

מתמטיקה בדידה



תוכן העניינים

1	1. תורת הקבוצות
15	2. עוצמות
20	3. לוגיקה
34	4. אינדוקציה
36	5. קומבינטוריקה בסיסית

מתמטיקה בדידה

פרק 1 - תורת הקבוצות

תוכן העניינים

1. מבוא לתורת הקבוצות..... 1
2. פעולות על קבוצות..... 2
3. דיאגרמת ון..... 4
4. שאלות הוכחה..... 6
5. קריאת קבוצות..... 8
6. דרך השלילה..... 10
7. קבוצת חזקה..... 11
8. מכפלה קרטזית..... 13

מבוא לתורת הקבוצות

שאלות

1) לגבי כל אחד מהממדים הבאים רשמו ב-□ את הסימן המתאים, $\in, \notin, \subseteq, \subset, \supseteq, \supset, \neq$. שימו לב שתיתכן יותר מתשובה אחת. אם התשובה היא \neq , נמקו.

א. $1 \square \{1, \{1\}\}$ ב. $\{1\} \square \{1, \{1\}\}$ ג. $\{8, \emptyset\} \square \{1, 2, 8\}$

ד. $\emptyset \square \{1, 2\}$ ה. $\emptyset \square \{\emptyset, 1, 2\}$

ו. $\{2\} \square \{\{1, \{2\}\}\}$ ז. $\{2\} \square \{2, \{2, \{2\}\}\}$

ח. $\{2\} \square \{2, \{2\}, \{\{2\}\}\}$ ט. $\{2\} \square \{2, \{2, \{2\}\}, \{2\}\}$

י. $\{\{2, \emptyset\}\} \square \{2, \{2\}, \{\{2\}\}\}$ יא. $\emptyset \square \{1, \{\emptyset\}\}$

יב. $\{\emptyset\} \square \{1, \{\emptyset\}\}$ יג. $\{1, 2\} \square \{1, \{2\}\}$

יד. $1 \square \mathbb{N}$ טו. $\{1\} \square \mathbb{N}$

טז. $1 \square \{\mathbb{N}\}$ יז. $\{1\} \square \{\mathbb{N}\}$

תשובות סופיות

1) א. \in ב. \in, \subseteq, \subset ג. \notin, \supseteq ד. \in, \subseteq, \subset ה. \in, \subseteq, \subset
 ו. \notin, \supseteq ז. \in, \subseteq, \subset ח. \in, \subseteq, \subset ט. \in, \subseteq, \subset י. \notin, \supseteq
 יא. \in, \subseteq, \subset יב. \in, \supseteq יג. \notin, \supseteq יד. \in, \notin טו. \in, \subseteq, \subset
 טז. \notin יז. \notin, \supseteq

פעולות על קבוצות

שאלות

(1) עבור $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}, C = \{1, 4, 6\}$ חשבו את הקבוצות הבאות:

א. $(A \cup C) \setminus B$

ב. $(A \cap B) \cup C$

ג. $A \cap (B \cup C)$

ד. $P(A)$

ה. $C \setminus A$

(2) עבור $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}, C = \{1, 4, 6\}$:

א. האם $B \subseteq C$?

ב. האם $\{1\} \subseteq B$?

ג. האם $\{1\} \subseteq A$?

ד. האם $\{1\} \in P(A)$?

ה. האם $\{1\} \subseteq P(A)$?

ו. האם $\{\{1\}\} \subseteq P(A)$?

ז. האם $\{\{1\}, \emptyset\} \subseteq P(A)$?

(3) עבור $A = \{1, \{3, *\}, \emptyset\}, B = \{4, \emptyset\}$ חשבו:

א. $A \cup B$

ב. $A \cap B$

ג. $A - B$

ד. $B - A$

ה. $A \oplus B$

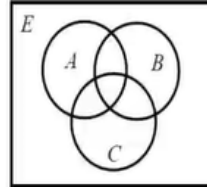
תשובות סופיות

- (1) א. $\{1, 2, 6\}$ ב. $\{1, 3, 4, 6\}$ ג. $\{1, 3\}$ ד. $2 \notin P(A)$
- (2) א. לא. ב. לא. ג. כן. ד. כן.
- ה. לא. ו. כן. ז. כן.
- (3) א. $\{1, \{3, *\}, \emptyset, 4\}$ ב. $\{\emptyset\}$ ג. $\{1, \{3, *\}\}$ ד. $\{4\}$
- ה. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

דיאגרמת ון

שאלות

1) באיור שלהלן דיאגרמת ון.

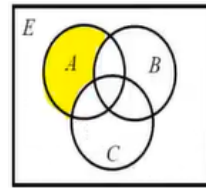


קווקוו את השטח המתאר את הקבוצות הבאות:

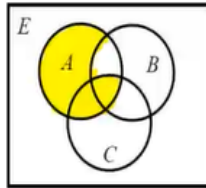
- | | |
|------------------------|-------------------------------------|
| א. $(A - B) - C$ | ב. $A - (B - C)$ |
| ג. $A \cap B^c$ | ד. $(A \cap B^c) \cup (C \cap A^c)$ |
| ה. $(A \cap B) \cap C$ | ו. $A \cap (B \cap C)$ |
| ז. $(A \cup B) \cup C$ | ח. $A \cup (B \cup C)$ |

תשובות סופיות

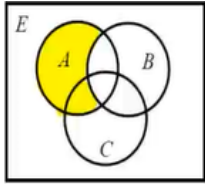
1 א.



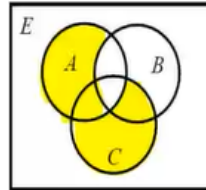
ב.



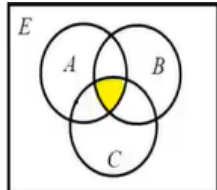
ג.



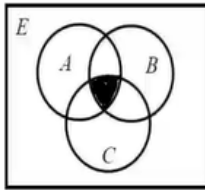
ד.



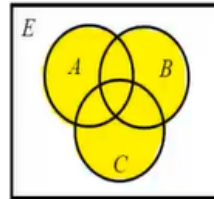
ה.



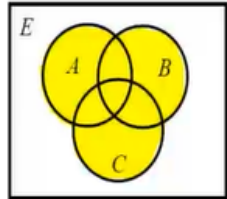
ו.



ז.



ח.



שאלות הוכחה

שאלות

בכל אחת משאלות הפרק יש לפעול כפי שמתואר בשאלה 1.

(1) תהיינה A, B קבוצות.

אם הטענה נכונה, ציינו זאת ותנו נימוק קצר מדוע.
אם הטענה אינה נכונה, ציינו זאת, ותנו דוגמה נגדית.
יש ערך רב יותר לדוגמה מינימלית; בדקו האם בדוגמה הנגדית יש פרטים מיותרים והסירו אותם.
אם טענות יב-כא נכונות, נסו להוכיחן, ובמיוחד את טענה יב, שבה נשתמש יותר מאוחר להוכחת תכונות של קבוצת חזקה.

א. אם $x \notin A$, אז $x \notin A \cup B$.

ב. אם $x \notin A \cup B$, אז $x \notin A$.

ג. אם $x \notin A$, אז $x \notin A \cap B$.

ד. אם $x \notin A \cap B$, אז $x \notin A$.

ה. אם $x \notin A$, אז $x \notin A - B$.

ו. אם $x \notin A - B$, אז $x \notin A$.

ז. אם $x \in B$, אז $x \notin A - B$.

ח. אם $x \notin A - B$, אז $x \in B$.

ט. $x \notin A \Leftrightarrow x \notin A - B$

י. $x \in B \Leftrightarrow x \notin A - B$

יא. השלימו: $x \notin A - B \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}}$.

יב. $(A \subseteq B \wedge A \subseteq C) \Leftrightarrow A \subseteq B \cap C$

יג. $(A \subseteq B \vee A \subseteq C) \Leftrightarrow A \subseteq B \cup C$

יד. אם $A = A \cup B$, אז $A \subseteq B$.

טו. אם $A = A \cup B$, אז $B \subseteq A$.

טז. אם $A = A \cap B$, אז $A \subseteq B$.

יז. אם $A = A \cap B$, אז $B \subseteq A$.

יח. אם $A \subseteq B$, אז $A = A \cup B$.

יט. אם $B \subseteq A$, אז $A = A \cup B$.

כ. אם $A \subseteq B$, אז $A = A \cap B$.

כא. אם $B \subseteq A$, אז $A = A \cap B$.

(2) תהיינה A, B, C קבוצות.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $A = A - B$, אז $B = \emptyset$.

ב. אם $A = A - B$, אז $A \cap B = \emptyset$.

ג. אם $A = A \cup B$, אז $A \cap B = B$.

ד. אם $B = A \cup B$, אז $A \cap B = B$.

ה. אם $A \cap B = A$, אז $A = A \cup B$.

ו. אם $A \cap B = B$, אז $A = A \cup B$.

ז. אם $A \cup B = A \cup C$ וגם $A \cap B = A \cap C$ אז $B = C$.

ח. $A \cup (B - C) = (A \cup B) - C$.

ט. $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cap C)$.

י. $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$.

יא. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

יב. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

יג. $(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$.

יד. להלן שתי טענות. הוכיחו את הנכונה והפריכו את השגויה:

1. $A \cap B \cap C \subseteq A \oplus B \oplus C$

2. $A \oplus B \oplus C \subseteq A \cap B \cap C$

תשובות סופיות

- (1) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. נכונה.
ו. לא נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.
יא. $x \in B \vee x \notin A$ יב. נכונה. יג. לא נכונה. יד. לא נכונה.
טו. נכונה. טז. נכונה. יז. לא נכונה. יח. לא נכונה. יט. נכונה.
כ. נכונה. כא. לא נכונה.
- (2) א. לא נכונה. ב. לא נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.
ו. נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.
יא. נכונה. יב. נכונה. יג. נכונה. יד. 1. נכונה. 2. לא נכונה.

קריאת קבוצות

שאלות

(1) עבור $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, רשמו בשתי דרכים את הקבוצות הבאות:

א. קבוצת המספרים טבעיים האי זוגיים, $\mathbb{N}_{odd} = \{1, 3, 5, \dots\}$.

ב. קבוצת כל הטבעיים שיש להם שורש ריבועי, $A = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots\}$.

ג. קבוצת כל הטבעיים שאין להם שורש ריבועי,

$B = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, \dots\}$.

ד. קבוצת כל השורשים של מספרים טבעיים,

$C = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \dots\}$.

ה. קבוצת כל החזקות של 2,

$D = \{2^1, 2^2, 2^3, \dots\} = \{2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$.

(2) עבור $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, חשבו את הקבוצות הבאות:

א. $C = \{3n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

ב. $K = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \geq 2 \rightarrow x^2 > 41\}$.

ג. $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \geq 7 \rightarrow x < 20\}$.

