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2}$$

$$\text{ו. } f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$$

$$\text{ה. } f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$$

תשובות סופיות:

- (1) א. $3x^2$ ב. $7x^6$ ג. $2x$ ד. 1 ה. $-\frac{3}{x^4}$ ו. $-\frac{1}{x^2}$
- ז. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ח. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ט. $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$
- (2) א. $6x^2$ ב. $21x^6$ ג. $2x^3$ ד. $\frac{6x^5}{7}$ ה. 8
- ו. $-\frac{6}{x^3}$ ז. $-\frac{4}{x^2}$ ח. $\frac{3}{\sqrt{x}}$ ט. $\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$
- (3) א. 0 ב. 0
- (4) א. $3x^2 + 4x - 3$ ב. $x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}$ ג. $14x + 23$ ד. $12x + 8$ ה. $x - 3x^2$ ו. $0.5x^3$
- (5) א. $15(5x - 2)^2$ ב. $15x^2(x^3 + 6)^4$ ג. $6(x - x^2)(1 - 2x)$
- ד. $-\frac{3}{4}(5 - x)^2$ ה. $\frac{8(x+1)^3}{3}$
- (6) א. $-\frac{3}{x^2}$ ב. $\frac{2}{x^2}$ ג. $-\frac{2}{x^3}$ ד. $-\frac{9}{x^4}$ ה. $-\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2}$
- ו. $\frac{2}{(3-x)^2}$ ז. $-\frac{6}{(x+5)^2}$
- (7) א. $10x - 14$ ב. $(5x+1)^2(20x-44)$ ג. $x^2(6-x)^3(18-7x)$
- ד. $9x^2$ ה. $5x^4$ ו. $6x+7$ ז. $36x^3 - 9x^2$ ח. $6x^2 - 8x + 3$
- ט. $9x^2 + 56x - 20$ י. $36x^5 + 75x^4 + 24x^3 - 24x^2 - 40x - 8$ יא. $9x^2 - 20x + 8$
- (8) א. $4x(x^2 - 4)$ ב. $30x^2(x+1)(3x+5)$ ג. $3(x-1)^2(x^3+2)(3x^3-2x^2+2)$
- ד. $2(2x-1)(x^2+1)^2(8x^2-3x+2)$
- (9) א. $\frac{5}{(1+2x)^2}$ ב. $\frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2}$ ג. $\frac{8x}{(x^2+3)^2}$ ד. $\frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$
- ה. $-\frac{1}{x^2}$ ו. $-\frac{9}{x^4}$ ז. $\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$
- ח. $\frac{2x(x^2+3)(x^2-7)}{(x^2-2)^2}$ ט. $-x$ י. $-\frac{1}{(x+2)^2}$

$$(10) \quad \text{א. } \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ב. } \frac{2}{\sqrt{x+1}} \quad \text{ג. } \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}} \quad \text{ד. } \frac{9x+1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ה. } \frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}}$$

$$\text{ו. } \frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$$

$$(11) \quad \text{א. } \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \quad \text{ב. } \frac{1}{\sqrt{2x}} \quad \text{ג. } \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}} \quad \text{ד. } -\frac{3}{2\sqrt{10-3x}} \quad \text{ה. } \frac{4x+7}{2\sqrt{2x^2+7x}}$$

$$\text{ו. } 6x - \frac{4}{\sqrt{x}} \quad \text{ז. } \frac{2x-5x^2}{\sqrt{1-2x}} \quad \text{ח. } -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \quad \text{ט. } \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+4}} \quad \text{י. } \frac{1-3x}{(1-x^2)^{1.5}}$$

$$\text{יא. } 3\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{5}{x^2} \quad \text{יב. } -\frac{3}{2x\sqrt{3x-x^2}} \quad \text{יג. } \frac{-x^2+2x+1}{2(1-x)^{1.5}\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{יד. } \frac{x^3-17x}{(x^2-5)^{1.5}} \quad \text{טו. } -\frac{x+1}{2\sqrt{x}(x-1)^2} \quad \text{טז. } -\frac{x+3}{2(x-1)^2\sqrt{x+1}}$$

$$(12) \quad \text{א. } 4ax^3 - b \quad \text{ב. } \frac{2ax}{3} - \frac{1}{b} \quad \text{ג. } \frac{-2a}{(x-4a)^2} \quad \text{ד. } \frac{abx}{\sqrt{bx^2+c}}$$

$$(13) \quad \text{א. } f'(x) = \frac{2x^2-8}{4x^2}, f''(x) = \frac{4}{x^3}$$

$$\text{ב. } f'(x) = \frac{2x^2+20x-62}{(2x+10)^2}, f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3}$$

$$\text{ג. } f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$$

$$\text{ד. } f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}, f''(x) = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

$$\text{ה. } f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4}$$

$$\text{ו. } f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, f''(x) = \frac{12(x+1)(x+3)}{(x-1)^5}$$

מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה:

שאלות:

(14) מצא את שיפוע הפונקציה $f(x) = 2x^3 - 7x$ בנקודה $(2, 2)$.

(15) מצא את שיפוע הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$ בנקודה בה $x = -2$.

(16) מצא את שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = 4\sqrt{x}$ בנקודה בה $x = 1$.

תשובות סופיות:

$$m = 17 \quad (14)$$

$$m = 4 \quad (15)$$

$$m = 2 \quad (16)$$

מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה:

שאלות:

(17) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = 2(4x+3)^3$ בנקודה בה $x = -1$.

(18) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{8}{x+1}$ בנקודה בה $y = 2$.

(19) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = x^2 - 2x - 8$ בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x .

(20) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^4 - 2x$ ששיפועו 2.

(21) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2 - 2}$ בנקודה שבה $x = 1$.

(22) נתון כי הישר $2y - 3x = 3$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = 3\sqrt{x}$. מצא את נקודת ההשקה.

(23) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ בנקודה בה $x = 1$.

