

# מתמטיקה



## תוכן העניינים

1	מבוא לאלגברה
47	משוואות אלגבריות
69	אי שוויונים אלגבריים
85	תורת הקבוצות
104	סדרות
128	אינדוקציה מתמטית
142	סימן הסכימה (סיגמה)
145	הבינום של ניוטון
149	יחסים
161	קומבינטוריקה
(ללא ספר)	סטטיסטיקה
(ללא ספר)	הסתברות - פרק מבוא
202	הסתברות קלאסית
(ללא ספר)	התפלגות נורמלית
226	חוקי החזקות והשורשים
236	משוואות ואי-שוויונים מעריכיים
246	חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים
262	בעיות גדילה ודעיכה
275	חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים
290	חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית פולינום
303	חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית מנה ושורש
(ללא ספר)	חשבון דיפרנציאלי - הקשר שבין גרף הפונקציה וגרף הנגזרת
341	חשבון דיפרנציאלי - פונקציות מעריכיות

# תוכן העניינים

357	24. חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות.....
373	25. חשבון דיפרנציאלי - בעיות קיצון.....
395	26. חשבון אינטגרלי - האינטגרל הכללי.....
402	27. חשבון אינטגרלי - האינטגרל המסוים וחישובי שטחים.....
430	28. חשבון אינטגרלי - פונקציה מעריכית, לוגריתמית וחזקה.....
448	29. וקטורים גיאומטריים.....
462	30. וקטורים אלגבריים.....
504	31. אלגברה ליניארית - פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות.....
517	32. אלגברה ליניארית - מטריצות.....

# מתמטיקה

## פרק 1 - מבוא לאלגברה

### תוכן העניינים

1	1. מספרים מכוונים
5	2. חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים
7	3. סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים
8	4. שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים
14	5. כפל וחילוק שברים
16	6. חיבור וחסור שברים
20	7. בעיות יסודיות באחוזים
22	8. חזרה על תבניות מספר
24	9. כינוס איברים
26	10. פישוט ביטויים על ידי פתיחת סוגריים
28	11. פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר
30	12. פירוק לגורמים של ביטויים אלגברים
33	13. פירוק הטרינום
35	14. שברים אלגברים
39	15. כפל וחילוק של שברים אלגברים
41	16. חיבור וחסור של שברים אלגברים
45	17. שברים כפולים

## מספרים מכוונים:

### סיכום כללי:

מספרים מכוונים הם מספרים שיכולים לקבל סימן חיובי או שלילי, כגון:

- בקניון גדול ישנן קומות 1, 2, 3, 4, וכן חניונים הממוקמים בקומות 1-, 2-, ו-3-.
- גובה פני הים מוגדר להיות 0 מטרים. העיר חיפה נמצאת כ-103 מטרים מעל פני הים בעוד שים המלח נמצא בגובה 426- מטרים.

### כללים:

- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים זהים, מחברים את המספרים עצמם והסימן נשאר.
- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים מנוגדים, מחסירים את המספרים זה מזה (הקטן מהגדול) וסימן התוצאה כסימן המספר הגדול מביניהם.
- כפל וחילוק יתבצע בשני חלקים:
  - ביצוע הפעולה על המספרים עצמם.
  - קביעת הסימן של התוצאה באופן הבא:
    - כפל או חילוק של שני מספרים בעלי אותו סימן - התוצאה תהיה חיובית.
    - כפל או חילוק של שני מספרים שונים סימן - התוצאה תהיה שלילית.

### הערה:

אם יש רצף של מכפלות (או חילוקים), סימן התוצאה תלוי במספר הפעמים שבהם מופיע סימן שלילי (-). אם הסימן מופיע מספר זוגי של פעמים התוצאה חיובית, ואם הוא מופיע מספר אי-זוגי של פעמים אזי התוצאה שלילית.

## שאלות:

(1) סמנו את המספרים הבאים על ציר המספרים בהתאמה:

$$-3\frac{1}{2}, 4, 1\frac{1}{3}, -5, -\frac{1}{2}, 2, 0, \frac{1}{2}, -2$$



(2) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

ב.  $-3-2$

א.  $3+2$

ד.  $-3+2$

ג.  $3-2$

ו.  $7+10$

ה.  $-1-4$

ח.  $-7+3$

ז.  $-6+5$

(3) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

ב.  $5-8-12+17$

א.  $5+7-23+1$

ד.  $-4-11+2+9$

ג.  $3-14+2+6$

ו.  $-7-13+5-3$

ה.  $6-21+3-7$

(4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

ב.  $4 \cdot (-7)$

א.  $4 \cdot 9$

ד.  $(-5) \cdot (-3)$

ג.  $(-6) \cdot (-5)$

ו.  $(-8) \cdot 5$

ה.  $(-2) \cdot 8$

ח.  $2 \cdot 3 \cdot 3$

ז.  $(-2) \cdot (-3) \cdot (-3)$

י.  $(-2) \cdot (-3) \cdot 3$

ט.  $(-2) \cdot 3 \cdot (-3)$

יב.  $(-2) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-2)$

יא.  $2 \cdot 3 \cdot (-3)$

יד.  $1 \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot 2$

יג.  $(-1) \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot 2$

5) מהו הסימן של תוצאת המכפלה בכל מקרה :

א.  $(-2) \cdot (-4) \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot (-6) \cdot (-5)$

ב.  $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot 6 \cdot (-5)$

ג.  $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot (-6) \cdot (-5)$

ד.  $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot 6 \cdot 5$

6) חשבו את ערכי הביטויים הבאים :

ב.  $(-30):3$

א.  $(-25):(-5)$

ד.  $(-32):(-4)$

ג.  $40:(-10)$

ו.  $4:(-16)$

ה.  $(-6):18$

7) חשבו את ערכי הביטויים הבאים :

ב.  $\frac{42}{-6}$

א.  $\frac{-60}{12}$

ד.  $\frac{-12}{-3}$

ג.  $\frac{32}{-4}$

8) מה התוצאה של כל אחת מהפעולות הבאות :

ב.  $(-2) \cdot 0$

א.  $0:5$

ד.  $6:0$

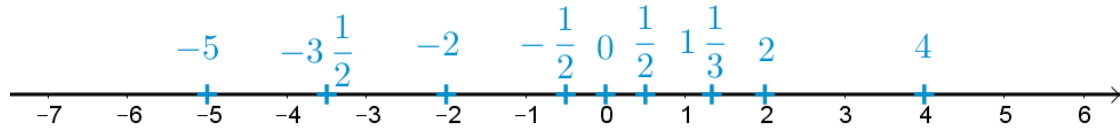
ג.  $0 \cdot (-3) \cdot 4$

ו.  $0-4$

ה.  $0+4$

## תשובות סופיות:

(1) להלן מערכת הצירים:



- (2) א. 5    ב. -5    ג. 1    ד. -1    ה. -5
- ו. 17    ז. -1    ח. -4
- (3) א. -10    ב. 2    ג. -3    ד. -4    ה. -19    ו. -18
- (4) א. 36    ב. -28    ג. 30    ד. 15    ה. -16
- ו. -40    ז. -18    ח. 18    ט. 18    י. 18
- יא. -18    יב. 36    יג. -16    יד. 16
- (5) א. +    ב. +    ג. -    ד. -
- (6) א. 5    ב. -10    ג. -4    ד. 8    ה.  $-\frac{1}{3}$     ו.  $-\frac{1}{4}$
- (7) א. -5    ב. -7    ג. -8    ד. 4
- (8) א. 0    ב. 0    ג. 0    ד. לא מוגדר    ה. 4    ו. -4

## חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

פעולת החזקה היא צורה מקוצרת שמייצגת פעולת כפל של אותו מספר בעצמו מספר פעמים. סימון החזקה הוא באופן הבא:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

כאשר  $a$  נקרא הבסיס ו- $n$  נקראת החזקה.

#### הערות:

- כאשר הבסיס חיובי, התוצאה תמיד תהיה חיובית ללא קשר האם החזקה היא זוגית או אי-זוגית.
- כאשר הבסיס שלילי, התוצאה תהיה חיובית אם החזקה היא זוגית ושלילית אם החזקה היא אי-זוגית.

#### הגדרה:

פעולת השורש היא הפוכה לפעולת החזקה והיא מאפשרת למצוא את בסיס החזקה. סימון השורש הוא באופן הבא:

$$\sqrt[n]{a}$$

כאשר  $a$  נקרא הבסיס ו- $n$  נקרא סדר השורש.

#### הערות:

- שורש למספר חיובי יכול להיות מסדר זוגי או אי-זוגי.
- שורש למספר שלילי יכול להיות מסדר אי-זוגי בלבד.

## שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- |              |               |
|--------------|---------------|
| א. $3^2$     | ב. $3^3$      |
| ג. $(-3)^3$  | ד. $(-2)^3$   |
| ה. $4^3$     | ו. $3^4$      |
| ז. $(-5)^3$  | ח. $10^4$     |
| ט. $-(-3)^4$ | י. $-5^4$     |
| יא. $-4^3$   | יב. $-(-2)^6$ |

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- |                    |                      |
|--------------------|----------------------|
| א. $\sqrt[3]{-27}$ | ב. $\sqrt[4]{625}$   |
| ג. $\sqrt[4]{-16}$ | ד. $\sqrt[5]{-32}$   |
| ה. $-\sqrt[4]{81}$ | ו. $-\sqrt[3]{1000}$ |

## תשובות סופיות:

- |         |          |             |         |         |         |
|---------|----------|-------------|---------|---------|---------|
| א. 9    | ב. 27    | ג. -27      | ד. -8   | ה. 64   | ו. 81   |
| ז. -125 | ח. 10000 | ט. -81      | י. -625 | יא. -64 | יב. -64 |
| א. -3   | ב. 5     | ג. לא מוגדר | ד. -2   | ה. -3   | ו. -10  |

## סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

סדר פעולות חשבון:

- פעולות כפל וחילוק קודמות לפעולות חיבור וחסור.
- פעולות חזקה ושורש קודמות לפעולות כפל וחילוק.
- סוגריים קודמים לכל.

שאלות:

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{ll}
 \sqrt{81} + 3 \cdot 2^3 - 40 : 8 & \text{(1)} \\
 3 + 4 \cdot [-3 + 4 \cdot (-2)] + \sqrt{10 + 6} & \text{(4)} \\
 -\sqrt{9} + 5^2 : (-4 - 1) - 24 : 12 \cdot 3 & \text{(6)} \\
 \sqrt[3]{-27} + 4 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3^3 & \text{(8)} \\
 (8 - \sqrt[3]{64}) \cdot (2 \cdot (-4) - \sqrt[3]{243}) & \text{(10)} \\
 \frac{3^2 \cdot (8 - 2 \cdot 3)^3}{(5^2 \cdot 3 - 72) \cdot (-4)} + 2 \cdot \{15 - 20 : (4 + 3 \cdot 2)\} & \text{(11)}
 \end{array}$$

תשובות סופיות:

-37 (4)	19 (3)	33 (2)	28 (1)
-21 (8)	5 (7)	-14 (6)	31 (5)
	20 (11)	-44 (10)	-16 (9)

## שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים:

### סיכום כללי:

### הגדרה כללית:

השבר הוא חלק מתוך השלם. מקובל לסמן שבר באמצעות קו שבר המפריד בין המונה (החלק העליון) למכנה (החלק התחתון) באופן הבא:

$$\frac{\text{מונה}}{\text{מכנה}}$$

### ישנם שלושה סוגים אפשריים של שברים:

- שבר פשוט – בו המונה קטן מהמכנה (ולכן תמיד יהיה קטן מ-1).
- שבר מדומה – בו המונה גדול מהמכנה (יהיה גדול בערכו מ-1).
- שבר מעורב – המכיל שילוב של מספר שלם ושבר כלשהו.

### שבר עשרוני:

שבר שהמכנה שלו הוא מספר המהווה כפולות של 10 כגון: 10, 100, 1000 ... שבר עשרוני מיוצג ע"י נקודה עשרונית אשר מבדילה בין החלק שלם לחלק השברי באופן הבא:

$$\underbrace{XX}_{\text{שברים שלמים}}.\underbrace{YYY}$$

כדי להמיר שבר פשוט לשבר עשרוני המכנה צריך להיות בכפולות של 10.

### אחוזים - הגדרה:

השבר  $\frac{1}{100}$  מוגדר להיות אחוז אחד ומסומן באופן הבא: 1%.

באופן זה השבר  $\frac{45}{100}$  יכתב: 45%, והשבר  $\frac{145}{100}$  יכתב: 145%.

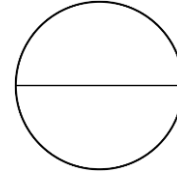
## שאלות:

(1) צבע את החלקים המתאימים בכל עיגול:

ב. צבע  $\frac{1}{6}$  מהעיגול



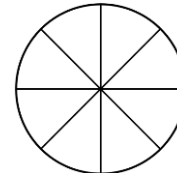
א. צבע  $\frac{1}{2}$  מהעיגול



ד. צבע  $\frac{2}{5}$  מהעיגול



ג. צבע  $\frac{3}{8}$  מהעיגול



(2) כתוב את השבר המתאים לחלקים הצבועים בכל אחד מהמקרים הבאים:

ב. שבר:



א. שבר:



ד. שבר:



ג. שבר:



(3) הרחב את השברים הבאים:

א. השבר  $\frac{1}{2}$  לפי בסיס 4, לפי בסיס 18, לפי בסיס 40.

ב. השבר  $\frac{3}{5}$  לפי בסיס 10, לפי בסיס 25, לפי בסיס 60.

ג. השבר  $\frac{5}{8}$  לפי בסיס 16, לפי בסיס 32, לפי בסיס 88.

(4) צמצם את השברים הבאים ככל הניתן :

א. $\frac{25}{30}$	ב. $\frac{10}{30}$	ג. $\frac{6}{24}$	ד. $\frac{4}{20}$
ה. $\frac{35}{56}$	ו. $\frac{24}{42}$	ז. $\frac{36}{48}$	ח. $\frac{33}{121}$

(5) המר את השברים המדומים הבאים לשברים מעורבים :

א. $-\frac{20}{3}$	ב. $\frac{19}{4}$	ג. $\frac{12}{5}$	ד. $\frac{22}{5}$
ה. $-\frac{34}{6}$	ו. $-\frac{50}{7}$	ז. $\frac{47}{8}$	ח. $\frac{60}{9}$

(6) המר את השברים המעורבים הבאים לשברים מדומים :

א. $1\frac{2}{3}$	ב. $3\frac{5}{6}$	ג. $4\frac{1}{2}$	ד. $6\frac{1}{4}$
ה. $11\frac{3}{4}$	ו. $-2\frac{5}{8}$	ז. $-6\frac{2}{7}$	ח. $12\frac{7}{9}$

(7) קבע איזה שבר גדול יותר בכל אחד מהמקרים הבאים :

א. $\frac{4}{10}$ או $\frac{3}{10}$	ב. $\frac{7}{6}$ או $\frac{7}{8}$
ג. $\frac{5}{6}$ או $\frac{2}{3}$	ד. $\frac{7}{12}$ או $\frac{5}{18}$

(8) המר את השברים העשרוניים הבאים לשברים פשוטים מצומצמים או מעורבים :

א. 0.7	ב. 0.07	ג. 0.007	ד. 0.34
ה. 0.304	ו. 0.65	ז. 1.2	ח. 1.02
ט. 1.42	י. 3.5	יא. 6.03	יב. 5.125

9) המר את השברים הבאים לשברים עשרוניים:

א. $\frac{3}{10}$	ב. $\frac{3}{100}$	ג. $\frac{3}{1000}$	ד. $\frac{23}{1000}$
ה. $\frac{1}{2}$	ו. $\frac{3}{4}$	ז. $\frac{2}{5}$	ח. $\frac{4}{25}$
ט. $\frac{7}{50}$	י. $\frac{3}{20}$	יא. $\frac{7}{8}$	יב. $\frac{9}{16}$
יג. $9\frac{1}{10}$	יד. $3\frac{1}{5}$	טו. $4\frac{7}{8}$	טז. $-4\frac{1}{16}$

10) כתוב את השברים הבאים בצורתם העשרונית (היעזר במחשבון וכתוב עד 3 ספרות אחרי הנקודה העשרונית):

א. $\frac{2}{3}$	ב. $\frac{5}{6}$	ג. $\frac{3}{7}$	ד. $\frac{2}{11}$
------------------	------------------	------------------	-------------------

11) המר מאחוזים לשברים פשוטים:

א. 25%	ב. 32%	ג. 64%	ד. 80%
ה. 120%	ו. 5%	ז. 300%	ח. 150%

12) המר משברים פשוטים לאחוזים:

א. $\frac{3}{4}$	ב. $\frac{1}{8}$	ג. $\frac{4}{5}$	ד. $\frac{7}{20}$
ה. $\frac{11}{40}$	ו. $\frac{70}{125}$	ז. $\frac{5}{6}$	ח. $\frac{4}{9}$

## תשובות סופיות:

- (1) תשובה מודגמת בסרטון.
- (2) א.  $\frac{1}{5}$       ב.  $\frac{1}{6}$       ג.  $\frac{2}{3}$       ד.  $\frac{3}{4}$
- (3) א.  $\frac{4}{8}, \frac{18}{36}, \frac{40}{80}$       ב.  $\frac{30}{50}, \frac{75}{125}, \frac{180}{300}$       ג.  $\frac{80}{128}, \frac{160}{256}, \frac{440}{700}$
- (4) א.  $\frac{5}{6}$       ב.  $\frac{1}{3}$       ג.  $\frac{1}{4}$       ד.  $\frac{1}{5}$       ה.  $\frac{5}{8}$       ו.  $\frac{4}{7}$
- (5) א.  $-6\frac{2}{3}$       ב.  $4\frac{3}{4}$       ג.  $2\frac{2}{5}$       ד.  $4\frac{2}{5}$       ה.  $-5\frac{4}{6}$       ו.  $-7\frac{1}{7}$
- (6) א.  $\frac{5}{3}$       ב.  $\frac{23}{6}$       ג.  $\frac{9}{2}$       ד.  $\frac{25}{4}$       ה.  $\frac{47}{4}$       ו.  $-\frac{21}{8}$
- (7) א.  $\frac{4}{10}$       ב.  $\frac{7}{6}$       ג.  $\frac{5}{6}$       ד.  $\frac{7}{12}$
- (8) א.  $\frac{7}{10}$       ב.  $\frac{7}{100}$       ג.  $\frac{7}{1000}$       ד.  $\frac{17}{50}$       ה.  $\frac{38}{125}$       ו.  $\frac{13}{20}$
- (9) א. 0.3      ב. 0.03      ג. 0.003      ד. 0.023      ה. 0.5      ו. 0.75
- א. 0.4      ב. 0.16      ג. 0.14      ד. 0.15      ה. 0.875      ו. 4.0625
- א. 0.5625      ב. 9.1      ג. 3.2      ד. 4.875      ה. 0.18      ו. 0.428
- (10) א.  $\overline{0.6}$       ב.  $\overline{0.83}$       ג. 0.428      ד.  $\overline{0.18}$
- (11) א.  $\frac{1}{4}$       ב.  $\frac{8}{25}$       ג.  $\frac{16}{25}$       ד.  $\frac{4}{5}$       ה.  $1\frac{1}{5}$       ו.  $\frac{1}{20}$
- א. 3      ב.  $1\frac{1}{2}$

12) א. 75%    ב. 12.5%    ג. 80%    ד. 35%    ה. 27.5%    ו. 56%

ז. 83.333%    ח. 44.444%

## כפל וחילוק שברים:

### סיכום כללי:

- כשכופלים שני שברים יש לכפול מונה במונה ומכנה במכנה.
  - במידה ומדובר במספר שלם הכופל שבר, יש לכפול אותו במונה.
  - במידה ומדובר בשברים מעורבים, יש להפוך אותם תחילה לשברים מדומים ורק אז לבצע את פעולת הכפל.
- כדי לחלק שברים, יש לכפול את השבר הראשון בהופכי של השבר השני.
  - הופכי של שבר מסוים מתקבל ע"י החלפת המונה במכנה.

### שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

$\frac{2}{9} \cdot \frac{8}{10}$ ג.	$\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6}$ ב.	$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4}$ א.
$\frac{12}{25} \cdot 5$ ו.	$6 \cdot \frac{2}{3}$ ה.	$3 \cdot \frac{4}{5}$ ד.
$3\frac{3}{7} \cdot 2\frac{2}{5}$ ט.	$3\frac{1}{2} \cdot 4\frac{2}{5}$ ח.	$1\frac{3}{5} \cdot 2\frac{1}{4}$ ז.
$\frac{4^3}{5}$ יב.	$\frac{4}{5^3}$ יא.	$\left(\frac{4}{5}\right)^3$ י.

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

$\frac{3}{25} : \frac{7}{10}$ ג.	$\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ ב.	$\frac{2}{5} : \frac{4}{9}$ א.
$\frac{5}{6} : 3$ ו.	$10 : \frac{2}{3}$ ה.	$8 : \frac{2}{9}$ ד.
$2\frac{2}{5} : 1\frac{3}{15}$ ט.	$3\frac{3}{4} : 5\frac{5}{8}$ ח.	$\frac{2}{5} : 5$ ז.

## תשובות סופיות:

א. $\frac{9}{20}$	ב. $\frac{5}{21}$	ג. $\frac{8}{45}$	ד. $2\frac{2}{5}$	ה. 4	ו. $2\frac{2}{5}$
ז. $3\frac{3}{5}$	ח. $15\frac{2}{5}$	ט. $8\frac{8}{35}$	י. $\frac{64}{125}$	יא. $\frac{4}{125}$	יב. $12\frac{4}{5}$
א. $\frac{9}{10}$	ב. $1\frac{1}{2}$	ג. $\frac{6}{35}$	ד. 36	ה. 15	ו. $\frac{5}{18}$
ז. $\frac{2}{25}$	ח. $\frac{2}{3}$	ט. 2			

## חיבור וחסור שברים:

### סיכום כללי:

#### כפולה משותפת מינימלית:

בהינתן זוג מספרים  $a$  ו- $b$ , המספר הקטן ביותר אשר תוצאת חלוקתו במספרים הנ"ל מניבה מספר שלם נקרא הכפולה המינימלית שלהם.

#### הערות:

- כפולה מינימלית יכולה להיות גם עבור יותר משני מספרים.
- הכפולה המינימלית תהיה המכנה המשותף בעת פעולות חיבור וחסור של שברים.

#### כללי החיבור והחסור של שברים:

- חיבור וחסור של שברים בעלי אותו המכנה מתבצע על המספרים שבמונה בלבד כאשר המכנה נשאר כפי שהוא.  
דוגמא:  $\frac{2}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2-3}{7} = \frac{-1}{7}$ ,  $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$
  - חיבור וחסור של שברים בעלי מכנים שונים מתבצע ע"י פעולת מכנה משותף.  
דוגמא:  $\frac{1}{4} - \frac{5}{6} = \frac{3}{12} - \frac{10}{12} = \frac{3-10}{12} = -\frac{7}{12}$ ,  $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{6+5}{15} = \frac{11}{15}$
  - חיבור של שבר עם מספר שלם יתבצע באופן ישיר.  
דוגמא:  $3 + \frac{1}{4} = 3\frac{1}{4}$   
חסור של שבר ממספר שלם יתבצע ע"י הוצאת שלמים מהשבר.  
דוגמא:  $3 - \frac{1}{4} = 2\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = 2\frac{3}{4}$
- דרך נוספת היא ע"י העברת המספר השלם לשבר מדומה:  $3 - \frac{1}{4} = \frac{12}{4} - \frac{1}{4} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$

- חיבור וחסור של שברים מעורבים יתבצע ע"י העברתם לשברים מדומים תחילה.

$$\text{דוגמא: } 3\frac{2}{5} + 2\frac{1}{6} = \frac{17}{5} + \frac{13}{6} = \frac{17 \cdot 6}{30} + \frac{13 \cdot 5}{30} = \frac{102 + 65}{30} = \frac{167}{30} = 5\frac{17}{30}$$

ניתן גם לפצל ולבצע את פעולת החיבור (או החיסור) של המספרים השלמים תחילה, ולאחר מכן לבצע את הפעולה עבור השברים.

$$\text{דוגמא: } 2\frac{3}{4} - 5\frac{1}{3} = (2 - 5) + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) = -3 + \left(\frac{9}{12} - \frac{4}{12}\right) = -3 + \frac{5}{12} = -2\frac{7}{12}$$

## שאלות:

- (1) מצא את הכפולה המשותפת המינימלית של המספרים הבאים:

א. 2 ו-3	ב. 2 ו-4	ג. 3 ו-5	ד. 6 ו-10
ה. 4 ו-10	ו. 4 ו-6	ז. 3, 5 ו-10	ח. 2, 3 ו-8

- (2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}$	ב. $\frac{5}{9} + \frac{2}{9}$
ג. $\frac{4}{13} + \frac{9}{13}$	ד. $\frac{7}{8} + \frac{7}{8}$
ה. $\frac{7}{8} - \frac{3}{8}$	ו. $\frac{8}{9} - \frac{7}{9}$
ז. $\frac{2}{12} - \frac{5}{12}$	ח. $\frac{2}{5} - \frac{6}{5}$
ט. $\frac{2}{8} + \frac{5}{8} + \frac{6}{8}$	י. $\frac{7}{15} + \frac{8}{15} - \frac{6}{15}$

(3) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\frac{1}{2} + \frac{4}{3}$

ב.  $\frac{3}{5} + \frac{1}{10}$

ג.  $\frac{4}{6} - \frac{1}{12}$

ד.  $\frac{3}{6} - \frac{5}{8}$

ה.  $\frac{5}{4} + \frac{7}{2} + \frac{2}{8}$

ו.  $\frac{7}{3} + \frac{6}{5} + \frac{3}{10}$

ז.  $\frac{4}{7} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$

ח.  $\frac{1}{4} + \frac{2}{8} - \frac{3}{5}$

(4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $2 + \frac{5}{6}$

ב.  $2 - \frac{5}{6}$

ג.  $2\frac{1}{4} + \frac{5}{6}$

ד.  $2\frac{1}{4} - \frac{5}{6}$

ה.  $3\frac{2}{3} + 4\frac{1}{4}$

ו.  $5\frac{7}{8} - 6\frac{1}{2}$

ז.  $2 + \frac{5}{6} - \frac{1}{9}$

ח.  $\frac{3}{4} - 1\frac{1}{5} + \frac{8}{20}$

(5) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) + 2\frac{1}{3}$

ב.  $\frac{3}{14} : \frac{2}{7} + \frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{4} - \frac{2}{5}$

ג.  $\frac{5}{11} \cdot 2\frac{3}{4} - 6 : \frac{2}{5}$

ד.  $2\frac{4}{5} : \frac{9}{10} \cdot \frac{6}{7} + \frac{1}{6}$

ה.  $\frac{5}{6} : \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot 3\frac{1}{4}$

## תשובות סופיות:

12 .ו	20 .ה	30 .ד	15 .ג	4 .ב	6 .א (1
				24 .ח	30 .ז
$\frac{1}{9}$ .ו	$\frac{1}{2}$ .ה	$1\frac{3}{4}$ .ד	1 .ג	$\frac{7}{9}$ .ב	$\frac{4}{5}$ .א (2
		$\frac{3}{5}$ .י	$1\frac{5}{8}$ .ט	$-\frac{4}{5}$ .ח	$-\frac{1}{4}$ .ז
$3\frac{5}{6}$ .ו	5 .ה	$-\frac{1}{8}$ .ד	$\frac{7}{12}$ .ג	$\frac{7}{10}$ .ב	$1\frac{5}{6}$ .א (3
				$-\frac{1}{10}$ .ח	$\frac{19}{21}$ .ז
$-\frac{5}{8}$ .ו	$7\frac{11}{12}$ .ה	$1\frac{5}{12}$ .ד	$3\frac{1}{12}$ .ג	$1\frac{1}{6}$ .ב	$2\frac{5}{6}$ .א (4
				$-\frac{1}{20}$ .ח	$2\frac{13}{18}$ .ז
	$3\frac{5}{18}$ .ה	$2\frac{5}{6}$ .ד	$-13\frac{3}{4}$ .ג	$1\frac{1}{10}$ .ב	$2\frac{11}{24}$ .א (5

## בעיות יסודיות באחוזים:

### סיכום כללי:

נוסחה לביצוע חישובים עם אחוזים:

$$\text{תמורת האחוז} = \text{שלם} \cdot \frac{\text{אחוז}}{100}$$

למשל, בהינתן גודל שלם 120, אשר יש לחשב כמה הם 40 אחוזים ממנו, נקבל לפי הנוסחה:  $48 = \frac{40}{100} \cdot 120$ , כלומר: **תמורת האחוז 40 מהגודל 120 היא 48.**

### שאלות:

- (1) בכיתה 30 תלמידים. 60% מתוכם בנות.
  - א. כמה בנות בכיתה?
  - ב. כמה בנים בכיתה?
- (2) בכיתה 28 בנות המהוות 70% מכלל התלמידים בכיתה.
  - א. כמה תלמידים בכיתה?
  - ב. כמה בנים בכיתה?
- (3) מחיר בגד-ים הוא 300 ₪. בסוף העונה הוא נמכר ב-20% הנחה.
  - א. מהו מחירו בסוף העונה?
  - ב. מה גודל ההנחה?
- (4) מחיר ההשקה של בושם מסוים הוא 500 ₪. לאחר מכן מועלה מחירו ב-8%.
  - א. מה מחירו הסופי?
  - ב. מה גודל ההתייקרות?
- (5) מחיר ליטר דלק הוא 5 ₪ לליטר. בחנוכה מוזל מחירו ב-7%.
  - א. מה מחירו בסוף השנה?
  - ב. מה גודל המוזל?
- (6) מוצר מסויים מתייקר בסוכות ב-12%. בפורים מוזל המוצר ב-12%.
  - א. מה מחירו בסוף השנה?
  - ב. מה גודל המוזל?

7) ענה על השאלות הבאות:

- א. באולם קולנוע 200 צופים, מתוכם 176 בנים.  
מה אחוז הבנים בקהל?
- ב. בכיתה 30 תלמידים, מתוכם 18 בנות.  
מה אחוז הבנות בכיתה?
- ג. מחיר מוצר התייקר מ-80 ₪ ל-120 ₪.  
בכמה אחוזים התייקר המוצר?
- ד. מחיר מוצר הוזל מ-120 ₪ ל-80 ₪.  
בכמה אחוזים הוזל המוצר?
- ה. מחיר מוצר התייקר מ-150 ₪ ל-200 ₪.  
בכמה אחוזים התייקר המוצר?
- ו. מחיר מוצר הוזל מ-200 ₪ ל-150 ₪.  
בכמה אחוזים הוזל המוצר?

### תשובות סופיות:

- 1) א. 18 בנות. ב. 12 בנים.
- 2) א. 40 תלמידים. ב. 12 בנים.
- 3) א. 240 ₪ ב. 60 ₪
- 4) א. 540 ₪ ב. 40 ₪
- 5) 4.9755 ₪
- 6) 400 ₪
- 7) א. 88% ב. 60% ג. 50% ד. 33.33% ה. 33.33% ו. 25%

## חזרה על תבניות מספר:

### סיכום כללי:

משתנה הוא סמל המתאר כמות או גודל כלשהם אשר אינם ידועים ועשויים להשתנות.

תבנית מספר היא ביטוי אלגברי אשר מכיל משתנה (או משתנים). ניתן להציב במשתנים ערכים מספריים שונים ולקבל תוצאות שונות עבור תבנית המספר עצמה.

במתמטיקה, תפקידה של תבנית המספר הוא להביע גודל מסוים אשר לערכו יש משמעויות שונות. דוגמא לכך היא: קנייה של  $x$  פריטים, אשר כל אחד עולה 3 שקלים, יניבו תבנית מספר של  $3 \cdot x$  אשר מייצגת את הסכום הכולל של הפריטים.

### שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- $x$  הנתון:

א.  $2x+5$  כאשר  $x=3$       ב.  $x^2+3x$  כאשר  $x=2$

ג.  $-x^2+2x+3$  כאשר  $x=5$       ד.  $-x^2-9x+5$  כאשר  $x=5$

ה.  $x^3+1$  כאשר  $x=-2$       ו.  $4-x^3$  כאשר  $x=-1$

ז.  $(x+1)(2-x)$  כאשר  $x=4$       ח.  $x^2(3x-4)$  כאשר  $x=3$

(2) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- $x$  הנתון:

א.  $27x^5-2x^3+x$  כאשר  $x=\frac{1}{3}$

ב.  $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+6$  כאשר  $x=-\frac{2}{3}$

3) הצב את הערכים המספריים במקום הפרמטרים וחשב את ערך תבנית המספר:

- |                                  |   |
|----------------------------------|---|
| א. $a^2 + 2ab + b^2$             | עבור: $a = 3, b = -5$                                   |
| ב. $(x-3)^2 + 3x^2b$             | עבור: $x = 5, b = -1$                                   |
| ג. $-x^3 - 2xy + y^4$            | עבור: $x = -2, y = -1$                                  |
| ד. $\frac{(a-2c)^4}{a} - a^2$    | עבור: $a = 2, c = -2$                                   |
| ה. $\frac{4a^2 - 3b}{c}$         | עבור: $a = -1, b = 2, c = -4$                           |
| ו. $\sqrt{c-3a}$                 | עבור: $c = 13, a = -1$ ועבור: $c = 82, a = \frac{1}{3}$ |
| ז. $\frac{p^3 + 2\sqrt{q+1}}{m}$ | עבור: $p = -5, q = 48, m = 3$                           |

### תשובות סופיות:

- |           |                    |        |        |                  |        |
|-----------|--------------------|--------|--------|------------------|--------|
| 11 א. (1) | 10 ב.              | ג. -12 | ד. -65 | ה. -7            | ו. 5   |
| ז. -10    | ח. 45              |        |        |                  |        |
| 10 א. (2) | ב. $\frac{22}{27}$ |        |        |                  |        |
| 4 א. (3)  | ב. -71             | ג. 5   | ד. 644 | ה. $\frac{1}{2}$ | ז. -37 |
- ו. הצבה ראשונה: 4, הצבה שניה: 9

## כינוס איברים:

### סיכום כללי:

תבניות אלגבריות יכולות להכיל איברים רבים ולכן נרצה לכנס אותם על מנת לפשט את התבנית. כדי לכנס איברים ניקח את כל קבוצת האיברים מאותו הסוג ונחבר את המקדמים שלהם. דוגמא:  $3x + 6x - 5x = (3 + 6 - 5)x = 4x$ .  
 איברים שונים נבדלים זה מזה בערך התבנית האלגברית שלהם.  
 כך:  $3x$  שונה מ- $4y$  ושונה מ- $2xy$ . באותו האופן, האיברים  $x$  ו- $x^2$  הם שונים.

### שאלות:

כנס איברים דומים:

- |   |  |
|---|--|
| $9x^2 - 2x^2 - 3x^2 - 2x^2$ (2)   | $5x + 7x - 4x$ (1)                             |
| $x^2y - 3yx^2 + x^2y$ (4)   | $-10xy + 15xy + xy - 2yx$ (3)                  |
| $2x^2 - 3m^2 - x^2 + 3m^2$ (6)  | $8a^2 + 10a - 5a^2 - 11a + a^2$ (5)            |
| $mn^2 + 4m^2n + 6n^2m - 10nm^2 + mn^2$ (8)  | $3xy + y - 30y + 6yx - 7y$ (7)                 |
| $y^2 + x^2 - 5x^2 + 5y^2 + 4x^2 - 6y^2$ (10)  | $-6 + x^3 + 4 - 3x^3 + 17x^3 - 17$ (9)         |
| $5xy + 2x - 3yx - x + 1$ (12)   | $7x^2 - 3x - 4x + 2$ (11)                      |
| $x + xy + y - 6yx - 6y - 6x$ (14)   | $3 - x - x^2 + 4x + 5x^2 - 12$ (13)            |
| $ab^2 + 6ba^2 - 6b + 16a^2b + 3b - 6b^2a$ (16)  | $mn + n - 5m + 5nm - 14n + 3m$ (15)            |
| $4x^2z + 6xz^2 - 6 - xz^2 + 12 + 10zx^2$ (18)   | $z^3 - 4z^2 + 7 - z^3 - 8 + 8z^2$ (17)         |
| $x^3 - 3x - 4x^2 + 2x + x^3 + x^2 - 2x^3$ (20)  | $2 - x^3 - 3 - 4x^2 + 2x + x^3 + x^2 - 2$ (19) |
| $12x^2y^3 + 13a^2 - 20x^2y^3 + 2a^2$ (22)   | $2a^2b + 3x^2y + 5a^2b + 10x^2y$ (21)          |
| $-2x^3y + 5x^2 - 4yx^3 - 6x^2$ (24)   | $2y^2 - 4x^3y^2 - 10y^2 - x^3y^2$ (23)         |
| $5a^2b - 8ab^2 + 20a^2b - 14ab^2$ (26)  | $2a^2b + 2b + 3a^2 + 5b$ (25)                  |
| $-12x^2 + 2y^2 + 3x^2y + 14xy^2 - 5xy^2 - 6y^2 + 2xy + 11x^2 + x^2y - 9xy$ (27)               |  |
| $21x^3y^3 + x^2y^2 - 3xy^3 + x^3y - 15x^2y^2 - 7x^3y + 12x^3y^3 - 4xy^3 + 4xy^3 - 6x^3y$ (28) |  |

## תשובות סופיות:

- |                           |                        |   |
|---------------------------|------------------------|---|
| $4xy$ (3)                 | $2x^2$ (2)             | $8x$ (1)                                    |
| $x^2$ (6)                 | $4a^2 - a$ (5)         | $-x^2y$ (4)                                 |
| $15x^3 - 19$ (9)          | $8mn^2 - 6nm^2$ (8)    | $9xy - 36y$ (7)                             |
| $2xy + x + 1$ (12)        | $7x^2 - 7x + 2$ (11)   | $0$ (10)                                    |
| $-13n - 2m + 6mn$ (15)    | $-5x - 5y - 5xy$ (14)  | $4x^2 + 3x - 9$ (13)                        |
| $14x^2z + 5xz^2 + 6$ (18) | $4z^2 - 1$ (17)        | $-5ab^2 + 22a^2b - 3b$ (16)                 |
| $7a^2b + 13x^2y$ (21)     | $-3x^2 - x$ (20)       | $-3x^2 + 2x - 3$ (19)                       |
| $-6x^3y - x^2$ (24)       | $-8y^2 - 5x^3y^2$ (23) | $-8x^2y^3 + 15a^2$ (22)                     |
|                           | $25a^2b - 22ab^2$ (26) | $2a^2b + 3a^2 + 7b$ (25)                    |
|                           |                        | $-x^2 - 4y^2 + 4x^2y + 9xy^2 - 7xy$ (27)    |
|                           |                        | $33x^3y^3 - 14x^2y^2 - 3xy^3 - 12x^3y$ (28) |

## פישוט ביטויים ע"י פתיחת סוגריים:

### סיכום כללי:

בעת ביצוע כפל בין שני איברים יש לכפול את המקדמים בנפרד ואת האותיות (משתנים) בנפרד.

כלל הפילוג:

$$\bullet a(b+c) = ab+ac$$

$$\bullet (a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$

### שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $2x \cdot 3x$	ב. $-4x \cdot (-7x)$	ג. $-2x \cdot (-4x) \cdot (-3)$
ד. $8m^2 \cdot 4m^3$	ה. $3a^3 \cdot (-2a^2)$	ו. $-b \cdot 4b^2 \cdot \frac{b^2}{2}$
ז. $a \cdot 3b$	ח. $4a^2 \cdot 7b^2$	ט. $ab \cdot (-2a^2b)$

(2) פשט את הביטויים הבאים ע"י פתיחת סוגריים:

א. $2(3x-4)$	ב. $2(-3x^2+5x-1)$
ג. $(7x-2)4$	ד. $(1-2x)(-2)$
ה. $a(3a-1)$	ו. $b(b^2-3b+4)$
ז. $2x(5x+3)$	ח. $5x(x^2+2x-3)$
ט. $3t^2(4t-t^2+6)$	י. $\frac{5}{2}(4d^4-3d)d$

(3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $5x+(3x-2)+(-4-2x)$	ב. $7x+(-4x-5)+3x+(-1+7x)$
ג. $8-(2x-5)-(4x+2)$	ד. $-6x-(-3x-1)-(-7-4x)+1$

$$\text{ה. } (3-2x^2+4)2+3(x-x^2)-6(7-5x)+4x^2$$

$$\text{ו. } 3y^2-(y+1-2y^2)+6(5y-6)-(-y-4)3+5(y^2+1)-7$$

4 פשט את הביטויים הבאים :

$$\text{א. } (x-1)(x+2) \quad \text{ב. } (x+3)(x-7)$$

$$\text{ג. } (3-x)(x+4) \quad \text{ד. } (3x+4)(5x+1)$$

$$\text{ה. } 3(4x+1)(2x-3) \quad \text{ו. } -2(3x-1)(5-2x)$$

5 פשט את ערכי הביטויים הבאים :

$$\text{א. } (x-1)(x+3)+2(3-x)$$

$$\text{ב. } (a+4)(a-2)-(a+5)(a-3)$$

$$\text{ג. } (2m-3)(4m+3)+5(2m^2-6)$$

$$\text{ד. } -x^2y^2(x^3y+x^2)+2xy(2x^3y-x^4y^2)$$

### תשובות סופיות:

$$\text{(1) א. } 6x^2 \quad \text{ב. } 28x^2 \quad \text{ג. } -24x^2 \quad \text{ד. } 32m^5 \quad \text{ה. } -6a^5 \quad \text{ו. } -2b^5$$

$$\text{ז. } 3ab \quad \text{ח. } 28a^2b^2 \quad \text{ט. } -2a^3b^2$$

$$\text{(2) א. } 6x-8 \quad \text{ב. } -6x^2+10x-2 \quad \text{ג. } 28x-8 \quad \text{ד. } -2+4x$$

$$\text{ה. } 3a^2-a \quad \text{ו. } b^3-3b^2+4b \quad \text{ז. } 10x^2+6x \quad \text{ח. } 5x^3+10x^2-15x$$

$$\text{ט. } 12t^3-3t^4+18t^2 \quad \text{י. } 10d^5-7.5d^2$$

$$\text{(3) א. } 6x-6 \quad \text{ב. } 13x-6 \quad \text{ג. } -6x+11 \quad \text{ד. } x+9 \quad \text{ה. } -3x^2+33x-28$$

$$\text{ו. } 10y^2+32y-27$$

$$\text{(4) א. } x^2+x-2 \quad \text{ב. } x^2-4x-21 \quad \text{ג. } -x^2-x+12$$

$$\text{ד. } 15x^2+23x+4 \quad \text{ה. } 24x^2-30x-9 \quad \text{ו. } 12x^2-34x+10$$

$$\text{(5) א. } x^2+3 \quad \text{ב. } 7 \quad \text{ג. } 18m^2-6m-39 \quad \text{ד. } -3x^5y^3+3x^4y^2$$

## פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר:

### סיכום כללי:

- נוסחת ריבוע של סכום/הפרש:  $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ .
- נוסחה להפרש ריבועים:  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ .

### שאלות:

#### (1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+5)^2$	ב. $(x+2)^2$	ג. $(4x+5)^2$
ד. $(6x+2)^2$	ה. $(7x+y)^2$	ו. $(5x+2y)^2$
ז. $(x^2+7)^2$	ח. $(x^2+y^2)^2$	ט. $(x^3+2y^2x)^2$

#### (2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-6)^2$	ב. $(x-2)^2$	ג. $(5-x)^2$
ד. $(6x-1)^2$	ה. $\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2$	ו. $\left(\frac{1}{3}x-5\right)^2$
ז. $(3m-2n)^2$	ח. $\left(x^2-\frac{3}{5}y\right)^2$	ט. $(x^2y^2-7)^2$

#### (3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-5)(x+5)$	ב. $(3+x)(x-3)$
ג. $(3x-1)(3x+1)$	ד. $(5-7x)(7x+5)$
ה. $\left(\frac{1}{2}x+6\right)\left(\frac{1}{2}x-6\right)$	ו. $\left(5y-\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{1}{4}x+5y\right)$
ז. $(x^2+y)(x^2-y)$	ח. $(3a^2b^3-4)(3a^2b^3+4)$

(4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+1)(x+2)-3x$	ב. $(x-5)(5x-1)+2(4+x)$
ג. $x(2x-1)(2x+1)-4x^2(x+1)$	ד. $-(y+3x)(y-3x)+(y-3x)^2$
ה. $x(x+3)-(6+x)(6x+2)-(x+2)^2$	
ו. $-5(x+7)(x-7)+3(2x+5)(5-x)+(x+1)^2$	

## תשובות סופיות:

א. $x^2+10x+25$	ב. $x^2+4x+4$	ג. $16x^2+40x+25$	(1)
ד. $36x^2+24x+4$	ה. $49x^2+14xy+y^2$	ו. $25x^2+20xy+4y^2$	
ז. $x^4+14x+49$	ח. $x^4+2x^2y^2+y^4$	ט. $x^6+4x^4y^2+4y^4x^2$	
א. $x^2-12x+36$	ב. $x^2-4x+4$	ג. $25-10x+x^2$	(2)
ד. $36x^2-12x+1$	ה. $9x^2-3x+\frac{1}{4}$	ו. $\frac{1}{9}x^2-3\frac{1}{3}x+25$	
ז. $9m^2-12mn+4n^2$	ח. $x^4-\frac{6}{5}x^2y+\frac{9}{25}y^2$	ט. $x^4y^4-14x^2y^2+49$	
א. $x^2-25$	ב. $x^2-9$	ג. $9x^2-1$	(3)
ה. $\frac{1}{4}x^2-36$	ו. $25y^2-\frac{1}{16}x^2$	ז. $x^4-y^2$	
א. $x^2+2$	ב. $5x^2-24x+13$	ג. $-4x^2-x$	(4)
ד. $18x^2-6xy$	ה. $-6x^2-39x-16$	ו. $-10x^2+17x+321$	

## פירוק לגורמים של ביטויים אלגבריים:

### סיכום כללי:

פירוק לגורמים הוא פעולה הפוכה לפתיחת סוגריים – נרצה להוציא את הגורמים המשותפים לאיברים מחוץ לסוגריים.

- פירוק לגורמים ע"י הוצאת איבר אחד משותף:

○ הוצאת מספר משותף:  $2x - 8 = 2(x - 4)$

○ הוצאת אות משותפת:  $x^2 - 12x = x(x - 12)$

○ הוצאת מספר ואות יחד:  $3x^2 - 21x = 3x(x - 7)$

- פירוק לגורמים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר:

○ נוסחת הבינום של ניוטון:  $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

○ נוסחה להפרש ריבועים:  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

### שאלות:

- (1) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א.  $3x - 12$       ב.  $6y - 4$

ג.  $20 - 8a$       ד.  $4a^3 + 8b$

ה.  $75m^2 + 25m + 15$       ו.  $40a^2 - 8b^2 + 64c^2$

- (2) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א.  $y^2 + 5y$       ב.  $3x - 11x^3$

ג.  $6y^2 + 5y^3 + 4y$       ד.  $\frac{1}{2}a^7 - \frac{1}{4}a^5 + a^3$

3 פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף :

א.  $2x^2 - 8x$       ב.  $3t^2 + 12t$

ג.  $5n^3 - 20n^2 + 50n$       ד.  $8y^2 + 6y^3 - 2y^4$

ה.  $4x^2y^2 + 16x^2y - 20xy^2$       ו.  $27mn - 3n^2m + 9n^3m$

4 פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר :

א.  $x^2 + 10x + 25$       ב.  $x^2 + 12x + 36$

ג.  $y^2 - 18y + 81$       ד.  $y^2 - 22y + 121$

ה.  $4x^2 + 4x + 1$       ו.  $16y^2 - 8y + 1$

ז.  $9x^2 - 24x + 16$       ח.  $25x^2 + 70x + 49$

5 פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר :

א.  $r^2 - 25$       ב.  $x^2 - 81$

ג.  $25y^2 - 49$       ד.  $121x^2 - 1$

ה.  $x^2y^2 - 4$       ו.  $9y^4 - 169x^4$

6 פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף ונוסחאות הכפל המקוצר :

א.  $y - y^3$       ב.  $x^3 - 10x^2 + 25x$

ג.  $m^4 - 1$       ד.  $196x^4 - 140x^3 + 25x^2$

## תשובות סופיות:

- א.  $3(x-4)$     ב.  $2(3y-2)$     ג.  $4(5-2a)$     (1)
- ד.  $4(a^3+2b)$     ה.  $5(15m^2+5m+3)$     ו.  $8(5a^2-b^2+8c^2)$
- א.  $y(y+5)$     ב.  $x(3-11x^2)$     ג.  $y(6y+5y^2+4)$     (2)
- ד.  $a^3\left(\frac{1}{2}a^4-\frac{1}{4}a^2+1\right)$
- א.  $2x(x-4)$     ב.  $3t(t+4)$     ג.  $5n(n^2-4n+10)$     (3)
- ד.  $2y^2(4+3y-y^2)$     ה.  $4xy(xy+4x-5y)$     ו.  $3mn(9-n-3n^2)$
- א.  $(x+5)^2$     ב.  $(x+6)^2$     ג.  $(y-9)^2$     ד.  $(y-11)^2$     (4)
- ה.  $(2x+1)^2$     ו.  $(4y-1)^2$     ז.  $(3x-4)^2$     ח.  $(5x+7)^2$
- א.  $(r+5)(r-5)$     ב.  $(x+9)(x-9)$     ג.  $(5y+7)(5y-7)$     (5)
- ד.  $(11x+1)(11x-1)$     ה.  $(xy+2)(xy-2)$     ו.  $(3y^2+13x^2)(3y^2-13x^2)$
- א.  $y(1+y)(1-y)$     ב.  $x(x-5)^2$     ג.  $(m^2+1)(m+1)(m-1)$     (6)
- ד.  $x^2(14x-5)^2$

## פירוק הטרינום:

### סיכום כללי:

טרינום משמעו תלת איבר מהצורה:  $ax^2 + bx + c$  כאשר  $a, b, c$  הם מספרים כלשהם.

שיטת הטרינום מאפשרת לפרק את תלת האיבר ל-4 איברים ע"י פיצול האיבר  $bx$  לשני איברים באופן כזה שמאפשר להוציא גורם משותף.

הכלל הוא למצוא שני מספרים,  $m_1$  ו- $m_2$ , שמקיימים:  $m_1 \cdot m_2 = ac$  ו- $m_1 + m_2 = b$ .  
לאחר מכן ניתן לפרק את הטרינום:  $ax^2 + bx + c = ax^2 + m_1x + m_2x + c$ .  
השלב האחרון הוא הוצאת גורם משותף מכל זוג:  $ax^2 + \underbrace{m_1x + m_2x} + c$ .

### הערה:

במקרה שנוסחת השורשים ידועה, ניתן להיעזר בה כדי למצוא את המספרים  $m_1$  ו- $m_2$  באופן

הבא:  $m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ,  $m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  ולאחר מכן ניתן לכתוב את הטרינום

כמכפלה:  $ax^2 + bx + c = a(x - m_1)(x - m_2)$ . אם קיים פתרון (שורש) אחד  $m_1 = m_2 = \frac{-b}{2a}$  אז

נכתוב:  $ax^2 + bx + c = a(x - m_1)^2$  ואם לא קיימים פתרונות אז לא קיים פירוק כלל.

### שאלות:

(1) פרק את הביטויים הבאים לפי פירוק טרינום:

- |                     |                     |                     |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| א. $x^2 + 5x + 4$   | ב. $x^2 - 8x + 15$  | ג. $x^2 - 33x + 62$ |
| ד. $2x^2 + 7x - 15$ | ה. $3x^2 - 11x + 6$ | ו. $6x^2 + 5x + 1$  |
| ז. $2x^2 + x - 6$   | ח. $x^2 - 18x + 81$ | ט. $x^2 + 2x + 8$   |

(2) פרק את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחת השורשים.

הערה: במידה ולא למדת על נוסחת השורשים התעלם משאלה זו.

- |                      |                    |
|----------------------|--------------------|
| א. $6x^2 + 5x + 1$   | ב. $x^2 + 5x + 4$  |
| ג. $4x^2 + 20x + 25$ | ד. $3x^2 - x + 20$ |

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } (x+1)(x+4) \quad \text{ב. } (x-3)(x-5) \quad \text{ג. } (x-2)(x-31)$$

$$\text{ד. } (2x-3)(x+5) \quad \text{ה. } (3x-2)(x-3) \quad \text{ו. } (3x+1)(2x+1)$$

$$\text{ז. } (x+2)(2x-3) \quad \text{ח. } (x-9)^2 \quad \text{ט. אין פירוק.}$$

$$(2) \quad \text{א. } 6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) \quad \text{ב. } (x+1)(x+4) \quad \text{ג. } (2x+5)^2 \quad \text{ד. אין פירוק.}$$

## שברים אלגברים:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

שבר אלגברי מורכב משתי תבניות, אשר אחת מחלקת את השנייה.

$$\text{דוגמא לשברים אלגבריים: } \frac{x+1}{x+2}, \frac{3x}{x^2+1}, \frac{4}{x-x^3}$$

במקרה בו המכנה הוא מספר, לא מדובר בשבר אלגברי מכיוון שניתן לכתוב את

$$\text{הביטוי ללא צורך בחילוק בין ביטויים שונים כגון: } \frac{3x+5}{4} = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$

#### תחום הגדרה של שבר:

היות ושבר אלגברי הוא תבנית אשר יכולה לקבל ערכים שונים בעת הצבות שונות, חשוב להגביל את המספרים שניתן להציב באופן כזה שלא תתקבל חלוקה באפס.

$$\text{דוגמא: השבר } \frac{1}{x+4} \text{ לא מוגדר כאשר } x = -4 \text{ מכיוון שמתקבל: } \frac{1}{0}$$

במקרים אלו נדרוש **תנאי** על המשתנה אשר יכתב באופן הבא:  $x \neq -4$  ומשמעו היא ש- $x$  יכול לקבל על ערך מספרי אפשרי למעט -4, מכיוון שבמקרה זה השבר לא מוגדר.

#### כלל צמצום שברים אלגברים:

ניתן לצמצם שברים אלגברים ע"י הבאת המונה והמכנה למכפלה של ביטויים. במידה וקיימות פעולות החיבור והחיסור בין איברים שונים לא ניתן לבצע צמצום של איברים דומים בין המונה והמכנה. להלן מספר דוגמאות הנוגעות לצמצומים:

$$\bullet \text{ צמצום ע"י הוצאת גורם משותף: } \frac{2x+8}{x+4} = \frac{2(x+4)}{x+4} = \frac{2 \cdot 1}{1} = 2$$

$$\bullet \text{ צמצום ע"י נוסחת כפל מקוצר: } \frac{3x-15}{x^2-10x+25} = \frac{3(x-5)}{(x-5)^2} = \frac{3 \cdot 1}{x-5} = \frac{3}{x-5}$$

$$\bullet \text{ צמצום ע"י פירוק טרינום: } \frac{x^2-2x-3}{x^2-3x-4} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-4)} = \frac{x-3}{x-4}$$

## שאלות:

(1) מצא את תחום ההגדרה של השברים האלגבריים הבאים:

א. $\frac{x+4}{x+3}$	ב. $\frac{5}{x-6}$
ג. $\frac{x+7}{2x-8}$	ד. $\frac{x^2+1}{x^2-4x}$
ה. $\frac{3}{x^2+2x+1}$	ו. $\frac{x^2}{x^2-4}$
ז. $\frac{6}{y^4-y^2}$	ח. $\frac{8x-2}{3x^3-15x^2+12x}$

(2) צמצם את השברים הבאים (במידה ולא ניתן צמצם הסבר מדוע):

א. $\frac{ax}{a}$	ב. $\frac{a-x}{a}$
ג. $\frac{a-ax}{a}$	ד. $\frac{x+1}{y+1}$
ה. $\frac{x}{x+y}$	ו. $\frac{6x}{6y}$
ז. $\frac{x^2y}{xy^2}$	ח. $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$
ט. $\frac{4x^2y}{xy}$	י. $\frac{3x^2}{x^2+3}$

(3) צמצם את השברים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{3x+12}{x+4}$	ב. $\frac{m^2+4m}{4m+16}$
ג. $\frac{2a-12}{a^2-6a}$	ד. $\frac{x^2-5x}{15-3x}$
ה. $\frac{3-18y^2}{6y^2-1}$	ו. $\frac{4x^3-2x^2}{6x-3}$
ז. $\frac{3y}{y^3-3y^2}$	ח. $\frac{3z^3-12z^2+4z}{z^2+5z}$

4) צמצם את השברים הבאים ע"י פירוק לגורמים וכתוב את תחום הגדרתם:

$\frac{8n - n^2}{n^2 - 16n + 64} \quad \text{ב.}$	$\frac{x^2 + 10x + 25}{2x + 10} \quad \text{א.}$
$\frac{4m^2 + 20m + 25}{4m^2 + 10m} \quad \text{ד.}$	$\frac{z^3 - 4z^2}{2z^2 - 16z + 32} \quad \text{ג.}$
$\frac{a^3 + 4a^2b + 4ab^2}{3ab + 6b^2} \quad \text{ו.}$	$\frac{18y^2 - 24y + 8}{2y - 3y^2} \quad \text{ה.}$

5) צמצם את השברים הבאים ע"י טרינום ריבועי וכתוב את תחום הגדרתם:

$\frac{m^2 - 12m + 32}{m - 4} \quad \text{ב.}$	$\frac{x + 2}{x^2 - 3x - 10} \quad \text{א.}$
$\frac{3z^2 + 26z + 16}{3z + 2} \quad \text{ד.}$	$\frac{4y - 10}{2y^2 + y - 15} \quad \text{ג.}$
$\frac{9n^2 - 12n}{4 + 5n - 6n^2} \quad \text{ו.}$	$\frac{x^2 + 5x - 36}{x^3 + 9x^2} \quad \text{ה.}$
$\frac{x^2 - 14x + 49}{x^2 + x - 56} \quad \text{ח.}$	$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 5x + 6} \quad \text{ז.}$
$\frac{m^3n - m^2n^2 - m^2 + mn}{2m^2n^3 + mn^2 - 3n} \quad \text{י.}$	$\frac{3a^2b - 10ab^2 + 3b^3}{-3a^3b + 11a^2b^2 - 6ab^3} \quad \text{ט.}$

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x \neq -3 \quad \text{ב. } x \neq 6 \quad \text{ג. } x \neq 4 \quad \text{ד. } x \neq 0, x \neq 4$$

$$\text{ה. } x \neq -1 \quad \text{ו. } x \neq -2, x \neq 2 \quad \text{ז. } y \neq 0, y \neq -1, y \neq 1$$

$$\text{ח. } x \neq 0, x \neq 1, x \neq 4$$

$$(2) \quad \text{א. } x \quad \text{ב. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ג. } 1-x$$

$$\text{ד. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ה. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ו. } \frac{x}{y} \quad \text{ז. } \frac{x}{y}$$

$$\text{ח. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ט. } 4x \quad \text{י. לא ניתן לצמצם}$$

$$(3) \quad \text{א. } x \neq -4, 3 \quad \text{ב. } \frac{m}{4}, m \neq -4 \quad \text{ג. } \frac{2}{a}, a \neq 0, 6$$

$$\text{ד. } -\frac{x}{3}, x \neq 5 \quad \text{ה. } -3, y \neq \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \text{ו. } \frac{2x^2}{3}, x \neq \frac{1}{2}$$

$$\text{ז. } \frac{3}{y(y-3)}, y \neq 0, 3 \quad \text{ח. } \frac{3z^2 - 12z + 4}{z+5}, z \neq 0, -5$$

$$(4) \quad \text{א. } \frac{x+5}{2}, x \neq -5 \quad \text{ב. } \frac{n}{8-n}, n \neq 8 \quad \text{ג. } \frac{z^2}{2(z-4)}, z \neq 4$$

$$\text{ד. } \frac{2m+5}{2m}, m \neq 0, -\frac{5}{2} \quad \text{ה. } \frac{2(2-3y)}{y}, y \neq 0, \frac{2}{3} \quad \text{ו. } \frac{a(a+2b)}{3b}, b \neq 0, a \neq -2b$$

$$(5) \quad \text{א. } \frac{1}{x-5}, x \neq 5, -2 \quad \text{ב. } m-8, m \neq 4 \quad \text{ג. } \frac{2}{y+3}, x \neq -3, \frac{5}{2}$$

$$\text{ד. } z+8, z \neq -\frac{2}{3} \quad \text{ה. } \frac{x-4}{x^2}, x \neq 0, -9 \quad \text{ו. } \frac{-3n}{2n+1}, n \neq -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}$$

$$\text{ז. } \frac{x+2}{x+3}, x \neq -2, -3 \quad \text{ח. } \frac{x-7}{x+8}, x \neq 7, -8$$

$$\text{ט. } \frac{3a-b}{a(2b-3a)}, a \neq 0, b \neq 0, a \neq 3b, 2b \neq 3a \quad \text{י. } \frac{m(m-n)}{n(2mn+3)}, mn \neq 1, -\frac{3}{2}, n \neq 0$$

## כפל וחילוק של שברים אלגבריים:

### סיכום כללי:

כפל שברים יתבצע ע"י הכפלת כל מונה בנפרד והכפלת כל מכנה בנפרד.  
חילוק שברים יתבצע ע"י לקיחת ההופכי של שבר המחלק וביצוע פעולת כפל.

$$\bullet \text{ דוגמא לכפל שברים: } \frac{x+1}{x^2} \cdot \frac{x}{3x+3} = \frac{x+1}{x^2} \cdot \frac{x}{3(x+1)} = \frac{\cancel{x}(x+1)}{3x^{\cancel{2}}(x+1)} = \frac{1}{3x}$$

$$\bullet \text{ דוגמא לחילוק שברים: } \frac{4x}{y} : \frac{12}{y^2+y} = \frac{4x}{y} \cdot \frac{y^2+y}{12} = \frac{\cancel{4}x}{\cancel{12}} \cdot \frac{\cancel{y}(y+1)}{\cancel{12}_3} = \frac{x(y+1)}{3}$$

### שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

$$\text{א. } \frac{x}{3} \cdot \frac{x}{8} \quad \text{ב. } \frac{x}{3} \cdot \frac{9}{x^2}$$

$$\text{ג. } 7y \cdot \frac{5}{y^2} \quad \text{ד. } 6x^2 \cdot \frac{3}{40x}$$

$$\text{ה. } (x^2+3x) \cdot \frac{2}{3x+9} \quad \text{ו. } (a^2-25) \cdot \frac{20}{5a+25}$$

$$\text{ז. } \frac{w^2-9}{w} \cdot \frac{w^2}{2w+6} \quad \text{ח. } \frac{y+4}{y^2+16} \cdot \frac{y^2-16}{2y+8}$$

$$\text{ט. } \frac{z^2+30z+225}{6z+90} \cdot \frac{12}{2z-10} \quad \text{י. } \frac{5n^2}{n^2-121} \cdot \frac{2n^2+44n+242}{n+2} \cdot \frac{n^2+4n+4}{n}$$

(2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{x}{8} : \frac{x}{6}$	ב. $\frac{y}{25} : \frac{5}{y}$
ג. $a^2 : \frac{1}{6a}$	ד. $\frac{5}{6a} : a^2$
ה. $(d^2 - 3d) : \frac{5d - 15}{5d}$	ו. $\frac{t}{t+4} : \frac{3t}{t+4}$
ז. $\frac{y^2 + 8y + 16}{8y^2} : \frac{y^2 - 16}{7y^2}$	ח. $\frac{a^2 - 64}{a^2 - 36} : \frac{a+8}{a+6}$

תשובות סופיות:

א. $\frac{x^2}{24}$	ב. $\frac{3}{x}$	ג. $\frac{35}{y}$	ד. $\frac{9x}{20}$	ה. $\frac{2x}{3}$	(1)
ו. $4(a-5)$	ז. $\frac{w(w-3)}{2}$	ח. $\frac{y^2 - 16}{2y^2 + 32}$	ט. $\frac{z+15}{z-5}$	י. $\frac{10n(n+11)(n+2)}{n-11}$	
א. $\frac{3}{4}$	ב. $\frac{y^2}{125}$	ג. $6a^3$	ד. $\frac{5}{6a^3}$	ה. $d^2$	ו. $\frac{1}{3}$
ז. $\frac{7(y+4)}{8(y-4)}$	ח. $\frac{a-8}{a-6}$				

## חיבור וחיסור של שברים אלגברים:

### סיכום כללי:

ביצוע פעולת החיבור והחיסור תתבצע באופן זהה לשברים מספריים. נרצה להרחיב את השברים כך שהמכנה של שניהם יהיה זהה, ולאחר מכן נחבר את המונים. כדי להרחיב את השברים נעזר בפעולת מציאת מכנה משותף. לשם כך נעזר בפירוקים השונים כדי להביא את הביטויים שבכל מכנה לצורתם המופשטת. דוגמא לחיבור שברים בעלי אותו מכנה:

$$\frac{1}{x} + \frac{x+1}{x} = \frac{1+(x+1)}{x} = \frac{x+2}{x}$$

דוגמא לחיבור מספר לשבר אלגברי:

$$2 + \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+2)}{x+2} + \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+2)+3}{x+2} = \frac{2x+7}{x+2}$$

דוגמא לחיבור שברים עם מכנים שונים (ע"י פעולת מכנה משותף):

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{x}{x(x+1)} + \frac{x+1}{x(x+1)} = \frac{x+x+1}{x(x+1)} = \frac{2x+1}{x(x+1)}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י שימוש בפירוק לגורמים (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{1}{x^2-3x} + \frac{3}{x-3} = \frac{1}{x^2-3x} + \frac{3x}{x^2-3x} = \frac{1+3x}{x^2-3x}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{3}{x^2-6x+9} - \frac{2}{x^2-9} = \frac{3}{(x-3)^2} - \frac{2}{(x-3)(x+3)} = \frac{3(x+3)-2(x-3)}{(x-3)^2(x+3)} = \frac{x+15}{(x-3)^2(x+3)}$$

## שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

א.  $\frac{a}{6} + \frac{a-5}{6}$

ג.  $\frac{x-2}{x+1} + \frac{3+4x}{x+1}$

ב.  $\frac{5}{x} + \frac{4x+3}{x}$

ד.  $\frac{7z}{2z-3} - \frac{4z}{2z-3} - \frac{z+3}{2z-3}$

(2) פשט את הביטויים הבאים:

א.  $\frac{1}{ab} - \frac{5}{bc}$

ג.  $\frac{c}{ab} - \frac{ad}{bc} + \frac{2b}{cd}$

ב.  $\frac{1}{xy} + \frac{5}{yz} + \frac{4}{xz}$

ד.  $-\frac{5}{x} + \frac{x+1}{xy^2}$

ה.  $\frac{1}{(y+1)^2} + \frac{3}{y+1}$

ו.  $\frac{3}{z(z-3)} - \frac{2}{z(z-2)}$

(3) פשט את הביטויים הבאים:

א.  $1 - \frac{2}{x}$

ג.  $2 + \frac{2}{x+1}$

ב.  $1 + \frac{3}{y^2}$

ד.  $3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x}$

ה.  $\frac{a+1}{a^2} - \frac{3-a}{4a} - 3$

ו.  $\frac{x}{9yz} + \frac{z}{3y^2x} + \frac{3-y}{12xz} - 3\frac{1}{2}$

(4) פשט את הביטויים הבאים:

א.  $\frac{3}{x+1} + \frac{1}{x}$

ג.  $\frac{a+1}{a+2} + \frac{3}{a}$

ב.  $\frac{4}{y+2} - \frac{3}{y}$

ד.  $\frac{1}{z+3} + \frac{2}{3z} - \frac{3}{z}$

5 פשט את הביטויים הבאים :

$$\frac{3}{x^2-16} + \frac{2}{(x+4)^2} \quad \text{ב.}$$

$$\frac{24}{a^2-9} + \frac{4}{a+3} \quad \text{א.}$$

$$\frac{3z}{z^2+4z+3} - \frac{z+0.5}{z^2+2z+1} \quad \text{ד.}$$

$$\frac{y}{(y-2)^2} + \frac{3y}{4-y^2} \quad \text{ג.}$$

$$\frac{2a+3}{2a^2+15a+7} + \frac{a+3}{a^2+14a+49} \quad \text{ו.}$$

$$\frac{x-1}{x^2+3x-40} + \frac{2}{-x^2+8x-15} \quad \text{ה.}$$

$$\frac{1}{a-b} + \frac{2}{a+2b} - \frac{3b}{a^2+ab-2b^2} \quad \text{ח.}$$

$$\frac{x}{x-3} + \frac{9-x}{x^2-8x+15} \quad \text{ז.}$$

6 פשט את הביטויים הבאים :

$$\left(\frac{2}{x}+1\right) \cdot \frac{x^2}{7x+14} \quad \text{ב.}$$

$$\frac{4}{x} \cdot \frac{x^2}{8} + \frac{9}{x+1} \cdot \frac{x+1}{18} \quad \text{א.}$$

$$\left(3x - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}\right) : \frac{6x^3+2x-4}{x^2} \quad \text{ד.}$$

$$\frac{7}{y^2} : \frac{6}{y^3} - \frac{y-4}{63} \cdot \frac{3y-4}{y^2-8y+16} \quad \text{ג.}$$

$$\left(\frac{2x+1}{20x^2-28x-3} - \frac{3x+1}{30x^2-17x-2}\right) : \frac{18x+3}{6x^2-13x+6} \quad \text{ה.}$$

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{2a-5}{6} & \text{ב.} & \frac{4x+8}{x} & \text{ג.} & \frac{5x+1}{x+1} & \text{ד.} & 1 \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{c-5a}{abc} & \text{ב.} & \frac{z+5x+4y}{xyz} & \text{ג.} & \frac{c^2d - a^2d^2 + 2ab^2}{abcd} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{ד.} & \frac{-5y^2 + x + 1}{xy^2} & \text{ה.} & \frac{3y+4}{(y+1)^2} & \text{ו.} & \frac{1}{(z-2)(z-3)} \end{array}$$

$$(3) \quad \begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{x-2}{x} & \text{ב.} & \frac{y^2+3}{y^2} & \text{ג.} & \frac{2x+4}{x+1} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{ד.} & \frac{9x-2}{3x} & \text{ה.} & \frac{-11a^2 + a + 4}{4a^2} & \text{ו.} & \frac{4x^2y + 12z^2 + 9y^2 - 3y^3 - 126xy^2z}{36xy^2z} \end{array}$$

$$(4) \quad \begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{4x+1}{x(x+1)} & \text{ב.} & \frac{y-6}{y(y+2)} & \text{ג.} & \frac{a^2 + 4a + 6}{a(a+2)} \end{array}$$

$$\text{ד.} \quad \frac{-4z+21}{3z(z+3)}$$

$$(5) \quad \begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{4}{a-3} & \text{ב.} & \frac{5x+4}{(x-4)(x+4)^2} & \text{ג.} & \frac{2y(4-y)}{(y-2)^2(y+2)} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{ד.} & \frac{(4z+3)(z-1)}{2(z+1)^2(z+3)} & \text{ה.} & \frac{x^2 - 6x - 13}{(x+8)(x-5)(x-3)} & \text{ו.} & \frac{4(a^2 + 6a + 6)}{(a+7)^2(2a+1)} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{ז.} & \frac{x-3}{x-5} \\ \text{ח.} & \frac{3}{a+2b} \end{array}$$

$$(6) \quad \begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{x+1}{2} & \text{ב.} & \frac{x}{7} & \text{ג.} & \frac{147y^2 - 594y + 8}{126(y-4)} & \text{ד.} & \frac{1}{2} & \text{ה.} & \frac{1}{3(10x+1)} \end{array}$$

## שברים כפולים:

### סיכום כללי:

שבר כפול מורכב באופן הבא:  $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$  כאשר מתקיים:  $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

נובע מכאן כי ניתן לצמצם ביטויים בין שני המכנים או שני המונים בלבד.

### שאלות:

פשט את הביטויים הבאים:

$\frac{y+1}{2y+2} \quad (2)$	$\frac{4x}{12} \quad (1)$
$\frac{5}{t^2-81}$	$\frac{x}{5}$
$\frac{9t^2}{6t+54} \quad (4)$	$\frac{t}{30t^2} \quad (3)$
$\frac{4x}{x+1} \quad (6)$	$\frac{3y^3-y^2}{25} \quad (5)$
$\frac{x^2+2x+1}{t^2-t-20}$	$\frac{y^2}{3-y}$
$\frac{16t+8}{25-t^2} \quad (8)$	$\frac{8c^2}{3c^3-9c^2-12c} \quad (7)$
$\frac{2t+1}{x^2+2x+1}$	$\frac{15c+15}{1-4+\frac{x}{x+1}} \quad (9)$
	$\frac{1-3x(x+1)}{5x+5}$

## תשובות סופיות:

$$\frac{x^2}{3} \quad (1)$$

$$2.5 \quad (2)$$

$$\frac{1}{6t^3} \quad (3)$$

$$\frac{t-9}{54t^2} \quad (4)$$

$$\frac{(3y-1)(3-y)}{25} \quad (5)$$

$$\frac{x(x+1)}{2} \quad (6)$$

$$\frac{c}{c-4} \quad (7)$$

$$\frac{t+4}{-8(t+5)} \quad (8)$$

$$\frac{5}{x} \quad (9)$$

# מתמטיקה

## פרק 2 - משוואות אלגבריות

### תוכן העניינים

47	1. משוואות ממעלה ראשונה
49	2. מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה
52	3. משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון
53	4. משוואה ממעלה שנייה
55	5. משוואות דו-ריבועיות
57	6. משוואות עם פרמטרים
59	7. משוואות עם שורשים
61	8. משוואות עם ערך מוחלט
62	9. מערכת משוואות ממעלה שנייה
64	10. משוואות מתקדמות מסכמות
67	11. פישוט ביטויים ומשוואות ממעלה שלישית

## משוואה ממעלה ראשונה:

### סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה היא מהצורה:  $ax = b$  (כלומר, החזקה של הנעלם היא 1).

פתרון של משוואה ממעלה ראשונה הוא  $x = \frac{b}{a}$  כאשר  $a \neq 0$ .

שלבי הפתרון הם:

1. ביצוע מכנה משותף (במידה וצריך).
2. פתיחת סוגריים אם ישנם.
3. העברת אגפים וכינוס אברים דומים (בידוד הנעלם באגף אחד והמספרים באגף שני).
4. בידוד הנעלם ומציאתו ע"י חילוק במקדם שלו.

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות ממעלה ראשונה):

- |                             |                                       |
|-----------------------------|---------------------------------------|
| א. $6x + 2 = 8$             | ב. $7 - 2x = 7$                       |
| ג. $2x + x = 24$            | ד. $2x + 6 = 8 + x$                   |
| ה. $-7x + 5 + 2x = 4x - 13$ | ו. $6x - 3 + 5 - 7x = x - 5x - 7$     |
| ז. $2 - 5x + 7 = -3x + 8$   | ח. $x - 2 + 5x = 4 - 3x - 5 + 7x + 7$ |

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פתיחת סוגריים):

- |                              |                                     |
|------------------------------|-------------------------------------|
| א. $3(x - 1) - 4 = 2$        | ב. $7x - 4(3 - 4x) = -x$            |
| ג. $6(4 - x) - (6 - x) = 3x$ | ד. $5x - (3x - 7)4 = 21$            |
| ה. $x(x - 5) = x^2 - 7x + 8$ | ו. $(7 - x)(1 - x) - (x - 3)^2 = 0$ |

3 פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה מספרי):

$$\begin{array}{ll}
 \text{א. } \frac{x}{3} - \frac{x}{9} = -4 & \text{ב. } \frac{4x}{15} - \frac{3x}{10} = 1 \\
 \text{ג. } \frac{2}{3}x + \frac{4}{5}x = x - \frac{7}{15} & \text{ד. } \frac{5x+1}{6} - \frac{6x-1}{5} = \frac{3x+1}{4} - 1 \\
 \text{ה. } \frac{2}{5}(x-3) - \frac{3}{15}(4-x) = x+2 & \text{ו. } 5\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{7}\right) - x = 1
 \end{array}$$

4 פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם נעלם במכנה):

$$\begin{array}{ll}
 \text{א. } \frac{1}{4} - \frac{2}{x} = 0 & \text{ב. } \frac{1}{2} - \frac{x}{x-1} = 0 \\
 \text{ג. } \frac{3}{x} = \frac{1}{x+2} & \text{ד. } \frac{5}{2x-1} = \frac{4}{3x+2} \\
 \text{ה. } \frac{x+5}{3x^2} - \frac{1}{6x} = \frac{1}{x} & \text{ו. } \frac{1}{4x} + \frac{3}{x} = \frac{13}{2}
 \end{array}$$

5 פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה משותף ע"י פירוק לגורמים):

$$\begin{array}{ll}
 \text{א. } \frac{x^2+2}{3x^2+5x} = \frac{3x-1}{9x+15} & \text{ב. } \frac{7}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{2-2x} = 0 \\
 \text{ג. } \frac{3}{(2-x)^2} + \frac{5}{12-3x^2} = 0 & \text{ד. } \frac{4x^2-24x+36}{x-3} = 12
 \end{array}$$

### תשובות סופיות:

- (1) א.  $x=1$     ב.  $x=0$     ג.  $x=8$     ד.  $x=2$     ה.  $x=2$     ו.  $x=-3$
- ז.  $x=\frac{1}{2}$     ח.  $x=4$
- (2) א.  $x=3$     ב.  $x=\frac{1}{2}$     ג.  $x=2\frac{1}{4}$     ד.  $x=1$     ה.  $x=4$     ו.  $x=-1$
- (3) א.  $x=-18$     ב.  $x=-30$     ג.  $x=-1$     ד.  $x=1$     ה.  $x=-10$     ו.  $x=-21$
- (4) א.  $x=8$     ב.  $x=-1$     ג.  $x=-3$     ד.  $x=-2$     ה.  $x=2$     ו.  $x=\frac{1}{2}$
- (5) א.  $x=-6$     ב.  $x=-7$     ג.  $x=-7$     ד.  $x=6, x \neq 3$

## מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

הגדרה:

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (ליניאריות) היא מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

כאשר  $a_1, b_1, c_1$  ו- $a_2, b_2, c_2$  הם מקדמים מספריים.

$$\cdot \begin{cases} y = 3x - 1 \\ \frac{x + 3}{2} = y + 6 \end{cases}, \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} : \text{דוגמאות למערכות של משוואות}$$

פתרון של מערכת משוואות:

פתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור המקיים את כל המשוואות שבמערכת.

הצגה גרפית של מערכת משוואות:

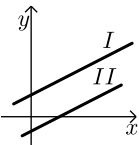
פתרון גרפי של מערכת משוואות הוא נקודת החיתוך של הישרים המייצגים כל משוואה.

יתכנו שלושה מצבים הדדיים בין שני ישרים:



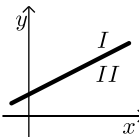
- הישרים נחתכים:

במקרה זה נקודת החיתוך תהיה פתרון המערכת.



- הישרים מקבילים:

במקרה זה לא יהיה פתרון למערכת.



- הישרים מתלכדים:

במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות למערכת המשוואות.

### פתרון אלגברי של מערכת משוואות:

- פתרון ע"י שיטת ההצבה :  
נבודד את אחד הנעלמים ממשוואה אחת ונציב אותו במשוואה השנייה.  
נבחר בשיטה זו במקרים בהם קל לבודד נעלם באחת המשוואות.
  - פתרון ע"י השוואת מקדמים :
1. כופלים (או מחלקים) משוואה אחת (או שתיהן) במספר השונה מאפס כך שתתקבלנה משוואות שקולות בעלות מקדמים נגדיים או זהים עבור אחד המשתנים.
  2. מחברים (או מחסרים) את המשוואות ומקבלים משוואה חדשה עם נעלם אחד.
  3. מוצאים את ערך הנעלם מהמשוואה החדשה ומציבים אותו באחת המשוואות המקוריות למציאת ערך הנעלם השני.

### הערה:

נוח להשתמש בשיטת השוואת המקדמים ע"י כך שמעבירים את המערכת הנתונה למערכת שקולה שבה המשתנים באגף אחד והמספר החופשי באגף השני.

### שאלות:

#### 1) פתור את המשוואות הבאות :

$\begin{cases} -3x + 2y = -16 \\ x = 5y + 14 \end{cases} \text{ ג.}$	$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \text{ ב.}$	$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ y = 5 \end{cases} \text{ א.}$
$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 7y = 11 \end{cases} \text{ ו.}$	$\begin{cases} -5x + 7y = -26 \\ x + 3y = -8 \end{cases} \text{ ה.}$	$\begin{cases} 5x - 2y = -2 \\ x + 4y = 4 \end{cases} \text{ ד.}$

#### 2) פתור את המשוואות הבאות :

$\begin{cases} 5x + 2y = 14 \\ 5x + 3y = 23 \end{cases} \text{ ב.}$	$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x - 3y = 3 \end{cases} \text{ א.}$
$\begin{cases} 4x = 3y - 29 \\ 5y = 9 - 13x \end{cases} \text{ ד.}$	$\begin{cases} 5y = 2x \\ 4x = 5y + 8 \end{cases} \text{ ג.}$

#### 3) פתור את המשוואות הבאות :

$\begin{cases} 2(x - y) + 4y = 1 + x \\ 2 - 7y + x = 3(x - y) \end{cases} \text{ ב.}$	$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 4x + 8y = 5 \end{cases} \text{ א.}$
---	--

4 פתור את המשוואות הבאות :

$$\begin{cases} \frac{x-3}{8} - \frac{x+y}{16} = \frac{y-1}{4} & \text{ב.} \\ 3(2x-y) - 4x - 11 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y - x + 2 = 4x + 2 - 3y & \text{א.} \\ 2x - 3 - y = 5y - 4x + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3x-1}{4} - \frac{2}{5}(x-y) = \frac{3}{10}(x+3) & \text{ג.} \\ \frac{x+1}{4} - \frac{y}{2} = 1 \end{cases}$$

5 פתור את המשוואות הבאות :

$$\begin{cases} 4x - \frac{7}{y} = -3 & \text{ג.} \\ 5x + \frac{2}{y} = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = 2 & \text{ב.} \\ \frac{9}{x} - \frac{4}{y} = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 4 & \text{א.} \\ \frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4 \end{cases}$$

6 פתור את המשוואות הבאות :

$$\begin{cases} xy = 20 & \text{ב.} \\ y(3x-4) = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(y+2) + y = xy - 5 & \text{א.} \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 4xy = 22 & \text{ג.} \\ 6x + xy = -20 \end{cases}$$

### תשובות סופיות:

1 א. (2,5) ב. (-7,-10) ג. (4,-2) ד. (0,1) ה. (1,-3) ו. (-2,3)

2 א.  $(4, \frac{1}{3})$  ב.  $(-\frac{4}{5}, 9)$  ג. (4,1.6) ד. (-2,7)

3 א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות.

4 א. (6,5) ב. (7,1) ג. (7,2)

5 א. (1,1) ב. (-3,1) ג. (1,1)

6 א. (-1,-3) ב. (2,10) ג. (-2,4)

## משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:

### סיכום כללי:

#### משוואה ממעלה ראשונה:

למשוואה ממעלה ראשונה מהצורה:  $ax = b$  יתכן פתרון יחיד אם ורק אם  $a \neq 0$   
 מכיוון שניתן לחלק ולכתוב:  $x = \frac{b}{a}$ .

כאשר  $a = 0$  מתקבלת המשוואה  $0 \cdot x = b$  ויתכנו שני מצבים:

1. אם  $b = 0$  את המשוואה היא  $0x = 0$  ויש אינסוף פתרונות המקיימים אותה.
2. אם  $b \neq 0$  את המשוואה היא  $0x = b \neq 0$  ואין אף ערך של  $x$  המקיים אותה.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$x + 4 = 6 + x \quad (1) \qquad 3x + 6 - x = 4 + 2x + 2 \quad (2)$$

$$6(x - 2) = 2x + 5 + 4x \quad (3) \qquad 5x - 3 + x = 4x + 2x - 3 \quad (4)$$

$$(5) \quad \text{נתונה המשוואה: } 3 - 2(x + 2) = 5x + \square$$

- א. איזה מספר יש להציב ב- $\square$  על מנת שפתרון המשוואה יהיה 1?
- ב. איזה מספר יש להציב ב- $\square$  על מנת שפתרון המשוואה יהיה 0?
- ג. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- $\square$  על מנת שלמשוואה יהיו אינסוף פתרונות.
- ד. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- $\square$  על מנת שלמשוואה לא יהיה פתרון.

### תשובות סופיות:

- (1) אף פתרון.
- (2) אינסוף פתרונות.
- (3) אין פתרון.
- (4) אינסוף פתרונות.
- (5) א. -8      ב. -1      ג.  $-7x - 1$   
 ד.  $-7x + k$  כאשר  $k$  הוא מספר כלשהו השונה מ-1.

## משוואה ממעלה שנייה:

### סיכום כללי:

משוואה מהצורה:  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ), נקראת משוואה ריבועית. פתרונות המשוואה יסומנו ב-  $x_1$  ו-  $x_2$  ויחושבו לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

למשוואה ריבועית יתכנו שלושה סוגים של פתרונות:

- משוואה עם שני פתרונות ממשיים שונים.**  
 אם מתקבל מספר חיובי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים.  
 דוגמא:  $x^2 + 5x - 4 = 0$ .
- משוואה עם פתרון ממשי אחד בלבד.**  
 אם מתקבל אפס בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד בלבד.  
 דוגמא:  $x^2 + 4x + 4 = 0$ .
- משוואה ללא פתרונות ממשיים כלל.**  
 אם מתקבל מספר שלילי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה לא יהיו פתרונות ממשיים כלל.  
 דוגמא:  $x^2 + x + 4 = 0$ .

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

ב.  $-x^2 + 10x - 16 = 0$

ד.  $2x^2 - 6x + 5 = 0$

א.  $x^2 + 3x - 10 = 0$

ג.  $25x^2 - 20x + 4 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות:

ב.  $-x(x-5) = (1-3x)(1-x) + 4$

ד.  $(2x-1)^2 + x(2x+3) = (x-1)(x-7)$

א.  $4x^2 - 5x + 7 = 4 - x^2 + 13$

ג.  $2(x-5)^2 - (2x-3)^2 = 10x + 21$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת  $b$ ):

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & x^2 - 36 = 0 \\ \text{ב.} & 32x^2 - 18 = 0 \\ \text{ג.} & 4x - x(x+2) = 3(x-1) - x - 6 \\ \text{ד.} & (2x-1)^2 + (2x+1)^2 = 10 \end{array}$$

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת  $c$ ):

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & -7x^2 - 14x = 0 \\ \text{ב.} & 5x^2 - x = 0 \\ \text{ג.} & 6x(x-2) - 1 = 4x - 3(x+1) + 2 \\ \text{ד.} & (5x-2)^2 = (x-2)(x+3) + 10 \end{array}$$

(5) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \frac{4x+1}{3} - \frac{x+2}{2} = \frac{2}{x} \\ \text{ב.} & \frac{x^2-9}{x+3} + x = x^2 - 18 \\ \text{ג.} & \frac{3}{2x+2} - \frac{2x-5}{2(x-1)^2} - \frac{4}{1-x^2} = 0 \\ \text{ד.} & \frac{x}{2x^2-72} + \frac{2}{x^2+12x+36} = \frac{8x-15}{24-4x} + 2 \end{array}$$

### תשובות סופיות:

$$\begin{array}{ll} \text{(1)} & \text{א. } x_1 = 2, x_2 = -5 \quad \text{ב. } x_1 = 2, x_2 = 8 \\ & \text{ג. } x = \frac{2}{5} \quad \text{ד. אין פתרון.} \\ \text{(2)} & \text{א. } x_1 = 2, x_2 = -1 \quad \text{ב. } x_1 = 1, x_2 = 1\frac{1}{4} \\ & \text{ג. } x_1 = 1, x_2 = -10 \quad \text{ד. } x_1 = 0.6, x_2 = -2 \\ \text{(3)} & \text{א. } x = \pm 6 \quad \text{ב. } x = \pm \frac{3}{4} \\ & \text{ג. } x = \pm 3 \quad \text{ד. } x = \pm 1 \\ \text{(4)} & \text{א. } x_1 = 0, x_2 = -2 \quad \text{ב. } x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{5} \\ & \text{ג. } x_1 = 0, x_2 = 2\frac{1}{6} \quad \text{ד. } x_1 = 0, x_2 = \frac{7}{8} \\ \text{(5)} & \text{א. } x_1 = 2, x_2 = -1.2 \quad \text{ב. } x = 5, x \neq -3 \\ & \text{ג. } x_1 = 0, x_2 = -5 \quad \text{ד. } x_1 = -7.6, x_2 = -4\frac{2}{7} \end{array}$$

## משוואות דו-ריבועיות:

### סיכום כללי:

משוואה דו-ריבועית היא משוואה מהצורה:  $ax^4 + bx^2 + c = 0$  כאשר הנעלם הוא  $x$ .  
 פתרון המשוואה יבוצע ע"י מעבר לפרמטר:  $x^2 = t \rightarrow at^2 + bt + c = 0$  ומציאתו.  
 לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה ולמצוא את ערכי  $x$ .

ניתן להביא משוואות לצורה זו ולהגדיר ביטוי המופיע בחזקות 2 ו-4  
 כגון:  $(x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1) - 2 = 0$  באמצעות פרמטר:  $t = x^2 - 1$   
 ובכך לפתור משוואה:  $t^2 + 3t - 2 = 0$  ולהחזיר את ההצבה עבור מציאת  $x$ .  
 דרך הפתרון תקפה לכל משוואה בה הנעלם מופיע בחזקות כפולות כגון 3 ו-6, או 4 ו-8.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- |  |   |
|--|---|
| $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ (2)   | $5x^4 + 3x^2 - 8 = 0$ (1)   |
| $x^2(x^2 + 1) = 10(3x^2 - 10)$ (4)   | $13x^2(3x^2 - 1) - 2 = 3(x^2 - 1)(x^2 + 1)$ (3)                               |
| $x^3 + 4 = \frac{32}{x^3}$ (6)   | $x^6 + x^3 = 56$ (5)  |
| $x^8 - 4x^4 - 50 = 31x^4 - 84$ (8)   | $x - 9\sqrt{x} + 14 = 0$ (7)  |
| $(2x^2 - x)^2 - 4(2x^2 - x) + 3 = 0$ (10)  | $125x^6 - 1 = 124(x^6 + x^3 + 1)$ (9)   |
| $\frac{21}{x^2 - 4x + 10} = 6 + x^2 - 4x$ (12)   | $(x^2 + 2x)^2 + 7x^2 + 14x = -6$ (11)   |
| $\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{7}{6} - \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2}$ (14) | $\frac{12}{x^2 + 2x - 8} = 1 + \frac{7.5}{x^2 + 2x - 3}$ (13)                 |
| $\frac{x^2 - 1}{4x^2 - 28} + 2 = \frac{9}{x^4 - 8x^2 + 7} + \frac{x^2}{2x^2 - 2}$ (16)     | $\frac{3}{3x^2 - 15} + \frac{1}{x^2 + 5} = \frac{10}{x^4 - 25}$ (15)          |
| $\frac{3x^4}{(x+2)^2} + \frac{3x^2}{x+2} = 6$ (18)   | $\left(2x + \frac{3}{x}\right)^2 + 35 = 12\left(2x + \frac{3}{x}\right)$ (17) |
| $(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 5x - 8) = -24$ (20)  | $(2x - x^2 + 3)(2x - x^2 - 2) = 0$ (19)                                       |

## תשובות סופיות:

$$x = \pm 1 \quad (1)$$

$$x = \pm 1, \pm \sqrt{2} \quad (2)$$

$$x = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3} \quad (3)$$

$$x = \pm 2, \pm 5 \quad (4)$$

$$x_1 = \sqrt[3]{7}, x_2 = -2 \quad (5)$$

$$x = -2, \sqrt[3]{4} \quad (6)$$

$$x_1 = 4, x_2 = 49 \quad (7)$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{34}, x_{3,4} = \pm 1 \quad (8)$$

$$x = 5, -1 \quad (9)$$

$$x_1 = 1.5, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = -\frac{1}{2} \quad (10)$$

$$x = -1 \quad (11)$$

$$x_{1,2} = 1, 3 \quad (12)$$

$$x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 3.06, x_4 = -5.06 \quad (13)$$

$$x_1 = 0, x_2 = -2 \quad (14)$$

(15) אין פתרונות.

$$x = \pm \sqrt{\frac{3}{7}} \quad (16)$$

$$x = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 3 \quad (17)$$

$$x = -1, 2 \quad (18)$$

$$x = 3, -1 \quad (19)$$

$$x = \pm 1, 4, 6 \quad (20)$$

## משוואות עם פרמטרים:

### סיכום כללי:

משוואה עם פרמטר הינה משוואה שמכילה שני סוגים של גדלים – משתנים ופרמטרים. את המשתנים מקובל לסמן באותיות  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ואת הפרמטרים מסמנים בשאר האותיות. פתרון המשוואה יתקבל ע"י בידוד המשתנה כך שיבוטא באמצעות הפרמטרים שבמשוואה.

למשל פתרון המשוואה:  $mx=4$  (כאשר  $x$  הוא הנעלם ו- $m$  הוא פרמטר) הוא  $x = \frac{4}{m}$

אשר מבוטא באמצעות הפרמטר  $m$ .

בכתיבת פתרון של משוואה עם פרמטרים יש לציין את תחום ההגדרה של הפרמטר עבורו הפתרון הוא בעל משמעות. בדוגמא הנ"ל תחום ההגדרה הוא  $m \neq 0$ .

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

$$\text{א. } 3x - b = (b + 1)x - 6 \quad \text{ב. } \frac{1}{3}(a - 3x) = \frac{1}{a}(ax - 3)$$

$$\text{ג. } (x - 2a)(x - 2b) = x^2 - 2(a^2 + b^2) \quad \text{ד. } \frac{m+1}{x-1} = \frac{m-1}{x+1}$$

$$\text{ה. } \frac{x}{a^2 - a} - \frac{1}{2a} = \frac{ax + x}{2a^3 - 4a^2 + 2a} - \frac{2}{a^3 - 2a^2 + a}$$

(2) פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\text{א. } \begin{cases} x + my = 1 \\ x + y = m \end{cases} \quad \text{ב. } \begin{cases} ax + y = 2 \\ x + ay = 4 \end{cases}$$

$$\text{ג. } \begin{cases} \frac{x}{m} + y = m \\ x - m^2 y = 1 \end{cases} \quad \text{ד. } \begin{cases} (m-1)x - (2m+3)y = 5 \\ (m+2)x - (2m-1)y = 10m \end{cases}$$

$$\text{ה. } \begin{cases} (2a+b)x - (2a-b)y = 8ab \\ (2a-b)x + (2a+b)y = 8a^2 - 2b^2 \end{cases}$$

(3) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

$$\text{א. } x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \quad \text{ב. } x^2 - 2x + 4a = a^2 + 3$$

$$\text{ג. } x^2 + m(x+10) = 2m^2 - 5x \quad \text{ד. } \frac{1}{a-x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+x} = 0$$

$$\text{ה. } (m^2 + 1)x^2 - m^2x - 1 = 0 \quad \text{ו. } \frac{a}{x} + \frac{1}{b} = \frac{x}{a} + b$$

$$\text{ז. } x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$$

תשובות סופיות:

$$\text{(1) א. } x = \frac{b-6}{2-b}, b \neq 2 \quad \text{ב. } x = \frac{a^2+9}{6a}, a \neq 0 \quad \text{ג. } x = a+b \quad \text{ד. } x = -m \quad \text{ה. } x = a+1$$

$$\text{(2) א. } m \neq 1, (m+1, -1) \quad \text{ב. } a \neq \pm 1, \left( \frac{2a-4}{a^2-1}, \frac{4a-2}{a^2-1} \right)$$

$$\text{ג. } m \neq 0-1, \left( m^2 - m + 1, \frac{m-1}{m} \right) \quad \text{ד. } m \neq 1, -2, (2m+1, m-2)$$

$$\text{ה. } b \neq \pm 2a, (2a+b, 2a-b)$$

$$\text{(3) א. } x = m+1, m-1 \quad \text{ב. } x = a-1, 3-a \quad \text{ג. } x = m-5, -2m$$

$$\text{ד. } a \neq 0, x \neq \pm a, x = \pm a\sqrt{3} \quad \text{ה. } x = 1, -\frac{1}{m^2+1}$$

$$\text{ו. } a, b \neq 0, x = \frac{a}{b}, -ab \quad \text{ז. } a \neq \pm b, x = \frac{a+b}{a-b}, \frac{a-b}{a+b}$$

## משוואות עם שורשים:

### סיכום כללי:

פתרון משוואה מהצורה:  $\sqrt{x} = a$  יתקבל ע"י העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה באופן הבא:  $x = a^2 \rightarrow (\sqrt{x})^2 = (a)^2$ .

### הערות:

- (1) יש לזכור בעת העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה יש לבדוק את כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבתם במשוואה המקורית.
- (2) למשוואה מהצורה  $\sqrt{x} = a$  שבה  $a < 0$  אין פתרון.
- (3) יש לסדר תחילה משוואות שבהן הביטוי עם שורש אינו מבודד.
- (4) במשוואות שבהן יותר מביטוי אחד עם שורש יש לבודד תחילה את אחד הביטויים, להעלות בריבוע ולאחר מכן לחזור על התהליך ולבצע העלאה בריבוע פעם נוספת.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- |  |   |
|--|---|
| $\sqrt{x+2} = x$ (2)                           | $\sqrt{2x+5} = 7$ (1)                               |
| $\sqrt{2x+7} + 4 = x$ (4)                      | $\sqrt{3x+1} + x = 13$ (3)                          |
| $\sqrt{10x+6} + 9 = x$ (6)                     | $\sqrt{x-1} + 3 = x$ (5)                            |
| $\sqrt{24-x} + 3 = 2x$ (8)                     | $\sqrt{x+6} - 2 = 2x$ (7)                           |
| $2x = 16 - 3\sqrt{x-1}$ (10)                   | $\sqrt{x+16} + 4 = 2x$ (9)                          |
| $\sqrt{x^2 - 5x + 12} = 2\sqrt{6-x}$ (12)      | $\sqrt{3x+5} = \sqrt{x+17}$ (11)                    |
| $\sqrt{2x-1} + 3 = \sqrt{7x+1}$ (14)           | $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2x-5} = \sqrt{11-x^2}$ (13) |
| $\sqrt{2x-3} + \sqrt{3-x} = 2$ (16)            | $\sqrt{9x-8} - 3\sqrt{x+4} = -2$ (15)               |
| $\sqrt{2x-2} + \sqrt{5x-4} = \sqrt{3x-2}$ (18) | $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4x+1}$ (17)        |
|  | $3\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} = 2\sqrt{x+2}$ (19)      |

**תשובות סופיות:**

- |                           |               |
|---------------------------|---------------|
| $x = 2$ (2                | $x = 22$ (1   |
| $x = 9$ (4                | $x = 8$ (3    |
| $x = 25$ (6               | $x = 5$ (5    |
| $x = 3.75$ (8             | $x = 0.25$ (7 |
| $x = 5$ (10               | $x = 4.25$ (9 |
| $x = 4, -3$ (12           | $x = 6$ (11   |
| $x = 5$ (14               | $x = 3$ (13   |
| $x = 2, 2\frac{8}{9}$ (16 | $x = 12$ (15  |
| $x = 1$ (18               | $x = 6$ (17   |
|                           | $x = 2$ (19   |

## משוואות עם ערך מוחלט:

**סיכום כללי:**

**הגדרה:**

ערך מוחלט הינו המרחק של מספר מ-0 ומוגדר באופן הבא:  $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ .

**משוואה עם ערך מוחלט:**

משוואה עם ערך מוחלט היא מהצורה:  $|x| = a$ .

כדי לפתור משוואה עם ערכים מוחלטים יש למצוא את נקודות האפס של כל ערך מוחלט (קרי: הנקודות בהן הביטוי שבתוך הערך המוחלט מתאפס) ולפצל את המשוואה הנתונה לתחומים עבור כל תחום.

**שאלות:**

פתור את המשוואות הבאות:

$$|3x+14|=7 \quad (1) \qquad |3x-24|=x \quad (2)$$

$$|12-x|=3x \quad (3) \qquad 2x-|8-x|=10 \quad (4)$$

$$|4x-5|=|2x+13| \quad (5) \qquad |14-3x|=2|x+5| \quad (6)$$

$$|x|+7=|2x| \quad (7) \qquad |x+2|+6=|2x-4| \quad (8)$$

$$|x+2|+|2x-6|=|4x+8| \quad (9) \qquad |10-3x|-|x+4|=|2x-6| \quad (10)$$

**תשובות סופיות:**

$$\begin{array}{llll} x = -\frac{7}{3}, -7 & (1) & x = 6, 12 & (2) \\ x = 9, -1\frac{1}{3} & (5) & x = 24, \frac{4}{5} & (6) \\ x = 0, -12 & (9) & x = 0 & (10) \\ x = 6 & (4) & x = 3 & (3) \\ x = 12, -1\frac{1}{3} & (8) & x = \pm 7 & (7) \end{array}$$

## מערכת משוואות ממעלה שנייה:

### סיכום כללי:

מערכת משוואות ריבועיות מיוחסת למערכת של שתי משוואות (לפחות) שאחת מהן מכילה את אחד מהנעלמים בריבוע. למערכת משוואות ריבועיות יכולים להתקבל עד 4 פתרונות שונים. יש לפתור את המערכת לפי הטכניקות הרגילות של בידוד והצבה או השוואת מקדמים.

### שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 36 \\ x^2 + 3y = 10 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 17 \\ xy = -10 \end{cases} \quad (4) \qquad \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 16 \\ 5x^2 - 3y^2 = 17 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 8y^2 = 8 \\ 3xy - 2y^2 = 4 \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} x^2 - xy - 20y^2 = 0 \\ x + 6y = 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} 16x^2 - y^2 = 391 \\ 4x - y = 23 \end{cases} \quad (8) \qquad \begin{cases} x^2 - y^2 = 33 \\ x + y = 11 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{4}{y} - \frac{1}{x} = -19 \end{cases} \quad (10) \qquad \begin{cases} 4xy + x = -15 \\ \frac{3}{y} - 2x = 16 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} xy = 24 \\ (y-x)^2 - 7(y-x) + 10 = 0 \end{cases} \quad (12) \qquad \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 21 \\ \frac{8}{x} - \frac{1}{y} = 13 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{10}{3} \\ x^2 + y^2 = 9xy + 25 \end{cases} \quad (14) \qquad \begin{cases} x^2y - xy^2 = 84 \\ x^2 - 2xy + y^2 + 5x - 5y = 24 \end{cases} \quad (13)$$

## תשובות סופיות:

- |   |  |
|---|--|
| $(\pm 4, -2)$ <b>(2)</b>  | $(2, 4), (4, 2)$ <b>(1)</b>  |
| $(5, -2), (-5, 2)$ <b>(4)</b>   | $(\pm 2, \pm 1)$ <b>(3)</b>  |
| $\left(3, \frac{1}{2}\right), \left(-3, -\frac{1}{2}\right), (2, 1), (-2, -1)$ <b>(6)</b> | $\left(-2, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{11}, \frac{1}{11}\right)$ <b>(5)</b> |
| $(5, -3)$ <b>(8)</b>  | $(7, 4)$ <b>(7)</b>  |
| $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right)$ <b>(10)</b>                                      | $\left(-5, \frac{1}{2}\right), \left(-24, -\frac{3}{32}\right)$ <b>(9)</b>         |
| $(4, 6), (-6, -4), (3, 8), (-8, -3)$ <b>(12)</b>  | $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ <b>(11)</b>                                |
|   | $(-1.65, 6.35), (-6.35, 1.65), (7, 4), (-4, -7)$ <b>(13)</b>                       |
|   | $(5, 45), (-5, -45), (45, 5), (-45, -5)$ <b>(14)</b>                               |

## משוואות מסכמות מתקדמות:

### סיכום כללי:

### תזכורת מהירה:

- משוואה דו-ריבועית יכולה להופיע בכל תצורה (עם שורשים, עם ערכים מוחלטים וכו'). העיקרון הוא זיהוי תבנית של הנעלם אשר חוזרת על עצמה לאורך המשוואה. סימון התבנית במשתנה זמני ופתרון עבור משתנה זה תוביל למשוואה מוגדרת ופתירה. לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה לתבנית של המשתנה המקורי ולמצוא את ערכיו.
- דרך הפתרון של משוואה עם שורשים היא ע"י בידוד השורש והעלאה בריבוע. במידה ויש יותר משורש אחד המופיעים בחיבור/חיסור יש לבצע את הפעולה פעמיים. חשוב לוודא נכונות של כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבה במשוואה המקורית לפני ההעלאות בריבוע.
- דרך הפתרון של משוואה עם ערכים מוחלטים היא ע"י פיצול המשוואה לתחומים לפי סימני הערך המוחלט. זאת יש לבצע ע"י איפוס הביטוי שבכל ערך מוחלט ומציאת ערכי הנעלם המקיימים זאת, חלוקת המשוואה לתחומים מתאימים ופתרונה בכל תחום. יש לזכור לבדוק האם הפתרון המתקבל נמצא בתחום הפתרון – במידה וכן הוא פתרון של המשוואה, אחרת הוא נפסל.
- משוואה עם פרמטרים נפתרת בצורה רגילה (התייחסות לפרמטרים כאל קבועים מספריים) כאשר יש לציין את תחומי ההגדרה שלהם. יש לבדוק פתרונות שמתקבלים המבוטאים באמצעות הפרמטרים במידה וקיימת הגבלת תחום הגדרה במשוואה.

## שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 x^2 + 5x - \sqrt{x^2 + 5x} - 30 = 0 & \text{(2)} & x + \sqrt{x+6} - 6 = 0 & \text{(1)} \\
 2x^2 + 6x - \sqrt{x^2 + 3x + 5} = 5 & \text{(4)} & 4x^2 + 16x - 4\sqrt{x^2 + 4x} - 3 = 0 & \text{(3)} \\
 x^2 - \sqrt{6x^2 - 15} = 1 & \text{(6)} & x^2 - \sqrt{16x^2 + 48} + 7 = 0 & \text{(5)} \\
 \frac{\sqrt{x^2 + 4x - 12}}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+5} = \frac{7}{\sqrt{x-1}} & \text{(8)} & \frac{x^2}{\sqrt{3x-2}} - \sqrt{3x-2} = 1-x & \text{(7)} \\
 \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3} & \text{(9)} \\
 \sqrt{x + \sqrt{14x - 49}} + \sqrt{x - \sqrt{14x - 49}} = \sqrt{14} & \text{(10)} \\
 \sqrt{x+6+6\sqrt{x-3}} - \sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}} = 2 & \text{(11)} \\
 \frac{4}{x + \sqrt{x^2 + x}} - \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + x}} = \frac{3}{x} & \text{(12)}
 \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות עבור  $a > 0$ :

$$x^2 + ax - 2a\sqrt{3x^2 + 3ax - 9a^2} = 0 \quad \text{(14)} \quad x^2 + ax - 2a\sqrt{x^2 + ax - a^2} = 0 \quad \text{(13)}$$

פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 |4 - |5 - x|| = |x + 3| & \text{(16)} & |3 - |2 - x| + |x|| = 1 & \text{(15)} \\
 \sqrt{25 + |16x^2 - 25|} = 4 + 4|x+1| & \text{(18)} & \left| \frac{x + |3 - x|}{x + 2} \right| = 18 & \text{(17)} \\
 & & \frac{x^3 - 5x}{\sqrt{2x^2 - 4x - 1} - |x| + 2} = 0 & \text{(19)}
 \end{array}$$

$$\frac{|x+2|}{|x|+2} = |2-x|+2 : \text{הראה כי אין פתרון למשוואה הבאה:} \quad \text{(20)}$$

### תשובות סופיות:

(1)  $x = 3$

(2)  $x_1 = 4, x_2 = -9$

(3)  $x_1 = 0.5, x_2 = -4.5$

(4)  $x_1 = 1, x_2 = -4$

(5)  $x_{1,2} = \pm 1$

(6)  $x_{1,2} = \pm 2$

(7)  $x = 1$

(8)  $x = 3$

(9)  $x = 2$

(10)  $3.5 \leq x \leq 7$

(11)  $x = 4$

(12)  $x = 1, x = \frac{9}{16}$

(13)  $x_1 = -2a, x_2 = a$

(14)  $x_1 = -2a, x_2 = 3a$

(15)  $x \leq 0$

(16)  $x = -1$

(17)  $x = -\frac{39}{18}, -\frac{33}{18}$

(18)  $x \leq \frac{5}{4}, x = -\frac{1}{4}$

(19)  $x = -\sqrt{5}$

(20) שאלת הוכחה.

## ביטויים ומשוואות ממעלה שלישית:

### סיכום כללי:

נוסחאות הכפל המקוצר ממעלה שלישית:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

### שאלות:

#### פישוט ביטויים:

פשט את הביטויים הבאים:

$$(2y+5)^3 \quad (2)$$

$$(x-3)^3 \quad (1)$$

$$8y^3 + 343 \quad (4)$$

$$8x^3 - 1 \quad (3)$$

$$x^3y^6z^9 - 1 \quad (6)$$

$$a^6 - 27 \quad (5)$$

$$64mn^4 - 8m^4n^7 \quad (8)$$

$$11 + 88x^{12} \quad (7)$$

$$\frac{x^3 + 64}{x^2 + 4x} \quad (10)$$

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8} \quad (9)$$

#### משוואות בנעלם אחד עם נוסחאות הכפל המקוצר:

פתור את המשוואות הבאות:

$$125x^3 = 1 - 15x + 75x^2 \quad (12)$$

$$x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0 \quad (11)$$

$$x^3 - 7x - 6 = 0 \quad (14)$$

$$x^3 + x - 30 = 0 \quad (13)$$

#### משוואות בנעלם אחד עם פירוקים שונים:

פתור את המשוואות הבאות:

$$2x^3 + 5x^2 - 2x - 5 = 0 \quad (16)$$

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0 \quad (15)$$

## מערכת משוואות:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 243 \\ x + y = 9 \end{cases} \quad \text{(17) פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 91 \\ x^2y - xy^2 = 30 \end{cases} \quad \text{(18) פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

## תשובות סופיות:

$$8y^3 + 60y^2 + 150y + 125 \quad \text{(10)}$$

$$(2y + 7)(4y^2 - 17y + 49) \quad \text{(11)}$$

$$(xy^2z^3 - 1)(x^2y^4z^6 + xy^2z^3 + 1) \quad \text{(12)}$$

$$8mn^4(2 - mn)(4 + 2mn + m^2n^2) \quad \text{(13)}$$

$$\frac{x^2 - 4x + 16}{x} \quad \text{(14)}$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{(15)}$$

$$x_{1,2,3} = -2, -1, 3 \quad \text{(16)}$$

$$x_{1,2,3} = -2.5, -1, 1 \quad \text{(17)}$$

$$(-5, -6), (6, 5) \quad \text{(18)}$$

$$x^3 - 9x + 27x - 27 \quad \text{(1)}$$

$$(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) \quad \text{(2)}$$

$$(a^2 - 3)(a^4 + 3a^2 + 9) \quad \text{(3)}$$

$$8(1 + 2x^4)(1 - 2x^4 + 4x^8) \quad \text{(4)}$$

$$\frac{1}{x + 2} \quad \text{(5)}$$

$$x = 4 \quad \text{(6)}$$

$$x = 3 \quad \text{(7)}$$

$$x_{1,2,3} = \frac{1}{2}, 1, 2 \quad \text{(8)}$$

$$(3, 6), (6, 3) \quad \text{(9)}$$

## מתמטיקה

### פרק 3 - אי שוויונים אלגבריים

#### תוכן העניינים

69	1. אי שוויונים ממעלה ראשונה
71	2. אי שוויונים ממעלה שנייה
72	3. אי שוויונים ממעלה שלישית
73	4. אי שוויונים עם מנה
75	5. אי שוויונים כפולים מערכות וגם ואו
76	6. שאלות מסכמות
78	7. מציאת תחום הגדרה
80	8. אי שוויונים עם ערך מוחלט
83	9. אי שוויונים עם שורשים

## אי-שוויונים ממעלה ראשונה:

### סיכום כללי:

#### פעולות המותרות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

#### פעולות אסורות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$6x > 2(3x-1) \quad (2) \qquad 45x - 26 > 109 \quad (1)$$

$$(x-2)^2 + 4 < (x+2)^2 + 20 \quad (4) \qquad 2(x-5) \geq \frac{1}{2}(4x+6) \quad (3)$$

$$4(6x-8) < 8(3x-4) \quad (6) \qquad \frac{8x-4}{2} < \frac{9(x+1)}{3} \quad (5)$$

$$\frac{7-x}{10} - \frac{3x-1}{5} + \frac{x+4}{3} < 7 \quad (8) \qquad \frac{x-6}{3} - \frac{x-4}{4} \geq 12-x \quad (7)$$

**תשובות סופיות:**

$$x > 3 \quad (1)$$

$$x \text{ כל} \quad (2)$$

$$x \text{ אף} \quad (3)$$

$$x > -2 \quad (4)$$

$$x < 5 \quad (5)$$

$$x \text{ אף} \quad (6)$$

$$x \geq 12 \quad (7)$$

$$x > -13 \quad (8)$$

## אי-שוויונים ממעלה שנייה:

### סיכום כללי:

אי שוויון ריבועי הוא מהצורה:  $ax^2 + bx + c \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$  כאשר  $a \neq 0$ .