ד. $C = \{3n - 1 \mid n \in \mathbb{N} \wedge \sqrt{n} \in \mathbb{N}\} = \{3n - 1 \mid \sqrt{n} \in \mathbb{N}\}$.

ה. $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 8 \rightarrow x^2 < 67\}$.

תשובות סופיות

- (1) א. דרך 1: $\left\{n \in \mathbb{N} \mid \frac{n+1}{2} \in \mathbb{N}\right\}$, דרך 2: $\{2n-1 \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- ב. דרך 1: $\{n \in \mathbb{N} \mid \sqrt{n} \in \mathbb{N}\}$, דרך 2: $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- ג. דרך 1: $\{n \in \mathbb{N} \mid \sqrt{n} \notin \mathbb{N}\}$, דרך 2: $\{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge \forall k \in \mathbb{N} n \neq k^2\}$.
- ד. דרך 2: $\{\sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- ה. דרך 1: $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} n = 2^k\}$, דרך 2: $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- (2) א. $C = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, \dots\}$
- ב. $\mathbb{Z} - \{\pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \dots\}$
- ג. $\mathbb{Z} - \{20, 21, 22, 23, \dots\}$
- ד. $\{2, 11, 26, 74, 107, 146, \dots\}$
- ה. $\mathbb{Z} - \{9, 10, 11, 12, \dots\}$

דרך השלילה

שאלות

הוכיחו כל אחת מהטענות הבאות בדרך השלילה. במקום הטענה אם α , אז β , נוכיח אם $\neg\beta$, אז $\neg\alpha$.

יש לזכור תמיד שלהנחת השלילה $\neg\beta$ ולכל הנובע ממנה מתייחסים כנתון.

$$(1) \text{ אם } A \cap C = \emptyset, \text{ אז } A - (B - C) \subseteq (A - B) - C$$

$$(2) \text{ אם } A \subseteq B, \text{ אז } (A - C) \cup (C - B) \subseteq A \cap B$$

$$(3) \text{ אם } (A - C) \cap B = \emptyset, \text{ אז } (A \cup B) - C \subseteq A - B$$

$$(4) \text{ אם } B \subseteq A, \text{ אז } (C - A) \cup (B - C) \subseteq A - B$$

$$(5) \text{ אם } A \subseteq A \Delta B \text{ וגם } B - C = B \Delta C, \text{ אז } A \cap C = \emptyset$$

$$(6) \text{ אם } A \subseteq A \oplus B \text{ וגם } B - C = B \oplus C, \text{ אז } A \cap C = \emptyset$$

תשובות סופיות

(1) הוכחה.

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

(4) הוכחה.

(5) הוכחה.

(6) הוכחה.

קבוצת חזקה

שאלות

(1) עבור $A = \{3, \{\emptyset\}\}$, $B = \{\{3\}, \{4, \emptyset\}\}$, $C = \{3, \{3\}, \{\emptyset, 3\}\}$
רשמו את הקבוצות הבאות:

א. את $P(C)$, $P(B)$ ואת $P(A)$.

ב. $P(A) \cap B$, $P(A) \cap A$, $P(C) \cap C$ ואת $C - P(C)$.

(2) עבור הקבוצות $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $B = \{1, \emptyset\}$

א. רשמו את $P(A)$ ואת $P(B)$.

ב. רשמו את $P(A) - P(B)$ ואת $P(B) - P(A)$.

ג. $P(A) - A$ ואת $P(A) - \{A\}$.

(3) רשמו את $P(\emptyset)$, את $P(P(\emptyset))$ ואת $P(P(P(\emptyset)))$.

(4) תהיינה A, B שתי קבוצות. הוכיחו או הפריכו:

א. $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$

ב. $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

ג. $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

ד. $P(A) \cap A \neq \emptyset$

ה. $P(A) \cap A = \emptyset$

ו. תנו דוגמה לקבוצה A שמקיימת $A \cap P(A) \cap P(P(A)) \neq \emptyset$.

ז. אם $\{A\} \subseteq P(B)$, אז $P(A) \subseteq P(B)$.

את שתי הטענות הבאות הוכיחו בדרך השלילה:

ח. אם $P(A) \subseteq P(A - B)$, אז $A \cap B = \emptyset$.

ט. אם $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$, אז $(A \subseteq B) \vee (B \subseteq A)$ (שאלה קשה).

(5) תהיינה A, B, C קבוצות כלשהן, ונתון $P(B) - P(A) = P(B) - \{\emptyset\}$.

הוכיחו כי $B - A = B$.

תשובות סופיות

- (1) א. $P(B) = \{\emptyset, \{\{3\}\}, \{\{4, \emptyset\}\}, \{\{3, \{4, \emptyset\}\}\}$, $P(A) = \{\emptyset, \{3\}, \{\{\emptyset\}\}, \{3, \{\emptyset\}\}$
 . $P(C) = \{\emptyset, \{3\}, \{\{3\}\}, \{\{\emptyset, 3\}\}, \{3, \{3\}\}, \{3, \{\emptyset, 3\}\}, \{\{3\}, \{\emptyset, 3\}\}, \{3, \{3\}, \{\emptyset, 3\}\}$
 ב. $C - P(C) = \{3, \{\emptyset, 3\}\}$, $P(C) \cap C = \{\{3\}\}$, $P(A) \cap A = \emptyset$, $P(A) \cap B = \{\{3\}\}$
- (2) א. $P(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{\emptyset\}, \{1, \emptyset\}\}$, $P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
 ב. $P(B) - P(A) = \{\{1\}, \{1, \emptyset\}\}$, $P(A) - P(B) = \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
 ג. $P(A) - \{A\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$, $P(A) - A = \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
- (3) . $P(P(P(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, $P(P(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- (4) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.
 ו. ראו סרטון. ז. נכונה. ח. הוכחה. ט. הוכחה.
- (5) הוכחה.

מכפלה קרטזית

שאלות

(1) תהיינה A, B, C קבוצות. הוכיחו:

א. $(A = B) \Leftrightarrow (A \times A = B \times B)$

ב. $((B = \emptyset) \vee (A = \emptyset) \vee (A = B)) \Leftrightarrow (A \times B = B \times A)$

ג. הוכיחו כי לכל ארבע קבוצות A, B, C, D מתקיים

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

ד. אם $((A \times A) \cup (B \times B) = (C \times C))$, אז

$$(((B \subseteq A) \vee (A \subseteq B)) \wedge (A \cup B \subseteq C))$$

ה. הוכיחו כי לכל ארבע קבוצות A, B, C, D מתקיים

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$$

(2) הוכיחו או הפריכו:

תהיינה A, B שתי קבוצות כלשהן ותהי $S \subseteq A \times B$.

אז קיימות $C \subseteq A$ ו- $D \subseteq B$, כך ש- $S = C \times D$.

(3) הוכיחו או הפריכו:

קיימות שתי קבוצות A, B , כך ש- $|A \times B| = 24$ וגם $|A \cap B| = 5$ (סימן $||$ על קבוצה מסמן את מספר אבריה).

(4) הוכיחו או הפריכו:

לכל שלוש קבוצות A, B, C מתקיים $A \times (B \oplus C) = (A \times B) \oplus (A \times C)$.

(5) הדגימו שלוש קבוצות A, B, C , כך ש- $(A \times (B \times C)) \cap ((A \times B) \times C) \neq \emptyset$.

תשובות סופיות

- (1) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה. ה. הוכחה.
- (2) לא נכונה.
- (3) לא נכונה.
- (4) נכונה.
- (5) ראו סרטון.

מתמטיקה בדידה

פרק 2 - עוצמות

תוכן העניינים

1. עוצמות 15

עוצמות

שאלות

1) ללא שימוש בפונקציית שקילות:

א. הוכיחו כי $\mathbb{N}_{\text{odd}} = \{1, 3, 5, \dots\}$ ו- $\mathbb{N}_{\text{even}} = \{0, 2, 4, \dots\}$ שוות עוצמה.

ב. הוכיחו כי $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ו- $\mathbb{N}_{\text{even}} = \{0, 2, 4, \dots\}$ שוות עוצמה.

ג. הוכיחו כי $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ שקולה ל- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

ד. הוכיחו כי $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$.

ה. הוכיחו כי $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}^+$, כאשר \mathbb{Q}^+ היא קבוצת הרציונליים החיוביים.

ו. הוכיחו כי $[0, 1] \sim [0, 3]$.

ז. הוכיחו כי $[0, 1] \sim [3, 4]$.

ח. הוכיחו כי $[0, 1] \sim [3, 5]$.

ט. הוכיחו כי לכל שתי קבוצות A, B , מתקיים $A \times B \sim B \times A$.

2) הוכיחו את השקילויות הבאות באמצעות פונקציות חשי״ע ועל בין הקבוצות:
(פונקציית שקילות)

א. $(0, 2010) \sim (0, \infty)$

ב. $[1, 3] \cup [4, 8] \sim [0, 1]$

ג. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \sim \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$

ד. $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$

ה. $\mathbb{N} \times \{0, 1\} \sim \mathbb{N}$

ו. $(-1, 1) \sim \mathbb{R}$

ז. $\mathbb{N} \times [0, 1) \sim [0, \infty)$

ח. $(0, 1] \sim (0, 1)$

ט. $[0, 1) \times [0, 1) \sim [0, 1)$

י. $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \sim \{0, 1\}^{\mathbb{N}_{\text{even}}} \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}_{\text{odd}}}$

יא. $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \sim \{0, 1, 2, 3\}^{\mathbb{N}}$

יב. $\{0, 1\}^A \sim P(A)$

הגדרה: קבוצה A היא אינסופית אם קיימת קבוצה שחלקית לה ממש ושקולה לה.

היעזרו בהגדרה זו לפתרון שאלות 3-4.

(3) תהיינה A, B קבוצות. הוכיחו:

- א. אם A אינסופית, אז $A \cup B$ אינסופית.
 ב. אם A אינסופית וגם $A \subseteq B$, אז B אינסופית.

(4) תהיינה A, B קבוצות, ונתון כי $A \cap B$ שקולה ל- A . הוכיחו או הפריכו:

- א. אם $A \cup B \neq B$, אז A אינסופית.
 ב. אם $A \cup B \neq A$, אז B אינסופית.
 ג. אם A סופית, אז $A \subseteq B$.

(5) נגדיר יחס \sim בין קבוצות באופן הבא: $(A, B) \in \sim \Leftrightarrow A, B$ שוות עוצמה. הוכיחו כי \sim הוא יחס שקילות.

(6) הוכיחו:

- א. $\aleph_0 + n = \aleph_0$, כאשר $n \in \mathbb{N}$.
 ב. $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.
 ג. $3 \cdot \aleph_0 \cdot 2 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.
 ד. $n \cdot \aleph_0 = \aleph_0$, כאשר $n \in \mathbb{N}$.
 ה. $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.
 ו. $\aleph_0^n = \aleph_0$ (היעזרו במשפט קבי"ש).
 ז. אם $\aleph_0 \leq \alpha$, אז $\alpha = \alpha + 3$.
 ח. $2^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0}$.
 ט. $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.
 י. $\aleph_0^{\aleph_0} > 2^{\aleph_0}$ (הדרכה: הסיקו מהסעיף הקודם כי $\aleph_0^{\aleph_0} > \aleph_0^{\aleph_0}$).