(24) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = 3x^2 - 8\sqrt{x}$ בנקודה בה $x = 4$.

(25) נתונה הפונקציה הבאה $f(x) = 4x - 2\sqrt{x}$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המקביל לישר $f(x) = 3x - \frac{1}{2}$.

ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .

(26) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}-1}$ ששיפועו -2.

(27) מצא את משוואות המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$ בנקודה שבה $x=2$.

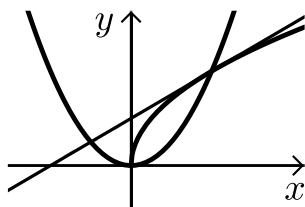
(28) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = \frac{1}{3x^3}$ היוצרים עם הכיוון החיובי של ציר ה- x זווית של 135° .

(29) מצא את משוואות המשיקים המשותפים לפונקציות הבאות: $y = x^2$, $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$.

(30) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$ ונתון הישר: $y = 2x$.

- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר הנמצאת ברביע הראשון.
- מצא את משוואות המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שמצאת בסעיף הקודם.
- חשב את השטח שנוצר בין המשיק והצירים.

(31) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$.



- מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.
- מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ העובר דרך נקודת החיתוך שמצאת הנמצאת ברביע הראשון.
- מצא את נקודת החיתוך הנוספת של המשיק שמצאת עם גרף הפונקציה $g(x)$.

תשובות סופיות:

(17) $y = 24x + 22$

(18) $y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$

(19) $y = 6x - 24, y = -6x - 12$

(20) $y = 2x - 3$

(21) $y = -12x + 9$

(22) $(1, 3)$

(23) $y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$

(24) $y = 22x - 56$

(25) א. $y = 3x - 1$ ב. $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$

(26) $y = -2x + 8$

(27) $y = \frac{11}{16}x - \frac{15}{8}$

(28) $y = -x + 1\frac{1}{3}, y = -x - 1\frac{1}{3}$

(29) $y = 2x - 1, y = -2x - 1$

(30) א. $(1, 2)$ ב. $y = -1.5x + 3.5$ ג. $S = 4\frac{1}{12}$

(31) א. $(0, 0), (1, 1)$ ב. $y = 0.5x + 0.5$ ג. $(-0.5, 0.25)$

שאלות עם פרמטרים:

שאלות:

(32) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = ax^2 - 4x$ בנקודה שבה $x = 3$ הוא 8. מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

(33) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{ax}$, $(a > 0)$.

המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{1}{2}$ הוא בעל שיפוע 1. מצא את ערך הפרמטר a .

(34) נתונה הפונקציה: $y = x^3 + a\sqrt{x}$ (a פרמטר).

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$ הוא 5. מצא את ערך הפרמטר a .

(35) נתונה הפונקציה: $y = 2\sqrt{x} - \frac{A}{x}$ (A פרמטר).

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$ הוא 2. מצא את ערך הפרמטר A .

(36) הישר $y = 4x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$.

מצא את b ואת נקודת ההשקה.

(37) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{2}{ax+3}$ בנקודה שבה $y = 2$ הוא -4.

מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

(38) הישר $y = ax + \frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x) = \frac{2}{x+c}$ בנקודה $x = 0$.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- c .

(39) הישר $y = 3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} + b$.

מצא את b ואת נקודת ההשקה.

(40) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{a}{\sqrt{bx-1}}$ בנקודה (1, 6) הוא -6.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת משוואת המשיק.

(41) לאילו ערכי k ישיק הישר $y = -5x + 6$ לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + k$?
לכל ערך כזה של k מצא את נקודת ההשקה.

(42) הפונקציות $y = \frac{1}{x}$ ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$ משיקות זו לזו.
מצא את k ואת נקודת ההשקה.

תשובות סופיות:

$$a = 2, y = 8x - 18 \quad (32)$$

$$a = 2 \quad (33)$$

$$a = 4 \quad (34)$$

$$A = 1 \quad (35)$$

$$(-1, 5), y = 4x + 9 \quad (36)$$

$$a = 2, y = -4x - 2 \quad (37)$$

$$a = -\frac{1}{8}, c = 4 \quad (38)$$

$$b = 4, (4, 12) \quad (39)$$

$$b = 2, a = 6, y = -6x + 12 \quad (40)$$

$$k = \frac{158}{27} : \left(\frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right) \text{ או } k = 6 : (1, 1) \quad (41)$$

$$(1, 1), k = 1.5 \quad (42)$$

שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית:

שאלות:

(43) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. בטא באמצעות t את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^2 + 1$ בנקודה שבה $x = t$.
- ב. מצא את ערכיו של t אם נתון שהמשיק עובר בנקודה $(-1, 1)$.

(44) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = 5x - x^2$ העוברים דרך הנקודה $(3, 7)$.

(45) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = x^2 + 5x - 6$ העוברים דרך הנקודה $(0, -10)$.

(46) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = 12x - x^3$ העוברים דרך הנקודה $(2, 24)$.

(47) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ העובר בנקודה $(3, 0)$.

(48) מצא משוואת המשיק לפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ אם ידוע ששטח המשולש שהוא יוצר עם הצירים הוא 4.5 יחידות שטח.

(49) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-2}}$ העוברים דרך הנקודה $(2, 3)$.

תשובות סופיות:

ב. $t = 0, -2$.

