סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

תוכן העניינים

תוכן העניינים

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 1 - מבוא לאלגברה

תוכן העניינים

מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

מספרים מכוונים הם מספרים שיכולים לקבל סימן חיובי או שלילי, כגון:

- בקניון גדול ישנן קומות 1, 2, 3, 4, וכן חניונים הממוקמים בקומות 1-, 2- ו-3-.
- גובה פני הים מוגדר להיות 0 מטרים. העיר חיפה נמצאת כ-103 מטרים מעל פני הים בעוד שים המלח נמצא בגובה 426- מטרים.

כללים:

- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים זהים, מחברים את המספרים עצמם והסימן נשאר.
- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים מנוגדים, מחסירים את המספרים זה מזה (הקטן מהגדול) וסימן התוצאה כסימן המספר הגדול מביניהם.
- כפל וחילוק יתבצע בשני חלקים:
  - ביצוע הפעולה על המספרים עצמם.
  - קביעת הסימן של התוצאה באופן הבא:
    - כפל או חילוק של שני מספרים בעלי אותו סימן - התוצאה תהיה חיובית.
    - כפל או חילוק של שני מספרים שוני סימן - התוצאה תהיה שלילית.

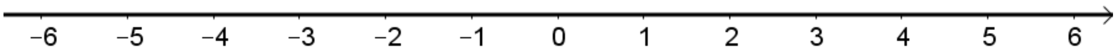
הערה:

אם יש רצף של מכפלות (או חילוקים), סימן התוצאה תלוי במספר הפעמים שבהם מופיע סימן שלילי (-). אם הסימן מופיע מספר זוגי של פעמים התוצאה חיובית, ואם הוא מופיע מספר אי-זוגי של פעמים אזי התוצאה שלילית.

שאלות:

1) סמנו את המספרים הבאים על ציר המספרים בהתאמה:

$$-3\frac{1}{2}\ ,\ 4\ ,\ 1\frac{1}{3}\ ,\ -5\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ 2\ ,\ 0\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ -2$$



2) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $3+2$

ב. $-3-2$

ג. $3-2$

ד. $-3+2$

ה. $-1-4$

ו. $7+10$

ז. $-6+5$

ח. $-7+3$

3) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $5+7-23+1$

ב. $5-8-12+17$

ג. $3-14+2+6$

ד. $-4-11+2+9$

ה. $6-21+3-7$

ו. $-7-13+5-3$

4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $4\cdot 9$

ב. $4\cdot(-7)$

ג. $(-6)\cdot(-5)$

ד. $(-5)\cdot(-3)$

ה. $(-2)\cdot 8$

ו. $(-8)\cdot 5$

ז. $(-2)\cdot(-3)\cdot(-3)$

ח. $2\cdot 3\cdot 3$

ט. $(-2)\cdot 3\cdot(-3)$

י. $(-2)\cdot(-3)\cdot 3$

יא. $2\cdot 3\cdot(-3)$

יב. $(-2)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-2)$

יג. $(-1)\cdot(-2)\cdot(-4)\cdot 2$

יד. $1\cdot(-2)\cdot(-4)\cdot 2$

5) מהו הסימן של תוצאת המכפלה בכל מקרה:

א. $(-2)\cdot(-4)\cdot(-3)\cdot(-10)\cdot(-6)\cdot(-5)$

ב. $(-1)\cdot 2\cdot 4\cdot(-3)\cdot(-10)\cdot 6\cdot(-5)$

ג. $(-1)\cdot 2\cdot 4\cdot(-3)\cdot(-10)\cdot(-6)\cdot(-5)$

ד. $(-1)\cdot 2\cdot 4\cdot(-3)\cdot(-10)\cdot 6\cdot 5$

6) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(-25):(-5)$

ב. $(-30):3$

ג. $40:(-10)$

ד. $(-32):(-4)$

ה. $(-6):18$

ו. $4:(-16)$

7) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{-60}{12}$

ב. $\frac{42}{-6}$

ג. $\frac{32}{-4}$

ד. $\frac{-12}{-3}$

8) מה התוצאה של כל אחת מהפעולות הבאות:

א. $0:5$

ב. $(-2)\cdot 0$

ג. $0\cdot(-3)\cdot 4$

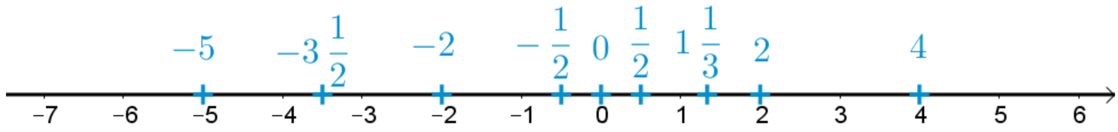
ד. $6:0$

ה. $0+4$

ו. $0-4$

תשובות סופיות:

1) להלן מערכת הצירים:



2) א. 5 ב. -5 ג. 1 ד. -1 ה. -5
ו. 17 ז. -1 ח. -4.

3) א. -10 ב. 2 ג. -3 ד. -4 ה. -19 ו. -18.

4) א. 36 ב. -28 ג. 30 ד. 15 ה. -16
ו. -40 ז. -18 ח. 18 ט. 18 י. 18
יא. -18 יב. 36 יג. -16 יד. 16.

5) א. + ב. + ג. - ד. -.

6) א. 5 ב. -10 ג. -4 ד. 8 ה. $-\frac{1}{3}$ ו. $-\frac{1}{4}$.

7) א. -5 ב. -7 ג. -8 ד. 4.

8) א. 0 ב. 0 ג. 0 ד. לא מוגדר ה. 4 ו. -4.

חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

הגדרה:

פעולת החזקה היא צורה מקוצרת שמייצגת פעולת כפל של אותו מספר בעצמו מספר פעמים. סימון החזקה הוא באופן הבא:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$$

כאשר a נקרא הבסיס ו-n נקראת החזקה.

הערות:

- כאשר הבסיס חיובי, התוצאה תמיד תהיה חיובית ללא קשר האם החזקה היא זוגית או אי-זוגית.
- כאשר הבסיס שלילי, התוצאה תהיה חיובית אם החזקה היא זוגית ושלילית אם החזקה היא אי-זוגית.

הגדרה:

פעולת השורש היא הפוכה לפעולת החזקה והיא מאפשרת למצוא את בסיס החזקה. סימון השורש הוא באופן הבא:

$$\sqrt[n]{a}$$

כאשר a נקרא הבסיס ו-n נקרא סדר השורש.

הערות:

- שורש למספר חיובי יכול להיות מסדר זוגי או אי-זוגי.
- שורש למספר שלילי יכול להיות מסדר אי-זוגי בלבד.

שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. 3^2
ב. 3^3
ג. $(-3)^3$
ד. $(-2)^3$
ה. 4^3
ו. 3^4
ז. $(-5)^3$
ח. 10^4
ט. $-(-3)^4$
י. -5^4
יא. -4^3
יב. $-(-2)^6$

2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sqrt[3]{-27}$
ב. $\sqrt[4]{625}$
ג. $\sqrt[4]{-16}$
ד. $\sqrt[5]{-32}$
ה. $-\sqrt[4]{81}$
ו. $-\sqrt[3]{1000}$

תשובות סופיות:

1) א. 9 ב. 27 ג. -27 ד. -8 ה. 64 ו. 81
ז. -125 ח. 10000 ט. -81 י. -625 יא. -64 יב. -64

2) א. -3 ב. 5 ג. לא מוגדר ד. -2 ה. -3 ו. -10

סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

סדר פעולות חשבון:

- פעולות כפל וחילוק קודמות לפעולות חיבור וחיסור.
- פעולות חזקה ושורש קודמות לפעולות כפל וחילוק.
- סוגריים קודמים לכל.

שאלות:

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

1) $\sqrt{81}+3\cdot2^3-40:8$

2) $(-3)^2:9-2\cdot(-4^2)$

3) $\sqrt{144}-20:4+3\cdot(-2)^2$

4) $3+4\cdot[-3+4\cdot(-2)]+\sqrt{10+6}$

5) $(-3)^4:(-9)-5\cdot(-2)^3$

6) $-\sqrt{9}+5^2:(-4-1)-24:12\cdot3$

7) $-2^5:(-8)+4^2-3\cdot5$

8) $\sqrt[3]{-27}+4\cdot3^2-2\cdot3^3$

9) $\left[6\cdot(-1)^4-10\cdot(-1)^3\right]\cdot(-1)^5$

10) $\left(8-\sqrt[3]{64}\right)\cdot\left(2\cdot(-4)-\sqrt[5]{243}\right)$

11) $\frac{3^2\cdot(8-2\cdot3)^3}{(5^2\cdot3-72)\cdot(-4)}+2\cdot\{15-20:(4+3\cdot2)\}$

תשובות סופיות:

1) 28	**2)** 33	**3)** 19	**4)** -37
5) 31	**6)** -14	**7)** 5	**8)** -21
9) -16	**10)** -44	**11)** 20	

שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים:

סיכום כללי:

הגדרה כללית:

השבר הוא חלק מתוך השלם. מקובל לסמן שבר באמצעות קו שבר המפריד בין המונה (החלק העליון) למכנה (החלק התחתון) באופן הבא:

$$\frac{\textbf{מונה}}{\textbf{מכנה}}$$

ישנם שלושה סוגים אפשריים של שברים:

- שבר פשוט – בו המונה קטן מהמכנה (ולכן תמיד יהיה קטן מ-1).
- שבר מדומה – בו המונה גדול מהמכנה (יהיה גדול בערכו מ-1).
- שבר מעורב – המכיל שילוב של מספר שלם ושבר כלשהו.

שבר עשרוני:

שבר שהמכנה שלו הוא מספר המהווה כפולות של 10 כגון: 10, 100, 1000 ...
שבר עשרוני מיוצג ע"י נקודה עשרונית אשר מבדילה בין החלק שלם לחלק השברי באופן הבא:

$$\underbrace{XX}_{\text{שלמים}}.\underbrace{YYY}_{\text{שברים}}$$

כדי להמיר שבר פשוט לשבר עשרוני המכנה צריך להיות בכפולות של 10.

אחוזים - הגדרה:

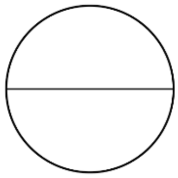
השבר $\frac{1}{100}$ מוגדר להיות אחוז אחד ומסומן באופן הבא: 1%.

באופן זה השבר $\frac{45}{100}$ יכתב: 45% , והשבר $\frac{145}{100}$ יכתב: 145%.

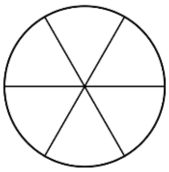
שאלות:

1) צבע את החלקים המתאימים בכל עיגול:

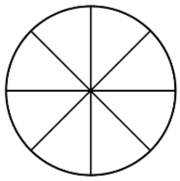
א. צבע $\frac{1}{2}$ מהעיגול



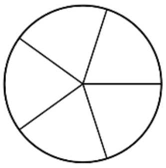
ב. צבע $\frac{1}{6}$ מהעיגול



ג. צבע $\frac{3}{8}$ מהעיגול

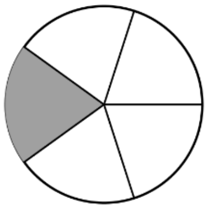


ד. צבע $\frac{2}{5}$ מהעיגול

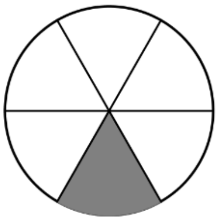


2) כתוב את השבר המתאים לחלקים הצבועים בכל אחד מהמקרים הבאים:

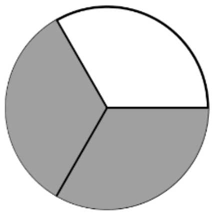
א. שבר:



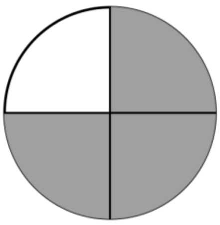
ב. שבר:



ג. שבר:



ד. שבר:



3) הרחב את השברים הבאים:

א. השבר $\frac{1}{2}$ לפי בסיס 4, לפי בסיס 18, לפי בסיס 40.

ב. השבר $\frac{3}{5}$ לפי בסיס 10, לפי בסיס 25, לפי בסיס 60.

ג. השבר $\frac{5}{8}$ לפי בסיס 16, לפי בסיס 32, לפי בסיס 88.

4) צמצם את השברים הבאים ככל הניתן:

א. $\frac{25}{30}$ ב. $\frac{10}{30}$ ג. $\frac{6}{24}$ ד. $\frac{4}{20}$

ה. $\frac{35}{56}$ ו. $\frac{24}{42}$ ז. $\frac{36}{48}$ ח. $\frac{33}{121}$

5) המר את השברים המדומים הבאים לשברים מעורבים:

א. $-\frac{20}{3}$ ב. $\frac{19}{4}$ ג. $\frac{12}{5}$ ד. $\frac{22}{5}$

ה. $-\frac{34}{6}$ ו. $-\frac{50}{7}$ ז. $\frac{47}{8}$ ח. $\frac{60}{9}$

6) המר את השברים המעורבים הבאים לשברים מדומים:

א. $1\frac{2}{3}$ ב. $3\frac{5}{6}$ ג. $4\frac{1}{2}$ ד. $6\frac{1}{4}$

ה. $11\frac{3}{4}$ ו. $-2\frac{5}{8}$ ז. $-6\frac{2}{7}$ ח. $12\frac{7}{9}$

7) קבע איזה שבר גדול יותר בכל אחד מהמקרים הבאים:

א. $\frac{3}{10}$ או $\frac{4}{10}$ ב. $\frac{7}{8}$ או $\frac{7}{6}$

ג. $\frac{2}{3}$ או $\frac{5}{6}$ ד. $\frac{5}{18}$ או $\frac{7}{12}$

8) המר את השברים העשרוניים הבאים לשברים פשוטים מצומצמים או מעורבים:

א. 0.7   ב. 0.07   ג. 0.007   ד. 0.34

ה. 0.304   ו. 0.65   ז. 1.2   ח. 1.02

ט. 1.42   י. 3.5   יא. 6.03   יב. 5.125

9) המר את השברים הבאים לשברים עשרוניים:

א. $\frac{3}{10}$ ב. $\frac{3}{100}$ ג. $\frac{3}{1000}$ ד. $\frac{23}{1000}$

ה. $\frac{1}{2}$ ו. $\frac{3}{4}$ ז. $\frac{2}{5}$ ח. $\frac{4}{25}$

ט. $\frac{7}{50}$ י. $\frac{3}{20}$ יא. $\frac{7}{8}$ יב. $\frac{9}{16}$

יג. $9\frac{1}{10}$ יד. $3\frac{1}{5}$ טו. $4\frac{7}{8}$ טז. $-4\frac{1}{16}$

10) כתוב את השברים הבאים בצורתם העשרונית
(היעזר במחשבון וכתוב עד 3 ספרות אחרי הנקודה העשרונית):

א. $\frac{2}{3}$ ב. $\frac{5}{6}$ ג. $\frac{3}{7}$ ד. $\frac{2}{11}$

11) המר מאחוזים לשברים פשוטים:

א. 25% ב. 32% ג. 64% ד. 80%

ה. 120% ו. 5% ז. 300% ח. 150%

12) המר משברים פשוטים לאחוזים:

א. $\frac{3}{4}$ ב. $\frac{1}{8}$ ג. $\frac{4}{5}$ ד. $\frac{7}{20}$

ה. $\frac{11}{40}$ ו. $\frac{70}{125}$ ז. $\frac{5}{6}$ ח. $\frac{4}{9}$

תשובות סופיות:

1) תשובה מודגמת בסרטון.

2) א. $\frac{1}{5}$ ב. $\frac{1}{6}$ ג. $\frac{2}{3}$ ד. $\frac{3}{4}$

3) א. $\frac{4}{8},\frac{18}{36},\frac{40}{80}$ ב. $\frac{30}{50},\frac{75}{125},\frac{180}{300}$ ג. $\frac{80}{128},\frac{160}{256},\frac{440}{700}$

4) א. $\frac{5}{6}$ ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. $\frac{1}{5}$ ה. $\frac{5}{8}$ ו. $\frac{4}{7}$
ז. $\frac{3}{4}$ ח. $\frac{3}{11}$

5) א. $-6\frac{2}{3}$ ב. $4\frac{3}{4}$ ג. $2\frac{2}{5}$ ד. $4\frac{2}{5}$ ה. $-5\frac{4}{6}$ ו. $-7\frac{1}{7}$
ז. $5\frac{7}{8}$ ח. $6\frac{2}{3}$

6) א. $\frac{5}{3}$ ב. $\frac{23}{6}$ ג. $\frac{9}{2}$ ד. $\frac{25}{4}$ ה. $\frac{47}{4}$ ו. $-\frac{21}{8}$
ז. $-\frac{44}{7}$ ח. $\frac{115}{9}$

7) א. $\frac{4}{10}$ ב. $\frac{7}{6}$ ג. $\frac{5}{6}$ ד. $\frac{7}{12}$

8) א. $\frac{7}{10}$ ב. $\frac{7}{100}$ ג. $\frac{7}{1000}$ ד. $\frac{17}{50}$ ה. $\frac{38}{125}$ ו. $\frac{13}{20}$
ז. $1\frac{1}{5}$ ח. $1\frac{1}{50}$ ט. $1\frac{21}{50}$ י. $3\frac{1}{2}$ יא. $6\frac{3}{100}$ יב. $5\frac{1}{8}$

9) א. 0.3 ב. 0.03 ג. 0.003 ד. 0.023 ה. 0.5 ו. 0.75
ז. 0.4 ח. 0.16 ט. 0.14 י. 0.15 יא. 0.875
יב. 0.5625 יג. 9.1 יד. 3.2 טו. 4.875 טז. -4.0625

10) א. $0.\overline{6}$ ב. $0.8\overline{3}$ ג. 0.428 ד. $0.1\overline{8}$

11) א. $\frac{1}{4}$ ב. $\frac{8}{25}$ ג. $\frac{16}{25}$ ד. $\frac{4}{5}$ ה. $1\frac{1}{5}$ ו. $\frac{1}{20}$
ז. 3 ח. $1\frac{1}{2}$

12) א. 75%   ב. 12.5%   ג. 80%   ד. 35%   ה. 27.5%   ו. 56%

ז. 83.333%   ח. 44.444%

כפל וחילוק שברים:

סיכום כללי:

- כשכופלים שני שברים יש לכפול מונה במונה ומכנה במכנה.
  - במידה ומדובר במספר שלם הכופל שבר, יש לכפול אותו במונה.
  - במידה ומדובר בשברים מעורבים, יש להפוך אותם תחילה לשברים מדומים ורק אז לבצע את פעולת הכפל.
- כדי לחלק שברים, יש לכפול את השבר הראשון בהופכי של השבר השני.
  - הופכי של שבר מסוים מתקבל ע"י החלפת המונה במכנה.

שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}$ ב. $\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}$ ג. $\frac{2}{9}\cdot\frac{8}{10}$

ד. $3\cdot\frac{4}{5}$ ה. $6\cdot\frac{2}{3}$ ו. $\frac{12}{25}\cdot5$

ז. $1\frac{3}{5}\cdot2\frac{1}{4}$ ח. $3\frac{1}{2}\cdot4\frac{2}{5}$ ט. $3\frac{3}{7}\cdot2\frac{2}{5}$

י. $\left(\frac{4}{5}\right)^3$ יא. $\frac{4}{5^3}$ יב. $\frac{4^3}{5}$

2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{2}{5}:\frac{4}{9}$ ב. $\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$ ג. $\frac{3}{25}:\frac{7}{10}$

ד. $8:\frac{2}{9}$ ה. $10:\frac{2}{3}$ ו. $\frac{5}{6}:3$

ז. $\frac{2}{5}:5$ ח. $3\frac{3}{4}:5\frac{5}{8}$ ט. $2\frac{2}{5}:1\frac{3}{15}$

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{9}{20}$ ב. $\frac{5}{21}$ ג. $\frac{8}{45}$ ד. $2\frac{2}{5}$ ה. 4 ו. $2\frac{2}{5}$

ז. $3\frac{3}{5}$ ח. $15\frac{2}{5}$ ט. $8\frac{8}{35}$ י. $\frac{64}{125}$ יא. $\frac{4}{125}$ יב. $12\frac{4}{5}$

2) א. $\frac{9}{10}$ ב. $1\frac{1}{2}$ ג. $\frac{6}{35}$ ד. 36 ה. 15 ו. $\frac{5}{18}$

ז. $\frac{2}{25}$ ח. $\frac{2}{3}$ ט. 2

חיבור וחיסור שברים:

סיכום כללי:

כפולה משותפת מינימלית:

בהינתן זוג מספרים a ו- b, המספר הקטן ביותר אשר תוצאת חלוקתו במספרים הנ״ל מניבה מספר שלם נקרא הכפולה המינימלית שלהם.

הערות:

- כפולה מינימלית יכולה להיות גם עבור יותר משני מספרים.
- הכפולה המינימלית תהיה המכנה המשותף בעת פעולות חיבור וחיסור של שברים.

כללי החיבור והחיסור של שברים:

- חיבור וחיסור של שברים בעלי אותו המכנה מתבצע על המספרים שבמונה בלבד כאשר המכנה נשאר כפי שהוא.
  דוגמא: $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$, $\frac{2}{7}-\frac{3}{7}=\frac{2-3}{7}=\frac{-1}{7}$.
- חיבור וחיסור של שברים בעלי מכנים שונים מתבצע ע״י פעולת מכנה משותף.
  דוגמא: $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{6+5}{15}=\frac{11}{15}$, $\frac{1}{4}-\frac{5}{6}=\frac{3}{12}-\frac{10}{12}=\frac{3-10}{12}=-\frac{7}{12}$.
- חיבור של שבר עם מספר שלם יתבצע באופן ישיר.
  דוגמא: $3+\frac{1}{4}=3\frac{1}{4}$.
  חיסור של שבר ממספר שלם יתבצע ע״י הוצאת שלמים מהשבר.
  דוגמא: $3-\frac{1}{4}=2\frac{4}{4}-\frac{1}{4}=2\frac{3}{4}$.

דרך נוספת היא ע״י העברת המספר השלם לשבר מדומה: $3-\frac{1}{4}=\frac{12}{4}-\frac{1}{4}=\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$.

- חיבור וחיסור של שברים מעורבים יתבצע ע"י העברתם לשברים מדומים תחילה.

דוגמא: $3\frac{2}{5}+2\frac{1}{6}=\frac{17}{5}+\frac{13}{6}=\frac{17\cdot 6}{30}+\frac{13\cdot 5}{30}=\frac{102+65}{30}=\frac{167}{30}=5\frac{17}{30}$.

ניתן גם לפצל ולבצע את פעולת החיבור (או החיסור) של המספרים השלמים תחילה, ולאחר מכן לבצע את הפעולה עבור השברים.

דוגמא: $2\frac{3}{4}-5\frac{1}{3}=(2-5)+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)=-3+\left(\frac{9}{12}-\frac{4}{12}\right)=-3+\frac{5}{12}=-2\frac{7}{12}$.

שאלות:

1) מצא את הכפולה המשותפת המינימלית של המספרים הבאים:

א. 2 ו-3
ב. 2 ו-4
ג. 3 ו-5
ד. 6 ו-10
ה. 4 ו-10
ו. 4 ו-6
ז. 3, 5 ו-10
ח. 2, 3 ו-8

2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}$
ב. $\frac{5}{9}+\frac{2}{9}$
ג. $\frac{4}{13}+\frac{9}{13}$
ד. $\frac{7}{8}+\frac{7}{8}$
ה. $\frac{7}{8}-\frac{3}{8}$
ו. $\frac{8}{9}-\frac{7}{9}$
ז. $\frac{2}{12}-\frac{5}{12}$
ח. $\frac{2}{5}-\frac{6}{5}$
ט. $\frac{2}{8}+\frac{5}{8}+\frac{6}{8}$
י. $\frac{7}{15}+\frac{8}{15}-\frac{6}{15}$

3) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2}+\frac{4}{3}$

ב. $\frac{3}{5}+\frac{1}{10}$

ג. $\frac{4}{6}-\frac{1}{12}$

ד. $\frac{3}{6}-\frac{5}{8}$

ה. $\frac{5}{4}+\frac{7}{2}+\frac{2}{8}$

ו. $\frac{7}{3}+\frac{6}{5}+\frac{3}{10}$

ז. $\frac{4}{7}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}$

ח. $\frac{1}{4}+\frac{2}{8}-\frac{3}{5}$

4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2+\frac{5}{6}$

ב. $2-\frac{5}{6}$

ג. $2\frac{1}{4}+\frac{5}{6}$

ד. $2\frac{1}{4}-\frac{5}{6}$

ה. $3\frac{2}{3}+4\frac{1}{4}$

ו. $5\frac{7}{8}-6\frac{1}{2}$

ז. $2+\frac{5}{6}-\frac{1}{9}$

ח. $\frac{3}{4}-1\frac{1}{5}+\frac{8}{20}$

5) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)+2\frac{1}{3}$

ב. $\frac{3}{14}:\frac{2}{7}+\frac{1}{3}\cdot2\frac{1}{4}-\frac{2}{5}$

ג. $\frac{5}{11}\cdot2\frac{3}{4}-6:\frac{2}{5}$

ד. $2\frac{4}{5}:\frac{9}{10}\cdot\frac{6}{7}+\frac{1}{6}$

ה. $\frac{5}{6}:\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\cdot3\frac{1}{4}$

תשובות סופיות:

1) א. 6 ב. 4 ג. 15 ד. 30 ה. 20 ו. 12
ז. 30 ח. 24

2) א. $\frac{4}{5}$ ב. $\frac{7}{9}$ ג. 1 ד. $1\frac{3}{4}$ ה. $\frac{1}{2}$ ו. $\frac{1}{9}$
ז. $-\frac{1}{4}$ ח. $-\frac{4}{5}$ ט. $1\frac{5}{8}$ י. $\frac{3}{5}$

3) א. $1\frac{5}{6}$ ב. $\frac{7}{10}$ ג. $\frac{7}{12}$ ד. $-\frac{1}{8}$ ה. 5 ו. $3\frac{5}{6}$
ז. $\frac{19}{21}$ ח. $-\frac{1}{10}$

4) א. $2\frac{5}{6}$ ב. $1\frac{1}{6}$ ג. $3\frac{1}{12}$ ד. $1\frac{5}{12}$ ה. $7\frac{11}{12}$ ו. $-\frac{5}{8}$
ז. $2\frac{13}{18}$ ח. $-\frac{1}{20}$

5) א. $2\frac{11}{24}$ ב. $1\frac{1}{10}$ ג. $-13\frac{3}{4}$ ד. $2\frac{5}{6}$ ה. $3\frac{5}{18}$

בעיות יסודיות באחוזים:

סיכום כללי:

נוסחה לביצוע חישובים עם אחוזים :

$$\text{תמורת האחוז} = \text{שלם} \cdot \frac{\text{אחוז}}{100}$$

למשל, בהינתן גודל שלם 120, אשר יש לחשב כמה הם 40 אחוזים ממנו, נקבל לפי הנוסחה : $48 = 120 \cdot \frac{40}{100}$, כלומר : **תמורת האחוז 40 מהגודל 120 היא 48**.

שאלות:

1) בכיתה 30 תלמידים. 60% מתוכם בנות.
א. כמה בנות בכיתה?
ב. כמה בנים בכיתה?

2) בכיתה 28 בנות המהוות 70% מכלל התלמידים בכיתה.
א. כמה תלמידים בכיתה?
ב. כמה בנים בכיתה?

3) מחיר בגד-ים הוא 300 ₪. בסוף העונה הוא נמכר ב-20% הנחה.
א. מהו מחירו בסוף העונה?
ב. מה גודל ההנחה?

4) מחיר ההשקה של בושם מסוים הוא 500 ₪. לאחר מכן מועלה מחירו ב-8%.
א. מה מחירו הסופי?
ב. מה גודל ההתייקרות?

5) מחיר ליטר דלק הוא 5 ₪ לליטר. בחנוכה מוזל מחירו ב-7%.
בפסח מועלה מחירו ב-7%. מה מחירו בסוף השנה?

6) מוצר מסויים מתייקר בסוכות ב-12%. בפורים מוזל המוצר ב-12%.
מחירו בסוף השנה הוא 394.24 ₪. מה מחירו בתחילת השנה?

7) ענה על השאלות הבאות:
א. באולם קולנוע 200 צופים, מתוכם 176 בנים.
מה אחוז הבנים בקהל?
ב. בכיתה 30 תלמידים, מתוכם 18 בנות.
מה אחוז הבנות בכיתה?
ג. מחיר מוצר התייקר מ-80 ₪ ל-120 ₪.
בכמה אחוזים התייקר המוצר?
ד. מחיר מוצר הוזל מ-120 ₪ ל-80 ₪.
בכמה אחוזים הוזל המוצר?
ה. מחיר מוצר התייקר מ-150 ₪ ל-200 ₪.
בכמה אחוזים התייקר המוצר?
ו. מחיר מוצר מוזל הוזל מ-200 ₪ ל-150 ₪.
בכמה אחוזים הוזל המוצר?

תשובות סופיות:

1) א. 18 בנות. ב. 12 בנים.

2) א. 40 תלמידים. ב. 12 בנים.

3) א. 240 ₪ ב. 60 ₪

4) א. 540 ₪ ב. 40 ₪

5) 4.9755 ₪

6) 400 ₪

7) א. 88% ב. 60% ג. 50% ד. 33.33% ה. 33.33% ו. 25%

חזרה על תבניות מספר:

סיכום כללי:

משתנה הוא סמל המתאר כמות או גודל כלשהם אשר אינם ידועים ועשויים להשתנות.

תבנית מספר היא ביטוי אלגברי אשר מכיל משתנה (או משתנים).
ניתן להציב במשתנים ערכים מספריים שונים ולקבל תוצאות שונות עבור תבנית המספר עצמה.

במתמטיקה, תפקידה של תבנית המספר הוא להביע גודל מסוים אשר לערכו יש משמעויות שונות. דוגמא לכך היא: קנייה של x פריטים, אשר כל אחד עולה 3 שקלים, יניבו תבנית מספר של $3\cdot x$ אשר מייצגת את הסכום הכולל של הפריטים.

שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- x הנתון:

א. $2x+5$ כאשר $x=3$
ב. x^2+3x כאשר $x=2$
ג. $-x^2+2x+3$ כאשר $x=5$
ד. $-x^2-9x+5$ כאשר $x=5$
ה. x^3+1 כאשר $x=-2$
ו. $4-x^3$ כאשר $x=-1$
ז. $(x+1)(2-x)$ כאשר $x=4$
ח. $x^2(3x-4)$ כאשר $x=3$

2) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- x הנתון:

א. $27x^5-2x^3+x$ כאשר $x=\frac{1}{3}$.
ב. $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+6$ כאשר $x=-\frac{2}{3}$.

3) הצב את הערכים המספריים במקום הפרמטרים וחשב את ערך תבנית המספר:

א. $a^2+2ab+b^2$ עבור: $a=3$, $b=-5$.

ב. $(x-3)^2+3x^2b$ עבור: $x=5$, $b=-1$.

ג. $-x^3-2xy+y^4$ עבור: $x=-2$, $y=-1$.

ד. $\frac{(a-2c)^4}{a}-a^2$ עבור: $a=2$, $c=-2$.

ה. $\frac{4a^2-3b}{c}$ עבור: $a=-1$, $b=2$, $c=-4$.

ו. $\sqrt{c-3a}$ עבור: $a=-1$, $c=13$ ועבור: $a=\frac{1}{3}$, $c=82$.

ז. $\frac{p^3+2\sqrt{q+1}}{m}$ עבור: $p=-5$, $q=48$, $m=3$.

תשובות סופיות:

1) א. 11 ב. 10 ג. -12 ד. -65 ה. -7 ו. 5
ז. -10 ח. 45

2) א. $\frac{10}{27}$ ב. $5\frac{22}{27}$

3) א. 4 ב. -71 ג. 5 ד. 644 ה. $\frac{1}{2}$
ו. הצבה ראשונה: 4, הצבה שניה: 9 ז. -37

כינוס איברים:

סיכום כללי:

תבניות אלגבריות יכולות להכיל איברים רבים ולכן נרצה לכנס אותם על מנת לפשט את התבנית. כדי לכנס איברים ניקח את כל קבוצת האיברים מאותו הסוג ונחבר את המקדמים שלהם. דוגמא: $3x+6x-5x=(3+6-5)x=4x$.

איברים שונים נבדלים זה מזה בערך התבנית האלגברית שלהם.

כך: $3x$ שונה מ- $4y$ ושונה מ- $2xy$. באותו האופן, האיברים x ו- x^2 הם שונים.

שאלות:

כנס איברים דומים:

1) $5x+7x-4x$

2) $9x^2-2x^2-3x^2-2x^2$

3) $-10xy+15xy+xy-2yx$

4) $x^2y-3yx^2+x^2y$

5) $8a^2+10a-5a^2-11a+a^2$

6) $2x^2-3m^2-x^2+3m^2$

7) $3xy+y-30y+6yx-7y$

8) $mn^2+4m^2n+6n^2m-10nm^2+mn^2$

9) $-6+x^3+4-3x^3+17x^3-17$

10) $y^2+x^2-5x^2+5y^2+4x^2-6y^2$

11) $7x^2-3x-4x+2$

12) $5xy+2x-3yx-x+1$

13) $3-x-x^2+4x+5x^2-12$

14) $x+xy+y-6yx-6y-6x$

15) $mn+n-5m+5nm-14n+3m$

16) $ab^2+6ba^2-6b+16a^2b+3b-6b^2a$

17) $z^3-4z^2+7-z^3-8+8z^2$

18) $4x^2z+6xz^2-6-xz^2+12+10zx^2$

19) $2-x^3-3-4x^2+2x+x^3+x^2-2$

20) $x^3-3x-4x^2+2x+x^3+x^2-2x^3$

21) $2a^2b+3x^2y+5a^2b+10x^2y$

22) $12x^2y^3+13a^2-20x^2y^3+2a^2$

23) $2y^2-4x^3y^2-10y^2-x^3y^2$

24) $-2x^3y+5x^2-4yx^3-6x^2$

25) $2a^2b+2b+3a^2+5b$

26) $5a^2b-8ab^2+20a^2b-14ab^2$

27) $-12x^2+2y^2+3x^2y+14xy^2-5xy^2-6y^2+2xy+11x^2+x^2y-9xy$

28) $21x^3y^3+x^2y^2-3xy^3+x^3y-15x^2y^2-7x^3y+12x^3y^3-4xy^3+4xy^3-6x^3y$

תשובות סופיות:

1) $8x$
2) $2x^2$
3) $4xy$
4) $-x^2y$
5) $4a^2-a$
6) x^2
7) $9xy-36y$
8) $8mn^2-6nm^2$
9) $15x^3-19$
10) 0
11) $7x^2-7x+2$
12) $2xy+x+1$
13) $4x^2+3x-9$
14) $-5x-5y-5xy$
15) $-13n-2m+6mn$
16) $-5ab^2+22a^2b-3b$
17) $4z^2-1$
18) $14x^2z+5xz^2+6$
19) $-3x^2+2x-3$
20) $-3x^2-x$
21) $7a^2b+13x^2y$
22) $-8x^2y^3+15a^2$
23) $-8y^2-5x^3y^2$
24) $-6x^3y-x^2$
25) $2a^2b+3a^2+7b$
26) $25a^2b-22ab^2$
27) $-x^2-4y^2+4x^2y+9xy^2-7xy$
28) $33x^3y^3-14x^2y^2-3xy^3-12x^3y$

פישוט ביטויים ע"י פתיחת סוגריים:

סיכום כללי:

בעת ביצוע כפל בין שני איברים יש לכפול את המקדמים בנפרד ואת האותיות (משתנים) בנפרד.

כלל הפילוג:

- $a(b+c)=ab+ac$.
- $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$.

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $2x\cdot 3x$
ב. $-4x\cdot(-7x)$
ג. $-2x\cdot(-4x)\cdot(-3)$
ד. $8m^2\cdot 4m^3$
ה. $3a^3\cdot(-2a^2)$
ו. $-b\cdot 4b^2\cdot\frac{b^2}{2}$
ז. $a\cdot 3b$
ח. $4a^2\cdot 7b^2$
ט. $ab\cdot(-2a^2b)$

2) פשט את הביטויים הבאים ע"י פתיחת סוגריים:

א. $2(3x-4)$
ב. $2(-3x^2+5x-1)$
ג. $(7x-2)4$
ד. $(1-2x)(-2)$
ה. $a(3a-1)$
ו. $b(b^2-3b+4)$
ז. $2x(5x+3)$
ח. $5x(x^2+2x-3)$
ט. $3t^2(4t-t^2+6)$
י. $\frac{5}{2}(4d^4-3d)d$

3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $5x+(3x-2)+(-4-2x)$
ב. $7x+(-4x-5)+3x+(-1+7x)$
ג. $8-(2x-5)-(4x+2)$
ד. $-6x-(-3x-1)-(-7-4x)+1$

ה. $\left(3-2x^2+4\right)2+3\left(x-x^2\right)-6(7-5x)+4x^2$

ו. $3y^2-\left(y+1-2y^2\right)+6(5y-6)-(-y-4)3+5\left(y^2+1\right)-7$

4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-1)(x+2)$ ב. $(x+3)(x-7)$

ג. $(3-x)(x+4)$ ד. $(3x+4)(5x+1)$

ה. $3(4x+1)(2x-3)$ ו. $-2(3x-1)(5-2x)$

5) פשט את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(x-1)(x+3)+2(3-x)$

ב. $(a+4)(a-2)-(a+5)(a-3)$

ג. $(2m-3)(4m+3)+5\left(2m^2-6\right)$

ד. $-x^2y^2\left(x^3y+x^2\right)+2xy\left(2x^3y-x^4y^2\right)$

תשובות סופיות:

1) א. $6x^2$ ב. $28x^2$ ג. $-24x^2$ ד. $32m^5$ ה. $-6a^5$ ו. $-2b^5$

ז. $3ab$ ח. $28a^2b^2$ ט. $-2a^3b^2$

2) א. $6x-8$ ב. $-6x^2+10x-2$ ג. $28x-8$ ד. $-2+4x$

ה. $3a^2-a$ ו. b^3-3b^2+4b ז. $10x^2+6x$ ח. $5x^3+10x^2-15x$

ט. $12t^3-3t^4+18t^2$ י. $10d^5-7.5d^2$

3) א. $6x-6$ ב. $13x-6$ ג. $-6x+11$ ד. $x+9$ ה. $-3x^2+33x-28$

ו. $10y^2+32y-27$

4) א. x^2+x-2 ב. $x^2-4x-21$ ג. $-x^2-x+12$

ד. $15x^2+23x+4$ ה. $24x^2-30x-9$ ו. $12x^2-34x+10$

5) א. x^2+3 ב. 7 ג. $18m^2-6m-39$ ד. $-3x^5y^3+3x^4y^2$

פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר:

סיכום כללי:

- נוסחת ריבוע של סכום/הפרש: $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.
- נוסחה להפרש ריבועים: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+5)^2$
ב. $(x+2)^2$
ג. $(4x+5)^2$
ד. $(6x+2)^2$
ה. $(7x+y)^2$
ו. $(5x+2y)^2$
ז. $(x^2+7)^2$
ח. $(x^2+y^2)^2$
ט. $(x^3+2y^2x)^2$

2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-6)^2$
ב. $(x-2)^2$
ג. $(5-x)^2$
ד. $(6x-1)^2$
ה. $\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2$
ו. $\left(\frac{1}{3}x-5\right)^2$
ז. $(3m-2n)^2$
ח. $\left(x^2-\frac{3}{5}y\right)^2$
ט. $(x^2y^2-7)^2$

3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-5)(x+5)$
ב. $(3+x)(x-3)$
ג. $(3x-1)(3x+1)$
ד. $(5-7x)(7x+5)$
ה. $\left(\frac{1}{2}x+6\right)\left(\frac{1}{2}x-6\right)$
ו. $\left(5y-\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{1}{4}x+5y\right)$
ז. $(x^2+y)(x^2-y)$
ח. $(3a^2b^3-4)(3a^2b^3+4)$

4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+1)(x+2)-3x$

ב. $(x-5)(5x-1)+2(4+x)$

ג. $x(2x-1)(2x+1)-4x^2(x+1)$

ד. $-(y+3x)(y-3x)+(y-3x)^2$

ה. $x(x+3)-(6+x)(6x+2)-(x+2)^2$

ו. $-5(x+7)(x-7)+3(2x+5)(5-x)+(x+1)^2$

תשובות סופיות:

1) א. $x^2+10x+25$ ב. x^2+4x+4 ג. $16x^2+40x+25$

ד. $36x^2+24x+4$ ה. $49x^2+14xy+y^2$ ו. $25x^2+20xy+4y^2$

ז. $x^4+14x+49$ ח. $x^4+2x^2y^2+y^4$ ט. $x^6+4x^4y^2+4y^4x^2$

2) א. $x^2-12x+36$ ב. x^2-4x+4 ג. $25-10x+x^2$

ד. $36x^2-12x+1$ ה. $9x^2-3x+\frac{1}{4}$ ו. $\frac{1}{9}x^2-3\frac{1}{3}x+25$

ז. $9m^2-12mn+4n^2$ ח. $x^4-\frac{6}{5}x^2y+\frac{9}{25}y^2$ ט. $x^4y^4-14x^2y^2+49$

3) א. x^2-25 ב. x^2-9 ג. $9x^2-1$ ד. $25-49x^2$

ה. $\frac{1}{4}x^2-36$ ו. $25y^2-\frac{1}{16}x^2$ ז. x^4-y^2 ח. $9a^4b^6-16$

4) א. x^2+2 ב. $5x^2-24x+13$ ג. $-4x^2-x$

ד. $18x^2-6xy$ ה. $-6x^2-39x-16$ ו. $-10x^2+17x+321$

פירוק לגורמים של ביטויים אלגברים:

סיכום כללי:

פירוק לגורמים הוא פעולה הפוכה לפתיחת סוגריים – נרצה להוציא את הגורמים המשותפים לאיברים מחוץ לסוגריים.

- פירוק לגורמים ע״י הוצאת איבר אחד משותף:
  - הוצאת מספר משותף: $2x-8=2(x-4)$.
  - הוצאת אות משותפת: $x^2-12x=x(x-12)$.
  - הוצאת מספר ואות יחד: $3x^2-21x=3x(x-7)$.
- פירוק לגורמים ע״י נוסחאות הכפל המקוצר:
  - נוסחת הבינום של ניוטון: $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$.
  - נוסחה להפרש ריבועים: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים ע״י הוצאת גורם משותף:

א. $3x-12$
ב. $6y-4$
ג. $20-8a$
ד. $4a^3+8b$
ה. $75m^2+25m+15$
ו. $40a^2-8b^2+64c^2$

2) פשט את הביטויים הבאים ע״י הוצאת גורם משותף:

א. y^2+5y
ב. $3x-11x^3$
ג. $6y^2+5y^3+4y$
ד. $\frac{1}{2}a^7-\frac{1}{4}a^5+a^3$

3) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $2x^2-8x$
ב. $3t^2+12t$
ג. $5n^3-20n^2+50n$
ד. $8y^2+6y^3-2y^4$
ה. $4x^2y^2+16x^2y-20xy^2$
ו. $27mn-3n^2m+9n^3m$

4) פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר:

א. $x^2+10x+25$
ב. $x^2+12x+36$
ג. $y^2-18y+81$
ד. $y^2-22y+121$
ה. $4x^2+4x+1$
ו. $16y^2-8y+1$
ז. $9x^2-24x+16$
ח. $25x^2+70x+49$

5) פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר:

א. r^2-25
ב. x^2-81
ג. $25y^2-49$
ד. $121x^2-1$
ה. x^2y^2-4
ו. $9y^4-169x^4$

6) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף ונוסחאות הכפל המקוצר:

א. $y-y^3$
ב. x^3-10x^2+25x
ג. m^4-1
ד. $196x^4-140x^3+25x^2$

תשובות סופיות:

1) א. $3(x-4)$ ב. $2(3y-2)$ ג. $4(5-2a)$
ד. $4(a^3+2b)$ ה. $5(15m^2+5m+3)$ ו. $8(5a^2-b^2+8c^2)$

2) א. $y(y+5)$ ב. $x(3-11x^2)$ ג. $y(6y+5y^2+4)$
ד. $a^3\left(\frac{1}{2}a^4-\frac{1}{4}a^2+1\right)$

3) א. $2x(x-4)$ ב. $3t(t+4)$ ג. $5n(n^2-4n+10)$
ד. $2y^2(4+3y-y^2)$ ה. $4xy(xy+4x-5y)$ ו. $3mn(9-n-3n^2)$

4) א. $(x+5)^2$ ב. $(x+6)^2$ ג. $(y-9)^2$ ד. $(y-11)^2$
ה. $(2x+1)^2$ ו. $(4y-1)^2$ ז. $(3x-4)^2$ ח. $(5x+7)^2$

5) א. $(r+5)(r-5)$ ב. $(x+9)(x-9)$ ג. $(5y+7)(5y-7)$
ד. $(11x+1)(11x-1)$ ה. $(xy+2)(xy-2)$ ו. $(3y^2+13x^2)(3y^2-13x^2)$

6) א. $y(1+y)(1-y)$ ב. $x(x-5)^2$ ג. $(m^2+1)(m+1)(m-1)$
ד. $x^2(14x-5)^2$.

פירוק הטרינום:

סיכום כללי:

טרינום משמעו תלת איבר מהצורה: ax^2+bx+c כאשר a, b ו-c הם מספרים כלשהם.

שיטת הטרינום מאפשרת לפרק את תלת האיבר ל-4 איברים ע"י פיצול האיבר bx לשני איברים באופן כזה שמאפשר להוציא גורם משותף.

הכלל הוא למצוא שני מספרים, m_1 ו-m_2, שמקיימים: $m_1 \cdot m_2 = ac$ ו-$m_1+m_2=b$.
לאחר מכן ניתן לפרק את הטרינום: $ax^2+bx+c=ax^2+m_1x+m_2x+c$.
השלב האחרון הוא הוצאת גורם משותף מכל זוג: $\underbrace{ax^2+m_1x}+\underbrace{m_2x+c}$.

הערה:

במקרה שנוסחת השורשים ידועה, ניתן להיעזר בה כדי למצוא את המספרים m_1 ו-m_2 באופן הבא: $m_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $m_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ולאחר מכן ניתן לכתוב את הטרינום כמכפלה: $ax^2+bx+c=a(x-m_1)(x-m_2)$. אם קיים פתרון (שורש) אחד $m_1=m_2=\frac{-b}{2a}$ אז נכתוב: $ax^2+bx+c=a(x-m_1)^2$ ואם לא קיימים פתרונות אז לא קיים פירוק כלל.

שאלות:

1) פרק את הביטויים הבאים לפי פירוק טרינום:

א. x^2+5x+4 ב. $x^2-8x+15$ ג. $x^2-33x+62$

ד. $2x^2+7x-15$ ה. $3x^2-11x+6$ ו. $6x^2+5x+1$

ז. $2x^2+x-6$ ח. $x^2-18x+81$ ט. x^2+2x+8

2) פרק את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחת השורשים.
הערה: במידה ולא למדת על נוסחת השורשים התעלם משאלה זו.

א. $6x^2+5x+1$ ב. x^2+5x+4

ג. $4x^2+20x+25$ ד. $3x^2-x+20$

תשובות סופיות:

1) א. $(x+1)(x+4)$ ב. $(x-3)(x-5)$ ג. $(x-2)(x-31)$

ד. $(2x-3)(x+5)$ ה. $(3x-2)(x-3)$ ו. $(3x+1)(2x+1)$

ז. $(x+2)(2x-3)$ ח. $(x-9)^2$ ט. אין פירוק.

2) א. $6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ ב. $(x+1)(x+4)$ ג. $(2x+5)^2$ ד. אין פירוק.

שברים אלגברים:

סיכום כללי:

הגדרה:

שבר אלגברי מורכב משתי תבניות, אשר אחת מחלקת את השנייה.

דוגמא לשברים אלגבריים: $\frac{4}{x-x^3}$, $\frac{3x}{x^2+1}$, $\frac{x+1}{x+2}$.

במקרה בו המכנה הוא מספר, לא מדובר בשבר אלגברי מכיוון שניתן לכתוב את הביטוי ללא צורך בחילוק בין ביטויים שונים כגון: $\frac{3x+5}{4}=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$.

תחום הגדרה של שבר:

היות ושבר אלגברי הוא תבנית אשר יכולה לקבל ערכים שונים בעת הצבות שונות, חשוב להגביל את המספרים שניתן להציב באופן כזה שלא תתקבל חלוקה באפס.

דוגמא: השבר $\frac{1}{x+4}$ לא מוגדר כאשר $x=-4$ מכיוון שמתקבל: $\frac{1}{0}$.

במקרים אלו נדרוש **תנאי** על המשתנה אשר יכתב באופן הבא: $x\neq-4$ ומשמעו היא ש- x יכול לקבל על ערך מספרי אפשרי למעט 4-, מכיוון שבמקרה זה השבר לא מוגדר.

כלל צמצום שברים אלגברים:

ניתן לצמצם שברים אלגברים ע"י הבאת המונה והמכנה למכפלה של ביטויים. במידה וקיימות פעולות החיבור והחיסור בין איברים שונים לא ניתן לבצע צמצום של איברים דומים בין המונה והמכנה. להלן מספר דוגמאות הנוגעות לצמצומים:

- צמצום ע"י הוצאת גורם משותף: $\frac{2x+8}{x+4}=\frac{2\cancel{(x+4)}}{\cancel{x+4}}=\frac{2\cdot1}{1}=2$.
- צמצום ע"י נוסחת כפל מקוצר: $\frac{3x-15}{x^2-10x+25}=\frac{3\cancel{(x-5)}}{(x-5)^{\cancel{2}}}=\frac{3\cdot1}{x-5}=\frac{3}{x-5}$.
- צמצום ע"י פירוק טרינום: $\frac{x^2-2x-3}{x^2-3x-4}=\frac{\cancel{(x+1)}(x-3)}{\cancel{(x+1)}(x-4)}=\frac{x-3}{x-4}$.