7) גדירות היטב של אריתמטיקה של עוצמות.

א. תהיינה k_1, k_2 עוצמות ויהיו A, B קבוצות, כך ש- $|A| = k_1, |B| = k_2$.

נגדיר פעולת הפרש בין עוצמות באופן הבא: $k_1 - k_2 = |A - B|$.

פעולה זו אינה מוגדרת היטב, כלומר התוצאות של ההפרש משתנות בהתאם לקבוצה ולא בהתאם למחלקה.

הציגו 2 דוגמאות לקבוצות שעוצמתן \aleph_0 , אך עוצמת ההפרש שונה בכל אחת מהדוגמאות.

ב. הוכיחו כי אם מתקיים $B \cap D = \emptyset \wedge A \cap C = \emptyset \wedge C \sim D \wedge A \sim B$,

אז $(A \cup C) \sim (B \cup D)$.

ג. הוכיחו כי אם $C \sim D \wedge A \sim B$, אז $A \times C \sim B \times D$.

8) הוכיחו כי לכל שלוש קבוצות A, B, C מתקיים:

א. $A \times (B \times C) \sim (A \times B) \times C$

ב. אם $B \cap C = \emptyset$, אז $A^B \times A^C \sim A^{(B \cup C)}$, והראו כי $B \cap C = \emptyset$ הכרחית.

ג. $(A \times B)^C = A^C \times B^C$

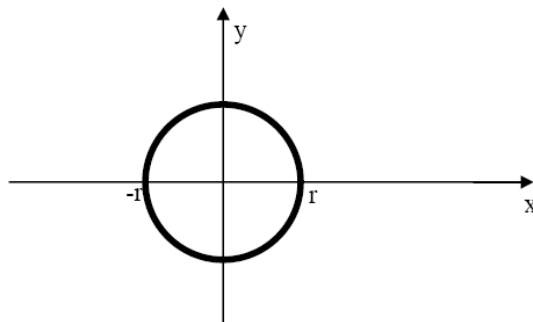
ד. $(A^B)^C \sim A^{B \times C}$

9) הוכיחו כי הקבוצה $A = \mathbb{Q}$, קבוצת המספרי הרציונליים,

ו- $B = \{f(x) = ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ שוות עוצמה.

10) מעגל במישור ברדיוס r (כאשר $r > 0$ ממשי), שמרכזו בראשית הצירים, הוא קבוצת כל הנקודות (x, y) במישור המקיימות את המשוואה $x^2 + y^2 = r^2$, כמודגם בציור שלהלן.

הוכיחו שלכל $r > 0$, עוצמת מעגל ברדיוס r שמרכזו בראשית הצירים היא \aleph_0 .



11) הוכיחו או הפריכו:

תהיינה A, B שתי קבוצות כלשהן. אם $A \oplus B$ היא קבוצה מעוצמה \aleph_0 וגם

$A \cap B$ היא קבוצה מעוצמה \aleph_0 , אז $A \cup B$ היא קבוצה מעוצמה \aleph_0 .

12 נגדיר $P_2(\mathbb{N}) = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |A| = 2\}$. כלומר, $P_2(\mathbb{N})$ היא קבוצת כל תתי-קבוצות בנות שני אברים של הטבעיים. מהי עוצמת $P_2(\mathbb{N})$? הוכיחו.

13 נסמן ע"י \mathbb{N} את קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ וב- \mathbb{R}^+ את הממשיים החיוביים.

א. מה העוצמה של הקבוצה $A_4 = \{a \in \mathbb{R} \mid a^4 \in \mathbb{N}\}$?

למשל, $1, \sqrt{5}, 2, \sqrt[4]{7} \in A_4$.

ב. מה העוצמה של $A = \{a \in \mathbb{R}^+ \mid \exists k \in \mathbb{N}, a^k \in \mathbb{N}\}$?

למשל, $1, \sqrt{5}, 2, \sqrt[4]{7}, \sqrt[100]{3}, \sqrt[3]{4} \in A$.

ג. הראו שקבוצה של מעגלים זרים במישור ניתנת לשידוך לקבוצה חלקית של טבעיים.

14 תהי $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N} \left(x < \frac{1}{n} \right) \wedge \exists n \in \mathbb{N} \left(x > -\frac{1}{n} \right) \right\}$.

מה עוצמת A ?

15 תהי $A = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. כלומר, A היא קבוצת כל הקטעים הפתוחים ב- \mathbb{R} . מהי עוצמת A ? הוכיחו.

16 נגדיר יחס S מעל $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ באופן הבא: $(x_1, x_2) S (y_1, y_2) \Leftrightarrow \lfloor x_1 \rfloor = \lfloor y_1 \rfloor$. כאשר S יחס שקילות (אין צורך להוכיח זאת).

הוכיחו כי קבוצת המנה $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) / S$ היא מעוצמה \aleph_0 .

17 הוכיחו או הפריכו: לכל קבוצה A מתקיים $A \times \mathbb{N} \sim A \times (\mathbb{N} - \{1\})$.

18 הוכיחו כי עוצמת הקבוצה $(1, 2) \cup (2, 3) \cup (3, 4) \cup \dots = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n, n+1)$ היא \aleph_0 .

19 תהי A קבוצה מעוצמה \aleph_0 ויהי E יחס שקילות מעל A . הוכיחו כי $|E| = \aleph_0$.

(20) הוכיחו או הפריכו :

$$(A \times B)^c \sim (A^c \times B) \cup (A \times B^c)$$

לכל זוג קבוצות A, B מתקיים

(21) פונקציית הסינוס $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ היא פונקציה מחזורית בעלת מחזור של 2π .

$$\text{כלומר, } \sin(x + 2\pi) = \sin(x), \text{ לכל } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{עבור } 0 \leq x \leq 2\pi \text{ מתקיים } \sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, \pi, 2\pi\}.$$

מצאו את עוצמת הקבוצה $O_{\sin} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x = 0\}$. הוכיחו.

(22) האם קיימת קבוצה A , כך ש- $|P(A)| = \aleph_0$? הוכיחו.

(23) הוכיחו כי קבוצה בת-מניה של ישרים לא יכולה לכסות את המישור \mathbb{R}^2 .

(24) קבעו האם לקבוצה אחת עוצמה גדולה יותר, או שהן שוות:

א. $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$, $\{0,1\}^{P(\mathbb{R})}$

ב. $P(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$, $P(\mathbb{R})^{P(\mathbb{N})}$

ג. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$

(25) חשבו את עוצמת הקבוצות הבאות:

א. קבוצת כל הסדרות האינסופיות של הטבעיים.

ב. קבוצת כל הסדרות האינסופיות העולות ממש של הטבעיים.

ג. קבוצת כל הסדרות הבינאריות האינסופיות.

ד. קבוצת כל הסדרות הבינאריות האינסופיות, שאין בהן את הרצף 10.

ה. קבוצת כל הסדרות הבינאריות האינסופיות, שאין בהן את הרצף 00.

ו. קבוצת כל הסדרות הבינאריות האינסופיות, שאין בהן את הרצף 10

וגם את הרצף 00.

ז. קבוצת כל היחסים מעל \mathbb{N} .

ח. קבוצת כל היחסים הרפלקסיביים מעל \mathbb{N} .

לפתרונות מלאים בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מתמטיקה בדידה

פרק 3 - לוגיקה

תוכן העניינים

20	1. מבוא
(ללא ספר)	2. הקשרים
21	3. טאוטולוגיה, סתירה ומושגים נוספים
26	4. קבוצת קשרים שלמה
27	5. צורות נורמליות
(ללא ספר)	6. חוקי דה מורגן
28	7. תחשיב הפרדיקטים
32	8. תרגול בשיטות ההוכחה השונות

מבוא

שאלות

- 1) קבעו בכל אחד מהסעיפים האם נכון או לא נכון:
- הביטוי "בני ישראל הלכו במדבר ארבעים שנה" הוא פסוק.
 - הביטוי "ארבעים שנה" הוא פסוק.
 - שלילת הפסוק "האריה טרף את הצבי" היא "הצבי טרף את האריה".
 - הפסוק "1+1=2 או 2=3" הוא פסוק אמת.
 - הפסוק "1+1=2 וגם 2=3" הוא פסוק אמת.
 - הפסוק "אם 1+1=2 אז 2=3" הוא פסוק אמת.
 - הפסוק "אם 2=3 אז 1+1=2" הוא פסוק אמת.
 - הפסוק "אם 2=3 אז 1+1≠2" הוא פסוק אמת.
 - שלילת הפסוק "a ≠ 4 וגם b ≠ 3" היא "a + b = 7 או ab = 12".
 - שלילת הפסוק "a ≠ 4 או b ≠ 3" היא "a + b = 7 וגם ab = 12".
 - שלילת הפסוק "a ∈ {3,4} או b ∈ {3,4}" היא "a + b = 7 וגם ab = 12".

- 2) רשמו את טבלאות האמת של הפסוקים הבאים:

א. $(p \wedge q) \vee \neg r$

ב. $\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg r)$

ג. $(p \wedge \neg q) \vee r$

ד. $(p \vee q) \rightarrow (q \rightarrow r)$

- 3) בטאו את שלילת הפסוקים הבאים (בלי קשר לנכונותם):

א. דוד יפה או ראובן מכוער.

ב. האוכל חם וטעים.

ג. לכל x קיים y, שהוא השורש הריבועי של x.

ד. כל תרנגולת כחולה עוזבת את הלול כדי להטיל ביצים.

ה. כל פנתר שהוא ורוד משחק בסרטים מצוירים.

ו. כל פנתר שהוא ורוד קוראים לו יוסי או שהוא משחק בסרטים מצוירים.

ז. כל פנתר שהוא ורוד קוראים לו יוסי וגם הוא משחק בסרטים מצוירים.

ח. לכל נגר קיים אדם שכל רהיטיו יוצרו בידי נגר זה.

ט. אם יהיה יום יפה וגם יהיה לי מצב רוח טוב אז אצא לטיול.

י. אם יהיה יום יפה אז אם יהיה לי מצב רוח טוב אז אצא לטיול.

טאוטולוגיה, סתירה ומושגים נוספים

שאלות

1) בדקו אילו מזוגות הפסוקים הבאים שקולים לוגית. במקרה שהתשובה חיובית, הראו זאת הן בעזרת טבלת אמת והן בעזרת עץ שקר.

$$\text{א. } \neg(p \rightarrow q) \quad p \wedge (\neg q)$$

$$\text{ב. } (\neg p) \rightarrow q \quad p \vee (\neg q)$$

$$\text{ג. } p \rightarrow (\neg q) \quad \neg(p \wedge q)$$

$$\text{ד. } (p \vee q) \wedge (\neg q) \quad p \wedge (\neg q)$$

$$\text{ה. } p \leftrightarrow q \quad (p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))$$

$$\text{ו. } p \vee u \quad (s \rightarrow (p \wedge (\neg r))) \wedge ((p \rightarrow (r \vee q)) \wedge s)$$

ז. הראו כי $\neg(r \wedge (p \vee q)) \equiv ((\neg p) \wedge (\neg q)) \vee \neg r$, בעזרת זהויות יסוד.

