

מתמטיקה 55004 לתלמידי לוגיסטיקה



תוכן העניינים

1	חזרה כללית - מבוא לאלגברה
47	חזרה כללית - משוואות אלגבריות
69	חזרה כללית - אי שוויונים אלגבריים
85	חזרה כללית - חוקי החזקות והשורשים
95	חזרה כללית - משוואות ואי-שוויונים מעריכיים
105	חזרה כללית - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים
121	חשבון דיפרנציאלי - הפונקציה הממשית
133	חשבון דיפרנציאלי - גבול של פונקציה
144	חשבון דיפרנציאלי - הגדרת הנגזרת, גזירות של פונקציה ונגזרות חד-צדדיות
150	חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים
165	חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית פולינום
178	חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית מנה ושורש
(ללא ספר)	חשבון דיפרנציאלי - הקשר שבין גרף הפונקציה וגרף הנגזרת
216	חשבון דיפרנציאלי - פונקציות מעריכיות
232	חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות
248	חשבון דיפרנציאלי - בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון)
261	פונקציות של שני משתנים - מבוא כללי
271	פונקציות של שני משתנים - נגזרות חלקיות
277	פונקציות של שני משתנים - קיצון ואוכף של פונקציה
279	פונקציות של שני משתנים - קיצון של פונקציה תחת אילוץ (כופלי לגראנז)
282	פונקציות של שני משתנים - קיצון מוחלט של פונקציה בקבוצה סגורה וחסומה

מתמטיקה 55004 לתלמידי לוגיסטיקה

פרק 1 - חזרה כללית - מבוא לאלגברה

תוכן העניינים

1	1. מספרים מכוונים
5	2. חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים
7	3. סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים
8	4. שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים
14	5. כפל וחילוק שברים
16	6. חיבור וחסור שברים
20	7. בעיות יסודיות באחוזים
22	8. חזרה על תבניות מספר
24	9. כינוס איברים
26	10. פישוט ביטויים על ידי פתיחת סוגריים
28	11. פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר
30	12. פירוק לגורמים של ביטויים אלגברים
33	13. פירוק הטרינום
35	14. שברים אלגברים
39	15. כפל וחילוק של שברים אלגברים
41	16. חיבור וחסור של שברים אלגברים
45	17. שברים כפולים

מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

מספרים מכוונים הם מספרים שיכולים לקבל סימן חיובי או שלילי, כגון:

- בקניון גדול ישנן קומות 1, 2, 3, 4, וכן חניונים הממוקמים בקומות 1-, 2-, ו-3-.
- גובה פני הים מוגדר להיות 0 מטרים. העיר חיפה נמצאת כ-103 מטרים מעל פני הים בעוד שים המלח נמצא בגובה 426- מטרים.

כללים:

- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים זהים, מחברים את המספרים עצמם והסימן נשאר.
- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים מנוגדים, מחסירים את המספרים זה מזה (הקטן מהגדול) וסימן התוצאה כסימן המספר הגדול מביניהם.
- כפל וחילוק יתבצע בשני חלקים:
 - ביצוע הפעולה על המספרים עצמם.
 - קביעת הסימן של התוצאה באופן הבא:
 - כפל או חילוק של שני מספרים בעלי אותו סימן - התוצאה תהיה חיובית.
 - כפל או חילוק של שני מספרים שונים סימן - התוצאה תהיה שלילית.

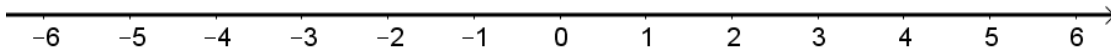
הערה:

אם יש רצף של מכפלות (או חילוקים), סימן התוצאה תלוי במספר הפעמים שבהם מופיע סימן שלילי (-). אם הסימן מופיע מספר זוגי של פעמים התוצאה חיובית, ואם הוא מופיע מספר אי-זוגי של פעמים אזי התוצאה שלילית.

שאלות:

(1) סמנו את המספרים הבאים על ציר המספרים בהתאמה:

$$-3\frac{1}{2}, 4, 1\frac{1}{3}, -5, -\frac{1}{2}, 2, 0, \frac{1}{2}, -2$$



(2) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

ב. $-3-2$

א. $3+2$

ד. $-3+2$

ג. $3-2$

ו. $7+10$

ה. $-1-4$

ח. $-7+3$

ז. $-6+5$

(3) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

ב. $5-8-12+17$

א. $5+7-23+1$

ד. $-4-11+2+9$

ג. $3-14+2+6$

ו. $-7-13+5-3$

ה. $6-21+3-7$

(4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

ב. $4 \cdot (-7)$

א. $4 \cdot 9$

ד. $(-5) \cdot (-3)$

ג. $(-6) \cdot (-5)$

ו. $(-8) \cdot 5$

ה. $(-2) \cdot 8$

ח. $2 \cdot 3 \cdot 3$

ז. $(-2) \cdot (-3) \cdot (-3)$

י. $(-2) \cdot (-3) \cdot 3$

ט. $(-2) \cdot 3 \cdot (-3)$

יב. $(-2) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-2)$

יא. $2 \cdot 3 \cdot (-3)$

יד. $1 \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot 2$

יג. $(-1) \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot 2$

5) מהו הסימן של תוצאת המכפלה בכל מקרה :

א. $(-2) \cdot (-4) \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot (-6) \cdot (-5)$

ב. $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot 6 \cdot (-5)$

ג. $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot (-6) \cdot (-5)$

ד. $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot 6 \cdot 5$

6) חשבו את ערכי הביטויים הבאים :

ב. $(-30):3$

א. $(-25):(-5)$

ד. $(-32):(-4)$

ג. $40:(-10)$

ו. $4:(-16)$

ה. $(-6):18$

7) חשבו את ערכי הביטויים הבאים :

ב. $\frac{42}{-6}$

א. $\frac{-60}{12}$

ד. $\frac{-12}{-3}$

ג. $\frac{32}{-4}$

8) מה התוצאה של כל אחת מהפעולות הבאות :

ב. $(-2) \cdot 0$

א. $0:5$

ד. $6:0$

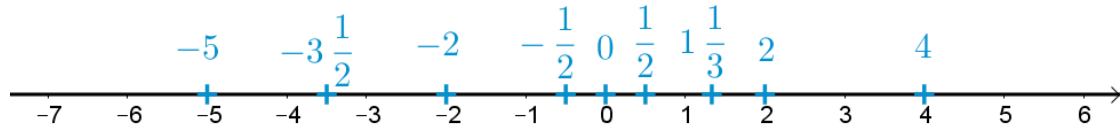
ג. $0 \cdot (-3) \cdot 4$

ו. $0-4$

ה. $0+4$

תשובות סופיות:

(1) להלן מערכת הצירים:



- (2) א. 5 ב. -5 ג. 1 ד. -1 ה. -5
- ו. 17 ז. -1 ח. -4
- (3) א. -10 ב. 2 ג. -3 ד. -4 ה. -19 ו. -18
- (4) א. 36 ב. -28 ג. 30 ד. 15 ה. -16
- ו. -40 ז. -18 ח. 18 ט. 18 י. 18
- יא. -18 יב. 36 יג. -16 יד. 16
- (5) א. + ב. + ג. - ד. -
- (6) א. 5 ב. -10 ג. -4 ד. 8 ה. $-\frac{1}{3}$ ו. $-\frac{1}{4}$
- (7) א. -5 ב. -7 ג. -8 ד. 4
- (8) א. 0 ב. 0 ג. 0 ד. לא מוגדר ה. 4 ו. -4

חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

הגדרה:

פעולת החזקה היא צורה מקוצרת שמייצגת פעולת כפל של אותו מספר בעצמו מספר פעמים. סימון החזקה הוא באופן הבא:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

כאשר a נקרא הבסיס ו- n נקראת החזקה.

הערות:

- כאשר הבסיס חיובי, התוצאה תמיד תהיה חיובית ללא קשר האם החזקה היא זוגית או אי-זוגית.
- כאשר הבסיס שלילי, התוצאה תהיה חיובית אם החזקה היא זוגית ושלילית אם החזקה היא אי-זוגית.

הגדרה:

פעולת השורש היא הפוכה לפעולת החזקה והיא מאפשרת למצוא את בסיס החזקה. סימון השורש הוא באופן הבא:

$$\sqrt[n]{a}$$

כאשר a נקרא הבסיס ו- n נקרא סדר השורש.

הערות:

- שורש למספר חיובי יכול להיות מסדר זוגי או אי-זוגי.
- שורש למספר שלילי יכול להיות מסדר אי-זוגי בלבד.

שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- | | |
|--------------|---------------|
| א. 3^2 | ב. 3^3 |
| ג. $(-3)^3$ | ד. $(-2)^3$ |
| ה. 4^3 | ו. 3^4 |
| ז. $(-5)^3$ | ח. 10^4 |
| ט. $-(-3)^4$ | י. -5^4 |
| יא. -4^3 | יב. $-(-2)^6$ |

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- | | |
|--------------------|----------------------|
| א. $\sqrt[3]{-27}$ | ב. $\sqrt[4]{625}$ |
| ג. $\sqrt[4]{-16}$ | ד. $\sqrt[5]{-32}$ |
| ה. $-\sqrt[4]{81}$ | ו. $-\sqrt[3]{1000}$ |

תשובות סופיות:

- | | | | | | |
|---------|----------|-------------|---------|---------|---------|
| א. 9 | ב. 27 | ג. -27 | ד. -8 | ה. 64 | ו. 81 |
| ז. -125 | ח. 10000 | ט. -81 | י. -625 | יא. -64 | יב. -64 |
| א. -3 | ב. 5 | ג. לא מוגדר | ד. -2 | ה. -3 | ו. -10 |

סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

סדר פעולות חשבון:

- פעולות כפל וחילוק קודמות לפעולות חיבור וחסור.
- פעולות חזקה ושורש קודמות לפעולות כפל וחילוק.
- סוגריים קודמים לכל.

שאלות:

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

$(-3)^2 : 9 - 2 \cdot (-4^2)$ (2)	$\sqrt{81} + 3 \cdot 2^3 - 40 : 8$ (1)
$3 + 4 \cdot [-3 + 4 \cdot (-2)] + \sqrt{10 + 6}$ (4)	$\sqrt{144} - 20 : 4 + 3 \cdot (-2)^2$ (3)
$-\sqrt{9} + 5^2 : (-4 - 1) - 24 : 12 \cdot 3$ (6)	$(-3)^4 : (-9) - 5 \cdot (-2)^3$ (5)
$\sqrt[3]{-27} + 4 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3^3$ (8)	$-2^5 : (-8) + 4^2 - 3 \cdot 5$ (7)
$(8 - \sqrt[3]{64}) \cdot (2 \cdot (-4) - \sqrt[3]{243})$ (10)	$[6 \cdot (-1)^4 - 10 \cdot (-1)^3] \cdot (-1)^5$ (9)
	$\frac{3^2 \cdot (8 - 2 \cdot 3)^3}{(5^2 \cdot 3 - 72) \cdot (-4)} + 2 \cdot \{15 - 20 : (4 + 3 \cdot 2)\}$ (11)

תשובות סופיות:

-37 (4)	19 (3)	33 (2)	28 (1)
-21 (8)	5 (7)	-14 (6)	31 (5)
	20 (11)	-44 (10)	-16 (9)

שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים:

סיכום כללי:

הגדרה כללית:

השבר הוא חלק מתוך השלם. מקובל לסמן שבר באמצעות קו שבר המפריד בין המונה (החלק העליון) למכנה (החלק התחתון) באופן הבא:

$$\frac{\text{מונה}}{\text{מכנה}}$$

ישנם שלושה סוגים אפשריים של שברים:

- שבר פשוט – בו המונה קטן מהמכנה (ולכן תמיד יהיה קטן מ-1).
- שבר מדומה – בו המונה גדול מהמכנה (יהיה גדול בערכו מ-1).
- שבר מעורב – המכיל שילוב של מספר שלם ושבר כלשהו.

שבר עשרוני:

שבר שהמכנה שלו הוא מספר המהווה כפולות של 10 כגון: 10, 100, 1000 ... שבר עשרוני מיוצג ע"י נקודה עשרונית אשר מבדילה בין החלק שלם לחלק השברי באופן הבא:

$$\underbrace{XX}_{\text{שברים שלמים}}.\underbrace{YYY}$$

כדי להמיר שבר פשוט לשבר עשרוני המכנה צריך להיות בכפולות של 10.