כדי לפתור אי שוויון ריבועי יש למצוא את נקודות האפס של הביטוי הריבועי ולאחר מכן למצוא את תחום ההצבה עבורו הביטוי מקיים את אי השוויון עצמו.

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- |                               |  |
|-------------------------------|--|
| $x^2 - 12x > -32$ (2)         | $x^2 < 144$ (1)                        |
| $(x+2)(x+4) < 35$ (4)         | $(x+2)(x+5) < 0$ (3)                   |
| $(x-3)(x-7) \geq 8x - 56$ (6) | $-x^2 + 13x + 30 < 0$ (5)              |
| $(5x+6)^2 \leq 4(x-3)^2$ (8)  | $(x-5)^2 + x(x+2) < 89$ (7)            |
| $x^2 - 10x + 25 > 0$ (10)     | $-3x^2 + 12x > 0$ (9)                  |
| $2x^2 + 2x + 24 \geq 0$ (12)  | $(x-3)^2 > (x-1)(x+6) - x^2 - 3x$ (11) |

### תשובות סופיות:

- |                           |                      |
|---------------------------|----------------------|
| $x < 4, x > 8$ (2)        | $-12 < x < 12$ (1)   |
| $-9 < x < 3$ (4)          | $-5 < x < -2$ (3)    |
| $x \leq 7, x \geq 11$ (6) | $x < -2, x > 15$ (5) |
| $-4 \leq x \leq 0$ (8)    | $-4 < x < 8$ (7)     |
| $x > 5, x < 5$ (10)       | $0 < x < 4$ (9)      |
| $x$ כל (12)               | $x < 3, x > 5$ (11)  |

## אי-שוויונים ממעלה שלישית:

### סיכום כללי:

אי שוויונים ממעלה גבוהה מיוחסים לכאלה שניתן לכתוב אותם בצורה של פולינומים, כגון:  $x^4 + 2x^2 + 1 < 0$ ,  $x^3 - 4x^2 + 4x + 1 > 0$ . וכי.  
 בפועל נפתור אותם ע"י פירוק לגורמים ומציאת נקודות האפס של כל גורם.  
 לאחר מכן נבדוק את כל אחד מתחומי המספרים המתקבלים עבור הנעלם ונראה באלו מהם מתקבל פסוק אמת.

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$x(x^2 + x + 1) > 0$ (2)	$(x-1)(x-2)(x-3) > 0$ (1)
$x^3 - 25x \geq 0$ (4)	$(-2x^2 - 3x + 2)(x+1) \leq 0$ (3)
$(x^2 + 8x + 20)(3x - 5) \leq 0$ (6)	$(x^2 + 3x + 5)(x - 2) > 0$ (5)
$x^3 - 6x^2 + 9x \leq 0$ (8)	$(x^2 - x - 6)(x - 1) < 0$ (7)
$(x-2)(x-4)(x-1) < 0$ (10)	$(x^2 + 6)(x+3) > 0$ (9)

### תשובות סופיות:

$x > 0$ (2)	$1 < x < 2, x > 3$ (1)
$-5 \leq x \leq 0, x \geq 5$ (4)	$-2 \leq x \leq -1, x \geq \frac{1}{2}$ (3)
$x \leq 1\frac{2}{3}$ (6)	$x > 2$ (5)
$x \leq 0, x = 3$ (8)	$x < -2, 1 < x < 3$ (7)
$x < 1, 2 < x < 4$ (10)	$x > -3$ (9)

## אי-שוויונים עם מנה:

### סיכום כללי:

אי שוויון מהצורה:  $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$  או  $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$  נקרא אי-שוויון עם מנה, בו  $f(x)$

ו- $g(x)$  הם פולינומים כלשהם.

למשל:  $\frac{2x+4}{x^2-3x+4} < 0$  בו:  $f(x) = 2x+4$  ו- $g(x) = x^2-3x+4$ .

כדי לפתור אי שוויון עם מנה נמצא את נקודות האפס של  $f(x)$  ושל  $g(x)$  ונציב מספרים בתחומים המתקבלים. אלו שיתנו פסוק אמת יהוו את פתרון אי השוויון.

### הערות:

- ניתן לבצע כפל של המכנה בריבוע בכדי להעביר את אי השוויון לצורה של מכפלות.
- ניתן להעביר אי שוויון המכיל מספר מנות ומספרים שלמים לצורה הנ"ל ע"י פעולות אלגבריות מתאימות תחילה.

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$\frac{x-1}{3x+2} \geq -3$ (2)	$\frac{x-1}{x^2-9} > 0$ (1)
$\frac{x-3}{2x^2-10x+12} > 0$ (4)	$\frac{1}{x^2-16} > 0$ (3)
$\frac{1}{-3(x-1)} < 0$ (6)	$\frac{2x-1}{x-5} \leq 0$ (5)
$\frac{1}{x^2-5x+6} < 0$ (8)	$\frac{x-1}{x+2} \leq 1$ (7)
$\frac{1}{x^2-8x+12} \geq 0$ (10)	$\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7} \geq 0$ (9)

**תשובות סופיות:**

$$x < -\frac{2}{3}, x \geq -\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 < x < 3, x > 3 \quad (4)$$

$$x > 1 \quad (6)$$

$$2 < x < 3 \quad (8)$$

$$x < 2, x > 6 \quad (10)$$

$$-3 < x < 1, x > 3 \quad (1)$$

$$x < -4, x > 4 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \leq x < 5 \quad (5)$$

$$x > -2 \quad (7)$$

$$1 \leq x \leq 6 \quad (9)$$

## אי-שוויונים כפולים - מערכת וגם:

### סיכום כללי:

אי-שוויון כפול הוא צורה מקוצרת להציג שני אי-שוויונים אשר יש לפתור יחד (קרי: כמערכת יוגם!). למשל במקום לכתוב:  $a < b$  וגם  $b < c$ , ניתן לכתוב:  $a < b < c$ . מכאן כי כדי לפתור אי שוויון כפול יש לפצל אותו תחילה לשני אי-שוויונים ולפתור כל אחד בנפרד. לאחר מכן יש לקחת את חיתוך הפתרונות.

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$0 < \frac{1}{x+4} < 2 \quad (2)$$

$$3 < x+1 < 5 \quad (1)$$

$$0 < \frac{8-3x}{5-2x} < 4 \quad (4)$$

$$-1 < \frac{x-1}{x+1} < 1 \quad (3)$$

$$6 < \frac{2x+10}{3} \leq \frac{7x-20}{5} \quad (6)$$

$$6x-38 \leq x-3 \leq 5x+7 \quad (5)$$

$$\frac{4x+5}{15} > \frac{3x-8}{5} + \frac{9-x}{3} > 11 \quad (8)$$

$$-1 \leq \frac{2x-6}{4} < \frac{x+2}{3} \quad (7)$$

### תשובות סופיות:

$$x > -3\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 < x < 4 \quad (1)$$

$$x < 2\frac{2}{5}, x > 2\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$x > 0 \quad (3)$$

$$x \geq 10 \quad (6)$$

$$-2.5 \leq x \leq 7 \quad (5)$$

$$\emptyset \quad (8)$$

$$1 \leq x < 13 \quad (7)$$

## שאלות מסכמות – אי-שוויונים:

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$x \leq -\frac{3}{4} \cap \{-2 < x \leq 5 \cup 0 < x < 8\} \quad (1)$$

$$\frac{(x-3)(x+4)}{2-x} \leq 0 \quad (3) \quad x(x+5) - 3x + 15 \leq 2x - 1 - x(4-x) \quad (2)$$

$$\frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)} \geq 0 \quad (5) \quad \frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)} < 0 \quad (4)$$

$$\frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2} > 0 \quad (7) \quad x(x+3)(2x-5) < 0 \quad (6)$$

$$\frac{x-3}{x^2+2} > 0 \quad (9) \quad \frac{5-2x}{(x-8)^2} \leq 0 \quad (8)$$

$$\frac{x^2-6x+9}{x^3-x} > 0 \quad (11) \quad \frac{x^2-4x}{x^2+2x-3} > 0 \quad (10)$$

$$\frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2} \quad (13) \quad \frac{x-7}{x^2+x+3} > 0 \quad (12)$$

$$6 < 5x - x^2 \cap x^2 > 3x + 10 \quad (15) \quad \frac{2x^2}{x^2-6x+8} \geq \frac{x}{x-4} - \frac{x}{x-2} \quad (14)$$

$$1 < \frac{x-1}{x-4} \leq 2 \quad (17) \quad \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x} > 0 \cup \frac{1}{x-3} < \frac{1}{1-x} \quad (16)$$

(18) לאלו ערכי  $x$  נמצאת הפונקציה  $f(x) = \frac{x}{x-3}$  מעל הפונקציה  $g(x) = \frac{x+1}{x+3}$ ?

## תשובות סופיות:

- |   |                                      |
|---|--------------------------------------|
| $x \leq -4$ (2)                           | $-2 < x \leq -\frac{3}{4}$ (1)       |
| $x < -7, -\frac{1}{3} < x < 2, x > 5$ (4) | $-4 \leq x < 2, 3 \leq x$ (3)        |
| $x < -3, 0 < x < 2.5$ (6)                 | $-1 < x \leq 1.5, 4 < x \leq 12$ (5) |
| $2.5 \leq x < 8, x > 8$ (8)               | $x < -1, 2 < x < 6, x > 6$ (7)       |
| $x < -3, 0 < x < 1, x > 4$ (10)           | $x > 3$ (9)                          |
| $x > 7$ (12)                              | $-1 < x < 0, 1 < x < 3, x > 3$ (11)  |
| $x \leq 0, 1 \leq x < 2, x > 4$ (14)      | $x < -2, 2 < x < 4$ (13)             |
| $x \neq 1$ (16)                           | $x \neq 1$ (15)                      |
| $-3 < x < -\frac{3}{5}, x > 3$ (18)       | $x \geq 7$ (17)                      |

## תחום הגדרה:

### שאלות:

1 מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{3x-4}$	ב. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x - 6}$
ג. $f(x) = \sqrt{12x - x^2 - x^3}$	ד. $f(x) = \sqrt{\frac{x+5}{x^2-4}}$
ה. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}-x}$	ו. $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2-2x-1}}{2x-3}$

2 מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+2}-3}$	ב. $f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$
ג. $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}}$	ד. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$

3 תחום ההגדרה של הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{ax - x^2 - 4}$  הוא  $1 \leq x \leq 4$ . מצא את ערכו של הפרמטר  $a$ .

4 תחום ההגדרה של הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$  הוא  $x \leq -2, x > 2$ . מצא את ערכו של הפרמטר  $a$ .

5 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+6}-a}$ ,  $a$  פרמטר חיובי.

א. הבע באמצעות  $a$  את תחום הגדרתה.

ב. מגדירים פונקציה נוספת:  $g(x) = \sqrt{\frac{2x}{x+5}}$ .

ידוע כי תחום ההגדרה של שתי הפונקציות מכסה את כל ציר המספרים. מצא את תחום הערכים האפשרי של הפרמטר  $a$ .

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $x \geq 1\frac{1}{3}$     ב.  $x \leq -1, x \geq 6$     ג.  $x \leq -4, 0 \leq x \leq 3$
- ד.  $-5 \leq x < -2, x > 2$     ה.  $-2 \leq x < 2, x > 2$     ו.  $x \leq -\frac{1}{3}, 1 \leq x < \frac{3}{2}, x > \frac{3}{2}$
- (2) א.  $x \geq 7$     ב.  $-6 \leq x \neq -2$     ג.  $x \leq -1\frac{1}{2}, x \geq 1$
- ד.  $x \leq -3, -2 \leq x \neq 1$
- (3)  $a = 5$
- (4)  $a = 2$
- (5) א.  $x \geq a^2 - 6$     ב.  $0 < a \leq 1$

## אי שוויונים עם ערך מוחלט:

### סיכום כללי:

כללים לפתרון אי שוויון עם ערך מוחלט יחיד:

$ x  > a$	$ x  < a$	מקרה
$x < -a \cap x > a$	$-a < x < a$	פתרון

כללים לפתרון אי שוויון עם מספר ערכים מוחלטים:

- נמצא את הנקודות המאפסות כל ביטוי עם ערך מוחלט.
- מחלקים את אי השוויון לתחומים לפי נקודות האפס.
- פותרים את אי השוויון לכל תחום בנפרד.
- כותבים פתרון כללי (מערכת או) לכל התחומים יחדיו.

### שאלות:

(1) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א.  $|x+2| < 3$       ב.  $|2x+1| > 7$   
 ג.  $|6-2x| < x$       ד.  $|2x+1|-3x > 4$

(2) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א.  $1 < |4-3x| < 7$       ב.  $|2x+3| < 8 < |5-x|$

(3) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א.  $|x^2 + 6x - 4| < 12$       ב.  $|x^2 + x - 10| > 3x - 2$   
 ג.  $|x^2 - 3x| < 4$       ד.  $|6x^2 - 7x - 4| > 1$   
 ה.  $x^2 - 6|x| + 5 \leq 0$       ו.  $x^2 - 6|x+1| - 1 > 0$

(4) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $ x-3 + 2x+2 >7$	ב. $ x+8 <11- 1-3x $
ג. $ 3-2x -11>4- 6+x $	ד. $ 2x-6 + x+5 >14- 1-x $
ה. $ 5+4x - 3-x +\left 4-\frac{1}{2}x\right \leq 22$	ו. $ x+3 + x^2-5x+4 <19$

(5) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $\left \frac{3x-1}{x-2}\right \geq 3$	ב. $1\leq\left \frac{x+2}{x-2}\right \leq 2$
ג. $\frac{ x-6 +8x}{x-12}\leq 12$	ד. $\left \frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}\right >5$

(6) פתור את אי-השוויונים הבאים (ערך מוחלט ושורשים):

א. $\sqrt{x^2- x-12 }<x$	ב. $2-\sqrt{1-x}\leq x+2 -3$
ג. $\sqrt{ 2x+1 -x-1}\leq 4- 3x $	ד. $\frac{ x+2 - x }{\sqrt{4-x^3}}>0$

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $-5 < x < 1$   
 ג.  $2 < x < 6$
- (2) א.  $1\frac{2}{3} < x < 3\frac{2}{3}$  או  $-1 < x < 1$   
 ב.  $-5\frac{1}{2} < x < -3$
- (3) א.  $-2 < x < 2$  או  $-8 < x < -4$   
 ג.  $-1 < x < 4$
- ה.  $1 \leq x \leq 5$  או  $-5 \leq x \leq -1$
- (4) א.  $2 < x$  או  $x < -2$   
 ג.  $4 < x$  או  $x < -6$   
 ה.  $-7\frac{3}{7} \leq x \leq 4$
- (5) א.  $\frac{7}{6} \leq x < 2$ ,  $x > 2$   
 ג.  $x < 12$ ,  $x \geq 46$
- (6) א.  $x = -1$ ,  $x \geq 3$ ,  $x \neq 12$   
 ג.  $0 \leq x \leq 1$ ,  $-1 \leq x \leq -\frac{2}{3}$
- ב.  $3 < x$  או  $x < -4$   
 ד.  $x < -1$
- ב.  $-\frac{1}{2} < x < -3$   
 ד.  $x < -\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{3} < x < \frac{3}{2}$ ,  $x > \frac{5}{3}$
- ב.  $x < 2$  או  $4 < x$   
 ד.  $x < -5$ ,  $x > 7$
- ב.  $-1 < x < 1$   
 ד.  $x < -1$  או  $4 < x$
- ג.  $-2 < x < 6$
- ב.  $0 \leq x \leq \frac{2}{3}$ ,  $x \geq 6$
- ד.  $\frac{1}{2} < x < 1$ ,  $1 < x < 2$ ,  $2 < x \leq 4$
- ב.  $x \leq \frac{-15 + \sqrt{33}}{2}$   
 ד.  $-1 < x < \sqrt[3]{4}$

## אי שוויונים עם שורשים:

סיכום כללי:

מקרים בפתרון אי-שוויונות עם שורשים:

מקרה	אי השוויון	פתרון
$a \geq 0$	$\sqrt{f(x)} < a$	$0 \leq f(x) < a^2$
$a < 0$	$\sqrt{f(x)} < a$	אין פתרון
	$\sqrt{f(x)} > a$	כל $x$ בת.ה. של $f(x)$

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$\sqrt{2x-5} \geq 1 \quad (2)$$

$$\sqrt{x+3} < 7 \quad (1)$$

$$\sqrt{x^2+x-6} < x-3 \quad (4)$$

$$\sqrt{2x^2+5x-6} > 2-x \quad (3)$$

$$\sqrt{x^2+5x+6} - \sqrt{x^2-x+1} < 1 \quad (6)$$

$$\sqrt{x^2+3x+2} - 1 < \sqrt{x^2-x+1} \quad (5)$$

$$\frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2 \quad (8)$$

$$\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} > \frac{3}{2} \quad (7)$$

$$\sqrt{2-\sqrt{3+x}} < \sqrt{4+x} \quad (10)$$

$$\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{4}} < \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \quad (9)$$

$$\sqrt{1+\frac{9}{x}} + 5\sqrt{\frac{x}{x+9}} \geq 4 \quad (12)$$

$$\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5} \quad (11)$$

**תשובות סופיות:**

$$. -3 \leq x < 46 \quad (1)$$

$$. x \geq 3 \quad (2)$$

$$. x < -10, x > 1 \quad (3)$$

$$. \emptyset \quad (4)$$

$$. x \leq -2, -1 \leq x < \frac{-1 + \sqrt{13}}{6} \quad (5)$$

$$. x \leq -3, -2 \leq x < \frac{-13 + \sqrt{73}}{16} \quad (6)$$

$$. \frac{12}{25} < x \leq \frac{1}{2} \quad (7)$$

$$. x < 2\sqrt{5} - 4 \quad (8)$$

$$. 1 < x \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (9)$$

$$. -2.618 < x \leq 1 \text{ שזה: } -\frac{3 + \sqrt{5}}{2} < x \leq 1 \quad (10)$$

$$. 2.5 \leq x < 3 \quad (11)$$

$$. x < -9, x > 0 \quad (12)$$

# מתמטיקה

## פרק 4 - תורת הקבוצות

### תוכן העניינים

85	1. מבוא לתורת הקבוצות
91	2. המספרים האי-רציונליים
92	3. קבוצות חסומות וקבוצות לא חסומות
99	4. קבוצה צפופה
101	5. הערך השלם

## מבוא לתורת הקבוצות

### שאלות

1) רשמו את הטענות הבאות במילים ובדקו האם הן נכונות:

א.  $\forall x \forall y: (x + y)^2 > 0$

ב.  $\forall x \exists y: (x + y)^2 > 0$

ג.  $\forall x \forall y \exists z: xz = \frac{y}{4}$

ד.  $\forall x > 0, \forall y > 0, \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

ה.  $\forall n \exists k, n^3 - n = 6k$  ( $k$  ו- $n$  טבעיים).

הערה: בסעיף זה הטבעיים כוללים את 0.

2) רשמו כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון איזהשוויון  $x^2 > 4$ , הוא  $x > 2$  או  $x < -2$ .

ב. אי השוויון  $x^2 + 4 > 0$ , מתקיים לכל  $x$ .

ג. לכל מספר טבעי  $n$ , המספר  $n^3 - n$  מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר  $x$ ,  $|x| < 1$  אם ורק אם  $-1 < x < 1$ .

3) רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים,

ואת מספר איברי הקבוצה:

א.  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}$

ב.  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16\}$

ג.  $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16\}$

ד.  $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+4)(x-1) < 0\}$

ה.  $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 + x^2 - 2x = 0\}$

ו.  $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}$

4) הגדירו את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן בצורה:

$A = \{x \mid x \text{ מקיים תכונה מסוימת}\}$

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האיזוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 1, 2, 3, 4.

(5) ציינו אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו:

א.  $A = \{11, 13, 17, 19\}$

ב.  $B = \{x \mid 10 < x < 20, x \text{ מספר ראשוני}\}$

ג.  $C = \{11, 11, 17, 13, 19\}$

ד.  $D = \{x \mid x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$

ה.  $E = \{x \mid x = 2m, m \text{ שלם זוגי}\}$

(6) נתונה הקבוצה הבאה  $A = \{1, 2, \{2\}, \{2, 5\}, 4, \{2, 4\}\}$ .

מי מבין הטענות הבאות נכונה:

א.  $5 \in A$       ב.  $2 \in A$       ג.  $\{2\} \in A$

ד.  $\{2\} \subseteq A$       ה.  $\{\{2\}\} \subseteq A$       ו.  $\emptyset \in A$

ז.  $\emptyset \subseteq A$       ח.  $\{2, \{2\}\} \subseteq A$       ט.  $\{2, 4\} \subseteq A$

י.  $\{2, 4\} \in A$       יא.  $\{\{2, 4\}\} \in A$       יב.  $\{2, 5\} \subseteq A$

יג.  $\{2, 5\} \in A$       יד.  $\{1, 4\} \in A$

(7) מצאו שתי קבוצות,  $A$  ו- $B$ , המקיימות:

א.  $A \in B$

ב.  $A \subseteq B$

(8) נתונות הקבוצות הבאות:

$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ,  $B = \{4, 6, 8, 10\}$ ,  $C = \{3, 5, 7, 9\}$ ,  $D = \{6, 7, 8\}$ ,  $E = \{7, 8\}$

קבעו איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה  $X$ :

א.  $X \subseteq A$  וגם  $X \not\subseteq D$ .

ב.  $X \subseteq D$  וגם  $X \not\subseteq C$ .

ג.  $X \subseteq E$  וגם  $X \not\subseteq A$ .

(9) הוכיחו:  $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ .

**(10)** נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{4, 6, 8, 10\}, C = \{3, 5, 7, 9\}, D = \{6, 7, 8\}$$

רשמו את :

א.  $A \cup B$

ב.  $A \cap B$

ג.  $(A \cup B) \cap C$

ד.  $(B \cup C) \cap (B \cup D)$

ה.  $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

**(11)** נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = [1, 4), B = (-2, 1), C = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}, D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2^x = 0\}$$

רשמו את :

א.  $A \cup B$

ב.  $A \cap B$

ג.  $(A \cup B) \cap C$

ד.  $(B \cup C) \cap (B \cup D)$

ה.  $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

**(12)** נתונות 3 קבוצות :

$$A = \{4, 5, 6, 7, 8\}, B = \{5, 6, 7, 8, 9\}, C = \{4, 5, 6, 10\}$$

א. חשבו את  $(A - B) - C$ .

ב. חשבו את  $A - (B - C)$ .

**(13)** נתון :  $U = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$ ,  $A = \{12, 15, 18\}$ ,  $B = \{13, 15, 17\}$

הדגימו את כלל דה מורגן  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ .

**(14)** הוכיחו את כלל דה מורגן הראשון  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ .

**(15)** מצאו את הקבוצה המשלימה, ביחס ל- $\mathbb{R}$ , של הקבוצות הבאות :

א.  $A = [1, \infty)$

ב.  $B = (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$

ג.  $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 > 0\}$

ד.  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 2 \vee x > 4\}$

**(16)** הציגו באמצעות דיאגרמת ון את הקבוצות הבאות:

- |    |                               |
|----|-------------------------------|
| א. | $A \cap B$                    |
| ב. | $A \cup B$                    |
| ג. | $A^c$                         |
| ד. | $A \cap B^c$                  |
| ה. | $A^c \cap B$                  |
| ו. | $A \cup B^c$                  |
| ז. | $A^c \cup B$                  |
| ח. | $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$ |
| ט. | $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ |

**(17)** ענו על הסעיפים הבאים:

- א. הוכיחו כי  $A \setminus B = A \cap B^c$ .  
 הראו זאת גם בעזרת דיאגרמת ון.
- ב. נסמן:  $X = C \setminus (A \cap B)$ ,  $Y = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ .  
 הוכיחו כי  $X = Y$ .
- ג. נסמן:  $X = A \setminus (B \cup C)$ ,  $Y = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ .  
 הוכיחו כי  $X = Y$ .

**(18)** תהיינה  $X, Y, Z$  קבוצות כלשהן.

- טענה א':  $X \cap Y \cap Z = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus Z) \cup (Z \setminus X)$ .
- טענה ב':  $((X \cap Y) \cup Z)^c = (X^c \cup Y^c) \cap Z^c$ .
- טענה ג':  $X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \setminus Z$ .
- איזו טענה נכונה לכל בחירה של  $X, Y, Z$ ?

**(19)** הוכיחו כי אם הנקודה  $x_1$  שייכת לסביבת  $\varepsilon$  של הנקודה  $x_0$ , אז קיימת סביבת  $\delta$  של  $x_1$  שמוכלת בסביבת  $\varepsilon$  של הנקודה  $x_0$ .

**(20)** הוכיחו שלכל שתי נקודות שונות קיימות סביבות זרות.

**(21)** הוכיחו כי אם  $x_0$  לא שייכת לקטע הסגור  $[a, b]$ , אז קיימת סביבה של הנקודה  $x_0$  אשר לא מכילה שום נקודה מהקטע  $[a, b]$ .

**(22)** הוכיחו כי אם  $|x - x_0| < \varepsilon$ ,  $|y - y_0| < \varepsilon$ , אז  $|xy - x_0y_0| < \varepsilon(|x_0| + |y_0| + \varepsilon)$ .

## תשובות סופיות

- (1) א. לכל  $x$  ולכל  $y$  מתקיים  $(x+y)^2 > 0$ . הטענה אינה נכונה.  
 ב. לכל  $x$  קיים  $y$ , כך ש- $(x+y)^2 > 0$ . הטענה אינה נכונה.  
 ג. לכל  $x$  ולכל  $y$  קיים  $z$  כך ש- $xz = \frac{y}{4}$ . הטענה אינה נכונה.  
 ד. לכל  $x$  חיובי ולכל  $y$  חיובי מתקיים  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ . הטענה נכונה.  
 ה. לכל  $n$  טבעי המספר  $n^3 - n$  מתחלק ב-6. הטענה נכונה.
- (2) א.  $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2 \vee x < -2$  ב.  $\forall x: x^2 + 4 > 0$   
 ג.  $\forall n \exists k: n^3 - n = 6k$  ד.  $\forall x: |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$
- (3) א.  $A = (-4, 4)$ , בקבוצה אינסוף איברים.  
 ב.  $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ , בקבוצה 7 איברים.  
 ג.  $C = \{1, 2, 3\}$ , בקבוצה 3 איברים. ד.  $D = \{-3, -2, -1, 0\}$ , בקבוצה 4 איברים.  
 ה.  $E = \{0, 1\}$ , בקבוצה 2 איברים.  
 ו.  $F = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ , בקבוצה 9 איברים.
- (4) א.  $A = \{x \mid x = 2n - 1, n \in \mathbb{N}\}$  ב.  $B = \{11, 13, 17, 19\}$   
 ג.  $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4^2, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$  ד.  $D = \{1, 4, 9, 16\}$
- (5) הקבוצות  $A, B$  ו- $C$  שוות זו לזו, והקבוצות  $D$  ו- $E$  שוות זו לזו.
- (6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.  
 ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.  
 יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.
- (7)  $A = \{1, 2\}$   $B = \{\{1, 2\}, 1, 2\}$
- (8) א.  $A, C$  ב.  $E, D$  ג. לא קיימת קבוצה כזאת.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10)  $A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ,  $A \cap B = \{4, 6, 8\}$ ,  $(A \cup B) \cap C = \{3, 5, 7, 9\}$
- $(B \cap C) \cup (B \cap D) = \{6, 8\}$ ,  $(B \cup C) \cap (B \cup D) = \{4, 6, 7, 8, 10\}$
- (11)  $A \cup B = (-2, 4)$ ,  $A \cap B = \emptyset$ ,  $(A \cup B) \cap C = (0, 4)$ ,  $(B \cap C) \cup (B \cap D) = [0, 1]$ ,  $(B \cup C) \cap (B \cup D) = (-2, 1)$

12) א.  $\phi$       ב.  $\{4,5,6\}$

13) ללא פתרון.

14) שאלת הוכחה.

15) א.  $A^c = (-\infty, 1)$       ב.  $B^c = [1, 4]$       ג.  $C^c = [1, 4]$

ד.  $D^c = (-\infty, 1] \cup [3, 4]$

16) ראו בסרטון.

17) שאלת הוכחה.

18) טענו ב.

19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

## המספרים האי-רציונליים

### שאלות

- (1) א. ידוע כי מספר טבעי בריבוע הוא זוגי. הוכיחו שהמספר זוגי.  
 ב. הוכיחו כי  $\sqrt{2}$  הוא מספר אי-רציונלי.
- (2) א. ידוע כי מספר בריבוע מתחלק ב-3. הוכיחו שהמספר מתחלק ב-3.  
 ב. הוכיחו כי  $\sqrt{3}$  הוא מספר אי-רציונלי.
- (3) א. ידוע כי מספר בשלישית הוא זוגי. הוכיחו שהמספר זוגי.  
 ב. הוכיחו כי  $\sqrt[3]{2}$  הוא מספר אי-רציונלי.
- (4) הוכיחו כי  $\sqrt{n}$  הוא מספר אי-רציונלי (בהנחה ש- $n$  טבעי שאינו ריבוע של מספר).
- (5) הוכיחו או הפריכו:  
 א. מכפלת מספרים אי-רציונליים היא מספר אי-רציונלי.  
 ב. סכום מספרים אי-רציונליים הוא מספר אי-רציונלי.  
 ג. מנה של שני מספרים אי-רציונליים היא מספר אי-רציונלי.  
 ד. סכום של מספר רציונלי ומספר אי-רציונלי הוא מספר אי-רציונלי.
- (6) א. הוכיחו כי  $\sqrt{3} + \sqrt{2}$  הוא מספר אי-רציונלי.  
 ב. הוכיחו כי  $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$  הוא מספר אי-רציונלי.  
 ג. הוכיחו כי  $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$  הוא מספר אי-רציונלי.
- (7) א. יהי  $p$  מספר ראשוני ויהיו  $a, k$  מספרים טבעיים.  
 הוכיחו כי  $p | a \Leftrightarrow p | a^k$ .  
 ב. הוכיחו: אם  $n \neq N^k$ , אז  $\sqrt[k]{n}$  הוא מספר אי-רציונלי ( $n, k, N \in \mathbb{N}$ ).
- הערת סימון: אם מספר  $a$  מתחלק במספר  $b$  נסמן  $b | a$ ,  
 ונאמר גם " $b$  מחלק את  $a$ ".

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)

## קבוצות חסומות וקבוצות לא חסומות

### שאלות

$$(1) \text{ נתונה הקבוצה } A = \left\{ \frac{n-1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

- א. בדקו האם הקבוצה חסומה.  
 ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

$$(2) \text{ נתונה הקבוצה } A = \left\{ \frac{1}{n^4 + 2n + 1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

- א. בדקו האם הקבוצה חסומה.  
 ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

$$(3) \text{ נתונה הקבוצה } A = \left\{ \frac{n^4 + n^2 + 3}{2n^4 + 2n^2 + 8} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

- א. בדקו האם הקבוצה חסומה.  
 ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

$$(4) \text{ נתונה הקבוצה } A = \left\{ \frac{[cn]}{n} \mid n \in \mathbb{N}, 0 < c \in \mathbb{R} \right\}$$

- א. הוכיחו שהקבוצה חסומה מלמעלה ומצאו את  $\sup A$ .  
 ב. הוכיחו שהקבוצה חסומה מלמטה ומצאו את  $\inf A$ .

$$(5) \text{ נתונה הקבוצה } A = \{n^5 - n + 4 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

- א. בדקו האם הקבוצה חסומה.  
 ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

6 נתונה הקבוצה  $A = \{11 - 4^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

- א. בדקו האם הקבוצה חסומה.  
 ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

7 נתונה הקבוצה  $A = \left\{ \frac{4n-1}{5n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ .

- א. בדקו האם הקבוצה חסומה.  
 ב. מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצה, במידה והם קיימים.

8 מצאו את האינפימום, הסופרמום, המינימום והמקסימום של הקבוצות הבאות, במידה והם קיימים:

$$A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{א.}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x-1| \leq 1\} \quad \text{ב.}$$

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2-4}{(x-2)^2} \leq 0 \right\} \quad \text{ג.}$$

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = 1 + \frac{n+1}{n+4} \sin \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{ד.}$$

9 ענו על הסעיפים הבאים:

- א. נתונה קבוצה של מספרים ממשיים  $S$ . הוכיחו שאם קיים לקבוצה חסם עליון אז הוא יחיד.  
 ב. הוכיחו שלקבוצה הריקה אין חסם עליון.

10 הוכיחו את הטענות הבאות:

- א. אם  $\alpha$  הוא הסופרמום של הקבוצה  $A$ , אז לכל מספר ממשי  $\varepsilon > 0$ , קיים איבר  $x \in A$ , כך ש- $\alpha - \varepsilon < x \leq \alpha$ .  
 ב. אם  $\beta$  הוא האינפימום של הקבוצה  $A$ , אז לכל מספר ממשי  $\varepsilon > 0$ , קיים איבר  $x \in A$ , כך ש- $\beta \leq x < \beta + \varepsilon$ .

**(11)** הוכיחו את הטענות הבאות :

- א. בין כל שני מספרים ממשיים קיים מספר ממשי.  
(משפט הצפיפות של הממשיים)
- ב. עבור קטעים מהטיפוס  $(-\infty, b)$ ,  $(a, b)$ ,  $[a, b)$ , לא קיים מקסימום.
- ג. עבור קטעים מהטיפוס  $(-\infty, \infty)$ ,  $(a, \infty)$ ,  $[a, \infty)$ , לא קיים מקסימום.
- ד. עבור קטעים מהטיפוס  $(-\infty, b)$ ,  $(a, b)$ ,  $[a, b)$ , הקצה הימני של הקטע הוא החסם העליון.
- ה. אם  $S$  היא קבוצה בעלת מקסימום, אז ל- $S$  יש חסם עליון, ומתקיים  $\max S = \sup S$ .

**(12)** תהי  $A$  תת-קבוצה לא ריקה של  $\mathbb{R}$ , ויהי  $x \in \mathbb{R}$ .

$$d(x, A) = \inf \{|x - a| \mid a \in A\} : \text{על ידי } A \text{-ל-} x$$

אם  $\alpha \in \mathbb{R}$  הוא החסם העליון של  $A$ , הראו כי  $d(\alpha, A) = 0$ .

**(13)** הוכיחו שקבוצת המספרים הטבעיים אינה חסומה מלמעלה.

**(14)** הוכיחו שקיימת קבוצה של מספרים רציונליים, אשר חסומה מלמעלה אך אין לה סופרמום רציונלי.

**(15)** ענו על הסעיפים הבאים :

- א. נניח ש- $K$  קבוצה של מספרים ממשיים החסומה מלמטה.  
נתבונן בקבוצה  $-K = \{-x \mid x \in K\}$ .  
הוכיחו שהקבוצה  $-K$  חסומה מלמעלה.
- ב. הוכיחו שלכל קבוצה לא-ריקה של מספרים ממשיים, החסומה מלמטה, קיים חסם תחתון.

**(16)** תהי  $T$  קבוצה חסומה מלעיל של מספרים ממשיים.

תהי  $S$  קבוצה חלקית לא ריקה של  $T$ .  
הוכיחו כי :

- א. ל- $T$  יש חסם עליון  $\sup T$ .
- ב. ל- $S$  יש חסם עליון  $\sup S$ .
- ג.  $\sup S \leq \sup T$ .
- ד. אם  $S$  ו- $T$  בעלות מקסימום, אז  $\max S \leq \max T$ .

- 17** יהיו  $A$  ו- $B$  שתי קבוצות לא ריקות, חסומות מלעיל, של מספרים ממשיים.  
 א. נניח כי לכל  $x \in A$  קיים  $y \in B$ , כך ש- $x < y$ .  
 הוכיחו כי  $\sup A \leq \sup B$ .  
 האם יהיה נכון לומר ש- $\sup A < \sup B$ ?
- ב. נניח שבנוסף לנתון בסעיף א', נתון כי לכל  $y \in B$  קיים  $x \in A$ , כך ש- $y < x$ .  
 הוכיחו כי  $\sup A = \sup B$ .
- 18** נניח ש- $A$  ו- $B$  הן שתי קבוצות לא ריקות וחסומות של מספרים ממשיים,  
 כך ש- $\sup A = \inf B$ .  
 הוכיחו שלכל מספר  $\delta > 0$ , קיים מספר  $x$  ב- $A$ , ומספר  $y$  ב- $B$ , כך ש-  
 $x + \delta > y$ .
- 19** נניח ש- $A$  ו- $B$  הן שתי קבוצות לא ריקות וחסומות של מספרים ממשיים,  
 כך ש- $\sup A \leq \inf B$ .  
 נניח שלכל מספר  $\delta > 0$  קיים מספר  $x$  ב- $A$ , ומספר  $y$  ב- $B$ , כך ש- $x + \delta > y$ .  
 הוכיחו כי  $\sup A = \inf B$ .
- 20** נניח ש- $A$  קבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים, שאין לה מקסימום,  
 ונניח כי  $x < \sup A$ .  
 הוכיחו שיש לפחות שני איברים בקבוצה  $A$ , שנמצאים בין  $x$  ל- $\sup A$ .
- 21** תהי  $S$  קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל של מספרים ממשיים.  
 הוכיחו כי אם  $c \geq 0$ , אז ל- $c \cdot S$  יש חסם עליון, ומתקיים  $\sup(c \cdot S) = c \cdot \sup S$ .
- 22** יהיו  $S$  ו- $T$  קבוצות לא ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.  
 הוכיחו כי הקבוצה  $S + T$  היא בעלת חסם עליון ומתקיים:  
 $\sup(S + T) = \sup S + \sup T$ .
- 23** יהיו  $S$  ו- $T$  קבוצות לא ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.  
 א. הוכיחו כי הקבוצה  $S \cup T$  היא בעלת חסם עליון.  
 ב. הוכיחו כי  $\sup(S \cup T) = \max\{\sup S, \sup T\}$ .
- 24** תהיינה  $U, T, S$  קבוצות לא-ריקות וחסומות מלעיל של מספרים ממשיים.  
 נניח כי לכל  $s \in S$  ולכל  $t \in T$  קיים  $u \in U$ , המקיים את התנאי:  $u \geq s + t$ .  
 הוכיחו כי  $\sup U \geq \sup T + \sup S$ .

(25) הוכיחו את הטענות הבאות:

- א. אם  $S$  ו- $T$  הן שתי קבוצות לא ריקות של מספרים ממשיים, כך שכל איבר של  $S$  אינו גדול משום איבר של  $T$ , אז קיימים  $\sup S, \inf T$ , ומתקיים:  $\sup S \leq \inf T$ .
- ב. לכל קבוצה לא-ריקה וחסומה  $S$  מתקיים:  $\inf S \leq \sup S$ . האם ייתכן שוויון ביניהן? באילו תנאים?

(26) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. נסחו והוכיחו את משפט ארכימדס.
- ב. נסחו והוכיחו את תכונת ארכימדס.
- ג. הוכיחו שלכל מספר ממשי  $\varepsilon > 0$  קיים מספר טבעי  $n$ , כך ש- $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$ .
- ד. הוכיחו שלכל שני מספרים ממשיים  $\alpha, \beta$ , המקיימים  $\alpha < \beta$ , קיים מספר טבעי  $n$ , כך ש- $\alpha < \alpha + \frac{1}{n} < \beta$  וגם  $\alpha < \beta - \frac{1}{n} < \beta$ .

(27) תהי  $A$  תת-קבוצה לא ריקה של  $\mathbb{R}$  ויהי  $\alpha \in \mathbb{R}$  חסם מלעיל של  $A$ .

$$n \in \mathbb{N} \text{ קיים } a_n \in A \text{ כך ש-} a_n > \alpha - \frac{1}{n}.$$

הוכיחו כי  $\alpha$  הוא הסופרמום של  $A$ .

(28) הוכיחו שלכל מס' ממשי  $c$  קיים מספר שלם יחיד  $m \in \mathbb{Z}$ , כך ש- $m \leq c < m+1$ .

למספר  $m$  קוראים הערך השלם של  $c$ , ומסמנים  $m = [c]$ .

(29) יהיו  $a$  ו- $b$  שני מספרים ממשיים המקיימים  $|a-b| < \frac{1}{n}$ , לכל מספר טבעי  $n$ .

הוכיחו כי  $a = b$ .

(30) ענו על הסעיפים הבאים:

א. לכל  $n$  טבעי נגדיר  $I_n = [n, \infty)$ .

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset \text{ הוכיחו כי}$$

ב. לכל  $n$  טבעי נגדיר  $J_n = \left[-\frac{1}{n}, \infty\right)$ .

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n \neq \emptyset \text{ הוכיחו כי}$$

**(31)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. לכל  $n$  טבעי נגדיר  $I_n = [a_n, b_n]$ .

נניח כי  $I_{n+1} \subset I_n$  לכל  $n$ .

הוכיחו כי  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$ .

ב. לכל  $n$  טבעי נגדיר  $I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$ .

הוכיחו כי  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$ .

ג. בסעיף ב' התקיים כי  $I_{n+1} \subset I_n$  לכל  $n$ , וכן  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$ .

האם תוצאת סעיף ב' סותרת את תוצאת סעיף א'?

**(32)** לכל  $n$  טבעי נגדיר  $I_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ .

הוכיחו כי  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$ .

## תשובות סופיות

- (1) א. הקבוצה חסומה. ב.  $\min A = \inf A = 0, \sup A = 1$
- (2) א. הקבוצה חסומה. ב.  $\max A = \sup A = \frac{1}{4}, \inf A = 0$
- (3) א. הקבוצה חסומה. ב.  $\min A = \inf A = \frac{5}{12}, \sup A = \frac{1}{2}$
- (4) א. הקבוצה חסומה. ב.  $\sup A = c, \inf A = [c]$
- (5) א. הקבוצה לא חסומה מלמעלה וחסומה מלמטה על ידי 4. ב.  $\min A = 4$
- (6) א. הקבוצה חסומה מלמעלה על ידי 7. הקבוצה לא חסומה מלמטה.  
 ב.  $\max A = 7$
- (7) א. הקבוצה חסומה מלמעלה על ידי  $\frac{4}{5}$ , וחסומה מלמטה על ידי  $\frac{3}{5}$ ;  
 ב.  $\sup A = \frac{4}{5}, \min A = \frac{3}{5}$  לכן, הקבוצה חסומה.
- (8) א.  $\max A = \frac{5}{4}, \inf A = -1$  ב.  $\min B = 0, \max B = 2$   
 ג.  $\min C = -2, \sup C = 2$  ד.  $\inf D = 0, \sup D = 2$

שאלות 9-32 הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## קבוצה צפופה

### שאלות

- 1) הוכיחו שקבוצת הממשיים צפופה בקבוצת הממשיים.
- 2) הוכיחו שקבוצת הרציונליים צפופה בקבוצת הממשיים.
- 3) הוכיחו שקבוצת האי-רציונליים צפופה בקבוצת הממשיים.
- 4) הוכיחו שהקבוצה  $A = \{\sqrt{10}q \mid q \in \mathbb{Q}\}$  צפופה ב- $\mathbb{R}$ .
- 5) הוכיחו שהקבוצה  $A = \{\sqrt{m} - \sqrt{n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$  צפופה ב- $\mathbb{R}$ .
- 6) אפשר להגדיר קבוצה צפופה בממשיים גם כך:  
 תת-קבוצה  $S$  של  $\mathbb{R}$  היא צפופה (ב- $\mathbb{R}$ ), אם לכל  $x \in \mathbb{R}$  ולכל  $\varepsilon > 0$  קיים  $s \in S$ , כך ש- $|s - x| < \varepsilon$ .  
 הוכיחו שאם  $S$  תת-קבוצה של  $\mathbb{R}$  מקיימת את התכונה, שלכל  $a, b \in \mathbb{R}$  קיים  $s \in S$ , כך ש- $a < s < b$ , אז  $S$  צפופה ב- $\mathbb{R}$ .
- 7) הוכיחו שהקבוצה  $A = \{q\sqrt{10} \mid 0 < q \in \mathbb{Q}\}$  צפופה ב- $[0, 1]$ .
- 8) תהי  $A$  קבוצה של מספרים ממשיים, הצפופה בקטע  $(1, \infty)$ .  
 הוכיחו שהקבוצה  $B = \left\{ \frac{a}{n} \mid a \in A, n \in \mathbb{N} \right\}$  צפופה בקטע  $(0, 1)$ .
- 9) תהי  $A$  קבוצה של מספרים ממשיים, הצפופה בקטע  $[0, 1]$ .  
 הוכיחו שהקבוצה  $B = \{na \mid a \in A, n \in \mathbb{N}\}$  צפופה בקטע  $[0, \infty)$ .
- 10) הוכיחו שקבוצת כל השברים העשרוניים הסופיים שלא מופיעה בהם הספרה 4, אינה צפופה בקטע  $I = [0, 1]$ .

**11** תהי  $A$  קבוצה של מספרים ממשיים, המוכלת בקטע  $(1, \infty)$  וצפופה בו.

הוכיחו שהקבוצה  $C = \left\{ \frac{a}{n^2(a+1)} : a \in A, n \in \mathbb{N} \right\}$  אינה צפופה בקטע  $[0, 1]$ .

**12** תהי  $A$  קבוצה של מספרים ממשיים, המוכלת בקטע  $[0, 1]$ .

הוכיחו שהקבוצה  $C = \left\{ \frac{a+1}{n^2} \mid a \in A, n \in \mathbb{N} \right\}$  אינה צפופה בקטע  $[0, 1]$ .

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## הערך השלם

### שאלות

1) פתרו את המשוואות הבאות:

א.  $[x+4]=10$

ב.  $[x+4]=-10$

ג.  $[x+4]^2=100$

ד.  $[2x^2+1]=9$

ה.  $[x^2+x-1]=-2$

ו.  $[x^2-\ln x+e^x-x^5]=0.5$

2) פתרו את המשוואה  $[x+4]=2x+1$ .

3) פתרו את המשוואה  $[16x^2+7]=8x+6$ .

4) פתרו את המשוואה  $[x^2+x+4]=2x+6$ .

5) פתרו את המשוואות הבאות:

א.  $[|x-4|+x]=4x+4$

ב.  $[|x+1|-|x-1|]=x$

6) פתרו את המשוואה  $[4+[x+1]]=10$ .

7) פתרו את המשוואה  $[2x]=3[x]$ .

8) פתרו את המשוואה  $[4x+2]=[x-1]$ .

9) פתרו את המשוואה  $[x^2+3]-4[x]=0$ .

10) הוכיחו כי לכל  $x$  ממשי ו- $m$  שלם מתקיים  $[x+m]=[x]+m$ .

**(11) פתרו את אי-השוויונים הבאים :**

א.  $[x+4] < 10$

ב.  $[x+4] > -10$

ג.  $[x+4]^2 < 100$

ד.  $[x+4] \leq 10$

**(12) פתרו את אי-השוויונים הבאים :**

א.  $[x]^2 - 5[x] + 6 \leq 0$

ב.  $[x-1][x-2] + [x+10] > 3[x+2] + [2.44]$

**(13) פתרו את אי-השוויון  $[|x+1| - |x|] \geq x^2$  .**

**(14) פתרו את אי-השוויון  $[x+1] < \sqrt{x} + 1$  .**

**(15) פתרו את אי-השוויון  $[2x+1] \geq x^2$  .**

**(16) הוכיחו כי לכל  $x$  ו- $y$  ממשיים מתקיים :**

א.  $[x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1$

ב.  $x < y \Rightarrow [x] \leq [y]$

## תשובות סופיות

- (1) א.  $6 \leq x < 7$     ב.  $-14 \leq x < -13$     ג.  $[6, 7) \cup [14, -13)$     ד.  $(-\sqrt{4.5}, -2] \cup [2, \sqrt{4.5})$
- (2)  $x = 2.5, 3$
- (3)  $x = \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}$
- (4)  $x = -1, 2$
- (5) א.  $x = 0$     ב.  $x = 2, 0, -2$
- (6)  $5 \leq x < 6$
- (7)  $x \in [0, 0.5) \cup [1.5, 2)$
- (8)  $-1.25 \leq x < -0.75$
- (9)  $[1, \sqrt{2}) \cup [\sqrt{5}, \sqrt{6}) \cup (3, \sqrt{10})$
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) א.  $x < 6$     ב.  $x > -14$     ג.  $-14 < x < 6$     ד.  $x < 7$
- (12) א.  $2 \leq x < 4$     ב.  $x < 1$  or  $x \geq 5$
- (13)  $0 \leq x \leq 1$
- (14)  $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$
- (15)  $x \in [0.5, \sqrt{5}]$
- (16) שאלת הוכחה.

# מתמטיקה

## פרק 5 - סדרות

### תוכן העניינים

104	1. הקדמה כללית
111	2. סדרה חשבונית
116	3. סדרה הנדסית
118	4. סדרות מעורבות
124	5. סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת
	6. סדרת נסיגה

## סדרה חשבונית:

### סיכום כללי:

- נוסחת האיבר הכללי:

נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית המתחילה באיבר  $a_1$  והפרשה הוא  $d$  נתונה ע"י:  $a_n = a_1 + d(n-1)$ , כאשר:  $n$  הוא מיקום האיבר שערכו  $a_n$  בסדרה.

- כלל נסיגה של סדרה חשבונית:

כלל נסיגה של סדרה חשבונית  $a_n$  שהפרשה הוא  $d$  ואיברה הראשון הוא  $a_1$  נתון ע"י:  $a_{n+1} - a_n = d$ .

- נוסחת הסכום של סדרה חשבונית:

סכום  $n$  האיברים הראשונים של סדרה חשבונית  $a_n$  שהפרשה הוא  $d$  ואיברה

הראשון הוא  $a_1$  נתון ע"י:  $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ .

בהצבת נוסחת האיבר הכללי מקבלים:  $S_n = \frac{n(2a_1 + d(n-1))}{2}$ .

### שאלות:

- (1) נתונה הסדרה החשבונית:  $17, 11, 5, -1, -7, \dots$ . מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 43 איברים.
- (2) בסדרה חשבונית האיבר השישי הוא 15 והאיבר העשירי הוא 31. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהו הפרש הסדרה.
- (3) מצא כמה איברים יש בסדרה החשבונית:  $2, 4.5, 7, 9.5, 12, 14.5, \dots, 49.5$ .

- (4) בסדרה חשבונית סכום האיברים השני, החמישי והשמיני הוא 87 וההפרש בין האיבר השנים-עשר לאיבר השישי הוא 24. מצא כמה איברים בסדרה אם ידוע שהאיבר האחרון בה הוא 201.
- (5) תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 3 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 46 קפיצות?
- (6) כמה מספרים תלת ספרתיים שמתחלקים ב-6 יש בין 201 ל-550?
- (7) כמה איברים חיוביים ישנם בסדרה החשבונית:  $91, 88, 85, 82, \dots$ .
- (8) מצא את ערכו של  $x$  אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית:  $x-3, 3x-4, x^2-1$ .
- (9) נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא: 
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 3 \\ a_1 = 5 \end{cases}$$
 הוכח שהסדרה חשבונית ומצא מהו האיבר התשעה-עשר שלה.
- (10) בסדרה חשבונית  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  ידוע כי סכום ארבעת האיברים הראשונים וסכום האיברים ה-6 עד ה-9 הם מספרים נגדיים.
- א. הוכח:  $a_5 = 0$ .
- ב. נתון:  $a_3 - a_{11} = 24$ . מצא את  $a_1$  ואת  $d$ .
- ג. מגדירים סדרה חשבונית חדשה  $b_n$  המקיימת:  $b_n = 2a_n - 3$ . מצא את ערך האיבר השלילי הראשון בסדרה ואת מיקומו הסידורי.
- (11) מצא את סכום ארבעה-עשר האיברים הראשונים בסדרה החשבונית:  $-3, 2, 7, 12, \dots$ .

- (12)** נתונה הסדרה החשבונית:  $5, -1, -7, -13, \dots$ . כמה איברים יש לחבר בסדרה (החל מהראשון) כדי להגיע לסכום של 987?
- (13)** תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגה של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 11 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 2 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 416 קפיצות?
- (14)** נתונה הסדרה החשבונית:  $63, -67, -71, \dots$ . כמה איברים לכל הפחות יש לחבר בסדרה כדי שהסכום המתקבל יהיה חיובי?
- (15)** נתונה הסדרה החשבונית:  $4, 13, 22, 31, \dots$ . בסדרה יש 36 איברים. חשב את סכום ארבעה-עשר האיברים האחרונים בסדרה.
- (16)** נתונה הסדרה החשבונית:  $4, 9, 14, 19, \dots, 599$ . מחקו כל איבר שלישי בסדרה. מצא את סכום האיברים שנותרו.
- (17)** סכום  $n$  האיברים האחרונים בסדרה חשבונית בת  $3n$  איברים גדול ב-1024 מסכום  $n$  האיברים הראשונים שבה.  
 א. בטא את  $n$  באמצעות הפרש הסדרה,  $d$ .  
 ב. נתון כי הפרש הסדרה הוא 8. כמה איברים בסדרה?
- (18)** נתונה סדרה שבה  $S_n = 2n^2 + 4n$ .  
 א. מצא את ערכם של שלושת האיברים הראשונים בסדרה.  
 ב. הוכח כי הסדרה חשבונית ומצא את הפרשה.
- (19)** בסדרה חשבונית ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות ה-5, ה-7, וה-16 הוא אפס. כמו כן ידוע כי סכום שלושת האיברים הראשונים הוא 132.  
 א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת הפרש הסדרה.  
 ב. מצא את האיבר השלילי הראשון בסדרה.  
 ג. מצא כמה איברים יש לחבר (החל מהאיבר הראשון) כדי לקבל סכום 210.

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} 150, 144, 138, \dots \\ 90, 93, 96, \dots \end{array} \right. : \text{נתונים שני טורים חשבוניים}$$

לשני הטורים אותו מספר איברים. ידוע כי סכום האיברים האחרונים של שני הטורים (האיבר האחרון מהטור הראשון והאיבר אחרון מהטור השני) הוא אפס.

א. מצא את מספר האיברים שבכל טור.

ב. מחברים את  $n$  האיברים הראשונים מהטור הראשון יחד עם  $n$  האיברים הראשונים מהטור השני. ידוע כי חיבור הסכומים הוא 3480. מצא את  $n$  אם ידוע שהוא קטן מ-20.

(21) נתונות שתי סדרות החשבוניות הבאות:  $a_n$  שהפרשה הוא  $d_1$  ו- $b_n$  שהפרשה

$$\text{הוא } d_2. \text{ ידוע כי: } d_1 = -2d_2.$$

סכום 50 האיברים הראשונים של שתי הסדרות שווה והאיבר העומד במקום ה-20 בסדרה  $a_n$  גדול ב-1 מהאיבר העומד במקום ה-37 בסדרה  $b_n$ .

א. מצא את הפרש הסדרה  $a_n - d_1$ .

ב. ידוע כי האיבר  $a_{10}$  קטן ב-1 מ-5 פעמים האיבר  $b_{50}$ .

מצא את  $a_1$  ואת  $b_1$ .

(22) נתונה הסדרה החשבונית:  $\dots, -13, -17, -21, \dots$

בסדרה יש 18 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

(23) בסדרה חשבונית שהפרשה  $d$  ובה  $2n$  איברים סכום האיברים במקומות

האי-זוגיים הוא 552 וסכום האיברים במקומות הזוגיים הוא 612.

$$\text{הוכח כי } nd = 60.$$

(24) בסדרה חשבונית עולה, שכל איבריה חיוביים ובה מספר אי-זוגי של איברים,

גדול סכום כל איברי הסדרה פי  $1\frac{14}{15}$  מסכום איברי הסדרה הנמצאים

במקומות האי-זוגיים. כמה איברים יש בסדרה?

- (25)** לפניך שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית:  $x-5$ ,  $x-16$ ,  $2x+23$ .
- א. ענה על הסעיפים הבאים:
- מצא את  $x$ .
  - מצא את הפרש הסדרה.
- ב. ידוע כי:  $a_{12} = 0$ . מצא את  $a_1$ .
- ג. האיבר האחרון בסדרה הוא:  $a_n = 308$ .
- מצא את סכום כל האיברים החיוביים העומדים במקומות האי-זוגיים.

- (26)** בסדרה חשבונית שבה מספר זוגי של איברים נתון כי סכום ריבועי האיברים העומדים במקומות ה-4 וה-5 שווה לריבוע האיבר העומד במקום ה-6. האיבר הראשון אינו אפס.
- א. הוכח את הטענות הבאות:
- $a_1 = -4d$
  - $S_9 = 0$
- ב. האיבר העומד במקום ה-6 גדול ב-2 מהאיבר העומד במקום ה-5. מצא את  $a_1$  ואת  $d$ .
- ג. מצא את מספר איברי הסדרה אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים הוא 504.

- (27)** בסדרה חשבונית שבה  $2n$  איברים ידוע כי סכום כל האיברים גדול ב-66 מפעמיים סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.
- א. הוכח כי  $nd = 66$ .
- ב. ידוע כי הפרש הסדרה הוא 3. הבע באמצעות  $a_1$  את סכום  $n$  האיברים הראשונים.
- ג. סכום  $n$  האיברים הראשונים הוא 187. מצא את האיבר החיובי הקטן ביותר בסדרה ואת מיקומו הסידורי בסדרה.

- (28)** אדם המעוניין לקנות רכב קיבל שתי הצעות מחיר.
- ההצעה הראשונה :
- לשלם בתשלום הראשון 1000 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הגדול ב-500 ₪ מהתשלום הקודם.
- ההצעה השנייה :
- לשלם בתשלום הראשון 7200 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הקטן ב-450 ₪ מהתשלום הקודם.
- ידוע כי מספר התשלומים בהצעה השנייה קטן ב-4 ממספר התשלומים שבהצעה הראשונה.
- א. כמה תשלומים יצטרך לשלם לפי כל הצעה.
- ב. מה מחיר הרכב?

## תשובות סופיות:

- (1)  $a_{43} = -235$
- (2)  $d = 4, a_1 = -5$
- (3) 20 איברים.
- (4) 48 איברים.
- (5) 15 קפיצות.
- (6) 58 מספרים.
- (7) 31 איברים חיוביים.
- (8)  $x = 4, x = 1$
- (9)  $a_{19} = 59$
- (10) א. הוכחה.
- (11)  $S_{14} = 413$
- (12) 21 איברים.
- (13) 16 דקות.
- (14) 37 איברים.
- (15) 3647
- (16) 23920
- (17) א.  $n = \sqrt{\frac{512}{d}}$
- (18) א.  $a_1 = 6, a_2 = 10, a_3 = 14$  ב.  $d = 4$
- (19) א.  $a_1 = 50, d = -6$  ב.  $a_{10} = -4$  ג.  $n = 6$
- (20) א.  $n = 81$  ב.  $n = 16$
- (21) א.  $d_1 = 4$  ב.  $a_1 = -52, b_1 = 95$
- (22) אי-זוגיים:  $S = 99$  זוגיים:  $S = 135$
- (23) שאלת הוכחה.
- (24) 29 איברים.
- (25) א. i.  $x = -50$  ii.  $d = 11$  ב.  $a_1 = -121$  ג.  $S = 2156$
- (26) א. הוכחה. ב.  $a_1 = -8, d = 2$  ג.  $n = 36$
- (27) א. הוכחה. ב.  $S = 22a_1 + 693$  ג.  $a_9 = 1$
- (28) א. 12 לפי ההצעה הראשונה ו-8 לפי ההצעה השנייה. ב. 45000 שח.

## סדרה הנדסית:

### סיכום כללי:

- נוסחת האיבר הכללי:

נוסחת האיבר הכללי של סדרה הנדסית המתחילה באיבר  $a_1$  ומנתה היא  $q$  נתונה ע"י הנוסחה:  $a_n = a_1 q^{n-1}$ , כאשר:  $n$  הוא מיקום האיבר שערכו  $a_n$  בסדרה.

- כלל נסיגה של סדרה הנדסית:

כלל נסיגה של סדרה הנדסית  $a_n$  שמנתה היא  $q$  ואיברה הראשון הוא  $a_1$  נתון ע"י הקשר הבא:  $a_{n+1} = a_n \cdot q$ .

- נוסחת הסכום של סדרה הנדסית:

סכום  $n$  האיברים הראשונים של סדרה הנדסית  $a_n$  שמנתה היא  $q$  ואיברה

$$\text{הראשון הוא } a_1 \text{ נתון ע"י: } S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

### שאלות:

(1) נתונה הסדרה ההנדסית:  $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, \dots$

מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 9 איברים.

(2) מצא כמה איברים יש בסדרה ההנדסית:  $\frac{9}{64}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{64}{81}$

(3) בסדרה הנדסית האיבר השישי הוא 8 והאיבר העשירי הוא 128. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

(4) בסדרה הנדסית ההפרש בין האיבר השביעי לאיבר החמישי הוא 432 וההפרש בין האיבר החמישי לשלישי הוא 48. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

- (5) בסדרה הנדסית עולה ההפרש בין האיבר השמיני לאיבר הרביעי הוא 3120 וסכום האיברים השני והרביעי הוא 5.2. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.
- (6) תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 3 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 324 קפיצות?
- (7) מצא את ערכו של  $x$  אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה הנדסית:  $x-6, x+4, 4x+1$ . מצא גם את מנת הסדרה.
- (8) נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא: 
$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n \\ a_1 = 3 \end{cases}$$
 הוכח שהסדרה הנדסית ומצא מהו האיבר השמיני בה.
- (9) מצא את סכום תשעת האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית:  $5, 10, 20, 40, \dots$ .
- (10) תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 2 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 5 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 1562 קפיצות?
- (11) סכום  $n$  האיברים האחרונים בסדרה הנדסית בת  $3n$  איברים שמנתה 2, גדול פי 256 מסכום  $n$  האיברים הראשונים בה. כמה איברים בסדרה?
- (12) בסדרה הנדסית עולה שבה  $n$  איברים, סכום  $n-3$  האיברים האחרונים גדול פי 8 מסכום  $n-3$  האיברים הראשונים בה. מצא את מנת הסדרה.
- (13) סכום כל האיברים בסדרה הנדסית הוא 252. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-120 מהאיבר השני בה. מצא כמה איברים יש בסדרה אם ידוע שמנתה 2.

**14** המספרים:  $2x-3$ ,  $x-9$ ,  $x-13$  הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית עולה שכל איבריה חיוביים.

- א. מצא את  $x$ .  
 ב. ענה על הסעיפים הבאים:  
 i. כתוב את נוסחת האיבר הכללי בסדרה זו.  
 ii. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 18750.  
 ג. ידוע כי האיבר האחרון בסדרה הוא:  $a_n = 5^{11}$ .  
 מצא את סכום 7 האיברים האחרונים בסדרה.

**15** נתונה הסדרה ההנדסית הבאה:  $a_1, 12, 36, \dots, a_{n+1}$ . מוסיפים לכל איבר בסדרה זו שישית מהאיבר הבא אחריו ויוצרים סדרה חדשה  $b_n$  באופן הבא:

$$b_1 = a_1 + \frac{a_2}{6}, \quad b_2 = a_2 + \frac{a_3}{6}, \quad b_3 = a_3 + \frac{a_4}{6}, \quad \dots, \quad b_n = a_n + \frac{a_{n+1}}{6}$$

- א. הוכח כי הסדרה  $b_n$  היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.  
 ב. הראה כי היחס בין סכום  $n$  האיברים הראשונים של הסדרה  $a_n$  ובין סכום  $n$  האיברים הראשונים של הסדרה  $b_n$  הוא  $\frac{2}{3}$ .  
 ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה  $b_n$  שסכומם מהווה  $\frac{2}{9}$  מ- $a_8$ .

**16** נתונה הסדרה ההנדסית:  $7, 14, 28, \dots$ . בסדרה יש 8 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

**17** בסדרה הנדסית ובה  $2n$  איברים סכום האיברים במקומות הזוגיים גדול פי 4 מסכום האיברים במקומות האי-זוגיים. חשב את מנת הסדרה.

**18** נתונה סדרה הנדסית שמנתה  $q$  ובה מספר זוגי של איברים. בטא באמצעות  $q$  את היחס בין סכום איברי הסדרה כולה לסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים שבה.

**19** בסדרה הנדסית שבה  $2n+1$  איברים, סכום  $n$  האיברים הראשונים קטן פי 9 מסכום  $n$  האיברים הבאים אחריהם. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-30 מהאיבר הראשון שבה. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

20) ענה על הסעיפים הבאים :

- א. הראה כי בסדרה הנדסית שבה  $2n$  איברים היחס בין סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים לבין סכום כל איברי הסדרה תלוי במנת בסדרה.  
 בסדרה הנדסית שבה מספר זוגי של איברים ידוע כי סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים קטן פי 4 מסכום כל איברי הסדרה. האיבר הראשון בסדרה זו קטן ב-2 ממנת הסדרה.  
 ב. כתוב נוסחה לאיבר כללי של סדרה זו.  
 ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 324.

- 21) בסדרה הנדסית שבה 12 איברים סכום כל איברי הסדרה גדול פי 3 מסכום האיברים כאשר מחליפים את סימני כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.  
 א. מצא את מנת הסדרה.  
 ב. ידוע כי ההפרש בין האיבר החמישי לאיבר הרביעי בסדרה הוא 8.  
 מצא את האיבר הראשון בסדרה.  
 ג. חשב את סכום כל האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה.

- 22) באחת ממדינות המזרח היה מלך שאהב משחקי חשיבה. לכבוד יום הולדתו הכין לו השר הבכיר שבממלכתו משחק מיוחד המכיל 25 משבצות ו-2 חיילי משחק. המלך, מרוב התלהבות ושמחה לא ידע כיצד לגמול לשר החכם ושאל אותו מה ירצה בתמורה. השר סרב לקבל דבר על מתנתו עד שלבסוף החליט המלך לתת לשר מחצית מכל אוצרות הממלכה המונים כ-40 מיליון אבנים יקרות. לאחר ששמע על כך השר, הוא החליט לאתגר את המלך והעלה את ההצעה הבאה :  
 תן לי אבן יקרה אחת והכפל אותה בכל משבצת שבמשבצות המשחק באופן הבא : כנגד המשבצת הראשונה - אבן אחת, כנגד השנייה - שתי אבנים, כנגד השלישית - ארבע אבנים וכן הלאה... המלך הסכים להצעה.  
 א. כמה אבנים המלך ייתן לשר כנגד המשבצת האחרונה במשחק?  
 ב. העזר בכמות האבנים שברשותו של השר וקבע האם הצעתו שוות-ערך יותר מהחלטת המלך לתת לו מחצית מאוצרות הממלכה.  
 ג. סמוך לפני שנתן המלך את האבנים לשר, הציעה בתו של המלך הצעה נוספת והיא : תן עבור כל משבצת זוגית  $2^n$  אבנים, כאשר  $n$  הוא מספר המשבצת. האם כדאי למלך לקבל את הצעת בתו או להישאר עם ההצעה המקורית של השר?

## תשובות סופיות:

(1)  $a_9 = 729$

(2)  $n = 7$

(3)  $a_1 = \pm \frac{1}{4}, q = \pm 2$

(4)  $a_1 = \frac{2}{3}, q = \pm 3$

(5)  $a_1 = \frac{1}{25}, q = 5$

(6) 5 דקות.

(7)  $x = -\frac{2}{3} \rightarrow q = -\frac{1}{2}, x = 11 \rightarrow q = 3$

(8)  $a_8 = 384$

(9)  $S_9 = 2555$

(10) 5 דקות.

(11) יש 12 איברים בסדרה.  $n = 4$

(12)  $q = 2$

(13)  $n = 6$

(14) א.  $x = 14$  ב. i.  $a_n = 5^{n-1}$  ב. ii.  $a_6, a_7$  ג.  $S_7^* = 61,034,375$

(15) א.  $q = 3$  ג.  $b_5, b_6$

(16) אי-זוגיים:  $S = 595$ , זוגיים:  $S = 1190$

(17)  $q = 4$

(18)  $\frac{q+1}{q}$

(19)  $a_1 = \frac{3}{8}$

(20) א.  $\frac{S_{n(o)}}{S_{2n}} = \frac{1}{q+1}$  ב.  $a_n = 3^{n-1}$  ג.  $a_5, a_6$

(21) א.  $q = 2$  ב.  $a_1 = 1$  ג.  $S_{6(p)} = 2730$

(22) א.  $a_{25} = 16,777,216$

ב. לפי הצעת השר יהיו לו 33,554,431 אבנים ולפי הצעת המלך יהיו

לו 20,000,000 אבנים. ג.  $4, 16, 64, \dots, 2^{24}$ ,  $S_n = 22,369,620$

## סדרות מעורבות:

### שאלות:

- (1) נתונים שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית שמנתה 3. אם נכפול את המספר הראשון ב-3, נוסיף למספר השני 4 ונחסיר מהמספר השלישי 4 תתקבל סדרה חשבונית. מצא את המספרים.
- (2) נתונות שתי סדרות שמתחילות במספר 2 ובשתיהן 3 איברים. סדרה אחת היא חשבונית והשנייה הנדסית. האיבר השלישי בשתי הסדרות זהה והאיבר השני בסדרה ההנדסית קטן ב-4 מהאיבר השני בסדרה החשבונית. מצא את מנת הסדרה ההנדסית.
- (3) נתונים ארבעה מספרים בעלי התכונות הבאות:  
 הראשון, השני והרביעי מהווים שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית שמנתה 2.  
 הראשון, השלישי והרביעי מהווים שלושה איברים עוקבים בסדרה חשבונית וסכומם  $22\frac{1}{2}$ . מצא את ארבעת המספרים.
- (4) ההפרש של סדרה חשבונית שווה למנה של סדרה הנדסית עולה. האיבר הראשון בסדרה ההנדסית הוא 6 וידוע כי סכום 2 האיברים הראשונים בסדרה החשבונית שווה לסכום שני האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית. האיבר השלישי בסדרה ההנדסית גדול פי 2 מהאיבר השלישי בסדרה החשבונית.  
 א. מצא את שלושת האיברים של הסדרה החשבונית.  
 ב. מצא כמה איברים יש לחבר בסדרה החשבונית החל מהאיבר הראשון כדי לקבל את הסכום 60.  
 ג. מצא את מיקומו הסידורי של איבר בסדרה ההנדסית הגדול פי 12 מהאיבר האחרון שחובר בסכום הסדרה החשבונית שחישבת בסעיף הקודם.
- (5) נתונות שתי הסדרות הבאות: סדרה חשבונית:  $a_1, a_2, a_3, \dots$  וסדרה הנדסית:  $b_1, b_2, b_3, \dots$ . ידוע כי האיבר הראשון בשתי הסדרות שווה. האיבר השלישי בסדרה ההנדסית גדול פי 4 מהאיבר הראשון בסדרה החשבונית.  
 א. מצא את מנת הסדרה ההנדסית אם ידוע כי היא אינה עולה.  
 ב. נתון גם כי האיבר החמישי בסדרה ההנדסית שווה לאיבר הרביעי בסדרה החשבונית. הוכח כי הפרש הסדרה החשבונית גדול פי 5 מהאיבר הראשון.  
 ג. בכל סדרה יש 10 איברים. הסכום של כל האיברים של שתי הסדרות יחד הוא 212. מצא את האיבר הראשון של שתי הסדרות.

**תשובות סופיות:**

- (1) המספרים הם: 2, 6, 18.
- (2)  $q = 3$  או  $q = -1$ .
- (3) המספרים הם: 3, 6, 7.5, 12.
- (4) א. 8, 10, 12      ב. 5      ג. 6.
- (5) א.  $q = -2$       ג.  $a_1 = 2$ .

## סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

### סיכום כללי:

- הגדרה:

סדרה הנדסית  $a_n$  המקיימת:  $|q| < 1$ ,  $(q \neq 0)$  נקראת סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת.

- נוסחת הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת  $a_n$  ניתן לחישוב ע"י שימוש בכלל:  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$  והצבתו בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית.

$$. S = \frac{a_1}{1-q} \quad \text{מתקבל הכלל הבא:}$$

- סכום סופי של איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

- כאשר מתבקשים לחשב סכום של  $n$  איברים ראשונים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה:  $. S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$

- כאשר מתבקשים לחשב סכום של  $n$  איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת המתחילים באיבר  $a_k$  יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה

$$. S_n = \frac{a_k(q^n - 1)}{q - 1} \quad \text{באופן הבא:}$$

**שאלות:**

(1) מצא את סכום כל איברי הסדרה ההנדסית הבאה:  $12, 4, 1\frac{1}{3}, \dots$

(2) סכום כל איברי סדרה הנדסית אינסופית שמנתה  $\frac{1}{4}$  הוא 32. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

(3) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 62.5. ידוע כי האיבר השני בסדרה הוא 10. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה (שתי אפשרויות).

(4) האיבר הראשון בסדרה הנדסית אינסופית יורדת הוא 14. סכום האיברים במקומות הזוגיים הוא  $9\frac{1}{3}$ . מצא את סכום האיברים במקומות האי-זוגיים.

**\*הערה:** שתי השאלות הבאות מסכמות את סוגי הסכומים וייצוג סדרות שונות באמצעות סדרה נתונה כפי שמקובל בנושא זה ואינן מייצגות אורך של שאלת בגרות.

(5) נתונה סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת  $a_n$  שמנתה  $q$ ,  $(q \neq 0, |q| < 1)$ , מגדירים שלוש סדרות חדשות:  $b_n, c_n$  ו- $d_n$  באופן הבא:

$d_n$	$c_n$	$b_n$	הסדרה:
$d_1 = S_a + a_1$	$c_1 = a_2^2 - a_1^2$	$b_1 = a_1$	<b>הכלל:</b>
$d_2 = S_a + a_2$	$c_2 = a_3^2 - a_2^2$	$b_2 = a_1 + a_2$	
$d_3 = S_a + a_3$	$c_3 = a_4^2 - a_3^2$	$b_3 = a_1 + a_2 + a_3$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$d_n = S_a + a_n$	$c_n = a_{n+1}^2 - a_n^2$	$b_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = S_{a(n)}$	

הסכום  $S_a$  הוא סכום הסדרה  $a_n$ , והסכום  $S_{a(n)}$  הוא סכום  $n$  האיברים הראשונים של הסדרה  $a_n$ .

- א. קבע אלו מבין הסדרות  $b_n$ ,  $c_n$  ו- $d_n$  הן הנדסיות והבע את מנתן ע"י  $q$ .
- ב. הבע באמצעות  $a_1$  בלבד את סכום הסדרה ההנדסית שמצאת בסעיף הקודם.
- ג. מסמנים את סכום ריבועי האיברים של הסדרה ההנדסית שמצאת בסעיף א' ב- $S_{(s)}$ . הוכח כי לא קיים ערך של  $q$  עבורו סכום ריבועי האיברים  $S_{(s)}$ , שווה לסכום הסדרה הנ"ל בריבוע.

6 נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת:  $a_n$  שמנתה  $q$ . מגדירים סדרה חדשה  $b_n$  באופן הבא:

$$b_1 = S_1^* = \frac{a_1}{1-q}, b_2 = S_2^* = \frac{a_2}{1-q}, b_3 = S_3^* = \frac{a_3}{1-q}, \dots, b_n = S_n^* = \frac{a_n}{1-q}, \dots$$

כאשר:  $S_n^*$  מייצג את סכום הסדרה  $a_n$  החל מהאיבר  $a_n$  (ועד אינסוף).

- א. הוכח כי הסדרה  $b_n$  היא גם הנדסית אינסופית יורדת וכתוב את נוסחת האיבר הכללי שלה באמצעות  $a_1$  ו- $q$ .
- ב. ידוע כי סכום הסדרה  $b_n$  הוא 126 וכי סכום 8 האיברים הראשונים בסדרה  $a_n$  גדול פי 6560 מהאיבר התשיעי בסדרה  $b_n$ . מצא את  $a_1$  ו- $q$ .
- ג. היעזר בסעיף הקודם והוכח כי מתקיים:  $b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots = 42$ .
- ד. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה  $b_n$ .
- ה. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה  $b_n$ .
- ו. מחליפים את סימני האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה  $b_n$  כך שנוצרת הסדרה:  $b_n^*$ . חשב את סכום הסדרה  $b_n^*$ .
- ז. מחליפים את סימני האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה  $b_n$  כך שנוצרת הסדרה:  $b_n^{**}$ . חשב את סכום הסדרה  $b_n^{**}$ .
- ח. מעלים בריבוע את כל איברי הסדרה  $b_n$ . מסמנים את הסכום המתקבל ב- $S_{(s)}$  (מלשון: square). כמו כן, מסמנים את סכום הסדרה המקורית ב- $S_b$ . הראה כי:  $S_b^2 \neq S_{(s)}$ .
- ט. הוכח כי היחס בין סכום איברי הסדרה  $a_n$  וסכום איברי הסדרה  $b_n$  הוא  $\frac{2}{3}$ .

- (7) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 24. מאיברי הסדרה הנתונה יצרו את סדרה חדשה באופן הבא:  $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, a_4 + a_5, \dots$ .
- א. הוכח שהסדרה החדשה היא הנדסית אינסופית יורדת.  
 ב. ידוע שסכום כל איברי הסדרה החדשה הוא 32.  
 מצא את האיבר הראשון והמנה של הסדרה המקורית.
- (8) בסדרה הנדסית אינסופית יורדת  $a_n$  ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים גדול פי  $1\frac{2}{3}$  מסכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.
- א. מצא את מנת הסדרה.  
 מחברים כל שני איברים סמוכים בסדרה הנתונה ויוצרים סדרה חדשה  $b_n$ .
- ב. הוכח כי הסדרה  $b_n$  גם היא הנדסית יורדת ומצא את מנתה.  
 ג. הראה כי סכום הסדרה  $b_n$  שווה לסכום הסדרה  $a_n$ .  
 ד. סכום שתי הסדרות יחד הוא 1000. מצא את האיבר הראשון בסדרה  $a_n$ .
- (9) נתונה סדרה הנדסית אינסופית  $a_1, a_2, a_3, \dots$  שמנתה היא  $q$ ,  $(0 < q < 1)$ . נגדיר את הסכומים הבאים:  $T = a_1 + a_2 + a_5 + a_6 + a_9 + a_{10} + \dots$ ,  $V = a_3 + a_7 + a_{11} + \dots$ . נתון כי:  $T = 6V$ .
- א. מצא את מנת הסדרה  $q$ .  
 ב. פי כמה קטן  $V$  מסכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה?  
 ג. מצא את האיבר הראשון אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים הוא  $1365\frac{1}{3}$ .
- (10) נתונה הסדרה ההנדסית הבאה:  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$  שמנתה היא  $q$ . בונים סדרה חדשה מריבועי כל האיברים הסדרה באופן הבא:  $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots, a_{2n}^2$ .
- א. הוכח כי היחס בין סכום  $n$  האיברים הראשונים בסדרת הריבועים ובין סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה הנתונה תלוי רק באיבר הראשון של הסדרה.  
 בסדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 640 ידוע כי סכום 10 האיברים הראשונים כאשר מעלים אותם בריבוע גדול פי 320 מסכום 10 האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.  
 ב. מצא את מנת הסדרה.  
 ג. מחברים את כל איברי הסדרה החל מאיבר  $a_n$  כלשהו.  
 ידוע כי סכום זה קטן פי 16 מסכום הסדרה המקורי. מצא את האיבר  $a_n$ .

- 11** נתונה סדרה הנדסית אינסופית  $a_1, a_2, a_3, \dots$  שמנתה היא  $q$ ,  $(q \neq 0, |q| < 1)$ .
- נגדיר את הסכומים הבאים:  $T = a_1 + a_3 + a_6 + a_8 + a_{11} + a_{13} + \dots$ ,  $V = a_2 + a_7 + a_{12} + \dots$ .  
 נתון כי:  $V = 0.3T$ .
- א. מצא את מנת הסדרה  $q$ .  
 מחליפים את הסימנים של כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים ומתקבלת סדרה חדשה שסכומה הוא 12.
- ב. מצא את האיבר הראשון בסדרה המקורית.
- ג. מעלים את כל איברי הסדרה בריבוע. חשב את סכום הסדרה כעת.

## תשובות סופיות:

$$. S = 18 \quad (1)$$

$$. a_1 = 24 \quad (2)$$

$$. q = \frac{4}{5}, a_1 = 12 \frac{1}{2} \text{ או } q = \frac{1}{5}, a_1 = 50 \quad (3)$$

$$. S = 18 \frac{2}{3} \quad (4)$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{a_{n+1}(q^{n+1}-1)}{a_n(q^n-1)} = \frac{a_{n+1}(q^{n+1}-1)}{a_n(q^n-1)} = q \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q^n-1} : b_n \text{ הסדרה } (5)$$

היות והיא תלויה ב- $n$  היא אינה הנדסית.

$$. \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2}{a_{n+1}^2 - a_n^2} = \frac{a_n^2 q^4 - a_n^2 q^2}{a_n^2 q^2 - a_n^2} = \frac{a_n^2 q^2 (q^2 - 1)}{a_n^2 (q^2 - 1)} = q^2 : c_n \text{ הסדרה הנדסית}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{S + a_{n+1}}{S + a_n} = \frac{\frac{a_1}{1-q} + a_{n+1}}{\frac{a_1}{1-q} + a_n} = \frac{a_1 + (1-q)a_{n+1}}{a_1 + (1-q)a_n} = \frac{a_1(1 + (1-q)q^n)}{a_1(1 + (1-q)q^{n-1})} = \frac{q^n - q^{n+1} + 1}{q^{n-1} - q^n + 1} : d_n \text{ הסדרה}$$

$$. S_{(c_n)} = \frac{c_1}{1-q_c} = \frac{a_2^2 - a_1^2}{1-q^2} = \frac{a_1^2(q^2-1)}{1-q^2} = -a_1^2 \quad \text{ב. היות והיא תלויה ב-} n \text{ היא אינה הנדסית.}$$

ג. מההשוואה:  $S_{(s)} = S^2$  מקבלים כי פתרון המשוואה הוא:  $q = 0, \pm 1$ .

כולם נפסלים מכיוון שמנת הסדרה הנתונה  $a_n$  היא שבר.

עבור  $|q| > 1$  הסדרות אינן מתכנסות ולכן לא קיים ערך של  $q$  עבורו

השוויון יתקיים. מש"ל.

$$31.5 \quad \text{ד. הוכחה.} \quad \text{ג. הוכחה.} \quad \text{ב. } a_1 = 56, q = \frac{1}{3} \quad \text{א. } b_n = \frac{a_1}{1-q} q^{n-1} \quad (6)$$

$$7938 \quad \text{ח.} \quad 63 \quad \text{ז.} \quad -63 \quad \text{ו.} \quad 94.5 \quad \text{ה.}$$

$$. (b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots)^2 : \text{משמעו: } S^2$$

הסכום:  $S_{(s)}$  משמעו:  $b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 + \dots$ . ברור כי הביטויים אינם שווים.

$$. q = \frac{1}{3}, a_1 = 16 \quad \text{ב. הוכחה.} \quad (7)$$

$$a_1 = 200 \quad \text{ד.} \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{2n+1} + a_{2n+2}}{a_{2n-1} + a_{2n}} = q^2 \quad \text{ב.} \quad q = 0.6 \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$a_1 = 1024 \quad \text{ג.} \quad \text{ב. פי 5} \quad q = \frac{1}{2} \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$. a_5 = 20 \quad \text{ג.} \quad q = 0.5 \quad \text{ב. הוכחה.} \quad (10)$$

$$. S = 288 \quad \text{ג.} \quad a_1 = -16 \quad \text{ב.} \quad q = \frac{1}{3} \quad \text{א.} \quad (11)$$

## סדרת נסיגה:

### שאלות:

$$(1) \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2n - 11 \\ a_1 = -6 \end{cases} \quad \text{נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא:}$$

- א. מצא את האיבר השלישי בסדרה.  
 ב. נתון כי האיבר השלושה-עשר בסדרה הוא 18. מצא את  $a_{12}$  ו- $a_{14}$ .  
 ג. נתון כי האיבר השלושים ואחת בסדרה הוא  $k$ . הבע באמצעות  $k$  את  $a_{30}$  ו- $a_{32}$ .  
 ד. מצא את מיקומם של שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 133.  
 ה. הסבר מדוע אין שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 62.

$$(2) \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2n \\ a_1 = 0 \end{cases} \quad \text{נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא:}$$

נתון כי  $a_k = 72$ . הבע באמצעות  $k$  את  $a_{k+2}$ .

$$(3) \quad \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + n^2 - 31 \\ a_7 = t \end{cases} \quad \text{נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא:}$$

מצא את ערכו של  $t$  שבעבורו האיברים  $a_7, a_8, a_9$  הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית.

$$(4) \quad \text{סדרה שהאיבר הכללי בה הוא } a_n \text{ מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: } a_{n+1} = a_n + 6n - 2$$

מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא  $b_n$  באופן הבא:  $b_n = a_{n+1} - a_n$ .

א. הוכח שהסדרה  $b_n$  היא סדרה חשבונית ומצא את הפרשה.

ב. חשב את  $b_1$ .

$$(5) \quad \text{סדרה שהאיבר הכללי בה הוא } a_n \text{ מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: } a_{n+1} = 3a_n + 4$$

מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא  $b_n$  באופן הבא:  $b_n = a_n + 2$ .

א. הוכח שהסדרה  $b_n$  היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.

ב. נתון:  $b_5 = 162$ . חשב את  $a_1$ .

- 6) סדרה מוגדרת ע"י הכלל:  $a_1 = 3, a_{n+1} = 3a_n + 10n - 5$ .  
 מגדירים סדרה חדשה המקיימת לכל  $n$  טבעי:  $b_n = a_n + 5n$ .
- הוכח כי הסדרה  $b_n$  היא סדרה הנדסית.
  - חשב את האיבר  $b_5$ .
  - חשב את הסכום:  $b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{12}$ .
- 7) סדרה מוגדרת לכל  $n$  טבעי ע"י הנוסחה:  $a_1 = k, a_{n+1} = 8n - a_n + 3$ .
- הבע באמצעות  $k$  את ארבעת האיברים הראשונים בסדרה.
  - הוכח כי סדרת האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים וסדרת האיברים העומדים במקומות הזוגיים הן חשבוניות ומצא את הפרשן.
  - חשב את סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה.
- 8) סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה הבא:  $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{3a_n}{2a_n + 3}$ .
- מגדירים סדרה חדשה לפי:  $b_n = \frac{4 - 7a_n}{a_n}$ .
- הוכח כי הסדרה  $b_n$  היא חשבונית ומצא את הפרשה.
  - חשב את הסכום הבא:  $b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{22}$ .
- 9) סדרה מקיימת את כלל הנסיגה:  $a_1 = 1, a_{n+1} = 3n - a_n - 7$ .
- חשב את 5 האיברים הראשונים וקבע האם הסדרה היא חשבונית.
  - הוכח כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:  $a_{n+2} = a_n + 3$ .
  - כתוב נוסחה לסכום  $n$  האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.
  - חשב את הסכום הבא:  $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{17}$ .

**10** סדרה מוגדרת לפי כלל הנסיגה הבא :  $a_{n+1} = a_n + 2 \cdot 3^n + 2$ .

א. ענה על הסעיפים הבאים :

i. הבע את  $a_{n+2}$  באמצעות  $a_n$ .

ii. מצא את מיקומו הסידורי של איבר הגדול ב-652 מהאיבר העומד שני מקומות לפניו.

ב. הנוסחה לסכום  $n$  האיברים הראשונים של אחת מהסדרות המיוצגות

ע"י כלל הנסיגה הנ"ל היא :  $S_n = 1.5 \cdot 3^n + n^2 + n - 1.5$ .

חשב את הסכום הבא :  $a_6 + a_7 + a_8 + \dots + a_{11}$ .

ג. מהו האיבר הראשון של הסדרה המיוצגת ע"י כלל הנסיגה ונוסחת הסכום הנ"ל?

**11** סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה :  $a_1 = 6, a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 5}$ .

מגדירים סדרה חדשה  $b_n$  המקיימת לכל  $n$  טבעי :  $b_n = \frac{a_n + 3}{a_n}$ .

א. הוכח כי הסדרה  $b_n$  היא הנדסית ומצא את מנתה.

ב. כתוב נוסחה ל- $b_n$  באמצעות  $n$  בלבד.

ג. חשב את הסכום הבא :  $b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots - b_{10}$ .

## תשובות סופיות:

$$a_{30} = k - 49, a_{32} = k + 51 \quad \text{ג.} \quad a_{12} = 5, a_{14} = 33 \quad \text{ב.} \quad a_3 = -22 \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$a_{62}, a_{63} \quad \text{ד.}$$

$$a_{k+2} = 74 + 4k \quad (2)$$

$$t = -33 \quad (3)$$

$$b_1 = 4 \quad \text{ב.} \quad d = 6 \quad \text{א.} \quad (4)$$

$$a_1 = 0 \quad \text{ב.} \quad q = 3 \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$S = 1594320 \quad \text{ג.} \quad b_5 = 648 \quad \text{ב.} \quad b_{n+1} = 3b_n \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$8 \quad \text{ב.} \quad a_4 = 19 - k, a_3 = k + 8, a_2 = 11 - k, a_1 = k \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$830 \quad \text{ג.}$$

$$S_{11(p)} = 267 \frac{2}{3} \quad \text{ב.} \quad (8)$$

$$S_{n(o)} = 1.5n^2 - 0.5n \quad \text{ג.} \quad a_1 = 1, a_2 = -5, a_3 = 4, a_4 = -2, a_5 = 7 \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$S_{9(o)} = 117 \quad \text{ד.}$$

$$a_4 \quad \text{ii.}$$

$$a_{n+2} = a_n + 8 \cdot 3^n + 4 \quad \text{i.} \quad \text{א.} \quad (10)$$

$$a_1 = 5 \quad \text{ג.}$$

$$S_{6-11} = 265458 \quad \text{ב.}$$

$$S_{10}^* = -4086.74 \quad \text{ג.}$$

$$b_n = 1.5 \cdot 2.5^{n-1} \quad \text{ב.}$$

$$q = 2.5 \quad \text{א.} \quad (11)$$

# מתמטיקה

## פרק 6 - אינדוקציה מתמטית

### תוכן העניינים

128	1. שאלות העוסקות בתכונות התחלקות
131	2. סדרות
133	3. עצרת
134	4. שאלות שבהן האיבר הכללי מורכב ממספר מחוברים
135	5. שאלות העוסקות באינדוקציות עם איברים משתנים
136	6. שאלות העוסקות בהוכחת באי-שוויונים באינדוקציה
138	7. שאלות כוללות ומסכמות
140	8. מושג הסכימה וקתיבה מקוצרת של אינדוקציות

## שאלות העוסקות בתכונות התחלקות:

**סיכום כללי:**

**מבנה כללי של רישום הוכחה באינדוקציה:**

**בדיקה:**

בדיקה נכונות האינדוקציה עבור  $n=1$  (ולעיתים כדאי לבדוק גם עבור  $n=2,3$ ).

**הנחת האינדוקציה:**

נניח כי עבור  $n=k$  (טבעי כלשהו) כי טענת האינדוקציה נכונה.

**הוכחת האינדוקציה:**

נוכיח כי עבור  $n=k+1$  טענת האינדוקציה מתקיימת.

**סיכום:**

לסיכום, הראנו כי הטענה נכונה עבור  $n=1$  והראנו כי נכונות הטענה עבור  $n=k$  גוררת את נכונותה עבור  $n=k+1$ , לפיכך, על פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל  $n$  טבעי.

## שאלות:

- (1) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $8^n - 3^n$  מתחלק ב-5 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.
- (2) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $11^n - 4^n$  מתחלק ב-7 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.
- (3) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $8 \cdot 7^n + 4^{n+2}$  מתחלק ב-24 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.
- (4) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $5 \cdot 3^{2n} - 5^{n+1}$  מתחלק ב-20 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.
- (5)  $a_n$  הוא האיבר במקום ה- $n$  בסדרה החשבונית:  $1, 3, 5, 7, \dots$  הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $2^{a_n} + 4$  מתחלק ב-12 ללא שארית לכל  $n$  טבעי הגדול מ-1.
- (6) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $n^2 + n$  מתחלק ב-2 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.
- (7) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $n^3 + 5n$  מתחלק ב-6 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.
- (8) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $3^n - 2n - 1$  מתחלק ב-4 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.
- (9) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $9(9^n - 1) - 40n$  מתחלק ב-32 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.
- (10) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $7^n + 5^n - 2^n(2^n + 1)$  מתחלק ב-6 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.

**(11)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $7^n + 2^{2n}$  מתחלק ב-11 ללא שארית לכל  $n$  טבעי אי זוגי.

**(12)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $a^n - b^n$  מתחלק ב- $(a+b)$  ללא שארית לכל  $n$  טבעי זוגי.

**(13)** הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $7^{n+2} + 1$  מותיר שארית 2 בחלוקתו ב-3 לכל  $n$  טבעי.

**תשובות סופיות:**

שאלות הוכחה.

## סדרות:

### סיכום כללי:

#### תזכורת:

- סדרה היא אוסף מספרים:  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , כאשר  $n$  הוא מיקום האיבר בסדרה ו- $a_n$  הוא ערך האיבר העומד במקום ה- $n$  בסדרה.

○ סדרה כללית – סדרה שבה כל איבר מוגדר לפי מקומו בסדרה.

○ סכום  $n$  האיברים הראשונים בסדרה יסומן ב- $S_n$

והוא מקיים:  $S_n = a_1 + \dots + a_n$ .

- סדרה חשבונית – סדרת מספרים שבה ההפרש בין כל שני איברים סמוכים הוא גודל קבוע. נוסחת האיבר הכללי היא:  $a_n = a_1 + d(n-1)$  כאשר  $d$  הפרש הסדרה.

○ סכום  $n$  האיברים הראשונים הוא:  $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n}{2}[2a_1 + d(n-1)]$ .

- סדרה הנדסית – סדרת מספרים שבה המנה בין כל שני איברים סמוכים היא גודל קבוע. נוסחת האיבר הכללי היא:  $a_n = a_1 q^{n-1}$  כאשר  $q$  היא מנת הסדרה.

○ סכום  $n$  האיברים הראשונים הוא:  $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ .

## שאלות:

14) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי

$$1+2+3+4+\dots+n = \frac{n}{2}(n+1) \quad \text{מתקיים:}$$

15) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי

$$4+7+10+13+\dots+(3n+1) = \frac{n}{2}(3n+5) \quad \text{מתקיים:}$$

16) נתונה סדרה שבה:  $a_n = n(n+2)$

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:  $S_n = \frac{n}{6}(n+1)(2n+7)$

17) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$$

18) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$\frac{6}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{6}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{6}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}$$

19) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 9 + \dots + n \cdot 3^{n-1} = \frac{1}{4} [3^n (2n-1) + 1]$$

## תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

## עצרת:

### סיכום כללי:

#### תזכורת – מושג העצרת:

עצרת מוגדרת להיות מכפלת האיברים עד לערך הנקוב:  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ .  
 מגדירים:  $0! = 1$  ותמיד מתקיימים השוויונות:  $n! = n \cdot (n-1)!$ ,  $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$ .

### שאלות:

(20) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

(21) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$\frac{1 \cdot 2!}{2} + \frac{2 \cdot 3!}{4} + \frac{3 \cdot 4!}{8} + \dots + \frac{n(n+1)!}{2^n} = \frac{(n+2)!}{2^n} - 2$$

(22) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$p! + \frac{(p+1)!}{1!} + \frac{(p+2)!}{2!} + \dots + \frac{(p+n-1)!}{(n-1)!} = \frac{(p+n)!}{(n-1)!(p+1)}$$

(23) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) \dots \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{n!}$$

(24) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$\frac{5}{1 \cdot 4} - \frac{11}{4 \cdot 7} + \frac{17}{7 \cdot 10} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} (6n-1)}{(3n-2)(3n+1)} = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$$

### תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

## שאלות שבהן האיבר הכללי מורכב ממספר מחוברים:

### שאלות:

(25) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:  

$$1+2+3+4+\dots+2n=n(2n+1)$$

(26) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:  

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\dots+(2n)^2=\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$$

(27) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:  

$$1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\dots+3n\cdot 2^{3n-1}=(3n-1)2^{3n}+1$$

### תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

## שאלות העוסקות באינדוקציות עם איברים משתנים:

### שאלות:

(28) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + \dots + (3n) = 2n(2n+1)$$

(29) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$(n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{n}{6}(2n+1)(7n+1)$$

(30) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) \left(1 - \frac{1}{n+3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$$

(31) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$(n+1)(n+2) \cdot \dots \cdot (2n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$$

(32) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

### תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

## שאלות העוסקות בהוכחת באי-שוויונים באינדוקציה:

### שאלות:

(33) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי הגדול מ-1 מתקיים:

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{n}{n+1}$$

(34) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

(35) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי הגדול מ-2 מתקיים:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}$$

(36) נתונה סדרה שבה:  $a_n = n^n$ . נגדיר:  $T_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n$ .

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:  $T_n \leq n^{\frac{n}{2}(n+1)}$ .

(37) נתון אי-השוויון:  $2^n > n^2$ . מצא את ה- $n$  המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי החל מה- $n$  שמצאת.

(38) נתון אי-השוויון:  $4^n > 5n^2 + 1$ . מצא את ה- $n$  המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי החל מה- $n$  שמצאת.

(39) נתון אי-השוויון:  $n^3 - n < 5^{n-1}$ . מצא את ה- $n$  המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי החל מה- $n$  שמצאת.

(40) נתון אי-השוויון:  $3^n + 4^n + 5^n < 6^n$ . מצא את ה- $n$  המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי החל מה- $n$  שמצאת.

**(41)** נתון אי-השוויון:  $n^n \geq n!$ . הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי.

**(42)** נתון אי-השוויון:  $a^n + b^n < (a+b)^n$ ,  $(a, b > 0)$ . הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי הגדול מ-1.

**תשובות סופיות:**

שאלות הוכחה.

## שאלות כוללות ומסכמות:

### שאלות:

$$(43) \text{ נתון השוויון: } 4+7+10+13+\dots = \frac{n}{2}(3n+5)$$

- א. מצא את האיבר במקום ה- $n$ .  
 ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי.  
 ג. חשב את הסכום:  $37+40+43+\dots+85$ .

$$(44) \text{ נתון השוויון: } \frac{2}{3} + \frac{6}{9} + \frac{10}{27} + \dots = 2 - \frac{2n+2}{3^n}$$

- (45) נתון השוויון:  $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots = \frac{n}{4n+1}$   
 א. מצא את האיבר במקום ה- $n$ .  
 ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי.

$$\text{ג. חשב את הסכום: } \frac{1}{25 \cdot 29} + \frac{1}{29 \cdot 33} + \frac{1}{33 \cdot 37} + \dots + \frac{1}{89 \cdot 93}$$

$$(46) \text{ נתון השוויון: } (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{n}{6}(2n+1)(7n+1)$$

- א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי.  
 ב. חשב באמצעות סעיף א' את הסכום:  $26^2 + 27^2 + 28^2 + \dots + 48^2$ .

$$(47) \text{ נתון השוויון: } 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$$

- א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי.  
 ב. הבע באמצעות  $n$  את הסכום:  $4^2 + 6^2 + 8^2 + \dots + (4n)^2$ .

(48) נתונים השוויונים הבאים:

$$\text{א. } 3n + (3n+1) + (3n+2) + \dots + 4n = \frac{7}{3}(n^2 + 3n - 1)$$

$$\text{ב. } 3n + (3n+1) + (3n+2) + \dots + 4n = n^2 + 11n - 5$$

$$\text{ג. } 3n + (3n+1) + (3n+2) + \dots + 4n = \frac{7n}{2}(n+1)$$

קבע איזה מהשוויונים נכון לכל  $n$  טבעי, והוכח אותו באינדוקציה.

$$(49) \text{ נתון השוויון: } n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + \dots + (3n) = an(2n+b)$$

- א. נתון כי השוויון נכון עבור  $n=1$  ו- $n=2$ . מצא את ערכי  $a$  ו- $b$ .  
 ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי.

$$(50) \text{ נתון אי-השוויון: } \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}$$

- א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי הגדול מ-2.  
 ב. הוכח באמצעות סעיף א' כי מתקיים:  $\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{18} > \frac{1}{2}$

$$(51) \text{ נתון אי-השוויון: } n^2 < 2^n$$

- א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל  $n$  טבעי הגדול מ-4.  
 ב. הוכח באמצעות סעיף א' כי מתקיים:  $5^2 \cdot 6^2 \cdot 7^2 \cdot 8^2 \cdot \dots \cdot 20^2 < 2^{200}$

$$(52) \text{ הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הסכום: } 9 + 27 + 81 + \dots + 3^{3n+1}$$

מתחלק ב-117 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.

$$(53) \text{ ענה על הסעיפים הבאים:}$$

- א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $n^3 + 5n$  מתחלק ב-6 ללא שארית לכל  $n$  טבעי.  
 ב. נתון כי  $a+b$  מתחלק ב-6 ללא שארית.  
 הוכח כי  $a^3 + b^3$  מתחלק ב-6 ללא שארית.

$$(54) \text{ ענה על הסעיפים הבאים:}$$

- א. הוכח את הטענה: אם ל- $n$  טבעי מסוים  $3^n + 5^n$  מתחלק ב-16 ללא שארית אז גם  $3^{n+2} + 5^{n+2}$  מתחלק ב-16 ללא שארית.  
 ב. האם מהטענה בסעיף א' נובע כי  $3^n + 5^n$  מתחלק ב-16 ללא שארית עבור כל  $n$  טבעי אי-זוגי?  
 ג. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי  $3^n + 5^n$  מתחלק ב-8 ללא שארית לכל  $n$  טבעי אי-זוגי.

### תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

## מושג הסכימה וכתובה מקוצרת של אינדוקציות:

### סיכום כללי:

סימון הסכימה (קרי: סיגמה) מוגדר באופן הבא:  $\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

מקור הסימון נובע מהמילה Sum ומשמעו הוא סכימה של איברים המתחילים

בערך המצוין בתחתית הסימון  $\left(\sum_{k=1}^n\right)$  עד לערך המצוין בחלקו העליון  $\left(\sum_{k=1}^n\right)$ .

### דוגמאות:

$$\bullet \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$\bullet \sum_{k=3}^{12} k^2 = 3^2 + 4^2 + \dots + 12^2$$

$$\bullet \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{4n+1}$$

### שאלות:

$$(1) \text{ הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

$$(2) \text{ הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$(3) \text{ הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{n}{4n+1}$$

$$(4) \text{ הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n 2^k = 2(2^n - 1)$$

$$(5) \quad \text{הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n \frac{3}{4^{k-1}} = 4 - \frac{1}{4^{n-1}}$$

$$(6) \quad \text{הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^{3n} k = 1 \frac{1}{2} n(3n+1)$$

$$(7) \quad \text{הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^{3n} (4k-1) = 3n(6n+1)$$

$$(8) \quad \text{הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n (n+k) = \frac{n}{2}(3n+1)$$

$$(9) \quad \text{הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n 3^{n+k} = \frac{3^{n+1}(3^n-1)}{2}$$

**תשובות סופיות:**

שאלות הוכחה.

# מתמטיקה

פרק 7 - סימן הסכימה (סיגמה)

תוכן העניינים

142 ..... 1. כללי

## סימן הסכימה (סיגמה):

### שאלות:

1) כתוב בפירוט את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{n=0}^{10} 4^n$	ב. $\sum_{k=1}^4 2k$	ג. $\sum_{n=4}^{10} na_n$
ד. $\sum_{i=7}^{11} 4i^2 a_i$	ה. $\sum_{t=1}^8 tx^t$	ו. $\sum_{k=4}^{10} na_k$
ז. $\sum_{k=1}^{10} 4n$	ח. $\sum_{k=-1}^3 (k^2 + 1)$	ט. $\sum_{l=1}^3 (l^2 - x_l - 4)$

2) כתוב את הסכומים הבאים בעזרת סימן הסכימה:

א. $1+2+4+8+16+32+64+128$
ב. $2+4+6+8+10+12+14+16+18+20$
ג. $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$
ד. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 7 \cdot 8$
ה. $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + 44 \cdot 45$
ו. $3 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 12 \cdot 5 + 15 \cdot 6 + 18 \cdot 7 + 21 \cdot 8$
ז. $5^2 + 7^2 + \dots + 27^2$
ח. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{10 \cdot 11}$
ט. $\frac{2}{3} + \frac{6}{9} + \frac{10}{27} + \frac{14}{81} + \frac{18}{243}$
י. $4 + \frac{8}{5} + \frac{12}{25} + \frac{16}{125} + \frac{20}{625}$

3) חשב את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{k=1}^{10} 4k$	ב. $\sum_{k=1}^{10} (2k + 4k^2)$	ג. $\sum_{k=10}^{24} k(k-1)$
ד. $\sum_{k=10}^{24} \frac{k^3 - k}{k+1}$	ה. $\sum_{k=4}^{10} (k-2)(k+2)$	ו. $\sum_{k=1}^{10} (2k^2 + 1)(k-2)$

\* תוכל להיעזר בנוסחאות הבאות:  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ ,  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ,  $\sum_{k=1}^n k^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

(4) חשב את הסכומים הבאים:

$$\text{א. } \sum_{k=1}^{20} \frac{5 \cdot 4^k + 8^k}{2^k} \quad \text{ב. } \sum_{k=1}^{11} \frac{2 \cdot 4^{k+2} + 10^k}{0.4^k} \quad \text{ג. } \sum_{k=10}^{20} 2^{2k+10}$$

$$* \text{ תוכל להיעזר בנוסחה הבאה: } \sum_{k=1}^n a^k = \frac{a(a^n - 1)}{a - 1} \quad (a \neq 1)$$

(5) חשב את הסכומים הבאים:

$$\text{א. } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 20^2 \quad \text{ב. } 4^2 + 5^2 + 6^2 + \dots + 24^2$$

$$\text{ג. } 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 22^2 \quad \text{ד. } 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 17^2$$

(6) הוכח כי:

$$\text{א. } \sum_{k=1}^n \frac{2^{2k+4}}{k+2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{2k+6}}{k+3}$$

$$\text{ב. } \sum_{k=4}^{n-3} \frac{4k+17+2^{2k}}{k+1} = \sum_{k=8}^{n+1} \frac{4k+1+2^{2k-8}}{k-3}$$

(7) חשב את הסכומים הבאים ללא פיצול הסכום:

$$\text{א. } \sum_4^{11} k^2 \quad \text{ב. } \sum_{10}^{20} 4^{2k}$$

**תשובות סופיות:**

1 א.  $4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 + 4^6 + 4^7 + 4^8 + 4^9 + 4^{10}$

ב.  $2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$

ג.  $4a_4 + 4a_5 + 4a_6 + 4a_7 + 4a_8 + 4a_9 + 4a_{10}$

ד.  $4 \cdot 7^2 a_7 + 4 \cdot 8^2 a_8 + 4 \cdot 9^2 a_9 + 4 \cdot 10^2 a_{10} + 4 \cdot 11^2 a_{11} + 4 \cdot 7^2 a_7$

ה.  $1x^1 + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6 + 7x^7 + 8x^8$

ו.  $na_5 + na_6 + na_7 + na_8 + na_9 + na_{10} + na_{11}$

ז.  $4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n$

ח.  $((-1)^2 + 1) + (0^2 + 1) + (1^2 + 1) + (2^2 + 1) + (3^2 + 1)$

ט.  $(1^2 - x_2 - 4) + (2^2 - x_4 - 4) + (3^2 - x_6 - 4)$

2 א.  $\sum_{k=0}^7 2^k$     ב.  $\sum_{k=1}^{10} 2k$     ג.  $\sum_{k=0}^9 (2k+1)$     ד.  $\sum_{k=1}^7 k(k+1)$

ה.  $\sum_{k=1}^{22} (2k-1)2k$     ו.  $\sum_{k=1}^7 3k(k+1)$     ז.  $\sum_{n=3}^{14} (2n-1)^2$

ח.  $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n(n+1)}$     ט.  $\sum_{k=1}^5 \frac{4k-2}{3^k}$     י.  $\sum_{k=1}^4 \frac{4k}{5^{k-1}}$

3 א. 220    ב. 1650    ג. 255    ד. 9160    ה. 28    ו. 4545

4 א.  $5 \cdot (2^{21} - 2) + \frac{4}{3}(4^{20} - 1)$     ב.  $32 \cdot \frac{10(10^{11} - 1)}{10 - 1} + \frac{25(25^{11} - 1)}{25 - 1}$

ג.  $2^{10} \left[ \frac{4(4^{20} - 1)}{4 - 1} - \frac{4(4^9 - 1)}{4 - 1} \right]$

5 א. 2870    ב. 2856    ג. 2024    ד. 969

6 הוכחה.

7 א.  $\frac{8(8+1)(2 \cdot 8+1)}{6} + 6 \cdot \frac{8(8+1)}{2} + 9 \cdot 8$     ב.  $4^{18} \cdot \frac{16(16^{11} - 1)}{16 - 1}$

# מתמטיקה

פרק 8 - הבינום של ניוטון

תוכן העניינים

145 ..... 1. כללי

## הבינום של ניוטון:

**סיכום כללי:**

**מושג העצרת:**

מסמנים:  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$  כאשר  $n$  מספר טבעי.  
מגדירים:  $0! = 1$ .

**המקדם הבינומי:**

הביטוי  $\binom{n}{k}$  נקרא המקדם הבינומי ומוגדר ע"י:  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  לכל  $n, k$  טבעיים  
כאשר  $0 \leq k \leq n$ .

**הבינום של ניוטון:**

נוסחת הבינום של ניוטון ניתנת לכתיבה באופן הבא:  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$   
לכל  $n$  טבעי.

ניתן לחשב את האיבר העומד במקום ה- $k$  ע"י:  $T_k = \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^{k-1}$ .

**משולש פסקל:**

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & & & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 & & & & & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 & & & & & & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
 & & & & & & \ddots & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & & & & & & & \ddots
 \end{array}$$

משולש מספרים שבו כל מספר בשורה מסוימת שווה לסכום המספרים שבשורה שמעליו באופן המתואר:

## שאלות:

(1) חשב, ללא מחשבון:

א.  $\frac{4! \cdot 7!}{0! \cdot 10!}$

ב.  $\frac{14! \cdot 20!}{10! \cdot 17!}$

(2) הוכח את הזהויות הבאות:

א.  $(n-2)!(n^2-n) = n!$

ב.  $(n-1)!n^2 + n! = (n+1)!$

ג.  $\frac{1}{(n-1)!} = \frac{(n+2)^2}{(n+2)!} + \frac{n^2-2}{(n+1)!}$

(3) חשב:

ד.  $\binom{14}{11}$

ג.  $\binom{10}{0}$

ב.  $\binom{4}{1}$

א.  $\binom{5}{3}$

(4) הוכח את הזהויות הבאות:

א.  $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$

ב.  $\frac{k}{n} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$

ג.  $\frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

(5) הוכח באינדוקציה שלכל  $n \geq 2$  טבעי מתקיים:  $\binom{1}{0} + \binom{2}{1} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{n-1}{n-2} = \binom{n}{2}$ 

(6) רשום את פיתוח הבינום בכל אחד מהסעיפים הבאים:

א.  $(a+b)^4$

ב.  $(x+2)^5$

ג.  $(x-4)^3$

(7) ענה על הסעיפים הבאים :

א. הוכח  $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$  לכל  $k, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$ .

ב. נסח והוכח (באינדוקציה) את נוסחת הבינום.

(8) הוכח שלכל  $n \geq 1$  טבעי מתקיים :

א.  $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$

ב.  $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$

ג.  $\binom{n}{0} + 3\binom{n}{1} + 9\binom{n}{2} - \dots + 3^n \binom{n}{n} = 4^n$

(9) מצא את האיבר הרביעי בפיתוח הבינום  $\left(\frac{1}{2a} + 2a^2\right)^{10}$ .

(10) בפיתוח של  $(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt{a})^{12}$ , ישנו איבר שאחד מגורמיו הוא  $a^7$ . מצא את מקום האיבר ואת ערכו.

(11) מצא, בפיתוח של  $\left(\frac{1}{x^2} + \sqrt{x}\right)^{10}$ , איבר שאינו מכיל את  $x$ , וחשב את ערכו.

(12) ענה על הסעיפים הבאים :

א. מצא, בפיתוח של  $\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{a} + \frac{b}{\sqrt[4]{x}}\right)^{18}$ , את המקדם של  $\frac{1}{x}$ .

ב. חשב את סכום כל המקדמים בפיתוח, אם  $a = b = 1$ .

(13) המקדם של האיבר השלישי בפיתוח הבינום  $(a+b)^n$ , הוא 15. מצא את  $n$ .