(43) $y = 2tx - t^2 + 1$

(44) $y = x + 4$, $y = -3x + 16$

(45) $y = 9x - 10$, $y = x - 10$

(46) $y = 12x$, $y = -15x + 54$

(47) $y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$

(48) $y = -\frac{1}{16}x + \frac{3}{4}$

(49) $y = -x + 5$

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

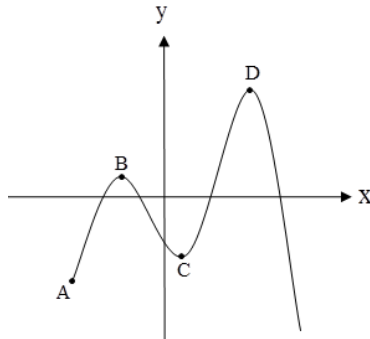
פרק 12 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית פולינום

תוכן העניינים

- 1. נקודות קיצון של פונקציות 26
- 2. חקירת פונקציה פולינומית 29
- 3. פונקציה זוגית ואי-זוגית 33

נקודות קיצון של פונקציות:

סיכום כללי:



נקודות קיצון (נקודות מינימום/מקסימום):

- מינימום או מקסימום מקומי (פנימי) – B, C, D.
- מינימום או מקסימום קצה – A.
- מינימום או מקסימום מוחלט – D.

נקודות קיצון מקומיות:

- שיפוע המשיק לפונקציה בנקודות קיצון מקומיות הוא אפס.
- בנקודה שבה שיפוע המשיק לפונקציה הוא אפס תיתכן נקודת קיצון מקומית.
- נקודה כזו נקראת נקודה חשודה כקיצון. ניתן לבדוק אם היא אכן נקודת קיצון.

שלבים למציאת נקודות קיצון מקומיות:

- נגזור את הפונקציה.
- נשווה את הנגזרת לאפס ונחלץ את ערכי ה- x של הנקודות החשודות כקיצון.
- נציב את ערכי ה- x מסעיף ב' בפונקציה המקורית לקבלת ערכי ה- y .
- נקבע אם הנקודה היא נקודת קיצון ונסווג את סוג הקיצון על ידי טבלה.

שאלות:

(1) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x) = 10x - x^2$.

(2) נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 12x$.

- מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
- מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

- (3) נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.
 א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- (4) נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$.
 א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- (5) לפונקציה $f(x) = ax - x^3 - 5$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = -1$.
 מצא את ערכו של הפרמטר a .
- (6) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$. ידוע שהנקודה $x = 1$ נקודת קיצון.
 מצא את הקבוע a .
- (7) לפונקציה $f(x) = Ax^3 + Bx^2 - 1$ יש נקודת קיצון ששיעוריה: $(2, 3)$.
 מצא את ערכי הפרמטרים A, B .
- (8) לפונקציה $f(x) = Ax^3 + Bx^2 - 4x$ יש נקודת קיצון ב- $x = -1$ ו- $x = 4$.
 מצא את הפרמטרים ואת שיעור ה- y של שתי נקודות הקיצון.
- (9) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. ידוע שהנקודה $(1, 2)$ נקודת קיצון.
 מצא את הפרמטרים a, b .
- (10) לפונקציה $f(x) = ax^4 + bx^2 + 35$ יש נקודת קיצון ששיעוריה $(2, 3)$.
 מצא את ערכי הפרמטרים a, b .

תשובות סופיות:

(1) $\max(5, 25)$.

(2) א. $\min(2, -16)$, $\max(-2, 16)$ ב. עולה: $x > 2$, $x < -2$ יורדת: $-2 < x < 2$.

(3) א. $\max(0, 9)$, $\min(\sqrt{5}, -16)$, $\min(-\sqrt{5}, -16)$

ב. עולה: $-\sqrt{5} < x < 0$, $x > \sqrt{5}$ יורדת: $0 < x < \sqrt{5}$, $x < -\sqrt{5}$.

(4) א. $\min(3, 5)$ ב. עולה: $x > 3$ יורדת: $x < 3$.

(5) $a = 3$.

(6) $a = -\frac{2}{3}$.

(7) $A = -1$, $B = 3$.

(8) $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{3}{2}$, $\left(-1, 2\frac{1}{6}\right)$, $\left(4, -18\frac{2}{3}\right)$.

(9) $b = 6$, $a = -4$.

(10) $a = 2$, $b = -16$.

חקירת פונקציה פולינומית:

שאלות:

(11) נתונה הפונקציה $f(x) = 10x - x^2$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(12) נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 12x$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(13) נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(14) נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$ חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

15 נתונה הפונקציה $f(x) = x^3$ חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

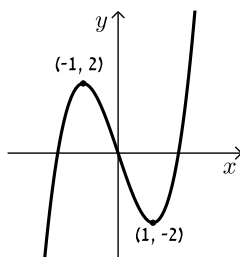
16 נתונה הפונקציה: $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 54x - 50$.

- לאילו ערכים של הפרמטר a עולה הפונקציה בכל תחום הגדרתה?
- הצב בפונקציה $a = 6$ וחקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים: תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודת חיתוך עם ציר ה- y , סרטוט.

17 נתונה הפונקציה: $y = -3x^3 + 6x^2 - 4x + d$ (d פרמטר).

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה: $x = 2$.

- מצא את d .
- האם יש לפונקציה נקודות קיצון?
- כתוב את תחומי העלייה וירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y .
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.



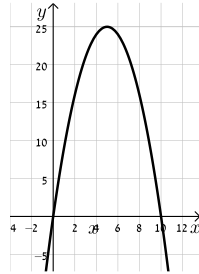
18 לפניך גרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x$:

- מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 5$?
- מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 2$?
- מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 0.5$?
- עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק פתרון אחד?
- עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שני פתרונות?
- עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שלושה פתרונות?
- האם קיים ערך של k עבורו למשוואה $f(x) = k$ אין פתרון?

תשובות סופיות:

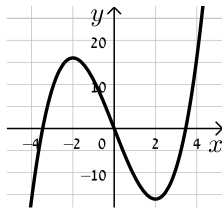
11) א. כל x ב. $\max(5, 25)$ ג. עלייה: $x < 5$, ירידה: $x > 5$

ד. $(0, 0)$, $(10, 0)$.