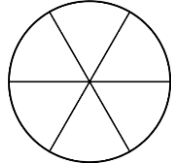
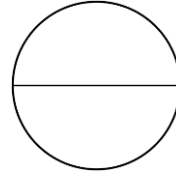
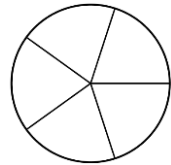
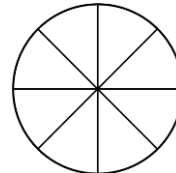
אחוזים - הגדרה:

השבר $\frac{1}{100}$ מוגדר להיות אחוז אחד ומסומן באופן הבא: 1%.

באופן זה השבר $\frac{45}{100}$ יכתב: 45%, והשבר $\frac{145}{100}$ יכתב: 145%.

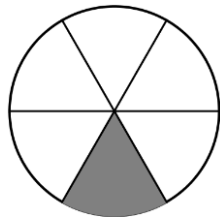
שאלות:

(1) צבע את החלקים המתאימים בכל עיגול:

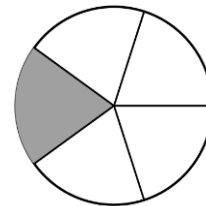
ב. צבע $\frac{1}{6}$ מהעיגולא. צבע $\frac{1}{2}$ מהעיגולד. צבע $\frac{2}{5}$ מהעיגולג. צבע $\frac{3}{8}$ מהעיגול

(2) כתוב את השבר המתאים לחלקים הצבועים בכל אחד מהמקרים הבאים:

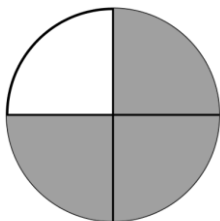
ב. שבר:



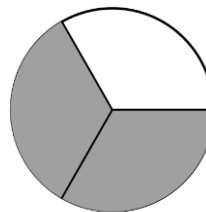
א. שבר:



ד. שבר:



ג. שבר:



(3) הרחב את השברים הבאים:

א. השבר $\frac{1}{2}$ לפי בסיס 4, לפי בסיס 18, לפי בסיס 40.ב. השבר $\frac{3}{5}$ לפי בסיס 10, לפי בסיס 25, לפי בסיס 60.ג. השבר $\frac{5}{8}$ לפי בסיס 16, לפי בסיס 32, לפי בסיס 88.

(4) צמצם את השברים הבאים ככל הניתן :

א. $\frac{25}{30}$	ב. $\frac{10}{30}$	ג. $\frac{6}{24}$	ד. $\frac{4}{20}$
ה. $\frac{35}{56}$	ו. $\frac{24}{42}$	ז. $\frac{36}{48}$	ח. $\frac{33}{121}$

(5) המר את השברים המדומים הבאים לשברים מעורבים :

א. $-\frac{20}{3}$	ב. $\frac{19}{4}$	ג. $\frac{12}{5}$	ד. $\frac{22}{5}$
ה. $-\frac{34}{6}$	ו. $-\frac{50}{7}$	ז. $\frac{47}{8}$	ח. $\frac{60}{9}$

(6) המר את השברים המעורבים הבאים לשברים מדומים :

א. $1\frac{2}{3}$	ב. $3\frac{5}{6}$	ג. $4\frac{1}{2}$	ד. $6\frac{1}{4}$
ה. $11\frac{3}{4}$	ו. $-2\frac{5}{8}$	ז. $-6\frac{2}{7}$	ח. $12\frac{7}{9}$

(7) קבע איזה שבר גדול יותר בכל אחד מהמקרים הבאים :

א. $\frac{4}{10}$ או $\frac{3}{10}$	ב. $\frac{7}{6}$ או $\frac{7}{8}$
ג. $\frac{5}{6}$ או $\frac{2}{3}$	ד. $\frac{7}{12}$ או $\frac{5}{18}$

(8) המר את השברים העשרוניים הבאים לשברים פשוטים מצומצמים או מעורבים :

א. 0.7	ב. 0.07	ג. 0.007	ד. 0.34
ה. 0.304	ו. 0.65	ז. 1.2	ח. 1.02
ט. 1.42	י. 3.5	יא. 6.03	יב. 5.125

9) המר את השברים הבאים לשברים עשרוניים:

א. $\frac{3}{10}$	ב. $\frac{3}{100}$	ג. $\frac{3}{1000}$	ד. $\frac{23}{1000}$
ה. $\frac{1}{2}$	ו. $\frac{3}{4}$	ז. $\frac{2}{5}$	ח. $\frac{4}{25}$
ט. $\frac{7}{50}$	י. $\frac{3}{20}$	יא. $\frac{7}{8}$	יב. $\frac{9}{16}$
יג. $9\frac{1}{10}$	יד. $3\frac{1}{5}$	טו. $4\frac{7}{8}$	טז. $-4\frac{1}{16}$

10) כתוב את השברים הבאים בצורתם העשרונית (היעזר במחשבון וכתוב עד 3 ספרות אחרי הנקודה העשרונית):

א. $\frac{2}{3}$	ב. $\frac{5}{6}$	ג. $\frac{3}{7}$	ד. $\frac{2}{11}$
------------------	------------------	------------------	-------------------

11) המר מאחוזים לשברים פשוטים:

א. 25%	ב. 32%	ג. 64%	ד. 80%
ה. 120%	ו. 5%	ז. 300%	ח. 150%

12) המר משברים פשוטים לאחוזים:

א. $\frac{3}{4}$	ב. $\frac{1}{8}$	ג. $\frac{4}{5}$	ד. $\frac{7}{20}$
ה. $\frac{11}{40}$	ו. $\frac{70}{125}$	ז. $\frac{5}{6}$	ח. $\frac{4}{9}$

תשובות סופיות:

- (1) תשובה מודגמת בסרטון.
- (2) א. $\frac{1}{5}$ ב. $\frac{1}{6}$ ג. $\frac{2}{3}$ ד. $\frac{3}{4}$
- (3) א. $\frac{4}{8}, \frac{18}{36}, \frac{40}{80}$ ב. $\frac{30}{50}, \frac{75}{125}, \frac{180}{300}$ ג. $\frac{80}{128}, \frac{160}{256}, \frac{440}{700}$
- (4) א. $\frac{5}{6}$ ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. $\frac{1}{5}$ ה. $\frac{5}{8}$ ו. $\frac{4}{7}$
- (5) א. $-6\frac{2}{3}$ ב. $4\frac{3}{4}$ ג. $2\frac{2}{5}$ ד. $4\frac{2}{5}$ ה. $-5\frac{4}{6}$ ו. $-7\frac{1}{7}$
- (6) א. $\frac{5}{3}$ ב. $\frac{23}{6}$ ג. $\frac{9}{2}$ ד. $\frac{25}{4}$ ה. $\frac{47}{4}$ ו. $-\frac{21}{8}$
- (7) א. $\frac{4}{10}$ ב. $\frac{7}{6}$ ג. $\frac{5}{6}$ ד. $\frac{7}{12}$
- (8) א. $\frac{7}{10}$ ב. $\frac{7}{100}$ ג. $\frac{7}{1000}$ ד. $\frac{17}{50}$ ה. $\frac{38}{125}$ ו. $\frac{13}{20}$
- (9) א. 0.3 ב. 0.03 ג. 0.003 ד. 0.023 ה. 0.5 ו. 0.75
- א. 0.4 ב. 0.16 ג. 9.1 ד. 3.2 ה. 4.875 ו. -4.0625
- (10) א. $\bar{0.6}$ ב. $\bar{0.83}$ ג. 0.428 ד. $\bar{0.18}$
- (11) א. $\frac{1}{4}$ ב. $\frac{8}{25}$ ג. $\frac{16}{25}$ ד. $\frac{4}{5}$ ה. $1\frac{1}{5}$ ו. $\frac{1}{20}$
- א. 3 ב. $1\frac{1}{2}$ ח. $1\frac{1}{2}$ ז. $\frac{3}{4}$

12) א. 75% ב. 12.5% ג. 80% ד. 35% ה. 27.5% ו. 56%

ז. 83.333% ח. 44.444%

כפל וחילוק שברים:

סיכום כללי:

- כשכופלים שני שברים יש לכפול מונה במונה ומכנה במכנה.
 - במידה ומדובר במספר שלם הכופל שבר, יש לכפול אותו במונה.
 - במידה ומדובר בשברים מעורבים, יש להפוך אותם תחילה לשברים מדומים ורק אז לבצע את פעולת הכפל.
- כדי לחלק שברים, יש לכפול את השבר הראשון בהופכי של השבר השני.
 - הופכי של שבר מסוים מתקבל ע"י החלפת המונה במכנה.

שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4}$	ב. $\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6}$	ג. $\frac{2}{9} \cdot \frac{8}{10}$
ד. $3 \cdot \frac{4}{5}$	ה. $6 \cdot \frac{2}{3}$	ו. $\frac{12}{25} \cdot 5$
ז. $1\frac{3}{5} \cdot 2\frac{1}{4}$	ח. $3\frac{1}{2} \cdot 4\frac{2}{5}$	ט. $3\frac{3}{7} \cdot 2\frac{2}{5}$
י. $\left(\frac{4}{5}\right)^3$	יא. $\frac{4}{5^3}$	יב. $\frac{4^3}{5}$

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{2}{5} : \frac{4}{9}$	ב. $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$	ג. $\frac{3}{25} : \frac{7}{10}$
ד. $8 : \frac{2}{9}$	ה. $10 : \frac{2}{3}$	ו. $\frac{5}{6} : 3$
ז. $\frac{2}{5} : 5$	ח. $3\frac{3}{4} : 5\frac{5}{8}$	ט. $2\frac{2}{5} : 1\frac{3}{15}$

תשובות סופיות:

- (1) א. $\frac{9}{20}$ ב. $\frac{5}{21}$ ג. $\frac{8}{45}$ ד. $2\frac{2}{5}$ ה. 4 ו. $2\frac{2}{5}$
- ז. $3\frac{3}{5}$ ח. $15\frac{2}{5}$ ט. $8\frac{8}{35}$ י. $\frac{64}{125}$ יא. $\frac{4}{125}$ יב. $12\frac{4}{5}$
- (2) א. $\frac{9}{10}$ ב. $1\frac{1}{2}$ ג. $\frac{6}{35}$ ד. 36 ה. 15 ו. $\frac{5}{18}$
- ז. $\frac{2}{25}$ ח. $\frac{2}{3}$ ט. 2

חיבור וחסור שברים:

סיכום כללי:

כפולה משותפת מינימלית:

בהינתן זוג מספרים a ו- b , המספר הקטן ביותר אשר תוצאת חלוקתו במספרים הנ"ל מניבה מספר שלם נקרא הכפולה המינימלית שלהם.

הערות:

- כפולה מינימלית יכולה להיות גם עבור יותר משני מספרים.
- הכפולה המינימלית תהיה המכנה המשותף בעת פעולות חיבור וחסור של שברים.

כללי החיבור והחסור של שברים:

- חיבור וחסור של שברים בעלי אותו המכנה מתבצע על המספרים שבמונה בלבד כאשר המכנה נשאר כפי שהוא.

$$\text{דוגמא: } \frac{2}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2-3}{7} = \frac{-1}{7}, \quad \frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$$

- חיבור וחסור של שברים בעלי מכנים שונים מתבצע ע"י פעולת מכנה משותף.

$$\text{דוגמא: } \frac{1}{4} - \frac{5}{6} = \frac{3}{12} - \frac{10}{12} = \frac{3-10}{12} = -\frac{7}{12}, \quad \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{6+5}{15} = \frac{11}{15}$$

- חיבור של שבר עם מספר שלם יתבצע באופן ישיר.

$$\text{דוגמא: } 3 + \frac{1}{4} = 3\frac{1}{4}$$

חיסור של שבר ממספר שלם יתבצע ע"י הוצאת שלמים מהשבר.

$$\text{דוגמא: } 3 - \frac{1}{4} = 2\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = 2\frac{3}{4}$$

דרך נוספת היא ע"י העברת המספר השלם לשבר מדומה: $3 - \frac{1}{4} = \frac{12}{4} - \frac{1}{4} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$

- חיבור וחסור של שברים מעורבים יתבצע ע"י העברתם לשברים מדומים תחילה.

$$\text{דוגמא: } 3\frac{2}{5} + 2\frac{1}{6} = \frac{17}{5} + \frac{13}{6} = \frac{17 \cdot 6}{30} + \frac{13 \cdot 5}{30} = \frac{102 + 65}{30} = \frac{167}{30} = 5\frac{17}{30}$$

ניתן גם לפצל ולבצע את פעולת החיבור (או החיסור) של המספרים השלמים תחילה, ולאחר מכן לבצע את הפעולה עבור השברים.

$$\text{דוגמא: } 2\frac{3}{4} - 5\frac{1}{3} = (2 - 5) + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) = -3 + \left(\frac{9}{12} - \frac{4}{12}\right) = -3 + \frac{5}{12} = -2\frac{7}{12}$$

שאלות:

- (1) מצא את הכפולה המשותפת המינימלית של המספרים הבאים:

א. 2 ו-3	ב. 2 ו-4	ג. 3 ו-5	ד. 6 ו-10
ה. 4 ו-10	ו. 4 ו-6	ז. 3, 5 ו-10	ח. 2, 3 ו-8

- (2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}$	ב. $\frac{5}{9} + \frac{2}{9}$
ג. $\frac{4}{13} + \frac{9}{13}$	ד. $\frac{7}{8} + \frac{7}{8}$
ה. $\frac{7}{8} - \frac{3}{8}$	ו. $\frac{8}{9} - \frac{7}{9}$
ז. $\frac{2}{12} - \frac{5}{12}$	ח. $\frac{2}{5} - \frac{6}{5}$
ט. $\frac{2}{8} + \frac{5}{8} + \frac{6}{8}$	י. $\frac{7}{15} + \frac{8}{15} - \frac{6}{15}$

(3) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א.	$\frac{1}{2} + \frac{4}{3}$
ב.	$\frac{3}{5} + \frac{1}{10}$
ג.	$\frac{4}{6} - \frac{1}{12}$
ד.	$\frac{3}{6} - \frac{5}{8}$
ה.	$\frac{5}{4} + \frac{7}{2} + \frac{2}{8}$
ו.	$\frac{7}{3} + \frac{6}{5} + \frac{3}{10}$
ז.	$\frac{4}{7} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$
ח.	$\frac{1}{4} + \frac{2}{8} - \frac{3}{5}$

(4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א.	$2 + \frac{5}{6}$
ב.	$2 - \frac{5}{6}$
ג.	$2\frac{1}{4} + \frac{5}{6}$
ד.	$2\frac{1}{4} - \frac{5}{6}$
ה.	$3\frac{2}{3} + 4\frac{1}{4}$
ו.	$5\frac{7}{8} - 6\frac{1}{2}$
ז.	$2 + \frac{5}{6} - \frac{1}{9}$
ח.	$\frac{3}{4} - 1\frac{1}{5} + \frac{8}{20}$

(5) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א.	$\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) + 2\frac{1}{3}$
ב.	$\frac{3}{14} : \frac{2}{7} + \frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{4} - \frac{2}{5}$
ג.	$\frac{5}{11} \cdot 2\frac{3}{4} - 6 : \frac{2}{5}$
ד.	$2\frac{4}{5} : \frac{9}{10} \cdot \frac{6}{7} + \frac{1}{6}$
ה.	$\frac{5}{6} : \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot 3\frac{1}{4}$

תשובות סופיות:

12 .ו	20 .ה	30 .ד	15 .ג	4 .ב	6 .א (1
				24 .ח	30 .ז
$\frac{1}{9}$.ו	$\frac{1}{2}$.ה	$1\frac{3}{4}$.ד	1 .ג	$\frac{7}{9}$.ב	$\frac{4}{5}$.א (2
		$\frac{3}{5}$.י	$1\frac{5}{8}$.ט	$-\frac{4}{5}$.ח	$-\frac{1}{4}$.ז
$3\frac{5}{6}$.ו	5 .ה	$-\frac{1}{8}$.ד	$\frac{7}{12}$.ג	$\frac{7}{10}$.ב	$1\frac{5}{6}$.א (3
				$-\frac{1}{10}$.ח	$\frac{19}{21}$.ז
$-\frac{5}{8}$.ו	$7\frac{11}{12}$.ה	$1\frac{5}{12}$.ד	$3\frac{1}{12}$.ג	$1\frac{1}{6}$.ב	$2\frac{5}{6}$.א (4
				$-\frac{1}{20}$.ח	$2\frac{13}{18}$.ז
	$3\frac{5}{18}$.ה	$2\frac{5}{6}$.ד	$-13\frac{3}{4}$.ג	$1\frac{1}{10}$.ב	$2\frac{11}{24}$.א (5

בעיות יסודיות באחוזים:

סיכום כללי:

נוסחה לביצוע חישובים עם אחוזים:

$$\text{תמורת האחוז} = \text{שלם} \cdot \frac{\text{אחוז}}{100}$$

למשל, בהינתן גודל שלם 120, אשר יש לחשב כמה הם 40 אחוזים ממנו, נקבל לפי הנוסחה: $48 = 120 \cdot \frac{40}{100}$, כלומר: **תמורת האחוז 40 מהגודל 120 היא 48.**

שאלות:

- (1) בכיתה 30 תלמידים. 60% מתוכם בנות.
 - א. כמה בנות בכיתה?
 - ב. כמה בנים בכיתה?
- (2) בכיתה 28 בנות המהוות 70% מכלל התלמידים בכיתה.
 - א. כמה תלמידים בכיתה?
 - ב. כמה בנים בכיתה?
- (3) מחיר בגד-ים הוא 300 ₪. בסוף העונה הוא נמכר ב-20% הנחה.
 - א. מהו מחירו בסוף העונה?
 - ב. מה גודל ההנחה?
- (4) מחיר ההשקה של בושם מסוים הוא 500 ₪. לאחר מכן מועלה מחירו ב-8%.
 - א. מה מחירו הסופי?
 - ב. מה גודל ההתייקרות?
- (5) מחיר ליטר דלק הוא 5 ₪ לליטר. בחנוכה מוזל מחירו ב-7%.
 - א. מה מחירו בסוף השנה?
 - ב. מה גודל התייקרות?
- (6) מוצר מסויים מתייקר בסוכות ב-12%. בפורים מוזל המוצר ב-12%.
 - א. מה מחירו בסוף השנה?
 - ב. מה גודל התייקרות?

7) ענה על השאלות הבאות:

- א. באולם קולנוע 200 צופים, מתוכם 176 בנים.
מה אחוז הבנים בקהל?
- ב. בכיתה 30 תלמידים, מתוכם 18 בנות.
מה אחוז הבנות בכיתה?
- ג. מחיר מוצר התייקר מ-80 ₪ ל-120 ₪.
בכמה אחוזים התייקר המוצר?
- ד. מחיר מוצר הוזל מ-120 ₪ ל-80 ₪.
בכמה אחוזים הוזל המוצר?
- ה. מחיר מוצר התייקר מ-150 ₪ ל-200 ₪.
בכמה אחוזים התייקר המוצר?
- ו. מחיר מוצר הוזל מ-200 ₪ ל-150 ₪.
בכמה אחוזים הוזל המוצר?

תשובות סופיות:

- 1) א. 18 בנות. ב. 12 בנים.
- 2) א. 40 תלמידים. ב. 12 בנים.
- 3) א. 240 ₪. ב. 60 ₪.
- 4) א. 540 ₪. ב. 40 ₪.
- 5) 4.9755 ₪
- 6) 400 ₪
- 7) א. 88% ב. 60% ג. 50% ד. 33.33% ה. 33.33% ו. 25%

חזרה על תבניות מספר:

סיכום כללי:

משתנה הוא סמל המתאר כמות או גודל כלשהם אשר אינם ידועים ועשויים להשתנות.

תבנית מספר היא ביטוי אלגברי אשר מכיל משתנה (או משתנים). ניתן להציב במשתנים ערכים מספריים שונים ולקבל תוצאות שונות עבור תבנית המספר עצמה.

במתמטיקה, תפקידה של תבנית המספר הוא להביע גודל מסוים אשר לערכו יש משמעויות שונות. דוגמא לכך היא: קנייה של x פריטים, אשר כל אחד עולה 3 שקלים, יניבו תבנית מספר של $3 \cdot x$ אשר מייצגת את הסכום הכולל של הפריטים.

שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- x הנתון:

א. $2x+5$ כאשר $x=3$ ב. x^2+3x כאשר $x=2$

ג. $-x^2+2x+3$ כאשר $x=5$ ד. $-x^2-9x+5$ כאשר $x=5$

ה. x^3+1 כאשר $x=-2$ ו. $4-x^3$ כאשר $x=-1$

ז. $(x+1)(2-x)$ כאשר $x=4$ ח. $x^2(3x-4)$ כאשר $x=3$

(2) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- x הנתון:

א. $27x^5-2x^3+x$ כאשר $x=\frac{1}{3}$

ב. $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+6$ כאשר $x=-\frac{2}{3}$

3) הצב את הערכים המספריים במקום הפרמטרים וחשב את ערך תבנית המספר:

- | | |
|----------------------------------|---|
| א. $a^2 + 2ab + b^2$ | עבור: $a = 3, b = -5$ |
| ב. $(x-3)^2 + 3x^2b$ | עבור: $x = 5, b = -1$ |
| ג. $-x^3 - 2xy + y^4$ | עבור: $x = -2, y = -1$ |
| ד. $\frac{(a-2c)^4}{a} - a^2$ | עבור: $a = 2, c = -2$ |
| ה. $\frac{4a^2 - 3b}{c}$ | עבור: $a = -1, b = 2, c = -4$ |
| ו. $\sqrt{c-3a}$ | עבור: $c = 13, a = -1$ ועבור: $c = 82, a = \frac{1}{3}$ |
| ז. $\frac{p^3 + 2\sqrt{q+1}}{m}$ | עבור: $p = -5, q = 48, m = 3$ |

תשובות סופיות:

- | | | | | | |
|----------------------------------|--------------------|--------|--------|------------------|--------|
| 11 א. (1) | 10 ב. | ג. -12 | ד. -65 | ה. -7 | ו. 5 |
| ז. -10 | ח. 45 | | | | |
| 10 א. (2) | ב. $\frac{22}{27}$ | | | | |
| 4 א. (3) | ב. -71 | ג. 5 | ד. 644 | ה. $\frac{1}{2}$ | ז. -37 |
| ו. הצבה ראשונה: 4, הצבה שנייה: 9 | | | | | |

כינוס איברים:

סיכום כללי:

תבניות אלגבריות יכולות להכיל איברים רבים ולכן נרצה לכנס אותם על מנת לפשט את התבנית. כדי לכנס איברים ניקח את כל קבוצת האיברים מאותו הסוג ונחבר את המקדמים שלהם. דוגמא: $3x + 6x - 5x = (3 + 6 - 5)x = 4x$.
 איברים שונים נבדלים זה מזה בערך התבנית האלגברית שלהם.
 כך: $3x$ שונה מ- $4y$ ושונה מ- $2xy$. באותו האופן, האיברים x ו- x^2 הם שונים.

שאלות:

כנס איברים דומים:

- | | |
|---|--|
| $9x^2 - 2x^2 - 3x^2 - 2x^2$ (2) | $5x + 7x - 4x$ (1) |
| $x^2y - 3yx^2 + x^2y$ (4) | $-10xy + 15xy + xy - 2yx$ (3) |
| $2x^2 - 3m^2 - x^2 + 3m^2$ (6) | $8a^2 + 10a - 5a^2 - 11a + a^2$ (5) |
| $mn^2 + 4m^2n + 6n^2m - 10nm^2 + mn^2$ (8) | $3xy + y - 30y + 6yx - 7y$ (7) |
| $y^2 + x^2 - 5x^2 + 5y^2 + 4x^2 - 6y^2$ (10) | $-6 + x^3 + 4 - 3x^3 + 17x^3 - 17$ (9) |
| $5xy + 2x - 3yx - x + 1$ (12) | $7x^2 - 3x - 4x + 2$ (11) |
| $x + xy + y - 6yx - 6y - 6x$ (14) | $3 - x - x^2 + 4x + 5x^2 - 12$ (13) |
| $ab^2 + 6ba^2 - 6b + 16a^2b + 3b - 6b^2a$ (16) | $mn + n - 5m + 5nm - 14n + 3m$ (15) |
| $4x^2z + 6xz^2 - 6 - xz^2 + 12 + 10zx^2$ (18) | $z^3 - 4z^2 + 7 - z^3 - 8 + 8z^2$ (17) |
| $x^3 - 3x - 4x^2 + 2x + x^3 + x^2 - 2x^3$ (20) | $2 - x^3 - 3 - 4x^2 + 2x + x^3 + x^2 - 2$ (19) |
| $12x^2y^3 + 13a^2 - 20x^2y^3 + 2a^2$ (22) | $2a^2b + 3x^2y + 5a^2b + 10x^2y$ (21) |
| $-2x^3y + 5x^2 - 4yx^3 - 6x^2$ (24) | $2y^2 - 4x^3y^2 - 10y^2 - x^3y^2$ (23) |
| $5a^2b - 8ab^2 + 20a^2b - 14ab^2$ (26) | $2a^2b + 2b + 3a^2 + 5b$ (25) |
| $-12x^2 + 2y^2 + 3x^2y + 14xy^2 - 5xy^2 - 6y^2 + 2xy + 11x^2 + x^2y - 9xy$ (27) | |
| $21x^3y^3 + x^2y^2 - 3xy^3 + x^3y - 15x^2y^2 - 7x^3y + 12x^3y^3 - 4xy^3 + 4xy^3 - 6x^3y$ (28) | |

תשובות סופיות:

- | | | |
|---------------------------|------------------------|---|
| $4xy$ (3) | $2x^2$ (2) | $8x$ (1) |
| x^2 (6) | $4a^2 - a$ (5) | $-x^2y$ (4) |
| $15x^3 - 19$ (9) | $8mn^2 - 6nm^2$ (8) | $9xy - 36y$ (7) |
| $2xy + x + 1$ (12) | $7x^2 - 7x + 2$ (11) | 0 (10) |
| $-13n - 2m + 6mn$ (15) | $-5x - 5y - 5xy$ (14) | $4x^2 + 3x - 9$ (13) |
| $14x^2z + 5xz^2 + 6$ (18) | $4z^2 - 1$ (17) | $-5ab^2 + 22a^2b - 3b$ (16) |
| $7a^2b + 13x^2y$ (21) | $-3x^2 - x$ (20) | $-3x^2 + 2x - 3$ (19) |
| $-6x^3y - x^2$ (24) | $-8y^2 - 5x^3y^2$ (23) | $-8x^2y^3 + 15a^2$ (22) |
| | $25a^2b - 22ab^2$ (26) | $2a^2b + 3a^2 + 7b$ (25) |
| | | $-x^2 - 4y^2 + 4x^2y + 9xy^2 - 7xy$ (27) |
| | | $33x^3y^3 - 14x^2y^2 - 3xy^3 - 12x^3y$ (28) |

פישוט ביטויים ע"י פתיחת סוגריים:

סיכום כללי:

בעת ביצוע כפל בין שני איברים יש לכפול את המקדמים בנפרד ואת האותיות (משתנים) בנפרד.