שאלות:

1) מצא את תחום ההגדרה של השברים האלגבריים הבאים:

א. $\frac{x+4}{x+3}$
ב. $\frac{5}{x-6}$
ג. $\frac{x+7}{2x-8}$
ד. $\frac{x^2+1}{x^2-4x}$
ה. $\frac{3}{x^2+2x+1}$
ו. $\frac{x^2}{x^2-4}$
ז. $\frac{6}{y^4-y^2}$
ח. $\frac{8x-2}{3x^3-15x^2+12x}$

2) צמצם את השברים הבאים (במידה ולא ניתן צמצם הסבר מדוע):

א. $\frac{ax}{a}$
ב. $\frac{a-x}{a}$
ג. $\frac{a-ax}{a}$
ד. $\frac{x+1}{y+1}$
ה. $\frac{x}{x+y}$
ו. $\frac{6x}{6y}$
ז. $\frac{x^2y}{xy^2}$
ח. $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$
ט. $\frac{4x^2y}{xy}$
י. $\frac{3x^2}{x^2+3}$

3) צמצם את השברים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{3x+12}{x+4}$
ב. $\frac{m^2+4m}{4m+16}$
ג. $\frac{2a-12}{a^2-6a}$
ד. $\frac{x^2-5x}{15-3x}$
ה. $\frac{3-18y^2}{6y^2-1}$
ו. $\frac{4x^3-2x^2}{6x-3}$
ז. $\frac{3y}{y^3-3y^2}$
ח. $\frac{3z^3-12z^2+4z}{z^2+5z}$

4) צמצם את השברים הבאים ע"י פירוק לגורמים וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x^2+10x+25}{2x+10}$

ב. $\frac{8n-n^2}{n^2-16n+64}$

ג. $\frac{z^3-4z^2}{2z^2-16z+32}$

ד. $\frac{4m^2+20m+25}{4m^2+10m}$

ה. $\frac{18y^2-24y+8}{2y-3y^2}$

ו. $\frac{a^3+4a^2b+4ab^2}{3ab+6b^2}$

5) צמצם את השברים הבאים ע"י טרינום ריבועי וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x+2}{x^2-3x-10}$

ב. $\frac{m^2-12m+32}{m-4}$

ג. $\frac{4y-10}{2y^2+y-15}$

ד. $\frac{3z^2+26z+16}{3z+2}$

ה. $\frac{x^2+5x-36}{x^3+9x^2}$

ו. $\frac{9n^2-12n}{4+5n-6n^2}$

ז. $\frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}$

ח. $\frac{x^2-14x+49}{x^2+x-56}$

ט. $\frac{3a^2b-10ab^2+3b^3}{-3a^3b+11a^2b^2-6ab^3}$

י. $\frac{m^3n-m^2n^2-m^2+mn}{2m^2n^3+mn^2-3n}$

תשובות סופיות:

1) א. $x\neq -3$ ב. $x\neq 6$ ג. $x\neq 4$ ד. $x\neq 0\,,\,x\neq 4$
ה. $x\neq -1$ ו. $x\neq -2\,,\,x\neq 2$ ז. $y\neq 0\,,\,y\neq -1\,,\,y\neq 1$
ח. $x\neq 0\,,\,x\neq 1\,,\,x\neq 4$

2) א. x ב. לא ניתן לצמצם ג. $1-x$
ד. לא ניתן לצמצם ה. לא ניתן לצמצם ו. $\frac{x}{y}$ ז. $\frac{x}{y}$
ח. לא ניתן לצמצם ט. $4x$ י. לא ניתן לצמצם

3) א. $3\,,\,x\neq \text{-}4$ ב. $\frac{m}{4}\,,\,m\neq -4$ ג. $\frac{2}{a}\,,\,a\neq 0,6$
ד. $-\frac{x}{3}\,,\,x\neq 5$ ה. $-3\,,\,y\neq \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ ו. $\frac{2x^2}{3}\,,\,x\neq\frac{1}{2}$
ז. $\frac{3}{y(y-3)}\,,\,y\neq 0,3$ ח. $\frac{3z^2-12z+4}{z+5}\,,\,z\neq 0,-5$

4) א. $\frac{x+5}{2}\,,\,x\neq -5$ ב. $\frac{n}{8-n}\,,\,n\neq 8$ ג. $\frac{z^2}{2(z-4)}\,,\,z\neq 4$
ד. $\frac{2m+5}{2m}\,,\,m\neq 0,-\frac{5}{2}$ ה. $\frac{2(2-3y)}{y}\,,\,y\neq 0,\frac{2}{3}$ ו. $\frac{a(a+2b)}{3b}\,,\,b\neq 0,\ a\neq -2b$

5) א. $\frac{1}{x-5}\,,\,x\neq 5,-2$ ב. $m-8\,,\,m\neq 4$ ג. $\frac{2}{y+3}\,,\,x\neq -3,\frac{5}{2}$
ד. $z+8\,,\,z\neq -\frac{2}{3}$ ה. $\frac{x-4}{x^2}\,,\,x\neq 0,-9$ ו. $\frac{-3n}{2n+1}\,,\,n\neq -\frac{1}{2},\frac{4}{3}$
ז. $\frac{x+2}{x+3}\,,\,x\neq -2,-3$ ח. $\frac{x-7}{x+8}\,,\,x\neq 7,-8$
ט. $\frac{3a-b}{a(2b-3a)}\,,\,a\neq 0\,,\,b\neq 0,\ a\neq 3b\,,\ 2b\neq 3a$ י. $\frac{m(m-n)}{n(2mn+3)}\,,\,mn\neq 1,-\frac{3}{2},n\neq 0$

כפל וחילוק של שברים אלגברים:

סיכום כללי:

כפל שברים יתבצע ע"י הכפלת כל מונה בנפרד והכפלת כל מכנה בנפרד.

חילוק שברים יתבצע ע"י לקיחת ההופכי של שבר המחלק וביצוע פעולת כפל.

- דוגמא לכפל שברים: $\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{x}{3x+3}=\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{x}{3(x+1)}=\frac{\cancel{x}\cancel{(x+1)}}{3x^{\cancel{2}}\cancel{(x+1)}}=\frac{1}{3x}$.
- דוגמא לחילוק שברים: $\frac{4x}{y}:\frac{12}{y^2+y}=\frac{4x}{y}\cdot\frac{y^2+y}{12}=\frac{\overset{1}{\cancel{4}}x}{\cancel{y}}\cdot\frac{\cancel{y}(y+1)}{\underset{3}{\cancel{12}}}=\frac{x(y+1)}{3}$.

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{8}$

ב. $\frac{x}{3}\cdot\frac{9}{x^2}$

ג. $7y\cdot\frac{5}{y^2}$

ד. $6x^2\cdot\frac{3}{40x}$

ה. $(x^2+3x)\cdot\frac{2}{3x+9}$

ו. $(a^2-25)\cdot\frac{20}{5a+25}$

ז. $\frac{w^2-9}{w}\cdot\frac{w^2}{2w+6}$

ח. $\frac{y+4}{y^2+16}\cdot\frac{y^2-16}{2y+8}$

ט. $\frac{z^2+30z+225}{6z+90}\cdot\frac{12}{2z-10}$

י. $\frac{5n^2}{n^2-121}\cdot\frac{2n^2+44n+242}{n+2}\cdot\frac{n^2+4n+4}{n}$

2) פשט את הביטויים הבאים :

א. $\frac{x}{8}:\frac{x}{6}$

ב. $\frac{y}{25}:\frac{5}{y}$

ג. $a^2:\frac{1}{6a}$

ד. $\frac{5}{6a}:a^2$

ה. $\left(d^2-3d\right):\frac{5d-15}{5d}$

ו. $\frac{t}{t+4}:\frac{3t}{t+4}$

ז. $\frac{y^2+8y+16}{8y^2}:\frac{y^2-16}{7y^2}$

ח. $\frac{a^2-64}{a^2-36}:\frac{a+8}{a+6}$

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{x^2}{24}$ ב. $\frac{3}{x}$ ג. $\frac{35}{y}$ ד. $\frac{9x}{20}$ ה. $\frac{2x}{3}$

ו. $4(a-5)$ ז. $\frac{w(w-3)}{2}$ ח. $\frac{y^2-16}{2y^2+32}$ ט. $\frac{z+15}{z-5}$ י. $\frac{10n(n+11)(n+2)}{n-11}$

2) א. $\frac{3}{4}$ ב. $\frac{y^2}{125}$ ג. $6a^3$ ד. $\frac{5}{6a^3}$ ה. d^2 ו. $\frac{1}{3}$

ז. $\frac{7(y+4)}{8(y-4)}$ ח. $\frac{a-8}{a-6}$

חיבור וחיסור של שברים אלגברים:

סיכום כללי:

ביצוע פעולת החיבור והחיסור תתבצע באופן זהה לשברים מספריים.

נרצה להרחיב את השברים כך שהמכנה של שניהם יהיה זהה, ולאחר מכן נחבר את המונים.

כדי להרחיב את השברים נעזר בפעולת מציאת מכנה משותף.
לשם כך נעזר בפירוקים השונים כדי להביא את הביטויים שבכל מכנה לצורתם המופשטת.

דוגמא לחיבור שברים בעלי אותו מכנה:

$$\frac{1}{x}+\frac{x+1}{x}=\frac{1+(x+1)}{x}=\frac{x+2}{x}$$

דוגמא לחיבור מספר לשבר אלגברי:

$$2+\frac{3}{x+2}=\frac{2(x+2)}{x+2}+\frac{3}{x+2}=\frac{2(x+2)+3}{x+2}=\frac{2x+7}{x+2}$$

דוגמא לחיבור שברים עם מכנים שונים (ע"י פעולת מכנה משותף):

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}=\frac{x}{x(x+1)}+\frac{x+1}{x(x+1)}=\frac{x+x+1}{x(x+1)}=\frac{2x+1}{x(x+1)}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י שימוש בפירוק לגורמים (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{1}{x^2-3x}+\frac{3}{x-3}=\frac{1}{x^2-3x}+\frac{3x}{x^2-3x}=\frac{1+3x}{x^2-3x}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{3}{x^2-6x+9}-\frac{2}{x^2-9}=\frac{3}{(x-3)^2}-\frac{2}{(x-3)(x+3)}=\frac{3(x+3)-2(x-3)}{(x-3)^2(x+3)}=\frac{x+15}{(x-3)^2(x+3)}$$

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{a}{6}+\frac{a-5}{6}$

ב. $\frac{5}{x}+\frac{4x+3}{x}$

ג. $\frac{x-2}{x+1}+\frac{3+4x}{x+1}$

ד. $\frac{7z}{2z-3}-\frac{4z}{2z-3}-\frac{z+3}{2z-3}$

2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{ab}-\frac{5}{bc}$

ב. $\frac{1}{xy}+\frac{5}{yz}+\frac{4}{xz}$

ג. $\frac{c}{ab}-\frac{ad}{bc}+\frac{2b}{cd}$

ד. $-\frac{5}{x}+\frac{x+1}{xy^2}$

ה. $\frac{1}{(y+1)^2}+\frac{3}{y+1}$

ו. $\frac{3}{z(z-3)}-\frac{2}{z(z-2)}$

3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $1-\frac{2}{x}$

ב. $1+\frac{3}{y^2}$

ג. $2+\frac{2}{x+1}$

ד. $3-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x}$

ה. $\frac{a+1}{a^2}-\frac{3-a}{4a}-3$

ו. $\frac{x}{9yz}+\frac{z}{3y^2x}+\frac{3-y}{12xz}-3\frac{1}{2}$

4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{x+1}+\frac{1}{x}$

ב. $\frac{4}{y+2}-\frac{3}{y}$

ג. $\frac{a+1}{a+2}+\frac{3}{a}$

ד. $\frac{1}{z+3}+\frac{2}{3z}-\frac{3}{z}$

5) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{24}{a^2-9}+\frac{4}{a+3}$

ב. $\frac{3}{x^2-16}+\frac{2}{(x+4)^2}$

ג. $\frac{y}{(y-2)^2}+\frac{3y}{4-y^2}$

ד. $\frac{3z}{z^2+4z+3}-\frac{z+0.5}{z^2+2z+1}$

ה. $\frac{x-1}{x^2+3x-40}+\frac{2}{-x^2+8x-15}$

ו. $\frac{2a+3}{2a^2+15a+7}+\frac{a+3}{a^2+14a+49}$

ז. $\frac{x}{x-3}+\frac{9-x}{x^2-8x+15}$

ח. $\frac{1}{a-b}+\frac{2}{a+2b}-\frac{3b}{a^2+ab-2b^2}$

6) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{4}{x}\cdot\frac{x^2}{8}+\frac{9}{x+1}\cdot\frac{x+1}{18}$

ב. $\left(\frac{2}{x}+1\right)\cdot\frac{x^2}{7x+14}$

ג. $\frac{7}{y^2}:\frac{6}{y^3}-\frac{y-4}{63}\cdot\frac{3y-4}{y^2-8y+16}$

ד. $\left(3x-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}\right):\frac{6x^3+2x-4}{x^2}$

ה. $\left(\frac{2x+1}{20x^2-28x-3}-\frac{3x+1}{30x^2-17x-2}\right):\frac{18x+3}{6x^2-13x+6}$

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{2a-5}{6}$ ב. $\frac{4x+8}{x}$ ג. $\frac{5x+1}{x+1}$ ד. 1

2) א. $\frac{c-5a}{abc}$ ב. $\frac{z+5x+4y}{xyz}$ ג. $\frac{c^2d-a^2d^2+2ab^2}{abcd}$

ד. $\frac{-5y^2+x+1}{xy^2}$ ה. $\frac{3y+4}{(y+1)^2}$ ו. $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$

3) א. $\frac{x-2}{x}$ ב. $\frac{y^2+3}{y^2}$ ג. $\frac{2x+4}{x+1}$

ד. $\frac{9x-2}{3x}$ ה. $\frac{-11a^2+a+4}{4a^2}$ ו. $\frac{4x^2y+12z^2+9y^2-3y^3-126xy^2z}{36xy^2z}$

4) א. $\frac{4x+1}{x(x+1)}$ ב. $\frac{y-6}{y(y+2)}$ ג. $\frac{a^2+4a+6}{a(a+2)}$

ד. $-\frac{4z+21}{3z(z+3)}$

5) א. $\frac{4}{a-3}$ ב. $\frac{5x+4}{(x-4)(x+4)^2}$ ג. $\frac{2y(4-y)}{(y-2)^2(y+2)}$

ד. $\frac{(4z+3)(z-1)}{2(z+1)^2(z+3)}$ ה. $\frac{x^2-6x-13}{(x+8)(x-5)(x-3)}$ ו. $\frac{4(a^2+6a+6)}{(a+7)^2(2a+1)}$

ז. $\frac{x-3}{x-5}$ ח. $\frac{3}{a+2b}$

6) א. $\frac{x+1}{2}$ ב. $\frac{x}{7}$ ג. $\frac{147y^2-594y+8}{126(y-4)}$ ד. $\frac{1}{2}$ ה. $\frac{1}{3(10x+1)}$

שברים כפולים:

סיכום כללי:

שבר כפול מורכב באופן הבא: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ כאשר מתקיים: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$.

נובע מכאן כי ניתן לצמצם ביטויים בין שני המכנים או שני המונים בלבד.

שאלות:

פשט את הביטויים הבאים:

1) $\frac{\frac{4x}{12}}{x}$

2) $\frac{\frac{y+1}{2y+2}}{5}$

3) $\frac{\frac{5}{t}}{30t^2}$

4) $\frac{\frac{t^2-81}{9t^2}}{6t+54}$

5) $\frac{\frac{3y^3-y^2}{25}}{\frac{y^2}{3-y}}$

6) $\frac{\frac{4x}{x+1}}{\frac{8}{x^2+2x+1}}$

7) $\frac{\frac{8c^2}{3c^3-9c^2-12c}}{\frac{40}{15c+15}}$

8) $\frac{\frac{t^2-t-20}{16t+8}}{\frac{25-t^2}{2t+1}}$

9) $\frac{\frac{1}{x}-4+\frac{x}{x+1}}{\frac{1-3x(x+1)}{5x+5}}$

תשובות סופיות:

1) $\frac{x^2}{3}$

2) 2.5

3) $\frac{1}{6t^3}$

4) $\frac{t-9}{54t^2}$

5) $\frac{(3y-1)(3-y)}{25}$

6) $\frac{x(x+1)}{2}$

7) $\frac{c}{c-4}$

8) $\frac{t+4}{-8(t+5)}$

9) $\frac{5}{x}$

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 2 - משוואות אלגבריות

תוכן העניינים

משוואה ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה היא מהצורה: $ax=b$ (כלומר, החזקה של הנעלם היא 1).

פתרון של משוואה ממעלה ראשונה הוא $x=\frac{b}{a}$ כאשר $a\neq 0$.

שלבי הפתרון הם:

1. ביצוע מכנה משותף (במידה וצריך).
2. פתיחת סוגריים אם ישנם.
3. העברת אגפים וכינוס אברים דומים (בידוד הנעלם באגף אחד והמספרים באגף שני).
4. בידוד הנעלם ומציאתו ע"י חילוק במקדם שלו.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות ממעלה ראשונה):

א. $6x+2=8$
ב. $7-2x=7$
ג. $2x+x=24$
ד. $2x+6=8+x$
ה. $-7x+5+2x=4x-13$
ו. $6x-3+5-7x=x-5x-7$
ז. $2-5x+7=-3x+8$
ח. $x-2+5x=4-3x-5+7x+7$

2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פתיחת סוגריים):

א. $3(x-1)-4=2$
ב. $7x-4(3-4x)=-x$
ג. $6(4-x)-(6-x)=3x$
ד. $5x-(3x-7)4=21$
ה. $x(x-5)=x^2-7x+8$
ו. $(7-x)(1-x)-(x-3)^2=0$

3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה מספרי):

א. $\frac{x}{3}-\frac{x}{9}=-4$

ב. $\frac{4x}{15}-\frac{3x}{10}=1$

ג. $\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}x=x-\frac{7}{15}$

ד. $\frac{5x+1}{6}-\frac{6x-1}{5}=\frac{3x+1}{4}-1$

ה. $\frac{2}{5}(x-3)-\frac{3}{15}(4-x)=x+2$

ו. $5\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{7}\right)-x=1$

4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם נעלם במכנה):

א. $\frac{1}{4}-\frac{2}{x}=0$

ב. $\frac{1}{2}-\frac{x}{x-1}=0$

ג. $\frac{3}{x}=\frac{1}{x+2}$

ד. $\frac{5}{2x-1}=\frac{4}{3x+2}$

ה. $\frac{x+5}{3x^2}-\frac{1}{6x}=\frac{1}{x}$

ו. $\frac{1}{4x}+\frac{3}{x}=\frac{13}{2}$

5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה משותף ע"י פירוק לגורמים):

א. $\frac{x^2+2}{3x^2+5x}=\frac{3x-1}{9x+15}$

ב. $\frac{7}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}+\frac{3}{2-2x}=0$

ג. $\frac{3}{(2-x)^2}+\frac{5}{12-3x^2}=0$

ד. $\frac{4x^2-24x+36}{x-3}=12$

תשובות סופיות:

1) א. $x=1$ ב. $x=0$ ג. $x=8$ ד. $x=2$ ה. $x=2$ ו. $x=-3$ ז. $x=\frac{1}{2}$ ח. $x=4$.

2) א. $x=3$ ב. $x=\frac{1}{2}$ ג. $x=2\frac{1}{4}$ ד. $x=1$ ה. $x=4$ ו. $x=-1$.

3) א. $x=-18$ ב. $x=-30$ ג. $x=-1$ ד. $x=1$ ה. $x=-10$ ו. $x=-21$.

4) א. $x=8$ ב. $x=-1$ ג. $x=-3$ ד. $x=-2$ ה. $x=2$ ו. $x=\frac{1}{2}$.

5) א. $x=-6$ ב. $x=-7$ ג. $x=-7$ ד. $x=6$, $x\neq 3$.

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

הגדרה:

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (ליניאריות) היא מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

כאשר $a_1\ ,b_1\ ,c_1$ ו- $a_2\ ,b_2\ ,c_2$ הם מקדמים מספריים.

דוגמאות למערכות של משוואות: $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=1 \end{cases}$, $\begin{cases} y=3x-1 \\ \dfrac{x+3}{2}=y+6 \end{cases}$.

פתרון של מערכת משוואות:

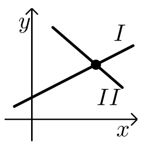
פתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור המקיים את כל המשוואות שבמערכת.

הצגה גרפית של מערכת משוואות:

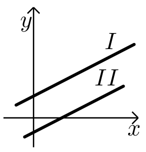
פתרון גרפי של מערכת משוואות הוא נקודת החיתוך של הישרים המייצגים כל משוואה.

יתכנו שלושה מצבים הדדיים בין שני ישרים:

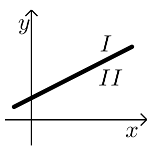
- הישרים נחתכים:
  במקרה זה נקודת החיתוך תהיה פתרון המערכת.



- הישרים מקבילים:
  במקרה זה לא יהיה פתרון למערכת.



- הישרים מתלכדים:
  במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות למערכת המשוואות.



פתרון אלגברי של מערכת משוואות:

- פתרון ע"י שיטת ההצבה:
  נבודד את אחד הנעלמים ממשוואה אחת ונציב אותו במשוואה השנייה.
  נבחר בשיטה זו במקרים בהם קל לבודד נעלם באחת המשוואות.
- פתרון ע"י השוואת מקדמים:

1. כופלים (או מחלקים) משוואה אחת (או שתיהן) במספר השונה מאפס כך שתתקבלנה משוואות שקולות בעלות מקדמים נגדיים או זהים עבור אחד המשתנים.
2. מחברים (או מחסרים) את המשוואות ומקבלים משוואה חדשה עם נעלם אחד.
3. מוצאים את ערך הנעלם מהמשוואה החדשה ומציבים אותו באחת המשוואות המקוריות למציאת ערך הנעלם השני.

הערה:

נוח להשתמש בשיטת השוואת המקדמים ע"י כך שמעבירים את המערכת הנתונה למערכת שקולה שבה המשתנים באגף אחד והמספר החופשי באגף השני.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} 3x+y=11 \\ y=5 \end{cases}$
ב. $\begin{cases} y=x-3 \\ y=2x+4 \end{cases}$
ג. $\begin{cases} -3x+2y=-16 \\ x=5y+14 \end{cases}$

ד. $\begin{cases} 5x-2y=-2 \\ x+4y=4 \end{cases}$
ה. $\begin{cases} -5x+7y=-26 \\ x+3y=-8 \end{cases}$
ו. $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 5x+7y=11 \end{cases}$

2) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x+3y=5 \\ x-3y=3 \end{cases}$
ב. $\begin{cases} 5x+2y=14 \\ 5x+3y=23 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 5y=2x \\ 4x=5y+8 \end{cases}$
ד. $\begin{cases} 4x=3y-29 \\ 5y=9-13x \end{cases}$

3) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x+2y=1 \\ 4x+8y=5 \end{cases}$
ב. $\begin{cases} 2(x-y)+4y=1+x \\ 2-7y+x=3(x-y) \end{cases}$.

4) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} 3y-x+2=4x+2-3y \\ 2x-3-y=5y-4x+3 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} \frac{x-3}{8}-\frac{x+y}{16}=\frac{y-1}{4} \\ 3(2x-y)-4x-11=0 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} \frac{3x-1}{4}-\frac{2}{5}(x-y)=\frac{3}{10}(x+3) \\ \frac{x+1}{4}-\frac{y}{2}=1 \end{cases}$.

5) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=4 \\ \frac{5}{x}-\frac{1}{y}=4 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{3}{y}=2 \\ \frac{9}{x}-\frac{4}{y}=-7 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 4x-\frac{7}{y}=-3 \\ 5x+\frac{2}{y}=7 \end{cases}$

6) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x(y+2)+y=xy-5 \\ x-y=2 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} xy=20 \\ y(3x-4)=20 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 5x-4xy=22 \\ 6x+xy=-20 \end{cases}$

תשובות סופיות:

1) א. $(2,5)$ ב. $(-7,-10)$ ג. $(4,-2)$ ד. $(0,1)$ ה. $(1,-3)$ ו. $(-2,3)$.

2) א. $\left(4,\frac{1}{3}\right)$ ב. $\left(-\frac{4}{5},9\right)$ ג. $(4,1.6)$ ד. $(-2,7)$.

3) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות.

4) א. $(6,5)$ ב. $(7,1)$ ג. $(7,2)$.

5) א. $(1,1)$ ב. $(-3,1)$ ג. $(1,1)$.

6) א. $(-1,-3)$ ב. $(2,10)$ ג. $(-2,4)$.

משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה:

למשוואה ממעלה ראשונה מהצורה: $ax=b$ יתכן פתרון יחיד אם ורק אם $a\neq 0$

מכיוון שניתן לחלק ולכתוב: $x=\frac{b}{a}$.

כאשר $a=0$ מתקבלת המשוואה $0\cdot x=b$ ויתכנו שני מצבים:

1. אם $b=0$ את המשוואה היא $0x=0$ ויש אינסוף פתרונות המקיימים אותה.
2. אם $b\neq 0$ את המשוואה היא $0x=b\neq 0$ ואין אף ערך של x המקיים אותה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $x+4=6+x$

2) $3x+6-x=4+2x+2$

3) $6(x-2)=2x+5+4x$

4) $5x-3+x=4x+2x-3$

5) נתונה המשוואה: $3-2(x+2)=5x+\square$.

א. איזה מספר יש להציב ב-$\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 1?

ב. איזה מספר יש להציב ב-$\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 0?

ג. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב-$\square$ על מנת שלמשוואה יהיו אינסוף פתרונות.

ד. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב-$\square$ על מנת שלמשוואה לא יהיה פתרון.

תשובות סופיות:

1) אף פתרון.

2) אינסוף פתרונות.

3) אין פתרון.

4) אינסוף פתרונות.

5) א. -8. ב. -1. ג. $-7x-1$

ד. $-7x+k$ כאשר k הוא מספר כלשהו השונה מ- -1.

משוואה ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

משוואה מהצורה: $ax^2+bx+c=0$, $(a\neq 0)$ נקראת משוואה ריבועית.

פתרונות המשוואה יסומנו ב- x_1 ו- x_2 ויחושבו לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

למשוואה ריבועית יתכנו שלושה סוגים של פתרונות:

1. **משוואה עם שני פתרונות ממשיים שונים.**
אם מתקבל מספר חיובי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים.
דוגמא: $x^2+5x-4=0$.
2. **משוואה עם פתרון ממשי אחד בלבד.**
אם מתקבל אפס בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד בלבד.
דוגמא: $x^2+4x+4=0$.
3. **משוואה ללא פתרונות ממשיים כלל.**
אם מתקבל מספר שלילי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה לא יהיו פתרונות ממשיים כלל.
דוגמא: $x^2+x+4=0$.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות:

א. $x^2+3x-10=0$
ב. $-x^2+10x-16=0$
ג. $25x^2-20x+4=0$
ד. $2x^2-6x+5=0$

2) פתור את המשוואות הבאות:

א. $4x^2-5x+7=4-x^2+13$
ב. $-x(x-5)=(1-3x)(1-x)+4$
ג. $2(x-5)^2-(2x-3)^2=10x+21$
ד. $(2x-1)^2+x(2x+3)=(x-1)(x-7)$

3) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת b):

א. $x^2-36=0$ ב. $32x^2-18=0$

ג. $4x-x(x+2)=3(x-1)-x-6$ ד. $(2x-1)^2+(2x+1)^2=10$

4) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת c):

א. $-7x^2-14x=0$ ב. $5x^2-x=0$

ג. $6x(x-2)-1=4x-3(x+1)+2$ ד. $(5x-2)^2=(x-2)(x+3)+10$

5) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\frac{4x+1}{3}-\frac{x+2}{2}=\frac{2}{x}$ ב. $\frac{x^2-9}{x+3}+x=x^2-18$

ג. $\frac{3}{2x+2}-\frac{2x-5}{2(x-1)^2}-\frac{4}{1-x^2}=0$ ד. $\frac{x}{2x^2-72}+\frac{2}{x^2+12x+36}=\frac{8x-15}{24-4x}+2$

תשובות סופיות:

1) א. $x_1=2\ ,\ x_2=-5$ ב. $x_1=2\ ,\ x_2=8$ ג. $x=\frac{2}{5}$ ד. אין פתרון.

2) א. $x_1=2\ ,\ x_2=-1$ ב. $x_1=1\ ,\ x_2=1\frac{1}{4}$ ג. $x_1=1\ ,\ x_2=-10$

ד. $x_1=0.6\ ,\ x_2=-2$.

3) א. $x=\pm 6$ ב. $x=\pm\frac{3}{4}$ ג. $x=\pm 3$ ד. $x=\pm 1$

4) א. $x_1=0\ ,\ x_2=-2$ ב. $x_1=0\ ,\ x_2=\frac{1}{5}$ ג. $x_1=0\ ,\ x_2=2\frac{1}{6}$

ד. $x_1=0\ ,\ x_2=\frac{7}{8}$.

5) א. $x_1=2\ ,\ x_2=-1.2$ ב. $x=5\ ,\ x\neq -3$ ג. $x_1=0\ ,\ x_2=-5$

ד. $x_1=-7.6\ ,\ x_2=-4\frac{2}{7}$.

משוואות דו-ריבועיות:

סיכום כללי:

משוואה דו-ריבועית היא משוואה מהצורה: $ax^4+bx^2+c=0$ כאשר הנעלם הוא x.
פתרון המשוואה יבוצע ע״י מעבר לפרמטר: $x^2=t\to at^2+bt+c=0$ ומציאתו.
לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה ולמצוא את ערכי x.

ניתן להביא משוואות לצורה זו ולהגדיר ביטוי המופיע בחזקות 2 ו-4
כגון: $\left(x^2-1\right)^2+3\left(x^2-1\right)-2=0$ באמצעות פרמטר: $t=x^2-1$
ובכך לפתור משוואה: $t^2+3t-2=0$ ולהחזיר את ההצבה עבור מציאת x.
דרך הפתרון תקפה לכל משוואה בה הנעלם מופיע בחזקות כפולות כגון 3 ו-6, או 4 ו-8.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $5x^4+3x^2-8=0$

2) $x^4-3x^2+2=0$

3) $13x^2\left(3x^2-1\right)-2=3\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)$

4) $x^2\left(x^2+1\right)=10\left(3x^2-10\right)$

5) $x^6+x^3=56$

6) $x^3+4=\frac{32}{x^3}$

7) $x-9\sqrt{x}+14=0$

8) $x^8-4x^4-50=31x^4-84$

9) $125x^6-1=124\left(x^6+x^3+1\right)$

10) $\left(2x^2-x\right)^2-4\left(2x^2-x\right)+3=0$

11) $\left(x^2+2x\right)^2+7x^2+14x=-6$

12) $\frac{21}{x^2-4x+10}=6+x^2-4x$

13) $\frac{12}{x^2+2x-8}=1+\frac{7.5}{x^2+2x-3}$

14) $\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\frac{7}{6}-\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}$

15) $\frac{3}{3x^2-15}+\frac{1}{x^2+5}=\frac{10}{x^4-25}$

16) $\frac{x^2-1}{4x^2-28}+2=\frac{9}{x^4-8x^2+7}+\frac{x^2}{2x^2-2}$

17) $\left(2x+\frac{3}{x}\right)^2+35=12\left(2x+\frac{3}{x}\right)$

18) $\frac{3x^4}{(x+2)^2}+\frac{3x^2}{x+2}=6$

19) $\left(2x-x^2+3\right)\left(2x-x^2-2\right)=0$

20) $\left(x^2-5x+6\right)\left(x^2-5x-8\right)=-24$

תשובות סופיות:

1) $x=\pm 1$
2) $x=\pm 1,\pm\sqrt{2}$
3) $x=\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{3}$
4) $x=\pm 2,\pm 5$
5) $x_1=\sqrt[3]{7}\ ,\ x_2=-2$
6) $x=-2,\sqrt[3]{4}$
7) $x_1=4\ ,\ x_2=49$
8) $x_{1,2}=\pm\sqrt[4]{34}\ ,\ x_{3,4}=\pm 1$
9) $x=5,-1$
10) $x_1=1.5\ ,\ x_2=-1\ ,\ x_3=1\ ,\ x_4=-\frac{1}{2}$
11) $x=-1$
12) $x_{1,2}=1,3$
13) $x_1=0\ ,\ x_2=-2\ ,\ x_3=3.06\ ,\ x_4=-5.06$
14) $x_1=0\ ,\ x_2=-2$
15) אין פתרונות.
16) $x=\pm\sqrt{\frac{3}{7}}$
17) $x=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},3$
18) $x=-1,2$
19) $x=3,-1$
20) $x=\pm 1,4,6$

משוואות עם פרמטרים:

סיכום כללי:

משוואה עם פרמטר הינה משוואה שמכילה שני סוגים של גדלים – משתנים ופרמטרים.
את המשתנים מקובל לסמן באותיות x , y , z ואת הפרמטרים מסמנים בשאר האותיות.
פתרון המשוואה יתקבל ע"י בידוד המשתנה כך שיבוטא באמצעות הפרמטר/ים שבמשוואה.

למשל פתרון המשוואה: $mx=4$ (כאשר x הוא הנעלם ו- m הוא פרמטר) הוא $x=\frac{4}{m}$
אשר מבוטא באמצאות הפרמטר m.

בכתיבת פתרון של משוואה עם פרמטרים יש לציין את תחום ההגדרה של הפרמטר עבורו הפתרון הוא בעל משמעות. בדוגמא הנ"ל תחום ההגדרה הוא $m\neq 0$.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות:

א. $3x-b=(b+1)x-6$

ב. $\frac{1}{3}(a-3x)=\frac{1}{a}(ax-3)$

ג. $(x-2a)(x-2b)=x^2-2(a^2+b^2)$

ד. $\frac{m+1}{x-1}=\frac{m-1}{x+1}$

ה. $\frac{x}{a^2-a}-\frac{1}{2a}=\frac{ax+x}{2a^3-4a^2+2a}-\frac{2}{a^3-2a^2+a}$

2) פתור את מערכות המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x+my=1 \\ x+y=m \end{cases}$

ב. $\begin{cases} ax+y=2 \\ x+ay=4 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} \frac{x}{m}+y=m \\ x-m^2y=1 \end{cases}$

ד. $\begin{cases} (m-1)x-(2m+3)y=5 \\ (m+2)x-(2m-1)y=10m \end{cases}$

ה. $\begin{cases} (2a+b)x-(2a-b)y=8ab \\ (2a-b)x+(2a+b)y=8a^2-2b^2 \end{cases}$

3) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

א. $x^2-2mx+m^2-1=0$

ב. $x^2-2x+4a=a^2+3$

ג. $x^2+m(x+10)=2m^2-5x$

ד. $\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+x}=0$

ה. $(m^2+1)x^2-m^2x-1=0$

ו. $\frac{a}{x}+\frac{1}{b}=\frac{x}{a}+b$

ז. $x+\frac{1}{x}=\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}$

תשובות סופיות:

1) א. $x=\frac{b-6}{2-b}$, $b\neq 2$ ב. $x=\frac{a^2+9}{6a}$, $a\neq 0$ ג. $x=a+b$ ד. $x=-m$ ה. $x=a+1$

2) א. $m\neq 1$, $(m+1,-1)$ ב. $a\neq \pm 1$, $\left(\frac{2a-4}{a^2-1},\frac{4a-2}{a^2-1}\right)$

ג. $m\neq 0-1$, $\left(m^2-m+1,\frac{m-1}{m}\right)$ ד. $m\neq 1,-2$, $(2m+1,m-2)$

ה. $b\neq \pm 2a$, $(2a+b,2a-b)$

3) א. $x=m+1,\mathrm{m}-1$ ב. $x=a-1,3-a$ ג. $x=m-5,-2m$

ד. $a\neq 0$, $x\neq \pm a$, $x=\pm a\sqrt{3}$ ה. $x=1,-\frac{1}{m^2+1}$

ו. $a,b\neq 0$, $x=\frac{a}{b},-ab$ ז. $x=\frac{a+b}{a-b},\frac{a-b}{a+b}$, $a\neq \pm b$.

משוואות עם שורשים:

סיכום כללי:

פתרון משוואה מהצורה: $\sqrt{x}=a$ יתקבל ע"י העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה
באופן הבא: $x=a^2 \rightarrow (\sqrt{x})^2=(a)^2$.

הערות:

1) יש לזכור בעת העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה יש לבדוק את כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבתם במשוואה המקורית.
2) למשוואה מהצורה $\sqrt{x}=a$ שבה $a<0$ אין פתרון.
3) יש לסדר תחילה משוואות שבהן הביטוי עם שורש אינו מבודד.
4) במשוואות שבהן יותר מביטוי אחד עם שורש יש לבודד תחילה את אחד הביטויים, להעלות בריבוע ולאחר מכן לחזור על התהליך ולבצע העלאה בריבוע פעם נוספת.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $\sqrt{2x+5}=7$
2) $\sqrt{x+2}=x$
3) $\sqrt{3x+1}+x=13$
4) $\sqrt{2x+7}+4=x$
5) $\sqrt{x-1}+3=x$
6) $\sqrt{10x+6}+9=x$
7) $\sqrt{x+6}-2=2x$
8) $\sqrt{24-x}+3=2x$
9) $\sqrt{x+16}+4=2x$
10) $2x=16-3\sqrt{x-1}$
11) $\sqrt{3x+5}=\sqrt{x+17}$
12) $\sqrt{x^2-5x+12}=2\sqrt{6-x}$
13) $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x-5}=\sqrt{11-x^2}$
14) $\sqrt{2x-1}+3=\sqrt{7x+1}$
15) $\sqrt{9x-8}-3\sqrt{x+4}=-2$
16) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{3-x}=2$
17) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{4x+1}$
18) $\sqrt{2x-2}+\sqrt{5x-4}=\sqrt{3x-2}$
19) $3\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-3}=2\sqrt{x+2}$

תשובות סופיות:

1) $x=22$

2) $x=2$

3) $x=8$

4) $x=9$

5) $x=5$

6) $x=25$

7) $x=0.25$

8) $x=3.75$

9) $x=4.25$

10) $x=5$

11) $x=6$

12) $x=4,-3$

13) $x=3$

14) $x=5$

15) $x=12$

16) $x=2,2\frac{8}{9}$

17) $x=6$

18) $x=1$

19) $x=2$

משוואות עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

הגדרה:

ערך מוחלט הינו המרחק של מספר מ-0 ומוגדר באופן הבא: $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$.

משוואה עם ערך מוחלט:

משוואה עם ערך מוחלט היא מהצורה: $|x| = a$.

כדי לפתור משוואה עם ערכים מוחלטים יש למצוא את נקודות האפס של כל ערך מוחלט (קרי: הנקודות בהן הביטוי שבתוך הערך המוחלט מתאפס) ולפצל את המשוואה הנתונה לתחומים עבור כל תחום.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $|3x+14| = 7$
2) $|3x-24| = x$
3) $|12-x| = 3x$
4) $2x-|8-x| = 10$
5) $|4x-5| = |2x+13|$
6) $|14-3x| = 2|x+5|$
7) $|x|+7 = |2x|$
8) $|x+2|+6 = |2x-4|$
9) $|x+2|+|2x-6| = |4x+8|$
10) $|10-3x|-|x+4| = |2x-6|$

תשובות סופיות:

1) $x = -\frac{7}{3},\ -7$
2) $x = 6,12$
3) $x = 3$
4) $x = 6$
5) $x = 9, -1\frac{1}{3}$
6) $x = 24, \frac{4}{5}$
7) $x = \pm 7$
8) $x = 12, -1\frac{1}{3}$
9) $x = 0, -12$
10) $x = 0$

מערכת משוואות ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

מערכת משוואות ריבועיות מיוחסת למערכת של שתי משוואות (לפחות) שאחת מהן מכילה את אחד מהנעלמים בריבוע. למערכת משוואות ריבועיות יכולים להתקבל עד 4 פתרונות שונים. יש לפתור את המערכת לפי הטכניקות הרגילות של בידוד והצבה או השוואת מקדמים.

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ x+y=6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2+y^2=36 \\ x^2+3y=10 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x^2+4y^2=16 \\ 5x^2-3y^2=17 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2-2y^2=17 \\ xy=-10 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2-xy-20y^2=0 \\ x+6y=1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2-2xy+8y^2=8 \\ 3xy-2y^2=4 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2-y^2=33 \\ x+y=11 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 16x^2-y^2=391 \\ 4x-y=23 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 4xy+x=-15 \\ \frac{3}{y}-2x=16 \end{cases}$

10) $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=5 \\ \frac{4}{y}-\frac{1}{x}=-19 \end{cases}$

11) $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{5}{y}=21 \\ \frac{8}{x}-\frac{1}{y}=13 \end{cases}$

12) $\begin{cases} xy=24 \\ (y-x)^2-7(y-x)+10=0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x^2y-xy^2=84 \\ x^2-2xy+y^2+5x-5y=24 \end{cases}$

14) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{10}{3} \\ x^2+y^2=9xy+25 \end{cases}$

תשובות סופיות:

1) $(2,4),(4,2)$

2) $(\pm4,-2)$

3) $(\pm2,\pm1)$

4) $(5,-2),(-5,2)$

5) $\left(-2,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{5}{11},\frac{1}{11}\right)$

6) $\left(3,\frac{1}{2}\right),\left(-3,-\frac{1}{2}\right),(2,1),(-2,-1)$

7) $(7,4)$

8) $(5,-3)$

9) $\left(-5,\frac{1}{2}\right)$, $\left(-24,-\frac{3}{32}\right)$

10) $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{4}\right)$

11) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

12) $(4,6)$, $(-6,-4)$, $(3,8)$, $(-8,-3)$

13) $(-1.65,6.35)$, $(-6.35,1.65)$, $(7,4)$, $(-4,-7)$

14) $(5,45)$, $(-5,-45)$, $(45,5)$, $(-45,-5)$

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 3 - אי שוויונים אלגבריים

תוכן העניינים

אי-שוויונים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

פעולות המותרות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

פעולות אסורות לביצור בפתרון אי-שוויון:

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $45x-26>109$

2) $6x>2(3x-1)$

3) $2(x-5)\ge\frac{1}{2}(4x+6)$

4) $(x-2)^2+4<(x+2)^2+20$

5) $\frac{8x-4}{2}<\frac{9(x+1)}{3}$

6) $4(6x-8)<8(3x-4)$

7) $\frac{x-6}{3}-\frac{x-4}{4}\ge12-x$

8) $\frac{7-x}{10}-\frac{3x-1}{5}+\frac{x+4}{3}<7$

תשובות סופיות:

1) $x>3$
2) כל x
3) אף x
4) $x>-2$
5) $x<5$
6) אף x
7) $x\geq12$
8) $x>-13$

אי-שוויונים ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

אי שוויון ריבועי הוא מהצורה: $ax^2+bx+c \gtrless 0$ כאשר $a \neq 0$.

כדי לפתור אי שוויון ריבועי יש למצוא את נקודות האפס של הביטוי הריבועי ולאחר מכן למצוא את תחום ההצבה הביטוי מקיים את אי השוויון עצמו.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $x^2<144$

2) $x^2-12x>-32$

3) $(x+2)(x+5)<0$

4) $(x+2)(x+4)<35$

5) $-x^2+13x+30<0$

6) $(x-3)(x-7)\geq 8x-56$

7) $(x-5)^2+x(x+2)<89$

8) $(5x+6)^2\leq 4(x-3)^2$

9) $-3x^2+12x>0$

10) $x^2-10x+25>0$

11) $(x-3)^2>(x-1)(x+6)-x^2-3x$

12) $2x^2+2x+24\geq 0$

תשובות סופיות:

1) $-12<x<12$

2) $x<4\ ,\ x>8$

3) $-5<x<-2$

4) $-9<x<3$

5) $x<-2\ ,\ x>15$

6) $x\leq 7\ ,\ x\geq 11$

7) $-4<x<8$

8) $-4\leq x\leq 0$

9) $0<x<4$

10) $x>5\ ,\ x<5$

11) $x<3\ ,\ x>5$

12) כל x

אי-שוויונים ממעלה שלישית:

סיכום כללי:

אי שוויונים ממעלה גבוהה מיוחסים לכאלה שניתן לכתוב אותם בצורה של פולינומים, כגון: $x^3-4x^2+4x+1>0$, $x^4+2x^2+1<0$ וכו'.

בפועל נפתור אותם ע"י פירוק לגורמים ומציאת נקודות האפס של כל גורם.

לאחר מכן נבדוק את כל אחד מתחומי המספרים המתקבלים עבור הנעלם ונראה באלו מהם מתקבל פסוק אמת.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $(x-1)(x-2)(x-3)>0$

2) $x(x^2+x+1)>0$

3) $(-2x^2-3x+2)(x+1)\le 0$

4) $x^3-25x\ge 0$

5) $(x^2+3x+5)(x-2)>0$

6) $(x^2+8x+20)(3x-5)\le 0$

7) $(x^2-x-6)(x-1)<0$

8) $x^3-6x^2+9x\le 0$

9) $(x^2+6)(x+3)>0$

10) $(x-2)(x-4)(x-1)<0$

תשובות סופיות:

1) $1<x<2\ ,\ x>3$

2) $x>0$

3) $-2\le x\le -1\ ,\ x\ge \frac{1}{2}$

4) $-5\le x\le 0\ ,\ x\ge 5$

5) $x>2$

6) $x\le 1\frac{2}{3}$

7) $x<-2\ ,\ 1<x<3$

8) $x\le 0\ ,\ x=3$

9) $x>-3$

10) $x<1\ ,\ 2<x<4$

אי-שוויונים עם מנה:

סיכום כללי:

אי שוויון מהצורה: $\frac{f(x)}{g(x)}>0$ (או $\frac{f(x)}{g(x)}<0$) נקרא אי-שוויון עם מנה, בו $f(x)$ ו-$g(x)$ הם פולינומים כלשהם.

למשל: $\frac{2x+4}{x^2-3x+4}<0$ בו: $f(x)=2x+4$ ו-$g(x)=x^2-3x+4$.

כדי לפתור אי שוויון עם מנה נמצא את נקודות האפס של $f(x)$ ושל $g(x)$ ונציב מספרים בתחומים המתקבלים. אלו שיתנו פסוק אמת יהוו את פתרון אי השוויון.

הערות:

- ניתן לבצע כפל של המכנה בריבוע בכדי להעביר את אי השוויון לצורה של מכפלות.
- ניתן להעביר אי שוויון המכיל מספר מנות ומספרים שלמים לצורה הנ"ל ע"י פעולות אלגבריות מתאימות תחילה.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $\frac{x-1}{x^2-9}>0$

2) $\frac{x-1}{3x+2}\geq -3$

3) $\frac{1}{x^2-16}>0$

4) $\frac{x-3}{2x^2-10x+12}>0$

5) $\frac{2x-1}{x-5}\leq 0$

6) $\frac{1}{-3(x-1)}<0$

7) $\frac{x-1}{x+2}\leq 1$

8) $\frac{1}{x^2-5x+6}<0$

9) $\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7}\geq 0$

10) $\frac{1}{x^2-8x+12}\geq 0$

תשובות סופיות:

1) $-3<x<1 \, , \, x>3$

2) $x<-\frac{2}{3} \, , \, x\geq -\frac{1}{2}$

3) $x<-4 \, , \, x>4$

4) $2<x<3 \, , \, x>3$

5) $\frac{1}{2}\leq x<5$

6) $x>1$

7) $x>-2$

8) $2<x<3$

9) $1\leq x\leq 6$

10) $x<2 \, , \, x>6$

אי-שוויונים כפולים - מערכת וגם:

סיכום כללי:

אי-שוויון כפול הוא צורה מקוצרת להציג שני אי-שיוויונים אשר יש לפתור יחד (קרי: כמערכת 'וגם'). למשל במקום לכתוב: $a<b$ וגם $b<c$, ניתן לכתוב: $a<b<c$.

מכאן כי כדי לפתור אי שוויון כפול יש לפצל אותו תחילה לשני אי-שיוויונים ולפתור כל אחד בנפרד. לאחר מכן יש לקחת את חיתוך הפתרונות.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $3<x+1<5$

2) $0<\frac{1}{x+4}<2$

3) $-1<\frac{x-1}{x+1}<1$

4) $0<\frac{8-3x}{5-2x}<4$

5) $6x-38\le x-3\le 5x+7$

6) $6<\frac{2x+10}{3}\le\frac{7x-20}{5}$

7) $-1\le\frac{2x-6}{4}<\frac{x+2}{3}$

8) $\frac{4x+5}{15}>\frac{3x-8}{5}+\frac{9-x}{3}>11$

תשובות סופיות:

1) $2<x<4$

2) $x>-3\frac{1}{2}$

3) $x>0$

4) $x<2\frac{2}{5}\ ,x>2\frac{2}{3}$

5) $-2.5\le x\le 7$

6) $x\ge 10$

7) $1\le x<13$

8) ϕ

שאלות מסכמות – אי-שוויונים:

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $x\le -\frac{3}{4}\ \cap\ \{-2<x\le 5\ \cup\ 0<x<8\}$

2) $x(x+5)-3x+15\le 2x-1-x(4-x)$

3) $\frac{(x-3)(x+4)}{2-x}\le 0$

4) $\frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)}<0$

5) $\frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)}\ge 0$

6) $x(x+3)(2x-5)<0$

7) $\frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2}>0$

8) $\frac{5-2x}{(x-8)^2}\le 0$

9) $\frac{x-3}{x^2+2}>0$

10) $\frac{x^2-4x}{x^2+2x-3}>0$

11) $\frac{x^2-6x+9}{x^3-x}>0$

12) $\frac{x-7}{x^2+x+3}>0$

13) $\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{x+2}<\frac{1}{x-2}$

14) $\frac{2x^2}{x^2-6x+8}\ge \frac{x}{x-4}-\frac{x}{x-2}$

15) $6<5x-x^2\ \cap\ x^2>3x+10$

16) $\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x}>0\ \cup\ \frac{1}{x-3}<\frac{1}{1-x}$

17) $1<\frac{x-1}{x-4}\le 2$

18) לאלו ערכי x נמצאת הפונקציה $f(x)=\frac{x}{x-3}$ מעל הפונקציה: $g(x)=\frac{x+1}{x+3}$?

תשובות סופיות:

1) $-2 < x \le -\frac{3}{4}$

2) $x \le -4$

3) $-4 \le x < 2 \,,\, 3 \le x$

4) $x < -7 \,,\, -\frac{1}{3} < x < 2 \,,\, x > 5$

5) $-1 < x \le 1.5 \,,\, 4 < x \le 12$

6) $x < -3 \,,\, 0 < x < 2.5$

7) $x < -1 \,,\, 2 < x < 6 \,,\, x > 6$

8) $2.5 \le x < 8 \,,\, x > 8$

9) $x > 3$

10) $x < -3 \,,\, 0 < x < 1 \,,\, x > 4$

11) $-1 < x < 0 \,,\, 1 < x < 3 \,,\, x > 3$

12) $x > 7$

13) $x < -2 \,,\, 2 < x < 4$

14) $x \le 0 \,,\, 1 \le x < 2 \,,\, x > 4$

15) אף x

16) $x \ne 1$

17) $x \ge 7$

18) $-3 < x < -\frac{3}{5} \,,\, x > 3$

תחום הגדרה:

שאלות:

1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{3x-4}$

ב. $f(x)=\sqrt{x^2-5x-6}$

ג. $f(x)=\sqrt{12x-x^2-x^3}$

ד. $f(x)=\sqrt{\frac{x+5}{x^2-4}}$

ה. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+2}-x}$

ו. $f(x)=\frac{\sqrt{3x^2-2x-1}}{2x-3}$

2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+2}-3}$

ב. $f(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$

ג. $f(x)=\sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}}$

ד. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$

3) תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x)=\sqrt{ax-x^2-4}$ הוא $1\le x\le 4$.
מצא את ערכו של הפרמטר a.

4) תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$ הוא $x>2$, $x\le -2$.
מצא את ערכו של הפרמטר a.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+6}-a}$, (a פרמטר חיובי).

א. הבע באמצעות a את תחום הגדרתה.

ב. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=\sqrt{\frac{2x}{x+5}}$.
ידוע כי תחום ההגדרה של שתי הפונקציות מכסה את כל ציר המספרים.
מצא את תחום הערכים האפשריי של הפרמטר a.