2) יהיו $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ הפסוקים:

$$\alpha_1: (A \vee B) \rightarrow (D \rightarrow C)$$

$$\alpha_2: B \rightarrow \neg(C \wedge A)$$

$$\alpha_3: C \leftrightarrow (A \wedge D)$$

$$\beta: D \vee (B \wedge C)$$

בדקו אלו מהטענות הבאות נכונות והוכיחו:

$$\text{א. } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \Rightarrow \beta$$

ב. β אינה נובעת טאוטולוגית מהפסוקים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, אך מתיישבת אתם.

ג. β אינה מתיישבת עם הפסוקים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, כלומר סותרת אתם.

3 הוכיחו כי הפסוקים הבאים הינם טאוטולוגיות, ללא שימוש בטבלת אמת:

א. $p \vee (\neg p)$

ב. $p \vee (p \rightarrow q)$

ג. $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)$

ד. $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$

ה. $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

ו. $((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$

ז. $(q \vee p \vee r) \rightarrow ((\neg p) \rightarrow ((q \vee r) \wedge (\neg p)))$

ח. $((B \rightarrow (C \wedge (\sim A))) \wedge ((\sim B) \vee C) \rightarrow D) \wedge (E \rightarrow (\sim D)) \rightarrow (A \rightarrow \sim E)$

ט. הוכיחו בעזרת טבלת אמת ש- $(u \rightarrow v) \leftrightarrow ((\neg v) \rightarrow (\neg u))$ טאוטולוגיה.

י. הוכיחו כי הפסוק הבא הוא טאוטולוגיה (מותר להסתמך על סעיף ט):

$$((u \rightarrow v) \leftrightarrow ((\neg v) \rightarrow (\neg u))) \rightarrow (((p \rightarrow r) \wedge ((\neg q) \rightarrow p) \wedge (\neg r)) \rightarrow q)$$

4 בארץ חלם מתקיימת שביתת רופאים במטרה להגדיל את תקציב הבריאות. להלן ניתוח המצב:

* אם הרופאים לא יסיימו את השביתה אז הנהלות בתי החולים יתערבו.

* אם לא תיפגע בריאותם של החולים אז הממשלה לא תגדיל את הקציב.

* אם הנהלות בתי החולים יתערבו אז לא תפגע בריאותם של החולים או שבית המשפט יתערב.

* בית המשפט לא יתערב וגם הממשלה לא תגדיל את התקציב.

מסקנה: הרופאים יסיימו את השביתה.

נסמן: D – הרופאים יסיימו את השביתה, H – הנהלות בתי החולים יתערבו,

P – בית המשפט יתערב, C – לא תפגע בריאותם של החולים, M – הממשלה

תגדיל את התקציב.

א. הצרינו את הטיעון לשפת תחשיב הפסוקים בעזרת המשתנים המוצעים.

ב. בדקו, ללא שימוש בטבלת אמת, אם הטיעון תקף.

- 5) בארץ חלם מתקיימות בחירות. זרובבל, כתבנו לענייני מפלגות, מנתח את המצב:
- * אם אבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב את דני יפרוש.
 - * אם שמעון יציע לדני תפקיד אז דני יפרוש.
 - * אם בני ייבחר לראשות מפלגת פיתה אז שמעון יציע לדני תפקיד או שאבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב.
 - * בני יבחר לראשות מפלגת פיתה.
 - לכן, כתבנו מסיק שדני יפרוש.
- נסמן: A – אבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב, B – בני יבחר לראשות מפלגת פיתה, C – שמעון יציע לדני תפקיד, D – דני יפרוש. הצרינו את הטענה לשפת תחשיב הפסוקים והוכיחו כי המסקנה תקפה.
- 6) בפרס העתיקה מחליט היזם וייזתא לבנות תיאטרון. אם נרצה שהתיאטרון נגיש לתושבים אז נצטרך להקימו בלב העיר. אם נרצה שהתיאטרון יהיה רווחי, אז הוא יצטרך להיות גדול ומרווח כדי שיכיל הרבה אנשים. אבל אם התיאטרון יהיה גדול ומרווח ויבנה בלב העיר, אז הוא יעלה 10 מיליון זוזים פרסיים. אבל לויזתא היזם אין 10 מיליון זוזים פרסיים. לכן, וייזתא היזם מסיק כי התיאטרון יוקם במקום לא נגיש לתושבים או שלא יהיה גדול ומרווח.
- א. תרגמו את ניתוח המצב לשפת הפסוקים, תוך שימוש בסימונים הבאים:
- N – נגיש לתושבים, L – בלב העיר, Y – יכיל הרבה אנשים, G – גדול ומרווח, M – מחירו יעלה על..., R – רווחי.
- ב. הצרינו את ההנחות והמסקנה לשפת הפסוקים ובדקו האם המסקנה תקפה, ללא שימוש בטבלת אמת.
- 7) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות (כאשר p, q, r פסוקים אטומים):
- א. $(p \vee q) \Rightarrow p$
 - ב. $(p \vee q) \Rightarrow q$
 - ג. $(p \rightarrow q) \Rightarrow q$
 - ד. $p, p \rightarrow q \Rightarrow q$
 - ה. $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge p \Rightarrow r$
 - ו. $r \Rightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge p$
 - ז. $A \rightarrow B, C \rightarrow B, D \rightarrow (A \vee C), D \Rightarrow B$
 - ח. $(A \vee B \rightarrow D), D \rightarrow (C \vee P), P \rightarrow Q, (\neg C) \wedge (\neg Q) \Rightarrow \neg A$
 - ט. $(B \rightarrow (C \wedge (\sim A))), (((\sim B) \vee C) \rightarrow D), (E \rightarrow (\sim D)) \models (A \rightarrow \sim E)$

8 נתון כי α, β, γ פסוקים לאו דווקא אטומים.

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- א. אם α סתירה וגם $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$, אז $\beta \Rightarrow \neg \gamma$.
- ב. אם α טאוטולוגיה וגם $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$, אז $\neg \beta \Rightarrow \gamma$.
- ג. אם $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$, אז $((\alpha \Rightarrow \beta) \vee (\alpha \Rightarrow \gamma))$.
- ד. אם $((\alpha \Rightarrow \beta) \vee (\alpha \Rightarrow \gamma))$, אז $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$.
- ה. אם $\alpha \Rightarrow \beta \wedge \gamma$, אז $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma))$.
- ו. אם $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma))$, אז $\alpha \Rightarrow \beta \wedge \gamma$.
- ז. אם $\alpha \Rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$, אז $(\alpha \rightarrow \beta) \Rightarrow \gamma$.
- ח. אם $(\alpha \rightarrow \beta) \Rightarrow \gamma$, אז $\alpha \Rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$.
- ט. אם $\alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma$, אז $(\alpha \Rightarrow \gamma) \vee (\beta \Rightarrow \gamma)$.
- י. אם $(\alpha \Rightarrow \gamma) \vee (\beta \Rightarrow \gamma)$, אז $\alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma$.
- יא. אם $\alpha \Rightarrow \beta \rightarrow \gamma$, אז $\alpha, \beta \models \gamma$.
- יב. אם $\alpha \Rightarrow \beta \rightarrow \gamma$, אז $\alpha \vee \beta \models \gamma$.

9 עבור α , פסוק אטומי או מורכב, נגדיר את הקבוצה $F_\alpha = \{\gamma \mid \alpha \Rightarrow \gamma\}$.

כלומר, F_α היא קבוצת כל הפסוקים שנובעים טאוטולוגית מהפסוק α .

הוכיחו כי $\alpha \equiv \beta$ אם ורק אם $F_\alpha = F_\beta$.

10 הוכיחו כי ההנחה A גוררת טאוטולוגית את המסקנה $\neg(\neg A)$,

בעזרת כללי ההיסק הבאים:

$$1. \Rightarrow p \rightarrow p$$

$$2. p \Rightarrow q \rightarrow p$$

$$3. p \rightarrow q, p \rightarrow (\neg q) \Rightarrow \neg p$$

11) הוכיחו שההנחות הבאות גוררות טאוטולוגית את המסקנה A

$$B \vee D$$

$$C \rightarrow B$$

$$D \rightarrow (A \vee C)$$

$$\neg B$$

מותר להשתמש רק בכללי ההיסק הבאים:

$$P \Rightarrow Q \vee P$$

$$P \wedge Q \Rightarrow P$$

$$P \wedge Q \Rightarrow Q$$

$$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$$

$$P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$$

$$\neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$$

$$P \Rightarrow \neg \neg P$$

$$P \rightarrow Q \Rightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$$

קבוצת קשרים שלמה

שאלות

1) הביעו את הקשרים הבאים:

- א. קשר הגרירה בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge, \neg\}$.
- ב. קשר ה- \vee בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge, \neg\}$.
- ג. קשר ה- \oplus (XOR) בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge, \neg\}$.
- ד. קשר ה- \leftrightarrow בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge, \neg\}$.
- ה. קשר הגרירה בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee, \neg\}$.
- ו. הקשר \wedge בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee, \neg\}$.
- ז. קשר ה- \oplus (XOR) בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee, \neg\}$.
- ח. קשר ה- \leftrightarrow בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee, \neg\}$.
- ט. הוכיחו כי הקבוצה $\{\downarrow\}$ היא קבוצת קשרים שלמה.
- י. נתון f קשר טרינארי המוגדר כך: $f(x, y, z) = x \rightarrow \neg(y \rightarrow z)$. הוכיחו כי $\{f\}$ היא קבוצת קשרים שלמה.
- יא. הביעו את הקשר $f(x, y, z) = x \rightarrow \neg(y \rightarrow z)$ באמצעות \downarrow בלבד.
- יב. הביעו את הקשר \downarrow באמצעות $f(x, y, z) = x \rightarrow \neg(y \rightarrow z)$ בלבד.

צורות נורמליות

שאלות

1) בסעיפים הבאים רשמו צורה דיסיונקטיבית-נורמלית (DNF) וצורה קוניונקטיבית-נורמלית (CNF) של הפסוקים:

א. $p \rightarrow q$

ב. $(p \vee q) \wedge \neg r$

ג. $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow \neg q)$

תחשיב הפרדיקטים

שאלות

1 לכל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה ורשמו את שלילתה ללא שימוש בקשר השלילה. במקרה שהטענה נכונה נמקו זאת, ובמקרה שהטענה אינה נכונה הביאו דוגמה נגדית.