כלל הפילוג:

$$\bullet a(b+c) = ab+ac$$

$$\bullet (a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $2x \cdot 3x$	ב. $-4x \cdot (-7x)$	ג. $-2x \cdot (-4x) \cdot (-3)$
ד. $8m^2 \cdot 4m^3$	ה. $3a^3 \cdot (-2a^2)$	ו. $-b \cdot 4b^2 \cdot \frac{b^2}{2}$
ז. $a \cdot 3b$	ח. $4a^2 \cdot 7b^2$	ט. $ab \cdot (-2a^2b)$

(2) פשט את הביטויים הבאים ע"י פתיחת סוגריים:

א. $2(3x-4)$	ב. $2(-3x^2+5x-1)$
ג. $(7x-2)4$	ד. $(1-2x)(-2)$
ה. $a(3a-1)$	ו. $b(b^2-3b+4)$
ז. $2x(5x+3)$	ח. $5x(x^2+2x-3)$
ט. $3t^2(4t-t^2+6)$	י. $\frac{5}{2}(4d^4-3d)d$

(3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $5x+(3x-2)+(-4-2x)$	ב. $7x+(-4x-5)+3x+(-1+7x)$
ג. $8-(2x-5)-(4x+2)$	ד. $-6x-(-3x-1)-(-7-4x)+1$

$$\text{ה. } (3-2x^2+4)2+3(x-x^2)-6(7-5x)+4x^2$$

$$\text{ו. } 3y^2-(y+1-2y^2)+6(5y-6)-(-y-4)3+5(y^2+1)-7$$

4 פשט את הביטויים הבאים :

$$\text{א. } (x-1)(x+2) \quad \text{ב. } (x+3)(x-7)$$

$$\text{ג. } (3-x)(x+4) \quad \text{ד. } (3x+4)(5x+1)$$

$$\text{ה. } 3(4x+1)(2x-3) \quad \text{ו. } -2(3x-1)(5-2x)$$

5 פשט את ערכי הביטויים הבאים :

$$\text{א. } (x-1)(x+3)+2(3-x)$$

$$\text{ב. } (a+4)(a-2)-(a+5)(a-3)$$

$$\text{ג. } (2m-3)(4m+3)+5(2m^2-6)$$

$$\text{ד. } -x^2y^2(x^3y+x^2)+2xy(2x^3y-x^4y^2)$$

תשובות סופיות:

$$\text{(1) א. } 6x^2 \quad \text{ב. } 28x^2 \quad \text{ג. } -24x^2 \quad \text{ד. } 32m^5 \quad \text{ה. } -6a^5 \quad \text{ו. } -2b^5$$

$$\text{ז. } 3ab \quad \text{ח. } 28a^2b^2 \quad \text{ט. } -2a^3b^2$$

$$\text{(2) א. } 6x-8 \quad \text{ב. } -6x^2+10x-2 \quad \text{ג. } 28x-8 \quad \text{ד. } -2+4x$$

$$\text{ה. } 3a^2-a \quad \text{ו. } b^3-3b^2+4b \quad \text{ז. } 10x^2+6x \quad \text{ח. } 5x^3+10x^2-15x$$

$$\text{ט. } 12t^3-3t^4+18t^2 \quad \text{י. } 10d^5-7.5d^2$$

$$\text{(3) א. } 6x-6 \quad \text{ב. } 13x-6 \quad \text{ג. } -6x+11 \quad \text{ד. } x+9 \quad \text{ה. } -3x^2+33x-28$$

$$\text{ו. } 10y^2+32y-27$$

$$\text{(4) א. } x^2+x-2 \quad \text{ב. } x^2-4x-21 \quad \text{ג. } -x^2-x+12$$

$$\text{ד. } 15x^2+23x+4 \quad \text{ה. } 24x^2-30x-9 \quad \text{ו. } 12x^2-34x+10$$

$$\text{(5) א. } x^2+3 \quad \text{ב. } 7 \quad \text{ג. } 18m^2-6m-39 \quad \text{ד. } -3x^5y^3+3x^4y^2$$

פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר:

סיכום כללי:

- נוסחת ריבוע של סכום/הפרש: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
- נוסחה להפרש ריבועים: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+5)^2$	ב. $(x+2)^2$	ג. $(4x+5)^2$
ד. $(6x+2)^2$	ה. $(7x+y)^2$	ו. $(5x+2y)^2$
ז. $(x^2+7)^2$	ח. $(x^2+y^2)^2$	ט. $(x^3+2y^2x)^2$

(2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-6)^2$	ב. $(x-2)^2$	ג. $(5-x)^2$
ד. $(6x-1)^2$	ה. $\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2$	ו. $\left(\frac{1}{3}x-5\right)^2$
ז. $(3m-2n)^2$	ח. $\left(x^2-\frac{3}{5}y\right)^2$	ט. $(x^2y^2-7)^2$

(3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-5)(x+5)$	ב. $(3+x)(x-3)$
ג. $(3x-1)(3x+1)$	ד. $(5-7x)(7x+5)$
ה. $\left(\frac{1}{2}x+6\right)\left(\frac{1}{2}x-6\right)$	ו. $\left(5y-\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{1}{4}x+5y\right)$
ז. $(x^2+y)(x^2-y)$	ח. $(3a^2b^3-4)(3a^2b^3+4)$

4 פשט את הביטויים הבאים :

א. $(x+1)(x+2)-3x$	ב. $(x-5)(5x-1)+2(4+x)$
ג. $x(2x-1)(2x+1)-4x^2(x+1)$	ד. $-(y+3x)(y-3x)+(y-3x)^2$
ה. $x(x+3)-(6+x)(6x+2)-(x+2)^2$	
ו. $-5(x+7)(x-7)+3(2x+5)(5-x)+(x+1)^2$	

תשובות סופיות:

א. $x^2+10x+25$	ב. x^2+4x+4	ג. $16x^2+40x+25$	1
ד. $36x^2+24x+4$	ה. $49x^2+14xy+y^2$	ו. $25x^2+20xy+4y^2$	
ז. $x^4+14x+49$	ח. $x^4+2x^2y^2+y^4$	ט. $x^6+4x^4y^2+4y^4x^2$	
א. $x^2-12x+36$	ב. x^2-4x+4	ג. $25-10x+x^2$	2
ד. $36x^2-12x+1$	ה. $9x^2-3x+\frac{1}{4}$	ו. $\frac{1}{9}x^2-3\frac{1}{3}x+25$	
ז. $9m^2-12mn+4n^2$	ח. $x^4-\frac{6}{5}x^2y+\frac{9}{25}y^2$	ט. $x^4y^4-14x^2y^2+49$	
א. x^2-25	ב. x^2-9	ג. $9x^2-1$	3
ה. $\frac{1}{4}x^2-36$	ו. $25y^2-\frac{1}{16}x^2$	ז. x^4-y^2	
א. x^2+2	ב. $5x^2-24x+13$	ג. $-4x^2-x$	4
ד. $18x^2-6xy$	ה. $-6x^2-39x-16$	ו. $-10x^2+17x+321$	

פירוק לגורמים של ביטויים אלגבריים:

סיכום כללי:

פירוק לגורמים הוא פעולה הפוכה לפתיחת סוגריים – נרצה להוציא את הגורמים המשותפים לאיברים מחוץ לסוגריים.

- פירוק לגורמים ע"י הוצאת איבר אחד משותף:

○ הוצאת מספר משותף: $2x - 8 = 2(x - 4)$

○ הוצאת אות משותפת: $x^2 - 12x = x(x - 12)$

○ הוצאת מספר ואות יחד: $3x^2 - 21x = 3x(x - 7)$

- פירוק לגורמים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר:

○ נוסחת הבינום של ניוטון: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

○ נוסחה להפרש ריבועים: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

שאלות:

- (1) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $3x - 12$ ב. $6y - 4$

ג. $20 - 8a$ ד. $4a^3 + 8b$

ה. $75m^2 + 25m + 15$ ו. $40a^2 - 8b^2 + 64c^2$

- (2) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $y^2 + 5y$ ב. $3x - 11x^3$

ג. $6y^2 + 5y^3 + 4y$ ד. $\frac{1}{2}a^7 - \frac{1}{4}a^5 + a^3$

3 פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף :

א. $2x^2 - 8x$	ב. $3t^2 + 12t$
ג. $5n^3 - 20n^2 + 50n$	ד. $8y^2 + 6y^3 - 2y^4$
ה. $4x^2y^2 + 16x^2y - 20xy^2$	ו. $27mn - 3n^2m + 9n^3m$

4 פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר :

א. $x^2 + 10x + 25$	ב. $x^2 + 12x + 36$
ג. $y^2 - 18y + 81$	ד. $y^2 - 22y + 121$
ה. $4x^2 + 4x + 1$	ו. $16y^2 - 8y + 1$
ז. $9x^2 - 24x + 16$	ח. $25x^2 + 70x + 49$

5 פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר :

א. $r^2 - 25$	ב. $x^2 - 81$
ג. $25y^2 - 49$	ד. $121x^2 - 1$
ה. $x^2y^2 - 4$	ו. $9y^4 - 169x^4$

6 פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף ונוסחאות הכפל המקוצר :

א. $y - y^3$	ב. $x^3 - 10x^2 + 25x$
ג. $m^4 - 1$	ד. $196x^4 - 140x^3 + 25x^2$

תשובות סופיות:

- א. $3(x-4)$ ב. $2(3y-2)$ ג. $4(5-2a)$ (1)
- ד. $4(a^3+2b)$ ה. $5(15m^2+5m+3)$ ו. $8(5a^2-b^2+8c^2)$
- א. $y(y+5)$ ב. $x(3-11x^2)$ ג. $y(6y+5y^2+4)$ (2)
- ד. $a^3\left(\frac{1}{2}a^4-\frac{1}{4}a^2+1\right)$
- א. $2x(x-4)$ ב. $3t(t+4)$ ג. $5n(n^2-4n+10)$ (3)
- ד. $2y^2(4+3y-y^2)$ ה. $4xy(xy+4x-5y)$ ו. $3mn(9-n-3n^2)$
- א. $(x+5)^2$ ב. $(x+6)^2$ ג. $(y-9)^2$ ד. $(y-11)^2$ (4)
- ה. $(2x+1)^2$ ו. $(4y-1)^2$ ז. $(3x-4)^2$ ח. $(5x+7)^2$
- א. $(r+5)(r-5)$ ב. $(x+9)(x-9)$ ג. $(5y+7)(5y-7)$ (5)
- ד. $(11x+1)(11x-1)$ ה. $(xy+2)(xy-2)$ ו. $(3y^2+13x^2)(3y^2-13x^2)$
- א. $y(1+y)(1-y)$ ב. $x(x-5)^2$ ג. $(m^2+1)(m+1)(m-1)$ (6)
- ד. $x^2(14x-5)^2$

פירוק הטרינום:

סיכום כללי:

טרינום משמעו תלת איבר מהצורה: $ax^2 + bx + c$ כאשר a, b ו- c הם מספרים כלשהם.

שיטת הטרינום מאפשרת לפרק את תלת האיבר ל-4 איברים ע"י פיצול האיבר bx לשני איברים באופן כזה שמאפשר להוציא גורם משותף.