תשובות סופיות:

1) א. $x \ge 1\frac{1}{3}$ ב. $x \le -1 , x \ge 6$ ג. $x \le -4 , 0 \le x \le 3$

ד. $-5 \le x < -2 , x > 2$ ה. $-2 \le x < 2 , x > 2$ ו. $x \le -\frac{1}{3} , 1 \le x < \frac{3}{2} , x > \frac{3}{2}$

2) א. $x \ge 7$ ב. $-6 \le x \ne -2$ ג. $x \le -1\frac{1}{2} , x \ge 1$

ד. $-2 \le x \ne 1 , x \le -3$.

3) $a = 5$.

4) $a = 2$.

5) א. $x \ge a^2 - 6$ ב. $0 < a \le 1$.

אי שוויונים עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

כללים לפתרון אי שוויון עם ערך מוחלט יחיד:

מקרה	$\lvert x\rvert < a$	$\lvert x\rvert > a$
פתרון	$-a < x < a$	$x < -a \cap x > a$

כללים לפתרון אי שוויון עם מספר ערכים מוחלטים:

- נמצא את הנקודות המאפסות כל ביטוי עם ערך מוחלט.
- מחלקים את אי השוויון לתחומים לפי נקודות האפס.
- פותרים את אי השוויון לכל תחום בנפרד.
- כותבים פתרון כללי (מערכת או) לכל התחומים יחדיו.

שאלות:

1) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $|x+2|<3$

ב. $|2x+1|>7$

ג. $|6-2x|<x$

ד. $|2x+1|-3x>4$

2) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $1<|4-3x|<7$

ב. $|2x+3|<8<|5-x|$

3) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $|x^2+6x-4|<12$

ב. $|x^2+x-10|>3x-2$

ג. $|x^2-3x|<4$

ד. $|6x^2-7x-4|>1$

ה. $x^2-6|x|+5\le 0$

ו. $x^2-6|x+1|-1>0$

4) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $|x-3|+|2x+2|>7$

ב. $|x+8|<11-|1-3x|$

ג. $|3-2x|-11>4-|6+x|$

ד. $|2x-6|+|x+5|>14-|1-x|$

ה. $|5+4x|-|3-x|+\left|4-\frac{1}{2}x\right|\le 22$

ו. $|x+3|+|x^2-5x+4|<19$

5) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $\left|\frac{3x-1}{x-2}\right|\ge 3$

ב. $1\le\left|\frac{x+2}{x-2}\right|\le 2$

ג. $\frac{|x-6|+8x}{x-12}\le 12$

ד. $\left|\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}\right|>5$

6) פתור את אי-השוויונים הבאים (ערך מוחלט ושורשים):

א. $\sqrt{x^2-|x-12|}<x$

ב. $2-\sqrt{1-x}\le|x+2|-3$

ג. $\sqrt{|2x+1|-x-1}\le 4-|3x|$

ד. $\frac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}}>0$

תשובות סופיות:

1) א. $-5<x<1$ ב. $x<-4$ או $3<x$
ג. $2<x<6$ ד. $x<-1$.

2) א. $1\frac{2}{3}<x<3\frac{2}{3}$ או $-1<x<1$ ב. $-5\frac{1}{2}<x<-3$

3) א. $-2<x<2$ או $-8<x<-4$ ב. $4<x$ או $x<2$
ג. $-1<x<4$ ד. $x>\frac{5}{3}$, $-\frac{1}{3}<x<\frac{3}{2}$, $x<-\frac{1}{2}$
ה. $1\le x\le 5$ או $-5\le x\le -1$ ו. $x>7$, $x<-5$

4) א. $2<x$ או $x<-2$ ב. $-1<x<1$
ג. $4<x$ או $x<-6$ ד. $4<x$ או $x<-1$
ה. $-7\frac{3}{7}\le x\le 4$ ו. $-2<x<6$.

5) א. $x>2$, $\frac{7}{6}\le x<2$ ב. $x\ge 6$, $0\le x\le\frac{2}{3}$
ג. $x\ge 46$, $x<12$ ד. $2<x\le 4$, $1<x<2$, $\frac{1}{2}<x<1$

6) א. $x\neq 12$, $x\ge 3$, $x=-1$ ב. $x\le\frac{-15+\sqrt{33}}{2}$
ג. $-1\le x\le -\frac{2}{3}$, $0\le x\le 1$ ד. $-1<x<\sqrt[3]{4}$

אי שוויונים עם שורשים:

סיכום כללי:

מקרים בפתרון אי-שוויונות עם שורשים:

מקרה	אי השוויון	פתרון
$a\ge 0$	$\sqrt{f(x)}<a$	$0\le f(x)<a^2$
$a<0$	$\sqrt{f(x)}<a$	אין פתרון
	$\sqrt{f(x)}>a$	כל x בת.ה. של $f(x)$

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

1) $\sqrt{x+3}<7$

2) $\sqrt{2x-5}\ge 1$

3) $\sqrt{2x^2+5x-6}>2-x$

4) $\sqrt{x^2+x-6}<x-3$

5) $\sqrt{x^2+3x+2}-1<\sqrt{x^2-x+1}$

6) $\sqrt{x^2+5x+6}-\sqrt{x^2-x+1}<1$

7) $\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}>\dfrac{3}{2}$

8) $\dfrac{4}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x}<2$

9) $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{4}}<\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}$

10) $\sqrt{2-\sqrt{3+x}}<\sqrt{4+x}$

11) $\sqrt{x+6}>\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-5}$

12) $\sqrt{1+\dfrac{9}{x}}+5\sqrt{\dfrac{x}{x+9}}\ge 4$

תשובות סופיות:

1) $-3 \le x < 46$.

2) $x \ge 3$.

3) $x < -10\ ,\ x > 1$.

4) $\varnothing$.

5) $x \le -2\ ,\ -1 \le x < \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$.

6) $x \le -3\ ,\ -2 \le x < \frac{-13+\sqrt{73}}{16}$.

7) $\frac{12}{25} < x \le \frac{1}{2}$.

8) $x < 2\sqrt{5} - 4$.

9) $1 < x \le \frac{2}{\sqrt{3}}$.

10) $-\frac{3+\sqrt{5}}{2} < x \le 1$ שזה: $-2.618 < x \le 1$.

11) $2.5 \le x < 3$.

12) $x < -9\ ,\ x > 0$.

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 4 - חוקי החזקות והשורשים

תוכן העניינים

חוקי החזקות:

סיכום כללי:

סיכום חוקי החזקות:

1. $a^0 = 1$
2. $a^1 = a$
3. $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$
4. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
5. $\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$
6. $a^m \cdot b^m = \left(a \cdot b\right)^m$
7. $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$
8. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
9. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^n a^m = a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

א. $a^2 a^6$
ב. $t^3 t^5 t^7$
ג. $b^2 b^5 b^{12} b^3$
ד. $\frac{k^8}{k^3}$
ה. $\frac{n^{14}}{n^9}$
ו. $\frac{c^6}{c^2}$
ז. $\frac{a^3 a^{19}}{a^{15}}$
ח. $\frac{x^{30}}{x^9 x^{18}}$
ט. $\frac{y^3 y^{15}}{y^4 y^{14}}$
י. $3^2 3^3 3^4$
יא. $\frac{2^{16} 2^2}{2^{10}}$
יב. $\frac{5^{20} 5^3 5^{16}}{5^4 5^{22} 5^8}$

2) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^n a^m = a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

א. $\frac{3^4 2^7}{2^6 3^2}$
ב. $\frac{a^{10} b^{13} a^3}{b^4 b^6 b^2 a^{12}}$
ג. $\frac{x^8 y^5 y^9 x^2}{y^4 x^4}$

3) לפניך הביטוי הבא: $\frac{3^6 2^{17} 3^3 2^4}{3^4 2^3 2^2}$.
מצא n כך שיתקיים שוויון בין הביטוי $243 \cdot 2^n$ לבין הביטוי הנתון.

4) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{2^3 \cdot 2^7}{2^4 \cdot 2^5}$ ב. $\frac{9^3 \cdot 27^2}{3^9 \cdot 81}$

ג. $\frac{10^9 \cdot 25^5 \cdot 8^{-1}}{40^3 \cdot 125^5}$ ד. $2^3 + 2^5$

5) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוק: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

א. $(a^2)^4$ ב. $(c^3)^{10}$ ג. $(x^3 x^{10})^2$

ד. $\frac{(b^2)^3}{b^2 b^3}$ ה. $\frac{n^7 n^8}{(n^3)^4}$ ו. $\frac{d^{20}(d^4)^2}{d^{12}(d^3)^2}$

ז. $\frac{2^5(2^4)^2 2^3}{(2^3 2^2)^3}$ ח. $\frac{3^6(3^3 3^2)^6}{3^{28}(3^2)^3}$ ט. $\frac{(8^3)^8 8^{11}}{(8^2 8)^3 8^8}$

י. $\frac{(2^4)^5 (3^6)^7 2^{20}}{3^{35} 2^{40}}$ יא. $\frac{(3^2)^6 5^{31} 3^7}{(5^2)^{10} 5^{11} 3^{18}}$ יב. $\frac{(3^2)^7 5^{10} (5^3)^2}{3^9 5^{16}}$

6) לפניך הביטויים הבאים: $\left((3^2)^3\right)^4$ ו- $\left((3^6)^n\right)^2$.

מצא n כך שיתקיים שוויון בין שני הביטויים.

7) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים:

א. $\frac{2^3 3^5}{2^2 3^4}$ ב. $\frac{5^{20} 3^{14} 3^8}{3^{20} 5^{12} 5^8}$ ג. $\frac{7^{12} 2^2 2^6}{2^5 7^{10} 7}$

8) פשט את הביטויים הבאים:

א. $3^2 9 \cdot 81^2$ ב. $64^2 2^3 8^2$ ג. $125 \cdot 25 \cdot 5^5$

ד. $\frac{2^4 \cdot 16^5}{8 \cdot 512}$ ה. $\frac{(4^2)^3 16}{64 \cdot 2^3}$ ו. $\frac{\left((3^4)^4\right)^5}{81^3 27^4 3^5}$

9) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\dfrac{\left(2a^2b\right)^3\cdot\left(ab^{-3}\right)^2}{4ab^{-2}\cdot\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^4}$

ב. $\dfrac{\left(k^2\right)^{m+2}\cdot k^{1-3m}}{\left(k^{2m}\right)^3\cdot\dfrac{1}{k^{7m-4}}}$

ג. $\dfrac{4^{b+3}}{4^{b+1}+4^{b+2}}$

ד. $\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{x^{n+3}+x^{n+5}}{x^{n+2}}$

10) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $(ab)^n=a^nb^n$ ו- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$

א. $\left(a^2b\right)^3$

ב. $\left(m^4n^3\right)^5$

ג. $\left(x^{12}y^3\right)^3$

ד. $\left(\dfrac{a^3}{b^2}\right)^4$

ה. $\left(\dfrac{i^4}{k^3}\right)^7$

ו. $\left(\dfrac{a^{14}b^4}{a^6ab^3}\right)^3$

ז. $\left(\dfrac{x^3y^5y^2x^6}{y^4x^7}\right)^6$

ח. $\left(\dfrac{t^7r^{20}t^3}{r^2r^{12}t^8}\right)^2$

ט. $\left(\dfrac{\left(b^{12}c\right)^2c^{14}}{c\left(c^3b^5\right)^4b^3}\right)^2$

11) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים:

א. $\left(\dfrac{3^92^62^2}{3^62^53^2}\right)^2$

ב. $\left(\dfrac{\left(5^4\right)^2 3^6}{3^55^7}\right)^2$

ג. $\left(\dfrac{7^3\cdot16\cdot128\cdot49}{\left(2^27\right)^5}\right)^3$

12) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה שלילית:

א. $\dfrac{1}{4^6}$

ב. $\dfrac{1}{5^3}$

ג. $\dfrac{1}{2^{10}}$

ד. $\dfrac{1}{8}$

ה. $\dfrac{1}{81}$

ו. $\dfrac{1}{125}$

13) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה חיובית וחשב את ערכם:

א. $\dfrac{1}{4^{-3}}$

ב. $\dfrac{1}{3^{-2}}$

ג. $\dfrac{1}{5^{-3}}$

14) חשב את הביטויים הבאים:

א. $3^2 \cdot 3^{-5} \cdot 3^7$

ב. $2^{-8} \cdot 512 \cdot 2^2$

ג. $5^6 \cdot 5^{-3} \cdot 5^{-2}$

ד. $2^{14} \cdot 3^{-6} \cdot 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 2^{-30}$

ה. $\dfrac{2^{-5} \cdot 5^3 \cdot 2^{14}}{5^2 \cdot 5^{-10} \cdot 5^8 \cdot 2^6}$

ו. $\dfrac{3^{-6} \cdot 7^7 \cdot 7^{-4}}{3^{-4} \cdot 3^{-3} \cdot 7^3}$

15) פשט את הביטויים הבאים לצורה ללא חזקות שליליות.

א. $\left(\dfrac{5^{-4}}{3^2}\right)^{-6}$

ב. $\dfrac{\left(4^4\right)^{-4} 3^{-11}}{\left(3^{-2}4^3\right)^{-6}}$

ג. $\dfrac{2^{-3}5^4}{5^4 \cdot 125 \cdot \left(5^2 2\right)^{-3} \cdot 2^{-4}}$

16) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\dfrac{a^{n+2} \cdot a^{2-3n}}{\left(a^3\right)^{n+1}}$

ב. $\dfrac{\left(k^2\right)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{\left(k^{2m}\right)^3 \cdot \dfrac{1}{k^{7m-4}}}$

ג. $\dfrac{\left(m^{n+2}\right)^3 \cdot m^{-4n-2}}{\dfrac{1}{m^{6n+2}} \cdot \left(m^3\right)^{n-2}}$

תשובות סופיות:

	א.	ב.	ג.	ד.	ה.	ו.
(1	a^8	t^{15}	b^{22}	k^5	n^5	c^4
	ז. a^7	ח. x^3	ט. 1	י. 3^9	יא. 2^8	יב. 5^5.
(2	18	ab	x^6y^{10}.			
(3	$n=16$.					
(4	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{8}$	40.		
(5	a^8	c^{30}	x^{26}	b	n^3	d^{10}
	ז. 2	ח. 9	ט. 8^{18}	י. 3^7	יא. 3	יב. 3^5.
(6	$n=2$.					
(7	6	9	56.			
(8	3^{12}	2^{21}	5^{10}	2^{12}	2^7	3^{51}.
(9	$\frac{2b^3}{a}$	k	$3\frac{1}{5}$	$\frac{1}{x}+x$.		
(10	a^6b^3	$m^{20}n^{15}$	$x^{36}y^9$	$\frac{a^{12}}{b^8}$	$\frac{i^{28}}{k^{21}}$	$a^{21}b^3$
	ז. $x^{12}y^{18}$	ח. t^4r^{12}	ט. b^2c^6.			
(11	576	225	8			
(12	4^{-6}	5^{-3}	2^{-10}	2^{-3}	3^{-4}	5^{-3}.
(13	64	9	125.			
(14	81	8	5	$\frac{1}{9}$	1000	3.
(15	$5^{24}\cdot 3^{12}$	$\frac{4^2}{3^{23}}$	$5^3\cdot 2^4$.			
(16	a^{1-5n}	k	m^{2n+12}.			

חוקי השורשים:

סיכום כללי:

סיכום חוקי השורשים:

1. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$
2. $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$
3. $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$
4. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a \cdot b}$
5. $\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\dfrac{a}{b}}$
6. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$

שאלות:

17) הבא את הביטויים הבאים לצורה: $\sqrt[n]{a^m}$.

א. $3^{\frac{1}{4}}$
ב. $2^{\frac{3}{5}}$
ג. $6^{\frac{5}{6}}$
ד. $-12^{\frac{2}{7}}$
ה. $-(-4)^{\frac{1}{3}}$
ו. $-(-3)^{\frac{3}{4}}$
ז. $5^{-\frac{1}{4}}$
ח. $27^{-\frac{1}{3}}$
ט. $64^{-\frac{5}{6}}$

18) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{49}$
ב. $-\sqrt{25}$
ג. $\sqrt[3]{8}$
ד. $-\sqrt[7]{128}$
ה. $\sqrt[3]{(-2)^6}$
ו. $\left(\sqrt[5]{1024}\right)^2$
ז. $\left(\sqrt[5]{-243}\right)^3$
ח. $\sqrt[4]{-16}$
ט. $\sqrt[4]{-25^2}$
י. $\sqrt[4]{(-25)^2}$

19) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים :

א. $8^{\frac{2}{3}}$ ב. $32^{-\frac{3}{5}}$ ג. $128^{-\frac{2}{7}}$

ד. $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$ ה. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2.5}$ ו. $\left(\frac{64}{343}\right)^{-\frac{2}{3}}$

ז. $81^{\frac{3}{4}}\cdot 64^{-\frac{1}{3}}$ ח. $343^{-\frac{2}{3}}\cdot 100^{\frac{1}{2}}$ ט. $16^{\frac{1}{4}}\cdot 8^{-\frac{1}{3}}\cdot 4^{-\frac{1}{2}}$

20) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא : $\frac{\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$.

21) פשט את הביטויים הבאים :

א. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ ב. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$ ג. $\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}$

ד. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ ה. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$ ו. $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$

ז. $\frac{\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$ ח. $\frac{\sqrt[3]{500}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt[4]{25^2}\cdot\sqrt[3]{4}}$ ט. $\frac{\sqrt[3]{8^2}\sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{400}\sqrt{2}}$

22) הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים :

א. $3\sqrt{2}$ ב. $5\sqrt{3}$ ג. $\frac{\sqrt{36}}{2}$

ד. $2\sqrt[3]{3}$ ה. $x\sqrt{x}$

23) הכנס את כל המקדמים בביטויים הבאים לתוך השורש :

א. $2\sqrt{5}$ ב. $4\sqrt[3]{2}$ ג. $2\sqrt[5]{3}$

ד. $\frac{\sqrt{24}}{2}$ ה. $\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$ ו. $\frac{3\sqrt[4]{5000}}{10}$

ז. $-5\sqrt[3]{2}$ ח. $-5\sqrt[4]{2}$ ט. $-5\sqrt[5]{-2}$

24) הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר:

א. $\sqrt{12}$ ב. $\sqrt{48}$ ג. $\sqrt{63}$

ד. $\sqrt[3]{54}$ ה. $\sqrt{x^5}$

25) חלץ מן הביטויים הבאים את המקדם הגבוה ביותר ככל הניתן:

א. $\sqrt{40}$ ב. $\sqrt{50}$ ג. $\sqrt{320}$

ד. $\sqrt[3]{108}$ ה. $\sqrt[3]{56}$ ו. $\sqrt[5]{160}$

ז. $\sqrt[4]{162}$ ח. $\sqrt[5]{972}$ ט. $\sqrt[6]{192}$

26) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{18}-\sqrt{8}$ ב. $\sqrt{7}+\sqrt{63}$ ג. $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{128}$

ד. $\sqrt[4]{405}-\sqrt[4]{80}$ ה. $\dfrac{20}{\sqrt{5}}$ ו. $\dfrac{\sqrt{8}}{2}$

ז. $\dfrac{16}{\sqrt{2}}$ ח. $\dfrac{6}{\sqrt{3}+\sqrt{12}}$ ט. $\dfrac{10}{\sqrt[5]{160}-\sqrt[5]{5}}$

27) פשט את הביטויים הבאים:

א. $3^{\frac{1}{4}}\cdot 9^{-2.5}\cdot 27^{\frac{3}{2}}$ ב. $2^{\frac{3}{4}}\cdot 16^{\frac{1}{2}}\cdot 64^{-3}$ ג. $125^{\frac{1}{6}}\cdot 5^{2}\cdot 5^{-\frac{2}{3}}$

ד. $\dfrac{27^{\frac{4}{3}}\cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}$ ה. $\dfrac{49^{\frac{2}{5}}\cdot 7^{-\frac{6}{5}}}{343^{\frac{1}{5}}}$ ו. $\dfrac{512^{\frac{1}{4}}\cdot 64^{-\frac{3}{4}}}{128^{-\frac{1}{8}}\cdot 2^{-2}}$

תשובות סופיות:

17) א. $\sqrt[4]{3}$ ב. $\sqrt[5]{2^3}$ ג. $\sqrt[6]{6^5}$ ד. $-\sqrt[7]{12^2}$ ה. $-\sqrt[3]{-4}$ ו. ϕ

ז. $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ ח. $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$ או $\frac{1}{3}$ ט. $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}}$ או $\frac{1}{2^5}$.

18) א. 7 ב. -5 ג. 2 ד. -2 ה. 4 ו. 16

ז. -27 ח. ϕ ט. ϕ י. 5.

19) א. 4 ב. $\frac{1}{8}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. 125 ה. $\frac{32}{243}$ ו. $\frac{49}{16}$

ז. $\frac{27}{4}$ ח. $\frac{10}{49}$ ט. $\frac{1}{2}$.

20) $\sqrt{2}$.

21) א. 4 ב. 9 ג. 20 ד. 6 ה. 3 ו. 2

ז. $\sqrt{2}$ ח. $\sqrt{5}$ ט. $\sqrt{2}$.

22) א. $\sqrt{18}$ ב. $\sqrt{75}$ ג. $\sqrt{9}$ ד. $\sqrt[3]{24}$ ה. $\sqrt{x^3}$.

23) א. $\sqrt{20}$ ב. $\sqrt[3]{128}$ ג. $\sqrt[5]{96}$ ד. $\sqrt{6}$ ה. $\sqrt[3]{3}$

ו. $\sqrt[4]{40\frac{1}{2}}$ ז. $\sqrt[3]{-250}$ ח. $-\sqrt[4]{1250}$ ט. $\sqrt[5]{5^5\cdot 2}$.

24) א. $2\sqrt{3}$ ב. $4\sqrt{3}$ ג. $3\sqrt{7}$ ד. $3\sqrt[3]{2}$ ה. $x^2\sqrt{x}$.

25) א. $2\sqrt{10}$ ב. $5\sqrt{2}$ ג. $8\sqrt{5}$ ד. $3\sqrt[3]{4}$ ה. $2\sqrt[3]{7}$ ו. $2\sqrt[5]{5}$

ז. $3\sqrt[4]{2}$ ח. $3\sqrt[5]{4}$ ט. $2\sqrt[6]{3}$.

26) א. $\sqrt{2}$ ב. $4\sqrt{7}$ ג. $6\sqrt[3]{2}$ ד. $\sqrt[4]{5}$ ה. $4\sqrt{5}$ ו. $\sqrt{2}$

ז. $8\sqrt{2}$ ח. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ או $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[5]{5}}$ או $2\sqrt[5]{5^4}$.

27) א. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ ב. $\frac{1}{\sqrt[4]{2^{61}}}$ ג. $\sqrt[6]{5^{11}}$ ד. 27 ה. $\frac{1}{7}$ ו. $\sqrt[8]{2^5}$.

כתיבה מדעית של מספרים:

שאלות:

28) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. 15,000,000
ב. 1,500,000
ג. 150,000,000,000
ד. 23,400,000
ה. 0.0003
ו. 0.00000042
ז. 0.000000042
ח. 0.00000000042

29) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. $(3,000,000)^2$
ב. $(2,000,000)^2$
ג. $(5,000)^3$
ד. $(50,000)^3$
ה. $(0.0002)^4$
ו. $(0.00004)^3$
ז. $(0.000005)^3$
ח. $(0.000000007)^3$

תשובות סופיות:

28) א. $1.5\cdot10^7$ ב. $1.5\cdot10^6$ ג. $1.5\cdot10^{11}$ ד. $2.34\cdot10^7$ ה. $3\cdot10^{-4}$
ו. $4.2\cdot10^{-7}$ ז. $4.2\cdot10^{-8}$ ח. $4.2\cdot10^{-10}$.

29) א. $9\cdot10^{12}$ ב. $4\cdot10^{12}$ ג. $1.25\cdot10^{11}$ ד. $1.25\cdot10^{14}$ ה. $1.6\cdot10^{-15}$
ו. $6.4\cdot10^{-14}$ ז. $1.25\cdot10^{-16}$ ח. $3.43\cdot10^{-25}$.

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 5 - משוואות ואי-שוויונים מעריכיים

תוכן העניינים

מערכת משוואות מעריכיות:

שאלות:

1) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} y=3^x \\ y=18-3^x \end{cases}$.

2) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 5^{2x}-5^y=5^x-25 \\ y-x=2 \end{cases}$.

3) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} \dfrac{1}{3^y-4}+\dfrac{3}{3^x-2}-\dfrac{1}{3^x+2}=3 \\ 4^y=\sqrt{256^x} \end{cases}$.

4) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 5^x+2^y=13 \\ 2\cdot5^x-2^y=2 \end{cases}$.

5) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 2\cdot3^x-3\cdot2^y=42 \\ 3^{x+1}-2^{y+1}=73 \end{cases}$.

6) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 5^{2x+1}+8\cdot10^x-2^{2y+4}=0 \\ \left(\sqrt{3}\right)^y=27^{\frac{x-1}{6}} \end{cases}$.

7) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 6\cdot4^x-7\cdot6^{y-1}+2\cdot3^{x+y}=6^y \\ \sqrt[4]{5^x}\cdot\sqrt{\left(5\sqrt{5}\right)^y}=\sqrt[4]{125}\cdot5^x \end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $(2,9)$ 2) $(0,2)$, $(2,4)$ 3) $(1,2)$ 4) $(1,3)$

5) $(3,2)$ 6) $(-1,-2)$ 7) $(1,2)$, $(-1,0)$

אי שוויונים מעריכיים:

סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $a^x > a^y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

שאלות:

פתור את אי השיוויונים הבאים:

1) $3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x}$

2) $\sqrt{2^x} \le 4^{x^2-1\frac{1}{4}}$

3) $e^{\sqrt{x}+1} > e^{2x}$

4) $\left(\frac{1}{7}\right)^{5x} \ge \left(\frac{1}{7}\right)^{1-3x}$

5) $25^x + 5 < 6 \cdot 5^x$

6) $e^{2x} - 2e^x + 1 \le 0$

הערה:

השאלות הבאות דורשות הכרות עם מושג הלוגריתם הטבעי (ln) וכן חוקי הלוגריתמים אשר ילמדו בהמשך.

7) $e^x > 3$

8) $e^{2x} - 5e^x + 4 > 0$

תשובות סופיות:

1) $x < \frac{2}{3}$

2) $x \ge 1\frac{1}{4}$ או $x \le -1$

3) $0 \le x < 1$

4) $x \le \frac{1}{8}$

5) $0 < x < 1$

6) $x = 0$

7) $x > \ln 3$

8) $x > \ln 4$ או $x < 0$

אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך:

סיכום כללי:

דרך הפתרון של אי שוויון עם משתנה בבסיס ובמעריך:

- יש לדרוש בסיס חיובי ולחבר אי-שוויון בהתאם.
- יש לפתור את אי השוויון לפי השוואת מעריכים.
- יש למצוא את חיתוך הפתרונות.

נתון: $f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)}$ נדרוש: $f(x)>0$.

דרך הפתרון: אם: $f(x)>1$ אז: $g(x)>h(x)$.

אם: $0<f(x)<1$ אז: $g(x)<h(x)$.

לבסוף נמצא את חיתוך התחומים.

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

1) $x^{2x-1} > x^{x+2}$

2) $(x-2)^{2x-5} < (x-2)^{x+1}$

3) $x^{2x-6} < 1$

4) $x^{2x^2+2} < x^{5x}$

5) $(x^2-6x+13)^{x^2-2x} \ge (x^2-6x+13)^3$

6) $(x+1)^{|x|} < x^2+2x+1$

תשובות סופיות:

1) $0<x<1\ ,\ x>3$.

2) $3<x<6$.

3) $1<x<3$.

4) $0<x<0.5\ ,\ 1<x<2$.

5) $x\le -1\ ,\ x\ge 3$.

6) $0<x<2$.

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 6 - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים

תוכן העניינים

מערכת משוואות לוגריתמיות:

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

1) $\begin{cases} y=\log_2 x \\ y=6-\log_2 x \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_6^2 x-\log_6(2y-2)=2 \\ \frac{1}{2}x=y-1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_3(x+y)=\log_3(4x+y)-2 \\ \log_5(5x+3y)=2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_2(\log_3(x-y))=1 \\ \log_5(x+y-11)=\log_{25}x+\frac{1}{2}\log_5(y+2) \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_5 x+6\log_4 y=11 \\ 10\log_5 x-2\log_4 y=17 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \log_2 x^2+\log_3\frac{1}{y}=9 \\ \log_2\sqrt{x}+\log_{\sqrt[3]{3}} y=-1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \log_5 x+2^{\log_2 y}=6 \\ x^y=5^8 \end{cases}$

8) $\begin{cases} xy=27 \\ x^{\log_3 y}=9 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2^{\log_{\frac{1}{2}}(2x-y)}=7^{\log_7\frac{2x+y}{15}} \\ \log_3 x+\log_3 y=\frac{1}{\log_{28}3} \end{cases}$

תשובות סופיות:

1) $(8,3)$ 2) $(36,19),\left(\frac{1}{6},1\frac{1}{12}\right)$ 3) $(8,-5)$

4) $(16,7)$ 5) $(25,8)$ 6) $\left(16,\frac{1}{3}\right)$

7) $(25,4),(625,2)$ 8) $(3,9),(9,3)$ 9) $(4,7)$

מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות:

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות :

1) $$\begin{cases} y=\log_2\left(4^x-2\right) \\ y=2x-1 \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} 25^y=\left(5\sqrt{5}\right)^{x+1} \\ \log_5\sqrt{x}+\log_5\sqrt{y}=\log_5 3 \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} 3y+5\log_6 x=1 \\ 216\cdot x^{2-y}=6^{1-4y} \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} x\cdot\log_2 3=\dfrac{y}{\log_9 2} \\ \log_3\left(9^x+27\right)=2y+\log_3 12 \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} \left(2^x-1\right)^2-4y+3=0 \\ x=\log_2\left(y+1\right) \end{cases}$$

6) $$\begin{cases} x=\log_4\left(5-9^y\right) \\ \log_2\left(2^x+3\right)=\log_4\left(29-\left(3^y-3\right)^2\right) \end{cases}$$

תשובות סופיות:

1) $(1,1)$

2) $(3,3)$

3) $(36,-3),\left(6,-1\frac{1}{3}\right)$

4) $\left(1,\frac{1}{2}\right),(2,1)$

5) $(1,1),(2,3)$

6) $(1,0)$

אי-שוויונים לוגריתמים:

סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $\log_a x > \log_a y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $\log_2 x < \log_2(5x-20)$

2) $\log_6(x^2-5x) < 1$

3) $\log_3 x > \log_9(15-2x)$

4) $\log_{\frac{1}{2}}(1-3x) \ge \log_{\frac{1}{2}}(7-x)$

5) $\ln x \ge \ln(x^2-12)$

6) $\ln x < 3$

7) $\ln^2 x - 6\ln x < 7$

8) $\frac{6}{\ln^2 x} \ge 2 - \frac{1}{\ln x}$

תשובות סופיות:

1) $x > 5$

2) $-1 < x < 0\ ,\ 5 < x < 6$

3) $3 < x < 7\frac{1}{2}$

4) $-3 \le x \le \frac{1}{3}$

5) $2\sqrt{3} < x \le 4$

6) $0 < x < e^3$

7) $\frac{1}{e} < x < e^7$

8) $\frac{1}{\sqrt{e^3}} \le x \le e^2$ וגם $x \ne 1$

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 7 - אינדוקציה מתמטית

תוכן העניינים

שאלות העוסקות בתכונות התחלקות:

סיכום כללי:

מבנה כללי של רישום הוכחה באינדוקציה:

בדיקה:

בדיקה נכונות האינדוקציה עבור $n=1$ (ולעיתים כדאי לבדוק גם עבור $n=2,3$).

הנחת האינדוקציה:

נניח כי עבור $n=k$ (k טבעי כלשהו) כי טענת האינדוקציה נכונה.

הוכחת האינדוקציה:

נוכיח כי עבור $n=k+1$ טענת האינדוקציה מתקיימת.

סיכום:

לסיכום, הראנו כי הטענה נכונה עבור $n=1$ והראנו כי נכונות הטענה עבור $n=k$ גוררת את נכונותה עבור $n=k+1$, לפיכך, על פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

שאלות:

1) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 8^n-3^n מתחלק ב-5 ללא שארית לכל n טבעי.

2) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 11^n-4^n מתחלק ב-7 ללא שארית לכל n טבעי.

3) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $4^{n+2}+8\cdot 7^n$ מתחלק ב-24 ללא שארית לכל n טבעי.

4) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $5^{n+1}-5\cdot 3^{2n}$ מתחלק ב-20 ללא שארית לכל n טבעי.

5) a_n הוא האיבר במקום ה-n בסדרה החשבונית: $1,3,5,7,...$ הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $2^{a_n}+4$ מתחלק ב-12 ללא שארית לכל n טבעי הגדול מ-1.

6) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי n^2+n מתחלק ב-2 ללא שארית לכל n טבעי.

7) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי n^3+5n מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.

8) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 3^n-2n-1 מתחלק ב-4 ללא שארית לכל n טבעי.

9) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $9\left(9^n-1\right)-40n$ מתחלק ב-32 ללא שארית לכל n טבעי.

10) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^n+5^n-2^n\left(2^n+1\right)$ מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.

11) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 7^n+2^{2n} מתחלק ב-11 ללא שארית לכל n טבעי אי זוגי.

12) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי a^n-b^n מתחלק ב-$(a+b)$ ללא שארית לכל n טבעי זוגי.

13) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^{n+2}+1$ מותיר שארית 2 בחלוקתו ב- 3 לכל n טבעי.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

סדרות:

סיכום כללי:

תזכורת:

- סדרה היא אוסף מספרים: $a_1, a_2, ..., a_n$, כאשר n הוא מיקום האיבר בסדרה ו- a_n הוא ערך האיבר העומד במקום ה-n-י בסדרה.
  - סדרה כללית – סדרה שבה כל איבר מוגדר לפי מקומו בסדרה.
  - סכום n האיברים הראשונים בסדרה יסומן ב-S_n והוא מקיים: $S_n = a_1 + ... + a_n$.

- סדרה חשבונית – סדרת מספרים שבה ההפרש בין כל שני איברים סמוכים הוא גודל קבוע. נוסחת האיבר הכללי היא: $a_n = a_1 + d(n-1)$ כאשר d הפרש הסדרה.
  - סכום n האיברים הראשונים הוא: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n}{2}\left[2a_1 + d(n-1)\right]$.

- סדרה הנדסית – סדרת מספרים שבה המנה בין כל שני איברים סמוכים היא גודל קבוע. נוסחת האיבר הכללי היא: $a_n = a_1 q^{n-1}$ כאשר q היא מנת הסדרה.
  - סכום n האיברים הראשונים הוא: $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

שאלות:

14) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $1+2+3+4+...+n=\frac{n}{2}(n+1)$.

15) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $4+7+10+13+...+(3n+1)=\frac{n}{2}(3n+5)$.

16) נתונה סדרה שבה: $a_n=n(n+2)$.

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $S_n=\frac{n}{6}(n+1)(2n+7)$.

17) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}.$$

18) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{6}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{6}{3\cdot 5\cdot 7}+\cdots+\frac{6}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{2n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}.$$

19) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 9+...+n\cdot 3^{n-1}=\frac{1}{4}\left[3^n(2n-1)+1\right].$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

עצרת:

סיכום כללי:

תזכורת – מושג העצרת:

עצרת מוגדרת להיות מכפלת האיברים עד לערך הנקוב: $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$.

מגדירים: $0!=1$ ותמיד מתקיימים השוויונות: $n!=n\cdot (n-1)!$, $(n+1)!=n!\cdot (n+1)$.

שאלות:

20) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

21) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1\cdot 2!}{2}+\frac{2\cdot 3!}{4}+\frac{3\cdot 4!}{8}+\ldots+\frac{n(n+1)!}{2^n}=\frac{(n+2)!}{2^n}-2$$

22) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$p!+\frac{(p+1)!}{1!}+\frac{(p+2)!}{2!}+\ldots+\frac{(p+n-1)!}{(n-1)!}=\frac{(p+n)!}{(n-1)!(p+1)}$$

23) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)\ldots\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{n!}$$

24) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{5}{1\cdot 4}-\frac{11}{4\cdot 7}+\frac{17}{7\cdot 10}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(6n-1)}{(3n-2)(3n+1)}=1+\frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות שבהן האיבר הכללי מורכב ממספר מחוברים:

שאלות:

25) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1+2+3+4+\ldots+2n=n(2n+1)$$

26) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$$

27) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\ldots+3n\cdot 2^{3n-1}=(3n-1)2^{3n}+1$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות העוסקות באינדוקציות עם איברים משתנים:

שאלות:

28) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+...+(3n)=2n(2n+1)$$

29) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+...+(2n)^2=\frac{n}{6}(2n+1)(7n+1)$$

30) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\left(1-\frac{1}{n+3}\right)...\left(1-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}$$

31) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n)=2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$$

32) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות העוסקות בהוכחת באי-שוויונים באינדוקציה:

שאלות:

33) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי הגדול מ-1 מתקיים:

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{n}{n+1}$$

34) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\le 2-\frac{1}{n}$$

35) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי הגדול מ-2 מתקיים:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{3}{5}$$

36) נתונה סדרה שבה: $a_n=n^n$. נגדיר: $T_n=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n$.
הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $T_n\le n^{\frac{n}{2}(n+1)}$.

37) נתון אי-השוויון: $2^n>n^2$. מצא את ה-n המינימלי שממנו מתקיים
אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי
אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה-n שמצאת.

38) נתון אי-השוויון: $4^n>5n^2+1$. מצא את ה-n המינימלי שממנו מתקיים
אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי
אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה-n שמצאת.

39) נתון אי-השוויון: $n^3-n<5^{n-1}$. מצא את ה-n המינימלי שממנו מתקיים
אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי
אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה-n שמצאת.

40) נתון אי-השוויון: $3^n+4^n+5^n<6^n$. מצא את ה-n המינימלי שממנו מתקיים
אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי
אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה-n שמצאת.

41) נתון אי-השוויון: $n^n \ge n!$. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי.

42) נתון אי-השוויון: $a^n + b^n < (a+b)^n$, $(a,b>0)$.
הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי הגדול מ-1.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות כוללות ומסכמות:

שאלות:

43) נתון השוויון: $4+7+10+13+...=\frac{n}{2}(3n+5)$.

א. מצא את האיבר במקום ה-n.

ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

ג. חשב את הסכום: $37+40+43+...+85$.

44) נתון השוויון: $\frac{2}{3}+\frac{6}{9}+\frac{10}{27}+...=2-\frac{2n+2}{3^n}$. מצא את האיבר במקום ה-$n$.

45) נתון השוויון: $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\cdots=\frac{n}{4n+1}$.

א. מצא את האיבר במקום ה-n.

ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

ג. חשב את הסכום: $\frac{1}{25\cdot 29}+\frac{1}{29\cdot 33}+\frac{1}{33\cdot 37}+\cdots+\frac{1}{89\cdot 93}$.

46) נתון השוויון: $(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+...+(2n)^2=\frac{n}{6}(2n+1)(7n+1)$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

ב. חשב באמצעות סעיף א' את הסכום: $26^2+27^2+28^2+...+48^2$.

47) נתון השוויון: $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

ב. הבע באמצעות n את הסכום: $4^2+6^2+8^2+\cdots+(4n)^2$.

48) נתונים השוויונים הבאים:

א. $3n+(3n+1)+(3n+2)+\cdots+4n=\frac{7}{3}(n^2+3n-1)$.

ב. $3n+(3n+1)+(3n+2)+\cdots+4n=n^2+11n-5$.

ג. $3n+(3n+1)+(3n+2)+\cdots+4n=\frac{7n}{2}(n+1)$.

קבע איזה מהשוויונים נכון לכל n טבעי, והוכח אותו באינדוקציה.

49) נתון השוויון: $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+\ldots+(3n)=an(2n+b)$.

א. נתון כי השוויון נכון עבור $n=1$ ו- $n=2$. מצא את ערכי a ו- b.

ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

50) נתון אי-השוויון: $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{3}{5}$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי הגדול מ-2.

ב. הוכח באמצעות סעיף א' כי מתקיים: $\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\cdots+\frac{1}{18}>\frac{1}{2}$.

51) נתון אי-השוויון: $n^2<2^n$.

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי הגדול מ-4.

ב. הוכח באמצעות סעיף א' כי מתקיים: $5^2\cdot 6^2\cdot 7^2\cdot 8^2\cdot\ldots\cdot 20^2<2^{200}$.

52) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הסכום: $9+27+81+\cdots+3^{3n+1}$ מתחלק ב-117 ללא שארית לכל n טבעי.

53) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי n^3+5n מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.

ב. נתון כי $a+b$ מתחלק ב-6 ללא שארית.
הוכח כי a^3+b^3 מתחלק ב-6 ללא שארית.

54) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח את הטענה: אם ל- n טבעי מסוים 3^n+5^n מתחלק ב-16 ללא שארית אז גם $3^{n+2}+5^{n+2}$ מתחלק ב-16 ללא שארית.

ב. האם מהטענה בסעיף א' נובע כי 3^n+5^n מתחלק ב-16 ללא שארית עבור כל n טבעי אי-זוגי?

ג. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי 3^n+5^n מתחלק ב-8 ללא שארית לכל n טבעי אי-זוגי.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

מושג הסכימה וכתיבה מקוצרת של אינדוקציות:

סיכום כללי:

סימון הסכימה (קרי: סיגמה) מוגדר באופן הבא: $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

מקור הסימון נובע מהמילה Sum ומשמעו הוא סכימה של איברים המתחילים בערך המצוין בתחתית הסימון $\left(\sum_{\boxed{k=1}}^{n}\right)$ עד לערך המצוין בחלקו העליון $\left(\sum_{k=1}^{\boxed{n}}\right)$.

דוגמאות:

- $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+n$.
- $\sum_{k=3}^{12} k^2 = 3^2+4^2+\ldots+12^2$.
- $\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\ldots.+\frac{1}{4n+1}$.

שאלות:

1) הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$.

2) הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

3) הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{n}{4n+1}$.

4) הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2\left(2^n-1\right)$.

5) הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{4^{k-1}}=4-\frac{1}{4^{n-1}}$.

6) הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{3n}k=1\frac{1}{2}n(3n+1)$.

7) הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{3n}(4k-1)=3n(6n+1)$.

8) הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n}(n+k)=\frac{n}{2}(3n+1)$.

9) הוכח באינדוקציה כי לכל n טבעי מתקיים: $\sum_{k=1}^{n}3^{n+k}=\frac{3^{n+1}(3^{n}-1)}{2}$.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

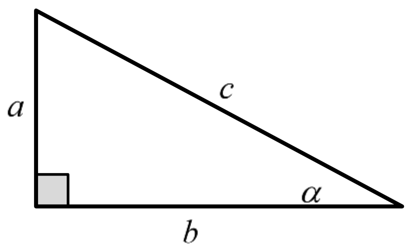
פרק 8 - טריגונומטריה במשולש ישר זווית

תוכן העניינים

משולש ישר זווית:

סיכום כללי:

הגדרות הפונקציות הטריגונומטריות:



$$\sin\alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{b}{c}$$

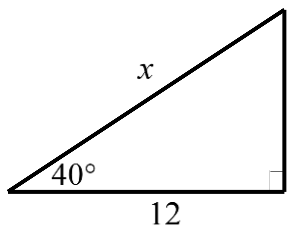
$$\tan\alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{הניצב שליד הזווית}} = \frac{a}{b}$$

משפט פיתגורס: $a^2 + b^2 = c^2$

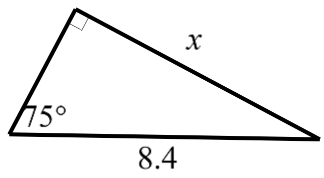
שאלות:

1) מצא את ערכו של α / x במשולשים ישרי הזווית הבאים:

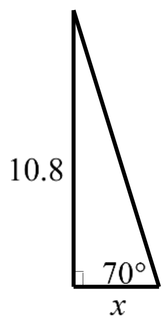
א.



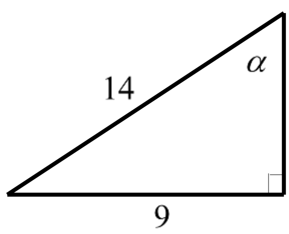
ב.



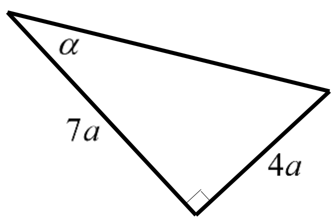
ג.



ד.



ה.

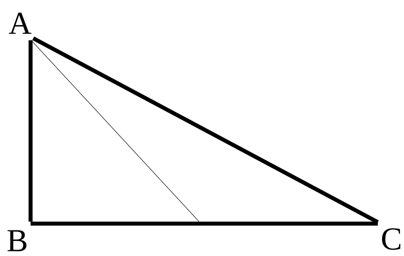


2) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle B = 90^\circ)$.

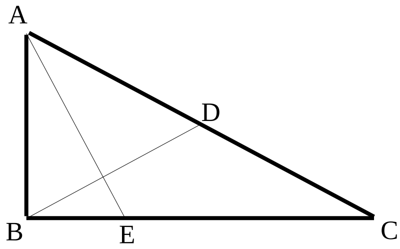
AD הוא התיכון לניצב BC.

נתון: $\sphericalangle C = 28^\circ$, 6 ס"מ = AB.

מצא את AD ואת $\sphericalangle BAD$.

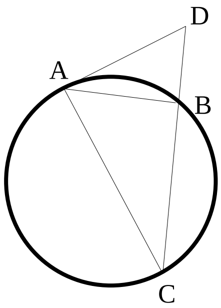


3) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\measuredangle B=90^\circ)$. BD הוא התיכון ליתר
ו-AE הוא חוצה הזווית $\measuredangle A$.
נתון: BD = 5.6 ס"מ, BC = 8 ס"מ.
מצא את BE ואת $\measuredangle BAE$.



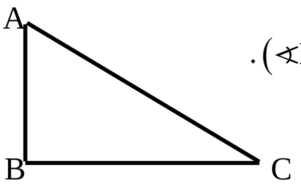
4) מצא את זוויותיו של מעוין שאורכי אלכסוניו 24 ס"מ ו-18 ס"מ.

5) המשולש ABC חסום במעגל כך שהצלע AC היא קוטר המעגל.
המשיק למעגל בנקודה A והמשך הצלע CB נפגשים בנקודה D.
נתון: BD=4 ס"מ, $\measuredangle DAB=32^\circ$.
מצא את אורכו של רדיוס המעגל.

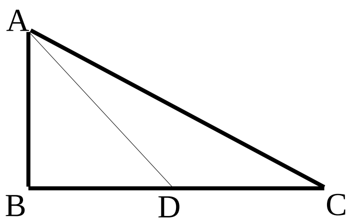


6) במשולש שווה שוקיים שבו השוק ארוכה ב-4 ס"מ מהבסיס נתון כי זווית הראש היא 34.92°. מצא את שטח המשולש.

7) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\measuredangle B=90^\circ)$.
נתון: $\measuredangle A=\alpha$, $AB=a$.
הבע באמצעות α ו-a את היקף המשולש.

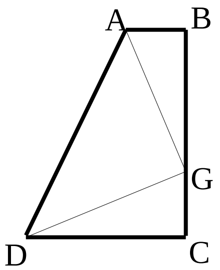


8) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\measuredangle B=90^\circ)$.
AD הוא התיכון לניצב BC.
נתון: $\measuredangle C=\alpha$, $AB=b$.
הבע באמצעות α ו-b את אורכי הקטעים BD ו-AD.



9) במשולש ישר זווית אחת הזוויות החדות היא α ואורך חוצה זווית זו הוא k.
הבע באמצעות α ו-k את שטח המשולש ואת אורך היתר.

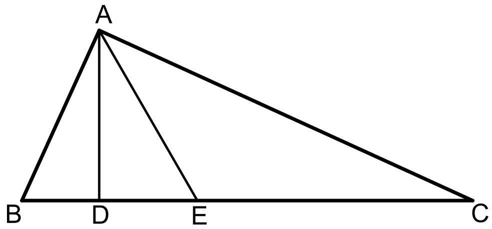
10) טרפז ABCD הוא טרפז ישר זווית $(\sphericalangle B=\sphericalangle C=90^\circ)$.
הנקודה G נמצאת על השוק BC כך ש-$AG \perp DG$.
נתון: $AG=DG=m$, $\sphericalangle BAG=\beta$.
הבע באמצעות β ו-m את שטח הטרפז.



11) המשולש ABC הוא ישר זווית $(\sphericalangle A=90^\circ)$.
הקטעים AD ו-AE הם בהתאמה גובה ליתר וחוצה זווית.
מסמנים: $DE=k$, $\sphericalangle DAE=\alpha$.

א. הבע באמצעות k ו- α את שטח המשולש ABC.

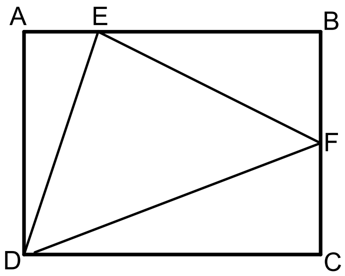
ב. חשב את שטח המשולש ABC אם ידוע כי: $\alpha=30$ ו-$k=2$.



12) במלבן ABCD מסמנים את הנקודות E ו-F הנמצאות על הצלעות AB ו-BC בהתאמה כך ש-E מקיימת: $3AE=BE$ ו-F היא אמצע הצלע BC.
אורך הצלע AD שווה לאורך הקטע BE.
מעבירים את הקטעים EF , DF ו-DE כך שנוצר במשולש DEF.

א. סמן ב-t את אורך הקטע AE והבע באמצעות t את אורכי צלעות המשולש DEF.

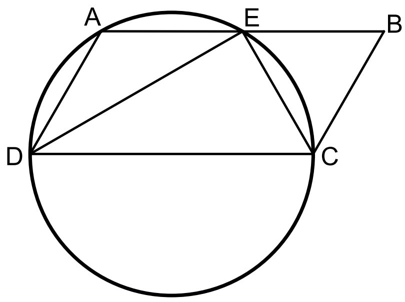
ב. חשב את זוויות המשולש EDF.



13) משולש שווה שוקיים שאורך שוקו k וזווית הבסיס שלו היא β חוסם מעגל.
הבע באמצעות β ו-k את רדיוס המעגל.

14) בטרפז ישר זווית חסום מעגל. אורך השוק הארוכה בטרפז היא b והזווית שהיא יוצרת עם הבסיס הגדול היא α .
הבע באמצעות α ו-b את אורכו של הבסיס הגדול בטרפז ואת שטחו.

הערה: השאלות הבאות משלבות ידע בגיאומטריה ובטריגונומטריה יחד:



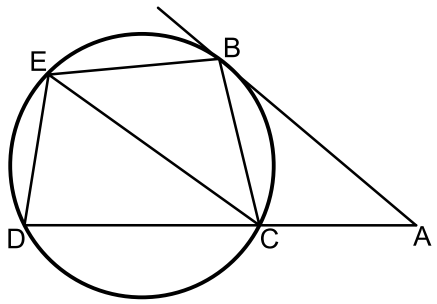
15) דרך הקודקודים A , C ו-D של המקבילית ABCD מעבירים מעגל. היקף המעגל חוצה את הצלע AB בנקודה E, $(AE = BE)$.