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $\frac{1}{30}$       ב.  $\frac{1001}{285}$
- (2) הוכחה.
- (3) א. 10      ב. 4      ג. 1      ד. 364.
- (4) הוכחה.
- (5) הוכחה.
- (6) א.  $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
- ב.  $(x+2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$
- ג.  $(x-4)^3 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$
- (7) הוכחה.
- (8) הוכחה.
- (9)  $T_4 = \frac{15}{2a}$
- (10)  $T_7 = 924a^7$
- (11)  $T_9 = 45$
- (12) א.  $\frac{18564 \cdot b^{12}}{a^6}$       ב.  $2^{18}$
- (13)  $n = 6$

# מתמטיקה

פרק 9 - יחסים

תוכן העניינים

149	1. יחסים - מושגי יסוד
151	2. יחס רפלקסיבי, סימטרי, טרנזיטיבי, אנטי-יחס, סגור
155	3. יחס שקילות, קבוצת מנה, מחלקת שקילות
158	4. יחסי סדר
159	5. שאלות שמשלבות יחסים ופונקציות

## יחסים – מושגי יסוד

## שאלות

- (1) רשמו במפורש את היחסים כקבוצה של זוגות סדורים.  
 היחס  $R$  המוגדר מעל  $A$  להיות  $aRb \Leftrightarrow b > a + 3$ , כאשר:
- א.  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$   
 ב.  $A = \{3, 5, 19, 103\}$   
 ג.  $A = \{5, 6, 7\}$
- (2) עבור  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , רשמו את היחסים הבאים כקבוצה מפורשת של זוגות:
- א.  $R_1 = \{\langle x, y \rangle \mid x^2 + y^2 < 5\}$   
 ב.  $R_2 = \{\langle x, y \rangle \mid x^2 + y^2 > 5\}$   
 ג.  $R_3 = \{\langle x, y \rangle \mid x < y + 2\}$   
 ד.  $R_4 = \{\langle x, y \rangle \mid x \cdot y > 8\}$
- (3) עבור כל אחת מהקבוצות הבאות קבעו האם היא יחס, ובמידה וכן, מצאו קבוצה קטנה ביותר  $A$ , כך ש- $R$  יחס מעל  $A$ .
- א.  $R = \{2, 5, (7, 8)\}$   
 ב.  $R = \{(1, 3), (3, 7), (2, 5)\}$   
 ג.  $R = \{((1, 2), (3, 4)), ((1, 3), (2, 4))\}$
- (4) עבור הקבוצות משאלה 1, בכל מקרה בו הקבוצה היא יחס רשמו את  $\text{dom}(R)$  ואת  $\text{range}(R)$ , ורשמו את היחס במטריצה.
- (5) נגדיר יחס  $R$  מעל הקבוצה  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , כך:  $\langle x, y \rangle \in R \Leftrightarrow |y - x| > 2$ .
- א. רשמו את  $R$  במפורש בעזרת  $\langle \dots \rangle$  ובעזרת דיגרף.  
 ב. חשבו את היחס  $R^{-1}$  ואת כל החזקות השונות של  $R$ .  
 ג. מצאו אם היחס  $R$  מקיים את התכונות הבאות ומה נובע מכך:  
 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$ ,  $R = R^{-1}$ ,  $I_A \subseteq R$ ,  $R^2 \subseteq R$

6) תהי  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  ויהי  $R$  יחס מעל  $A$ .  
איזו טענה נכונה:

א. ה-Domain של  $R = \{(1, 1), (2, 2), (1, 3)\}$  הוא  $\{1, 2\}$ .

ב. ה-Range של  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  הוא  $\{2, 3, 1\}$ .

ג. ה-Domain של היחס  $R = \{(1, 1), (2, 2), (1, 3)\}$  שווה ל-Range של  $R^{-1}$ .

7) תהי  $A = \{1, 2, 5\}$  ויהי  $R$  יחס מעל  $A$ .  
איזו טענה נכונה:

א. אם  $R$  הוא יחס הזהות ( $R = I_A$ ), אז  $R = \{(1, 1), (2, 2), (5, 5)\}$ .

ב. אם  $R$  הוא היחס המלא, אז

$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 5)\}$

ג. אם  $R$  הוא יחס הזהות, אז  $(IR^{-1})^{-1} = R$ .

8) תהיינה  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{a, b\}$ ,  $C = \{5, 6\}$ , ויהי  $S$  יחס כך ש- $S \subseteq B \times C$ ,  
איזו טענה נכונה:

א.  $SR = \emptyset$ .

ב. אם  $R$  ו- $S$  יחסים מלאים, אז ב- $RS$  יש ארבעה איברים.

ג. אם  $R$  הוא היחס הריק ו- $S$  הוא היחס המלא, אז  $RS = S$ .

ד. ה-Domain שווה ל-Range של  $S^{-1}R^{-1}$ .

9) תהי  $A = \{1, 2, 5\}$  ויהי  $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 5), (5, 5)\}$  יחס מעל  $A$ .

א. הביעו את  $R$  בצורה של גרף.

ב. הביעו את  $R^{-1}$  בצורה של גרף.

ג. הביעו את יחס הזהות מעל  $A$  בצורה של גרף.

ד. הביעו את היחס המלא מעל  $A$  בצורה של גרף.

ה. הביעו את יחס הזהות מעל  $A$  בצורה של מטריצת סמיכויות.

ו. הביעו את היחס הריק בצורה של מטריצת סמיכויות.

ז. הביעו את  $RR^{-1}$  בצורה של גרף.

ח. הביעו את  $R \cup R^{-1}$  בצורה של גרף.

הדרכה: יש למצוא תחילה את הזוגות.

ט. הביעו את  $(R^{-1}R) \cap (RR^{-1})$  בצורה של מטריצת סמיכויות.

י. הביעו את  $(R^{-1}R) \setminus (RR^{-1})$  בצורה של גרף.

יא. הביעו את  $(R^{-1}R) \Delta (RR^{-1})$  בצורה של גרף.

## יחס רפלקסיבי, סימטרי, טרנזיטיבי, אנטי-יחס, סגור

### שאלות

(1) עבור  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  נגדיר יחס  $T$  באופן הבא:  $\langle x, y \rangle \in T \Leftrightarrow x \cdot y \leq 23$ .  
רשום מדגם בן שלושה זוגות של איברים ביחס ובדוק האם  $T$  רפלקסיבי, סימטרי, אנטי סימטרי (חלש) טרנזיטיבי.

(2) נתון היחס  $T$  הבא מעל  $A = \{1, 2, 3, 4\}$   
 $T = \{\langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$   
האם  $T$  רפלקסיבי? אם לא רפלקסיבי אז הוסף או החסר מספר מינימאלי של זוגות כדי שהתשובה תהיה חיובית.  
האם  $T$  סימטרי? אם לא אז סימטרי הוסף או החסר מספר מינימאלי של זוגות כדי שהתשובה תהיה חיובית.  
האם  $T$  טרנזיטיבי? אם לא טרנזיטיבי אז הוסף או החסר מספר מינימאלי של זוגות כדי שהתשובה תהיה חיובית.  
הוסף או החסר מספר מינימאלי של זוגות כדי ש- $T$  יהיה גם רפלקסיבי, גם סימטרי, וגם טרנזיטיבי.

(3) נגדיר יחס  $T$  מעל  $\mathbb{Z}$  באופן הבא:  $T = \{\langle a, b \rangle \mid a \cdot b \in \mathbb{Z}_{\text{even}}\}$

א. רשום שלוש זוגות ביחס ושלושה זוגות שאינם ביחס.  
ב. בדוק האם  $T$  רפלקסיבי, סימטרי, טרנזיטיבי.

(4) נתון יחס  $S$  מעל  $\mathbb{Z}$  המוגדר באופן הבא: (יש ל- $x, y$  אותה הזוגיות)  
 $\langle x, y \rangle \in S \Leftrightarrow$  (כלומר שניהם זוגיים או שניהם אי זוגיים)  
הוכח כי  $S$  רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

(5) נתון יחס  $R$  מעל קבוצה  $A$ .  
הוכיחו כי  $R^2 \subseteq R$  אם  $R$  טרנזיטיבי.

(6) נתון יחס  $S$  מעל  $\mathbb{Z}$  המוגדר באופן הבא:  $\langle x, y \rangle \in S \Leftrightarrow 3 \mid x - y$ .  
הוכח כי  $S$  רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

7 נתונים היחסים הבאים מעל  $A = \{1, 2, 3\}$

$$R_1 = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3)\} \quad R_2 = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3), (2, 1)\}$$

עבור כל אחד מארבעת היחסים  $R_1, R_2, R_1 \cap R_2, R_1 \cup R_2$ , קבעו האם הוא רפלקסיבי, סימטרי או טרנזיטיבי. (במקרה של הפרכה הביאו דוגמה מתאימה)

8 עבור  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , נגדיר  $S$  מעל  $A$  כך:

$$S = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 6 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 6, 3 \rangle \}$$

- בדקו אם  $S$  רפלקסיבי, סימטרי, אנטי-סימטרי חלש, חזק וטרנזיטיבי.
- רשמו את היחסים  $I_A$  ו- $S^{-1}$ .
- רשמו את כל החזקות השונות של  $S$ .
- רשמו את היחס  $R = \{1, 3, 6\}^2 \cup \{2, 4\}^2 \cup \{5\}^2$ , כקבוצה של זוגות.
- היחס  $R$  הוא יחס שקילות. רשמו את מחלקות השקילות השונות ואת קבוצת המנה.

9 לגבי כל אחד מהיחסים הבאים, רשמו שלושה זוגות שנמצאים ביחס, ונמקו מדוע הם ביחס. כתבו שלושה זוגות שאינם ביחס, ונמקו מדוע אינם ביחס. כמו כן, קבעו האם היחס הוא רפלקסיבי, אנטי רפלקסיבי, סימטרי, א-סימטרי חלש, חזק, וטרנזיטיבי.

- יחס  $@$  מעל  $\mathbb{R}$ , המוגדר באופן הבא:  $(x, y) \in @ \Leftrightarrow |x - y| \leq 100$ .
- יחס  $\clubsuit$  מעל  $\mathbb{Z}$ , המוגדר באופן הבא:  $(x, y) \in \clubsuit \Leftrightarrow 3|x - y|$ .
- היחס  $\subseteq$  מעל  $P(\mathbb{N})$ , המוגדר באופן הבא:  $A \subseteq B \Leftrightarrow (A, B) \in \subseteq$ .
- היחס שרגא מעל  $\mathbb{R}$ , המוגדר באופן הבא: שרגא  $(x, y) \in$  שרגא  $\Leftrightarrow x + y \geq x \cdot y$ .
- יחס  $T$  מעל  $\mathbb{Z}$ , המוגדר באופן הבא:  $(x, y) \in T \Leftrightarrow x^2 + y \geq 1$ .

10 תהי  $\mathbb{N}_+$  הקבוצה  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ , ונגדיר עליה יחס  $R$  כך:  $aRb \Leftrightarrow [a = b^b \vee b = a^a]$ .

- האם  $|R|$ ? האם  $R$  רפלקסיבי?
- האם  $R$  סימטרי?
- האם  $R$  אנטי-סימטרי?
- האם  $R$  טרנזיטיבי?

**11** נגדיר יחס  $R$  על הקבוצה  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , על ידי  $\langle f, g \rangle \in R$  אם ורק אם קיימת  $A \subseteq \mathbb{N}$  אינסופית, כך ש- $f(n) = g(n)$  לכל  $n \in A$ .

א. האם  $R$  רפלקסיבי?

ב. האם  $R$  אנטי-סימטרי?

ג. האם  $R$  טרנזיטיבי?

**12** בדקו האם היחס הוא רפלקסיבי, סימטרי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי:

א. נגדיר יחס  $T$  מעל  $\mathbb{R}$ , כך:  $aTb \Leftrightarrow a < b+1$ .

ב. נגדיר יחס  $P$  מעל  $P(\mathbb{N})$ , כך:  $APB \Leftrightarrow (A = B \vee A \cup \{1,2\} = B)$ .

**13** מצאו אלו מהתכונות: רפלקסיביות, אנטי-רפלקסיביות, סימטריות, אנטי-סימטריות חלשה, אנטי סימטריות חזקה וטרנזיטיביות, מקיים כל אחד

מהיחסים הבאים, מעל הקבוצות  $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, A = \{3,5,7,9\}$ .

א.  $xRy \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z}_{\text{odd}} x = my$

ב.  $xsy \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z}_{\text{even}} x = my$

ג.  $xRy \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z}_{\text{odd}} (x = my \vee y = mx)$

**14** תהי  $A = \{1,2,3,4\}$  ויהי  $R$  יחס מעל  $A$ .

איזו טענה נכונה:

א.  $R = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$  הוא יחס הזהות מעל  $A$ .

ב.  $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4)\}$  הוא היחס המלא מעל  $A$ .

ג. אם  $R$  הוא היחס המלא מעל  $A$ , אז  $R^{-1}$  הוא היחס המלא מעל  $A$ .

ד. אם  $R$  הוא יחס הזהות מעל  $A$ , אז  $R^{-1}$  הוא יחס הזהות מעל  $A$ .

ה. יהי  $R$  יחס מעל  $A = \{1,2\}$ .

האם יתכן כי  $R$  אינו טרנזיטיבי? נמקו.

**15** יהי  $R$  יחס מעל  $A$ . הוכיחו:

א. אם  $I_A \subseteq R$ , אז  $R$  רפלקסיבי.

ב. אם  $R = R^{-1}$ , אז  $R$  סימטרי.

ג. אם  $R^2 \subseteq R$ , אז  $R$  טרנזיטיבי.

ד. אם  $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$ , אז  $R$  אנטי-סימטרי.

16) תהי  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  ויהי  $R = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3)\}$  יחס מעל  $A$ .

- א. רשמו את הסגור הרפלקסיבי של  $R$ .
- ב. רשמו את הסגור הסימטרי של  $R$ .
- ג. רשמו את הסגור הטרנזיטיבי של  $R$ .

17) תהי  $A$  קבוצה ו- $R$  יחס מעל  $A$  הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות. בכל מקרי ההפרכה תנו דוגמה נגדית מינימלית. בדקו האם יש בדוגמתך פרטים מיותרים והסר אותם.

- א. אם  $R$  סימטרי, אז  $R$  טרנזיטיבי.
- ב. אם  $R$  אנטי סימטרי חלש, אז  $R$  טרנזיטיבי.
- ג. אם  $R$  סימטרי וגם אנטי סימטרי חלש, אז  $R$  טרנזיטיבי.
- ד. אם  $R$  סימטרי וגם אנטי סימטרי חלש, אז  $R = \emptyset$ .
- ה. אם  $R$  סימטרי וגם אנטי סימטרי חזק, אז  $R = \emptyset$ .
- ו. אם  $R$  טרנזיטיבי וסימטרי, אז  $R$  רפלקסיבי.
- ז. אם  $R$  טרנזיטיבי ואנטי רפלקסיבי, אז  $R$  אנטי סימטרי חזק.
- ח. אם  $R$  טרנזיטיבי ולא סימטרי, אז  $R$  אנטי סימטרי חלש.

18) יהי  $R$  יחס סימטרי וטרנזיטיבי מעל  $A$ , כך ש- $aRb \implies b \in A$   $\forall a \in A$ . הוכיחו כי  $R$  רפלקסיבי.

19) הוכיחו או הפריכו: לכל קבוצה  $A$  ולכל יחס רפלקסיבי  $R$  מעל  $A$  קיימות קבוצות  $B, C \subseteq A$ , כך ש- $R = B \times C$ .

20) יהי  $S$  יחס אנטי רפלקסיבי וטרנזיטיבי מעל קבוצה  $A$ , ונניח שקיים  $y \in A$ , עבורו  $\forall x \in A (x, y) \in S$ . הוכיחו כי לכל  $z \in A$  מתקיים  $(y, z) \notin S$ .

21) נתון כי  $R$  יחס על  $A$  וכן  $R \cap I_A = \emptyset$  (אנטי-רפלקסיבי), וכן  $a, b \in A$ , לא בהכרח שונים זה מזה, המקיימים  $(a, b) \in R^2$  וגם  $(b, a) \in R^2$ . הוכיחו שקיימים  $c, d \in A$  (לא בהכרח שונים זה מזה), שאף אחד מהם אינו שווה ל- $a$  ואינו שווה ל- $b$ , המקיימים  $(c, d) \in R^2$  וגם  $(d, c) \in R^2$ .

## יחס שקילות, קבוצת מנה, מחלקת שקילות

### שאלות

- 1) עבור  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  נגדיר יחס  $S$  על  $A$  כך:  $xSy \Leftrightarrow x \cdot y \geq 2$ .
- א. האם  $S^2 \setminus S = \emptyset$  ?  
 ב. האם  $S$  יחס שקילות על  $A$  ?
- 2) עבור  $A = \{1, 2, 3\}$  נגדיר יחסים  $R, S$  מעל  $A$  כך:
- $$R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 2 \rangle\}, \quad S = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle\}$$
- א. חשבו את היחסים  $RS$  ו- $SR$ , ובדקו האם הם יחסי שקילות.  
 ב. האם היחסים  $S$  ו- $S^2$  אנטי-סימטריים? נמקו.
- 3) תהי  $S$  קבוצה שאיבריה הן קבוצות, ונגדיר יחס בינארי  $E$  מעל  $S$  באופן הבא:
- $$(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Leftrightarrow AEB$$
- הוכיחו או הפריכו:  $E$  יחס שקילות.
- 4) נגדיר יחס בינארי  $E$  מעל  $\mathbb{Z} - \{0, 1\}$  (קבוצת השלמים ללא 0 ו-1) באופן הבא:
- $$aEb \Leftrightarrow ab \geq -1$$
- הוכיחו כי  $E$  יחס שקילות ותנו תיאור מפורש של מחלקות השקילות שלו.
- 5) תהי  $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  קבוצת כל הזוגות הסדורים של המספרים הטבעיים, ויהי  $R \subseteq A^2$  יחס המוגדר על ידי  $(m_1, n_1)R(m_2, n_2) \Leftrightarrow m_1 - m_2 = n_1 - n_2$ .
- א. הוכיחו כי  $R$  הינו יחס שקילות ב- $A$ .  
 ב. תארו באופן גרפי את מחלקות השקילות  $[(1,1)]_R, [(1,2)]_R, [(2,1)]_R$ .
- 6) נתון היחס  $R$  מעל  $\mathbb{N}$ .
- $$xRy \Leftrightarrow (6|x-y) \vee (3|x \cdot y)$$
- מצאו את מחלקות השקילות ואת קבוצת המנה.

7) נגדיר יחס שקילות  $S$  מעל  $\mathbb{R}$  באופן הבא:  $xSy \Leftrightarrow (x = y = 0) \vee (xy > 0)$   
 ונגדיר יחס שקילות  $T$  מעל  $\mathbb{R}$  באופן הבא:  $xTy \Leftrightarrow (x^2 - 9)S(y^2 - 9)$   
 (אין צורך להוכיח כי מדובר ביחסי שקילות)  
 כתבו במפורש את קבוצת המנה  $\mathbb{R}/T$ , ונמקו בקצרה.

8) יהי  $R$  יחס שקילות על  $A$ .  
 נאמר כי  $R$  אוקלידי, אם עבור כל  $a, b, c \in A$  מתקיים התנאי:  
 $[(a, b) \in R \wedge (a, c) \in R] \Rightarrow (b, c) \in R$   
 הוכיחו או הפריכו:  
 א. אם  $R$  יחס שקילות, אז הוא אוקלידי.  
 ב. אם  $R$  רפלקסיבי ואוקלידי, אז הוא יחס שקילות.

9) נתון כי  $R$  יחס שקילות על  $A$ , וכן  $A \in P(B) \setminus \{B\}$ .  
 האם מהנתון נובע כי  $R$  יחס שקילות על  $B$ , או שאינו יחס שקילות על  $B$ ?

10) תהי  $A$  קבוצה ויהיו  $R, S$  יחסים מעל  $A$ .  
 הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות (הפרכה = דוגמה מינימלית):  
 א. אם  $R, S$  רפלקסיביים, אז  $R \cap S$  רפלקסיבי.  
 ב. אם  $R, S$  רפלקסיביים, אז  $R \cup S$  רפלקסיבי.  
 ג. אם  $R, S$  סימטריים, אז  $R \cap S$  סימטרי.  
 ד. אם  $R, S$  סימטריים, אז  $R \cup S$  סימטרי.  
 ה. אם  $R, S$  טרנזיטיביים, אז  $R \cap S$  טרנזיטיבי.  
 ו. אם  $R, S$  טרנזיטיביים, אז  $R \cup S$  טרנזיטיבי.  
 ז. אם  $R, S$  יחסי שקילות, אז  $R \cap S$  יחס שקילות.  
 ח. אם  $R, S$  יחסי שקילות, אז  $R \cup S$  יחס שקילות.  
 ט. אם  $R, S$  אנטי סימטריים חלש, אז  $R \cap S$  אנטי סימטרי חלש.  
 י. אם  $R, S$  אנטי סימטריים חלש, אז  $R \cup S$  אנטי סימטרי חלש.

11) רשמו במפורש את כל יחסי השקילות  $E$  מעל  $S = \{a, b, c, d\}$   
 המקיימים  $|S/E| = 2$  וכל מחלקות השקילות הן שוות עוצמה.  
 הערה: יש להציג כל יחס כבת קבוצה מפורשת של  $S \times S$ .

- (12)** יהי  $S$  יחס המוגדר מעל  $P(\mathbb{N})$  קבוצת החזקה של  $\mathbb{N}$  באופן הבא:
- $\min A = \min B \Leftrightarrow ASB$ , כאשר  $\min A$  הוא המספר הקטן ביותר ב- $A$ .
- א. הוכיחו כי  $S$  הינו יחס שקילות.
- ב. נסמן ב- $K$  את קבוצת מחלקות השקילות של היחס  $S$ .  
בנו פונקציה  $F: K \rightarrow \mathbb{N}$  חח"ע ועל.

- (13)** יהיו  $R, S$  יחסי שקילות מעל  $A$ .
- הוכיחו כי  $R \Delta S$  לא יחס שקילות מעל  $A$ .

- (14)** יחס  $R$  מעל  $A$  נקרא סוגר משולשים, אם מתקיים  $(aRb \wedge bRc) \rightarrow cRa$   
לכל  $a, b, c \in A$ .

- א. הוכיחו כי יחס רפלקסיבי וסוגר משולשים הוא יחס שקילות.
- ב. הוכיחו כי אם  $R$  סימטרי, סוגר משולשים ואינו ריק,  
אז  $R$  אינו אנטי רפלקסיבי.

- (15)** יחס השקילות  $S$  על  $P(N)$  מוגדר כך:  $S\{ \langle A, B \rangle \mid A \cap \{1, 2, 3\} = B \cap \{1, 2, 3\} \}$ .
- א. מהי העוצמה של מחלקת השקילות  $[\{4, 7, 9\}]_S$ ?
- ב. כמה מחלקות שקילות יש?

## יחסי סדר

## שאלות

1) הוכיחו כי היחס  $R$ , המוגדר מעל הקבוצה  $A = \{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ , על ידי  $aRb \Leftrightarrow a|b$ , הוא יחס סדר מלא.

2) נגדיר יחס בינארי  $D$  מעל הקבוצה  $\mathbb{R}^2 = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$  באופן הבא:  $(a_1, b_1)D(a_2, b_2) \Leftrightarrow (a_1 \geq a_2) \wedge (a_1 + b_1 \geq a_2 + b_2)$ . הוכיחו כי  $D$  יחס סדר חלש שאינו מלא.

3) נגדיר יחס  $R$  מעל הקבוצה  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  באופן הבא:  $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow (a \leq c \wedge b \leq d)$ .

א. הוכיחו כי  $R$  יחס סדר חלש שאינו מלא.

ב. מצאו תת קבוצה אינסופית של  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , שעליה היחס  $R$  הוא מלא.

4) נגדיר יחס סדר (חלש)  $S$  מעל  $\mathbb{R}$  באופן הבא:  $xSy \Leftrightarrow \neg((\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor \rightarrow y < x))$  (אין צורך להוכיח שמדובר ביחס סדר).

כתבו במפורש את כל האיברים המינימליים של  $S$ .

תזכורת:  $x \in A$  נקרא מינימלי ביחס סדר  $R$ , אם  $\forall y \in A ((y \neq x) \rightarrow \neg(yRx))$ .

5) יהי  $R$  יחס סדר חלש מעל  $A$ , ויהי  $S$  יחס סדר חלש מעל  $B$ . הוכיחו כי אם  $A \cap B = \emptyset$ , אז  $R \cup S$  יחס סדר חלש מעל  $A \cup B$ .

6) תהי  $A$  קבוצה לא-ריקה ותהי  $K$  קבוצת כל יחסי השקילות מעל  $A$  (סדורה חלקית ביחס להכלה).

א. הראו שיש ב- $K$  איבר קטן ביותר וגדול ביותר, והוכיחו שהם שייכים

ל- $K$  ואכן מקיימים את הנדרש.

ב. תהי  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ .

נסלק מ- $K$  את האיבר הקטן ביותר והגדול ביותר שנמצאו בסעיף א, ונסמן את הקבוצה החדשה שהתקבלה ב- $L$  (שאף היא סדורה חלקית ביחס להכלה).

תנו דוגמה לשני איברים מינימליים ב- $L$  והוכיחו שהם מינימליים,

ותנו דוגמה לשני איברים מקסימליים ב- $L$  והוכיחו שהם מקסימליים.

ג. הוכיחו שאין ב- $L$  איבר קטן ביותר וגדול ביותר.

## שאלות שמשלבות יחסים ופונקציות

### שאלות

- (1) יחס  $T$  מעל  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  מוגדר באופן הבא:  $fTg \Leftrightarrow f \circ g = g \circ f$ .  
הוכיחו או הפריכו: יחס שקילות.
- (2) תהיינה  $A, B$  שתי קבוצות לא ריקות ויהיו  $<_A, <_B$  יחסי סדר חזקים ומלאים (משוויים) מעל  $A, B$  בהתאמה.  
תהי  $f: A \rightarrow B$  פונקציה המקיימת אם  $a_1 <_A a_2$ , אז  $f(a_1) <_B f(a_2)$ .  
הוכיחו כי  $f$  חח"ע אך אינה בהכרח על.
- (3) יהי  $T$  יחס המוגדר מעל הקבוצה  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  באופן הבא:  
 $fTg \Leftrightarrow$  קיים  $x \in \mathbb{R}$ , כך ש- $f(x) = g(x)$ .  
האם  $T$  יחס שקילות?
- (4) תהי  $F: A \rightarrow A$  פונקציה, ונגדיר יחס  $R$  מעל  $A$  כך:  $aRb \Leftrightarrow f(a) = b$ .  
נתון ש- $R$  סימטרי וטרנזיטיבי.  
הוכיחו כי  $F$  היא פונקציית הזהות.
- (5) נגדיר יחס  $S$  על הקבוצה  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  כך:  $(x_1, x_2)S(y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 - x_2 = y_1^2 - y_2$ .  
 $S$  יחס שקילות (אין צורך להוכיח).  
הוכיחו כי קבוצת המנה  $S \setminus \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  שוות עוצמה לקבוצה  $\mathbb{R}$ .
- (6) תהי  $A$  קבוצה לא ריקה ותהי  $A^A$  קבוצת כל הפונקציות מ- $A$  ל- $A$ .  
נגדיר יחס  $E$  מעל  $A^A$  באופן הבא: לכל  $f, g \in A^A$ , אם ורק אם קיימת  $h \in A^A$  הפיכה, כך ש- $f = h \circ g$ .  
א. הוכיחו כי  $E$  יחס שקילות.  
ב. יהי  $c \in A$ , כלשהו, ותהי  $f_c: A \rightarrow A$  הפונקציה הקבועה המוגדרת על ידי  $\forall x \in A \quad f_c(x) = c$ .  
תארו את מחלקת השקילות של  $f_c$  ביחס ל- $E$  (תנו תיאור מפורש ככל הניתן) ונמקו.

(7) תהי  $J$  קבוצת כל היחסים מעל  $A$ , ו- $E$  קבוצת כל יחסי השקילות מעל  $A$ .  
 נגדיר פונקציה  $F: J \times E \rightarrow J$  באופן הבא:  $F(R, S) = R \cap S$ .  
 הוכיחו כי  $F$  על.

(8) תהי  $A$  קבוצה סופית ותהי  $B$  תת קבוצה של  $A$ .  
 נסמן ב- $F$  את קבוצת כל הפונקציות מ- $A$  ל- $\{0,1\}$ .  
 נגדיר יחס  $E$  מעל  $F$  באופן הבא:  $F = \{(f, g) \mid B \subseteq \{x \mid f(x)g(x)\}\}$ .  
 א. בהינתן  $A = \{1,2,3\}$  ו- $B = \{1,2\}$ , תנו דוגמה ל- $f, g, h \in F$  שונים,  
 כך ש- $(f, h) \notin E, (f, g) \in E$ .  
 ב. הוכיחו כי  $E$  יחס שקילות.  
 ג. מה עוצמת קבוצת המנה  $F/E$ ? נמקו.

(9) תהי  $A = \{1,2,3\}$  ותהי  $M$  קבוצת כל היחסים מעל  $A$ ,  
 נגדיר פונקציה  $t: M \rightarrow M$ , המתאימה לכל יחס את הסגור הטרנזיטיבי שלו.  
 א.  $t$  חח"ע.  
 ב.  $t$  על.  
 ג. לכל  $R \in M$  מתקיים  $t(R^2) = (t(R^2))^2$ .  
 ד. לכל  $R \in M$  מתקיים  $t(t(R)) = t(R)$ .

# מתמטיקה

## פרק 10 - קומבינטוריקה

### תוכן העניינים

161	1. בעיות בסיסיות בהסתברות.
165	2. פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד) מאורעות זרים ומכילים.
174	3. כלל המכפלה.
178	4. תמורה - סידור עצמים בשורה.
181	5. תמורה עם עצמים זהים.
183	6. דגימה ללא סדר וללא החזרה.
186	7. דגימה ללא סדר ועם החזרה.
190	8. דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה.
192	9. סידור עצמים במעגל.
195	10. שאלות מסכמות.

## הגדרות יסודיות:

### רקע:

**ניסוי מקרי:** תהליך לו כמה תוצאות אפשריות. התוצאה המתקבלת נודעת רק לאחר ביצוע התהליך. למשל: תוצאה בהטלת קובייה, מזג האוויר בעוד שבועיים.

**מרחב מדגם:** כלל התוצאות האפשריות בניסוי המקרי. לדוגמה, בהטלת קובייה:  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , או: מזג האוויר בעוד שבועיים:  $\{\text{נאה, שרבי, מושלג, גשום, מעונן, חלקית, אביד}\}$ .

**מאורע:** תת קבוצה מתוך מרחב במדגם. מסומן באותיות:  $A, B, C$ . בהטלת קובייה למשל, המאורע 'לקבל לפחות 5' יסומן:  $A = \{5, 6\}$ . המאורע 'לקבל תוצאה זוגית' יסומן:  $B = \{2, 4, 6\}$ .

**גודל מרחב המדגם:** מספר התוצאות האפשריות במרחב המדגם. בהטלת קובייה למשל נקבל:  $|\Omega| = 6$ .

**גודל המאורע:** מספר התוצאות האפשריות במאורע עצמו. למשל, בהטלת הקובייה האירועים הקודמים יסומנו:  $|A| = 2, |B| = 3$ .

**מאורע משלים:** מאורע המכיל את כל התוצאות האפשריות במרחב המדגם פרט לתוצאות במאורע אותו הוא משלים. למשל, בהטלת הקובייה:  $\bar{A} = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\bar{B} = \{1, 3, 5\}$ .

**מרחב מדגם אחיד (סימטרי):** מרחב מדגם בו לכל התוצאות במרחב המדגם יש את אותה עדיפות, אותה סבירות למשל, קובייה הוגנת, אך לא כמו מזג האוויר בשבוע הבא.

**הסתברות במרחב מדגם אחיד:** במרחב מדגם אחיד הסיכוי למאורע יהיה:  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ .

דוגמה: מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל לפחות 5?  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{6}$

דוגמה: מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל תוצאה זוגית?  $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{6}$

**הסתברות במרחב לא אחיד:** תחושב לפי השכיחות היחסית:  $\frac{f}{n}$ .

**דוגמה:**

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת:

הציון $x$	מספר התלמידים – השכיחות $f$
5	2
6	4
7	8
8	5
9	4
10	2

מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה קיבל את הציון 8?  $\frac{f}{n} = \frac{5}{25} = 0.2$

מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה יכשל?  $\frac{f}{n} = \frac{2}{25} = 0.08$

**הסתברות למאורע משלים:** הסתברות לקבוצת המשלים של המאורע ביחס למרחב המדגם:  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ . למשל, בדוגמה הקודמת הסיכוי לעבור את הבחינה יכול

להיות מחושב לפי הסיכוי להיכשל:  $P(\bar{A}) = 1 - \frac{2}{25} = \frac{23}{25}$ .

## שאלות:

- (1) מהאותיות  $E, F$  ו- $G$  יש ליצור מילה בת 2 אותיות, לא בהכרח בת משמעות.  
 א. הרכיבו את כל המילים האפשריות.  
 ב. רשמו את המקרים למאורע:  
 i. במילה נמצאת האות  $E$ .  
 ii. במילה האותיות שונות.  
 ג. רשמו את המקרים למאורע  $\bar{A}$ .

- (2) מטילים זוג קוביות.  
 א. רשמו את מרחב המדגם של הניסוי. האם מרחב המדגם אחיד?  
 ב. רשמו את כל האפשרויות לאירועים הבאים:  
 i. סכום התוצאות 7.  
 ii. מכפלת התוצאות 12.  
 ג. חשבו את הסיכויים לאירועים שהוגדרו בסעיף ב'.

- (3) נבחר באקראי ספרה מבין הספרות 0-9.  
 א. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה גדולה מ-5?  
 ב. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא לכל היותר 3?  
 ג. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא אי זוגית?

- (4) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה עבור כל משפחה בישוב מסוים:

10	22	18	28	22	מספר משפחות
4	3	2	1	0	מספר מקלטים

- נבחרה משפחה באקראי מהישוב.  
 א. מה ההסתברות שאין מקלטים למשפחה?  
 ב. מה ההסתברות שיש מקלטים למשפחה?  
 ג. מה ההסתברות שיש לפחות 3 מקלטים למשפחה?

- (5) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה ביישוב "עדן":

10	30	100	40	20	מספר משפחות
4	3	2	1	0	מספר מכוניות

- נבחרה משפחה אקראית מן הישוב.  
 א. מה ההסתברות שאין לה מכוניות?  
 ב. מה ההסתברות שבבעלות המשפחה לפחות 3 מכוניות?  
 ג. מה הסיכוי שבבעלותה פחות מ-3 מכוניות?

- 6) נטיל מטבע רגיל 3 פעמים. בצד אחד של המטבע מוטבע עץ ובצד השני פלי.
- א. רשמו את מרחב המדגם של הניסוי. האם מרחב המדגם הוא אחיד?
- ב. רשמו את כל האפשרויות לאירועים הבאים:
- i. התקבל פעם אחת עץ.
- ii. התקבל לפחות פלי אחד.
- ג. מהו המאורע המשלים ל-D?
- ד. חשבו את הסיכויים לאירועים שהוגדרו בסעיפים ב-ג.

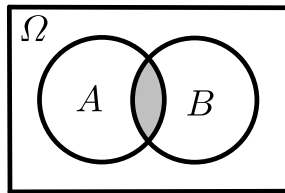
## תשובות סופיות:

- 1) א.  $\Omega = \{EE, EF, EG, FE, FF, FG, GE, GF, GG\}$
- ב.  $A = \{EE, EF, EG, FE, GE\}$ ,  $B = \{EF, EG, FE, FG, GE, GF\}$
- ג.  $\bar{A} = \{FF, FG, GF, GG\}$
- 2) א.  $\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1) & (2,1) & (3,1) & (5,1) & (4,1) & (6,1) \\ (1,2) & (2,2) & (3,2) & (4,2) & (5,2) & (6,2) \\ (1,3) & (2,3) & (3,3) & (4,3) & (5,3) & (6,3) \\ (1,4) & (2,4) & (3,4) & (4,4) & (5,4) & (6,4) \\ (1,5) & (2,5) & (3,5) & (4,5) & (5,5) & (6,5) \\ (1,6) & (2,6) & (3,6) & (4,6) & (5,6) & (6,6) \end{array} \right\}$
- ב.  $A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$ ,  $C = \{(2,6), (3,4), (4,3), (6,2)\}$
- ג. הסיכוי ל-A:  $\frac{1}{6}$
- הסיכוי ל-B:  $\frac{1}{9}$
- 3) א. 0.4    ב. 0.4    ג. 0.5
- 4) א. 0.22    ב. 0.78    ג. 0.32
- 5) א. 0.1    ב. 0.2    ג. 0.8
- 6) א.  $\Omega = \{PPP, PPE, PEP, EPP, PEE, EPE, EEP, EEE\}$
- ב.  $A = \{PPE, PEP, EPP\}$ ,  $D = \{PPP, PPE, PEP, EPP, PEE, EPE, EEP\}$
- ג.  $\bar{D} = \{EEE\}$
- ד.  $\frac{1}{8}$

## פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד) – מאורעות זרים ומכילים:

**רקע:**

**פעולת חיתוך:**

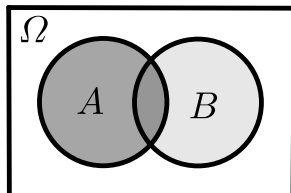


נותנת את המשותף בין המאורעות הנחתכים.  
 חיתוך בין המאורע  $A$  למאורע  $B$  יסומן כך:  $A \cap B$ .  
 מדובר בתוצאות שנמצאות ב- $A$  וגם ב- $B$ .

דוגמה:

בהטלת קובייה, למשל, האפשרויות לקבל לפחות 5 הן:  $A = \{5, 6\}$ .  
 האפשרויות לקבל תוצאה זוגית הן:  $B = \{2, 4, 6\}$ .  
 החיתוך שביניהם הוא:  $A \cap B = \{6\}$ .

**פעולת איחוד:**



נותנת את כל האפשרויות שנמצאות לפחות באחת מהמאורעות, ומסומנת:  $A \cup B$ .  
 הפעולה נותנת את אשר נמצא ב- $A$  או ב- $B$ .  
 כלומר, לפחות אחד מהמאורעות קורה.

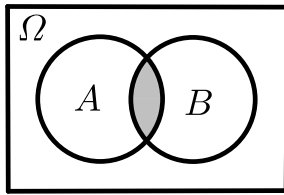
דוגמה:

בהטלת קובייה האפשרויות לקבל לפחות 5 הן:  $A = \{5, 6\}$ .  
 האפשרויות לקבל תוצאה זוגית:  $B = \{2, 4, 6\}$ .  
 האפשרויות לקבל לפחות 5 וגם תוצאה זוגית:  $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$ .

דוגמה (הפתרון נמצא בהקלטה):

סטודנט ניגש בסמסטר לשני מבחנים. מבחן בסטטיסטיקה ומבחן בכלכלה. ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הוא 0.9, ההסתברות שלו לעבור את המבחן בכלכלה הוא 0.8 וההסתברות לעבור את המבחן בסטטיסטיקה ובכלכלה היא 0.75. מה ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה בלבד? מה ההסתברות שלו להיכשל בשני המבחנים? מה ההסתברות לעבור לפחות מבחן אחד?

נוסחת החיבור לשני מאורעות:



ההסתברות של איחוד מאורעות תחושב ע"י הקשר הבא:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

חוקי דה מורגן לשני מאורעות:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$P(A \cap B) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B})$$

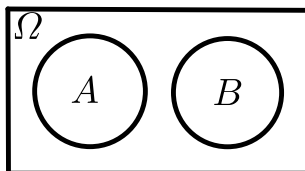
$$P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

שיטת ריבוע הקסם:

השיטה רלבנטית רק אם יש שני מאורעות במקביל בדומה לתרגיל הקודם:

	$\bar{A}$	$A$	
$B$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(A \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(\bar{A})$	$P(A)$	1

מאורעות זרים:



מאורעות זרים הם כאשר אין להם אף איבר משותף:  $A \cap B = \{ \}$ . כלומר, הם לא יכולים להתרחש בו זמנית.

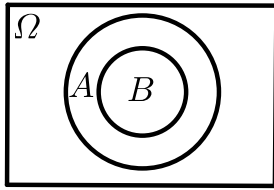
ההסתברות של חיתוך המאורעות היא אפס:  $P(A \cap B) = 0$ .

ההסתברות של איחוד המאורעות תחושב:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

דוגמה:

בהטלת קובייה, האפשרויות לקבל לפחות 5 הן:  $A = \{5, 6\}$  והאפשרות לקבל 3

היא:  $B = \{3\}$ , ולכן החיתוך ביניהם הוא אפס, כלומר:  $A \cap B = \{ \}$ .

**מאורעות מוכלים:**


נתונים שני מאורעות  $A$  ו- $B$ , השונים מאפס. נאמר שהמאורע  $B$  מוכל במאורע  $A$  אם כל איברי המאורע  $B$  כלולים במאורע  $A$  ונרשום:  $B \subset A$ .

מאורע  $A$  מכיל את מאורע  $B$  כל התוצאות שנמצאות ב- $B$  מוכלות בתוך מאורע  $A$ .

קשר זה מסומן באופן הבא:  $B \subset A$ .

$$A \cap B = B \quad P(A \cap B) = P(B)$$

$$A \cup B = A \quad P(A \cup B) = P(A)$$

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{2, 4\}$$

למשל:

## שאלות:

- (1) מהאותיות  $E, F$  ו- $G$  יוצרים מילה בת 2 אותיות – לא בהכרח בת משמעות. נגדיר את המאורעות הבאים:  
 $A$  - במילה נמצאת האות  $E$ .  
 $B$  - במילה אותיות שונות.  
 א. רשמו את כל האפשרויות לחיתוך  $A$  עם  $B$ .  
 ב. רשמו את כל האפשרויות לאיחוד של  $A$  עם  $B$ .
- (2) תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. נגדיר את המאורעות הבאים:  
 $A$  - לעבור את המבחן בסטטיסטיקה.  
 $B$  - לעבור את המבחן בכלכלה.  
 היעזרו בפעולות חיתוך, איחוד ומשלים בלבד כדי להגדיר את המאורעות הבאים וסמנו בדיאגרמת וון את השטח המתאים:  
 א. התלמיד עבר רק את המבחן בכלכלה.  
 ב. התלמיד עבר רק את המבחן בסטטיסטיקה.  
 ג. התלמיד עבר את שני המבחנים.  
 ד. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד.  
 ה. התלמיד נכשל בשני המבחנים.  
 ו. התלמיד נכשל בכלכלה.
- (3) נתבקשתם לבחור ספרה באקראי. נגדיר את  $A$  להיות הספרה שנבחרה היא זוגית. נגדיר את  $B$  להיות הספרה שנבחרה קטנה מ-5.  
 א. רשמו את כל התוצאות למאורעות הבאים:  
 $A, B, \bar{A}, \bar{B}, A \cap B, A \cup B$ .  
 ב. חשבו את ההסתברויות לכל המאורעות מהסעיף הקודם.
- (4) נסמן ב- $\Omega$  את מרחב המדגם וב- $\phi$  קבוצה ריקה.  
 נתון כי  $A$  הינו מאורע בתוך מרחב המדגם.  
 להלן מוגדרים מאורעות שפתרונם הוא  $\Omega$  או  $\phi$  או  $A$ .  
 קבעו עבור כל מאורע מה הפתרון שלו:  
 $\bar{A}, A \cap \phi, A \cup \phi, A \cap \Omega, A \cup \Omega, A \cap \bar{A}, \bar{\phi}, A \cup \bar{A}$ .

(5) הוגדרו המאורעות הבאים :

$A$  - אדם שגובהו מעל 1.7 מטר

$B$  - אדם שגובהו מתחת ל-1.8 מטר.

קבעו את גובהם של האנשים הבאים :

א.  $A \cap B$

ב.  $A \cup B$

ג.  $\bar{A} \cap B$

ד.  $\bar{A} \cup \bar{B}$

ה.  $\bar{\bar{A}}$

(6) נגדיר את המאורעות הבאים :

$A$  - אדם דובר עברית.

$B$  - אדם דובר ערבית.

$C$  - אדם דובר אנגלית.

השתמשו בפעולות איחוד, חיתוך והשלמה לתיאור המאורעות הבאים :

א. אדם דובר את כל שלוש השפות.

ב. אדם דובר רק עברית.

ג. אדם דובר לפחות שפה אחת מתוך השפות הללו.

ד. אדם אינו דובר אנגלית.

ה. קבוצת התלמידים שדוברים שתי שפות בדיוק (מהשפות הנ"ל).

(7) שתי מפלגות רצות לכנסת הבאה. מפלגת "גדר" תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.08 ומפלגת "עמיד" תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.20. בהסתברות של 76% שתי המפלגות לא תעבורנה את אחוז החסימה.

א. מה ההסתברות שלפחות אחת מהמפלגות תעבור את אחוז החסימה?

ב. מה ההסתברות ששתי המפלגות תעבורנה את אחוז החסימה?

ג. מה ההסתברות שרק מפלגות "עמיד" תעבור את אחוז החסימה?

(8) במקום עבודה מסוים 40% מהעובדים הם גברים. כמו כן, 20% מהעובדים הם אקדמאים. 10% מהעובדים הינן נשים אקדמאיות.

א. איזה אחוז מהעובדים הם גברים אקדמאיים?

ב. איזה אחוז מהעובדים הם גברים או אקדמאיים?

ג. איזה אחוז מהעובדים הם נשים לא אקדמאיות?

9) הסיכוי של מניה A לעלות הנו 0.5 ביום מסוים והסיכוי של מניה B לעלות ביום מסוים הנו 0.4. בסיכוי של 0.7 לפחות אחת מהמניות תעלה ביום מסוים. חשבו את ההסתברויות הבאות לגבי שתי המניות הללו ביום מסוים:

א. ששתי המניות תעלנה.

ב. שאף אחת מהמניות לא תעלנה.

ג. שמניה A בלבד תעלה.

10) מטילים זוג קוביות, אדומה ושחורה. נגדיר את המאורעות הבאים:

A - בקובייה האדומה התקבלה התוצאה 4 ובשחורה 2.

B - סכום התוצאות משתי הקוביות הוא 6.

C - מכפלת התוצאות בשתי הקוביות היא 10.

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

ב. האם המאורע B מכיל את המאורע A?

ג. האם A ו-C מאורעות זרים?

ד. האם A ו-C מאורעות משלימים?

11) עבור המאורעות A ו-B ידועות ההסתברויות הבאות:  $P(A) = 0.6$ ,

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.1, P(B) = 0.3$$

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

ב. חשבו את  $P(\bar{A} \cap B)$ .

12) מטבע הוטל פעמיים. נגדיר את המאורעות הבאים:

A - קיבלנו עץ בהטלה הראשונה.

B - קיבלנו לפחות עץ אחד בשתי ההטלות.

איזו טענה נכונה?

א. A ו-B מאורעות זרים.

ב. A ו-B מאורעות משלימים.

ג. B מכיל את A.

ד. A מכיל את B.

13) בהגרלה חולקו 100 כרטיסים. על 3 מהם רשום חופשה ועל 2 מהם רשום מחשב

שאר הכרטיסים ריקים. אדם קיבל כרטיס אקראי.

א. מה הסיכוי לזכות בחופשה או במחשב? האם המאורעות הללו זרים?

ב. מה ההסתברות לא לזכות בפרס?

14 נתון כי:  $P(A) = 0.3$ ,  $P(B) = 0.25$ ,  $P(A \cup B) = 0.49$

- א. חשבו את הסיכוי ל- $P(A \cap B)$ .  
 ב. האם  $A$  ו- $B$  מאורעות זרים?  
 ג. מה ההסתברות שרק  $A$  יקרה או שרק  $B$  יקרה?

15  $A$  ו- $B$  מאורעות זרים. נתון ש:  $2 \cdot P(B \cap \bar{A}) = P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$ .

מה הסיכוי למאורע  $A$  ומה ההסתברות למאורע  $B$ ?

16 קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות:

- א.  $A \cap B = B \cap A$ .  
 ב.  $\overline{A \cup B} = A \cap B$ .  
 ג.  $A \cap B \cap C = A \cap B \cap (C \cup B)$ .  
 ד.  $\overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$ .

17 נתון ש- $A$  ו- $B$  מאורעות במרחב מדגם. נתון ש- $P(A) = 0.3$ ,  $P(B) = 0.2$ .

- א. האם יתכן ש- $P(A \cup B) = 0.4$ ?  
 ב. האם יתכן ש- $P(A \cup B) = 0.6$ ?  
 ג. אם  $A$  ו- $B$  זרים מה הסיכוי  $P(A \cup B)$ ?  
 ד. אם  $A$  מכיל את  $B$  מה הסיכוי  $P(A \cup B)$ ?

18 מתוך אזרחי המדינה הבוגרים ל-30% חשבון בבנק הפועלים. ל-28% חשבון בבנק לאומי ול-15% חשבון בבנק מזרחי. כמו כן נתון כי 6% מחזיקים חשבון בבנק לאומי ובבנק הפועלים. ל-5% חשבון בבנק פועלים ומזרחי. ול-4% חשבון בבנק לאומי ומזרחי. כמו כן ל-1% מהאוכלוסייה הבוגרת חשבון בנק בשלושת הבנקים יחד.

- א. מה אחוז האזרחים להם חשבון בבנק לאומי בלבד?  
 ב. מה ההסתברות שאזרח כלשהו יחזיק חשבון בבנק פועלים ולאומי אבל לא בבנק מזרחי?  
 ג. מה ההסתברות שלאזרח יהיה חשבון בפועלים או במזרחי אבל לא בבנק לאומי?  
 ד. מה אחוז האזרחים שיש להם חשבון בנק אחד בלבד?  
 ה. מה אחוז האזרחים שיש להם חשבון בשני בנקים בלבד?  
 ו. מה ההסתברות שלאזרח בוגר אין חשבון בנק באף אחד מהבנקים הללו?  
 ז. לאיזה אחוז מהאזרחים יש חשבון בנק בלפחות אחד מהבנקים הללו?

- 19** חברה מסוימת פרסמה את הנתונים הבאים לגבי האזרחים מעל גיל 21. הנתונים שהתקבלו היו: 40% מהאנשים מחזיקים כרטיס "ויזה", 52% מחזיקים כרטיס "ישראלכרט", 20% מחזיקים כרטיס "אמריקן אקספרס", 15% מחזיקים כרטיס ויזה וגם ישראלכרט, 8% מחזיקים כרטיס ישראלכרט וגם אמריקן אקספרס ו-7% מחזיקים כרטיס ויזה וגם אמריקן אקספרס. כמו כן, 13% לא מחזיקים באף אחד משלושת הכרטיסים הנ"ל.
- א. מה אחוז מחזיקי שלושת כרטיס האשראי גם יחד?
- ב. מה אחוז מחזיקי ישראלכרט וויזה אך לא את אמריקן אקספרס?
- ג. מה אחוז מחזיקי כרטיס אחד בלבד?

**20** הוכיחו:  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$ .

- 21**  $A$  ו- $B$  מאורעות במרחב המדגם. האם נכון לומר שהסיכוי שיתרחש בדיוק מאורע אחד הוא:  $P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$ ?

## תשובות סופיות:

- 1 א.  $A \cap B = \{EG, EF, FE, GE\}$   
 ב.  $A \cup B = \{EG, EF, EE, FE, GE, EG, GF\}$
- 2 א.  $B \cap \bar{A}$  ב.  $A \cap \bar{B}$  ג.  $A \cap B$  ד.  $A \cup B$  ה.  $\bar{A} \cap \bar{B}$  ו.  $\bar{B}$
- 3 א.  $A = 0, 2, 4, 6, 8, B = 0, 1, 2, 3, 4, \bar{B} = 5, 6, 7, 8, 9$   
 $A \cup B = 0, 2, 4, 6, 8, 1, 3, A \cap B = 0, 2, 4$
- ב.  $P(A \cup B) = 0.7, P(A \cap B) = 0.3, P(\bar{B}) = 0.5, P(B) = 0.5, P(A) = 0.5$
- 4 א.  $\bar{\bar{A}} = A, A \cap \phi = \phi, A \cup \phi = A, A \cap \Omega = A, A \cup \Omega = \Omega$   
 $A \cup \bar{A} = \Omega, \bar{\phi} = \Omega, A \cap \bar{A} = \phi$
- 5 א.  $A \cap B$ : גובה בין 1.7 ל-1.8.  
 ב.  $A \cup B$ : כל גובה אפשרי.  
 ג.  $\bar{A} = \bar{A} \cap B$ : גובה לכל היותר 1.7.  
 ד.  $\bar{A} \cup \bar{B}$ : לכל היותר 1.7 או לפחות 1.8.  
 ה.  $A = \bar{\bar{A}}$ : גובה מעל 1.7.
- 6 א.  $A \cap B \cap C$  ב.  $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$  ג.  $A \cup B \cup C$   
 ד.  $\bar{C}$  ה.  $(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (B \cap C \cap \bar{A}) \cup (A \cap C \cap \bar{B})$
- 7 א.  $P(A \cup B) = 0.24$  ב.  $P(A \cap B) = 0.04$  ג.  $P(B \cap \bar{A}) = 0.16$
- 8 א.  $P(A \cap B) = 10\%$  ב.  $P(A \cup B) = 50\%$  ג.  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 50\%$
- 9 א.  $P(A \cap B) = 0.2$  ב.  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.3$  ג.  $P(A \cup \bar{B}) = 0.3$
- 10 א. לא. ב. כן. ג. כן. ד. לא.
- 11 א. כן. ב.  $P(\bar{A} \cap B) = 0.3$
- 12 הטענה הנכונה היא ג'.
- 13 א. 0.05. ב. 0.95.
- 14 א.  $P(A \cap B) = 0.06$  ב. לא. ג.  $P((A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})) = 0.43$
- 15  $P(B) = \frac{1}{5}, P(A) = \frac{2}{5}$
- 16 א. נכון. ב. לא נכון. ג. לא נכון. ד. נכון.
- 17 א. כן. ב. לא. ג.  $P(A \cup B) = 0.5$  ד.  $P(A \cup B) = 0.3$
- 18 א. 19%. ב. 0.05. ג. 0.31. ד. 46%. ה. 12%. ו. 0.41.
- 19 א. 5%. ב. 10%. ג. 67%.
- 20 שאלת הוכחה.
- 21 נכון.

## קומבינטוריקה – כלל המכפלה:

רקע:

כלל המכפלה:

כלל המכפלה הוא כלל שבאמצעותו אפשר לחשב את גודל המאורע או גודל מרחב המדגם.

אם לתהליך יש  $k$  שלבים:  $n_1$  אפשרויות לשלב הראשון,  $n_2$  אפשרויות לשלב השני...  $n_k$

אפשרויות לשלב  $k$ :

מספר האפשרויות לתהליך כולו יהיה:  $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$

למשל, כמה אפשרויות יש למשחק בו מטילים קובייה וגם מטבע? (הסבר בהקלטה)

$$n_1 = 6, n_2 = 2$$

$$n_1 \cdot n_2 = 6 \cdot 2 = 12$$

למשל, כמה לוחיות רישוי בני 5 תווים ניתן ליצור כאשר התו הראשון הוא אות אנגלית והיתר ספרות? (הסבר בהקלטה)

$$n_1 = 26, n_2 = 10, n_3 = 10, n_4 = 10, n_5 = 10$$

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5 = 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 260,000$$

## שאלות:

- (1) חשבו את מספר האפשרויות לתהליכים הבאים:
- הטלת קובייה פעמים.
  - מספר תלת ספרתי.
  - בחירת בן ובת מכתה שיש בה שבעה בנים ועשר בנות.
  - חלוקת שני פרסים שונים לעשרה אנשים שונים כאשר אדם לא יכול לקבל יותר מפרס אחד.
- (2) במסעדה מציעים ארוחה עסקית.
- בארוחה עסקית יש לבחור מנה ראשונה, מנה עיקרית ושתייה. האופציות למנה ראשונה הן: סלט ירקות, סלט אנטיפסטי ומרק היום. האופציות למנה עיקרית הן: סטייק אנטריקוט, חזה עוף בגריל, לזניה בשרית ולזניה צמחונית. האופציות לשתייה הן: קפה, תה ולימונדה.
- כמה ארוחות שונות ניתן להרכיב בעזרת התפריט הזה?
  - אדם מזמין ארוחה אקראית. חשב את ההסתברויות הבאות:
    - בארוחה סלט ירקות, לזניה בשרית ולימונדה.
    - בארוחה סלט, לזניה ותה.
- (3) בוחרים באקראי מספר בין חמש ספרות. חשבו את ההסתברויות הבאות:
- המספר הוא זוגי.
  - במספר כל הספרות שונות.
  - במספר כל הספרות זהות.
  - במספר לפחות שתי ספרות שונות.
  - במספר לפחות שתי ספרות זהות.
  - המספר הוא פלינדרום (מספר הנקרא מימין ומשמאל באות הצורה).
- (4) חישה אנשים אקראיים נכנסו למעלית בבניין בן 8 קומות. חשבו את ההסתברויות הבאות:
- כולם ירו בקומה החמישית.
  - כולם ירדו באותה קומה.
  - כולם ירדו בקומה אחרת.
  - ערך ודני ירדו בקומה השישית והיתר בשאר הקומות.

- (5) במפלגה חמישה עשר חברי כנסת. יש לבחור שלושה חברי כנסת לשלושה תפקידים שונים. בכמה דרכים ניתן לחלק את התפקידים הבאים אם:
- חבר כנסת יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
  - חבר כנסת לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
- (6) מטילים קובייה 4 פעמים.
- מה ההסתברות שכל התוצאות תהינה זהות?
  - מה ההסתברות שכל התוצאות תהינה שונות?
  - מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהינה זהות?
  - מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהינה שונות?
- (7) יש ליצור מילה בת חמש אותיות, לא בהכרח עם משמעות מאותיות ה-ABC (26 אותיות).
- מה ההסתברות שבמילה שנוצרה אין האותיות A, D ו-L?
  - מה ההסתברות שבמילה שנוצרה כל האותיות זהות?
  - מה ההסתברות שבמילה שנוצרה לפחות שתי אותיות שונות זו מזו?
  - מה ההסתברות שהמילה היא פלינדרום? (מילה אשר משמאל לימין, ומימין לשמאל נקראת אותו הדבר).
- (8) יוצרים קוד עם a ספרות (מותר לחזור על אותה ספרה בקוד). חשבו את ההסתברויות הבאות: (בטאו את תשובותיכם באמצעות a).
- בקוד אין את הספרה 5.
  - בקוד מופיעה הספרה 3.
  - בקוד לא מופיעות ספרות אי זוגיות.
- (9) במשחק מזל יש למלא טופס בו n משבצות. כל משבצת מסומנת בסימן V או X. בכמה דרכים שונות ניתן למלא את טופס משחק המזל?

## תשובות סופיות:

- (1) א. 36    ב. 900    ג. 70    ד. 90
- (2) א. 36    ב. i.  $\frac{1}{36}$     ב. ii.  $\frac{1}{9}$
- (3) א. 0.5    ב. 0.3024    ג. 0.0001    ד. 0.9999    ה. 0.6976    ו. 0.01
- (4) א.  $\frac{1}{8^5}$     ב.  $\frac{1}{8^4}$     ג. 0.205    ד.  $\frac{1 \cdot 1 \cdot 7^3}{8^5}$
- (5) א. 3375    ב. 2730
- (6) א.  $\frac{1}{216}$     ב.  $\frac{5}{18}$     ג.  $\frac{13}{18}$     ד.  $\frac{215}{216}$
- (7) א.  $\frac{23^5}{26^5}$     ב.  $\frac{1}{26^4}$     ג.  $1 - \frac{1}{26^4}$     ד.  $\frac{1}{26^2}$
- (8) א.  $0.9^a$     ב.  $1 - 0.9^a$     ג. 0.5
- (9)  $2^n$

## קומבינטוריקה – תמורה – סידור עצמים בשורה:

רקע:

תמורה:

מספר האפשרויות לסדר  $n$  עצמים שונים בשורה:  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ .

הערה:  $0! = 1$ .

דוגמאות (הפתרונות בהקלטה):

- בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות:  $a, b, c, d$ ?
- בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות:  $a, b, c, d$ , כך שהאותיות:  $a, b$  יהיו ברצף?
- בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות:  $a, b, c, d$ , כך שהאותיות:  $a, b$  יופיעו בתור הרצף  $ba$ ?

## שאלות:

- (1) חשבו : בכמה אופנים  
 א. אפשר לסדר 4 ספרים שונים על מדף?  
 ב. אפשר לסדר חמישה חיילים בטור?
- (2) סידרו באקראי 10 דיסקים שונים על מדף שמתוכם שניים בשפה העברית.  
 א. מה ההסתברות שהדיסקים בעברית יהיו צמודים זה לזה?  
 ב. מה ההסתברות שהדיסקים בעברית לא יהיו צמודים זה לזה?  
 ג. מה ההסתברות ששני הדיסקים בעברית יהיו כל אחד בקצה השני של המדף?
- (3) בוחנים 5 בנים ו-4 בנות בכיתה ומדרגים אותם לפי הציון שלהם בבחינה. נניח שאין תלמידים בעלי אותו ציון.  
 א. מהו מספר הדירוגים האפשריים?  
 ב. מהו מספר הדירוגים האפשריים אם מדרגים בנים ובנות בנפרד?
- (4) מסדרים 10 ספרים שונים על מדף.  
 א. בכמה אופנים ניתן לסדר את הספרים על המדף?  
 ב. שני ספרים מתוך ה-10 הם ספרים בסטטיסטיקה.  
 א. מה ההסתברות שאם נסדר את הספרים באקראי, הספרים בסטטיסטיקה יהיו צמודים זה לזה?  
 ב. מה ההסתברות שהספרים בסטטיסטיקה לא יהיו צמודים זה לזה?  
 ג. מה ההסתברות שהספרים בסטטיסטיקה יהיו בקצות המדף (כל ספר בקצה אחר)?
- (5) אדם יצר בנגן שלו פלייליסט (רשימת השמעה) של 12 שירים שונים. 4 בשפה העברית, 5 באנגלית ו-3 בצרפתית. האדם הריץ את הפלייליסט באקראי.  
 א. מה ההסתברות שכל השירים באנגלית יופיעו כשירים הראשונים כמקשה אחת?  
 ב. מה ההסתברות שכל השירים באנגלית יופיעו ברצף (לא חובה ראשונים)?  
 ג. מה ההסתברות ששירים באותה השפה יופיעו ברצף (כלומר כל השירים באנגלית ברצף, כל השירים בעברית ברצף וכך גם השירים בצרפתית)?

- 6) 4 בניים ו-4 בנות התיישבו באקראי בשורת כיסאות 1-8 בקולנוע.
- א. מה ההסתברות שיוסי ומיכל לא ישבו זה לצד זה?
- ב. מה ההסתברות שהבנים יתיישבו במקומות האי-זוגיים?
- ג. מה ההסתברות שכל הבנים ישבו זה לצד זה?
- ד. מה ההסתברות שהבנים ישבו זה לצד זה והבנות תשבנה זו לצד זו?

### תשובות סופיות:

- (1) א. 0.24 ב. 0.120
- (2) א. 0.2 ב. 0.8 ג. 0.022
- (3) א. 0.362880 ב. 0.2880
- (4) א. 0.3628800 ב. 0.2 ג. 0.8 ד.  $\frac{1}{45}$
- (5) א.  $\frac{1}{792}$  ב.  $\frac{1}{99}$  ג.  $\frac{1}{4620}$
- (6) א. 0.75 ב. 0.014 ג.  $\frac{1}{14}$  ד.  $\frac{1}{35}$

## קומבינטוריקה – תמורה עם עצמים זהים:

**רקע:**

**תמורה עם חזרות:**

אם יש בין העצמים שיש לסדר עצמים זהים, יש לבטל את הסידור הפנימי שלהם על ידי חלוקה בסידורים הפנימיים שלהם.

מספר האופנים לסדר  $n$  עצמים בשורה, ש- $n_1$  מהם זהים מסוג 1,  $n_2$  זהים מסוג 2

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_r!} : n_r \text{ זהים מסוג } r$$

דוגמה (תשובה בהקלטה):

כמה מילים ניתן ליצור מכל האותיות הבאות: W, W, T, T, K, K

## שאלות:

1) במשחק יש לצבוע שתי משבצות מתוך המשבצות הבאות:

--	--	--	--	--

בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את הצביעה?

2) בכמה אופנים שונים אפשר לסדר בשורה את האותיות: ב, ע, ב, ע, ג?

3) בבית נורות מקום ל-6 נורות. בחרו שתי נורות אדומות, שתי נורות צהובות ושתי נורות כחולות. כמה דרכים שונות יש לסדר את הנורות?

4) נרצה ליצור מספר מכל הספרות הבאות: 1, 2, 2, 2, 6. כמה מספרים כאלה אפשר ליצור?

5) במשחק בול פגיעה יש 10 משבצות, אדם צובע 4 משבצות מתוך ה-10. המשתתף השני צריך לנחש אילו 4 משבצות נצבעו. מה ההסתברות שבניחוש אחד יהיה בול פגיעה?

6) כמה אותות שונים, שכל אחד מורכב מ-10 דגלים שונים, ניתן ליצור, אם 4 דגלים הם לבנים, 3 כחולים, 2 אדומים ואחד שחור. דגלים שווי צבע זהים זה לזה לחלוטין.

## תשובות סופיות:

1) 10.

2) 60.

3) 90.

4) 20.

5)  $\frac{1}{210}$ .

6) 12600.

## קומבינטוריקה – דגימה ללא סדר וללא החזרה:

רקע:

מדגם לא סדור בדגימה ללא החזרה:

מספר האפשרויות לדגום  $k$  עצמים שונים מתוך  $n$  עצמים שונים כאשר אין

משמעות לסדר העצמים הנדגמים ואין החזרה:  $\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$

דוגמה:

מתוך 10 תלמידים יש לבחור שלושה נציגים לוועד ללא תפקידים מוגדרים:

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{7!3!} = 120$$

הערות:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (1)$$

$$\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n \quad (2)$$

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1 \quad (3)$$

## שאלות:

- (1) בכיתה 15 בנות ו-10 בנים. יש לבחור 5 תלמידים שונים מהכיתה לנציגות הכיתה. בכמה דרכים אפשר להרכיב את הנציגות, אם:
- אין שום הגבלה לבחירה.
  - מעוניינים ש-3 בנות ו-2 בנים ירכיבו את המשלחת.
  - לא יהיו בנים במשלחת.
- (2) סטודנט מעוניין לבחור 5 קורסי בחירה בסמסטר זה. לפניו רשימה של 10 קורסים לבחירה: 5 במדעי הרוח, 3 במדעי החברה, 2 במתמטיקה.
- כמה בחירות שונות הוא יכול ליצור לעצמו?
  - כמה בחירות יש לו בהן 3 קורסים הם ממדעי הרוח?
  - כמה בחירות יש לו אם 2 מהן לא ממדעי הרוח?
  - כמה בחירות יש לו אם 2 ממדעי הרוח, 2 ממדעי החברה ו-1 ממתמטיקה?
- (3) בכיתה 30 תלמידים מתוכם 12 תלמידים ו-18 תלמידות. יש לבחור למשלחת 4 תלמידים מהכיתה. התלמידים נבחרים באקראי.
- מה ההסתברות שהמשלחת תורכב רק מבנות?
  - מה ההסתברות שבמשלחת תהיה רק בת אחת?
  - מה ההסתברות שבמשלחת תהיה לפחות בת אחת?
- (4) במשחק הלוטו יש לבחור 5 מספרים מתוך 45. המספרים הם 1-45.
- מה ההסתברות שבמשחק הזוכה כל המספרים הם זוגיים?
  - מה ההסתברות שבמספר הזוכה יש לכל היותר מספר זוגי אחד?
  - מה ההסתברות שבמספר הזוכה לפחות פעם אחת יש מספר זוגי?
  - מה ההסתברות שבמספר הזוכה כל המספרים גדולים מ-30?
- (5) בחפיסת קלפים ישנם 52 קלפים: 13 בצבע שחור בצורת עלה, 13 בצבע אדום בצורת לב, 13 בצבע אדום בצורת יהלום ו-13 בצבע שחור בצורת תלתן. מכל צורה (מתוך ה-4) יש 9 קלפים שמספרם 10-2, שאר הקלפים הם; נסיך, מלכה, מלך ואס (בעצם מדובר בקופסת קלפים רגילה ללא ג'וקר). שני אנשים משחקים פוקר. כל אחד מקבל באקראי 5 קלפים (ללא החזרה).
- מה ההסתברות שעודד יקבל את כל המלכים וערן את כל המלכות?
  - מה ההסתברות שאחד השחקנים יקבל את הקלף אס-לב?
  - מה ההסתברות שערן יקבל קלפים שחורים בלבד ועודד יקבל שני קלפים שחורים בדיוק?
  - מה ההסתברות שערן יקבל לפחות 3 קלפים שהם מספר (אס אינו מספר)?

- 6 במכללה 4 מסלולי לימוד. בכל מסלול לימוד 5 מזכירות. יש ליצור וועד של 5 מזכירות מתוך כלל המזכירות במכללה. יוצרים וועד באופן אקראי. חשבו את ההסתברויות הבאות:
- א. כל המזכירות בוועד יהיו ממסלול "מדעי ההתנהגות".  
 ב. כל המזכירות בוועד יהיו מאותו המסלול.  
 ג. מכל מסלול תבחר לפחות מזכירה אחת.

7 הוכיחו כי: 
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

- 8  $2n$  בנים ו- $2n$  בנות מתחלקים ל-2 קבוצות.
- א. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את החלוקה אם שתי הקבוצות צריכות להיות שוות בגודלן ויש בכל קבוצה מספר שווה של בנים ובנות?  
 ב. בכמה דרכים ניתן לבצע את החלוקה אם יש מספר שווה של בנים ובנות בכל קבוצה אבל הקבוצות לא בהכרח בגודל שווה.

### תשובות סופיות:

- 1 א. 53130      ב. 20475      ג. 3003
- 2 א. 252      ב. 100      ג. 100      ד. 100
- 3 א. 0.1117      ב. 0.1445      ג. 0.9819
- 4 א. 0.02      ב. 0.187      ג. 0.972      ד. 0.00246
- 5 א. 0      ב. 0.1923      ג. 0.009      ד. 0.837
- 6 א.  $6.45 \cdot 10^{-5}$       ב.  $2.58 \cdot 10^{-4}$       ג. 0.3225
- 7 שאלת הוכחה.

8 א.  $\binom{2n}{n}$       ב.  $\sum_{i=1}^n \binom{2n}{i}^2$

## קומבינטוריקה – דגימה ללא סדר ועם החזרה:

רקע:

מספר האפשרויות לבחור  $k$  עצמים (לא בהכרח שונים) מתוך  $n$  עצמים שונים, ללא חשיבות לסדר העצמים הנדגמים, ועצם יכול להיבחר יותר מפעם אחת:

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

דוגמה:

בכמה דרכים שונות ניתן לחלק 4 כדורים זהים לשלושה תאים שבכל תא יש מקום ליותר מכדור אחד? (פתרון והסבר הרעיון בהקלטה)

סיכום כללי של המצבים האפשריים לדגימה:

מספר האפשרויות לבחירת $k$ עצמים מתוך אוכלוסייה של $n$ עצמים שונים		
ללא התחשבות בסדר הבחירה	עם התחשבות בסדר הבחירה	ביצוע הדגימה
$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$	$n^k$	עם החזרה
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$	ללא החזרה

## שאלות:

- (1) בכמה דרכים יש להכניס 8 כדורים זהים לחמישה תאים כאשר תא יכול להכיל יותר מכדור אחד?
- (2) בכמה אופנים ניתן להכניס 5 מחברות זהות ל-3 תיקים שונים?
- (3) בכמה אופנים ניתן להכניס 8 כדורים לתוך 3 תאים שונים כאשר:  
 א. הכדורים זהים.  
 ב. הכדורים שונים זה מזה.
- (4) בכמה דרכים יש לסדר 10 משחקים ב-4 מגירות כאשר:  
 א. המשחקים שונים זה מזה.  
 ב. במשחקים זהים זה לזה.
- (5) מהו מספר הפתרונות השלמים האי שליליים למשוואה הבאה:  $X_1 + X_2 = 3$ .
- (6) מהו מספר הפתרונות השלמים האי-שליליים למשוואה הבאה:  
 $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 20$ .
- (7) במכירה פומבית הוצגו 4 פמוטי זהב זהים לחלוטין. על קניית היצירות התחרו 3 אספנים. אספן יכול היה לרכוש יותר מפמוט אחד. בהנחה וכל הפמוטים נמכרו, כמה אפשרויות מכירה לאספנים השונים ישנן?
- (8) נתונות האותיות: A, B, C ו-D. נרצה לבחור שתי אותיות מתוך קבוצת האותיות הללו כאשר מותר לבחור אותה יותר מפעם אחת אבל אין חשיבות לסדר האותיות שנבחרו. כמה דרכים ישנן לבחירה?
- (9) במשחק הלוטו החדש יש לבחור ארבעה מספרים מתוך המספרים 1-20. אין חשיבות לסדר הפנימי של המספרים, אלא רק לגלות אילו מספרים עלו בגורל. מה הסיכוי לגלות את המספרים שעלו בגורל אם:  
 א. אסור לבחור את אותו מספר יותר מפעם אחת.  
 ב. מותר לחזור על אותו מספר יותר מפעם אחת.

- (10)** ישנם 5 כדורים להכניס ל-6 תאים.  
חשבו את מספר האפשרויות להכנסת הכדורים כאשר:
- א. הכדורים שונים ותא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
  - ב. הכדורים זהים ותא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
  - ג. הכדורים שונים ותא לא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
  - ד. הכדורים זהים ותא לא יכול להכיל יותר מכדור אחד.

- (11)** ישנם  $k$  כדורים להכניס ל- $n$  תאים ( $n > k$ ).  
חשבו את מספר האפשרויות להכנסת הכדורים כאשר:
- א. הכדורים שונים ותא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
  - ב. הכדורים זהים ותא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
  - ג. הכדורים שונים ותא לא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
  - ד. הכדורים זהים ותא לא יכול להכיל יותר מכדור אחד.

## תשובות סופיות:

(1) 495.

(2) 21.

(3) א. 45 ב. 6561.

(4) א.  $4^{10}$  ב. 286.

(5) 4.

(6) 1771.

(7) 15.

(8) 10.

(9) א.  $\frac{1}{4845}$  ב.  $\frac{1}{8855}$ .

(10) א. 7776 ב. 252 ג. 720 ד. 6.

(11) א.  $n^k$  ב.  $\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$  ג.  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$  ד. 6.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{ד.}$$

## קומבינטוריקה – דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה:

**רקע:**

**מדגם סידור בדגימה עם החזרה:**

מספר האפשרויות בדגימת  $k$  עצמים מתוך  $n$  עצמים שונים כאשר הדגימה היא עם החזרה והמדגם סדור הוא:  $n^k$ .

**דוגמה:**

בוחרים שלושה תלמידים מתוך עשרה לייצג ועד בו תפקידים שונים, תלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

כמה ועדים שונים ניתן להרכיב?  $10^3 = 1,000$ ,  $k = 3$ ,  $n = 10$ .

**מדגם סידור ללא החזרה:**

מספר האפשרויות בדגימת  $k$  עצמים שונים מתוך  $n$  עצמים שונים ( $n \geq k$ ) כאשר המדגם סדור ואין החזרה של עצמים נדגמים הינו:

$$\cdot (n)_k = n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

**דוגמה:**

שלושה תלמידים נבחרים מתוך 10 לייצג וועד בו תפקידים שונים.

תלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד:  $\frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ .

## שאלות:

- (1) במפלגה 20 חברי כנסת, מעוניינים לבחור שלושה חברי כנסת לשלושה תפקידים שונים.
- א. חבר כנסת יכול למלא יותר מתפקיד אחד.  
 כמה קומבינציות ישנן לחלוקת התפקידים?
- ב. חבר כנסת לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.  
 כמה קומבינציות יש לחלוקת התפקידים?
- (2) במשחק מזל יש 4 משבצות ממוספרות מ-A-D (A עד D). בכל משבצת יש למלא סיפרה (0-9). הזוכה הוא זה שניחש נכונה את כל הספרות בכל המשבצות בהתאמה.
- א. מה ההסתברות לזכות במשחק?  
 ב. מה ההסתברות שבאף משבצת לא תהיה את הספרה 3 במספר הזוכה?  
 ג. מה ההסתברות שהתוצאה 4 תופיע לפחות פעם אחת במספר הזוכה?
- (3) קבוצה מונה 22 אנשים, מה ההסתברות שלפחות לשניים מהם יהיה יום הולדת באותו התאריך?
- (4) שלושה אנשים קבעו להיפגש במלון הילטון בסינגפור. הבעיה היא שבסינגפור ישנם 5 מלונות הילטון.
- א. מה ההסתברות שכל השלושה ייפגשו?  
 ב. מה ההסתברות שכל אחד יגיע לבית מלון אחר?
- (5) בכיתה 40 תלמידים. מעוניינים לבחור חמישה מהם לוועד כיתה. בכמה דרכים ניתן להרכיב את הוועד אם:
- א. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.  
 ב. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

## תשובות סופיות:

- (1) א. 8000      ב. 6840
- (2) א. 0.0001      ב. 0.6561      ג. 0.3439
- (3) 0.476
- (4) א. 0.04      ב. 0.48
- (5) א.  $40^5$       ב. 78,960,960

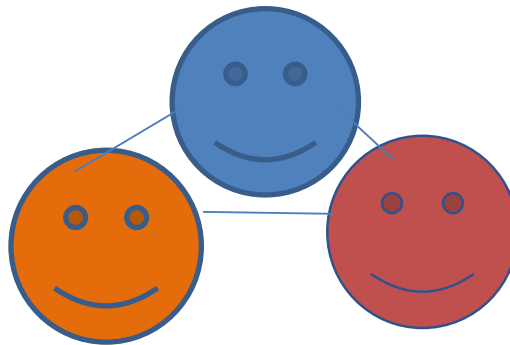
## קומבינטוריקה – סידור עצמים במעגל:

רקע:

מספר האפשרויות לסדר  $n$  עצמים שונים במעגל בו אין מקומות מסומנים הוא:  $(n-1)!$ .

דוגמה (פתרון בהקלטה):

דנה, רמה ושדה רוצות ליצור מעגל ריקוד. בכמה דרכים שונות הן יכולות להחזיק אחת לשנייה את הידיים, כדי ליצור את המעגל?



## שאלות:

- (1) מעצב פנים יצר ללקחותיו מניפת צבעים המוצגת במעגל. במניפה 12 צבעים שונים מתוכם 3 בגווני אפור, 3 בגווני לבן, 3 בגווני ירוק ו-3 בגווני צהוב. כמה מניפות שונות ניתן ליצור כאשר:
- גווני האפור צמודים זה לזה.
  - צבעים באותו גוון צמודים זה לזה.



- (2) דני יוצר שרשרת חרוזים הבנויה מעשרה חרוזים בצבעים שונים. הוא משחיל את עשרת החרוזים באקראי. חשבו את ההסתברויות הבאות:
- הסידור יהיה בדיוק כמוראה בציר.
  - החרוז הלבן והכתום יהיו בסמוך זה לזה.

- (3) אבא הכין עוגת יומולדת עגולה. הוא סידר 7 נרות כמוראה בשרטוט. הנרות זהים ונבדלים זה בזה בצבע: 2 כחולים זהים, 2 אדומים זהים, 2 צהובים זהים ו-1 כתום. סידור הנרות נעשה באקראי. חשבו את ההסתברויות הבאות:



- הנרות הצהובים סמוכים זה לזה.
- נרות באותו צבע סמוכים זה לזה.

- (4)  $n$  בנים ו- $n$  בנות הסתדרו במעגל באקראי.



- מה הסיכוי שכל הבנים יסתדרו זה לצד זה בלי להתפצל?
- מה הסיכוי שכל הבנים יסתדרו זה לצד זה בלי להתפצל וגם כל הבנות יסתדרו זו לצד זו בלי להתפצל?
- מה הסיכוי שהסידור יהיה שמימין ומשמאל לכל בן תהיה בת?

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } .2177280 \quad \text{ב. } .7776$$

$$(2) \quad \text{א. } \frac{1}{9!} \quad \text{ב. } \frac{2}{9}$$

$$(3) \quad \text{א. } \frac{1}{3} \quad \text{ב. } \frac{1}{15}$$

$$(4) \quad \text{א. } \frac{(n!)^2}{(2n-1)!} \quad \text{ב. } \frac{(n!)^2}{(2n-1)!} \quad \text{ג. } \frac{(n-1)!(n!)}{(2n-1)!}$$

## קומבינטוריקה – שאלות מסכמות:

### שאלות:

- (1) בכיתה 40 תלמידים. מעוניינים לבחור חמישה מהם לוועד כיתה. בכמה דרכים ניתן להרכיב את הוועד אם:
- בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
  - בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
  - אין תפקידים שונים בוועד.
- (2) במשרד 30 עובדים, יש לבחור ארבעה עובדים למשלחת לחו"ל. בכמה דרכים ניתן להרכיב את המשלחת?
- במשלחת ארבע משימות שונות שיש למלא וכל עובד יכול למלא יותר ממשימה אחת.
  - כמו בסעיף א' רק הפעם עובד לא יכול למלא יותר ממשימה אחת.
  - מעוניינים לבחור ארבעה עובדים שונים למשלחת שבה לכולם אותו התפקיד.
- (3) מעוניינים להרכיב קוד סודי. הקוד מורכב מ-2 ספרות שונות ו-3 אותיות שונות באנגלית (26 אותיות אפשריות).
- כמה קודים שונים ניתן להרכיב?
  - כמה קודים שונים ניתן להרכיב אם הקוד מתחיל בספרה ונגמר בספרה?
  - כמה קודים ניתן להרכיב אם הספרות חייבות להיות צמודות זו לזו?
  - בכמה קודים הספרות לא מופיעות ברצף?
- (4) בארונית 4 מגירות. ילד התבקש על ידי אמו לסדר 6 משחקים בארונית. הילד מכניס את המשחקים באקראי למגירות השונות. כל מגירה יכולה להכיל את כל המשחקים יחד.
- מה ההסתברות שהילד יכניס את כל המשחקים למגירה העליונה?
  - מה ההסתברות שהילד יכניס את כל המשחקים לאותה מגירה?
  - מה ההסתברות ש"דומינו" יוכנס למגירה העליונה ויתר המשחקים לשאר המגירות.
  - מה ההסתברות ש"דומינו" לא יוכנס למגירה העליונה?

- (5) בעיר מסוימת מתמודדות למועצת העיר 4 מפלגות שונות: "הירוקים", "קדימה", "העבודה" ו"הליכוד". 6 אנשים אינם יודעים למי להצביע, ולכן בוחרים באקראי מפלגה כלשהי.
- מה ההסתברות שכל ה-6 יבחרו באותה מפלגה?
  - מה ההסתברות שמפלגת ה"ירוקים" לא תקבל קולות?
  - מה ההסתברות שמפלגת ה"ירוקים" תקבל בדיוק 3 קולות וכל מפלגה אחרת תקבל קול 1 בלבד?
  - מה ההסתברות שמפלגת "הירוקים" תקבל 2 קולות, מפלגת "העבודה" תקבל 2 קולות ומפלגת "הליכוד" תקבל 2 קולות?
- (6) 5 חברים נפגשו ורצו לראות סרט. לרשותם ספריה המונה 8 סרטים שונים. כל אחד התבקש לבחור סרט באקראי.
- מה ההסתברות שכולם יבחרו את אותו הסרט?
  - מה ההסתברות שכולם יבחרו את "הנוסע השמיני"?
  - מה ההסתברות שכל אחד יבחר סרט אחר?
  - מה הסיכוי שלפחות שניים יבחרו את אותו הסרט?
  - מה ההסתברות שיוסי וערן ייבחרו את "הנוסע השמיני" וכל השאר סרטים אחרים?
  - מה ההסתברות שהנוסע השמיני לא ייבחר על ידי אף אחד מהחברים?
  - לקחו את 8 הסרטים ויצרו מהם רשימה. נתון שברשימה 3 סרטי אימה, מה ההסתברות שברשימה שנוצרה יופיעו 3 סרטי האימה ברצף?
- (7) בקבוצה 10 אנשים. יש ליצור שתי וועדות שונות מתוך הקבוצה: אחת בת 4 אנשים והשנייה בת 3 אנשים. כל אדם יכול להיבחר רק לוועדה אחת. חשבו את מס' הדרכים השונות ליצירת הוועדות הללו כאשר:
- אין בוועדות תפקידים.
  - בכל וועדה יש תפקיד אחד של אחראי הוועדה.
  - בכל וועדה כל התפקידים שונים.
- (8) 4 גברים ו-3 נשים מתיישבים על כסאות בשורה של כסאות תיאטרון. בכל שורה 10 כסאות. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את ההושבה:
- ללא הגבלה.
  - כל הגברים ישבו זה ליד זה וגם כל הנשים תשבנה זו ליד זו.
  - שני גברים בקצה אחד ושני הגברים האחרים בקצה שני.
- (9) בהגרלה ישנם 10 מספרים מ-1 עד 10. נבחרו באקראי 5 מספרים. מה ההסתברות שהמספר 7 הוא השני בגודלו מבין המספרים שנבחרו?

- 10** 6 אנשים עלו לאוטובוס שעוצר ב-10 תחנות.  
 כל אדם בוחר באופן עצמאי ואקראי באיזו תחנה לרדת.  
 א. מה ההסתברות שכל אחד יורד בתחנה אחרת?  
 ב. מה ההסתברות שבדיוק 3 ירדו בתחנה החמישית?  
 ג. מה ההסתברות שרונית תרד בתחנה השנייה והשאר לא?  
 ד. מה ההסתברות שכולם ירדו בתחנות 5,6 ולפחות אחד בכל אחת מהתחנות הללו?

- 11** ברכבת 4 מקומות ישיבה עם כיוון הנסיעה 41 מקומות ישיבה נגד כיוון הנסיעה.



- 4 זוגות התיישבו במקומות אלו באקראי.  
 א. בכמה דרכים שונות ניתן להתיישב?  
 ב. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו זה לצד זה עם כיוון הנסיעה?  
 ג. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו זה לצד זה?  
 ד. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו כל אחד ליד החלון? (בכל שורה יש חלון).  
 ה. מה ההסתברות שהזוג כהן יישבו כך שכל אחד בכיוון נסיעה מנוגד?  
 ו. מה ההסתברות שהזוג כהן יישבו אחד מול השני מול פנים.  
 ז. מה ההסתברות שכל הגברים ייסעו עם כיוון הנסיעה וכל הנשים תשבנה נגד כיוון הנסיעה?  
 ח. מה ההסתברות שכל זוג ישב אחד מול השני?

- 12** סיסמא מורכבת מ-5 תווים, תווים אלו יכולים להיות ספרה (0-9) ואותיות ה-ABC (26 אותיות). כל תו יכול לחזור על עצמו יותר מפעם אחת.  
 א. כמה סיסמאות שונות יש?  
 ב. כמה סיסמאות שונות יש שבהן כל התווים שונים?  
 ג. כמה סיסמאות שונות יש שבהן לפחות ספרה אחת ולפחות אות אחת?

- 13** מתוך קבוצה בת  $n$  אנשים רוצים לבחור 3 אנשים לוועדה. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את הבחירה? בטא את תשובתך באמצעות  $n$ .  
 א. בוועדה אין תפקידים ויש לבחור 3 אנשים שונים לוועדה.  
 ב. בוועדה תפקידים שונים. וכל אדם לא יכול למלא יותר מתפקיד אחת.  
 ג. בוועדה תפקידים שונים ואדם יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

- 14** שני אנשים מטילים כל אחד מטבע  $n$  פעמים. בטאו באמצעות  $n$  את הסיכוי שלכל אחד מהם אותו מספר פעמים של התוצאה "ראש".

- 15** יוצרים קוד עם  $a$  ספרות (מותר לחזור על אותה ספרה בקוד).  
 חשבו את ההסתברויות הבאות (בטאו את תשובותיכם באמצעות  $a$ ):
- בקוד אין את הספרה 5.
  - בקוד מופיעה הספרה 3.
  - בקוד לא מופיעות ספרות אי זוגיות.
- 16** זוג קוביות הוטלו מספר פעמים. כמה פעמים יש להטיל את זוג הקוביות בכדי שבהסתברות של לפחות 0.5 תתקבל לפחות הטלה אחת (של הזוג) עם סכום תוצאות 12?
- 17** בוחרים באופן מקרי מספר בין 6 ספרות.
- מה הסיכוי שהספרה 5 תופיע בדיוק פעם אחת במספר?
  - מה הסיכוי שהספרה 4 תופיע לפחות פעם אחת וגם הספרה 0 תופיע לפחות פעם אחת במספר?
- 18** במשרד של דנה 5 תיקיות אותן היא מסדרת באקראי בטור. 3 תיקיות הן אדומות ו-2 תיקיות הן כחולות. דנה רשמה שני פתקים ושמה כל פתק במקום אקראי בין התיקיות (לכל פתק יש 4 אפשרויות למיקום).
- מה הסיכוי ששני הפתקים יהיו במקומות שונים?
  - מה הסיכוי שבין שני הפתקים יש שתי תיקיות אדומות ואין תיקיות כחולות?
  - מה הסיכוי שבין שני הפתקים יש בדיוק תיקיה אחת?
  - מה הסיכוי שבין שני הפתקים יש שתי תיקיות ואחת מהן כחולה?
- 19** לירון 6 עטים אותם הוא מכניס באקראי ל-3 קלמרים שונים. לכל עט הוא בוחר באופן מקרי קלמר.
- מה הסיכוי שיש בדיוק 2 קלמרים שבכל קלמר בדיוק 2 עטים?
  - מה הסיכוי שיש בדיוק קלמר אחד שבו בדיוק 2 עטים?
  - מה הסיכוי שיש בדיוק 3 קלמרים שבכל אחד בדיוק 2 עטים?
- 20** מסדרים  $n$  כדורים שונים ב  $n$  תאים שונים (תא יכול להכיל יותר מכדור אחד). מה הסיכוי שבתא  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) יהיו בדיוק  $k$  כדורים?
- 21** בתחרות ריצה עלו לגמר 6 מתמודדים. רק בשלושת המקומות הראשונים זוכים במדליות. נניח שכל המתמודדים מסיימים את התחרות.
- כמה אפשרויות יש לסיים את התחרות?
  - כמה אפשרויות יש לכך שמתמודד מספר 6 יקבל מדליה?
  - כמה אפשרויות יש לכך שמתמודד מספר 6 יקבל מדליה או שמתמודד מספר 2 יקבל מדליית זהב?

- (22)** מטילים קובייה הוגנת  $k$  פעמים.
- א. מה הסיכוי שהתוצאה הכי גדולה שהתקבלה היא  $j$  ?
- ב. מה הסיכוי שהתוצאה הכי קטנה שהתקבלה היא  $i$  ?
- ג. עבור  $i \leq j$ , מה הסיכוי שהתוצאה הכי גדולה היא  $j$  וגם התוצאה הכי קטנה היא  $i$  ?

## תשובות סופיות:

- (1) א. 102,400,000    ב. 78,960,960    ג. 658008
- (2) א. 810,000    ב. 657,720    ג. 27,405
- (3) א. 14,040,000    ב. 1,404,000    ג. 5,616,000    ד. 8,424,000
- (4) א. 0.00024    ב. 0.00098    ג. 0.05933    ד. 0.75000
- (5) א. 0.00098    ב. 0.17798    ג. 0.02929    ד. 0.02197
- (6) א.  $\frac{1}{4096}$     ב.  $\frac{1}{32,768}$     ג. 0.205    ד. 0.795
- ה. 0.0105    ו. 0.5129    ז. 0.1071
- (7) א. 4,200    ב. 50,400    ג. 604,800
- (8) א. 604,800    ב. 2,880    ג. 2,880
- (9) 0.238
- (10) א. 0.1512    ב. 0.014    ג. 0.059    ד.  $\frac{62}{10^6}$
- (11) א. 40,320    ב. 0.1071    ג. 0.2142    ד. 0.0357  
ה. 0.5714    ו. 0.1429    ז. 0.0143    ח. 0.0095
- (12) א. 60,466,176    ב. 45,239,040    ג. 48,484,800
- (13) א.  $\frac{n!}{3!(n-3)}$     ב.  $n \cdot (n-1)(n-2)$     ג.  $n^3$
- (14)  $\frac{1}{4^n} \cdot \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2$
- (15) א.  $0.9^a$     ב.  $1-0.9^a$     ג.  $0.5^a$
- (16) לפחות 25 פעמים.
- (17) א. 0.35721    ב. 0.1759
- (18) א. 0.75    ב. 0.075    ג. 0.375    ד. 0.15
- (19) א. 0    ב.  $\frac{450}{729}$     ג.  $\frac{90}{729}$
- (20)  $\frac{\binom{n}{k} (n-1)^{n-k}}{n^n}$
- (21) א. 720    ב. 360    ג. 432

$$\begin{aligned}
 & \text{א. } \frac{j^k - (j-1)^k}{6^k} \quad \text{ב. } \frac{(7-i)^k - (6-i)^k}{6^k} \quad \text{ג. } \frac{(j-i+1)^k - 2 \cdot (j-i)^k + (j-i-1)^k}{6^k} \quad (22)
 \end{aligned}$$

# מתמטיקה

## פרק 11 - סטטיסטיקה

### תוכן העניינים

1. הממוצע - חזרה כללית ..... (ללא ספר)
2. מציאת השכיחות בעזרת הממוצע ..... (ללא ספר)
3. ממוצעים של קבוצות ..... (ללא ספר)
4. הוספת נתונים וחישוב ממוצע חדש ..... (ללא ספר)
5. ממוצע גדל, קטן או לא משתנה ..... (ללא ספר)
6. שאלות עם שני נעלמים בממוצע ..... (ללא ספר)
7. סטיית תקן ..... (ללא ספר)
8. המשמעות של סטיית התקן ..... (ללא ספר)
9. השכיח והחציון - חזרה כללית ..... (ללא ספר)
10. שאלות שבהן סטיית התקן נתונה ..... (ללא ספר)
11. שאלות כוללות עם סטיית תקן, ממוצע, שכיח וחציון ..... (ללא ספר)

# מתמטיקה

פרק 12 - הסתברות - פרק מבוא

תוכן העניינים

1. הסתברות של שלושה מאורעות בלתי תלויים ..... (ללא ספר)
2. הסתברות של שני מאורעות בלתי תלויים ..... (ללא ספר)
3. חזרה על הסברות עם מאורע אחד ..... (ללא ספר)
4. שלושה מאורעות תלויים ..... (ללא ספר)
5. שני מאורעות תלויים ..... (ללא ספר)
6. תכנון על פי הסתברות נתונה ..... (ללא ספר)

# מתמטיקה

## פרק 13 - הסתברות קלאסית

### תוכן העניינים

202	1. שאלות יסודיות
205	2. שאלות עם שני ניסויים
207	3. שאלות עם הסתברות מותנית
209	4. שאלות עם נעלמים
211	5. שאלות הנפתרות באמצעות טבלה דו-מימדית
213	6. התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות יסודיות
214	7. התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות עם הסתברות מותנית
215	8. התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות עם נעלמים
218	9. שאלות מסכמות

## שאלות יסודיות:

### סיכום כללי:

1. ההסתברות להתרחשות מאורע A:  $P(A) = \frac{\text{מספר האפשרויות הרצוי}}{\text{מספר האפשרויות הכולל}}$
2. המאורע המשלים למאורע A:  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .
3. חיתוך ואיחוד מאורעות A ו-B:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .
4. מאורעות זרים הם מאורעות שלא יכולים להתקיים בו זמנית.
5. עבור מאורעות זרים A ו-B מתקיים:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ,  $P(A \cap B) = 0$ .
6. מאורעות נקראים בלתי תלויים אם קיום האחד מהם לא משפיע על ההסתברות לקיומו של השני.
7. עבור מאורעות בלתי תלויים A ו-B מתקיים:  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ .
8. אם מתקיים:  $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$  המאורעות תלויים.
9. הסתברות מותנית של מאורע A בהינתן מאורע B מוגדרת:  $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ .
10. צורה כללית של טבלת ההסתברויות עבור מאורעות A ו-B:

	$\bar{A}$	A	
$P(B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(A \cap B)$	B
$P(\bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(A \cap \bar{B})$	$\bar{B}$
1	$P(\bar{A})$	$P(A)$	

קשרים מידיים מהטבלה:

- $P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(B)$
- $P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{B})$
- $P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A)$
- $P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})$

9. התפלגות בינומית: חישוב  $k$  הצלחות מתוך  $n$  ניסיונות בלתי תלויים כאשר

ההסתברות להצלחה בניסיון בודד היא  $p$  נתונה ע"י:  $P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ .

## שאלות:

- (1) בכד 3 כדורים כחולים ו-7 כדורים לבנים.  
מה ההסתברות להוצאת כדור כחול בהוצאה אקראית של כדור מהכד?
- (2) בכד 2 כדורים כחולים, 3 כדורים אדומים ו-7 כדורים לבנים.  
מה ההסתברות שבהוצאה אקראית של כדור מהכד לא ייצא כדור אדום?
- (3) מהי ההסתברות שבסיבוב סביבון לא יתקבל "נס"?
- (4) עבור שני מאורעות, A ו-B נתון:  $P(A) = 0.6$ ,  $P(\bar{B}) = 0.3$ ,  $P(A \cap B) = 0.4$ .  
מצא את  $P(A \cup B)$ .
- (5) עבור שני מאורעות, A ו-B נתון:  $P(\bar{A}) = 0.2$ ,  $P(\bar{B}) = 0.5$ ,  $P(A \cup B) = 0.95$ .  
מצא את  $P(A \cap B)$ .
- (6) עבור שני מאורעות, A ו-B נתון:  $P(A) = 0.6$ ,  $P(B) = 0.25$ ,  $P(A \cup B) = 0.65$ .  
קבע האם המאורעות זרים והאם הם תלויים.
- (7) נתון כי שני מאורעות, A ו-B בלתי תלויים.  
בנוסף נתון:  $P(A) = 0.75$ ,  $P(B) = 0.4$ . מצא את  $P(A \cup B)$ .

**תשובות סופיות:**

$$\frac{3}{10} \quad (1)$$

$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$P(A \cup B) = 0.9 \quad (4)$$

$$P(A \cap B) = 0.35 \quad (5)$$

(6) לא זרים ותלויים.

$$P(A \cup B) = 0.85 \quad (7)$$

## שאלות עם שני ניסויים:

### שאלות:

- (8) בכד 3 כדורים כחולים ו-7 כדורים אדומים. אדם מוציא באקראי כדור מהכד, ולאחריו מוציא עוד כדור (ללא החזרה של הכדור הראשון).  
 א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?  
 ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?  
 ג. מה ההסתברות ששני הכדורים אינם באותו צבע?
- (9) בכד 3 כדורים כחולים, 2 כדורים אדומים ו-5 כדורים ירוקים. אדם מוציא באקראי כדור מהכד, מחזיר אותו לכד ואז מוציא עוד כדור.  
 א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?  
 ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?  
 ג. מה ההסתברות ששני הכדורים אינם באותו צבע?
- (10) בחדר 4 גברים ו-5 נשים. מוציאים באקראי שלושה אנשים מהחדר (בלי החזרה).  
 מה ההסתברות שמתוך השלושה יש יותר גברים מנשים?
- (11) נתונים שני כדים: בכד א' שלושה כדורים כחולים ואחד לבן ובכד ב' שני כדורים כחולים ושלושה לבנים. לואיזה מטילה מטבע לא הוגנת שבה הסיכוי לקבלת "עץ" כפול מהסיכוי לקבלת "פלי". אם יוצא "עץ" היא מוציאה כדור מכד א' ואם יוצא "פלי" היא מוציאה שני כדורים מכד ב'.  
 מה ההסתברות שלא ייצא ללואיזה אף כדור לבן?
- (12) ליואב יש בכיסו הימני 3 גולות כחולות ו-5 שחורות ובכיסו השמאלי 4 גולות כחולות ו-4 שחורות. יואב מוציא גולה מכיסו הימני.  
 אם היא כחולה הוא מחזיר אותה לכיס הימני ואם היא שחורה הוא מעביר אותה לכיס השמאלי. אחר כך הוא מוציא גולה מכיסו השמאלי.  
 מה ההסתברות ששתי הגולות שהוציא באותו צבע?

**תשובות סופיות:**

$$\frac{7}{15} \text{ ג.} \quad \frac{8}{15} \text{ ב.} \quad \frac{1}{15} \text{ א.} \quad \text{(8)}$$

$$\frac{31}{50} \text{ ג.} \quad \frac{19}{50} \text{ ב.} \quad \frac{9}{100} \text{ א.} \quad \text{(9)}$$

$$\frac{17}{42} \quad \text{(10)}$$

$$\frac{8}{15} \quad \text{(11)}$$

$$\frac{77}{144} \quad \text{(12)}$$

## שאלות עם הסתברות מותנית:

### שאלות:

- 13** בכד 3 כדורים כחולים ו-7 כדורים אדומים. אדם מוציא באקראי כדור מהכד, ולאחריו מוציא עוד כדור.
- מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?
  - מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?
  - ידוע ששני הכדורים באותו צבע. מה ההסתברות ששניהם כחולים?
- 14** בכד 3 כדורים כחולים, 2 כדורים אדומים ו-5 כדורים ירוקים. אדם מוציא באקראי כדור מהכד, מחזיר אותו לכד ואז מוציא עוד כדור.
- מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?
  - מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?
  - ידוע ששני הכדורים באותו צבע. מה ההסתברות ששניהם כחולים?
- 15** בחדר 4 גברים ו-5 נשים. מוציאים באקראי שלושה אנשים מהחדר (בלי החזרה). ידוע שמתוך השלושה יש יותר גברים מנשים. מה ההסתברות שכולם גברים?
- 16** נתונים שני כדים: בכד א' שלושה כדורים כחולים ואחד לבן ובכד ב' שני כדורים כחולים ושלושה לבנים. לואיזה מטילה מטבע לא הוגנת שבה הסיכוי לקבלת "עץ" כפול מהסיכוי לקבלת "פלי". אם יוצא "עץ" היא מוציאה כדור מכד א' ואם יוצא "פלי" היא מוציאה שני כדורים מכד ב'.
- מה ההסתברות שלא ייצא ללואיזה אף כדור לבן?
  - ידוע שללואיזה לא ייצא אף כדור לבן, מה ההסתברות שבהטלת המטבע ייצא "עץ"?
- 17** במשחק מזל הסיכוי להרוויח 10 ₪ הוא 0.3 והסיכוי להרוויח 20 ₪ הוא 0.2. ישנו סיכוי של 0.5 לא להרוויח כלל. אדם שיחק במשחק פעמיים וידוע שהרוויח יותר מ-20 ₪. מה הסיכוי שהרוויח 40 ₪?

- 18** כדי להתקבל לעבודה בחברת משקאות יש לעבור שלושה ראיונות על ידי שלושה בעלי תפקידים בסדר הבא: אחראי משמרת, מנהל ראשי ומנכ"ל החברה. כל בעל מקצוע נותן חוות דעת חיובית או שלילית בלבד. כדי שמועמד יקבל עבודה בחברה עליו לעבור בהצלחה לפחות את אחד מהראיונות עם אחראי המשמרת והמנהל הראשי, אך הראיון עם המנכ"ל חייב לעבור בהצלחה (כדי שמועמד יקבל עבודה המנכ"ל צריך לתת לו חוות דעת חיובית). ידוע כי אחראי המשמרת נותן חוות דעת חיובית ל- $\frac{1}{6}$  מהמועמדים. המנהל הראשי קורא את חוות הדעת של אחראי המשמרת וב- $\frac{2}{3}$  מהמקרים נותן חוות דעת הפוכה מזו של אחראי המשמרת. מנכ"ל החברה נותן חוות דעת חיובית ל-80% מהמועמדים בלי קשר לחוות הדעת הקודמות.
- א. מה ההסתברות לקבל חוות דעת חיובית מהמנהל הראשי?  
 ב. ידוע כי המנהל הראשי נתן חוות דעת חיובית, מה ההסתברות שגם אחראי המשמרת נתן חוות דעת חיובית?  
 ג. מה ההסתברות להתקבל לחברה?

### תשובות סופיות:

- 13** א.  $\frac{1}{15}$       ב.  $\frac{8}{15}$       ג.  $\frac{1}{8}$
- 14** א.  $\frac{9}{100}$       ב.  $\frac{38}{100}$       ג.  $\frac{9}{38}$
- 15**  $\frac{2}{17}$
- 16** א.  $\frac{8}{15}$       ב.  $\frac{15}{16}$
- 17**  $\frac{1}{4}$
- 18** א.  $\frac{11}{18}$       ב.  $\frac{1}{11}$       ג.  $\frac{26}{45}$

## שאלות עם נעלמים:

### שאלות:

- 19) בכד מספר מסוים של כדורים. 3 כחולים והשאר אדומים. הסיכוי להוציא שני כדורים אדומים מהכד (בלי החזרה) הוא  $\frac{5}{14}$ . כמה כדורים בכד?
- 20) ההסתברות של צלף לפגוע במטרה בירייה הראשונה היא  $p$  והיא גדולה מההסתברות שלו להחטיא. אם הוא פוגע, עולה ההסתברות שלו לפגוע בירייה הבאה ב-0.1 ואם הוא מחטיא היא יורדת ב-0.1. הצלף ירה למטרה פעמיים. ההסתברות שפגע במטרה בדיוק בירייה אחת היא 0.38.
- א. מצא את  $p$ .
- ב. מה ההסתברות שהצלף פגע פעמיים במטרה אם ידוע שהוא פגע בה לפחות פעם אחת?
- 21) רפי קנה במכולת חבילה של מסטיק "מנטוס". בכל חבילה יש 10 סוכריות, חלקן ורודות וחלקן צהובות. רפי מוציא באקראי (ללא החזרה) שתי סוכריות מהחבילה שקנה. ידוע כי ההסתברות ששתי הסוכריות תהיינה ורודות קטנה פי 4 מההסתברות להוציא סוכריות בצבעים שונים.
- א. כמה סוכריות מכל צבע יש בכל חבילה?
- רפי מחזיר את הסוכריות בחזרה לחבילה ולאחר מכן מוציא באקראי 3 סוכריות (ללא החזרה).
- ב. מה ההסתברות שכל הסוכריות שהוציא רפי הן צהובות? שלומי, חברו הטוב של רפי, קנה 3 חבילות "מנטוס".
- ג. שלומי מוציא באקראי סוכרייה מכל חבילה. האם ההסתברות של שלומי להוציא 3 סוכריות צהובות גבוהה או נמוכה מזו של רפי?
- ד. שלומי מוציא מכל חבילה שתי סוכריות. מה ההסתברות שלו להוציא מכל חבילה סוכרייה ורודה ואחר כך צהובה?

- (22)** בתוך כד ישנם 8 כדורים, חלקם אדומים וחלקם לבנים. מוציאים באקראי כדור, מניחים אותו בצד ומוציאים כדור נוסף. א. מצא כמה כדורים יש בכד מכל צבע אם ידוע כי ההסתברות שהכדור השני שהוצא הוא לבן היא  $\frac{3}{8}$ . ב. ידוע כי הכדור השני שהוצא הוא לבן, מה ההסתברות שהכדור הראשון שיצא הוא אדום?

- (23)** בכד ישנם 12 כדורים, חלקם לבנים וחלקם שחורים. אם מוציאים עם החזרה שני כדורים מהכד ההסתברות ששניהם יהיו בעלי אותו הצבע היא  $\frac{13}{18}$ . א. מה ההסתברות להוציא כדור שחור מהכד אם ידוע כי יש יותר כדורים שחורים? ב. מה ההסתברות להוציא מהכד כדור שחור שרשום עליו מספר? ג. איזה חלק מבין הכדורים שרשום עליהם מספר מהווים הכדורים הלבנים?

### תשובות סופיות:

- (19)** 8 כדורים.
- (20)** א.  $p = 0.6$  ב.  $\frac{21}{40}$  ג. גבוהה  $\left(\frac{27}{125} > \frac{1}{6}\right)$
- (21)** א. 4 ורודות ו-6 צהובות. ב.  $\frac{1}{6}$  ד.  $P = 0.0189$
- (22)** א. 5 אדומים ו-3 לבנים. ב.  $\frac{5}{7}$
- (23)** א.  $\frac{5}{6}$  ב.  $P = \frac{1}{3}$  ג.  $\frac{1}{5}$

## שאלות הנפתרות באמצעות טבלה דו-מימדית:

### שאלות:

- 24** 70% מאוהדי מכבי ת"א הם גברים והשאר נשים. 40% מהאוהדים מעשנים. נתון כי 45% מהאוהדים הם גברים שאינם מעשנים.
- א. מהו אחוז הנשים המעשנות מבין אוהדי מכבי?  
 ב. בוחרים באקראי אוהד מכבי. מה ההסתברות שהוא גבר או שהוא מעשן?  
 ג. בוחרים באקראי אישה שאוהדת מכבי. מה ההסתברות שהיא מעשנת?  
 ד. האם מין האוהד והעובדה שהוא מעשן הם מאורעות תלויים?
- 25** 65% מהפחיות המיוצרות במפעל משקאות הן רגילות והשאר דיאט. 80% מהפחיות המיוצרות תקינות והשאר פגומות. נתון כי 7% מהפחיות הן פחיות דיאט פגומות.
- א. בוחרים באקראי פחית. מה ההסתברות שהיא פחית רגילה ותקינה?  
 ב. בוחרים באקראי פחית דיאט. מה ההסתברות שהיא פגומה?  
 ג. בוחרים באקראי פחית פגומה. מה ההסתברות שהיא דיאט?  
 ד. האם סוג הפחית ותקינותה הם מאורעות תלויים?
- 26** 80% מהתלמידים בכיתה עברו את המבחן בתנ"ך ו-70% עברו את המבחן בהיסטוריה. 75% מבין התלמידים שעברו את המבחן בתנ"ך עברו גם את המבחן בהיסטוריה.
- א. בוחרים באקראי תלמיד. מה ההסתברות שהוא נכשל בשתי הבחינות?  
 ב. תלמיד נכשל במבחן בהיסטוריה. מה ההסתברות שהוא עבר את המבחן בתנ"ך?  
 ג. ידוע שתלמיד עבר בדיוק מבחן אחד. מה ההסתברות שזה המבחן בתנ"ך?
- 27** בעיר גדולה ל-80% מהתושבים יש רישיון נהיגה. מבין בעלי רישיון נהיגה 30% הם גברים. 60% מהגברים הם בעלי רישיון נהיגה. בחרו באקראי שתי נשים מהעיר. מה ההסתברות שלשתיהן אין רישיון נהיגה?
- 28** 10% מהאנשים באוכלוסייה עיוורי צבעים. קיימת בדיקה הבוחנת אם אדם הוא עיוור צבעים. אם עיוור צבעים ניגש לבדיקה ישנו סיכוי של 80% שהבדיקה תקבע שהוא עיוור צבעים. אם אדם שאינו עיוור צבעים ניגש לבדיקה ישנו סיכוי של 5% שהבדיקה תקבע שהוא עיוור צבעים. מהם אחוזי האמינות של הבדיקה (אחוז המקרים בהם הבדיקה מאבחנת נכונה את הנבדק)?

**(29)** בסניף "תנו לחיות לחיות" בירושלים יש כלבים וחתולים בלבד, בעלי פרווה כהה או פרווה בהירה. 55% מהחיות בסניף הם כלבים. אחוז החתולים בעלי הפרווה הכהה גדול פי 3 מאחוז הכלבים בעלי הפרווה הבהירה. מבין בעלי הפרווה הכהה 60% הם כלבים. בוחרים באקראי חתול מהסניף. מה ההסתברות שהוא בהיר פרווה?

**(30)** בית ספר תיכון מציע לתלמידיו 3 מגמות ריאליות לבחירה: פיזיקה, כימיה ומחשבים. 40% מתלמידי מגמות אלה הם בנים. הבנים מהווים  $\frac{2}{5}$  מתלמידי הפיזיקה,  $\frac{5}{12}$  מתלמידי הכימיה ו- $\frac{1}{3}$  מתלמידי המחשבים.  $\frac{1}{4}$  מהבנים הם תלמידי פיזיקה.

- א. האם יש תלות בין העובדה שתלמיד לומד פיזיקה למין התלמיד?  
 ב. מהו אחוז לומדי המחשבים מקרב הבנים?

### תשובות סופיות:

- (24)** א. 15%      ב. 0.85      ג. 0.5      ד. כן.
- (25)** א. 0.52      ב. 0.2      ג. 0.35      ד. בלתי תלויים.
- (26)** א. 0.1      ב.  $\frac{2}{3}$       ג.  $\frac{2}{3}$
- (27)**  $\frac{1}{225}$
- (28)** 93.5%
- (29)**  $\frac{1}{3}$
- (30)** א. בלתי תלויים.      ב. 12.5%

## התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות יסודיות:

### שאלות:

- (31) אדם מסובב חמש פעמים סביבון. מה ההסתברות שיקבל פעמיים "נס"?
- (32) מה ההסתברות לקבלת 5 פעמים "נס" בשמונה סיבובי סביבון?
- (33) הסיכוי לעבור את מבחן התיאוריה הוא 0.7. עשרה אנשים ניגשים למבחן התיאוריה. מהי ההסתברות שבדיוק שישה מהם יעברו?
- (34) בכד 6 כדורים כחולים ו-4 לבנים. אדם מוציא מהכד כדור, מסתכל על צבעו ומחזיר אותו לכד. הוא חוזר על הפעולה 4 פעמים נוספות.  
מה ההסתברות שמתוך חמשת הכדורים הוציא:
- בדיוק ארבע יהיו כחולים?
  - חמישה יהיו כחולים?
  - לפחות ארבעה יהיו כחולים?
  - הרוב יהיו כחולים?
  - לפחות אחד יהיה כחול?
  - הראשון והאחרון בלבד יהיו כחולים?