א. $\forall x \in \mathbb{N} (\exists y \in \mathbb{N} (x < y))$

ב. $\forall x \in \mathbb{N} (\exists y \in \mathbb{N} (x > y))$

ג. $\forall x, y \in \mathbb{R} (x > y) \rightarrow \exists z \in \mathbb{R} (x > y + z)$

ד. $\forall x \in \mathbb{R} (x > 0) \rightarrow (\exists n \in \mathbb{N} (x > \frac{1}{n}))$

ה. $\forall x \in \mathbb{R} (x \neq 0 \rightarrow \forall y \in \mathbb{Z} \exists z \in \mathbb{R} (xz = y))$

ו. $\forall x \in \mathbb{N} (x \geq 1 \rightarrow \forall y \in \mathbb{N} \exists z \in \mathbb{N} (xz = y))$

ז. $\forall x \in \mathbb{R} (x > 0 \rightarrow \exists y \in \mathbb{N} (xy > 1))$

ח. $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} (xy = x \wedge x + y < 5) \rightarrow y < 4\frac{1}{2}$

ט. $\forall x \in \mathbb{R} ((x > 0) \rightarrow \forall y \in \mathbb{R} (\exists n \in \mathbb{N} (nx > y)))$

2 הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות, ורשמו את השלילה של כל טענה, כאשר הקשר \neg מופיע רק לצד פרדיקטים. במקרה של הפרכה הדגימו עולם דיון מתאים עבורו הטענה לא מתקיימת, והסבירו מדוע הטענה לא מתקיימת.

א. $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$

ב. $\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$

ג. $(\forall x (P(x) \wedge Q(x))) \rightarrow (\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x))$

ד. $(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \rightarrow (\forall x (P(x) \wedge Q(x)))$

ה. $(\forall x (P(x) \vee Q(x))) \rightarrow (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$

ו. $(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \rightarrow (\forall x (P(x) \vee Q(x)))$

ז. $(\exists x (P(x) \wedge Q(x))) \rightarrow (\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x))$

ח. $(\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)) \rightarrow (\exists x (P(x) \wedge Q(x)))$

ט. $(\exists x (P(x) \vee Q(x))) \rightarrow (\exists x P(x) \vee \exists x Q(x))$

י. $(\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)) \rightarrow (\exists x (P(x) \vee Q(x)))$

$$P(x): x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$Q(x): x \text{ is odd}$$

$$R(x): x > 0$$

$$L(x): x^2 + 2x + 2 = 0$$

(3) בעולם הדין \mathbb{Z} , נסמן

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. $\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)]$

ב. $\forall x [Q(x) \rightarrow P(x)]$

ג. $\exists x [P(x) \rightarrow Q(x)]$

ד. $\exists x [Q(x) \rightarrow P(x)]$

ה. $\forall x [L(x) \rightarrow Q(x)]$

ו. $\exists x [L(x) \rightarrow Q(x)]$

ז. $\exists x [R(x) \rightarrow P(x)]$

ח. $\forall x (\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x))$

ט. $\forall x [(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow R(x)]$

י. $\exists x [P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x))]$

יא. $\forall x [P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x))]$

נפנה עתה למספר שאלות בהצרנות. מותר להשתמש בסימני המשתנים x, y, z , סימני הקבוצה $A, B, C, \dots, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, סוגריים, קשרים, כמתים, הפרדיקטים $(, \exists, \forall, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, <, >$, וכן סימנים נוספים הנתונים בגף השאלה.

שימו לב: אסור להשתמש בקשר השלילה ואין להשתמש בסימן \notin .

4) הצרינו כל אחת מהטענות הבאות:

- א. לכל מספר ממשי אין עוקב מידי (כלומר, שאין מספר ראשון מיד אחריו).
- ב. אין קבוצה שמכילה את כל הקבוצות (מותר להשתמש בסימן \notin).
- ג. לכל מספר שאינו ראשוני יש לפחות שני מחלקים שונים.
(מותר להשתמש ב- P עבור קבוצת המספרים הראשוניים וב- \notin)
- ד. למספר הטבעי הכי גדול אין מחלקים (ברור שאין, אבל צריך להצריך).
- ה. לא כל מספר טבעי הוא ראשוני.
- ו. כל קבוצה אינה שקולה לקבוצת החזקה שלה.
- ז. לכל שני מספרים טבעיים שונים יש מחלק משותף.
- ח. בכל קבוצה בת לפחות שלושה איברים שונים אין איבר מקסימלי.
- ט. לא בכל תת קבוצה של ממשיים יש איבר מינימלי.
- י. תהי פונקציה $f: X \rightarrow Y$.

נגדיר את הפונקציה $G: P(X) \rightarrow P(Y)$ כך: $G(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.

הצרינו את הטענה: אם f על אז G ח.ח.ע.

השתמשו רק בסימנים הבאים:

סימני המשתנים x, y, B, C , סימני הקבוצות X, Y , סימן הפונקציה f , סוגריים, קשרים, כמתים ופרדיקטים.
שימו לב: אסור להשתמש בסימנים G ו- P . יש להשתמש בהגדרותיהם כדי להחליפם בסימנים אחרים.

יא. לכל מספר ממשי יש לכל היותר שני מספרים ממשיים שונים זה מזה שריבועם שווה לו.

יב. הצרינו את הטענה: לכל פונקציה $f: A \rightarrow B$ ולכל פונקציה $g: B \rightarrow A$, אם $g \circ f = Id_A$, אז f היא על.

מותר להשתמש בסימנים הבאים ורק בהם: סימני המשתנים x_1, x_2, \dots ,

קשרים $\rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee$, והסימנים $\exists, \forall, (,), \in, A^B, B^A, f, g$.

למען הסר ספק: אסור להשתמש ב- d_A וב- \circ .

יג. מספר ראשוני הוא מספר טבעי גדול מאחד שמחלקיו היחידים הם הוא עצמו ו-1. הצרינו את הטענה הבאה:

לכל מספר טבעי, בתחום שבין המספר עצמו לפעמיים המספר (כולל קצוות) יש לפחות מספר ראשוני אחד.

מותר להשתמש אך ורק בסימנים הבאים: סימני המשתנים x_1, x_2, \dots ,

הקשרים $\leftrightarrow, \Leftrightarrow, \wedge, \vee$ והסימנים $\exists, \forall, (, \in, \mathbb{N}, \leq, 1, 2, 3, \dots, =, |$ פירושו מחלק.

יז. הצרינו את הטענה הבאה: בקבוצה A יש לכל היותר שני מספרים טבעיים.

השתמשו רק בסימנים הבאים: סימני המשתנים x, y, z , סימני הקבוצות A, \mathbb{N} וכן סוגריים, קשרים, כמתים, ופרדיקטים.

טו. הצרינו את הטענה: לא תמיד נכון שאם $A \subseteq B$ אז $A \sim B$. מותר להשתמש רק בסימנים הבאים: סימני הקבוצות A, B (מותר לצרף אותם לקבוצה בחזקת קבוצה), סוגריים, קשרים, כמתים, ופרדיקטים. אין להשתמש בקשר השלילה.

טז. הצרינו את הטענה הבאה: קבוצת הפונקציות החח"ע מהממשיים לטבעיים אינה ריקה.

השתמשו רק בסימנים הבאים: סימני המשתנים x, y , סימני הקבוצות \mathbb{R}, \mathbb{N} (וצירופי חזקות שלהן), סימני הפונקציות f, g , סוגריים, קשרים, וכמתים: $\exists, \forall, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (, \{, \}, \in, \neq, =$.

יז. הצרינו את כלל הכפל של אי-שוויון ממשי (קטן או שווה) במספר ממשי שונה מאפס.

מותר להשתמש אך ורק בסימנים הבאים: סימני המשתנים x_1, x_2, \dots , הקשרים $\leftrightarrow, \Leftrightarrow, \wedge, \vee$ והסימנים $\forall, (, \in, \mathbb{R}, \leq, 0$.

דוגמה לכלל הזה היא: מאי השוויון $3.14 \leq \pi$ (על ידי כפל במינוס חצי) לקבל את אי השוויון $-0.5\pi \leq -1.57$.

$$(5) \quad \{x \in \mathbb{R} \mid \forall y \left[(y \in \{t \in \mathbb{N} \mid t > 3\} \rightarrow (y > x)) \right]\}$$

כתבו אותה בצורה $\{x \in \mathbb{R} \mid \dots\}$, כך שבאגף ימין לא יופיע אף משתנה חוץ מ- x .

(6) תארו במדויק את הקבוצה:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{N} (x = y^2) \rightarrow (x > 2)\} - \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1\}$$

תרגול בשיטות ההוכחה השונות

שאלות

(1) הוכיחו:

- אם $m, n \in \mathbb{Z}$ מספרים עוקבים, אז $m+n$ אי-זוגי.
 - אם $m, n \in \mathbb{Z}$ מספרים עוקבים, אז mn זוגי.
 - אם $m, n \in \mathbb{Z}$ מספרים אי-זוגיים, אז $m+n$ זוגי.
 - אם $n \in \mathbb{N}$ אי-זוגי, אז קיימים $m, k \in \mathbb{N}$ כך ש- $m^2 - k^2 = n$.
- רמז: חפשו $m, k \in \mathbb{N}$ עוקבים.
- אם $a, b, c \in \mathbb{N}$ וגם $a|b$ וגם $a|c$ אז $a|b+c$.

(2) הוכיחו:

- קיימים אינסוף מספרים ראשוניים (נסו בצורה ישירה ועל דרך השלילה).
 - קיימים $x, y \notin \mathbb{Q}$ כך ש- $x^y \in \mathbb{Q}$.
 - יש אינסוף שלשות פיתגוריות.
- כלומר, יש אינסוף פתרונות בשלמים למשוואה $x^2 + y^2 = z^2$.
- לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים רצף של n מספרים טבעיים עוקבים, שאף אחד מהם אינו ראשוני.

(3) הוכיחו בדרך השלילה:

- שלא קיים טבעי הכי גדול.
- שלכל מספר טבעי קיים מספר טבעי גדול ממנו.
- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
- שלא קיימים $p, t \in \mathbb{Q}$ כך ש- $p-t \notin \mathbb{Q}$.
- שלא קיימים $p \in \mathbb{Q}, r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ כך ש- $p+r \in \mathbb{Q}$.
- שלא קיים $q \in \{x | 0 < x \in \mathbb{Q}\}$ כך ש- $q = \min \{x | 0 < x \in \mathbb{Q}\}$.
- שלכל $q \in \{x | 0 < x \in \mathbb{Q}\}$ מתקיים $q \neq \min \{x | 0 < x \in \mathbb{Q}\}$.