הכלל הוא למצוא שני מספרים, m_1 ו- m_2 , שמקיימים: $m_1 \cdot m_2 = ac$ ו- $m_1 + m_2 = b$.
 לאחר מכן ניתן לפרק את הטרינום: $ax^2 + bx + c = ax^2 + m_1x + m_2x + c$.
 השלב האחרון הוא הוצאת גורם משותף מכל זוג: $\underbrace{ax^2 + m_1x} + \underbrace{m_2x + c}$.

הערה:

במקרה שנוסחת השורשים ידועה, ניתן להיעזר בה כדי למצוא את המספרים m_1 ו- m_2 באופן

הבא: $m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ולאחר מכן ניתן לכתוב את הטרינום

כמכפלה: $ax^2 + bx + c = a(x - m_1)(x - m_2)$. אם קיים פתרון (שורש) אחד $m_1 = m_2 = \frac{-b}{2a}$ אז

נכתוב: $ax^2 + bx + c = a(x - m_1)^2$ ואם לא קיימים פתרונות אז לא קיים פירוק כלל.

שאלות:

(1) פרק את הביטויים הבאים לפי פירוק טרינום:

- | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| א. $x^2 + 5x + 4$ | ב. $x^2 - 8x + 15$ | ג. $x^2 - 33x + 62$ |
| ד. $2x^2 + 7x - 15$ | ה. $3x^2 - 11x + 6$ | ו. $6x^2 + 5x + 1$ |
| ז. $2x^2 + x - 6$ | ח. $x^2 - 18x + 81$ | ט. $x^2 + 2x + 8$ |

(2) פרק את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחת השורשים.

הערה: במידה ולא למדת על נוסחת השורשים התעלם משאלה זו.

- | | |
|----------------------|--------------------|
| א. $6x^2 + 5x + 1$ | ב. $x^2 + 5x + 4$ |
| ג. $4x^2 + 20x + 25$ | ד. $3x^2 - x + 20$ |

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } (x+1)(x+4) \quad \text{ב. } (x-3)(x-5) \quad \text{ג. } (x-2)(x-31)$$

$$\text{ד. } (2x-3)(x+5) \quad \text{ה. } (3x-2)(x-3) \quad \text{ו. } (3x+1)(2x+1)$$

$$\text{ז. } (x+2)(2x-3) \quad \text{ח. } (x-9)^2 \quad \text{ט. אין פירוק.}$$

$$(2) \quad \text{א. } 6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) \quad \text{ב. } (x+1)(x+4) \quad \text{ג. } (2x+5)^2 \quad \text{ד. אין פירוק.}$$

שברים אלגברים:

סיכום כללי:

הגדרה:

שבר אלגברי מורכב משתי תבניות, אשר אחת מחלקת את השנייה.

$$\text{דוגמא לשברים אלגבריים: } \frac{x+1}{x+2}, \frac{3x}{x^2+1}, \frac{4}{x-x^3}$$

במקרה בו המכנה הוא מספר, לא מדובר בשבר אלגברי מכיוון שניתן לכתוב את

$$\text{הביטוי ללא צורך בחילוק בין ביטויים שונים כגון: } \frac{3x+5}{4} = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$

תחום הגדרה של שבר:

היות ושבר אלגברי הוא תבנית אשר יכולה לקבל ערכים שונים בעת הצבות שונות, חשוב להגביל את המספרים שניתן להציב באופן כזה שלא תתקבל חלוקה באפס.

$$\text{דוגמא: השבר } \frac{1}{x+4} \text{ לא מוגדר כאשר } x = -4 \text{ מכיוון שמתקבל: } \frac{1}{0}$$

במקרים אלו נדרוש **תנאי** על המשתנה אשר יכתב באופן הבא: $x \neq -4$ ומשמעו היא ש- x יכול לקבל על ערך מספרי אפשרי למעט -4, מכיוון שבמקרה זה השבר לא מוגדר.

כלל צמצום שברים אלגברים:

ניתן לצמצם שברים אלגברים ע"י הבאת המונה והמכנה למכפלה של ביטויים. במידה וקיימות פעולות החיבור והחיסור בין איברים שונים לא ניתן לבצע צמצום של איברים דומים בין המונה והמכנה. להלן מספר דוגמאות הנוגעות לצמצומים:

$$\bullet \text{ צמצום ע"י הוצאת גורם משותף: } \frac{2x+8}{x+4} = \frac{2(x+4)}{x+4} = \frac{2 \cdot 1}{1} = 2$$

$$\bullet \text{ צמצום ע"י נוסחת כפל מקוצר: } \frac{3x-15}{x^2-10x+25} = \frac{3(x-5)}{(x-5)^2} = \frac{3 \cdot 1}{x-5} = \frac{3}{x-5}$$

$$\bullet \text{ צמצום ע"י פירוק טרינום: } \frac{x^2-2x-3}{x^2-3x-4} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-4)} = \frac{x-3}{x-4}$$

שאלות:

(1) מצא את תחום ההגדרה של השברים האלגבריים הבאים:

א. $\frac{x+4}{x+3}$	ב. $\frac{5}{x-6}$
ג. $\frac{x+7}{2x-8}$	ד. $\frac{x^2+1}{x^2-4x}$
ה. $\frac{3}{x^2+2x+1}$	ו. $\frac{x^2}{x^2-4}$
ז. $\frac{6}{y^4-y^2}$	ח. $\frac{8x-2}{3x^3-15x^2+12x}$

(2) צמצם את השברים הבאים (במידה ולא ניתן צמצם הסבר מדוע):

א. $\frac{ax}{a}$	ב. $\frac{a-x}{a}$
ג. $\frac{a-ax}{a}$	ד. $\frac{x+1}{y+1}$
ה. $\frac{x}{x+y}$	ו. $\frac{6x}{6y}$
ז. $\frac{x^2y}{xy^2}$	ח. $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$
ט. $\frac{4x^2y}{xy}$	י. $\frac{3x^2}{x^2+3}$

(3) צמצם את השברים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{3x+12}{x+4}$	ב. $\frac{m^2+4m}{4m+16}$
ג. $\frac{2a-12}{a^2-6a}$	ד. $\frac{x^2-5x}{15-3x}$
ה. $\frac{3-18y^2}{6y^2-1}$	ו. $\frac{4x^3-2x^2}{6x-3}$
ז. $\frac{3y}{y^3-3y^2}$	ח. $\frac{3z^3-12z^2+4z}{z^2+5z}$

4) צמצם את השברים הבאים ע"י פירוק לגורמים וכתוב את תחום הגדרתם:

$\frac{8n - n^2}{n^2 - 16n + 64} \quad \text{ב.}$	$\frac{x^2 + 10x + 25}{2x + 10} \quad \text{א.}$
$\frac{4m^2 + 20m + 25}{4m^2 + 10m} \quad \text{ד.}$	$\frac{z^3 - 4z^2}{2z^2 - 16z + 32} \quad \text{ג.}$
$\frac{a^3 + 4a^2b + 4ab^2}{3ab + 6b^2} \quad \text{ו.}$	$\frac{18y^2 - 24y + 8}{2y - 3y^2} \quad \text{ה.}$

5) צמצם את השברים הבאים ע"י טרינום ריבועי וכתוב את תחום הגדרתם:

$\frac{m^2 - 12m + 32}{m - 4} \quad \text{ב.}$	$\frac{x + 2}{x^2 - 3x - 10} \quad \text{א.}$
$\frac{3z^2 + 26z + 16}{3z + 2} \quad \text{ד.}$	$\frac{4y - 10}{2y^2 + y - 15} \quad \text{ג.}$
$\frac{9n^2 - 12n}{4 + 5n - 6n^2} \quad \text{ו.}$	$\frac{x^2 + 5x - 36}{x^3 + 9x^2} \quad \text{ה.}$
$\frac{x^2 - 14x + 49}{x^2 + x - 56} \quad \text{ח.}$	$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 5x + 6} \quad \text{ז.}$
$\frac{m^3n - m^2n^2 - m^2 + mn}{2m^2n^3 + mn^2 - 3n} \quad \text{י.}$	$\frac{3a^2b - 10ab^2 + 3b^3}{-3a^3b + 11a^2b^2 - 6ab^3} \quad \text{ט.}$

תשובות סופיות:

(1) א. $x \neq -3$ ב. $x \neq 6$ ג. $x \neq 4$ ד. $x \neq 0, x \neq 4$

ה. $x \neq -1$ ו. $x \neq -2, x \neq 2$ ז. $y \neq 0, y \neq -1, y \neq 1$

ח. $x \neq 0, x \neq 1, x \neq 4$

(2) א. x ב. לא ניתן לצמצם ג. $1-x$

ד. לא ניתן לצמצם ה. לא ניתן לצמצם ו. $\frac{x}{y}$ ז. $\frac{x}{y}$

ח. לא ניתן לצמצם ט. $4x$ י. לא ניתן לצמצם

(3) א. $x \neq -4, 3$ ב. $\frac{m}{4}, m \neq -4$ ג. $\frac{2}{a}, a \neq 0, 6$

ד. $-\frac{x}{3}, x \neq 5$ ה. $-3, y \neq \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$ ו. $\frac{2x^2}{3}, x \neq \frac{1}{2}$

ז. $\frac{3}{y(y-3)}, y \neq 0, 3$ ח. $\frac{3z^2 - 12z + 4}{z+5}, z \neq 0, -5$

(4) א. $\frac{x+5}{2}, x \neq -5$ ב. $\frac{n}{8-n}, n \neq 8$ ג. $\frac{z^2}{2(z-4)}, z \neq 4$

ד. $\frac{2m+5}{2m}, m \neq 0, -\frac{5}{2}$ ה. $\frac{2(2-3y)}{y}, y \neq 0, \frac{2}{3}$ ו. $\frac{a(a+2b)}{3b}, b \neq 0, a \neq -2b$

(5) א. $\frac{1}{x-5}, x \neq 5, -2$ ב. $m-8, m \neq 4$ ג. $\frac{2}{y+3}, x \neq -3, \frac{5}{2}$

ד. $z+8, z \neq -\frac{2}{3}$ ה. $\frac{x-4}{x^2}, x \neq 0, -9$ ו. $\frac{-3n}{2n+1}, n \neq -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}$

ז. $\frac{x+2}{x+3}, x \neq -2, -3$ ח. $\frac{x-7}{x+8}, x \neq 7, -8$

ט. $\frac{3a-b}{a(2b-3a)}, a \neq 0, b \neq 0, a \neq 3b, 2b \neq 3a$ י. $\frac{m(m-n)}{n(2mn+3)}, mn \neq 1, -\frac{3}{2}, n \neq 0$

כפל וחילוק של שברים אלגברים:

סיכום כללי:

כפל שברים יתבצע ע"י הכפלת כל מונה בנפרד והכפלת כל מכנה בנפרד.
 חילוק שברים יתבצע ע"י לקיחת ההופכי של שבר המחלק וביצוע פעולת כפל.

$$\bullet \text{ דוגמא לכפל שברים: } \frac{x+1}{x^2} \cdot \frac{x}{3x+3} = \frac{x+1}{x^2} \cdot \frac{x}{3(x+1)} = \frac{\cancel{x}(x+1)}{3x^{\cancel{2}}(x+1)} = \frac{1}{3x}$$

$$\bullet \text{ דוגמא לחילוק שברים: } \frac{4x}{y} : \frac{12}{y^2+y} = \frac{4x}{y} \cdot \frac{y^2+y}{12} = \frac{\cancel{4}x}{\cancel{12}} \cdot \frac{\cancel{y}(y+1)}{\cancel{12}_3} = \frac{x(y+1)}{3}$$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

$$\text{א. } \frac{x}{3} \cdot \frac{x}{8} \quad \text{ב. } \frac{x}{3} \cdot \frac{9}{x^2}$$

$$\text{ג. } 7y \cdot \frac{5}{y^2} \quad \text{ד. } 6x^2 \cdot \frac{3}{40x}$$

$$\text{ה. } (x^2+3x) \cdot \frac{2}{3x+9} \quad \text{ו. } (a^2-25) \cdot \frac{20}{5a+25}$$

$$\text{ז. } \frac{w^2-9}{w} \cdot \frac{w^2}{2w+6} \quad \text{ח. } \frac{y+4}{y^2+16} \cdot \frac{y^2-16}{2y+8}$$

$$\text{ט. } \frac{z^2+30z+225}{6z+90} \cdot \frac{12}{2z-10} \quad \text{י. } \frac{5n^2}{n^2-121} \cdot \frac{2n^2+44n+242}{n+2} \cdot \frac{n^2+4n+4}{n}$$