### תשובות סופיות:

- (31) 0.264
- (32) 0.023
- (33) 0.2001
- (34) א. 0.259 ב. 0.078 ג. 0.337 ד. 0.683 ה. 0.98976 ו. 0.023

## התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות עם הסתברות מותנית:

### שאלות:

**(35)** בכד 6 כדורים כחולים ו-4 לבנים. אדם מוציא מהכד כדור, מסתכל על צבעו ומחזיר אותו לכד. הוא חוזר על הפעולה 4 פעמים נוספות. ידוע שרוב הכדורים שהוציא כחולים. מה ההסתברות שכולם כחולים?

**(36)** יערה מצליחה לקלוע לסל בשלושה מכל ארבעה ניסיונות. כדי להתקבל לנבחרת הכדורסל של בית הספר עליה להצליח לקלוע ברוב הפעמים מתוך 6 ניסיונות קליעה לסל. ידוע שיערה התקבלה לנבחרת הכדורסל. מה ההסתברות שהצליחה לקלוע את כל הקליעות?

### תשובות סופיות:

**(35)** 0.114

**(36)** 0.214

## התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות עם נעלמים:

### שאלות:

**37** בכד יש 9 כדורים, חלקם כחולים והשאר לבנים. מוציאים כדור מהכד. אם הוא כחול אז מחזירים אותו לכד ומוסיפים 4 כדורים לבנים ואם הוא לבן אז מחזירים אותו לכד ומוסיפים 4 כדורים כחולים. לאחר מכן מוציאים כדור נוסף. נתון שההסתברות שהכדור הראשון שיצא הוא כחול אם ידוע כי הכדור השני

$$\text{כחול היא } \frac{6}{11}.$$

- א. מצא כמה כדורים כחולים יש בכד.  
 ב. חוזרים על התהליך 6 פעמים, כלומר בכל פעם מחזירים את המצב לקדמותו, מוציאים באקראי כדור ופועלים בהתאם לחוקים. מצא את ההסתברות שלפחות פעם אחת יבחרו שני כדורים כחולים בזה אחר זה.

**38** בסיטונאות מזון ידוע כי 40% מבין הסכו"ם החד-פעמי הוא תוצרת חו"ל והשאר תוצרת הארץ. 40% מבין הסכו"ם המיובא מחו"ל הם צבעוניים והשאר שקופים.

- א. מה ההסתברות לבחור בסיטונאות המזון סכו"ם שקוף המיובא מחו"ל?  
 ב. i. בוחרים 5 כלים בחנות באופן אקראי. מה ההסתברות שלכל היותר כלי אחד הוא כלי שקוף תוצרת חו"ל?  
 ii. מה ההסתברות שבדיוק אחד מחמשת הכלים הוא כלי שקוף תוצרת חו"ל אם ידוע כי לכל היותר כלי אחד הוא שקוף תוצרת חו"ל?  
 ג. בוחרים שני כלים באופן אקראי וידוע כי ההסתברות ששניהם שקופים היא 0.4096. איזה חלק מהווים כלי הסכו"ם השקופים מבין כלי הסכו"ם תוצרת הארץ?

**39** בחדר יש  $x$  גברים ו- $3x$  נשים. משחקים את המשחק הבא: בוחרים באקראי שני אנשים מהחדר בזה אחר זה (בלי החזרה).

$$\text{ידוע כי ההסתברות לבחור שני אנשים מאותו המין היא } \frac{13}{22}.$$

- א. מצא כמה נשים יש בחדר.  
 ב. ידוע כי האדם השני שנבחר הוא גבר. מה ההסתברות שגם הראשון שנבחר הוא גבר?  
 ג. משחקים את המשחק 4 פעמים. ידוע כי בכל הפעמים נבחר גבר בפעם השנייה. מה ההסתברות שבדיוק ב-3 פעמים יבחר גבר גם בפעם הראשונה?

- (40)** בוחרים שלושה גברים באקראי מעיר גדולה. ההסתברות שכולם מעשנים היא 0.027. מה ההסתברות שרובם מעשנים?
- (41)** בוחרים שלוש נשים מעיר גדולה. ההסתברות ששתיים מהן מעשנות קטנה פי 4 מההסתברות ששתיים מהן לא מעשנות. מה ההסתברות שכולן מעשנות?
- (42)** בכד 10 כדורים, חלקם לבנים והשאר שחורים. נמרוד מוציא 9 פעמים כדור מהכד (עם החזרה). הסיכוי שיצאו פי 2 כדורים שחורים מלבנים גדול פי  $3\frac{3}{8}$  מהסיכוי שיצאו פי 2 כדורים לבנים משחורים. מצא כמה כדורים מכל צבע בכד.
- (43)** מפעל מייצר שולחנות וכיסאות. בוחרים 4 רהיטים. ידוע כי ההסתברות שכולם יהיו כיסאות זהה להסתברות שיהיה שולחן אחד בדיוק בניהם.
- א. מצא את ההסתברות לבחור כיסא.  
 במפעל צובעים את הרהיטים בשחור או לבן.  
 רבע מהשולחנות נצבעים בשחור ורבע מהכיסאות נצבעים בלבן.
- ב. מה ההסתברות לבחור כיסא שחור?  
 ג. איזה חלק מבין הרהיטים הלבנים מהווים השולחנות?
- (44)** בחדר  $x$  גברים ו- $3x$  נשים. מוציאים באקראי שני אנשים מהחדר. ההסתברות שהם יהיו מאותו מין היא 0.6.
- א. מצא את גודלו של  $x$ .  
 ב. חוזרים על התהליך 4 פעמים.  
 מה הסיכוי שבשלוש מתוך 4 הפעמים ייצאו מהחדר שתי נשים?
- (45)** במבחן רב ברירה עם 5 שאלות שוות ניקוד, לכל שאלה יש  $n$  תשובות מהן רק אחת נכונה. ישנו סיכוי של 50% ששי ידע את התשובה הנכונה לשאלה במבחן. אם שי לא יודע את התשובה לשאלה הוא מנחש.
- ההסתברות ששי יקבל במבחן 60 גדולה פי  $1\frac{1}{3}$  מההסתברות שיקבל 80. מצא את ערכו של  $n$ .

- (46) כדי להתקבל לקורס טיס יש לעבור גיבוש וראיון. כל המועמדים ניגשים גם לראיון וגם לגיבוש. 40% מהניגשים לגיבוש עוברים אותו ו-35% מהניגשים לראיון עוברים אותו.  $\frac{5}{17}$  מאלה שלא התקבלו לקורס טיס לא התקבלו בגלל הריאיון בלבד. שלושה חברים ניסו להתקבל לקורס טיס. ידוע שרובם התקבלו. מה ההסתברות שכולם התקבלו?

### תשובות סופיות:

- (37) א. 6 כדורים כחולים. ב. 0.88989
- (38) א. 0.24 ב. i. 0.65389 ב. ii.  $\frac{30}{49} \sim 0.61224$  ג.  $\frac{2}{3}$
- (39) א. 9 נשים ב.  $\frac{2}{11}$  ג. 0.0196
- (40) 0.216
- (41) 0.008
- (42) 4 לבנים, 6 שחורים.
- (43) א.  $P = 0.8$  ב.  $P = 0.6$  ג.  $\frac{3}{7}$
- (44) א.  $x = 4$  ב. 0.299
- (45)  $n = 5$
- (46)  $\frac{5}{90}$

## שאלות מסכמות:

### שאלות:

47) כדי להתקבל לחברת היי-טק יש לעבור ראיונות משלושה בעלי תפקידים בסדר הבא: מהנדס ראשי, אחראי משמרת ומנכ"ל החברה. כל אחד מבעלי התפקידים נותן חוות דעת חיובית או שלילית על המועמד לעבודה. מועמד שמתקבל לחברה חייב לקבל חוות דעת חיובית משלושת בעלי התפקידים.

ידוע כי המהנדס הראשי נותן חוות דעת חיובית ל- $\frac{3}{5}$  מהמועמדים.

אחראי המשמרת קורא את חוות הדעת של המהנדס הראשי וב- $\frac{1}{6}$  מהמקרים נותן חוות דעת הפוכה מזו של המהנדס הראשי. מנכ"ל החברה קורא את חוות הדעת של אחראי המשמרת וב- $\frac{7}{10}$  נותן חוות דעת זהה לשלו.

א. ענה על השאלות הבאות:

- i. מה ההסתברות שמועמד יקבל חוות דעת חיובית מאחראי המשמרת?
- ii. ידוע כי אחראי המשמרת נתן חוות חיובית. מה ההסתברות שהמהנדס הראשי ייתן חוות דעת שלילית?
- ב. מה ההסתברות שמועמד יקבל עבודה בחברה?
- ג. מה ההסתברות שמועמד יקבל חוות דעת שלילית מהמנכ"ל?
- ד. לאחר היעדר עובדים שינתה החברה את מדיניותה וקבעה כי כדי להתקבל לעבודה יש לעבור לפחות שני ראיונות בהצלחה, אך חוות הדעת של המנכ"ל חייבת להיות חיובית. מה ההסתברות כעת לקבל עבודה בחברה?

48) במדינה מסוימת  $\frac{19}{60}$  מהאזרחים הם גברים ו- $\frac{41}{60}$  הן נשים.

30% מבין מרכיבי המשקפיים במדינה זו הם גברים ו-40% מבין אלו שלא מרכיבים משקפיים הם גברים.

- א. מה ההסתברות למצוא אישה במדינה זו שאינה מרכיבה משקפיים?
- ב. בוחרים 4 אנשים. מה ההסתברות שבדיוק שניים מהם הם נשים שאינן מרכיבות משקפיים?
- ג. בוחרים אזרח. ידוע כי הוא גבר. מה ההסתברות שהוא מרכיב משקפיים?

49) בעיר מסוימת ההסתברות לבחור אדם מעשן גדולה פי 3 מההסתברות לבחור אדם המרכיב משקפיים. ידוע כי החלק של התושבים שמרכיבים משקפיים מבין

$$\frac{1}{12}.$$

- א. מצא מהי ההסתברות לבחור מעשן מתוך כל מרכיבי המשקפיים.  
 ב. ידוע כי 15% מהתושבים הם מרכיבים משקפיים בלבד. מצא את ההסתברות לבחור תושב שלא מרכיב משקפיים.  
 ג. בוחרים 6 תושבים באופן אקראי. מה ההסתברות שמחצית מהם אינם מרכיבים משקפיים ואינם מעשנים?

50) בבית ספר מסוים ישנם תלמידים המרכיבים משקפיים. ידוע כי אם בוחרים 3 תלמידים אז ההסתברות ששלושתם מרכיבים משקפיים היא 0.027.

- א. מצא את אחוז מרכיבי המשקפיים בבית הספר. בבית הספר ההסתברות להיתקל בתלמיד גדולה ב-0.1 מההסתברות להיתקל בתלמידה ומספר הבנים שמרכיבים משקפיים זהה למספר הבנות שמרכיבות משקפיים.  
 ב. מה ההסתברות להיתקל בחצר בית הספר בתלמיד שאינו מרכיב משקפיים?  
 ג. איזה חלק מכלל הבנות בבית הספר מהוות הבנות שמרכיבות משקפיים?  
 ד. בוחרים 4 תלמידים. ידוע כי כולן בנות. מה ההסתברות כי אחת מהן תרכיב משקפיים?

51) כדי להתקבל לעבוד בחברת ההיי-טק Techno יש לעבור שני ראיונות משני בעלי מקצוע, תחילה על ידי המהנדס הראשי ואחריו על ידי מנכ"ל החברה. כל בעל מקצוע נותן חוות דעת חיובית, שלילית או שנמנע מלקבוע. כדי שמועמד יתקבל לחברה עליו לעבור לפחות ראיון אחד עם חוות דעת חיובית. ידוע כי המהנדס

$$\frac{1}{5} \text{ ל-} \frac{2}{7} \text{ מהמועמדים ו-} \frac{2}{7} \text{ מהם הוא משאיר בלי}$$

קביעה. המנכ"ל קורא את חוות הדעת של המהנדס הראשי וקובע את חוות הדעת שלו בצורה הבאה:

- אם המהנדס נתן חוות דעת חיובית, אז המנכ"ל ייתן גם חוות דעת חיובית ב-60% מהמקרים. אם המהנדס נתן חוות דעת שלילית, אז המנכ"ל נמנע מלקבוע ב-60% מהמקרים ובשאר המקרים הוא נותן חוות דעת חיובית. אם המהנדס נמנע מלקבוע אז המנכ"ל ייתן חוות דעת חיובית או שלילית בלבד. הסיכוי שהמנכ"ל ייתן במקרה זה חוות דעת חיובית גדול פי 3 מהסיכוי שייתן חוות דעת שלילית.

- א. מה ההסתברות לקבל חוות דעת חיובית מהמנכ"ל?  
 ב. ידוע כי המנכ"ל נתן חוות דעת חיובית.  
 מה ההסתברות שגם המהנדס נתן חוות דעת חיובית?  
 ג. מה ההסתברות להתקבל לחברה?  
 ד. ביום מסוים הגיעו 5 מועמדים.  
 מה ההסתברות שבדיוק 3 מהם קיבלו עבודה באותו היום?

**(52)** בכד יש 12 כדורים, חלקם אדומים וחלקם שחורים. מוציאים עם החזרה שני כדורים מהכד.

- א. מצא את מספר הכדורים האדומים שבכד אם ידוע כי ההסתברות ששני הכדורים שהוצאו הם שחורים היא  $\frac{4}{9}$ .  
 ב. חלק מהכדורים עשויים מעץ והשאר עשויים מפלסטיק. ידוע כי 25% מהכדורים האדומים עשויים מעץ וכי 50% מהכדורים העשויים מעץ הם אדומים.  
 מצא את ההסתברות לבחור כדור שחור עשוי מפלסטיק.  
 ג. מוציאים מהכד 5 כדורים בזה אחר זה עם החזרה. מה ההסתברות להוציא 4 כדורים אדומים העשויים מפלסטיק?  
 ד. מוציאים מהכד 5 כדורים בזה אחר זה עם החזרה. ידוע כי כולם עשויים מפלסטיק, מה ההסתברות ש-3 מהם בצבע אדום?

- (53)** בבית ספר בעיר נערכו שני מבחנים. 80% מתלמידי העיר עברו את המבחן הראשון.  $\frac{1}{4}$  מבין התלמידים שעברו את המבחן הראשון עברו גם את השני ו- $\frac{1}{2}$  מהתלמידים שנכשלו במבחן הראשון נכשלו גם בשני.  
 א. בוחרים באקראי תלמיד. מה ההסתברות שהוא עבר את אחד המבחנים?  
 ב. בוחרים באקראי 4 תלמידים.  
 מה ההסתברות שבדיוק אחד מהם עבר את אחד המבחנים?  
 ג. איזה חלק מבין התלמידים שנכשלו במבחן השני מהווה קבוצת התלמידים שנכשלו גם במבחן הראשון?

54) במפעל גדול ההסתברות שמתוך 4 עובדים לפחות אחד ירכיב משקפיים היא 0.5904.

- א. מה ההסתברות לבחור עובד שלא מרכיב משקפיים?  
 ידוע כי 40% מהפועלים שמרכיבים משקפיים הם מעשנים ו-20% מבין העובדים המעשנים הם מרכיבים משקפיים.  
 ב. מה ההסתברות לבחור עובד שמרכיב משקפיים בלבד או מעשן בלבד?  
 ג. בוחרים באקראי 5 עובדים. מה ההסתברות שרוב העובדים שנבחרו מעשנים?

55) במפעל לייצור ברגים פועלים שני פסי ייצור – פס ייצור א' ופס ייצור ב'.

- ידוע כי אם בוחרים 5 ברגים אז ההסתברות ששלושה מהם מיוצרים על ידי פס הייצור השני גדולה פי 4.5 מההסתברות שאחד מהם מיוצר על ידי פס הייצור הנ"ל.  
 א. מצא את ההסתברות לבחור בורג המיוצר על ידי פס הייצור הראשון.  
 מתוך כל 100 ברגים שהמפעל מייצר 7 פגומים. ומתוך כל 10 ברגים היוצאים מפס הייצור הראשון אחד הוא פגום.  
 ב. מהו אחוז הברגים התקינים שמיוצרים על ידי פס הייצור השני?  
 ג. איזה חלק מבין הברגים הפגומים מהווים אלו שיוצאים מפס הייצור הראשון?

56) בכד יש פי 5 כדורים כחולים מאדומים. מוציאים מהכד כדור.  
 אם הוא כחול אז משאירים אותו בחוף ואם הוא אדום אז מחזירים אותו לכד.  
 לאחר מכן מוציאים כדור נוסף מהכד. ידוע כי ההסתברות להוציא שני כדורים

$$\text{בצבעים שונים היא: } \frac{175}{612}$$

- א. כמה כדורים מכל צבע יש בכד?  
 ב. ידוע כי הכדור השני שנבחר הוא כחול, מה ההסתברות שהכדור הראשון שנבחר היה אדום?  
 ג. חוזרים על התהליך 5 פעמים.  
 ידוע כי בכל חמשת הפעמים הכדור השני שהוצא הוא כחול,  
 מה ההסתברות שברוב הפעמים הכדור הראשון שיצא הוא אדום?

57) בחדר יש פי 4 נשים מגברים. משחקים את המשחק הבא: בוחרים באקראי אדם מהחדר. אם נבחר גבר אז הוא יוצר מהחדר ואם נבחרה אישה אז היא נשארת.  
 לאחר מכן בוחרים אדם נוסף.

א. מצא כמה גברים יש בחדר אם ידוע כי ההסתברות שייבחרו שני אנשים

$$\text{שונים היא } \frac{236}{725}$$

- ב. ידוע כי בפעם השנייה נבחר גבר, מה ההסתברות שגם בפעם הראשונה ייבחר גבר?  
 ג. משחקים את המשחק 4 פעמים. ידוע כי בכל הפעמים נבחר גבר בפעם השנייה. מה ההסתברות שברוב המקרים יצא גבר גם בפעם הראשונה?

58) בעיר מסוימת נערכות בחירות. ידוע כי אם בוחרים 4 תושבים אז ההסתברות

שלפחות אחד מהם יצביע למועמד ב' היא:  $\frac{65}{81}$ .

א. איזה חלק מהתושבים הצביעו למועמד א'?

בעיר זו יש תושבים מבוגרים וצעירים. ידוע כי  $\frac{2}{3}$  מהצעירים הצביעו למועמד א'

וכי ההסתברות לבחור מבוגר שהצביע למועמד ב' היא  $\frac{2}{15}$ .

ב. מהו אחוז התושבים הצעירים שהצביעו למועמד ב'?

ג. איזה אחוז מהווים התושבים הצעירים מבין אלו שהצביעו למועמד א'?

59) לכבוד חנוכה קנתה סבתא תקווה לשתי נכדותיה, שני ושרון, סביבונים עם

סוכריות בתוכם. בכל סביבון יש 7 סוכריות שוקולד ו-4 סוכריות מנטה.

שרון לקחה את סביבון אחד והוציאה ממנו באקראי (בלי החזרה) 4 סוכריות.

א. מה ההסתברות שכל הסוכריות שהוציאה שרון הן סוכריות מנטה?

ב. שני לקחה 4 סביבונים והוציאה באקראי מכל סביבון סוכרייה אחת.

האם ההסתברות ששני תוציא 4 סוכריות מנטה גבוהה יותר או נמוכה

יותר מההסתברות שחשבת בסעיף א'? נמק.

ג. שני הוציאה באקראי סוכרייה אחת מכל סביבון מתוך ארבעת הסביבונים

שברשותה. ידוע שבין הסוכריות שבידה יש יותר סוכריות מנטה.

מה ההסתברות שכל הסוכריות שיש לשני ביד יהיו בטעם מנטה?

60) כדי לקבל עבודה בחברת Makido יש לעבור ראיונות משני בעלי מקצוע: מהנדס

ראשי ומנכ"ל החברה. המהנדס הראשי נותן חוות דעת חיובית ברבע מהמקרים,

בשליש מהמקרים הוא נמנע מלתת חוות דעת ובשאר המקרים הוא נותן חוות

דעת שלילית. מנכ"ל החברה קורא את חוות הדעת של המהנדס וקובע את חוות

דעתו באופן הבא:

אם המהנדס נתן חוות דעת חיובית אז הוא נותן חוות דעת חיובית ב-90%

מהמקרים וב-10% מהמקרים הוא נמנע מלתת חוות דעת. אם המהנדס נמנע

מלקבוע אז המנכ"ל נותן חוות דעת שלילית במחצית מהמקרים או חיובית

במחצית מהמקרים. אם המהנדס נתן חוות דעת שלילית אז ההסתברות

שהמנכ"ל יתן חוות דעת חיובית גדולה פי 2 מההסתברות שימנע מלתת חוות

דעת וההסתברות שימנע מלתת חוות דעת גדולה פי 2 מההסתברות שייתן חוות

דעת שלילית.

א. מה ההסתברות שמועמד יקבל חוות דעת חיובית לפחות באחד הראיונות?

ב. אם ידוע כי מועמד קיבל חוות דעת חיובית אחת לפחות, מה ההסתברות

שהמהנדס נמנע מלתת חוות דעת?

ג. ענה על השאלות הבאות:

- i. מה ההסתברות שמתוך 5 מועמדים, לפחות אחד יקבל עבודה אם ידוע כי כדי להתקבל לעבודה בחברה יש לקבל שתי חוות דעת חיוביות?
- ii. כיצד תשתנה התוצאה של חלק i אם כדי לקבל עבודה יש לקבל לפחות חוות דעת חיובית אחת ואף לא חוות דעת שלילית אחת?

**61** בעיר מסוימת נערכו בחירות מקומיות.

ידוע כי אם בוחרים באקראי 4 אזרחים מההסתברות שתמצא אישה אחת בניהם קטנה פי 16 מההסתברות להיתקל באישה באופן אקראי.

א. מה הוא אחוז הגברים בעיר?

בעיר שלושה מועמדים.  $\frac{1}{11}$  מהמצביעים למועמד א' הם גברים,

60% מהמצביעים למועמד ב' הם גברים ו-25% מהמצביעים למועמד ג' הם גברים. אחוז המצביעים למועמד ג' הוא 20%.

ב. איזה מועמד קיבל את רוב הקולות?

ג. בוחרים באקראי 4 נשים.

מה ההסתברות ששלושה מהן הצביעו למועמד המנצח?

**62** בחדר  $x$  גברים ו- $x+2$  נשים. זורקים קוביית משחק מאוזנת.

אם מתקבל מספר הגדול מ-4 אז מוסיפים לחדר  $x$  גברים ואם מתקבל מספר הקטן או שווה ל-4 אז מוסיפים לחדר  $x$  נשים. לאחר מכן מוציאים אדם מהחדר.

א. מצא כמה נשים יש בחדר אם ידוע כי ההסתברות לבחור אישה היא  $\frac{21}{33}$ .

ב. ידוע כי יצאה אישה מהחדר.

מה ההסתברות שהמספר בקובייה היה קטן או שווה ל-4?

אנשי החדר הנמצאים בו במקור (לפני זריקת הקובייה) לובשים חולצות אדומות או לבנות בלבד. ידוע כי החלק היחסי של האנשים הלובשים חולצות לבנות בחדר גדול פי 16 מהחלק היחסי של הגברים הלובשים חולצות אדומות. כמו כן פרופורציית הגברים מבין כל אלו שלובשים חולצות אדומות היא 0.25.

ג. מצא מה ההסתברות לבחור גבר הלובש חולצה אדומה בחדר.

ד. בוחרים 5 אנשים מהחדר (עם החזרה) וידוע כי כולם לובשים חולצות אדומות. מה ההסתברות שרובם נשים?

**63** באוניברסיטה מסוימת ידוע כי חלק מהסטודנטים נעזרים בספרי לימוד חיצוניים להעשרת הידע שלהם, וכי ההסתברות לבחור 2 סטודנטים הנעזרים בספרי לימוד חיצוניים קטנה ב-0.1 מההסתברות לבחור שני סטודנטים שאינם נעזרים בספרי לימוד חיצוניים.

א. מהו אחוז הסטודנטים שנעזרים בספרי לימוד חיצוניים?  
 האוניברסיטה מוכרת ספרי לימוד ב-3 מקצועות לכלל הסטודנטים: ספר א', ספר ב' וספר ג'. כל סטודנט יכול לקנות רק ספר אחד.  
 ידוע כי כמות הסטודנטים שקנו את ספר א' וכמות הסטודנטים שקנו את ספר ג' זהות. כמו כן,  $\frac{6}{7}$  מאלו שקנו את ספר ג' נעזרים גם בספרים חיצוניים.  $\frac{1}{3}$  מהסטודנטים שקנו את ספר ב' נעזרים בספרי לימוד חיצוניים וכמות הסטודנטים שקנו את ספר א' ונעזרים בספרי לימוד חיצוניים מהווים  $\frac{1}{9}$  מכלל הסטודנטים שנעזרים בספרי לימוד חיצוניים.

- ב. מהו אחוז הסטודנטים שקנו את ספר ב' ואינם נעזרים בספרי לימוד חיצוניים?  
 ג. איזה חלק מהווים הסטודנטים שקנו את ספר ג' מכלל הסטודנטים שאינם נעזרים בספרי לימוד חיצוניים?  
 ד. בוחרים 4 סטודנטים שאינם נעזרים בספרי לימוד חיצוניים. מה ההסתברות שאחד מהם קנה את ספר ג'?

## תשובות סופיות:

- (47) א.i.  $\frac{17}{30}$     א.ii.  $\frac{2}{17}$     ב.  $\frac{7}{20}$     ג.  $\frac{71}{150}$     ד.  $\frac{32}{75}$
- (48) א.  $P=0.1$     ב.  $P=0.0486$     ג.  $\frac{15}{19}$
- (49) א.  $P\left(\frac{B}{A}\right)=\frac{1}{4}$     ב.  $P(\bar{A})=0.8$     ג.  $P_6(3)=0.1318$
- (50) א. 30%    ב.  $P=0.4$     ג.  $\frac{1}{3}$     ד.  $P=\frac{32}{81}$
- (51) א.  $\frac{27}{50}$     ב.  $\frac{2}{9}$     ג.  $\frac{31}{50}$     ד.  $P=0.34414$
- (52) א. 4 כדורים.    ב.  $\frac{7}{12}$     ג.  $\frac{15}{1024}=0.0146$     ד. 0.1323
- (53) א.  $P=0.7$     ב.  $P=\frac{189}{2500}$     ג.  $\frac{1}{7}$
- (54) א.  $P=0.8$     ב.  $P=0.44$     ג.  $P=0.31744$
- (55) א.  $P=0.4$     ב. 95%    ג.  $\frac{4}{7}$
- (56) א. 15 כחולים ו-3 אדומים.    ב.  $\frac{17}{101}$     ג. 0.03645
- (57) א. 6 גברים ו-24 נשים.    ב. הסתברות לגבר בפעם הראשונה:  $P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{25}{141}$     ג. 0.0193
- (58) א.  $\frac{2}{3}$     ב. 20%    ג. 60%
- (59) א.  $\frac{1}{330}$     ב. גבוהה יותר  $\left(\frac{256}{14641} > \frac{1}{330}\right)$     ג.  $\frac{1}{8}$
- (60) א.  $\frac{55}{84}$     ב.  $\frac{14}{55}$     ג.i. 0.7204    ג.ii. 0.9324
- (61) א. 25%    ב. מועמד א'.    ג.  $\frac{2}{3}$
- (62) א. 5 נשים.    ב.  $\frac{16}{21}$     ג. 0.05    ד.  $\frac{459}{512}$
- (63) א. 45%    ב. 20%    ג.  $\frac{1}{11}$     ד.  $P=0.2732$

## מתמטיקה

### פרק 14 - התפלגות נורמלית

#### תוכן העניינים

1. מבוא להתפלגות נורמלית ..... (ללא ספר)
2. השכיח והחציון בגרף ההתפלגות הנורמלית ..... (ללא ספר)
3. חישובי הסתברויות בגרף ההתפלגות הנורמלית ..... (ללא ספר)
4. חישובי כמויות ..... (ללא ספר)
5. סרטוט גרף התפלגות וחישובי סימטריה ..... (ללא ספר)
6. מציאת הממוצע וסטיית התקן ..... (ללא ספר)
7. חצאי סטיית תקן בגרף ההתפלגות ..... (ללא ספר)
8. שאלות מסכמות כדוגמת המאגר ..... (ללא ספר)

# מתמטיקה

פרק 15 - חוקי החזקות והשורשים

תוכן העניינים

226	.....	1. חוקי החזקות
231	.....	2. חוקי השורשים
235	.....	3. כתיבה מדעית של מספרים

## חוקי החזקות:

סיכום כללי:

סיכום חוקי החזקות:

$$\begin{array}{lll}
 a^n \cdot a^m = a^{m+n} & .3 & a^1 = a & .2 & a^0 = 1 & .1 \\
 a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m & .6 & (a^n)^m = a^{n \cdot m} & .5 & \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} & .4 \\
 \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m & .9 & a^{-m} = \frac{1}{a^m} & .8 & \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m & .7
 \end{array}$$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים:  $a^n a^m = a^{n+m}$  ו-  $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$$\begin{array}{lll}
 b^2 b^5 b^{12} b^3 & .ג & t^3 t^5 t^7 & .ב & a^2 a^6 & .א \\
 \frac{c^6}{c^2} & .ו & \frac{n^{14}}{n^9} & .ה & \frac{k^8}{k^3} & .ד \\
 \frac{y^3 y^{15}}{y^4 y^{14}} & .ט & \frac{x^{30}}{x^9 x^{18}} & .ח & \frac{a^3 a^{19}}{a^{15}} & .ז \\
 \frac{5^{20} 5^3 5^{16}}{5^4 5^{22} 5^8} & .יב & \frac{2^{16} 2^2}{2^{10}} & .יא & 3^2 3^3 3^4 & .י
 \end{array}$$

(2) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים:  $a^n a^m = a^{n+m}$  ו-  $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$$\begin{array}{lll}
 \frac{x^8 y^5 y^9 x^2}{y^4 x^4} & .ג & \frac{a^{10} b^{13} a^3}{b^4 b^6 b^2 a^{12}} & .ב & \frac{3^4 2^7}{2^6 3^2} & .א
 \end{array}$$

(3) לפניך הביטוי הבא:  $\frac{3^6 2^{17} 3^3 2^4}{3^4 2^3 2^2}$

מצא  $n$  כך שיתקיים שוויון בין הביטוי  $243 \cdot 2^n$  לבין הביטוי הנתון.

(4) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

$\frac{9^3 \cdot 27^2}{3^9 \cdot 81}$ .ב.	$\frac{2^3 \cdot 2^7}{2^4 \cdot 2^5}$ .א.	
$2^3 + 2^5$ .ד.	$\frac{10^9 \cdot 25^5 \cdot 8^{-1}}{40^3 \cdot 125^5}$ .ג.	

(5) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוק:  $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ .

$(x^3 x^{10})^2$ .ג.	$(c^3)^{10}$ .ב.	$(a^2)^4$ .א.
$\frac{d^{20} (d^4)^2}{d^{12} (d^3)^2}$ .ו.	$\frac{n^7 n^8}{(n^3)^4}$ .ה.	$\frac{(b^2)^3}{b^2 b^3}$ .ד.
$\frac{(8^3)^8 8^{11}}{(8^2 8)^3 8^8}$ .ט.	$\frac{3^6 (3^3 3^2)^6}{3^{28} (3^2)^3}$ .ח.	$\frac{2^5 (2^4)^2 2^3}{(2^3 2^2)^3}$ .ז.
$\frac{(3^2)^7 5^{10} (5^3)^2}{3^9 5^{16}}$ .יב.	$\frac{(3^2)^6 5^{31} 3^7}{(5^2)^{10} 5^{11} 3^{18}}$ .יא.	$\frac{(2^4)^5 (3^6)^7 2^{20}}{3^{35} 2^{40}}$ .י.

(6) לפניך הביטויים הבאים:  $\left((3^2)^3\right)^4$  ו-  $\left((3^6)^n\right)^2$ .

מצא  $n$  כך שיתקיים שוויון בין שני הביטויים.

(7) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים:

$\frac{7^{12} 2^2 2^6}{2^5 7^{10} 7}$ .ג.	$\frac{5^{20} 3^{14} 3^8}{3^{20} 5^{12} 5^8}$ .ב.	$\frac{2^3 3^5}{2^2 3^4}$ .א.
---	---	-------------------------------

(8) פשט את הביטויים הבאים:

$125 \cdot 25 \cdot 5^5$ .ג.	$64^2 2^3 8^2$ .ב.	$3^2 9 \cdot 81^2$ .א.
$\frac{\left((3^4)^4\right)^5}{81^3 27^4 3^5}$ .ו.	$\frac{(4^2)^3 16}{64 \cdot 2^3}$ .ה.	$\frac{2^4 \cdot 16^5}{8 \cdot 512}$ .ד.

9 פשט את הביטויים הבאים :

$\frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}} \quad \text{ב.}$ $\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^{n+3} + x^{n+5}}{x^{n+2}} \quad \text{ד.}$	$\frac{(2a^2b)^3 \cdot (ab^{-3})^2}{4ab^{-2} \cdot \left(\frac{a^2}{b}\right)^4} \quad \text{א.}$ $\frac{4^{b+3}}{4^{b+1} + 4^{b+2}} \quad \text{ג.}$
--	---

10 פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים:  $(ab)^n = a^n b^n$  ו-  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$(x^{12}y^3)^3 \quad \text{ג.}$ $\left(\frac{a^{14}b^4}{a^6ab^3}\right)^3 \quad \text{ו.}$ $\left(\frac{(b^{12}c)^2 c^{14}}{c(c^3b^5)^4 b^3}\right)^2 \quad \text{ט.}$	$(m^4n^3)^5 \quad \text{ב.}$ $\left(\frac{i^4}{k^3}\right)^7 \quad \text{ה.}$ $\left(\frac{t^7 r^{20} t^3}{r^2 r^{12} t^8}\right)^2 \quad \text{ח.}$	$(a^2b)^3 \quad \text{א.}$ $\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^4 \quad \text{ד.}$ $\left(\frac{x^3 y^5 y^2 x^6}{y^4 x^7}\right)^6 \quad \text{ז.}$
--	--	--

11 חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים :

$\left(\frac{7^3 \cdot 16 \cdot 128 \cdot 49}{(2^27)^5}\right)^3 \quad \text{ג.}$	$\left(\frac{(5^4)^2 3^6}{3^5 5^7}\right)^2 \quad \text{ב.}$	$\left(\frac{3^9 2^6 2^2}{3^6 2^5 3^2}\right)^2 \quad \text{א.}$
---	--	--

12 בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה שלילית :

$\frac{1}{2^{10}} \quad \text{ג.}$ $\frac{1}{125} \quad \text{ו.}$	$\frac{1}{5^3} \quad \text{ב.}$ $\frac{1}{81} \quad \text{ה.}$	$\frac{1}{4^6} \quad \text{א.}$ $\frac{1}{8} \quad \text{ד.}$
--	--	---

13 בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה חיובית וחשב את ערכם :

$\frac{1}{5^{-3}} \quad \text{ג.}$	$\frac{1}{3^{-2}} \quad \text{ב.}$	$\frac{1}{4^{-3}} \quad \text{א.}$
------------------------------------	------------------------------------	------------------------------------

14) חשב את הביטויים הבאים :

ג.  $5^6 \cdot 5^{-3} \cdot 5^{-2}$

ב.  $2^{-8} \cdot 512 \cdot 2^2$

א.  $3^2 \cdot 3^{-5} \cdot 3^7$

ו.  $\frac{3^{-6} \cdot 7^7 \cdot 7^{-4}}{3^{-4} \cdot 3^{-3} \cdot 7^3}$

ה.  $\frac{2^{-5} \cdot 5^3 \cdot 2^{14}}{5^2 \cdot 5^{-10} \cdot 5^8 \cdot 2^6}$

ד.  $2^{14} \cdot 3^{-6} \cdot 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 2^{-30}$

15) פשט את הביטויים הבאים לצורה ללא חזקות שליליות.

ג.  $\frac{2^{-3} 5^4}{5^4 \cdot 125 \cdot (5^2 2)^{-3} \cdot 2^{-4}}$

ב.  $\frac{(4^4)^{-4} 3^{-11}}{(3^{-2} 4^3)^{-6}}$

א.  $\left(\frac{5^{-4}}{3^2}\right)^{-6}$

16) פשט את הביטויים הבאים :

ג.  $\frac{(m^{n+2})^3 \cdot m^{-4n-2}}{\frac{1}{m^{6n+2}} \cdot (m^3)^{n-2}}$

ב.  $\frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}}$

א.  $\frac{a^{n+2} \cdot a^{2-3n}}{(a^3)^{n+1}}$

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $a^8$     ב.  $t^{15}$     ג.  $b^{22}$     ד.  $k^5$     ה.  $n^5$     ו.  $c^4$
- ז.  $a^7$     ח.  $x^3$     ט. 1    י.  $3^9$     יא.  $2^8$     יב.  $5^5$
- (2) א. 18    ב.  $ab$     ג.  $x^6 y^{10}$
- (3)  $n=16$
- (4) א. 2    ב.  $\frac{1}{3}$     ג.  $\frac{5}{8}$     ד. 40
- (5) א.  $a^8$     ב.  $c^{30}$     ג.  $x^{26}$     ד.  $b$     ה.  $n^3$     ו.  $d^{10}$
- ז. 2    ח. 9    ט.  $8^{18}$     י.  $3^7$     יא. 3    יב.  $3^5$
- (6)  $n=2$
- (7) א. 6    ב. 9    ג. 56
- (8) א.  $3^{12}$     ב.  $2^{21}$     ג.  $5^{10}$     ד.  $2^{12}$     ה.  $2^7$     ו.  $3^{51}$
- (9) א.  $\frac{2b^3}{a}$     ב.  $k$     ג.  $3\frac{1}{5}$     ד.  $\frac{1}{x} + x$
- (10) א.  $a^6 b^3$     ב.  $m^{20} n^{15}$     ג.  $x^{36} y^9$     ד.  $\frac{a^{12}}{b^8}$     ה.  $\frac{i^{28}}{k^{21}}$     ו.  $a^{21} b^3$
- ז.  $x^{12} y^{18}$     ח.  $t^4 r^{12}$     ט.  $b^2 c^6$
- (11) א. 576    ב. 225    ג. 8
- (12) א.  $4^{-6}$     ב.  $5^{-3}$     ג.  $2^{-10}$     ד.  $2^{-3}$     ה.  $3^{-4}$     ו.  $5^{-3}$
- (13) א. 64    ב. 9    ג. 125
- (14) א. 81    ב. 8    ג. 5    ד.  $\frac{1}{9}$     ה. 1000    ו. 3
- (15) א.  $5^{24} \cdot 3^{12}$     ב.  $\frac{4^2}{3^{23}}$     ג.  $5^3 \cdot 2^4$
- (16) א.  $a^{1-5n}$     ב.  $k$     ג.  $m^{2n+12}$

## חוקי השורשים:

סיכום כללי:

סיכום חוקי השורשים:

$$\begin{array}{lll}
 \sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} & .3 & \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} & .2 & \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} & .1 \\
 \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} & .6 & \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}} & .5 & \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} & .4
 \end{array}$$

שאלות:

17) הבא את הביטויים הבאים לצורה:  $\sqrt[n]{a^m}$ .

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } 3^{\frac{1}{4}} & \text{ב. } 2^{\frac{3}{5}} & \text{ג. } 6^{\frac{5}{6}} \\
 \text{ד. } -12^{\frac{2}{7}} & \text{ה. } -(-4)^{\frac{1}{3}} & \text{ו. } -(-3)^{\frac{3}{4}} \\
 \text{ז. } 5^{-\frac{1}{4}} & \text{ח. } 27^{-\frac{1}{3}} & \text{ט. } 64^{-\frac{5}{6}}
 \end{array}$$

18) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } \sqrt{49} & \text{ב. } -\sqrt{25} & \text{ג. } \sqrt[3]{8} \\
 \text{ד. } -\sqrt[3]{128} & \text{ה. } \sqrt[3]{(-2)^6} & \text{ו. } (\sqrt[5]{1024})^2 \\
 \text{ז. } (\sqrt[5]{-243})^3 & \text{ח. } \sqrt[4]{-16} & \text{ט. } \sqrt[4]{-25^2} \\
 \text{י. } \sqrt[4]{(-25)^2} & &
 \end{array}$$

19) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים :

ג.  $128^{-\frac{2}{7}}$

ב.  $32^{\frac{3}{5}}$

א.  $8^{\frac{2}{3}}$

ו.  $\left(\frac{64}{343}\right)^{-\frac{2}{3}}$

ה.  $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2.5}$

ד.  $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$

ט.  $16^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{-\frac{1}{3}} \cdot 4^{-\frac{1}{2}}$

ח.  $343^{\frac{2}{3}} \cdot 100^{\frac{1}{2}}$

ז.  $81^{\frac{3}{4}} \cdot 64^{-\frac{1}{3}}$

20) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא :  $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[3]{128}}$

21) פשט את הביטויים הבאים :

ג.  $\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$

ב.  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$

א.  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$

ו.  $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$

ה.  $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$

ד.  $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$

ט.  $\frac{\sqrt[3]{8^2} \sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{400} \sqrt{2}}$

ח.  $\frac{\sqrt[3]{500} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[4]{25^2} \cdot \sqrt[3]{4}}$

ז.  $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$

22) הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים :

ג.  $\frac{\sqrt{36}}{2}$

ב.  $5\sqrt{3}$

א.  $3\sqrt{2}$

ה.  $x\sqrt{x}$

ד.  $2\sqrt[3]{3}$

23) הכנס את כל המקדמים בביטויים הבאים לתוך השורש :

ג.  $2\sqrt[3]{3}$

ב.  $4\sqrt[3]{2}$

א.  $2\sqrt{5}$

ו.  $\frac{3\sqrt[4]{5000}}{10}$

ה.  $\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$

ד.  $\frac{\sqrt{24}}{2}$

ט.  $-5\sqrt{-2}$

ח.  $-5\sqrt[4]{2}$

ז.  $-5\sqrt[3]{2}$

24) הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר :

- א.  $\sqrt{12}$       ב.  $\sqrt{48}$       ג.  $\sqrt{63}$
- ד.  $\sqrt[3]{54}$       ה.  $\sqrt{x^5}$

25) חלץ מן הביטויים הבאים את המקדם הגבוה ביותר ככל הניתן :

- א.  $\sqrt{40}$       ב.  $\sqrt{50}$       ג.  $\sqrt{320}$
- ד.  $\sqrt[3]{108}$       ה.  $\sqrt[3]{56}$       ו.  $\sqrt[3]{160}$
- ז.  $\sqrt[4]{162}$       ח.  $\sqrt[5]{972}$       ט.  $\sqrt[9]{192}$

26) פשט את הביטויים הבאים :

- א.  $\sqrt{18} - \sqrt{8}$       ב.  $\sqrt{7} + \sqrt{63}$       ג.  $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128}$
- ד.  $\sqrt[4]{405} - \sqrt[4]{80}$       ה.  $\frac{20}{\sqrt{5}}$       ו.  $\frac{\sqrt{8}}{2}$
- ז.  $\frac{16}{\sqrt{2}}$       ח.  $\frac{6}{\sqrt{3} + \sqrt{12}}$       ט.  $\frac{10}{\sqrt[5]{160} - \sqrt[5]{5}}$

27) פשט את הביטויים הבאים :

- א.  $3^{\frac{1}{4}} \cdot 9^{-2.5} \cdot 27^{\frac{3}{2}}$       ב.  $2^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{\frac{1}{2}} \cdot 64^{-3}$       ג.  $125^{\frac{1}{6}} \cdot 5^2 \cdot 5^{-\frac{2}{3}}$
- ד.  $\frac{27^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}$       ה.  $\frac{49^{\frac{2}{5}} \cdot 7^{-\frac{6}{5}}}{343^{\frac{1}{5}}}$       ו.  $\frac{512^{\frac{1}{4}} \cdot 64^{\frac{3}{4}}}{128^{\frac{1}{8}} \cdot 2^{-2}}$

## תשובות סופיות:

- (17) א.  $\sqrt[4]{3}$     ב.  $\sqrt[5]{2^3}$     ג.  $\sqrt[6]{6^5}$     ד.  $-\sqrt[7]{12^2}$     ה.  $-\sqrt[3]{-4}$     ו.  $\phi$
- ז.  $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$     ח.  $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$  או  $\frac{1}{3}$     ט.  $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}}$  או  $\frac{1}{2^5}$
- (18) א. 7    ב. -5    ג. 2    ד. -2    ה. 4    ו. 16
- ז. -27    ח.  $\phi$     ט.  $\phi$     י. 5
- (19) א. 4    ב.  $\frac{1}{8}$     ג.  $\frac{1}{4}$     ד. 125    ה.  $\frac{32}{243}$     ו.  $\frac{49}{16}$
- ז.  $\frac{27}{4}$     ח.  $\frac{10}{49}$     ט.  $\frac{1}{2}$
- (20)  $\sqrt{2}$
- (21) א. 4    ב. 9    ג. 20    ד. 6    ה. 3    ו. 2
- ז.  $\sqrt{2}$     ח.  $\sqrt{5}$     ט.  $\sqrt{2}$
- (22) א.  $\sqrt{18}$     ב.  $\sqrt{75}$     ג.  $\sqrt{9}$     ד.  $\sqrt[3]{24}$     ה.  $\sqrt{x^3}$
- (23) א.  $\sqrt{20}$     ב.  $\sqrt[3]{128}$     ג.  $\sqrt[5]{96}$     ד.  $\sqrt{6}$     ה.  $\sqrt[3]{3}$
- ו.  $\sqrt[4]{40 \frac{1}{2}}$     ז.  $\sqrt[3]{-250}$     ח.  $-\sqrt[4]{1250}$     ט.  $\sqrt[5]{5^5 \cdot 2}$
- (24) א.  $2\sqrt{3}$     ב.  $4\sqrt{3}$     ג.  $3\sqrt{7}$     ד.  $3\sqrt[3]{2}$     ה.  $x^2\sqrt{x}$
- (25) א.  $2\sqrt{10}$     ב.  $5\sqrt{2}$     ג.  $8\sqrt{5}$     ד.  $3\sqrt[3]{4}$     ה.  $2\sqrt[3]{7}$     ו.  $2\sqrt[5]{5}$
- ז.  $3\sqrt[4]{2}$     ח.  $3\sqrt[5]{4}$     ט.  $2\sqrt[6]{3}$
- (26) א.  $\sqrt{2}$     ב.  $4\sqrt{7}$     ג.  $6\sqrt[3]{2}$     ד.  $\sqrt[4]{5}$     ה.  $4\sqrt{5}$     ו.  $\sqrt{2}$
- ז.  $8\sqrt{2}$     ח.  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  או  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$     ט.  $\frac{10}{\sqrt[3]{5}}$  או  $2\sqrt[5]{5^4}$
- (27) א.  $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$     ב.  $\frac{1}{\sqrt[4]{2^{61}}}$     ג.  $\sqrt[6]{5^{11}}$     ד. 27    ה.  $\frac{1}{7}$     ו.  $\sqrt[8]{2^5}$

## כתיבה מדעית של מספרים:

### שאלות:

28) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. 15,000,000	ב. 1,500,000
ג. 150,000,000,000	ד. 23,400,000
ה. 0.0003	ו. 0.00000042
ז. 0.000000042	ח. 0.00000000042

29) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. $(3,000,000)^2$	ב. $(2,000,000)^2$
ג. $(5,000)^3$	ד. $(50,000)^3$
ה. $(0.0002)^4$	ו. $(0.00004)^3$
ז. $(0.000005)^3$	ח. $(0.000000007)^3$

### תשובות סופיות:

28) א. $1.5 \cdot 10^7$	ב. $1.5 \cdot 10^6$	ג. $1.5 \cdot 10^{11}$	ד. $2.34 \cdot 10^7$	ה. $3 \cdot 10^{-4}$
ו. $4.2 \cdot 10^{-7}$	ז. $4.2 \cdot 10^{-8}$	ח. $4.2 \cdot 10^{-10}$		
29) א. $9 \cdot 10^{12}$	ב. $4 \cdot 10^{12}$	ג. $1.25 \cdot 10^{11}$	ד. $1.25 \cdot 10^{14}$	ה. $1.6 \cdot 10^{-15}$
ו. $6.4 \cdot 10^{-14}$	ז. $1.25 \cdot 10^{-16}$	ח. $3.43 \cdot 10^{-25}$		

## מתמטיקה

### פרק 16 - משוואות ואי-שוויונים מעריכיים

#### תוכן העניינים

236	1. משוואות מעריכיות יסודיות
238	2. משוואות עם חיבור וחסור איברים
240	3. משוואות עם קבוע אוילר
241	4. משוואות בהן המשתנה גם בבסיס
242	5. משוואות מסכמות שונות
243	6. מערכת משוואות מעריכיות
244	7. אי שוויונים מעריכיים
245	8. אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך

## משוואות מעריכיות יסודיות:

### סיכום כללי:

- פתרון כללי של משוואת מעריכית מהצורה:  $a^x = a^y$  הוא:  $x = y$ .
- פתרון של משוואה מהצורה:  $a^x = 1$  הוא:  $x = 0$  שכן:  $a^x = 1 = a^0$ .
- פתרון של משוואה מהצורה:  $a^x = b^x$  הוא:  $x = 0$  שכן:  $a^x = b^x = 1$  ללא תלות בבסיסים.

### שאלות:

1 פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי החזקות היסודיים):

א.  $2^x = 16$       ב.  $5^x \cdot 25^{x+2} = 125$

ג.  $10^{x-2} = 10000^{x+1}$       ד.  $9^x \cdot 3^{x^2} = 81^{3x-4}$

ה.  $(2^x \cdot 32)^3 = 8$       ו.  $(5^{x^2})^5 \cdot \frac{1}{5^5} = 625^{x-1}$

ז.  $\frac{7^x}{343^3} = 1$       ח.  $(25 \cdot 0.2^{2x})^2 = \left(\frac{1}{125}\right)^{1-x}$

2 פתור את המשוואות הבאות (הבסיס הוא שבר):

א.  $27 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{5x+2} = 8$       ב.  $\left(\frac{3}{4}\right)^{2-x} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{9}{16}\right)^{7+x}$

ג.  $25 \left(\frac{7}{5}\right)^{x^2-2x} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{4-x} = 49$

3 פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי השורשים):

א.  $\sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3}$       ב.  $\sqrt{3^{x+7}} = 81$

ג.  $(9\sqrt{27})^{3x} \cdot 3^{2-x} = \frac{1}{9}$       ד.  $\sqrt[3]{16} \cdot \left(\frac{1}{2^x}\right)^3 = \frac{1}{16}$

ה.  $2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^x}} = 8(\sqrt{8})^{-\sqrt{x}}$       ו.  $5^x \cdot \frac{1}{25^5} = 125^{\sqrt{x}}$

4) פתור את המשוואות הבאות (מכפלת בסיסים שונים):

א. $2^x = 7^x$	ב. $3^x \cdot \frac{625}{\sqrt{25^x}} = 81$
ג. $2^{3x} \cdot 5^{3x} = 1000000$	ד. $2^{x+1} \cdot 3^{x-2} \cdot 7^x = 392$
ה. $243 \cdot 2^{x-1} \cdot 18^{x-9} = \frac{1}{3^{x-2}}$	ו. $108 \cdot \frac{1}{2^{1-2x}} = 72^x \cdot \sqrt{0.5}$
ז. $2^{2x+2} \cdot 5^{x+1} = (2\sqrt{5})^{4-x}$	

### תשובות סופיות:

א. $x = 4$	ב. $x = -\frac{1}{3}$	ג. $x = -2$	ד. $x = 2, 8$	ה. $x = -4$
ו. $x = 1, -\frac{1}{5}$	ז. $x = 9$	ח. $x = 1$		
א. $x = -1$	ב. $x = -2$	ג. $x = 3, -2$		
א. $x = -\frac{1}{2}$	ב. $x = 1$	ג. $x = -\frac{8}{19}$	ד. $x = 2, -\frac{2}{3}$	ה. $x = 4, 9$
א. $x = 0$	ב. $x = 4$	ג. $x = 2$	ד. $x = 2$	ה. $x = 5$
ו. $x = 1.5$	ז. $x = \frac{2}{3}$			ו. $x = 25$

## משוואות עם חיבור וחסור איברים:

### סיכום כללי:

במשוואות הכוללות חיבור וחסור של איברים, נאתר את הבסיס עם המעריך הקטן ביותר ונסמן אותו ב- $t$ , למשל במשוואה:  $4^x - 3 \cdot 2^x = 4$  נסמן:  $2^x = t$ .  
 נבטא את כל איברים המשוואה באמצעות  $t$  ונפתור אותה עבורו.  
 לאחר מכן נחזיר את ההצבה למציאת ערכי ה- $x$  המתאימים.

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם חיבור וחסור ממעלה ראשונה):

$$\text{ב. } 8^x + 3 \cdot 8^x = 256$$

$$\text{א. } 2^x + 6 \cdot 2^x = 56$$

$$\text{ד. } 2 \cdot 6^x + 6^{x+2} - 6^{x-1} = 227$$

$$\text{ג. } 5 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 162$$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם חיבור וחסור ממעלה ראשונה):

$$\text{ב. } 5^{3x+2} + 4 \cdot 125^x = 29$$

$$\text{א. } 81^{x+1} + 18 \cdot 3^{4x-3} = 735$$

$$\text{ד. } \sqrt{10000^{x+1}} - \sqrt[4]{10^{8x+1}} = \sqrt[4]{1000} \cdot (\sqrt[4]{10^7} - 1)$$

$$\text{ג. } (2^{3x+1})^2 - 64^{x-\frac{1}{3}} = 15$$

$$\text{ו. } 5^{-x} + 25^{\frac{1-x}{2}} - 5^{-x-1} = 145$$

$$\text{ה. } 6^{-x} - 5 \cdot 36^{-\left(\frac{x+1}{2}\right)} = 186$$

$$\text{ח. } 4^{x+2} - 6 \cdot 4^x = 7 \cdot 12^{x+1} + 6 \cdot 12^x$$

$$\text{ז. } 2 \cdot 10^{x+1} + 10^{x+2} = 3 \cdot 5^{x+1}$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחסור ממעלה שנייה):

$$\text{ב. } 16^{x+1} - 65 \cdot 4^x + 4 = 0$$

$$\text{א. } 9^x - 36 \cdot 3^x + 243 = 0$$

$$\text{ד. } 4^{-x} - 3 \cdot 4^x + 2 = 0$$

$$\text{ג. } 6^x - 4 \cdot 6^{-x} + 3 = 0$$

$$\text{ו. } \left(2^{\frac{1}{3}x+2}\right)^2 - 5 \cdot 2^{\frac{1}{3}x+1} + 1 = 0$$

$$\text{ה. } \left(\frac{4}{9}\right)^x - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1} = -\frac{2}{3}$$

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות):

$$\text{ב. } \frac{7^x}{7^x - 4} + \frac{8}{7^x + 5} = 3$$

$$\text{א. } \frac{20}{9^x + 1} = 3 - \frac{8}{9^x - 1}$$

5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות מסכמות):

א. $\frac{1}{25^{1-x}} - 6 \cdot 5^{x-1.5} + 1 = 0$	ב. $3^x - \sqrt{16 \cdot 3^{x+1}} = -9$
ג. $36^x - 6^{x+1} \cdot 3^x + 8 \cdot 9^x = 0$	ד. $4 \cdot 9^x - 10 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0$
ה. $25 \cdot 5^{2x} + 16 \cdot 15^x = 9^{x+1}$	ו. $9^x + 4^x - 6^x = \frac{7}{6^{1-x}}$
ז. $\frac{8^{2x} - 8}{7} = 4^x - 2$	ח. $2^{3x} - 2^{2x+2} - 2^x + 4 = 0$

### תשובות סופיות:

א. $x = 3$	ב. $x = 2$	ג. $x = 4$	ד. $x = 1$
א. $x = \frac{1}{2}$	ב. $x = 0$	ג. $x = \frac{1}{3}$	ד. $x = \frac{1}{4}$
ה. $x = -3$	ו. $x = -2$	ז. $x = -3$	ח. $x = -2$
א. $x = 2, 3$	ב. $x = 1, -2$	ג. $x = 0$	ד. $x = 0$
ה. $x = 0, 1$	ו. $x = -6, -9$		
א. $x = 1, -\frac{1}{2}$	ב. $x = 1$		
א. $x = \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$	ב. $x = 1, 3$	ג. $x = 1, 2$	ד. $x = 1, 0$
ה. $x = -2$	ו. $x = 1, -1$	ז. $x = 0, \frac{1}{2}$	ח. $x = 0, 2$

## משוואות עם קבוע אוילר:

### סיכום כללי:

קבוע אוילר מסומן באות  $e$  וערכו שווה (בערך) ל-2.71828. למספר זה משמעויות רבות במתמטיקה ובמדעים ועל כן הוחלט לסמן אותו באות משלו ולשלב אותו במשוואות מתמטיות ועוד. דרך הפתרון של משוואה שבה הבסיס הוא  $e$  זהה לחלוטין לשל משוואה מעריכית רגילה כפי שנלמד בפרק זה.

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם קבוע אוילר):

$$\text{א. } e^{3x} = e^{2x-1} \quad \text{ב. } e^{5x-1} = e \cdot e^{6x+1}$$

$$\text{ג. } e^{x-5} = (e^{1-x})^3 \quad \text{ד. } e^x \cdot \sqrt{e^{3x-1}} = \left(\frac{1}{e^x}\right)^{1-3x}$$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחסור):

$$\text{א. } e^2 \cdot e^x - e^{x+1} = e - 1 \quad \text{ב. } \sqrt[3]{e^{x+1}} \cdot e^2 = e^x \sqrt{e}$$

$$\text{ג. } e^{2x} + e^x - 2 = 0 \quad \text{ד. } e^{1+x} + e^{1-x} = e^2 + 1$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (המשתנה גם בבסיס):

$$\text{א. } xe^x = \sqrt[4]{e} \cdot x \quad \text{ב. } e^{3x} = x \cdot e^{3x}$$

$$\text{ג. } xe^{x^2} = \frac{x}{\sqrt{e^x}} \quad \text{ד. } \sqrt[3]{e^{3x-1}} \cdot x = xe^x$$

### תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x = -1 \quad \text{ב. } x = -3 \quad \text{ג. } x = 2 \quad \text{ד. } x = 1, \frac{1}{6}$$

$$(2) \quad \text{א. } x = -1 \quad \text{ב. } x = \frac{11}{4} \quad \text{ג. } x = 0 \quad \text{ד. } x = 1, -1$$

$$(3) \quad \text{א. } x = 0, \frac{1}{4} \quad \text{ב. } x = 1 \quad \text{ג. } x = 0, -\frac{1}{2} \quad \text{ד. } x = 0$$

## משוואות בהן המשתנה גם בבסיס:

### סיכום כללי:

במשוואות עם משתנה בבסיס יש לדרוש תנאי עבורו הבסיס חיובי. יש לקחת את חיתוך תחומי ההגדרה (במידה וקיימים ביטויים עם שורשים או שברים) יחד עם תוצאת השוואת המעריכים.

### הערה:

יש לבדוק את ערכי ה- $x$  עבורם הבסיס שווה ל-1 ולראות האם מתקבל פסוק אמת או פסוק שקר. בהתאם יש להוסיף או להוריד אותו מתחום המספרים המהווים את פתרון המשוואה.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$(\sqrt{3-x})^{\sqrt{x}} = (\sqrt[3]{3-x})^x \cdot \sqrt{\sqrt[3]{3-x}} \quad (1)$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2+x} = 1 \quad (2)$$

$$\frac{|x-3|^{x^2-2}}{|x-3|^{x-1}} = |x-3|^{-1} \quad (3)$$

### תשובות סופיות:

$$x = \frac{1}{4}, 1, 2 \quad (1)$$

$$\text{אין פתרון.} \quad (2)$$

$$x = 0, 1, 2, 4 \quad (3)$$

## משוואות מסכמות שונות:

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$.5(2^x - 2) + 2 = 4^x - 2^x \quad (1)$$

$$\cdot \frac{6}{4^{x-1} - 1} + \frac{2^{x+1}}{2^x + 2} = \frac{2^x + 4}{2^x - 2} \quad (2)$$

$$\cdot \frac{4^x}{4^x - 10} - \frac{4}{2^{2x-1} - 3} = \frac{32}{16^x - 4^{x+2} + 60} \quad (3)$$

$$\cdot 3^{2x^2+2} - 3^{x^2+3} + 9 = 3^{x^2+1} \quad (4)$$

$$\cdot \sqrt{x}{10} = 4 \cdot \sqrt[2]{x}{10} + 60 \quad (5)$$

$$\cdot \sqrt[x-1]{8 \cdot 2^{x+1}} = (\sqrt{x}{2})^2 \cdot \sqrt[x-1]{x}{32} \quad (6)$$

$$\cdot 10 \cdot 4^{x+2} - 16 \cdot 10^x - 90 \cdot 6^x + 36 \cdot 15^x = 0 \quad (7)$$

### תשובות סופיות:

$$\cdot x = 1, 2 \quad (1)$$

$$\cdot x = 3 \quad (2)$$

$$\cdot x = 1.5 \quad (3)$$

$$\cdot x = 1, -1 \quad (4)$$

$$\cdot x = \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$\cdot x = -3 \quad (6)$$

$$\cdot x = 1, -2 \quad (7)$$

## מערכת משוואות מעריכיות:

שאלות:

$$(1) \quad \begin{cases} y = 3^x \\ y = 18 - 3^x \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 5^{2x} - 5^y = 5^x - 25 \\ y - x = 2 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{1}{3^y - 4} + \frac{3}{3^x - 2} - \frac{1}{3^x + 2} = 3 \\ 4^y = \sqrt{256^x} \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(4) \quad \begin{cases} 5^x + 2^y = 13 \\ 2 \cdot 5^x - 2^y = 2 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(5) \quad \begin{cases} 2 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^y = 42 \\ 3^{x+1} - 2^{y+1} = 73 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(6) \quad \begin{cases} 5^{2x+1} + 8 \cdot 10^x - 2^{2y+4} = 0 \\ (\sqrt{3})^y = 27^{\frac{x-1}{6}} \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(7) \quad \begin{cases} 6 \cdot 4^x - 7 \cdot 6^{y-1} + 2 \cdot 3^{x+y} = 6^y \\ \sqrt[4]{5^x} \cdot \sqrt{(5\sqrt{5})^y} = \sqrt[4]{125} \cdot 5^x \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

תשובות סופיות:

(1,3) <b>(4)</b>	(1,2) <b>(3)</b>	(0,2), (2,4) <b>(2)</b>	(2,9) <b>(1)</b>
(1,2), (-1,0) <b>(7)</b>	(-1,-2) <b>(6)</b>	(3,2) <b>(5)</b>	

## אי שוויונים מעריכיים:

### סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון:  $a^x > a^y$  הוא:  $x > y$  עבור  $a > 1$  ו-  $x < y$  עבור  $0 < a < 1$ .

### שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$\begin{array}{ll} \sqrt{2^x} \leq 4^{x^2-1\frac{1}{4}} & \text{(2)} & 3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x} & \text{(1)} \\ \left(\frac{1}{7}\right)^{5x} \geq \left(\frac{1}{7}\right)^{1-3x} & \text{(4)} & e^{\sqrt{x+1}} > e^{2x} & \text{(3)} \\ e^{2x} - 2e^x + 1 \leq 0 & \text{(6)} & 25^x + 5 < 6 \cdot 5^x & \text{(5)} \end{array}$$

### הערה:

השאלות הבאות דורשות הכרות עם מושג הלוגריתם הטבעי ( $\ln$ ) וכן חוקי הלוגריתמים אשר ילמדו בהמשך.

$$e^{2x} - 5e^x + 4 > 0 \quad \text{(8)} \qquad e^x > 3 \quad \text{(7)}$$

### תשובות סופיות:

$$\begin{array}{ll} x \leq -1 \text{ או } x \geq 1\frac{1}{4} & \text{(2)} & x < \frac{2}{3} & \text{(1)} \\ x \leq \frac{1}{8} & \text{(4)} & 0 \leq x < 1 & \text{(3)} \\ x = 0 & \text{(6)} & 0 < x < 1 & \text{(5)} \\ x < 0 \text{ או } x > \ln 4 & \text{(8)} & x > \ln 3 & \text{(7)} \end{array}$$

## אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך:

### סיכום כללי:

דרך הפתרון של אי שוויון עם משתנה בבסיס ובמעריך:

- יש לדרוש בסיס חיובי ולחבר אי-שוויון בהתאם.
- יש לפתור את אי השוויון לפי השוואת מעריכים.
- יש למצוא את חיתוך הפתרונות.

נתון:  $f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)}$  נדרוש:  $f(x) > 0$ .

דרך הפתרון: אם  $f(x) > 1$  אז  $g(x) > h(x)$ .

אם  $0 < f(x) < 1$  אז  $g(x) < h(x)$ .

לבסוף נמצא את חיתוך התחומים.

### שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$(x-2)^{2x-5} < (x-2)^{x+1} \quad (2) \qquad x^{2x-1} > x^{x+2} \quad (1)$$

$$x^{2x^2+2} < x^{5x} \quad (4) \qquad x^{2x-6} < 1 \quad (3)$$

$$(x+1)^{|x|} < x^2 + 2x + 1 \quad (6) \qquad (x^2 - 6x + 13)^{x^2 - 2x} \geq (x^2 - 6x + 13)^3 \quad (5)$$

### תשובות סופיות:

$$.0 < x < 1, x > 3 \quad (1)$$

$$.3 < x < 6 \quad (2)$$

$$.1 < x < 3 \quad (3)$$

$$.0 < x < 0.5, 1 < x < 2 \quad (4)$$

$$.x \leq -1, x \geq 3 \quad (5)$$

$$.0 < x < 2 \quad (6)$$

## מתמטיקה

פרק 17 - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים

### תוכן העניינים

246	1. הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות
249	2. חוקי הלוגריתמים
253	3. חישובים עם חזקה לוגריתמית
254	4. מעבר בין בסיסים
256	5. הלוגריתם הטבעי
258	6. משוואות עם בסיסים שונים
259	7. מערכת משוואות לוגריתמיות
260	8. מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות
261	9. אי-שוויונים לוגריתמים

## הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

הלוגריתם מוגדר באופן הבא:  $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$  כאשר:  $a, b > 0, a \neq 1$ .

#### הסבר:

לוגריתם על בסיס  $a$  של  $b$  מוגדר בתור החזקה שיש להעלות את  $a$  על מנת שיהיה שווה ל- $b$ .  
 ערך חזקה זו הוא  $x$ . ערך לוגריתם יכול להיות חיובי, שלילי או אפס. נחשב ערכי לוגריתמים  
 ונפתור משוואות לוגריתמיות ע"י מעבר לפי ההגדרה למשוואה מעריכית מתאימה.

### כללים יסודיים בלוגריתמים:

מהגדרת הלוגריתם נובע כי:  $\log_a a = 1$  וכן:  $\log_a 1 = 0$  לכל  $a > 0, a \neq 1$ .

### שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמים הבאים:

א.  $\log_2 32$       ב.  $\log 1000$       ג.  $\log_{25} 5$

ד.  $\log_8 4$       ה.  $\log_4 \frac{1}{16}$       ו.  $\log_a a^4$

ז.  $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (יסודי - שימוש בהגדרת הלוג):

א.  $\log_{36} 6 = x$       ב.  $\log_2 x = 16$

ג.  $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$       ד.  $\log_x 64 = 3$

ה.  $\log_x 25 = 2$       ו.  $\log_x (3x+4) = 2$

3) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (כללי - שימוש בהגדרת הלוג):

$$\text{א. } \log_6(4x-2)=1 \quad \text{ב. } \log_4(4-x)=\frac{1}{2}$$

$$\text{ג. } \log_8(x^4-73)=1 \quad \text{ד. } \log_3 \frac{x+3}{3-3x} = -2$$

$$\text{ה. } \log_x(2x^2+x-12)=2 \quad \text{ו. } \log_{\sqrt{x+1}}(2x^2-5)=2$$

4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג מספר פעמים):

$$\text{א. } \log_4(\log_3 x)=1 \quad \text{ב. } 3\log_{27}(\log_2(x+3))=1$$

$$\text{ג. } \log_{\frac{1}{16}}(\log_3(5x^2+1))=-\frac{1}{2} \quad \text{ד. } \log_6(3+\log_2(6+\log_4(x^2+15)))=1$$

5) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

$$\text{א. } \log_2(3^x+37)=6 \quad \text{ב. } \log_3(3 \cdot 2^x - 303)=4$$

$$\text{ג. } \log_5(126 \cdot 5^x - 25)=2x+1 \quad \text{ד. } 3\log_2\left(3 \cdot 4^{1+\frac{1}{3}x} - 11 \cdot 2^{\frac{x}{3}} + 3\right)=12+2x$$

6) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הצבה):

$$\text{א. } (\log_2 x)^4 = 10000 \quad \text{ב. } 2(\log_3 x)^2 + \log_3 x = 10$$

$$\text{ג. } \frac{3 \cdot \log_{14} x + 1}{(\log_{14} x)^2} = 4 \quad \text{ד. } \sqrt{\log_{\frac{1}{81}} x} + \sqrt{\log_{\frac{1}{81}} x + 2} = 2$$

## תשובות סופיות:

- (1) א. 5    ב. 3    ג.  $\frac{1}{2}$     ד.  $\frac{2}{3}$     ה. -2
- ו. -1.5    ז. 4
- (2) א.  $x = \frac{1}{2}$     ב.  $x = 65,536$     ג.  $x = 27$     ד.  $x = 4$
- ה.  $x = 5$     ו.  $x = 4$
- (3) א.  $x = 2$     ב.  $x = 2$     ג.  $x = \pm 3$     ד.  $x = -2$     ה.  $x = 3$     ו.  $x = 2$
- (4) א.  $x = 81$     ב.  $x = 5$     ג.  $x = \pm 4$     ד.  $x = \pm 1$
- (5) א.  $x = 3$     ב.  $x = 7$     ג.  $x = -1, 2$     ד.  $x = -6$
- (6) א.  $x = 1024, \frac{1}{1024}$     ב.  $x = 9, \frac{1}{9\sqrt{3}}$
- ג.  $x = 14, \frac{1}{\sqrt[4]{14}}$     ד.  $x = \frac{1}{3}$

## חוקי הלוגריתמים:

### סיכום כללי:

- להלן 3 חוקי הלוגריתמים עבור בסיס  $a > 0 \neq 1$  וארגומנטים  $x$  ו- $y$  חיוביים:
- מכפלה לסכום:  $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ .
  - מנה להפרש:  $\log_a \left( \frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$ .
  - מקדם למעריך:  $\log_a b^n = n \log_a b$  (כאשר  $b > 0$  ו- $n$  מספר ממשי כלשהו).

### שאלות:

#### שאלות חישוב כלליות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

- |  |   |
|--|---|
| א. $\log_3 12 + \log_3 2.25$   | ב. $\log_{\frac{1}{5}} 40 + \log_{\frac{1}{5}} 12.5 + \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{4}$ |
| ג. $\log_2 200 - \log_2 100$   | ד. $\log_3 60 - \log_3 540$   |
| ה. $\log_4 8 + \log_4 12 - \log_4 6$   | ו. $\log_7 1.5 - \log_7 147 + \log_7 2$   |
| ז. $3 \log_5 2 - \log_5 1.6$   | ח. $\log_{\sqrt{4}} 6.4 + 2 \log_{\sqrt{4}} \sqrt{10}$                                |
| ט. $\frac{1}{2} \left( \log_7 \frac{7}{2} + \log_7 2 \right) + \log_7 14 - \frac{1}{3} \log_7 8$ | י. $\frac{1}{4} \log 81 - \log 1.5 - \frac{1}{2} \log 40$                             |

(2) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

- |   |  |
|---|--|
| א. $\frac{\log_5 16}{\log_5 8}$                             | ב. $\frac{\log_9 62.5 + \log_9 2}{\log_9 0.2}$                                   |
| ג. $\frac{\log_3 5 - \log_3 2 + \log_3 50}{\log_3 225 - 2}$ | ד. $\frac{2 - 2 \log_3 4 + \log_3 8 \frac{8}{9}}{4 - \log_3 0.01 - 2 \log_3 18}$ |

## משוואות לוגריתמיות:

(3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש ישיר בחוקי הלוגריתמים):

א.  $\log_2 x + \log_2 (x-6) = 4$       ב.  $\log_3 x + \log_3 (x+2) = 1$

ג.  $\log_2 (x+30) - \log_2 x = 4$       ד.  $\log_5 (x+146) - \log_5 (x+2) = 2$

ה.  $2\log_3 (2x-1) - \log_3 (22x+9) = -1$

ו.  $2\log_5 (x-2) = \log_5 (4x-15) + \log_5 x$

(4) פתור את המשוואות הבאות (פתרון בשיטת לוג שווה לוג):

א.  $\log_5 (4x-3) = \log_5 7$

ב.  $2\log_2 (2x-2) - \log_2 (16-x) = \log_2 (x-1) + 1$

(5) פתור את המשוואות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א.  $\log_3 (3 \cdot 5^x + 39) = 3 + \log_3 (5^x - 3)$

ב.  $\log_2 (3 - 4^{x+1}) - \log_2 11 = x$

(6) פתור את המשוואות הבאות (שימוש הפוך בחוקי הלוגריתמים):

א.  $\log_4 x \cdot \log_4 (16x) = 8$

ב.  $\log_2 \left( \frac{x}{4} \right) \cdot \log_2 (1024x) = -11$

ג.  $\log_2 x^2 \log_2 \left( \frac{x}{16} \right) = -\log_2 (64x)$

ד.  $(\log_4 4x)^2 = \log_4 4x^2 + 1$

ה.  $\log_3 (9x^2) \cdot \log_3 (9x^3) = \log_3 \left( \frac{81}{x} \right) + 2$

ו.  $\frac{\log_2 \left( \frac{x^3}{32} \right)}{(\log_2 x)^2} + \frac{\log_2 (2x)}{\log_2 x} = 1 \frac{7}{9}$

## שאלות הבעה:

(7) נתון:  $\log_3 2 = a$ . הבע באמצעות  $a$  את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\log_3 16$       ב.  $\log_3 6$

ג.  $\log_3 24$       ד.  $\log_3 1.5$

(8) נתון:  $\log_2 3 = a$ ,  $\log_2 5 = b$ . הבע באמצעות  $a$  ו- $b$  את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\log_2 45$       ב.  $\log_2 60$       ג.  $\log_2 \sqrt{7.5}$

(9) נתון:  $\log_{18} 2 + \log_{18} 3 = a$ .

הבע באמצעות  $a$  את  $\log_{18} 27$  ואת  $\log_{18} 16$ .

## שאלות נוספות:

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

(10)  $\log 4 \log 40 + \log 5 \log 16 = \log 64$

(11)  $2 \log^2 2 + \log 25 \cdot \log 20 = 2$

(12)  $\log_{12} 16 \cdot \log_{12} 4 + \log_{12} 9 \cdot \log_{12} 48 = 2$

(13)  $\log_5 10 \cdot \log_5 75 - \log_5 3 \cdot \log_5 2 - \log_5 3 - \log_5 4 = 2$

## תשובות סופיות:

- (1) א. 3    ב. -3    ג. 1    ד. -2    ה. 2    ו. -0.5
- (2) א.  $\frac{4}{3}$     ב. -3    ג. 1.5    ד. 0.5
- (3) א.  $x=8$     ב.  $x=3, \frac{1}{27}$     ג.  $x=2$     ד.  $x=4$     ה.  $x=3$     ו.  $x=4$
- (4) א.  $x=2.5$     ב.  $x=6$
- (5) א.  $x=1$     ב.  $x=-2$
- (6) א.  $x=16, \frac{1}{256}$     ב.  $x=2, \frac{1}{512}$     ג.  $x=4, 2\sqrt{2}$     ד.  $x=4, \frac{1}{4}$     ה.  $x=\frac{1}{9}, \sqrt[9]{3}$     ו.  $x=8, \sqrt[7]{2^{15}}$
- (7) א.  $4a$     ב.  $a+1$     ג.  $3a+1$     ד.  $1-a$
- (8) א.  $2a+b$     ב.  $2+a+b$     ג.  $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}$
- (9)  $4(2a-1), 3(1-a)$
- (10) הוכחה.
- (11) הוכחה.
- (12) הוכחה.
- (13) הוכחה.

## חישובים עם חזקה לוגריתמית:

### סיכום כללי:

מהגדרת הלוגריתם ניתן לנסח את הקשר הבא:  $a^{\log_a x} = x$  כאשר  $a > 0 \neq 1$ .

### שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א.  $6^{\log_6 8}$       ב.  $4^{\log_2 5}$

(2) נתונה התבנית:  $3 \cdot 4^x$ . חשב את ערכה עבור:

א.  $x = \log_4 7$       ב.  $x = \log_4 \sqrt{3}$

ג.  $x = 2 \log_4 0.1$       ד.  $x = \sqrt{\log_2 5}$

(3) נתונה התבנית:  $\frac{1}{6} \cdot 9^x - 2 \cdot 3^x + 1$ . חשב את ערכה עבור:

א.  $x = -1$       ב.  $x = \log_3 5$

ג.  $x = \log_3 \sqrt{6}$

(4) חשב:

א.  $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_{\sqrt{56}} 81}$       ב.  $\sqrt[3]{2^{3-\log_{\sqrt{8}} 5}}$

### תשובות סופיות:

(1) א. 8      ב. 25

(2) א. 21      ב.  $3\sqrt{3}$       ג. 0.03      ד. 15

(3) א.  $\frac{19}{54}$       ב.  $-4\frac{5}{6}$       ג.  $2-2\sqrt{6}$

(4) א.  $\frac{1}{81}$       ב.  $\frac{2}{\sqrt[2]{25}}$

## מעבר בין בסיסים:

### סיכום כללי:

מעבר מבסיס  $a$  לבסיס  $m$  (כאשר:  $a > 0 \neq 1$  ו-  $m > 0 \neq 1$ , וכן:  $b > 0$ )

$$\log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a}$$

יתבצע באופן הבא:

### שאלות:

#### שאלות חישוב כלליות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

ב.  $\log_{0.1} 3 \cdot \log_9 1000$

א.  $\log_4 7 \cdot \log_7 4$

ד.  $\log_4 169 \cdot \log_{25} 64 \cdot \log_{13} 625$

ג.  $\log_{\sqrt{3}} 5 \cdot \log_{\sqrt{125}} 9$

(2) הוכח את השוויונים הבאים:

א.  $\log_2 25 \cdot \log_5 3 \cdot \log_9 2 = 1$

ב.  $\log_{16} 9 \cdot \log_5 4 \cdot \log_3 5 = 1$

#### משוואות לוגריתמיות:

(3) פתור את המשוואות הבאות:

ב.  $\log_3 x \cdot \log_{27} x = 3$

א.  $\log_2 x + \log_{32} x = 6$

ד.  $\log_x 5 - 6 \log_{125} x = 1$

ג.  $\log_2 4x \cdot \log_8 \frac{x}{16} = -\frac{5}{3}$

### שאלות הבעה:

(4) נתון:  $\log_4 6 = a$ . הבע באמצעות  $a$  את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\log_2 3$       ב.  $\log_{32} 36$       ג.  $\log_{216} 96$

(5) נתון:  $\log_2 3 = a$ ,  $\log_3 5 = b$ . הבע באמצעות  $a$  ו-  $b$  את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\log_3 50$       ב.  $\log_2 \sqrt{30}$       ג.  $\log_5 22.5$

6 נתון  $\log_3 7 = a$ ,  $\log 9 = 2b$ . הבע באמצעות  $a$  ו- $b$  את:

א.  $\log 21$ .

ב.  $\log_3 \left( \frac{10}{7} \right)$ .

ג.  $\log_7 10$ .

ד.  $\log_{30} 63$ .

**שאלות נוספות:**

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

7  $\log_6 9 \cdot \log_{15} 30 + \log_6 5 \cdot \log_{15} 4 = 2$

8  $\log \sqrt{3} \cdot \log_6 50 + \log \sqrt{2} \cdot \log_6 300 = 1$

**תשובות סופיות:**

1 א. 1      ב. -1.5      ג.  $2\frac{2}{3}$       ד. 12

2 א. שאלת הוכחה.      ב. שאלת הוכחה.

3 א.  $x = 32$       ב.  $x = 27, \frac{1}{27}$       ג.  $x = 8, \frac{1}{2}$       ד.  $x = \frac{1}{5}, \sqrt{5}$

4 א.  $2a - 1$       ב.  $0.8a$       ג.  $\frac{a+2}{3a}$

5 א.  $2b + \frac{1}{a}$       ב.  $\frac{a}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{1}{2}$       ג.  $\frac{2}{b} + 1 - \frac{1}{ab}$

6 א.  $b + ab$       ב.  $\frac{1}{b} - a$       ג.  $\frac{1}{ab}$       ד.  $\frac{ab+2b}{b+1}$

7 הוכחה.

8 הוכחה.

## הלוגריתם הטבעי:

### סיכום כללי:

לוגריתם על בסיס  $e$  (קבוע אוילר) מסומן:  $\log_e \Rightarrow \ln$  והוא נקרא הלוגריתם הטבעי. למשל:  $\ln 3 = \log_e 3$  או  $\ln \frac{1}{4} = \log_e \frac{1}{4}$ . לוג זה נקרא בשם לן. מהגדרת הלוגריתם מתקיים:  $\ln a = b \rightarrow e^b = a$  כאשר  $a > 0$  ו- $b$  מספרים כלשהם.

### שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הטבעיים הבאים:

$$\text{א. } \ln e^2 \quad \text{ב. } \ln \frac{1}{e^4} \quad \text{ג. } \ln \frac{1}{e\sqrt{e}}$$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג):

$$\text{א. } \ln x = 2 \quad \text{ב. } \ln x = -\frac{1}{2}$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (הצבה וחוקי הלוגריתמים):

$$\begin{aligned} \text{א. } \ln\left(e^{2x} - \frac{1}{2}\right) + \ln 2 = x \\ \text{ב. } 3 \ln^2 x + \ln x = 2 \\ \text{ג. } \ln(e^2 x^3) \cdot \ln \frac{1}{x} = \ln(ex^2) \end{aligned}$$

(4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הוצאת לוג משני אגפי המשוואה)

$$\text{א. } x^{\ln x} = e^6 x \quad \text{ב. } \left(\frac{1}{x}\right)^{2-3 \ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x}$$

(5) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

$$\text{א. } e^{\ln 3} \quad \text{ב. } e^{2 \ln 3}$$

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } 2 \quad \text{ב. } -4 \quad \text{ג. } -1.5$$

$$(2) \quad \text{א. } x = e^2 \quad \text{ב. } x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$(3) \quad \text{א. } x = 0 \quad \text{ב. } x = \sqrt[3]{e^2}, \frac{1}{e} \quad \text{ג. } x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \frac{1}{e}$$

$$(4) \quad \text{א. } x = e^3, \frac{1}{e^2} \quad \text{ב. } x = \sqrt{e}, e$$

$$(5) \quad \text{א. } 3 \quad \text{ב. } 9$$

## משוואות עם בסיסים שונים:

### סיכום כללי:

לעיתים תתקבל משוואה מעריכית שבה לא ניתן למצוא חזקה שלמה, כגון:  $3^x = 4$ . במקרים אלו נעזר בהגדרת הלוג כדי לבטא את ערך המעריך:  $x = \log_3 4$ . את ערך הביטוי  $\log_3 4$  ניתן לחשב ע"י מחשבון או ע"י מעבר לבסיס 10:  $\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3}$ .

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (בסיסים שונים):

א.  $3^x = 6$       ב.  $2^x - 9 = 0$

ג.  $49^x - 8 \cdot 7^x + 15 = 0$       ד.  $2 \cdot 3^{\frac{2x}{3}} + 5 \cdot 3^{\frac{x}{3}} + 2 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם בסיס ולוגריתם טבעי):

א.  $e^{3x} = 3$       ב.  $4 + 3e^x = 9$

ג.  $3e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$       ד.  $e(e^x + 1) = 2\sqrt{e^{x+2}} + 9e$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם פתרונות לא שלמים):

א.  $\log_2(7 - 5^x) = \log_2 \frac{10}{5^x}$       ב.  $\log_2(4e^{2x} + 6) - 1 = \log_2(7e^x)$

### תשובות סופיות:

(1) א.  $x = \log_3 6 = 1.63$       ב.  $x = \log_2 9 = 3.17$

ג.  $x = \log_7 3 = 0.564$ ,  $x = \log_7 5 = 0.827$       ד. אין פתרון.

(2) א.  $x = \frac{1}{3} \ln 3 = 0.36$       ב.  $x = \ln \frac{5}{3} = 0.51$       ג.  $x = 0$ ,  $x = -\ln 3 = -1.09$

ד.  $x = \ln 16 = 2.7725$

(3) א.  $x = 1$ ,  $x = \log_5 2 = 0.43$       ב.  $x_1 = \ln \frac{1}{2} = -0.693$ ,  $x = \ln 3 = 1.098$

## מערכת משוואות לוגריתמיות:

### שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \log_6^2 x - \log_6(2y-2) = 2 \\ \frac{1}{2}x = y-1 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} y = \log_2 x \\ y = 6 - \log_2 x \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \log_3(x+y) = \log_3(4x+y) - 2 \\ \log_5(5x+3y) = 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \log_2(\log_3(x-y)) = 1 \\ \log_5(x+y-11) = \log_{25} x + \frac{1}{2}\log_5(y+2) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \log_2 x^2 + \log_3 \frac{1}{y} = 9 \\ \log_2 \sqrt{x} + \log_{\sqrt[3]{3}} y = -1 \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 6\log_4 y = 11 \\ 10\log_5 x - 2\log_4 y = 17 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} xy = 27 \\ x^{\log_3 y} = 9 \end{cases} \quad (8) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 2^{\log_2 y} = 6 \\ x^y = 5^8 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} 2^{\frac{\log_1(2x-y)}{2}} = 7^{\log_7 \frac{2x+y}{15}} \\ \log_3 x + \log_3 y = \frac{1}{\log_{28} 3} \end{cases} \quad (9)$$

### תשובות סופיות:

$$(8, -5) \quad (3) \qquad (36, 19), \left(\frac{1}{6}, 1\frac{1}{12}\right) \quad (2) \qquad (8, 3) \quad (1)$$

$$\left(16, \frac{1}{3}\right) \quad (6) \qquad (25, 8) \quad (5) \qquad (16, 7) \quad (4)$$

$$(4, 7) \quad (9) \qquad (3, 9), (9, 3) \quad (8) \qquad (25, 4), (625, 2) \quad (7)$$

## מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות:

### שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 25^y = (5\sqrt{5})^{x+1} \\ \log_5 \sqrt{x} + \log_5 \sqrt{y} = \log_5 3 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} y = \log_2(4^x - 2) \\ y = 2x - 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x \cdot \log_2 3 = \frac{y}{\log_9 2} \\ \log_3(9^x + 27) = 2y + \log_3 12 \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} 3y + 5 \log_6 x = 1 \\ 216 \cdot x^{2-y} = 6^{1-4y} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x = \log_4(5 - 9^y) \\ \log_2(2^x + 3) = \log_4(29 - (3^y - 3)^2) \end{cases} \quad (6) \quad \begin{cases} (2^x - 1)^2 - 4y + 3 = 0 \\ x = \log_2(y + 1) \end{cases} \quad (5)$$

### תשובות סופיות:

$$(36, -3), \left(6, -1\frac{1}{3}\right) \quad (3) \quad (3, 3) \quad (2) \quad (1, 1) \quad (1)$$

$$(1, 0) \quad (6) \quad (1, 1), (2, 3) \quad (5) \quad \left(1, \frac{1}{2}\right), (2, 1) \quad (4)$$

## אי-שוויונים לוגריתמים:

### סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון:  $\log_a x > \log_a y$  הוא: עבור  $x > y$ : עבור  $a > 1$  ו- עבור  $x < y$ : עבור  $0 < a < 1$ .

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$\log_6(x^2 - 5x) < 1$ (2)	$\log_2 x < \log_2(5x - 20)$ (1)
$\log_{\frac{1}{2}}(1 - 3x) \geq \log_{\frac{1}{2}}(7 - x)$ (4)	$\log_3 x > \log_9(15 - 2x)$ (3)
$\ln x < 3$ (6)	$\ln x \geq \ln(x^2 - 12)$ (5)
$\frac{6}{\ln^2 x} \geq 2 - \frac{1}{\ln x}$ (8)	$\ln^2 x - 6 \ln x < 7$ (7)

### תשובות סופיות:

$-1 < x < 0, 5 < x < 6$ (2)	$x > 5$ (1)
$-3 \leq x \leq \frac{1}{3}$ (4)	$3 < x < 7\frac{1}{2}$ (3)
$0 < x < e^3$ (6)	$2\sqrt{3} < x \leq 4$ (5)
וגם $x \neq 1$ וגם $\frac{1}{\sqrt{e^3}} \leq x \leq e^2$ (8)	$\frac{1}{e} < x < e^7$ (7)

# מתמטיקה

## פרק 18 - בעיות גדילה ודעיכה

### תוכן העניינים

262	1. שאלות חימום
266	2. שאלות העוסקות במציאת הכמות הסופית
267	3. שאלות העוסקות במציאת הכמות ההתחלתית
268	4. שאלות העוסקות במציאת אחוז הגדילה או דעיכה
269	5. שאלות העוסקות במציאת הזמן
270	6. שאלות שונות

## שאלות חימום:

### סיכום כללי:

#### הגדרת בעיית גדילה ודעיכה מערכית:

הכמות לאחר פרק זמן  $t$ , המסומנת  $M_t$ , כאשר הכמות ההתחלתית היא  $M_0$  וקצב הגידול/דעיכה הוא  $q$  ניתנת ע"י הנוסחה הבאה:  $M_t = M_0 \cdot q^t$ .

כאשר הגדילה או הדעיכה נתונים באחוזים נמצא את הבסיס לפי:  $q = \frac{100 \pm p}{100}$ .

### שאלות:

(1) מצא את שיעור הגדילה/דעיכה מתוך אחוז הגדילה/דעיכה הנתון בבעיה.

- א. מחיר מוצר גדל ב-20% לשנה.
- ב. מחיר מוצר יורד ב-40% לשנה.
- ג. אוכלוסייה מתרבה ב-5% לשנה.
- ד. מחיר דירה עולה ב-15% לשנה.
- ה. כמות דבורים גדלה פי 2 כל יום.
- ו. מחירו של פסל גדל פי 3 כל שנה.
- ז. רכב מאבד רבע מערכו בכל שנה.
- ח. מנייה מאבדת מחצית מערכה כל חודש.

(2) מצא את אחוזי הגדילה/דעיכה מתוך הבסיסים הבאים:

- |               |               |
|---------------|---------------|
| א. $q = 1.2$  | ב. $q = 1.6$  |
| ג. $q = 0.85$ | ד. $q = 0.72$ |

(3) מצא את  $M_0$ :

- |                                |                              |
|--------------------------------|------------------------------|
| א. $107.2 = M_0 \cdot 1.05^6$  | ב. $70.8 = M_0 \cdot 1.12^4$ |
| ג. $2213.68 = M_0 \cdot 1.4^8$ |                              |

(4) מצא את  $q$  :

א.  $25 = 10 \cdot q^6$   
 ב.  $512.36 = 6 \cdot 10^7 \cdot q^{40}$   
 ג.  $10^3 = 2.4 \cdot 10^6 \cdot q^{25}$   
 ד.  $9.35 = 7 \cdot q^{10.5}$   
 ה.  $6.42 \cdot 10^4 = 10^7 \cdot q^{3\frac{1}{3}}$   
 ו.  $13.25 = 9.2 \cdot q^{12.3}$

(5) מצא את  $t$  :

א.  $10 \cdot 1.05^t = 70$   
 ב.  $62.08^t = 39.68$   
 ג.  $7 \cdot 10^7 \cdot 0.82^t = 10^5$

(6) אוכלוסיית חיידקים מתרבה בכל דקה פי 2. בשעה 10:30 בדקו במעבדה מדגם ובו 50 חיידקים.  
 א. כמה חיידקים יהיו כעבור דקה אחת?  
 ב. כמה חיידקים יהיו כעבור שתי דקות?  
 ג. כמה חיידקים יהיו בשעה 10:50?

(7) כמות של חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית בכל שבוע ב-2.8%. במעבדה נשקלה כמות של 2000 גרם של החומר.  
 א. מה תהיה כמות החומר כעבור שבועיים?  
 ב. מה תהיה כמות החומר כעבור שלושה חודשים?  
 ג. האם תישאר כמות מסוימת מהחומר כעבור שנה בת 52 שבועות?

(8) מחירו של מוצר לאחר 3 שנים הוא 250 ₪. ערך המוצר יורד ב-25% מדי שנה. מה היה מחירו ההתחלתי?

(9) שרון רצה בכל יום מרחק הגדול ב-10% מאשר ביום הקודם. ידוע כי שרון רצה מרחק של 2.5 ק"מ ביום השביעי. כמה ק"מ רצה שרון ביום הראשון?

(10) אוכלוסייה במדינה מסוימת מתרבה בצורה מעריכית ב-3.1% בשנה. כיום יש במדינה זו 528,000 תושבים.  
 א. כמה תושבים יהיו במדינה זו בעוד 3 שנים?  
 ב. כמה תושבים היו במדינה זו לפני 4 שנים?

- 11** כמות אצות באגם מתרבה בצורה מעריכית. בכל שנה גדלה הכמות פי 4 מאשר בשנה שקדמה לה. כיום יש באגם  $2 \cdot 10^5$  ק"ג אצות.
- א. מה תהיה כמות האצות בעוד שנתיים?  
 ב. מה הייתה כמות האצות לפני שנה?  
 ג. מה תהיה כמות האצות בעוד שנתיים ושלושה חודשים?
- 12** מספר תושבים במדינה מסוימת גדל בשיעור קבוע. במשך 10 שנים גדלה האוכלוסייה במדינה מ-5.4 מיליון תושבים ל-7.2 מיליון תושבים.
- א. מה הוא קצב הריבוי בכל שנה במדינה?  
 ב. אם קצב הגידול של האוכלוסייה יישמר, מה יהיה מספר התושבים כעבור 10 שנים נוספות?
- 13** בגן חיות ספרו את מספר התוכים. בספירה הראשונה נספרו 1200 תוכים. בספירה השנייה, כעבור 6 חודשים, נספרו 1450 תוכים.
- א. מה הוא קצב הגידול החודשי של התוכים?  
 ב. מה יהיה מספרם של התוכים כעבור שנה וחצי מהספירה הראשונה?
- 14** כמות העצים ביער גדלה בצורה מעריכית. אם כמות העצים ביער בשנת 1950 הייתה  $5 \cdot 10^4$  טון עצים ובשנת 1990 הייתה  $10^7$  טון עצים, מה היה אחוז הגידול השנתי (בהנחה שהגידול היה קבוע)?
- 15** כמות חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית. החומר נשקל שלוש פעמים ביום מסוים. בשעה 7:00 בבוקר היה משקל החומר 120 ק"ג. בשעה 10:30 בבוקר היה משקל החומר 95 ק"ג.
- א. מהו קצב התפרקות החומר הרדיואקטיבי לחצי שעה?  
 ב. מה תהיה כמות החומר בשעה 15:00 אחר הצהריים?
- 16** מכונית מאבדת  $\frac{5}{8}$  מערכה במשך 10 שנים.
- א. מהו קצב ירידת הערך של המכונית בכל שנה?  
 ב. איזה אחוז מערכה תאבד המכונית כעבור 15 שנה?
- 17** מספר התושבים במדינה מסוימת גדל פי 3.5 ב-40 שנים.
- א. מצא מהו אחוז הריבוי השנתי.  
 ב. מצא פי כמה יגדל מספר התושבים כעבור 58 שנים?

## תשובות סופיות:

ד. 1.15	ג. 1.05	ב. 0.6	א. 1.2 (1)
	ח. 0.5	ו. 3. ז. 0.75	ה. 2
ד. 28% דעיכה.	ג. 15% דעיכה	ב. 60% גדילה	א. 20% גדילה (2)
	ג. 150	ב. 45	א. 80 (3)
ד. 1.028	ג. 0.732	ב. 0.7469	א. 1.165 (4)
		ו. 1.03	ה. 0.22
	ג. 33.01	ב. 0.89	א. 39.88 (5)
	ג. 52,428,800	ב. 200	א. 100 (6)
	ג. כן. 456.747 גרם.	ב. 1422.4 גרם.	א. 1889.56 גרם. (7)
			8. 592.6 ש"ח
			9. 1.41 ק"מ.
	ב. 467,304 תושבים.		א. 578,642 תושבים. (10)
	ג. 4,525,483.4 ק"ג.	ב. 50,000 ק"ג.	א. 3,200,000 ק"ג. (11)
		ב. 9.6 מיליון תושבים.	א. 1.029. (12)
		ב. 2117 תוכים.	א. 1.032. (13)
			(14) 14.16%
		ב. 70.35 גרם.	א. 0.9671. (15)
		ב. 77.1%.	א. 0.90657. (16)
		ב. 6.15	א. 3.18% (17)

## שאלות העוסקות במציאת הכמות הסופית:

### שאלות:

(1) מספר החסידות המגיעות כל שנה לאגם החולה יורד בצורה מעריכית בקצב של 2.4% בשנה. אם מספר החסידות שהגיעו השנה היה 6,000, מה יהיה מספר החסידות שיגיעו עוד 7 שנים?

(2) מספר התושבים בהרצליה בשנת 1990 היה 80,000. אחוז הגידול באוכלוסיית העיר הוא 3% בשנה. מה יהיה מספר התושבים בהרצליה בשנת 1998?

### תשובות סופיות:

(1) 5,062 חסידות.

(2) 101,342 תושבים.

## שאלות העוסקות במציאת הכמות ההתחלתית:

### שאלות:

3) מספר הזברות בטנזניה גדל בצורה מעריכית בקצב של 1.6% בשנה. כיום יש בטנזניה 45,000 זברות. כמה זברות היו בטנזניה לפני 16 שנים?

### תשובות סופיות:

3) 34,907 זברות.

## שאלות העוסקות במציאת אחוז הגדילה או דעיכה:

### שאלות:

- (4) מספר הלידות בבית החולים "איכילוב" גדל בצורה מעריכית. לפני 8 שנים היו ב"איכילוב" 500 לידות בחודש והשנה יש 600 לידות בחודש. מהו אחוז הגידול במספר הלידות החודשי משנה לשנה ב"איכילוב"?
- (5) מספר התושבים ביפן גדל פי 2 תוך 20 שנים. מה אחוז הגידול השנתי באוכלוסיית יפן?
- (6) מספר החיידקים במבחנה גדל בצורה מעריכית. אם לפני 6 שעות היו במבחנה 200 חיידקים ועכשיו יש בה 500 חיידקים, כמה חיידקים יהיו בה בעוד 4 שעות?

### תשובות סופיות:

- (4) 2.3%
- (5) 3.5%
- (6) 921 חיידקים.

## שאלות העוסקות במציאת הזמן:

### שאלות:

- (7) הריבית על תכנית חיסכון בבנק מסוים היא 2.4% בשנה. אדם הפקיד בתוכנית החיסכון 12,000 ₪. תוך כמה שנים יהיו ברשותו 15,000 ₪?
- (8) אוכלוסיית הדובים בקוטב הצפוני מכפילה את עצמה כל 18 שנה. אם היום יש בקוטב הצפוני 6,000 דובים, בעוד כמה שנים יהיו 8,000 דובים?
- (9) חומר רדיואקטיבי מתפרק בצורה מעריכית. אם בתוך 4 שעות הוא מאבד 20% ממשקלו, תוך כמה זמן יאבד 60% ממשקלו?
- (10) חומר רדיואקטיבי מתפרק בצורה מעריכית. אם בתוך 4 שעות הוא מאבד 20% ממשקלו, תוך כמה זמן יאבד 50% ממשקלו?
- (11) זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי הוא 16 ימים. תוך כמה ימים יאבד שליש ממשקלו?
- (12) בשעה 08:00 נלקחו שני חומרים רדיואקטיביים. מחומר א' נלקחו 150 גרם וזמן מחצית החיים שלו הוא 10 שעות. מחומר ב' נלקחו 117.4 גרם וזמן מחצית החיים שלו הוא 18 שעות. באיזו שעה משקל החומרים יהיה זהה?

### תשובות סופיות:

- (7) 9.41 שנים.  
 (8) 7.47 שנים.  
 (9) 16.43 שעות.  
 (10) 12.43 שעות.  
 (11) 9.43 ימים.  
 (12) 16:00

## שאלות שונות:

### שאלות:

**13** בנק א' נותן ריבית של 3% כל שנתיים בתוכנית חיסכון מסוימת. בנק ב' נותן ריבית של 4.5% כל 3 שנים בתוכנית חיסכון אחרת. אדם מתכוון להפקיד סכום כסף מסוים לתקופה של 18 שנה. באיזה בנק כדאי לו להשקיע את כספו?

**14** נתונות שתי תרבויות חיידקים, כל אחת גדלה בצורה מעריכית. בשעה מסוימת בתרבית א' היו 4,000 חיידקים ובתרבית ב' היו 500 חיידקים. נסמן:

$t_1$  - הזמן שחלף עד שבתרבית א' היו פי 2 חיידקים מאשר בתרבית ב'.  
 $t_2$  - הזמן שחלף עד שבתרבית ב' היו פי 2 חיידקים מאשר בתרבית א'.

חשב את היחס  $\frac{t_1}{t_2}$ .

**15** מספר החיידקים בתרבית גדל ב-  $p\%$  בכל שעה. בשעה מסוימת מספר החיידקים היה  $m$ . כעבור  $t$  שעות הוציאו  $m$  חיידקים מהתרבית וכעבור עוד  $t$  שעות היו  $6m$  חיידקים בתרבית. הבע את  $t$  באמצעות  $p$ .

### הערה:

שאלות 16-17 עוסקות בפתרון בעיות קיצון מעריכיות.

**16** נתונה הפונקציה:  $f(x) = 700 \cdot 1.08^x - 200x$ . מצא את ערך ה- $x$  של נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

**17** נתונות שתי בריכות דגים. בבריכה א' קצב הריבוי של מספר הדגים הוא 10% בחודש ובבריכה ב' הוא 20% בחודש. כמות הדגים בבריכה א' גדולה פי 5 מכמות הדגים בבריכה ב'. בעוד כמה חודשים לערך ההפרש בין כמות הדגים בבריכה א' לכמות הדגים בבריכה ב' יהיה מקסימלי?

**18** כמות עצים ביער גדלה בצורה מעריכית לפי אחוז ריבוי של 15% לשנה. בשנת 1990 נספרו כמות עצים מסוימת ביער. בשנת 2000 כרתו 30,000 עצים ולאחר 5 שנים נוספות, בשנת 2005, נספרו ביער 753365 עצים. מצא כמה עצים היו ביער בשנת 1990.

- 19** ערכה של דירה יורד מדי שנה באחוז קבוע של 6%. ידוע כי ערך הדירה לאחר 10 שנים מיום מכירתה נמוך ב-35,000 ₪ ממחירה המקורי.
- א. מצא את המחיר ההתחלתי של הדירה.
- ב. מצא לאחר כמה שנים ערך הדירה ירד מתחת ל-30,000 ₪.
- 20** שני בנקים מציעים שתי תכניות חיסכון כלהלן:
- בנק א' מציע תכנית חיסכון ל-8 שנים שבסופה סכום הקרן יגדל ב-80%.
- בנק ב' מציע תכנית חיסכון ל-6 שנים שבסופה סכום הקרן יגדל ב-60%.
- א. באיזה בנק אחוז הריבית השנתית גבוה יותר?
- ב. דני משקיע סכום כסף  $k$  לפי תכנית חיסכון של בנק א' ובתום התוכנית הוא מעביר את הסכום שעומד לרשותו לתכנית החיסכון של בנק ב'. רפי משקיע סכום כסף זהה  $k$  לפי תכנית חיסכון של בנק ב' ובתום התכנית הוא מעביר את הסכום שעומד לרשותו לתכנית החיסכון של בנק א'. למי יהיה סכום גדול יותר בתום שתי התכניות? נמק את תשובתך והראה חישוב מתאים.
- 21** שווי שתי מכוניות המוצעות למכירה הוא:
- מכונית א' - 60,000 ₪ ומכונית ב' - 85,000 ₪.
- ידוע כי ערך מכונית ב' יורד ב-4% בכל שנה וערך מכונית א' יורד ב-2.5% בכל שנה.
- א. מצא בעוד כמה שנים יהיו המחירים של שתי המכוניות זהים.
- ב. סיגל רוצה לקנות מכונית ולרשותה עומד סכום של 40,000 ₪. איזו מכונית תוכל לקנות סיגל קודם ולאחר כמה שנים מיום הצעתן?
- 22** כמות אצות בים מתרבה בצורה מעריכית. ידוע כי לאחר 40 שנים כמות אצות מכפילה את עצמה. כדי לצמצם את כמות האצות מבצעים עבודות ניקיון מדי שנה ובהן מנקים כ-200 ק"ג אצות. בחוף מסוים היו בשנת 1990 כ-1200 ק"ג אצות.
- א. מצא את קצב גידול האצות השנתי.
- ב. מצא כמה אצות יהיו בחוף המסוים בשנת 1993 לאחר הניקיון באותה שנה.
- 23** נתונות שתי כמויות התחלתיות זהות, האחת גדלה בצורה מעריכית והשנייה קטנה בצורה מעריכית. לשתי הכמויות אחוז גדילה/דעיכה קבוע והוא 5%.
- א. האם הזמן שבו הכמות הראשונה תגדל לכמות הכפולה מהכמות ההתחלתית שלה שווה לזמן שבו תקטן הכמות השנייה למחצית מהכמות ההתחלתית שלה? נמק והראה חישוב מתאים.
- ב. ללא קשר לנתון הקודם, הראה כי כדי ששתי הכמויות יגיעו ליעדיהן באותו הזמן אז הבסיסים שלהן  $(q_1, q_2)$  צריכים להיות מספרים הופכיים.

- (24) כמות חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית לפי אחוז קבוע  $p$  מדי שעה. ביום מסוים היו  $k$  גרם מהחומר. לאחר 3 שעות הוסיפו עוד  $k$  גרם לכמות שנותרה ולאחר 3 שעות נוספות מתברר שנשארו  $k$  גרם מהחומר. מצא את  $p$ .
- (25) ערך מנייה מסוימת גדל בצורה מעריכית. ידוע כי בשנת 1980 הייתה המנייה שווה  $k$  שקלים. המנייה גדלה באחוז קבוע של 2% לשנה עד לשנת 1992 ומשם צנחה בקצב של 5% לשנה במשך 8 שנים נוספות. לאחר מכן גדלה המנייה בקצב שנתי קבוע עד לשנת 2010. אדם הרוצה לקנות את המנייה שנת 2010 נוכח לדעת כי מחירה הוא  $1.5k$ . מצא באיזה אחוז עלתה המנייה לאחר הצניחה שלה.
- (26) מספר העופות בשמורת טבע גדל לפי אחוז קבוע של 3% לשנה. בשנה מסוימת נספרו 2300 עופות בשמורה, לאחר 5 שנים הוסיפו לשמורת הטבע 1000 עופות נוספים.
- א. מצא כמה עופות יהיו בשמורה לאחר 5 שנים נוספות.  
 ב. מצא תוך כמה שנים יהיה מספר העופות בשמורה זהה לזה שמצאת בסעיף א' אילולא היו מוסיפים את 1000 העופות הנוספים, אלא אם הייתה גדילה רציפה.
- (27) אדם מפקיד סכום של 120,000 ₪ לפי ריבית דריבית של 12% בשנה. כעבור  $t$  שנים הוא משך את כל הסכום שעמד לרשותו והפקיד אותו ל- $t$  שנים נוספות בתוכנית חיסכון חדשה לפי ריבית דריבית של 15%. בתום תקופה זו עמד לרשותו סכום של 330,252 ₪.
- א. מצא את  $t$ .  
 לאחר תקופה זו הוא מפקיד את סכום הכסף הסופי בתכנית לפי ריבית דריבית מסוימת. לאחר 5 שנים עמד לרשותו סכום של 821,772 ₪.  
 ב. מצא את אחוז הריבית החדש.
- (28) ערכן של שתי חלקות אדמה יורד בצורה מעריכית. ידוע כי בזמן שערכה של אדמה א' מגיע למחצית מערכה המקורי, ערכה של אדמה ב' מגיע ל-30% מערכה המקורי. לאחר 50 שנים אדמה א' מאבדת 60% מערכה.
- א. מצא את אחוז הדעיכה של אדמה ב'.  
 ב. ידוע כי לאחר 100 שנים ערכן של שתי האדמות שווה. ערכה המקורי של אדמה ב' הוא 100,000 ₪. מצא את ערכה המקורי של אדמה א'.

- (29)** מספר העופות בשמורת טבע גדל לפי אחוז קבוע של  $p$  אחוזים לשנה. בשנה מסוימת נספרו 3000 עופות בשמורה, לאחר 4 שנים הוסיפו לשמורה 1000 עופות נוספים.
- א. מצא את אחוז הגידול השנתי  $p$  אם ידוע כי לאחר 4 שנים נוספות היו בשמורת 5647 עופות.
- ב. מצא לאחר כמה שנים יהיו 5647 עופות אילולא היו מוסיפים את 1000 העופות הנוספים.
- (30)** בכוורת דבורים ידוע כי בכל 10 שעות כמות הדבורים גדלה פי 1.5.
- א. מצא באיזה אחוז גדלה כמות הדבורים בכל שעה.
- ב. מוציאים לאחר 10 שעות 3000 דבורים וידוע כי נשארו 1500 דבורים. חשב כמה דבורים היו בתחילה בכוורת.
- (31)** אדם מפקיד  $k$  שקלים בתוכנית חיסכון לפי ריבית שנתית של  $p\%$ . לאחר 5 שנים הוא מושך מהחיסכון  $k$  שקלים ולאחר 5 שנים נוספות מתברר כי הצטבר בפקדון שלו סך הכול  $2.5k$  ₪. מצא את  $p$ .
- (32)** ערך מנייה מסוימת גדל בצורה מעריכית. ידוע כי בשנת 1995 הייתה המנייה שווה  $k$  שקלים. המנייה גדלה באחוז קבוע של 5% לשנה עד לשנת 2000 ושם צנחה בקצב של 8% לשנה במשך 6 שנים נוספות. לאחר מכן גדלה המנייה בקצב שנתי קבוע עד לשנת 2010. אדם הרוצה לקנות את המנייה בשנת 2010 נוכח לדעת כי מחירה הוא  $k$ . מצא באיזה אחוז עלתה המנייה לאחר צניחתה.

**תשובות סופיות:**

(13) בנק א'.

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{1}{2} \quad (14)$$

$$t = \frac{\ln 3}{\ln\left(\frac{100+P}{100}\right)} \quad (15)$$

(16) מינימום,  $x = 17.04$ .

(17) 11 חודשים.

(18) 100,000 עצים.

(19) א. 75,858.5 ₪ ב. לאחר 15 שנים.

(20) א. בנק ב' ב. לשניהם אותו הסכום.

(21) א. לאחר 22.46 שנים. ב. מכונית א' ולאחר 16 שנים.

(22) א. 1.017 ב. 653.48 ק"ג אצות.

(23) א. הכמות השנייה תגיע ליעדה לפני הראשונה.

(24) 14.82%

(25) ב-5.95%

(26) א. 4250 עופות. ב. 20.77 שנים.

(27) א.  $t = 4$  ב.  $p = 20\%$ 

(28) א. 3.13% ב. 25,909 ₪

(29) א. 5% ב. 12.96 שנים.

(30) א. ב-4.1% ב. 3000 דבורים.

(31) 16.63%

(32) ב-6.6%

## מתמטיקה

פרק 19 - חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים

תוכן העניינים

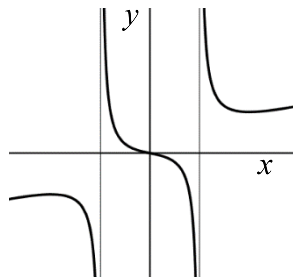
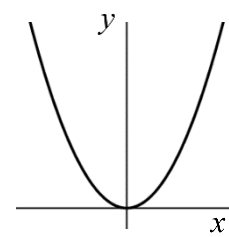
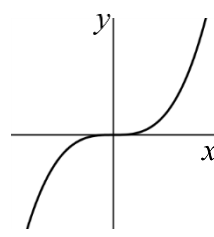
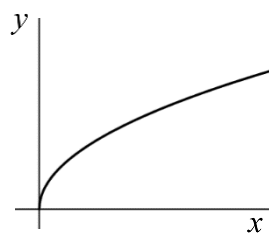
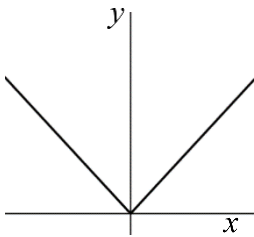
275	1. הקדמה כללית
276	2. גזירת פונקציות
282	3. מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה
283	4. מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה
286	5. שאלות עם פרמטרים
288	6. שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית

## הקדמה כללית:

### סיכום כללי:

### פונקציות נפוצות:

הפונקציה  $f(x) = x^2$  : הפונקציה  $f(x) = x^3$  : הפונקציה  $f(x) = \sqrt{x}$  : הפונקציה  $f(x) = |x|$  :



פונקציה עם מכנה, למשל:  $f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1}$  :

### שיפוע של פונקציה:

- השיפוע  $m$  של פונקציה  $f(x)$  בנקודה  $A(x_1, y_1)$  שעל הפונקציה הוא ערך הנגזרת בנקודה  $A(x_1, y_1)$ , כלומר:  $m = f'(x_1)$ .
- השיפוע של המשיק לפונקציה  $f(x)$  בנקודה  $A(x_1, y_1)$  שעל הפונקציה שווה לשיפוע הפונקציה בנקודה  $A(x_1, y_1)$ .
- משוואת המשיק לפונקציה  $f(x)$  בנקודה  $A(x_1, y_1)$  שעליה מתקבלת על ידי הנוסחה למציאת ישר:  $y - y_1 = m(x - x_1)$ .