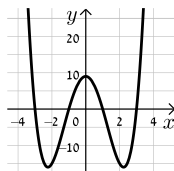
12) א. כל x ב. $\min(2, -16)$, $\max(-2, 16)$ ג. עלייה: $x > 2$, $x < -2$, ירידה: $-2 < x < 2$

ד. $(0, 0)$, $(\sqrt{12}, 0)$, $(-\sqrt{12}, 0)$.



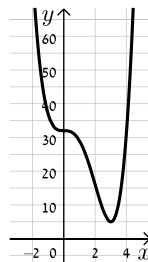
13) א. כל x ב. $\max(0, 9)$, $\min(\sqrt{5}, -16)$, $\min(-\sqrt{5}, -16)$ ג. עלייה: $-\sqrt{5} < x < 0$, $x > \sqrt{5}$, ירידה: $x < -\sqrt{5}$, $0 < x < \sqrt{5}$

ד. $(0, 9)$, $(\pm 1, 0)$, $(\pm 3, 0)$.



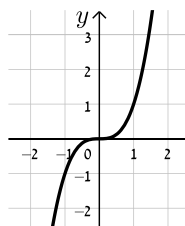
14) א. כל x ב. $\min(3, 5)$ ג. תחומי עלייה: $x > 3$, תחומי ירידה: $x < 3$

ד. $(0, 32)$.



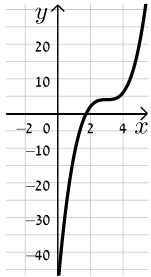
15) א. כל x ב. אין. ג. עולה לכל x

ד. $(0, 0)$.



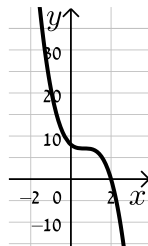
16) א. $-6 < a < 6$ ב. תחום הגדרה: כל x , נקודות קיצון: אין, תחומי עלייה: כל x ,

תחומי ירידה: אין, נקודת חיתוך עם הצירים: $(0, -50)$, להלן גרף:



17) א. $d = 8$ ב. לא. ג. יורדת בתחום $x \neq \frac{2}{3}$

ד. $(0, 8)$ ה. להלן גרף:



18) א. 1. ב. 2. ג. 3. ד. $k > 2, k < -2$

ה. $k = \pm 2$ ו. $-2 < k < 2$ ז. לא.

פונקציה זוגית ואי-זוגית:

סיכום כללי:

הגדרות:

- פונקציה $f(x)$ תיקרא זוגית אם לכל x בתחום הגדרתה מתקיים: $f(x) = f(-x)$.
- פונקציה $f(x)$ תיקרא אי-זוגית אם לכל x בתחום הגדרתה מתקיים: $f(-x) = -f(x)$.

שאלות:

(1) קבע אלו מהפונקציות הבאות הן זוגיות/אי-זוגיות לא זו ולא זו:

א. $f(x) = 3x - 5$

ב. $f(x) = 3x^2$

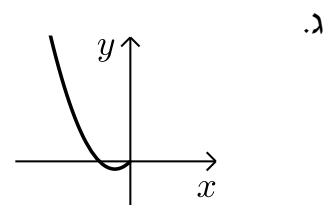
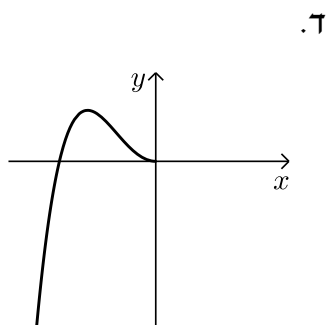
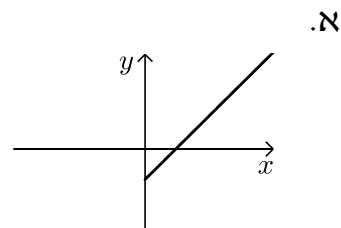
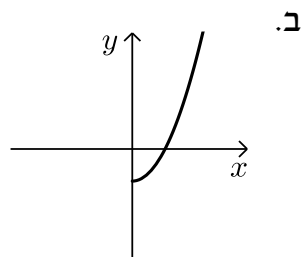
ג. $f(x) = 2x^3$

ד. $f(x) = x^3 - 2x^2$

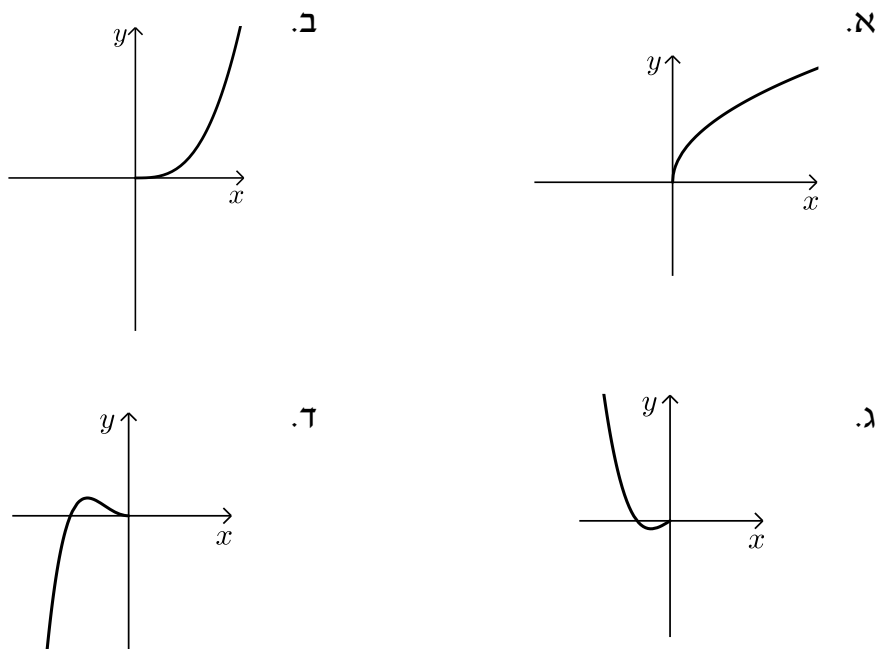
ה. $f(x) = 4x^4 - 3x^2 + 1$

ו. $f(x) = 4x^5 - 3x^3 - 1$

(2) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x . השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה זוגית:



(3) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x . השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתקבל פונקציה אי-זוגית:



- (4) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = x^4 - 4x^2$ בתחום: $[0:3]$.
- חקור את הפונקציה בתחום הנ"ל לפי הסעיפים הבאים:
 - תחום הגדרה.
 - מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
 - מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
 - כתיבת תחומי עלייה וירידה.
 - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
 - הוכח כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.
 - התבסס על ממצאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום: $[-3:3]$ (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-3:0]$ לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

(5) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = x^6 - 3x^2 + 3$.