4 הוכיחו בקונטרה-פוזיציה :

- א. אם $n \in \mathbb{N}$, כך ש- n^2 זוגי, אז n זוגי.
 ב. אם $m, n \in \mathbb{Z}$ מספרים, כך ש- m זוגי, אז n זוגי או m זוגי.
 ג. אם $m, n \in \mathbb{Z}$ מספרים, כך ש- m אי-זוגי, אז n אי-זוגי וגם m אי-זוגי.
 ד. אם $x, y \in \mathbb{R}$, כך ש- $x+y$ אי-רציונלי, אז לפחות אחד מהמספרים x, y הוא אי-רציונלי.
 ה. אם A, B קבוצות ו- x איבר, כך שמתקיים $x \in A \cap B$, אז $x \in A$ או $x \in B$.
 ו. אם A, B קבוצות ו- x איבר, כך שמתקיים $x \in A \cup B$, אז $x \in A$ וגם $x \in B$.
 ז. אם A, B קבוצות ו- x איבר, כך שמתקיים $x \in A$, אז $x \in A \cap B$.
 ח. אם $A - (B - C) \subseteq (A - B) - C$, אז $A \cap C = \emptyset$.
 ט. אם $(A \cup B) - C \subseteq A - B$, אז $A(-C) \cap B = \emptyset$.
 י. אם $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$, אז $(A \subseteq B) \vee (B \subseteq A)$.

5 ענו על הסעיפים הבאים :

- א. הוכיחו, תוך הפרדה למקרים, שאם $z \in \mathbb{Z}$, כך ש- z לא מתחלק ב-3, אז $z^2 = 1 \pmod{3}$.
 ב. הוכיחו או הפריכו:
 אם $z \in \mathbb{Z}$, כך ש- z לא מתחלק ב-4, אז z^2 לא מתחלק ב-4.

6 הוכיחו בדרך השלילה :

- א. אם $n \in \mathbb{N}$, כך ש- $n \pmod{3} = 2$, אז n הוא לא ריבוע של אף מספר טבעי.
 ב. אם $(A - C) \cup (C - B) \subseteq A \cap B$, אז $A \subseteq B$.
 ג. אם $(C - A) \cup (B - C) \subseteq A - B$, אז $B \subseteq A$.

מתמטיקה בדידה

פרק 4 - אינדוקציה

תוכן העניינים

1. אינדוקציה..... 34

אינדוקציה

שאלות

הוכיחו באינדוקציה את הטענות הבאות:

$$1+3+5+7+\dots+(2n-1)=n^2 \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n (4k+1) = n(2n+3) \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{n}{4n+1} \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^n 2^k = 2(2^n - 1) \quad (6)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{3}{4^{k-1}} = 4 - \frac{1}{4^{n-1}} \quad (7)$$

$$\sum_{k=1}^{3n} k = 1\frac{1}{2}n(3n+1) \quad (8)$$

$$\sum_{k=1}^{3n} (4k-1) = 3n(6n+1) \quad (9)$$

$$\sum_{k=1}^n (n+k) = \frac{n}{2}(3n+1) \quad (10)$$

$$\sum_{k=1}^n 3^{n+k} = \frac{3^{n+1}(3^n-1)}{2} \quad (11)$$

$$13 \mid (4^{2n+1} + 3^{n+2}) \quad (12)$$

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} < \frac{2+3}{2} \quad (13)$$

(14) הוכיחו באינדוקציה על n שהנוסחה הנתונה היא אכן פתרון לנוסחה הרקורסיבית הנתונה:

$$\text{לכל } n > 1, a_n = 0, a_{n-1} \mid 2a_{n-1} \mid a_n = 0, \text{ כאשר } a_0 = a_1 = 1.$$

$$\text{הוכיחו באינדוקציה כי: לכל } n \geq 0, a = (-1)^n (1 - 2n).$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מתמטיקה בדידה

פרק 5 - קומבינטוריקה בסיסית

תוכן העניינים

1. מבוא לקומבינטוריקה בסיסית 36
2. קומבינטוריקה יותר לעומק 42

מבוא לקומבינטוריקה בסיסית

שאלות

(1) חשבו, ללא מחשבון:

א. $\frac{4! \cdot 7!}{0! \cdot 10!}$

ב. $\frac{14! \cdot 20!}{10! \cdot 17!}$

(2) הוכיחו את הזהויות הבאות:

א. $(n-2)!(n^2 - n) = n!$

ב. $(n-1)!n^2 + n! = (n+1)!$

ג. $\frac{1}{(n-1)!} = \frac{(n+2)^2}{(n+2)!} + \frac{n^2 - 2}{(n+1)!}$

(3) חשבו ללא מחשבון:

א. $\binom{5}{3}$

ב. $\binom{4}{1}$

ג. $\binom{10}{0}$

ד. $\frac{1}{13} \binom{14}{11}$

(4) הוכיחו את הזהויות הבאות:

א. $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$

ב. $\frac{k}{n} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$

ג. $\frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

ד. $\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1} = \binom{2n+1}{n}$

- 5) ענו על הסעיפים הבאים :
- א. כמה תוצאות אפשריות יש להטלת קובייה ואחר כך סביבון?
רשמו את כל התוצאות.
- ב. כמה תוצאות אפשריות יש להטלת קובייה ואחר כך סביבון ואחר כך מטבע? רשמו את כל התוצאות.
- ג. עושים ניסוי ומטילים מטבע.
אם יצא עץ אז מטילים סביבון ואם יצא פלי אז מטילים שוב את המטבע ולאחר מכן סביבון.
כמה תוצאות אפשריות לניסוי?
למשל (פלי, פלי, גדול) ו-(עץ, היה) הן תוצאות אפשריות.
רשמו את כל התוצאות.
- 6) ענו על הסעיפים הבאים :
- א. מהאותיות ב, ג, ד, ה ניצור מילה בת שתי אותיות, לא בהכרח בעלת משמעות. רשמו את כל המילים האפשריות ואשרו עם עיקרון הכפל.
- ב. מהאותיות א, ב, ג, ד, ה ניצור מילה בת שלוש אותיות, לא בהכרח בעלת משמעות. כמה מהמילים הנ"ל מתחילות באות א וגם א מופיעה פעם אחת בדיוק?
(רמז : סעיף קודם)
- 7) במסעדה מציעים ארוחה עסקית, המורכבת ממנה ראשונה, עיקרית ושתייה. המנה הראשונה יכולה להיות סלט ירקות, סלט פטריות, סלט כבד קצוץ או מרק עוף. המנה העיקרית יכולה להיות סטייק אנטרקוט, שניצל, כבד אווז, דג, לזניה טבעונית, או שניצל מהצומח, ולשתייה מוצע, קפה, תה, לימונדה או קולה.
- א. כמה ארוחות אפשריות יש?
ב. כמה ארוחות אפשריות יש אם אין שתיה חמה?
ג. כמה ארוחות אפשריות יש למסעדה להציע לסועדת טבעונית?
- 8) כמה תת קבוצות יש לקבוצה $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,
- א. בנות שלושה איברים? רשמו את כולן.
ב. בנות ארבעה איברים? השוו לסעיף א'.
ג. רשמו את כל התמורות של 0001111 והשוו לסעיפים קודמים.
ד. בכמה תמורות של המספרים 001122222222 כל 0 חייב להופיע ליד 1?
- 9) בכמה אופנים שונים ניתן להרכיב זוג מתלמידי כיתות א', אם בכיתה א' יש 1 יש 20 בנים ובכיתה א' 2 יש 15 בנות, כך ש :
- א. ללא הגבלה.
ב. זוג מעורב (בן ובת).
ג. זוג חד מיני (שני בנים, או שתי בנות).

10 בלוטו יש 45 מספרים וצריך לנחש 6 מספרים ואת המספר החזק מתוך הקבוצה $\{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$. כמה אפשרויות יש?

11 בכמה אופנים שונים ניתן לבחור מספר תלת ספרתי כך ש:
 א. ללא הגבלה (זכרו שמספר לא יכול להתחיל באפס).
 ב. כל ספרותיו שונות.
 ג. כל ספרותיו שונות וסדר הספרות לא משנה?
 (למשל 123 ו-321 נחשבים אותו דבר)
 ד. כל ספרותיו שונות וגם בסדר יורד. כלומר, ספרת המאות גדולה או שווה מספרת העשרות גדולה או שווה מספרת היחידות.
 ה. כל ספרותיו שונות וגם בסדר עולה. כלומר, ספרת המאות קטנה או שווה מספרת העשרות קטנה או שווה מספרת היחידות.

12 כמה מספרים מורכבים מהמספרים 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, יש, כך ש:
 א. באורך 7?
 ב. באורך 7 וכל ספרה מופיעה פעם אחת לכל היותר?
 ג. באורך 7 וכל ספרה מופיעה פעם אחת לפחות?

13 בכמה אופנים שונים ניתן להשיב 5 זוגות נשואים על ספסל בן 10 מקומות (ענו גם לגבי שולחן עגול) כך ש:
 א. ללא הגבלה.
 ב. כל אישה תשב לצד בן-זוגה.
 ג. גבר ישב רק ליד אישה.
 ד. אף שתי נשים לא ישבו זו לצד זו ואף שני גברים לא ישבו זה לצד זה.

14 כמה מספרים שונים בני חמש ספרות ניתן להרכיב מהספרות 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, כך ש:

- א. ללא הגבלה.
- ב. המספר מתחיל בספרה 2.
- ג. המספר לא מתחיל בספרה 2.
- ד. כל הספרות שונות.
- ה. הספרות 1 וגם 2 לא מופיעות.
- ו. בדיוק אחת מן הספרות 1 או 2 מופיעה.
- ז. ספרות 1 וגם 2 מופיעות.
- ח. חזרו על סעיפים ה-ז כאשר כל הספרות שונות.
- ט. כל הספרות שונות והספרות 1, 2 מופיעות צמודות.
- י. כל הספרות שונות והספרות 1, 2 מופיעות ולא צמודות.
- יא. כל הספרות שונות והספרות 1, 2, 3 מופיעות וצמודות.
- יב. כמו סעיף יא וגם הספרות 6, 7 מופיעות וצמודות.
- יג. כמו סעיף יא וגם הספרות 6, 7 מופיעות ולא צמודות.

15 בכמה אופנים שונים ניתן להרכיב קוד סודי המורכב מארבע ספרות מתוך הספרות $0, 1, 2, 3, \dots, 9$, כך ש:

- ללא הגבלה?
 - הקוד מגדיר מספר זוגי?
 - הקוד מגדיר מספר המתחלק בחמש?
 - אין בקוד ספרות זהות?
 - יש בקוד לפחות שתי ספרות זהות?
 - יש בקוד בדיוק שתי ספרות זהות?
 - אין בקוד את הספרה 5?
 - הספרה 5 חייבת להופיע בקוד?
 - יש בקוד לפחות אחד מהספרות 4, 5?
 - אין בקוד לא את הספרה 4 ולא את הספרה 5?
 - אם יש את הספרה 5 אז אין ספרה יותר גדולה מ-5?
- הדרכה: רשמו שני מספרים המקיימים את התנאי ושניים שאינם מקיימים את התנאי וכתבו מהו המשלים של סעיף זה: נסחו זאת על דרך החיוב. כלומר, בלי להשתמש במילים 'אין' ו-'לא'.