### הנגזרת:

לכל פונקציה  $f(x)$  קיימת פונקציה, הנקראת פונקציית הנגזרת (או רק "הנגזרת") ומסומנת  $f'(x)$ , המתקבלת ממנה על פי כללי הגזירה.

## גזירת פונקציות:

### סיכום כללי:

#### כללי הגזירה:

- כלל גזירה מס' 1:  $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
- כלל גזירה מס' 2 (כפל בקבוע):  $f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$
- כלל גזירה מס' 3 (נגזרת של קבוע):  $f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$
- כלל גזירה מס' 4 (סכום והפרש):  $f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$
- כלל גזירה מס' 5 (פונקציה מורכבת):  $f(x) = u^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
- כלל גזירה מס' 6 (נגזרת של  $\frac{1}{x}$ ):  $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
- כלל גזירה מס' 7 (מכפלה):  $f(x) = u \cdot v \Rightarrow f'(x) = u'v + v'u$
- כלל גזירה מס' 8 (מנה):  $f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- כלל גזירה מס' 9 (שורש):  $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

### שאלות:

#### (1) גזור את הפונקציות הבאות:

- |                             |                             |                             |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| א. $f(x) = x^3$             | ב. $f(x) = x^7$             | ג. $f(x) = x^2$             |
| ד. $f(x) = x$               | ה. $f(x) = x^{-3}$          | ו. $f(x) = x^{-1}$          |
| ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ | ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ | ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ |

#### (2) גזור את הפונקציות הבאות:

- |                           |                              |                                       |
|---------------------------|------------------------------|---------------------------------------|
| א. $f(x) = 2x^3$          | ב. $f(x) = 3x^7$             | ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$            |
| ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$ | ה. $f(x) = 8x$               | ו. $f(x) = 3x^{-2}$                   |
| ז. $f(x) = \frac{4}{x}$   | ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$ | ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$ |

(3) גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = 12 \quad \text{א.} \quad f(x) = \frac{7}{8} \quad \text{ב.}$$

(4) גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5 \quad \text{א.} \quad f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = 7x^2 + 23x - 6 \quad \text{ג.} \quad f(x) = 6x^2 + 8x + 4 \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^3 \quad \text{ה.} \quad f(x) = \frac{x^4}{8} + 67 \quad \text{ו.}$$

(5) גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = (5x - 2)^3 \quad \text{א.} \quad f(x) = (x^3 + 6)^5 \quad \text{ב.} \quad f(x) = 3(x - x^2)^2 \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{(5-x)^3}{4} \quad \text{ד.} \quad f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3} \quad \text{ה.}$$

(6) גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{3}{x} \quad \text{א.} \quad f(x) = -\frac{2}{x} \quad \text{ב.} \quad f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{3}{x^3} \quad \text{ד.} \quad f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x} \quad \text{ה.} \quad f(x) = \frac{2}{3-x} \quad \text{ו.}$$

$$f(x) = \frac{6}{x+5} \quad \text{ז.}$$

(7) גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = (5x+1)(x-3) \quad \text{א.} \quad f(x) = (5x+1)^3(x-3) \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = x^3(6-x)^4 \quad \text{ג.} \quad f(x) = 3x^2 \cdot x \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = x^2 \cdot x^3 \quad \text{ה.} \quad f(x) = x(3x+7) \quad \text{ו.}$$

$$f(x) = 3x^3(3x-1) \quad \text{ז.} \quad f(x) = (x-2)(2x^2+3) \quad \text{ח.}$$

$$f(x) = (3x-2)(x^2+10x) \quad \text{ט.} \quad f(x) = (3x^4-4x)(2x^2+5x+2) \quad \text{י.}$$

$$f(x) = x(x-2)(3x-4) \quad \text{יא.}$$

8) גזור את הפונקציות הבאות :

$f(x) = 2x^3(3x+5)^2$ .ב.	$f(x) = (x^2 - 4)^2$ .א.
$f(x) = (x^2 + 1)^3(2x-1)^2$ .ד.	$f(x) = (x^3 + 2)^2(x-1)^3$ .ג.

9) גזור את הפונקציות הבאות :

$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3}$ .ג.	$f(x) = \frac{x^2 + 1}{5x - 12}$ .ב.	$f(x) = \frac{3x - 1}{1 + 2x}$ .א.
$f(x) = \frac{3}{x^3}$ .ו.	$f(x) = \frac{1}{x}$ .ה.	$f(x) = \frac{x^2 + 8}{x - 1}$ .ד.
$f(x) = \frac{x^3 - x^2}{2(1-x)}$ .ט.	$f(x) = \frac{(x^2 + 3)^2}{x^2 - 2}$ .ח.	$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1}$ .ז.
		$f(x) = \frac{x-2}{x^2 - 4}$ .י.

10) גזור את הפונקציות הבאות :

$f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$ .ג.	$f(x) = 4\sqrt{x+1}$ .ב.	$f(x) = \sqrt{x}$ .א.
$f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$ .ו.	$f(x) = x^2\sqrt{x+3}$ .ה.	$f(x) = (3x+1)\sqrt{x}$ .ד.

11) גזור את הפונקציות הבאות :

$f(x) = \sqrt{2x}$ .ב.	$f(x) = \sqrt{x+1}$ .א.
$f(x) = \sqrt{10-3x}$ .ד.	$f(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$ .ג.
$f(x) = 3x^2 - 8\sqrt{x}$ .ו.	$f(x) = \sqrt{2x^2 + 7x}$ .ה.
$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$ .ח.	$f(x) = x^2\sqrt{1-2x}$ .ז.
$f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}}$ .י.	$f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+4}}{2}$ .ט.
$f(x) = \sqrt{\frac{3-x}{x}}$ .יב.	$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + x - 5\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$ .יא.
$f(x) = \frac{x^2 + 7}{\sqrt{x^2 - 5}}$ .יד.	$f(x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x}}$ .יג.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1} \quad \text{ט.ז.}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1} \quad \text{ט.ו.}$$

**(12)** גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{x-2a}{x-4a} \quad \text{ג.} \quad f(x) = \frac{ax^2}{3} - \frac{x}{b} + c \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = ax^4 - bx \quad \text{א.}$$

$$f(x) = a\sqrt{bx^2 + c} \quad \text{ד.}$$

**(13)** גזור פעמיים את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad \text{ו.}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad \text{ה.}$$

**תשובות סופיות:**

- (1) א.  $3x^2$    ב.  $7x^6$    ג.  $2x$    ד. 1   ה.  $-\frac{3}{x^4}$    ו.  $-\frac{1}{x^2}$
- ז.  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$    ח.  $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$    ט.  $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$
- (2) א.  $6x^2$    ב.  $21x^6$    ג.  $2x^3$    ד.  $\frac{6x^5}{7}$    ה. 8
- ו.  $-\frac{6}{x^3}$    ז.  $-\frac{4}{x^2}$    ח.  $\frac{3}{\sqrt{x}}$    ט.  $\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$
- (3) א. 0   ב. 0
- (4) א.  $3x^2 + 4x - 3$    ב.  $x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}$    ג.  $14x + 23$    ד.  $12x + 8$    ה.  $x - 3x^2$    ו.  $0.5x^3$
- (5) א.  $15(5x - 2)^2$    ב.  $15x^2(x^3 + 6)^4$    ג.  $6(x - x^2)(1 - 2x)$
- ד.  $-\frac{3}{4}(5 - x)^2$    ה.  $\frac{8(x + 1)^3}{3}$
- (6) א.  $-\frac{3}{x^2}$    ב.  $\frac{2}{x^2}$    ג.  $-\frac{2}{x^3}$    ד.  $\frac{9}{x^4}$    ה.  $-\frac{2x - 3}{(x^2 - 3x)^2}$
- ו.  $\frac{2}{(3 - x)^2}$    ז.  $-\frac{6}{(x + 5)^2}$
- (7) א.  $10x - 14$    ב.  $(5x + 1)^2(20x - 44)$    ג.  $x^2(6 - x)^3(18 - 7x)$
- ד.  $9x^2$    ה.  $5x^4$    ו.  $6x + 7$    ז.  $36x^3 - 9x^2$    ח.  $6x^2 - 8x + 3$
- ט.  $9x^2 + 56x - 20$    י.  $36x^5 + 75x^4 + 24x^3 - 24x^2 - 40x - 8$    יא.  $9x^2 - 20x + 8$
- (8) א.  $4x(x^2 - 4)$    ב.  $30x^2(x + 1)(3x + 5)$    ג.  $3(x - 1)^2(x^3 + 2)(3x^3 - 2x^2 + 2)$
- ד.  $2(2x - 1)(x^2 + 1)^2(8x^2 - 3x + 2)$
- (9) א.  $\frac{5}{(1 + 2x)^2}$    ב.  $\frac{5x^2 - 24x - 5}{(5x - 12)^2}$    ג.  $\frac{8x}{(x^2 + 3)^2}$    ד.  $\frac{(x - 4)(x + 2)}{(x - 1)^2}$
- ה.  $-\frac{1}{x^2}$    ו.  $-\frac{9}{x^4}$    ז.  $\frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}$
- ח.  $\frac{2x(x^2 + 3)(x^2 - 7)}{(x^2 - 2)^2}$    ט.  $-x$    י.  $-\frac{1}{(x + 2)^2}$

$$\frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}} \cdot \text{ה} \quad \frac{9x+1}{2\sqrt{x}} \cdot \text{ז} \quad \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}} \cdot \text{ג} \quad \frac{2}{\sqrt{x+1}} \cdot \text{ב} \quad \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \text{א} \quad (10)$$

$$\frac{x-3}{2x\sqrt{x}} \cdot \text{ו}$$

$$\frac{4x+7}{2\sqrt{2x^2+7x}} \cdot \text{ה} \quad -\frac{3}{2\sqrt{10-3x}} \cdot \text{ז} \quad \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}} \cdot \text{ג} \quad \frac{1}{\sqrt{2x}} \cdot \text{ב} \quad \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot \text{א} \quad (11)$$

$$\frac{1-3x}{(1-x^2)^{1.5}} \cdot \text{ו} \quad \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+4}} \cdot \text{ט} \quad -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \cdot \text{ה} \quad \frac{2x-5x^2}{\sqrt{1-2x}} \cdot \text{ז} \quad 6x - \frac{4}{\sqrt{x}} \cdot \text{ו}$$

$$\frac{-x^2+2x+1}{2(1-x)^{1.5}\sqrt{1+x^2}} \cdot \text{ז} \quad -\frac{3}{2x\sqrt{3x-x^2}} \cdot \text{ב} \quad 3\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{5}{x^2} \cdot \text{א}$$

$$-\frac{x+3}{2(x-1)^2\sqrt{x+1}} \cdot \text{ט} \quad -\frac{x+1}{2\sqrt{x}(x-1)^2} \cdot \text{ט} \quad \frac{x^3-17x}{(x^2-5)^{1.5}} \cdot \text{ז}$$

$$\frac{abx}{\sqrt{bx^2+c}} \cdot \text{ז} \quad \frac{-2a}{(x-4a)^2} \cdot \text{ג} \quad \frac{2ax}{3} - \frac{1}{b} \cdot \text{ב} \quad 4ax^3 - b \cdot \text{א} \quad (12)$$

$$f'(x) = \frac{2x^2-8}{4x^2}, f''(x) = \frac{4}{x^3} \cdot \text{א} \quad (13)$$

$$f'(x) = \frac{2x^2+20x-62}{(2x+10)^2}, f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \cdot \text{ב}$$

$$f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4} \cdot \text{ג}$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}, f''(x) = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3} \cdot \text{ד}$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4} \cdot \text{ה}$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, f''(x) = \frac{12(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \cdot \text{ו}$$

## מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה:

שאלות:

(14) מצא את שיפוע הפונקציה  $f(x) = 2x^3 - 7x$  בנקודה  $(2, 2)$ .

(15) מצא את שיפוע הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$  בנקודה בה  $x = -2$ .

(16) מצא את שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = 4\sqrt{x}$  בנקודה בה  $x = 1$ .

תשובות סופיות:

$$m = 17 \quad (14)$$

$$m = 4 \quad (15)$$

$$m = 2 \quad (16)$$

## מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה:

---

שאלות:

(17) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = 2(4x+3)^3$  בנקודה בה  $x = -1$ .

(18) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{8}{x+1}$  בנקודה בה  $y = 2$ .

(19) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה  $f(x) = x^2 - 2x - 8$  בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ .

(20) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = x^4 - 2x$  ששיפועו 2.

(21) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2 - 2}$  בנקודה שבה  $x = 1$ .

(22) נתון כי הישר  $2y - 3x = 3$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = 3\sqrt{x}$ . מצא את נקודת ההשקה.

(23) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$  בנקודה בה  $x = 1$ .

(24) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = 3x^2 - 8\sqrt{x}$  בנקודה בה  $x = 4$ .

(25) נתונה הפונקציה הבאה  $f(x) = 4x - 2\sqrt{x}$ .

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המקביל לישר  $f(x) = 3x - \frac{1}{2}$ .

ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$ .

(26) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x-1}}$  ששיפועו -2.

(27) מצא את משוואות המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$  בנקודה שבה  $x=2$ .

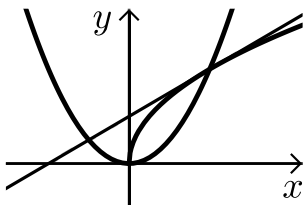
(28) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה  $f(x) = \frac{1}{3x^3}$  היוצרים עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$  זווית של  $135^\circ$ .

(29) מצא את משוואות המשיקים המשותפים לפונקציות הבאות:  $y = x^2$ ,  $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$ .

(30) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$  ונתון הישר:  $y = 2x$ .

- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר הנמצאת ברביע הראשון.
- מצא את משוואות המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שמצאת בסעיף הקודם.
- חשב את השטח שנוצר בין המשיק והצירים.

(31) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = x^2$ .



- מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.
- מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  העובר דרך נקודת החיתוך שמצאת הנמצאת ברביע הראשון.
- מצא את נקודת החיתוך הנוספת של המשיק שמצאת עם גרף הפונקציה  $g(x)$ .

**תשובות סופיות:**

**(17)**  $y = 24x + 22$

**(18)**  $y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$

**(19)**  $y = 6x - 24, y = -6x - 12$

**(20)**  $y = 2x - 3$

**(21)**  $y = -12x + 9$

**(22)**  $(1, 3)$

**(23)**  $y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$

**(24)**  $y = 22x - 56$

**(25)**  $y = 3x - 1$  .א  $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$  .ב

**(26)**  $y = -2x + 8$

**(27)**  $y = \frac{11}{16}x - \frac{15}{8}$

**(28)**  $y = -x + 1\frac{1}{3}, y = -x - 1\frac{1}{3}$

**(29)**  $y = 2x - 1, y = -2x - 1$

**(30)** .א  $(1, 2)$  .ב  $y = -1.5x + 3.5$  .ג  $S = 4\frac{1}{12}$

**(31)** .א  $(0, 0), (1, 1)$  .ב  $y = 0.5x + 0.5$  .ג  $(-0.5, 0.25)$

## שאלות עם פרמטרים:

---

### שאלות:

**(32)** שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = ax^2 - 4x$  בנקודה שבה  $x = 3$  הוא 8. מצא את ערכו של הפרמטר  $a$  ואת משוואת המשיק.

**(33)** נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt{ax}$ ,  $(a > 0)$ .

המשיק לפונקציה בנקודה שבה  $x = \frac{1}{2}$  הוא בעל שיפוע 1. מצא את ערך הפרמטר  $a$ .

**(34)** נתונה הפונקציה:  $y = x^3 + a\sqrt{x}$  ( $a$  פרמטר).

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 1$  הוא 5. מצא את ערך הפרמטר  $a$ .

**(35)** נתונה הפונקציה:  $y = 2\sqrt{x} - \frac{A}{x}$  ( $A$  פרמטר).

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 1$  הוא 2. מצא את ערך הפרמטר  $A$ .

**(36)** הישר  $y = 4x + b$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$ .

מצא את  $b$  ואת נקודת ההשקה.

**(37)** שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{2}{ax+3}$  בנקודה שבה  $y = 2$  הוא -4.

מצא את ערכו של הפרמטר  $a$  ואת משוואת המשיק.

**(38)** הישר  $y = ax + \frac{1}{2}$  משיק לגרף הפונקציה  $g(x) = \frac{2}{x+c}$  בנקודה  $x = 0$ .

מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $c$ .

**(39)** הישר  $y = 3x$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = x\sqrt{x} + b$ .

מצא את  $b$  ואת נקודת ההשקה.

**(40)** שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{a}{\sqrt{bx-1}}$  בנקודה  $(1, 6)$  הוא  $-6$ .

מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$  ואת משוואת המשיק.

**(41)** לאילו ערכי  $k$  ישיק הישר  $y = -5x + 6$  לגרף הפונקציה  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + k$ ?  
לכל ערך כזה של  $k$  מצא את נקודת ההשקה.

**(42)** הפונקציות  $y = \frac{1}{x}$  ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$  משיקות זו לזו.

מצא את  $k$  ואת נקודת ההשקה.

### תשובות סופיות:

**(32)**  $a = 2, y = 8x - 18$

**(33)**  $a = 2$

**(34)**  $a = 4$

**(35)**  $A = 1$

**(36)**  $(-1, 5), y = 4x + 9$

**(37)**  $a = 2, y = -4x - 2$

**(38)**  $a = -\frac{1}{8}, c = 4$

**(39)**  $b = 4, (4, 12)$

**(40)**  $b = 2, a = 6, y = -6x + 12$

**(41)**  $k = 6 : (1, 1)$  או  $k = \frac{158}{27} : \left(\frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right)$

**(42)**  $(1, 1), k = 1.5$

## שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית:

### שאלות:

43) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. בטא באמצעות  $t$  את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = x^2 + 1$  בנקודה שבה  $x = t$ .
- ב. מצא את ערכיו של  $t$  אם נתון שהמשיק עובר בנקודה  $(-1, 1)$ .

44) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה:  $f(x) = 5x - x^2$  העוברים דרך הנקודה  $(3, 7)$ .

45) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה:  $f(x) = x^2 + 5x - 6$  העוברים דרך הנקודה  $(0, -10)$ .

46) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה:  $f(x) = 12x - x^3$  העוברים דרך הנקודה  $(2, 24)$ .

47) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  העובר בנקודה  $(3, 0)$ .

48) מצא משוואת המשיק לפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  אם ידוע ששטח המשולש שהוא יוצר עם הצירים הוא 4.5 יחידות שטח.

49) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-2}}$  העוברים דרך הנקודה  $(2, 3)$ .

**תשובות סופיות:**ב.  $t = 0, -2$ .

**(43)**  $y = 2tx - t^2 + 1$  א.

**(44)**  $y = x + 4$  ,  $y = -3x + 16$

**(45)**  $y = 9x - 10$  ,  $y = x - 10$

**(46)**  $y = 12x$  ,  $y = -15x + 54$

**(47)**  $y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$

**(48)**  $y = -\frac{1}{16}x + \frac{3}{4}$

**(49)**  $y = -x + 5$

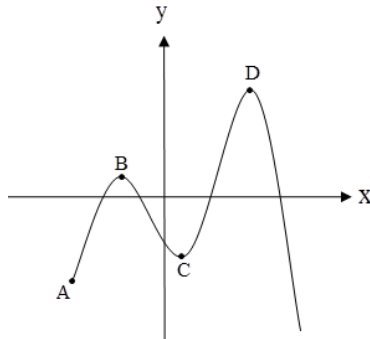
# מתמטיקה

פרק 20 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית פולינום

תוכן העניינים

290	.....	1. נקודות קיצון של פונקציות
293	.....	2. חקירת פונקציה פולינומית
297	.....	3. פונקציה זוגית ואי-זוגית

## נקודות קיצון של פונקציות:



### סיכום כללי:

#### נקודות קיצון (נקודות מינימום/מקסימום):

- מינימום או מקסימום מקומי (פנימי) – B, C, D.
- מינימום או מקסימום קצה – A.
- מינימום או מקסימום מוחלט – D.

#### נקודות קיצון מקומיות:

- שיפוע המשיק לפונקציה בנקודות קיצון מקומיות הוא אפס.
- בנקודה שבה שיפוע המשיק לפונקציה הוא אפס תיתכן נקודת קיצון מקומית. נקודה כזו נקראת נקודה חשודה כקיצון. ניתן לבדוק אם היא אכן נקודת קיצון.

#### שלבים למציאת נקודות קיצון מקומיות:

- נגזור את הפונקציה.
- נשווה את הנגזרת לאפס ונחלץ את ערכי ה- $x$  של הנקודות החשודות כקיצון.
- נציב את ערכי ה- $x$  מסעיף ב' בפונקציה המקורית לקבלת ערכי ה- $y$ .
- נקבע אם הנקודה היא נקודת קיצון ונסווג את סוג הקיצון על ידי טבלה.

### שאלות:

(1) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x) = 10x - x^2$ .

(2) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^3 - 12x$ .

- א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?  
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

- (3) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ .  
א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?  
ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- (4) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$ .  
א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?  
ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- (5) לפונקציה  $f(x) = ax - x^3 - 5$  יש נקודת קיצון בנקודה שבה  $x = -1$ .  
מצא את ערכו של הפרמטר  $a$ .
- (6) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + x^2$ . ידוע שהנקודה  $x = 1$  נקודת קיצון.  
מצא את הקבוע  $a$ .
- (7) לפונקציה  $f(x) = Ax^3 + Bx^2 - 1$  יש נקודת קיצון ששיעוריה:  $(2, 3)$ .  
מצא את ערכי הפרמטרים  $A, B$ .
- (8) לפונקציה  $f(x) = Ax^3 + Bx^2 - 4x$  יש נקודת קיצון ב- $x = -1$  ו- $x = 4$ .  
מצא את הפרמטרים ואת שיעור ה- $y$  של שתי נקודות הקיצון.
- (9) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + bx^2$ . ידוע שהנקודה  $(1, 2)$  נקודת קיצון.  
מצא את הפרמטרים  $a, b$ .
- (10) לפונקציה  $f(x) = ax^4 + bx^2 + 35$  יש נקודת קיצון ששיעוריה  $(2, 3)$ .  
מצא את ערכי הפרמטרים  $a, b$ .

## תשובות סופיות:

(1)  $\max(5, 25)$

(2) א.  $\min(2, -16)$ ,  $\max(-2, 16)$  ב. עולה:  $x > 2$ ,  $x < -2$  יורדת:  $-2 < x < 2$ .

(3) א.  $\max(0, 9)$ ,  $\min(\sqrt{5}, -16)$ ,  $\min(-\sqrt{5}, -16)$

ב. עולה:  $-\sqrt{5} < x < 0$ ,  $x > \sqrt{5}$  יורדת:  $0 < x < \sqrt{5}$ ,  $x < -\sqrt{5}$ .

(4) א.  $\min(3, 5)$  ב. עולה:  $x > 3$  יורדת:  $x < 3$ .

(5)  $a = 3$

(6)  $a = -\frac{2}{3}$

(7)  $A = -1$ ,  $B = 3$

(8)  $A = \frac{1}{3}$ ,  $B = -\frac{3}{2}$ ,  $\left(-1, 2\frac{1}{6}\right)$ ,  $\left(4, -18\frac{2}{3}\right)$

(9)  $b = 6$ ,  $a = -4$

(10)  $a = 2$ ,  $b = -16$

## חקירת פונקציה פולינומית:

### שאלות:

**(11)** נתונה הפונקציה  $f(x) = 10x - x^2$ .

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(12)** נתונה הפונקציה  $f(x) = x^3 - 12x$ .

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(13)** נתונה הפונקציה  $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ .

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(14)** נתונה הפונקציה  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$  חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

15 נתונה הפונקציה  $f(x) = x^3$  חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

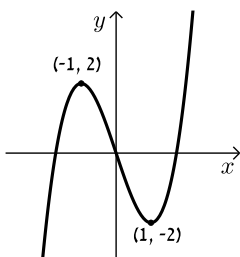
16 נתונה הפונקציה:  $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 54x - 50$ .

- לאילו ערכים של הפרמטר  $a$  עולה הפונקציה בכל תחום הגדרתה?
- הצב בפונקציה  $a = 6$  וחקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים: תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודת חיתוך עם ציר ה- $y$ , סרטוט.

17 נתונה הפונקציה:  $y = -3x^3 + 6x^2 - 4x + d$  (פרמטר  $d$ ).

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה:  $x = 2$ .

- מצא את  $d$ .
- האם יש לפונקציה נקודות קיצון?
- כתוב את תחומי העלייה וירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

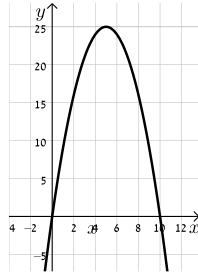


18 לפניך גרף הפונקציה  $f(x) = x^3 - 3x$ :

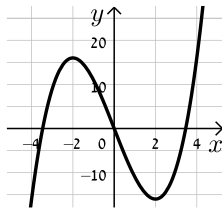
- מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $f(x) = 5$ ?
- מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $f(x) = 2$ ?
- מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $f(x) = 0.5$ ?
- עבור איזה ערך של  $k$  למשוואה  $f(x) = k$  יש בדיוק פתרון אחד?
- עבור איזה ערך של  $k$  למשוואה  $f(x) = k$  יש בדיוק שני פתרונות?
- עבור איזה ערך של  $k$  למשוואה  $f(x) = k$  יש בדיוק שלושה פתרונות?
- האם קיים ערך של  $k$  עבורו למשוואה  $f(x) = k$  אין פתרון?

**תשובות סופיות:**

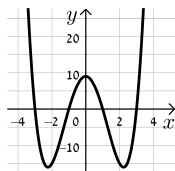
- (11)** א. כל  $x$       ב.  $\max(5,25)$       ג. עלייה:  $x < 5$ , ירידה:  $x > 5$       ד.  $(0,0)$ ,  $(10,0)$ .  
ה. להלן גרף:



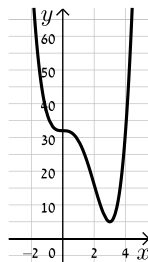
- (12)** א. כל  $x$       ב.  $\min(2,-16)$ ,  $\max(-2,16)$       ג. עלייה:  $x > 2$ ,  $x < -2$ , ירידה:  $-2 < x < 2$       ד.  $(0,0)$ ,  $(\sqrt{12},0)$ ,  $(-\sqrt{12},0)$ .  
ה. להלן גרף:



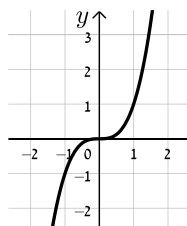
- (13)** א. כל  $x$       ב.  $\max(0,9)$ ,  $\min(\sqrt{5},-16)$ ,  $\min(-\sqrt{5},-16)$       ג. עלייה:  $-\sqrt{5} < x < 0$ ,  $x > \sqrt{5}$ , ירידה:  $x < -\sqrt{5}$ ,  $0 < x < \sqrt{5}$       ד.  $(0,9)$ ,  $(\pm 1,0)$ ,  $(\pm 3,0)$ .  
ה. להלן גרף:



- (14)** א. כל  $x$       ב.  $\min(3,5)$       ג. תחומי עלייה:  $x > 3$ , תחומי ירידה:  $x < 3$       ד.  $(0,32)$ .  
ה. להלן גרף:

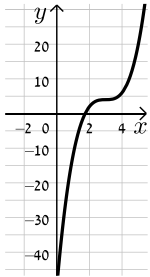


- (15)** א. כל  $x$       ב. אין.      ג. עולה לכל  $x$       ד.  $(0,0)$ .  
ה. להלן גרף:



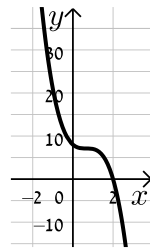
16) א.  $-6 < a < 6$  ב. תחום הגדרה: כל  $x$ , נקודות קיצון: אין, תחומי עלייה: כל  $x$ ,

תחומי ירידה: אין, נקודת חיתוך עם הצירים:  $(0, -50)$ , להלן גרף:



17) א.  $d = 8$  ב. לא. ג. יורדת בתחום  $x \neq \frac{2}{3}$

ד.  $(0, 8)$  ה. להלן גרף:



18) א. 1. ב. 2. ג. 3. ד.  $k > 2, k < -2$

ה.  $k = \pm 2$  ו.  $-2 < k < 2$  ז. לא.

## פונקציה זוגית ואי-זוגית:

### סיכום כללי:

#### הגדרות:

- פונקציה  $f(x)$  תיקרא זוגית אם לכל  $x$  בתחום הגדרתה מתקיים:  $f(x) = f(-x)$ .
- פונקציה  $f(x)$  תיקרא אי-זוגית אם לכל  $x$  בתחום הגדרתה מתקיים:  $f(-x) = -f(x)$ .

#### שאלות:

(1) קבע אלו מהפונקציות הבאות הן זוגיות/אי-זוגיות לא זו ולא זו:

א.  $f(x) = 3x - 5$

ב.  $f(x) = 3x^2$

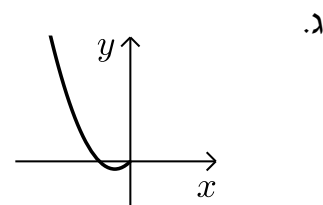
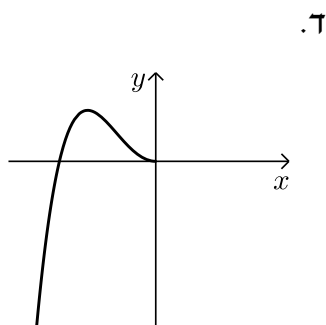
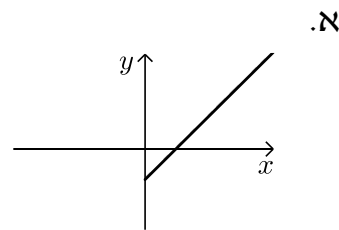
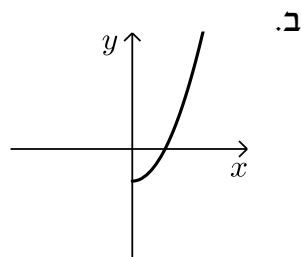
ג.  $f(x) = 2x^3$

ד.  $f(x) = x^3 - 2x^2$

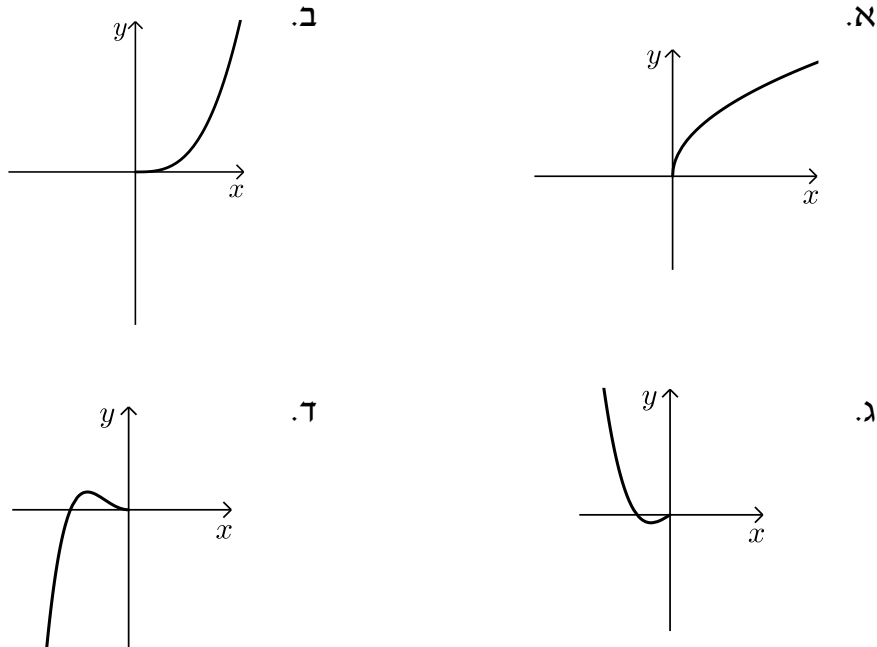
ה.  $f(x) = 4x^4 - 3x^2 + 1$

ו.  $f(x) = 4x^5 - 3x^3 - 1$

(2) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל  $x$ . השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתקבל פונקציה זוגית:



3) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל  $x$ . השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתקבל פונקציה אי-זוגית:



4) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = x^4 - 4x^2$  בתחום:  $[0:3]$ .

א. חקור את הפונקציה בתחום הנ"ל לפי הסעיפים הבאים:

- i. תחום הגדרה.
- ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
- iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
- iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.
- v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. הוכח כי הפונקציה  $f(x)$  היא פונקציה זוגית.

ג. התבסס על ממצאריך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום:  $[-3:3]$  (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום  $[-3:0]$  לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

5) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = x^6 - 3x^2 + 3$ .

- חקור את הפונקציה בתחום:  $[0:4]$  לפי הסעיפים הבאים: תחום הגדרה, מציאת חיתוך עם ציר ה- $y$ , מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה בתחום הנ"ל.
- האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זו ולא זו? נמק באמצעות חישוב מתאים.
- הסתמך על ממצאיך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה ששרטטת בסעיף א', את עקום הפונקציה בתחום  $[-4:0]$ .
- הוכח כי הפונקציה חיובית לכל  $x$  בתחום הגדרתה.

6) לפניך הפונקציה:  $f(x) = -2x^6 + 3x^4 + a$ , פרמטר  $a$ .

ידוע כי לפונקציה ערך מירבי של 1.

- מצא את  $a$  וכתוב את הפונקציה  $f(x)$ .
- חקור את הפונקציה בתחום:  $[-2:0]$  לפי הסעיפים הבאים: כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים, מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.
- האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זה ולא זה? נמק באמצעות חישוב מתאים.
- הסתמך על ממצאיך מהסעיפים הקודמים ושרטט את גרף הפונקציה בתחום:  $[-2:2]$ .

7) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = 3x^3 - 9x$ .

- חקור את הפונקציה בתחום:  $[0:5]$  לפי הסעיפים הבאים: כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים, מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.
- הוכח כי הפונקציה היא אי-זוגית.
- התבסס על ממצאיך מהסעיפים הקודמים ושרטט את הפונקציה בתחום:  $[-5:5]$  (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום  $[-5:0]$  לגרף ששרטטת בסעיף הקודם).

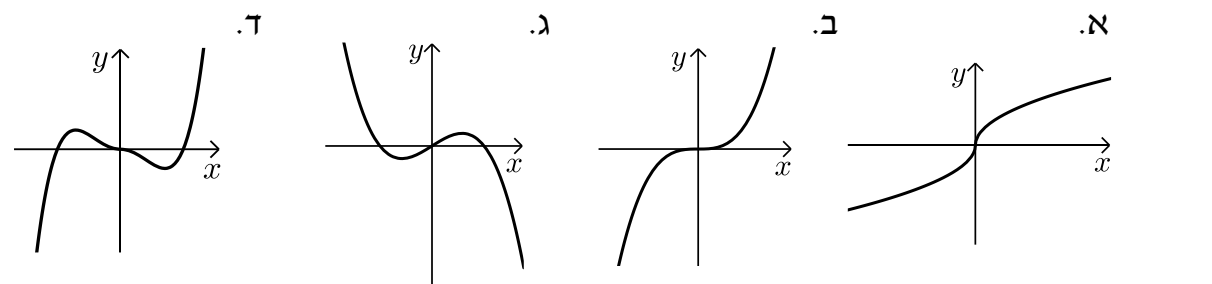
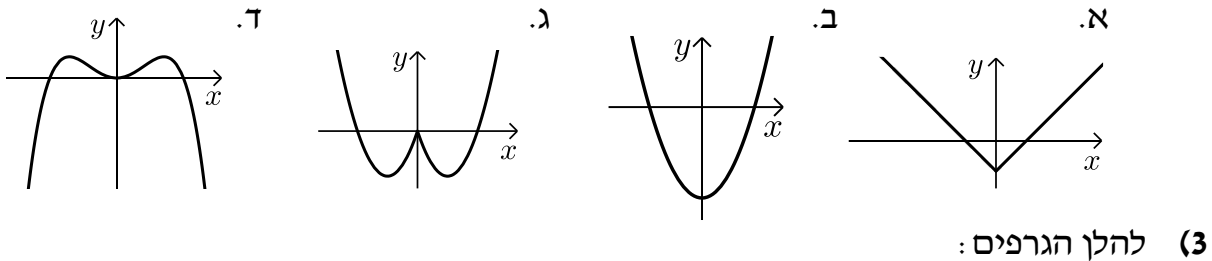
- 8) לפניך הפונקציה הבאה:  $f(x) = 5x^3 - 3x^5 + b$ , פרמטר  $b$ . ידוע כי הישר  $y = 2x$  עובר דרך כל הנקודות על גרף הפונקציה שמקיימות:  $f'(x) = 0$ .
- מצא את  $b$  וכתוב את הפונקציה  $f(x)$ .
  - חקור את הפונקציה בתחום:  $[0:2]$  לפי הסעיפים הבאים:
    - תחום הגדרה.
    - מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
    - מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
    - כתיבת תחומי עלייה וירידה.
    - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
  - בדוק האם הפונקציה היא זוגית/אי-זוגית או לא זו ולא זו. נמק את קביעתך באמצעות חישוב מתאים.
  - הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה של גרף הפונקציה את הגרף בתחום  $[-2:0]$ .

9) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^7 - x}{3}$

- חקור את הפונקציה בתחום:  $[-4:0]$  לפי הסעיפים הבאים:
  - תחום הגדרה.
  - מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
  - מציאת נקודות קיצון וסיווגן (בתשובתך השאר עד 2 ספרות לאחר הנקודה העשרונית).
  - כתיבת תחומי עלייה וירידה.
  - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? או לא זו ולא זו? נמק ע"י חישוב מתאים.
- הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שעשית את גרף הפונקציה בתחום  $[0:4]$ .

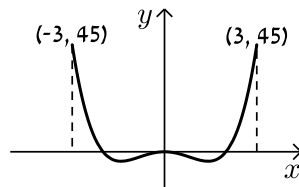
**תשובות סופיות:**

- (1) זוגית: ב', ה'.  
 (2) להלן הגרפים: אי-זוגית: ג', לא זו ולא זו: א', ד', ו'.

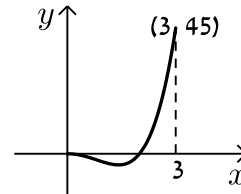


- (4) א. i.  $0 \leq x \leq 3$  ii.  $(0,0), (2,0)$  iii.  $\max(3,45)$  קצה,  $\min(\sqrt{2}, -4)$   
 iv. עולה:  $\sqrt{2} < x < 3$ , יורדת:  $0 < x < \sqrt{2}$ . ב. סעיף הוכחה.

**סרטוט עבור סעיף ג:**

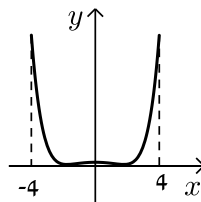


**סרטוט עבור חלק v:**

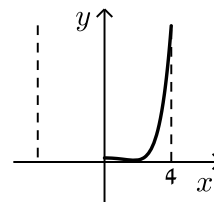


- (5) א. תחום הגדרה:  $0 \leq x \leq 4$ , חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $(0,3)$ , נקודות קיצון:  $\max(4,4051)$  קצה,  $\min(1,1)$ ,  $\max(0,3)$  קצה, עולה:  $1 < x < 4$ , יורדת:  $0 < x < 1$ . ב. זוגית. ד. הוכחה עפ"י הסרטוט.

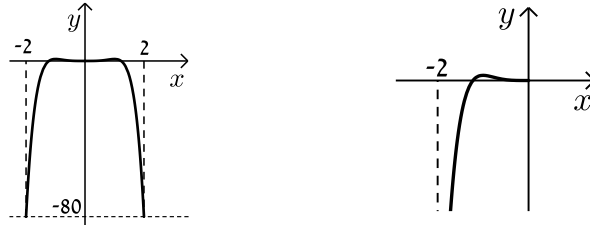
**סרטוט עבור סעיף ג:**



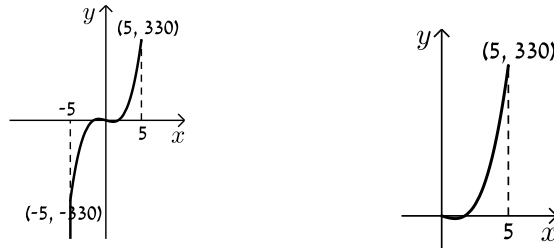
**סרטוט עבור סעיף א:**



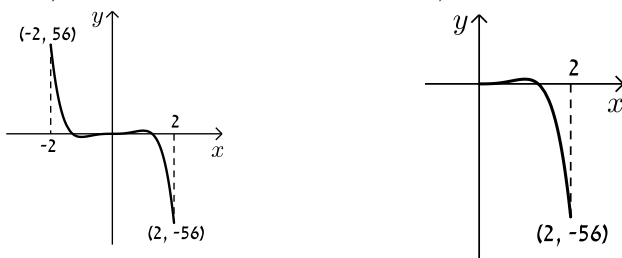
6. א.  $a=0$  ב. תחום הגדרה:  $-2 \leq x \leq 0$ , חיתוך עם הצירים:  
 נקודות קיצון:  $(0,0)$ ,  $(-1.225,0)$ ,  $\min(-2,-80)$ ,  $\max(-1,1)$ ,  $\min(0,0)$  קצה,  
 עולה:  $-2 < x < -1$ , יורדת:  $-1 < x < 0$ . ג. זוגית.  
**סרטוט עבור סעיף א:** **סרטוט עבור סעיף ד:**



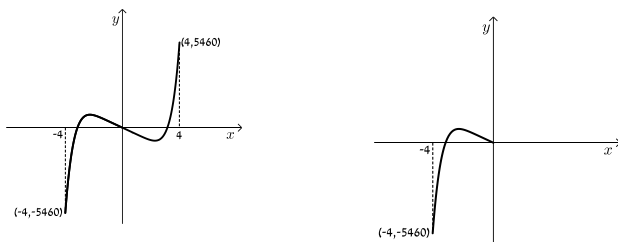
7. א. תחום הגדרה:  $0 \leq x \leq 5$ , חיתוך עם הצירים:  $(0,0)$ ,  $(\sqrt{3},0)$   
 נקודות קיצון:  $\max(5,330)$  קצה,  $\min(1,-6)$ ,  $\max(0,0)$  קצה,  
 עולה:  $1 < x < 5$ , יורדת:  $0 < x < 1$ . ב. אי-זוגית.  
**סרטוט עבור סעיף א:** **סרטוט עבור סעיף ג:**



8. א.  $b=0$  ב. i  $0 \leq x \leq 2$  ii  $(0,0)$ ,  $(1.29,0)$  iii  $\min(2,-56)$  קצה,  
 iv. עולה:  $0 < x < 1$ , יורדת:  $1 < x < 2$ . ג. אי-זוגית.  
**סרטוט עבור סעיף ד:** **סרטוט עבור חלק v:**



9. א. i  $-4 \leq x \leq 0$  ii  $(-1,0)$ ,  $(0,0)$  iii  $\min(0,0)$  קצה,  $\max(-0.723,0.207)$ ,  
 iv. עולה:  $-4 < x < -0.723$ , יורדת:  $-0.723 < x < 0$ . ג. אי-זוגית.  
**סרטוט עבור סעיף ד:** **סרטוט עבור חלק v:**



# מתמטיקה

## פרק 21 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית מנה ושורש

### תוכן העניינים

303	1. מציאת תחום הגדרה
305	2. מציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה
306	3. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים
311	4. חקירת פונקצית מנה
320	5. חקירת פונקצית שורש
328	6. תחומי קעירות ונקודות פיתול
334	7. חקירת פונקציה עם פרמטר
337	8. פונקציות ללא תבנית מפורשת

## מציאת תחום הגדרה:

### סיכום כללי:

- כל פולינום מוגדר לכל  $x$ .
- בפונקציה עם מכנה, אסור שיתקבל אפס במכנה.
- בפונקציה עם שורש זוגי, אסור שיתקבל מספר שלילי בתוך השורש.

### שאלות:

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x$	ב. $f(x) = 4x^3 - x^2 + \frac{x}{2} + 1$
ג. $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 1$	ד. $f(x) = \frac{2x}{x-3}$
ה. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$	ו. $f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1}$
ז. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$	ח. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x - 8}$
ט. $f(x) = \frac{6}{x^2 + 1}$	י. $f(x) = \frac{4x + 1}{x^2 + 1}$
יא. $f(x) = \frac{1}{x^3 - x}$	יב. $f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 4x}$

(2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{x}$	ב. $f(x) = 2\sqrt{x-3}$
ג. $f(x) = \sqrt{x-4}$	ד. $f(x) = 3x\sqrt{1-2x}$
ה. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 10}$	ו. $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$
ז. $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x+4}}$	ח. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 5x + 6}}{x-1}$
ט. $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + 5x + 9}}$	י. $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^3 - 9x}}$
יא. $f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x+6}}$	יב. $f(x) = \frac{x+1}{x - \sqrt{2-x}}$
יג. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1- x }}$	יד. $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+2} - 3}$

## תשובות סופיות:

- (1) א. כל  $x$     ב. כל  $x$     ג. כל  $x$     ד.  $x \neq 3$     ה.  $x \neq \pm 2$     ו.  $x \neq \pm 1$   
 ז.  $x \neq -1, 2$     ח.  $x \neq 4, -2$     ט. כל  $x$     י. כל  $x$     יא.  $x \neq \pm 1, 0$     יב.  $x \neq \pm 2, 0$
- (2) א.  $x \geq 0$     ב.  $x \geq 3$     ג.  $x \geq 4$     ד.  $x \leq \frac{1}{2}$     ה.  $x \leq -5, x \geq 2$   
 ו.  $x \leq -2, x \geq 1$     ז.  $x > -4$     ח.  $x \leq -3, -2 \leq x < 1, x > 1$     ט.  $x \leq -1.5, x \geq 1$   
 י.  $-3 < x < 0, x > 3$     יא.  $-6 \leq x < -2, x > -2$     יב.  $x < 1, 1 < x \leq 2$   
 יג.  $-1 < x < 1$     יד.  $x \geq 7$

## מציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה:

שאלות:

(3) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{6x}{x^2 - 10x + 9}$ .

- א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?  
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

תשובות סופיות:

(3) א.  $\min\left(-3, -\frac{3}{8}\right), \max\left(3, -1\frac{1}{2}\right)$ .

ב. עולה:  $-3 < x < 3$ , יורדת:  $x < -3, 3 < x \neq 9$ ,  $x \neq 1$ .

## מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים:

### סיכום כללי:

#### אסימפטוטה אנכית:

הגדרה: הישר:  $x = k$  הוא אסימפטוטה אנכית של פונקציה מהצורה:  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

אם הוא מקיים:  $g(k) = 0$  וגם:  $f(k) \neq 0$ . בצורה מתמטית: אם:  $\lim_{x \rightarrow k^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$

או:  $\lim_{x \rightarrow k^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$  או שניהם אז הישר:  $x = k$  הוא אסימפטוטה אנכית לפונקציה  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ .

### הסבר כללי:

בעבור ערכי  $x$  שמאפסים את המכנה, אבל לא את המונה יש אסימפטוטה אנכית. כאשר ערך  $x$  מאפס את המכנה וגם את המונה יש לפרק את המונה והמכנה (על ידי נוסחאות כפל מקוצר או טרינום למשל) ולצמצם. אם אחרי הצמצום אותו ערך של  $x$  עדיין מאפס את המכנה תתקבל אסימפטוטה אנכית, אך אם ערך  $x$  זה לא מאפס את המכנה אחרי שצומצם אין אסימפטוטה אנכית אלא נקודת אי הגדרה.

#### אסימפטוטה אופקית:

הגדרה: ישר מהצורה:  $y = n$  הוא אסימפטוטה אופקית לפונקציה מהצורה:  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

אם מתקיים:  $\lim_{x \rightarrow \infty^+} \frac{f(x)}{g(x)} = n$  או:  $\lim_{x \rightarrow \infty^-} \frac{f(x)}{g(x)} = n$  או שניהם.

אופן החישוב הכללי:

נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{ax^m + \dots}{bx^n + \dots}$  (יש בפונקציה קו שבר אחד!)

- אם  $m > n$ , לפונקציה אין אסימפטוטה אופקית.
- אם  $m = n$ , לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה  $y = \frac{a}{b}$ .
- אם  $m < n$ , לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה  $y = 0$ .

### חוקי גבולות לאינסוף:

במקרים רבים נרצה לדעת האם פונקציה מסוימת מתכנסת לערך כלשהו כאשר  $x$  שואף לערכים ההולכים וגדלים (לאינסוף, או למינוס אינסוף). עבור ערכי  $x$  שהולכים וגדלים (או קטנים) נרשום:  $x = \infty$  או  $x = -\infty$  בהתאמה.

ישנם 4 מצבים בהם ערך הפונקציה בשאיפת  $x$  לאחד הקצוות ניתן לחישוב ישיר:

- הגבול:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$

- הגבול:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$  ניתן לפיצול לשני מקרים:

- אם:  $x \rightarrow 0^+$  (מתקרב ל-0 מהכיוון החיובי) אז:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

- אם:  $x \rightarrow 0^-$  (מתקרב ל-0 מהכיוון השלילי) אז:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

- הגבול מהצורה  $\infty \cdot \infty$  (מכפלת שני ביטויים של  $x$  אשר כל אחד מהם שואף לאינסוף בפני עצמו) מקיים:  $\infty \cdot \infty = \infty$

- הגבול מהצורה  $\infty + \infty$  (סכום שני ביטויים של  $x$  אשר כל אחד מהם שואף לאינסוף בפני עצמו) מקיים:  $\infty + \infty = \infty$

ישנם 3 מקרים בהם לא ניתן לדעת מהו ערך הפונקציה בלקיחת הגבול בצורה ישירה והם:

- הגבול מהצורה:  $\frac{\infty}{\infty}$  (מנת שני ביטויים שהולכים וגדלים עם שאיפת  $x$ ).

- הגבול מהצורה:  $\frac{0}{0}$  (מנת שני ביטויים שהולכים וקטנים עם שאיפת  $x$ ).

- הגבול מהצורה:  $\infty - \infty$  (הפרש של שני ביטויים שהולכים וגדלים עם שאיפת  $x$ ). במקרים אלו נעזר בפישוטים שהוצגו לעיל על מנת למצוא את ערך הגבול עצמו.

## שאלות:

(4) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$

(5) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{5x^2+1}{x^2-9}$

(6) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{2x^2-5x+2}{1+3x^2}$

(7) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{3x}{x^2-2x-15}$

(8) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{6x^3-5x+1}{1+2x^2}$

(9) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{ax+b}{x-b}$

(10) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$   
 ואת נקודת אי הרציפות שלה.

(11) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2}{2x^2-4x}$   
 ואת נקודת אי הרציפות שלה.

(12) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$

(13) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x}}$

14) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

15) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{2x}{x-\sqrt{x}}$

16) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+5}}$

17) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2-16}}$

18) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{4x^2+1}{ax^2-x+b}$

האסימפטוטה האופקית של הפונקציה ואחת האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה

נפגשות בנקודה  $(-1, 2)$ .

מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

19) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{ax+8}{x+b\sqrt{x}}$

הפונקציה חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה בנקודה  $(16, 2)$ .

מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

**תשובות סופיות:**

(4)  $x = 2, y = 3$

(5)  $x = \pm 3, y = 5$

(6)  $y = \frac{2}{3}$

(7)  $x = -3, x = 5, y = 0$

(8) אין.

(9)  $x = b, y = a$

(10) נקודת אי-הגדרה:  $(2, 4)$ ,  $x = 1, y = 1$

(11) נקודת אי-הגדרה:  $(0, 0)$ ,  $x = 2, y = \frac{1}{2}$

(12)  $x = 2, y = 0$

(13)  $x = 4$

(14)  $x = 1, y = -1$

(15)  $x = 1, y = 2$

(16)  $y = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) = 3, y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = -3$

(17)  $x = 4, x = -4, y = 5, y = -5$

(18)  $b = -3, a = 2$

(19)  $b = 1, a = 2$

## חקירת פונקצית מנה:

### שאלות:

(20) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{6x^2 - 10x + 6}{3x^2 - 10x + 3}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(21) נתונה הפונקציה:  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(22) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(23)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{6x}{x^2 - 5x + 4}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(24)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 3}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(25)** נתונה הפונקציה הבאה:  $y = \frac{2x^2 - 5x + 2}{4x}$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה.
- ב. נקודות קיצון.
- ג. קביעת סוג הקיצון ותחומי עלייה וירידה.
- ד. חיתוך עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטה אנכית.
- ו. שרטוט סקיצה.

**(26)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(27) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום הגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(28) לגרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{ax + 4}{x^2}$  יש נקודת קיצון שבה  $x = -8$ .

- מצא את  $a$  וכתוב את הפונקציה.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(29) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{3x^2}{2x^2 - 8}$ .

- מהו תחום הגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- קבע את סוג הקיצון ותחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה.
- מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(30) נתונה הפונקציה:  $y = \frac{a^2x - 4}{2x^2 - 1}$ ,  $(a$  קבוע).

- ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה:  $x = 1$  הוא:  $m = 4$ .
- מצא את כל הערכים האפשריים עבור  $a$ .
  - מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
  - מצא את נקודת החיתוך בין המשיק הנתון ומשיק העובר דרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .

**(31)** נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = 1.5x - \frac{5x+1}{x+5}$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה.
- ב. נקודות קיצון וסוגן.
- ג. תחומי עלייה וירידה.
- ד. חיתוך עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה.

**(32)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x-a}{x-1}$ ,  $(a \neq 1)$ .

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
- ג. הבע באמצעות  $a$  את השיעורים של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  ועם ציר ה- $y$ .
- ד. ענה על הסעיפים הבאים:
  - i. מצא עבור אילו ערכים של  $a$  הפונקציה  $f(x)$  עולה לכל  $x$  בתחום ההגדרה.
  - ii. ישר המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה שבה  $x=a$  מקביל לישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה:  $x=2$ . מצא את הערך של  $a$  אם נתון כי הפונקציה עולה לכל  $x$ .

**(33)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2+ax+6}{x-2}$ ,  $(a$  פרמטר).

- ידוע שאחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- $y$ .
- א. מצא את הערך של  $a$ .
  - ב. הצב את הערך של  $a$  שמצאת בסעיף א' ומצא:
    - i. את תחום ההגדרה של הפונקציה.
    - ii. את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
    - iii. את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
    - iv. את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).
  - ג. עבור אלו ערכי  $x$  הפונקציה שלילית?
  - ד. נתון הישר:  $y=k$ . עבור אלו ערכי  $k$  אין נקודות משותפות לישר ולגרף הפונקציה? נמק.

34 נתונה הפונקציה:  $y = \frac{x+3}{x-2} + A$ , (A פרמטר). גרף הפונקציה עובר בנקודה (A, 3A).

- מצא את ערך הפרמטר A.
  - כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
  - הוכח כי גרף הפונקציה יורד לכל x.
  - מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-y.
  - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
  - נתון הישר:  $y = k$ .
- האם קיים ערך של k עבורו הישר חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות שונות? נמק.

35 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{ax^2 - 20x + 28}{x^2 + 2a}$ .

- ידוע כי גרף הפונקציה חותך את האסימפטוטה האופקית שלו בנקודה (3, 0.5).
- מצא את ערך הפרמטר a וכתוב את הפונקציה ואת תחום הגדרתה.
  - מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
  - כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
  - מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
  - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
  - העזר בגרף הפונקציה וקבע עבור אלו ערכים של k הישר:  $y = k$  יחתוך את גרף הפונקציה בנקודה אחת בלבד.

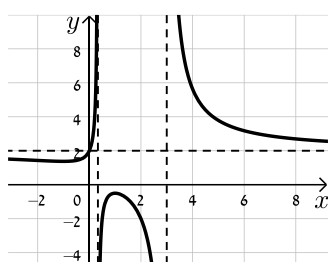
36 ענה על הסעיפים הבאים:

- הוכח כי לגרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{9-x^2}{x^2-k}$  יש נקודת קיצון שנמצאת על ציר ה-y.
- הוכח כי הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת לכל x אם ידוע כי שיעור ה-y של נקודת הקיצון הוא 3.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x.
- מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה וקבע בכמה נקודות יחתוך אותו הישר  $y = -1$ . נמק את תשובתך.

**תשובות סופיות:**

20 א.  $x \neq 3, x \neq \frac{1}{3}$  ב.  $\min\left(-1, 1\frac{3}{8}\right), \max\left(1, -\frac{1}{2}\right)$

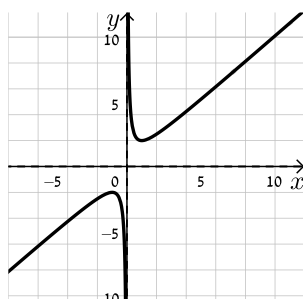
ג. תחומי עלייה:  $-1 < x < 1$  וגם  $x \neq \frac{1}{3}$ , תחומי ירידה:  $1 < x \neq 3$  או  $x < -1$ .



ד.  $(0, 2)$  ה.  $x = 3, x = \frac{1}{3}, y = 2$  ו. להלן סקיצה:

21 א.  $x \neq 0$  ב.  $\min(1, 2), \max(-1, -2)$

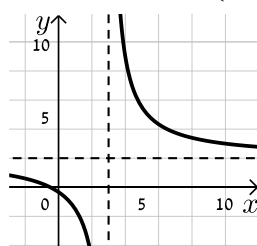
ג. עולה:  $x > 1$  או  $x < -1$ , יורדת:  $-1 < x < 1$ ,  $x \neq 0$  ד. אין



ה. להלן סקיצה:

22 א.  $x \neq 3$  ב. אין ג. הפונקציה יורדת בכל ת.ה.

ד.  $\left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(0, -\frac{1}{3}\right)$  ה.  $y = 2, x = 3$

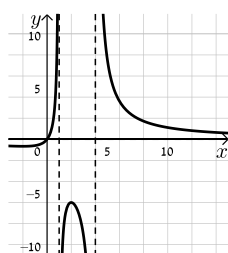


ו. להלן סקיצה:

23 א.  $x \neq 1, x \neq 4$  ב.  $\min\left(-2, -\frac{2}{3}\right), \max(2, -6)$

ג. תחומי עלייה:  $-2 < x < 2$ ,  $x \neq 1$ , תחומי ירידה:  $x < -2$  או  $x > 2$ ,  $x \neq 4$

ד.  $(0, 0)$  (אסימפטוטות:  $y = 0, x = 1, x = 4$ ).

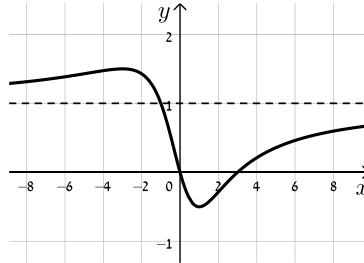


ה. להלן סקיצה:

24) א. כל  $x$       ב.  $\min\left(1, -\frac{1}{2}\right), \max\left(-3, 1\frac{1}{2}\right)$

ד.  $(0,0), (3,0)$  (אסימפטוטה:  $y=1$ ).

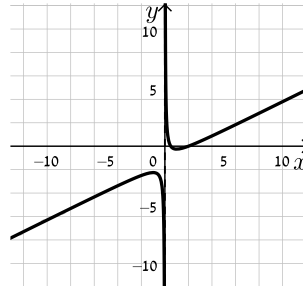
ג. עולה:  $x > 1$  או  $x < -3$ , יורדת:  $-3 < x < 1$   
ה. להלן סקיצה:



25) א.  $x \neq 0$       ב.  $\min(1, -0.25), \max(-1, -2.25)$

ג. עולה:  $x > 1, x < -1$ , יורדת:  $-1 < x < 1, x \neq 0$       ד.  $(0.5, 0), (2, 0)$       ה.  $x=0$

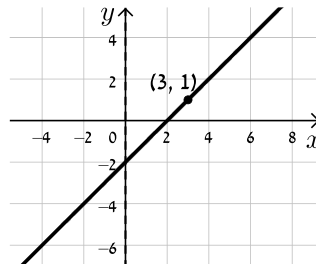
ו. להלן סקיצה:



26) א.  $x \neq 3$       ב. אין      ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה

ד.  $(0, -2), (2, 0)$       ה. אין, יש נקודת אי הגדרה ששיעוריה  $(3, 1)$ .

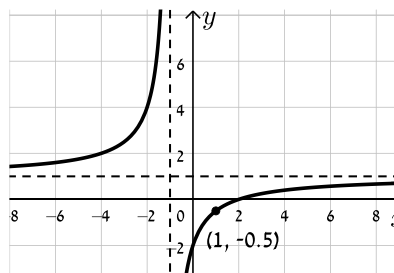
ו. להלן סקיצה:



27) א.  $x \neq \pm 1$       ב. אין      ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה

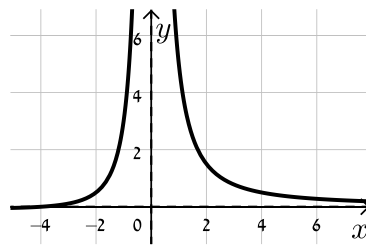
ד.  $(0, -2), (2, 0)$       ה.  $y=1, x=-1$ , יש נקודת אי הגדרה:  $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ .

ו. להלן סקיצה:



28 א.  $f(x) = \frac{x+4}{x^2}$ ,  $a=1$  ב. עולה:  $-8 < x < 0$  יורדת:  $x < -8$ ,  $x > 0$

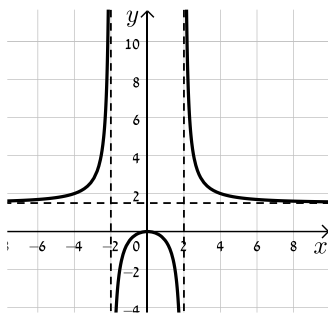
ג.  $(-4, 0)$  ד.  $x=0, y=0$



ה. להלן סקיצה:

29 א.  $x \neq \pm 2$  ב.  $\max(0, 0)$  ג. יורדת:  $x > 0, x \neq 2$  עולה:  $x < 0, x \neq -2$

ד.  $(0, 0)$  ה.  $x = \pm 2, y = 1.5$  ו. להלן סקיצה:



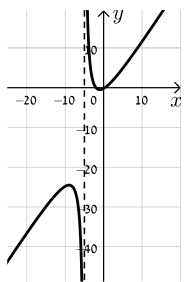
30 א.  $a = \pm 2$  ב.  $(1, 0), (0, 4)$

ג. המשיק:  $y = -4x + 4$  אשר עובר בנקודה  $(1, 0)$ . נקודת החיתוך:  $(1, 0)$ .

31 א.  $x \neq -5$  ב.  $\min(-1, -0.5), \max(-9, -24.5)$

ג. עולה:  $x < -9, x > -1$  יורדת:  $-9 < x < -1$ ,  $x \neq -5$

ד.  $(-2, 0), (\frac{1}{3}, 0), (0, -0.2)$  ה.  $x = -5$  ו. להלן סקיצה:



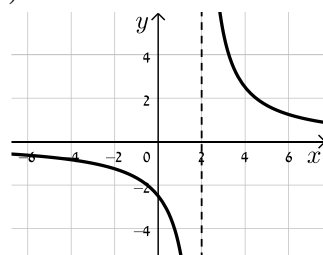
32 א.  $x \neq 1$  ב.  $x=1, y=1$  ג.  $(a, 0), (0, a)$  ד. i.  $a > 1$  ii.  $a = 2$

33 א.  $a = -3$  ב. i.  $x \neq 2$  ii.  $(0, -3)$  iii.  $\max(0, -3), \min(4, 5)$

ג.  $x < 2$  ד. iv.  $x = 2$  ה.  $-3 < k < 5$

34 א.  $A = -1$  ב.  $x \neq 2$  ד.  $(0, -2.5)$

ו. לא



ה. להלן סקיצה:

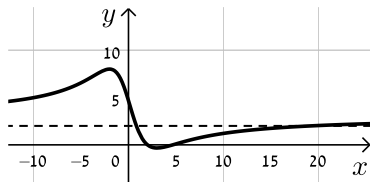
35 א.  $f(x) = \frac{3x^2 - 20x + 28}{x^2 + 6}$ ,  $a = 3$ . כל  $x$ .

ב.  $\min\left(3, -\frac{1}{3}\right)$ ,  $\max(-2, 8)$

ד.  $(2, 0)$ ,  $\left(0, 4\frac{2}{3}\right)$ ,  $\left(4\frac{2}{3}, 0\right)$

ו.  $k = 8$ ,  $-\frac{1}{3}$ ,  $3$

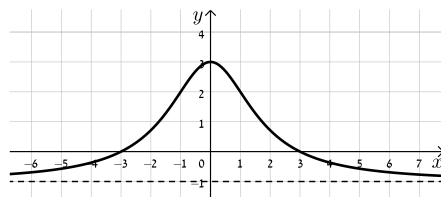
ג. עולה:  $x < -2$ ,  $x > 3$ , יורדת:  $-2 < x < 3$



ה. להלן סקיצה:

ה. באף נקודה.

36 ב.  $k = -3$  ג.  $(3, 0)$ ,  $(-3, 0)$  ד.  $y = -1$



ו. להלן סקיצה:

## חקירת פונקציות שורש:

### שאלות:

**37** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{x-3}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**38** נתונה הפונקציה:  $f(x) = (x-4)\sqrt{x-1}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**39** נתונה הפונקציה:  $f(x) = x\sqrt{6-x}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

40 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{4\sqrt{x}}{x^2+3}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

41 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

42 נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x^2}$ .

- א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות קיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

43 נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$ .

- א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- ב. האם ניתן להעביר משיק לגרף הפונקציה המקביל לציר ה- $x$ ? נמק והראה חישוב מתאים.
- ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ .
- ד. חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק והצירים.

(44) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}-1}$ .

- מהו תחום הגדרה של הפונקציה?
- כמה נקודות יש לגרף הפונקציה שהמשיק העובר דרכן מקביל לציר ה- $x$ ? מצא אותן.
- כתוב את משוואות המשיקים בנקודות שמצאת בסעיף הקודם.

(45) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום הגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(46) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{ax+6}{\sqrt{9-x^2}}$ , פרמטר  $a$ .

- מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ . ידוע כי הוא מקביל לישר:  $3y-x=0$ .
- מצא את ערך הפרמטר  $a$ .
  - כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
  - מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
  - כתוב את התחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(47) נתונות שתי הפונקציות הבאות:  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+k}}$ ,  $g(x) = \frac{\sqrt{x-k}}{x}$  ( $k$  פרמטר חיובי).

- ידוע כי הפונקציות חותכות זו את זו בנקודה שבה:  $x=0.8$ .
- מצא את  $k$ .
  - האם הפונקציות נחתכות בנקודה נוספת מלבד לנקודה הנתונה? אם כן מצא אותה.
  - מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה שבה:  $x=0.52$ .

48 נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{kx}{\sqrt{k-x^2}}$ , פרמטר חיובי.

- א. ענה על הסעיפים הבאים:
- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה? (בטא באמצעות  $k$ ).
  - מהן האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה?
- ב. הראה כי הפונקציה עולה עבור כל ערך של  $k$  בתחום הגדרתה.
- ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ . (בטא באמצעות  $k$ ).
- ד. המשיק אשר מצאת בסעיף הקודם חותך את אחת האסימפטוטות של הפונקציה בנקודה A. ידוע כי שטח המשולש הכלוא בין המשיק, ציר ה- $x$  והאסימפטוטה הנ"ל הוא:  $4$  יח"ש  $S$ . מצא את ערך הפרמטר  $k$ .

49 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x+2}{x+4}$ . מגדירים פונקציה נוספת:  $g(x) = \sqrt{f(x)}$ .

- א. כתוב בצורה מפורשת את הפונקציה  $g(x)$ .
- ב. לפניך מספר טענות המתייחסות לפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$ . קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:
- לפונקציות תחום הגדרה זהה.
  - שתי הפונקציות עולות בכל תחום הגדרתן.
  - שתי הפונקציות חותכות את ציר ה- $x$  באותה נקודה.
  - לשתי הפונקציות יש אסימפטוטה משותפת.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של כל פונקציה עם ציר ה- $y$ . אסף פתר את סעיפים א' ו-ב' והחליט לטעון את הטענה הבאה:
- היות והפונקציה  $g(x)$  מוגדרת להיות:  $g(x) = \sqrt{f(x)}$  אזי ניתן למצוא את שיעור ה- $y$  של כל נקודה שעל גרף הפונקציה  $f(x)$  ע"י כך שנמצא תחילה את שיעור ה- $y$  של הנקודה בעלת אותו שיעור  $x$  על הגרף של  $g(x)$  ונעלה אותה בריבוע.
- ד. האם אסף צודק? נמק בצורה איכותית (חישובים אינם נדרשים) את שיקולך.

50) לפניך הפונקציות הבאות:  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$ ,  $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$

א. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

i. לשתי הפונקציות יש את אותו תחום ההגדרה.

ii. לשתי הפונקציות יש נקודות קיצון הנמצאות על הישר:  $y = x$ .

iii. הפונקציות לא חותכות זו את זו.

מגדירים פונקציה נוספת והיא:  $h(x) = (g(x))^2$ .

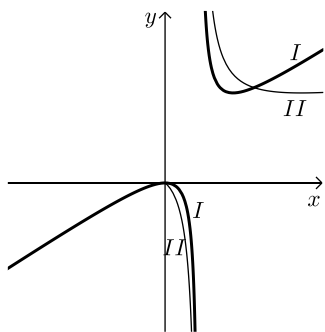
ב. כתוב באופן מפורש את הפונקציה החדשה:  $h(x)$ .

ג. האם תחום ההגדרה של הפונקציה  $h(x)$  זהה לשל  $g(x)$ ?

ד. באיור הסמוך ישנם שני גרפים.

קבע על סמך הסעיפים הקודמים איזו פונקציה כל גרף

מתאר מבין הפונקציות:  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$ . נמק את בחירותיך.



51) לפניך שלוש פונקציות:  $f(x) = x^2\sqrt{k-x^2}$ ,  $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{k-x^2}}$ ,  $h(x) = \frac{\sqrt{k-x^2}}{x^2}$  ( $k > 0$ ).

א. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

i. לפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$  תחום הגדרה זהה, השונה מתחום ההגדרה של  $h(x)$ .

ii. קיימת פונקציה אשר אינה חותכת את ציר ה- $x$  כלל.

iii. הפונקציות:  $h(x)$  ו- $g(x)$  הפוכות זו מזו בתחומי העלייה והירידה שלהן

(כאשר אחת עולה השנייה יורדת).

iv. לפונקציה:  $f(x)$  יש נקודת קיצון אחת בלבד.

מסמנים נקודה  $A(0, \sqrt{12})$  על ציר ה- $y$ . ידוע כי מרחקה מאחת מנקודות החיתוך

של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה- $x$  שאינה בראשית הוא:  $d = 6$ .

ב. מצא את  $k$ .

ג. מצא את נקודות הקיצון של גרף

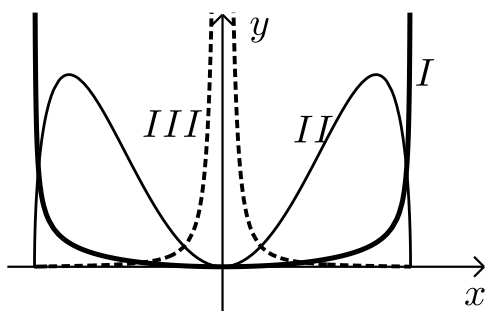
הפונקציה  $f(x)$  וקבע את סוגן.

ד. לפניך איור ובו מסורטטות הסקיצות של

שלושת הפונקציות.

קבע עפ"י הסעיפים הקודמים איזה גרף

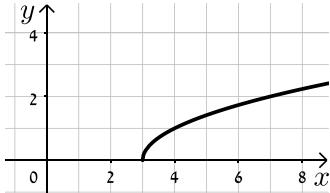
שייך לכל פונקציה.



**תשובות סופיות:**

**(37)** א.  $x \geq 3$     ב.  $\min(3,0)$  קצה    ג. הפונקציה עולה בכל ת.ה.

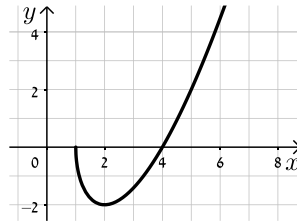
ד.  $(3,0)$     ה. אין.    ו. להלן סקיצה:



**(38)** א.  $x \geq 1$     ב.  $\max(1,0)$ ,  $\min(2,-2)$  קצה

ג. עולה:  $x > 2$ , יורדת:  $1 < x < 2$     ד.  $(1,0)$ ,  $(4,0)$     ה. אין.

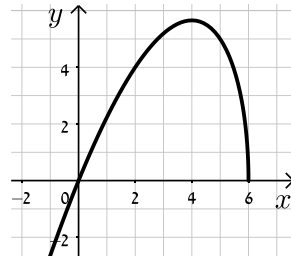
ו. להלן סקיצה:



**(39)** א.  $x \leq 6$     ב.  $\min(6,0)$ ,  $\max(4,4\sqrt{2})$  קצה

ג. עלייה:  $x < 4$ , ירידה:  $4 < x < 6$     ד.  $(6,0)$ ,  $(0,0)$

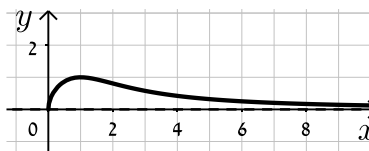
ה. להלן סקיצה:



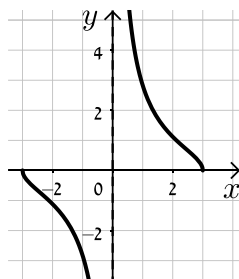
**(40)** א.  $x \geq 0$     ב.  $\min(0,0)$ ,  $\max(1,1)$  קצה

ג. עולה:  $0 < x < 1$ , יורדת:  $x > 1$     ד.  $(0,0)$     ה.  $y = 0$ .

ו. להלן סקיצה:

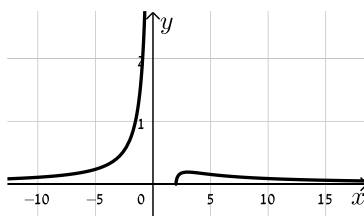


- (41)** א.  $-3 \leq x \leq 3$  וגם  $x \neq 0$       ב.  $\max(-3,0)$  קצה,  $\min(3,0)$  קצה  
 ג. עולה: אף  $x$ , יורדת:  $-3 \leq x \leq 3$ ,  $x \neq 0$       ד.  $(-3,0), (3,0)$



ה.  $x=0$ .      ו. להלן סקיצה:

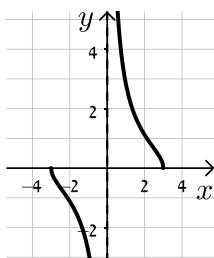
- (42)** א.  $x < 0, x \geq 2$       ב.  $\min(2,0)$ ,  $\max\left(3, \frac{1}{\sqrt{27}}\right)$       ג.  $(2,0)$       ד. להלן סקיצה:



- (43)** א.  $(2,0)$       ב. לא      ג.  $y = 2\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}$       ד.  $S = 4\sqrt{2}$

- (44)** א.  $x \neq 1, x \geq 0$       ב.  $(9,6)$       ג.  $y = 6$

- (45)** א.  $-3 \leq x \leq 3$  וגם  $x \neq 0$       ב.  $\max(-3,0)$  קצה,  $\min(3,0)$  קצה  
 ג. עולה: אף  $x$ , יורדת:  $-3 \leq x \leq 3$  וגם  $x \neq 0$       ד.  $(-3,0), (3,0)$



ה.  $x=0$ .      ו. להלן סקיצה:

- (46)** א.  $a=1$       ב.  $-3 < x < 3$       ג.  $(-1.5, \sqrt{3})$       ד. יורדת:  $-3 < x < -1.5$ , עולה:  $-1.5 < x < 3$

- (47)** א.  $k=0.48$       ב. כן,  $(0.6, 0.57)$       ג.  $y = 0.74x + 0.1352$

- (48)** א. i.  $-\sqrt{k} < x < \sqrt{k}$       ii.  $x = \pm\sqrt{k}$       ב.  $f'(x) = \frac{k^2}{(k-x^2)^{1.5}} > 0$       ג.  $y = \sqrt{k}x$       ד.  $k=4$

$$g(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x+4}} \quad \text{א. (49)}$$

ב. i. לא נכון      ii. נכון

$$f(x) : \left(0, \frac{1}{2}\right), g(x) : \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{ג.}$$

iii. נכון      iv. נכון

ד. אסף צודק.

$$h(x) = \frac{x^2}{x-1} \quad \text{ב.}$$

iii. נכון

א. i. לא נכון      ii. נכון      (50)

$$\text{I} = h(x), \text{II} = f(x) \quad \text{ד.}$$

$$h(x) : x \neq 1, \text{ג.}$$

iv. נכון

iii. נכון

ii. לא נכון

i. לא נכון      (51)

$$\text{ב. } k = 24 \quad \text{ג. } \min(0,0), \max(\pm 4, 32\sqrt{2})$$

$$\text{ד. } \text{I} = g(x), \text{II} = f(x), \text{III} = h(x)$$

## תחומי קעירות ונקודות פיתול:

### סיכום כללי:

#### תחומי קעירות – הגדרה:

- פונקציה  $f(x)$  קעורה כלפי מטה (קמורה) בתחום  $[x_0, x_1]$  אם לכל  $x$  בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מעל לגרף הפונקציה.  
כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מטה יש למצוא תחום שבו:  $f''(x) < 0$ .
- פונקציה  $f(x)$  קעורה כלפי מעלה (קעורה) בתחום  $[x_0, x_1]$  אם לכל  $x$  בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מתחת לגרף הפונקציה.  
כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מעלה יש למצוא תחום שבו:  $f''(x) > 0$ .

#### נקודת פיתול – הגדרות:

- נקודת פיתול היא נקודה שבה הפונקציה עוברת מתחום קעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה ולהיפך.
- נקודת פיתול מקיימת:  $f''(x) = 0$  כאשר ערך הנגזרת השנייה משנה את סימנו בתחום שלפני ואחרי הנקודה המאפסת אותו.
- בנקודת פיתול המשיק לגרף הפונקציה חותך אותה ולא רק משיק לה מכיוון אחד.

### שאלות:

(52) מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה:  $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2$ .

(53) מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה:  $f(x) = \frac{3x-2}{x^2}$ .

(54) מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה:  $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x-1}}$ .

(55) מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה:  $f(x) = x(x-2)^3$ .

56 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{a}{x^2 + b}$ ,  $a, b$  פרמטרים.

הנקודה  $(-1, 1)$  היא נקודת פיתול של הפונקציה.  
מצא את ערכי הפרמטרים  $a, b$ .

57 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + 2$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. מציאת נקודות פיתול.
- ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
- ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

58 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{2x}{x - \sqrt{x}}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. מציאת נקודות פיתול.
- ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
- ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

59) חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים :

- i. מציאת תחום הגדרה.
- ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
- iii. מציאת נקודות קיצון וקביעת סוגן.
- iv. מציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- v. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- vi. מציאת נקודות הפיתול של הפונקציה.
- vii. מציאת תחומי הקעירות של הפונקציה.
- viii. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad \text{ב.} \qquad f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad \text{ד.} \qquad f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)} \quad \text{ו.} \qquad f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad \text{ה.}$$

$$f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1} \quad \text{ח.} \qquad f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad \text{ז.}$$

הערה: בסעיפים ו ו-ז יש לבצע חקירה ללא סעיפים vi ו-vii.

**תשובות סופיות:**

52 (1,7), (2,16) , קעירות כלפי מעלה :  $x > 2$  או  $x < 1$  , קעירות כלפי מטה :  $1 < x < 2$  .

53 (2,1) , קעירות כלפי מעלה :  $x > 2$  , קעירות כלפי מטה :  $0 \neq x < 2$  .

54 קיצון :  $\min(2,4)$  , פיתול :  $\left(4, \frac{8}{\sqrt{3}}\right)$  .

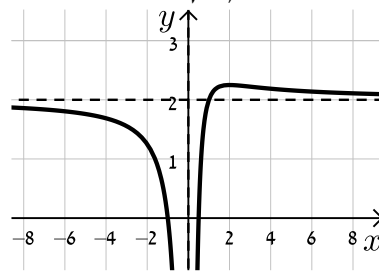
55 קיצון :  $\min\left(\frac{1}{2}, -\frac{27}{16}\right)$  , פיתול : (1,-1), (2,0) .

56 .  $a = 4, b = 3$

57 א.  $x \neq 0$  . ב.  $\max\left(2, 2\frac{1}{4}\right)$  . ג. עולה :  $0 < x < 2$  ; יורדת :  $x > 2, x < 0$  .

ד.  $\left(\frac{1}{2}, 0\right), (-1, 0)$  . ה.  $x = 0, y = 2$  . ו.  $\left(3, 2\frac{2}{9}\right)$  .

ז. קעירות כלפי מעלה :  $x > 3$  , קעירות כלפי מטה :  $0 \neq x < 3$  .

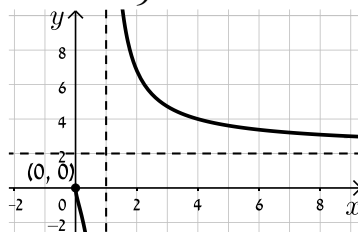


ח. להלן סקיצה :

58 א.  $1 \neq x > 0$  . ב. אין . ג. יורדת בכל תחום הגדרתה .

ד. אין . ה.  $x = 1, y = 2$  נקודת אי הגדרה : (0,0) . ו.  $\left(\frac{1}{9}, -1\right)$  .

ז. קעירות כלפי מעלה :  $x > 1$  או  $0 < x < \frac{1}{9}$  , קעירות כלפי מטה :  $\frac{1}{9} < x < 1$  .



ח. להלן סקיצה :

59 א. i.  $x \neq 0$  . ii. (1,0) . iii.  $x = 0, y = 0$  . iv.  $\max(2, 0.25)$  .

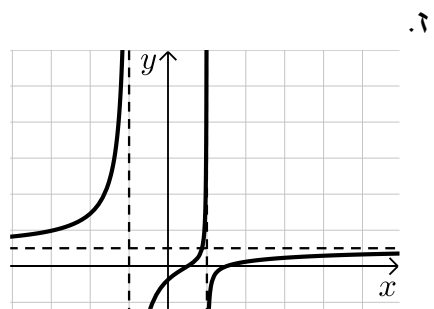
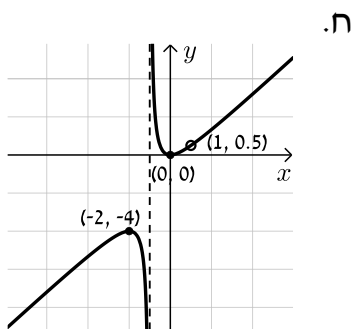
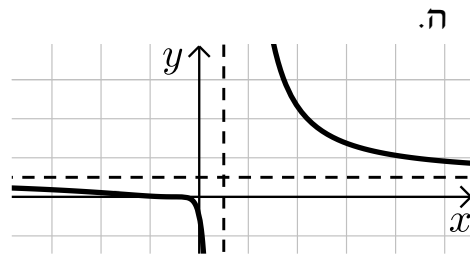
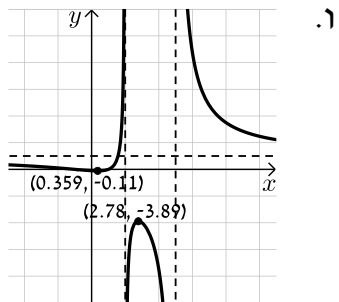
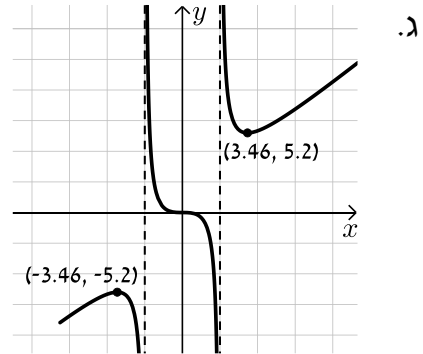
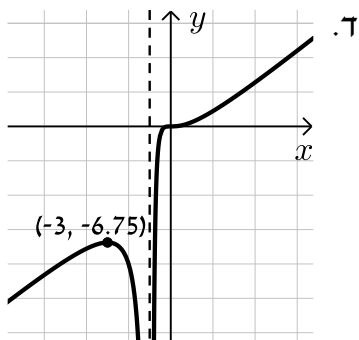
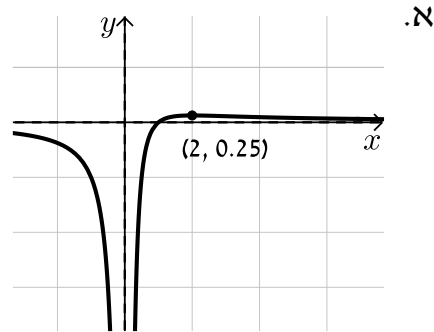
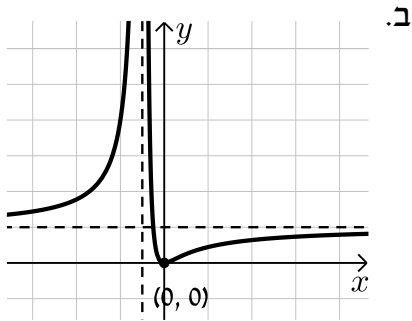
v. עולה :  $0 < x < 2$  , יורדת :  $x < 0, x > 2$  . vi.  $\left(3, \frac{2}{9}\right)$  .

vii. קעורה כלפי מעלה :  $x > 3$  , קעורה כלפי מטה :  $0 < x < 3, x < 0$  .

ב. i.  $x \neq -1$  . ii. (0,0) . iii.  $x = -1, y = 2$  . iv.  $\min(0,0)$  .

- v. עולה:  $x < -1$ ,  $x > 0$ , יורדת:  $-1 < x < 0$
- vi.  $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{9}\right)$
- vii. קעורה כלפי מעלה:  $-1 < x < \frac{1}{2}$ , קעורה כלפי מטה:  $x < -1$ ,  $x < \frac{1}{2}$
- ג. i.  $x \neq \pm 2$  ii.  $(0,0)$  iii.  $x = \pm 2$
- iv.  $\min(\sqrt{12}, 5.2)$ ,  $\max(-\sqrt{12}, -5.2)$
- v. עולה:  $x > \sqrt{12}$ ,  $x < -\sqrt{12}$ , יורדת:  $2 < x < \sqrt{12}$ ,  $-2 < x < 2$ ,  $-\sqrt{12} < x < -2$
- vi.  $(0,0)$
- vii. קעורה כלפי מעלה:  $x > 2$ ,  $-2 < x < 0$ , קעורה כלפי מטה:  $0 < x < 2$ ,  $x < -2$
- ד. i.  $x \neq -1$  ii.  $(0,0)$  iii.  $x = -1$  iv.  $\max(-3, -6.75)$
- v. עולה:  $x > -1$ ,  $x < -3$ , יורדת:  $-3 < x < -1$
- vi.  $(0,0)$
- vii. קעורה כלפי מעלה:  $x > 0$ , קעורה כלפי מטה:  $-1 < x < 0$ ,  $x < -1$
- ה. i.  $x \neq 1$  ii.  $(-1,0), (0,-1)$  iii.  $x = 1, y = 1$  iv. אין
- v. יורדת בכל ת.ה. vi.  $\left(-3, \frac{1}{8}\right), (-1,0)$
- vii. קעורה כלפי מעלה:  $-3 < x < -1$ ,  $x > 1$ , קעורה כלפי מטה:  $-1 < x < 1$ ,  $x < -3$
- ו. i.  $x \neq 2, 5$  ii.  $(0,-0.1), (-1,0), (1,0)$  iii.  $x = 2, x = 5, y = 1$
- iv.  $\min(0.359, -0.11)$ ,  $\max(2.78, -3.89)$
- v. עולה:  $2 < x < 2.78$ ,  $0.359 < x < 2$ , יורדת:  $x > 5$ ,  $2.78 < x < 5$ ,  $x < 0.359$
- ז. i.  $x \neq \pm 2$  ii.  $(3,0), (1,0), (0,-0.75)$  iii.  $x = \pm 2, y = 1$
- iv. אין v. יורדת בכל ת.ה.
- ח. i.  $x \neq \pm 1$  ii.  $(0,0)$  iii.  $x = -1$  iv.  $\min(0,0)$ ,  $\max(-2,-4)$
- v. עולה:  $x > 0$ ,  $x < -2$ ,  $x \neq 1$ , יורדת:  $-1 < x < 0$ ,  $-2 < x < -1$
- vi. אין vii. קעורה כלפי מעלה:  $x > -1$ ,  $x \neq 1$ , קעורה כלפי מטה:  $x < -1$

**סקיצות:**



## חקירת פונקציה עם פרמטר:

### סיכום כללי:

סיווג נקודות קיצון באמצעות  $y''$  :

אם הנקודה  $A(x_1, y_1)$  היא נקודת קיצון אז :

- אם  $f''(x_1) > 0$  הנקודה  $A(x_1, y_1)$  היא נקודת מינימום.
- אם  $f''(x_1) < 0$  הנקודה  $A(x_1, y_1)$  היא נקודת מקסימום.

### שאלות:

(1) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה:  $f(x) = x^3 - 12x$ .

(2) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה:  $f(x) = x^2 - 6x - 16$ .

(3) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה:  $f(x) = x^3 - 3b^2x$ ,  $b > 0$ , פרמטר. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(4) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{2x}{a^2 + x^2}$  ( $a > 0$ ). חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(5) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1-x^2}{(x-b)^2}$ ,  $(b > 1)$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(6) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 4x\sqrt{b^2 - x^2}$ ,  $(b > 0)$ .

חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(7) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 - m}{ax - 4}$ ,  $a, m$  פרמטרים קבועים כאשר:  $a > 0$ .

ידוע כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- $y$ .

- א. מצא את הערך של הפרמטר  $m$ .
- ב. הצב את הערך של  $m$  שמצאת בסעיף א' והבא באמצעות  $a$  את:
  - i. תחום ההגדרה של הפונקציה.
  - ii. נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
  - iii. האסימפטוטות לגרף הפונקציה המקבילות לצירים.
- ג. סרטט סקיצה וסמן בה את נקודות הקיצון ואת משוואות האסימפטוטות שהבעת באמצעות  $a$  בסעיף הקודם.
- ד. ידוע כי נקודת הקיצון שאינה על ציר ה- $y$  נמצאת במרחקים שווים מהצירים. מצא את הערך של הפרמטר  $a$ .
- ה. נתון הישר:  $y = k$ . מצא עבור אילו ערכים של  $k$  אין לישר ולגרף הפונקציה נקודות משותפות כלל.

**תשובות סופיות:**

(1)  $\min(2, -16)$  ,  $\max(-2, 16)$

(2)  $\min(3, -25)$

(3)  $\min(b, -2b^3)$  ,  $\max(-b, 2b^3)$

(4) א. כל  $x$  ב.  $\max\left(a, \frac{1}{a}\right)$  ,  $\min\left(-a, -\frac{1}{a}\right)$

ג. עולה:  $-a < x < a$  יורדת:  $x < -a$  ,  $x > a$

ד.  $(0, 0)$  ה. אסימפטוטה אופקית:  $y = 0$

(5) א.  $x \neq b$  ב.  $\max\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{b^2 - 1}\right)$  ג. עולה:  $x > b$  ,  $x < \frac{1}{b}$  יורדת:  $\frac{1}{b} < x < b$

ד.  $\left(0, \frac{1}{b^2}\right)$  ,  $(-1, 0)$  ,  $(1, 0)$  ה.  $x = b$  ,  $y = -1$

(6) א.  $-b \leq x \leq b$  ב.  $\min\left(-\frac{b}{\sqrt{2}}, -2b^2\right)$  ,  $\max\left(\frac{b}{\sqrt{2}}, 2b^2\right)$  ,  $\min(-b, 0)$  קצה,

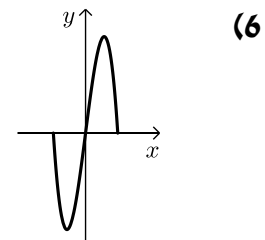
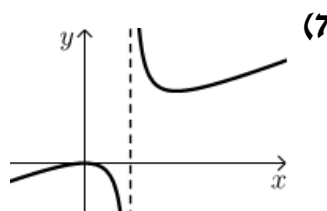
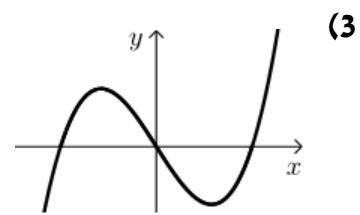
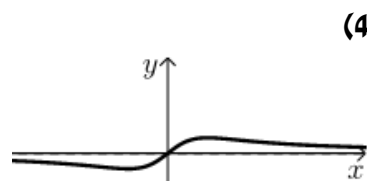
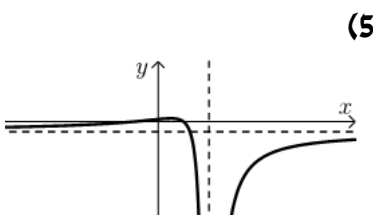
ג. עולה:  $-\frac{b}{\sqrt{2}} < x < \frac{b}{\sqrt{2}}$  , יורדת:  $\frac{b}{\sqrt{2}} < x < b$  ,  $-b < x < -\frac{b}{\sqrt{2}}$

ד.  $(b, 0)$  ,  $(-b, 0)$  ,  $(0, 0)$

(7) א.  $m = 0$  ב. i.  $x \neq \frac{4}{a}$  ב. ii.  $\max(0, 0)$  ,  $\min\left(\frac{8}{a}, \frac{16}{a^2}\right)$

ג. iii.  $x = \frac{4}{a}$  ד.  $a = 2$  ה.  $0 < k < 4$

**סקיצות לשאלות:**



## פונקציות ללא תבנית מפורשת:

### סיכום כללי:

#### הגדרת פונקציה:

- פונקציה  $f$  היא התאמה בין ערך  $x$  לערך  $y$  ומסומנת באופן הבא:  $f: x \rightarrow y$ .
- כך שלכל  $x$  מתאים ערך אחד בלבד של  $y$ . סימון אחר:  $y = f(x)$ .
- הנגזרת של פונקציה  $f(x)$  מסומנת  $f'(x)$ .

#### כללי הגזירה לפי כלל השרשרת:

- סימון הנגזרת:  $(f(x))' = f'(x)$
- גזירה של פונקציה בחזקה:  $(f^2(x))' = 2f(x)f'(x)$
- גזירה של הרכבת פונקציות:  $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

#### שאלות:

- (1) הפונקציה  $f(x)$  מקיימת:  $f(1) = 3$  ו- $f'(1) = -2$ .  
 חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $f(1) + 4$

ב.  $f'(1) + 4$

ג.  $\frac{f(1)+1}{f'(1)-1}$

ד.  $\sqrt{f(1)+f'(1)}$

- (2) נתונה פונקציה  $f$  המקיימת:  $f(4) = 0$  ו- $f'(4) = 1$ .

מגדירים:  $g(x) = 2x + f(2x)$ .

חשב את  $g(2)$  ואת  $g'(2)$ .

- (3) נתונה פונקציה המקיימת:  $f(8) = -1$  ו- $f'(8) = 1$ .
- א. נתון:  $g(x) = x^2 \sqrt{f(4x) + f'(x+6)}$ . חשב את  $g(2)$ .
- ב. נתון:  $h(x) = \frac{f(x+2) + x + 2}{f'(14-x) - 14 + x}$ . חשב את  $h(6)$ .
- (4) נתונה פונקציה המקיימת:  $f(9) = -4$ ,  $f'(9) = 3$ .
- מגדירים:  $g(x) = f^2(3x) + f'(x^2)$ . חשב את  $g(3)$ .
- (5) פונקציה  $f$  מקיימת:  $f(4) = 2$ ,  $f'(4) = 1$ .
- מגדירים:  $g(x) = f^2(x) + f(x) + x$ .
- חשב את  $g(4)$  ואת  $g'(4)$ .
- (6) פונקציה  $f$  מקיימת:  $f(1) = -3$ ,  $f'(1) = 3$ . מגדירים:  $g(x) = \frac{x \cdot f(x)}{x + f(x)}$ .
- חשב את  $g(1)$  ואת  $g'(1)$ .
- (7) פונקציה  $f$  מקיימת:  $f(-2) = 6$ ,  $f'(-2) = 2$ . מגדירים:  $g(x) = \sqrt{f^2(x) + 1}$ .
- חשב את  $g(-2)$  ואת  $g'(-2)$ .
- (8) פונקציה  $f$  מקיימת:  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$ ,  $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}$ . מגדירים:  $g(x) = 3x \cdot f(2x)$ .
- חשב את  $g\left(\frac{1}{4}\right)$  ואת  $g'\left(\frac{1}{4}\right)$ .
- (9) פונקציה  $f$  מקיימת:  $f(6) = \frac{2}{3}$ ,  $f'(6) = -\frac{3}{2}$ . מגדירים:  $g(x) = \frac{x+3+f(x+3)}{f(2x)+3}$ .
- חשב את  $g(3)$  ואת  $g'(3)$ .

**10** נתונה פונקציה המקיימת:  $f(8) = -3$ . מגדירים:  $g(x) = \frac{f(4x)+1}{f(x+6)+2}$ .

א. חשב את  $g(2)$ .

ב. חשב את  $f'(8)$  אם ידוע כי:  $g'(2) = 1$ .

ג. חשב את  $f'(8)$  אם ידוע כי:  $g'(2) = (f'(8))^2$  וכי  $f'(8) < 0$ .

**11** נתונה פונקציה המקיימת:  $f(3) = -2$ .

מגדירים:  $g(x) = \frac{x^2 \cdot f(x-2)}{f(2x-7)}$  וידוע כי  $g'(5) = -15$ .

חשב את  $g(5)$  ואת  $f'(3)$ .

**12** נתונה פונקציה שמקיימת:  $f(4) = \frac{1}{2}$ .

מגדירים:  $g(x) = x^2 \cdot f(x^2) + f'^2(x^2)$ .

א. הבע את  $g'(x)$  באמצעות  $f$ .

ב. חשב את  $g(-2)$  ואת  $g(2)$  אם ידוע כי  $f'(4) = 1$ .

ג. חשב את  $f'(4)$  אם ידוע כי  $g'(2) = 11$  ו-  $f''(4) = \frac{1}{4}$ .

## תשובות סופיות:

1. א. 7      ב. 2      ג.  $-\frac{4}{3}$       ד. 1
- (1)      א. 7      ב. 2      ג.  $-\frac{4}{3}$       ד. 1
- (2)      א. 7      ב. 2      ג.  $-\frac{4}{3}$       ד. 1
- (3)      א. 7      ב. 2      ג.  $-\frac{4}{3}$       ד. 1
- (4)      א. 7      ב. 2      ג.  $-\frac{4}{3}$       ד. 1
- (5)      א. 7      ב. 2      ג.  $-\frac{4}{3}$       ד. 1
- (6)      א. 7      ב. 2      ג.  $-\frac{4}{3}$       ד. 1
- (7)      א. 7      ב. 2      ג.  $-\frac{4}{3}$       ד. 1
- (8)      א. 7      ב. 2      ג.  $-\frac{4}{3}$       ד. 1
- (9)      א. 7      ב. 2      ג.  $-\frac{4}{3}$       ד. 1
- (10)      א. 7      ב. 2      ג.  $-\frac{4}{3}$       ד. 1
- (11)      א. 7      ב. 2      ג.  $-\frac{4}{3}$       ד. 1
- (12)      א. 7      ב. 2      ג.  $-\frac{4}{3}$       ד. 1

# מתמטיקה

פרק 22 - חשבון דיפרנציאלי - הקשר שבין גרף הפונקציה וגרף הנגזרת

תוכן העניינים

1. כללי ..... (ללא ספר)

# מתמטיקה

פרק 23 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות מעריכיות

תוכן העניינים

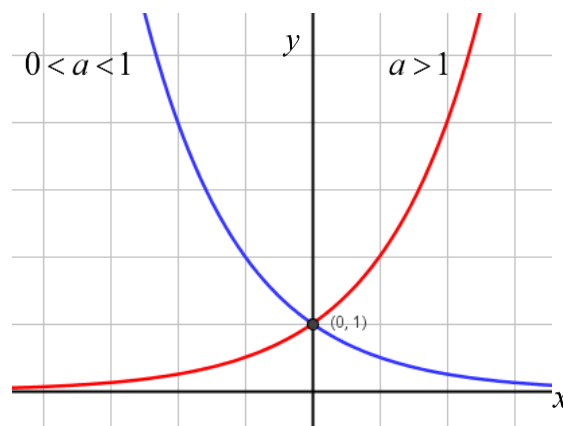
341	.....	1. הנגזרת של פונקציה מעריכית
345	.....	2. שימושי הנגזרת
346	.....	3. חקירה של פונקציה מעריכית

## הנגזרת של פונקציה מעריכית:

סיכום כללי:

הגדרות כלליות:

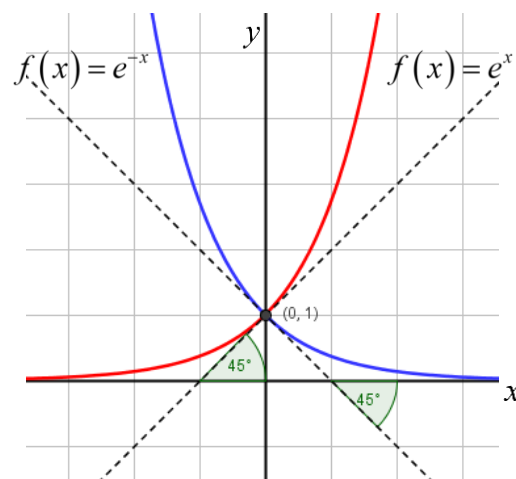
להלן תיאורים גרפיים של פונקציה מעריכית כללית מהצורה:  $f(x) = a^x$   
 עבור:  $a > 1$  ו-  $0 < a < 1$ :



תכונות כלליות:

1. הפונקציות מוגדרות לכל  $x$ .
2. הפונקציות תמיד חיוביות.
3. הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- $y$  בנקודה:  $(0, 1)$ .
4. עבור:  $a > 1$  הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור:  $0 < a < 1$  הפונקציה יורדת בכל ת.ה.

עבור הפונקציות  $f(x) = e^x$  ו-  $f(x) = e^{-x}$  נקבל:



**תכונות נוספות:**

1. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = e^x$  בנקודת החיתוך עם ציר ה- $y$  הוא 1.
2. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = e^{-x}$  בנקודת החיתוך עם ציר ה- $y$  הוא -1.

**נגזרות של פונקציות מעריכיות:**

הפונקציה	הנגזרת
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

**תזכורת - כללי הגזירה:**

מספר כלל	הפונקציה	תיאור	הנגזרת
1.	$y = a \cdot f(x)$	מכפלה בקבוע	$y' = a \cdot f'(x)$
2.	$y = f(x) + g(x)$	סכום פונקציות	$y' = f'(x) + g'(x)$
3.	$y = f(x) \cdot g(x)$	מכפלת פונקציות	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4.	$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	מנת פונקציות	$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
5.	$y = f(g(x))$	פונקציה מורכבת	$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

## שאלות:

(1) גזור את הפונקציות הבאות (סכום פונקציות):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = 3e^x + e^{2x} + e^{-x} + 2x + 1 & \text{ב. } f(x) = e^{x^2-3x} + ex \\ \text{ג. } f(x) = 2^{3x} & \text{ד. } f(x) = 3^{x^2} + 4^{-x} \end{array}$$

(2) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלת פונקציות):

$$\text{א. } f(x) = x \cdot e^x \quad \text{ב. } f(x) = x^2 \cdot e^{4x} \quad \text{ג. } f(x) = (x+1) \cdot 2^x$$

(3) גזור את הפונקציות הבאות (מנת פונקציות):

$$\text{א. } f(x) = \frac{x^2}{e^x} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

(4) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציה מורכבת):

$$\text{א. } f(x) = 5(e^{2x} - 1)^3 \quad \text{ב. } f(x) = \sqrt{e^{2x} + e^{-2x}} \quad \text{ג. } f(x) = \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^x + 1}}$$

(5) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות שונות):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = e^{2x} & \text{ב. } f(x) = e^x + 1 \\ \text{ג. } f(x) = e^{\frac{1}{x}} & \text{ד. } f(x) = (x^2 + 1)e^x \\ \text{ה. } f(x) = e^{-x}(x^2 + 4x + 1) & \text{ו. } f(x) = e^{3x-2} \\ \text{ז. } f(x) = e^x \cdot \frac{1}{x} & \text{ח. } f(x) = x^3 e^{2x} \\ \text{ט. } f(x) = e^{-2x}(x+4) & \text{י. } f(x) = e^{2x+1}(1-x) \\ \text{יא. } f(x) = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} & \text{יב. } f(x) = \frac{x^3}{e^{3x}} \\ \text{יג. } f(x) = \frac{2+x^2}{e^{x^2}} & \text{יד. } f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^{-x} + e^x} \\ \text{טו. } f(x) = \frac{x^2+1}{e^{-x}} & \text{טז. } f(x) = \frac{e^x}{1-e^{x+1}} \end{array}$$

**תשובות סופיות:**

(1) א.  $3e^x + 2e^{2x} - e^{-x} + 2$  ב.  $(2x-3)e^{x^2-3x} + e$  ג.  $3\ln 2 \cdot 2^{3x}$  ד.  $2x \ln 3 \cdot 3^{x^2} - \ln 4 \cdot 4^{-x}$

(2) א.  $(1+x)e^x$  ב.  $2xe^{4x}(1+2x)$  ג.  $2^x(1+x\ln 2 + \ln 2)$

(3) א.  $\frac{x(2-x)}{e^x}$  ב.  $\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

(4) א.  $30e^{2x}(e^{2x}-1)^2$  ב.  $\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}}}$  ג.  $\frac{5e^{4x}+6e^{3x}}{2\sqrt{(e^x+1)^3}}$

(5) א.  $2e^{2x}$  ב.  $e^x$  ג.  $-\frac{e^{1/x}}{x^2}$  ד.  $(x+1)^2 e^x$

ה.  $e^{-x}(-x^2-2x+3)$  ו.  $3e^{3x-2}$

ז.  $\frac{e^x(x-1)}{x^2}$  ח.  $x^2 e^{2x}(3+2x)$  ט.  $-e^{-2x}(2x+7)$

י.  $e^{2x+1}(1-2x)$

יא.  $\frac{e^{-1/x}}{x^2}$  יב.  $\frac{3x^2(1-x)}{e^{3x}}$  יג.  $\frac{-2x(x^2+1)}{e^{x^2}}$

יד.  $\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$  טו.  $\frac{(x+1)^2}{e^{-x}}$  טז.  $\frac{e^x}{(1-e^{x+1})^2}$

## שימושי הנגזרת:

### שאלות:

- (6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = e^x$  בנקודה  $A(1, e)$ .
- (7) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = e^{2x} + xe^{-x}$  בנקודה שבה  $x = 0$ .
- (8) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה  $f(x) = (e+1)e^x - e^{2x}$  בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר  $y = e$ .
- (9) נתונה הפונקציה:  $y = e^{2x} + 3ex$ .  
 לפונקציה העבירו משיק דרך הנקודה שבה:  $x = 2$ .  
 מצא את משוואת המשיק.
- (10) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = a \cdot 3^{2x-1} + 3^{x-b}$  בנקודה  $(1, 15)$  הוא  $21 \ln 3$ .  
 מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

### תשובות סופיות:

- (6)  $y = ex$
- (7)  $y = 3x + 1$
- (8)  $y = (-e^2 + e)x + e^2$ ,  $y = (e-1)x + e$
- (9)  $y = 2e^4x + 3ex - 3e^4$
- (10)  $b = -1$ ,  $a = 2$

## חקירה של פונקציה מעריכית:

### שאלות:

(11) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } f(x) = \frac{2x-1}{e^x} & \text{ב. } f(x) = \frac{3}{e^x-1} & \text{ג. } f(x) = \frac{x+1}{e^x-5} \\
 \text{ד. } f(x) = \frac{1}{e^{2x}-3e^x+2} & \text{ה. } f(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^x} & \text{ו. } f(x) = \frac{\sqrt{e^x-1}}{5x-2} \\
 \text{ז. } f(x) = \sqrt{e^{2x}-4e^x+3} & & 
 \end{array}$$

(12) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = x^2e^x$ .

(13) מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{e^x}{x-2}$ .

(14) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{ax^2+bx+9}{e^x}$ .

הפונקציה משיקה לציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 1.5$ . מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$  ואת נקודות הקיצון של הפונקציה.

(15) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 8^x + p \cdot 2^x + q$ . לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה  $(\log_2 3, -19)$ . מצא את ערכי הפרמטרים  $p$  ו- $q$ .

(16) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = e^{2x} + e^x$ .

(17) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}}$ .

(18) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{e^x + 5}{e^x - 1}$ .

(19) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x - 5}$

(20) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(21) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^{2x} - 5e^x + 6}$

(22) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$

(23) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{x^3 - 1}{e^x}$

(24) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{x-1}{e^{3x} - e}$

(25) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = (x-3)e^x$

(26) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

(27) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 + a}{be^x}$ . לפונקציה יש נקודת פיתול בנקודה  $(1, \frac{2}{e})$ . מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$  ואת נקודת הפיתול השנייה של הפונקציה.

**(28)** חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים הבאים:

1. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
2. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
3. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
4. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

$$f(x) = (x^2 + 1)e^x \quad \text{ב.} \qquad f(x) = (x-1)e^x \quad \text{א.}$$

$$f(x) = e^{x^2-x} \quad \text{ד.} \qquad f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{4}x^2} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^{x+1}} \quad \text{ו.} \qquad f(x) = \frac{2}{e^{x^2} + 1} \quad \text{ה.}$$

**(29)** נתונה הפונקציה  $f(x) = (x-3)e^x$ . חקור על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(30)** נתונה הפונקציה  $f(x) = e^{2x} - 8e^x + 6x + 10$ . חקור על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(31)** נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{4x}{e^{0.5x^2}}$ . חקור על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(32)** נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$ . חקור על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(33)** נתונה הפונקציה  $f(x) = 2x \cdot 3^x$ . חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(34)** נתונה הפונקציה  $f(x) = 2e^{\frac{x}{x^2+1}}$ . חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- לאילו ערכי  $m$  יש למשוואה  $f(x) = m$  בדיוק פתרון אחד?

**(35)** נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ . חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- מציאת נקודות פיתול של הפונקציה.
- כתיבת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.

ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$(36) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \frac{e^{3x}}{12x^2 + 1}$$

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$(37) \text{ שיפוע המשיק לגרף הפונקציה: } f(x) = \frac{1}{e^{3x^2+6x+k}} \text{ בנקודה שבה } x=1 \text{ הוא } -\frac{12}{e^{10}}$$

- מצא את ערך הפרמטר  $k$  וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- הוכח על סמך הסקיצה את אי-השוויון הבא:  $0 < \frac{1}{e^{3x^2+6x+1}} \leq e^2$ .

$$(38) \text{ נתונה הפונקציה הבאה: } f(x) = e^{2x} + ae^x + b \text{ . גוזרים את הפונקציה פעמיים}$$

$$\text{וידוע כי כאשר } x = \ln \frac{2}{3} \text{ הנגזרות מקיימות: } f'(x) + f''(x) = 8$$

- מצא את  $a$ .
- משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא:  $y = 16x + 7 - 16 \ln 2$ .
- מצא את שיעור ה- $x$  של נקודת ההשקה.
- מצא את  $b$ .
- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

$$(39) \text{ נתונות הפונקציות הבאות: } f(x) = 6x - e^x \text{ ו- } g(x) = ae^x - e^{2x} + b$$

ידוע כי לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה אותו שיעור  $x$  וכי שתיהן נפגשות על ציר ה- $y$ .

- מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .
- הראה כי לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה משותפים.

**40** לגרף הפונקציה:  $f(x) = ax^2 \cdot e^{-bx^2}$  יש נקודת קיצון:  $\left(2, \frac{4}{e}\right)$ ,  $a, b \neq 0$ .

- מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$  וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון הנוספות של הפונקציה וקבע את סוגן.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מעבירים ישר:  $y = k$ . באיזה תחום ערכים צריך להימצא  $k$  כדי שהישר יחתוך את גרף הפונקציה ב-4 נקודות שונות?

**41** לפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 - 6x - 7}{e^{ax-1}}$  יש קיצון בנקודה שבה:  $x = 1$ .

- מצא את ערך הפרמטר  $a$ .
- האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון נוספות? אם כן מצא אותן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**42** הישר  $x = \sqrt{6}$  הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה:  $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 + m}$ .