נתון כי DC הוא קוטר במעגל וכי המיתר DE חוצה את זווית D.

א. הוכח כי המיתר CE חוצה את זוויות C.

ב. רדיוס המעגל יסומן ב- R.
הבע באמצעות R את היקף המקבילית.

ג. מצא את רדיוס המעגל אם ידוע כי שטח המקבילית הוא $16\sqrt{3}$ סמ"ר.



16) מהנקודה A שמחוץ למעגל מעבירים משיק AB וישר חותך ACD.
מעבירים את המיתרים BC ו-BE אשר זהים באורכם.
כמו כן מעבירים את המיתר DE.
אורך המיתר CE שונה מאורך המשיק AB.

א. הוכח כי המרובע ABEC הוא טרפז.

ב. הוכח כי: $2\cdot\sphericalangle BEC = \sphericalangle EDC$.

ג. נתונים: $\sphericalangle A = 40^\circ$, AC = 6 ס"מ, AB = 9 ס"מ, CE = 8 ס"מ.
חשב את שטח המרובע ABEC.

תשובות סופיות:

1) א. $x=15.665$ ב. $x=8.114$ ג. $x=3.931$ ד. $\alpha=40.005^\circ$ ה. $\alpha=29.745^\circ$.

2) $\sphericalangle BAD=43.24^\circ$, AD = 8.236 ס"מ.

3) $\sphericalangle BAE=22.792^\circ$, BE = 3.294 ס"מ.

4) 106.26° , 106.26° , 73.74° , 73.74°.

5) $R=$ 6.04 ס"מ.

6) $S=$ 28.618 סמ"ר.

7) $P=a\left(1+\tan\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}\right)$.

8) $BD=\frac{b}{2\tan\alpha}$, $AD=\sqrt{b^2+\frac{b^2}{4\tan^2\alpha}}$.

9) $S=\frac{k^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\tan\alpha}{2}$, $AC=\frac{k\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.

10) $\frac{(m\sin\beta+m\cos\beta)^2}{2}$.

11) א. $S=\frac{k^2}{\cos 2\alpha\tan^2\alpha}$ ב. 24 סמ"ר.

12) א. $DE=t\sqrt{10}$, $EF=t\sqrt{11.25}$, $DF=t\sqrt{18.25}$ ב. 47.14° , 51° , 81.86°.

13) $R=k\cos\beta\tan\frac{\beta}{2}$.

14) $S=\frac{1}{2}b^2\sin\alpha(1+\sin\alpha)$, $\frac{1}{2}b\sin\alpha+\frac{\frac{1}{2}b\sin\alpha}{\tan\frac{\alpha}{2}}$.

15) א. שאלת הוכחה. ב. $6R$ ג. 4 ס"מ.

16) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. 32.78 סמ"ר.

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 9 - זהויות טריגונומטריות

תוכן העניינים

זהויות יסוד:

סיכום כללי:

קשרים בין פונקציות	$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$
זוויות משלימות ל- $90°$	$\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)$	$\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$
	$\cot\alpha=\tan(90°-\alpha)$	$\tan\alpha=\cot(90°-\alpha)$
קשרים בין פונקציות	$\cot^2\alpha+1=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$	$\tan^2\alpha+1=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

שאלות:

הוכחת זהויות יסודיות:

הוכח את הזהויות הבאות תוך שימוש בזהויות היסוד:

1) $\tan\alpha\cdot\cos\alpha=\sin\alpha$

2) $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=1$

3) $\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\tan\alpha$

4) $\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha=1+\cos^2\alpha$

5) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}=2$

6) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$

7) $\dfrac{\cos(90°-\alpha)}{\cos\alpha}=\tan\alpha$

8) $\sin^2(\alpha+45°)+\sin^2(45°-\alpha)=1$

9) $\sqrt{1+\tan^2\alpha}\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\tan\alpha$

10) $\dfrac{\sin\alpha(1-\cos^2\alpha)}{\cos^3\alpha}=\tan^3\alpha$

11) $\dfrac{\sin(90°-\alpha)-\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha}=\cot\alpha$

12) $\cos^2\alpha(1+\tan^2\alpha)=1$

13) $\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\cot\alpha$

14) $\dfrac{\sin^3\alpha}{\sin(90°-\alpha)-\cos^3\alpha}=\tan\alpha$

15) $\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\tan^2\alpha\sin^2\alpha$

16) $\dfrac{1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha+\cot^2\alpha$

הוכחות מתקדמות:

17) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}+\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=2+4\cot^2\alpha$.

18) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}+\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{2}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$.

19) הוכח את הזהות הבאה: $(\cot\alpha-\tan\alpha)(\cot\alpha+\tan\alpha)=(1+\cot^2\alpha)(1+\tan\alpha)(1-\tan\alpha)$.

20) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{\sin^4\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\cot^4\alpha$.

21) הוכח את הזהות הבאה: $1-\sin^2\alpha(1+\cos^2\alpha)=\cos^4\alpha$.

22) הוכח את הזהות הבאה: $\left(\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\right)^2=4+4\cot^2\alpha$.

23) הוכח את הזהות הבאה: $\sin^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\beta\cos^2\alpha=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

24) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}=\tan\alpha\tan\beta$.

הבעת ביטויים וחישובים באמצעות זהויות יסוד:

25) נתון כי: $\sin\alpha+\cos\alpha=k$.
הבע באמצעות k את ערכי הביטויים הבאים:
א. $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.
ב. $\sin\alpha-\cos\alpha$.
ג. $\tan\alpha+\cot\alpha$.
ד. $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$.

26) נתון כי: $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$.
מבלי למצוא את α חשב את: $\tan^2\alpha-2\cot^2\alpha$.

27) נתון כי: $\tan\alpha=\sqrt{7}$.

מבלי למצוא את α חשב את: $\frac{\sqrt{7}\sin\alpha+6\cos\alpha}{\sqrt{28}\sin\alpha-\cos\alpha}$.

28) חשב את ערך המכפלה הבאה: $\tan 1^\circ\cdot\tan 2^\circ\cdot\tan 3^\circ\cdot\dots\cdot\tan 88^\circ\cdot\tan 89^\circ$.

תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.
11) שאלת הוכחה.
12) שאלת הוכחה.
13) שאלת הוכחה.
14) שאלת הוכחה.
15) שאלת הוכחה.
16) שאלת הוכחה.
17) שאלת הוכחה.
18) שאלת הוכחה.
19) שאלת הוכחה.
20) שאלת הוכחה.
21) שאלת הוכחה.
22) שאלת הוכחה.
23) שאלת הוכחה.
24) שאלת הוכחה.
25) א. $\frac{k^2-1}{2}$ ב. $\pm\sqrt{2-k^2}$ ג. $\frac{2}{k^2-1}$ ד. $\frac{k}{2}\left(3-k^2\right)$
26) -7.75
27) 1
28) 1

ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות:

סיכום כללי:

	$\alpha=0°$	$\alpha=30°$	$\alpha=45°$	$\alpha=60°$	$\alpha=90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ϕ
$\cot\alpha$	ϕ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

הערות:

- ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות של $0°$ ו- $90°$ תִּלמדנָה בהמשך אך ניתנו כעת כדי להשלים את תמונת ערכי הזוויות.
- ניתן לזכור את הטבלה ע"י כתיבה של שורת הסינוס לפי: $\frac{\sqrt{0}}{2},\frac{\sqrt{1}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{4}}{2}$ אשר נותנים את הערכים של השורה הראשונה לאחר פישוט קל. עבור שורת ה- $\cos\alpha$ יש להפוך את הערכים ולבסוף יש לחלק כל זוג ביטויים כדי לכתוב את ערכי $\tan\alpha$ ולסובב עבור ערכי $\cot\alpha$.

שאלות:

חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בערכי הפונקציות הטריגונומטריות של זוויות מיוחדות:

1) $\sin 30° + \cos 30°$.

2) $\frac{\sin 30° \cdot \cos 30°}{\sin 60°}$.

3) $\tan 45° + \frac{\sin 45°}{\cos 45°}$.

4) $\frac{1+\cos 60°}{2\sin 60°}$.

5) $\cos^2 45°+\sin^2 30°$.

6) $\frac{\tan^2 60°\cdot\cos^2 30°}{\cos^2 60°}$.

7) $\frac{\tan 30°\cdot\cot 60°-\cot 45°\cdot\tan 45°}{4\left(\sin^2 60°-\frac{1}{4}\right)}$.

8) $\frac{27\cot^4 60°}{\sin 30°\cdot\cos 45°\cdot\tan 60°}$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

2) $\frac{1}{2}$

3) 2

4) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$

5) $\frac{3}{4}$

6) 9

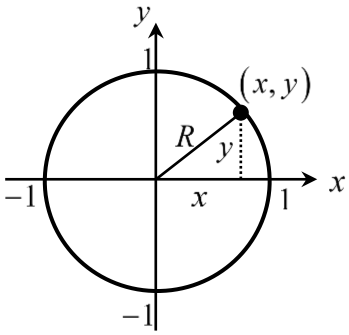
7) $-\frac{1}{3}$

8) $2\sqrt{6}$

מעגל היחידה – הגדרה וזהויות:

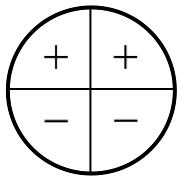
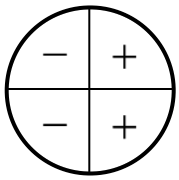
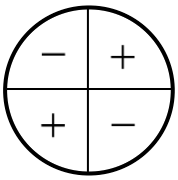
סיכום כללי:

הגדרת מעגל היחידה:



- מעגל קנוני שרדיוסו 1 מוגדר להיות המעגל הטריגונומטרי.
- הנקודות $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ מתאימות לזוויות של $0°$, $90°$, $180°$, $270°$.

הזהויות של המעגל הטריגונומטרי:

רביע	סינוס	קוסינוס	טנגנס
II III VI	$\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$ $\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha$ $\sin(-a)=-\sin\alpha$	$\cos(180^o-\alpha)=-\cos\alpha$ $\cos(180^o+\alpha)=-\cos\alpha$ $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$	$\tan(180^o-\alpha)=-\tan\alpha$ $\tan(180^o+\alpha)=\tan\alpha$ $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$
סימנים			

זהויות עבור זווית הגדולות מ-360 מעלות:

ניתן להוסיף או להוריד 'סיבובים' שלמים לזווית לפי:

$$\boxed{\begin{array}{l}\tan(\alpha+180°k)=\tan\alpha\\ \cot(\alpha+180°k)=\cot\alpha\end{array}} \quad , \quad \boxed{\begin{array}{l}\sin(\alpha+360°k)=\sin\alpha\\ \cos(\alpha+360°k)=\cos\alpha\end{array}}$$

כאשר k הוא מספר שלם מציין את מספר הסיבובים.

שאלות:

1) העבר את הביטויים הבאים לביטויים עם זווית ברביע הראשון.
אין צורך לחשב את ערך הביטוי:

א. $\sin 120°$
ב. $\cos 150°$
ג. $\tan 160°$
ד. $\cot 130°$
ה. $\sin 215°$
ו. $\cos 245°$
ז. $\tan 230°$
ח. $\cot 200°$
ט. $\sin 300°$
י. $\cos 310°$

2) חשב את ערכי הביטויים הבאים ע"י שימוש בזהויות המעגל הטריגונומטרי:

א. $\sin 150°$
ב. $\cos 210°$
ג. $\tan 120°$
ד. $\sin 330°$
ה. $\tan 225°$
ו. $\sin 315°$
ז. $\cos 120°$
ח. $\tan(-30°)$
ט. $\cos(-45°)$
י. $\sin 510°$
יא. $\cos 930°$
יב. $\tan(-225°)$

3) חשב את ערכי הביטויים הבאים ללא שימוש במחשבון:

א. $\left(\sin 240° \cdot \tan 150° + \cos(-60°)\right)^2$.
ב. $8\sin^2 150° \cdot \tan 135° - 2 \cdot \sin 135° \cdot \cos(-135°)$.
ג. $\dfrac{\cot 225°}{\sin(-225°) - \cos 135°} + \tan^2 210°$.

4) הוכח כי אם α, β ו- γ הן זוויות במשולש, אז מתקיים:

א. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma$.
ב. $\sin\left(\dfrac{\gamma+\beta}{2}\right) = \cos\dfrac{\alpha}{2}$.

תשובות סופיות:

1) א. $\sin 60^\circ$ ב. $-\cos 30^\circ$ ג. $-\tan 20^\circ$ ד. $-\cot 50^\circ$
ה. $-\sin 35^\circ$ ו. $-\cos 65^\circ$ ז. $\tan 50^\circ$ ח. $\cot 20^\circ$
ט. $-\sin 60^\circ$ י. $\cos 50^\circ$

2) א. $\frac{1}{2}$ ב. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ג. $-\sqrt{3}$ ד. $-\frac{1}{2}$
ה. 1 ו. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ז. $-\frac{1}{2}$ ח. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
ט. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ י. $\frac{1}{2}$ יא. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ יב. -1

3) א. 1 ב. -1 ג. $\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4) שאלת הוכחה.

סכום והפרש זוויות:

סיכום כללי:

סכום והפרש עבור $\sin(\alpha\pm\beta)$ ו- $\cos(\alpha\pm\beta)$ יחושב לפי:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha\pm\beta)&=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha\\ \cos(\alpha\pm\beta)&=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}}\,.$$

סכום והפרש עבור $\tan(\alpha\pm\beta)$ ו- $\cot(\alpha\pm\beta)$

$$\boxed{\begin{aligned}\tan(\alpha\pm\beta)&=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}\\ \cot(\alpha\pm\beta)&=\frac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}\end{aligned}}\,.$$

הערה:

בסרטון התיאוריה אין התייחסות מיוחדת לזהויות עבור $\tan(\alpha\pm\beta)$ ו- $\cot(\alpha\pm\beta)$.

שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בזהויות של סכום והפרש זוויות וללא שימוש במחשבון:

א. $\sin 75^\circ$ ב. $\sin 15^\circ$ ג. $\sin 105^\circ$

ד. $\sin(-15^\circ)$ ה. $\cos 75^\circ$ ו. $\cos 15^\circ$

ז. $\cos(-105^\circ)$ ח. $\cos 165^\circ$ ט. $\cos(-195^\circ)$

2) חשב ללא שימוש במחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sin 65^\circ\cos 25^\circ+\sin 25^\circ\cos 65^\circ$.

ב. $5\cos 50^\circ\cos 20^\circ+5\sin 50^\circ\sin 20^\circ$.

3) הוכח את הזהויות הבאות:

א. $\sin\left(60^\circ+\alpha\right)+\sin\left(60^\circ-\alpha\right)=\sqrt{3}\cos\alpha$.

ב. $\cos\left(45^\circ-\alpha\right)-\cos\left(45^\circ+\alpha\right)=\sqrt{2}\sin\alpha$.

ג. $\sin\left(\alpha+\beta\right)\cdot\sin\left(\alpha-\beta\right)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

ד. $\tan\alpha-\tan\beta=\dfrac{\sin\left(\alpha-\beta\right)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

4) נתון: $\cos\beta=\dfrac{8}{17}$, $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$ ו- α,β זוויות חדות.

מבלי למצוא את הערכים של α ו- β חשב:

א. $\sin\left(\alpha+\beta\right)$.

ב. $\cos\left(\alpha+\beta\right)$.

ג. $\tan\left(\alpha+\beta\right)$.

5) הוכח את הזהות: $\sin\left(\alpha+\beta\right)-\sin\left(\alpha-\beta\right)=2\sin\beta\cos\alpha$.

6) הוכח את הזהות: $\left(\sin\alpha+\cos\alpha\right)\left(\sin2\alpha+\cos2\alpha\right)=\sin3\alpha+\cos\alpha$.

7) הוכח את הזהות: $\tan7\alpha-\tan5\alpha-\tan2\alpha=\tan7\alpha\tan5\alpha\tan2\alpha$.

8) הוכח את הזהות: $\dfrac{\sin\left(\alpha-\beta\right)}{\cos\left(\alpha+\beta\right)}=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$.

9) הוכח את הזהות: $\cot\alpha-\cot\beta=\dfrac{\sin\left(\beta-\alpha\right)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

10) הוכח את הזהות הבאה:

$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\sin\left(\alpha+\beta+\gamma\right)$.

11) הוכח כי מתקיים: $\sin 65^\circ \cos 25^\circ + \sin 25^\circ \cos 65^\circ = 1$.

12) הוכח כי מתקיים: $\tan 18^\circ \tan 27^\circ + \tan 18^\circ + \tan 27^\circ = 1$.

13) נתון כי: $\sin 76^\circ = m$. הבע את $\sin 31^\circ$ באמצעות m.

14) הזוויות α ו- β הן זוויות חדות.

נתון כי: $\tan\alpha = \dfrac{(2-k)\sqrt{3}}{3k}$ ו- $\tan\beta = \dfrac{(2k-1)\sqrt{3}}{3}$.

הראה כי מתקיים: $\alpha + \beta = 60^\circ$.

15) היעזר בנוסחה: $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \tan\beta}$ ומצא את $\tan x$ ו- $\tan y$

אם ידוע כי: $\tan(x+y) = -3$ ו- $\tan(x-y) = \dfrac{1}{3}$. הבחן בין שני מקרים.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ב. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ג. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ד. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ ה. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

ו. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ז. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ ח. $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ט. $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2) א. 1 ב. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

3) שאלת הוכחה.

4) א. $\frac{84}{85}$ ב. $-\frac{13}{85}$ ג. $-6\frac{6}{13}$

5) שאלת הוכחה.

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(m-\sqrt{1-m^2}\right)$.

15) שאלת הוכחה.

16) 1 ו-2 או $-\frac{1}{2}$ ו- -1.

זווית כפולה:

סיכום כללי:

נפתח זווית כפולה לפי הצורות הבאות:

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha\end{array}}$$

שאלות:

1) הוכח את הזהויות הבאות:

א. $4\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha = \sin 4\alpha$

ב. $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$

ג. $(\sin 3\alpha - \cos 3\alpha)^2 = 1 - \sin 6\alpha$

ד. $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$

ה. $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2\cot 2\alpha$

ו. $\frac{\cos 2\alpha - 2\sin^2\alpha\cos 2\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{1}{2}\cot 2\alpha$

ז. $\cos^2 2\alpha = 4\sin^4\alpha - 4\sin^2\alpha + 1$

ח. $\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$

2) הוכח את הזהות: $\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}$ ע"י כתיבה של $\sin 3\alpha$ לפי: $\sin(\alpha + 2\alpha)$ ושימוש בזהויות שנלמדו.

3) הוכח את הזהות: $\cos^3\alpha = \frac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4}$ ע"י כתיבה של $\cos 3\alpha$ לפי: $\cos(\alpha + 2\alpha)$ ושימוש בזהויות שנלמדו.

4) נתונה זווית חדה α המקיימת: $\sin\alpha = \frac{40}{41}$. מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א. $\cos\alpha$.

ב. $\tan\alpha$.

ג. $\sin 2\alpha$.

ד. $\cos 2\alpha$.

ה. $\tan 2\alpha$.

5) נתונה זווית חדה α המקיימת: $\tan\alpha = \frac{5}{12}$. מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א. $\sin\alpha$.

ב. $\cos\alpha$.

ג. $\sin 2\alpha$.

ד. $\cos 2\alpha$.

6) נתונה זווית α ברביע הראשון וזווית β ברביע השני המקיימות: $\sin\alpha = \frac{5}{13}$
ו- $\cos\beta = -0.8$. מבלי למצוא את α ו- β חשב את הביטויים הבאים:

א. $\sin(\alpha+\beta)$.

ב. $\cos(\alpha+\beta)$.

ג. $\sin(2\alpha+\beta)$.

7) נתון כי $\sin\alpha+\cos\alpha=1.2$ עבור $0°<\alpha<90°$. חשב את $\sin 2\alpha$.

8) פשט את הביטוי הבא: $\sqrt{\frac{1+\cos 8\alpha}{2}}$.

9) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sin 16°\cos 16°}{3-6\sin^2 29°}$.

10) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sin^2 78°-\cos^2 78°}{\sin 66°}$.

11) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא: $\frac{5\tan 15°\left(1-2\cos^2 15°\right)}{1-\tan^2 15°}$.

תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) א. $\frac{9}{41}$ ב. $4\frac{4}{9}$ ג. $\frac{720}{1681}$ ד. $-\frac{1519}{1681}$
ה. $-\frac{720}{1519}$
5) א. $\frac{5}{13}$ ב. $\frac{12}{13}$ ג. $\frac{120}{169}$ ד. $\frac{119}{169}$
6) א. $\frac{16}{65}$ ב. $-\frac{63}{65}$ ג. $-\frac{123}{845}$
7) 0.44.
8) $\cos 4\alpha$.
9) $\frac{1}{6}$.
10) 1.
11) -1.25.

סכום והפרש פונקציות טריגונומטריות:

סיכום כללי:

להלן נוסחאות הסכום וההפרש של פונקציות טריגונומטריות:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

הערה:

בסרטון התיאוריה אין התייחסות לזהויות הסכום וההפרש של טנגנס ושל קוטנגנס עקב חוסר השימוש בהן בפתרון שאלות.

שאלות:

1) הוכח את הזהות הבאה: $\sin 5\alpha+\sin 3\alpha=2\sin 4\alpha\cos\alpha$.

2) הוכח את הזהות הבאה: $\sin 7\alpha-\sin 2\alpha=2\sin 2.5\alpha\cos 4.5\alpha$.

3) הוכח את הזהות הבאה: $\cos\alpha+\cos 5\alpha=2\sin 2\alpha\cos 3\alpha$.

4) הוכח את הזהות הבאה: $\cos 5\alpha-\cos 2\alpha=-2\sin 3.5\alpha\cos 1.5\alpha$.

5) הוכח את הזהות הבאה: $\sin 3\alpha=2\sin 2\alpha\cos\alpha-\sin\alpha$.

6) הוכח את הזהות הבאה: $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

7) הוכח את הזהות הבאה: $\sin(2\alpha+\beta)-2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\sin\beta$.

8) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{\sin 5\alpha-\sin\alpha}{\sin 4\alpha-\sin 2\alpha}=2\cos\alpha$.

9) הוכח את הזהות הבאה: $2\sin\alpha = \frac{\sin 7\alpha - \sin 3\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 6\alpha}$.

10) הוכח את הזהות הבאה: $\tan 2\alpha = \frac{\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}$.

11) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{2\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha} = \tan\alpha + \tan 3\alpha$.

12) פשט את הביטוי: $\frac{1+\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1}$ ומצא את ערכו מבלי להיעזר
במחשבון אם ידוע כי $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{6}$.

13) נתון כי α ו- β הן זוויות חדות המקיימות: $\sin\alpha = \frac{2mn}{m^2+n^2}$ ו- $\sin\beta = \frac{n^2-m^2}{m^2+n^2}$.
הראה כי: $\alpha + \beta = 90°$.

14) היעזר במעבר מכפל לסכום או הפרש
והוכח כי: $\cos 6\alpha\cos 2\alpha - \cos 5\alpha\cos\alpha = -\sin 7\alpha\sin\alpha$.

15) היעזר במעבר מכפל לסכום או הפרש
והוכח כי: $\sin 4\alpha\sin 2\alpha - \sin 5\alpha\sin\alpha + \cos 3\alpha\cos\alpha = \cos 2\alpha$.

16) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\sin 52.5°\cdot\sin 7.5°$.

17) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sin 35°\sin 55°}{\cos 40°\cos 20° - 0.25}$.

18) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\cos 20°\cos 40°\cos 80°$.

19) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\sin 5°\cdot\sin 25°\cdot\sin 35°\cdot\sin 55°\cdot\sin 65°\cdot\sin 85°$.

תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.
11) שאלת הוכחה.
12) $-\frac{7}{9}$.
13) שאלת הוכחה.
14) שאלת הוכחה.
15) שאלת הוכחה.
16) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$.
17) 1.
18) $\frac{1}{8}$.
19) $\frac{1}{64}$.

מכפלת פונקציות:

סיכום כללי:

להלן נוסחאות המעבר מסכום למכפלה וממכפלה לסכום:

$$\begin{cases} \sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right] \\ \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right] \\ \sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \end{cases}$$

שאלות:

1) הוכח את הזהות הבאה: $\sin 7\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}(\sin 8\alpha+\sin 6\alpha)$.

2) הוכח את הזהות הבאה: $\cos 11\alpha\sin 3\alpha=\frac{1}{2}(\sin 14\alpha-\sin 8\alpha)$.

3) הוכח את הזהות הבאה: $\cos 4\alpha\cos 10\alpha=\frac{1}{2}(\cos 6\alpha+\cos 14\alpha)$.

4) הוכח את הזהות הבאה: $\sin 3\alpha\sin 7\alpha=\frac{1}{2}(\cos 4\alpha-\cos 10\alpha)$.

5) הוכח את הזהות הבאה: $2\sin 7\alpha\sin 2\alpha+\cos 9\alpha=\cos 5\alpha$.

6) הוכח את הזהות הבאה: $\sin 7\alpha\cos 4\alpha-\sin 4\alpha\cos\alpha=\sin 3\alpha\cos 8\alpha$.

7) הוכח את הזהות הבאה: $\sin\alpha\sin 3\alpha=\cos 2\alpha-\cos 3\alpha\cos\alpha$.

8) הוכח את הזהות הבאה: $2\left(\sin^2\beta-\sin^2\alpha\right)=\cos 2\alpha-\cos 2\beta$.

9) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{2}{\cot\beta-\tan\alpha}=\tan(\alpha+\beta)-\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.
7) הוכחה.
8) הוכחה.
9) הוכחה.

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 10 - משוואות טריגונומטריות

תוכן העניינים

משוואות טריגונומטריות כלליות:

סיכום כללי:

פתרון כללי של משוואות טריגונומטריות (במעלות):

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריגונומטריות היסודיות כאשר x הוא משתנה ו- α היא זווית נתונה/ידועה:

המשוואה	הפתרון
$\sin x = \sin\alpha$	$x_1 = \alpha + 360°k \;\;,\;\; x_2 = 180° - \alpha + 360°k$
$\cos x = \cos\alpha$	$x_{1,2} = \pm\alpha + 360°k$
$\tan x = \tan\alpha$	$x = \alpha + 180°k$
$\cot x = \cot\alpha$	$x = \alpha + 180°k$

כאשר k מספר שלם.

שאלות:

1) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הסינוס):

א. $\sin x = \frac{1}{2}$ ב. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ג. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ד. $\sin x = -\frac{1}{2}$

2) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הקוסינוס):

א. $\cos x = \frac{1}{2}$ ב. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הטנגנס):

א. $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ב. $\tan x = -1$

4) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (זווית כללית):

א. $\sin x = 0.7$ ב. $\cos x = -0.6$ ג. $\tan x = 5$

5) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות לא מסודרות):

א. $\sin 3x = \frac{1}{2}$ ב. $2\cos 2x = -\sqrt{3}$

ג. $\tan 5x = -1$ ד. $3\sin 2x = 2$

ה. $3\cos 3x = 1$ ו. $2\tan 4x = 1$

6) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (ארגומנט מורכב):

א. $\sin(2x + 30°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ב. $\cos(75° - 3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ג. $\tan(50° - x) = 1.3$

7) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציות עם ארגומנטים שונים):

א. $\sin x = \sin 3x$ ב. $\sin 2x = \sin(x + 30°)$

ג. $\sin x = \sin(120° - x)$ ד. $\cos x = \cos 3x$

ה. $\cos x = \cos(40° - x)$ ו. $\tan x = \tan 3x$

ז. $\tan 2x = \tan(60° - x)$

8) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות מיוחדות):

א. $\sin x = 0$ ב. $\sin x = 1$

ג. $\sin x = -1$ ד. $\cos x = 0$

ה. $\cos x = 1$ ו. $\cos x = -1$

ז. $\tan x = 0$ ח. $\tan x = 1$

תשובות סופיות:

1) א. $x_1=30°+360°k\ ,\ x_2=150°+360°k$ ב. $x_1=45°+360°k\ ,\ x_2=135°+360°k$

ג. $x_1=-60°+360°k\ ,\ x_2=240°+360°k$ ד. $x_1=-30°+360°k\ ,\ x_2=210°+360°k$.

2) א. $x_{1,2}=\pm 60°+360°k$ ב. $x_{1,2}=\pm 150°+360°k$.

3) א. $x=30°+180°k$ ב. $x=135°+180°k$.

4) א. $x_1=44.427°+360°k\ ,\ x_2=135.573°+360°k$

ב. $x_{1,2}=126.87°+360°k$ ג. $x=78.69°+180°k$.

5) א. $x_1=10°+120°k\ ,\ x_2=50°+120°k$ ב. $x_1=75°+180°k\ ,\ x_2=-75°+180°k$

ג. $x=-9°+36°k$ ד. $x_1=20.9°+180°k\ ,\ x_2=69.09°+180°k$

ה. $x_{1,2}=\pm 23.5°+120°k$ ו. $x=6.64°+45°k$.

6) א. $x_1=105°+180°k\ ,\ x_2=-45°+180°k$

ב. $x_1=10°+120°k\ ,\ x_2=40°+120°k$ ג. $x=-2.431°+180°k$.

7) א. $x_1=180°k\ ,\ x_2=45°+90°k$ ב. $x_1=30°+360°k\ ,\ x_2=50°+120°k$

ג. $x=60°+180°k$ ד. $x=90°k$

ה. $x=20°+180°k$ ו. $x=180°k$ ז. $x=20°+60°k$.

8) א. $x=180°k$ ב. $x=90°+360°k$ ג. $x=180°+360°k$

ד. $x=90°+180°k$ ה. $x=360°k$ ו. $x=180°+360°k$

ז. $x=180°k$ ח. $x=45°+180°k$.

משוואות הנפתרות ע"י טכניקה אלגברית:

סיכום כללי:

נעזר בטכניקה אלגברית בכדי להביא משוואה מורכבת לצורה של משוואה יסודית.

טכניקות שכיחות:

- הוצאת שורש ריבועי.
- פירוק לגורמים (ע״י הוצאת גורם משותף, ע״י נוסחאות הכפל המקוצר וע״י פירוק טרינום).
- פתרון משוואה ריבועית.

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (טכניקה אלגברית):

1) $\cos^2 x = \frac{3}{4}$

2) $\sin^2 x = \frac{1}{4}$

3) $\tan^2 2x = 3$

4) $\sin x \cos 3x = 0$

5) $\sin 2x - 2\sin^2 2x = 0$

6) $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x = 0$

7) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

8) $3\sin^2 x - \sin x = 2$

9) $6\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

10) $\cos^2 x + 2\cos x = 3$

11) $\tan^2 x - 3\tan x - 4 = 0$

12) $\tan^2 x = 4\tan x - 1$

13) $\cos x - \frac{2}{\cos x} + 1 = 0$

14) $\frac{\sin x}{\cos x - 1} = 0$

15) $\frac{\cos 2x}{\tan x + 1} = 0$

תשובות סופיות:

1) $x_{1,2}=\pm 30^\circ+360^\circ k$, $x_{3,4}=\pm 150^\circ+360^\circ k$.

2) $x_1=30^\circ+360^\circ k$, $x_2=150^\circ+360^\circ k$, $x_3=330^\circ+360^\circ k$, $x_4=210^\circ+360^\circ k$.

3) $x_1=30^\circ+90^\circ k$, $x_2=-30^\circ+90^\circ k$.

4) $x_1=180^\circ k$, $x_2=30^\circ+60^\circ k$.

5) $x_1=90^\circ k$, $x_2=15^\circ+180^\circ k$, $x_3=75^\circ+180^\circ k$.

6) $x_1=90^\circ+180^\circ k$, $x_{2,3}=\pm 150^\circ+360^\circ k$.

7) $x_1=90^\circ+360^\circ k$, $x_2=210^\circ+360^\circ k$, $x_3=-30^\circ+360^\circ k$.

8) $x_1=90^\circ+360^\circ k$, $x_2=-41.8^\circ+360^\circ k$, $x_3=221.8^\circ+360^\circ k$.

9) $x_1=30^\circ+360^\circ k$, $x_2=150^\circ+360^\circ k$, $x_3=-19.4^\circ+360^\circ k$, $x_4=199.4^\circ+360^\circ k$.

10) $x=360^\circ k$.

11) $x_1=-45^\circ+180^\circ k$, $x_2=75.964^\circ+180^\circ k$.

12) $x_1=75^\circ+180^\circ k$, $x_2=15^\circ+180^\circ k$.

13) $x=360^\circ k$.

14) $x=180^\circ+360^\circ k$.

15) $x=45^\circ+90^\circ k$, $x\neq -45^\circ+180^\circ k$.

משוואות הנפתרות ע"י זהויות יסוד:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת.
לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות היסוד הטריגונומטריות:

קשרים בין פונקציות	$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$
זוויות משלימות ל- $90°$	$\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)$	$\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$
	$\cot\alpha=\tan(90°-\alpha)$	$\tan\alpha=\cot(90°-\alpha)$
קשרים בין פונקציות	$\cot^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}$	$\tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

1) $\sin x=\cos x$

2) $\sin x=\cos(x+45°)$

3) $\cos x=\frac{2}{3}\sin^2 x$

4) $2\cos^2 x=3\sin x$

5) $\sin^2 x-\cos x=\frac{1}{4}$

6) $\cos^2 x-\sin^2 x=\sin x$

7) $\sin^2 x+2\cos^2 x=1.5$

8) $\sin x-\tan x=0$

תשובות סופיות:

1) $x = 45° + 180°k$.

2) $x = 22.5° + 180°k$.

3) $x_{1,2} = \pm 60° + 360°k$.

4) $x_1 = 30° + 360°k$, $x_2 = 150° + 360°k$.

5) $x_{1,2} = \pm 60° + 360°k$.

6) $x_1 = 30° + 120°k$, $x_2 = -90° + 360°k$

7) $x_{1,2} = \pm 45° + 360°k$, $x_{3,4} = \pm 135° + 360°k$.

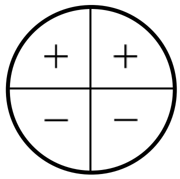
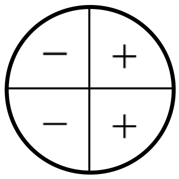
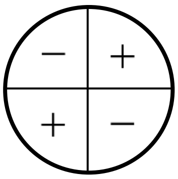
8) $x = 180°k$.

משוואות הנפתרות ע"י זהויות של מעגל היחידה:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת.
לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של מעגל היחידה:

רביע	סינוס	קוסינוס	טנגנס
I II III	$\sin(180^o-\alpha)=\sin\alpha$ $\sin(180^o+\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(180^o-\alpha)=-\cos\alpha$ $\cos(180^o+\alpha)=-\cos\alpha$ $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$	$\tan(180^o-\alpha)=-\tan\alpha$ $\tan(180^o+\alpha)=\tan\alpha$ $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$
סימנים			

זהויות עבור זוויות הגדולות מ-360 מעלות:

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin(\alpha+360°k)=\sin\alpha\\ \cos(\alpha+360°k)=\cos\alpha\end{array}}\ ,\ \boxed{\begin{array}{l}\tan(\alpha+180°k)=\tan\alpha\\ \cot(\alpha+180°k)=\cot\alpha\end{array}}$$

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

1) $\sin x=-\sin 3x$
2) $\cos 2x=-\cos 3x$
3) $\sin(x+30°)=-\cos x$
4) $\sin 3x=-\cos(180°-x)$

תשובות סופיות:

1) $x_1=90°k\ ,\ x_2=-90°+180°k$
2) $x_1=180°+360°k\ ,\ x_2=36°+72°k$
3) $x=120°+180°k$
4) $x_1=22.5°+90°k\ ,\ x_2=45°+180°k$

משוואות הנפתרות על ידי חלוקה בקוסינוס:

סיכום כללי:

טכניקה יעילה כדי להעביר משוואה מהצורה: $\sin x = a\cos x$ לפונקציה טריגונומטרית אחת היא ע"י חלוקה ב- $\cos x$ (בתנאי ש- $\cos x \neq 0$).
כך מתקבלת המשוואה:

$$\sin x = a\cos x \quad /:\cos x \neq 0$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = a\frac{\cos x}{\cos x}$$

$$\tan x = a$$

$$x = \tanh^{-1}(a) + 180°k$$

הערה:

יש לבדוק האם ערכי x שמקיימים $\cos x = 0$ מהווים פתרון למשוואה.
אם כן אז יש להוסיף אותם לפתרון הסופי.

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

1) $\sin x = 2\cos x$

2) $3\sin x = \cos x$

3) $4\sin x = 7\cos x$

4) $2\sin x = -5\cos x$

5) $\sin^2 x = 8\cos^2 x$

6) $3\sin^2 x = \cos^2 x$

תשובות סופיות:

1) $x = 63.43° + 180°k$.

2) $x = 18.43° + 180°k$.

3) $x = 60.25° + 180°k$.

4) $x = -68.19° + 180°k$.

5) $x_1 = 70.52° + 180°k$, $x_2 = -70.52° + 180°k$.

6) $x_1 = 30° + 180°k$, $x_2 = -30° + 180°k$.

משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש זוויות:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת.
לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של סכום והפרש זוויות:

סכום והפרש עבור סינוס וקוסינוס	$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha$ $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$
סכום והפרש עבור טנגנס וקוטנגנס	$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$ $\cot(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}$

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

1) $2\sin x=\sin(60°-x)$

2) $\sin(x+45°)\sin(x-45°)=\dfrac{1}{2}$

3) $\dfrac{\cos 3x}{\sin x}-\dfrac{\sin 3x}{\cos x}=2$

4) $3\cos^2 x-\sin^2 x=\sin 3x$

תשובות סופיות:

1) $x=19.11°+180°k$.

2) $x=90°+180°k$.

3) $x=15°+60°k$.

4) $x_{1,2}=\pm60°+180°k$, $x_3=90°+360°k$.

משוואות הנפתרות ע"י זהויות של זווית כפולה:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת.
לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של זווית כפולה:

סינוס זווית כפולה	$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
קוסינוס זווית כפולה	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

1) $\sin x - \sin 2x = 0$

2) $\sqrt{2}\sin x + \sin 2x = 0$

3) $4\cos x = \sin 2x$

4) $2\cos 2x + \sin 4x = 0$

5) $3\cos x - \cos 2x = 0$

6) $\cos 2x = 2\sin x$

7) $\sin x + \cos 2x = 1$

8) $2\sin^2 x = \cos 2x + 2$

תשובות סופיות:

1) $x_1 = 360°k \ , \ x_2 = 60° + 120°k$

2) $x_1 = 180°k \ , \ x_{2,3} = \pm 135° + 360°k$

3) $x = 90° + 180°k$

4) $x_1 = 45° + 90°k \ , \ x_2 = 135° + 180°k$

5) $x_{1,2} = \pm 106.307° + 360°k$

6) $x_1 = 21.1° + 360°k \ , \ x_2 = 158.9° + 360°k$

7) $x_1 = 180°k \ , \ x_2 = 30° + 360°k \ , \ x_3 = 150° + 360°k$.

8) $x_1 = -60 + 360°k \ , \ x_2 = 60° + 360°k \ , \ x_3 = 120° + 360°k \ , \ x_4 = 240° + 360°k$.

משוואות מהצורה: a sin(x) + b cos(x) = c :

סיכום כללי:

ניתן להביא משוואה מהצורה: $a\sin x+b\cos x=c$ לצורה: $\sin x+\frac{b}{a}\cos x=\frac{c}{a}$.

מציאת זווית α המקיימת: $\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ תאפשר לכתוב: $\sin x+\tan\alpha\cdot\cos x=\frac{c}{a}$.

שימוש בזהות: $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ובזהות: $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$ יובילו:

$$\sin x+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos x=\frac{c}{a}\quad /\cdot\cos\alpha$$

$$\sin x\cos\alpha+\sin\alpha\cos x=\frac{c}{a}\cos\alpha$$

$$\sin(x+\alpha)=\frac{c}{a}\cos\alpha$$

אם נסמן: $\frac{c}{a}\cos\alpha=k$ נקבל את המשוואה: $\sin(x+\alpha)=k$ כאשר α ו- k ידועים.
מכאן הפתרון הוא ישיר לפי משוואת סינוס.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $10\sin x+3\cos x=5$

2) $5\cos x-6\sin x=1$

3) $\sqrt{3}\sin 2x+3\cos 2x=\sqrt{12}$

4) $\frac{1}{2}\sin x+\sqrt{3}\cos^2\frac{x}{2}=\cos\frac{x}{2}$

5) $\cos x+\cos(60^\circ+x)=\sqrt{2}+\cos(60^\circ-x)$

תשובות סופיות:

1) $x_1=11.91^\circ+360^\circ k\ ,\ x_2=134.69^\circ+360^\circ k$

2) $x_1=227.156^\circ+360^\circ k\ ,\ x_2=32.44^\circ+360^\circ k$

3) $x=15^\circ+180^\circ k$

4) $x_1=-60^\circ+720^\circ k\ ,\ x_2=180^\circ+360^\circ k$

5) $x_1=-105^\circ+360^\circ k\ ,\ x_2=15^\circ+360^\circ k$

משוואות הנפתרות ע"י זהויות של סכום והפרש פונקציות:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת.
לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של סכום והפרש פונקציות:

סכום והפרש פונקציות עבור סינוס	$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$
סכום והפרש פונקציות עבור קוסינוס	$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

1) $\sin x+\sin 3x=\sin 2x$.

2) $\cos 2x-\cos 6x=\sin 2x$.

3) $\sin x+\sin 3x=4\sin^3 x$.

4) $\sin 6x-\sin 4x=1-\cos 2x$.

5) $(\sin 5x+\sin 7x)^2=(\cos 5x+\cos 7x)^2$.

6) $2\cos^2\frac{x}{2}+\cos 3x+\cos 5x=1$.

7) $1+\sin x+\sin 7x=\cos 8x$.

8) $2\sin 3x(\cos 2x+\cos x)=\sin x+\sin 2x$.

9) $\sin(x+60^\circ)-\sin x=\sin(2x+60^\circ)-\sin 2x$.

10) $\cos^2 3x - \cos^2 x = \sin x \cos x$.

11) $\sin 8x \sin 2x + \cos 10x = 0$.

12) $\cos x + 3\sin x = 1 + 2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

13) $4\sin 2x \sin 5x \sin 7x - \sin 4x = 0$.

14) $4\cos x \cos 2x \cos 3x = 1$.

תשובות סופיות:

1) $x_{1,2} = \pm 60° + 360°k\ ,\ x_3 = 90°k$.

2) $x_1 = 45° + 90°k\ ,\ x_2 = 180°k$.

3) $x_1 = 37.5° + 90°k\ ,\ x_2 = 7.5° + 90°k\ ,\ x_3 = 90°k$.

4) $x_1 = 15° + 60°k\ ,\ x_2 = 180°k\ ,\ x_3 = -22.5° + 90°k$.

5) $x_1 = 36°k\ ,\ x_2 = \left(\frac{180}{7}\right)° + \left(\frac{180}{7}\right)°k$.

6) $x_{1,2} = \pm 30° + 90°k\ ,\ x_3 = 90° + 180°k$.

7) $x_1 = -\left(12\frac{6}{7}\right)°k + \left(51\frac{3}{7}\right)°k\ ,\ x_2 = 45°k$.

8) $x_1 = 40°k\ ,\ x_2 = 180° + 360°k$.

9) $x_1 = -20° + 120°k\ ,\ x_2 = 360°k$.

10) $x_1 = 52.5° + 90°k\ ,\ x_2 = -7.5° + 90°k\ ,\ x_3 = 90°k$.

11) $x_1 = 45° + 90°k\ ,\ x_2 = 11.25° + 22.5°k$.

12) $x_1 = 30° + 360°k\ ,\ x_2 = 150° + 360°k$.

13) $x_1 = 7.5° + 15°k\ ,\ x_2 = 90°k$.

14) $x_1 = 60° + 180°k\ ,\ x_2 = 22.5 + 45°k$.

משוואות עם תחום נתון:

סיכום כללי:

כדי למצוא את הפתרונות של משוואה טריגונומטרית בתחום נתון, נמצא תחילה את הפתרון הכללי שלה ולאחר מכן נציב ערכים ב- k ונבחר את הערכים שנמצאים בתחום הנתון.

שאלות:

מצא את כל הפתרונות של המשוואות הבאות בתחום הנתון לידן:

1) $8\sin x-4=0$, $[0°:180°]$.

2) $\sin 2x=\sin(x+60°)$, $[-90°:90°]$.

3) $3\cos(2x+30°)+1=0$, $[-90°:90°]$.

4) $\cos(50°-x)=-\cos x$, $[0°:360°]$.

5) $2\sin 3x-5\cos 3x=0$, $[-30°:30°]$.

6) $2\cos^2 3x=\sin 6x+1$, $[0°:180°]$.

7) $\cos 4x+1=3\sin 2x$, $[-180°:180°]$.

8) $\cos 2x+\cos^2 x+\sin x=0$, $[-180°:180°]$.

תשובות סופיות:

1) $x=30°\ ,\ 150°$.

2) $x=-80°\ ,\ 40°\ ,\ 60°$.

3) $x=39.736°\ ,\ -69.736°$.

4) $x=115°\ ,\ 295°$.

5) $x=22.733°$.

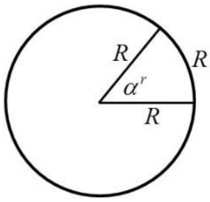
6) $x=7.5°\ ,\ 37.5°\ ,\ 67.5°\ ,\ 97.5°\ ,\ 127.5°\ ,\ 157.5°$.

7) $x=-165°\ ,\ -105°\ ,\ 15°\ ,\ 75°$.

8) $x=-138.19°\ ,\ -41.81°\ ,\ 90°$.

משוואות עם זוויות ברדיאנים:

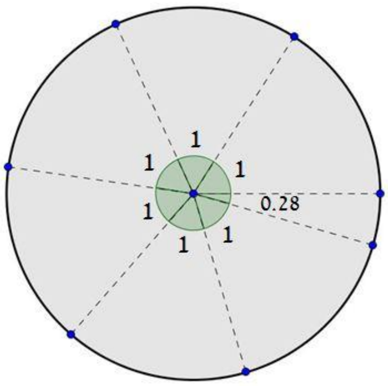
סיכום כללי:



הגדרת הרדיאן:

זווית של רדיאן אחד מוגדרת להיות הזווית המרכזית המתאימה לקשת שאורכה שווה לרדיוס המעגל.

עבור מעגל שרדיוסו R, תימצאנה 2π רדיאנים על היקפו, שכן היקף מעגל הוא $P=2\pi\cdot R$.



באיור שלפניך ניתן לראות חלוקה של מעגל ל-$2\pi=6.28$ קשתות אשר שוות לרדיוס המעגל.
הזווית של כל קשת כזאת שווה לרדיאן אחד,
כאשר הזווית האחרונה שווה ל-0.28 מרדיאן.
מקבלים 2π רדיאנים.

קשר בין רדיאנים למעלות:

- נוסחת מעבר מזווית α° (במעלות) לזווית α^r (ברדיאנים): $\alpha^r=\frac{\pi}{180}\alpha^\circ$.
- נוסחת מעבר מזווית α^r (ברדיאנים) לזווית α° (במעלות): $\alpha^\circ=\frac{180}{\pi}\alpha^r$.

פתרונות משוואות טריגונומטריות ברדיאנים:

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריגונומטריות היסודיות כאשר x הוא משתנה ו-α היא זווית ידועה הנתונה ברדיאנים:

המשוואה	הפתרון
$\sin x=\sin\alpha$	$x_1=\alpha+2\pi k\ \ ,\ \ x_2=\pi-\alpha+2\pi k$
$\cos x=\cos\alpha$	$x_{1,2}=\pm\alpha+2\pi k$
$\tan x=\tan\alpha$	$x=\alpha+\pi k$
$\cot x=\cot\alpha$	$x=\alpha+\pi k$

כאשר k מספר שלם.

שאלות:

1) המר את הזוויות הבאות ממעלות לרדיאנים:

א. $30°$ ב. $90°$ ג. $75°$ ד. $120°$

ה. $210°$ ו. $315°$ ז. $18°$ ח. $285°$

ט. $-15°$ י. $-80°$ יא. $510°$ יב. $-390°$

2) המר את הזוויות הבאות מרדיאנים למעלות:

א. π ב. 2π ג. 4π ד. 1.5π

ה. $\frac{1}{2}\pi$ ו. $\frac{\pi}{4}$ ז. $\frac{\pi}{6}$ ח. $\frac{1}{18}\pi$

ט. $\frac{13}{18}\pi$ י. $\frac{19}{12}\pi$ יא. $1\frac{1}{6}\pi$ יב. $2\frac{1}{4}\pi$

3) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (משוואות יסודיות שונות):

א. $2\sin 3x = 1$, $\left[0 : \frac{1}{3}\pi\right]$

ב. $\sqrt{3} + 2\cos x = 0$, $[0 : \pi]$

ג. $3 - 3\tan\frac{x}{2} = 0$, $[0 : 2\pi]$

ד. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $[0 : \pi]$

ה. $4\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2 = 0$, $\left[0 : \frac{1}{2}\pi\right]$

ו. $\sin x = \sin\left(\frac{2}{3}\pi - 2x\right)$, $\left[-\frac{5\pi}{18} : \frac{5\pi}{18}\right]$

ז. $5 - 5\tan(4x - 0.1\pi) = 0$, $\left[0 : \frac{\pi}{3}\right]$

ח. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 0.7$, $\left[-\frac{\pi}{4} : \frac{\pi}{4}\right]$

4) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (טכניקה אלגברית):

א. $\sin^2 x = \frac{3}{4}$, $\left[0 : \frac{\pi}{2}\right]$

ב. $16\cos^2 2x - 1 = 0$, $\left[-\frac{\pi}{8} : \frac{\pi}{8}\right]$

ג. $2\tan^2 x - 18 = 0$, $[0 : \pi]$

ד. $3\sin x\cos x + 3\cos x = 0$, $\left[-\frac{\pi}{3} : \frac{\pi}{3}\right]$

ה. $\sin^2 x - 5\sin x\cos x = 0$, $\left[-\frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2}\right]$

ו. $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$, $[-\pi : \pi]$

ז. $4\cos^2 x - \sqrt{2}\cos x - 1 = 0$, $[-\pi : 0]$

ח. $\tan^2 x - 7\tan x + 10 = 0$, $[0 : 2\pi]$

5) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות יסוד):

א. $0 \le x \le \pi \ , \ \sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

ב. $0 \le x \le \pi \ , \ \tan x = 4\sin x$

ג. $0 \le x \le 2\pi \ , \ 2\sin^2 x = 3\cos x$

6) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות ממעגל היחידה):

א. $[-\pi : \pi] \ , \ \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin x$

ב. $[0 : \pi] \ , \ \sin\left(2x + \frac{2}{9}\pi\right) = -\cos 2x$

ג. $[0 : \pi] \ , \ \sin 4x = -\cos(\pi - x)$

ד. $\left[-\frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2}\right] \ , \ \tan x = -\tan 2x$

7) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (זהויות של זווית כפולה):

א. $-\pi \le x \le \pi \ , \ \sin 2x + \cos^2 x = 0$

ב. $[-\pi : \pi] \ , \ \cos 4x + 1 = 3\sin 2x$

ג. $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \ , \ 2\sin^2 x = \cos 2x + 2$

ד. $0 \le x \le \pi \ , \ \cos 4x + \sin^2 x = 1$

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{\pi}{6}$ ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. $\frac{5\pi}{12}$ ד. $\frac{2\pi}{3}$ ה. $\frac{7\pi}{6}$

ו. $\frac{7\pi}{4}$ ז. $\frac{\pi}{10}$ ח. $\frac{19\pi}{12}$ ט. $-\frac{\pi}{12}$ י. $-\frac{4\pi}{9}$

יא. $\frac{17\pi}{6}$ יב. $-\frac{13\pi}{6}$.