16 נתונה הקבוצה $A = \{1, 2, 3, \dots, 17\}$. כמה תת קבוצות יש ל- A כך ש:

- ללא הגבלה?
- בנות 3 איברים?
- בעלות 3 איברים לפחות?
- מכילות רק מספרים זוגיים? רק אי זוגיים?
- מכילים רק מספרים מאותה זוגיות?
- מכילות אי זוגי אחד לפחות?
- מכילות זוגי אחד לפחות וגם אי זוגי אחד לפחות?
- אם הן מכילות את 1 אז מכילות גם את 2 (סעיף קשה; אפשר לנסות בעזרת משלים)
- מכילות ממש את $\{1, 2, 3\}$.

17 בכמה אופנים שונים ניתן להכניס 7 כדורים ל-13 תאים, כך ש:

- הכדורים שונים ומותר יותר מכדור בתא?
- הכדורים זהים ומותר יותר מכדור בתא?
- הכדורים שונים ואסור יותר מכדור בתא?
- הכדורים זהים ואסור יותר מכדור בתא?
- הכדורים שונים ויש תא יחיד ובו שני כדורים ובכל היתר כדור יחיד?
- הכדורים זהים ויש תא יחיד ובו שני כדורים ובכל היתר כדור יחיד?

- 18** נתונים חמישה כדורים ונתונים שבעה צבעים שונים (למשל שחור, לבן, אפור, צהוב אדום כחול וסגול).
בכמה אופנים שונים ניתן לצבוע את הכדורים ולסדרם בשורה אם:
- סדר הכדורים בשורה משנה.
 - סדר הכדורים בשורה לא משנה.
- כלומר, ארבעה כדורים שחורים ואחד לבן זה נחשבו אותו דבר לא משנה היכן הלבן ממוקם.
- 19** עבור $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{x, y\}$, חשבו כמה פונקציות יש מ- A ל- B ומ- B ל- A , ואשרו עם עיקרון הכפל.

תשובות סופיות

- (1) א. $\frac{1}{30}$ ב. $\frac{1001}{285}$
- (2) הוכחה.
- (3) א. 10 ב. 4 ג. 1 ד. 28
- (4) הוכחה.
- (5) א. 24 ב. 48 ג. 12
- (6) א. 16 ב. 16 ג. 16
- (7) א. 96 ב. 48 ג. 16
- (8) א. 35 ב. 35 ג. 35 ד. 180
- (9) א. 595 ב. 300 ג. 295
- (10) 81,450,600
- (11) א. 900 ב. 648 ג. $\binom{10}{3}$ ד. $\binom{10}{3}$ ה. $\binom{9}{3}$
- (12) א. $\binom{7}{7}$ ב. אין ג. אין
- (13) א. ספסל: 10!, מעגל: 9! ב. ספסל: 5!·2⁵, מעגל: 4!·2⁵ ג. ספסל: 2!(5!)², מעגל: 4!·5! ד. ספסל: 2!(5!)², מעגל: 4!·5!
- (14) א. 7⁵ ב. 7⁴ ג. 6·7⁴ ד. 3·4·5·6·7 ה. 5⁵
- ו. $2(6^5 - 5^5)$ ז. $7^5 - 2 \cdot 6^5 + 5^5$ ח. 5! (ה) ח. 10·5! (ו)
- ט. 4·5! י. 6·5! יא. 216 יב. 24 יג. 12
- (15) א. 10⁴ ב. 5·10³ ג. 2·10³ ד. 10·9·8·7
- ה. $10^4 - 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ ו. $9^4 \cdot \binom{4}{2} \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$ ז. 9⁴
- ח. $10^4 - 9^4$ ט. $10^4 - 8^4$ י. 8⁴ יא. $9^4 + 6^4 - 5^4$
- (16) א. 2¹⁷ ב. 680 ג. 130,918 ד. זוגיים: 2⁸, אי זוגיים: 2⁹, אותה זוגיות: 768
- ה. לפחות אי זוגי אחד: 130,816, לא מאותה זוגיות: 130,304
- ו. 98,304 ז. 16,383
- (17) א. 13⁷ ב. $\binom{19}{7}$ ג. $\binom{131}{61}$ ד. $\binom{13}{7}$
- ה. $13 \binom{7}{2} \binom{12}{5} 5!$ ו. $13 \cdot \binom{16}{5}$
- (18) א. 7⁵ ב. $\binom{11}{5}$
- (19) מ-A ל-B: 8, מ-B ל-A: 9

קומבינטוריקה יותר לעומק

שאלות

- (1) בכמה אופנים ניתן לסדר 10 אנשים בשורה כך ש:
- ללא הגבלה.
 - אבי ובני סמוכים.
 - אבי, בני וגדי סמוכים.
 - אבי ובני לא סמוכים.
 - אבי ובני סמוכים וגם גדי ודני סמוכים.
 - אבי ובני סמוכים וגדי ודני לא סמוכים.
- (2) בכיתה בה יש 10 בנים ו-15 בנות יש להרכיב נבחרת כדורסל בה יש לפחות שני בנים ולפחות שתי בנות. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת?
- (3) בכמה אופנים שונים ניתן להניח 8 צריחים על לוח שחמט 8×8 מבלי שאף צריח יאיים על חברו כך ש:
- (צריח מאיים על חברו אם הוא נמצא באותה שורה או באותה עמודה של חברו)
- כל הצריחים הם לבנים.
 - שלושה צריחים הם לבנים וחמישה הם שחורים.
 - הצריחים נלקחים מתוך שקית ובה מלאי בלתי מוגבל של צריחים לבנים ומלאי בלתי מוגבל של צריחים שחורים.
- (4) בכמה מספרים 6 ספרתיים מופיעה הספרה:
- 0 פעם אחת בדיוק.
 - 0 פעם אחת לפחות.
 - 7 פעם אחת לפחות.
 - 7 פעם אחת בדיוק.
- יש לזכור שמספר לא יכול להתחיל בספרה 0.
- (5) ענו על הסעיפים הבאים:
- יהי n טבעי. בכמה תת קבוצות של $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ יש אי זוגי אחד לפחות?
 - בכמה תת קבוצות של $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ יש לפחות $n+1$ איברים?

- 6) בכמה אופנים שונים ניתן לחלק 10 לימונדות זהות, כוס קולה 1 וכוס קינלי 1 ל-4 תלמידים צמאים, כך שכל תלמיד מקבל לפחות משקה אחד והקולה והקינלי ניתנים לתלמידים שונים?
- 7) בכמה דרכים ניתן לחלק 400 כדורים זהים ל-3 תאים, כך ש:
- יש תא ובו יותר מ-200 כדורים.
 - בכל תא מספר זוגי של כדורים.
 - בשני תאים מתוך השלוש מספר אי זוגי של כדורים ובתא אחד מספר זוגי של כדורים.
- 8) 7 אנשים נכנסים למעלית בבניין בן 13 קומות. בכמה אופנים הם יכולים ללחוץ על כפתורי המעלית כך ש:
- המעלית תעצור בקומה החמישית? (יתכן ותמשיך הלאה משם)
 - המעלית תעצור בקומה החמישית לכל היותר.
 - המעלית תגיע לפחות עד הקומה החמישית.
 - המעלית תעצור בקומה החמישית (ולא תמשיך משם הלאה).
- 9) בכמה דרכים ניתן לחלק n כדורים לבנים זהים ו- n כדורים צבעוניים (שונים) ל- $2n$, כך שבכל תא יהיה:
- לכל היותר כדור אחד.
 - לכל היותר כדור לבן אחד ואין מגבלה על מספר הצבעוניים.
 - לכל היותר כדור צבעוני אחד ואין הגבלה על מספר הלבנים.
 - מספר שווה של לבנים וצבעוניים.
- 10) במלבן בן k שורות ו- m עמודות יש לסמן \times או \circ בכל משבצת.
- הראו כי יש $(2^m - 1)^k$ דרכים לעשות זאת, כך שבכל שורה יופיע \times אחד לפחות.
 - בכמה דרכים ניתן לעשות זאת, כך שיופיע \circ אחד לפחות בכל עמודה.
 - הסיקו כי $2^{mk} \leq (2^m - 1)^k + (2^k - 1)^m$.
- 11) ענו על הסעיפים הבאים:
- כמה תמורות של $1, 2, 3, \dots, n$ מספר 2 מופיע בין 1 ל-3? (לאו דווקא צמודים. למשל, עבור $n = 7$ התמורה 4352981 חוקית, כי 2 נמצא בין 1 ל-3)
 - בכמה תמורות של $1, 2, 3, \dots, 5$ מימין למספר 3 אין מספרים קטנים מ-3. (למשל 24135 חוקית ואילו 43152 לא חוקית)

- 12** ענו על הסעיפים הבאים :
- א. בכמה אופנים שונים ניתן לחלק 12 אנשים לשלושה זוגות ושתי שלשות?
 ב. כמו סעיף א, אך בנוסף דני ודנה לא נמצאים באותה קבוצה.
- 13** כמה פתרונות בשלמים אי-שליליים יש לכל אחת מהמשוואות הבאות?
- א. $x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 20$
 ב. $x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 14$
 ג. $(x_1 + x_2 + x_3)(x_4 + x_5 + x_6) = 18$
- 14** בכמה דרכים ניתן לבחור ועדה בת n אנשים מתוך n זוגות נשואים, כך ש :
- א. בוועדה לא ישתתף אף זוג נשוי.
 ב. מספר הגברים יהיה שווה למספר הנשים.
 ג. מספר הגברים יהיה קטן ממש ממספר הנשים.
- 15** מצאו כמה פונקציות $f: \{1, 2, 3, \dots, 3n-1, 3n\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$ מקיימות את התנאי הבא: לכל איבר בתמונה יש בדיוק 3 מקורות.
- 16** מה מספר הדרכים לפזר 50 כדורים אדומים ו-20 כדורים כחולים ל-10 תאים, כך שבכל תא מספר הכדורים האדומים יהיה לפחות כמספר הכדורים הכחולים?
- 17** בכמה דרכים ניתן לחלק קבוצה בגודל $2n$ לקבוצה בגודל n ולזוגות? (ניתן להניח כי n זוגי)
- 18** בכמה דרכים ניתן לסדר בשורה 8 פילים שונים, 2 שועלים זהים ושתי תרנגולות זהות, כך שהפילים מסודרים משמאל לימין על פי משקלם בסדר עולה, ואף שועל לא יהיה צמוד לתרנגולת?
- 19** בכמה דרכים ניתן לחלק 100 כדורים לבנים ו-100 כדורים צבעוניים (כל אחד בצבע שונה) ל-250 תאים, כך שיתקיימו שני התנאים הבאים: יהיה לפחות תא אחד שמכיל יותר מכדור לבן אחד, ויהיה לפחות תא אחד שמכיל יותר מכדור צבעוני אחד.
- 20** בכמה דרכים ניתן לסדר n גברים ו- n נשים במעגל כך שבני אותו מין לא ישבו זה לצד זה? כנ"ל לגבי שורה.