- מצא את ערך הפרמטר  $m$  וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**43** נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^3 \cdot e^{2x}$ .

- מצא את הנקודות המקיימות:  $f'(x) = 0$  וקבע כמה מהן הן נקודות קיצון.
- מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- בכמה נקודות חותך הישר  $y = -0.01$  את גרף הפונקציה?

44 נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = e^{2x} + ae^x + b$ . גוזרים את הפונקציה פעמיים

$$f'(x) + f''(x) = 12 \text{ הנגזרות מקיימות: } x = \ln \frac{2}{3}$$

א. מצא את  $a$ .

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא:  $y = 22x + 28 - 22 \ln 2$ .

ב. מצא את שיעור ה- $x$  של נקודת ההשקה.

ג. מצא את  $b$ .

ד. האם הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$ ? אם כן מצא את הנקודות.

45 נתונה הפונקציה:  $f(x) = x \cdot a^x$ ,  $(a > 0)$ .

$$\text{לפונקציה יש נקודת קיצון שבה: } x = -\frac{1}{\ln 2}$$

א. מצא את  $a$ .

ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

הנקודה שבה  $x = 2$  היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$

$$\text{עם גרף הפונקציה: } g(x) = x^2 \cdot 2^x - kx \cdot 2^x$$

ג. מצא את  $k$ .

ד. מצא נקודה נוספת שבה הגרפים נחתכים.

46 נתונה הפונקציה:  $f(x) = 3^{2x} + 2 \cdot 3^{1-x}$ .

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה

עם ציר ה- $y$ .

ב. הוכח כי גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה- $x$ .

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

## תשובות סופיות:

$$(11) \quad \text{א. כל } x \quad \text{ב. } x \neq 0 \quad \text{ג. } x \neq \ln 5 \quad \text{ד. } x \neq \ln 2, x \neq 0 \quad \text{ה. כל } x$$

$$\text{ו. } 0 \leq x \neq \frac{2}{5} \quad \text{ז. } x \leq 0, x \geq \ln 3$$

$$(12) \quad \min(0,0), \max\left(-2, \frac{4}{e^2}\right)$$

$$(13) \quad \min(3, e^3)$$

$$(14) \quad \min(1.5, 0), \max(3.5, 0.483), b = -12, a = 4$$

$$(15) \quad p = -27, q = 35$$

$$(16) \quad y = 0$$

$$(17) \quad y = 0$$

$$(18) \quad x = 0, y = -5, y = 1$$

$$(19) \quad x = \ln 5, y = -\frac{1}{5}$$

$$(20) \quad y = -1, y = 1$$

$$(21) \quad \text{נקודת אי הגדרה: } (\ln 2, -1), x = \ln 3, y = -\frac{1}{3}, y = 0$$

$$(22) \quad x = 0, y = 0$$

$$(23) \quad y = 0$$

$$(24) \quad x = \frac{1}{3}, y = 0$$

$$(25) \quad y = 0$$

$$(26) \quad \text{נקודת אי הגדרה: } (0,0), x = 0$$

$$(27) \quad \left(3, \frac{10}{e^3}\right), a = 1, b = 1$$

$$(28) \quad \text{א. כל } x \quad \text{ב. } (0, -1), (1, 0) \quad \text{ג. } \min(0, -1) \quad \text{ד. עולה: } x > 0 \quad \text{יורדת: } x < 0$$

$$\text{ב. כל } x \quad \text{ג. } (0, 1) \quad \text{ד. עולה: } x < -1, x > -1 \quad \text{פיתול } \left(-1, \frac{2}{e}\right)$$

$$\text{ג. כל } x \quad \text{ד. } (0, 0) \quad \text{א. } \max\left(2, \frac{4}{e}\right), \min(0, 0), \max\left(-2, \frac{4}{e}\right)$$

$$\text{ב. עולה: } x < -2, 0 < x < 2 \quad \text{יורדת: } x > 2, -2 < x < 0$$

$$\text{ד. כל } x \quad \text{א. } (0, 1) \quad \text{ב. } \min(0.5, e^{-0.25}) \quad \text{ג. עולה: } x > 0.5 \quad \text{יורדת: } x < 0.5$$

- ה.1. כל  $x$  .2.  $(0,1)$  .3.  $\max(0,1)$  .4. עולה:  $x < 0$  יורדת:  $x > 0$
- ו.1. כל  $x$  .2.  $(0, 2e^{-1})$  .3.  $\min(0, 2e^{-1})$  .4. עולה:  $x > 0$  יורדת:  $x < 0$
- (29) א. כל  $x$  .ב.  $\min(2, -e^2)$  .ג. תחומי עלייה:  $x > 2$  תחומי ירידה:  $x < 2$   
 ד.  $(3,0)$ ,  $(0,-3)$
- (30) א. כל  $x$  .ב.  $\max(0,3)$ ,  $\min(\ln 3, 1.59)$  .ג. תחומי עלייה:  $x > \ln 3$  או  $x < 0$  תחומי ירידה:  $0 < x < \ln 3$  .ד.  $(0,3)$
- (31) א. כל  $x$  .ב.  $\min\left(-1, -\frac{4}{e^{0.5}}\right)$ ,  $\max\left(1, \frac{4}{e^{0.5}}\right)$  .ג. תחומי עלייה:  $-1 < x < 1$  תחומי ירידה:  $x > 1$  או  $x < -1$  .ד.  $(0,0)$
- (32) א. כל  $x$  .ב.  $\max\left(3, \frac{27}{e^3}\right)$  .ג. עולה:  $x < 3$ , יורדת:  $x > 3$   
 ד.  $(0,0)$
- (33) א. כל  $x$  .ב.  $\min(-0.91, -0.67)$  .ג. עולה:  $x > -0.91$  יורדת:  $x < -0.91$   
 ד.  $(0,0)$
- (34) א. כל  $x$  .ב.  $\max(1, 2\sqrt{e})$ ,  $\min\left(-1, \frac{2}{\sqrt{e}}\right)$  .ג. עולה:  $-1 < x < 1$  יורדת:  
 ד.  $(0,2)$  .ה.  $y = 2$  .ו.  $m = 2$ ,  $m = 2\sqrt{e}$ ,  $m = \frac{2}{\sqrt{e}}$
- (35) א.  $x \neq 0$  .ב.  $\min\left(\frac{1}{2}, \frac{e^2}{4}\right)$  .ג. עולה:  $x > \frac{1}{2}$ , יורדת:  $0 \neq x < \frac{1}{2}$   
 ד. אין
- (36) א. כל  $x$  .ב.  $\max\left(\frac{1}{6}, \frac{3\sqrt{e}}{4}\right)$ ,  $\min\left(\frac{1}{2}, \frac{e^{1.5}}{4}\right)$  .ג. עולה:  $x > \frac{1}{2}$ ,  $x < \frac{1}{6}$  יורדת:  
 ד.  $(0,1)$  .ה.  $\frac{1}{6} < x < \frac{1}{2}$
- (37) א.  $k = 1$ ,  $f(x) = \frac{1}{e^{3x^2+6x+1}}$  .ב.  $(-1, e^2)$  .ג.  $a = 4$  .ד. ניתן לראות עפ"י הגרף כי ערך הפונקציה  $f(x)$  נמצא בתחום  $0 < f(x) \leq e^2$
- (38) א.  $a = 4$  .ב.  $x = \ln 2$  .ג.  $b = -5$  .ד.  $(0,0)$
- (39) א.  $a = 12$ ,  $b = -12$  .ב. עולות:  $x < \ln 6$  יורדות:  $x > \ln 6$

א.  $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{4}x^2}$ ,  $a=1$ ,  $b=0.25$  (40)  
 ב.  $\max\left(-2, \frac{4}{e}\right)$ ,  $\min(0,0)$  ג.

ג.  $(0,0)$  ה.  $0 < k < \frac{4}{e}$

א.  $a = \frac{1}{3}$  (41)  
 ב. כן:  $\left(11, \frac{48}{e^{\frac{2}{3}}}\right)$  ג. עולה:  $1 < x < 11$  יורדת:  $x < 1, x > 11$

ד.  $(-1,0)$ ,  $(7,0)$ ,  $(0,-7e)$

א.  $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 - 6}$ ,  $m = -6$  (42)  
 ב.  $\max\left(-2, -\frac{1}{2e^4}\right)$ ,  $\min\left(3, \frac{e^6}{3}\right)$  ג.  $\left(0, -\frac{1}{6}\right)$

א.  $x = 0, -1.5$ . נקודת הקיצון היא:  $\min\left(-1.5, -3\frac{3}{8}e^{-3}\right)$  ג.  $y = 0$  (43)

ד. 2 נקודות.

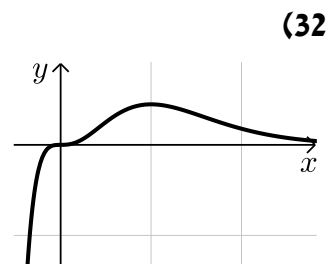
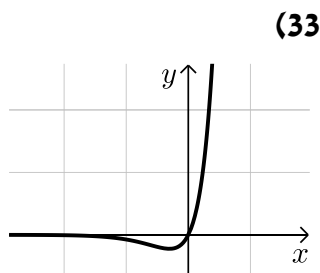
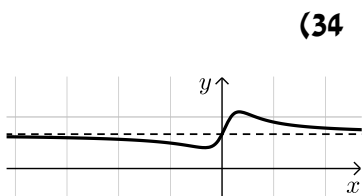
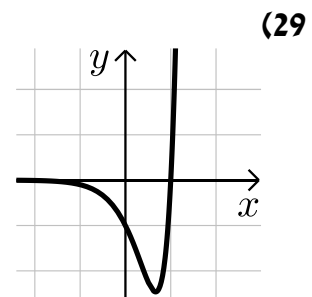
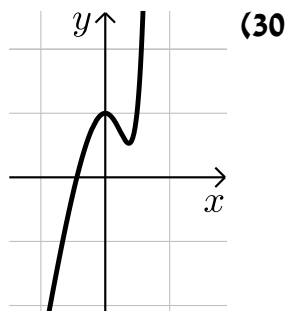
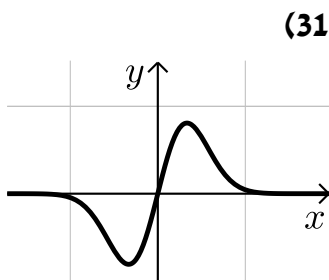
א.  $a = 7$  (44)  
 ב.  $x = \ln 2$  ג.  $b = 10$  ד. לא.

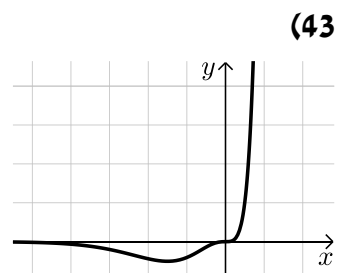
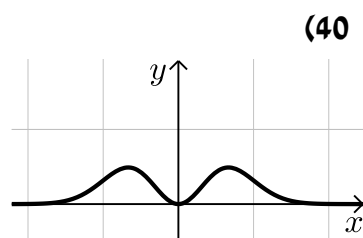
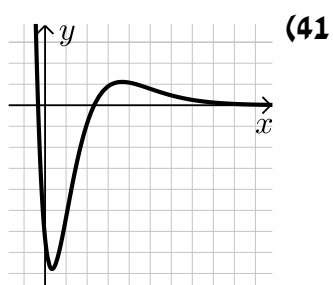
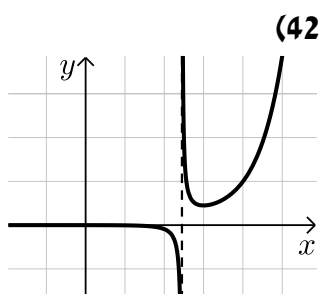
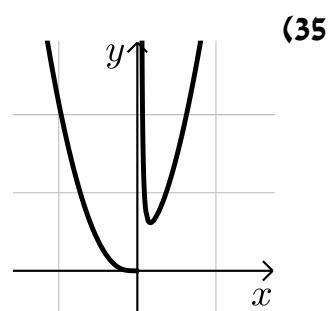
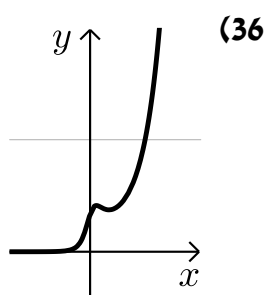
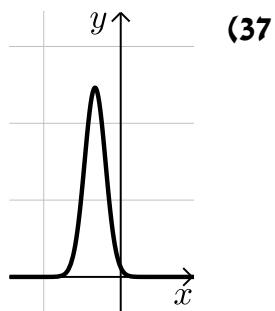
א.  $a = 2$  (45)  
 ב. עולה:  $x > -\frac{1}{\ln 2}$  יורדת:  $x < -\frac{1}{\ln 2}$  ג.  $k = 1$

ד.  $(0,0)$

א.  $y = -x \ln 81 + 7$  (46)  
 ג.  $\min\left(\frac{1}{3}, \sqrt[3]{243}\right)$

סקיצות לשאלות החקירה:





# מתמטיקה

פרק 24 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות

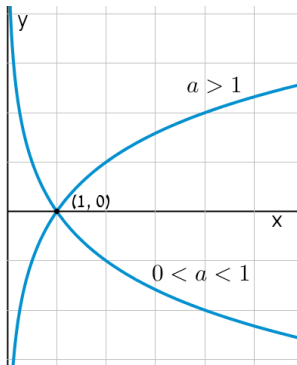
תוכן העניינים

- 1. הנגזרת של פונקציה לוגריתמית ..... 357
- 2. שימושי הנגזרת ..... 362
- 3. חקירה של פונקציה לוגריתמית ..... 363

## הנגזרת של פונקציה לוגריתמית:

**סיכום כללי:**

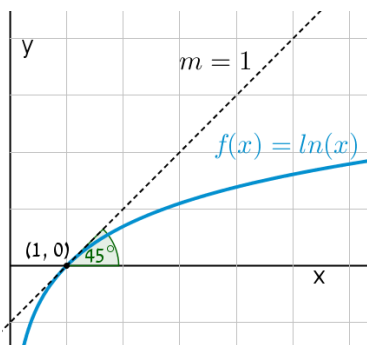
**הגדרות כלליות:**



להלן תיאורים גרפיים של פונקציה לוגריתמית כללית מהצורה:  $f(x) = \log_a x$  עבור  $a > 1$  ו-  $0 < a < 1$ :

**תכונות כלליות:**

- לפונקציות תחום הגדרה  $x > 0$ .
- הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- $x$  בנקודה  $(1, 0)$ .
- עבור  $a > 1$  הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור  $0 < a < 1$  הפונקציה יורדת בכל ת.ה.



עבור הפונקציות  $f(x) = \ln x = \log_e x$  נקבל כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$  הוא 1:

**תחום הגדרה של פונקציה לוגריתמית:**

תחום ההגדרה של פונקציה לוגריתמית מהצורה:  $y = \log(f(x))$  הוא:  $f(x) > 0$ .

## נגזרות של פונקציות לוגריתמיות:

הפונקציה	הנגזרת
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
$y = \log_a f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \ln f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

## שאלות:

1) גזור את הפונקציות הבאות (גזירה לוגריתמית יסודית עם ביטויים פנימיים שונים):

א.  $f(x) = 3 \ln x + 4 \ln(x+2) - \ln(5x-1)$     ב.  $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$

ג.  $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$     ד.  $f(x) = \ln(e^x + 1)$

ה.  $f(x) = \ln(\cos x)$     ו.  $f(x) = \log_2 x + 5 \log_3(2x-1)$

2) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלה ומנה של פונקציות):

א.  $f(x) = x \ln x$     ב.  $f(x) = (3x+1)^2 \ln x$     ג.  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

ד.  $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2}$     ה.  $f(x) = \sqrt{\ln x + x}$

3) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציות מורכבות):

א.  $f(x) = \ln^3 x$     ב.  $f(x) = 3 \ln^2 x$

ג.  $f(x) = x^2 \ln^2 x$     ד.  $f(x) = \frac{\ln^2 x + 1}{(\ln x + 1)^2}$

4) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות שונות):

א. $f(x) = \ln(x+2)$	ב. $f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3$
ג. $f(x) = x^2 \ln x$	ד. $f(x) = x^3 \ln x$
ה. $f(x) = \ln e^{2x}$	ו. $f(x) = e^x \ln x$
ז. $f(x) = e^{-x^2} \ln x$	ח. $f(x) = x^2(2 \ln x - 1)$
ט. $f(x) = \ln(x^2)$	י. $f(x) = \ln(x^4)$
יא. $f(x) = (\ln x)^4$	יב. $f(x) = x \ln x - \ln x^2$
יג. $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$	יד. $f(x) = \ln \sqrt{x}$
טו. $f(x) = \sqrt{\ln x}$	טז. $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

5) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות אתגר):

א. $f(x) = \ln \frac{x+2}{x}$	ב. $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$
ג. $f(x) = \ln \frac{x-3}{x+3}$	ד. $f(x) = \ln \frac{(x-5)^3}{(x+1)^2}$
ה. $f(x) = \ln \sqrt{x^2 - 1}$	ו. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$
ז. $f(x) = e^{\sqrt{\ln x}}$	ח. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}}$
ט. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$	י. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+5x}{1-5x}}$
יא. $f(x) = \frac{\ln \sqrt[3]{x}}{x}$	יב. $f(x) = \frac{(\ln x)^3}{x}$
יג. $f(x) = \frac{x}{\ln(x^2)}$	יד. $f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x}$
טו. $f(x) = \frac{x}{\ln^4 x}$	



$$\frac{3\ln^2 x - \ln^3 x}{x^2} \quad \text{י.ב.}$$

$$\frac{\ln x - 4}{\ln^5 x} \quad \text{ט.ו.}$$

$$\frac{1 - 3\ln \sqrt[3]{x}}{3x^2} \quad \text{י.א.}$$

$$\frac{2(\ln^4 x - 1)}{x \ln^3 x} \quad \text{י.ד.}$$

$$\frac{5}{1 - 25x^2} \quad \text{י.}$$

$$\frac{\ln(x^2) - 2}{\ln^2(x^2)} \quad \text{י.ג.}$$

## שימושי הנגזרת:

### שאלות:

(6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \ln x$  בנקודה  $A(e, 1)$ .

(7) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{\ln^2 x + a}{\ln x + b}$  בנקודה  $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$  הוא  $\frac{e}{3}$ .  
מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

(8) הגרפים של הפונקציות  $f(x) = \ln x$  ו- $g(x) = 1 - \ln x$  נחתכים בנקודה  $A$  ברביע הראשון.  
בנקודה  $A$  העבירו משיק ל- $f(x)$ .  
מצא את משוואת המשיק והוכח שמשיק זה עובר דרך הראשית.

(9) לפונקציה  $g(x) = \frac{\ln x^2}{x}$  העבירו משיק בנקודה שבה  $x = e^2$ .  
מצא את משוואת המשיק.

(10) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $y = x \ln(x^2 + 1)$  בנקודה שבה  $x = 1$ .

### תשובות סופיות:

(6)  $y = \frac{1}{e}x$

(7)  $a = 2, b = -2$

(8)  $y = \frac{1}{e}x$

(9)  $y = -\frac{2}{e^4}x + \frac{6}{e^2}$

(10)  $y = \ln 2 \cdot x + x - 1$

## חקירה של פונקציה לוגריתמית:

### שאלות:

11 מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \ln x$	ב. $f(x) = \ln(x^2)$
ג. $f(x) = \log_3(x^2 - 8x - 20)$	ד. $f(x) = \ln(e^x - 4)$
ה. $f(x) = \frac{x-1}{\ln x - 1}$	ו. $f(x) = \frac{1}{\ln^2 x - 2 \ln x - 3}$
ז. $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$	

12 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = 2 \ln x - x^2$ .

13 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = x^2 \ln x$ .

14 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{\sqrt{2 \ln x - 1}}{x}$ .

15 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$ .

16 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{a \ln x + b}{x}$ . הנקודה  $(e^2, \frac{1}{e^2})$  היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

17 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{a \ln^2 x + b \ln x}{(\ln x + 1)^2}$ . הנקודה  $(\sqrt[3]{e}, -\frac{1}{8})$  היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

18 מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \ln(x-3)$ .

19 מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{1}{\ln x - 1}$ .

(20) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{2\ln x - 1}{\ln x + 1}$ .

(21) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln^2 x - 4}$ .

(22) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

(23) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\ln^2 x + 1}$ .

(24) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = x \ln x + 2$ .

(25) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ . מצא את נקודת הפיתול של הפונקציה.

(26) חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים הבאים:

- i. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ii. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- iii. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- iv. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

$y = x \ln x$ ב.	$y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3 \ln x$ א.
$y = \sqrt{x} \ln x$ ד.	$y = x \ln x - x$ ג.
$y = \ln(x^2 + 1)$ ו.	$y = x^2 \ln x$ ה.

**(27)** נתונה הפונקציה  $f(x) = 2x \ln^2 x$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(28)** נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x}{\ln x - 1}$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- תחום הגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא לאלו ערכי  $k$  הישר  $y = k$  חותך את הפונקציה בשתי נקודות.

**(29)** נתונה הפונקציה  $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- תחום הגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(30)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{\ln x}$ .

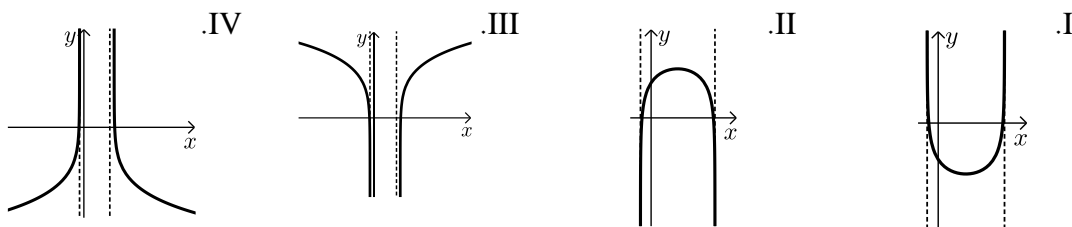
- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- הוכח כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.
- מגדירים פונקציה נוספת:  $g(x) = \ln x$ .
- מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.
- הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$  והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה  $g(x)$ . ידוע כי לנקודות A ו-B אותו שיעור  $x$ ,  $(x_A = x_B)$ .
- מצא את שיעור ה- $x$  של שתי הנקודות אם ידוע כי המשיקים לגרפים של הפונקציות בנקודות אלו מקבילים.

**(31)** נתונה שתי הפונקציות הבאות:  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ ,  $g(x) = \frac{\ln x}{x}$

- א. קבע אילו מהמשפטים הבאים נכונים ואלו שגויים.  
 נמק זאת ע"י חישוב מתאים ותקן במשפטים השגויים את הטעות.
- לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.
  - לשתי הפונקציות יש נקודת קיצון מאותו סוג ובעלות שיעור  $x$  זהה.
  - לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה זהים.
  - לשתי הפונקציות יש אסימפטוטות אנכיות.
- ב. בחרים באקראי שתי נקודות, אחת על כל גרף, כך ששיעור ה- $x$  שלהן זהה. הוכח כי מכפלת שיעורי ה- $y$  של כל זוג נקודות כאלו שווה ל-1.

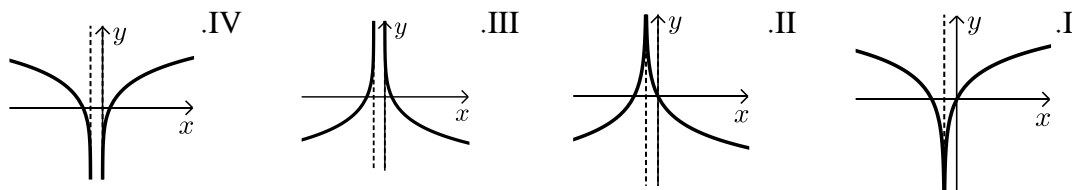
**(32)** נתונה הפונקציה הבאה:  $y = \ln(x^2 - 6x - 7)$

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.  
 ב. מהן האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לציר ה- $y$ ?  
 ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.  
 ד. לפניך 4 גרפים: I, II, III, ו-IV. איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.



**(33)** נתונה הפונקציה:  $y = \ln(x^2 + 2x + 1)$

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.  
 ב. מהי האסימפטוטה של הפונקציה המקבילה לציר ה- $y$ ?  
 ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.  
 ד. לפניך 4 גרפים: I, II, III, ו-IV. איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.



ה. העזר בגרף שבחרת וכתוב את תחומי השליליות של הפונקציה.

34 לפניך הפונקציה הבאה :  $f(x) = \ln(1 - \ln x)$ .

- מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- הוכח כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

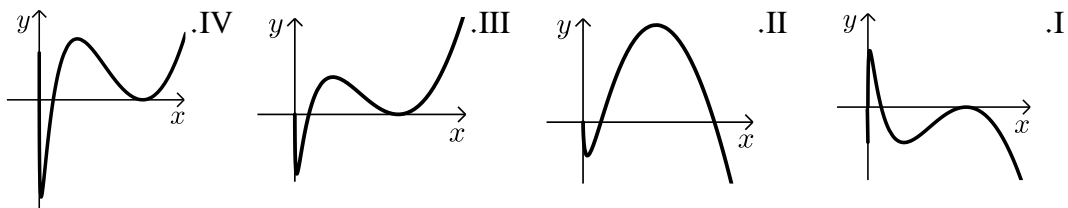
35 נתונה הפונקציה הבאה :  $y = \ln \frac{2x+1}{x-1}$ .

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- הראה כי גרף הפונקציה יורד בכל תחום הגדרתו.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

36 נתונה הפונקציה הבאה :  $f(x) = x(\ln^3 x + 2\ln^2 x)$ .

- הראה כי נגזרת הפונקציה היא :  $f'(x) = \ln^3 x + 5\ln^2 x + 4\ln x$ .
- מצא את התחום בו הפונקציה עולה.
- ענה על השאלות הבאות :
  - מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
  - מצא את התחום בו הפונקציה חיובית.

ד. לפניך 4 גרפים. קבע איזה מהם מתאר את הפונקציה  $f(x)$  ונמק את בחירתך.



37 נתונה הפונקציה :  $f(x) = \ln^3 x - 3\ln x$ .

- מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הפונקציה  $g(x) = \ln x$ .

38) ענה על הסעיפים הבאים :

א. פתור את המשוואה הבאה :  $\ln(x+e) - \ln(x\sqrt{e}) = \ln 2 - 0.5$

נתונה הפונקציה :  $f(x) = \ln(x+e) - \ln(x\sqrt{e})$

ב. הראה כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה :  $x = e$ .

39) נתונה הפונקציה הבאה :  $y = \frac{x+a}{\ln(x+a)}$  , פרמטר חיובי,  $a \neq 1$

א. הבע באמצעות  $a$  את :

i. תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. הנקודה המקיימת  $y' = 0$ .

iii. נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

iv. האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.

ב. ידוע כי גרף הפונקציה עולה רק בתחום :  $x > e - 2$ . מצא את  $a$ .

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום  $x > -1$ .

ד. נתון הישר :  $y = k$ . מצא בסקיצה את תחום הערכים של  $k$  עבורו לישר ולגרף הפונקציה לא תהיה אף נקודה משותפת.

40) נתונה הפונקציה הבאה :  $y = \ln x + \frac{1}{x}$

א. ענה על הסעיפים הבאים :

i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ii. יש לגרף הפונקציה אסימפטוטה מקבילה לציר  $y$  ?

אם כן מצא אותה.

ב. מצא את נקודת הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגה.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של גרף הפונקציה.

**תשובות סופיות:**

(11) א.  $x > 0$     ב.  $x \neq 0$     ג.  $x > 10$  או  $x < -2$     ד.  $x > \ln 4$

ה.  $0 < x \neq e$     ו.  $x > 0$  וגם  $x \neq e^3, e^{-1}$     ז.  $x \geq e$

(12)  $\max(1, -1)$

(13)  $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right)$

(14)  $\max\left(e, \frac{1}{e}\right)$  קצה,  $\min(\sqrt{e}, 0)$

(15)  $\min(4, -1)$

(16)  $a = 1, b = -1$

(17)  $a = 1, b = -1$

(18)  $x = 3$

(19) נקודת אי הגדרה  $(0, 0)$ ,  $y = 0, x = e$

(20) נקודת אי הגדרה  $(0, 2)$ ,  $y = 2, x = \frac{1}{e}$

(21) נקודת אי הגדרה  $(e^2, \frac{1}{4})$ ,  $(0, 0)$ ;  $y = 0, x = \frac{1}{e^2}$

(22)  $x = 0, y = 0$

(23) נקודת אי הגדרה  $(0, 0)$

(24) נקודת אי הגדרה  $(0, 2)$

(25)  $\left(\sqrt{e^3}, \frac{3}{2\sqrt{e^3}}\right)$

(26) א. i.  $x > 0$     iii.  $\max(1, -3.5), \min(3, \ln 27 - 7.5)$

iv. עולה:  $0 < x < 1, x > 3$  יורדת:  $1 < x < 3$     ב. i.  $x > 0$     ii.  $(1, 0)$

iii.  $\min(e^{-1}, -e^{-1})$     iv. עולה:  $x > e^{-1}$  יורדת:  $0 < x < e^{-1}$

ג. i.  $x > 0$     ii.  $(e, 0)$     iii.  $\min(1, -1)$     iv. עולה:  $x > 1$  יורדת:  $0 < x < 1$

ד. i.  $x > 0$     ii.  $(1, 0)$     iii.  $\min\left(e^{-2}, -\frac{2}{e}\right)$     iv. עולה:  $x > e^{-2}$  יורדת:  $0 < x < e^{-2}$

ה. i.  $x > 0$  ii.  $(1, 0)$  iii.  $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right)$  iv. עולה:  $x > \frac{1}{\sqrt{e}}$  יורדת:  $0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$

ו. i. כל  $x$  ii.  $(0, 0)$  iii.  $\min(0, 0)$  iv. עולה:  $x > 0$  יורדת:  $x < 0$

(27) א.  $x > 0$  ב.  $\max\left(\frac{1}{e^2}, \frac{8}{e^2}\right), \min(1, 0)$

ג. עלייה:  $x > 1$  או  $0 < x < \frac{1}{e^2}$ , ירידה:  $\frac{1}{e^2} < x < 1$  ד.  $(1, 0)$ .

(28) א.  $0 < x \neq e$  ב.  $\min(e^2, e^2)$  ג. עלייה:  $x > e^2$ , ירידה:  $0 < x < e^2$

ו.  $k > e^2$  ד. אין.

(29) א.  $x > 0$  ב.  $\min(4, -1)$  ג. עלייה:  $x > 4$ , ירידה:  $0 < x < 4$

ד.  $(1, 0), (16, 0)$ .

(30) א.  $x \geq 1$  ב. מתקבל:  $0 < f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} > 0$  ג.  $(1, 0), (e, 1)$

ד.  $x = \sqrt[4]{e}$ .

(31) א. i. לא נכון. תחום ההגדרה של  $f(x)$  הוא:  $x > 0, x \neq 1$  ותחום ההגדרה של  $g(x)$  הוא:  $x > 0$ .

ii. לא נכון. לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה  $x = e$  אך עבור  $f(x)$  מדובר במינימום ועבור  $g(x)$  מדובר במקסימום.

iii. לא נכון. עבור  $f(x)$ : עולה:  $x > e$  יורדת:  $0 < x < e, x \neq 1$ .  
ועבור  $g(x)$ : עולה:  $0 < x < e$  יורדת:  $x > e$ . iv. נכון.

ב. לגבי כל נקודה נאמר כי שיעור ה- $y$  שלה הוא:  $y = \frac{x}{\ln x}$  ו- $y = \frac{\ln x}{x}$ .

נכפול:  $y = \frac{x}{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x} = 1$ .

(32) א.  $x < -1, x > 7$  ב.  $x = -1, 7$  ג. עולה:  $x > 7$  יורדת:  $x < -1$ .

ד. III. הסבר: באיורים I ו-II גרף הפונקציה לא בתחום. באיור IV תחומי העלייה והירידה הפוכים.

(33) א.  $x \neq -1$  ב.  $x = -1$  ג. עולה:  $x > -1$  יורדת:  $x < -1$ .

ד. I. הסבר: באיור II תחומי העלייה והירידה הפוכים.

באיורים III ו-IV יש אסימפטוטה מיותרת. ה.  $x \neq -1, -2 < x < 0$ .

(34) א.  $0 < x < e$ . (שימו לב כי תנאי ת.ה. הם:  $1 - \ln x > 0$  וגם  $x > 0$ ).

ב.  $f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{1 - \ln x} = -\frac{1}{x(1 - \ln x)} < 0$ . ולכן הפונקציה יורדת בת.ה.

ג.  $(1, 0)$ .

(35) א.  $x < -\frac{1}{2}, x > 1$ . ב.  $x = -\frac{1}{2}, 1$ . ג.  $(-2, 0)$ .

ד. מתקבל:  $y' = \frac{-3}{(2x+1)(x-1)} < 0$ .

(36) ב.  $x > 1, e^{-4} < x < e^{-1}$ .

ג. i. 2 נקודות והן:  $(e^{-2}, 0)$ ,  $(1, 0)$ . הנקודה שבה:  $x = 0$  לא קיימת עקב ת.ה.

ii.  $x \neq 1, x > e^{-2}$ . ד. III – בראשית הצירים יש חור ולא אסימפטוטה.

שאר הנתונים כפי שהתקבלו בסעיפים הקודמים.

(37) א.  $x > 0$ . ב.  $(e^{-\sqrt{3}}, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(e^{\sqrt{3}}, 0)$ . ג.  $\min(e, -2)$ ,  $\max(e^{-1}, 2)$ .

ה.  $(1, 0)$ ,  $(e^2, 2)$ ,  $(e^{-2}, -2)$ .

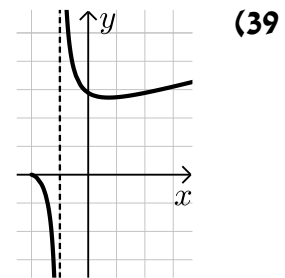
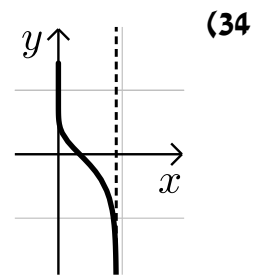
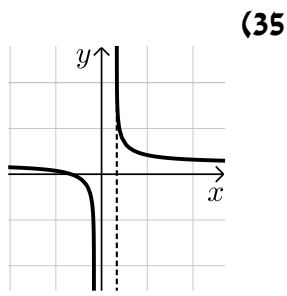
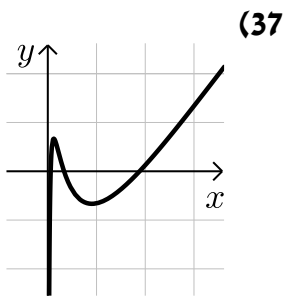
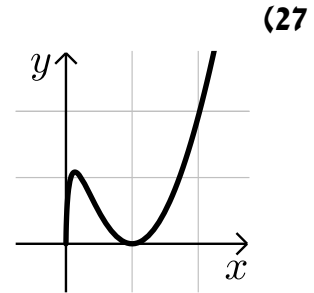
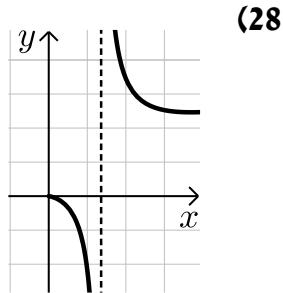
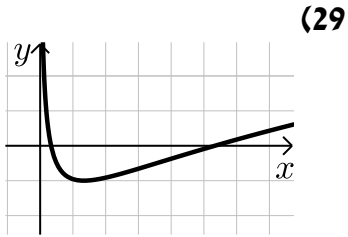
(38) א.  $x = e$ . ב. מתקבל:  $y' = \frac{-e}{x(x+e)} < 0$ . ג.  $y = -\frac{1}{2e}x + \ln 2$ .

(39) א. i.  $x > -a, x \neq 1 - a$ . ii.  $(e - a, e)$ . iii.  $(0, \frac{a}{\ln a})$ .

iv.  $x = 1 - a$ . ב.  $a = 2$ . ד.  $k < e$ .

(40) א. i.  $x > 0$ . ii.  $x = 0$ . ב.  $\min(1, 1)$ . ג. עולה:  $x > 1$ , יורדת:  $0 < x < 1$ .

## סקיצות לשאלות:



# מתמטיקה

פרק 25 - חשבון דיפרנציאלי - בעיות קיצון

תוכן העניינים

373	1. בעיות קיצון יסודיות עם מספרים
375	2. בעיות קיצון בהנדסת המישור
379	3. בעיות קיצון בפונקציות וגרפים
383	4. בעיות קיצון בהנדסת המרחב
385	5. בעיות קיצון עם תשובה נתונה
386	6. בעיות קיצון שונות בהנדסת המישור
390	7. בעיות קיצון שונות בהנדסת המרחב
392	8. בעיות קיצון שונות בפונקציות וגרפים

## בעיות קיצון יסודיות עם מספרים:

### סיכום כללי:

### שלבי עבודה:

- נגדיר את אחד הגדלים בשאלה כ- $x$ .
- נבטא את שאר הגדלים בשאלה באמצעות  $x$ .
- נבנה פונקציה שמבטאת את מה שרצינו שיהיה מינימלי/מקסימלי.
- נגזור את הפונקציה, נשווה לאפס ונחלץ ערך/ערכי ה- $x$ .
- נוודא שערך ה- $x$  מהסעיף הקודם הוא אכן מינימום/מקסימום באמצעות "  $y$  (או טבלה).
- ננסח את התשובה לשאלה המקורית.

### שאלות:

- (1) מבין כל זוגות המספרים שסכומם 14 מצא את הזוג שמכפלתו מקסימלית.
- (2) נתונים שלושה מספרים שסכומם 24. המספר הראשון שווה למספר השני. מצא מהם המספרים אם ידוע שמכפלתם מקסימלית.
- (3) מצא את המספר החיובי שאם נוסיף לו את המספר ההופכי לו הסכום המתקבל יהיה מינימלי.
- (4) נתונים שלושה מספרים שסכומם הוא 36. ידוע שמספר אחד זהה לשני.
  - א. מה צריכים להיות שלושת המספרים כדי שמכפלתם תהיה מקסימלית?
  - ב. כיצד תשתנה התוצאה אם מספר אחד יהיה גדול פי 2 מהשני במקום שווה לו?
  - ג. באיזה מקרה תהיה מכפלה גדולה יותר?
- (5)  $x$  ו- $y$  הם שני מספרים המקיימים:  $x + 6y = 60$ .
  - א. הבע את  $y$  באמצעות  $x$ .
  - ב. מה צריכים להיות המספרים  $x$  ו- $y$  כדי שמכפלת ריבועיהם תהיה מקסימלית?
  - ג. מהי המכפלה הנ"ל?

**תשובות סופיות:**

(1)  $.7, 7$

(2)  $.8, 8, 8$

(3)  $.1$

(4)  $12, 12, 12$  א.

ב.  $16, 12, 8$  ג. מקרה א'.

(5) א.  $y = 10 - \frac{x}{6}$  ב.  $x = 30, y = 5$  ג.  $M = 22500$ .

## בעיות קיצון בהנדסת המישור:

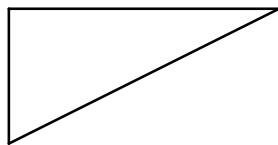
### שאלות:

6) מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם 24 ס"מ מצא את אורך בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

7) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם  $a$ , מצא את בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

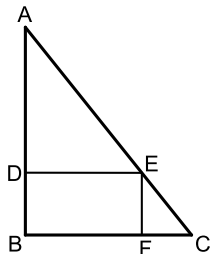
ב. הוכח: מבין כל המשולשים שווי השוקיים בעלי אותו היקף, המשולש בעל השטח הגדול ביותר הוא משולש שווה צלעות.



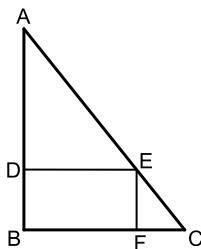
8) במשולש ישר זווית סכום אורכי הניצבים הוא 12 ס"מ.  
א. מה צריך להיות אורך כל ניצב, כדי שטח המשולש יהיה מקסימלי?

ב. מהו השטח המקסימלי?

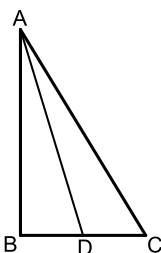
ג. מה יהיה אורך היתר במשולש במקרה זה?



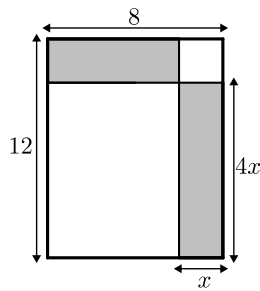
9) במשולש ישר זווית  $ABC$  ( $\sphericalangle B = 90^\circ$ ) הנקודה  $E$  נמצאת על היתר  $AC$  כך שהמרובע  $EDBF$  הוא מלבן. נתון:  $AB = 20$  ס"מ,  $BC = 16$  ס"מ. מצא את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.



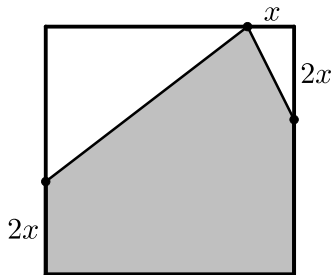
10) במשולש ישר זווית  $ABC$  ( $\sphericalangle B = 90^\circ$ ) הנקודה  $E$  נמצאת על היתר  $AC$  כך שהמרובע  $EDBF$  הוא מלבן. נתון:  $AB = a$ ,  $BC = b$ . מצא את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.



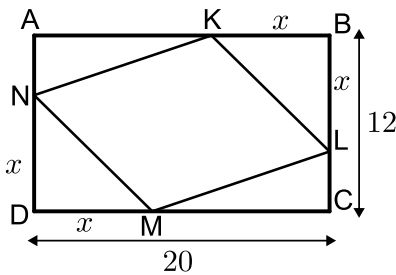
11) במשולש ישר הזווית  $ABC$  ( $\sphericalangle B = 90^\circ$ ), הוא תיכון לניצב  $BC$  ידוע כי סכום אורכי הניצבים הוא 20 ס"מ. מצא מה צריכים להיות אורכי הניצבים עבורם אורך התיכון  $AD$  יהיה מינימלי.



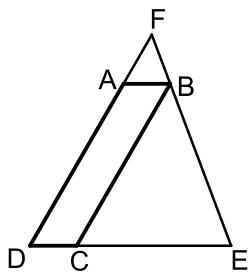
**12** נתון מלבן שאורכי צלעותיו הם 8 ס"מ ו-12 ס"מ כמתואר באיור. מקצים קטעים באורכים של  $x$  ו- $4x$  על צלעות המלבן כך שנוצרים המלבנים המסומנים. מצא את  $x$  עבורו סכום שטחי המלבנים הוא מינימלי.



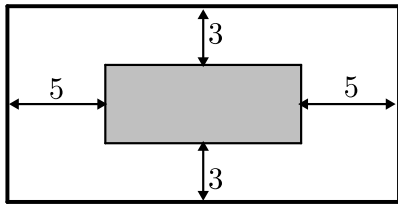
**13** נתון ריבוע בעל אורך צלע של 16 ס"מ. מקצים קטע שאורכו  $x$  על הצלע העליונה ושני קטעים שאורכם  $2x$  על הצלעות הצדדיות כמתואר באיור כך שנוצר המחומש המסומן. מצא מה צריך להיות ערכו של  $x$  עבורו שטח המחומש יהיה מקסימלי.



**14** הנקודות  $K, L, M, N$  מקצות קטעים שווים במלבן  $ABCD$  כך ש:  $BK = BL = DM = DN = x$ . צלעותיו של המלבן הן 20 ס"מ ו-12 ס"מ.  
א. הבע באמצעות  $x$  את סכום שטחי המשולשים:  $\triangle AKN + \triangle KBL + \triangle CLM + \triangle DNM$   
ב. מצא מה צריך להיות  $x$  כדי ששטח המרובע  $LKNM$  יהיה מקסימלי.  
ג. מה הוא השטח של המרובע  $LKNM$  במקרה זה?



**15** המרובע  $ABCD$  הוא מקבילית. מהקדקוד  $B$  מעבירים את הצלע  $EF$  הנפגשת עם המשכי הצלעות  $AD$  ו- $DC$ . ידוע כי מידות המקבילית הן:  $AB = 2$  ס"מ,  $AD = 8$  ס"מ. מסמנים את אורך הצלע  $DE$  ב- $x$ .  
א. הבע באמצעות  $x$  את אורך הצלע  $DF$ .  
ב. מצא את  $x$  עבורו סכום הצלעות  $DE$  ו- $DF$  הוא מינימלי.  
ג. מה הוא הסכום המינימלי?



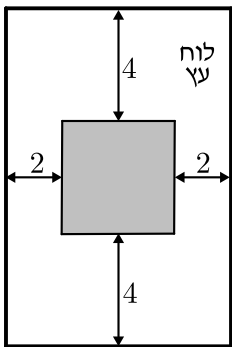
16) חיים הוא אחד מעובדי חברת "דפוס יהלום בע"מ". תפקידו של חיים הוא להדביק גלויות על משטחי קרטון בעלי שטח מינימלי כך שישארו רווחים של 3 ס"מ מקצוות הקרטון העליון והתחתון, ו-5 ס"מ מצדי הקרטון (ראה איור).

יום אחד קיבל חיים שיחת טלפון מלקוח אנונימי ששאל אותו את השאלה הבאה: "יש לי מגוון גדול של גלויות במידות שונות אשר שטחן זהה והוא 60 סמ"ר.

מה הן המידות של גלויה אשר שטח משטח הקרטון שלה יהיה מינימלי?"

א. עזור לחיים לענות ללקוח על שאלתו והראה דרך חישוב.

ב. מה יהיו מידות הקרטון עבור הגלויה המסוימת?

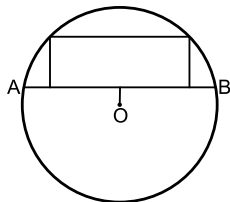


17) אלינה קיבלה משימה בשיעור מלאכה: יש להכין מסגרת לתמונה מלוח עץ ששטחו הכולל הוא 242 סמ"ר כך שעובי המסגרת בצדדים יהיה 2 ס"מ ובקצוות העליון והתחתון - 4 ס"מ (ראה איור).

כדי לבחור את מידות לוח העץ, אלינה צריכה לדעת את השטח המקסימלי שעליה לנסר עבור המקום לתמונה (השטח המסומן).

א. מה יהיו מידות לוח העץ שאלינה צריכה להזמין עבור המשימה?

ב. מה יהיה השטח המקסימלי לתמונה עבור המידות שאלינה בחרה?

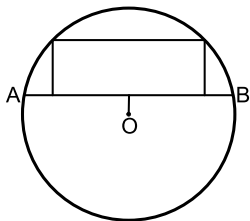


18) במעגל שמרכזו O ורדיוסו  $10\sqrt{5}$  ס"מ העבירו

מיתר AB שמרחקו ממרכז המעגל הוא 4 ס"מ.

במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט.

מצא את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.

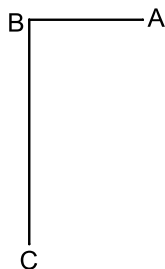


19) במעגל שמרכזו O ורדיוסו R העבירו מיתר AB

שמרחקו ממרכז המעגל הוא a.

במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט.

מצא את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.



20) שני הולכי רגל יוצאים בו זמנית לדרכם, האחד

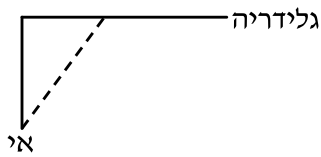
מעיר A מערבה לעיר B והשני מעיר B דרומה לעיר C.

המרחק בין הערים A ו-B הוא 20 ק"מ.

מהירות הרוכב שיצא מ-A היא 4 קמ"ש ומהירות הרוכב השני 2 קמ"ש

כעבור כמה זמן מיציאת הרוכבים יהיה המרחק ביניהם מינימלי?

מצא גם את המרחק המינימלי.



- (21)** אדם נמצא על אי במרחק 0.5 ק"מ מהחוף. על החוף, במרחק של 3 ק"מ מהנקודה הקרובה ביותר לאי, נמצאת גלידריה. האדם שוחה במהירות של 8 קמ"ש ורץ על החוף במהירות של 10 קמ"ש. לאיזה מרחק מהגלידריה עליו לשחות כדי להגיע לגלידריה בזמן הקצר ביותר?



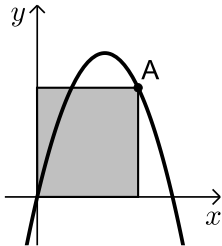
- (22)** אדם מתכנן לבנות מרפסת בביתו ורוצה להציב מעקה סביב המרפסת. שטח המרפסת המתוכנן הוא 24 מ"ר. מחיר מעקה בחזית המרפסת (BC) הוא 120 ₪ למטר ומחיר מעקה בצדי המרפסת הוא 40 ₪ למטר. מה צריכים להיות ממדי המרפסת כדי שמחיר המעקה יהיה מינימלי?

**תשובות סופיות:**

- (6) 8 ס"מ.  
 (7) א.  $a/3$ . ב. הוכחה.  
 (8) א. 6 ס"מ ו-6 ס"מ. ב. 18 סמ"ר.  
 (9) 80 סמ"ר.  $S =$   
 (10)  $\frac{ab}{4}$  יחידות שטח.  
 (11) 4 ס"מ, 16 ס"מ.  
 (12)  $x = 2.75$ .  
 (13)  $x = 6$ .  
 (14) א.  $2x^2 - 32x + 240$ . ב.  $x = 8$ .  
 (15) א.  $DF = \frac{8x}{x-2}$ . ב.  $x = 6, L = \frac{x^2 + 6x}{x-2}$ .  
 (16) א. 6 ס"מ על 10 ס"מ. ב. 12 ס"מ על 20 ס"מ.  
 (17) א. 11 ס"מ על 22 ס"מ. ב.  $S = 98$ .  
 (18) 92 ס"מ.  
 (19)  $2\sqrt{5R} - 2a$  יחידות אורך.  
 (20) 4 שעות, המרחק:  $\sqrt{80}$  ק"מ.  
 (21)  $2\frac{1}{3}$  ק"מ.  
 (22) 4·6
- ג.  $6\sqrt{2} \approx 8.48$  ס"מ.  
 ג. 128 סמ"ר.  $S =$   
 ג.  $L = 18$ .

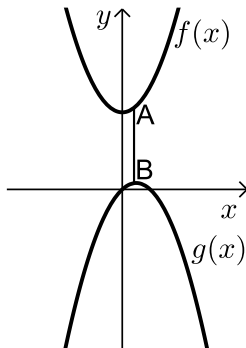
## בעיות קיצון בפונקציות וגרפים:

### שאלות:



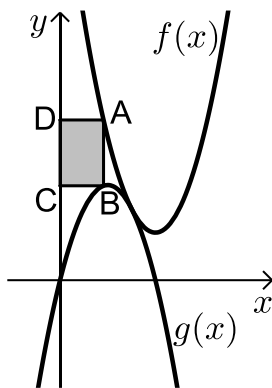
(23) נתונה הפונקציה  $f(x) = 6x - x^2$ .

מנקודה A שעל הפונקציה ברביע הראשון הורידו אנכים לצירי השיעורים כך שנוצר מלבן כמתואר בשרטוט. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



(24) נתונות הפונקציות:  $f(x) = x^2 + 12$  ו-  $g(x) = 2x - x^2 - 1$ .

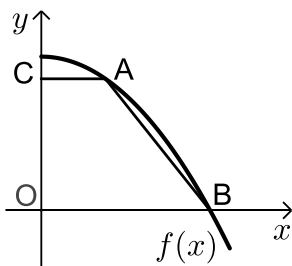
כמתואר: הנקודות A ו-B נמצאות בהתאמה על הגרפים של הפונקציות:  $f(x)$  ו-  $g(x)$  כך שהקטע AB מקביל לציר ה-  $y$ . מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.



(25) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

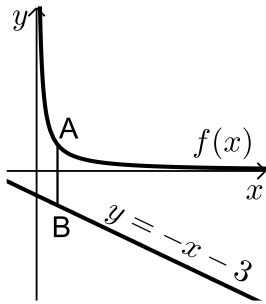
הפונקציות:  $f(x) = x^2 - 8x + 18$  ו-  $g(x) = -x^2 + 4x - 1$ .

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$  והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה  $g(x)$  כך שהקטע AB מקביל לציר ה-  $y$ . מעבירים אנכים מהנקודות A ו-B לציר ה-  $y$  כך שנוצר מלבן (המסומן). נסמן את שיעור ה-  $x$  של הנקודה A ב-  $t$ .  
א. הבע באמצעות  $t$  את שטח המלבן המסומן.  
ב. מצא את ערכו של  $t$  עבורו שטח המלבן הוא מקסימלי.  
ג. מה יהיה שטח המלבן במקרה זה?



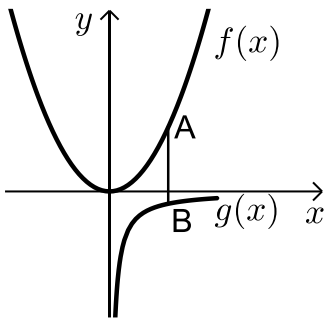
(26) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 36 - x^2$ .

על גרף הפונקציה ברביע הראשון מסמנים נקודה A. מהנקודה A מעבירים ישר המקביל לציר ה-  $x$  שחותך את ציר ה-  $y$  בנקודה C. הנקודה B היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-  $x$  ו- O ראשית הצירים.  
א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח הטרפז ABOC יהיה מקסימלי?  
ב. מה יהיה שטח הטרפז במקרה זה?



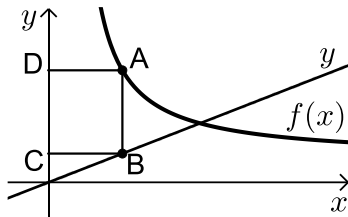
**(27)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{4}{x}$  ונתון הישר:  $y = -x - 3$ .

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$  והנקודה B נמצאת על גרף הישר כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$ . מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.



**(28)** נתונות שתי פונקציות:  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$  ו- $g(x) = -\frac{1}{x}$ .

מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה  $f(x)$  ונקודה B על גרף הפונקציה  $g(x)$  כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$ . מצא את שיעורי הנקודות A ו-B עבור אורך הקטע AB מינימלי.



**(29)** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

הפונקציה:  $f(x) = \frac{x+8}{x-1}$  והישר:  $y = \frac{9x}{25}$ .

הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים של הפונקציות כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$ .

מהנקודות A ו-B מותחים אנכים לציר ה- $y$  כך שנוצר המלבן ABCD. נסמן את שיעור ה- $x$  של הנקודה A ב- $t$ .

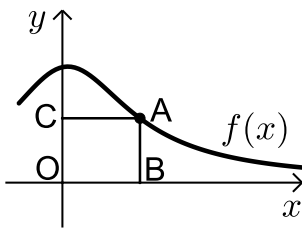
א. הבע באמצעות  $t$  את היקף המלבן ABCD.

ב. מצא את  $t$  עבורו היקף המלבן הוא מינימלי.

ג. מה יהיה ההיקף במקרה זה?

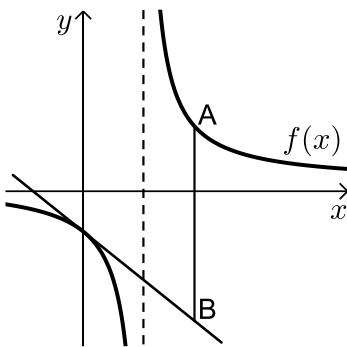
**(30)** נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{2}{x-1}$  והישר  $y = 2x$ .

בין הישר והפונקציה ברביע הראשון חסמו מלבן. מצא את מידות המלבן שהיקפו מינימלי.



**(31)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x+12}{x^2+3}$  בתחום:  $x \geq 0$ .

- מקצים נקודה A על גרף הפונקציה וממנה מורידים אנכים לצירים כך שנוצר המלבן ABCO כמתואר באיור.
- א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A עבורם שטח המלבן יהיה מקסימלי.
- ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A עבורם שטח המלבן יהיה מינימלי בתחום הנ"ל.



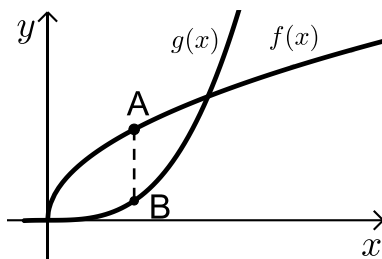
**(32)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x+10}{x-2}$ .

- מעבירים משיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ .
- א. מצא את משוואת המשיק.
- מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה ברביע הראשון ו-B על גרף המשיק כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$ .

- ב. מצא את שיעורי הנקודה A עבורן אורך הקטע AB הוא מינימלי.
- ג. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?

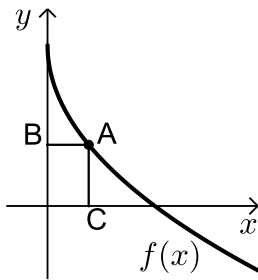
**(33)** נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x^3}$ .

- מצא שיעורי נקודה על הפונקציה ברביע הראשון, שסכום הקטעים שהמשיק בה מקצה על הצירים הוא מינימלי.



**(34)** נתונות הפונקציות  $f(x) = 2\sqrt{x}$  ו- $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1$ .

- את הנקודה A שעל  $f(x)$  חיברו עם הנקודה B, שנמצאת מתחתיה על  $g(x)$  כך שהקטע AB מקביל לציר ה- $y$ .
- מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?



- 35 באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:  $f(x) = 6 - 3\sqrt{x}$ . הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה ברביע הראשון. מהנקודה A מותחים אנכים לצירים אשר חותכים אותם בנקודות B ו-C כמתואר באיור. נסמן את שיעור ה-x של הנקודה A ב-t. א. הבע באמצעות t את סכום הקטעים AC+AB. ב. מצא את ערכו של t עבורו סכום הקטעים הנ"ל יהיה מינימלי.

- 36 נתונות הפונקציות:  $f(x) = 1 - x^2$  ו-  $g(x) = bx^2$  ( $b > 0$ ). הפונקציות נחתכות בנקודות A ו-B. מצא את ערכו של b שבעבורו הקטע AO מינימלי (O - ראשית הצירים).

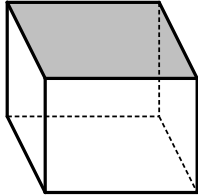
**תשובות סופיות:**

- 23 . A(4,8)
- 24 . A(0.5,12.25)
- 25 א.  $S = 2t^3 - 12t^2 + 18t$  ב.  $t = 1$  ג.  $S = 8$
- 26 א. A(2,32) ב.  $S = 128$
- 27 . A(2,2)
- 28 . A(1, 1/2), B(1,-1)
- 29 א.  $P = \frac{1.28t^2 + 0.72t + 16}{t-1}$  ב.  $t = 4 \frac{3}{4}$  ג.  $P = 12.88$  ס"מ
- 30 .1.2
- 31 א. A(2,2) ב. A(0,4)
- 32 א.  $y = -3x - 5$  ב. A(4,7) ג. AB = 24
- 33 .  $(\sqrt{3}, \frac{1}{3\sqrt{3}})$
- 34 . A(1,2)
- 35 א.  $l = t + 6 - 3\sqrt{t}$  ב.  $t = 2.25$
- 36 . b=1

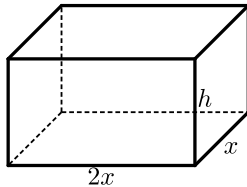
## בעיות קיצון בהנדסת המרחב:

### שאלות:

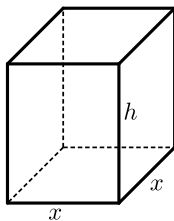
- (37) נתונה תיבה שבסיסה ריבוע ושטח הפנים שלה הוא 96 סמ"ר. מצא את מידות התיבה שנפחה מקסימלי.



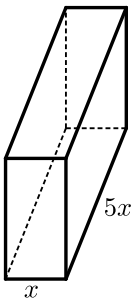
- (38) נתונה תיבה שבסיסה ריבוע ושטח פניה (ללא המכסה) הוא 75 סמ"ר. מצא את אורך צלע הבסיס של התיבה שנפחה הוא מקסימלי.



- (39) נתונה תיבה שבסיסה הוא מלבן שבו צלע אחת גדולה פי 2 מהצלע הסמוכה לה כמתואר באיור. ידוע כי גובה התיבה  $h$  וצלע המלבן הקטנה  $x$  מקיימים:  $x + h = 9$ . מצא מה צריכים להיות מידות בסיס התיבה כדי שנפחה יהיה מקסימלי.



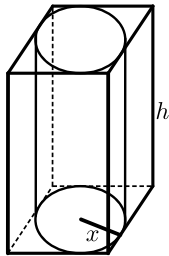
- (40) נתונה תיבה שגובהה הוא  $h$  ובסיסה הוא ריבוע שאורך צלעו היא  $x$ . נתון כי צלע הריבוע וגובה התיבה מקיימים:  $4x + h = 63$ .  
 א. הבע את  $h$  באמצעות  $x$ .  
 ב. הבע את שטח הפנים של התיבה באמצעות  $x$ .  
 ג. מה צריך להיות ערכו של  $x$  כדי ששטח הפנים יהיה מקסימלי?



- (41) ליוסי משטח פח אשר הוא רוצה לבנות תיבה ממנו שנפחה הכולל הוא 225 סמ"ק. יוסי רוצה שאורך הבסיס יהיה גדול פי 5 מרוחבו כמתואר באיור הסמוך. כמות הפח שיש בידי יוסי מוגבלת ולכן הוא רוצה לדעת מה היא הכמות המינימלית של פח שעליו להשתמש בכדי להשיג את מבוקשו. מצאו את כמות הפח המינימלית.

- (42) לבניית תיבה שנפחה 144 סמ"ק ואורך בסיסה גדול פי 2 מרוחב בסיסה דרושים שני חומרים להם שני מחירים שונים: החומר לבסיס התחתון יקר פי 3 מהחומר לפאות הצדדיות והבסיס העליון. מהן מידות התיבה הזולה ביותר שניתן לבנות?

43) מכל הגלילים הישרים שהיקף פרישת המעטפת שלהם הוא  $k$  מצא את נפחו של הגליל בעל הנפח המקסימלי.



44) באיור שלפניך מתוארים תיבה שבסיסה ריבוע וגליל החסום בתוך התיבה. רדיוס הגליל יסומן ב- $x$  וגובהו ב- $h$ . ידוע כי הסכום של  $x$  ו- $h$  הוא 12 ס"מ.

א. הבע באמצעות  $x$  את אורך מקצוע הבסיס של התיבה.  
ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הבע באמצעות  $x$  את נפח הגליל.

ii. הבע באמצעות  $x$  את נפח התיבה.

ג. מצא את  $x$  עבורו הנפח הכלוא בין התיבה לגליל יהיה מקסימלי.

45) נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה. אורך מקצוע צדדי בפירמידה הוא  $k$  ושטח המעטפת שלה הוא  $S$ . הוכח:  $S < 2k^2$ .

### תשובות סופיות:

37) 4·4·4 ס"מ.

38) 5 ס"מ.

39) בסיס: 6 ס"מ, 12 ס"מ. גובה: 3 ס"מ.

40) א.  $h = 63 - 4x$  ב.  $p = -14x^2 + 252x$  ג.  $x = 9$ .

41) 3 ס"מ, 15 ס"מ ו-5 ס"מ.

42) 8·6·3 ס"מ.

43)  $V = \frac{k^3}{216\pi}$  יחידות נפח.

44) א.  $2x$  ב. i.  $V = 12\pi x^2 - \pi x^3$  ii.  $V = 48x^2 - 4x^3$

ג.  $x = 8$ .

45) הוכחה.

## בעיות קיצון עם תשובה נתונה:

### שאלות:

#### בעיות קיצון בהנדסת המרחב:

(1) נתונים שני מספרים חיוביים  $p$  ו- $q$  שסכומם  $a$ .  
 הראה שכאשר מתקיים  $\frac{p}{q} = \frac{n}{m}$  ערך הביטוי  $p^n q^m$  ( $n$  ו- $m$  טבעיים) מקסימלי.

(2) הוכח שמכל החרוטים הישרים שנפחם  $\pi k$  סמ"ק, החרוט בעל שטח המעטפת המינימלי הוא זה שגובהו  $\sqrt[3]{6k}$  ס"מ.  
 (שטח מעטפת של חרוט הוא  $\pi Rl$ , כאשר  $l$  הוא הקו היוצר של החרוט).

#### בעיית קיצון עם תנועה:

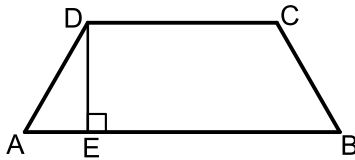
(3) מהירותו של רכב היא  $v$  קמ"ש ועליו לנסוע דרך של  $S$  ק"מ.  
 לרכב יש הוצאות נסיעה של  $\frac{v}{400}$  ש"ח לכל ק"מ נסיעה ו- $\frac{v^2}{200} + 48$  ש"ח לכל שעת נסיעה.  
 הראה שכדי שהוצאותיו יהיו מינימליות על הרכב לנסוע במהירות של 80 קמ"ש.

### תשובות סופיות:

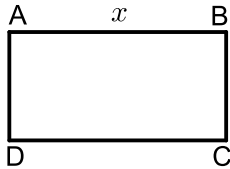
- (1) הוכחה.
- (2) הוכחה.
- (3) הוכחה.

## בעיות קיצון שונות בהנדסת המישור:

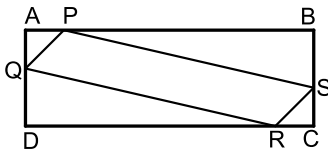
### שאלות:



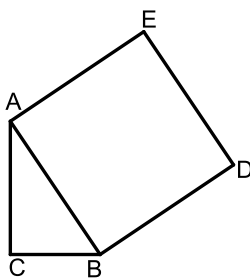
- (1) בטרפז שווה-שוקיים ABCD ( $AB \parallel CD$ ) אורך השוק הוא 4 ס"מ ואורך הבסיס הקטן הוא 6 ס"מ. DE הוא הגובה מקדקוד D (ראה ציור). מה צריך להיות אורך הקטע AE כדי ששטח הטרפז יהיה מקסימלי?



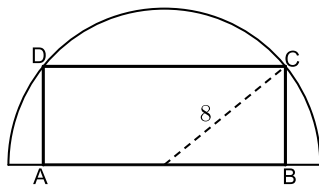
- (2) נתון מלבן ABCD . נסמן ב- $x$  את אחת מצלעות המלבן (ראה ציור). אם היקף המלבן הוא 60 ס"מ:  
 א. בטא באמצעות  $x$  את שטח המלבן.  
 ב. אם היקף המלבן הוא  $p$  מצא מה צריכות להיות אורכי צלעות המלבן כדי ששטחו יהיה מקסימלי. (הבע את אורכי הצלעות באמצעות  $p$ ).



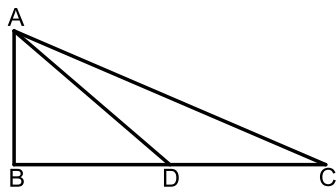
- (3) נתון מלבן ABCD כך ש- $AD = BC = 5$  ס"מ,  $AB = CD = 10$  ס"מ. על צלעות המלבן מקצים קטעים:  $AP = AQ = CS = CR = x$  (ראה ציור). מה צריך להיות ערכו של  $x$  כדי ששטח המקבילית PQRS יהיה מקסימלי?



- (4) במשולש ישר זווית  $\triangle ABC$  ( $\sphericalangle C = 90^\circ$ ) סכום אורכי הניצבים הוא 8 ס"מ. על היתר AB בונים ריבוע ABDE. מה צריכים להיות אורכי הניצבים כדי ששטח המחומש AEDBC יהיה מינימלי?



- (5) בחצי עיגול שרדיוסו 8 ס"מ חוסמים מלבן ABCD, כך שהצלע AB של המלבן מונחת על הקוטר, והקדקודים C ו-D מונחים על הקשת (ראה ציור). מה צריך להיות אורך הצלע AB כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



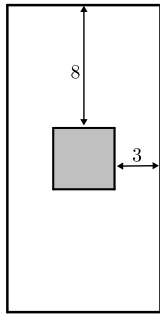
6) במשולש ישר-זווית  $\triangle ABC$  ( $\sphericalangle B = 90^\circ$ ),

סכום אורכי הניצבים הוא 30 ס"מ.

AD הוא תיכון לניצב BC.

חשב מה צריכים להיות אורכי הניצבים,

על מנת שריבוע אורך התיכון יהיה מינימלי.



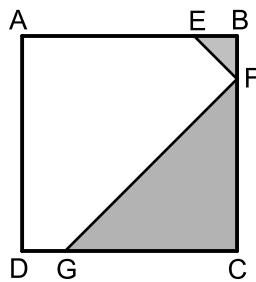
7) בחוברת פרסום, שטח כל עמוד הוא 600 סמ"ר.

רוחב השוליים בראש העמוד ובתחתיתו הוא 8 ס"מ,

ורוחב השוליים בצדדים הוא 3 ס"מ.

מצא מה צריך להיות האורך והרוחב של כל עמוד כדי שהשטח

המיועד לדפוס יהיה מקסימלי (השטח המסומן בציור).



8) בריבוע ABCD הנקודות E, F, G נמצאות על

הצלעות AB, BC, DC בהתאמה, כך

ש-  $BE = BF$ ,  $CF = CG$  (ראה ציור).

נתון כי האורך של צלע הריבוע הוא 6 ס"מ.

א. סמן ב- $x$  את BF ואת BE, והבע באמצעות  $x$

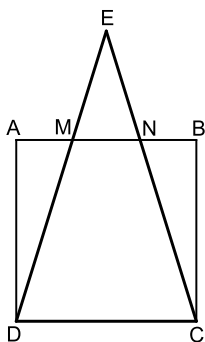
את הסכום של שטחי המשולשים EBF ו-FCG

(השטח המסומן בציור)

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את  $x$  שעבורו סכום שטחי המשולשים הוא מינימלי.

ii. חשב את הסכום המינימלי של שטחי המשולשים.



9) נתון ריבוע ABCD שאורך צלעו 10 ס"מ.

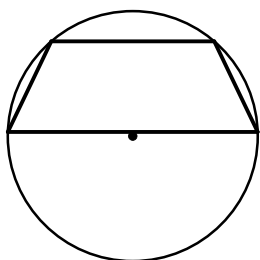
E היא נקודה כלשהי מחוץ לריבוע, כך שהמשולש DEC הוא

שווה שוקיים ( $ED = EC$ ).

שוקי המשולש חותכות את הצלע AB בנקודות M ו-N (ראה ציור).

מצא מה צריך להיות אורך הקטע AM כדי שהסכום של

שטחי המשולשים AMD, EMN, BNC יהיה מינימלי.



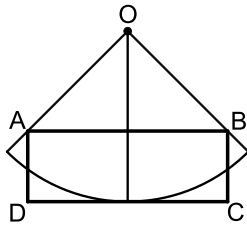
10) נתון מעגל שרדיוסו  $R$ . במעגל זה חסום טרפז שוו"ש,

כך שהבסיס הגדול של הטרפז הוא קוטר במעגל (ראה ציור).

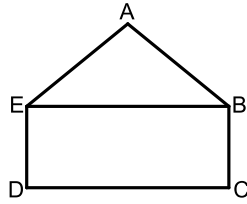
מבין כל הטרפזים החסומים באופן זה,

הבע באמצעות  $R$  את אורך הבסיס הקטן בטרפז

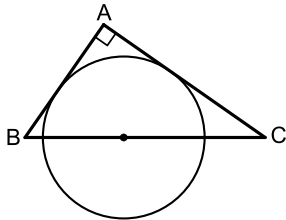
ששטחו מקסימלי.



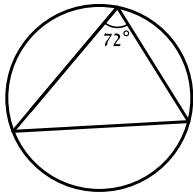
- 11** נתונה גזרה של רבע עיגול שמרכזו  $O$  ורדיוסו  $10$  ס"מ. בונים מלבן  $ABCD$ , כך שרבע המעגל משיק לצלע  $DC$  בנקודת האמצע שלה, והקדקודים  $A$  ו- $B$  נמצאים על הרדיוסים התוחמים את הגזרה (ראה ציור). מבין כל האלכסונים של המלבנים  $ABCD$  שנוצרים באופן זה, מצא את אורך האלכסון הקצר ביותר.



- 12**  $ABCDE$  הוא מחומש המורכב ממשולש  $ABE$  וממלבן  $EBCD$  (ראה ציור). נתון:  $AB = AE = 4$  ס"מ,  $BC = 2$  ס"מ. מצא את השטח של המחומש ששטחו מקסימלי.



- 13** מתבוננים בכל המשולשים ישרי הזווית  $ABC$  החוסמים חצי מעגל שרדיוסו  $R$  כמתואר בציור. מהן זוויות המשולש שסכום הניצבים שלו הוא מינימלי?



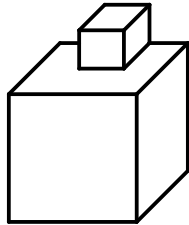
- 14** במעגל שרדיוסו  $R$  חסומים משולשים כך שהגודל של הזווית בכל אחד מהמשולשים הוא  $\frac{2\pi}{5}$ . מצא את הזוויות במשולש בעל ההיקף המקסימלי.

**תשובות סופיות:**

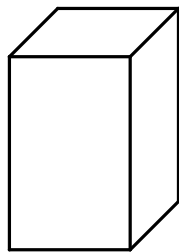
- (1)  $AE = 1.7$  ס"מ
- (2)  $x(30-x)$  א. ב. כל צלע שווה ל-  $0.25p$ .
- (3)  $x = 3.75$  ס"מ
- (4)  $AC = BC = 4$
- (5)  $AB = 2\sqrt{32}$
- (6)  $AB = 6$  ס"מ,  $BC = 24$  ס"מ
- (7) אורך: 40 ס"מ, רוחב: 15 ס"מ.
- (8) א.  $S = x^2 - 6x + 18$  ב. i.  $x = 3$  ב. ii. 9 סמ"ר.
- (9)  $AM = \frac{5}{\sqrt{2}}$
- (10)  $R =$  בסיס קטן
- (11)  $4\sqrt{5}$  ס"מ
- (12)  $12\sqrt{3}$  סמ"ר
- (13)  $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$
- (14)  $\frac{3}{10}\pi, \frac{3}{10}\pi, \frac{2}{5}\pi$

## בעיות קיצון שונות בהנדסת המרחב:

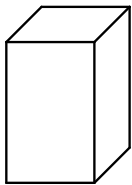
### שאלות:



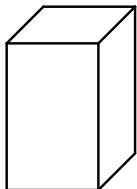
**15** גובהו של "מגדל" הבנוי משתי קוביות (לאו דווקא שוות) הוא 8 ס"מ.  
מה צריך להיות אורך המקצוע של הקובייה התחתונה כדי שנפח המגדל (סכום נפחי הקוביות) יהיה מינימלי?



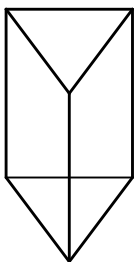
**16** בונים תיבה שגובהה  $y$  ס"מ, ובסיסה ריבוע, שאורך צלעו  $x$  ס"מ (ראה ציור), כך שההיקף של כל אחת מהדפנות הצדדיות שווה ל-12 ס"מ.  
מה צריך להיות אורך צלע הבסיס כדי שנפח התיבה יהיה מקסימלי?



**17** יש לבנות תיבה פתוחה מלמעלה, שבסיסה ריבוע ושטח פניה הוא 75 סמ"ר (במקרה זה שטח הפנים מורכב מבסיס אחד ומארבע פאות צדדיות). מכל התיבות שאפשר לבנות, מצא את ממדי התיבה (צלע הבסיס וגובה) שנפחה מקסימלי.

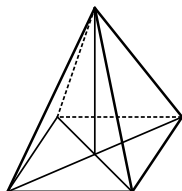


**18** יש להכין מחוט תיל "שלד" (מסגרת) של תיבה, שבסיסה ריבוע ונפחה 1000 סמ"ק.  
מהו האורך המינימלי של החוט הנחוץ ליצירת התיבה?

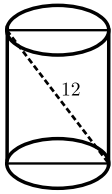


**19** מחוט שאורכו  $a$  ס"מ יש לבנות מנסרה משולשת ישרה, שבסיסה הוא משולש שווה צלעות. מצא איזה חלק מאורך החוט יש להקצות לצלע הבסיס  $x$  ואיזה חלק לגובה  $y$  כדי שיתקיים (בטא ע"י  $a$ ):  
א. שטח המעטפת של המנסרה יהיה מקסימלי.  
ב. נפח המנסרה יהיה מקסימלי.

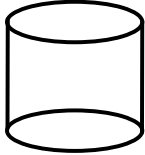
**20** מכל הפירמידות המרובעות, המשוכללות והישרות, שאורך המקצוע הצדדי שלהן הוא  $a$ , מצא את נפחה של הפירמידה בעלת הנפח המקסימלי.



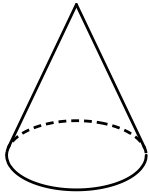
**21** מכל הפירמידות הישרות, שבסיסן ריבוע ושטח הפנים שלהן הוא 200 סמ"ר, חשב את נפחה של הפירמידה בעלת הנפח המקסימלי.



**(22)** אלכסון החתך הצירי של גליל ישר הוא 12 ס"מ (ראה ציור). מצא מה צריכים להיות גובה הגליל ורדיוס בסיסו כדי שנפחו יהיה מקסימלי.



**(23)** נתון מיכל גלילי פתוח מלמעלה שקיבולו 64 מ"ק. המיכל עשוי כולו מפח. הראה כי שטח הפח הוא מינימלי כאשר רדיוס הבסיס הוא  $\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$  מטר.



**(24)** מבין כל החרוטים שאורך הקו היוצר שלהם הוא 10 ס"מ (ראה ציור), מהו נפח החרוט שנפחו מקסימלי?

### תשובות סופיות:

**(15)** 4 ס"מ.

**(16)** 4 ס"מ.

**(17)** צלע הבסיס: 5 ס"מ, גובה: 2.5 ס"מ.

**(18)** 120 ס"מ.

**(19)** א.  $x = \frac{1}{12}a$ ,  $y = \frac{1}{6}a$ . ב.  $x = y = \frac{1}{9}a$ .

**(20)**  $\frac{4\sqrt{3}}{27}a^3$ .

**(21)**  $\frac{500}{3}$  סמ"ק.

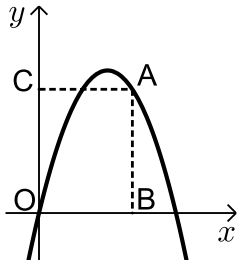
**(22)** גובה:  $\sqrt{48}$  ס"מ. רדיוס:  $\sqrt{24}$  ס"מ.

**(23)** הוכחה.

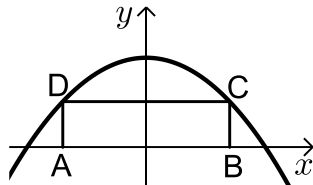
**(24)** 403.1 סמ"ק.

## בעיות קיצון שונות בפונקציות וגרפים:

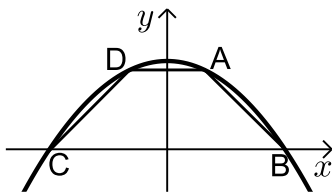
### שאלות:



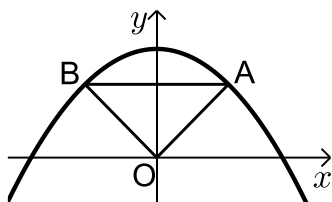
- (25)** מנקודה A, הנמצאת על גרף הפונקציה  $y = -x^2 + 5x$ , מורידים אנכים לצירים כך שנוצר מלבן ABCO (ראה ציור).  
 א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שהיקף המלבן יהיה מקסימלי?  
 ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שהיקף המלבן יהיה מינימלי?



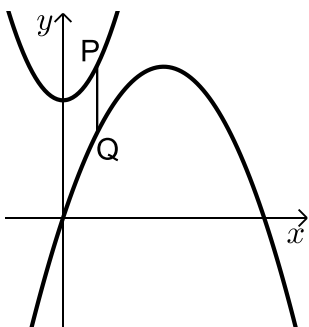
- (26)** בפרבולה  $y = 9 - x^2$  חוסמים מלבן ABCD, כך שהצלע AB מונחת על ציר ה-x (ראה ציור).  
 מה צריך להיות אורך הצלע CD כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



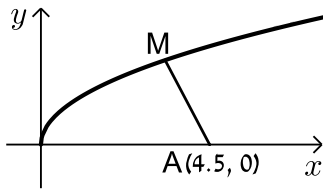
- (27)** טרפז ABCD חסום בין גרף הפרבולה  $y = 9 - x^2$  לבין ציר ה-x (ראה ציור).  
 א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח הטרפז ABCD יהיה מקסימלי?  
 ב. חשב את השטח המקסימלי של טרפז ABCD.



- (28)** נתונה הפרבולה  $y = -x^2 + 12$ . ישר המקביל לציר ה-x חותך את הפרבולה בנקודות A ו-B (ראה ציור).  
 מחברים את הנקודות A ו-B עם ראשית הצירים, O.  
 א. מה צריך להיות אורך הקטע AB כדי ששטח המשולש AOB יהיה מקסימלי?  
 ב. מהו השטח המקסימלי של המשולש AOB?

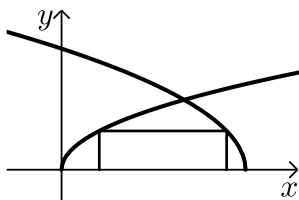


- (29)** נתונים הגרפים של שתי פרבולות:  $y = \frac{1}{2}x^2 + 7$  ו-  $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 1$ .  
 קו מקביל לציר ה-y חותך את שתי הפרבולות בנקודות P ו-Q (ראה ציור). מבין כל הקטעים המתקבלים באופן זה, מצא את האורך המינימלי של הקטע PQ.

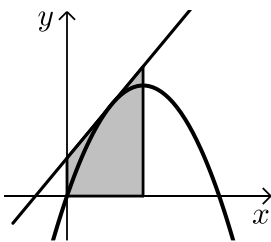


- 30** נתון גרף הפונקציה  $y = \sqrt{x}$ .  
על ציר ה- $x$  נתונה הנקודה  $A(4.5, 0)$  (ראה ציור).  
מצא על גרף הפונקציה נקודה  $M$ , כך שריבוע המרחק  $AM$  יהיה מינימלי.

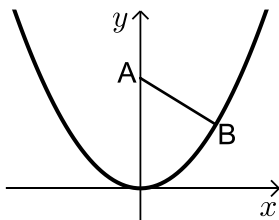
- 31** מצא על הישר  $y = 3x - 4$  את הנקודה הקרובה ביותר לנקודה  $(0, 1)$ .



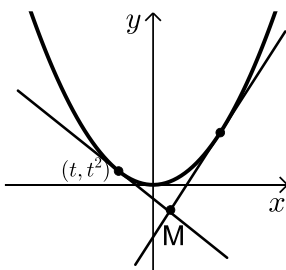
- 32** בציור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:  $f(x) = \sqrt{3x}$ ,  $g(x) = \sqrt{36-6x}$ .  
מלבן חסום בין הגרפים של הפונקציות ובין ציר ה- $x$ , כמתואר בציור.  
מצא את השטח הגדול ביותר האפשרי למלבן שחסום באופן זה.



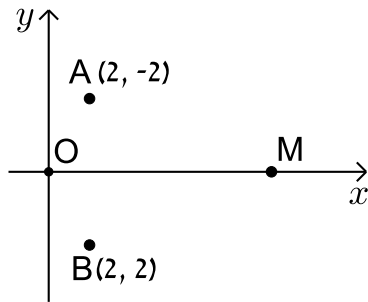
- 33** דרך איזו נקודה על הפרבולה  $y = -x^2 + 2x$  צריך להעביר משיק, כדי ששטח הטרפז, הנוצר על ידי המשיק והישרים:  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ , יהיה מינימלי? (השטח המסומן שבציור)



- 34** נקודה  $B$  נמצאת על גרף הפונקציה  $y = x^2$  ברביע הראשון.  $A$  היא הנקודה  $(0, a)$  כאשר ידוע כי  $a > 0.5$  (ראה ציור).  
א. בטא באמצעות  $a$  את שיעורי הנקודה  $B$ , שעבורה המרחק  $AB$  הוא מינימלי.  
ב. מצא עבור איזה ערך של  $a$  המרחק המינימלי הוא 2.



- 35** נתונה הפרבולה  $y = x^2$ , ונתון משיק לפרבולה שמשוואתו היא  $y = 6x - 9$ . בנקודה  $(t, t^2)$  שעל הפרבולה מעבירים משיק נוסף לפרבולה.  
המשיקים נחתכים בנקודה  $M$  (ראה ציור).  
א. הבע את משוואת המשיק הנוסף באמצעות  $t$ .  
ב. מצא את  $t$  שעבורו אורך הקטע, המחבר את הנקודה  $M$  עם קדקוד הפרבולה יהיה מינימלי.



**(36)** במערכת צירים נתונות הנקודות  $A(2, 2)$  ו-  $B(2, -2)$ . ראשית הצירים היא בנקודה  $O$ .  $M$  היא נקודה על ציר ה- $x$  בתחום  $x > 0$ . מה צריכים להיות שיעורי הנקודה  $M$ , כדי שהסכום:  $OM + MA + MB$  יהיה מינימלי?

### תשובות סופיות:

ב.  $A(0, 0)$  או  $A(5, 0)$ .

ב. 32.

ב.  $S_{\Delta AOB} = 16$ .

ב. 4.25.

ב.  $t = -\frac{3}{37}$ .

א.  $A(3, 6)$  (25)

א.  $CD = 2\sqrt{3}$  (26)

א.  $A(1, 8)$  (27)

א.  $AB = 4$  (28)

א.  $PQ = 4$  (29)

א.  $M(4, 2)$  (30)

א.  $(1.5, 0.5)$  (31)

א. 8 (32)

א.  $(0.5, 0.75)$  (33)

א.  $B\left(\sqrt{\frac{2a-1}{2}}, \frac{2a-1}{2}\right)$  (34)

א.  $y = 2xt - t^2$  (35)

א.  $M(0.845, 0)$  (36)

# מתמטיקה

פרק 26 - חשבון אינטגרלי - האינטגרל הכללי

תוכן העניינים

1. חישובי אינטגרלים ..... 395
2. מציאת פונקציה קדומה ..... 400

## חישובי אינטגרלים:

### סיכום כללי:

#### הגדרה וכללי האינטגרציה:

- כלל האינטגרציה של פונקציה פולינומית:  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$
- עבור מקדם קבוע  $a$  נקבל:  $\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$
- כללי האינטגרציה של פונקציות טריגונומטריות:

$$\int \sin x dx = -\cos x + c, \int \cos x dx = \sin x + c, \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c, \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

### שאלות:

#### 1 מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int x^3 dx$	ב. $\int 12x^5 dx$
ג. $\int x^4 dx$	ד. $\int 2x^3 dx$
ה. $\int \frac{2}{3} x^5 dx$	ו. $\int 7 dx$
ז. $\int \left( \frac{5}{6} x^4 + 16x^3 - \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{1}{3} \right) dx$	ח. $\int \left( \frac{4x^3}{5} - ax^2 - \frac{2ax}{b} + b \right) dx$

#### 2 מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int x^{-3} dx$	ב. $\int \frac{1}{x^3} dx$
ג. $\int \left( \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \frac{a}{x^3} + \frac{x}{a} \right) dx$	ד. $\int \frac{2x^3 + x - 2}{x^3} dx$

(3) מצא את האינטגרלים הבאים :

$$\begin{array}{ll} \int x^{\frac{1}{2}} dx & \text{א.} \\ \int \sqrt{x} dx & \text{ב.} \\ \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx & \text{ג.} \\ \int \left( \frac{4}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x} \right) dx & \text{ד.} \end{array}$$

(4) מצא את האינטגרלים הבאים :

$$\begin{array}{lll} \int (5x-1)^3 dx & \text{א.} & \int 3(2-7x)^4 dx \quad \text{ב.} \\ \int \frac{1}{\sqrt{6x-3}} dx & \text{ד.} & \int \sqrt{ax+bdx} \quad \text{ה.} \\ \int \frac{18}{(6x+5)^2} dx & \text{ג.} & \end{array}$$

(5) מצא את תוצאת החילוק :

$$\begin{array}{ll} \frac{x^2-5x-14}{x+2} = & \text{א.} \\ \frac{x^4+x^3-x^2+14x-3}{x+3} = & \text{ג.} \\ \frac{x^3+x^2+3x-5}{x-1} = & \text{ב.} \\ \frac{x^3-4x^2+9}{x-3} = & \text{ד.} \\ \frac{x^3+5x^2-4x-20}{x+5} = & \text{ה.} \end{array}$$

(6) מצא את האינטגרלים הבאים :

$$\begin{array}{ll} \int \frac{x^2-5x-14}{x+2} dx & \text{א.} \\ \int \frac{x^4+x^3-x^2+14x-3}{x+3} dx & \text{ג.} \\ \int \frac{x^3+x^2+3x-5}{x-1} dx & \text{ב.} \\ \int \frac{x^3-4x^2+9}{x-3} dx & \text{ד.} \\ \int \frac{x^3+5x^2-4x-20}{x+5} dx & \text{ה.} \\ \int \frac{2x^5+x^4-4x^2+1}{2x+1} dx & \text{ו.} \end{array}$$

(7) מצא את האינטגרלים הבאים :

$$\begin{array}{ll} \int -\frac{2x}{(x^2-1)^2} dx & \text{א.} \\ \int \frac{x-2}{(x^2-4x+1)^2} dx & \text{ג.} \\ \int \frac{x^2}{(x^3+6)^2} dx & \text{ב.} \\ \int \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} dx & \text{ד.} \\ \int \frac{6x-3}{\sqrt{x-x^2}} dx & \text{ה.} \\ \int 8x(x^2+1)^3 dx & \text{ו.} \\ \int (2-x^2)(6x-x^3)^2 dx & \text{ז.} \end{array}$$

8) חשב את האינטגרלים הבאים :

א.  $\int \left( \sin x - 3 \cos x + \frac{4}{\cos^2 x} + 5 \right) dx$

ב.  $\int \left( \cos 3x - 2 \sin 4x + \frac{4}{\cos^2 3x} \right) dx$

ג.  $\int \left( \sin(\pi - x) + \frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x} \right) dx$

9) חשב את האינטגרלים הבאים (שימוש בזהויות) :

א.  $\int (2 \sin x \cos x) dx$

ב.  $\int (\sin 3x \cos 3x) dx$

ג.  $\int (\sin^4 x - \cos^4 x) dx$

ד.  $\int (\sin^2 x) dx$

10) חשב את האינטגרלים הבאים :

א.  $\int \left( \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \right) dx$

ב.  $\int \left( \frac{\sin x}{\cos^2 x} \right) dx$

ג.  $\int (\cos x \sin^2 x) dx$

11) חשב את האינטגרלים הבאים :

א.  $\int \left( \sin 2x - 4 \cos \frac{x}{3} \right) dx$

ב.  $\int \frac{1}{\cos^2 4x} dx$

ג.  $\int \frac{1}{\sin^2 10x} dx$

ד.  $\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$

ה.  $\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx$

ו.  $\int (\cos x + \sin x)^2 dx$

ז.  $\int (\sin x \cos x \cos(2x)) dx$

ח.  $\int \tan^2 x dx$

ט.  $\int \frac{1}{(\sin x \cos x)^2} dx$

י.  $\int \cos^2 x dx$

יא.  $\int \sin^2 4x dx$

(12) חשב את ערכי האינטגרלים הבאים (שאלות אתגר):

$$\int (\cos^4 x + \sin^4 x) dx \quad \text{א.} \quad \int \cos^4 x dx \quad \text{ב.}$$

$$\int \sin^4 4x dx \quad \text{ג.} \quad \int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx \quad \text{ד.}$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx \quad \text{ה.}$$

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א.} \frac{x^4}{4} + c \quad \text{ב.} 2x^6 + c \quad \text{ג.} \frac{x^5}{5} + c \quad \text{ד.} \frac{x^4}{2} + c \quad \text{ה.} \frac{x^6}{9} + c \quad \text{ו.} 7x + c$$

$$\text{ז.} \frac{x^5}{6} + 4x^4 - \frac{x^3}{6} + 2x^2 - \frac{1}{3}x + c \quad \text{ח.} \frac{x^4}{5} - \frac{ax^3}{3} - \frac{ax^2}{b} + bx + c$$

$$(2) \quad \text{א.} -\frac{x^{-2}}{2} + c \quad \text{ב.} -\frac{1}{2x^2} + c \quad \text{ג.} -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{a}{2x^2} + \frac{x^2}{2a} + c \quad \text{ד.} 2x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + c$$

$$(3) \quad \text{א.} \frac{x^{1.5}}{1.5} + c \quad \text{ב.} \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c \quad \text{ג.} 2\sqrt{x} + c \quad \text{ד.} 8\sqrt{x} + 2\sqrt{x^3} + c$$

$$(4) \quad \text{א.} \frac{(5x-1)^4}{20} + c \quad \text{ב.} -\frac{3(2-7x)^5}{35} + c \quad \text{ג.} -\frac{3}{6x+5} + c$$

$$\text{ד.} \frac{\sqrt{6x-3}}{3} + c \quad \text{ה.} \frac{2\sqrt{(ax+b)^3}}{3a} + c$$

$$(5) \quad \text{א.} x-7 \quad \text{ב.} x^2+2x+5 \quad \text{ג.} x^3-2x^2+5x-1$$

$$\text{ד.} x^2-x-3 \quad \text{ה.} x^2-4$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - x + c \quad \lambda \quad \frac{x^3}{3} + x^2 + 5x + c \quad \text{ב.} \quad \frac{x^2}{2} - 7x + c \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$\cdot \frac{x^5}{5} - x^2 + x + c \quad \text{ו.} \quad \frac{x^3}{3} - 4x + c \quad \text{ה.} \quad \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 3x + c \quad \text{ז.}$$

$$-\frac{1}{2(x^2 - 4x + 1)} + c \quad \lambda \quad -\frac{1}{3(x^3 + 6)} + c \quad \text{ב.} \quad \frac{1}{x^2 - 1} + c \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$(x^2 + 1)^4 + c \quad \text{ו.} \quad -6\sqrt{x - x^2} + c \quad \text{ה.} \quad \sqrt{x^2 + 2} + c \quad \text{ז.}$$

$$\cdot \frac{(6x - x^3)^3}{9} + c \quad \text{ט.}$$

$$\frac{\sin 3x}{3} + \frac{\cos 4x}{2} + \frac{4 \tan 3x}{3} + c \quad \text{ב.} \quad -\cos x - 3 \sin x + 4 \tan x + 5x + c \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$\cdot \cos(\pi - x) + \tan x + x + c \quad \text{ג.}$$

$$-\frac{\sin 2x}{2} + c \quad \lambda \quad -\frac{\cos 6x}{12} + c \quad \text{ב.} \quad -\frac{1}{2} \cos 2x + c \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$\cdot \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + c \quad \text{ז.}$$

$$\cdot \frac{1}{3} \sin^3 x + c \quad \lambda \quad \frac{1}{\cos x} + c \quad \text{ב.} \quad 2\sqrt{\sin x} + c \quad \text{א.} \quad (10)$$

$$-\frac{1}{10} \cot 10x + c \quad \lambda \quad \frac{1}{4} \tan 4x + c \quad \text{ב.} \quad -\frac{1}{2} \cos 2x - 12 \sin \frac{x}{3} + c \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$x - \frac{1}{2} \cos 2x + c \quad \text{ו.} \quad \frac{1}{2} \sin 2x + c \quad \text{ה.} \quad \frac{1}{2} \sin 2x + c \quad \text{ז.}$$

$$\tan x - \cot x + c \quad \text{ט.} \quad \tan x - x + c \quad \text{ח.} \quad -\frac{1}{16} \cos 4x + c \quad \text{ט.}$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{16} \sin 8x + c \quad \text{א.} \quad \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + c \quad \text{ז.}$$

$$\frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \quad \text{ב.} \quad \frac{3}{4}x + \frac{1}{16} \sin 4x + c \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$-\cot x - x + c \quad \text{ז.} \quad \frac{3}{8}x - \frac{1}{16} \sin 8x + \frac{1}{128} \sin 16x + c \quad \text{ג.}$$

$$-\cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + c \quad \text{ה.}$$

## מציאת פונקציה קדומה:

### שאלות:

- (1) נתונה נגזרת של פונקציה:  $f'(x) = 3x^2 - 7$ . מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה  $(2, -1)$ .
- (2) נתונה נגזרת של פונקציה:  $f'(x) = 2x - 6$ . ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5. מצא את הפונקציה.
- (3) הנגזרת של פונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = x^2 - 8x + 2$ . נתון:  $f(-2) = 1$ .  
 א. מצא את  $f(x)$ .  
 ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 1$ .
- (4) נתונה הנגזרת של פונקציה  $f(x)$ :  $f'(x) = 9x^2 - 4$ . ערך הפונקציה בנקודה  $x = 1$  הוא 3.  
 א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 1$ .  
 ב. מצא את  $f(x)$ .  
 ג. מצא את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.
- (5) הנגזרת של פונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = 2x - 3$ . לפונקציה משיק ששיפועו הוא -3.  
 א. מצא את שיעור ה- $x$  של נקודת ההשקה.  
 ב. מצא את  $f(x)$  אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא 7.
- (6) הנגזרת של פונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = -6x - 5$ . המשיק לפונקציה בנקודה A יוצר זווית של  $45^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .  
 א. מצא את שיעור ה- $x$  של הנקודה A.  
 ב. מצא את  $f(x)$  אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא -6.  
 ג. מצא את משוואת המשיק.

- (7) הנגזרת של פונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = 3x - 4$ .  
 הישר  $y = 2x + 5$  משיק לגרף הפונקציה. מצא את  $f(x)$ .

### תשובות סופיות:

- (1)  $f(x) = x^3 - 7x + 5$
- (2)  $f(x) = x^2 - 6x + 14$
- (3) א.  $f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 2x + 23\frac{2}{3}$  ב.  $y = -5x + 27$
- (4) א.  $y = 5x - 2$  ב.  $f(x) = 3x^3 - 4x + 4$  ג.  $(0, -2), (0.4, 0)$
- (5) א.  $x = 0$  ב.  $f(x) = x^2 - 3x + 7$
- (6) א.  $x = -1$  ב.  $f(x) = -3x^2 - 5x - 8$  ג.  $y = x - 5$
- (7)  $f(x) = \frac{3x^2}{2} - 4x + 11$

# מתמטיקה

פרק 27 - חשבון אינטגרלי - האינטגרל המסוים וחישובי שטחים

## תוכן העניינים

402	1. האינטגרל המסוים
404	2. חישובי שטחים יסודיים
410	3. חישובי שטחים יסודיים עם פרמטרים
412	4. חישובי שטחים כאשר נתונה נגזרת הפונקציה
415	5. חישובי שטחים עם פונקציה רציונאלית
417	6. חישובי שטחים עם פונקצית שורש
421	7. חישובי שטחים עם פונקציות טריגונומטריות
424	8. חישובי שטחים בין גרף הנגזרת והצירים

## האינטגרל המסוים:

### סיכום כללי:

תהא פונקציה  $f(x)$  שנגזרתה היא  $f'(x)$  ( $f(x)$  מוגדרת בתחום  $a \leq x \leq b$ ).  
 הקשר שבין האינטגרל המסוים לפונקציה קדומה הוא:  $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$ .

### הערה:

יש להשתמש בכל כללי האינטגרציה המיידיים של הפונקציות השונות אשר נלמדו.

### שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

$$\int_{-4}^{-1} x^2(x-3) dx \quad \text{ב.}$$

$$\int_2^5 (x^2 + 5x) dx \quad \text{א.}$$

$$\int_{-1}^1 3(2x-1)^5 dx \quad \text{ד.}$$

$$\int_{-3}^3 (x^3 + 4x) dx \quad \text{ג.}$$

$$\int_1^4 \frac{x-1}{x^3} dx \quad \text{ו.}$$

$$\int_1^2 \frac{2}{(x-3)^2} dx \quad \text{ה.}$$

$$\int_3^4 \frac{3x^2 - 7x + 2}{x-2} dx \quad \text{ח.}$$

$$\int_{-3}^0 \frac{2x^2 + 7x - 4}{x+4} dx \quad \text{ז.}$$

$$\int_{-5}^0 \frac{3}{\sqrt{4-x}} dx \quad \text{י.}$$

$$\int_1^2 \sqrt{3x-1} dx \quad \text{ט.}$$

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

$$\int_0^{\pi} (\sin 2x + 1) dx \quad \text{ב.}$$

$$\int_0^{\pi} (\cos x) dx \quad \text{א.}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( \frac{3}{\cos^2 x} + 2 \right) dx \quad \text{ד.}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x - 3 \cos 2x) dx \quad \text{ג.}$$

$$(3) \quad \int_1^a (4x-7) dx \text{ : לפניך האינטגרל הבא :}$$

מצא עבור אלו ערכים של  $a$  ערך האינטגרל יהיה שווה ל-1.

$$(4) \quad \int_a^2 (x-3x^2) dx \text{ : לפניך האינטגרל הבא :}$$

א. כתוב ביטוי לערך האינטגרל כתלות ב- $a$ .

ב. מצא עבור אלו ערכים של  $a$  ערך האינטגרל יהיה שווה ל- $\frac{a-12}{2}$ .

$$(5) \quad \int_a^{a+4} \left( \frac{1}{\sqrt{x-a}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) dx \text{ : לפניך האינטגרל הבא :}$$

א. כתוב את ערך האינטגרל כתלות ב- $a$ .

ב. מצא את ערכו של  $a$  עבורו ערך האינטגרל יהיה שווה ל-2.

$$(6) \quad \int_0^a (\sin x + 2 \cos 2x) dx \text{ : לפניך האינטגרל הבא : } 0 < a < 3$$

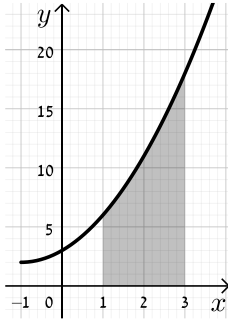
מצא עבור אלו ערכים של  $a$  ערך האינטגרל יהיה שווה ל-1.

### תשובות סופיות:

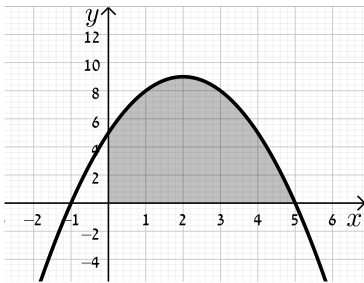
- (1) א. 91.5    ב. -126.75    ג. 0    ד. -182    ה. 1
- ו.  $\frac{9}{32}$     ז. -12    ח. 9.5    ט. 1.856    י. 6
- (2) א. 0    ב.  $\pi$     ג. 0    ד.  $3\sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi \approx 7.29$
- (3)  $a = 2, 1.5$
- (4) א.  $a^3 - \frac{1}{2}a^2 - 6$     ב.  $a = 0, 1, -\frac{1}{2}$
- (5) א.  $4 + 2(\sqrt{a+1} - \sqrt{a+5})$     ב.  $a = 1\frac{1}{4}$
- (6)  $a = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$

## חישובי שטחים יסודיים:

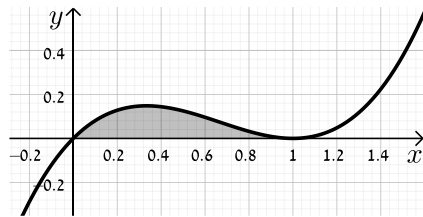
### שאלות:



- (1) חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה  $f(x) = x^2 + 2x + 3$ , ציר ה- $x$  והישרים  $x = 1$  ו- $x = 3$ .

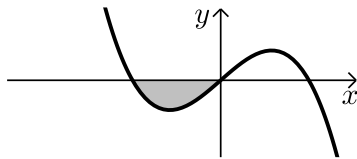


- (2) נתונה הפונקציה  $y = -x^2 + 4x + 5$ .  
 א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
 ב. מצא את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  וציר ה- $y$ .

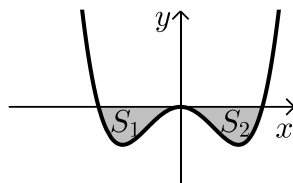


- (3) מצא את השטח המוגבל תחת הפונקציה  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$  וציר ה- $x$  כמתואר באיור.

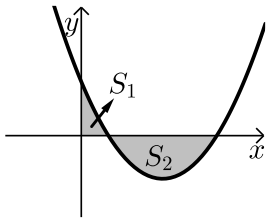
### שאלות עם שטח מתחת לציר ה- $x$ :



- (4) נתונה הפונקציה  $f(x) = x(4 - x^2)$ . חשב את השטח המוגבל שמתחת הפונקציה וציר ה- $x$  שברביע השלישי.



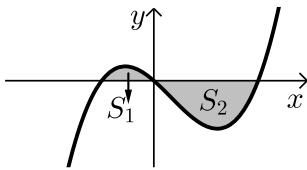
- (5) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2$ . חשב את השטח המוגבל שבין הפונקציה לציר ה- $x$ .



- 6) חשב את האינטגרל המסוים של הפונקציה  $y = x^2 - 6x + 5$  בין 0 ל-5. האם התוצאה מייצגת את סכום השטחים:  $S_1 + S_2$ ? אם כן, הסבר. אם לא, נמק וחשב את סכום זה.

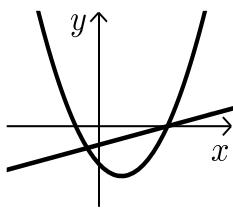
- 7) נתונה הפונקציה  $y = x^3 - x^2 - 2x$ .

יוצרים את השטחים  $S_1$  ו- $S_2$  בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$  כמתואר באיור.

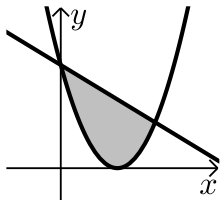


- א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$ .

**שאלות עם שטחים בין שתי פונקציות:**



- 8) נתונות הפונקציות הבאות:  $f(x) = x^2 - 4x - 12$  ו- $g(x) = x - 6$ . חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות הנ"ל.



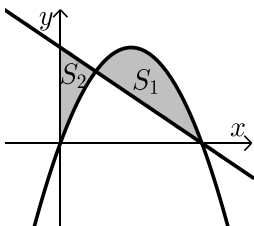
- 9) נתונות הפונקציות:  $y = (x-3)^2$ ,  $y = -x + 9$ . חשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות.



- 10) נתונות הפונקציות:  $f(x) = x^2 - 1$ ,  $g(x) = 7 - x^2$ . חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות הנ"ל.

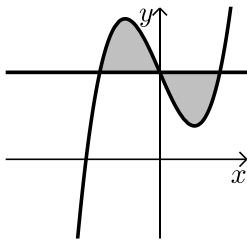
- 11) נתונות הפונקציות הבאות:  $f(x) = -x^2 + 4x$  ו- $g(x) = -x + 4$ .

מסמנים את השטח הכלוא בין שני הגרפים ב- $S_1$  ואת השטח הכלוא בין הגרפים וציר ה- $y$  ב- $S_2$  כמתואר באיור.

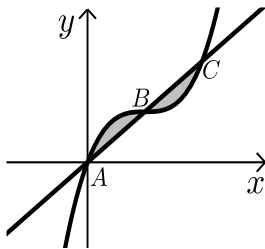


א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות.

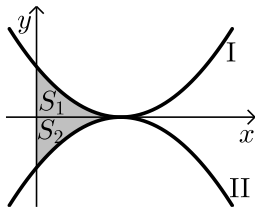
ב. חשב את היחס שבין השטחים:  $\frac{S_1}{S_2}$ .



- 12** נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^3 - 4x + 5$  והישר  $y = 5$ .  
 א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה והישר.  
 ב. חשב את השטח המוגבל ביניהן.

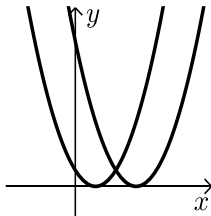


- 13** נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ .  
 הישר AC חותך את גרף הפונקציה בנקודות  
 הבאות:  $A(0,0)$ ,  $B(1,1)$ ,  $C(2,2)$ .  
 חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה לישר AC.

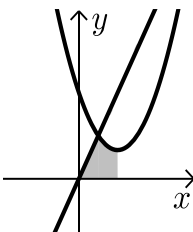


- 14** נתונות הפונקציות  $f(x) = (x-2)^2$  ו-  $g(x) = -(x-2)^2 - 1$  כמתואר באיור.  
 א. התאם בין הפונקציות לגרפים I ו-II.  
 ב. מסמנים את השטחים שבין כל פונקציה והצירים ב-  $S_1$  ו-  $S_2$  כמתואר באיור.  
 הראה כי השטחים  $S_1$  ו-  $S_2$  שווים זה לזה.

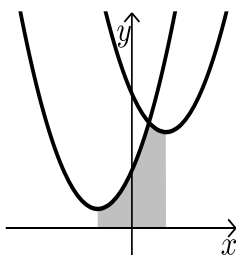
**שאלות עם שטחים מורכבים:**



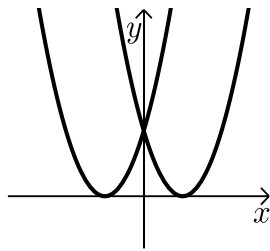
- 15** נתונות הפונקציות:  $f(x) = x^2 - 2x + 1$ ,  $g(x) = x^2 - 6x + 9$ .  
 חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות  
 ובין ציר ה- $x$ .



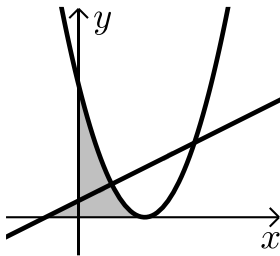
- 16** נתונות הפונקציות:  $y = x^2 - 4x + 6$ ,  $y = 3x$ .  
 א. מצא את קדקוד הפרבולה.  
 ב. מצא נקודת חיתוך של הפרבולה עם הישר  
 שמשמאל לקדקוד הפרבולה.  
 ג. חשב את השטח המסומן שבשרטוט.



- 17** נתונות הפונקציות:  $y = x^2 - 4x + 14$ ,  $y = x^2 + 4x + 6$ .  
 א. מצא את שיעורי ה- $x$  של קודקודי הפרבולות.  
 ב. חשב את נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות.  
 ג. חשב את השטח המסומן בשרטוט.



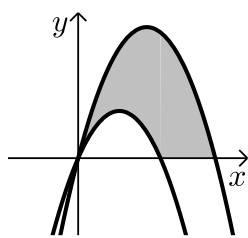
**(18)** נתונות הפונקציות:  $f(x) = (x-3)^2$ ,  $g(x) = (x+3)^2$ .  
חשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות וציר ה- $x$ .



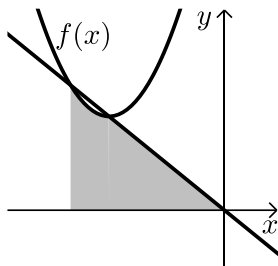
**(19)** נתונות שתי הפונקציות:  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ,  $y = (x-2)^2$ .

א. מצא את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות לציר ה- $x$ .

ב. מצא את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות לציר ה- $y$ .



**(20)** נתונות הפרבולות הבאות:  $f(x) = -x^2 + 5x$  ו- $g(x) = -x^2 + 3x$ .  
חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של הפרבולות וציר ה- $x$ .

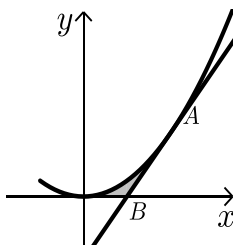


**(21)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^2 + 6x + 12$ .

א. מצא את משוואת הישר.

ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.

ג. מצא את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  והישר  $x = -4$ .

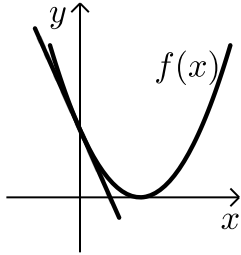


**(22)** נתונה הפונקציה:  $y = 2x^2$ .

מעבירים משיק לגרף הפונקציה מהנקודה:  $A(1, 2)$ .

המשיק חותך את ציר ה- $x$  בנקודה  $B$ .

חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה, המשיק וציר ה- $x$ .



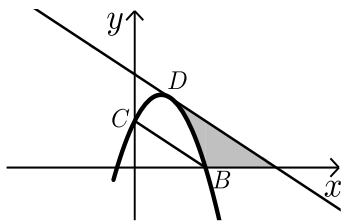
**(23)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = (x-2)^2$ .

מנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$  מעבירים משיק.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$ .

ג. חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- $x$ .



**(24)** משוואת הפרבולה היא:  $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$ .

הנקודות  $B(2,0)$ ,  $C(0,2)$  הן נקודות חיתוך

של הפרבולה עם הצירים.

המשיק לפרבולה בנקודה  $D$  מקביל לישר  $BC$ .