(2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{x}{8} : \frac{x}{6}$	ב. $\frac{y}{25} : \frac{5}{y}$
ג. $a^2 : \frac{1}{6a}$	ד. $\frac{5}{6a} : a^2$
ה. $(d^2 - 3d) : \frac{5d - 15}{5d}$	ו. $\frac{t}{t+4} : \frac{3t}{t+4}$
ז. $\frac{y^2 + 8y + 16}{8y^2} : \frac{y^2 - 16}{7y^2}$	ח. $\frac{a^2 - 64}{a^2 - 36} : \frac{a+8}{a+6}$

תשובות סופיות:

א. $\frac{x^2}{24}$	ב. $\frac{3}{x}$	ג. $\frac{35}{y}$	ד. $\frac{9x}{20}$	ה. $\frac{2x}{3}$	(1)
ו. $4(a-5)$	ז. $\frac{w(w-3)}{2}$	ח. $\frac{y^2 - 16}{2y^2 + 32}$	ט. $\frac{z+15}{z-5}$	י. $\frac{10n(n+11)(n+2)}{n-11}$	
א. $\frac{3}{4}$	ב. $\frac{y^2}{125}$	ג. $6a^3$	ד. $\frac{5}{6a^3}$	ה. d^2	ו. $\frac{1}{3}$
ז. $\frac{7(y+4)}{8(y-4)}$	ח. $\frac{a-8}{a-6}$				

חיבור וחיסור של שברים אלגבריים:

סיכום כללי:

ביצוע פעולת החיבור והחיסור תתבצע באופן זהה לשברים מספריים. נרצה להרחיב את השברים כך שהמכנה של שניהם יהיה זהה, ולאחר מכן נחבר את המונים. כדי להרחיב את השברים נעזר בפעולת מציאת מכנה משותף. לשם כך נעזר בפירוקים השונים כדי להביא את הביטויים שבכל מכנה לצורתם המופשטת. דוגמא לחיבור שברים בעלי אותו מכנה:

$$\frac{1}{x} + \frac{x+1}{x} = \frac{1+(x+1)}{x} = \frac{x+2}{x}$$

דוגמא לחיבור מספר לשבר אלגברי:

$$2 + \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+2)}{x+2} + \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+2)+3}{x+2} = \frac{2x+7}{x+2}$$

דוגמא לחיבור שברים עם מכנים שונים (ע"י פעולת מכנה משותף):

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{x}{x(x+1)} + \frac{x+1}{x(x+1)} = \frac{x+x+1}{x(x+1)} = \frac{2x+1}{x(x+1)}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י שימוש בפירוק לגורמים (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{1}{x^2-3x} + \frac{3}{x-3} = \frac{1}{x^2-3x} + \frac{3x}{x^2-3x} = \frac{1+3x}{x^2-3x}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{3}{x^2-6x+9} - \frac{2}{x^2-9} = \frac{3}{(x-3)^2} - \frac{2}{(x-3)(x+3)} = \frac{3(x+3)-2(x-3)}{(x-3)^2(x+3)} = \frac{x+15}{(x-3)^2(x+3)}$$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{a}{6} + \frac{a-5}{6}$ ב. $\frac{5}{x} + \frac{4x+3}{x}$ ג. $\frac{x-2}{x+1} + \frac{3+4x}{x+1}$ ד. $\frac{7z}{2z-3} - \frac{4z}{2z-3} - \frac{z+3}{2z-3}$	א. $\frac{1}{ab} - \frac{5}{bc}$ ב. $\frac{1}{xy} + \frac{5}{yz} + \frac{4}{xz}$ ג. $\frac{c}{ab} - \frac{ad}{bc} + \frac{2b}{cd}$ ד. $-\frac{5}{x} + \frac{x+1}{xy^2}$ ה. $\frac{1}{(y+1)^2} + \frac{3}{y+1}$ ו. $\frac{3}{z(z-3)} - \frac{2}{z(z-2)}$
---	--

(2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $1 + \frac{3}{y^2}$ ב. $3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x}$ ג. $\frac{x}{9yz} + \frac{z}{3y^2x} + \frac{3-y}{12xz} - 3\frac{1}{2}$	א. $1 - \frac{2}{x}$ ב. $2 + \frac{2}{x+1}$ ג. $\frac{a+1}{a^2} - \frac{3-a}{4a} - 3$
---	---

(3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{x+1} + \frac{1}{x}$ ב. $\frac{4}{y+2} - \frac{3}{y}$ ג. $\frac{a+1}{a+2} + \frac{3}{a}$	א. $1 + \frac{3}{y^2}$ ב. $3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x}$ ג. $\frac{x}{9yz} + \frac{z}{3y^2x} + \frac{3-y}{12xz} - 3\frac{1}{2}$
--	---

(4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{x+1} + \frac{1}{x}$ ב. $\frac{4}{y+2} - \frac{3}{y}$ ג. $\frac{a+1}{a+2} + \frac{3}{a}$	א. $1 + \frac{3}{y^2}$ ב. $3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x}$ ג. $\frac{x}{9yz} + \frac{z}{3y^2x} + \frac{3-y}{12xz} - 3\frac{1}{2}$
--	---

5 פשט את הביטויים הבאים :

$$\frac{3}{x^2-16} + \frac{2}{(x+4)^2} \quad \text{ב.}$$

$$\frac{24}{a^2-9} + \frac{4}{a+3} \quad \text{א.}$$

$$\frac{3z}{z^2+4z+3} - \frac{z+0.5}{z^2+2z+1} \quad \text{ד.}$$

$$\frac{y}{(y-2)^2} + \frac{3y}{4-y^2} \quad \text{ג.}$$

$$\frac{2a+3}{2a^2+15a+7} + \frac{a+3}{a^2+14a+49} \quad \text{ו.}$$

$$\frac{x-1}{x^2+3x-40} + \frac{2}{-x^2+8x-15} \quad \text{ה.}$$

$$\frac{1}{a-b} + \frac{2}{a+2b} - \frac{3b}{a^2+ab-2b^2} \quad \text{ח.}$$

$$\frac{x}{x-3} + \frac{9-x}{x^2-8x+15} \quad \text{ז.}$$

6 פשט את הביטויים הבאים :

$$\left(\frac{2}{x}+1\right) \cdot \frac{x^2}{7x+14} \quad \text{ב.}$$

$$\frac{4}{x} \cdot \frac{x^2}{8} + \frac{9}{x+1} \cdot \frac{x+1}{18} \quad \text{א.}$$

$$\left(3x - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}\right) : \frac{6x^3+2x-4}{x^2} \quad \text{ד.}$$

$$\frac{7}{y^2} : \frac{6}{y^3} - \frac{y-4}{63} \cdot \frac{3y-4}{y^2-8y+16} \quad \text{ג.}$$

$$\left(\frac{2x+1}{20x^2-28x-3} - \frac{3x+1}{30x^2-17x-2}\right) : \frac{18x+3}{6x^2-13x+6} \quad \text{ה.}$$

תשובות סופיות:

$$1. \quad \begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{2a-5}{6} & \text{ב.} & \frac{4x+8}{x} & \text{ג.} & \frac{5x+1}{x+1} & \text{ד.} & 1 \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{c-5a}{abc} & \text{ב.} & \frac{z+5x+4y}{xyz} & \text{ג.} & \frac{c^2d - a^2d^2 + 2ab^2}{abcd} \end{array} \quad (2)$$

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{x-2}{x} & \text{ב.} & \frac{y^2+3}{y^2} & \text{ג.} & \frac{2x+4}{x+1} & \text{ד.} & \frac{-5y^2+x+1}{xy^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{9x-2}{3x} & \text{ב.} & \frac{-11a^2+a+4}{4a^2} & \text{ג.} & \frac{4x^2y+12z^2+9y^2-3y^3-126xy^2z}{36xy^2z} & \text{ד.} & \frac{1}{(z-2)(z-3)} \end{array} \quad (3)$$

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{4x+1}{x(x+1)} & \text{ב.} & \frac{y-6}{y(y+2)} & \text{ג.} & \frac{a^2+4a+6}{a(a+2)} \end{array} \quad (4)$$

$$\text{ד.} \quad -\frac{4z+21}{3z(z+3)}$$

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{4}{a-3} & \text{ב.} & \frac{5x+4}{(x-4)(x+4)^2} & \text{ג.} & \frac{2y(4-y)}{(y-2)^2(y+2)} \end{array} \quad (5)$$

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{(4z+3)(z-1)}{2(z+1)^2(z+3)} & \text{ב.} & \frac{x^2-6x-13}{(x+8)(x-5)(x-3)} & \text{ג.} & \frac{4(a^2+6a+6)}{(a+7)^2(2a+1)} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \frac{x-3}{x-5} \\ \text{ב.} & \frac{3}{a+2b} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{x}{7} & \text{ב.} & \frac{x+1}{2} & \text{ג.} & \frac{147y^2-594y+8}{126(y-4)} & \text{ד.} & \frac{1}{2} \end{array} \quad (6)$$

$$\text{ה.} \quad \frac{1}{3(10x+1)}$$

שברים כפולים:

סיכום כללי:

שבר כפול מורכב באופן הבא: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ כאשר מתקיים: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

נובע מכאן כי ניתן לצמצם ביטויים בין שני המכנים או שני המונים בלבד.

שאלות:

פשט את הביטויים הבאים:

$\frac{y+1}{2y+2} \quad (2)$	$\frac{4x}{12} \quad (1)$
$\frac{5}{t^2-81}$	$\frac{x}{5}$
$\frac{9t^2}{6t+54} \quad (4)$	$\frac{t}{30t^2} \quad (3)$
$\frac{4x}{x+1} \quad (6)$	$\frac{3y^3-y^2}{25} \quad (5)$
$\frac{x^2+2x+1}{t^2-t-20}$	$\frac{y^2}{3-y}$
$\frac{16t+8}{25-t^2} \quad (8)$	$\frac{8c^2}{3c^3-9c^2-12c} \quad (7)$
$\frac{2t+1}{x^2+2x+1}$	$\frac{15c+15}{1-4+\frac{x}{x+1}} \quad (9)$
	$\frac{1-3x(x+1)}{5x+5}$

תשובות סופיות:

$$\frac{x^2}{3} \quad (1)$$

$$2.5 \quad (2)$$

$$\frac{1}{6t^3} \quad (3)$$

$$\frac{t-9}{54t^2} \quad (4)$$

$$\frac{(3y-1)(3-y)}{25} \quad (5)$$

$$\frac{x(x+1)}{2} \quad (6)$$

$$\frac{c}{c-4} \quad (7)$$

$$\frac{t+4}{-8(t+5)} \quad (8)$$

$$\frac{5}{x} \quad (9)$$

מתמטיקה 55004 לתלמידי לוגיסטיקה

פרק 2 - חזרה כללית - משוואות אלגבריות

תוכן העניינים

1. משוואות ממעלה ראשונה 47
2. מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה 49
3. משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון 52
4. משוואה ממעלה שנייה 53
5. משוואות דו-ריבועיות 55
6. משוואות עם פרמטרים 57
7. משוואות עם שורשים 59
8. משוואות עם ערך מוחלט 61
9. מערכת משוואות ממעלה שנייה 62
10. משוואות מתקדמות מסכמות 64
11. פישוט ביטויים ומשוואות ממעלה שלישית 67

משוואה ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה היא מהצורה: $ax = b$ (כלומר, החזקה של הנעלם היא 1).

פתרון של משוואה ממעלה ראשונה הוא $x = \frac{b}{a}$ כאשר $a \neq 0$.