- (21)** יש לבחור קבוצה של שישה ילדים מבין תלמידי כיתות א-1 ו-2א, באופן ששלושה מהם יהיו מ-1א ושלושה מ-2א. מספר הבנים בקבוצה צריך להיות שווה למספר הבנות בקבוצה (3 ו-3). ב-1א יש 10 בנים ו-15 בנות וב-2א יש 15 בנים ו-10 בנות. בכמה אופנים ניתן לבחור את הקבוצה?
- (22)** בכמה קבוצות של n כדורים ב-10 צבעים יש לפחות כדור אחד מכל צבע?
- (23)** כמה פונקציות $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ (כאשר $n \geq 1$) מקיימות את התנאי $f(k) \neq f(k+1)$ לכל $1 \leq k \leq n-1$?
- (24)** כמה פונקציות $f: \{1, 2, 3, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$ חח"ע ועל יש, המקיימות $f(k) - k$ זוגי לכל $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$?
- (25)** בכמה דרכים ניתן לחלק 60 כדורים צבעוניים (כל אחד בצבע שונה) ו-90 כדורים לבנים זהים ל-100 תאים, כך שיתקיימו שני התנאים הבאים גם יחד: יהיה לפחות תא אחד שמכיל יותר מכדור צבעוני אחד וכמו כן בכל תא יהיו לכל היותר 50 כדורים לבנים.
- (26)** בכמה דרכים ניתן לחלק 4 בנות, 2 תפוזים, ו-4 תפוחים ל-10 אנשים, כך שכל אחד יקבל בדיוק פרי אחד? שימו לב שפירות מאותו סוג נחשבים זהים.
- (27)** בכמה דרכים ניתן לבנות שורה מ- $k \geq 0$ כדורים לבנים זהים ו- $m \geq 0$ כדורים צבעוניים שונים (ושונים מלבן)?
- (28)** כמה תת קבוצות בגודל 7 יש לקבוצה $A = \{1, 2, 3, \dots, 12, 13\}$, שיש בהם שני איברים עוקבים?
- (29)** תהי $A_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, כאשר $n \in \mathbb{N}_{odd}$, ותהי a_1, a_2, \dots, a_n תמורה כלשהי של A_n . הוכיחו כי המכפלה $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdots (a_n - n)$ בהכרח זוגית (יש לפתור).
- (30)** מטילים n קוביות. כמה תוצאות יש אם:
- הקוביות שונות.
 - הקוביות זהות.

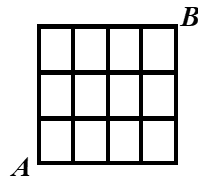
(31) נתונה הקבוצה $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

כמה זוגות של קבוצת (C, D) , $C, D \subseteq A$, כך ש:

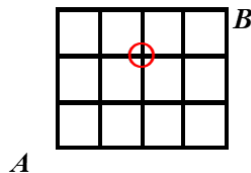
- ללא הגבלה. עבור $A = \{1, 2\}$, רשמו את כל הפתרונות.
- $C \cap D = \emptyset$. עבור $A = \{1, 2\}$, רשמו את כל הפתרונות.
- $C \subseteq D$. עבור $A = \{1, 2\}$, רשמו את כל הפתרונות.
- $C \cup D = A$. עבור $A = \{1, 2\}$, רשמו את כל הפתרונות.
- אם $2 \in C$, אז $2 \in D$ (עבור $A = \{1, 2, 3\}$, הדגימו זוג שמקיים את הדרישה וזוג שאינו מקיים את הדרישה).
- אם יש מספר אי זוגי ב- C , אז יש כזה גם ב- D (שימו לב שלא נתון ש- n הוא זוגי).

(32) חרגול נמצא בנקודה A בשריג המתואר להלן. בכל שלב יכול החרגול להתקדם צעד אחד ימינה או צעד אחד למעלה.

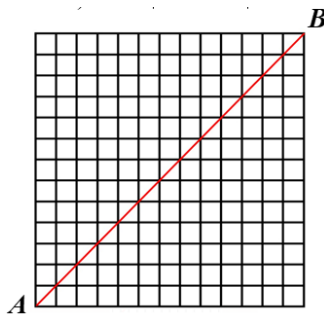
א. בכמה אופנים שונים יכול החרגול להגיע מנקודה A לנקודה B ?



ב. בכמה אופנים הוא יכול לעשות זאת מבלי לעבור דרך הנקודה המסומנת להלן $(2, 2)$?



- 33** החרגול החביב מהשאלה הקודמת לא התעייף (מדובר בחרגול ספורט) ונמצא עכשיו בנקודה A בשריג $n \times n$ המתואר להלן (13×13 להמחשה). תזכורת: בכל שלב יכול החרגול להתקדם צעד אחד ימינה או צעד אחד למעלה. בכמה דרכים יכול החרגול להגיע מנקודה A לנקודה B ? (שימו לב שהשריג בשאלה הוא $n \times n$)
- ללא הגבלה.
 - מבלי לעבור דרך אף אחד מהנקודות $(5,9), (7,3)$? (מה המשלים של הסעיף?)
 - מבלי לעבור דרך אף אחד מהנקודות $(7,9), (5,3)$?
 - מבלי לגעת באלכסון האדום? (פרט לנקודת ההתחלה ונקודת הסיום)



- 34** למורה צילה מאגר בלתי מוגבל של חרוזים בשלושה צבעים: אדום, צהוב וירוק (חרוזים מאותו צבע נחשבים זהים). בכיתה ג' 27 תלמידים. בשיעור מלאכה המורה צילה נותנת לכל ילד שקית והילד בוחר חמישה חרוזים ומכניס לשקית. בסוף השיעור המורה מכניסה את כל השקיות למחסן. כמה תכולות מחסן אפשריות?

תשובות סופיות

- (1) א. $10!$ ב. $2!9!$ ג. $3!8!$ ד. $8!9!$ ה. $4!8!$ ו. $14!8!$
(2) שתי דרכים.
- (3) א. $8!$ ב. $8! \binom{8}{3}$ ג. $8! \cdot 2^8$
- (4) א. $5 \cdot 9^5$ ב. $9 \cdot 10^5 - 9^6$ ג. $9 \cdot 10^5 - 8 \cdot 9^5$ ד. $9^5 + 5 \cdot 8 \cdot 9^4$
- (5) א. $2^{2n} - 2^n$ ב. $|A| = \frac{2^{2n} - \binom{2n}{n}}{2}$
- (6) $4 \cdot 3 \cdot \binom{11}{3}$
- (7) א. $3 \cdot \binom{201}{2}$ ב. $\binom{202}{2}$ ג. $3 \cdot \binom{201}{2}$
- (8) א. $13^7 - 12^7$ ב. 5^7 ג. $13^7 - 4^7$ ד. $5^7 - 4^7$
- (9) א. $\binom{2n}{n} n!$ ב. $\binom{2n}{n} \cdot (2n)^2$ ג. $\binom{2n}{n} \cdot n! \cdot \binom{3n-1}{n}$ ד. $(2n)^2$
- (10) א. ראו בסרטון. ב. $(2^k - 1)^m$ ג. שאלת הוכחה.
- (11) א. $\frac{1}{3} 5!$ ב. $\frac{1}{3} 5!$
- (12) א. $\binom{12}{2} \binom{10}{2} \binom{8}{2} \binom{6}{3} \binom{3}{3} \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2!}$
- ב. $\binom{12}{2} \binom{10}{2} \binom{8}{2} \binom{6}{3} \binom{3}{3} \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2!} - \left(\binom{10}{2} \binom{8}{2} \binom{6}{3} \binom{3}{3} \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2!} + 10 \binom{9}{2} \binom{7}{2} \binom{5}{2} \cdot \frac{1}{3!} \right)$
- (13) א. $\binom{26}{20} \binom{26}{6}$ ב. $\binom{16}{2} + \binom{11}{2} + \binom{6}{2}$ ג. $2 \left[3 \cdot \binom{20}{2} + \binom{4}{2} \cdot \binom{11}{2} + \binom{5}{2} \cdot \binom{8}{2} \right]$
- (14) א. 2^n ב. $\binom{n}{\frac{n}{2}}$ ג. n זוגי: $\frac{\binom{2n}{n} - \binom{n}{\frac{n}{2}}}{2}$, n אי זוגי: $\frac{\binom{2n}{n}}{2}$
- (15) $\frac{(3n)!}{6^n}$
- (16) $\binom{29}{9} \binom{39}{9}$
- (17) $\frac{(2n)!}{n! \left(\frac{n}{2}\right)! 2^{\frac{n}{2}}}$

1638 (18)

$$\left(\binom{349}{100} - \binom{250}{100} \right) \left(250^{50} - \frac{250!}{200!} \right) \quad (19)$$

$$2(n!)^2 \quad (20)$$

$$\binom{10}{3}^2 + \binom{10}{2}^2 + \binom{15}{1}^2 + \binom{10}{1} \binom{15}{2}^2 + \binom{15}{3}^2 \quad (21)$$

$$\binom{n-1}{9} \quad (22)$$

$$n(n-1)^{n-1} \quad (23)$$

$$\left[\frac{n}{2} \right]! \left[\frac{n}{2} \right]! \quad (24)$$

$$\left(100^{60} - \frac{100!}{40!} \right) \cdot \left(\binom{189}{90} - 100 \cdot \frac{138}{39} \right) \quad (25)$$

$$\frac{10!}{4!4!2!} \quad (26)$$

$$\frac{(m+k)!}{k!} \quad (27)$$

$$2^{13} - 1 \quad (28)$$

(29) שאלת הוכחה.

$$\binom{n+5}{5} \quad \text{ב.} \quad 6^n \quad \text{א.} \quad (30)$$

$$4^n - \left(2^n - 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right) 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \quad \text{ג.} \quad 3 \cdot 4^{n-1} \quad \text{ה.} \quad 3^n \quad \text{ד.} \quad 3^n \quad \text{ג.} \quad 3^n \quad \text{ב.} \quad 4^n \quad \text{א.} \quad (31)$$

$$17 \quad \text{ב.} \quad \binom{7}{4} \quad \text{א.} \quad (32)$$

$$|\bar{A} \cap \bar{B}| = \binom{2n}{n} - \left(\binom{10}{3} \binom{2n-10}{n-3} + \binom{14}{5} \binom{2n-14}{n-5} \right) \quad \text{ב.} \quad \binom{2n}{n} \quad \text{א.} \quad (33)$$

$$|\bar{A} \cap \bar{B}| = \binom{2n}{n} - \left(\binom{8}{3} \binom{2n-8}{n-3} + \binom{16}{7} \binom{2n-16}{n-7} - \binom{8}{5} \binom{8}{2} \binom{2n-16}{7} \right) \quad \text{ג.}$$

$$\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad \text{ד.}$$

$$\binom{47}{20} \quad (34)$$