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את השטח המוגבל בין הפרבולה, המשיק וציר ה- $x$ .

ג. מצא את השטח המוגבל בין הפרבולה, המשיק וציר ה- $y$ .

### תשובות סופיות:

(1)  $22\frac{2}{3}$  יח"ש.

(2) א.  $(-1,0)$ ,  $(5,0)$ . ב.  $33\frac{1}{3}$  יח"ש.

(3)  $\frac{1}{12}$  יח"ש.

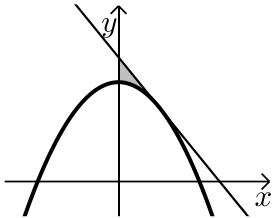
(4) 4 יח"ש.

(5)  $4\frac{4}{15}$  יח"ש.

- (6) לא. השטח הוא: 13 יח"ש.
- (7) א.  $(-1,0)$ ,  $(0,0)$ ,  $(2,0)$  ב.  $3\frac{1}{12}$  יח"ש.
- (8)  $57\frac{1}{6}$  יח"ש.
- (9)  $20\frac{5}{6}$  יח"ש.
- (10)  $21\frac{1}{3}$  יח"ש.
- (11) א.  $(1,3)$ ,  $(4,0)$  ב.  $2\frac{5}{11}$ .
- (12) א.  $(-2,5)$ ,  $(0,5)$ ,  $(2,5)$  ב. 8 יח"ש.
- (13) 0.5 יח"ש.
- (14) א.  $f(x)=I$ ,  $g(x)=II$  ב. הוכחה.
- (15)  $\frac{2}{3}$  יח"ש.
- (16) א.  $(2,2)$  ב.  $(1,3)$  ג.  $3\frac{5}{6}$  יח"ש.
- (17) א.  $x=2$ ,  $x=-2$  ב.  $(1,11)$  ג.  $25\frac{1}{3}$  יח"ש.
- (18) 18 יח"ש.
- (19) א.  $\frac{4}{3}$  יח"ש ב.  $1\frac{7}{12}$  יח"ש.
- (20)  $16\frac{1}{3}$  יח"ש.
- (21) א.  $y=-x$  ב.  $(-3,3)$  ג.  $7\frac{5}{6}$  יח"ש.
- (22)  $\frac{1}{6}$  יח"ש.
- (23) א.  $y=-4x+4$  ב.  $(1,0)$  ג.  $\frac{2}{3}$  יח"ש.
- (24) א.  $y=-x+4$  ב.  $2\frac{2}{3}$  יח"ש. ג.  $\frac{2}{3}$  יח"ש.

## חישובי שטחים יסודיים עם פרמטרים:

### שאלות:

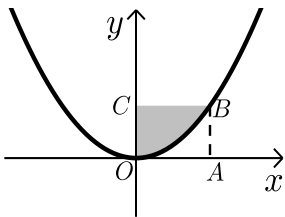


(25) נתונה הפרבולה:  $y = ax^2 + 8$ .

שיפוע המשיק לגרף הפרבולה בנקודה שבה  $x = 2$  הוא  $-2$ .

א. חשב את  $a$ .

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי המשיק, הפרבולה וציר  $y$ .



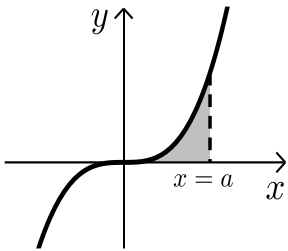
(26) הפונקציה המתוארת בשרטוט היא:  $y = ax^2$  ( $a$  פרמטר).

המרובע ABCO הוא ריבוע.

הקדקוד B נמצא על גרף הפונקציה.

ידוע כי אורך צלע הריבוע היא 2 יחידות.

מצא את ערך הפרמטר  $a$  ואת השטח המסומן בשרטוט.



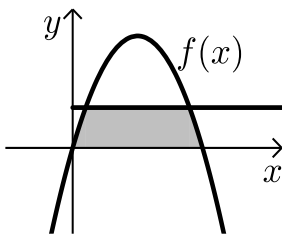
(27) נתונה הפונקציה  $y = x^3$ .

מעבירים אנך לציר ה- $x$ :  $x = a$  ( $a$  פרמטר חיובי)

כך שנוצר שטח הכלוא בין האנך, גרף הפונקציה וציר ה- $x$ .

א. הבע באמצעות  $a$  את השטח המקווקו בציור.

ב. חשב את  $a$  אם ידוע כי שטח זה שווה ל- $a^2$ .



(28) נתונה הפונקציה:  $f(x) = kx - x^2$ .

הישר  $y = 9$  חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.

ידוע כי שיעור ה- $x$  של אחת מנקודות החיתוך

הוא  $x = 9$ .

א. מצא את ערך הפרמטר  $k$ .

ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,

הישר וציר ה- $x$  (השטח המסומן).

**תשובות סופיות:**

$$\text{(25) א. } a = -\frac{1}{2} \quad \text{ב. } \frac{4}{3} \text{ יח"ש.}$$

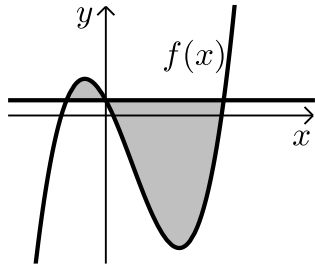
$$\text{(26) א. } a = \frac{1}{2}, \quad \text{ב. } 2\frac{2}{3} \text{ יח"ש.}$$

$$\text{(27) א. } \frac{a^4}{4} \quad \text{ב. } a = 2$$

$$\text{(28) א. } k = 10 \quad \text{ב. } (1, 9) \quad \text{ג. } 81\frac{1}{3} \text{ יח"ש.}$$

## חישובי שטחים כאשר נתונה נגזרת הפונקציה:

### שאלות:



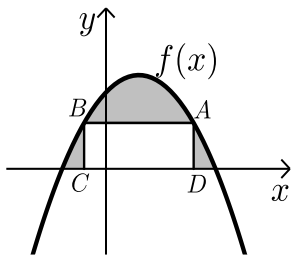
29 נגזרת הפונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = 3x^2 - 8x - 12$ .

הישר  $y = 5$  חותך את גרף הפונקציה  $f(x)$  על ציר ה- $y$ .

א. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

ב. מצא את השטח המוגבל בין הישר והפונקציה.

30 הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$  המתוארת באיור שלפניך היא:  $f'(x) = 3 - 2x$ .



ישר AB שמשוואתו:  $y = 6$  חותך את גרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודות A ו-B.

מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- $x$  כך שנוצר מלבן ABCD.

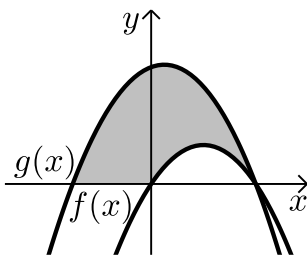
ידוע ששיעור ה- $x$  של הנקודה A הוא 4.

א. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- $x$ .

31 באיור שלפניך מתוארות הפונקציות שנגזרותיהן:  $f'(x) = 4 - 2x$ ,  $g'(x) = -2x + 1$ .

ידוע ששתי הפונקציות חותכות את ציר ה- $x$  כאשר:  $x = 4$ .

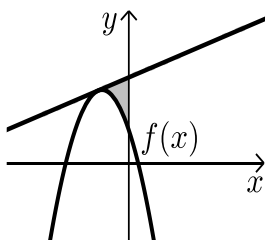


א. מצא את הפונקציות.

ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות וציר ה- $x$  (המסומן).

32 נתונה פונקציה  $f(x)$ .

משוואת המשיק לפונקציה  $f(x)$  בנקודה שבה:  $x = -2$  היא:  $y = x + 13$ .



הנגזרת של הפונקציה היא:  $f'(x) = -4x - 7$ .

א. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

ב. חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- $y$ .

**33** נתונה פונקציה  $f(x)$  שנגזרתה היא:  $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ .

ישר ששיפועו 15 משיק לפונקציה ברביע הרביעי בנקודה שבה:  $y = -20$ .

א. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

ב. האם יש עוד משיקים לגרף הפונקציה בעלי שיפוע 15? אם כן- מצא אותם.

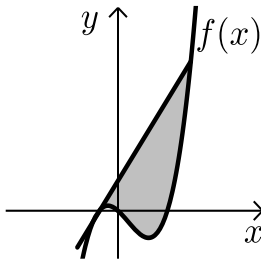
ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הראה כי הנקודה שבה  $x = 7$  משותפת למשיק

שמצאת בסעיף הקודם ולפונקציה  $f(x)$ .

ii. מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה

והמשיק שמצאת בסעיף הקודם (ראה איור).



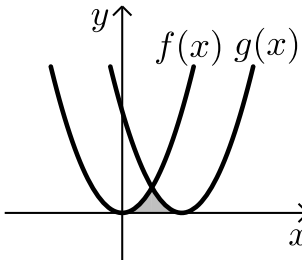
**34** באיור שלפניך חותך גרף הפונקציה:  $f(x) = x^2$

את גרף הפונקציה  $g(x)$  בנקודה שבה  $x = 2$ .

הנגזרת של הפונקציה  $g(x)$  היא:  $g'(x) = 2x - 8$ .

א. מצא את הפונקציה  $g(x)$ .

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- $x$  (המסומן).



**35** באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה  $f(x)$  והישר  $y = 2x$ .

נגזרת הפונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = 2x - 6$

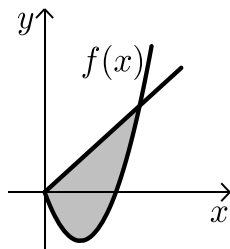
וידוע כי הישר חותך את הפונקציה בנקודה שבה ערך

ה- $y$  הוא 16.

א. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן מצא אותן.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.



## תשובות סופיות:

א. (29)  $f(x) = x^3 - 4x^2 - 12x + 5$       ב.  $189\frac{1}{3}$  יח"ש.

א. (30)  $f(x) = -x^2 + 3x + 10$       ב.  $27\frac{1}{6}$  יח"ש.

א. (31)  $f(x) = 4x - x^2$ ,  $g(x) = -x^2 + x + 12$       ב. 46.5 יח"ש.

א. (32)  $f(x) = -2x^2 - 7x + 5$       ב.  $5\frac{1}{3}$  יח"ש.

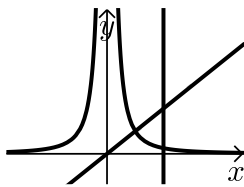
א. (33)  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$       ב.  $y = 15x + 28$

א. (34)  $g(x) = (x - 4)^2$       ג. i. (7,133)      ג. ii. 546.75 יח"ש.

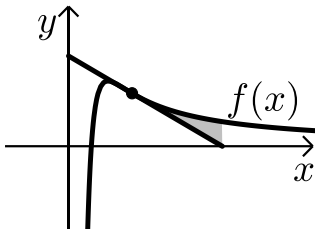
א. (35)  $f(x) = x^2 - 6x$       ב. (0,0)      ג.  $85\frac{1}{3}$  יח"ש.

## חישובי שטחים עם פונקציה רציונאלית:

### שאלות:

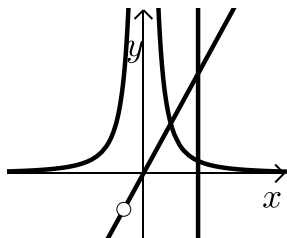


- (1) נתונות שתי פונקציות:  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $g(x) = x$ .  
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,  
הישר  $x=2$  וציר ה- $x$ .



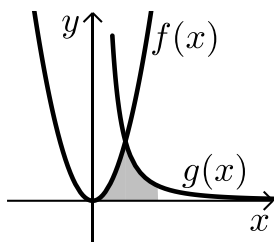
- (2) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ , מצא את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.  
ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה והמשיק שמצאת בסעיף א'.  
חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק ואנך לציר ה- $x$  היוצא מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$ .



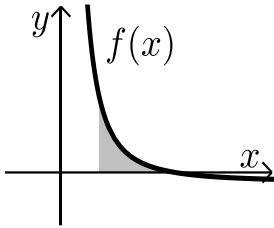
- (3) נתונות שתי פונקציות:  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $g(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + 2}$ .  
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,  
הישר  $x=2$  וציר ה- $x$ .

- (4) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:  $f(x) = 2x^2$  ו- $g(x) = \frac{a}{x^2}$



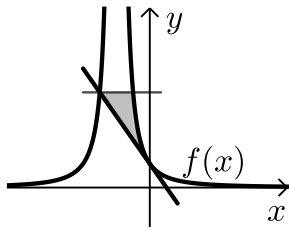
- ( $a$  קבוע) בתחום:  $x > 0$ .  
ידוע כי הגרפים נחתכים ברביע הראשון בנקודה הנמצאת על הישר:  $y = 4x$ .  
א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים ואת  $a$ .  
ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- $x$  והישר:  $x=4$ .

5) גרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{a-x^2}{x^2}$  (קבוע  $a$ ) חותך את ציר ה- $x$  בנקודה  $(6,0)$ .



- א. מצא את  $a$  וכתוב את הפונקציה.  
 ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  והישר:  $x=2$ .

6) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{A}{(2x+A)^2}$  ( $A$  פרמטר חיובי).



ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$  הוא:  $-\frac{1}{9}$ .

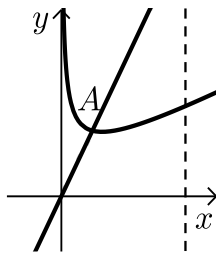
- א. מצא את ערך הפרמטר  $A$ .  
 ב. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך עם ציר ה- $y$ .  
 ג. הראה כי המשיק חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה:  $x = -4.5$ .  
 ד. העבר ישר אופקי מנקודת החיתוך של המשיק וגרף הפונקציה מהסעיף הקודם. מצא את נקודת החיתוך הנוספת של ישר זה עם גרף הפונקציה.  
 ה. חשב את השטח כלוא בין המשיק, הישר וגרף הפונקציה (היעזר באיור).

### תשובות סופיות:

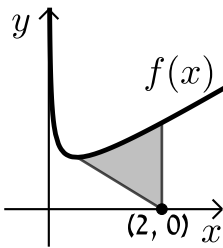
- (1) 1 יח"ש.  
 (2) א.  $y = -x + 2$ .  
 (3) 1 יח"ש.  
 (4) א.  $a = 32$ ,  $(2, 8)$ .  
 (5) א.  $a = 36$ ,  $f(x) = \frac{36-x^2}{x^2}$ .  
 (6) א.  $A = 6$ .  
 ב.  $\frac{1}{8}$  יח"ש.  
 ב.  $13\frac{1}{3}$  יח"ש.  
 ב. 8 יח"ש.  
 ג. הוכחה.  
 ב.  $y = -\frac{1}{9}x + \frac{1}{6}$ .  
 ה.  $\frac{5}{8}$  יח"ש.  
 ד.  $(-1.5, \frac{2}{3})$ .

## חישובי שטחים עם פונקצית שורש:

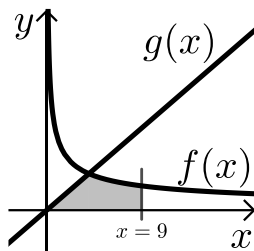
### שאלות:



- (1) באיור שלפניך נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} + x$ . מעבירים ישר:  $y = 4x$  החותך את גרף הפונקציה בנקודה A המסומנת באיור.
- מצא את שיעורי הנקודה A.
  - חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $f(x)$ , הישר  $y = 4x$ , ציר ה- $x$  ואנך לציר ה- $x$ :  $x = 4$ .

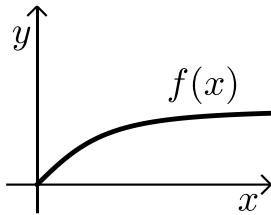


- (2) באיור שלפניך נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + x$ .
- מצא את נקודת המינימום שלה.
  - מנקודת המינימום של הפונקציה מעבירים ישר לנקודה  $(2, 0)$  שעל ציר ה- $x$ .
- מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר ואנך לציר ה- $x$  היוצא מהנקודה  $(2, 0)$  עד לנקודת החיתוך עם גרף הפונקציה.

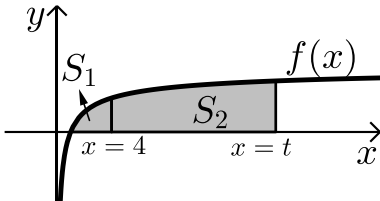


- (3) באיור הבא מתוארים הגרפים של הפונקציות:  $f(x) = \frac{16}{\sqrt{x}}$  ו- $g(x) = 2x - 1$ .
- מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.
  - חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- $x$  והישר  $x = 9$ .

- (4) נתונה הפונקציה:  $f(x) = (x - 6)\sqrt{x}$ . חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודת המינימום שלה וציר ה- $y$ .



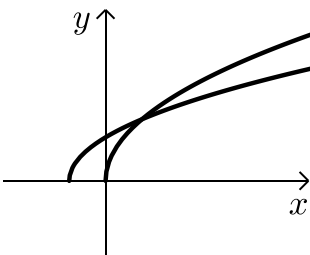
- (5) נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$  ברביע הראשון. לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק והישר  $x = \sqrt{3}$ .



- (6) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:  $f(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ . מעבירים שני אנכים לציר ה- $x$  והם:  $x = 4$  ו- $x = t$  ( $t > 4$ ). נסמן:  
 $S_1$  - השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$ .  
 $S_2$  - השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  והאנכים. ידוע כי:  $8S_1 = S_2$ . מצא את  $t$ .

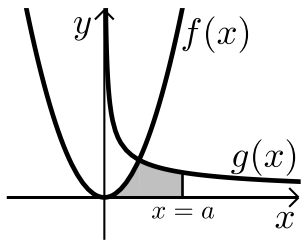
(7) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$

- א. ענה על הסעיפים הבאים:  
 i. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.  
 ii. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
 iii. הראה כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.  
 ב. מעבירים משיק לגרף הפונקציה ששיפועו הוא:  $m = \frac{17}{16}$ . מצא את נקודת ההשקה.  
 ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  ואנך לציר ה- $x$  מנקודת ההשקה שמצאת בסעיף הקודם.



- (8) נתונות שתי פונקציות:  $f(x) = \sqrt{x+b}$ ,  $g(x) = \sqrt{2x}$  ( $b > 0$ ). גודל השטח הכלוא בין הפונקציות וציר ה- $x$  הוא  $2\frac{2}{3}$  יח"ש. מצא את ערכו של הפרמטר  $b$ .

9) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:  $f(x) = x^2$



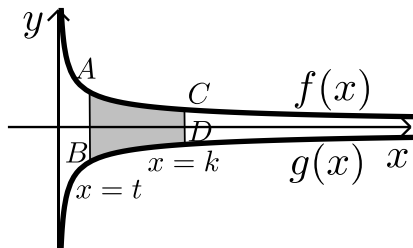
ו-  $g(x) = \frac{32}{\sqrt{x}}$  ברביע הראשון.

מעבירים ישר  $x=a$  החותך את גרף הפונקציה  $g(x)$  ויוצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים, ציר ה- $x$  והישר.

ידוע כי שטח זה שווה ל-  $S = 85\frac{1}{3}$ .

מצא את  $a$ .

10) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$  ו-  $g(x) = -\frac{3}{\sqrt{x}}$



מעבירים שני ישרים:  $x=t$  ו-  $x=k$  אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.

ידוע כי:  $2CD=AB$ .

א. הראה כי:  $k=4t$ .

ב. השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות

והישרים:  $x=t$  ו-  $x=k$  הוא:  $S=12$ .

מצא את  $t$ .

11) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא עבור איזה ערך של  $a$ ,  $(a > 1)$  יתקיים:  $\int_1^a \left( \frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1 \right) dx = 0$ .

ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1$

מעבירים שני אנכים לציר ה- $x$  והם:  $x=1$  ו-  $x=13$

כך שנוצרים השטחים  $S_1$  ו-  $S_2$ .

מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$

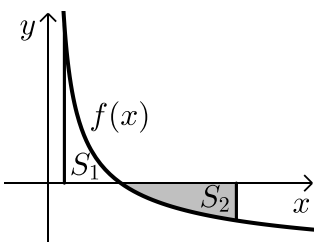
ג. ענה על הסעיפים הבאים:

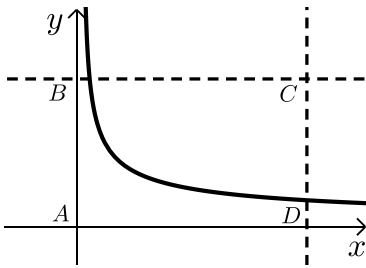
i. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,

ציר ה- $x$  והאנך  $x=1$ ,  $(S_1)$ .

ii. היעזר בתוצאה שקיבלת ובסעיף א' וקבע לכמה שווה השטח  $S_2$ .

נמק את טענתך.





**(12)** באיור שלפניך מתוארת הפונקציה:  $f(x) = \frac{9}{\sqrt{2x-1}}$

מעבירים את הישרים המקבילים לצירים:  $x = 13$

ו-  $y = 3$  כך שנוצר המלבן ABCD כמתואר באיור.

הישר  $y = 3$  חותך את גרף הפונקציה בנקודה M.

א. מצא את שיעורי הנקודה M.

ב. מסמנים את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה

והישרים ב-  $S_1$  ואת שטח המלבן ב-  $S_2$ .

$$\text{הראה כי: } \frac{S_1}{S_2} = \frac{2}{13}$$

### תשובות סופיות:

1) א.  $A(1,4)$  ב. 15.5 יח"ש.

2) א.  $\min(0.5, 1.5)$  ב. 1.75 יח"ש.

3) א.  $(4,8)$  ב. 48 יח"ש.

4) 2.26 יח"ש.

5) 0.5 יח"ש

6)  $t = 16$

7) א. i.  $x > 0$  ii.  $(4,0)$  iii.  $f'(x) = 1 + \frac{4}{x\sqrt{x}} > 0$

ב.  $(16,14)$  ג. 88 יח"ש.

8)  $b = 2$

9)  $a = 9$

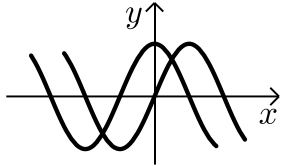
10) א. הוכחה ב.  $t = 1$

11) א.  $a = 13$  ב.  $(5,0)$  ג. i.  $S_1 = 2$  ii.  $S_2 = |-S_1| = 2$

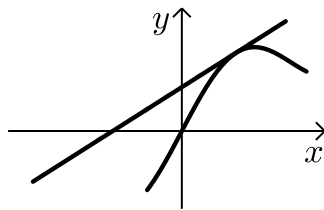
12) א.  $M(5,3)$

## חישובי שטחים עם פונקציות טריגונומטריות:

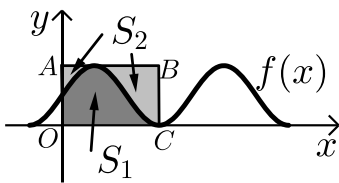
### שאלות:



- (1) נתונות הפונקציות:  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = \cos x$ .  
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות לציר ה- $y$  ברביע הראשון.

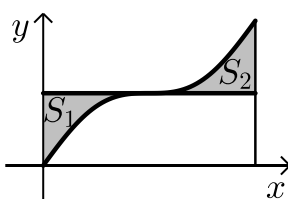


- (2) נתונה הפונקציה:  $f(x) = x + 2 \sin x$ .  
בתחום שבין ראשית הצירים לנקודת המקסימום הראשונה מימינה העבירו לפונקציה משיק ששיפועו 1.  
א. מצא את משוואת המשיק.  
ב. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- $x$  ברביעים הראשון והשני.

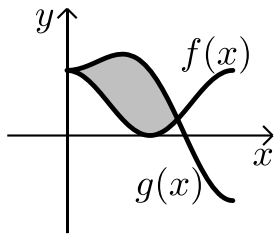


- (3) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sin 2x + 1}{2}$ .  
בתחום:  $-0.25\pi \leq x \leq 1.75\pi$  מעבירים משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה ומעלים אנך לציר ה- $x$  מנקודת החיתוך הראשונה של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  בתחום הנתון המסומנת ב- $C$  כך שנוצר המלבן ABCO. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים יסומן ב- $S_1$  (ראה סימון בציור). השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה- $y$  יסומן ב- $S_2$ .  
א. מצא את משוואת הצלע AB של המלבן.  
ב. חשב את היחס:  $\frac{S_1}{S_2}$ .

- (4) באיור שלפניך נתונה הפונקציה:  $y = \sin x + x$  בתחום:  $0 \leq x \leq 2\pi$ .



- א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות בתחום הנתון?  
ב. מורידים אנך מגרף הפונקציה לציר ה- $x$  בנקודה שבה:  $x = 2\pi$ .  
מעבירים ישר המקביל לציר ה- $x$  מהנקודה שמאפסת את הנגזרת.  
הראה כי השטחים  $S_1$  ו- $S_2$  המסומנים בסרטוט שווים.



5) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה

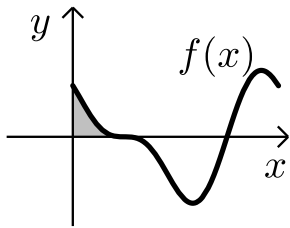
$$f(x) = \cos^2 x \text{ ו- } g(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$$

בתחום:  $0 \leq x \leq \pi$ .

א. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים.

השתמש בזהות:  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ .



6) הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = -\cos 2x - \sin x$ .

א. מצא את שיעורי ה- $x$  של הנקודות

המקיימות:  $f'(x) = 0$  בתחום:  $0 < x < 2\pi$ .

ידוע כי הנקודה המקיימת  $f'(x) = 0$  אשר אינה

קיצון נמצאת על ציר ה- $x$ .

ב. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .

ג. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה בתחום הנתון.

חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.

7) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הפונקציה:  $y = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$

הוכח כי הנגזרת של הפונקציה היא:  $y' = x^2 \sin x$

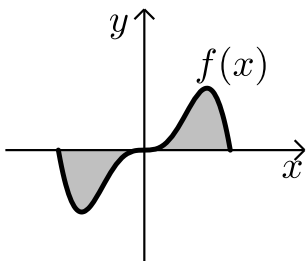
באיור שלפניך נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^2 \sin x$

בתחום:  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

ב. הראה כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה

וציר ה- $x$  בתחום הנתון.



8) נתונה הפונקציה:  $f(x) = a \cos x + b \sin x$ ,  $a, b$  פרמטרים.

הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = \frac{\pi}{4}$  והיא חיובית בתחום  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ .

גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה בתחום  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  הוא  $2\sqrt{2} - 2$ .

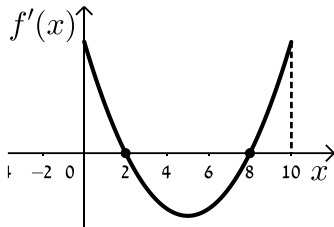
מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

## תשובות סופיות:

- (1) 0.41 יח"ש.
- (2) א.  $y = x + 2$ . ב.  $\pi$  יח"ש.
- (3) א.  $y = 1$ . ב.  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 2}{3\pi - 2} = 1.538$ .
- (4) א. אין נקודת קיצון, הנקודה  $(\pi, \pi)$  היא נקודת פיתול.  
 ב.  $S = 0.5\pi^2 - 2 = 2.934$ .
- (5) א.  $(0, 1)$ ,  $(\frac{2\pi}{3}, \frac{1}{4})$ . ב.  $S = 1.5 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.299$ .
- (6) א.  $x = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ . ב.  $f(x) = -\frac{1}{2} \sin 2x + \cos x$ . ג.  $\frac{1}{2}$  יח"ש.
- (7) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג.  $S = 2(\pi^2 - 4) \approx 11.74$ .
- (8)  $b = -2, a = 2$ .

## חישובי שטחים בין גרף הנגזרת והצירים:

### שאלות:



1 הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת בתחום  $0 \leq x \leq 10$ .

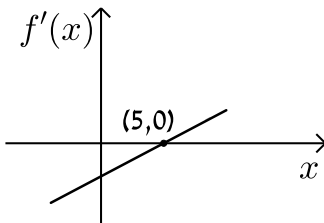
בציור מתואר גרף הנגזרת  $f'(x)$ .

א. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$

אם:  $f(2) = 6, f(0) = -4, f(5) = 0$  וכך:  $f(10) > 0$ .

ב. חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הנגזרת והצירים ברביע הראשון

עד לנקודה שבה  $x = 2$ .



2 לפי גרף של הפונקציה  $f'(x)$ .

הגרף המתואר חותך את ציר ה- $x$  בנקודה

אחת בלבד והיא  $(5, 0)$ .

א. מצא את התחומים שבהם  $f'(x)$  היא חיובית

ואת התחומים שבהם היא שלילית.

ב. קבע מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .

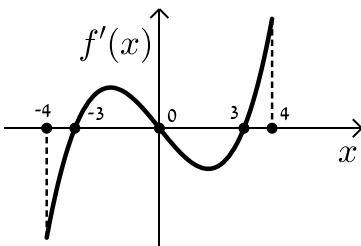
ג. כתוב את נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  אם ידוע כי

שיעור ה- $y$  שלה הוא  $-2$ .

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  אם ידוע כי גרף הפונקציה

חותך את ציר ה- $y$  כאשר  $y = 8$ .

ה. חשב את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת  $f'(x)$  והצירים.



3 בציור מתואר גרף הנגזרת  $f'(x)$  של הפונקציה  $f(x)$ .

א. רשום את תחומי העלייה והירידה של  $f(x)$ .

ב. מצא את שיעורי ה- $x$  של נקודות הקיצון

של  $f(x)$  וקבע את סוגן.

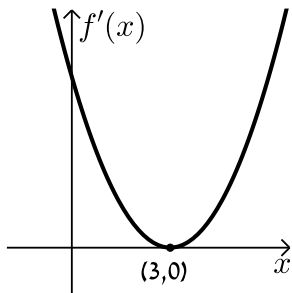
ג. נתון כי הפונקציה  $f(x)$  עוברת בראשית הצירים וגם מקיימת:  $f(-3) = f(3) = m$ .

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום הנ"ל (הבע באמצעות  $m$ ).

ד. השטח הכלוא בין גרף הנגזרת  $f'(x)$  וציר ה- $x$  ברביעים

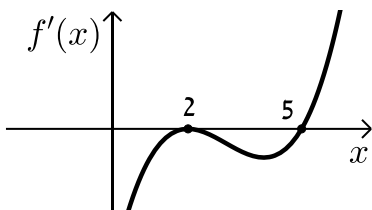
השני והרביעי הוא 16 יח"ש. מצא את  $m$ .

4 הנגזרת  $f'(x)$  של הפונקציה  $f(x)$  מתוארת באיור הבא.



- א. האם ל- $f(x)$  יש נקודות קיצון? נמק.
- ב. סרטט סקיזה של גרף הפונקציה  $f(x)$  אם ידוע כי  $f(3) = 4$  וכי היא חותכת את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = -5$ .
- ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת  $f'(x)$  והצירים ברביע הראשון.

5 באיור שלפניך מתואר גרף הנגזרת  $f'(x)$  של הפונקציה  $f(x)$ .

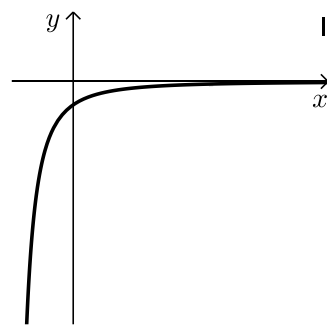
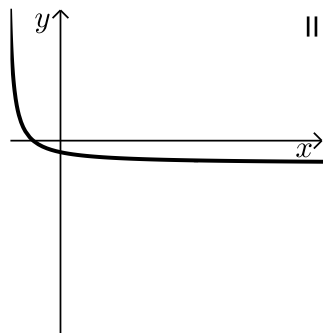


ידוע כי הנקודות  $B(2, 2)$ ,  $A(5, -4.75)$

ו- $C(0, 14)$  נמצאות על  $f(x)$ .

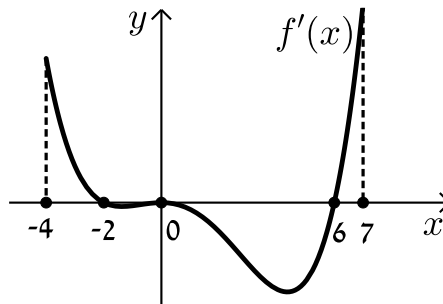
- א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ .
- ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של  $f(x)$ .
- ג. סרטט סקיזה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .
- ד. חשב את השטח מוגבל בין גרף הנגזרת  $f'(x)$  והצירים בתחום  $0 \leq x \leq 5$ .

6 באיורים שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו- $f'(x)$ :



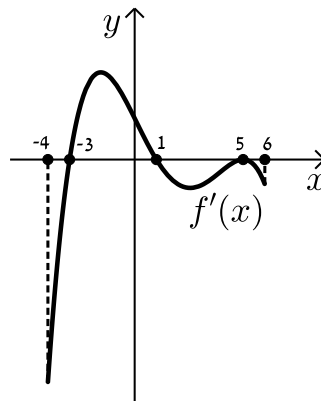
- א. זהה איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמק.
- ב. נתון כי  $f(10) = -3$  וכי  $f(x)$  חותכת את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = -2$ . מהו השטח המוגבל בין גרף הנגזרת  $f'(x)$ , הצירים והישר  $x = 10$ ?

7 נתון גרף הנגזרת  $f'(x)$  הבא:



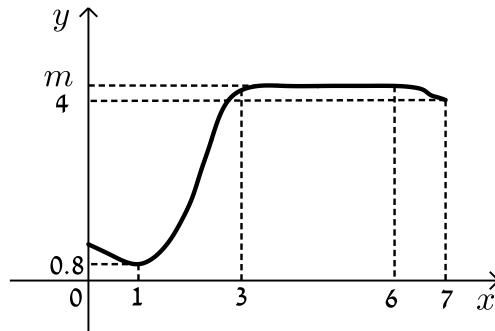
- א. סרטט את גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום  $-4 \leq x \leq 7$  לפי הנתונים:  $f(0) = -2$ ,  $f(-2) = 7.6$  ו-  $f(6) = -606.8$ .
- ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- $x$  ברביע השלישי.
- ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- $x$  ברביע הרביעי.

8 נתון גרף הנגזרת  $f'(x)$  הבא:



- א. סרטט את גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום  $-4 \leq x \leq 6$  עבור הנתונים:  $f(5) = -83\frac{1}{3}$ ,  $f(1) = 36\frac{2}{15}$ ,  $f(-3) = -356\frac{2}{5}$ .
- ב. חשב את כלל השטח הכלוא בין גרף הנגזרת וציר ה- $x$  בתחום:  $-3 \leq x \leq 5$ .

9) בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום  $0 < x < 7$ :



הסתמך על הגרף של  $f(x)$  ועל הערכים הרשומים על הצירים וענה על השאלות הבאות:

א. מצא עבור אילו ערכים של  $x$  השונים מ-6 מתקיים:

i.  $f'(x) > 0$

ii.  $f'(x) = 0$

iii.  $f'(x) < 0$

ב. נתון כי:  $\int_3^6 m dx = 15$ , כאשר  $m$  הוא פרמטר המסומן על ציר ה- $y$ .

מצא את  $f(5)$ .

ג. סרטט סקיצה של גרף פונקציה הנגזרת  $f'(x)$  בתחום  $0 < x < 3$ .

ד. מצא את השטח המוגבל בין הגרף של פונקציה הנגזרת  $f'(x)$

וציר ה- $x$  בתחום  $1 < x < 3$ .

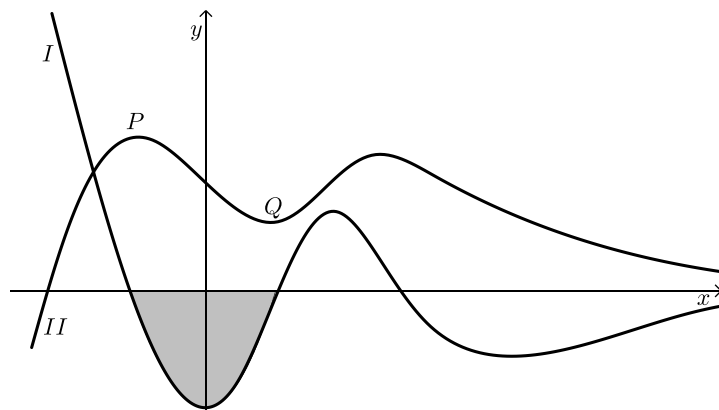
10) בסרטוט נתונים הגרפים של פונקציה ושל נגזרתה.

א. קבע איזה מהגרפים, I או II, שייך לפונקציה ואיזה שייך לנגזרת. נמק.

ב. כמה נקודות פיתול יש לפונקציה? נמק וסמן אותן על הסרטוט.

ג. נתון:  $P(-2, 4)$ ,  $Q(2, 1)$ . מצא את גודלו של השטח הכלוא בין גרף I

לציר ה- $x$  (השטח המסומן בסרטוט).

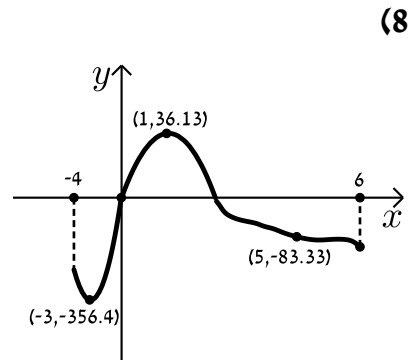
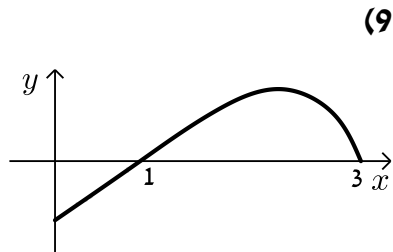
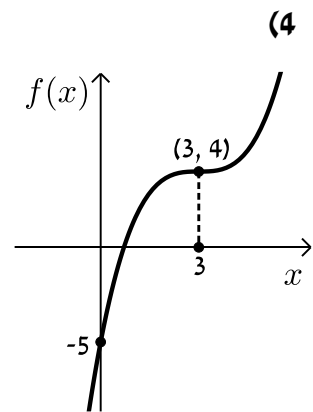
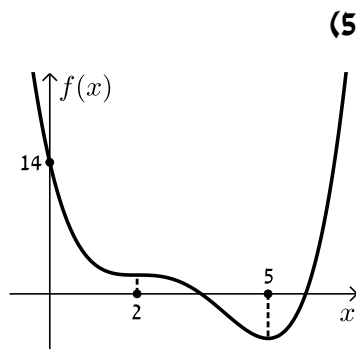
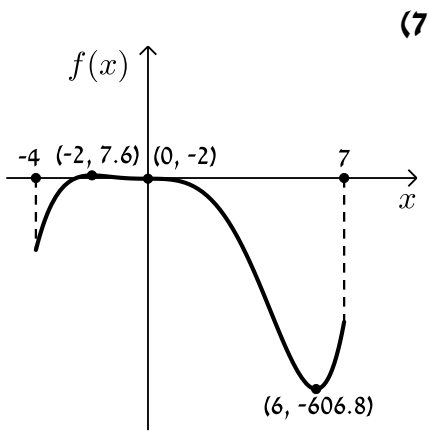
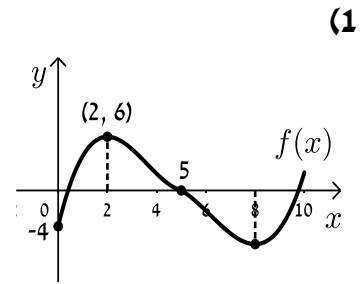
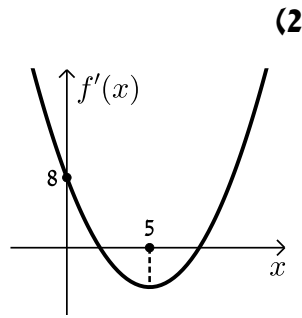
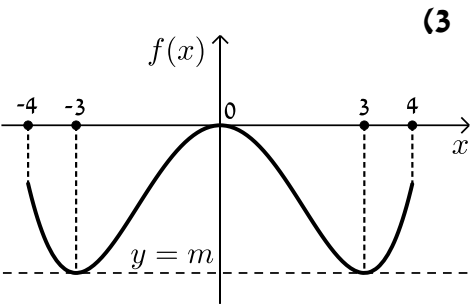


## תשובות סופיות:

הערה: סרטוטי הסקיצות מופיעות במרוכז בעמוד הבא.

- (1) ב. 10 יח"ש.
- (2) א. חיובית:  $x > 5$ , שלילית:  $x < 5$ . ב. עולה:  $x > 5$ , יורדת:  $x < 5$ .  
 ג.  $\min(5, -2)$ . ד. הוכחה. ה. 10 יח"ש.
- (3) א. עולה:  $3 < x \leq 4$ ,  $-3 < x < 0$ , יורדת:  $0 < x < 3$ ,  $-4 \leq x < -3$ .  
 ב.  $x_{\min} = -3$ ,  $x_{\max} = 0$ ,  $x_{\min} = 3$ . ג. הוכחה. ד.  $m = -8$ .
- (4) א. לא. הנקודה  $(3, 0)$  היא פיתול מכיוון שהפונקציה עולה לפנייה ואחריה.  
 ב. הוכחה. ג. 9 יח"ש.
- (5) א.  $\min(5, -4.75)$ . ב. עולה:  $x > 5$ , יורדת:  $x < 5$ .  
 ג. הוכחה. ד. 18.75 יח"ש.
- (6) א.  $f(x): \text{II}$ ,  $f'(x): \text{I}$ . ב. 1 יח"ש.
- (7) א. הוכחה. ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.
- (8) א. הוכחה. ב. 512 יח"ש.
- (9) א. i.  $f'(x) > 0: 1 < x < 3$ . ii.  $f'(x) = 0: x = 1, 3 \leq x < 6$ .  
 א. iii.  $f'(x) < 0: 6 < x < 7, 0 < x < 1$ .  
 ב.  $f(5) = 5, m = 5$ . ד. 4.2 יח"ש.
- (10) א. גרף I -  $f'(x)$  וגרף II -  $f(x)$ . ב. 3 נקודות פיתול.  
 ג. 3 יח"ש.

סרטוטי גרפים לפי מספרי שאלות:



# מתמטיקה

פרק 28 - חשבון אינטגרלי - פונקציה מעריכית, לוגריתמית וחזקה

תוכן העניינים

430	1. פונקציה מעריכית.....
436	2. פונקציה לוגריתמית.....
442	3. פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי.....

## פונקציה מעריכית:

סיכום כללי:

אינטגרלים מיידיים של פונקציות מעריכיות:

אינטגרלים יסודיים	אינטגרלים של פונקציות מורכבות
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$

שאלות:

אינטגרל כללי:

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

א.  $\int (5e^x - e^{3x} + e^{-x} + 1) dx$

ג.  $\int (6\sqrt{e^{4x-1}}) dx$

ב.  $\int (3^x + 5^{2x}) dx$

ד.  $\int (e^x + e^{-x})^2 dx$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים:

א.  $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} dx$

ב.  $\int \frac{3e^{3x} - 5e^{2x} + 4e^x - 2}{e^x - 1} dx$

(3) חשב את האינטגרלים הבאים:

א.  $\int (e^{4x} + e^{-x}) dx$

ג.  $\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx$

ב.  $\int (e^{x+1})^2 dx$

ד.  $\int \left( 4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx$

4) חשב את האינטגרלים הבאים:

א.  $\int \left( \frac{e^x}{\sqrt{e^x+3}} \right) dx$     ב.  $\int \left( \frac{3-e^x}{(e^x-3x)^2} \right) dx$     ג.  $\int (xe^{x^2}) dx$

**אינטגרל מסוים:**

5) נתונה נגזרת של פונקציה:  $f'(x) = 2e^x - \frac{1}{e^x}$ .

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה  $\left( \ln 2, 3\frac{1}{4} \right)$ .

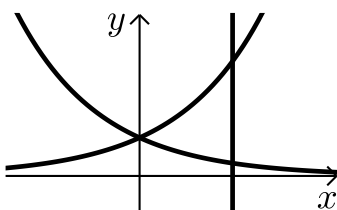
6) נתונה נגזרת של פונקציה:  $f'(x) = e^{2x} + e^x - 2$ .

מצא את הפונקציה אם ידוע שערך הפונקציה בנקודת המינימום שלה הוא  $\frac{1}{2}$ .

7) נתונה נגזרת של פונקציה:  $f'(x) = 6x^2 e^{x^3} - \frac{1}{x^2}$ .

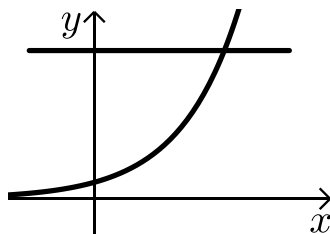
מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה  $\left( -1, \frac{2}{e} \right)$ .

**חישובי שטחים:**



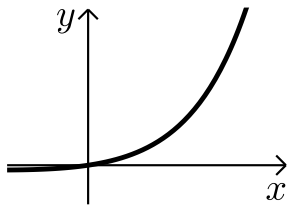
8) נתונות הפונקציות:  $f(x) = e^x$ ,  $g(x) = e^{-x}$ .

מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות לישר  $x = \ln 3$ .

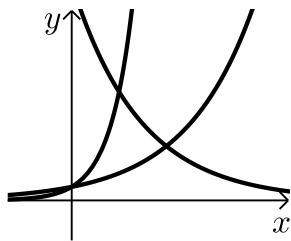


9) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 3^x$ .

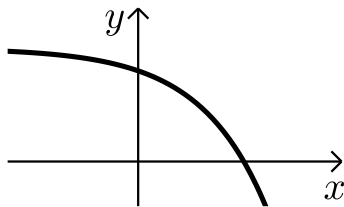
מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישר  $y = 9$  וציר ה- $y$ .



- 10** נתונה הפונקציה:  $f(x) = e^{2x} - e^x$ .  
 לפונקציה העבירו משיק בראשית הצירים.  
 מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,  
 המשיק והישר  $x = 2$ .



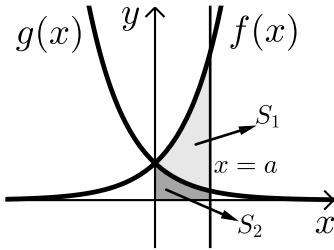
- 11** נתונות הפונקציות:  
 $f(x) = e^x$ ,  $g(x) = e^{3x}$ ,  $h(x) = 16e^{-x}$ .  
 חשב את גודל השטח הכלוא שבין שלוש הפונקציות.



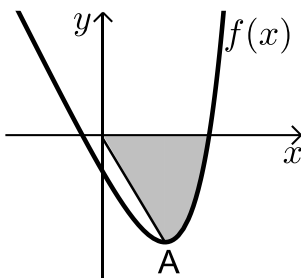
- 12** נתונה הפונקציה:  $f(x) = 5 - e^x$ .  
 העבירו לפונקציה משיק ששיפועו  $-e$ .  
 חשב את גודל השטח הכלוא בין  
 הפונקציה, המשיק וציר ה- $x$ .  
 ניתן להשאיר  $e$  ו- $\ln$  בתשובה.

- 13** נתונה הפונקציה:  $f(x) = e^{bx}$ ,  $(0 < b)$ .  
 גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר  
 בראשית הצירים וציר ה- $y$  הוא  $\frac{e-2}{4}$ .  
 מצא את ערכו של הפרמטר  $b$ .

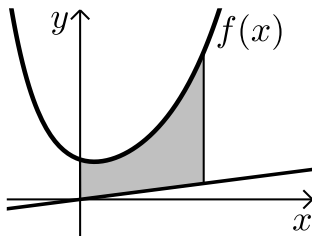
- 14** נתונות הפונקציות:  $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ ,  $g(x) = e^{-x}$ .  
 מנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה  $g(x)$  ברביע הראשון הורידו אנך לשני  
 הצירים. המשך האנך לציר ה- $y$  חותך את הפונקציה  $f(x)$  ומנקודת החיתוך  
 יורד אנך נוסף לציר ה- $x$  כך שנוצר מלבן.  
 הוכח כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא  $\frac{3}{e}$ .



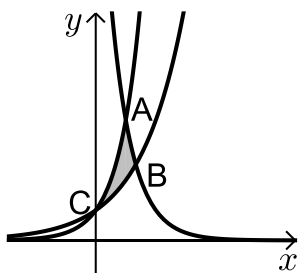
- 15** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:  $f(x) = e^{2x}$  ו-  $g(x) = e^{-2x} - 1$ . מעבירים אנך לציר ה- $x$  את הישר  $x = a$ ,  $a > 0$ , כמתואר באיור. אנך זה יוצר את השטחים  $S_1$  ו-  $S_2$ . ידוע כי השטח  $S_1$  גדול פי 3 מהשטח  $S_2$ . מצא את  $a$ .



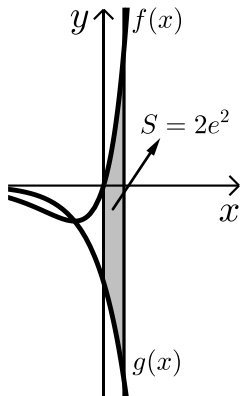
- 16** נתונה הפונקציה:  $f(x) = e^{2x-1} - 2ex - 2$ . הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה. א. מצא את שיעורי הנקודה A. מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים. ב. כתוב את משוואת הישר המחבר את הנקודה A עם הראשית. ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- $x$ , אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 1.7$ .



- 17** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{e^x + e^{ax}}{4}$ . ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה:  $(1, \frac{e^3 + 1}{4e^2})$ . א. מצא את  $a$  וכתוב את הפונקציה. ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה  $f(x)$  והישר:  $y = 0.1x$ . חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר  $y$  והאנך:  $x = 2$ .



- 18** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של שלוש פונקציות: I.  $f(x) = 2^x$ . II.  $g(x) = 4^x$ . III.  $h(x) = 2^{4-2x}$ . א. קבע איזה גרף מתאר כל פונקציה. ב. מצא את שיעורי הנקודות A, B ו- C. (נקודות החיתוך שבין הגרפים). ג. חשב את השטח המסומן באיור.



**19** ענה על הסעיפים הבאים:

א. גזור את הפונקציה הבאה:  $y = e^x(x-1)$ .

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

הפונקציות:  $f(x) = xe^x$ ,  $g(x) = -e^x$ .

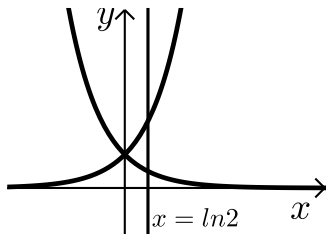
מעבירים ישר  $x = a$  ( $a > 0$ ), החותך את הגרפים

של שתי הפונקציות ויוצר את השטח המתואר

הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- $y$  והישר.

ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$ . מצא את  $a$ .

**חישובי נפחים:**



**20** נתונות הפונקציות:  $f(x) = e^x$ ,  $g(x) = e^{-x}$ .

השטח הכלוא בין הפונקציות והישר:  $x = \ln 2$

מסתובב סביב ציר ה- $x$ .

חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $5e^x - \frac{e^{3x}}{3} - e^{-x} + x + c$     ב.  $\frac{3^x}{\ln 3} + \frac{5^{2x}}{2\ln 5} + c$
- ג.  $3e^{2x-\frac{1}{2}} + c$     ד.  $\frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + c$
- (2) א.  $e^x + x + c$     ב.  $\frac{3e^{2x}}{2} - 2e^x + 2x + c$
- (3) א.  $\frac{1}{4}e^{4x} - e^{-x} + c$     ב.  $\frac{1}{2}e^{2x+2} + c$
- ג.  $\frac{0.4^x}{\ln 0.4} + \frac{3.2^x}{\ln 3.2} + \frac{200^x}{\ln 200} + c$     ד.  $8\sqrt{e^x} - \frac{3}{4}e^{-\frac{4x}{3}} + c$
- (4) א.  $2\sqrt{e^x+3} + c$     ב.  $\frac{1}{e^x-3x} + c$     ג.  $\frac{1}{2}e^{x^2} + c$
- (5)  $f(x) = 2e^x + e^{-x} - 1.25$
- (6)  $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + e^x - 2x - 1$
- (7)  $f(x) = 2e^{x^3} + \frac{1}{x} + 1$
- (8)  $S = 1\frac{1}{3}$  יח"ש
- (9)  $S = 10.72$  יח"ש
- (10)  $S = 18.41$  יח"ש
- (11)  $S = 3\frac{1}{3}$  יח"ש
- (12)  $S = 0.192$  יח"ש
- (13)  $b = 2$
- (15)  $a = \ln 2$
- (16) א.  $A(1, -e-2)$     ב.  $y = -(e+2)x$     ג.  $S = 4.744$  יח"ש
- (17) א.  $a = -2$     ב.  $f(x) = \frac{e^x + e^{-2x}}{4}$     ג.  $1.52$
- (18) א.  $A(1, 4)$ ,  $B\left(1\frac{1}{3}, 2.52\right)$ ,  $C(0, 1)$     ב.  $1.03$  יח"ש
- (19) א.  $y' = xe^x$     ב.  $a = 2$
- (20)  $1\frac{1}{8}$  יח"ש

## פונקציה לוגריתמית:

### סיכום כללי:

אינטגרלים מיידיים של פונקציות לוגריתמיות:

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + c$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b  + c$

### שאלות:

#### אינטגרל כללי:

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \left( \frac{3}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{4}{3x-1} \right) dx \quad \text{א.} \quad \int \frac{x^2+3x-4}{x} dx \quad \text{ב.} \quad \int \frac{x+3}{x^2-9} dx \quad \text{ג.}$$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{x^2+3x+5}{x+1} dx \quad \text{א.} \quad \int \frac{x^3-x^2+5x-6}{x-2} dx \quad \text{ב.} \quad \int \frac{x^4+3}{x+1} dx \quad \text{ג.}$$

(3) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{2x}{x^2-3} dx \quad \text{א.} \quad \int \frac{x-1}{x^2-2x} dx \quad \text{ב.} \quad \int \frac{e^x}{e^x+5} dx \quad \text{ג.} \\ \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx \quad \text{ד.} \quad \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \quad \text{ה.}$$

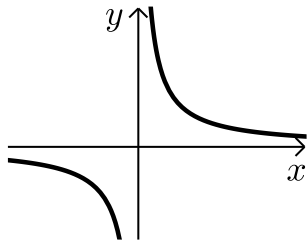
#### אינטגרל מסוים:

(4) נתונה נגזרת של פונקציה:  $f'(x) = 2x - \frac{1}{x-4}$ .

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה (5, 28).

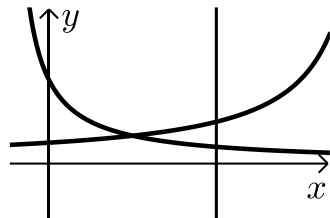
- (5) נתונה נגזרת שנייה של פונקציה:  $f''(x) = 6x - \frac{1}{x^2}$ . מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה  $(1, -2)$  וששיפועה בנקודה זו הוא 3.

**חישובי שטחים:**



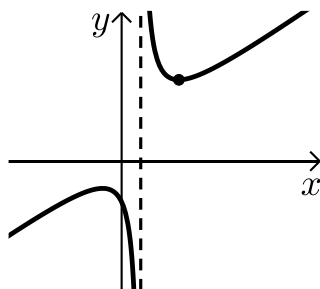
- (6) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים  $x = -1$  ו- $x = -4$  וציר ה- $x$ . ניתן להשאיר  $\ln$  בתשובה.



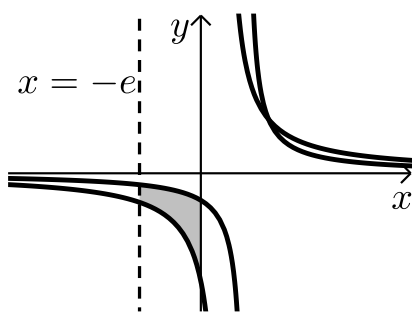
- (7) נתונות הפונקציות:  $f(x) = \frac{2}{x+1}$ ,  $f(x) = \frac{4}{8-x}$ .

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות, הישר  $x = 4$  והצירים.



- (8) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ .

חשב את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודה שבה  $x = 2$  ואנך לציר ה- $x$  העובר בנקודת המינימום של הפונקציה. אפשר להשאיר ביטוי עם  $\ln$  בתשובה.

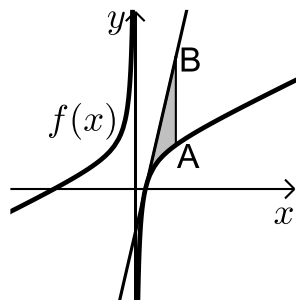


- (9) באיור שלפניך נתונות הפונקציות:  $f(x) = \frac{a}{x-1}$ .

ו- $g(x) = \frac{a-1}{x-2}$  בתחום:  $x < 0$ .

ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה  $x = 3$ .

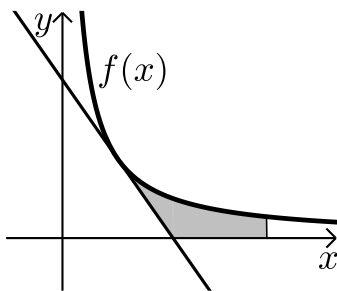
- א. מצא את  $a$  וכתוב את שתי הפונקציות.  
ב. חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- $y$  והישר  $x = -e$ .



**10** נתונה הפונקציה:  $f(x) = 7 + ax + \frac{b}{x}$ .

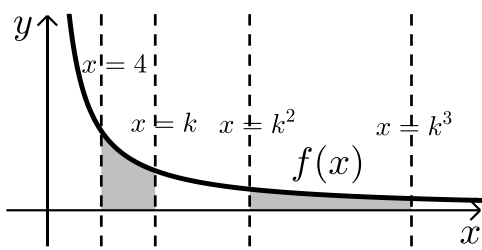
ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה  
בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$  היא:  $y = 18x - 9$ .  
א. מצא את  $a$  ו- $b$  וכתוב את הפונקציה.  
מעבירים ישר המקביל לציר ה- $y$  שחותך את גרף  
הפונקציה בנקודה A ואת משוואת המשיק בנקודה B.  
אורך הקטע AB הוא 18.

- ב. מצא את משוואת הישר הנ"ל אם ידוע כי הנקודה A  
נמצאת מימין לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.



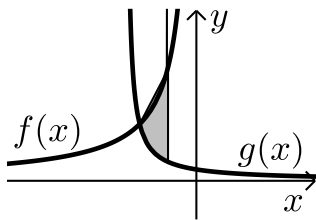
**11** הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$ .

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  
שבה:  $x = 2$  היא:  $y = 4 - x$ .  
א. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .  
ב. באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה  $f(x)$   
והמשיק בתחום:  $x > 0$ .  
חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק,  
ציר ה- $x$  והישר  $x = e^2$ .



**12** באיור שלפניך נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{2}{x}$ .

בתחום:  $x > 0$ . מעבירים את הישרים:  
 $x = 4$ ,  $x = k$ ,  $x = k^2$ ,  $x = k^3$   
כמתואר  $x > 4$ .  
א. הבע באמצעות  $k$  את השטחים  $S_1$  ו- $S_2$ .  
ב. הראה כי ההפרש:  $S_2 - S_1$  אינו תלוי ב- $k$  וחשב את ערכו.  
ג. נתון כי השטח  $S_2$  גדול פי 3 מהשטח  $S_1$ . מצא את  $k$ .



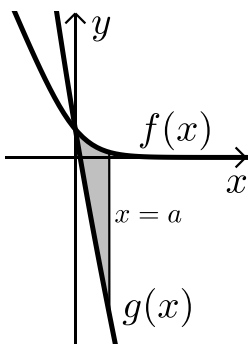
**13** נתונות הפונקציות:  $f(x) = -\frac{4}{x}$  ו-  $g(x) = \frac{k}{2x+5}$ .

גרף הפונקציה  $g(x)$  חותך את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = 0.4$ .

א. מצא את הפונקציה  $g(x)$ .

ב. מצא את נקודת החיתוך של שני הגרפים.

ג. חשב את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר  $x = -1$ .



**14** באיור מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$  ו-  $g(x) = \ln(e^{-2x} + e^{-3x})$

בתחום:  $(x \geq 0)$ .

א. הראה כי הגרפים נחתכים על ציר ה- $y$ .

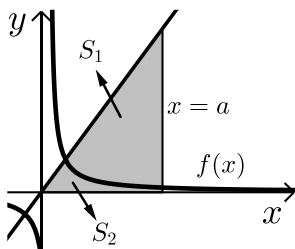
ב. מעבירים ישר  $x = a$ ,  $(a > 1)$  המאונך

לציר ה- $x$  אשר חותך את הגרפים של שתי

הפונקציות ויוצר את השטח  $S$  (ראה איור).

מצא את ערכו של  $a$  עבורו מתקיים:  $S = 4$ .

**15** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{2}{3x-1}$  והישר:  $y = x$ .



א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציות הנמצאת ברביע הראשון.

מעבירים אנך לציר ה- $x$   $x = a$  הנמצא מימין

לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.

האנך חותך את הגרפים ויוצר את השטחים  $S_1$  ו- $S_2$

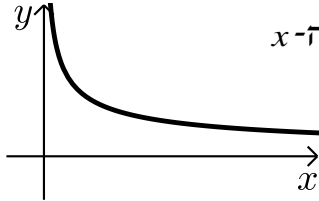
המתוארים האיור.

ב. מצא את הערך של  $a$  עבורו השטח  $S_2$  יהיה שווה ל-  $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \ln 7$ .

ג. עבור ערך ה- $a$  שמצאת בסעיף הקודם חשב את יחס השטחים:  $\frac{S_1}{S_2}$ .

## חישובי נפחים:

$$(16) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$



השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים  $x=1$  ו- $x=3$  וציר ה- $x$  מסתובב סביב ציר ה- $x$ . מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר באופן זה. אפשר להשאיר  $\ln$  בתשובה.

$$(17) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}$$

השטח הכלוא בין הפונקציה, הצירים והישר  $x = \ln \sqrt{3}$  מסתובב סביב ציר ה- $x$ . חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

$$(18) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים  $x=a$  ו- $x=a+3$  ( $a > 0$ ), וציר ה- $x$  מסתובב סביב ציר ה- $x$ . חשב את נפח גוף הסיבוב המינימלי שנוצר באופן זה.

## תשובות סופיות:

$$\ln|x-3|+c \quad \lambda \quad \frac{x^2}{2}+3x-4\ln|x|+c \quad \text{ב.} \quad 3\ln|x|+2\ln|x+1|-\frac{4\ln|3x-1|}{3}+c \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+7x+8\ln|x-2|+c \quad \text{ב.} \quad \frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x+1|+c \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+4\ln|x+1|+c \quad \lambda$$

$$\ln|e^x+5|+c \quad \lambda \quad \frac{1}{2}\ln|x^2-2x|+c \quad \text{ב.} \quad \ln|x^2-3|+c \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$\ln|\sin x|+c \quad \text{ה.} \quad \ln|e^x+e^{-x}|+c \quad \text{ז.}$$

$$f(x)=x^2-\ln|x-4|+3 \quad (4)$$

$$f(x)=x^3+\ln|x|-x-2 \quad (5)$$

$$S = \text{יח"ש} \ln 4 \quad (6)$$

$$S = \text{יח"ש} 2.17 \quad (7)$$

$$S = \text{יח"ש} 4\ln 2 - 2 \quad (8)$$

$$S = \text{יח"ש} 1.76 \quad \text{ב.} \quad f(x) = \frac{2}{x-1}, \quad g(x) = \frac{1}{x-2}, \quad a=2 \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$x=2 \quad \text{ב.} \quad f(x) = 7+2x-\frac{4}{x}, \quad a=2, \quad b=-4 \quad \text{א.} \quad (10)$$

$$S = 6 + \ln 256 \approx \text{יח"ש} 11.54 \quad \lambda$$

$$S = \text{יח"ש} 6 - 4\ln 2 \quad \text{ב.} \quad f(x) = \frac{4}{x} \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$k=8 \quad \lambda \quad S_2 - S_1 = \ln 16 \quad \text{ב.} \quad S_1 = 2\ln k - \ln 16, \quad S_2 = 2\ln k \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$S = \text{יח"ש} \ln 5 \frac{1}{3} \approx 1.674 \quad \lambda \quad (-2, 2) \quad \text{ב.} \quad g(x) = \frac{2}{2x+5} \quad \text{א.} \quad (13)$$

$$a=2 \quad \text{ב.} \quad (14)$$

$$\frac{S_1}{S_2} = 5.955 \quad \lambda \quad a=5 \quad \text{ב.} \quad (1, 1) \quad \text{א.} \quad (15)$$

$$V = \text{יח"נ} \pi \ln 3 \quad (16)$$

$$V = \text{יח"נ} \frac{\pi}{2} \ln 2 \quad (17)$$

$$V = \text{יח"נ} \pi \left( 19 \frac{1}{2} + 4\ln 4 \right) \quad (18)$$

## פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי:

### סיכום כללי:

אינטגרלים מיידיים של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי:

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \sqrt[n]{x^m} dx = \int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + c$	$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx = \int (ax+b)^{\frac{m}{n}} dx = \frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a \cdot \left(\frac{m}{n}+1\right)} + c$

תנאי לקיום האינטגרציה:  $\frac{m}{n} \neq -1$ .

### שאלות:

אינטגרל של פונקצית חזקה:

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\begin{array}{lll} \int (x \cdot \sqrt[5]{x}) dx & \text{ג.} & \int (4x - 2\sqrt[4]{x}) dx & \text{ב.} & \int \sqrt[3]{x} dx & \text{א.} \\ \int \frac{x^3 - 3x + 5}{\sqrt{x}} dx & \text{ו.} & \int \frac{x+4}{\sqrt[4]{x}} dx & \text{ה.} & \int \frac{3}{\sqrt[3]{x}} dx & \text{ד.} \\ \int \frac{3}{\sqrt[8]{7x+12}} dx & \text{ט.} & \int \sqrt[4]{5-x} dx & \text{ח.} & \int \sqrt[3]{2x-3} dx & \text{ז.} \\ & & & & \int \frac{7}{\sqrt[5]{14-2x}} dx & \text{י.} \end{array}$$

(2) חשב את ערכי האינטגרלים הבאים:

$$\begin{array}{lll} \int_{-10}^5 \frac{2}{\sqrt[4]{6-x}} dx & \text{ג.} & \int_3^{16} (\sqrt[4]{5x+1}) dx & \text{ב.} & \int_0^8 (x + \sqrt[5]{4x}) dx & \text{א.} \end{array}$$

**אינטגרל מסוים:**

(3) נתונה הנגזרת הבאה:  $f'(x) = 2x - \sqrt[3]{4x}$

ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה  $(2, 3)$ .  
מצא את הפונקציה.

(4) נתונה הנגזרת הבאה:  $f'(x) = \sqrt[3]{5x+7}$

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 4$ .  
מצא את הפונקציה.

(5) נתונה הנגזרת הבאה:  $f'(x) = \frac{10}{\sqrt[3]{x+1}} + (x-1)^2$

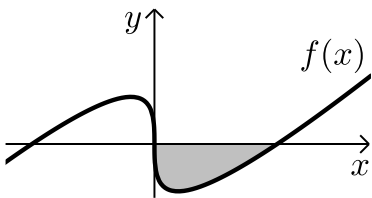
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = -6$ .  
מצא את הפונקציה.

**חישובי שטחים:**

(6) באיור שלפניך מופיע גרף הפונקציה:  $f(x) = x - 4\sqrt[3]{x}$

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

ב. חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.



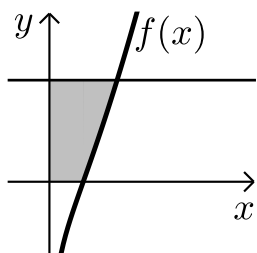
(7) באיור שלפניך מצויר גרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}$

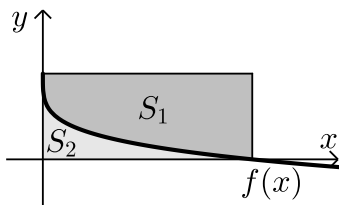
א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

ג. מעבירים אנך לציר ה- $y$  מהנקודה  $(4, 6)$ .

חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והצירים.





8 באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:  $f(x) = 2 - \sqrt[4]{x}$ .

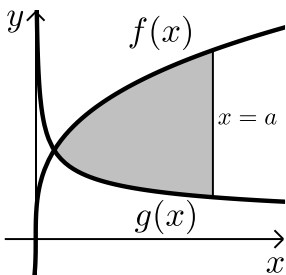
מעבירים אנכים לצירים מנקודות החיתוך של

גרף הפונקציה עם הצירים כך שנוצר מלבן.

מסמנים את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים:

ב-  $S_1$  ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב-  $S_2$ .

מצא את היחס:  $\frac{S_1}{S_2}$ .



9 באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \quad f(x) = 4\sqrt[3]{x}$$

א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים בתחום:  $x > 0$ .

ב. מעבירים אנך לציר ה- $x$ ,  $x = a$ , ( $a$  פרמטר).

ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים מנקודת

החיתוך שלהם ועד לאנך הוא:  $42 \frac{3}{16}$  סמ"ר.

מצא את  $a$ .

10 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - ax$ , ( $a$  פרמטר).

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 2$ .

א. מצא את הפרמטר  $a$  וכתוב את הפונקציה.

ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. מצא את נקודת קיצון הקצה של הפונקציה.

ד. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר

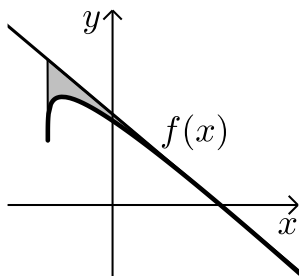
דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ .

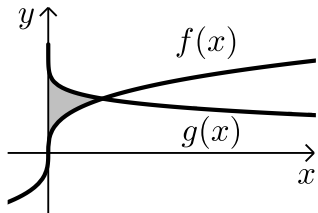
ה. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה  $f(x)$

והמשיק שמצאת בסעיף הקודם. מורידים אנך

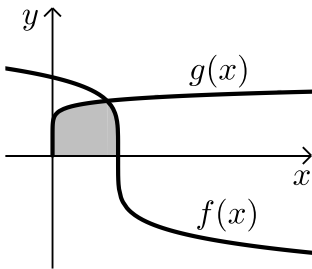
מהמשיק אל נקודת קיצון הקצה של הפונקציה שמצאת בסעיף ג'.

חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה  $f(x)$  והמשיק.

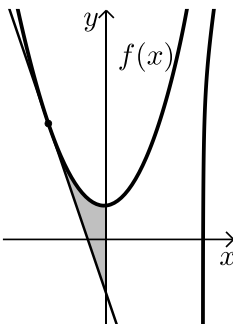




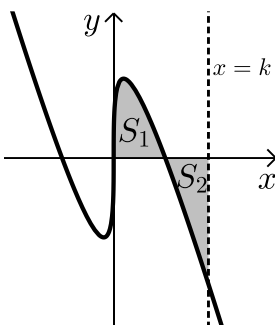
- 11** באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות:  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $g(x) = 2 - \sqrt{x}$ .  
 א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.  
 ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- $y$ .



- 12** הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$ .  
 ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה:  $x = 1.2$ .  
 א. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .  
 ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $f(x)$ , גרף הפונקציה  $g(x) = \sqrt[10]{x}$  וציר ה- $x$ .



- 13** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{5-x}} + \frac{1}{2}x^2$ .  
 א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = -3$ .  
 ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $f(x)$ , המשיק וציר ה- $y$ .



- 14** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt[3]{x} - 4x$ .  
 א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?  
 ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
 ג. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה ברביע הראשון. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$  יסומן ב- $S_1$ .  
 מעבירים ישר  $x = k$  אשר יוצר את השטח  $S_2$  כמתואר. מצא את  $k$  אם ידוע כי:  $S_1 = S_2$ .

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $0.75\sqrt[3]{x^4} + c$     ב.  $2x^2 - 1.6\sqrt[4]{x^5} + c$     ג.  $\frac{5}{11}\sqrt[5]{x^{11}} + c$
- ד.  $4.5\sqrt[3]{x^2} + c$     ה.  $\frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7} + \frac{16}{3}\sqrt[4]{x^3} + c$     ו.  $\frac{2}{7}\sqrt{x^7} - 2\sqrt{x^3} + 10\sqrt{x} + c$
- ז.  $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(2x-3)^4} + c$     ח.  $-0.8\sqrt[4]{(5-x)^5} + c$     ט.  $\frac{24}{49}\sqrt[8]{(7x+12)^7} + c$
- י.  $-\frac{35}{8}\sqrt[5]{(14-2x)^4} + c$
- (2) א.  $45\frac{1}{3}$     ב. 33.76    ג.  $18\frac{2}{3}$
- (3)  $f(x) = x^2 - \frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x)^4} + 2$
- (4)  $f(x) = \frac{3}{20}\sqrt[3]{(5x+7)^4} - 12.15$
- (5)  $f(x) = 12.5\sqrt[5]{(x+1)^4} + \frac{1}{3}(x-1)^3 - 18\frac{1}{6}$
- (6) א.  $(0,0)$  ;  $(8,0)$     ב. 16 יח"ש = S
- (7) א.  $x > 0$     ב.  $(2,0)$     ג. 18.149 יח"ש = S
- (8)  $\frac{S_1}{S_2} = 4$
- (9) א.  $\left(\frac{1}{8}, 2\right)$     ב.  $a = 8$
- (10) א.  $f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - x$  ,  $a = 1$     ב.  $x \geq -1.2$     ג.  $(-1.2, 1.2)$
- ד.  $y = -\frac{27}{32}x + \frac{27}{16}$     ה. 0.48 יח"ש = S
- (11) א.  $(1,1)$     ב.  $\frac{11}{28}$  יח"ש = S
- (12) א.  $f(x) = (6-5x)^{\frac{1}{5}}$     ב.  $1\frac{5}{66}$  יח"ש = S

$$y = -2\frac{15}{16}x - \frac{45}{16} \quad \text{א. (13)} \quad \text{ב. } S = 4.56 \text{ יח"ש}$$

$$k = \left(\frac{3}{8}\right)^{1.5} = 0.2296.. \quad \text{ג. } (0,0), \left(\frac{1}{8}, 0\right), \left(-\frac{1}{8}, 0\right) \quad \text{ב.} \quad \text{א. כל } x \quad \text{(14)}$$

# מתמטיקה

פרק 29 - וקטורים גיאומטריים

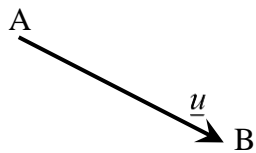
תוכן העניינים

- 448 ..... 1. הגדרות וכללים יסודיים.
- 453 ..... 2. וקטורים הפורשים מישור.
- 457 ..... 3. מכפלה סקלרית וחישוב גודל של וקטור.

## הגדרות וכללים יסודיים:

### סיכום כללי:

#### הגדרה כללית:

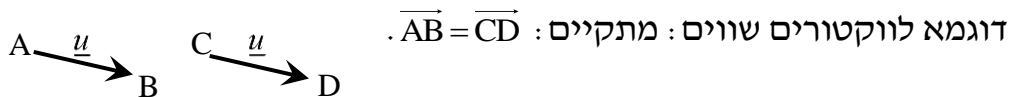


להלן תיאור של ווקטור גיאומטרי: ווקטור שמוצאו בנקודה A ומסתיים בנקודה B יסומן באופן הבא:  $\overline{AB}$ .

ניתן לסמן ווקטור באות קטנה באופן הבא:  $\underline{u}$  (אותיות מקובלות לסימון הן:  $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ ).  
מהאיור לעיל מתקיים:  $\overline{AB} = \underline{u}$ .

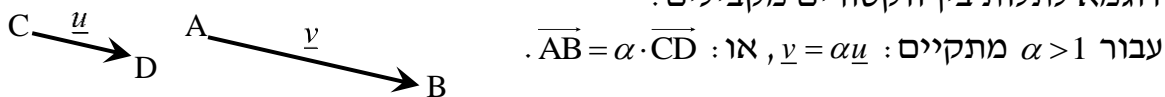
#### קשרים בין ווקטורים:

- ווקטורים שווים: שני ווקטורים נקראים שווים אם הם זהים בגודלם ובכיוונם.



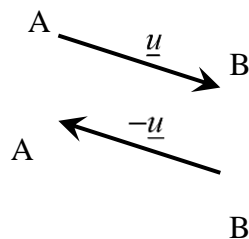
- ווקטורים מקבילים: שני ווקטורים שכיוונם זהה נקראים מקבילים.

ניתן להביע את האחד באמצעות השני ע"י כפל בסקלר.  
ווקטורים מקבילים נקראים גם "ווקטורים תלויים ליניארית".  
דוגמא לתלות בין ווקטורים מקבילים:



- אם זוג ווקטורים במרחב:  $\overline{AB} = \alpha \underline{u} + \beta \underline{v} + \gamma \underline{w}$  ו-  $\overline{CD} = a \underline{u} + b \underline{v} + c \underline{w}$  מקבילים

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c} \text{ : אז מתקיים}$$

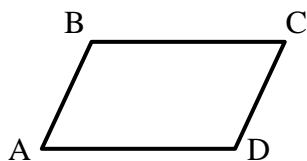


- ווקטור המסומן  $\overline{BA}$  הוא בעל גודל זהה לווקטור  $\overline{AB}$  וכיוון הפוך לו. במקרה זה מתקיים:  $\overline{BA} = -\underline{u}$ .

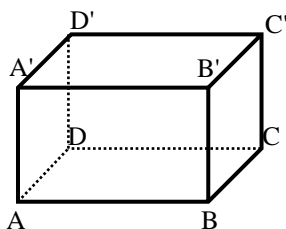
#### הערה:

שני ווקטורים  $\underline{u}$  ו-  $\underline{v}$  יקראו מקבילים אם מתקיים:  $\underline{v} = \alpha \underline{u}$  כאשר הגודל  $\alpha$  יכול לקבל כל ערך מספרי בתחום  $\alpha \neq 0$ . בפרט עבור  $\alpha < 0$  כיוונם הפוך ב-  $180^\circ$ .

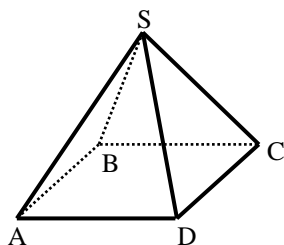
**שאלות:**



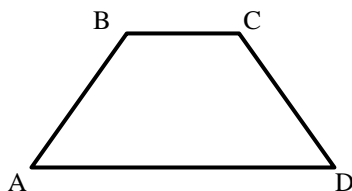
(1) במקבילית ABCD נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$   
מצא את כל הווקטורים במקבילית ששווים ל- $\underline{u}$  או  $\underline{v}$ .



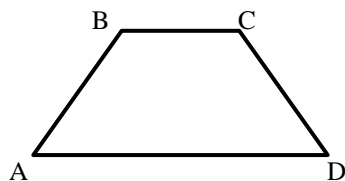
(2) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $\overline{AA'} = \underline{w}$   
מצא את כל הווקטורים בתיבה ששווים ל- $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  או  $\underline{w}$ .



(3) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $\overline{AS} = \underline{w}$   
מצא את כל הווקטורים שבפירמידה השווים ל- $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  או  $\underline{w}$ .

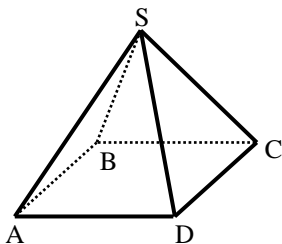


(4) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $AD = 3BC$   
מצא את כל הווקטורים בטרפז שניתן להביע באמצעות  $\underline{u}$  או  $\underline{v}$ .



(5) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $AD = 3BC$

- א. הבע באמצעות  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  את הווקטורים  $\overline{AC}$  ו- $\overline{DC}$ .
- ב. הנקודה E היא אמצע הצלע AD. הבע באמצעות  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  את הווקטור  $\overline{BE}$ .
- ג. הנקודה F היא אמצע הצלע CD. הבע באמצעות  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  את הווקטור  $\overline{AF}$ .



6 בפירמידה  $SABCD$  שבסיסה ריבוע

נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $\overline{AS} = \underline{w}$ .

א. הבע באמצעות  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  ו- $\underline{w}$  את

הווקטורים  $\overline{AC}$  ו- $\overline{SC}$ .

ב. הנקודה  $N$  היא אמצע המקצוע  $SD$ .

הבע באמצעות  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  ו- $\underline{w}$  את הווקטור  $\overline{BN}$ .

7 הנקודה  $P$  נמצאת על הקטע  $AB$  כך ש:  $AP:PB = 2:3$ . נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ .

הבע באמצעות  $\underline{u}$  את הווקטורים  $\overline{AP}$  ו- $\overline{PB}$ .

8 הנקודה  $P$  נמצאת על הקטע  $AB$  כך ש:  $AP:PB = 3:5$ . נתון:  $\overline{AP} = \underline{u}$ .

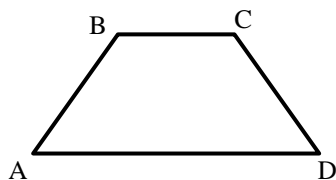
הבע באמצעות  $\underline{u}$  את הווקטורים  $\overline{PB}$  ו- $\overline{AB}$ .

9 הנקודה  $P$  נמצאת על הקטע  $AB$  כך ש:  $\frac{AP}{AB} = \alpha$ . נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ .

הבע באמצעות  $\underline{u}$  את הווקטורים  $\overline{AP}$  ו- $\overline{PB}$ .

10 הנקודה  $P$  נמצאת על הקטע  $AB$  כך ש:  $\frac{AP}{PB} = \alpha$ . נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ .

הבע באמצעות  $\underline{u}$  את הווקטורים  $\overline{AP}$  ו- $\overline{PB}$ .



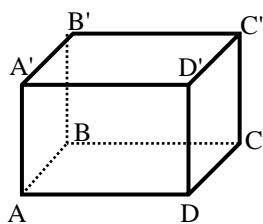
11 בטרפז  $ABCD$  שבשרטוט

נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $AD = 3BC$ .

הנקודה  $F$  נמצאת על הצלע  $CD$

ומקיימת:  $\frac{DF}{FC} = \beta$ .

הבע באמצעות  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  ו- $\beta$  את הווקטור  $\overline{AF}$ .

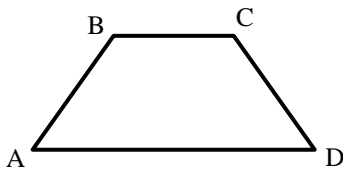


12) בתיבה  $ABCD A'B'C'D'$  נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $\overline{AA'} = \underline{w}$

הנקודה P נמצאת על המקצוע  $A'B'$  ומקיימת:  $\frac{AP}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע  $CC'$  ומקיימת:  $\frac{CQ}{QC'} = \beta$

הבע באמצעות  $\alpha$ ,  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ ,  $\underline{w}$  את הווקטור:  $\overline{PQ}$ .

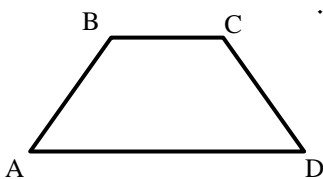


13) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $AD = 3BC$

הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת:  $\frac{AF}{FD} = \alpha$

מצא את ערכו של  $\alpha$  שבעבורו מתקיים  $\overline{FE} \parallel \overline{AB}$ .

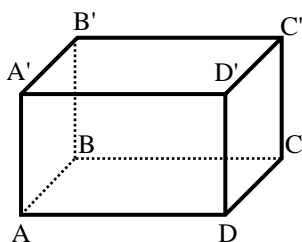


14) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $AD = 3BC$

הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת:  $\frac{AF}{FD} = \alpha$

מצא את ערכו של  $\alpha$  שבעבורו מתקיים:  $\overline{FE} \parallel \overline{AC}$ .



15) בתיבה  $ABCD A'B'C'D'$  נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $\overline{AA'} = \underline{w}$

הנקודה P נמצאת על המקצוע  $A'B'$  ומקיימת:  $\frac{AP}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע  $CC'$  ומקיימת:  $\frac{CQ}{QC'} = \beta$

א. הבע באמצעות  $\alpha$ ,  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ ,  $\underline{w}$  את הווקטור  $\overline{PQ}$ .

ב. האם קיימים ערכי  $\alpha$  ו- $\beta$  שבעבורם  $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$ ? נמק.

ג. הנקודה E היא מפגש אלכסוני הפאה  $ABB'A'$ .

מצא את ערכי  $\alpha$  ו- $\beta$  אם נתון כי  $\overline{PQ} \parallel \overline{EC}$ .

**תשובות סופיות:**

$$\underline{u} = \overline{DC}, \underline{v} = \overline{BC} \quad (1)$$

$$\underline{w} = \overline{AA'} = \overline{DD'} = \overline{CC'} = \overline{BB'}, \underline{u} = \overline{DC} = \overline{D'C'} = \overline{A'B'} = \overline{AB}, \underline{v} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{A'D'} = \overline{B'C'} \quad (2)$$

$$\underline{u} = \overline{AB} = \overline{DC}, \underline{v} = \overline{AD} = \overline{BC}, \underline{w} = \overline{AS} \quad (3)$$

$$\overline{BC} = \frac{1}{3}\underline{v} \quad (4)$$

$$\overline{AF} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{2}{3}\underline{v} \quad \text{ג.} \quad \overline{BE} = -\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} \quad \text{ב.} \quad \overline{AC} = \underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v}, \overline{DC} = \underline{u} - \frac{2}{3}\underline{v} \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\overline{BN} = -\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w} \quad \text{ב.} \quad \overline{AC} = \underline{u} + \underline{v}, \overline{SC} = \underline{u} + \underline{v} - \underline{w} \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$\overline{AP} = \frac{2}{5}\underline{u}, \overline{BP} = \frac{3}{5}\underline{u} \quad (7)$$

$$\overline{AB} = \frac{8}{3}\underline{u}, \overline{PB} = \frac{5}{3}\underline{u} \quad (8)$$

$$\overline{AP} = \alpha\underline{u}, \overline{PB} = (1-\alpha)\underline{u} \quad (9)$$

$$\overline{AP} = \frac{\alpha}{1+\alpha}\underline{u}, \overline{PB} = \frac{1}{1+\alpha}\underline{u} \quad (10)$$

$$\overline{AF} = \frac{\beta}{1+\beta}\underline{u} + \frac{3+\beta}{3+3\beta}\underline{v} \quad (11)$$

$$\overline{PQ} = (1-\alpha)\underline{u} + \underline{v} - \frac{1}{1+\beta}\underline{w} \quad (12)$$

$$\alpha = 2 \quad (13)$$

$$\alpha = 1 \quad (14)$$

$$\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1 \quad \text{ג.} \quad \text{א.} \quad \overline{PQ} = (1-\alpha)\underline{u} + \underline{v} - \frac{1}{1+\beta}\underline{w} \quad \text{א.} \quad (15)$$

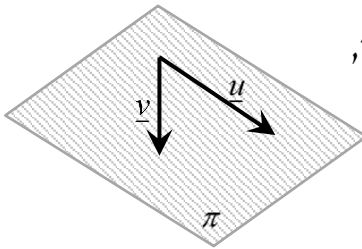
## ווקטורים הפורשים מישור:

### סיכום כללי:

#### ווקטורים הפורשים מישור:

כל שני ווקטורים שאינם מקבילים, כלומר, בלתי תלויים זה בזה, פורשים מישור.

דוגמא:



הווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  בעלי כוונים שונים ולכן פורשים את המישור  $\pi$ .

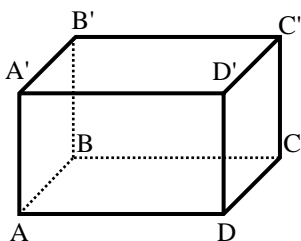
#### קומבינציה ליניארית של ווקטורים:

- כל ווקטור שנמצא במישור (או מקביל למישור זה) ניתן להצגה ע"י קומבינציה ליניארית של שני ווקטורים הפורשים את המישור.
- כל ווקטור שהוא קומבינציה ליניארית של שני ווקטורים הפורשים את המישור, מקביל למישור.
- אם ניתן להביע ווקטור שקומבינציה ליניארית של שני ווקטורים אחרים (או יותר) אז שלושת הווקטורים נקראים תלויים ליניארית (ניתן לבטא כל ווקטור באמצעות האחרים).

#### דוגמא:

עבור המישור הנפרש לעיל, ניתן להציג כל ווקטור  $\underline{w}$  המוכל, או מקביל למישור  $\pi$  באופן הבא:  $\underline{w} = \alpha \cdot \underline{u} + \beta \cdot \underline{v}$  כאשר:  $\alpha, \beta$  מספרים ממשיים כלשהם. במקרה זה שלושת הווקטורים  $\underline{u}, \underline{v}$  ו- $\underline{w}$  נקראים תלויים ליניארית.

**שאלות:**



16) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $\overline{AA'} = \underline{w}$ .

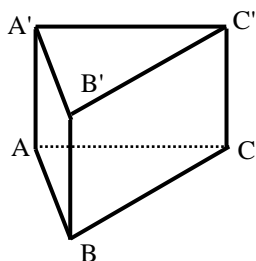
הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת:  $\frac{AP}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת:  $\frac{CQ}{QC'} = \beta$

א. הבע באמצעות  $\alpha$ ,  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ ,  $\underline{w}$  ו- $\beta$  את הווקטור  $\overline{PQ}$ .

ב. מהו ערכו של  $\alpha$  שבעבורו הווקטור  $\overline{PQ}$  מקביל לפאה ADD'A'?

ג. האם קיים ערך של  $\beta$  שבעבורו הווקטור  $\overline{PQ}$  מקביל לבסיס ABCD?



17) נתונה מנסרה משולשת ABCA'B'C' ובה נתון:

$\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AC} = \underline{v}$ ,  $\overline{AA'} = \underline{w}$ .

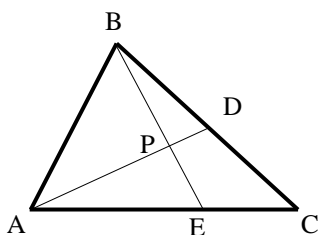
הנקודה M נמצאת על המקצוע A'C' ומקיימת:  $\frac{AM}{MC'} = \alpha$

והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת:  $\frac{BN}{BC} = \beta$

א. הבע באמצעות  $\alpha$ ,  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ ,  $\underline{w}$  ו- $\beta$  את הווקטור  $\overline{NM}$ .

ב. מהו ערכו של  $\beta$  שבעבורו הווקטור  $\overline{NM}$  מקביל לפאה ACC'A'?

ג. נתון כי הווקטור  $\overline{NM}$  מקביל לפאה ABB'A'. הבע את  $\alpha$  באמצעות  $\beta$ .



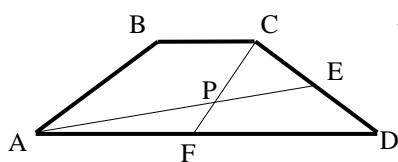
18) במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע BC והנקודה E נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים:  $\frac{AE}{CE} = 2$ .

הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.

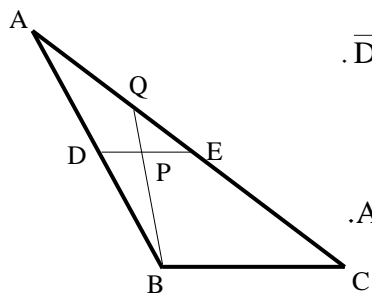
נגדיר:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AC} = \underline{v}$ , וכן:  $\overline{AP} = t \cdot \overline{AD}$ ,  $\overline{BP} = s \cdot \overline{BE}$ .

א. הבע באמצעות  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ ,  $t$  ו- $s$  את הווקטור  $\overline{AP}$  בשתי דרכים שונות.

ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AD ואת הקטע BE.



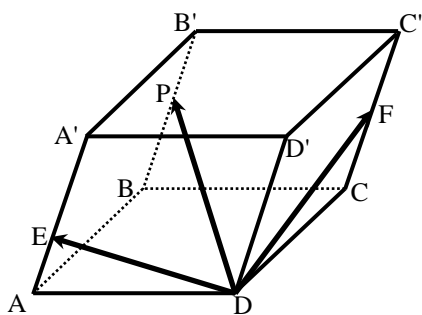
19) בטרפז  $ABCD$ ,  $(AD \parallel BC)$ , שבשרטוט נתון:  $AD = 3BC$ . הנקודה  $E$  נמצאת באמצע הצלע  $CD$  והנקודה  $F$  נמצאת באמצע הצלע  $AD$ . הנקודה  $P$  היא מפגש הקטעים  $AE$  ו- $CF$ . מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה  $P$  את הקטע  $AE$  ואת הקטע  $CF$ .



20) במשולש  $ABC$  הנקודה  $D$  היא אמצע הצלע  $AB$  והנקודה  $E$  נמצאת על הצלע  $AC$  כך שמתקיים:  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ . הנקודה  $P$  היא אמצע הקטע  $DE$  והמשך הקטע  $BP$  חותך את הצלע  $AC$  בנקודה  $Q$ .

א. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה  $Q$  את הצלע  $AC$ .

ב. חשב את היחס:  $\frac{S_{\Delta QPE}}{S_{\Delta DPB}}$ .



21) במקבילון  $ABCD A'B'C'D'$

נתון:  $\overline{DA} = \underline{u}$ ,  $\overline{DC} = \underline{v}$ ,  $\overline{DD'} = \underline{w}$ .

הנקודה  $F$  נמצאת באמצע המקצוע  $CC'$ ,

הנקודה  $E$  נמצאת על המקצוע  $AA'$

ומקיימת:  $A'E = 2AE$  והנקודה  $P$  נמצאת על

המקצוע  $BB'$  ומקיימת:  $\overline{B'P} = k \cdot \overline{B'B}$ .

נתון:  $\overline{DP} = t \cdot \overline{DE} + s \cdot \overline{DF}$ .

א. הבע באמצעות  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ ,  $\underline{w}$  ו- $k$  את הווקטור  $\overline{DP}$ .

ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה  $P$  את המקצוע  $BB'$ .

ג. האם הנקודות  $D, E, F$  ו- $P$  נמצאות על אותו מישור? נמק.

## תשובות סופיות:

$$\overline{PQ} = (1-\alpha)\underline{u} + \underline{v} - \frac{1}{1+\beta}\underline{w} \quad \text{א. (16)}$$

ג. לא.                      ב.  $\alpha = 1$

$$\overline{NM} = (\beta-1)\underline{u} + \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} - \beta\right)\underline{v} + \underline{w} \quad \text{א. (17)}$$

ג.  $\alpha = \frac{\beta}{1-\beta}$                       ב.  $\beta = 1$

$$\overline{AP} = \frac{1}{2}t\underline{u} + \frac{1}{2}t\underline{v}, \quad \overline{AP} = (1-s)\underline{u} + \frac{2}{3}s\underline{v} \quad \text{א. (18)}$$

ב.  $BP:PE = 3:2, AP:PD = 4:1$

$$AP:PE = 2:1, CP:PF = 2:1 \quad \text{(19)}$$

$$\frac{S_{QPE}}{S_{DPB}} = \frac{1}{3} \quad \text{ב.}$$

א.  $AQ:QC = 1:2$                       (20)

$$\overline{DP} = \underline{u} + \underline{v} + (1-k)\underline{w} \quad \text{א. (21)}$$

ב.  $BP:PB = 1:5$                       ג. כן.

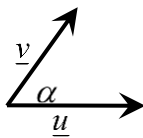
## מכפלה סקלרית וחישוב גודל של וקטור:

### סיכום כללי:

מכפלה סקלרית של שני ווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  תסומן:  $\underline{u} \cdot \underline{v}$  ותחושב ע"י הנוסחה הבאה:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$$

כאשר  $\alpha$  היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים כמתואר באיור.



ניתן למצוא את הזווית שבין שני ווקטורים ע"י:  $\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$

גודל של ווקטור נתון ע"י:  $|\underline{u}| = \sqrt{u^2}$ , או:  $|\underline{u}|^2 = u^2$

### הערה:

המכפלה הסקלרית  $\underline{u} \cdot \underline{v}$  בין שני ווקטורים מקבלת ערך מספרי בלבד! היא יכולה להיות חיובית, שלילית או אפס כפי שנראה בהמשך.

### שאלות:

22) חשב את המכפלה הסקלרית של הווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  על פי הנתונים על גודלם והזווית שביניהם:

ב.  $\alpha = 120^\circ$ ,  $|\underline{v}| = 5$ ,  $|\underline{u}| = 4$

א.  $\alpha = 60^\circ$ ,  $|\underline{v}| = 2$ ,  $|\underline{u}| = 3$

ד.  $\alpha = 180^\circ$ ,  $|\underline{v}| = 3$ ,  $|\underline{u}| = 8$

ג.  $\alpha = 30^\circ$ ,  $|\underline{v}| = 6$ ,  $|\underline{u}| = 2$

ו.  $\alpha = 90^\circ$ ,  $|\underline{v}| = 4$ ,  $|\underline{u}| = 7$

ה.  $\alpha = 0^\circ$ ,  $|\underline{v}| = 5$ ,  $|\underline{u}| = 3$

23) חשב את הזווית בין הווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  על פי הנתונים על גודלם והמכפלה הסקלרית שלהם:

ב.  $\underline{u} \cdot \underline{v} = -4\sqrt{3}$ ,  $|\underline{v}| = 2$ ,  $|\underline{u}| = 4$

א.  $\underline{u} \cdot \underline{v} = 6$ ,  $|\underline{v}| = 4$ ,  $|\underline{u}| = 3$

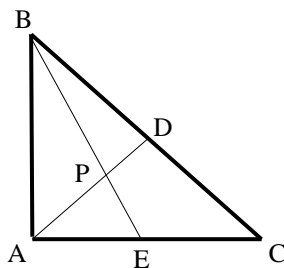
ד.  $\underline{u} \cdot \underline{v} = 12$ ,  $|\underline{v}| = 6$ ,  $|\underline{u}| = 2$

ג.  $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ ,  $|\underline{v}| = 5$ ,  $|\underline{u}| = 9$

**(24)** נתונים שני וקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  שאורכם:  $|\underline{u}|=6$ ,  $|\underline{v}|=3$ . הזווית ביניהם היא  $120^\circ$ .  
חשב את גודלו של הווקטור  $\overline{PQ}$  שמוגדר:  $\overline{PQ} = 2\underline{u} - 3\underline{v}$ .

**(25)** נתונים שני וקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  המאונכים זה לזה שאורכם:  $|\underline{u}|=4$ ,  $|\underline{v}|=5$ .  
חשב את גודלו של הווקטור  $\overline{MN}$  שמוגדר:  $\overline{MN} = 0.5\underline{u} - \underline{v}$ .

**(26)** נתונים שני וקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  שאורכם:  $|\underline{u}|=6$ ,  $|\underline{v}|=3$ . הזווית ביניהם היא  $120^\circ$ .  
חשב את גודל הזווית  $\sphericalangle QPM$  אם נתון:  $\overline{PM} = 4\underline{u} + \underline{v}$ ,  $\overline{PQ} = 2\underline{u} - 3\underline{v}$ .

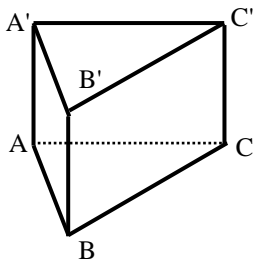


**(27)** המשולש ABC הוא משולש ישר זווית ( $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ ).  
הנקודה D היא אמצע היתר BC והנקודה E נמצאת על הניצב AC.

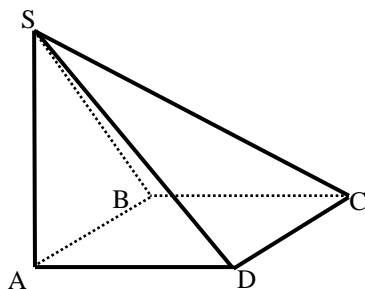
הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.

נתון:  $AC = 12$ ,  $AB = 8$ ,  $\frac{AP}{PD} = 3$ .

חשב את גודל הזווית  $\sphericalangle DPC$ .



**(28)** נתונה מנסרה משולשת וישרה  $ABCA'B'C'$  שבסיסה משולש שווה צלעות שאורך כל אחת מצלעותיו הוא 6. גובה המנסרה הוא 8.  
הנקודה M היא אמצע המקצוע  $A'C'$  והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת:  $BN = 2CN$ .  
נסמן:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AC} = \underline{v}$ ,  $\overline{AA'} = \underline{w}$ .  
חשב את גודל הזווית:  $\sphericalangle MAN$ .



**(29)** בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע המקצוע SA הוא גובה הפירמידה.

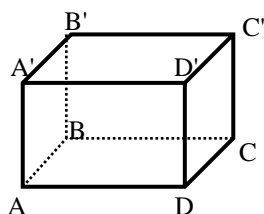
נתון:  $AB = AD = \frac{1}{2} AS = k$ .

נסמן:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $\overline{AS} = \underline{w}$ .

הנקודה Q היא אמצע המקצוע SC והנקודה P היא אמצע המקצוע SB.

חשב את גודל הזווית:  $\sphericalangle PAQ$ .

30) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון:  $\overline{AA'} = \underline{w}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $AB = \frac{1}{\sqrt{2}} AD = AA'$ .



הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת:  $\frac{AP}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q היא אמצע המקצוע DD'.

א. מהו ערכו של  $\alpha$  שבעבורו מתקיים:  $|\overline{AP}| = \frac{5}{6} |\overline{AQ}|$ ?

ב. הבע באמצעות  $\alpha$  את  $\cos \angle PAQ$

והראה כי לכל ערך של  $\alpha$  הזווית  $\angle PAQ$  חדה.

ג. מהו ערכו של  $\alpha$  שבעבורו הזווית  $\angle PAQ$  מקיימת:  $\cos \angle PAQ = \frac{2}{3\sqrt{5}}$ ?

31) הוכח כי בכל מרובע ABCD מתקיים:  $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$

32) נתון מלבן ABCD. הוכח כי לכל נקודה כלשהי P מתקיים:  $\overline{PA} \cdot \overline{PC} = \overline{PB} \cdot \overline{PD}$

33) נתון ריבוע ABCD. הנקודה P היא אמצע הצלע BC והנקודה Q היא אמצע הצלע CD.

הוכח כי מתקיים:  $S_{ABCD} = \overline{AP} \cdot \overline{AQ}$

34) נתון מרובע ABCD. הנקודה P היא אמצע הצלע AB והנקודה Q היא אמצע הצלע CD.

הוכח כי מתקיים:  $\overline{PQ} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}$

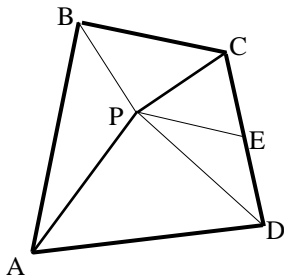
35) נתונה פירמידה משולשת SABC שבה  $\overline{AS} \perp \overline{BC}$  ו-  $\overline{BS} \perp \overline{AC}$ .

הוכח:  $\overline{CS} \perp \overline{AB}$

36) הוכח: וקטור המאונך לשני וקטורים בלתי תלויים במישור מאונך לכל הווקטורים שבמישור.

**37** ענה על הסעיפים הבאים:

- א. הנקודה M היא מפגש התיכונים במשולש ABC. הוכח:  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 0$ .
- ב. נתונה פירמידה משולשת SABC. הנקודה P היא מפגש התיכונים בפאה SBC. הוכח:  $\vec{AP} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AS})$ .
- ג. נתון בנוסף כי  $\vec{AS}$  ו- $\vec{AP}$  מאונכים ל- $\vec{BC}$ . הוכח כי  $AB = AC$ . (הדרכה: סמן  $\vec{AB} = \underline{u}$ ,  $\vec{AC} = \underline{v}$ ,  $\vec{AS} = \underline{w}$ ).



**38** הנקודה P נמצאת בתוך מרובע כלשהו ABCD

כך שהמשולשים APD ו-BPC הם משולשים ישרי זווית וש"ש ( $AP = PD$ ,  $BP = PC$ ).

הנקודה E היא אמצע הצלע CD. הוכח:  $\vec{PE} \perp \vec{AB}$ . (הדרכה: סמן  $\vec{PB} = \underline{a}$ ,  $\vec{PC} = \underline{b}$ ,  $\vec{PA} = \underline{c}$ ,  $\vec{PD} = \underline{d}$ ).

**39** בטראדר SABC נתון:  $\vec{AB} = \underline{u}$ ,  $\vec{AC} = \underline{v}$ ,  $\vec{AS} = \underline{w}$ .

הנקודה P נמצאת על המקצוע AS ומקיימת:  $\vec{AP} = \alpha \cdot \vec{AS}$ .

הנקודה Q נמצאת על הפאה SBC ומקיימת:  $\vec{SQ} = \beta(\vec{SB} + \vec{SC})$ .

א. מצא את הקשר בין  $\alpha$  ו- $\beta$  שבעבורו  $\vec{PQ}$  מקביל למישור ABC.

ב. נתון:  $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$ . הוכח:  $\vec{PQ} \perp \vec{BC}$ . הוכח:  $AB = AC$ .

**40** נתונה פירמידה שבסיסה מלבן. הוכח כי אם שלושה המקצועות הצדדיים שבה שווים, אז גם המקצוע הצדדי הרביעי שווה להם.

**תשובות סופיות:**

- (22) א. 3    ב. -10    ג.  $6\sqrt{3}$     ד. -24    ה. 15    ו. 0.
- (23) א.  $60^\circ$     ב.  $150^\circ$     ג.  $90^\circ$     ד.  $0^\circ$
- (24)  $|\overline{PQ}| = 18.248$
- (25)  $|\overline{MN}| = \sqrt{29}$
- (26)  $31.87^\circ$
- (27)  $55.49^\circ$
- (28)  $70.623^\circ$
- (29)  $24.095^\circ$
- (30) א.  $\alpha = \frac{3}{4}$     ב.  $\cos(\sphericalangle PAQ) = \frac{1}{3\sqrt{1+\alpha^2}}$     ג.  $\alpha = \frac{1}{2}$
- (31) שאלת הוכחה.
- (32) שאלת הוכחה.
- (33) שאלת הוכחה.
- (34) שאלת הוכחה.
- (35) שאלת הוכחה.
- (36) שאלת הוכחה.
- (37) שאלת הוכחה.
- (38) שאלת הוכחה.
- (39) א.  $\alpha + 2\beta = 1$     ב. שאלת הוכחה.
- (40) שאלת הוכחה.

# מתמטיקה

## פרק 30 - וקטורים אלגבריים

### תוכן העניינים

462	1. שאלות יסודיות עם וקטורים אלגבריים
466	2. פעולות אלגבריות בין וקטורים
468	3. גודל של וקטור
469	4. וקטורים מקבילים ושווים
470	5. זווית בין וקטורים
471	6. הצגה פרמטרית של ישר
474	7. מצב הדדי בין ישרים
477	8. הצגה פרמטרית של מישור
479	9. משוואת מישור
480	10. מעברים בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור
481	11. מישורים המקבילים לצירים
482	12. מצב הדדי בין ישר ומישור
484	13. מצב הדדי בין מישורים
485	14. ישר חיתוך בין מישורים
(ללא ספר)	15. חישובי זוויות שונות
486	16. זווית בין שני ישרים
488	17. זווית בין ישר ומישור
489	18. זווית בין שני מישורים
(ללא ספר)	19. חישובי מרחקים
490	20. מרחק בין שתי נקודות במרחב
491	21. מרחק בין נקודה לישר
492	22. מרחק בין נקודה למישור
493	23. מרחק בין ישרים מקבילים
494	24. מרחק בין ישר למישור
495	25. מרחק בין מישורים מקבילים
496	26. מרחק בין ישרים מצטלבים

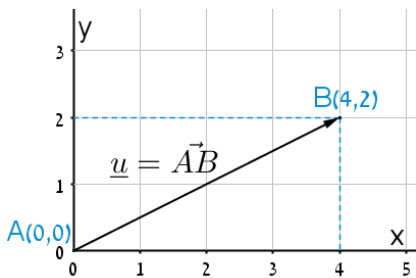
(ללא ספר)	27. סיכום מרחקים
497	28. שאלות מסכמות בוקטורים
500	29. שאלות הנפתרות עם מכפלה וקטורית

## שאלות יסודיות עם וקטורים אלגבריים:

סיכום כללי:

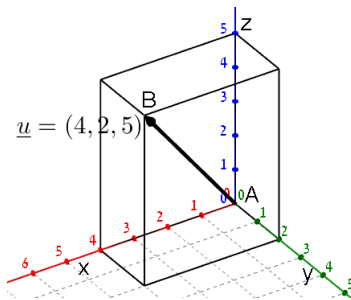
הגדרה כללית:

וקטור שמוצאו בראשית הצירים  $(0,0)$  וסופו בנקודה  $(x, y)$  במישור ייכתב בצורתו האלגברית באופן הבא:  $\underline{u} = (x, y)$ .



דוגמאות:

- הווקטור  $\underline{u} = (4, 2)$  נמצא במישור  $[xy]$ , מוצאו בנקודה  $A(0,0)$  וסופו בנקודה  $B(4,2)$ .



- הווקטור  $\underline{u} = (4, 2, 5)$  נמצא במרחב הקרטזי. מוצאו בראשית הצירים  $A(0,0,0)$  וסופו בנקודה  $B(4,2,5)$ .

וקטור שמוצאו אינו בראשית הצירים:

וקטור שמוצאו בנקודה  $A(x_1, y_1, z_1)$  וסופו בנקודה  $B(x_2, y_2, z_2)$  ייכתב ע"י חישוב הפרש נקודת סופו ממוצאו באופן הבא:  $\underline{u} = \overline{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ .

אמצע קטע וחלוקת קטע ביחס נתון:

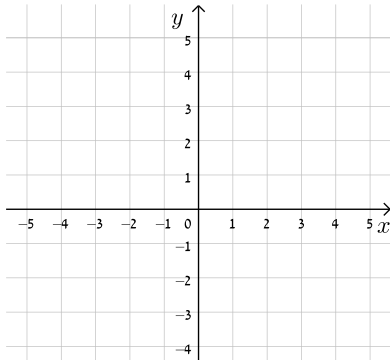
- אמצע הקטע M שקצותיו הם  $A(x_1, y_1, z_1)$  ו-  $B(x_2, y_2, z_2)$

$$\text{הוא: } x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}, z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו  $A(x_1, y_1, z_1)$  ו-  $B(x_2, y_2, z_2)$  ביחס של  $k:l$  הם:

$$x_P = \frac{k \cdot x_1 + l \cdot x_2}{k+l}; y_P = \frac{k \cdot y_1 + l \cdot y_2}{k+l}; z_P = \frac{k \cdot z_1 + l \cdot z_2}{k+l}$$

## שאלות:



1) שרטט את הווקטורים הבאים:

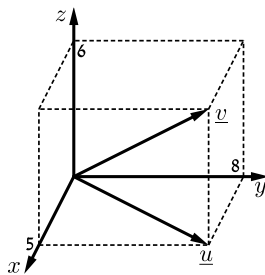
א.  $\underline{u} = (4, 2)$

ב.  $\underline{v} = (-5, 1)$

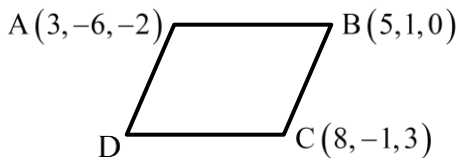
ג.  $\underline{w} = (3, -4)$

ד.  $\underline{a} = (0, 3)$

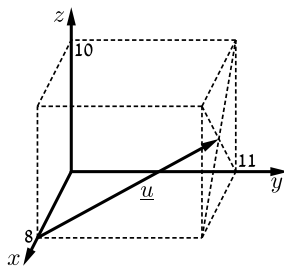
ה.  $\underline{b} = (-5, 0)$



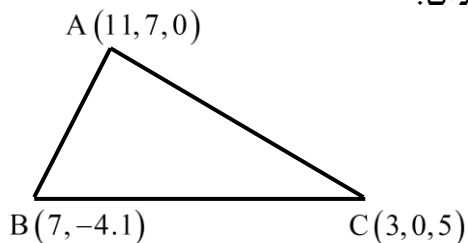
2) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך. מצא מהו הווקטור  $\underline{u}$  ומהו הווקטור  $\underline{v}$  על פי השרטוט.



3) בשרטוט נתונה מקבילית ששיעורי שלושה מקודקודיה נתונים (ראה איור). מצא את שיעורי הקודקוד D.



4) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך. מצא מהו הווקטור  $\underline{u}$  על פי השרטוט.



5) בשרטוט נתון משולש ששיעורי קודקודיו נתונים. מצא את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

6) מצא את  $x$ ,  $y$  ו- $z$  אם נתון ש- $\underline{u} = \underline{v}$  כאשר:

$$\underline{u} = (4, -1, 2), \quad \underline{v} = (z-2, y+1, x-3)$$

7) ענה על הסעיפים הבאים :

א. מצא את הווקטור  $\overline{AB}$  אם נתונות הנקודות  $A(-3,5)$  ו-  $B(6,1)$ .

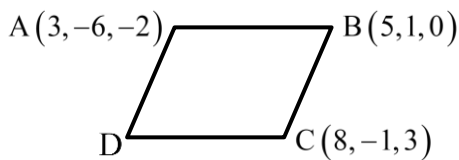
ב. מצא את שיעורי הנקודה  $Q$  אם נתונה הנקודה  $P(8,11)$  והווקטור  $\overline{PQ} = (4, -3)$ .