2) א. $180°$ ב. $360°$ ג. $720°$ ד. $270°$ ה. $90°$

ו. $45°$ ז. $30°$ ח. $10°$ ט. $130°$ י. $285°$

יא. $210°$ יב. $405°$.

3) א. $x=\frac{\pi}{18}\ ,\ \frac{5\pi}{18}$ ב. $x=\frac{5\pi}{6}$ ג. $x=\frac{\pi}{2}$ ד. $x=\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{\pi}{2}$

ה. $x=0$ ו. $x=\frac{2\pi}{9}$ ז. $x=0.0875\pi$ ח. $x=0.224\pi$.

4) א. $x=\frac{\pi}{3}$ ב. ϕ ג. $x=0.398\pi, 0.602\pi$ ד. ϕ

ה. $x=0, 0.437\pi$ ו. $x=\frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{5\pi}{6}$

ז. $x=-\frac{\pi}{4}\ ,\ -0.615\pi$ ח. $x=0.352\pi\ ,\ 0.437\pi\ ,\ 1.352\pi\ , 1.437\pi$.

5) א. $x=\frac{\pi}{8}$ ב. $x=0\ ,\ 0.42\pi\ ,\ \pi$ ג. $x=\frac{\pi}{3}\ ,\ \frac{5\pi}{3}$

6) א. $x=\frac{\pi}{12}\ ,\ -\frac{11\pi}{12}$ ב. $x=\frac{23\pi}{72}\ ,\ \frac{59\pi}{72}$

ג. $x=\frac{\pi}{10}\ ,\ \frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{5\pi}{6}\ ,\ \frac{9\pi}{10}$ ד. $x=\pm\frac{\pi}{3}\ ,\ 0$.

7) א. $x=\pm\frac{\pi}{2}\ ,\ -0.148\pi\ ,\ 0.852\pi$ ב. $x=-\frac{7\pi}{12}\ ,\ \frac{\pi}{12}\ ,\ \frac{5\pi}{12}\ ,\ \frac{11\pi}{12}$

ג. $x=\pm\frac{\pi}{3}$ ד. $x=0\ , 0.38\pi\ ,\ 0.61\pi\ ,\ \pi$.

אי שוויונים טריגונומטריים:

סיכום כללי:

כדי לפתור אי-שוויון טריגונומטרי בתחום מסוים נבצע את השלבים הבאים:

1. נהפוך את סימן אי השוויון לסימן שוויון ונפתור את המשוואה המתקבלת.
2. נסדר את כל הפתרונות על ציר מספרים ונבחר ערך בכל תחום.
3. נציב את הערכים באי השוויון המקורי ונאמר כי:
   - אם מתקבל פסוק אמת אז תחום זה מהווה פתרון של אי השוויון.
   - אם מתקבל פסוק שקר אז תחום זה אינו פתרון של אי השוויון.
4. נרכז את כל התחומים ונכתוב את הפתרון המלא.

הערה:

במידה והמשוואה אינה מוגדרת עבור ערך מסוים הערך הזה מוכנס גם לציר המספרים.

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

1) $[0,180°]\ \sin x<\frac{1}{2}$

2) $[0,1.5\pi]\ 2\cos x-\sqrt{3}\geq 0$

3) $(-90°,90°)\ 2\cos^2 x+\sin x\geq 1$

4) $[0,\pi]\ \sin x+\sin 2x+\sin 3x<0$

5) $[0°,180°]\ 1<2\sin(x+10°)<\sqrt{3}$

6) $(0<x<\pi)\ \sin x+\sqrt{3}\cos x\geq 1$

7) $[0,2\pi]\ \tan x+\cot x>0$

8) $(-\pi<x<\pi)\ |\tan(x)|>\frac{1}{\sqrt{3}}$

תשובות סופיות:

1) $0° \le x < 30°$, $150° \le x \le 180°$.

2) $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$.

3) $-30° \le x < 90°$.

4) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3}$.

5) $20° < x < 50°$, $110° < x < 140°$.

6) $0 < x \le \frac{\pi}{2}$.

7) $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

8) $x \ne \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ או: $x \ne -\frac{\pi}{2}$, $-\frac{5\pi}{6} < x < -\frac{\pi}{6}$.

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

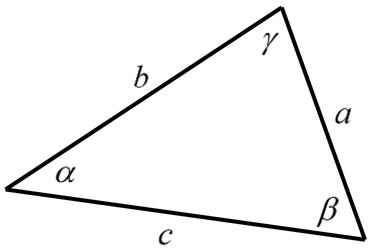
פרק 11 - טריגונומטריה במישור

תוכן העניינים

שאלות יסודיות עם משפט הסינוסים והקוסינוסים:

סיכום כללי:

משפט הסינוסים:



במשולש, צלע חלקי סינוס הזווית שמולה הוא גודל קבוע
והוא שווה לפעמיים רדיוס המעגל החוסם.
בצורה מתמטית: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$.

משפט הקוסינוסים:

במשולש, ריבוע צלע אחת שווה לסכום ריבועי שתי הצלעות האחרות פחות מכפלתן
בקוסינוס הזווית שביניהן: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ או $\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

מתי נשתמש בכל משפט:

- נשתמש במשפט הסינוסים כאשר:
  א. נתונות שתי זוויות וצלע.
  ב. נתונות שתי צלעות והזווית מול אחת מהן.
  ג. נתון רדיוס המעגל החוסם וצלע/זווית נוספת.

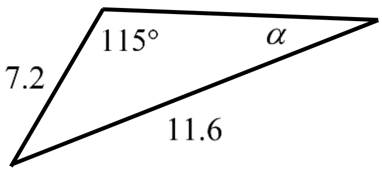
- נשתמש במשפט הקוסינוסים כאשר:
  א. נתונות שתי צלעות והזווית ביניהן.
  ב. נתונות שלוש צלעות.

- כאשר ישנם יותר נתונים מאשר בסעיפים שלהלן ייתכן שנוכל להשתמש בשני המשפטים. בבחירת המשפט שבו נשתמש כדאי לזכור שבמשפט הסינוסים ייתכנו שתי תשובות לזווית, גם אם בפועל רק אחת נכונה, ובמשפט הקוסינוסים תתקבל בוודאות הזווית הנכונה.

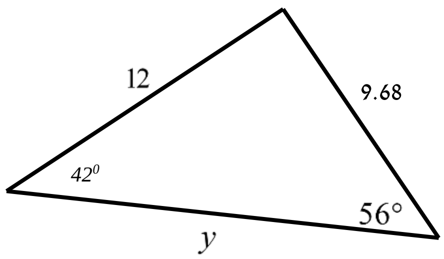
שאלות:

1) מצא את ערכו של $a/x/y$ במשולשים הבאים
(R הוא רדיוס המעגל החוסם, נתוני הצלעות בס"מ):

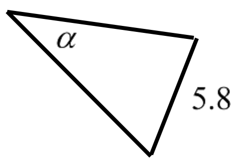
א.



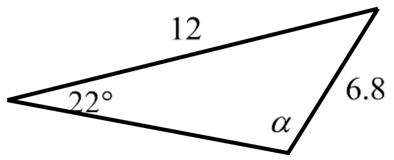
ב.



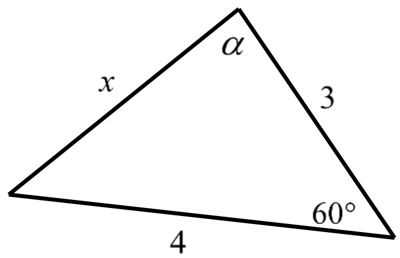
ג. רדיוס המעגל: $R=7$.



ד.

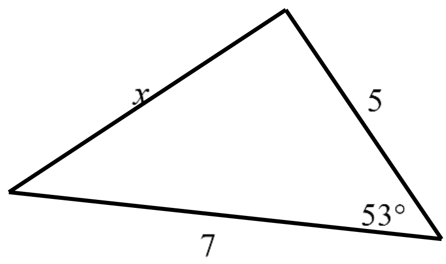


ה.

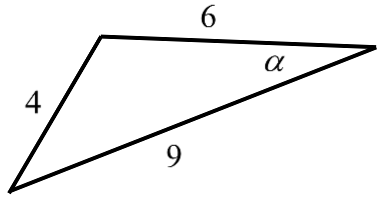


2) מצא את ערכו של α/x במשולשים הבאים:

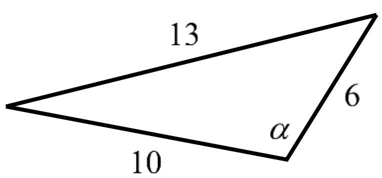
א.



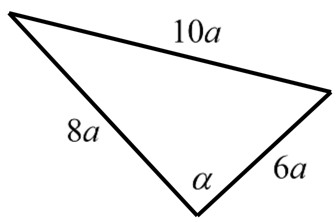
ב.



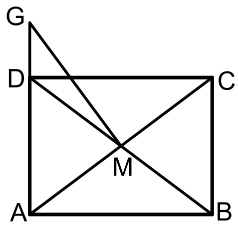
ג.



ד.

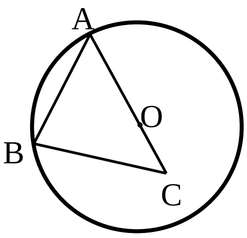


3) נתון משולש שווה שוקיים ABC ‏(AB=AC) שאורך השוק שלו הוא 22 ס"מ
וגודלה של זווית הבסיס בו הוא 70°. CD הוא חוצה זווית הבסיס $\measuredangle C$.
מצא את אורכו של הקטע AD.



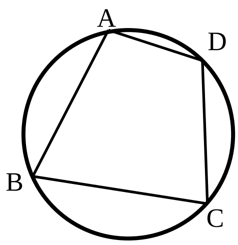
4) אלכסוני המלבן ABCD נפגשים בנקודה M.
הנקודה G נמצאת על המשך הצלע AD.
נתון: AD = 3 ס"מ , AB = 4 ס"מ , DG = 1.2 ס"מ.
מצא את גודלו של הקטע GM.

5) מרובע שאורכי אלכסוניו 8 ס"מ ו-11 ס"מ חסום במעגל
שאורך רדיוסו הוא 6 ס"מ.
חשב את זוויות המרובע.



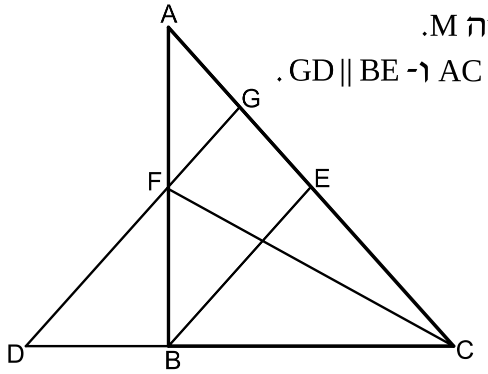
6) הצלע AB במשולש ABC היא מיתר במעגל שמרכזו O.
הצלע AC עוברת במרכז המעגל כמתואר בשרטוט.
נתון: BC = 9 ס"מ , OC = 3 ס"מ , $\measuredangle BAC = 38^\circ$.
מצא את אורכם של רדיוס המעגל ושל הצלע AB.

7) אחד האלכסונים במקבילית יוצר זווית של 30° עם
צלע אחת של המקבילית וזווית של 61.05° עם הצלע הסמוכה לה.
אחת מצלעות המקבילית גדולה ב-3 ס"מ מהצלע הסמוכה לה.
חשב את היקף המקבילית.



8) המרובע ABCD חסום במעגל.
נתון: AB = 6 ס"מ , BC = 9 ס"מ , CD = 10 ס"מ
ו-AD = 4 ס"מ.
מצא את אורכם של האלכסון AC ושל רדיוס המעגל.

9) BE ו-CF הם תיכונים במשולש ABC הנפגשים בנקודה M.
מהנקודה F מעבירים קטע GD כך שמתקיים: AC = DC ו- $GD \parallel BE$.

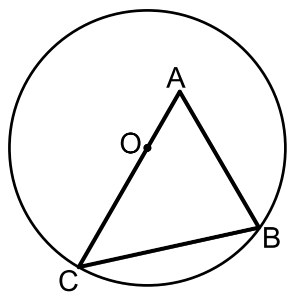


א. הוכח: $\frac{AG}{BD} = \frac{3}{4}$.

ב. נתון כי: ME = 4 ס"מ.
חשב את אורך הקטע DG.

ג. נתון כי: $\sphericalangle ACD = 48.189°$
הוכח כי המשולש DGC הוא שווה-שוקיים.

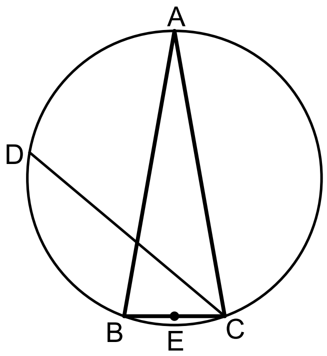
10) נתון משולש ABC. הקודקודים B ו-C של המשולש ABC נמצאים על מעגל שמרכזו O. מרכז המעגל O מונח על הצלע AC. אורך הצלע AB הוא 12 ס"מ ואורך הקטע AO הוא 4.5 ס"מ. זווית BAC היא $60°$.



א. חשב את רדיוס המעגל.

ב. מעבירים את הקוטר BD ואת הקטע AD כך שנוצר המשולש ADB.
חשב את זווית ADB.

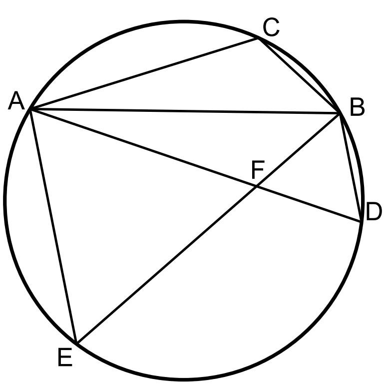
11) המשולש ABC הוא שווה שוקיים (AB = AC) החסום במעגל שרדיוסו R.
הנקודה E היא אמצע הבסיס BC והנקודה D היא אמצע הקשת $\overset{\frown}{AB}$.
ידוע כי זווית הבסיס של המשולש היא $80°$.



א. הבע באמצעות R את הקטעים CD ו-DE.

ב. r הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש CED.
הבע באמצעות R את r.

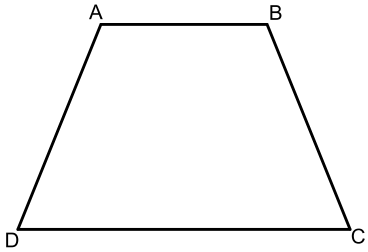
12) AB, AC ו-AD הם מיתרים במעגל המקיימים: $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD}$.
מהנקודה E שעל המעגל מעבירים את המיתרים AE ו-BE.
המיתרים BE ו-AD נחתכים בנקודה F.
נתון כי: AC = AF = EF.



א. הוכח: $\Delta ABF \cong \Delta ABC$.

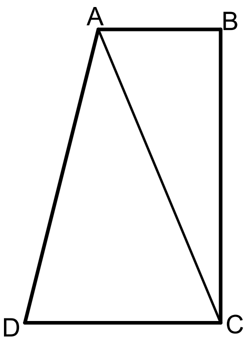
ב. נתון גם: $3 \cdot \sphericalangle CAB = \sphericalangle DAE$.
הוכח כי המשולש AFE הוא שווה צלעות.

13) המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים $(AB \| CD\, ,\, AD = BC)$.



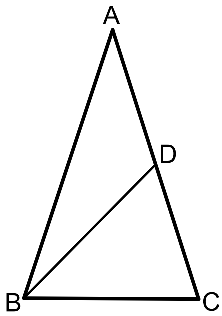
מידות הטרפז הן:
AB = 6 ס"מ , BC = 8 ס"מ , CD = 12 ס"מ.
א. מצא את זווית C (עגל למספר שלם).
ב. מצא את אורך אלכסון הטרפז.
ג. חשב את רדיוס המעגל החוסם את הטרפז.

14) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית $(AB \| CD\, ,\, \sphericalangle B = 90°)$.



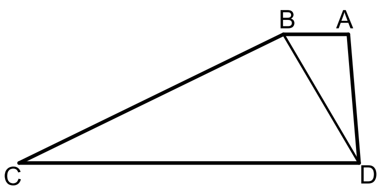
מסמנים את הבסיס: $AB = t$ וידוע כי: $DC = 1.6t$, $AD = 3t$.
היקף הטרפז הוא: 40 ס"מ.
א. הבע באמצעות t את אורך האלכסון AC.
ב. ידוע גם כי: $\sphericalangle D = 60°$.
i. חשב את אורך הקטע AC.
ii. חשב את שטח הטרפז.

15) המשולש ABC הוא שווה שוקיים (AB = AC) בעל זווית ראש $36°$ החסום במעגל שקוטרו 16 ס"מ. מעבירים תיכון לשוק BD.



א. מצא את אורך הבסיס BC במשולש.
ב. חשב את אורך התיכון BD.
ג. מסמנים:
r_1 - רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD.
r_2 - רדיוס המעגל החוסם את המשולש BCD.
הוכח את היחס הבא: $\frac{r_1}{r_2} = 2\cos 36$.

16) המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \| CD)$.



מעבירים את האלכסון BD המקיים: $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ADB$.
נתון כי: AB = 5 ס"מ , AD = 10 ס"מ , CD = 20 ס"מ.
כמו כן ידוע כי השוק BC גדולה פי 2 מהאלכסון BD.
א. הראה כי השוק BC שווה לבסיס CD.
ב. חשב את זווית C.
ג. ממשיכים את שוקי הטרפז AD ו-BC עד לנקודה E שמחוץ לטרפז.
חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש CDE.

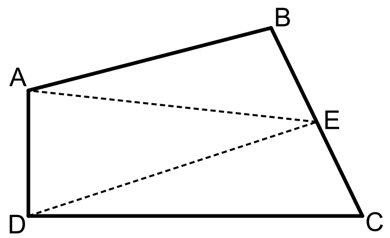
17) באיור שלפניך נתון המרובע ABCD.

ידוע כי: $\sphericalangle D = 90°$.

נסמן את הצלעות באופן הבא: $AD = 3x$, $CD = 8x$, $BC = 5x$, $AB = 6x$.

א. חשב את זווית BCD.

ב. E היא נקודה הנמצאת על אמצע הצלע BC.
מעבירים את הקטעים AE ו-DE כך
ש-DE מקביל ל-AB.
חשב את היחס הבא: $\frac{S_{ABE}}{S_{BCD}}$.



18) מהנקודה O מעבירים את הקטעים OA , OB , OC ו-OD.

ידוע כי זווית AOB שווה לזווית COD והיא מסומנת ב- α.

המשולש COD הוא ישר זווית $\sphericalangle CDO = 90°$.

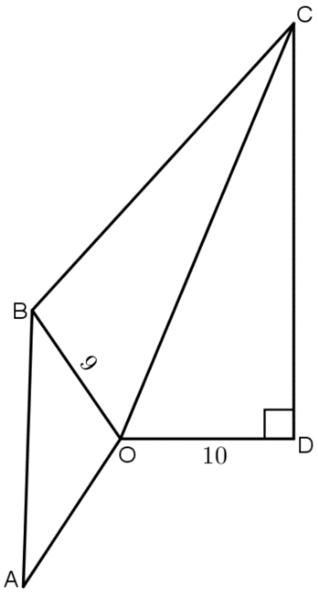
נתונים האורכים: $DO = 10$, $BO = 9$.

מסמנים: $CD = 1.5m$, $BC = 1.4m$.

א. הבע באמצעות m את $\sin\alpha$.
(העזר במשולש COD ובטא תחילה את CO).

ב. נתון גם כי: $AB = m$.
מצא את m אם ידוע כי רדיוס המעגל החוסם
את המשולש AOB הוא $8\frac{2}{3}$.

ג. חשב את זווית BOC.



19) במשולש ABC הזווית A היא בת $60°$.

מעבירים את הקטע AD כך שנוצרת זווית: $\sphericalangle ADB = 60°$.

ידוע כי $AB = \sqrt{28}$ וכי הצלע AD במשולש ABD
גדולה פי 1.5 מהצלע BD.

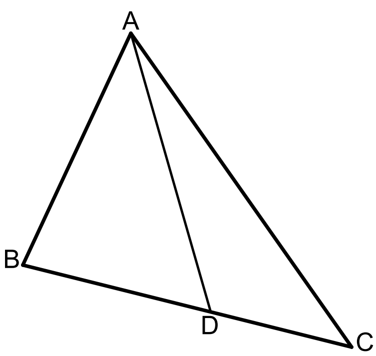
א. מצא את אורך הצלע BD.

ב. היקף המשולש ABC הוא: $P = 5\sqrt{7} + 7$.

i. סמן: $DC = t$ והבע באמצעות t
את אורך הצלע AC.

ii. מצא את t.

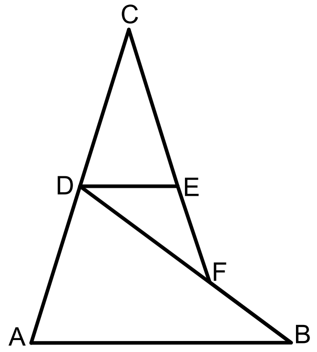
ג. חשב את שטח המשולש ABC.



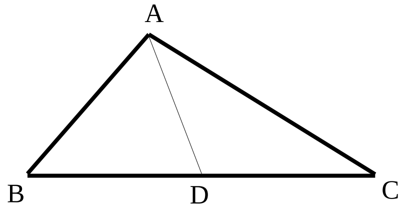
20) מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB ו-AC.
הנקודה D היא אמצע AC וממנה מעבירים את DE המקביל ל-AB.
הנקודות C , E ו-F נמצאות על אותו הישר.
ידוע כי המשולשים ABD , DEF ו-DCE הם
שווי שוקיים (AB = BD , DC = CE , EF = DE).
נתון כי: AD = 8.

א. חשב את אורך הקטע BF.

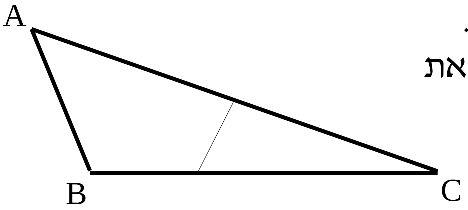
ב. מחברים את הנקודות B ו-C.
חשב את אורך הצלע BC.



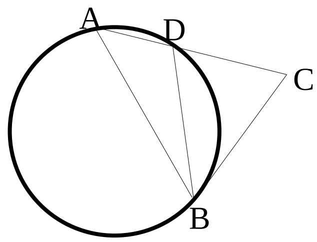
21) בשרטוט נתון: AB = 6 ס"מ , AC = 8 ס"מ ,
AD = 5 ס"מ. הנקודה D היא אמצע הצלע BC.
חשב את אורך הקטע BC.



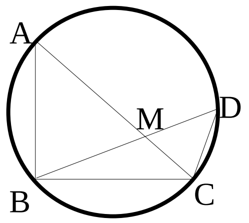
22) הצלע AC במשולש ABC גדולה פי 4 מהצלע AB.
הנקודה E היא אמצע הצלע AC והנקודה D נמצאת
על הצלע BC כך שמתקיים $DC = 2BD$.
נתון: $AB = a$, $BC = b$.
הבע באמצעות a ו-b את אורך הקטע DE.



23) המשולש ABD חסום במעגל שרדיוסו R.
המשך הצלע AD והמשיק למעגל בנקודה B
נפגשים בנקודה C. נתון: $\sphericalangle C = \alpha$, $\sphericalangle ADB = \beta$.
הבע באמצעות R, α ו-β את אורך הקטע BC.



24) AC ו-BD הם מיתרים במעגל שרדיוסו R,
שנפגשים בנקודה M. זווית $\sphericalangle B$ היא זווית ישרה.
נתון: $AB = k$, $DM = p$, $DC = q$.
הבע באמצעות R, k, p ו-q את אורך הקטע MC.



תשובות סופיות:

1) א. $\alpha = 34.231°$ ב. $y =$ 14.33 ס"מ ג. $\alpha = 155.526°$ או $\alpha = 24.474°$
ד. $\alpha = 41.382°$ או $\alpha = 138.618°$ ה. $x =$ 3.606 ס"מ , $\alpha = 73.898°$

2) א. $x =$ 5.646 ס"מ ב. $\alpha = 20.742°$ ג. $\alpha = 105.962°$ ד. $\alpha = 90°$

3) AD = 13.064 ס"מ

4) GM = 3.360 ס"מ

5) $138.190°$, $41.810°$, $113.556°$, $66.444°$

6) AB = 14.56 ס"מ , $R =$ 9.242 ס"מ

7) $P =$ 22 ס"מ

8) AC = 10.790 ס"מ , $R =$ 5.395 ס"מ

9) DG = 18

10) $R =$ 10.5 ס"מ ב. $24.32°$

11) א. $\mathrm{CD} = R\sqrt{3}$, $\mathrm{DE} = 1.48R$ ב. $r = 1.15R$

13) א. $68°$ ב. 11.66 ס"מ ג. $R =$ 6.29 ס"מ

14) א. $\mathrm{AC} = \sqrt{32.36t^2 - 448t + 1600}$ ב.i. 13 ס"מ ב.ii. 78 סמ"ר

15) א. 9.4 ס"מ ב.i. 10 ס"מ

16) ב. $\measuredangle C = 28.9°$ ג. $R = 13.77$

17) א. $64.04°$ ב. $\frac{S_{ABE}}{S_{ECD}} = 0.817$

18) א. $\sin\alpha = \frac{1.5m}{\sqrt{100 + 2.25m^2}}$ ב. $m = 16$ ג. $56.94°$

19) א. 4 ב.i. $1.5\sqrt{28} + 3 - t$ ב.ii. 3 ג. $S = 18.18$

20) א. 4.94 ס"מ ב. 17.19 ס"מ

21) BC = 10 ס"מ

22) $\mathrm{DE} = \sqrt{\frac{1}{9}b^2 - a^2}$

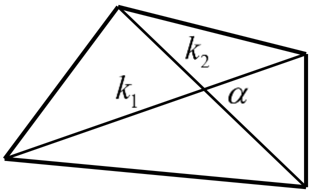
23) $\mathrm{BC} = \frac{2R\sin\beta\sin(\beta - \alpha)}{\sin\alpha}$

24) $\mathrm{MC} = \sqrt{p^2 + q^2 - \frac{pqk}{R}}$

שאלות העוסקות בנוסחת שטח משולש:

סיכום כללי:

שטחים של משולשים ומרובעים:

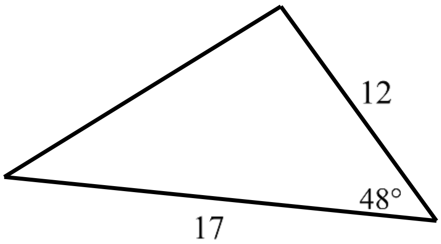


- שטח משולש ניתן לחישוב ע״י: $S=\frac{a\cdot h}{2}=\frac{ab\sin\gamma}{2}=\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}$.
- שטח מרובע ניתן לחישוב ע״י אלכסוניו: $S=\frac{k_1k_2\sin\alpha}{2}$.

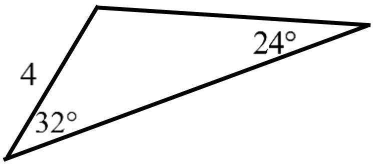
שאלות:

25) חשב את שטחי המשולשים הבאים:

א.



ב.

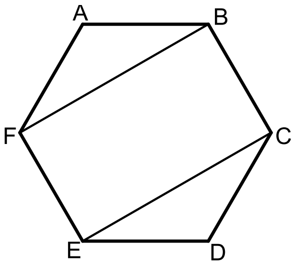


26) חשב את שטחו של טרפז שווה שוקיים שאורך האלכסון שלו 8 ס״מ והוא יוצר זווית של $15°$ עם הבסיסים.

27) אורכו של מלבן הוא m ורוחבו n. הזווית שבין אלכסוני המלבן היא θ.
הוכח כי מתקיים: $\sin\theta=\frac{2mn}{m^2+n^2}$.

28) במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle B=90°$), BD חוצה את הזווית $\sphericalangle B$.
נתון: $AB=m$, $\sphericalangle A=\alpha$.
הבע באמצעות α ו-m את שטח המשולש BCD.

29) באיור שלפניך נתון משושה משוכלל ששטחו הכולל הוא S.



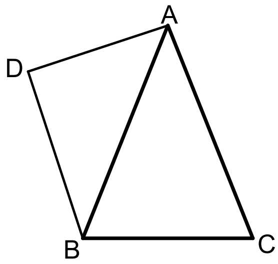
א. הבע באמצעות S את אורך צלע המשושה.
ב. מעבירים אלכסונים במשושה כך שנוצר המלבן BFEC.
הבע באמצעות S את שטח המלבן.

30) המשולש ABC הוא שווה שוקיים בעל זווית ראש α, (AB = AC).
אורך הבסיס BC הוא k.
על השוק AB בונים משולש ישר זווית ABD ובו $\measuredangle D=90^\circ$.

א. הבע באמצעות k ו- α את אורך שוק המשולש ABC.

ב. הניצב AD במשולש ABD שווה ל- $0.85k$
וכי: $\measuredangle ABD=40^\circ$. מצא את זוויות המשולש ABC.

ג. חשב את שטח המרובע ACBD אם ידוע כי $k=6$.

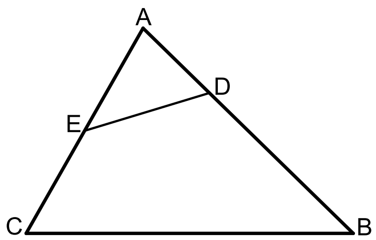


31) במשולש ABC אורך הצלע AC הוא 8 ס"מ ואורך הצלע AB הוא 10 ס"מ.
הנקודה E היא אמצע הצלע AC
והנקודה D מקיימת: 3 ס"מ = AD.
ידוע כי: $\frac{DE}{BC}=\frac{2}{5}$.

א. מצא את אורך הקטע DE.

ב. חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ADE.

ג. חשב את שטח המרובע BCED.

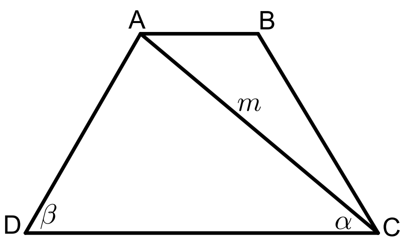


32) המרובע ABCD הוא טרפז $(AB\,||\,CD)$. הקטע AC הוא אלכסון בטרפז.
מסמנים: $\measuredangle ADC=\beta$, $\measuredangle ACD=\alpha$, $AC=m$.

א. הבע באמצעות α , β ו- m את אורך הבסיס הגדול DC.

ב. נתון כי האלכסון AC מקיים: $\frac{S_{ADC}}{S_{ABC}}=3$.
הבע באמצעות α, β ו- m את הבסיס AB.

ג. חשב את שטח הטרפז אם ידוע כי: $\beta=60^\circ$, $\alpha=40^\circ$ ו- $m=8$.

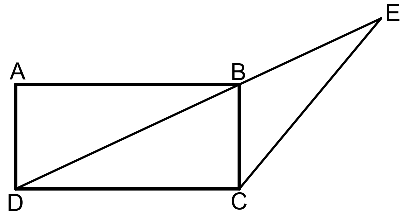


33) המרובע ABCD הוא מלבן. מעבירים את האלכסון BD וממשיכים אותו עד לנקודה E שמחוץ למלבן.
מחברים את הנקודה E עם הקודקוד C.
ידוע כי אורך הצלע AD של המלבן הוא 6 ס"מ וכי אורך הקטע BE הוא 9 ס"מ. הזווית CBE היא 115°.

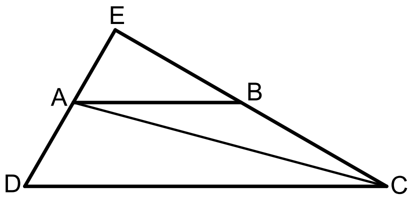
א. מצא את אורך הקטע CE.

ב. מצא את אורך האלכסון BD.

ג. חשב את שטח המשולש DCE.

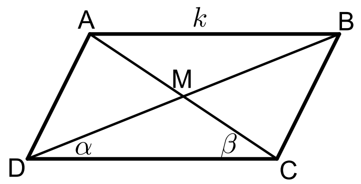


34) המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.
ממשיכים את השוקיים AD ו-BC עד לפגישתם
בנקודה E. ידוע כי: $DE \perp CE$.
מעבירים את האלכסון AC אשר חוצה את זווית C.
מסמנים את הבסיס הגדול DC ב- k ואת: $\sphericalangle ACD = \alpha$.



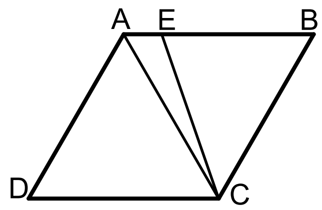
א. הבע באמצעות k ו- α את הבסיס הקטן AB.
ב. הבע באמצעות k ו- α את שטח המשולש ABC.
ג. חשב את שטח המשולש ABC כאשר: $\alpha = 15^\circ$, $k =$ 12 ס"מ.

35) נתונה מקבילית ABCD ובה מעבירים
את האלכסונים AC ו-BD אשר נחתכים
בנקודה M כמתואר באיור.
מסמנים: $\sphericalangle ACD = \beta$, $\sphericalangle BDC = \alpha$, $AB = k$.



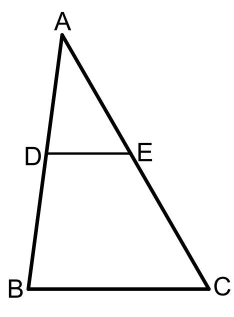
א. הוכח כי אלכסוני המקבילית מקיימים: $\frac{AC}{BD} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.
ב. ענה על השאלות הבאות:
i. הבע באמצעות α , β ו- k את שטח המשולש DMC.
ii. הבע באמצעות α , β ו- k את שטח המקבילית ABCD.
ג. נתון כי: $\frac{AC}{BD} = 2$. הראה כי שטח המקבילית הוא: $\frac{4k^2\sin^2\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

36) המרובע ABCD הוא מעוין ובו $\sphericalangle D = 60^\circ$.
מעבירים את האלכסון AC ואת הקטע CE
כך שהנקודה E נמצאת על הצלע AB ומחלקת
אותה ביחס: $\frac{BE}{AE} = 4$.



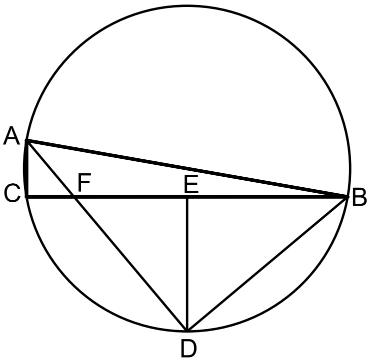
א. חשב את זווית AEC.
ב. נתון כי שטח המשולש AEC הוא 8.66 סמ"ר. חשב את שטח המעוין.

37) הקטע DE מקביל לצלע BC במשולש ABC כמתואר באיור.
נתון כי: $CE = 13$, $BC = 15$, $BD = \sqrt{129}$.
ידוע כי זווית AED היא 60°.

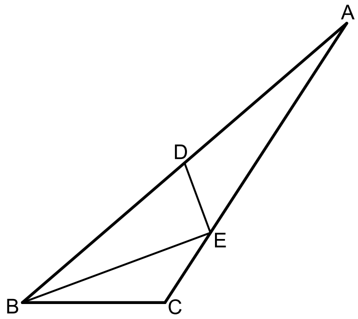


א. חשב את אורך הקטע DE אם ידוע
ב. כי הוא קטן מ-10 ס"מ.
ג. חשב את שטח המשולש ADE.

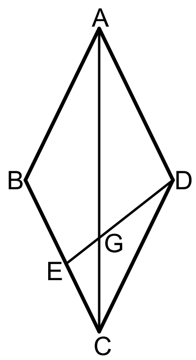
38) המשולש ABC חסום במעגל כך ש-AB הוא קוטר.
הנקודה D היא אמצע הקשת BC וממנה מעבירים את המיתרים AD ו-BD ומעלים גובה DE לצלע BC.
מסמנים: $DE = k$ ונתון כי: $\sphericalangle ABC = 10^\circ$.
א. הבע באמצעות k את רדיוס המעגל.
ב. הבע באמצעות k את שטח המשולש ABF.
ג. מצא את k אם ידוע כי שטח המשולש ABF הוא 15.363 סמ"ר.



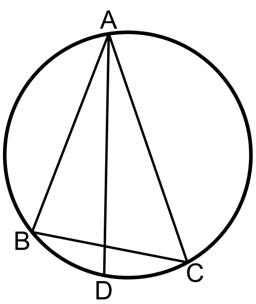
39) במשולש ABC הקטע BE חוצה את זווית B.
הנקודה D היא אמצע הצלע AB ומקיימת: $DE = CE$.
ידוע כי: $BC = 6$, $BE = 8$, $BD = 9$.
א. מצא את זווית B.
ב. חשב את שטח המשולש ADE.



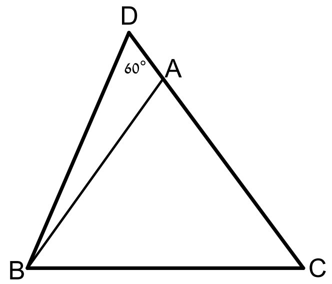
40) נתון המעוין ABCD. אורך האלכסון הגדול במעוין AC גדול פי 1.8 מצלע המעוין.
א. חשב את זוויות המעוין.
ב. מהקודקוד D מעבירים את הקטע DE שאורכו הוא m.
הקטע DE חותך את האלכסון AC בנקודה G.
הזווית EDC תסומן ב-α.
i. הבע באמצעות m ו-α את אורך הקטע CE.
ii. הבע באמצעות m ו-α את שטח המשולש EGC.



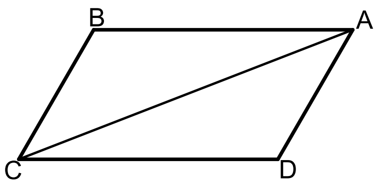
41) המשולש ABC חסום במעגל כמתואר באיור.
מעבירים את המיתר AD החוצה את זווית BAC.
ידוע כי: $\sphericalangle ACB = 60^\circ$, $\sphericalangle BAC = 40^\circ$.
מסמנים: $AD = k$.
א. הבע באמצעות k את אורך המיתר BD.
ב. ידוע כי שטח המשולש ABD הוא 7.368 סמ"ר.
מצא את k (עגל למספר שלם).



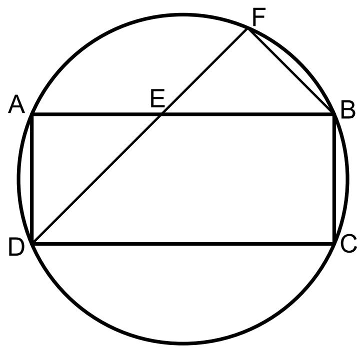
42) המשולש ABC הוא שווה שוקיים (AB = AC).
ממשיכים את הצלע AC עד לנקודה D כך
שאורך שוק המשולש גדולה פי 3.8 מהקטע AD.
ידוע כי: $\sphericalangle D = 60°$.
אורך הקטע BD הוא 21 ס"מ.
א. מצא את אורך הקטע AD.
ב. חשב את שטח המשולש ABC.



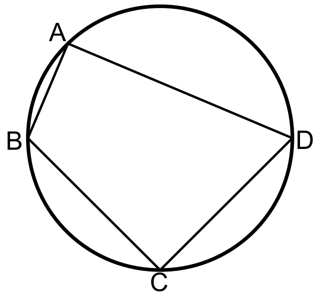
43) במקבילית ABCD אורך האלכסון AC הוא $\sqrt{79}$ ס"מ.
היקף המקבילית הוא 20 ס"מ וידוע כי: $\sphericalangle B = 120°$.
א. מצא את אורכי צלעות המקבילית.
ב. חשב את שטח המקבילית.
ג. מסמנים נקודה E על האלכסון AC כך שהמרובע CBED הוא בר חסימה.
חשב את רדיוס המעגל החוסם את המרובע CBED.



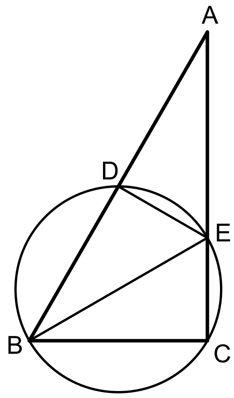
44) המרובע ABCD הוא מלבן החסום במעגל.
מהקודקוד D מעבירים את המיתר DF
החותך את הצלע AB בנקודה E.
ידוע כי: $\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{CF}$.
הצלע AD של המלבן תסומן ב- a.
א. הוכח כי המשולש DAE הוא שווה שוקיים.
ב. נתון גם כי: BC = BF.
i. הבע באמצעות a את רדיוס המעגל.
ii. חשב את הזוויות המרכזיות של הקשתות: $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$
(אין צורך לסרטט אותן).



45) המרובע ABCD חסום במעגל כמתואר באיור.
ידוע כי: $AB = b$, $BC = a$, $CD = a$, $AD = 3b$.
א. הבע באמצעות a ו- b את $\cos\sphericalangle BCD$.
ב. הוכח כי אם BD קוטר אז מתקיים: $a = b\sqrt{5}$.
ג. נתון כי רדיוס המעגל הוא 3 ס"מ.
הסתמך על סעיף ב' וחשב את שטח המרובע ABCD.



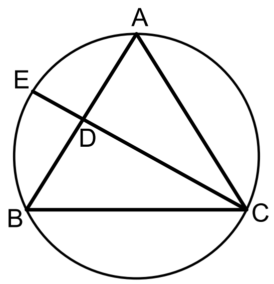
46) המשולש ABC הוא ישר זווית $\sphericalangle C = 90°$ ובו: $\sphericalangle B = 2\alpha$.
מעבירים מעגל שרדיוסו R דרך הקודקודים B ו-C
אשר חותך את צלעות המשולש בנקודות D ו-E.
המיתר BE חוצה את זווית B.



א. הבע באמצעות R ו- α את שטח המשולש ABE.
ב. ידוע כי המשולש ABE הוא שווה שוקיים
וכי אורך המיתר CE הוא 6 ס"מ.
חשב את שטח המשולש ABE.

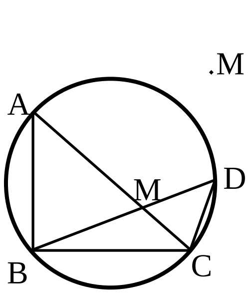
47) במשולש שווה שוקיים ABC (AB = AC) שאורך השוק בו הוא k וזווית הבסיס שלו היא β, BE חוצה את זווית $\sphericalangle B$ ו- CD הוא הגובה לשוק AB.
הוכח כי שטח המשולש ADE הוא: $S_{ADE} = -\dfrac{k^2 \sin\frac{\beta}{2} \sin 4\beta}{4\sin\frac{3\beta}{2}}$.

48) נתון משולש שווה שוקיים ABC (AB = AC) החסום במעגל.
מהקודקוד C מעבירים את המיתר CE החותך את השוק AB בנקודה D.
ידוע כי E היא אמצע הקשת $\overset{\frown}{AB}$ והיחס בין
הקטעים BD ו-CD הוא 7 :4.
מסמנים: $\sphericalangle ACD = \alpha$.



א. מצא את זוויות המשולש ABC
(עגל למספרים שלמים).
ב. חשב את אורך המיתר BE אם ידוע כי
רדיוס המעגל החוסם שווה ל-8 ס"מ.

49) AC ו-BD הם מיתרים במעגל שרדיוסו R, שנפגשים בנקודה M.
זווית $\sphericalangle B$ היא זווית ישרה.
נתון: $\sphericalangle MBC = \alpha$, $\sphericalangle MCB = \beta$.

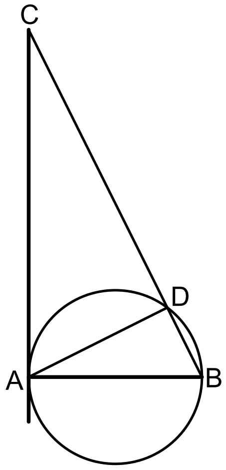


א. הבע באמצעות R, α ו- β את שטח המשולש BDC.
ב. נתון: $\beta = 2\alpha$, $S_{BDC} = \frac{1}{2}R^2$.
חשב את α.

50) בטרפז שווה שוקיים, שאורך השוק שבו הוא b והזווית שליד הבסיס הגדול היא γ נתון שהאלכסונים מאונכים זה לזה.

א. הבע באמצעות γ ו- b את אורכי בסיסי הטרפז.

ב. חשב את γ אם ידוע שהבסיס הגדול ארוך פי $\sqrt{3}$ מהבסיס הקטן.

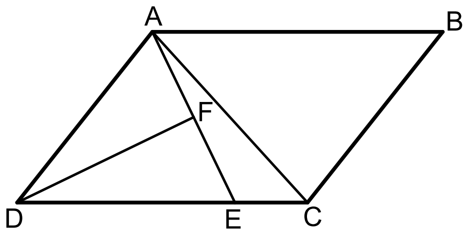


51) המיתר AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R ו-AD הוא מיתר.
ממשיכים את המיתר BD ומעבירים משיק מהנקודה A.
המשיק והמשך המיתר נפגשים בנקודה C.
מסמנים: $\sphericalangle BAD=\alpha$.

א. הבע באמצעות α ו- R את שטח המשולש ABD.

ב. הבע באמצעות α ו- R את שטח המשולש ACD.

ג. מצא את α אם ידוע כי שטח המשולש ABD קטן פי 4 משטח המשולש ACD.



52) המרובע ABCD הוא מקבילית.
הקטע AE מקצה על הצלע DC קטעים המקיימים: 3CE = DE.
מעבירים תיכון DF לצלע AE במשולש ADE.
ידוע כי: $\sphericalangle ADF=\sphericalangle CDF=\alpha$.
מסמנים: $CE=k$.

א. הבע באמצעות k ו- α את אורך הקטע AE.

ב. מעבירים את האלכסון AC.
הבע באמצעות k ו- α את היקף המשולש ACE.

ג. היקף המשולש ACE הוא $4.5k$. מצא את α.

תשובות סופיות:

25) א. $S=$ 75.801 סמ"ר ב. $S=$ 8.641 סמ"ר

26) $S=$ 16 סמ"ר

27) $S_{\Delta BCD}=\dfrac{m^2\tan^2\alpha\sin45^\circ\cos\alpha}{2\sin(\alpha+45^\circ)}$

28) א. $\sqrt{\dfrac{2S}{\sqrt{27}}}\approx0.62S$ ב. $\dfrac{2}{3}S$

29) א. $\dfrac{k}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$ ב. $44.4^\circ\ ,\ 67.78^\circ\ ,\ 67.78^\circ$ ג. $S=37.18$

30) א. $DE=\sqrt{1.6}=1.26$ ב. $R=2$ ג. $S=21.48$

31) א. $DC=\dfrac{m\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$ ב. $AB=\dfrac{m\sin(\alpha+\beta)}{3\sin\beta}$ ג. $S_{ABCD}=31.2$

32) א. 12.75 ס"מ ב. 14.19 ס"מ ג. 63.05 ס"מ

33) א. $\dfrac{k\tan\alpha}{\tan2\alpha}$ ב. $\dfrac{k^2\tan\alpha\sin2\alpha}{2\tan^2 2\alpha}$ ג. $S=$ 7.754 ס"מ

34) ב.i. $\dfrac{k^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$ ב.ii. $\dfrac{2k^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

35) א. 109.1° ב. $S=86.6$

36) א. 7 ס"מ ב. 34.48 סמ"ר

37) א. $R=\dfrac{k}{2\sin^2 40}=1.21k$ ב. $S=\dfrac{k^2\sin10}{2\sin50\sin^3 40}$ ג. $k=6$

38) א. 40.72° ב. $S=12.52$

39) א. $128.32^\circ\ ;\ 51.68^\circ$ ב. $1.27m\sin\alpha$ ג. $\dfrac{0.35m^2\sin^2\alpha\sin(128.32-\alpha)}{\sin(25.84+\alpha)}$

40) א. $BD=\dfrac{k\sin20}{\sin100}$ ב. $k=7$

41) א. 5 ס"מ ב. $S=172.77$

42) א. $BC=$ 3 ס"מ ו-$AB=$ 7 ס"מ ב. $S=$ 18.18 סמ"ר ג. $R=\sqrt{\dfrac{37}{3}}$

43) ב. i. $R=a\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\approx 1.3a$ ב. ii. $45°\ ,\ 135°$

44) א. $\cos\sphericalangle BCD=\frac{a^2-5b^2}{a^2+3b^2}$ ג. $S=$ 14.4 סמ"ר.

45) א. $S=R^2\tan 2\alpha$ ב. $S=$ $36\sqrt{3}$ סמ"ר.

48) א. $58°\ ,\ 58°\ ,\ 64°$ ב. $BE=7.75$.

49) א. $S=2R^2\sin\alpha\cos\beta\sin(90°-\alpha+\beta)$ ב. $\alpha=22.5°$.

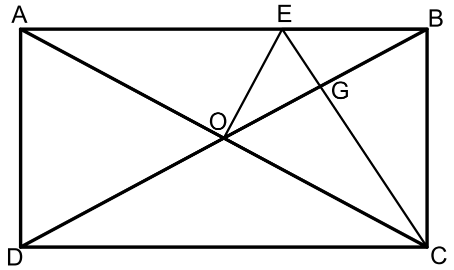
50) א. $\frac{b\sin(\gamma-45°)}{\sin 45°}\ ,\ \frac{b\sin(135°-\gamma)}{\sin 45°}$ ב. $\gamma=75°$.

51) א. $S=R^2\sin 2\alpha$ ב. $S=\frac{2R^2\cos^3\alpha}{\sin\alpha}$ ג. $\alpha=26.56°$.

52) א. $AE=6k\sin\alpha$ ב. $P_{ACE}=k+6k\sin\alpha+k\sqrt{25-24\cos 2\alpha}$
ג. $\alpha=14.47°$.

שאלות המשלבות ידע בגיאומטריה:

שאלות:

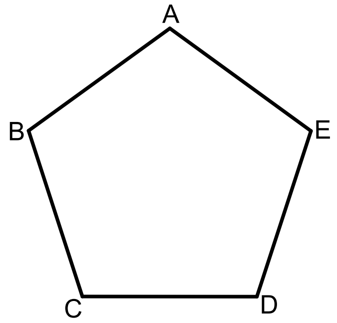


53) המרובע ABCD הוא מלבן.
מעבירים את האלכסונים AC ו-BD .
הנקודה E נמצאת על הצלע AB של המלבן
ומחלקת אותה כך ש- 2BE = AE .
ידוע כי הקטע OE מאונך לאלכסון AC
ושווה ל-BE.
הקטע CE חותך את האלכסון BD בנקודה G.