- א. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:4]$ לפי הסעיפים הבאים:
תחום הגדרה, מציאת חיתוך עם ציר ה- y , מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה בתחום הנ"ל.
- ב. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זו ולא זו? נמק באמצעות חישוב מתאים.
- ג. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שסרטטת בסעיף א', את עקום הפונקציה בתחום $[-4:0]$.
- ד. הוכח כי הפונקציה חיובית לכל x בתחום הגדרתה.

(6) לפניך הפונקציה: $f(x) = -2x^6 + 3x^4 + a$, פרמטר a .

ידוע כי לפונקציה ערך מירבי של 1.

- א. מצא את a וכתוב את הפונקציה $f(x)$.
- ב. חקור את הפונקציה בתחום: $[-2:0]$ לפי הסעיפים הבאים:
כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים, מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.
- ג. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זה ולא זה? נמק באמצעות חישוב מתאים.
- ד. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את גרף הפונקציה בתחום: $[-2:2]$.

(7) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = 3x^3 - 9x$.

- א. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:5]$ לפי הסעיפים הבאים:
כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים, מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.
- ב. הוכח כי הפונקציה היא אי-זוגית.
- ג. התבסס על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום: $[-5:5]$ (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-5:0]$ לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

- (8) לפינך הפונקציה הבאה : $f(x) = 5x^3 - 3x^5 + b$, פרמטר b .
 ידוע כי הישר $y = 2x$ עובר דרך כל הנקודות על גרף הפונקציה
 שמקיימות : $f'(x) = 0$.
- מצא את b וכתוב את הפונקציה $f(x)$.
 - חקור את הפונקציה בתחום : $[0:2]$ לפי הסעיפים הבאים :
 - תחום הגדרה.
 - מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
 - מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
 - כתיבת תחומי עלייה וירידה.
 - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
 - בדוק האם הפונקציה היא זוגית/אי-זוגית או לא זו ולא זו.
 נמק את קביעתך באמצעות חישוב מתאים.
 - הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה
 של גרף הפונקציה את הגרף בתחום $[-2:0]$.

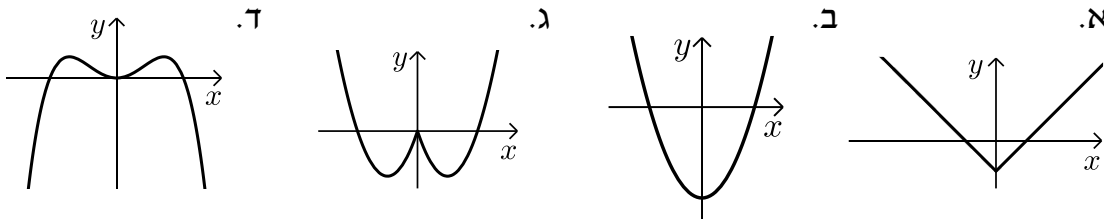
(9) נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{x^7 - x}{3}$.

- חקור את הפונקציה בתחום : $[-4:0]$ לפי הסעיפים הבאים :
 - תחום הגדרה.
 - מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
 - מציאת נקודות קיצון וסיווגן
 (בתשובתך השאר עד 2 ספרות לאחר הנקודה העשרונית).
 - כתיבת תחומי עלייה וירידה.
 - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? או לא זו ולא זו?
 נמק ע"י חישוב מתאים.
- הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שעשית
 את גרף הפונקציה בתחום $[0:4]$.

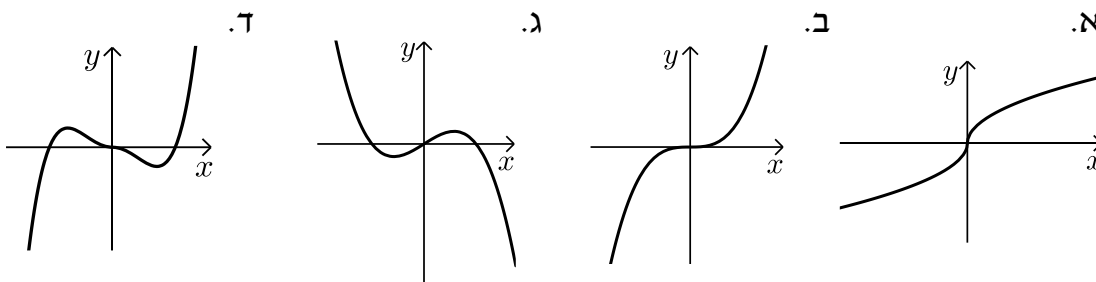
תשובות סופיות:

(1) זוגית: ב', ה'. אי-זוגית: ג', לא זו ולא זו: א', ד', ו'.