שלבי הפתרון הם:

1. ביצוע מכנה משותף (במידה וצריך).
2. פתיחת סוגריים אם ישנם.
3. העברת אגפים וכינוס אברים דומים (בידוד הנעלם באגף אחד והמספרים באגף שני).
4. בידוד הנעלם ומציאתו ע"י חילוק במקדם שלו.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות ממעלה ראשונה):

- | | |
|-----------------------------|---------------------------------------|
| א. $6x + 2 = 8$ | ב. $7 - 2x = 7$ |
| ג. $2x + x = 24$ | ד. $2x + 6 = 8 + x$ |
| ה. $-7x + 5 + 2x = 4x - 13$ | ו. $6x - 3 + 5 - 7x = x - 5x - 7$ |
| ז. $2 - 5x + 7 = -3x + 8$ | ח. $x - 2 + 5x = 4 - 3x - 5 + 7x + 7$ |

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פתיחת סוגריים):

- | | |
|------------------------------|-------------------------------------|
| א. $3(x - 1) - 4 = 2$ | ב. $7x - 4(3 - 4x) = -x$ |
| ג. $6(4 - x) - (6 - x) = 3x$ | ד. $5x - (3x - 7)4 = 21$ |
| ה. $x(x - 5) = x^2 - 7x + 8$ | ו. $(7 - x)(1 - x) - (x - 3)^2 = 0$ |

3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה מספרי):

$$\begin{array}{ll}
 \text{א. } \frac{x}{3} - \frac{x}{9} = -4 & \text{ב. } \frac{4x}{15} - \frac{3x}{10} = 1 \\
 \text{ג. } \frac{2}{3}x + \frac{4}{5}x = x - \frac{7}{15} & \text{ד. } \frac{5x+1}{6} - \frac{6x-1}{5} = \frac{3x+1}{4} - 1 \\
 \text{ה. } \frac{2}{5}(x-3) - \frac{3}{15}(4-x) = x+2 & \text{ו. } 5\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{7}\right) - x = 1
 \end{array}$$

4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם נעלם במכנה):

$$\begin{array}{ll}
 \text{א. } \frac{1}{4} - \frac{2}{x} = 0 & \text{ב. } \frac{1}{2} - \frac{x}{x-1} = 0 \\
 \text{ג. } \frac{3}{x} = \frac{1}{x+2} & \text{ד. } \frac{5}{2x-1} = \frac{4}{3x+2} \\
 \text{ה. } \frac{x+5}{3x^2} - \frac{1}{6x} = \frac{1}{x} & \text{ו. } \frac{1}{4x} + \frac{3}{x} = \frac{13}{2}
 \end{array}$$

5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה משותף ע"י פירוק לגורמים):

$$\begin{array}{ll}
 \text{א. } \frac{x^2+2}{3x^2+5x} = \frac{3x-1}{9x+15} & \text{ב. } \frac{7}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{2-2x} = 0 \\
 \text{ג. } \frac{3}{(2-x)^2} + \frac{5}{12-3x^2} = 0 & \text{ד. } \frac{4x^2-24x+36}{x-3} = 12
 \end{array}$$

תשובות סופיות:

- 1) א. $x=1$ ב. $x=0$ ג. $x=8$ ד. $x=2$ ה. $x=2$ ו. $x=-3$
- א. $x=\frac{1}{2}$ ב. $x=4$
- 2) א. $x=3$ ב. $x=\frac{1}{2}$ ג. $x=2\frac{1}{4}$ ד. $x=1$ ה. $x=4$ ו. $x=-1$
- 3) א. $x=-18$ ב. $x=-30$ ג. $x=-1$ ד. $x=1$ ה. $x=-10$ ו. $x=-21$
- 4) א. $x=8$ ב. $x=-1$ ג. $x=-3$ ד. $x=-2$ ה. $x=2$ ו. $x=\frac{1}{2}$
- 5) א. $x=-6$ ב. $x=-7$ ג. $x=-7$ ד. $x=6, x \neq 3$

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

הגדרה:

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (ליניאריות) היא מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

כאשר a_1, b_1, c_1 ו- a_2, b_2, c_2 הם מקדמים מספריים.

$$\cdot \begin{cases} y = 3x - 1 \\ \frac{x + 3}{2} = y + 6 \end{cases}, \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} : \text{דוגמאות למערכות של משוואות}$$

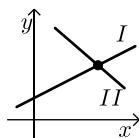
פתרון של מערכת משוואות:

פתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור המקיים את כל המשוואות שבמערכת.

הצגה גרפית של מערכת משוואות:

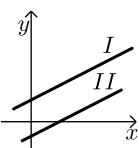
פתרון גרפי של מערכת משוואות הוא נקודת החיתוך של הישרים המייצגים כל משוואה.

יתכנו שלושה מצבים הדדיים בין שני ישרים:



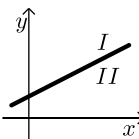
- הישרים נחתכים:

במקרה זה נקודת החיתוך תהיה פתרון המערכת.



- הישרים מקבילים:

במקרה זה לא יהיה פתרון למערכת.



- הישרים מתלכדים:

במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות למערכת המשוואות.

פתרון אלגברי של מערכת משוואות:

- פתרון ע"י שיטת ההצבה :
נבודד את אחד הנעלמים ממשוואה אחת ונציב אותו במשוואה השנייה.
נבחר בשיטה זו במקרים בהם קל לבודד נעלם באחת המשוואות.
 - פתרון ע"י השוואת מקדמים :
1. כופלים (או מחלקים) משוואה אחת (או שתיהן) במספר השונה מאפס כך שתתקבלנה משוואות שקולות בעלות מקדמים נגדיים או זהים עבור אחד המשתנים.
 2. מחברים (או מחסרים) את המשוואות ומקבלים משוואה חדשה עם נעלם אחד.
 3. מוצאים את ערך הנעלם מהמשוואה החדשה ומציבים אותו באחת המשוואות המקוריות למציאת ערך הנעלם השני.

הערה:

נוח להשתמש בשיטת השוואת המקדמים ע"י כך שמעבירים את המערכת הנתונה למערכת שקולה שבה המשתנים באגף אחד והמספר החופשי באגף השני.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות :

$\begin{cases} -3x + 2y = -16 \\ x = 5y + 14 \end{cases} \text{ ג.}$	$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \text{ ב.}$	$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ y = 5 \end{cases} \text{ א.}$
$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 7y = 11 \end{cases} \text{ ו.}$	$\begin{cases} -5x + 7y = -26 \\ x + 3y = -8 \end{cases} \text{ ה.}$	$\begin{cases} 5x - 2y = -2 \\ x + 4y = 4 \end{cases} \text{ ד.}$

(2) פתור את המשוואות הבאות :

$\begin{cases} 5x + 2y = 14 \\ 5x + 3y = 23 \end{cases} \text{ ב.}$	$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x - 3y = 3 \end{cases} \text{ א.}$
$\begin{cases} 4x = 3y - 29 \\ 5y = 9 - 13x \end{cases} \text{ ד.}$	$\begin{cases} 5y = 2x \\ 4x = 5y + 8 \end{cases} \text{ ג.}$

(3) פתור את המשוואות הבאות :

$\begin{cases} 2(x - y) + 4y = 1 + x \\ 2 - 7y + x = 3(x - y) \end{cases} \text{ ב.}$	$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 4x + 8y = 5 \end{cases} \text{ א.}$
---	--

4) פתור את המשוואות הבאות :

$$\begin{cases} \frac{x-3}{8} - \frac{x+y}{16} = \frac{y-1}{4} & \text{ב.} \\ 3(2x-y) - 4x - 11 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y - x + 2 = 4x + 2 - 3y & \text{א.} \\ 2x - 3 - y = 5y - 4x + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3x-1}{4} - \frac{2}{5}(x-y) = \frac{3}{10}(x+3) & \text{ג.} \\ \frac{x+1}{4} - \frac{y}{2} = 1 \end{cases}$$

5) פתור את המשוואות הבאות :

$$\begin{cases} 4x - \frac{7}{y} = -3 & \text{ג.} \\ 5x + \frac{2}{y} = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = 2 & \text{ב.} \\ \frac{9}{x} - \frac{4}{y} = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 4 & \text{א.} \\ \frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4 \end{cases}$$

6) פתור את המשוואות הבאות :

$$\begin{cases} xy = 20 & \text{ב.} \\ y(3x-4) = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(y+2) + y = xy - 5 & \text{א.} \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 4xy = 22 & \text{ג.} \\ 6x + xy = -20 \end{cases}$$

תשובות סופיות:

1) א. (2,5) ב. (-7,-10) ג. (4,-2) ד. (0,1) ה. (1,-3) ו. (-2,3)

2) א. $(4, \frac{1}{3})$ ב. $(-\frac{4}{5}, 9)$ ג. (4,1.6) ד. (-2,7)

3) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות.

4) א. (6,5) ב. (7,1) ג. (7,2)

5) א. (1,1) ב. (-3,1) ג. (1,1)

6) א. (-1,-3) ב. (2,10) ג. (-2,4)

משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה:

למשוואה ממעלה ראשונה מהצורה: $ax = b$ יתכן פתרון יחיד אם ורק אם $a \neq 0$
 מכיוון שניתן לחלק ולכתוב: $x = \frac{b}{a}$.

כאשר $a = 0$ מתקבלת המשוואה $0 \cdot x = b$ ויתכנו שני מצבים:

1. אם $b = 0$ את המשוואה היא $0x = 0$ ויש אינסוף פתרונות המקיימים אותה.
2. אם $b \neq 0$ את המשוואה היא $0x = b \neq 0$ ואין אף ערך של x המקיים אותה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$x + 4 = 6 + x \quad (1) \qquad 3x + 6 - x = 4 + 2x + 2 \quad (2)$$

$$6(x - 2) = 2x + 5 + 4x \quad (3) \qquad 5x - 3 + x = 4x + 2x - 3 \quad (4)$$

$$(5) \quad \text{נתונה המשוואה: } 3 - 2(x + 2) = 5x + \square$$

- א. איזה מספר יש להציב ב- \square על מנת שפתרון המשוואה יהיה 1?
- ב. איזה מספר יש להציב ב- \square על מנת שפתרון המשוואה יהיה 0?
- ג. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- \square על מנת שלמשוואה יהיו אינסוף פתרונות.
- ד. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- \square על מנת שלמשוואה לא יהיה פתרון.

תשובות סופיות:

- (1) אף פתרון.
- (2) אינסוף פתרונות.
- (3) אין פתרון.
- (4) אינסוף פתרונות.
- (5) א. -8 ב. -1 ג. $-7x - 1$
 ד. $-7x + k$ כאשר k הוא מספר כלשהו השונה מ-1.

משוואה ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

משוואה מהצורה: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), נקראת משוואה ריבועית. פתרונות המשוואה יסומנו ב- x_1 ו- x_2 ויחושבו לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

למשוואה ריבועית יתכנו שלושה סוגים של פתרונות:

- משוואה עם שני פתרונות ממשיים שונים.**
 אם מתקבל מספר חיובי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים.
 דוגמא: $x^2 + 5x - 4 = 0$.
- משוואה עם פתרון ממשי אחד בלבד.**
 אם מתקבל אפס בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד בלבד.
 דוגמא: $x^2 + 4x + 4 = 0$.
- משוואה ללא פתרונות ממשיים כלל.**
 אם מתקבל מספר שלילי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה לא יהיו פתרונות ממשיים כלל.
 דוגמא: $x^2 + x + 4 = 0$.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

ב. $-x^2 + 10x - 16 = 0$

ד. $2x^2 - 6x + 5 = 0$

א. $x^2 + 3x - 10 = 0$

ג. $25x^2 - 20x + 4 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות:

ב. $-x(x-5) = (1-3x)(1-x) + 4$

ד. $(2x-1)^2 + x(2x+3) = (x-1)(x-7)$

א. $4x^2 - 5x + 7 = 4 - x^2 + 13$

ג. $2(x-5)^2 - (2x-3)^2 = 10x + 21$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת b):

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & x^2 - 36 = 0 \\ \text{ב.} & 32x^2 - 18 = 0 \\ \text{ג.} & 4x - x(x+2) = 3(x-1) - x - 6 \\ \text{ד.} & (2x-1)^2 + (2x+1)^2 = 10 \end{array}$$

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת c):

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & -7x^2 - 14x = 0 \\ \text{ב.} & 5x^2 - x = 0 \\ \text{ג.} & 6x(x-2) - 1 = 4x - 3(x+1) + 2 \\ \text{ד.} & (5x-2)^2 = (x-2)(x+3) + 10 \end{array}$$

(5) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \frac{4x+1}{3} - \frac{x+2}{2} = \frac{2}{x} \\ \text{ב.} & \frac{x^2-9}{x+3} + x = x^2 - 18 \\ \text{ג.} & \frac{3}{2x+2} - \frac{2x-5}{2(x-1)^2} - \frac{4}{1-x^2} = 0 \\ \text{ד.} & \frac{x}{2x^2-72} + \frac{2}{x^2+12x+36} = \frac{8x-15}{24-4x} + 2 \end{array}$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{ll} \text{(1)} & \text{א. } x_1 = 2, x_2 = -5 \quad \text{ב. } x_1 = 2, x_2 = 8 \\ & \text{ג. } x = \frac{2}{5} \quad \text{ד. אין פתרון.} \\ \text{(2)} & \text{א. } x_1 = 2, x_2 = -1 \quad \text{ב. } x_1 = 1, x_2 = 1\frac{1}{4} \\ & \text{ג. } x_1 = 1, x_2 = -10 \quad \text{ד. } x_1 = 0.6, x_2 = -2 \\ \text{(3)} & \text{א. } x = \pm 6 \quad \text{ב. } x = \pm \frac{3}{4} \\ & \text{ג. } x = \pm 3 \quad \text{ד. } x = \pm 1 \\ \text{(4)} & \text{א. } x_1 = 0, x_2 = -2 \quad \text{ב. } x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{5} \\ & \text{ג. } x_1 = 0, x_2 = 2\frac{1}{6} \quad \text{ד. } x_1 = 0, x_2 = \frac{7}{8} \\ \text{(5)} & \text{א. } x_1 = 2, x_2 = -1.2 \quad \text{ב. } x = 5, x \neq -3 \\ & \text{ג. } x_1 = 0, x_2 = -5 \quad \text{ד. } x_1 = -7.6, x_2 = -4\frac{2}{7} \end{array}$$

משוואות דו-ריבועיות:

סיכום כללי:

משוואה דו-ריבועית היא משוואה מהצורה: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ כאשר הנעלם הוא x .
 פתרון המשוואה יבוצע ע"י מעבר לפרמטר: $x^2 = t \rightarrow at^2 + bt + c = 0$ ומציאתו.
 לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה ולמצוא את ערכי x .