א. הוכח כי הקטע CE מאונך לאלכסון BD.

ב. הוכח כי מתקיים : 4GE = AE .

ג. נתון כי שטח המשולש BEG הוא 5 סמ"ר.
חשב את שטח המלבן ABCD.



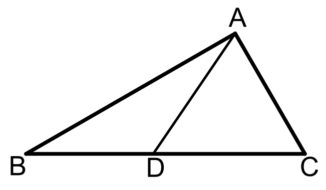
54) באיור שלפניך נתון מחומש משוכלל ACBDE
(כל זוויותיו הן 108°) בעל אורך צלע α .

א. הבע באמצעות α את אלכסון המחומש AD.

ב. הבע באמצעות α את רדיוס המעגל
החוסם את המחומש.

ג. הבע באמצעות α את שטח המחומש.

ד. אורך רדיוס המעגל החוסם את המחומש הוא 6 ס"מ.
חשב את שטח המחומש.

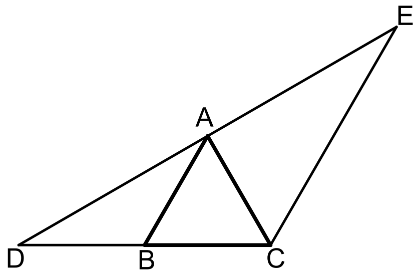


55) במשולש ABC הזווית C היא 60° .
מעבירים את הקטע AD כך שנוצרים
המשולשים ACD ו-ABD.
ידוע כי רדיוס המעגל החוסם את
המשולש ACD הוא : $R_1 = \sqrt{3}$ ס"מ .
כמו כן רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא : $R_2 = 3$ ס"מ .

א. הוכח כי המשולש ABC הוא ישר זווית.

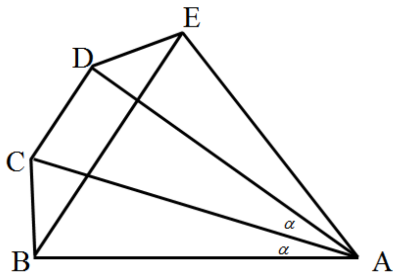
ב. היקף המשולש ABC הוא : $P = 12+4\sqrt{3}$ ס"מ .
חשב את שטח המשולש.

56) המשולש ABC הוא שווה צלעות.
הקטע DE עובר דרך הקודקוד A כך שנוצרים
שני משולשים ABD ו-ACE.
ידוע כי AC חוצה את זווית DCE במשולש DCE.



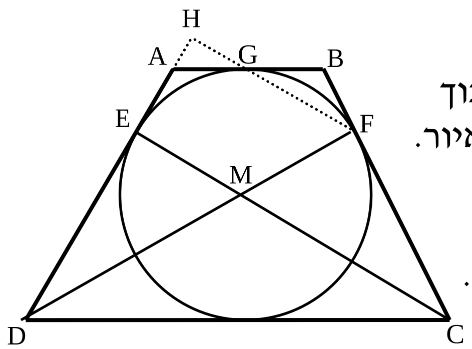
א. הוכח: $AB \parallel CE$.
ב. הוכח: $BC \cdot DE = DC \cdot AE$.
ג. נתון: DC = 8 ס"מ
וכי: $AC \perp DE$.
i. חשב את שטח המשולש DCE.
ii. חשב את שטח המשולש ABD.

57) מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB , AC , AD ו-AE
כך שמתקיים: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD = \alpha$ ו- AB = AE.
מעבירים את האלכסון BE במחומש ABCDE.
מתקיים: $BE \parallel CD$.
ידוע כי המרובע BCDE הוא בר חסימה.



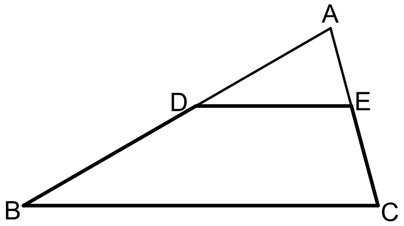
א. הוכח כי המרובע BCDE הוא טרפז שווה שוקיים.
ב. נתון כי המשולש ACD הוא ש"ש (AC = AD).
הוכח כי: $\Delta ABD \cong \Delta ACE$.
ג. ידוע כי: $\sphericalangle ADC = 3\alpha + 2.5$ ו- $\sphericalangle ADE = 3\alpha - 10$.
הוכח כי משולש ADE הוא ישר זווית.
ד. נסמן: $AB = m$.
i. הבע באמצעות m את צלעות הטרפז BCDE.
ii. הבע באמצעות m את שטח המחומש ABCDE.
iii. מצא את m אם ידוע כי שטח המחומש ABCDE
הוא 46.284 סמ"ר. (עגל למספר שלם).

58) הטרפז ABCD הוא שווה שוקיים. חוסמים מעגל בתוך
הטרפז אשר משיק לו בנקודות E, F ו-G כמתואר באיור.
הקטעים DF ו-CE חוצים את זוויות הטרפז
ונחתכים בנקודה M.

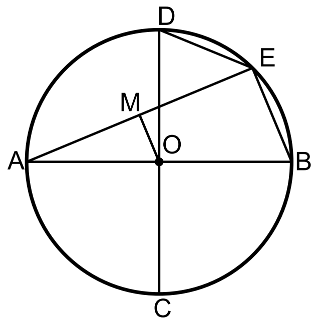


א. הוכח כי הנקודה M היא מרכז המעגל החסום.
ב. חשב את זוויות הטרפז.
ג. ממשיכים את GF ואת AD כך שהם נפגשים בנקודה H.
חשב את היחס $\frac{EM}{FH}$.

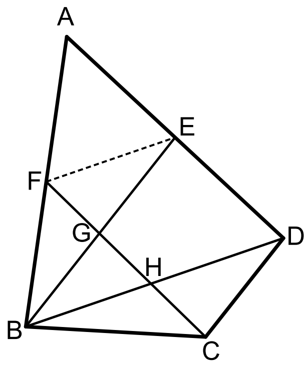
59) המרובע BDEC הוא טרפז $BC \parallel DE$.
המשכי השוקיים BD ו-CE נפגשים בנקודה A
כך שהמשולש ABC הוא שווה שוקיים (AB = BC).
נתון: AB = 18 ס״מ, $\sphericalangle ADE = 30^\circ$.
א. סמן את אורך הבסיס DE ב-x
ואת שטח הטרפז BDEC ב-S.
הבע את S באמצעות x.
ב. על הקטע AD בונים ריבוע.
ידוע כי שטחו קטן ב-1 סמ״ר משטח הטרפז BDEC.
חשב את היחס: $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}$.



60) במעגל שמרכזו O מעבירים את הקטרים AB ו- CD
המאונכים זה לזה. E היא נקודה על היקף
המעגל המקיימת: BE + DE = 15 ס״מ.
מעבירים את המיתר AE.
הקטע OM מאונך למיתר AE ושווה למיתר DE.
א. הוכח כי המרובע OMEB הוא טרפז ישר זווית.
ב. מצא את אורך המיתר BE.
נתון כי שטח הטרפז הוא 90 סמ״ר.
ג. מצא את רדיוס המעגל.
ד. חשב את זווית B.



61) BD הוא אלכסון במרובע הבר-חסימה ABCD.
הנקודות E ו- F הן בהתאמה אמצעי
הצלעות AD ו- AB במרובע.
מעבירים את הקטעים BE ו-CF כך ש- $BE \parallel CD$.
נתון כי הזוויות $\sphericalangle A$ ו- $\sphericalangle BFE$ משלימות ל- 180°.
א. הוכח: $\Delta BFE \sim \Delta BCD$.
ב. נתון כי: BE = 7.5 וכי: $GE \cdot HD = 17\frac{1}{15}$.
חשב את אורך הקטע FE.
ג. נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש BED
הוא: 4.001 ס״מ = R. מצא את זווית $\sphericalangle EBD$.



תשובות סופיות:

53) ג. 120 סמ"ר

54) א. 1.618α ב. 0.85α ג. $1.72\alpha^2$ ד. $S=85.57$

55) ב. $S=8\sqrt{3}$

56) ג.i. $S_{\text{CDE}}=16\sqrt{3}$ ג.ii. $S_{\text{ABD}}=4\sqrt{3}$

57) ד.i. $\text{BE}=1.2175m$, $\text{CD}=0.4776m$, $\text{DE}=0.4663m$, $\text{BC}=0.4663m$

62) ד.ii. $0.7232m^2$ ד.iii. $m=$ 8 ס"מ

58) ב. $60°$, $120°$ ג. $\frac{2}{3}$

59) א. $S=81-0.25x^2$ ב. $\frac{S_{\text{ADE}}}{S_{\text{ABC}}}=\frac{16}{81}$

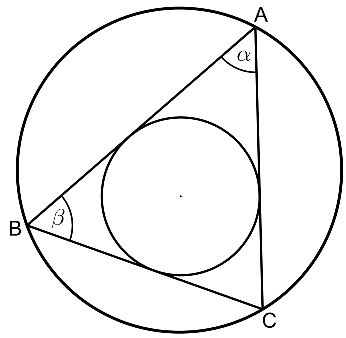
60) ב. BE = 10 ג. R = 13 ד. $\sphericalangle B=67.38°$

61) ב. FE = 4 ג. $16.73°$

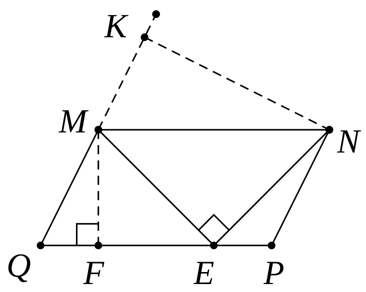
שאלות מסכמות:

שאלות:

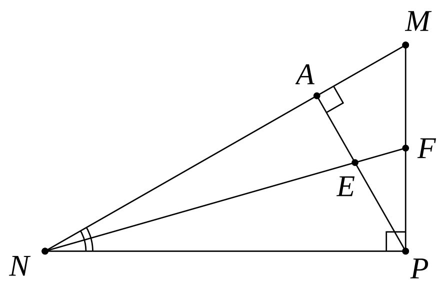
1) המשולש ABC חסום מעגל שרדיוסו R.
נתון כי $\sphericalangle B=\beta$, $\sphericalangle A=\alpha$.
א. הבע את רדיוס המעגל החסום במשולש בעזרת R , β , α.
ב. נתון כי: $\alpha=\beta=60°$.
חשב את רדיוס המעגל החסום במשולש בעזרת R.



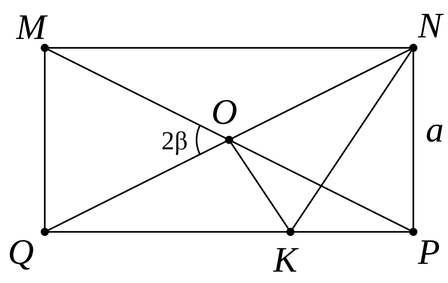
2) במקבילית MNQP נקודה E נמצאת על הצלע PQ כך ש- $\sphericalangle MEN=90°$ (ראה ציור).
נתון: MQ = 12 ס"מ , $\triangleleft MQP=70°$, $\triangleleft MNE=40°$.
מצא את הגובה MF, ואת הגובה NK.

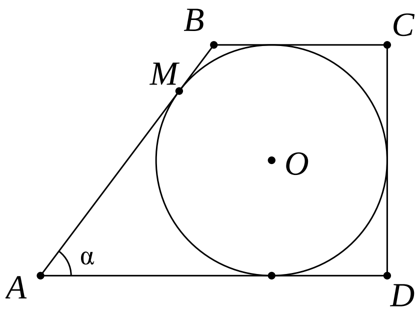


3) במשולש ישר-זווית MNP, $(\sphericalangle P=90°)$
PA הוא גובה ליתר ו-NF חוצה את הזווית $\sphericalangle MNP$.
PA ו-NF נחתכים בנקודה E (ראה ציור).
נתון: NP = 24 ס"מ , $\triangleleft MNP=40°$.
א. מצא את אורך הקטע NA.
ב. מצא את אורך הקטע EF.

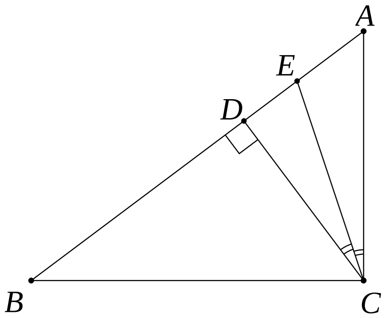


4) אלכסוני המלבן MNPQ נחתכים בנקודה O.
מנקודה O מעלים אנך ל-QN החותך את QP בנקודה K (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle MOQ=2\beta$, $NP=a$.
א. הבע את אורך הקטע OK באמצעות β ו- a.
ב. הבע את היקף המשולש NOK באמצעות β ו- a.





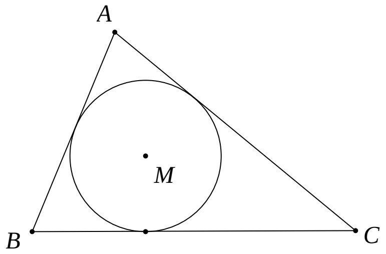
5) בטרפז ישר-זווית ABCD חסום מעגל שמרכזו O.
הנקודה M היא נקודת ההשקה של המעגל עם השוק AB.
נתון: $AM =$ 12 ס"מ , $\measuredangle BAD=\alpha$.
א. הבע את רדיוס המעגל בעזרת α .
ב. הבע את היקף הטרפז בעזרת α .



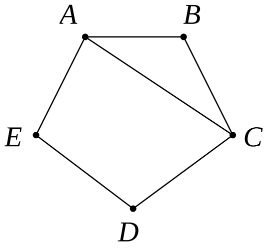
6) במשולש ישר-זווית ABC (ראה ציור) נתון:
$BC =$ 8 ס"מ, $\measuredangle ACB=90°$, $\measuredangle ABC=\beta$.
CD הוא הגובה ליתר.
CE הוא חוצה-הזווית $\measuredangle ACD$.
הבע את אורך הקטע AE באמצעות β .

7) נתון מעגל שרדיוסו R . מצולע משוכלל בעל 9 צלעות חוסם את המעגל הזה.
מצולע משוכלל אחר בעל 9 צלעות חסום בתוך מעגל זה.
חשב את היחס בין שטח המצולע החוסם את המעגל לשטח המצולע החסום במעגל זה.

8) ΔABC הוא משולש שווה-שוקיים $(AB = AC)$ שאורך בסיסו 12 ס"מ.
AD הוא הגובה לבסיס BC ו-CE הוא הגובה לשוק AB.
שני הגבהים נחתכים בנקודה O. נתון: $\measuredangle ABC=\alpha$ $(\alpha>45°)$.
א. הבע את היחס $AO:DO$ באמצעות α .
ב. הראה כי בעבור $\alpha=60°$ הביטוי שמצאת בסעיף א' מתאים לתכונות הגאומטריות של משולש שווה-צלעות.



9) במשולש ABC חסום מעגל שמרכזו M ורדיוסו r (ראה ציור).
נתון: $\measuredangle C=46°$, $\measuredangle B=62°$.
א. הבע באמצעות r את אורך הצלע BC .
ב. נתון: $BC =$ 16 ס"מ. מצא את r .



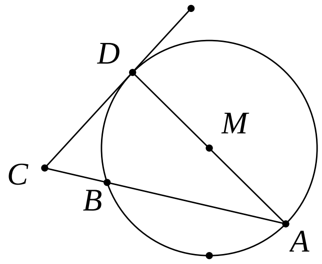
10) במחומש משוכלל ABCDE (ראה ציור)
אורך האלכסון AC הוא 15 ס"מ.
חשב את שטח המחומש.

11) מנקודה C הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו M ורדיוסו R מעבירים משיק CD וחותך CBA למעגל (ראה ציור).

נתון: $\mathrm{CD}=\frac{3}{5}R$.

א. מצא את זוויות המשולש CAD.

ב. הבע באמצעות R את שטח המשולש BCD.



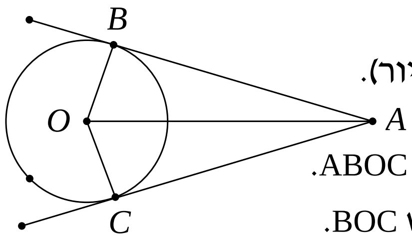
12) מנקודה A, הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו O, יוצאים שני משיקים למעגל, AB ו-AC (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle \mathrm{BAC}=2\alpha$, AO = 10 ס"מ.

א. הבע באמצעות α את S_1, שטח המרובע ABOC.

ב. הבע באמצעות α את S_2, שטח המשולש BOC.

ג. הראה שאם $\alpha=30^\circ$, אזי: $S_1=4\cdot S_2$.

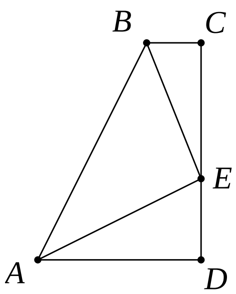


13) ABCD הוא טרפז ישר-זווית $(\sphericalangle \mathrm{C}=\sphericalangle \mathrm{D}=90^\circ)$.

נקודה E נמצאת על הצלע DC (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle \mathrm{AEB}=90^\circ$, $\mathrm{AE}=\mathrm{BE}=k$ ו- $\sphericalangle \mathrm{CBE}=\beta$.

הבע באמצעות k ו- β את שטח הטרפז.



14) ענה על השאלות הבאות:

א. במעושר משוכלל, ששטחו 100 סמ"ר, חוסמים מעגל.
מצא את רדיוס המעגל החסום במעושר.

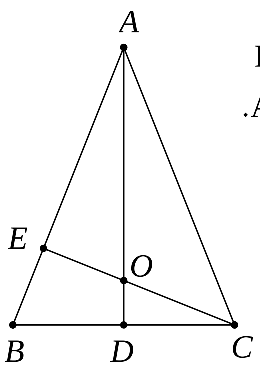
ב. מעושר משוכלל חסום במעגל, שאת רדיוסו מצאת בסעיף א'.
מצא את שטח המעושר המשוכלל הזה.

15) ABC הוא משולש שווה-שוקיים (AB = AC) שבו זווית הראש היא זווית חדה. נתון כי זווית הבסיס היא β ואורך הבסיס BC הוא 2α. AD הוא הגובה לבסיס BC ו-CE הוא הגובה לשוק AB. הגבהים AD ו-CE נפגשים בנקודה O (ראה ציור).

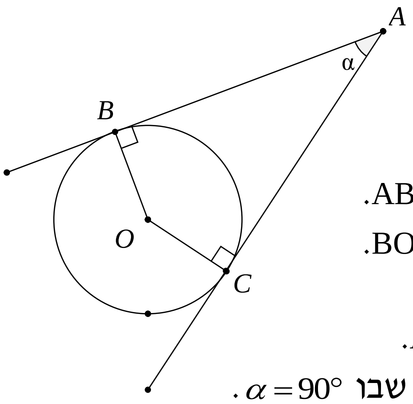
א. הבע באמצעות α ו- β את אורכי הקטעים CO ו-CE.

ב. הבע באמצעות β את היחס $\frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{CE}}$.

ג. חשב את היחס שמצאת בסעיף ב' כאשר $\beta=60^\circ$, והסבר מהי המשמעות הגאומטרית של התוצאה שקיבלת.



16) מנקודה A יוצאים שני משיקים למעגל שמרכזו O, שאורכם m (כלומר: $AB = AC = m$). נקודות ההשקה הן B ו-C, והזווית שבין המשיקים היא $\sphericalangle BAC = \alpha$ (ראה ציור).



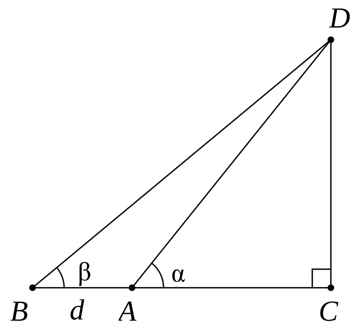
א. הבע באמצעות m ו- α את שטח המשולש ABC.

ב. הבע באמצעות m ו- α את שטח המשולש BOC.

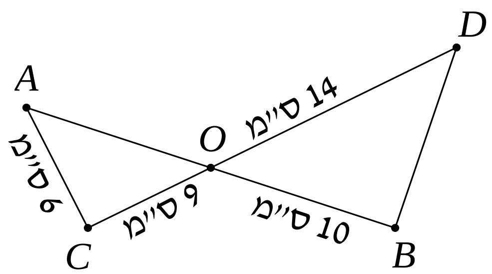
ג. הבע באמצעות α את היחס שבין שטחו של המשולש BOC לבין שטחו של המשולש ABC.

ד. בדוק את תשובתך לסעיף ג' למקרה המיוחד שבו $\alpha = 90°$.

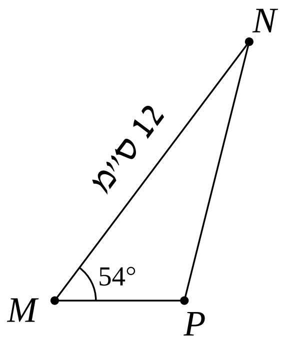
17) במשולש ישר-זווית DAC נתון $\sphericalangle DAC = \alpha$. מאריכים את הניצב AC כך ש- $AB = d$. נתון כי: $\sphericalangle DBA = \beta$ (ראה ציור). סמן: $AC = x$. הבע את x באמצעות d, α ו- β.



18) הקטעים AB ו-CD נחתכים בנקודה O.
נתון כי: $\sphericalangle OAC = 60°$,
$CO = 9$ ס"מ, $AC = 6$ ס"מ,
$OD = 14$ ס"מ, $OB = 10$ ס"מ.
חשב את $\sphericalangle ODB$.



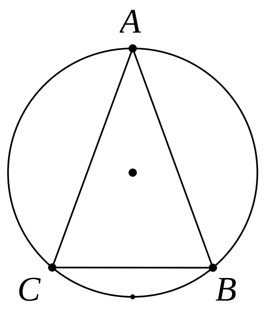
19) במשולש MNP גודל הזווית M הוא $54°$. נתון כי אורך הצלע MN הוא 12 ס"מ (ראה ציור), והצלע NP ארוכה ב-7 ס"מ מהצלע MP.



א. חשב את אורך הצלע NP.

ב. PA הוא תיכון לצלע MN. חשב את שטח המשולש PAN.

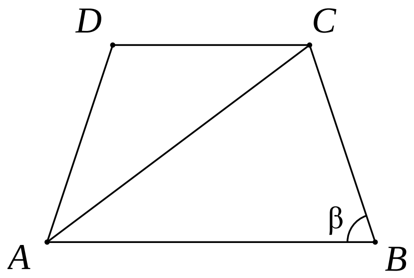
20) המשולש השווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$ חסום במעגל (ראה ציור). נתון: $\sphericalangle ABC = \beta$. כמו כן ידוע שאורך רדיוס המעגל הוא 20 ס"מ.



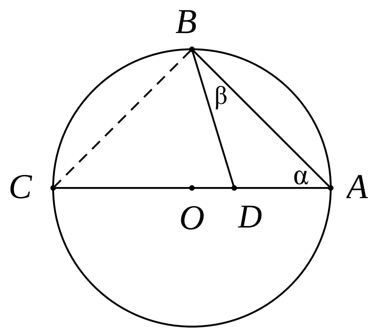
א. הבע בעזרת β את שטח המשולש ABC.

ב. חשב את שטח המשולש ABC בעבור $\beta = 45°$.

21) במשולש ABC הזווית $\sphericalangle C$ היא בת 60°, אורך הצלע AB הוא $\sqrt{13}$ ס"מ, והיקף המשולש הוא $7+\sqrt{13}$ ס"מ. חשב את שטח המשולש.



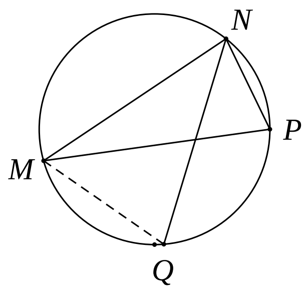
22) בטרפז שווה-שוקיים ABCD ‏(AD = BC)
אורך הבסיס הגדול AB שווה לאורך האלכסון.
זווית הבסיס היא β ‏$(\beta > 60^\circ)$, (ראה ציור).
הבע באמצעות β את היחס שבין שטח המשולש ACD לשטח המשולש ABC.



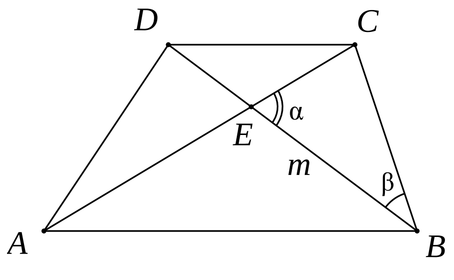
23) הקודקודים A ו- B של המשולש ABD נמצאים על היקף מעגל שאורך רדיוסו 12 ס"מ ומרכזו O.
הקודקוד D של המשולש ABD נמצא על הרדיוס OA.

א. הבע בעזרת α ו- β את שטח המשולש ABD.

ב. הבע בעזרת α ו- β את היחס שבין שטח המשולש ABC לשטח המשולש ABD.

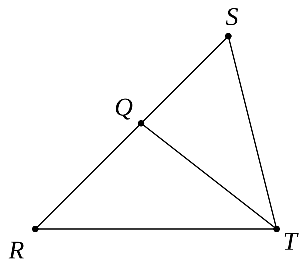


24) משולש MNP חסום במעגל.
המיתר NQ חוצה את הזווית $\sphericalangle MNP$.
נתון: $\sphericalangle MNP = 80^\circ$, $\sphericalangle MPN = 70^\circ$,
NP = 12 ס"מ.
חשב את אורך המיתר MQ.



25) נתון טרפז ABCD ‏$(AB \| CD)$.
הנקודה E היא נקודת המפגש של אלכסוני הטרפז.
נתון: $DC = BC$, $BE = m$,
$\sphericalangle CEB = \alpha$, $\sphericalangle CBD = \beta$ (ראה ציור).
הבע את אורכי בסיס הטרפז:
AB ו- CD באמצעות m, α ו- β.

26) במשולש RST נתון: QT הוא חוצה-הזווית $\sphericalangle RTS$



(ראה ציור), $QS = m$, $RQ = \sqrt{2}$,

$\sphericalangle RST = \alpha$, $\sphericalangle TRQ = 45°$.

א. הבע את $\sin\alpha$ באמצעות m.

ב. נתון כי: $m = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

חשב את זוויות המשולש RST.

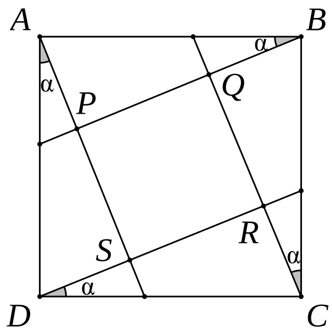
27) במשולש שווה שוקיים ABC (AB = AC) התיכון לשוק שווה באורכו לרדיוס המעגל החוסם את המשולש. חשב את זווית הבסיס של המשולש.

28) נתון משולש שצלעותיו kt , $2t$, t.

א. לאיזה ערכים של הקבוע k המשולש הוא קהה זווית?

ב. נתון $k = \sqrt{7}$. הבע ע״י t את אורך חוצה הזווית הקהה.

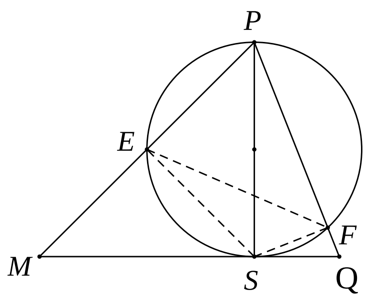
29) בתוך הריבוע ABCD נתון, העבירו ארבעה קטעים היוצרים את אותה זווית α עם צלעות הריבוע כך שהתקבל ריבוע פנימי PQRS.



א. הוכח כי: $\frac{PQ}{AB} = \cos\alpha - \sin\alpha$.

ב. לאיזו זווית α מתקיים: $PR = AB$?

30) PS הוא גובה במשולש PMQ (ראה ציור).



נתון $\sphericalangle SPQ = \beta$, $\sphericalangle MPS = \alpha$, $PS = h$.

א. הבע את שטח המשולש PMQ באמצעות h , α ו- β.

ב. מעגל שקוטרו PS חותך את הצלעות PM ו-PQ בנקודות E ו-F בהתאמה (ראה ציור).

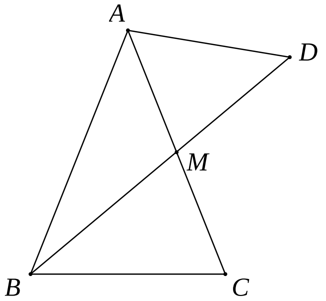
i. הבע באמצעות α ו- β את $\sphericalangle ESF$.

ii. הבע באמצעות α ו- β את היחס בין שטח המשולש ESF לשטח המשולש PMQ.

31) במשולש ABC הצלעות הן a, b ו- c והזוויות שמונחות מולן הן: α, β ו- γ בהתאמה.

א. הבע את אורך התיכון m_a (התיכון לצלע a) באמצעות הצלעות b ו- c והזווית α.

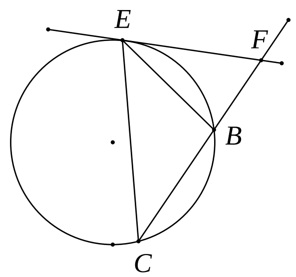
ב. בדוק את הנוסחה שמצאת למקרה שבו המשולש ABC הוא שווה צלעות.



32) במשולש שווה שוקיים ABC ‏(AB = AC),
BM הוא תיכון לשוק (ראה ציור).
נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא 10 ס"מ וכן נתון ש- $\sphericalangle BAC = 50^\circ$.

א. מצא את גודל הזווית $\sphericalangle BMC$.

ב. ממשיכים את BM עד לנקודה D,
כך שרדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא 14 ס"מ.
מצא את שטח המשולש AMD.

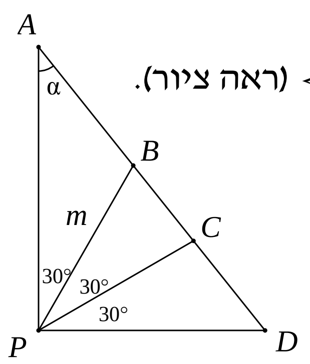


33) משולש שווה שוקיים BCE ‏(BC = BE) חסום במעגל שרדיוסו R.
זווית הבסיס של המשולש BCE היא α.
בנקודה E העבירו משיק למעגל החותך את המשך השוק BC בנקודה F (ראה ציור).

א. בטא את שטח המשולש BEF באמצעות R ו- α.

ב. מצא את הערך של α שבעבורו שטח המשולש BCE שווה לשטח המשולש BEF.

34) בטרפז BCDE ‏$(BC \| ED)$ אורך הבסיס BC הוא 12 ס"מ.
הזווית שבין הבסיס BC לשוק DC היא 80°.
אורך האלכסון BD הוא 16 ס"מ, והוא חוצה את הזווית $\sphericalangle CBE$.
חשב את היקף הטרפז.

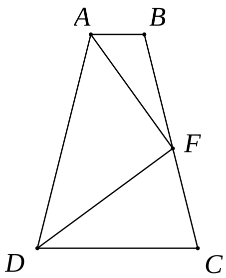


35) במשולש ישר-זווית APD מחלקים את הזווית הישרה $\sphericalangle P$ לשלוש זוויות שוות, כלומר $\sphericalangle APB = \sphericalangle BPC = \sphericalangle CPD = 30^\circ$ (ראה ציור).
נתון כי: $PB = m$, $\sphericalangle PAD = \alpha$.

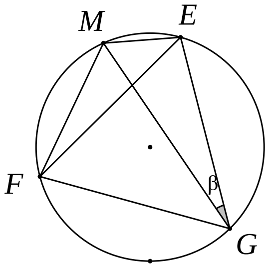
א. היעזר במשפט הסינוסים,
והבע את AB, AC, BD ו- CD באמצעות m ו- α.

ב. הוכח כי: $\dfrac{AC \cdot BD}{AB \cdot CD} = 3$.

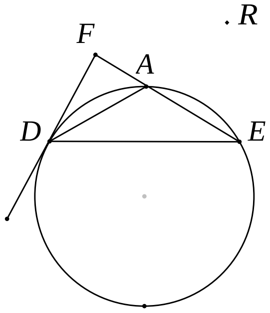
36) בטרפז שווה שוקיים ABCD $(AD = BC\ ,\ AB \| DC)$,
F היא נקודה על השוק BC, כך ש-DF חוצה את
הזווית $\sphericalangle CDA$ ו-AF חוצה את הזווית $\sphericalangle DAB$ (ראה ציור).
נתון: $AB = \beta\ ,\ \sphericalangle FAB = \beta$.
הבע באמצעות b ו-β את אורך הבסיס DC.



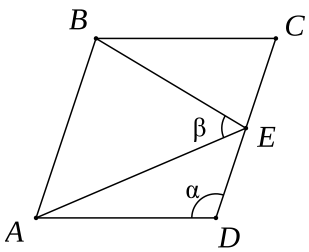
37) משולש שווה צלעות EFG חסום במעגל שרדיוסו R.
M היא נקודה על המעגל. נתון: $\sphericalangle MGE = \beta$ (ראה ציור).
א. הוכח כי: $ME + MF = MG$.
ב. אם $ME = R$ מה תוכל לומר על MG?



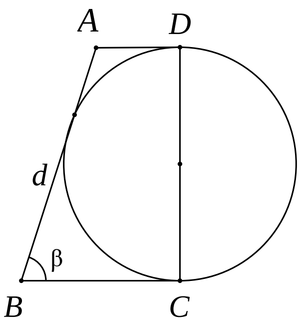
38) משולש שווה שוקיים ADE (AD = AE) חסום במעגל שרדיוסו R.
ישר המשיק למעגל בנקודה D חותך את המשך
הצלע AE בנקודה F (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle AE = \alpha$ $(60° < \alpha < 180°)$.
א. הבע את שטח המשולש ADF באמצעות R ו-α.
ב. הבע באמצעות α את היחס שבין שטח
המשולש ADE ובין שטח המשולש ADF.
ג. חשב את α אם שטח המשולש ADE שווה לשטח המשולש ADF.



39) במעוין ABCD הנקודה E היא אמצע הצלע CD.
נתון: $\sphericalangle ADC = \alpha\ ,\ \sphericalangle AEB = \beta$ (ראה ציור).
הוכח כי: $\cos\beta = \dfrac{3}{\sqrt{25 - 16\cos^2\alpha}}$.



40) נתון טרפז ABCD ונתון מעגל. השוק DC הוא קוטר המעגל.
השוק AB משיקה למעגל, והבסיסים AD ו- BC
משיקים גם הם למעגל בנקודות D ו- C בהתאמה (ראה ציור).
נתון כי: $\sphericalangle B = \beta\ ,\ AB = d$.
א. הבע באמצעות d את סכום בסיסיו של הטרפז.
ב. הבע באמצעות d ו- β את היקף הטרפז ואת השטח
של הטרפז.
ג. נתון שהיקף הטרפז 25 ס"מ ושטחו 25 סמ"ר.
חשב את הזווית החדה β.



41) במשולש שווה שוקיים PMN $(PM = PN)$,

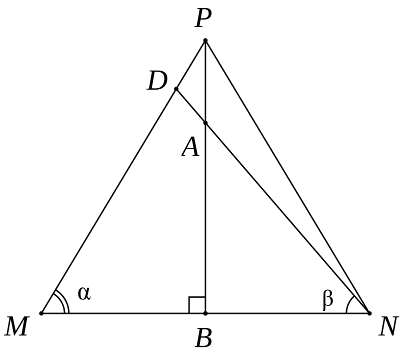
A היא נקודה על הגובה PB, כך ש- $PA = \frac{1}{5} \cdot PB$.

הישר NA חותך את השוק PM בנקודה D (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle DNM = \alpha$, $\sphericalangle DNB = \beta$ ו- $BN = \alpha$.

א. חשב את היחס $\tan\alpha : \tan\beta$.

ב. חשב את היחס $PM:DM$.

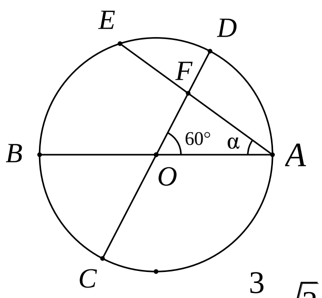


42) במעגל שמרכזו O ורדיוסו R מעבירים שני קטרים AB ו- CD הנחתכים בזווית של $60°$.

מיתר AE, היוצר זווית α עם הקוטר AB, חותך את הקוטר CD בנקודה F (ראה ציור).

א. הבע את שטח המשולש ACF באמצעות R ו- α.

ב. הוכח שכאשר $\alpha = 30°$, שטח המשולש ACF הוא $\frac{3}{8} \cdot \sqrt{3} \cdot R^2$.



תשובות סופיות:

1) א. $r=\dfrac{2R\sin(\alpha+\beta)\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\alpha}{2}}{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}=4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ ב. $\frac{1}{2}R$

2) MF = 11.28 ס"מ , KN = 21.52 ס"מ

3) א. NA = 18.385 ס"מ ב. EF = 5.975 ס"מ

4) א. $OK=\dfrac{a}{2\cos\beta}$ ב. $\dfrac{a}{2\sin\beta}\cdot\left[1+\tan\beta+\dfrac{1}{\cos\beta}\right]$

5) א. $12\cdot\tan\frac{\alpha}{2}$ ב. $24\cdot\left(1+\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2$

6) $AE=8\sin\beta\cdot\left[\tan\beta-\tan\left(\frac{1}{2}\beta\right)\right]=8\tan\beta\cdot\tan\left(\frac{1}{2}\beta\right)$

7) $2\cdot\dfrac{\tan 20^\circ}{\sin 40^\circ}=\dfrac{1}{\cos^2 20^\circ}\approx 1.132$

8) א. $-2\cdot\dfrac{\tan\alpha}{\tan 2\alpha}=-\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha-1$

ב. מתקיים: $AO=2\cdot DO$ (מפגש הגבהים הוא גם מפגש התיכונים).

9) א. $BC=r\cdot(\tan 59^\circ+\tan 67^\circ)\approx 4.02\cdot r$ ב. $r=\dfrac{16}{\tan 59^\circ+\tan 67^\circ}\approx 3.98$

10) $S=$ 147.86 סמ"ר

11) א. $\measuredangle A=16.7^\circ$, $\measuredangle D=90^\circ$, $\measuredangle C=73.3^\circ$ ב. $S\approx 0.0495\cdot R^2$

12) א. $S_1=100\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=50\cdot\sin 2\alpha$

ב. $S_2=50\cdot\sin^2\alpha\cdot\sin(180^\circ-2\alpha)=50\cdot\sin^2\alpha\cdot\sin 2\alpha$

13) א. $S=\frac{1}{2}k^2\cdot(1+2\sin\beta\cos\beta)$ (או כל תשובה שקולה). ב. 27 יח"ש.

14) א. $r\approx$ 5.548 ס"מ ב. $S\approx$ 90.45 סמ"ר

15) א. $CO=\dfrac{a}{\sin\beta}$, $CE=2a\cdot\sin\beta$ ב. $\dfrac{CO}{CE}=\dfrac{1}{2\sin^2\beta}$

ג. היחס הוא: $\frac{2}{3}$ (בדומה למפגש התיכונים במשולש)

16) א. $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}m^2\cdot\sin\alpha$ ב. $S_{\Delta BOC}=\frac{1}{2}m^2\cdot\sin\alpha\cdot\tan^2\frac{\alpha}{2}$

ג. יחס השטחים: $\tan^2\frac{\alpha}{2}$

ד. במקרה זה ABOC הוא ריבוע, ויחס השטחים שווה ל-1 $\left(\tan^2 45^\circ=1\right)$.

17) $\mathrm{AC}=x=d\cdot\frac{\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$

18) $\sphericalangle\mathrm{ODB}\approx 44.7^\circ$

19) א. $\mathrm{NP}=10.38$ ס"מ ב. $S_{\Delta PAN}=8.2$ סמ"ר

20) א. $S=800\cdot\sin^2\beta\cdot\sin 2\beta$ ב. 400 סמ"ר

21) $S_{\Delta ABC}=3\cdot\sqrt{3}\approx 5.196$ סמ"ר

22) יחס השטחים הוא: $1-4\cos^2\beta=\left(-\frac{\sin 3\beta}{\sin\beta}\right)$ או כל תשובה שקולה.

23) א. $S_{\Delta ABD}=288\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ ב. $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta\cdot\cos\alpha}$

24) $\mathrm{MQ}\approx 15.43$ ס"מ

25) $\mathrm{AB}=m\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$, $\mathrm{DC}=m\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

26) א. $\sin\alpha=\frac{1}{m}$ ב. 15° , 120° , 45° או 75° , 60° , 45°

27) $\alpha\approx 20.7$

28) א. $\sqrt{5}<k<3$ או $1<k<\sqrt{3}$ ב. $\frac{2}{3}\cdot t\approx 0.667t$

29) $\alpha=15^\circ$

30) א. $S_{\Delta MPQ}=\frac{1}{2}\cdot h^2\cdot(\tan\alpha+\tan\beta)$ ב. i. $\sphericalangle\mathrm{ESF}=180^\circ-(\alpha+\beta)$

ב. ii. $S_{\Delta EFS}:S_{\Delta MPQ}=\frac{1}{4}\cdot\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta$

31) א. $m_a=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{b^2+c^2+2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha}$ ב. $m_a=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot b$

32) א. $\sphericalangle\mathrm{BMC}=79.5^\circ$ ב. $S_{\Delta AMD}=54.1$ סמ"ר

33) א. $S_{\Delta BEF}=\dfrac{2R^2\cdot\sin^3\alpha\cdot\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}$ ב. $\alpha=45^\circ$

34) $P_{BCDE}=51.09$

35) א. $AC=\dfrac{\sqrt{3}\cdot m\cdot\sin(30^\circ+\alpha)}{2\cdot\sin(60^\circ+\alpha)\cdot\sin\alpha}$, $AB=\dfrac{m}{2\cdot\sin\alpha}$, $BD=\dfrac{\sqrt{3}\cdot m}{2\cdot\cos\alpha}$,

$CD=\dfrac{m\cdot\sin(30^\circ+\alpha)}{2\cdot\sin(60^\circ+\alpha)\cdot\cos\alpha}$ ב. הוכחה.

36) $DC=\dfrac{-b\cdot\tan\beta}{\tan 3\beta}$

37) ב. MG הוא קוטר במעגל.

38) א. $S_{\Delta ADF}=\dfrac{-2R^2\cdot\cos^3\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\alpha}{\cos(1.5\alpha)}$ ב. $\dfrac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ADF}}=-\dfrac{\cos(1.5\alpha)}{\cos(0.5\alpha)}$

ג. $\alpha=90^\circ$

40) א. $AD+BC=d$ ב. $S=\frac{1}{2}d^2\cdot\sin\beta$, $P=2d+d\sin\beta$

ג. $\beta=30^\circ$

41) א. $\tan\beta:\tan\alpha=\frac{4}{5}=0.8$ ב. $PM:DM=\frac{9}{8}=1.125$

42) א. $S=\dfrac{3R^2\cdot\sin(30^\circ+\alpha)}{4\cdot\sin(60^\circ+\alpha)}$.

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 12 - מספרים מרוכבים

תוכן העניינים

הגדרת המספר המרוכב:

סיכום כללי:

הגדרות כלליות:

ע"י הסימון: $i=\sqrt{-1}$ מגדירים את המספר מהצורה: $z=a+bi$ כמספר מרוכב בעל חלק ממשי a וחלק מדומה b. המספרים a ו- b הם ממשיים.

a נקרא הרכיב הממשי של z ומסומן גם $\text{Re}(z)$ (מלשון: Real).

b נקרא הרכיב המדומה של z ומסומן גם $\text{Im}(z)$ (מלשון: Imaginary).

שאלות:

1) רשום עם i:

א. $\sqrt{-1}=$ ב. $\sqrt{-4}=$ ג. $\sqrt{-25}=$

ד. $\sqrt{-3}=$ ה. $\sqrt{-5}=$

2) חשב:

א. $i=$ ב. $i^2=$ ג. $i^3=$

ד. $i^4=$ ה. $i^5=$ ו. $i^{17}=$

3) רשום את ערכם של a ו- b בעבור המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2+5i$ ב. $3-i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

ד. $7i$ ה. -4 ו. 0

4) כתוב מספר מרוכב z לפי הדרישות הבאות:

א. $\text{Re}(z)=-3$, $\text{Im}(z)=2$.

ב. $\text{Re}(z)=\text{Im}(z)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5) מספר מרוכב מסוים z מקיים: $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)=4$ ו- $\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Im}(z)=-1$.
מצא את z.

6) פתור את המשוואות הבאות:

א. $x^2=-1$
ב. $x^2+36=0$
ג. $x^2-2x+5=0$

7) פתור את המשוואה הבאה: $x^2+x+1=0$.

8) פתור את המשוואה הבאה: $z^2+iz+6=0$.

9) נתון: $z_1=2+3i$, $z_2=5-2i$. חשב את ערכי הביטויים המרוכבים הבאים:

א. $z_1+z_2=$
ב. $z_1-z_2=$
ג. $z_1\cdot z_2=$

10) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(-2+6i)+(1-i)$
ב. $(4+4i)-\left(3+\frac{1}{2}i\right)$
ג. $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
ד. $5-(3-2i)$
ה. $(i-3)+6i$
ו. $(i+2)-(3i-2)+(7-5i)$

11) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(1+4i)\cdot(8-2i)$
ב. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
ג. $(4i-3)\cdot(4i+3)$
ד. $i\cdot(i-1)$
ה. $(2i+3)\cdot i$
ו. $(5i-1)^2$

12) נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1=a_1+b_1i$ ו- $z_2=a_2+b_2i$.
ידוע כי z_1+z_2 הוא ממשי וכי z_1-z_2 הוא מדומה.

א. מצא קשר בין a_1 ל- a_2 וקשר בין b_1 ו- b_2.

ב. הראה כי המכפלה $z_1\cdot z_2$ היא ממשית.

תשובות סופיות:

1) א. i ב. $2i$ ג. $5i$ ד. $\sqrt{3}i$ ה. $\sqrt{5}i$.

2) א. i ב. -1 ג. $-i$ ד. 1 ה. i ו. i.

3) א. $a=2\ ,\ b=5$ ב. $a=3\ ,\ b=-1$ ג. $a=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ b=-\frac{1}{2}$
ד. $a=0\ ,\ b=7$ ה. $a=-4\ ,\ b=0$ ו. $a=0\ ,\ b=0$.

4) א. $z=-3+2i$ ב. $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

5) $z=1.5+2.5i$.

6) א. $x=\pm i$ ב. $x=\pm 6i$ ג. $x=1+2i\ ,\ 1-2i$.

7) $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

8) $z=2i\ ,\ -3i$.

9) א. $7+i$ ב. $-3+5i$ ג. $16+11i$.

10) א. $-1+5i$ ב. $1+3\frac{1}{2}i$ ג. $-\sqrt{3}i$ ד. $2+2i$ ה. $-3+7i$ ו. $11-7i$

11) א. $16+30i$ ב. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$ ג. -25 ד. $-1-i$
ה. $-2+3i$ ו. $-24-10i$.

12) א. $a_1=a_2\ ,\ b_1=-b_2$ ב. הוכחה.

המספר הצמוד:

סיכום כללי:

צמוד קומפלקסי (מרוכב):

לכל מספר מרוכב $z=a+bi$ קיים מספר צמוד המסומן ב- $\bar{z}$ וערכו: $\bar{z}=a-bi$.

שאלות:

13) רשום את המספר הצמוד של המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2+5i$ ב. $3-i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

ד. $7i$ ה. -4 ו. 0

14) חשב:

א. $\frac{11+2i}{2-i}$ ב. $\frac{3+7i}{2-5i}$ ג. $\frac{19-9i}{2-3i}$

15) נתון מספר $z=5-2i$. חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{z}$ ב. $\frac{z}{z+3}$ ג. $\frac{z+i}{z-i}$

16) המספר $\frac{3+4i}{a-i}$ הוא ממשי טהור. מצא את a.

17) נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1=a_1+b_1i$ ו- $z_2=a_2+b_2i$.

הראה כי כדי שתוצאת החילוק $\frac{z_1}{z_2}$ תהיה ממשית טהורה, צריך להתקיים: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$.

18) פתור את המשוואה הבאה: $3z-11=iz-7i$.

19) פתור את המשוואה הבאה: $iz+5=4i$.

20) פתור את מערכת המשוואות הבאה (z ו- w משתנים מרוכבים): $\begin{cases}3z+iw=5-4i\\5iz-2w=5+8i\end{cases}$.

21) פתור את המשוואות הבאות שבהן a ו- b ממשיים:

א. $2a-3i=10+bi$

ב. $3a-8+5bi=2b-ai-3i$

22) פתור את המשוואה הבאה: $2z+7i=iz+\bar{z}-3$.

23) חשב את ערכי המספרים המרוכבים הבאים:

א. $\sqrt{5-12i}$

ב. $\sqrt{8+6i}$

24) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

א. $(1-i)z^2-2z+i+1=0$.

ב. $(-2+i)z^2-(6+12i)z+10-25i=0$.

25) פתור את המשוואה הבאה: $iz^2-2(1-i)z+6+15i=0$.

26) פתור את המשוואה הבאה: $z^2-i\bar{z}+6=0$.

תשובות סופיות:

13) א. $2-5i$ ב. $3+i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ד. $-7i$ ה. -4 ו. 0.

14) א. $4+3i$ ב. $-1+i$ ג. $5+3i$.

15) א. $\frac{5}{29}+\frac{2}{29}i$ ב. $\frac{11}{17}-\frac{3}{34}i$ ג. $\frac{14}{17}+\frac{5}{17}i$.

16) $a=-\frac{3}{4}$.

17) שאלת הוכחה.

18) $z=4-i$.

19) $z=4+5i$.

20) $z=2-3i\ ,\ w=5+i$.

21) א. $a=5\ ,\ b=-3$ ב. $a=2\ ,\ b=-1$.

22) $z=-\frac{1}{2}-2\frac{1}{2}i$.

23) א. $z=\pm(3-2i)$ ב. $z=\pm(3+i)$.

24) א. $z_{1,2}=i\ ,\ 1$ ב. $z_{1,2}=-2-i\ ,\ 2-5i$.

25) $z_1=-2-5i\ ,\ z_2=3i$.

26) $z_1=-3i\ ,\ z_2=2i$.

חקירת משוואה ריבועית מרוכבת:

שאלות:

27) נתונה המשוואה הבאה: $(mi-2)z^2-2(m+2i)z+1=0$

מצא לאלו ערכים של הפרמטר המרוכב m למשוואה:

א. יש פתרון יחיד.

ב. אין פתרון.

תשובות סופיות:

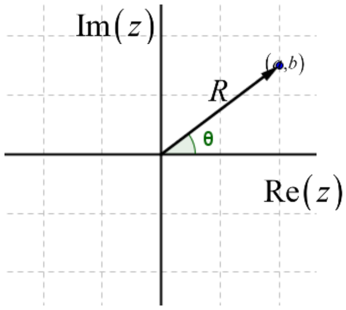
27) א. $m=-i$ ב. $m=-2i$.