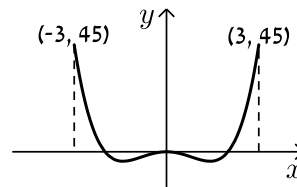
(2) להלן הגרפים:



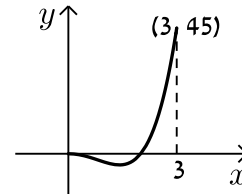
(3) להלן הגרפים:

(4) א. i. $0 \leq x \leq 3$ ii. $(0,0), (2,0)$ iii. $\max(3,45)$ קצה, $\min(\sqrt{2}, -4)$.iv. עולה: $\sqrt{2} < x < 3$, יורדת: $0 < x < \sqrt{2}$ ב. סעיף הוכחה. $\max(0,0)$ קצה.

סרטוט עבור סעיף ג:

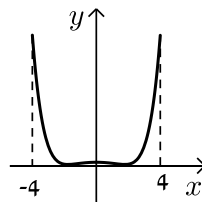


סרטוט עבור חלק v:

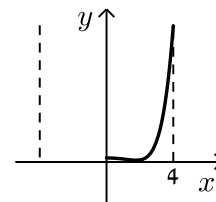
(5) א. תחום הגדרה: $0 \leq x \leq 4$, חיתוך עם ציר ה- y : $(0,3)$,נקודות קיצון: $\max(4,4051)$ קצה, $\min(1,1)$, $\max(0,3)$ קצה,עולה: $1 < x < 4$, יורדת: $0 < x < 1$ ב. זוגית.

ד. הוכחה עפ"י הסרטוט.

סרטוט עבור סעיף ג:



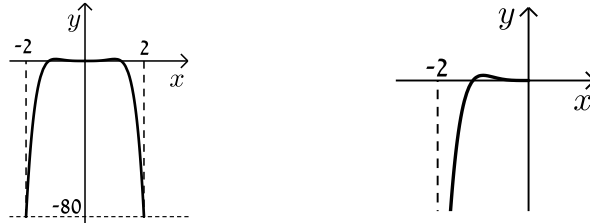
סרטוט עבור סעיף א:



6) א. $a=0$ ב. תחום הגדרה: $-2 \leq x \leq 0$, חיתוך עם הצירים:
 נקודות קיצון: $(0,0)$, $(-1.225,0)$, $\min(-2,-80)$ קצה, $\max(-1,1)$ קצה, $\min(0,0)$ קצה,

עולה: $-1 < x < -2$, יורדת: $-1 < x < 0$. ג. זוגית.

סרטוט עבור סעיף א: סרטוט עבור סעיף ד:

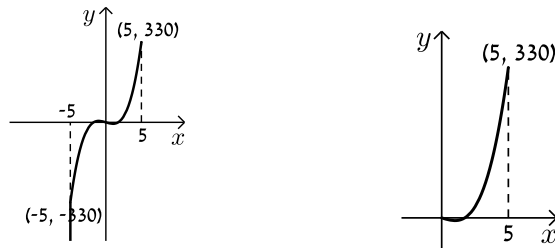


7) א. תחום הגדרה: $0 \leq x \leq 5$, חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, $(\sqrt{3},0)$,

נקודות קיצון: $\max(5, 330)$ קצה, $\min(1, -6)$ קצה, $\max(0,0)$ קצה,

עולה: $1 < x < 5$, יורדת: $0 < x < 1$. ב. אי-זוגית.

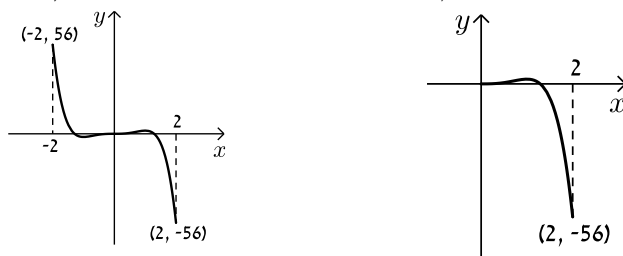
סרטוט עבור סעיף א: סרטוט עבור סעיף ג:



8) א. $b=0$ ב. $0 \leq x \leq 2$ ii. $(0,0)$, $(1.29,0)$ iii. $\min(2, -56)$ קצה,

$\max(1,2)$ קצה. iv. עולה: $0 < x < 1$, יורדת: $1 < x < 2$.

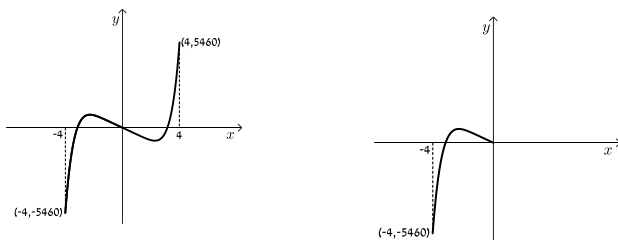
ג. אי-זוגית. סרטוט עבור חלק v: סרטוט עבור סעיף ד:



9) א. $-4 \leq x \leq 0$ ii. $(-1,0)$, $(0,0)$ iii. $\min(0,0)$ קצה, $\max(-0.723, 0.207)$ קצה,

$\min(-4, -5460)$ קצה. iv. עולה: $-4 < x < -0.723$, יורדת: $-0.723 < x < 0$.

ג. אי-זוגית. סרטוט עבור חלק v: סרטוט עבור סעיף ד:



סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 13 - אינדוקציה מתמטית

תוכן העניינים

1.	שאלות העוסקות בתכונות התחלקות	39
2.	סדרות	42
3.	עצרת	44
4.	שאלות שבהן האיבר הכללי מורכב ממספר מחוברים	45
5.	שאלות העוסקות באינדוקציות עם איברים משתנים	46
6.	שאלות העוסקות בהוכחת באי-שוויונים באינדוקציה	47
7.	שאלות כוללות ומסכמות	49
8.	מושג הסכימה וקתיבה מקוצרת של אינדוקציות	51

שאלות העוסקות בתכונות התחלקות:

סיכום כללי:

מבנה כללי של רישום הוכחה באינדוקציה:

בדיקה:

בדיקה נכונות האינדוקציה עבור $n=1$ (ולעיתים כדאי לבדוק גם עבור $n=2,3$).