8) ענה על הסעיפים הבאים :

א. מצא את הווקטור  $\overline{EF}$  אם נתונות הנקודות  $E(2,0,-3)$  ו-  $F(7,-1,-3)$ .

ב. מצא את שיעורי הנקודה  $N$  אם נתונה הנקודה  $M(0,-4,1)$

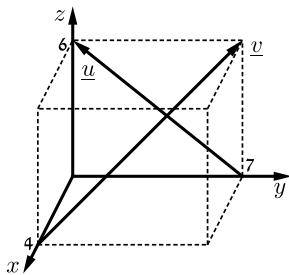
והווקטור  $\overline{MN} = (-1, -1, 9)$ .



9) בשרטוט נתונה מקבילית ששיעורי שלושה

מקודקודיה נתונים.

מצא את שיעורי הקודקוד  $D$ .



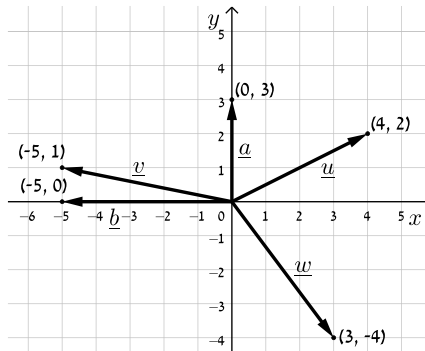
10) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת

הצירים שלפניך.

מצא מהו הווקטור  $\underline{u}$  ומהו הווקטור  $\underline{v}$ .

## תשובות סופיות:

(1) להלן סרטוט:



$$\cdot \underline{u} = (5, 8, 0) , \underline{v} = (5, 8, 6) \quad (2)$$

$$\cdot D(6, -8, 1) \quad (3)$$

$$\cdot \underline{u} = (4, 11, 5) \quad (4)$$

$$\cdot (7, 1, 2) \quad (5)$$

$$\cdot x = 5 , y = -2 , z = 6 \quad (6)$$

$$\cdot Q(12, 8) \quad \text{ב.} \quad \overrightarrow{AB} = (9, -4) \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$\cdot N(-1, -5, 10) \quad \text{ב.} \quad \overrightarrow{EF} = (5, -1, 0) \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$\cdot D(6, -8, 1) \quad (9)$$

$$\cdot \underline{u} = (0, -7, 6) , \underline{v} = (-4, 7, 6) \quad (10)$$

## פעולות אלגבריות בין וקטורים:

### סיכום כללי:

#### מכפלה סקלרית בהצגה אלגברית:

מכפלה סקלרית של שני ווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  תסומן:  $\underline{u} \cdot \underline{v}$  ותחושב ע"י הנוסחה הבאה:  $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$  כאשר  $\alpha$  היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים.

מכפלה סקלרית של ווקטורים:  $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\underline{v} = (x_2, y_2, z_2)$  תחושב באופן הבא:  $\underline{u} \cdot \underline{v} = (x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

### שאלות:

**11** נתונים הווקטורים הבאים:  $\underline{u} = (4, 0, 9)$ ,  $\underline{v} = (-1, 3, -5)$   
 חשב את ערכי הווקטורים הבאים:  $\underline{u} + \underline{v}$ ,  $\underline{u} - \underline{v}$ ,  $\underline{u} - 2\underline{v}$ ,  $3\underline{u} + 2\underline{v}$

**12** נתונים הווקטורים:  $\underline{u} = (-3, 1, 4)$ ,  $\underline{v} = (4, -2, -6)$ ,  $\underline{w} = (2, 6, -5)$   
 חשב את:

$3\underline{u} - 2\underline{v}$	ג.	$-0.5\underline{v}$	ב.	$2\underline{u}$	א.
$2\underline{v} - \underline{u} + 4\underline{w}$	ו.	$\underline{v} - 0.5\underline{u} + 2\underline{w}$	ה.	$0.25\underline{v} - 0.5\underline{u}$	ד.

**13** נתונות הנקודות הבאות:  $A(1, -3, 0)$ ,  $B(4, 2, -1)$ ,  $C(3, -1, 2)$   
 מצא את הווקטורים הבאים:

$2\overline{AC} + \overline{AB} - \overline{BC}$	ג.	$2\overline{AC} - 4\overline{AB}$	ב.	$\overline{AC} + \overline{AB}$	א.
--	----	-----------------------------------	----	---------------------------------	----

**14** נתונים שלושה ווקטורים:  $\underline{u} = (6, -1, z)$ ,  $\underline{v} = (0, y, 4)$ ,  $\underline{w} = (x, 5, -10)$

א. מצא את ערכם של  $x, y, z$  המקיימים:  $\underline{u} + 2\underline{v} = \underline{w}$

ב. מצא את ערכם של  $x, y, z$  המקיימים:  $2\underline{v} - 3\underline{w} = \frac{1}{2}(\underline{u} + \underline{v})$

ג. כיצד תשתנה התוצאה של סעיף א' אם:  $\underline{u} = (6, y, z)$ ,  $\underline{v} = (y-1, 2, x)$ ,  $\underline{w} = (x, 2z, -10)$ ?

15) נתונים הווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$ .

א. חשב את תוצאת המכפלה הסקלרית עבור:  $\underline{u} = (-6, 2, 3)$ ,  $\underline{v} = (4, 0, 1)$ .

ב. מצא את  $y$  עבורו תוצאת המכפלה הסקלרית של הווקטורים:

$$\underline{u} = (1, 7, -6), \underline{v} = (2, y, 4).$$

ג. מצא את  $y$  עבורו הווקטורים מהסעיף הקודם יהיו מאונכים זה לזה.

### תשובות סופיות:

11)  $\underline{u} + \underline{v} = (3, 3, 4)$ ;  $\underline{u} - \underline{v} = (5, -3, 14)$ ;  $\underline{u} - 2\underline{v} = (6, -6, 19)$ ;  $3\underline{u} + 2\underline{v} = (10, 6, 17)$

12) א.  $(6, -2, 8)$  ב.  $(-2, 1, 3)$  ג.  $(-17, 7, 24)$

ד.  $(2.5, -1, -3.5)$  ה.  $(9.5, 9.5, -18)$  ו.  $(19, 19, -36)$

13) א.  $(5, 7, 1)$  ב.  $(-8, -16, 8)$  ג.  $(8, 12, 0)$

14) א.  $x = 6, y = 3, z = -18$  ב.  $x = -1, y = 9\frac{2}{3}, z = 72$

ג.  $x = -4\frac{8}{9}, y = -4\frac{4}{9}, z = -\frac{2}{9}$

15) א.  $\underline{u} \cdot \underline{v} = -21$  ב.  $y = 3$  ג.  $y = 3\frac{1}{7}$

## גודל של וקטור:

### סיכום כללי:

גודלו של ווקטור  $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$  נתון ע"י:  $|\underline{u}| = \sqrt{\underline{u}^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

### שאלות:

**16** נתונים הווקטורים הבאים:  $\underline{u} = (1, -3, 2)$ ,  $\underline{v} = (5, -1, 0)$   
 חשב את הגדלים של הווקטורים הבאים:  $2\underline{v} + \underline{u}$ ,  $4\underline{u} - 3\underline{v}$ ,  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ .

**17** נתונים ארבעת קודקודי המרובע ABCD:  
 $A(-4, 2, 1)$ ,  $B(0, 2, -1)$ ,  $C(-3, -5, 0)$ ,  $D(-7, -5, 2)$   
 הוכח כי המרובע הוא מקבילית.

### תשובות סופיות:

**16**  $|\underline{u}| = \sqrt{14}$ ;  $|\underline{v}| = \sqrt{26}$ ;  $|2\underline{v} + \underline{u}| = \sqrt{150}$ ;  $|4\underline{u} - 3\underline{v}| = \sqrt{266}$

**17** הוכחה.

## וקטורים מקבילים ושווים:

### שאלות:

18 נתונים ארבעת קודקודי המרובע ABCD :

$$A(1,2,0), B(-2,5,3), C(-1,8,4), D(4,3,-1)$$

א. הוכח כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

19 נתונות הנקודות הבאות:  $A(1,0,2), B(3,7,-4), C(6,9,0), D(7,4,10), E(9,11,4)$ .

א. הראה כי:  $\overline{AB} = \overline{DE}$ .

ב. האם ניתן לומר כי גם  $\overline{AD} = \overline{BC}$ ? נמק.

### תשובות סופיות:

18 א. הוכחה. ב. כן.

19 א. הוכחה. ב. לא.

## זווית בין וקטורים:

### סיכום כללי:

- זווית  $\alpha$  בין שני וקטורים  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  תחושב ע"י:  $\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$ .

### שאלות:

20) חשב את הזווית שבין הווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$ :

א.  $\underline{u} = (-2, 2, 5)$ ,  $\underline{v} = (4, 0, 1)$

ב.  $\underline{u} = (6, -3, 1)$ ,  $\underline{v} = (2, 5, 3)$

ג.  $\underline{u} = (-2, 1, 3)$ ,  $\underline{v} = (4, -2, -6)$

21) מצא את שטחו של משולש ABC שקודקודיו הם:  $A(-3, 2, 1)$ ,  $B(0, 3, 2)$ ,  $C(5, -1, 0)$ .

22) נתונים הווקטורים:  $\underline{u} = (2, -1, 0)$ ,  $\underline{v} = (5, 0, 3)$ .

מצא וקטור  $\underline{w}$  שמכפלתו ב- $\underline{u}$  היא 0 ומכפלתו ב- $\underline{v}$  היא 0 אם ידוע שגודלו הוא  $\sqrt{70}$ .

### תשובות סופיות:

20) א.  $92.277^\circ$  ב.  $90^\circ$  ג.  $180^\circ$ .

21) 10.173 יח"ש.

22)  $\underline{w} = (3, 6, -5)$  או  $\underline{w} = (-3, -6, 5)$ .

## הצגה פרמטרית של ישר:

### סיכום כללי:

ישר כללי במרחב ניתן להצגה ע"י שני ווקטורים.

הווקטור  $\underline{a}$  נקרא ווקטור ההעתקה.

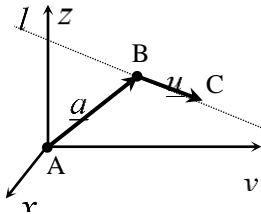
מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו על נקודה כלשהי על הישר הנתון.

הווקטור  $\underline{u}$  נקרא ווקטור הכיוון של הישר.

זה הוא ווקטור שנמצא על הישר עצמו מוצאו בנקודה אחת וסופו בנקודה אחרת לאורך הישר.

הקשר בין שני הווקטורים נתון ע"י:  $\underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$

כאשר  $t$  הוא מספר ממשי כלשהו ו- $\underline{x}$  הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירה של  $t$  שמוצאו בראשית הצירים וסופו על נקודה על הישר  $l$ .



**דוגמא:** עבור הנקודות:  $A(0,0,0)$ ,  $B(5,3,1)$  ו- $C(7,0,10)$  נקבל את הווקטורים

הבאים:  $\underline{a} = \overline{AB} = B - A = (5,3,1)$ ;  $\underline{u} = \overline{BC} = C - B = (7,0,10) - (5,3,1) = (2,-3,9)$

לכן הצגה פרמטרית של הישר היא:  $l: \underline{x} = (5,3,1) + t(2,-3,9)$

### הערות:

- לישר יש אינסוף הצגות פרמטריות הנבדלות זו מזו בבחירת ווקטור ההעתקה ווקטור הכיוון.
- ההצגה הבאה גם מתאימה לישר שבדוגמא:  $l: \underline{x} = (7,0,10) + t(-6,9,-27)$
- הווקטור  $\underline{x}$  המתקבל ע"י הצבת  $t_0$  בהצגה פרמטרית אחת של הישר, יתקבל ע"י הצבת  $t_1$  בהצגה פרמטרית אחרת של אותו הישר.
- הנקודה B באיור לעיל אינה בהכרח סופו של הווקטור  $\underline{a}$  ומוצאו של הווקטור  $\underline{u}$ .
- כדי לכתוב הצגה פרמטרית של ישר מספיק לקחת שתי נקודות כלשהן למציאת הווקטור  $\underline{u}$  (למשל הנקודה C יחד עם נקודה D הנמצאת על המשך הישר) ונקודה נוספת למציאת הווקטור  $\underline{a}$ .
- הצגה פרמטרית של ישר היא למעשה חיבור של שני ווקטורים גיאומטריים במרחב הנותנים ווקטור שמוצאו בראשית הצירים וסופו על הישר הנתון.

## שאלות:

(23) האם הנקודה  $A(7,0,3)$  נמצאת על הישר  $\ell : \underline{x} = (4,3,0) + t(1,-1,1)$  ?

(24) האם הנקודה  $B(4,-2,-10)$  נמצאת על הישר  $\ell : \underline{x} = t(2,-1,5)$  ?

(25) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במישור שעובר בנקודות  $A(-5,-2)$  ו-  $B(1,6)$ .

(26) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודות  $C(3,0,-2)$  ו-  $D(4,1,1)$ .

(27) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה  $G(2,-7,1)$

ומקביל לישר  $\ell : \underline{x} = (0,3,-1) + t(-4,2,1)$ .

(28) מצא במרחב הצגה פרמטרית של ישר העובר דרך הנקודה  $(1,2,3)$

ומאונך לישר:  $\ell : \underline{x} = (1,2,0) + s(1,-2,4)$ .

(29) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הצגה פרמטרית של ישר:  $\ell : \underline{x} = (1,2,3) + t(4,5,6)$ .

כתוב את ההצגה בעזרת הקואורדינאטות  $x, y$  ו-  $z$ .

ב. נתונה הצגה של ישר בעזרת קואורדינאטות:  $x = 1 + 2t, y = 10, z = 4 - t$ .

כתוב את ההצגה הפרמטרית שלו.

(30) מצא את הצגתו הפרמטרית של ציר ה-  $y$  במרחב.

(31) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה  $M(3,-1,4)$

ומקביל לציר ה-  $z$ .

(32) מצא את נקודת החיתוך של הישר  $\ell : \underline{x} = (1,-2,6) + t(-2,1,2)$  עם המישור  $[xy]$ .

**תשובות סופיות:**

(23) כן.

(24) לא.

(25)  $\ell : \underline{x} = (-5, -2) + t(6, 8)$

(26)  $\ell : \underline{x} = (4, 1, 1) + t(1, 1, 3)$

(27)  $\ell : \underline{x} = (2, -7, 1) + s(-4, 2, 1)$

(28)  $\ell : \underline{x} = (1, 2, 3) + t(2, 1, 0)$

(29) א.  $x = 1 + 4t, y = 2 + 5t, z = 3 + 6t$  ב.  $\ell : \underline{x} = (1, 10, 4) + t(2, 0, -1)$

(30)  $\ell : \underline{x} = t(0, 1, 0)$

(31)  $\ell : \underline{x} = (3, -1, 4) + t(0, 0, 1)$

(32)  $(7, -5, 0)$

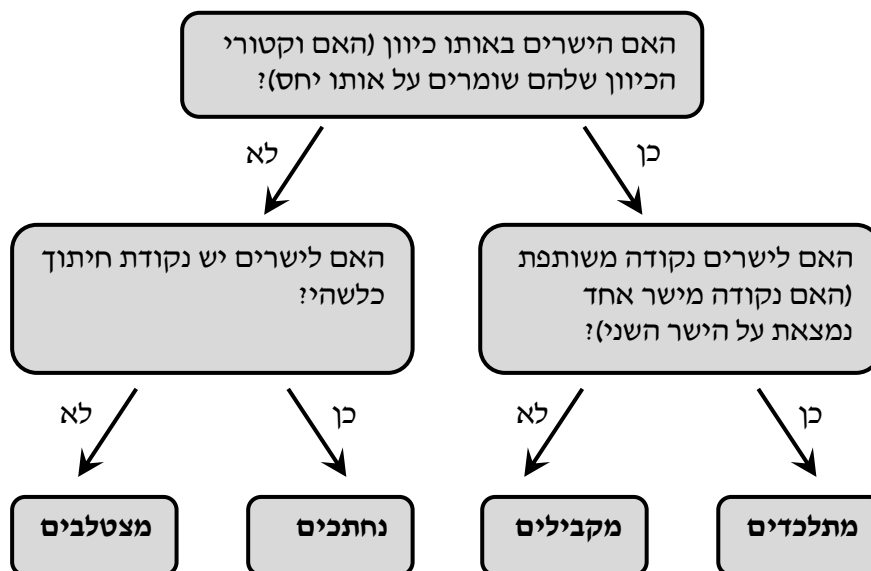
## מצב הדדי בין ישרים:

### סיכום כללי:

ישנם 4 מצבים הדדים בין זוג ישרים במרחב:

- ישרים מתלכדים: שני הישרים הם למעשה ישר אחד.
- ישרים מקבילים: שני הישרים בעלי אותו כיוון ולעולם אינם נפגשים במרחב.
- ישרים נחתכים: שני ישרים במרחב עם כיוונים שונים הנחתכים בנקודה כלשהי.
- ישרים מצטלבים: שני ישרים עם כיוונים שונים שאינם נפגשים במרחב.

כדי לקבוע את המצב ההדדי בין שני ישרים נבצע את הבדיקה הדו-שלבית הבאה:



## שאלות:

**(33)** מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.  
 אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.  
 $\ell_1 : \underline{x} = (2, -3, 0) + t(5, -1, 2)$  ,  $\ell_2 : \underline{x} = (12, -5, 4) + s(-10, 2, -4)$

**(34)** מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.  
 אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.  
 $\ell_3 : \underline{x} = (0, 1, -7) + t(-2, 1, 1)$  ,  $\ell_4 : \underline{x} = (2, 0, -6) + s(6, -3, -3)$

**(35)** מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.  
 אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.  
 $\ell_5 : \underline{x} = (-3, 5, 1) + t(4, 0, -1)$  ,  $\ell_6 : \underline{x} = (-1, 7, 4) + s(-1, 1, 2)$

**(36)** מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.  
 אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.  
 $\ell_7 : \underline{x} = (3, 0, 0) + t(2, -2, 5)$  ,  $\ell_8 : \underline{x} = (0, 1, -5) + s(3, 1, -2)$

**(37)** מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.  
 אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.  
 $\ell_9 : \underline{x} = (-4, 1, -1) + t(3, 0, -1)$  ,  $\ell_{10} : \underline{x} = s(6, 0, -2)$

**(38)** מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.  
 אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.  
 $\ell_{11} : \underline{x} = (2, 8, -1) + t(1, 0, 0)$  ,  $\ell_{12} : \underline{x} = (-5, 8, 2) + s(2, 0, -1)$

**(39)** מצא את ערכו של הפרמטר  $k$  שבעבורו הישרים הבאים :  
 $\ell_1 : \underline{x} = (k+1, 1-k, 6) + t(1, -2, 2)$  ,  $\ell_2 : \underline{x} = (k-1, 7, -k) + s(1-k^2, k^2+2, -6)$

א. מקבילים.

ב. מתלכדים.

**(40)** נתונות הנקודות :  $A(3, -1, 5)$  ,  $B(k, -1, 3)$  ,  $C(-6, 3, -1)$  ,  $D(-2, 3, k)$   
 הראה כי לכל ערך של  $k$  הישרים  $\ell_{AB}$  ו- $\ell_{CD}$  מצטלבים.

**תשובות סופיות:**

33) מתלכדים.

34) מקבילים.

35) נחתכים,  $(1, 5, 0)$ .

36) מצטלבים.

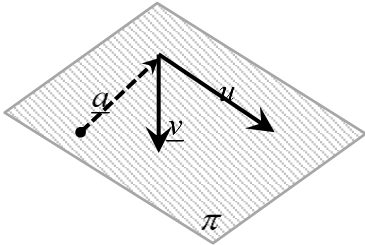
37) מקבילים.

38) נחתכים,  $(1, 8, -1)$ .39) א.  $k = 2$ . ב.  $k = -2$ .

40) הוכחה.

## הצגה פרמטרית של מישור:

### סיכום כללי:



מישור כלשהו במרחב ניתן להצגה ע"י שלושה ווקטורים. הווקטור  $\underline{a}$  הוא ווקטור ההעתקה.

מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו בנקודה כלשהי על המישור.

הווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  הם וקטורי הכיוון של המישור. אלו הווקטורים הפורשים את המישור.

הקשר בין שלושת הווקטורים נתון ע"י:  $\pi : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u} + s\underline{v}$

כאשר  $t, s$  הם מספרים ממשיים כלשהם ו- $\underline{x}$  הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירתם אשר מוצאו בראשית הצירים וסופו בנקודה על המישור  $\pi$ .

### שאלות:

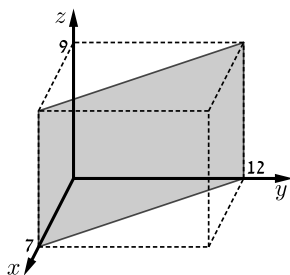
**(41)** מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודות הבא:  
 $A(1, -4, 0)$ ,  $B(3, 6, 2)$ ,  $C(0, -3, 1)$

**(42)** מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה  $Q(6, 7, -1)$ , ומכיל את הישר  $\ell : \underline{x} = (-2, -2, 5) + t(1, 0, -4)$

**(43)** נתונים שני ישרים:  $\ell_1 : \underline{x} = (0, 1, -1) + t(1, 9, -3)$ ,  $\ell_2 : \underline{x} = (2, 16, 11) + s(0, 1, -6)$ . הראה שהישרים נחתכים ומצא הצגה פרמטרית של המישור המכיל אותם.

**(44)** מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה  $D(5, -2, -1)$  ומכיל את ציר ה- $x$ .

**(45)** מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור  $[xz]$ .



**(46)** נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך. מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור המסומן.

**תשובות סופיות:**

$$\cdot \pi : \underline{x} = (1, -4, 0) + t(2, 10, 2) + s(-1, 1, 1) \quad \mathbf{(41)}$$

$$\cdot \pi : \underline{x} = (-2, -2, 5) + t(1, 0, -4) + s(8, 9, -6) \quad \mathbf{(42)}$$

$$\cdot \pi : \underline{x} = (0, 1, -1) + t(1, 9, -3) + s(0, 1, -6) \quad \mathbf{(43)}$$

$$\cdot \pi : \underline{x} = t(1, 0, 0) + s(5, -2, -1) \quad \mathbf{(44)}$$

$$\cdot \pi : \underline{x} = t(1, 0, 0) + s(0, 0, 1) \quad \mathbf{(45)}$$

$$\cdot \pi : \underline{x} = (7, 0, 0) + t(0, 0, 1) + s(-7, 12, 0) \quad \mathbf{(46)}$$

## משוואת מישור:

### סיכום כללי:

ניתן להציג מישור ע"י משוואה באופן הבא:  $\pi: ax+by+cz+d=0$ ,  
 כאשר:  $(x, y, z)$  היא נקודה על המישור והמקדמים  $a, b, c$  הם שיעורי ווקטור הנורמל  
 של המישור המסומן:  $\underline{h}=(a, b, c)$ .

### שאלות:

(47) קבע האם הנקודות הבאות נמצאות על המישור  $\pi: 2x-y+3z-6=0$   
 א.  $D(5, 7, 1)$       ב.  $E(2, -1, 1)$

(48) מצא את ערכו של  $k$  שבעבורו הנקודה  $A(1, k, -1)$  נמצאת על  
 המישור:  $\pi: kx-2y+(1+k)z+7=0$ .

(49) נתונה משוואת מישור:  $\pi: 3x+2y-z-9=0$ .  
 מצא את נקודות החיתוך של המישור עם שלושת הצירים.

(50) נתונה משוואת מישור:  $\pi: 4x+y-2z+8=0$ .  
 מצא הצגה פרמטרית של הישר שהמישור חותך מהמישור  $[yz]$ .

### תשובות סופיות:

(47) א. על המישור. ב. לא על המישור.

(48)  $k=3$ .

(49)  $(3, 0, 0)$ ,  $(0, 4\frac{1}{2}, 0)$ ,  $(0, 0, -9)$ .

(50)  $\ell: \underline{x}=(0, -8, 0)+t(0, 2, 1)$ .

## מעברים בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור:

### שאלות:

(51) נתונה משוואת מישור:  $2x + 3z - 12 = 0$ . כתוב הצגה פרמטרית של המישור.

(52) נתונה הצגה פרמטרית של מישור:  $\underline{x} = (2, -5, 0) + t(1, 0, 2) + s(0, -1, 3)$ . מצא את משוואת המישור.

(53) נתונה הצגה פרמטרית של מישור:  $\underline{x} = t(-2, 2, 1) + s(3, 1, 0)$ . מצא את משוואת המישור.

(54) המישור  $\pi$  עובר בנקודות:  $A(1, 0, -3)$ ,  $B(2, 0, 0)$ ,  $C(4, -1, 0)$ . מצא את משוואת המישור.

(55) ענה על הסעיפים הבאים:

א. לפניך הנקודות הבאות:  $(2, 0, 5)$ ,  $(0, 1, -2)$ ,  $(1, 1, 0)$ .

i. הראה ששלוש הנקודות אינן נמצאות על ישר אחד ומצא הצגה פרמטרית של המישור הנקבע על ידן.

ii. מצא את משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנ"ל.

ב. מצא שתי נקודות נוספות הנמצאות על המישור שמצאת בסעיף א'.

ג. האם הנקודה  $(4, 2, 1)$  נמצאת על המישור שמצאת בסעיף א'?

### תשובות סופיות:

(51)  $\underline{x} = (0, 0, 4) + t(0, 1, 0) + s(6, 0, -4)$

(52)  $\pi : -2x + 3y + z + 19 = 0$

(53)  $\pi : x - 3y + 8z = 0$

(54)  $\pi : 3x + 6y - z - 6 = 0$

(55) i.  $\pi : \underline{x} = (1, 1, 0) + t(-1, 0, -2) + s(1, -1, 5)$  ii.  $-2x + 3y + z - 1 = 0$

ב. למשל:  $(-0.5, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ . ג. לא.

## מישורים המקבילים לצירים:

שאלות:

56 נתונה משוואת מישור:  $(k+2)x + (k^2 - 2k - 3)y - 3z + k^2 - 1 = 0$ .  
 לאיזה ערך של  $k$  המישור מקביל לציר ה- $y$  (ולא מכיל אותו)?

57 פאותיו של טטראדר נמצאות על המישורים  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=0$   
 ו- $x+3y+2z-6=0$ . מצא את נפח הטטראדר.

תשובות סופיות:

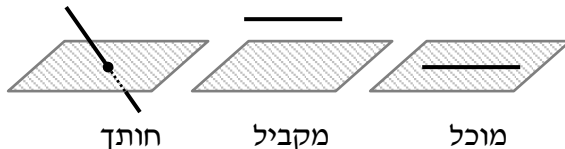
56  $k=3$ .

57 6 יח"נ.

## מצב ההדדי בין ישר ומישור:

### סיכום כללי:

ישנם 3 מצבים הדדיים בין ישר ומישור במרחב:



- הישר חותך את המישור.
- הישר מקביל למישור.
- הישר מוכל במישור.

כדי לדעת מהו המצב ההדדי בין ישר ומישור יש להציב נקודה כללית של הישר במשוואת המישור ולבדוק:

- אם למשוואה המתקבלת יש פתרון יחיד אז הישר חותך את המישור.
- אם למשוואה אין אף פתרון אז הישר מקביל למישור.
- אם למשוואה יש אינסוף פתרונות אז הישר מוכל במישור.

### שאלות:

(58) נתונים הישר והמישור הבאים:  $\ell : \underline{x} = (5, 0, 1) + t(4, 1, -2)$ ,  $\pi : 2x - y - 3z + 6 = 0$ . קבע את המצב ההדדי שביניהם. אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

(59) נתונים הישר והמישור הבאים:  $\ell : \underline{x} = (2, -1, 6) + t(-1, 1, 2)$ ,  $\pi : x - 3y + 2z - 11 = 0$ . קבע את המצב ההדדי שביניהם. אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

(60) נתונים הישר והמישור הבאים:  $\ell : \underline{x} = (-6, 1, 0) + t(3, 0, -1)$ ,  $\pi : 2x + y + 6z + 11 = 0$ . קבע את המצב ההדדי שביניהם. אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

(61) נתונים הישר והמישור הבאים:  $\ell : \underline{x} = (1, a, 3) + t(4, 1 - b, 0)$ ,  $\pi : 2x - y + z - 4 = 0$ . מצא את ערכי  $a$  ו- $b$  בעבורם הישר מוכל במישור.

**תשובות סופיות:**

58 הישר חותך,  $(1, -1, 3)$ .

59 מקבילים.

60 הישר מוכל.

61  $a = 1, b = -7$ .

## מצב הדדי בין מישורים:

### סיכום כללי:

בין שני מישורים ישנם 3 מצבים הדדיים:

- המישורים נחתכים - במקרה זה יש להם ישר משותף הנקרא ישר החיתוך.
- המישורים מקבילים – לשני המישורים וקטורים פורשים זהים אך ווקטור העתקה שונה.
- המישור מתלכדים - במקרה זה שני המישורים מייצגים את אותו המישור.

עבור שני מישורים כלליים:  $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$  ו-  $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

נקבע את המצב ההדדי ביניהם באופן הבא:

נחתכים	מקבילים	מתלכדים
כל מצב אחר	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$

### שאלות:

62 נתונים שני מישורים. קבע את המצב ההדדי ביניהם:

א.  $\pi_1: 2x - y + 4z - 5 = 0$ ,  $\pi_2: 4x - 2y + 8z - 10 = 0$

ב.  $\pi_3: x + 3y - z + 1 = 0$ ,  $\pi_4: 3x + 9y - 3z - 8 = 0$

ג.  $\pi_5: 5x - 2y - 2z + 3 = 0$ ,  $\pi_6: 2x + 3y + z - 5 = 0$

63 נתונים שני המישורים הבאים:

$\pi_1: 2x + (k^2 + k)y - 2z + 1 = 0$ ,  $\pi_2: 4x + 12y - 4z + k^2 - 2 = 0$

מצא את ערכי  $k$  עבורם המישורים:

א. נחתכים      ב. מקבילים      ג. מתלכדים.

### תשובות סופיות:

62 א. מתלכדים.      ב. מקבילים.      ג. נחתכים.

63 א.  $k \neq 2, -3$ .      ב.  $k = -3$ .      ג.  $k = 2$ .

## ישר חיתוך בין מישורים:

### שאלות:

64 נתונים שני מישורים נחתכים:  $\pi_1 : 4x + y - 2z + 2 = 0$ ,  $\pi_2 : 2x - y + z + 10 = 0$ . מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

65 נתונים שני מישורים נחתכים:  $\pi_3 : 8x + 2y - 3z + 2 = 0$ ,  $\pi_4 : 2x - 3y + z + 4 = 0$ . מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

66 נתונים שני מישורים נחתכים:  $\pi_5 : 3x - 3y + z + 2 = 0$ ,  $\pi_6 : 5x - 2z + 20 = 0$ . מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

67 נתונים שני מישורים נחתכים:  $\pi_7 : x - 2y - z + 6 = 0$ ,  $\pi_8 : z - 2 = 0$ . מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

68 מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישור  $\pi : 6x - 5y + z + 18 = 0$  עם המישור  $[xz]$ .

69 נתונים שני מישורים:  $\pi_1 : x - 3y + 2z - 1 = 0$ ,  $\pi_2 : 4x + y - z - 6 = 0$ . מצא הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

### תשובות סופיות:

$$64 \quad \ell : \underline{x} = (-2, 6, 0) + t(2, 16, 12)$$

$$65 \quad \ell : \underline{x} = (0, 2, 2) + t(1, 2, 4)$$

$$66 \quad \ell : \underline{x} = (0, 4, 10) + t\left(4, 7\frac{1}{3}, 10\right)$$

$$67 \quad \ell : \underline{x} = (0, 2, 2) + t(4, 2, 0)$$

$$68 \quad \ell : \underline{x} = (-3, 0, 0) + t(3, 0, -18)$$

$$69 \quad \ell : \underline{x} = t(1, 9, 13)$$

## זווית בין שני ישרים:

### סיכום כללי:

- זווית חדה  $\alpha$  בין שני ישרים  $l_1 = \underline{a}_1 + t\underline{u}_1$  ו-  $l_2 = \underline{a}_2 + s\underline{u}_2$  תחושב:  $\cos \alpha = \frac{|\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2|}{|\underline{u}_1| \cdot |\underline{u}_2|}$ .

### שאלות:

70 מצא את הזווית שבין זוגות הישרים הבאים:

א.  $l_1 : \underline{x} = (4, 0, 0) + t(6, 8, 1)$ ,  $l_2 : \underline{x} = s(-4, 2, -4)$ .

ב.  $l_1 : \underline{x} = (10, 17, -18) + t(3, 0, -6)$ ,  $l_2 : \underline{x} = (6, 5, 4) + s(0, 4, 0)$ .

71 מצא את הזווית שבין ישר העובר דרך הנקודות  $A(3, 4, 6)$ ,  $B(6, 0, -2)$  וישר העובר דרך הנקודות:  $C(6, 5, 1)$ ,  $D(-1, 4, 2)$  וקבע מה המצב ההדדי ביניהם.

72 נתונות הנקודות  $A(1, -3, 0)$ ,  $B(4, 2, -1)$ ,  $C(3, -1, 2)$ .

א. מצא הצגה פרמטרית של ישר במרחב העובר דרך הנקודות:

i.  $A$  ו-  $B$ .

ii.  $B$  ו-  $C$ .

iii.  $A$  ו-  $C$ .

ב. מי מבין הנקודות  $D(4, 2, -1)$  ו-  $E(7, 7, -3)$  נמצאת על הישר  $AB$  שמצאת בסעיף הקודם?

ג. חשב את הזווית שבין הישר  $AB$  והישר  $BC$ .

73 נתון מישור שמשוואתו:  $3x - 4y + 6 = 0$ . הנקודות  $A(x, 6, 1)$ ,  $B(-2, y, -1)$ .

נמצאות על המישור והנקודה  $C$  נמצאת על מישור  $[yz]$  ומקיימת:  $z_C = 11$ .

מצא את שיעורי הנקודה  $C$  אם ידוע כי קוסינוס הזווית שבין הישרים  $AB$  ו-  $AC$

הוא:  $\sqrt{\frac{13}{76}}$ .

**תשובות סופיות:**

 ב.  $90^\circ$ .

 א.  $78.521^\circ$  (70)

 א.  $68.21^\circ$ . הישרים מצטלבים. (71)

 א. ii.  $\ell : \underline{x} = (4, 2, -1) + t(-1, -3, 3)$ 

 א. i.  $\ell : \underline{x} = (1, -3, 0) + t(3, 5, -1)$  (72)

 ב. הנקודה D. ג.  $35.477^\circ$ .

 א. iii.  $\ell : \underline{x} = (1, -3, 0) + t(2, 2, 2)$ 

C(0, 28.45, 11) או C(0, 2, 11) (73)

## זווית בין ישר ומישור:

### סיכום כללי:

• זווית חדה  $\alpha$  בין ישר  $l = \underline{a} + t\underline{u}$  ומישור  $\pi : ax + by + cz + d = 0$

$$\sin \alpha = \frac{|\underline{u} \cdot \underline{h}|}{|\underline{u}| \cdot |\underline{h}|}$$

תחושב ע"י הנוסחה הבאה:

### שאלות:

(74) מצא את הזווית שבין הישר והמישור הבאים:

$$\ell : \underline{x} = (-2, 0, 5) + t(-2, 1, 2), \quad \pi : 3x - 2y + 2z + 9 = 0$$

(75) נתונות הנקודות  $A(1, -1, 2)$ ,  $B(0, 2, -1)$ ,  $C(1, 2, 5)$ ,  $D(-7, 3, -1)$

מצא את הזווית בין הישר העובר בנקודות A ו-D ובין המישור ABC.

(76) נתונה פירמידה משולשת SABC, שמשוואת הבסיס ABC שלה

$$\text{היא: } 2x + y - 2z - 6 = 0. \text{ קדקוד הפירמידה הוא } S(3, 1, -2).$$

מצא את הזווית בין המקצוע הצדדי SB לבסיס הפירמידה,

$$\text{אם נתון כי שיעורי הקודקוד B מקיימים: } x_B = z_B = -1.$$

### תשובות סופיות:

(74)  $18.87^\circ$

(75)  $44.83^\circ$

(76)  $14.9^\circ$

## זווית בין שני מישורים:

### סיכום כללי:

• זווית חדה  $\alpha$  בין שני מישורים:  $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$  ו-  $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

• תחושב ע"י:  $\cos \alpha = \frac{|h_1 \cdot h_2|}{|h_1| \cdot |h_2|}$

### שאלות:

(77) מצא את הזווית שבין המישורים הבאים:  $\pi_1: 4x + 3y + z - 12 = 0$   
 ו-  $\pi_2: 4x - 7y + 5z + 3 = 0$

(78) נתונה פירמידה משולשת ABCD, שקודקודה הם:  
 $A(0, 2, -5)$ ,  $B(3, -1, 1)$ ,  $C(7, -1, -5)$ ,  $D(3, 2, 0)$   
 מצא את הזווית בין הפאה הצדדית ABD לבסיס הפירמידה ABC.

(79) מצא את הזווית בין מישור שמשוואתו  $3x + 5y - z + 4 = 0$  למישור  $[xz]$ .

### תשובות סופיות:

(77)  $90^\circ$

(78)  $87.539^\circ$

(79)  $32.312^\circ$

## מרחק בין שתי נקודות במרחב:

סיכום כללי:

מרחק בין שתי נקודות  $A(x_1, y_1, z_1)$  ו-  $B(x_2, y_2, z_2)$  במרחב יחושב באופן

$$\text{הבא: } d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

שאלות:

**(80)** נתונות הנקודות:  $A(2, 4, -5)$ ,  $B(0, -2, 6)$  ו-  $C(k, -1, 13 - k)$ . מצא ערכי  $k$  עבורם המשולש  $ABC$  יהיה שווה-שוקיים:  $AB = AC$ .

תשובות סופיות:

**(80)**  $k = 8$  או  $k = 12$ .

## מרחק בין נקודה לישר:

### סיכום כללי:

מרחק בין נקודה  $A(x_1, y_1, z_1)$  לישר הנתון בהצגה פרמטרית:  $l: \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$  יחושב ע"י העברת אנך מהנקודה לישר וחישוב אורכו. כדי למצוא את נקודת החיתוך יש להשוות את מכפלת הווקטור האנך בווקטור הכיוון של הישר לאפס.

### שאלות:

81 מצא את המרחק שבין הנקודה  $A(13, -1, -19)$  לישר  $l: \underline{x} = t(2, 0, -7)$ .

82 נתונות הנקודות  $A(1, 6, -1)$ ,  $B(2, -1, 0)$ ,  $C(6, -4, 0)$ .  
חשב את שטח המשולש ABC.

83 על הישר  $l: \underline{x} = (5, -2, 0) + t(0, 1, -1)$  מונחת הצלע AB של ריבוע ABCD.  
אחד מקודקודי הריבוע הוא  $D(5, 4, 2)$ .  
מצא את שיעורי הקודקוד B (שתי אפשרויות).

### תשובות סופיות:

81  $\sqrt{54}$

82 12.75 יח"ש.

83  $B(5, 4, -6)$  או  $B(5, -4, 2)$ .

## מרחק בין נקודה למישור:

### סיכום כללי:

מרחק בין נקודה  $A(x_1, y_1, z_1)$  למישור  $\pi: ax + by + cz + d = 0$  יחושב

$$.d = \left| \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right| \text{ עיני:}$$

### שאלות:

(84) מצא את מרחקו של המישור  $4x - 2y - 4z + 15 = 0$  מראשית הצירים.

(85) מצא משוואת מישור המאונך לישר  $\ell: \underline{x} = (1, -8, 3) + t(3, -2, 1)$

ונמצא במרחק  $\sqrt{14}$  מהנקודה  $A(4, 5, -9)$ .

(86) נתונים ישר ומישור:  $\pi: 2x + 4y - 4z + 15 = 0$ ,  $\ell: \underline{x} = (7, 19, -3) + t(3, 14, -4)$ .

מצא את הנקודות שעל הישר שמרחקן מהמישור הוא 6.5.

### תשובות סופיות:

$$.2 \frac{1}{2} \quad (84)$$

$$. \pi: 3x - 2y + z - 7 = 0 \text{ או } \pi: 3x - 2y + z + 21 = 0 \quad (85)$$

$$.(1, -9, 5) \text{ או } (4, 5, 1) \quad (86)$$

## מרחק בין ישרים מקבילים:

### סיכום כללי:

מרחק בין שני ישרים מקבילים יחושב ע"י שימוש בנקודה מאחד הישרים ומציאת מרחקה מהישר השני ע"י העברת אנך מהנקודה לישר וחישוב אורכו.

### שאלות:

87 נתונות הנקודות  $A(15,0,-4)$ ,  $B(12,-5,2)$ ,  $C(6,1,4)$ ,  $D(12,11,-8)$ .

א. מצא את המצב ההדדי בין הישר העובר בנקודות A ו-B

ובין הישר העובר בנקודות C ו-D.

ב. מצא את המרחק בין הישרים מסעיף א'.

88 4 צלעות של מרובע מונחות על הישרים:

$$l_1: \underline{x} = (2, 0, -1) + t(1, -2, 1) \quad , \quad l_2: \underline{x} = (-8, -1, 19) + s(-4, 1, 6)$$

$$l_3: \underline{x} = (-2, 7, -11) + r(-2, 4, -2) \quad , \quad l_4: \underline{x} = (-2, 1, 5) + q(4, -1, -6)$$

א. הוכח כי המרובע הוא מלבן.

ב. מצא את שטח המלבן.

### תשובות סופיות:

87 א. מקבילים. ב.  $\sqrt{76}$  יח"א.

88 א. הוכחה. ב.  $\sqrt{824}$  יח"ש.

## מרחק בין ישר למישור:

### סיכום כללי:

מרחק בין ישר ומישור (המקביל לו) יחושב ע"י שימוש בנקודה שעל הישר ומציאת מרחקה מהמישור.

### שאלות:

89 נתונה משוואת מישור:  $4x - z + 6 = 0$ .

א. מצא את המצב ההדדי בין ציר ה- $y$  ובין המישור הנתון.

ב. מצא את המרחק בין ציר ה- $y$  ובין המישור הנתון.

90 נתונים ישר ומישור:  $\pi: 3x + 12y - 4z + k - 10 = 0$ ,  $l: \underline{x} = (1, k - 1, 5) + t(4, -2, -3)$ .

א. הוכח שהישר מקביל למישור או מוכל בו.

ב. מצא את ערכו של הפרמטר  $k$  שעבורו המרחק בין הישר למישור הוא 1.

### תשובות סופיות:

89 א. הישר מקביל למישור. ב.  $\frac{6}{\sqrt{17}}$ .

90 א. הוכחה. ב.  $k = 2, 4$ .

## מרחק בין מישורים מקבילים:

### סיכום כללי:

מרחק בין שני מישורים מקבילים יחושב לפי אחת מהאפשרויות הבאות:  
 1. שימוש בנקודה שעל מישור אחד ומציאת מרחקה מהמישור השני.

$$2. \text{ שימוש בנוסחה: } d = \left| \frac{d_1 - d_2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

### שאלות:

91 נתונה משוואת מישור:  $\pi: 3x - 4y + 5z - 10 = 0$ .

מצא משוואת מישור המקביל למישור הנתון והנמצא במרחק  $\sqrt{8}$  ממנו.

92 נתונים שני מישורים מקבילים:  $\pi_1: x - 2y - 2z + 6 = 0$ ,  $\pi_2: x - 2y - 2z - 12 = 0$ .

מצא את משוואת המישור המקביל לשני המישורים הנתונים והנמצא במרחק שווה משניהם.

93 נתונים שישה מישורים:

$$\pi_1: 2x + y - 2z - 11 = 0, \quad \pi_2: x + 2y + 2z + 5 = 0, \quad \pi_3: 2x - 2y + z + 3 = 0$$

$$\pi_4: 2x + y - 2z + 7 = 0, \quad \pi_5: x + 2y + 2z - 1 = 0, \quad \pi_6: kx + qy + z + p = 0$$

מצא את ערכי הפרמטרים  $k, q, p$  שעבורם ששת המישורים יוצרים תיבה שנפחה 60 יחידות נפח.

94 כדור שמרכזו בנקודה  $O(3, 8, -1)$  חסום בקובייה שבסיסה התחתון

$$\text{מונח על מישור שמשוואתו } 12x + 4y - 3z - 6 = 0.$$

מצא את משוואת המישור עליו מונח הבסיס העליון של הקובייה.

### תשובות סופיות:

91  $\pi_1: 3x - 4y + 5z + 10 = 0$ ,  $\pi_2: 3x - 4y + 5z - 30 = 0$

92  $\pi_3: x - 2y - 2z - 3 = 0$

93  $k = 2, q = -2, p = 18, -12$

94  $12x + 4y - 3z - 136 = 0$

## מרחק בין ישרים מצטלבים:

### סיכום כללי:

מרחק בין ישרים מצטלבים יחושב ע"י כתיבת משוואת מישור של אחד הישרים ומציאת מרחקו מהישר השני.

### שאלות:

95 נתונים שני הישרים הבאים:  $\ell_1 : \underline{x} = (-3, 2, 6) + t(-4, 1, 2)$

$$\text{ו-} \ell_2 : \underline{x} = (0, 2, -7) + s(1, 0, -1)$$

הראה שהישרים מצטלבים ומצא את המרחק שביניהם.

96 נתונים שני הישרים המצטלבים הבאים:  $\ell_1 : \underline{x} = (-1, 0, 5) + t(1, 1, -2)$

$$\text{ו-} \ell_4 : \underline{x} = (2, -1, 9) + s(6, -1, 0)$$

מצא את המרחק שביניהם.

97 מצא את מרחק הישר  $\ell : \underline{x} = (4, -2, -1) + t(-1, 1, 6)$  מציר ה- $z$ .

### תשובות סופיות:

95  $\frac{10}{\sqrt{6}}$  יח"א.

96 1.567 יח"א.

97  $\sqrt{2}$  יח"א.

## שאלות מסכמות בוקטורים:

### שאלות:

- 1 נתונות הנקודות  $A(1,1,3)$ ,  $B(1,2,0)$ ,  $C(1,1,1)$ .
- א. מצא הצגה פרמטרית של הישר המחבר את B עם C.  
הראה כי הנקודה A לא נמצאת על הישר הזה.
- ב. חשב את המרחק בין הנקודה A לבין הישר המחבר את B עם C.
- ג. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה A והמאונך לישר המחבר את B עם C.
- 2 מצא את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים וקבע אם הם נחתכים, מקבילים, מתלכדים או מצטלבים.  
במקרה בו הישרים נחתכים מצא גם את נקודות החיתוך ואת הזווית בין הישרים.  
במקרה בו הישרים מקבילים או מצטלבים מצא גם את המרחק ביניהם.
- א.  $\underline{x} = (1,0,1) + t(1,2,0)$ ,  $\underline{x} = (1,1,0) + s(2,4,0)$
- ב.  $\underline{x} = (-2,2,4) + u(6,6,1)$ ,  $\underline{x} = (1,-1,0) + s(12,-3,1)$
- ג.  $\underline{x} = (1,1,2) + t(1,2,-1)$ ,  $\underline{x} = (2,3,1) + s(2,4,-2)$
- ד.  $\underline{x} = (1,-1,0) + t(0,2,-4)$ ,  $\underline{x} = (2,0,3) + s(-1,-3,1)$
- 3 מצא את המצב ההדדי של המישור והישר וקבע אם הישר חותך את המישור, מקביל למישור או מוכל במישור.  
במקרה שהישר חותך את המישור, מצא גם את נקודת החיתוך וגם את הזווית בין הישר למישור.  
במקרה בו הישר מקביל למישור מצא את מרחק הישר מהמישור.
- א.  $2x - 3y + 4z - 5 = 0$ ,  $\underline{x} = (1,0,2) + t(-1,2,2)$
- ב.  $2x - 5y + 3z - 6 = 0$ ,  $\underline{x} = (-3,0,4) + t(4,-2,-6)$
- ג.  $2x - 14y + 10z = -6$ ,  $\underline{x} = (2,1,-2) + t(-2,2,0)$
- 4 מצא את המצב ההדדי של המישורים וקבע אם הם מקבילים, מתלכדים או נחתכים.  
במקרה בו המישורים מקבילים מצא את המרחק ביניהם.  
במקרה בו הם נחתכים מצא את הזווית ביניהם ואת ישר החיתוך ביניהם.
- א.  $x - 2y + 2z - 10 = 0$ ,  $2x + y + 2z - 4 = 0$
- ב.  $2x - 5y + 3z - 6 = 0$ ,  $4x - 10y + 6z - 8 = 0$
- ג.  $2x - 14y + 10z = -6$ ,  $x - 7y + 5z = -3$

- (5) נתונה קובייה ABCDA'B'C'D' שנפחה הוא 8.  
 משוואת המישור שעליו מונח הבסיס ABCD היא:  $\pi_1 : 4x + y + 3z - 28 = 0$ .  
 משוואת המישור שעליו מונחת הפאה ABB'A' היא:  $\pi_2 : x + 2y - 2z + 6 = 0$ .  
 מצא הצגה פרמטרית של הישר שעליו מונח המקצוע CD (2 אפשרויות).
- (6) הנקודה A(4,0,-1) נמצאת על כדור שמרכזו O(1,1,2).  
 מצא את משוואת המישור המשיק לכדור בנקודה A.
- (7) נתונים מישור וישר:  $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$ ,  $\ell : \underline{x} = (1,5,5) + t(1,1,0)$ .  
 מצא נקודה על חלקו החיובי של ציר ה-z הנמצאת במרחקים שווים מהמישור ומהישר.
- (8) נתונים שני מישורים:  $\pi_1 : 2x - 4y + 4z - 5 = 0$ ,  $\pi_2 : 4x - 2y + 4z - 1 = 0$ .  
 מצא הצגה פרמטרית של ישר, שנמצא במרחק 2 ממישור  $\pi_1$  ובמרחק 6 ממישור  $\pi_2$  (מצא הצגה של ישר אחד מתוך 4 אפשריים).
- (9) נתונים ישר ומישור:  $\pi : 6x + 2y - z + 5 = 0$ ,  $\ell_1 : \underline{x} = (0,-3,0) + t(1,1,-8)$ .  
 ישר נוסף,  $\ell_2$ , המקביל למישור  $\pi$ , עובר בנקודה P(1,0,-4) וחותר את הישר  $\ell_1$  בנקודה Q. מבין הנקודות שבמישור  $\pi$ , הנקודה P' היא הקרובה ביותר לנקודה P והנקודה Q' היא הקרובה ביותר לנקודה Q. מצא את שטח המלבן P'Q'QP. (הדרכה: הבע באמצעות t את וקטור הכיוון של  $\ell_2$ ).
- (10) נתונים שני מישורים:  $\pi_1 : 2x + y + z - 5 = 0$ ,  $\pi_2 : 3x + y + 2z + 11 = 0$ .  
 $\ell_1$  הוא ישר החיתוך בין שני המישורים.  
 המישור  $\pi_3$  מכיל את הישר  $\ell_1$  ויוצר זווית של  $60^\circ$  עם הישר  $\ell_2 : \underline{x} = (1,3,-4) + t(1,1,0)$ .  
 מצא את משוואת המישור  $\pi_3$ .

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $\underline{x} = (1, 2, 0) + t(0, -1, 1)$  ב.  $\sqrt{2}$  ג.  $y - z + 2 = 0$
- (2) א. מקבילים, 1.095 ב. מצטלבים, 4.07 ג. מתלכדים  
 ד. נחתכים בנקודה  $(1, -3, 4)$ , הזווית היא:  $47.6^\circ$
- (3) א. מקביל, 0.9284 ב. מוכל  
 ג. חותך בנקודה  $(3.5, -0.5, -2)$ , הזווית היא:  $40.78^\circ$
- (4) א. נחתכים. ישר חיתוך:  $\underline{x} = (0, -2, 3) + t(3, -1, -2.5)$ , זווית:  $63.6^\circ$ .  
 ב. מקבילים. המרחק: 0.324 ג. מתלכדים.
- (5)  $\ell: \underline{x} = (0, 2.5, 8.5) + t(2, -2.75, -1.75)$ ,  $\ell: \underline{x} = (0, 7, 7) + t(8, -11, -7)$
- (6)  $\pi: -3x + y + 3z + 15 = 0$
- (7)  $(0, 0, 4)$  או  $(0, 0, 14\frac{4}{5})$
- (8)  $\ell: \underline{x} = \left(0, -14, -15\frac{3}{4}\right) + t(-14, 14, 21)$
- (9) 10.467 יח"ש.
- (10)  $\pi_3: x + 2y - z - 58 = 0$  או  $\pi_3: 2x + y + z - 5 = 0$

## שאלות הנפתרות עם מכפלה וקטורית:

### שאלות:

#### מציאת משוואת מישור:

(1) נתונה הצגה פרמטרית של מישור:  $\pi : \underline{x} = t(-2, 2, 1) + s(3, 1, 0)$   
מצא את משוואת המישור.

(2) המישור  $\pi$  עובר בנקודות:  $A(1, 0, -3)$ ,  $B(2, 0, 0)$ ,  $C(4, -1, 0)$   
מצא את משוואת המישור.

(3) נתונים שני ישרים:  $\ell_1 : \underline{x} = (5, -4, 1) + t(0, 2, -1)$ ,  $\ell_2 : \underline{x} = (0, -6, 2) + s(0, -2, 1)$   
הראה שהישרים מקבילים ומצא את משוואת המישור המכיל אותם.

(4) נתונים שני ישרים:  $\ell_1 : \underline{x} = (-1, 1, 3) + t(3, -2, 4)$ ,  $\ell_2 : \underline{x} = (-7, 1, 0) + s(4, -3, 0)$   
הראה שהישרים מצטלבים ומצא את משוואת המישור המכיל את הישר  $\ell_1$   
ומקביל לישר  $\ell_2$ .

(5) מצא משוואת מישור שעובר בנקודה  $A(6, 0, -1)$  ומכיל את ציר ה- $z$ .

#### מצב הדדי בין ישר ומישור:

(6) נתונים הישר והמישור הבאים:  
 $\pi : \underline{x} = (-1, 0, 2) + s(1, 0, -2) + r(3, 0, -1)$ ,  $\ell : \underline{x} = (0, 3, -2) + t(1, -1, 2)$   
קבע את המצב ההדדי שביניהם.  
אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

(7) נתונים שני המישורים הבאים:  $\pi_1 : x - 3y + 2z - 1 = 0$ ,  $\pi_2 : 4x + y - z - 6 = 0$   
מצא הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

## מצב הדדי בין מישורים:

(8) במקבילון ABCDA'B'C'D' נתונים שלוש הקודקודים הבאים:

$$A(1, -1, 4), B(9, 0, 2), C(5, 2, -2)$$

מצא את משוואת המישור עליו מונחת הפאה A'B'C'D' אם ידוע שהנקודה  $(2, -1, 0)$  נמצאת עליו.

## מציאת ישר חיתוך בין שני מישורים:

(9) המישורים  $\pi_1$  ו- $\pi_2$  מאונכים זה לזה.

הישר  $\ell: \underline{x} = (4, 1, -1) + t(2, -1, 1)$  הוא ישר החיתוך שבין המישורים.

מצא את משוואות המישורים אם ידוע שהמישור  $\pi_1$  עובר בראשית.

(10) נתונים ישר ומישור:  $\pi: 4x - 2y - 3z - 6 = 0$ ,  $\ell: \underline{x} = (-2, 0, 5) + t(3, 1, -1)$ .

מצא הצגה פרמטרית של הישר שהוא היטלו של הישר  $\ell$  על המישור.

## חישובי מרחקים שונים:

(11) חשב את נפחה של פירמידה משולשת SABC שקודקודה הם:

$$A(1, 6, -1), B(2, -1, 0), C(6, -4, 0), S(11, -2, 4)$$

(12) בפירמידה משולשת SABC המקצועות SA, SB ו-SC מאונכים זה לזה.

$$\text{נתון: } SA = 6, SB = 8, SC = 12.$$

חשב את אורכו של גובה הפירמידה היורד מהקודקוד S לבסיס ABC.

(13) נתונים שני הישרים הבאים:  $\ell_1: \underline{x} = (-3, 2, 6) + t(-4, 1, 2)$

$$\text{ו- } \ell_2: \underline{x} = (0, 2, -7) + s(1, 0, -1)$$

הראה שהישרים מצטלבים ומצא את המרחק שביניהם.

(14) נתונים שני הישרים המצטלבים הבאים:  $\ell_1: \underline{x} = (-1, 0, 5) + t(1, 1, -2)$

$$\text{ו- } \ell_4: \underline{x} = (2, -1, 9) + s(6, -1, 0)$$

מצא את המרחק שביניהם.

(15) מצא את מרחק הישר  $\ell: \underline{x} = (4, -2, -1) + t(-1, 1, 6)$  מציר ה- $z$ .

## שאלות שונות:

(16) נתונים שני ישרים:  $\ell_1 : \underline{x} = (-2, 1, 5) + t(5, -4, 2)$ ,  $\ell_2 : \underline{x} = (-7, 3, -1) + s(-5, 4, -2)$ .

א. מצא את המצב ההדדי שבין הישרים.

ב. המישור  $\pi_1$  מכיל את שני הישרים והמישור  $\pi_2$  נמצא בין שני הישרים

במרחק שווה מכל אחד מהם, מקביל לשני הישרים ומאונך למישור  $\pi_1$ .

מצא את משוואות המישורים  $\pi_1$  ו- $\pi_2$ .

(17) נתונים שני מישורים:  $\pi_1 : 2x - y + 4z - 8 = 0$ ,  $\pi_2 : x - y + 2z - 4 = 0$ .

המישור  $\pi_3$  מכיל את ישר החיתוך של שני המישורים וחותך את ציר ה- $y$

בנקודה A כך שמתקיים  $OA = m$  (O ראשית הצירים).

הזווית שבין המישור  $\pi_2$  למישור  $\pi_3$  היא  $\alpha$  ונתון כי:  $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ .

מצא את הערכים האפשריים של הפרמטר  $m$ .

(18) נתונות שלוש נקודות:  $A(3, -1, 1)$ ,  $B(2, -1, 0)$ ,  $O(3, 1, 0)$ .

הנקודות A ו-B נמצאות על היקפו של מעגל שהנקודה O היא מרכזו.

מצא הצגה פרמטרית של הישר המשיק למעגל בנקודה A

(הישר נמצא במישור המעגל).

## תשובות סופיות:

(1)  $\pi: x - 3y + 8z = 0$

(2)  $\pi: 3x + 6y - z - 6 = 0$

(3)  $\pi: y + 2z + 2 = 0$

(4)  $\pi: 12x + 16y - z - 1 = 0$

(5)  $\pi: y = 0$

(6) נחתכים בנקודה:  $(3, 0, 4)$

(7)  $l: \underline{x} = t(1, 9, 13)$

(8)  $\pi_{ABCD}: 2y + z + 2 = 0$

(9)  $\pi_1: y + z = 0$ ,  $\pi_2: x + y - z - 6 = 0$

(10)  $l: \underline{x} = (-5, -13, 0) + t(7, 11, 2)$

(11) יח"נ. 20.5

(12) יח"א. 4.46

(13) יח"א.  $\frac{4}{\sqrt{6}}$

(14) יח"א. 1.567

(15) יח"א.  $\sqrt{2}$

(16) א. הישרים מקבילים. ב.  $\pi_2: y + 2z - 6 = 0$ ,  $\pi_1: 2x + 2y - z + 7 = 0$

(17)  $m = -\frac{4}{7}$  או  $m = 4$

(18)  $l: \underline{x} = (3, -1, 1) + k(-5, -2, -4)$

# מתמטיקה

פרק 31 - אלגברה ליניארית - פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות

תוכן העניינים

1. פתרון מערכת משוואות ליניאריות ..... 504
2. חקירת מערכת משוואות ליניאריות (עם פרמטר) ..... 509
3. פתרון וחקירת מערכת הומוגנית של משוואות ליניאריות ..... 512
4. שימושים של מערכת משוואות ליניאריות ..... 515

## פתרון מערכת משוואות לינאריות

## שאלות

(1) מצאו אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות:

$$\begin{array}{llll} 2x+y=4 & x-y=0 & x-4y=-7 & x+10y=11 \\ x+y=3 & 2x+y=3 & x-y=-1 & 2x-2y=0 \end{array} \begin{array}{l} \text{ד.} \\ \text{ג.} \\ \text{ב.} \\ \text{א.} \end{array}$$

(2) רשמו את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{llll} x=3 & 2x+y+z=3 & x-4y+z=-7 & x+10y=11 \\ 2x+y=4 & x-z=0 & x-y=-1 & 2x-2=0 \\ z+t=8 & & x+y+z=5 & x+y=3 \end{array} \begin{array}{l} \text{ד.} \\ \text{ג.} \\ \text{ב.} \\ \text{א.} \end{array}$$

בשאלות 3-5 בצעו על כל מטריצה את הפעולות הרשומות מתחתיה, בזו אחר זו, ומצאו את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

$$\begin{array}{lll} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} & \text{(5)} & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{(4)} & \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \text{(3)} \\ R_1 \rightarrow R_1 + 3R_3, R_2 \rightarrow R_2 + 3R_3 & R_2 \rightarrow 4R_2, R_2 \rightarrow R_2 + R_1 & R_1 \leftrightarrow R_2, R_1 \rightarrow 2R_1 \\ R_1 \rightarrow 5R_1 - 8R_2 & R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2 & R_3 \rightarrow R_3 + R_1, R_1 \leftrightarrow R_3 \end{array}$$

(6) מצאו איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל,

כדי לקבל את המטריצה מימין:

$$\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{א.} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ב.} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ג.} \end{array}$$

בשאלות 7-15 הביאו את המטריצות הבאות לצורה מדורגת  
(בשאלות 7, 9, 11 ו-13 – גם לצורה מדורגת קנונית):

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (8) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (10) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (12) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad (14) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 2+i & 1+3i \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$F=\mathbb{C}, F=\mathbb{R}$$

\* בשאלה 15 יש לדרג את המטריצה פעם מעל השדה  $\mathbb{C}$  ופעם מעל השדה  $\mathbb{R}$ .

בשאלות 16-27 פתרו את מערכות המשוואות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דירוג):

$$\begin{aligned} 4x + 8y &= 20 \\ 3x + 6y &= 15 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 5x - 4y &= -3 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 10x_1 - 6x_2 - 2x_3 &= 32 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} 8x - 4y &= 10 \\ -6x + 3y &= 1 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 3 \\ 4x + 6y + 16z &= 8 \\ 3x + 2y + 17z &= 1 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= -11 \\ 2x + 3y - z &= -5 \\ 3x + y - z &= 2 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} 4x - 7y &= 0 \\ 8x - 14y &= 2 \\ -16x + 28y &= 4 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} x + 3y &= 2 \\ 2x + y &= -1 \\ x - y &= -2 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z + 2t &= 2 \\ 2x + 5y - 8z + 6t &= 5 \\ 6x + 8y - 10z + 4t &= 8 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ -9x + 6y &= -3 \\ 6x - 4y &= 2 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 2 \\ 3x - 2y - z &= 5 \\ 2x - 5y + 3z &= -4 \\ 2x + 8y + 12z &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 13x_4 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

28) פתרו את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס, מעל השדה  $\mathbf{F}$ :

$$z_1 + iz_2 + (1-i)z_3 = 1 + 4i$$

$$iz_1 + z_2 + (1+i)z_3 = 2 + i$$

$$(-1+3i)z_1 + (3-i)z_2 + (2+4i)z_3 = 5 - i$$

א.  $\mathbf{F} = \mathbb{R}$

ב.  $\mathbf{F} = \mathbb{C}$

## תשובות סופיות

1) א ו-ג שקולות, ו-ב ו-ד שקולות.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ג.} \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ ב.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ א.} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \text{ ד.}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} (5) \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} (4) \quad \begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix} (3)$$

6) א.  $R_1 \rightarrow 2R_1 + R_2$  ב.  $R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1$  ג.  $R_2 \rightarrow 2R_2 + 4R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ ג.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ ב.} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (8)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \text{ ג.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ ב.} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (10)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ג.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ב.} \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (12)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$F=\mathbb{R}$                        $F=\mathbb{C}$

$$\phi \quad (18) \quad (x, y) = (5 - 2t, t) \quad (17) \quad (x, y) = (1, 2) \quad (16)$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, -3, -2) \quad (20) \quad \phi \quad (19)$$

$$(x, y) = (-1, 1) \quad (22) \quad (x, y, z) = (-1 - 7t, 2 + 2t, t) \quad (21)$$

$$(x, y) = \left( \frac{1+2t}{3}, t \right) \quad (24) \quad \phi \quad (23)$$

$$\phi \quad (26) \quad (x, y, z, t) = (-a + 2b, 1 + 2a - 2b, a, b) \quad (25)$$

$$(x, y, z) = (2, 1, -1) \quad (27)$$

$$(z_1, z_2, z_3) = ((-1+i)t + 1 + i, 3, t) \cdot \beta \quad (28) \quad (z_1, z_2, z_3) = (2, 3, -1) \cdot \alpha \quad (28)$$

$F=\mathbb{C}$                        $F=\mathbb{R}$

## חקירת מערכת משוואות לינאריות (עם פרמטר)

### שאלות

בשאלות 1-6 מצאו לאילו ערכי  $k$  (אם יש כאלה) יש למערכות:  
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{l} x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \quad (2) \\ kx + y + z = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x - y + z = 1 \\ 5x - 7y + (k^2 + 3)z = k^2 + 1 \quad (1) \\ 3x - y + (k + 3)z = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \quad (4) \\ 5x + (1 - k)y + k^2z = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x + 2ky + z = 0 \\ 3x + y + kz = 2 \quad (3) \\ x + 9ky + 5z = -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + ky + 3z = 2 \\ kx - y + z = 4 \quad (6) \\ 3x + y + (2 + k)z = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} kx - y = 1 \\ (k - 2)x + ky = -2 \quad (5) \\ (k^2 - 1)z = 9 \end{array}$$

בשאלות 7-9 מצאו לאילו ערכי  $k$  (אם יש כאלה) יש למערכות:  
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{l} 2x - 3y + z = 1 \\ 4x + (k^2 - 5k)y + 2z = k \quad (8) \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x + ky = 3 \\ (k + 3)x + 2y = k^2 + 5 \quad (7) \\ 6x + 3ky = 7k^2 + 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x + 4y - z = 2 \\ kx - 2y + z = -1 \\ x + 8y - 3z = k \\ 2x + 6y - 2z = 0.5k + 1 \end{array} \quad (9)$$

בשאלות 10-12 מצאו לאילו ערכים של  $a$  ושל  $b$  (אם יש כאלה) יש למערכות:  
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{l} x + y - z + t = 1 \\ ax + y + z + t = b \quad (12) \\ 3x + 2y + at = 1 + a \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x + 4y + az = -1 \\ x + 2y + 4z = -4 \\ x + 2y - 4z = 0 \\ x + 2y + 6z = -2b \end{array} \quad \begin{array}{l} x + 2y - 4z = b \\ 7x - 10y + 16z = 7 \quad (10) \\ 2x - ay + 3z = 1 \end{array} \quad (11)$$

$$x + az = 1$$

$$y + 2z = 2 \quad (13) \text{ נתונה מערכת המשוואות:}$$

$$bx + cy + dz = 3$$

- א. מצאו תנאי עבור  $a, b, c, d$ , כך שלמערכת יהיה פתרון יחיד.  
 ב. מצאו תנאי עבור  $b, c, d$ , כך שלכל  $a$ , למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

$$(14) \text{ נתונה המערכת: } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 7y + (k^2 + 1)z = k^2 - 1 \\ 4x - 6y + (k + 2)z = 4 \end{cases}$$

- א. רשמו את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות.  
 ב. רשמו את הצורה המדורגת של המטריצה מסעיף א.  
 ג. מצאו לאילו ערכי  $k$  יש למערכת:  
 1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.  
 ד. רשמו את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.  
 ה. מצאו לאילו ערכי  $k$  יש למערכת פתרון שבו  $z = 0$ .  
 ו. מצאו לאילו ערכי  $k$  יש למערכת פתרון יחיד שבו  $z = 0$ .  
 ז. מצאו עבור איזה ערך של  $k$  פתרון של המשוואה השלישית הוא  $(1, 2, 3)$ .  
 האם ייתכן שהפתרון הנ"ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבירו.  
 ח. מצאו לאיזה ערך של  $k$ , הוא הפתרון היחיד של המערכת.

$$(15) \text{ נתונות המשוואות של 3 מישורים: } \begin{cases} 3x + my = 3 \\ mx + 2y - mz = 1 \\ -x + mz = -1 \end{cases}$$

- בסעיפים א-ג מצאו עבור אילו ערכים של  $m$  שלוש המישורים:  
 א. נפגשים בנקודה אחת (מצא נקודה זו).  
 ב. לא נפגשים באף נקודה.  
 ג. בעלי אינסוף נקודות משותפות (מצא נקודות אילו).  
 ד. האם קיים ערך של  $m$  עבורו 3 המישורים מתלכדים או מקבילים?

## תשובות סופיות

$$(1) \quad 1. \ k \neq 1, k \neq -2 \quad 2. \ k = 1 \quad 3. \ k = -2$$

$$(2) \quad 1. \ k \neq 1, k \neq -2 \quad 2. \ k = -2 \quad 3. \ k = 1$$

$$(3) \quad 1. \ k \neq -1, k \neq \frac{4}{7} \quad 2. \ k = \frac{4}{7} \quad 3. \ k = -1$$

$$(4) \quad 1. \ k \neq 1, k \neq -0.4 \quad 2. \ k = 1, k = -0.4$$

$$(5) \quad 1. \ k \neq \pm 1, k \neq -2 \quad 2. \ k = \pm 1, k = -2$$

$$(6) \quad 1. \ k \neq -1, k \neq -3, k \neq 2 \quad 2. \ k = -1, k = -3, k = 2$$

$$(7) \quad 1. \ k = -1 \quad 2. \ k \neq \pm 1 \quad 3. \ k = 1$$

$$(8) \quad 1. \ k = 3 \quad 2. \ k = 3 \quad 3. \ k \neq 3$$

$$(9) \quad 1. \ k \neq 1 \quad 2. \ k = 1$$

$$(10) \quad 1. \ a \neq 2 \quad 2. \ a = 2, b \neq -3 \quad 3. \ a = 2, b = -3$$

$$(11) \quad 1. \ a \neq -6 \text{ או } b \neq 2.5 \quad 2. \ a = -6, b = 2.5$$

$$(12) \quad 1. \ a = 2, b \neq 2 \quad 2. \ a \neq 2 \text{ או } a = 2, b = 2$$

$$(13) \quad 1. \ ab + 2c \neq d \quad 2. \ b = 0, c = 1.5, d = 3$$

$$(14) \quad 1. \ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & k^2 + 4 & k^2 - 4 \\ 0 & 0 & -k^2 + k + 2 & 4 - k^2 \end{pmatrix} \quad 2. \ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & k^2 + 1 & k^2 - 1 \\ 4 & -6 & k + 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(15) \quad 1. \ k \neq 2, k \neq -1 \quad 2. \ k = -1 \quad 3. \ k = 2 \quad 4. \ (x, y, z) = (1 + 0.2t, 0.8t, t)$$

$$5. \ k = \pm 2 \quad 6. \ k = -2 \quad 7. \ k = 2, \text{ לא} \quad 8. \ k = -2$$

$$(15) \quad 1. \ m \neq 0, -2, 3 \quad 2. \ m = -2, 3 \quad 3. \ m = 0 \quad 4. \ \text{לא}$$

## פתרון וחקירת מערכת הומוגנית של משוואות לינאריות

### שאלות

$$(1) \quad \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + 2z = 6 \\ 4x - 2y + 5z = 12 \end{cases} \quad \text{פתרו את המערכת}$$

על סמך הפתרון, קבעו את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה.

$$(2) \quad \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + 2z = 6 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \quad \text{פתרו את המערכת}$$

על סמך הפתרון, קבעו את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה.

$$(3) \quad \begin{cases} x - y = 1 \\ -x + 2y - z = k \\ 2x + my + z = 3 \end{cases} \quad \text{נתונה המערכת:}$$

- א. מצאו את ערכי  $m$ , עבורם למערכת ההומוגנית המתאימה אינסוף פתרונות.  
 ב. עבור ערך  $m$  שנמצא ב-א, מצאו את ערכי  $k$ , עבורם למערכת פתרון.  
 ג. עבור ערכי  $m, k$  שנמצאו בסעיפים הקודמים, מצאו את הפתרון הכללי של המערכת הנתונה, וקבעו את הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

(4) נתון שהחמישייה  $(4t - 2s + 4, -t + s, 2, t, s)$  מהווה פתרון כללי של מערכת ליניארית נתונה. קבעו אילו מבין הטענות הבאות נכונות:

- א. המערכת הנתונה היא מערכת הומוגנית.  
 ב. החמישייה  $(4, 0, 2, 0, 0)$ , היא פתרון פרטי של המערכת הנתונה.  
 ג. החמישייה  $(4, 0, 2, 1, 1)$ , היא פתרון של המערכת הנתונה.  
 ד. לכל  $a$  ממשי, החמישייה  $(4a, 0, 2a, 0, 0)$  אינה פתרון של המערכת הנתונה.  
 ה. החמישייה  $(4t - 2s, -t + s, 0, t, s)$ , היא פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.  
 ו. החמישייה  $(0, 1, 0, 1, 2)$ , היא פתרון פרטי של המערכת ההומוגנית המתאימה.  
 ז. במערכת הנתונה, מספר המשוואות לאחר דירוג הוא 2.

$$(5) \quad \begin{cases} 3x + my = 0 \\ mx + 2y - mz = 0 \\ -x + mz = 0 \end{cases}$$

נתונה המערכת ההומוגנית

- יהי  $W$  אוסף הפתרונות של המערכת.  
 עבור אילו ערכים של הקבוע  $m$  (אם בכלל)  $W$  הוא:  
 א. נקודה (מצאו נקודה זו).  
 ב. ישר (מצאו ישר זה).  
 ג. מישור (מצאו מישור זה).

$$(6) \quad \text{נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & a & b & c \\ 4 & d & e & f \\ -3 & g & h & i \end{pmatrix}$$

- נסמן ב- $A'$  את הצורה המדורגת של  $A$ .  
 ידוע כי בממ"ל ההומוגנית המתאימה יש יותר משתנים חופשיים ממשתנים תלויים.  
 מצאו את  $A$ .

## תשובות סופיות

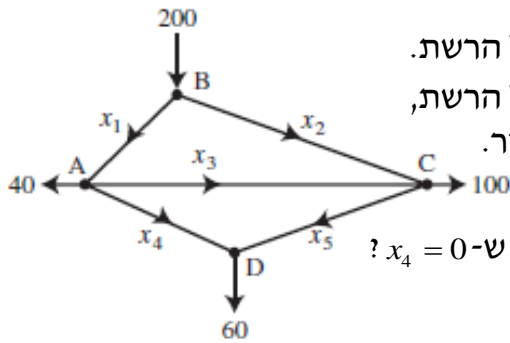
- (1) פתרון כללי של המערכת  $(4 - \frac{3}{2}t, -\frac{1}{2}t + 2, t)$ .
- פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא  $(-\frac{3}{2}t, -\frac{1}{2}t, t)$ .
- (2) למערכת פתרון יחיד  $(x, y, z) = (1, 1, 2)$ .
- למערכת ההומוגנית המתאימה פתרון יחיד  $(0, 0, 0)$ .
- (3) א.  $m = -3$  ב.  $k = -2$  ג. פתרון כללי של המערכת  $(x, y, z) = (t, t - 1, t)$ .
- פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא  $(t, t, t)$ .
- (4) א. הטענה לא נכונה. ב. הטענה נכונה. ג. הטענה לא נכונה. ד. הטענה לא נכונה. ה. הטענה נכונה. ו. הטענה לא נכונה. ז. הטענה לא נכונה.
- (5) א.  $m \neq 0, -2, 3$ . הנקודה היא  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ .
- ב. אם  $m = 0$  נקבל ישר  $\underline{x} = t(0, 0, 1)$  אם  $m = 2$  נקבל ישר  $\underline{x} = t(2, -1, 1)$ ,
- אם  $m = 3$  נקבל ישר  $\underline{x} = t(3, -3, 1)$ .
- ג. אין ערכים של  $m$  עבורם נקבל מישור.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \\ -3 & -6 & -9 & -12 \end{pmatrix} \quad (6)$$

## שימושים של מערכת משוואות לינאריות

## שאלות

1) באיור שלהלן רשת זרימה המתארת את זרם התנועה (במכוניות לדקה) של מספר רחובות בתל אביב.

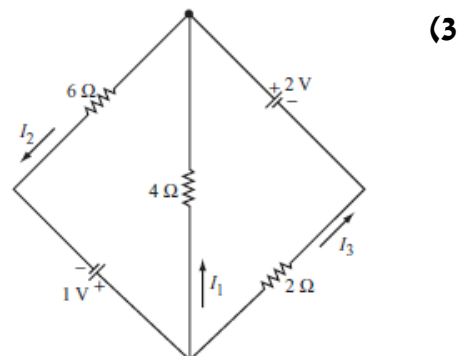
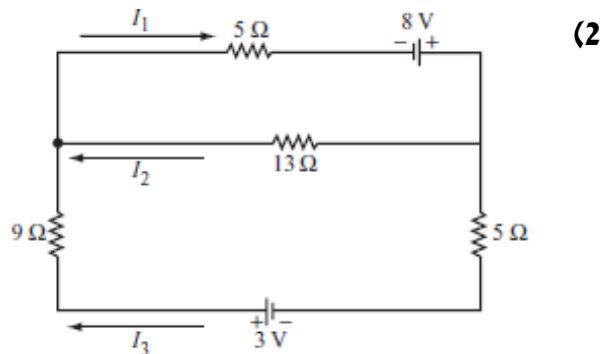


א. מצאו את תבנית הזרימה הכללית של הרשת.

ב. מצאו את תבנית הזרימה הכללית של הרשת, אם ידוע שהכביש שהזרם שלו  $x_4$  סגור.

ג. מהו הערך המינימלי של  $x_1$ , אם ידוע ש- $x_4 = 0$ ?

בשאלות 2-3 מצאו את הזרמים במעגלים החשמליים (חוקי קירכהוף וחוק אוהם):



\* בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות בנוגע מערכת משוואות לינאריות.

## תשובות סופיות

(1) א.  $x_3$  ו-  $x_5$  חופשיים.  $x_1 = 100 + x_3 - x_5$ ,  $x_2 = 100 - x_3 + x_5$ ,  $x_4 = 60 - x_5$ .

ב. חופשי.  $x_3$ .  $x_1 = 40 + x_3$ ,  $x_2 = 160 - x_3$ ,  $x_4 = 0$ ,  $x_5 = 60$ . ג. 40.

(2) א.  $I_1 = \frac{255}{317}$ ,  $I_2 = \frac{97}{317}$ ,  $I_3 = \frac{158}{317}$

(3)  $I_1 = -\frac{5}{22}$ ,  $I_2 = \frac{7}{22}$ ,  $I_3 = \frac{6}{11}$

# מתמטיקה

פרק 32 - אלגברה ליניארית - מטריצות

תוכן העניינים

517	1. מטריצות
522	2. מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות
523	3. המטריצה ההופכית
530	4. דרגה של מטריצה
534	5. בחזרה למערכת משוואות ליניארית

## מטריצות

### שאלות

1 נתונות המטריצות הבאות:  $A_{4 \times 6}$ ,  $B_{4 \times 6}$ ,  $C_{6 \times 2}$ ,  $D_{4 \times 2}$ ,  $E_{6 \times 4}$ .  
 קבעו אילו מבין המטריצות הבאות מוגדרות.  
 במידה והמטריצה מוגדרת, רשמו את סדר המטריצה:

- א.  $A+B$     ב.  $AB$     ג.  $AC-D$     ד.  $AE-B$
- ה.  $B+AB$     ו.  $E(B+A)$     ז.  $(E+A^T)D$     ח.  $E^T B$
- ט.  $E(AC)$     י.  $E(B-A)$

2 מצאו את  $x, y, z$ , אם ידוע כי:

$$\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$$

בשאלות 3-8 נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשבו (במידה וניתן):

3 א.  $E+D$     ב.  $E-D+I_3$

ג.  $5C$     ד.  $2D+4EI_3$

4  $2tr(D^2 - 2E)$

5 א.  $4C^T + A$     ב.  $\frac{1}{2}A^T + \frac{1}{4}C$

6  $I_2 BC$

7  $tr(C^T C)$

8  $DABC$

9 נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר  $n$ .

$$\text{נתון כי } (A-I)(A+I) = 0.$$

הוכיחו או הפריכו:  $A = I$  או  $A = -I$ .

10 אפיינו את כל המטריצות  $A_{2 \times 2}$  שמקימות  $A^2 = -4I$ .

$$11 \text{ הוכיחו כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 1-2^n & 1 \end{pmatrix}$$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שנדרש לדעת הוכחות באינדוקציה.

12 שתי מטריצות  $A$  ו- $B$  יקראו מתחלפות אם  $AB = BA$ .

הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

א. אם המטריצות  $A$  ו- $B$  מתחלפות עם המטריצה  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , אז המטריצות

$A$  ו- $B$  מתחלפות.

ב. אם המטריצה  $A$  מתחלפת עם המטריצה  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , אז  $A^T = -A$ .

13 תהי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר  $n$ .

נתון כי  $AA^T = 0$ . הוכיחו כי  $A = 0$ .

האם הטענה נשארת נכונה אם איברי  $A$  מרוכבים?

אם כן, הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

14 יהיו  $A$  ו- $B$  מטריצות ריבועיות המקיימות  $AB = BA$  (מטריצות מתחלפות).

א. הוכיחו כי לכל  $k$  טבעי מתקיים  $AB^k = B^k A$ .

ב. הוכיחו כי לכל  $k$  טבעי מתקיים  $(AB)^k = A^k B^k$ .

$$15 \text{ לפי נוסחת הבינום של ניוטון } (A+B)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k, \text{ כאשר}$$

$$A, B \in \mathbb{R}, n, k \in \mathbb{N}$$

א. האם נוסחת הבינום נשארת נכונה גם אם  $A$  ו- $B$  מטריצות ריבועיות

מסדר  $\ell$ ?

ב. מצאו תנאי מספיק על המטריצות  $A$  ו- $B$ , על מנת שנוסחת הבינום

תהיה נכונה עבורן.

ג. מצאו את הפיתוח של  $(A+I)^n$  ו- $(A-I)^n$ , כאשר  $A$  ו- $I$  ריבועיות מסדר

$\ell$ .

- 16** א. הגדירו והדגימו את המונח מטריצה נילפוטנטית.  
 ב. נניח ש- $A$  ו- $B$  מטריצות מתחלפות ונילפוטנטיות.  
 הוכיחו שגם המטריצות  $AB$  ו- $A+B$  נילפוטנטיות.

**17** תהי  $A_{n \times n}$  מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי:  $a_{ij} = \min\{i, j\}$ .  
 תהי  $B_{n \times n}$  מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי:  $b_{ij} = \begin{cases} 1 & i + j = n + 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ .

- א. כתבו את המטריצות  $A$  ו- $B$  בצורה מפורשת.  
 ב. המטריצה  $C$  מקיימת  $C = A \cdot B$ .  
 חשבו את  $C$  ומצאו נוסחה עבור  $c_{ij}$  לכל  $1 \leq i, j \leq n$ .

**18** מצאו מטריצה ממשית  $A$ , כך שיתקיים  $A - \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A \right)^T = A - A^T$ .

## תשובות סופיות

(1) א.  $4 \times 6$     ב. לא.    ג.  $4 \times 2$     ד. לא.    ה. לא. ו.  $6 \times 6$

ז.  $6 \times 2$     ח. לא

(2)  $(x, y, z) = (2, 1, -1)$

(3) א.  $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$     ב.  $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$     ג.  $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}$

ד.  $\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

(4) 230

(5) א.  $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$     ב.  $\begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}$

(6)  $\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}$

(7) 63

(8)  $\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}$

(9) שאלת הוכחה.

(10)  $A = \begin{pmatrix} a & -\frac{a^2+4}{c} \\ c & -a \end{pmatrix}$

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) א+ב. שאלת הוכחה.

$$(A+I)^n = \binom{n}{0} A^n + \binom{n}{1} A^{n-1} + \binom{n}{2} A^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} A^1 + \binom{n}{n} I$$

$$(A-I)^n = \binom{n}{0} A^n - \binom{n}{1} A^{n-1} + \binom{n}{2} A^{n-2} - \dots + (-1)^{n+1} \binom{n}{n-1} A^1 + (-1)^n \binom{n}{n} I$$

(16) שאלת הוכחה.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & \dots & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{א. (17)}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \dots & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & \dots & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & \dots & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & \dots & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & \dots & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } c_{ij} = \min\{i, n+1-j\}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(18)}$$

## מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות

### שאלות

מטריצה ריבועית  $A$  תיקרא סימטרית אם  $A^T = A$ , ואנטי-סימטרית אם  $A^T = -A$ .

(1) ידוע ש- $A$  מטריצה ריבועית.  
מי מבין הבאים נכון (אחד או יותר):

1.  $AA^T$  סימטרית.
2.  $A + A^T$  סימטרית.
3.  $A - A^T$  אנטי-סימטרית.

(2) ידוע ש- $A$  ו- $B$  אנטי-סימטריות מאותו סדר.  
מי מבין הבאים נכון:

1.  $BABABA$  אנטי-סימטרית.
2.  $A^2 - B^2$  סימטרית.
3.  $A^2 + B$  סימטרית.

(3) ידוע ש- $A$  ו- $B$  סימטריות מאותו סדר ונתון כי  $AB = -BA$ .  
מי מבין הבאים נכון:

1.  $AB^3$  אנטי-סימטרית.
2.  $AB^2$  סימטרית.
3.  $(A - B)^2$  סימטרית.

(4) ידוע ש- $A$  סימטרית ו- $B$  אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי  $AB = BA$ .  
הוכיחו:

1.  $AB$  אנטי-סימטרית.
2.  $AB + B$  אנטי-סימטרית.

(5) נתון:  $A, B, AB$  סימטריות מאותו סדר.  
הוכיחו כי  $A^4 B^4 = B^4 A^4$ .

### תשובות סופיות

- (1) 1,2,3
- (2) 2
- (3) 1,2,3
- (4) שאלת הוכחה.
- (5) שאלת הוכחה.

## המטריצה ההופכית

### שאלות

בשאלות 1-9 מצאו את ההפוכה של כל מטריצה. בדקו את התשובות על ידי כפל מטריצות מתאים.

$$\begin{array}{lll} \begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \text{(3)} & \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} & \text{(2)} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(1)} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(6)} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \text{(5)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \text{(4)} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} & \text{(9)} & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} & \text{(8)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(7)} \end{array}$$

(10) עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$  המטריצה  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 \\ 3 & -1 & k+3 \end{pmatrix}$  הפיכה?

(11) עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$  המטריצה  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  איננה הפיכה?

הניחו שהמטריצות בשאלות 12-14 הן הפיכות מסדר  $n$ , וחלצו את  $X$ :

(12) א.  $AXC = D$  ב.  $A^{-1}XC = A^{-1}DC$  ג.  $P^{-1}X^T P = A$

(13) א.  $C^{-1}(A+X)D^{-2} = I$  ב.  $(A-AX)^{-1} = X^{-1}C$

(14)  $ABC^T X^{-1} BA^T C = AB^T$

(15) נתון  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ .

חשבו את  $X$ , אם ידוע כי  $B^2 X (2B)^{-1} = B + I$ .

$$(16) \text{ נתון } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ , חשבו את } Y \text{ , אם ידוע כי } BYB^T = B^{-1} + B$$

$$(17) \text{ נתון } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{חשבו את } B \text{ , אם נתון בנוסף כי : } 5A^T B(I+2A)^{-2} = (7A)^{-2}$$

(18) ענו על הסעיפים הבאים :

א. נתון :  $A$  מטריצה ריבועית המקיימת  $A^2 - 5A - 2I = 0$

הוכיחו כי  $A$  הפיכה ובטאו את  $A^{-1}$  במונחי  $A$  ו- $I$ .

ב. נתון :  $A$  מטריצה ריבועית המקיימת  $(A-3I)(A+2I) = 0$

הוכיחו כי  $A$  הפיכה ובטאו את  $A^{-1}$  במונחי  $A$  ו- $I$ .

$$(19) \text{ נתון כי } p(x) = x^3 - 4x^2 - 20x + 48 \text{ , } A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

א. חשבו את  $p(A)$ .

ב. בעזרת תוצאת סעיף א (ולא בדרך אחרת), הוכיחו ש- $A$  הפיכה, ובטאו את  $A^{-1}$  בעזרת  $A$  ו- $I$  בלבד.

(20) נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית המקיימת  $A^4 = 0$

א. הוכיחו כי  $A$  לא הפיכה.

ב. הוכיחו כי המטריצה  $I - A$  הפיכה, ומצאו את ההופכית שלה.

$$(21) \text{ נתון כי } \begin{cases} P^{-1}AP = B \\ Q^{-1}BQ = C \end{cases}$$

הוכיחו כי קיימת מטריצה הפיכה  $D$ , כך ש- $D^{-1}AD = C$

\* הניחו שכל המטריצות הנתונות ריבועיות, מאותו סדר והפיכות.

\*\* לסטודנטים המכירים את המושג **דמיון מטריצות**, ניתן לנסח את השאלה כך :

הוכיחו : אם  $A$  דומה ל- $B$  ו- $B$  דומה ל- $C$ , אז  $A$  דומה ל- $C$ .

(כלומר יחס הדמיון הוא יחס טרנזיטיבי)

**הערה :** בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

**(22)** תהיינה  $A, B$  מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר  $n \geq 2$ . הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- א.  $AB = BA$ .  
 ב. אם  $A^2 - AB = I_n$ , אז בהכרח  $B$  הפיכה.  
 ג. אם  $A^2 - AB = I_n$ , אז בהכרח  $A$  הפיכה.  
 ד. אם  $(AB)^{100} = I$ , אז בהכרח  $(BA)^{100} = I$ .  
 ה. אם  $(AB)^{100} = 0$ , אז בהכרח  $(BA)^{101} = 0$ .

**(23)** תהיינה  $A, B$  מטריצות מסדר  $n \times n$ , עבורן  $A^2 + AB = I$ .

- א. הוכיחו ש- $AB = BA$ .  
 ב. אם נתון בנוסף ש- $B^2 + BA$  היא מטריצת האפס, הוכיחו שגם  $B$  היא מטריצת האפס.

**(24)** תהיינה  $A, B$  מטריצות כלשהן.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

- א. אם  $AB = I$  אז  $B = A^{-1}$ .  
 ב. אם המכפלה  $AB$  היא מטריצה ריבועית, אזי  $A, B$  מטריצות ריבועיות.  
 ג. אם המכפלה  $AB$  היא מטריצה הפיכה, אזי  $A, B$  מטריצות ריבועיות.  
 ד. המכפלה  $AB$  לא הפיכה.  
 ה. אם  $A$  מטריצה ריבועית והמכפלה  $AB$  מוגדרת, אזי  $B$  מטריצה ריבועית.

**(25)** מטריצה ריבועית  $A$  תיקרא אידמפוטנטית אם  $A^2 = A$ . הוכיחו:

- א. למעט המקרה בו  $A = I$ , מטריצה אידמפוטנטית היא לא הפיכה.  
 ב. אם נחסר מטריצה אידמפוטנטית ממטריצת היחידה נקבל מטריצה אידמפוטנטית.  
 ג. אם  $A$  מטריצה אידמפוטנטית ריבועית מסדר 2, אז  $\text{tr}(A) = 1$  או ש- $A$  מטריצה אלכסונית.  
 ד.  $A$  אידמפוטנטית  $\Leftrightarrow A^n = A$ , לכל  $n$  טבעי.

$$(26) \text{ נתונה } M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

מצאו תנאי על הקבועים  $a, b, c, d$  כך ש- $M$  תהיה הפיכה ומצאו את  $M^{-1}$  במקרה זה.

$$(27) \text{ נתון כי } A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \text{ הפיכה.}$$

לגבי כל אחת מהמערכות הבאות קבע את מספר הפתרונות של המערכת.

$$\alpha_{11}x + \alpha_{12}y = \alpha_{13}$$

$$\alpha_{21}x + \alpha_{22}y = \alpha_{23} \quad \text{א.}$$

$$\alpha_{31}x + \alpha_{32}y = \alpha_{33}$$

$$\alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + w = 0$$

$$\alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z - 4w = 1 \quad \text{ב.}$$

$$\alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + 3w = -4$$

$$\alpha_{11}x + \alpha_{21}y + \alpha_{31}z = 3$$

$$\alpha_{12}x + \alpha_{22}y + \alpha_{32}z = 1 \quad \text{ג.}$$

$$\alpha_{13}x + \alpha_{23}y + \alpha_{33}z = 1$$

(28) תהינה  $A, B$  מטריצות מסדר  $n \times n$ .

הוכיחו:

א. אם  $BA = I - A^2$  וגם  $B^2 = -AB$ , אז  $B = 0$ .

ב. אם  $A^2 = 2I$ , אז  $A + I$  ו- $A - I$  הפיכות.

(29) תהינה  $A, B$  מטריצות מסדר  $n \times n$ , כך ש- $B^2A = -2B^3$  וגם

$$(2) \quad B^3 + AB^2 = 3I$$

הוכיחו ש- $A$  ו- $B$  הפיכות, ובטאו את  $A^{-1}$  ו- $B^{-1}$  באמצעות  $B$ .

(30) תהינה  $A, B$  מטריצות מסדר  $n \times n$ , כך ש- $BA + 2I = B$ .

א. הוכיחו ש- $B$  הפיכה.

ב. ידוע ש- $B$  סימטרית.

הוכיחו כי  $A$  סימטרית.

(31) תהי  $A$  מטריצה נילפוטנטית (כלומר, קיים  $n$  טבעי כך ש- $A^n = 0$ ).

א. הוכיחו כי  $A$  לא הפיכה.

ב. הוכיחו כי  $I - A$  ו- $I + A$  הפיכות.

ג. נגדיר:  $e^A = I + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots + \frac{1}{n!}A^n + \dots$

הוכיחו: אם  $e^A = I$  אז  $A = 0$ .

**32** נתונות שתי מטריצות,  $A$  ו- $B$ , מסדר  $n$ .

סמנו את הטענה שנכונה בהכרח:

- א. ל- $A$  ול- $A^T$  יש אותה צורה מדורגת קנונית.
- ב. אם  $A, B$  מדורגות קנונית, אז  $A+B$  מדורגת קנונית.
- ג. אם  $A, B$  מדורגות קנונית, אז  $A-B$  מדורגת קנונית.
- ד. אם בצורה המדורגת קנונית של  $B$  יש שורת אפסים, אז גם בצורה המדורגת קנונית של  $AB$  יש שורת אפסים.

## תשובות סופיות

$$\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$k=1, k=-4 \quad (11)$$

$$k \neq 1, k \neq -2 \quad (10)$$

$$(P^{-1})^T A^T P^T \quad \text{ג.} \quad D \quad \text{ב.} \quad A^{-1}DC^{-1} \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$(A+C^{-1})^{-1}A \quad \text{ג.} \quad A \quad \text{ב.} \quad CD^2 - A \quad \text{א.} \quad (13)$$

$$X = 4 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$BA^T C(B^{-1})^T BC^T \quad (14)$$

$$B = \frac{1}{245} \begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}A - \frac{1}{6}I \quad \text{ג.} \quad A^{-1} = 0.5A - 2.5I \quad \text{א.} \quad (18)$$

$$A^{-1} = 0.5A - 2.5I \quad \text{א.} \quad (18)$$

$$B^{-1} = -\frac{1}{48}B^2 + \frac{1}{12}B + \frac{5}{12}I \quad \text{ג.} \quad B^{-1} = -\frac{1}{48}B^2 + \frac{1}{12}B + \frac{5}{12}I \quad \text{ב.} \quad (19)$$

$$f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{א.} \quad (19)$$

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 \quad \text{ג.} \quad (I-A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 \quad \text{ב.} \quad (20)$$

$$\text{א. שאלת הוכחה.} \quad (20)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (21)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (22)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (23)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (24)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (25)$$

$$((a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)) \quad M^{-1} = \frac{1}{(a^2+b^2+c^2+d^2)} M^T \quad (26)$$

- 27) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות. ג. פתרון יחיד.  
28) שאלת הוכחה.  
29) שאלת הוכחה.  
30) שאלת הוכחה.  
31) שאלת הוכחה.  
32) ד

## דרגה של מטריצה

### שאלות

(1) אמתו את המשפט  $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$ ,

$$. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 14 \\ 6 & 8 & 10 & 12 & 24 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} \text{ על המטריצה}$$

(2) אמתו את המשפט  $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$ ,

$$. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ עבור}$$

$$. A = \begin{pmatrix} 1-k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4-k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10-k \end{pmatrix} \text{ נתונה המטריצה (3)}$$

חשבו את  $\text{rank}(A)$ .

(4) נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר  $n > 1$ . הוכיחו או הפריכו:

א.  $\text{rank}(A) = n-1 \Rightarrow \text{rank}(A^2) = n-1$

ב.  $\text{rank}(A) = n-1 \Leftarrow \text{rank}(A^2) = n-1$

(5) נתון כי  $A, B$  מטריצות ריבועיות מסדר  $n > 1$ . הוכיחו או הפריכו:

א. אם  $\text{rank}(A) = \text{rank}(AB)$ , אז בהכרח  $B$  הפיכה.

ב. ייתכן ש- $\text{rank}(A) < \text{rank}(AB)$ .

ג. אם  $\text{rank}(A) > \text{rank}(B)$ , אז  $\text{rank}(AB) > \text{rank}(B)$ .

$$(6) \text{ נתון } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

א. חשבו את  $\text{rank}(A)$ ,  $\text{rank}(B)$ .

ב. חשבו את  $\text{rank}(B^{10}A^{14})$ .

(7) נניח כי  $A, B$  שתי מטריצות ריבועיות מסדר  $n$ .

הוכיחו כי  $\text{rank} \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix} \leq 2\text{rank}(A) + \text{rank}(B)$ .

(8) תהי  $A_{8 \times 7}$  מטריצה, כך ש- $\text{rank}(A) = 3$ .

הוכיחו כי קיימות 3 מטריצות  $A_1, A_2, A_3$ , שלכל אחת מהן דרגה 1,

כך ש- $A = A_1 + A_2 + A_3$ .

הראו כי לא ניתן לקבל זאת עם פחות מ-3 מטריצות.

הכלילו את תוצאת התרגיל למטריצה מסדר  $m \times n$  שדרגתה  $k$ .

(9) נתונות שתי מטריצות  $A_{3 \times 5}, B_{5 \times 3}$ .

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א.  $\text{rank}(AB) = \text{rank}(BA)$ .

ב.  $\text{rank}(AB) \neq \text{rank}(BA)$ .

ג. המטריצה  $BA$  לא הפיכה.

(10) תהי  $A$  מטריצה מסדר  $m \times n$ , ותהי  $B$  מטריצה מסדר  $n \times m$ .

הוכיחו:

א. אם  $AB = I_m$  אז  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = m$ .

ב. אם  $BA = I_n$  אז  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = n$ .

ג. אם  $AB = I_m$  וגם  $BA = I_n$  אז בהכרח  $m = n$ .

ד. אם  $A$  לא ריבועית אז לא ייתכן שגם  $AA^T = I_m$  וגם  $A^T A = I_n$ .

(11) בשדה  $F$  נתונים  $a_1, a_2, \dots, a_m$  איברים, שלא כולם אפס, ו- $b_1, b_2, \dots, b_n$  איברים,

שלא כולם אפס.

קבעו מהי דרגתה של המטריצה  $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ , כאשר  $m_{ij} = a_i b_j$ .

**12** תהי  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי  $a_{ij} = b_i^2 - b_j^2$ ,

כאשר  $b_1, b_2, \dots, b_n$  מספרים ממשיים שונים ו-  $n \geq 3$ .

א. הוכיחו שהמטריצה לא הפיכה.

ב. האם הטענה תישאר נכונה אם נשנה את הנתון ל-  $n \geq 2$ ?

הוכיחו או הפריכו.

**13** תהיינה  $A, B$  מטריצות מעל  $\mathbb{R}$ , מסדר  $m \times n$ , כך שלכל  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\underline{x} \neq \underline{0}$ ,

מתקיים  $A\underline{x} \neq B\underline{x}$ .

מה הדרגה של המטריצה  $A - B$ ?

**14** תהיינה  $A, B$  מטריצות מסדר  $n \times n$ .

א. נתון שכל פתרון של המערכת  $(AB)\underline{x} = \underline{0}$ , הוא פתרון של המערכת

$$A\underline{x} = \underline{0}$$

הוכיחו שהדרגה של  $AB$  שווה לדרגה של  $A$ .

ב. הוכיחו: אם  $A$  הפיכה, אז  $\rho(AB) = \rho(A)$ .

ג. הוכיחו שאם  $\rho(AB) < \rho(A)$ , אז  $A$  לא הפיכה.

**15** תהי  $A$  מטריצה מסדר  $n \times n$ .

א. הוכיחו כי  $P(A) \subseteq P(A^2)$ .

ב. נתון כי  $\rho(A^2) < \rho(A)$ .

הוכיחו שקיים  $v \in \mathbb{R}^n$ , כך ש-  $Av \neq 0$  וגם  $A^2v = 0$ .

## תשובות סופיות

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) שאלת הוכחה.
- (3) אם  $k=1$ , אז  $\text{rank}(A)=2$ . אם  $k=4, k=10$ , אז  $\text{rank}(A)=3$ .
- אם  $k \neq 1, 4, 10$ , אז  $\text{rank}(A)=4$ .
- (4) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה נכונה.
- (5) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה אינה נכונה. ג. הטענה אינה נכונה.
- (6) א.  $\text{rank}(A)=2$ ,  $\text{rank}(B)=3$ . ב.  $\text{rank}(B^{10}A^{14})=2$ .
- (7) שאלת הוכחה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) 1
- (12) שאלת הוכחה.
- (13)  $n$
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.

## בחזרה למערכת משוואות ליניארית

### שאלות

1) בסעיפים הבאים מצאו מטריצות  $A$ ,  $\underline{x}$  ו- $\underline{b}$ , המבטאות את מערכת המשוואות הנתונה ע"י המשוואה היחידה  $A\underline{x} = \underline{b}$ :

$$2x - 3y + z + t = 1$$

$$4x + y + 2z = 4$$

$$y + z + t = 1$$

$$x - 4z - 2y = 10$$

$$2x + y - z = 3$$

$$x + 2y - 4z = 5 \quad \text{א.}$$

$$6x + 4y + z = 2$$

בשאלות 2-6 נתון כי  $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$   $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$   $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ .

בטאו כל אחת מהמשוואות בשאלות אלה כמערכת משוואות ליניאריות:

$$A\underline{x} = -k\underline{x} + \underline{b} \quad (4)$$

$$A\underline{x} = 4\underline{x} + \underline{b} \quad (3)$$

$$A\underline{x} = \underline{b} \quad (2)$$

$$A^T \underline{x} = 2\underline{x} + 3\underline{b} \quad (6)$$

$$A\underline{x} = \underline{x} \quad (5)$$

$$2x - y + z = 3$$

7) פתרו את מערכת המשוואות  $3x - 2y + 2z = 5$ ,

$$5x - 3y + 4z = 11$$

בעזרת המטריצה ההפוכה.

$$x + 4y + 2z + 4t = 1$$

$$x + 2y - z = 0$$

$$y + z + t = 1$$

$$x + 3y - z - 2t = 0$$

8) פתרו את מערכת המשוואות

בעזרת המטריצה ההפוכה.

9) למערכת משוואות מסוימת יש את שני הפתרונות הבאים:

$$(x, y, z) = (2, -8, 4) \quad , \quad (x, y, z) = (-1, 4, -2)$$

הוכיחו שהמערכת חייבת להיות הומוגנית.

**10** למערכת משוואות לא הומוגנית יש את שני הפתרונות הבאים :  
 $(x, y, z) = (-1, 4, -2)$  ,  $(x, y, z) = (2, 3, 4)$  .  
 מצאו פתרון לא טריוויאלי כלשהו של המערכת ההומוגנית המתאימה.

$$(11) \text{ נתונה המערכת } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 7y + (k^2 + 1)z = k^2 - 1 \\ 4x - 6y + (k + 2)z = 4 \end{cases}$$

מצאו עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$  , למערכת :  
 א. פתרון יחיד . ב. אין פתרון . ג. אינסוף פתרונות.

\* השתמשו בפתרון במושג 'דרגה של מטריצה'.

$$(12) \text{ נתון } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & k \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$$

ידוע כי  $rank(A) = 3$  , וידוע כי למערכת  $Ax = b$  יש פתרון.  
 מצאו את הקבועים  $k, m$  .

**13** נתונה מטריצה ריבועית  $A$  , המקיימת את התכונה הבאה :  
 סכום האיברים בכל שורה של המטריצה  $A$  שווה 0 .  
 הוכיחו ש- $A$  מטריצה לא הפיכה .

**14** נתונה מטריצה ריבועית הפיכה  $A$  , המקיימת את התכונה הבאה :  
 סכום האיברים בכל שורה של המטריצה  $A$  שווה  $k$  .  
 הוכיחו שסכום האיברים בכל שורה של המטריצה הוא קבוע.  
 בטאו קבוע זה בעזרת  $k$  .

$$(15) \text{ מטריצה } A \text{ מקיימת } A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 0$$

הוכיחו כי הווקטור  $\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$  הוא פתרון של המערכת ההומוגנית  $Ax = 0$  .

- 16** יהיו  $A, B$  מטריצות ממשיות מסדר  $n \times n$ .
- עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או לא.
- א. אם למערכת  $(AB)x = 0$  קיימים שני פתרונות שונים, אז בהכרח  $A$  לא הפיכה.
- ב. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת  $(AB)x = 0$ , אז למערכת  $(BA)x = 0$  קיים פתרון שונה מ-0.
- ג. אם למערכת  $Ax = 0$  קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2 = 0$ .
- ד. אם למערכת  $(A^t A)x = 0$  קיים פתרון יחיד, אז  $A$  לא הפיכה.
- ה. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת ההומוגנית  $(AB)x = 0$ , אז למערכת ההומוגנית  $Ax = 0$  קיים פתרון שונה מ-0.

- 17** נתונה מערכת משוואות מעל  $\mathbb{R}$ :  $Ax = d$  ( $d \neq 0$ ).
- נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר 4, המקיימת  $\text{rank}(A) = 2$ .
- ידוע כי הווקטורים הבאים פותרים את המערכת הנתונה:
- $$u = (x_1, x_2, 6, 7), \quad v = (y_1, y_2, 1, 2), \quad w = (z_1, z_2, 4, 3)$$
- מי מבין הבאים הוא הפתרון הכללי של המערכת הנתונה:
- א.  $x = au + bv + cw$
- ב.  $x = (a + b + 1)u - av - bw$
- ג.  $x = au + bv + w$
- ד.  $x = (a - b)u + (b - c)v + (c - a)w$
- ה.  $x = (a + b)u - (av + bw + u)$ , כאשר  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

- הערה:** בחלקו האחרון של פתרון תרגיל זה נדרש הידע הבא מהפרק מרחבים וקטורים:
- בהינתן מערכת הומוגנית  $Ax = 0$ :
- אוסף כל הפתרונות של המערכת נקרא מרחב הפתרונות של המערכת.
  - מספר המשתנים החופשיים במערכת לאחר דירוג נקרא המימד של מרחב הפתרונות.
- בכל אופן, מומלץ לחזור לתרגיל זה אחרי שתעברו על הפרק מרחבים וקטורים.

- 18** נתונה מערכת  $A_{m \times n} \cdot x = b$ .
- הוכיחו או הפריכו:
- א. אם  $u$  וגם  $\lambda u$  ( $\lambda \neq 1$ ) פתרונות של המערכת אז המערכת הומוגנית.
- ב. אם  $u$  ו- $v$  וגם  $\alpha u + \beta v$  ( $\alpha, \beta \neq 0$ ) פתרונות של המערכת אז היא הומוגנית.
- ג. אם הווקטורים  $(1, 2, \dots, n)$ ,  $(n, \dots, 2, 1)$  פותרים את המערכת והווקטור  $(n+1, \dots, n+1)$  לא פותר את המערכת, אז המערכת לא הומוגנית.

**19** תהי  $A$  מטריצה כך שלמערכת  $Ax=0$  פתרון יחיד. הוכיחו או הפריכו:

- $A$  הפיכה.
- למערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים  $A^T$  פתרון יחיד.
- לכל מערכת לא הומוגנית עם מטריצת מקדמים  $A$  פתרון יחיד.

**20** תהי  $A_{m \times n}$  מטריצה ממשית כך ש- $m < n$ . הוכיחו או הפריכו:

- ממד מרחב הפתרונות של המערכת  $Ax=0$  הוא  $n-m$ .
- למערכת  $(A^T A)x=0$  יש אינסוף פתרונות.
- ייתכן מצב בו למערכת  $(A^T A)x=0$  יש פתרון יחיד.
- ייתכן מצב בו למערכת  $(AA^T)x=0$  יש פתרון יחיד.

**21** תהי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר  $n$ , כך שלכל מטריצה ריבועית  $B \neq 0$  מסדר  $n$ , מתקיים  $AB \neq 0$ . הוכיחו ש- $\text{rank}(A) = n$ .

**22** תהי  $A$  מטריצה ממשית מסדר  $m \times n$ .

לגבי כל אחת מהטענות הבאות, קבעו אם היא נכונה או לא. נמקו.

- אם למערכת  $Ax=b$  יש פתרון לכל  $b \in \mathbb{R}^m$ , אז בהכרח למערכת  $A^T x=b$  יש פתרון לכל  $b \in \mathbb{R}^m$ .
- עבור  $m=n$ , אם למערכת  $Ax=b$  יש פתרון לכל  $b \in \mathbb{R}^m$ , אז בהכרח למערכת  $A^T x=b$  יש פתרון לכל  $b \in \mathbb{R}^m$ .
- אם למערכת ההומוגנית  $Ax=0$  יש אינסוף פתרונות, אז בהכרח  $m < n$ .
- ייתכן ש- $A^T A = I_n$  וגם  $AA^T = I_m$ .
- אם  $m \neq n$  ואם למערכת  $Ax=0$  יש פתרון יחיד, אז יש מערכת לא הומוגנית  $Ax=b$  עם יותר מפתרון אחד.

**23** תהא  $A \in M_{4 \times 4}(R)$  ויהי  $b \in R^4$ .

ידוע כי  $u$  ו- $v$  פתרונות של המערכת הלא הומוגנית  $Ax=b$ .

- נגדיר  $w = \alpha u + \beta v$ .
- הוכיחו כי אם גם  $w$  פתרון של המערכת  $Ax=b$ , אז  $\alpha + \beta = 1$ .
- נניח בנוסף כי  $w = -u + 2v$  הוא פתרון של המערכת  $A^2 x = b$ .
- הוכיחו כי  $A-I$  לא הפיכה.

$$(24) \text{ נתון } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 \\ -3 & -6 & 3 & -8 & -8 \end{pmatrix}, \text{ ויהי } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

א. הראו כי  $v = (2, -1, 1, -1, 1)^T$  הוא פתרון של המערכת  $Ax = b$ .

ב. מצאו את קבוצת הפתרונות של המערכת ההומוגנית  $Ax = 0$ .

ג. מצאו  $C, D \in M_{5 \times 2}(\mathbb{R})$ , כך ש-  $C \neq D$  ו-  $AC = AD = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ .

## תשובות סופיות

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{א. (1)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{ב.}$$

$$4x - 2y + 4z = 1$$

$$x - y + z = 2 \quad \text{(2)}$$

$$x - 6y + 3z = 3$$

$$-2y + 4z = 1$$

$$x - 5y + z = 2 \quad \text{(3)}$$

$$x - 6y - z = 3$$

$$(4+k)x - 2y + 4z = 1$$

$$x + (k-1)y + z = 2 \quad \text{(4)}$$

$$x - 6y + (3+k)z = 3$$

$$3x - 2y + 4z = 0$$

$$x - 2y + z = 0 \quad \text{(5)}$$

$$x - 6y + 2z = 0$$

$$2x + y + z = 3$$

$$-2x - 3y - 6z = 6 \quad \text{(6)}$$

$$4x + y + z = 9$$

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) \quad \text{(7)}$$

$$(x, y, z, t) = (-13, 4, -5, 2) \quad \text{(8)}$$

(9) שאלת הוכחה.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{(10)}$$

(11) אם  $k \neq 2$  או  $k \neq -1$ , אז יש פתרון אחד.

אם  $k = 2$ , אז יש אינסוף פתרונות.

אם  $k = -1$ , אז אין פתרונות.

$$m = 5, k = 9 \quad \text{(12)}$$

(13) שאלת הוכחה.

14) סכום האיברים בכל שורה של  $A^{-1}$  הוא קבוע השווה ל- $\frac{1}{k}$ .

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

18) שאלת הוכחה.

19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

23) שאלת הוכחה.

24) א. שאלת הוכחה. ב.  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-t, -2s, s, -t, -t, t)$ .

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} (t=s=0) \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} (t=s=1) \text{ ג.}$$