מישור גאוס והצגה קוטבית של מספר מרוכב:

סיכום כללי:

ניתן לאפיין מספר מרוכב z ע"י הצגתו במישור שבו ציר ה- x מייצג את a , גודל הערך הממשי של z , וציר ה- y מייצג את b, גודל הערך המדומה של z.

מישור זה נקרא מישור גאוס ומופיע באיור הסמוך.



במישור גאוס ניתן לאפיין כל נקודה ע"י הזוג: (a,b)

או ע"י הערך המוחלט של המספר (מרחקו מ- $(0,0)$)

והזווית שלו בין הקרן החיובית של הציר הממשי לרדיוס.

הצמד הנ"ל מוגדר כהצגה קוטבית של מספר מרוכב

ויסומן: (R,θ). מספר מרוכב בהצגה קוטבית:

$z = R\cos\theta + i\cdot R\sin\theta = R(\cos\theta + i\sin\theta) = R\text{cis}\theta$.

נוסחאות ומעברים:

- מעבר מהצגה קוטבית לקרטזית (אלגברית): $\tan\theta = \frac{b}{a}$, $R=\sqrt{a^2+b^2}$.
- מעבר מהצגה קרטזית לקוטבית: $a = R\cos\theta$, $b = R\sin\theta$.
- גודל של מספר מרוכב z יסומן: $|z|$ ויחושב: $|z| = R = \sqrt{a^2+b^2}$.

פעולות חשבון בהצגה קוטבית:

- כפל מספרים מרוכבים: $z_1\cdot z_2 = (R_1\text{cis}\theta_1)\cdot(R_2\text{cis}\theta_2) = R_1R_2\text{cis}(\theta_1+\theta_2)$.
- חילוק מספרים מרוכבים: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{R_1\text{cis}\theta_1}{R_2\text{cis}\theta_2} = \frac{R_1}{R_2}\text{cis}(\theta_1-\theta_2)$.

שאלות:

28) כתוב את המספרים המרוכבים הבאים בהצגה אלגברית:

א. $2\text{cis}60^\circ$ ב. $6\text{cis}135^\circ$ ג. $4\text{cis}330^\circ$

ד. $4\text{cis}\left(-30^\circ\right)$ ה. $4\text{cis}690^\circ$ ו. $8\text{cis}90^\circ$

ז. $3\text{cis}270^\circ$ ח. $\text{cis}180^\circ$ ט. $\text{cis}0^\circ$

29) הפוך להצגה קוטבית:

א. $1+i$ ב. $\sqrt{3}-i$ ג. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

ד. $3+4i$ ה. $6i$ ו. $-i$

ז. 4 ח. -1 ט. 1

י. 0

30) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2\text{cis}120^\circ\cdot 3\text{cis}60^\circ$ ב. $\text{cis}210^\circ\cdot 5\text{cis}\left(-40^\circ\right)$

ג. $\frac{12\text{cis}315^\circ}{3\text{cis}90^\circ}$ ד. $\frac{1}{2\text{cis}40^\circ}$

ה. $6\text{cis}30^\circ+2\text{cis}210^\circ$

31) נתון המספר המרוכב $z=R\text{cis}\theta$. הבע באמצעות R ו-θ את המספרים:

א. $\bar{z}$ ב. $1/z$ ג. $-z$

ד. $-\frac{1}{z}$ ה. iz ו. $z\cdot\bar{z}$

32) הראה כי המספרים הבאים הם ממשיים טהורים:

א. $z+\bar{z}$ ב. $z\cdot\bar{z}$ ג. $\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}$

33) הראה כי המספרים הבאים הם מדומים טהורים:

א. $z^2-\bar{z}^2$ ב. $\frac{1}{\bar{z}}-\frac{1}{z}$

34) הוכח את הטענות הבאות:

א. $z-i\bar{z}=\overline{\bar{z}+iz}$ ב. $z\cdot\bar{z}=|z|^2$

35) מצא את קדקודיו של ריבוע החסום במעגל קנוני שרדיוסו $\sqrt{2}$ במישור גאוס אם ידוע שצלעותיו מקבילות לצירים.

36) ריבוע חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד מקודקודי הריבוע הוא $1+\sqrt{3}i$.
מצא את קדקודיו האחרים.

37) משולש שווה צלעות חסום במעגל קנוני במישור גאוס.
אחד מקודקודי המשולש הוא $1+\sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

38) משולש שווה שוקיים, שזווית הבסיס שלו היא $30°$ חסום במעגל קנוני במישור גאוס. קדקוד הראש של המשולש הוא $1+\sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

39) z הוא מספר מרוכב במישור גאוס הנמצא מחוץ למעגל היחידה.
קבע אם המספרים הבאים נמצאים בתוך מעגל היחידה, עליו או מחוץ לו:

א. $\bar{z}$ ב. $\frac{1}{z}$ ג. $\frac{z}{\bar{z}}$ ד. $z\cdot\bar{z}$

תשובות סופיות:

28) א. $1+\sqrt{3}i$ ב. $-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$ ג. $2\sqrt{3}-2i$ ד. $2\sqrt{3}-2i$
ה. $2\sqrt{3}-2i$ ו. $8i$ ז. $-3i$ ח. -1 ט. 1.

29) א. $\sqrt{2}\text{cis}45°$ ב. $2\text{cis}330°$ ג. $\text{cis}240°$ ד. $5\text{cis}53.13°$
ה. $6\text{cis}90°$ ו. $\text{cis}270°$ ז. $4\text{cis}0°$ ח. $\text{cis}180°$
ט. $\text{cis}0°$ י. 0.

30) א. -6 ב. $5\text{cis}170°$ ג. $4\text{cis}225°$ ד. $\frac{1}{2}\text{cis}\left(-40°\right)$
ה. $4\text{cis}30°$.

31) א. $R\text{cis}\left(-\theta\right)$ ב. $\frac{1}{R}\text{cis}\left(-\theta\right)$ ג. $R\text{cis}\left(180°+\theta\right)$
ד. $\frac{1}{R}\text{cis}\left(180°+\theta\right)$ ה. $R\text{cis}\left(90°+\theta\right)$ ו. R^2.

32) שאלת הוכחה.

33) שאלת הוכחה.

34) שאלת הוכחה.

35) $1-i\ ,\ -1-i\ ,\ -1+i\ ,\ 1+i$.

36) $\sqrt{3}-i\ ,\ -1-\sqrt{3}i\ ,\ -\sqrt{3}+i$.

37) $-2\ ,\ 1-\sqrt{3}i\ ,\ 1+\sqrt{3}i$.

38) $2\ ,\ -1+\sqrt{3}i\ ,\ 1+\sqrt{3}i$.

39) א. מחוץ למעגל. ב. בתוך המעגל ג. על המעגל
ד. מחוץ למעגל.

נוסחת דה-מואבר למציאת שורשים של מספר מרוכב:

סיכום כללי:

משפט דה-מואבר:

כדי להעלות מספר מרוכב z בחזקת n נעזר בקשר: $\left(R\text{cis}\theta\right)^n = R^n\text{cis}\left(n\theta\right)$.

שורשים של מספר מרוכב:

כדי להוציא שורש n-י של מספר מרוכב z השווה למספר מרוכב אחר $z_0 = R_0\text{cis}\theta_0$

נבצע: $1 \le k \le n$: $z^n = z_0 = R_0\text{cis}\theta_0 \,/\, \sqrt[n]{\ } \;\Rightarrow\; z_k = \sqrt[n]{R_0}\cdot\text{cis}\left(\frac{\theta_0}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)$.

שאלות:

40) חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בנוסחת דה-מואבר:

א. $\left(2\text{cis}30°\right)^3$ ב. $\left(2\text{cis}14°\right)^5$ ג. $\left(1+i\right)^4$

ד. $\left(\sqrt{3}-i\right)^3$ ה. $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12}$

41) פתור את המשוואות הבאות:

א. $z^2 = 36\text{cis}120°$ ב. $z^4 = \left(9\text{cis}80°\right)^2$ ג. $z^5 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

42) מצא את סכום ומכפלת שורשי היחידה מסדר 4.

43) נתון המספר המרוכב $z = x+iy$.

מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה: $|z| = 2$.

44) נתון המספר המרוכב $z=x+iy$.
מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה: $|z-3i|=5$.

45) נתון המספר המרוכב $z=x+iy$. מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה: $|z+i|+|\bar{z}+i|=|1+3i|$.

תשובות סופיות:

40) א. $8i$ ב. $32\text{cis}70°$ ג. -4 ד. $-8i$ ה. 1.

41) א. $z_0=6\text{cis}60°$, $z_1=6\text{cis}240°$.

ב. $z_0=3\text{cis}40°$, $z_1=3\text{cis}130°$, $z_2=3\text{cis}220°$, $z_3=3\text{cis}310°$.

ג. $z_0=\text{cis}12°$, $z_1=\text{cis}84°$, $z_2=\text{cis}156°$, $z_3=\text{cis}228°$, $z_4=\text{cis}300°$.

42) סכום: 0 , מכפלה: -1 .

43) $x^2+y^2=4$.

44) $x^2+(y-3)^2=25$.

45) $\frac{2x^2}{3}+\frac{2y^2}{5}=1$.

שאלות בסדרות עם מספרים מרוכבים:

שאלות:

46) בסדרה חשבונית האיבר השביעי הוא $a_7=13+3i$ והאיבר השלישי הוא $a_3=5-9i$. מצא את סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה.

47) בסדרה הנדסית האיבר החמישי הוא $a_5=32+16i$ והאיבר השני הוא $a_2=2-4i$.
א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת מנת הסדרה, אם נתון שמנת הסדרה היא מספר מרוכב הנמצא על הציר המדומה במישור גאוס.
ב. מצא את סכום חמשת האיברים הראשונים בסדרה.

48) נתונים שלושה איברים סמוכים בסדרה הנדסית. האיבר הראשון ביניהם הוא 2. נתון כי אם מוסיפים לאיבר השלישי $4i$ מתקבלים שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית. מצא את שלושת איברי הסדרה ההנדסית (שתי אפשרויות).

תשובות סופיות:

46) $S_{10}=100-15i$.

47) א. $a_1=2+i\ ,\ q=-2i$ ב. $S_5=20+25i$.

48) $2\ ,\ 2i\ ,\ -2$ או $2\ ,\ 4-2i\ ,\ 6-8i$.

שאלות שונות עם מספרים מרוכבים:

שאלות:

49) פתור את המשוואה: $z-\bar{z}+|z|=|2-i|^2-4i+\text{Im}(z)$.

50) פתור את המשוואה: $\left|2-3^{x^2-x-1}i\right|=\sqrt{13}$.

51) פתור את המשוואה: $z^3=\bar{z}$.

52) הוכח: אם מקדמי משוואה ריבועית הם מספרים ממשיים ואין למשוואה פתרונות ממשיים אז פתרונות המשוואה הם שני מספרים צמודים.

53) נתונים שני מספרים מרוכבים שאינם ממשיים טהורים.
הוכח: אם סכום המספרים ממשי ומכפלתם ממשית אז המספרים צמודים.

54) נתון מספר מרוכב z, שאינו ממשי טהור ואינו מדומה טהור.
הוכח כי אם $z-\frac{1}{\bar{z}}$ ממשי אז z על מעגל היחידה.

55) הוכח את הנוסחה הבאה: $R_1\text{cis}\theta_1\cdot R_2\text{cis}\theta_2=R_1R_2\text{cis}(\theta_1+\theta_2)$.

56) z הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה ברביע הראשון.
נתון: $|z^4-z^3|=\sqrt{2-\sqrt{3}}$. מצא את $\arg(z)$.

57) z הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה.
מצא את ערך הביטוי $z+iz$, אם ידוע שהוא ממשי.

58) z_1 ו- z_2 הם פתרונות המשוואה הבאה: $z^2-2\cos\theta\cdot z+1=0$.
הבע באמצעות θ את גודל הזווית $\measuredangle z_1Oz_2$ (O ראשית הצירים).

תשובות סופיות:

49) $z_1=3-4i$, $z_2=-3-4i$.

50) $x=2$, -1.

51) $z_1=0$, $z_2=i$, $z_3=-i$, $z_4=1$, $z_5=-1$.

52) שאלת הוכחה.

53) שאלת הוכחה.

54) שאלת הוכחה.

55) שאלת הוכחה.

56) $\arg(z)=30°$.

57) $z+iz=\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$.

58) 2θ.

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 13 - חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים

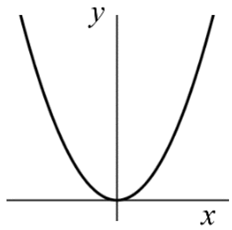
תוכן העניינים

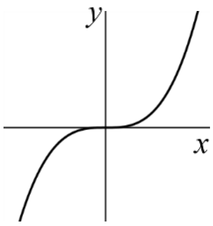
הקדמה כללית:

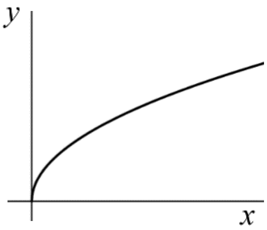
סיכום כללי:

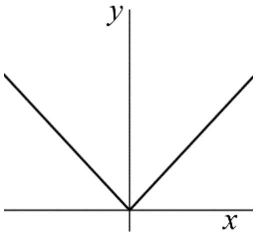
פונקציות נפוצות:

הפונקציה $f(x)=x^2$: הפונקציה $f(x)=x^3$: הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$: הפונקציה $f(x)=|x|$:

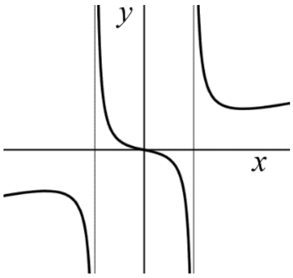








פונקציה עם מכנה, למשל: $f(x)=\dfrac{5x^3+4x}{x^2-1}$:



שיפוע של פונקציה:

- השיפוע m של פונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1,y_1)$ שעל הפונקציה הוא ערך הנגזרת בנקודה $A(x_1,y_1)$, כלומר: $m=f'(x_1)$.
- השיפוע של המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1,y_1)$ שעל הפונקציה שווה לשיפוע הפונקציה בנקודה $A(x_1,y_1)$.
- משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1,y_1)$ שעליה מתקבלת על ידי הנוסחה למציאת ישר: $y-y_1=m(x-x_1)$.

הנגזרת:

לכל פונקציה $f(x)$ קיימת פונקציה, הנקראת פונקציית הנגזרת (או רק "הנגזרת") ומסומנת $f'(x)$, המתקבלת ממנה על פי כללי הגזירה.

גזירת פונקציות:

סיכום כללי:

כללי הגזירה:

- כלל גזירה מס' 1: $f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot x^{n-1}$.
- כלל גזירה מס' 2 (כפל בקבוע): $f(x)=ax^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot ax^{n-1}$.
- כלל גזירה מס' 3 (נגזרת של קבוע): $f(x)=a \Rightarrow f'(x)=0$.
- כלל גזירה מס' 4 (סכום והפרש): $f(x)=u\pm v \Rightarrow f'(x)=u'\pm v'$.
- כלל גזירה מס' 5 (פונקציה מורכבת): $f(x)=u^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$.
- כלל גזירה מס' 6 (נגזרת של $\frac{1}{x}$): $f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.
- כלל גזירה מס' 7 (מכפלה): $f(x)=u\cdot v \Rightarrow f'(x)=u'v+v'u$.
- כלל גזירה מס' 8 (מנה): $f(x)=\frac{u}{v} \Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.
- כלל גזירה מס' 9 (שורש): $f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

שאלות:

1) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3$ ב. $f(x)=x^7$ ג. $f(x)=x^2$

ד. $f(x)=x$ ה. $f(x)=x^{-3}$ ו. $f(x)=x^{-1}$

ז. $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ ח. $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ ט. $f(x)=x^{\frac{3}{4}}$

2) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=2x^3$ ב. $f(x)=3x^7$ ג. $f(x)=\frac{1}{2}x^4$

ד. $f(x)=\frac{x^6}{7}$ ה. $f(x)=8x$ ו. $f(x)=3x^{-2}$

ז. $f(x)=\frac{4}{x}$ ח. $f(x)=6x^{\frac{1}{2}}$ ט. $f(x)=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$

3) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=12$

ב. $f(x)=\frac{7}{8}$

4) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3+2x^2-3x+5$

ב. $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{x^3}{6}+\frac{3x}{4}-\frac{2}{5}$

ג. $f(x)=7x^2+23x-6$

ד. $f(x)=6x^2+8x+4$

ה. $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x^3$

ו. $f(x)=\frac{x^4}{8}+67$

5) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x-2)^3$

ב. $f(x)=(x^3+6)^5$

ג. $f(x)=3(x-x^2)^2$

ד. $f(x)=\frac{(5-x)^3}{4}$

ה. $f(x)=\frac{2(x+1)^4}{3}$

6) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3}{x}$

ב. $f(x)=-\frac{2}{x}$

ג. $f(x)=\frac{1}{x^2}$

ד. $f(x)=\frac{3}{x^3}$

ה. $f(x)=\frac{1}{x^2-3x}$

ו. $f(x)=\frac{2}{3-x}$

ז. $f(x)=\frac{6}{x+5}$

7) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x+1)(x-3)$

ב. $f(x)=(5x+1)^3(x-3)$

ג. $f(x)=x^3(6-x)^4$

ד. $f(x)=3x^2\cdot x$

ה. $f(x)=x^2\cdot x^3$

ו. $f(x)=x(3x+7)$

ז. $f(x)=3x^3(3x-1)$

ח. $f(x)=(x-2)(2x^2+3)$

ט. $f(x)=(3x-2)(x^2+10x)$

י. $f(x)=(3x^4-4x)(2x^2+5x+2)$

יא. $f(x)=x(x-2)(3x-4)$

8) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(x^2-4)^2$
ב. $f(x)=2x^3(3x+5)^2$
ג. $f(x)=(x^3+2)^2(x-1)^3$
ד. $f(x)=(x^2+1)^3(2x-1)^2$

9) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\dfrac{3x-1}{1+2x}$
ב. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{5x-12}$
ג. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+3}$
ד. $f(x)=\dfrac{x^2+8}{x-1}$
ה. $f(x)=\dfrac{1}{x}$
ו. $f(x)=\dfrac{3}{x^3}$
ז. $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x+1}$
ח. $f(x)=\dfrac{(x^2+3)^2}{x^2-2}$
ט. $f(x)=\dfrac{x^3-x^2}{2(1-x)}$
י. $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$

10) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x}$
ב. $f(x)=4\sqrt{x+1}$
ג. $f(x)=\sqrt{x^3-1}$
ד. $f(x)=(3x+1)\sqrt{x}$
ה. $f(x)=x^2\sqrt{x+3}$
ו. $f(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x}}$

11) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x+1}$
ב. $f(x)=\sqrt{2x}$
ג. $f(x)=\sqrt{3x^2+1}$
ד. $f(x)=\sqrt{10-3x}$
ה. $f(x)=\sqrt{2x^2+7x}$
ו. $f(x)=3x^2-8\sqrt{x}$
ז. $f(x)=x^2\sqrt{1-2x}$
ח. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x}$
ט. $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x^2+4}}{2}$
י. $f(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{1-x^2}}$
יא. $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2+x-5\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$
יב. $f(x)=\sqrt{\dfrac{3-x}{x}}$
יג. $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x}}$
יד. $f(x)=\dfrac{x^2+7}{\sqrt{x^2-5}}$

טו. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-1}$ טז. $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$

12) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=ax^4-bx$ ב. $f(x)=\frac{ax^2}{3}-\frac{x}{b}+c$ ג. $f(x)=\frac{x-2a}{x-4a}$

ד. $f(x)=a\sqrt{bx^2+c}$

13) גזור פעמיים את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{x^2+2x+4}{2x}$ ב. $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{2x+10}$

ג. $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$ ד. $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

ה. $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$ ו. $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

תשובות סופיות:

1) א. $3x^2$ ב. $7x^6$ ג. $2x$ ד. 1 ה. $-\frac{3}{x^4}$ ו. $-\frac{1}{x^2}$

ז. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ח. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ט. $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$.

2) א. $6x^2$ ב. $21x^6$ ג. $2x^3$ ד. $\frac{6x^5}{7}$ ה. 8.

ו. $-\frac{6}{x^3}$ ז. $-\frac{4}{x^2}$ ח. $\frac{3}{\sqrt{x}}$ ט. $\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$.

3) א. 0 ב. 0.

4) א. $3x^2+4x-3$ ב. $x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{4}$ ג. $14x+23$ ד. $12x+8$ ה. $x-3x^2$ ו. $0.5x^3$.

5) א. $15(5x-2)^2$ ב. $15x^2(x^3+6)^4$ ג. $6(x-x^2)(1-2x)$

ד. $-\frac{3}{4}(5-x)^2$ ה. $\frac{8(x+1)^3}{3}$.

6) א. $-\frac{3}{x^2}$ ב. $\frac{2}{x^2}$ ג. $-\frac{2}{x^3}$ ד. $-\frac{9}{x^4}$ ה. $-\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2}$

ו. $\frac{2}{(3-x)^2}$ ז. $-\frac{6}{(x+5)^2}$.

7) א. $10x-14$ ב. $(5x+1)^2(20x-44)$ ג. $x^2(6-x)^3(18-7x)$.

ד. $9x^2$ ה. $5x^4$ ו. $6x+7$ ז. $36x^3-9x^2$ ח. $6x^2-8x+3$

ט. $9x^2+56x-20$ י. $36x^5+75x^4+24x^3-24x^2-40x-8$

יא. $9x^2-20x+8$.

8) א. $4x(x^2-4)$ ב. $30x^2(x+1)(3x+5)$ ג. $3(x-1)^2(x^3+2)(3x^3-2x^2+2)$

ד. $2(2x-1)(x^2+1)^2(8x^2-3x+2)$.

9) א. $\frac{5}{(1+2x)^2}$ ב. $\frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2}$ ג. $\frac{8x}{(x^2+3)^2}$ ד. $\frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$

ה. $-\frac{1}{x^2}$ ו. $-\frac{9}{x^4}$ ז. $\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$

ח. $\frac{2x(x^2+3)(x^2-7)}{(x^2-2)^2}$ ט. $-x$ י. $-\frac{1}{(x+2)^2}$.

10) א. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ב. $\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ ג. $\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$ ד. $\frac{9x+1}{2\sqrt{x}}$ ה. $\frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}}$

ו. $\frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$

11) א. $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ ב. $\frac{1}{\sqrt{2x}}$ ג. $\frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}$ ד. $-\frac{3}{2\sqrt{10-3x}}$ ה. $\frac{4x+7}{2\sqrt{2x^2+7x}}$

ו. $6x-\frac{4}{\sqrt{x}}$ ז. $\frac{2x-5x^2}{\sqrt{1-2x}}$ ח. $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$ ט. $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+4}}$ י. $\frac{1-3x}{(1-x^2)^{1.5}}$

יא. $3\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}+\frac{5}{x^2}$ יב. $-\frac{3}{2x\sqrt{3x-x^2}}$ יג. $\frac{-x^2+2x+1}{2(1-x)^{1.5}\sqrt{1+x^2}}$

יד. $\frac{x^3-17x}{(x^2-5)^{1.5}}$ טו $-\frac{x+1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$ טז. $-\frac{x+3}{2(x-1)^2\sqrt{x+1}}$.

12) א. $4ax^3-b$ ב. $\frac{2ax}{3}-\frac{1}{b}$ ג. $\frac{-2a}{(x-4a)^2}$ ד. $\frac{abx}{\sqrt{bx^2+c}}$.

13) א. $f''(x)=\frac{4}{x^3}$, $f'(x)=\frac{2x^2-8}{4x^2}$.

ב. $f''(x)=\frac{448}{(2x+10)^3}$, $f'(x)=\frac{2x^2+20x-62}{(2x+10)^2}$.

ג. $f''(x)=\frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$, $f'(x)=\frac{4x}{(x+1)^3}$.

ד. $f''(x)=\frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$, $f'(x)=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$.

ה. $f''(x)=\frac{6x}{(x+1)^4}$, $f'(x)=\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$.

ו. $f''(x)=\frac{12(x+1)(x+3)}{(x-1)^5}$, $f'(x)=-\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}$

מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה:

שאלות:

14) מצא את שיפוע הפונקציה $f(x)=2x^3-7x$ בנקודה $(2\ ,\ 2)$.

15) מצא את שיפוע הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^2-3}$ בנקודה בה $x=-2$.

16) מצא את שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=4\sqrt{x}$ בנקודה בה $x=1$.

תשובות סופיות:

14) $m=17$

15) $m=4$

16) $m=2$

מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה:

שאלות:

17) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=2(4x+3)^3$ בנקודה בה $x=-1$.

18) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{8}{x+1}$ בנקודה בה $y=2$.

19) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x)=x^2-2x-8$ בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה-x.

20) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=x^4-2x$ ששיפועו 2.

21) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{x^3+3x-1}{x^2-2}$ בנקודה שבה $x=1$.

22) נתון כי הישר $2y-3x=3$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=3\sqrt{x}$.
מצא את נקודת ההשקה.

23) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{x}$ בנקודה בה $x=1$.

24) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=3x^2-8\sqrt{x}$ בנקודה בה $x=4$.

25) נתונה הפונקציה הבאה $f(x)=4x-2\sqrt{x}$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המקביל לישר $f(x)=3x-\frac{1}{2}$.

ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה-x.

26) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{4}{\sqrt{x-1}}$ ששיפועו -2.

27) מצא את משוואות המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$ בנקודה שבה $x=2$.

28) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x)=\frac{1}{3x^3}$ היוצרים עם הכיוון החיובי של ציר ה-x זווית של $135°$.

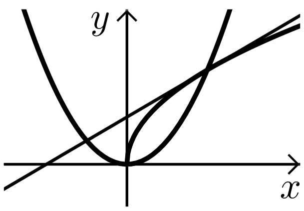
29) מצא את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות הבאות: $y=-\frac{1}{4}x^2-5$, $y=x^2$.

30) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$ ונתון הישר: $y=2x$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר הנמצאת ברביע הראשון.
ב. מצא את משוואות המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שמצאת בסעיף הקודם.
ג. חשב את השטח שנוצר בין המשיק והצירים.

31) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $g(x)=x^2$, $f(x)=\sqrt{x}$.

א. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.
ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ העובר דרך נקודת החיתוך שמצאת הנמצאת ברביע הראשון.
ג. מצא את נקודת החיתוך הנוספת של המשיק שמצאת עם גרף הפונקציה $g(x)$.



תשובות סופיות:

17) $y=24x+22$

18) $y=-\frac{1}{2}x+3\frac{1}{2}$

19) $y=6x-24$, $y=-6x-12$

20) $y=2x-3$

21) $y=-12x+9$

22) $(1\ ,\ 3)$

23) $y=-\frac{1}{2}x+2\frac{1}{2}$

24) $y=22x-56$

25) א. $y=3x-1$ ב. $\left(\frac{1}{3}\ ,\ 0\right)$

26) $y=-2x+8$

27) $y=\frac{11}{16}x-\frac{15}{8}$

28) $y=-x-1\frac{1}{3}$, $y=-x+1\frac{1}{3}$

29) $y=-2x-1$, $y=2x-1$

30) א. $(1\ ,\ 2)$ ב. $y=-1.5x+3.5$ ג. $S=4\frac{1}{12}$.

31) א. $(1\ ,\ 1)$, $(0\ ,\ 0)$ ב. $y=0.5x+0.5$ ג. $(-0.5\ ,\ 0.25)$.

שאלות עם פרמטרים:

שאלות:

32) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=ax^2-4x$ בנקודה שבה $x=3$ הוא 8.
מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

33) נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{ax}$, $(a>0)$.
המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=\frac{1}{2}$ הוא בעל שיפוע 1.
מצא את ערך הפרמטר a.

34) נתונה הפונקציה: $y=x^3+a\sqrt{x}$ (a פרמטר).
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$ הוא 5.
מצא את ערך הפרמטר a.

35) נתונה הפונקציה: $y=2\sqrt{x}-\frac{A}{x}$ (A פרמטר).
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$ הוא 2.
מצא את ערך הפרמטר A.

36) הישר $y=4x+b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x^2}+3$.
מצא את b ואת נקודת ההשקה.

37) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{2}{ax+3}$ בנקודה שבה $y=2$ הוא -4.
מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

38) הישר $y=ax+\frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x)=\frac{2}{x+c}$ בנקודה $x=0$.
מצא את ערכי הפרמטרים a ו-c.

39) הישר $y=3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=x\sqrt{x}+b$.
מצא את b ואת נקודת ההשקה.

40) שיפוע המשיק לפונקציה $f\left(x\right)=\frac{a}{\sqrt{bx-1}}$ בנקודה $\left(1\ ,\ 6\right)$ הוא 6-.
מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת משוואת המשיק.

41) לאילו ערכי k ישיק הישר $y=-5x+6$ לגרף הפונקציה $f\left(x\right)=x^3-2x^2-4x+k$?
לכל ערך כזה של k מצא את נקודת ההשקה.

42) הפונקציות $y=\frac{1}{x}$ ו- $y=-\frac{1}{2}x^2+k$ משיקות זו לזו.
מצא את k ואת נקודת ההשקה.

תשובות סופיות:

32) $a=2\ ,\ y=8x-18$
33) $a=2$
34) $a=4$
35) $\mathrm{A}=1$
36) $\left(-1\ ,\ 5\right)\ ,\ y=4x+9$
37) $a=2\ ,\ y=-4x-2$
38) $a=-\frac{1}{8}\ ,\ c=4$
39) $b=4\ ,\ \left(4\ ,\ 12\right)$
40) $b=2\ ,\ a=6\ ,\ y=-6x+12$
41) $k=6:\left(1\ ,\ 1\right)$ או: $k=\frac{158}{27}:\left(\frac{1}{3}\ ,\ \frac{13}{3}\right)$.
42) $\left(1\ ,\ 1\right)\ ,\ k=1.5$

שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית:

שאלות:

43) ענה על הסעיפים הבאים:

א. בטא באמצעות t את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=x^2+1$ בנקודה שבה $x=t$.

ב. מצא את ערכיו של t אם נתון שהמשיק עובר בנקודה $(-1,1)$.

44) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=5x-x^2$ העוברים דרך הנקודה $(3,7)$.

45) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=x^2+5x-6$ העוברים דרך הנקודה $(0,-10)$.

46) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=12x-x^3$ העוברים דרך הנקודה $(2,24)$.

47) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ העובר בנקודה $(3,0)$.

48) מצא משוואת המשיק לפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ אם ידוע ששטח המשולש שהוא יוצר עם הצירים הוא 4.5 יחידות שטח.

49) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x-2}}$ העוברים דרך הנקודה $(2,3)$.

תשובות סופיות:

43) א. $y = 2tx - t^2 + 1$ ב. $t = 0, -2$.

44) $y = -3x + 16$, $y = x + 4$

45) $y = x - 10$, $y = 9x - 10$

46) $y = -15x + 54$, $y = 12x$

47) $y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$

48) $y = -\frac{1}{16}x + \frac{3}{4}$

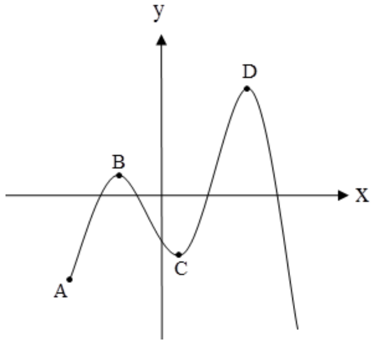
49) $y = -x + 5$

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 14 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית פולינום

תוכן העניינים

נקודות קיצון של פונקציות:



סיכום כללי:

נקודות קיצון (נקודות מינימום/מקסימום):

- מינימום או מקסימום מקומי (פנימי) – B , C , D.
- מינימום או מקסימום קצה – A.
- מינימום או מקסימום מוחלט – D.

נקודות קיצון מקומיות:

- שיפוע המשיק לפונקציה בנקודות קיצון מקומיות הוא אפס.
- בנקודה שבה שיפוע המשיק לפונקציה הוא אפס תיתכן נקודת קיצון מקומית. נקודה כזו נקראת נקודה חשודה כקיצון. ניתן לבדוק אם היא אכן נקודת קיצון.

שלבים למציאת נקודות קיצון מקומיות:

- נגזור את הפונקציה.
- נשווה את הנגזרת לאפס ונחלץ את ערכי ה-x של הנקודות החשודות כקיצון.
- נציב את ערכי ה-x מסעיף ב' בפונקציה המקורית לקבלת ערכי ה-y.
- נקבע אם הנקודה היא נקודת קיצון ונסווג את סוג הקיצון על ידי טבלה.

שאלות:

1) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)=10x-x^2$.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-12x$.

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

3) נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-10x^2+9$.

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

4) נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-4x^3+32$.

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

5) לפונקציה $f(x)=ax-x^3-5$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=-1$.
מצא את ערכו של הפרמטר a .

6) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+x^2$. ידוע שהנקודה $x=1$ נקודת קיצון.
מצא את הקבוע a

7) לפונקציה $f(x)=\mathrm{A}x^3+\mathrm{B}x^2-1$ יש נקודת קיצון ששיעוריה: $(2,3)$.
מצא את ערכי הפרמטרים A , B.

8) לפונקציה $f(x)=\mathrm{A}x^3+\mathrm{B}x^2-4x$ יש נקודת קיצון ב- $x=-1$ ו- $x=4$.
מצא את הפרמטרים ואת שיעור ה- y של שתי נקודות הקיצון.

9) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+bx^2$. ידוע שהנקודה $(1,2)$ נקודת קיצון.
מצא את הפרמטרים b , a .

10) לפונקציה $f(x)=ax^4+bx^2+35$ יש נקודת קיצון ששיעוריה $(2,3)$.
מצא את ערכי הפרמטרים b , a .

תשובות סופיות:

1) $\max(5,25)$.

2) א. $\max(-2,16)$, $\min(2,-16)$ ב. עולה: $x>2$, $x<-2$ יורדת: $-2<x<2$.

3) א. $\min\left(-\sqrt{5},-16\right)$, $\min\left(\sqrt{5},-16\right)$, $\max(0,9)$

ב. עולה: $-\sqrt{5}<x<0$, $x>\sqrt{5}$ יורדת: $0<x<\sqrt{5}$, $x<-\sqrt{5}$.

4) א. $\min(3,5)$ ב. עולה: $x>3$ יורדת: $x<3$.

5) $a=3$.

6) $a=-\frac{2}{3}$.

7) $A=-1$, $B=3$.

8) $\left(4,-18\frac{2}{3}\right)$, $\left(-1,2\frac{1}{6}\right)$, $B=-\frac{3}{2}$, $A=\frac{1}{3}$.

9) $a=-4$, $b=6$.

10) $b=-16$, $a=2$.

חקירת פונקציה פולינומית:

שאלות:

11) נתונה הפונקציה $f(x)=10x-x^2$.
חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

12) נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-12x$.
חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

13) נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-10x^2+9$.
חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

14) נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-4x^3+32$ חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

15) נתונה הפונקציה $f(x)=x^3$ חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

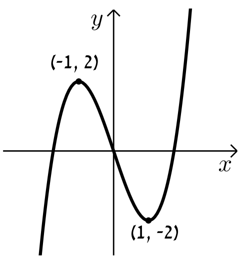
16) נתונה הפונקציה: $f(x)=2x^3-3ax^2+54x-50$.

א. לאלו ערכים של הפרמטר a עולה הפונקציה בכל תחום הגדרתה?
ב. הצב בפונקציה $a=6$ וחקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים: תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודת חיתוך עם ציר ה- y, סרטוט.

17) נתונה הפונקציה: $y=-3x^3+6x^2-4x+d$ (d פרמטר).
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה: $x=2$.

א. מצא את d.
ב. האם יש לפונקציה נקודות קיצון?
ג. כתוב את תחומי העלייה וירידה של הפונקציה.
ד. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y.
ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

18) לפניך גרף הפונקציה $f(x)=x^3-3x$:

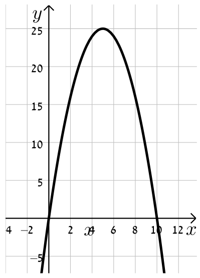


א. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=5$?
ב. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=2$?
ג. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=0.5$?
ד. עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק פתרון אחד?
ה. עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק שני פתרונות?
ו. עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק שלושה פתרונות?
ז. האם קיים ערך של k עבורו למשוואה $f(x)=k$ אין פתרון?

תשובות סופיות:

11) א. כל x ב. $\max(5,25)$ ג. עלייה: $x<5$, ירידה: $x>5$

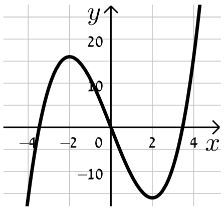
ד. $(10,0)$, $(0,0)$. ה. להלן גרף:



12) א. כל x ב. $\max(-2,16)$, $\min(2,-16)$

ג. עלייה: $x>2$, $x<-2$, ירידה: $-2<x<2$

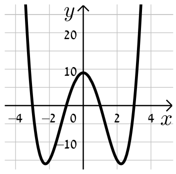
ד. $\left(-\sqrt{12},0\right)$, $\left(\sqrt{12},0\right)$, $(0,0)$. ה. להלן גרף:



13) א. כל x ב. $\min\left(-\sqrt{5},-16\right)$, $\min\left(\sqrt{5},-16\right)$, $\max(0,9)$

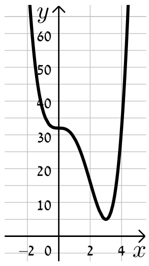
ג. עלייה: $-\sqrt{5}<x<0$, $x>\sqrt{5}$, ירידה: $x<-\sqrt{5}$, $0<x<\sqrt{5}$.

ד. $(\pm3,0)$, $(\pm1,0)$, $(0,9)$. ה. להלן גרף:



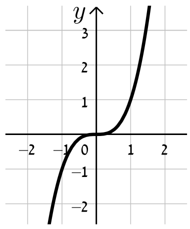
14) א. כל x ב. $\min(3,5)$ ג. תחומי עלייה: $x>3$, תחומי ירידה: $x<3$

ד. $(0,32)$. ה. להלן גרף:

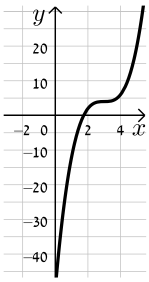


15) א. כל x ב. אין. ג. עולה לכל x

ד. $(0,0)$. ה. להלן גרף:

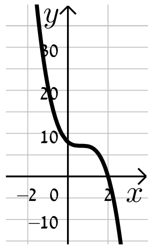


16) א. $-6<a<6$ ב. תחום הגדרה: כל x, נקודות קיצון: אין, תחומי עלייה: כל x, תחומי ירידה: אין, נקודת חיתוך עם הצירים: $(0,-50)$, להלן גרף:



17) א. $d=8$ ב. לא. ג. יורדת בתחום $x\neq\frac{2}{3}$

ד. $(0,8)$. ה. להלן גרף:



18) א. 1. ב. 2. ג. 3. ד. $k>2$, $k<-2$

ה. $k=\pm2$ ו. $-2<k<2$ ז. לא.

פונקציה זוגית ואי-זוגית:

סיכום כללי:

הגדרות:

- פונקציה $f(x)$ תיקרא זוגית אם לכל x בתחום הגדרתה מתקיים: $f(x)=f(-x)$.
- פונקציה $f(x)$ תיקרא אי-זוגית אם לכל x בתחום הגדרתה מתקיים: $f(-x)=-f(x)$.

שאלות:

1) קבע אלו מהפונקציות הבאות הן זוגיות/אי-זוגיות לא זו ולא זו:

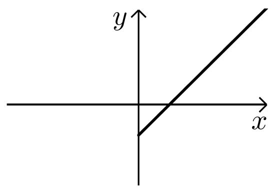
א. $f(x)=3x-5$ ב. $f(x)=3x^2$

ג. $f(x)=2x^3$ ד. $f(x)=x^3-2x^2$

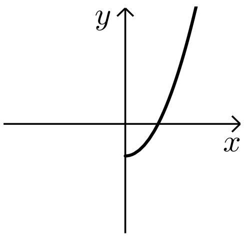
ה. $f(x)=4x^4-3x^2+1$ ו. $f(x)=4x^5-3x^3-1$

2) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x.
השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה זוגית:

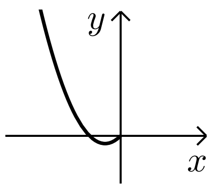
א.



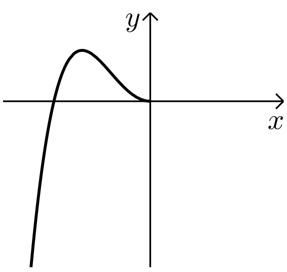
ב.



ג.

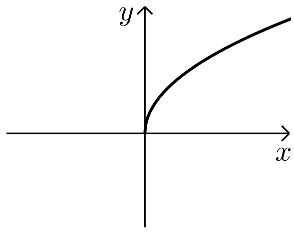


ד.

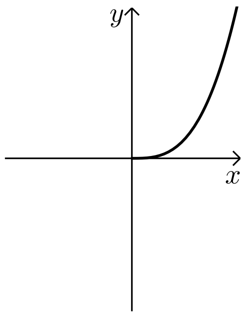


3) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x.
השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה אי-זוגית:

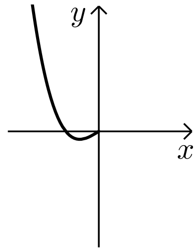
א.



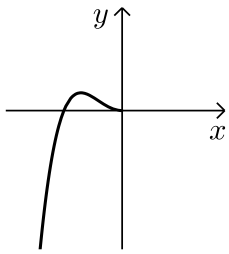
ב.



ג.



ד.



4) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=x^4-4x^2$ בתחום: $[0:3]$.

א. חקור את הפונקציה בתחום הנ"ל לפי הסעיפים הבאים:
   i. תחום הגדרה.
   ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
   iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
   iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.
   v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. הוכח כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.

ג. התבסס על ממצאיך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום: $[-3:3]$ (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-3:0]$ לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

5) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=x^6-3x^2+3$.

א. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:4]$ לפי הסעיפים הבאים:
תחום הגדרה, מציאת חיתוך עם ציר ה- y, מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה בתחום הנ"ל.

ב. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זו ולא זו?
נמק באמצעות חישוב מתאים.

ג. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שסרטטת בסעיף א', את עקום הפונקציה בתחום $[-4:0]$.

ד. הוכח כי הפונקציה חיובית לכל x בתחום הגדרתה.

6) לפניך הפונקציה: $f(x)=-2x^6+3x^4+a$, a פרמטר.
ידוע כי לפונקציה ערך מירבי של 1.

א. מצא את a וכתוב את הפונקציה $f(x)$.

ב. חקור את הפונקציה בתחום: $[-2:0]$ לפי הסעיפים הבאים:
כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים,
מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.

ג. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זה ולא זה?
נמק באמצעות חישוב מתאים.

ד. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את גרף הפונקציה בתחום: $[-2:2]$.

7) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=3x^3-9x$.

א. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:5]$ לפי הסעיפים הבאים:
כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים,
מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.

ב. הוכח כי הפונקציה היא אי-זוגית.

ג. התבסס על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום: $[-5:5]$ (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-5:0]$ לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

8) לפניך הפונקציה הבאה: $f(x)=5x^3-3x^5+b$, b פרמטר.
ידוע כי הישר $y=2x$ עובר דרך כל הנקודות על גרף הפונקציה שמקיימות: $f'(x)=0$.

א. מצא את b וכתוב את הפונקציה $f(x)$.

ב. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:2]$ לפי הסעיפים הבאים:

i. תחום הגדרה.

ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.

iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן.

iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.

v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. בדוק האם הפונקציה היא זוגית/אי-זוגית או לא זו ולא זו. נמק את קביעתך באמצעות חישוב מתאים.

ד. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה של גרף הפונקציה את הגרף בתחום $[-2:0]$.

9) נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{x^7-x}{3}$.

א. חקור את הפונקציה בתחום: $[-4:0]$ לפי הסעיפים הבאים:

i. תחום הגדרה.

ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.

iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן (בתשובתך השאר עד 2 ספרות לאחר הנקודה העשרונית).

iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.

v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? או לא זו ולא זו? נמק ע"י חישוב מתאים.

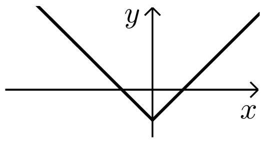
ג. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שעשית את גרף הפונקציה בתחום $[0:4]$.

תשובות סופיות:

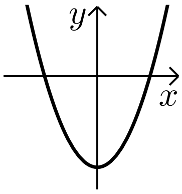
1) זוגית: ב׳, ה׳. אי-זוגית: ג׳, לא זו ולא זו: א׳, ד׳, ו׳.

2) להלן הגרפים:

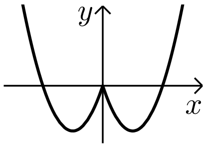
א.



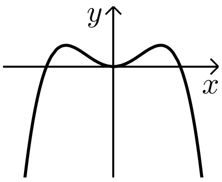
ב.



ג.

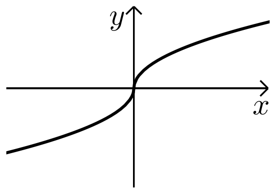


ד.

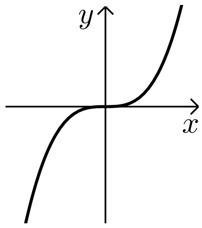


3) להלן הגרפים:

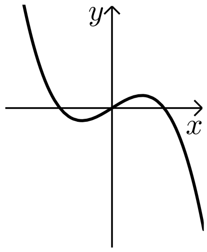
א.



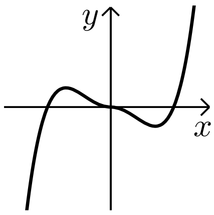
ב.



ג.

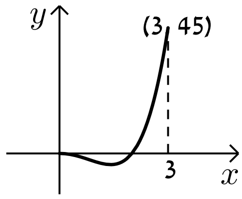


ד.

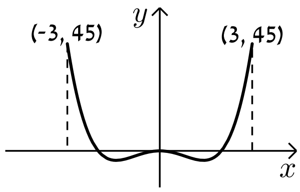


4) א. i. $0 \le x \le 3$ ii. $(0,0),(2,0)$ iii. $\max(3,45)$ קצה, $\min\left(\sqrt{2},-4\right)$, $\max(0,0)$ קצה. iv. עולה: $\sqrt{2}<x<3$, יורדת: $0<x<\sqrt{2}$ ב. סעיף הוכחה.

סרטוט עבור חלק v:



סרטוט עבור סעיף ג:



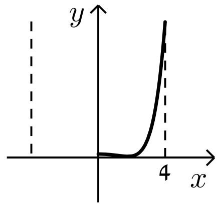
5) א. תחום הגדרה: $0 \le x \le 4$, חיתוך עם ציר ה- y: $(0,3)$,

נקודות קיצון: $\max(4,4051)$ קצה, $\min(1,1)$, $\max(0,3)$ קצה,

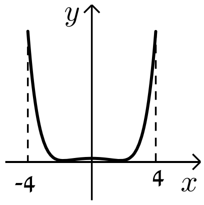
עולה: $1<x<4$, יורדת: $0<x<1$ ב. זוגית.

ד. הוכחה עפ״י הסרטוט.

סרטוט עבור סעיף א:

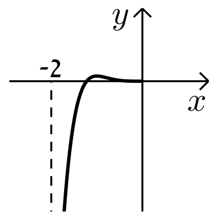


סרטוט עבור סעיף ג:

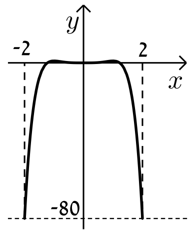


6) א. $a=0$ ב. תחום הגדרה: $-2\le x\le 0$, חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, $(-1.225,0)$, נקודות קיצון: $\min(-2,-80)$ קצה, $\max(-1,1)$, $\min(0,0)$ קצה,
עולה: $-2<x<-1$, יורדת: $-1<x<0$. ג. זוגית.

סרטוט עבור סעיף א:

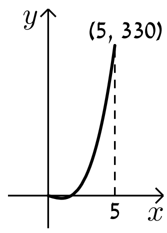


סרטוט עבור סעיף ד:

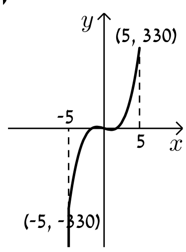


7) א. תחום הגדרה: $0\le x\le 5$, חיתוך עם הצירים: $(\sqrt{3},0)$, $(0,0)$,
נקודות קיצון: $\max(5,330)$ קצה, $\min(1,-6)$, $\max(0,0)$ קצה,
עולה: $1<x<5$, יורדת: $0<x<1$, ב. אי-זוגית.

סרטוט עבור סעיף א:



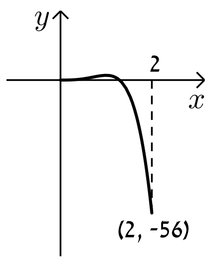
סרטוט עבור סעיף ג:



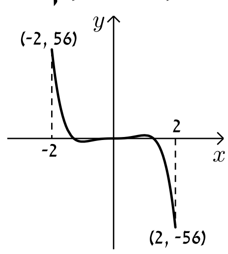
8) א. $b=0$ ב. i. $0\le x\le 2$ ii. $(0,0)$, $(1.29,0)$ iii. $\min(2,-56)$ קצה, $\max(1,2)$, $\min(0,0)$ קצה. iv. עולה: $0<x<1$, יורדת: $1<x<2$

ג. אי-זוגית.

סרטוט עבור חלק v:

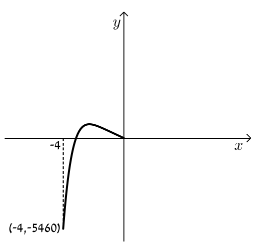


סרטוט עבור סעיף ד:

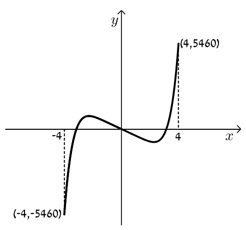


9) א. i. $-4\le x\le 0$ ii. $(-1,0)$, $(0,0)$ iii. $\min(0,0)$ קצה, $\max(-0.723,0.207)$, $\min(-4,-5460)$ קצה. iv. עולה: $-4<x<-0.723$,
יורדת: $-0.723<x<0$ ג. אי-זוגית.

סרטוט עבור חלק v:



סרטוט עבור סעיף ד:



סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 15 - חשבון דיפרנציאלי - חילוק פולינומים ופתרון משוואות פולינומיאליות

תוכן העניינים

חילוק פולינומים:

סיכום כללי:

בחילוק פולינום $p(x)$ בפולינום $q(x)$ (נכתב: $q(x)\overline{)p(x)}$) יש לבצע 4 שלבים:

1) חלוקת האיבר במעלה הגבוהה ביותר של $p(x)$ באיבר במעלה הגבוהה ביותר של $q(x)$.
2) רישום תוצאת החילוק בצד והכפלתה בכל הפולינום המחלק $q(x)$.
3) חיסור של תוצאת ההכפלה בפולינום המחולק $p(x)$.
4) חזרה לשלב הראשון כאשר מבצעים את חילוק האיבר במעלה הגבוהה ביותר של $q(x)$ בתוצאת החיסור.