הנחת האינדוקציה:

נניח כי עבור $n=k$ (טבעי כלשהו) כי טענת האינדוקציה נכונה.

הוכחת האינדוקציה:

נוכיח כי עבור $n=k+1$ טענת האינדוקציה מתקיימת.

סיכום:

לסיכום, הראנו כי הטענה נכונה עבור $n=1$ והראנו כי נכונות הטענה עבור $n=k$ גוררת את נכונותה עבור $n=k+1$, לפיכך, על פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

שאלות:

- (1) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $8^n - 3^n$ מתחלק ב-5 ללא שארית לכל n טבעי.
- (2) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $11^n - 4^n$ מתחלק ב-7 ללא שארית לכל n טבעי.
- (3) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $8 \cdot 7^n + 4^{n+2}$ מתחלק ב-24 ללא שארית לכל n טבעי.
- (4) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $5 \cdot 3^{2n} - 5^{n+1}$ מתחלק ב-20 ללא שארית לכל n טבעי.
- (5) a_n הוא האיבר במקום ה- n בסדרה החשבונית: $1, 3, 5, 7, \dots$ הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $2^{a_n} + 4$ מתחלק ב-12 ללא שארית לכל n טבעי הגדול מ-1.
- (6) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $n^2 + n$ מתחלק ב-2 ללא שארית לכל n טבעי.
- (7) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $n^3 + 5n$ מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.
- (8) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $3^n - 2n - 1$ מתחלק ב-4 ללא שארית לכל n טבעי.
- (9) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $9(9^n - 1) - 40n$ מתחלק ב-32 ללא שארית לכל n טבעי.
- (10) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^n + 5^n - 2^n(2^n + 1)$ מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.

(11) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^n + 2^{2n}$ מתחלק ב-11 ללא שארית לכל n טבעי אי זוגי.

(12) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $a^n - b^n$ מתחלק ב- $(a+b)$ ללא שארית לכל n טבעי זוגי.

(13) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^{n+2} + 1$ מותיר שארית 2 בחלוקתו ב-3 לכל n טבעי.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

סדרות:

סיכום כללי:

תזכורת:

- סדרה היא אוסף מספרים: $a_1, a_2, \dots, a_n$, כאשר n הוא מיקום האיבר בסדרה ו- a_n הוא ערך האיבר העומד במקום ה- n בסדרה.

○ סדרה כללית – סדרה שבה כל איבר מוגדר לפי מקומו בסדרה.

○ סכום n האיברים הראשונים בסדרה יסומן ב- S_n

והוא מקיים: $S_n = a_1 + \dots + a_n$.

- סדרה חשבונית – סדרת מספרים שבה ההפרש בין כל שני איברים סמוכים הוא גודל קבוע. נוסחת האיבר הכללי היא: $a_n = a_1 + d(n-1)$ כאשר d הפרש הסדרה.

○ סכום n האיברים הראשונים הוא: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n}{2}[2a_1 + d(n-1)]$.

- סדרה הנדסית – סדרת מספרים שבה המנה בין כל שני איברים סמוכים היא גודל קבוע. נוסחת האיבר הכללי היא: $a_n = a_1 q^{n-1}$ כאשר q היא מנת הסדרה.

○ סכום n האיברים הראשונים הוא: $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

שאלות:

(14) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי

$$1+2+3+4+\dots+n = \frac{n}{2}(n+1) \quad \text{מתקיים:}$$

(15) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי

$$4+7+10+13+\dots+(3n+1) = \frac{n}{2}(3n+5) \quad \text{מתקיים:}$$

(16) נתונה סדרה שבה: $a_n = n(n+2)$

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $S_n = \frac{n}{6}(n+1)(2n+7)$

(17) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$$

(18) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{6}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{6}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{6}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}$$

(19) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 9 + \dots + n \cdot 3^{n-1} = \frac{1}{4} [3^n (2n-1) + 1]$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

עצרת:

סיכום כללי:

תזכורת – מושג העצרת:

עצרת מוגדרת להיות מכפלת האיברים עד לערך הנקוב: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.
מגדירים: $0! = 1$ ותמיד מתקיימים השוויונות: $n! = n \cdot (n-1)!$, $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$.

שאלות:

(20) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

(21) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1 \cdot 2!}{2} + \frac{2 \cdot 3!}{4} + \frac{3 \cdot 4!}{8} + \dots + \frac{n(n+1)!}{2^n} = \frac{(n+2)!}{2^n} - 2$$

(22) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$p! + \frac{(p+1)!}{1!} + \frac{(p+2)!}{2!} + \dots + \frac{(p+n-1)!}{(n-1)!} = \frac{(p+n)!}{(n-1)!(p+1)}$$

(23) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) \dots \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{n!}$$

(24) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{5}{1 \cdot 4} - \frac{11}{4 \cdot 7} + \frac{17}{7 \cdot 10} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} (6n-1)}{(3n-2)(3n+1)} = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות שבהן האיבר הכללי מורכב ממספר מחוברים:

שאלות:

(25) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2n = n(2n + 1)$$

(26) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{n}{3}(2n + 1)(4n + 1)$$

(27) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + 3n \cdot 2^{3n-1} = (3n - 1)2^{3n} + 1$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות העוסקות באינדוקציות עם איברים משתנים:

שאלות:

(28) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + \dots + (3n) = 2n(2n+1)$$

(29) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$(n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{n}{6}(2n+1)(7n+1)$$

(30) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) \left(1 - \frac{1}{n+3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$$

(31) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$(n+1)(n+2) \cdot \dots \cdot (2n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$$

(32) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות העוסקות בהוכחת באי-שוויונים באינדוקציה:

שאלות:

(33) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי הגדול מ-1 מתקיים:

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{n}{n+1}$$

(34) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

(35) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי הגדול מ-2 מתקיים:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}$$

(36) נתונה סדרה שבה: $a_n = n^n$. נגדיר: $T_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n$.