התהליך מסתיים כאשר לא ניתן לחלק עוד.
במידה ותוצאת החיסור האחרונה מניבה ביטוי שמעלתו קטנה משל האיבר המחלק ב- $q(x)$ אז נתייחס לביטוי זה כאל שארית החלוקה.

שאלות:

בצע את חילוק הפולינומים הבאים:

1) $\dfrac{x^2-5x-14}{x+2}$
2) $\dfrac{x^3+x^2+3x-5}{x-1}$
3) $\dfrac{x^4+x^3-x^2+14x-3}{x+3}$
4) $\dfrac{x^3-4x^2+9}{x-3}$
5) $\dfrac{x^3+5x^2-4x-20}{x+5}$
6) $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$
7) $\dfrac{4x^4+6x^3+31x^2+99x+10}{x^2-x+10}$
8) $\dfrac{4x^2+x-1}{x-2}$

תשובות סופיות:

1) $x-7$
2) x^2+2x+5
3) x^3-2x^2+5x-1
4) x^2-x-3
5) x^2-4
6) x^2+1
7) $4x^2+10x+1$
8) $4x+9+\dfrac{17}{x-2}$

פתרון משוואות:

סיכום כללי:

משפטים כלליים:

- לכל משוואה פולינומיאלית ממעלה n יש בדיוק n שורשים.
- אם לפולינום שורש מרוכב $a+bi$ אז גם המספר הצמוד $a-bi$ הוא שורש שלו.
- יהי $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ פולינום שכל מקדמיו מספרים שלמים.
  אם לפולינום שורש שהוא מספר שלם, אז הוא מחלק את האיבר החופשי a_0.
- אם $x=a$ שורש של פולינום $p(x)$, אז הפולינום $p(x)$ מתחלק ב- $x-a$ ללא שארית.
- אם $p(x)$ פולינום ואם $p(a)=0$ וגם $p'(a)=0$ אז $x=a$ הוא שורש כפול.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $k^4+3k^3-15k^2-19k+30=0$

2) $k^3+2k^2-3k+20=0$

3) $k^5+3k^4+2k^3-2k^2-3k-1=0$

4) $k^3-6k^2+12k-8=0$

5) $k^6-3k^4+3k^2-1=0$

6) $k^3-k^2+k-1=0$

7) $k^4-3k^3+6k^2-12k+8=0$

תשובות סופיות:

1) $k_1=1\ ,\ k_2=-2\ ,\ k_3=3\ ,\ k_4=-5$

2) $k_1=-4\ ,\ k_{2,3}=1\pm 2i$

3) $k_1=1\ ,\ k_2=-1\ ,\ k_3=-1\ ,\ k_4=-1\ ,\ k_5=-1$

4) $k_1=2\ ,\ k_2=2\ ,\ k_3=2$

5) $k_1=1\ ,\ k_2=-1\ ,\ k_3=1\ ,\ k_4=-1,\ k_5=1,\ k_6=-1$

6) $k_1=1\ ,\ k_{2,3}=\pm i$

7) $k_1=1\ ,\ k_2=2\ ,\ k_{3,4}=\pm 2i$

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 16 - חשבון דיפרנציאלי - הקשר שבין גרף הפונקציה וגרף הנגזרת

תוכן העניינים

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 17 - הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות

תוכן העניינים

הפונקציה הליניארית

סיכום כללי

ניתן להציג תהליכים שונים באמצעות יחס ישר בין שני משתנים.

יחס זה מוצג בתור קו ישר מהצורה: $\frac{y}{x}=m$ או $y=mx$.

הפונקציה מהצורה: $y=mx$ מתאר יחס ישר בין x ל- y.

שאלות

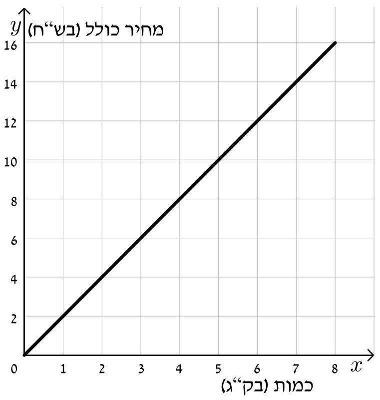
1) המחיר של 1 ק"ג עגבניות הוא 2 ₪.
הקו הישר שבסרטוט מתאר את מחיר העגבניות הכולל כפונקציה של משקל העגבניות.

א. מה המחיר של 3 ק"ג עגבניות?

ב. מהי כמות העגבניות שניתן לקנות ב-12 ₪?

ג. מהו היחס בין כמות העגבניות (בק"ג) שניתן לרכוש לבין מחירם?

ד. כתוב ביטוי אלגברי שייצג את המחיר הכולל של העגבניות כתלות במשקלם.



שיפוע ישר – סיכום

ישר שמשוואתו היא $y=mx$ הוא בעל שיפוע m כאשר:

- אם $m>0$ הישר עולה.
- אם $m<0$ הישר יורד.
- אם $m=0$ הישר קבוע (אינו עולה ואינו יורד).

חישוב שיפוע בשיטת המדרגות

בכל התקדמות של יחידה אחת לאורך ציר x נבדוק כמה יחידות עלינו או ירדנו לאורך ציר y. שיפוע הישר יתאים להתקדמות בציר ה- y.

שיפוע בין שתי נקודות

ניתן לחשב שיפוע בין שתי נקודות כלליות הנמצאות על ישר.

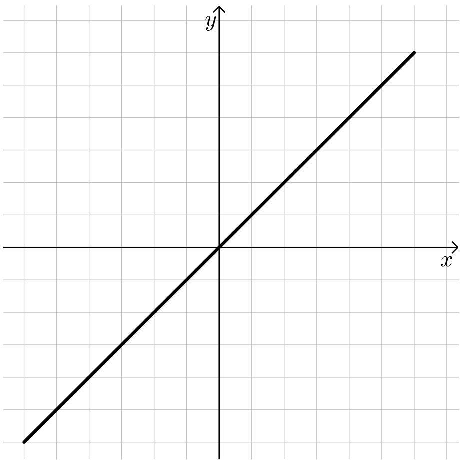
נניח ישר העובר דרך שתי נקודות $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$.

שיפוע הישר יחושב: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (כאשר $\Delta x \neq 0$).

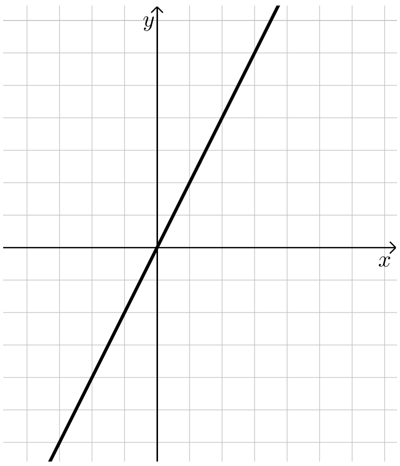
חשוב להקפיד על חיסור של אותן הנקודות במונה ובמכנה.

2) לפניך הגרפים של הישרים הבאים:

i.



ii.

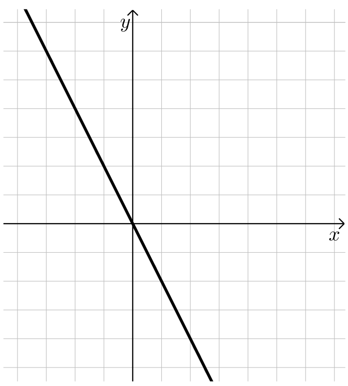


א. מצא את השיפוע של כל אחד מהם.

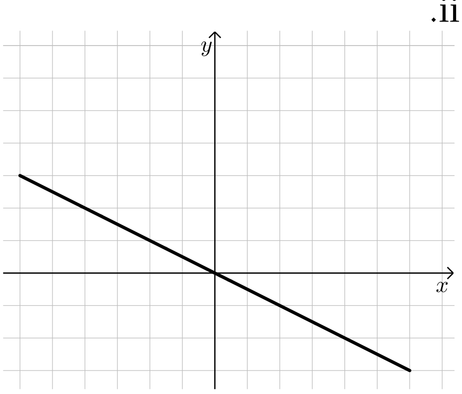
ב. רשום פונקציה מהצורה: $y = mx$ לכל אחד מהישרים.

3) לפניך הגרפים של הישרים הבאים:

i.

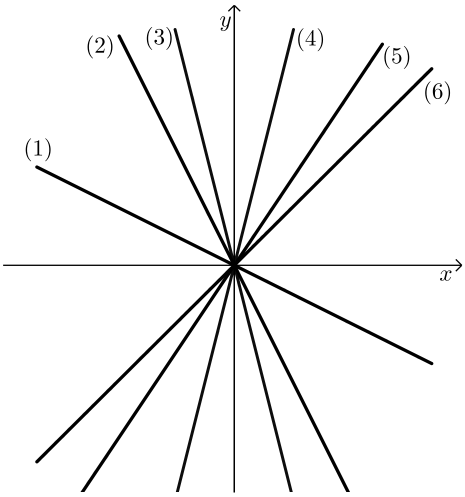


ii.



א. מצא את השיפוע של כל אחד מהם.

ב. רשום פונקציה מהצורה: $y = mx$ לכל אחד מהישרים.



4) לפניך 6 ישרים במערכת צירים אחת ו-6 שיפועים :

$-\frac{2}{3}$, 2 , -2 , 1.2 , -4 , 4 .

התאם כל שיפוע לכל ישר.

הקו הישר הכללי – סיכום

- משוואת הקו הישר הכללית היא מהצורה : $y = mx + b$
כאשר m הוא שיפוע הישר ו- b הוא האיבר החופשי כמשוואה.
- האיבר החופשי מייצג את נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y
אשר תמיד תהיה $(0,b)$.
- ישרים המקבילים זה לזה על בעלי אותו השיפוע (אותו m) ואיברים חופשיים שונים (b שונה), למשל: $y = 4x - 5$, $y = 4x + 1$.
- ישרים המקבילים לצירים הם מהצורות הבאות :
  - ישר המקביל לציר ה- x : $y = n$.
  - ישר המקביל לציר ה- y : $x = k$.

5) כתוב מהו m ומהו b במשוואות הישרים הבאות :

א. $y = 3x - 2$ ב. $y = x + 6$

ג. $y = \frac{x}{3} + \frac{2}{5}$ ד. $y = \frac{x-3}{2}$

ה. $y = 3 + 2(x - 1)$ ו. $3y - 2x + 1 = 0$

6) כתוב את משוואות הישרים הבאות :

א. ישר בעל שיפוע $m = 3$ אשר חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -1$.

ב. ישר בעל שיפוע 5- שפוגש את ציר ה- y כאשר $y = 6$.

ג. ישר קבוע שחותך את ציר ה- y ב-4-.

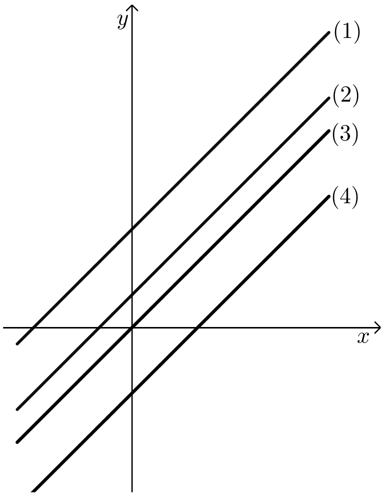
7) התאם בין הגרפים למשוואות הישרים:

א. $y=x+3$

ב. $y=x+1$

ג. $y=x$

ד. $y=x-2$



מציאת משוואת ישר – סיכום

שיפוע ישר לפי שתי נקודות

שיפוע ישר העובר דרך שתי נקודות $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$ יחושב: $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

(כאשר $\Delta x\neq 0$).

משוואת ישר

ניתן למצוא משוואת ישר מהצורה $y=mx+b$ כאשר נתונות שתי נקודות הנמצאות עליו לפי השלבים הבאים:

- מציאת הפרמטר m (שיפוע הישר) לפי: $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.
- מציאת הפרמטר b (האיבר החופשי) ע"י הצבת m ואחת מן הנקודות הנתונות במשוואת הישר.

לחילופין ניתן לבצע את שתי הפעולות יחד לפי הנוסחה: $y-y_1=m(x-x_1)$.

חישוב שיפוע בין שתי נקודות

8) חשב את השיפוע של ישר העובר דרך הזוגות הבאים:

א. $(0,4)$, $(8,0)$

ב. $(0,0)$, $(3,-4)$

ג. $(1,8)$, $(7,-9)$

ד. $\left(\frac{2}{3},2\right)$, $\left(1\frac{1}{3},5\right)$

מציאת משוואת ישר באמצעות נקודה ושיפוע

9) מצא את משוואת הישרים הבאות:

א. שיפועו 3 והוא עובר דרך הנקודה $(2,8)$.

ב. שיפועו -0.5 והוא עובר דרך הנקודה $(0,-7)$.

ג. שיפועו 0 והוא עובר דרך הנקודה $(-1,-3)$.

ד. שיפועו $-\frac{5}{8}$ והוא עובר דרך הנקודה $(-8,2)$.

ה. שיפועו 1 והוא עובר דרך ראשית הצירים.

10) מצא משוואת ישר המקביל לישר $y=3x-1$ וחותך את ציר ה- y בנקודה $(0,4)$.

11) מצא משוואת ישר המקביל לישר $y=-4x+9$ ועובר דרך הנקודה $(-5,7)$.

12) מצא משוואת ישר המקביל לישר $5y-4x+9=0$ ועובר דרך ראשית הצירים.

מציאת משוואת ישר באמצעות שתי נקודות

13) מצא את משוואות הישרים העוברים דרך הנקודות הבאות:

א. $(1,8)$, $(3,6)$

ב. $(0,6)$, $(-4,-6)$

14) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודות $(2,-6)$ ו- $(5,3)$.

ב. מצא את משוואת הישר המקביל לישר שמצאת בסעיף הקודם ועובר דרך הנקודה $(-1,10)$.

חיוביות ושליליות של קו ישר – סיכום

חיתוך של פונקציה קווית עם הצירים

- כדי למצוא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה הקווית $y=mx+b$ עם ציר ה- y יש להציב $x=0$ במשוואתה. מתקבל: $y=b$,
כלומר: $(0,b)$ היא נקודת החיתוך של הפונקציה הקווית עם ציר ה- y.
- כדי למצוא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה הקווית עם ציר ה- x יש להציב $y=0$. זו היא נקודת האפס של של הפונקציה.

חיתוך בין פונקציות קוויות

כדי למצוא את נקודת החיתוך בין שתי פונקציות קוויות $f(x)$ ו- $g(x)$ יש להשוות את משוואותיהם: $f(x)=g(x)$ ולהציב את ערך ה- x המתקבל כפתרון באחת המשוואות כדי לקבל את ערך ה- y של נקודת החיתוך.

תחומי חיוביות ושליליות של פונקציה

- תחום החיוביות של פונקציה הוא אוסף כל ערכי ה- x המקיימים: $f(x)>0$.
- תחום השליליות של פונקציה הוא אוסף כל ערכי ה- x המקיימים: $f(x)<0$.

ניתן למצוא תחומי חיוביות ושליליות ע"י ידיעת נקודת האפס של הפונקציה תחילה.

15) מצא את נקודות החיתוך של כל ישר עם הצירים:

א. $y=2x+5$

ב. $y=3x-1$

16) נתונה הפונקציה: $f(x)=3x-4$.

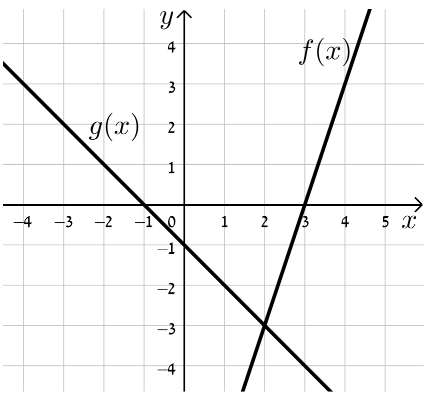
א. מצא את הנקודה שבה: $f(x)=0$.

ב. מצא את התחום שבו $f(x)>0$ ואת התחום שבו $f(x)<0$.

ג. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y.

ד. סרטט את הפונקציה במערכת צירים והראה את התחומים שמצאת.

17) לפניך שני גרפים של פונקציות קוויות.
(הרווח בין השנתות מתאר יחידה אחת).



א. מהן נקודות האפס של כל פונקציה?

ב. מהם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$?

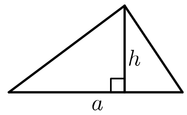
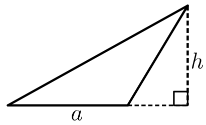
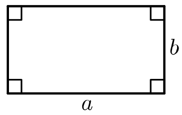
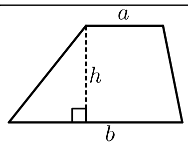
ג. מהם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$?

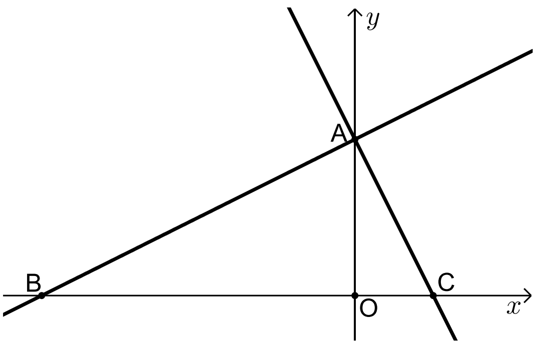
ד. מהי נקודת החיתוך של הפונקציות?

ה. מהו התחום בו $f(x)>g(x)$ ומהו התחום בו $f(x)<g(x)$.

חישובי שטחים עם הפונקציה הקווית – סיכום

שטחים של משולשים ומרובעים

שם הצורה	איור	אופן החישוב
משולש		$S=\frac{a\cdot h}{2}$
משולש קהה זווית		$S=\frac{a\cdot h}{2}$
מלבן		$S=a\cdot b$
טרפז		$S=\frac{(a+b)h}{2}$



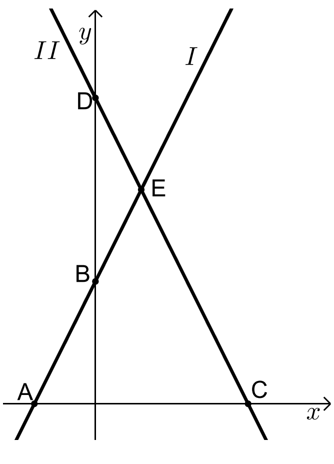
18) בסרטוט שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=\frac{1}{2}x+4$ ו- $g(x)=-2x+4$.

א. מצא את שיעורי נקודת המפגש של שתי הפונקציות (הנקודה A).

ב. מצא את נקודות החיתוך של כל פונקציה עם ציר ה- x (הנקודות B ו-C).

ג. מצא את אורך הקטע BC ואת אורך הקטע AO.

ד. חשב את $S_{\Delta ABC}$.

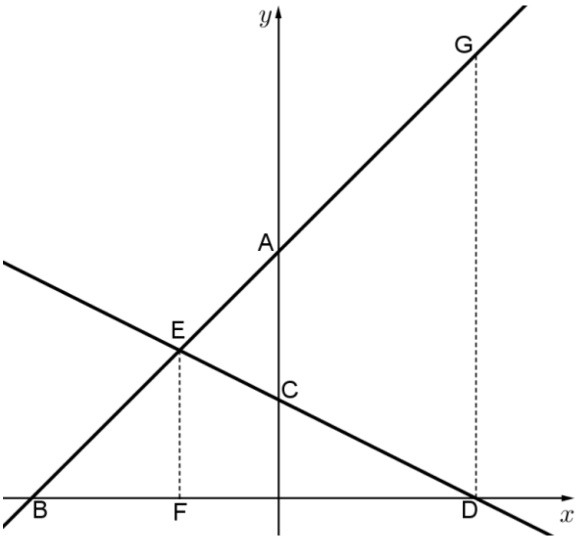


19) נתונים הישרים: $y=2x+4$ ו- $y=-2x+10$ המתוארים באיור הבא:

א. התאם לכל משוואה את הישר המתאים ונמק.

ב. מצא את שיעורי הנקודות A , B , C , D , E.

ג. מצא את שטחי המשולשים ACE ו-BDE.



20) בסרטוט שלפניך מתוארים הישרים AE ו-DE.

משוואת הישר DE היא $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

נתון כי: EF = 3 יחידות אורך

(מקביל לציר ה- y) וכן: $A(0,5)$.

א. חשב את שיעורי הנקודה E.

ב. מצא את משוואת הישר AE.

ג. חשב את שיעורי הנקודות B ו-D.

ד. נתון כי DG מקביל לציר ה- y.

חשב את שטח הטרפז EFDG.

תשובות סופיות

1) א. 6 ש״ח ב. 6 ק״מ ג. $2:1$ ד. $y=2x$

2) i. א. $m=1$ ב. $y=x$ ii. א. $m=2$ ב. $y=2x$

3) i. א. $m=-2$ ב. $y=-2x$ ii. א. $m=-\frac{1}{2}$ ב. $y=-\frac{1}{2}x$

4) $m_{(6)}=1.2$, $m_{(5)}=2$, $m_{(4)}=4$, $m_{(3)}=-4$, $m_{(2)}=-2$, $m_{(1)}=-\frac{2}{3}$

5) א. $m=3\,,\,b=-2$ ב. $m=1\,,\,b=6$ ג. $m=\frac{1}{3}\,,\,b=\frac{2}{5}$

ד. $m=\frac{1}{2}\,,\,b=-\frac{3}{2}$ ה. $m=2\,,\,b=1$ ו. $m=\frac{2}{3}\,,\,b=-\frac{1}{3}$

6) א. $y=3x-1$ ב. $y=-5x+6$ ג. $y=4$.

7) א. (1) ב. (2) ג. (3) ד. (4)

8) ג. -0.5 ד. $-\frac{4}{3}$ ה. $-2\frac{5}{6}$ ו. 4.5

9) א. $y=3x+2$ ב. $y=-\frac{1}{2}x-7$ ג. $y=-3$ ד. $y=-\frac{5}{8}x-3$

ה. $y=x$

10) $y=3x+4$

11) $y=-4x-13$

12) $y=\frac{4}{5}x$

13) א. $y=-x+9$ ב. $y=3x+6$

14) א. $y=3x-12$ ב. $y=3x+13$

15) א. $(0,5)$, $(-2.5,0)$ ב. $(0,-1)$, $\left(\frac{1}{3},0\right)$

16) א. $\left(\frac{4}{3},0\right)$ ב. $f(x)<0:\ x<\frac{4}{3}$, $f(x)>0:\ x>\frac{4}{3}$

ג. $(0,-4)$ ד. לאיור מלא עיין בסרטון.

17) א. $g(x):\ (-1,0)$; $f(x):\ (3,0)$

ב. חיובית: $x>3$, שלילית: $x<3$ ג. חיובית: $x<-1$, שלילית: $x>-1$.

ד. $(2,-3)$ ה. $f(x)>g(x)$ עבור: $x>2$, ו- $f(x)<g(x)$ עבור: $x<2$.

18) א. $(0,4)$ ב. $B(-8,0)$, $C(2,0)$ ג. $AO=4$, $BC=10$ ה. 20 יח״ש.

19) א. $I: y=2x+4\ ,\ II: y=-2x+10$

ב. $A(-2,0)\ ,\ B(0,4)\ ,\ C(5,0)\ ,\ D(0,10)\ ,\ E(1.5,7)$

ג. $S_{ACE}=$ 24.5 יח״ש , $S_{BDE}=$ 4.5 יח״ש.

20) א. $E(-2,3)$ ב. $y=x+5$ ג. $B(-5,0)\ ,\ D(4,0)$

ד. 36 יחידות שטח.

הפונקציה הריבועית

סיכום כללי

ניתן להציג את משוואת הפונקציה הריבועית במספר צורות:

הצגה סטנדרטית: $y=ax^2+bx+c$ (כאשר: $a\ ,b\ ,c$ הם פרמטרים ו-$a\neq 0$).

הצגה קודקודית: $y=a(x-p)^2+k$ (כאשר: $a\ ,p\ ,k$ הם פרמטרים ו-$a\neq 0$).

הצגה כמכפלה: $y=a(x-m)(x-n)$ (כאשר: $a\ ,m\ ,n$ הם פרמטרים ו-$a\neq 0$).

הערה

הצגה כמכפלה אפשרית רק כאשר יש לפחות נקודת אפס אחת לגרף הפרבולה.

שאלות

1) כתוב פונקציה ריבועית המתאימה לערכי המקדמים הבאים:

א. $a=1\ ,b=0\ ,c=-4$

ב. $a=-1\ ,b=2\ ,c=5$

ג. $a=b=3\ ,c=-5$

ד. $a=\frac{1}{2}\ ,b=\frac{1}{3}\ ,c=0$

ה. $a=-\frac{1}{5}\ ,b=0\ ,c=\frac{1}{20}$

ו. $a=7\ ,b=\frac{1}{4}\ ,c=-1$

2) נתונה הפונקציה: $y=2x^2+bx-3$.
ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(1,-1)$.

א. מצא את ערך המקדם b.

ב. מצא את ציר הסימטריה של הפרבולה ואת שיעורי נקודת הקדקוד שלה.

ג. תאר אלו פעולות הזזה/מתיחה נעשו על גרף הפונקציה $y=x^2$ לקבלת גרף הפונקציה הנתונה.

סרטוט של גרף הפונקציה הריבועית הכללית – סיכום

בפונקציה הריבועית הנתונה בהצגתה הסטנדרטית: $y=ax^2+bx+c$, $(a\neq 0)$:

- הפרמטר a קובע האם הפרבולה היא ישרה או הפוכה וכן את מידת המתיחה שלה.
- הפרמטר c קובע את שיעור ה- y של נקודת החיתוך של גרף הפרבולה עם ציר ה- y .
- נוסחה למציאת ציר הסימטריה: $x=-\frac{b}{2a}$.
- שיעורי נקודת הקדקוד עבור פונקציה הנתונה בהצגה סטנדרטית הם: $\left(-\frac{b}{2a},c-\frac{b^2}{4a}\right)$.

3) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

i. חשב את שיעורי נקודת הקדקוד של הפרבולה המתאימה.
ii. רשום את משוואת ציר הסימטריה של הפרבולה המתאימה.
iii. סרטט סרטוט סכמתי (מקורב) של הפרבולה המתאימה.

א. $y=-2x^2+10$ ב. $y=-x^2+3x$

ג. $y=3x^2-6x+7$ ד. $y=-8x^2-4x+1$

ה. $y=4x^2+20x+25$

מציאת נקודות האפס של פונקציה ריבועית עם a כללי – סיכום

פונקציות ריבועיות חלקיות

- פונקציה חסרת b היא מהצורה: $y=ax^2+c$, $(a\neq 0)$.

  אם a ו- c אם שוני סימן אז לפונקציה שתי נקודות אפס ששיעוריהן: $\left(\pm\sqrt{\frac{-c}{a}},0\right)$.

- פונקציה חסרת c היא מהצורה: $y=ax^2+bx$, $(a\neq 0)$.

  לפונקציה שתי נקודות אפס ששיעוריהן: $\left(-\frac{b}{a},0\right)$, $(0,0)$.

שיטות לפתרון משוואה ריבועית

- פירוק טרינום (במידה וישנם שני שורשים או שורש כפול).
- השלמה לריבוע.
- נוסחת השורשים: $\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$

שאלות עם פונקציות

4) מצא את נקודות החיתוך עם ציר ה- x של הפונקציות הריבועיות הבאות:

א. $y=x^2+4x-5$ ב. $y=x^2+6x+10$

5) בכל אחד מהמקרים שלפניך נתון ציר הסימטריה של פרבולה ושיעורי אחת מנקודות האפס שלה. מצא את שיעורי נקודת האפס הנוספת.

א. $x=4\ ;\ (5,0)$ ב. $x=-1\ ;\ (7,0)$

6) נתונה הפונקציה: $y=x^2-2x-15$.

א. מהם שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפרבולה עם ציר ה- y ?

ב. רשום פונקציה ריבועית נוספת בעלת אותה נקודת חיתוך עם ציר ה- y.

ג. מהם שיעורי נקודות האפס של הפרבולה?

ד. כמה נקודות חיתוך יש לפרבולה עם הישרים הבאים:

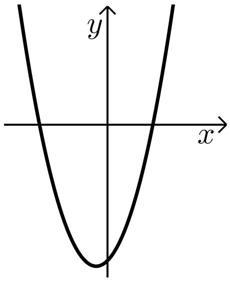
i. $y=-15$.

ii. $y=15$.

iii. $y=-25$.

ה. רשום פונקציה ריבועית נוספת שיש לה את אותן נקודות האפס כמו לפונקציה הנתונה.

7) לפניך הפרבולה: $y=x^2+x-6$.

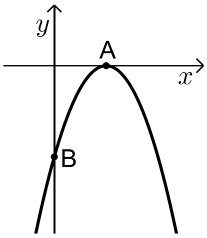


א. חשב את נקודות החיתוך של הפרבולה עם הצירים.

ב. חשב את המרחק של נקודת החיתוך של הפרבולה עם ציר ה- y מראשית הצירים.

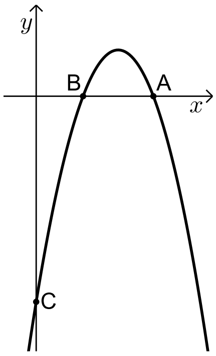
ג. חשב את המרחק שבין שתי נקודות החיתוך עם ציר ה- x.

8) לפניך סרטוט של גרף הפונקציה: $y=-x^2+4x-4$.



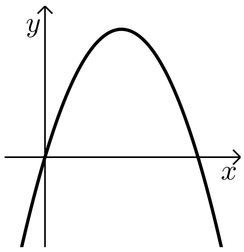
א. מצא את נקודות החיתוך של הגרף עם הצירים.
ב. מצא את מרחק הנקודה A (ראה ציור) מראשית הצירים.
ג. מצא את מרחק הנקודה B מראשית הצירים.

9) לפניך סרטוט של גרף הפונקציה: $y=-x^2+7x-10$.

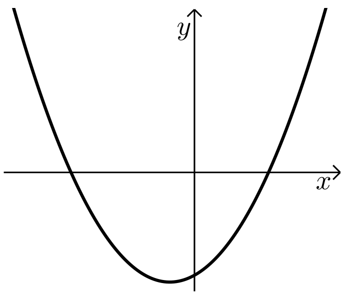


א. חשב את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
ב. חשב את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
ג. מהו המרחק בין הנקודה C לראשית הצירים?
ד. מצא את המרחק בין נקודה A לנקודה B (ראה סרטוט).
ה. מצא את המרחק בין נקודה A לראשית הצירים.

10) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפרבולה שמשוואתה: $y=-x^2+4x$.



11) נתונה הפרבולה: $y=-2x^2+12x$.
א. מצא את שיעורי קדקוד הפרבולה.
ב. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפרבולה.



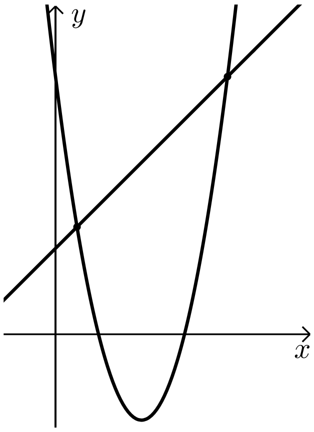
12) נתונה הפרבולה: $y=x^2+2x-15$.
א. לאלו ערכים של x הפונקציה חיובית?
ב. לאלו ערכים של x הפונקציה שלילית?

חיתוך בין ישר ופרבולה – סיכום

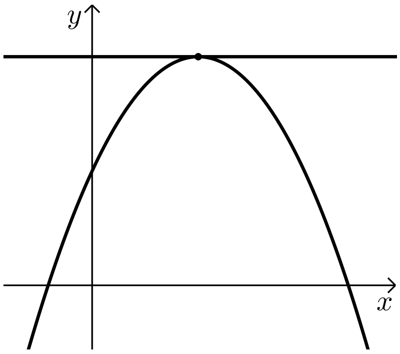
כדי למצוא חיתוך בין ישר $y=mx+b$ ופרבולה: $f(x)=ax^2+bx+c$ אנו נשווה בין משוואותיהם ונפתור עבור x . לאחר מכן נמצא את שיעורי ה- y ע"י הצבה באחת המשוואות (של הישר או הפרבולה). יתכנו 3 מקרים:

- הישר חותך את הפרבולה בשתי נקודות שונות.
- הישר חותך (משיק) לגרף הפרבולה בנקודה אחת בלבד.
- הישר והפרבולה לא חותכים זה את זה כלל.

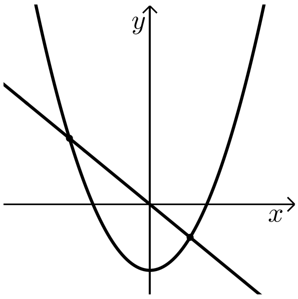
13) לפניך הגרפים של שתי הפונקציות:
$f(x)=x^2-8x+12$ ו- $g(x)=x+4$
מצא את נקודות החיתוך שבין שני הגרפים.



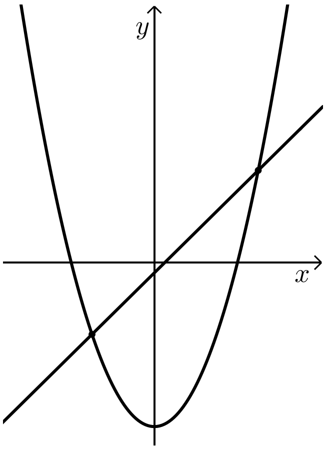
14) מצא את שיעורי הנקודה המשותפת
לגרף הפרבולה $f(x)=-x^2+10x+25$
ו- $y=50$.



15) נתונים פרבולה $y=x^2-8$ וישר $y=-2x$.
א. מצא את נקודות החיתוך בין גרף הפרבולה והישר.
ב. מצא נקודת החיתוך של הפרבולה עם ציר ה- y
ואת נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y.
ג. מצא את המרחק שבין נקודת החיתוך של גרף הפרבולה
עם ציר ה- y לבין נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y.
ד. מצא את קדקוד הפרבולה.
ה. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפרבולה.



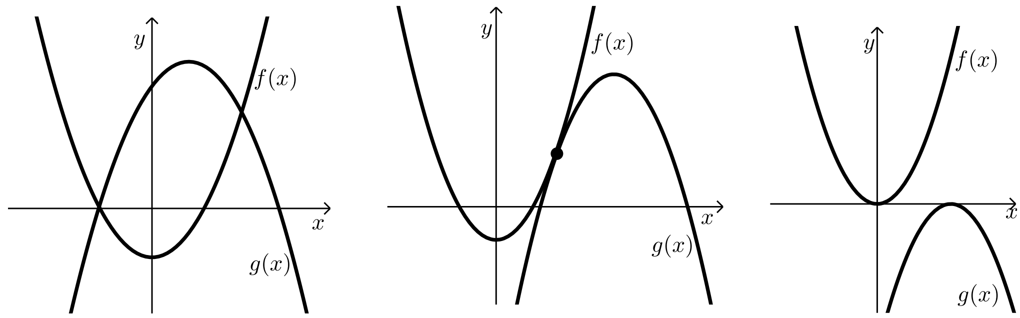
16) נתונים פרבולה וישר שהמשוואות שלהם: $y=x^2-16$ ו- $y=2x-1$.
א. מצא את נקודות החיתוך שבין הישר והפרבולה.
ב. תן דוגמא ל- x עבורו הישר נמצא מעל לפרבולה.
ג. תן דוגמא ל- x עבורו הפרבולה נמצאת מעל לישר.
ד. תן דוגמא לנקודה על הפרבולה שערך ה- y שלה חיובי.
ה. תן דוגמא לנקודה על הפרבולה שערך ה- y שלה שלילי.
ו. מצא את נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- x.
ז. מצא את תחום השליליות של הישר.



חיתוך בין שתי פרבולות – סיכום

הגרפים של שתי פרבולות $f(x)$ ו-$g(x)$ יכולים להיות באחד משלושה מצבים:

אין חיתוכים | **נקודת חיתוך (השקה) אחת** | **שתי נקודות חיתוך**



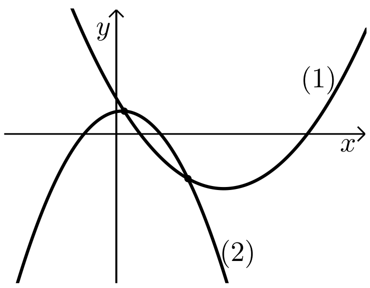
כדי למצוא את נקודות החיתוך עצמן נשווה בין משוואותיהם: $f(x)=g(x)$.
לפי מספר הפתרונות של המשוואה המתקבלת נוכל להסיק באיזה מקרה מדובר.

17) מצא את נקודות החיתוך בין זוגות הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^2+4x+5$ ו- $g(x)=-2x^2+x+11$.

ב. $f(x)=x^2-3x+6$ ו- $g(x)=-x^2+5x-2$.

18) לפניך סרטוט של שתי פונקציות ריבועיות:
$f(x)=x^2-9x+8$ ו-$g(x)=-2x^2+x+5$.



א. התאם לכל גרף (1) ו-(2) את הפונקציה המתאימה לו.

ב. מה הם תחומי החיוביות והשליליות של גרף (1)?

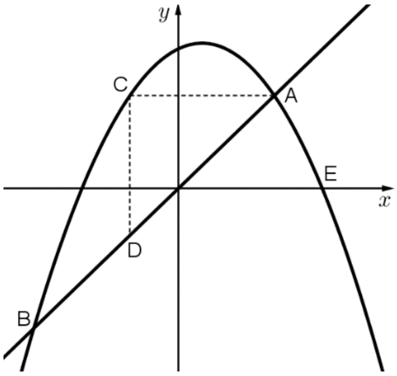
ג. מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

שאלות מסכמות שונות

הערה כללית

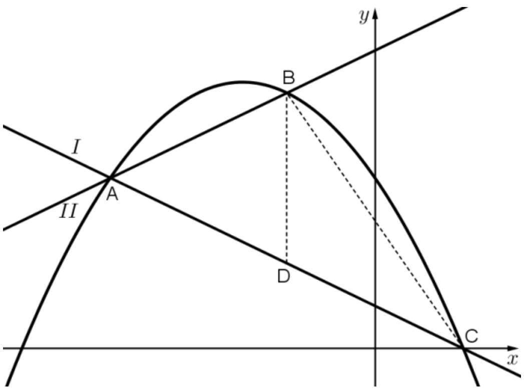
בנושא זה ישנן שאלות מסכמות העוסקות בכל הנושאים שנלמדו בפרקים על הישר, הפרבולה וחישובי שטחים של צורות הנדסיות. שאלות אלו ברמה הגבוהה משאלות בגרות ומטרתן היא תרגול העשרה של כל החומר הנלמד בפונקציות וגרפים.

19) בסרטוט שלפניך מתוארים
הישר: $y = 2x$ והפרבולה: $y = -x^2 + x + 6$.



א. חשב את שיעורי נקודות החיתוך של הישר והפרבולה, A ו-B.
ב. הישר AC מקביל לציר ה-x והישר CD מקביל לציר ה-y.
חשב את שטח המשולש ACD.
ג. מצא את משוואת הישר המקביל לישר הנתון ועובר דרך הנקודה E, נקודת החיתוך של גרף הפרבולה עם ציר ה-x הנמצאת מימין לראשית הצירים.

20) בסרטוט שלפניך מתוארים הגרפים של שני ישרים I ו-II.
ושל הפרבולה $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x + 8$.



שני הישרים והפרבולה נחתכים בנקודה A.
משוואת הישר II היא: $y = x + 14$.
ד. חשב את שיעורי הנקודה A.
ה. חשב את שיעורי הנקודה C, נקודת החיתוך של גרף הפרבולה עם ציר ה-x הנמצאת מימין לראשית הצירים.
ו. מצא את משוואת הישר I.
ז. חשב את שיעורי הנקודה B.
ח. הקטע BD מקביל לציר ה-y וחותך את ישר I בנקודה D.
חשב את שטח המשולש BCD.

21) נתונות שתי הפרבולות: $y = x^2 - x + 6$ ו-$y = ax^2 - 6x - 8$, $a \neq 0$ פרמטר.
ט. לשתי הפרבולות נקודת חיתוך משותפת: $(-2,12)$.
מצא את ערך הפרמטר a.
י. מצא את נקודת החיתוך שנייה של שתי הפרבולות.
יא. סרטט סקיצה של גרף הפרבולה: $y = x^2 - x + 6$.
(היעזר בנקודות החיתוך עם הצירים ובקדקוד הפרבולה).

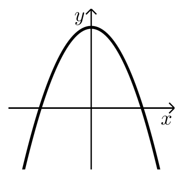
תשובות סופיות

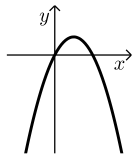
1) א. $y=x^2-4$ ב. $y=-x^2+2x+5$
ג. $y=3x^2+3x-5$ ד. $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x$
ה. $y=-\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{20}$ ו. $y=7x^2+\frac{1}{4}x-1$.

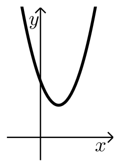
2) א. $b=0$ ב. $x=0$, $(0,-3)$ ג. כיווץ פי 2 והזזה 3 יחידות למטה.

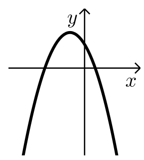
3) א. $(0,10)$, $x=0$ ב. $\left(1\frac{1}{2},2\frac{1}{4}\right)$, $x=1\frac{1}{2}$ ג. $(1,4)$, $x=1$
ד. $\left(-\frac{1}{4},1\frac{1}{2}\right)$, $x=-\frac{1}{4}$ ה. $(-2.5,0)$, $x=-2.5$

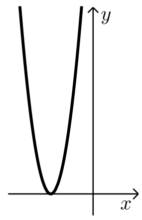
איורים לסעיפים:

א.


ב.


ג.


ד.


ה.


4) א. $(-5,0)$, $(1,0)$ ב. אין חיתוכים.

5) א. $(3,0)$ ב. $(-9,0)$ ג. $(8,0)$ ד. $\left(-15\frac{1}{2},0\right)$.

6) א. $(0,-15)$ ב. $y=x^2-15$ ג. $(-3,0)$, $(5,0)$
ד. i. שתיים. ii. שתיים. iii. אפס. ה. $y=2x^2-4x-30$.

7) א. $(2,0)$, $(-3,0)$ ב. 6 יחידות. ג. 5 יחידות.

8) א. $(0,-4)$, $(2,0)$ ב. 2 יחידות. ג. 4 יחידות.

9) א. $(5,0)$, $(2,0)$ ב. $(0,-10)$ ג. 10 יחידות. ד. 3 יחידות.
ה. 5 יחידות.

10) עולה: $x<2$, יורדת: $x>2$.

11) א. $(3,18)$ ב. עולה: $x<3$, יורדת: $x>3$.

12) א. $x<-5$, $x>3$ ב. $-5<x<3$.

13) $(1,5)$, $(8,12)$

14) $(5,50)$.

15) א. $(-4,8)$, $(2,-4)$ ב. $(0,-8)$, $(0,0)$ ג. 8 יחידות.
ד. $(0,-8)$ ה. עולה: $x>0$, יורדת: $x<0$.

16) א. $(-3,-7)$, $(5,9)$ ב. כל x הגדול מ-5 או קטן מ-3-.
ג. כל x שבין 3- ל-5. ד. כל נקודה שערך ה-x שלה גדול מ-4 או קטן מ-4-.
ה. כל נקודה שערך ה-x שלה בין 4- ל-4. ו. $(0.5,0)$ ז. $x<0.5$

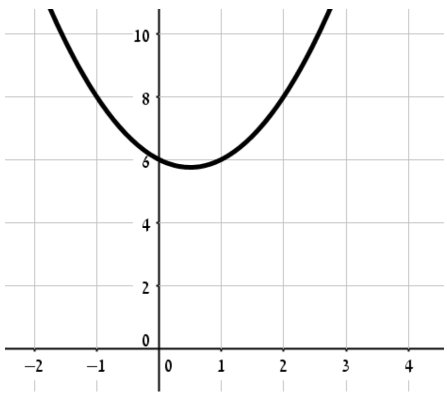
17) א. $(-2,1)$, $(1,10)$ ב. $(2,4)$

18) א. $(2)\to g(x)$, $(1)\to f(x)$
ב. חיובית: $x>8$, $x<1$, שלילית: $1<x<8$. ג. $\left(\frac{1}{3},5\frac{1}{9}\right)$, $(3,-10)$.

19) א. $A(2,4)$, $B(-3,-6)$ ב. 4.5 יחידות שטח. ג. $y=2x-6$.

20) א. $A(-6,8)$ ב. $C(2,0)$ ג. $y=-x+2$
ד. $B(-2,12)$ ה. 16 יחידות שטח.

21) א. $a=2$ ב. $(7,48)$.
ג. להלן סקיצה:



סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 18 - חדו"א לכלכלנים - פתרון מלא למבחן לדוגמה מתאריך 6.9.07

תוכן העניינים

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 19 - חדו"א לכלכלנים - פתרון מלא למבחן לדוגמה מתאריך 19.11.07

תוכן העניינים

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 20 - חדו"א לכלכלנים - פתרון שאלות אמריקאיות מבחינות סמסטר א 07

תוכן העניינים

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 21 - חדו"א לכלכלנים - פתרון שאלות אמריקאיות מבחינות סמסטר ב 07

תוכן העניינים

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 22 - חדו"א לכלכלנים - פתרון שאלות אמריקאיות מבחינות ג 07 ו-א 08

תוכן העניינים

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 52 - מטריצות

תוכן העניינים

מטריצות

שאלות

1) נתונות המטריצות הבאות : $A_{4\times6}, B_{4\times6}, C_{6\times2}, D_{4\times2}, E_{6\times4}$.
קבעו אילו מבין המטריצות הבאות מוגדרות.
במידה והמטריצה מוגדרת, רשמו את סדר המטריצה :

א. $A+B$ ב. AB ג. $AC-D$ ד. $AE-B$

ה. $B+AB$ ו. $E(B+A)$ ז. $(E+A^T)D$ ח. E^TB

ט. $E(AC)$ י. $E(B-A)$

2) מצאו את x,y,z , אם ידוע כי $\begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix}$.

בשאלות **3-8** נתונות המטריצות הבאות :

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix},\quad I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשבו (במידה וניתן) :

3) א. $E+D$ ב. $E-D+I_3$
ג. $5C$ ד. $2D+4EI_3$

4) $2tr\left(D^2-2E\right)$

5) א. $4C^T+A$ ב. $\frac{1}{2}A^T+\frac{1}{4}C$

6) I_2BC

7) $tr\left(C^TC\right)$

8) $DABC$

תשובות סופיות

1) א. 4×6 ב. לא. ג. 4×2 ד. לא. ה. לא.
ו. 6×6 ז. 6×2 ח. לא. ט. 6×2 י. 6×6

2) $(x,y,z)=(2,1,-1)$

3) א. $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}$ ד. $\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

4) 230

5) א. $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}$

7) 63

8) $\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}$

מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות

שאלות

מטריצה ריבועית A תיקרא סימטרית אם $A^T = A$, ואנטי-סימטרית אם $A^T = -A$.

1) ידוע ש-A מטריצה ריבועית.
מי מבין הבאים נכון (אחד או יותר):
.1 AA^T סימטרית. .2 $A+A^T$ סימטרית. .3 $A-A^T$ אנטי-סימטרית.

2) ידוע ש-A ו-B אנטי-סימטריות מאותו סדר.
מי מבין הבאים נכון:
.1 $BABABA$ אנטי-סימטרית. .2 A^2-B^2 סימטרית. .3 A^2+B סימטרית.

3) ידוע ש-A ו-B סימטריות מאותו סדר ונתון כי $AB=-BA$.
מי מבין הבאים נכון:
.1 AB^3 אנטי-סימטרית. .2 AB^2 סימטרית. .3 $(A-B)^2$ סימטרית.

4) ידוע ש-A סימטרית ו-B אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי $AB=BA$.
הוכיחו: .1 AB אנטי-סימטרית. .2 $AB+B$ אנטי-סימטרית.

5) נתון: A, B, AB סימטריות מאותו סדר.
הוכיחו כי $A^4B^4 = B^4A^4$.

תשובות סופיות

1) 1,2,3
2) 2
3) 1,2,3
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.

המטריצה ההופכית

שאלות

בשאלות **1-6** מצאו את ההפוכה של כל מטריצה.
בדקו את התשובה על ידי כפל מטריצות מתאים.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **6)** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

7) עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 \\ 3 & -1 & k+3 \end{pmatrix}$ <u>הפיכה</u>?

הניחו שהמטריצות בשאלות **8-10** הן הפיכות מסדר n, וחלצו את המטריצה X :

8) א. $AXC = D$ ב. $A^{-1}XC = A^{-1}DC$ ג. $P^{-1}X^TP = A$

9) א. $C^{-1}(A+X)D^{-2} = I$ ב. $(A-AX)^{-1} = X^{-1}C$

10) $ABC^TX^{-1}BA^TC = AB^T$

11) נתון $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.

חשבו את המטריצה X, אם ידוע כי $B^2X(2B)^{-1} = B+I$.

12) נתון $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. חשבו את המטריצה Y, אם ידוע כי $BYB^T = B^{-1}+B$.

13) נתון $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

חשבו את המטריצה B, אם נתון בנוסף כי: $5A^TB(I+2A)^{-2} = (7A)^{-2}$.

14) בסעיפים הבאים מצאו מטריצות A, $\underline{x}$ ו- $\underline{b}$, המבטאות את מערכת המשוואות הנתונה ע"י המשוואה היחידה $A\underline{x}=\underline{b}$:

א.
$$\begin{aligned}2x+y-z&=3\\x+2y-4z&=5\\6x+4y+z&=2\end{aligned}$$

ב.
$$\begin{aligned}2x-3y+z+t&=1\\4x+y+2z&=4\\y+z+t&=1\\x-4z-2y&=10\end{aligned}$$

15) פתרו את המערכת הבאה בעזרת המטריצה ההפוכה : $\begin{aligned}2x-y+z&=3\\3x-2y+2z&=5\\5x-3y+4z&=11\end{aligned}$.

16) פתרו את המערכת הבאה בעזרת המטריצה ההפוכה : $\begin{aligned}x+4y+2z+4t&=1\\x+2y-z&=0\\y+z+t&=1\\x+3y-z-2t&=0\end{aligned}$.

תשובות סופיות

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

7) $k \neq 1,\ k \neq -2$

8) א. $A^{-1}DC^{-1}$ ב. D ג. $\left(P^{-1}\right)^T A^T P^T$

9) א. $CD^2 - A$ ב. $\left(A+C^{-1}\right)^{-1} A$

10) $BA^T C(B^{-1})^T BC^T$

11) $X = 4\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

12) $Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix}$

13) $B = \frac{1}{245}\begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix}$

14) א. $\underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

ב. $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

15) $(x,y,z) = (1,2,3)$

16) $(x,y,z,t) = (-13,4,-5,2)$