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $T_n \leq n^{\frac{n}{2}(n+1)}$.

(37) נתון אי-השוויון: $2^n > n^2$. מצא את ה- n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה- n שמצאת.

(38) נתון אי-השוויון: $4^n > 5n^2 + 1$. מצא את ה- n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה- n שמצאת.

(39) נתון אי-השוויון: $n^3 - n < 5^{n-1}$. מצא את ה- n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה- n שמצאת.

(40) נתון אי-השוויון: $3^n + 4^n + 5^n < 6^n$. מצא את ה- n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה- n שמצאת.

41 נתון אי-השוויון : $n^n \geq n!$. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי.

42 נתון אי-השוויון : $a^n + b^n < (a+b)^n$, $(a, b > 0)$. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי הגדול מ-1.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות כוללות ומסכמות:

שאלות:

(43) נתון השוויון: $4 + 7 + 10 + 13 + \dots = \frac{n}{2}(3n + 5)$

- א. מצא את האיבר במקום ה- n .
 ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.
 ג. חשב את הסכום: $37 + 40 + 43 + \dots + 85$.

(44) נתון השוויון: $\frac{2}{3} + \frac{6}{9} + \frac{10}{27} + \dots = 2 - \frac{2n+2}{3^n}$. מצא את האיבר במקום ה- n .

(45) נתון השוויון: $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots = \frac{n}{4n+1}$

- א. מצא את האיבר במקום ה- n .
 ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.
 ג. חשב את הסכום: $\frac{1}{25 \cdot 29} + \frac{1}{29 \cdot 33} + \frac{1}{33 \cdot 37} + \dots + \frac{1}{89 \cdot 93}$.

(46) נתון השוויון: $(n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{n}{6}(2n+1)(7n+1)$

- א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.
 ב. חשב באמצעות סעיף א' את הסכום: $26^2 + 27^2 + 28^2 + \dots + 48^2$.

(47) נתון השוויון: $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$

- א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.
 ב. הבע באמצעות n את הסכום: $4^2 + 6^2 + 8^2 + \dots + (4n)^2$.

(48) נתונים השוויונים הבאים:

א. $3n + (3n+1) + (3n+2) + \dots + 4n = \frac{7}{3}(n^2 + 3n - 1)$

ב. $3n + (3n+1) + (3n+2) + \dots + 4n = n^2 + 11n - 5$

ג. $3n + (3n+1) + (3n+2) + \dots + 4n = \frac{7n}{2}(n+1)$

קבע איזה מהשוויונים נכון לכל n טבעי, והוכח אותו באינדוקציה.

$$(49) \text{ נתון השוויון: } n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + \dots + (3n) = an(2n+b).$$

- א. נתון כי השוויון נכון עבור $n=1$ ו- $n=2$. מצא את ערכי a ו- b .
 ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

$$(50) \text{ נתון אי-השוויון: } \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}$$

- א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי הגדול מ-2.
 ב. הוכח באמצעות סעיף א' כי מתקיים: $\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{18} > \frac{1}{2}$

$$(51) \text{ נתון אי-השוויון: } n^2 < 2^n$$

- א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי הגדול מ-4.
 ב. הוכח באמצעות סעיף א' כי מתקיים: $5^2 \cdot 6^2 \cdot 7^2 \cdot 8^2 \cdot \dots \cdot 20^2 < 2^{200}$

$$(52) \text{ הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הסכום: } 9 + 27 + 81 + \dots + 3^{3n+1}$$

מתחלק ב-117 ללא שארית לכל n טבעי.

$$(53) \text{ ענה על הסעיפים הבאים:}$$

- א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $n^3 + 5n$ מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.
 ב. נתון כי $a+b$ מתחלק ב-6 ללא שארית.
 הוכח כי $a^3 + b^3$ מתחלק ב-6 ללא שארית.

$$(54) \text{ ענה על הסעיפים הבאים:}$$

- א. הוכח את הטענה: אם ל- n טבעי מסוים $3^n + 5^n$ מתחלק ב-16 ללא שארית אז גם $3^{n+2} + 5^{n+2}$ מתחלק ב-16 ללא שארית.
 ב. האם מהטענה בסעיף א' נובע כי $3^n + 5^n$ מתחלק ב-16 ללא שארית עבור כל n טבעי אי-זוגי?
 ג. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $3^n + 5^n$ מתחלק ב-8 ללא שארית לכל n טבעי אי-זוגי.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

מושג הסכימה וכתיבה מקוצרת של אינדוקציות:

סיכום כללי:

סימון הסכימה (קרי: סיגמה) מוגדר באופן הבא: $\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

מקור הסימון נובע מהמילה Sum ומשמעו הוא סכימה של איברים המתחילים

בערך המצוין בתחתית הסימון $\left(\sum_{k=1}^n \right)$ עד לערך המצוין בחלקו העליון $\left(\sum_{k=1}^n \right)$.

דוגמאות:

$$\bullet \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$\bullet \sum_{k=3}^{12} k^2 = 3^2 + 4^2 + \dots + 12^2$$

$$\bullet \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{4n+1}$$

שאלות:

$$(1) \text{ הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

$$(2) \text{ הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$(3) \text{ הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{n}{4n+1}$$

$$(4) \text{ הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n 2^k = 2(2^n - 1)$$

$$(5) \quad \text{הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n \frac{3}{4^{k-1}} = 4 - \frac{1}{4^{n-1}}$$

$$(6) \quad \text{הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^{3n} k = 1 \frac{1}{2} n(3n+1)$$

$$(7) \quad \text{הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^{3n} (4k-1) = 3n(6n+1)$$

$$(8) \quad \text{הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n (n+k) = \frac{n}{2}(3n+1)$$

$$(9) \quad \text{הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n 3^{n+k} = \frac{3^{n+1}(3^n-1)}{2}$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.