ניתן להביא משוואות לצורה זו ולהגדיר ביטוי המופיע בחזקות 2 ו-4
 כגון: $(x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1) - 2 = 0$ באמצעות פרמטר: $t = x^2 - 1$
 ובכך לפתור משוואה: $t^2 + 3t - 2 = 0$ ולהחזיר את ההצבה עבור מציאת x .
 דרך הפתרון תקפה לכל משוואה בה הנעלם מופיע בחזקות כפולות כגון 3 ו-6, או 4 ו-8.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- | | |
|--|---|
| $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ (2) | $5x^4 + 3x^2 - 8 = 0$ (1) |
| $x^2(x^2 + 1) = 10(3x^2 - 10)$ (4) | $13x^2(3x^2 - 1) - 2 = 3(x^2 - 1)(x^2 + 1)$ (3) |
| $x^3 + 4 = \frac{32}{x^3}$ (6) | $x^6 + x^3 = 56$ (5) |
| $x^8 - 4x^4 - 50 = 31x^4 - 84$ (8) | $x - 9\sqrt{x} + 14 = 0$ (7) |
| $(2x^2 - x)^2 - 4(2x^2 - x) + 3 = 0$ (10) | $125x^6 - 1 = 124(x^6 + x^3 + 1)$ (9) |
| $\frac{21}{x^2 - 4x + 10} = 6 + x^2 - 4x$ (12) | $(x^2 + 2x)^2 + 7x^2 + 14x = -6$ (11) |
| $\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{7}{6} - \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2}$ (14) | $\frac{12}{x^2 + 2x - 8} = 1 + \frac{7.5}{x^2 + 2x - 3}$ (13) |
| $\frac{x^2 - 1}{4x^2 - 28} + 2 = \frac{9}{x^4 - 8x^2 + 7} + \frac{x^2}{2x^2 - 2}$ (16) | $\frac{3}{3x^2 - 15} + \frac{1}{x^2 + 5} = \frac{10}{x^4 - 25}$ (15) |
| $\frac{3x^4}{(x+2)^2} + \frac{3x^2}{x+2} = 6$ (18) | $\left(2x + \frac{3}{x}\right)^2 + 35 = 12\left(2x + \frac{3}{x}\right)$ (17) |
| $(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 5x - 8) = -24$ (20) | $(2x - x^2 + 3)(2x - x^2 - 2) = 0$ (19) |

תשובות סופיות:

$$x = \pm 1 \quad (1)$$

$$x = \pm 1, \pm \sqrt{2} \quad (2)$$

$$x = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3} \quad (3)$$

$$x = \pm 2, \pm 5 \quad (4)$$

$$x_1 = \sqrt[3]{7}, x_2 = -2 \quad (5)$$

$$x = -2, \sqrt[3]{4} \quad (6)$$

$$x_1 = 4, x_2 = 49 \quad (7)$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{34}, x_{3,4} = \pm 1 \quad (8)$$

$$x = 5, -1 \quad (9)$$

$$x_1 = 1.5, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = -\frac{1}{2} \quad (10)$$

$$x = -1 \quad (11)$$

$$x_{1,2} = 1, 3 \quad (12)$$

$$x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 3.06, x_4 = -5.06 \quad (13)$$

$$x_1 = 0, x_2 = -2 \quad (14)$$

(15) אין פתרונות.

$$x = \pm \sqrt{\frac{3}{7}} \quad (16)$$

$$x = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 3 \quad (17)$$

$$x = -1, 2 \quad (18)$$

$$x = 3, -1 \quad (19)$$

$$x = \pm 1, 4, 6 \quad (20)$$

משוואות עם פרמטרים:

סיכום כללי:

משוואה עם פרמטר הינה משוואה שמכילה שני סוגים של גדלים – משתנים ופרמטרים. את המשתנים מקובל לסמן באותיות x , y , z ואת הפרמטרים מסמנים בשאר האותיות. פתרון המשוואה יתקבל ע"י בידוד המשתנה כך שיבוטא באמצעות הפרמטרים שבמשוואה.

למשל פתרון המשוואה: $mx=4$ (כאשר x הוא הנעלם ו- m הוא פרמטר) הוא $x = \frac{4}{m}$

אשר מבוטא באמצעות הפרמטר m .

בכתיבת פתרון של משוואה עם פרמטרים יש לציין את תחום ההגדרה של הפרמטר עבורו הפתרון הוא בעל משמעות. בדוגמא הנ"ל תחום ההגדרה הוא $m \neq 0$.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

$$\text{א. } 3x - b = (b + 1)x - 6 \quad \text{ב. } \frac{1}{3}(a - 3x) = \frac{1}{a}(ax - 3)$$

$$\text{ג. } (x - 2a)(x - 2b) = x^2 - 2(a^2 + b^2) \quad \text{ד. } \frac{m+1}{x-1} = \frac{m-1}{x+1}$$

$$\text{ה. } \frac{x}{a^2 - a} - \frac{1}{2a} = \frac{ax + x}{2a^3 - 4a^2 + 2a} - \frac{2}{a^3 - 2a^2 + a}$$

(2) פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\text{א. } \begin{cases} x + my = 1 \\ x + y = m \end{cases} \quad \text{ב. } \begin{cases} ax + y = 2 \\ x + ay = 4 \end{cases}$$

$$\text{ג. } \begin{cases} \frac{x}{m} + y = m \\ x - m^2 y = 1 \end{cases} \quad \text{ד. } \begin{cases} (m-1)x - (2m+3)y = 5 \\ (m+2)x - (2m-1)y = 10m \end{cases}$$

$$\text{ה. } \begin{cases} (2a+b)x - (2a-b)y = 8ab \\ (2a-b)x + (2a+b)y = 8a^2 - 2b^2 \end{cases}$$

(3) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

$$\text{א. } x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \quad \text{ב. } x^2 - 2x + 4a = a^2 + 3$$

$$\text{ג. } x^2 + m(x+10) = 2m^2 - 5x \quad \text{ד. } \frac{1}{a-x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+x} = 0$$

$$\text{ה. } (m^2 + 1)x^2 - m^2x - 1 = 0 \quad \text{ו. } \frac{a}{x} + \frac{1}{b} = \frac{x}{a} + b$$

$$\text{ז. } x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$$

תשובות סופיות:

$$\text{(1) א. } x = \frac{b-6}{2-b}, b \neq 2 \quad \text{ב. } x = \frac{a^2+9}{6a}, a \neq 0 \quad \text{ג. } x = a+b \quad \text{ד. } x = -m \quad \text{ה. } x = a+1$$

$$\text{(2) א. } m \neq 1, (m+1, -1) \quad \text{ב. } a \neq \pm 1, \left(\frac{2a-4}{a^2-1}, \frac{4a-2}{a^2-1} \right)$$

$$\text{ג. } m \neq 0-1, \left(m^2 - m + 1, \frac{m-1}{m} \right) \quad \text{ד. } m \neq 1, -2, (2m+1, m-2)$$

$$\text{ה. } b \neq \pm 2a, (2a+b, 2a-b)$$

$$\text{(3) א. } x = m+1, m-1 \quad \text{ב. } x = a-1, 3-a \quad \text{ג. } x = m-5, -2m$$

$$\text{ד. } a \neq 0, x \neq \pm a, x = \pm a\sqrt{3} \quad \text{ה. } x = 1, -\frac{1}{m^2+1}$$

$$\text{ו. } a, b \neq 0, x = \frac{a}{b}, -ab \quad \text{ז. } a \neq \pm b, x = \frac{a+b}{a-b}, \frac{a-b}{a+b}$$

משוואות עם שורשים:

סיכום כללי:

פתרון משוואה מהצורה $\sqrt{x} = a$ יתקבל ע"י העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה באופן הבא: $(\sqrt{x})^2 = (a)^2 \rightarrow x = a^2$.

הערות:

- (1) יש לזכור בעת העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה יש לבדוק את כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבתם במשוואה המקורית.
- (2) למשוואה מהצורה $\sqrt{x} = a$ שבה $a < 0$ אין פתרון.
- (3) יש לסדר תחילה משוואות שבהן הביטוי עם שורש אינו מבודד.
- (4) במשוואות שבהן יותר מביטוי אחד עם שורש יש לבודד תחילה את אחד הביטויים, להעלות בריבוע ולאחר מכן לחזור על התהליך ולבצע העלאה בריבוע פעם נוספת.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- | | |
|--|---|
| $\sqrt{x+2} = x$ (2) | $\sqrt{2x+5} = 7$ (1) |
| $\sqrt{2x+7} + 4 = x$ (4) | $\sqrt{3x+1} + x = 13$ (3) |
| $\sqrt{10x+6} + 9 = x$ (6) | $\sqrt{x-1} + 3 = x$ (5) |
| $\sqrt{24-x} + 3 = 2x$ (8) | $\sqrt{x+6} - 2 = 2x$ (7) |
| $2x = 16 - 3\sqrt{x-1}$ (10) | $\sqrt{x+16} + 4 = 2x$ (9) |
| $\sqrt{x^2 - 5x + 12} = 2\sqrt{6-x}$ (12) | $\sqrt{3x+5} = \sqrt{x+17}$ (11) |
| $\sqrt{2x-1} + 3 = \sqrt{7x+1}$ (14) | $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2x-5} = \sqrt{11-x^2}$ (13) |
| $\sqrt{2x-3} + \sqrt{3-x} = 2$ (16) | $\sqrt{9x-8} - 3\sqrt{x+4} = -2$ (15) |
| $\sqrt{2x-2} + \sqrt{5x-4} = \sqrt{3x-2}$ (18) | $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4x+1}$ (17) |
| | $3\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} = 2\sqrt{x+2}$ (19) |

תשובות סופיות:

- | | |
|---------------------------|---------------|
| $x = 2$ (2 | $x = 22$ (1 |
| $x = 9$ (4 | $x = 8$ (3 |
| $x = 25$ (6 | $x = 5$ (5 |
| $x = 3.75$ (8 | $x = 0.25$ (7 |
| $x = 5$ (10 | $x = 4.25$ (9 |
| $x = 4, -3$ (12 | $x = 6$ (11 |
| $x = 5$ (14 | $x = 3$ (13 |
| $x = 2, 2\frac{8}{9}$ (16 | $x = 12$ (15 |
| $x = 1$ (18 | $x = 6$ (17 |
| | $x = 2$ (19 |

משוואות עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

הגדרה:

ערך מוחלט הינו המרחק של מספר מ-0 ומוגדר באופן הבא: $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$.

משוואה עם ערך מוחלט:

משוואה עם ערך מוחלט היא מהצורה: $|x| = a$.

כדי לפתור משוואה עם ערכים מוחלטים יש למצוא את נקודות האפס של כל ערך מוחלט (קרי: הנקודות בהן הביטוי שבתוך הערך המוחלט מתאפס) ולפצל את המשוואה הנתונה לתחומים עבור כל תחום.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$|3x+14|=7 \quad (1) \qquad |3x-24|=x \quad (2)$$

$$|12-x|=3x \quad (3) \qquad 2x-|8-x|=10 \quad (4)$$

$$|4x-5|=|2x+13| \quad (5) \qquad |14-3x|=2|x+5| \quad (6)$$

$$|x|+7=|2x| \quad (7) \qquad |x+2|+6=|2x-4| \quad (8)$$

$$|x+2|+|2x-6|=|4x+8| \quad (9) \qquad |10-3x|-|x+4|=|2x-6| \quad (10)$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{llll} x = -\frac{7}{3}, -7 & (1) & x = 6, 12 & (2) \\ x = 9, -1\frac{1}{3} & (5) & x = 24, \frac{4}{5} & (6) \\ x = 0, -12 & (9) & x = 0 & (10) \\ x = 6 & (4) & x = 3 & (3) \\ x = 12, -1\frac{1}{3} & (8) & x = \pm 7 & (7) \end{array}$$

מערכת משוואות ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

מערכת משוואות ריבועיות מיוחסת למערכת של שתי משוואות (לפחות) שאחת מהן מכילה את אחד מהנעלמים בריבוע. למערכת משוואות ריבועיות יכולים להתקבל עד 4 פתרונות שונים. יש לפתור את המערכת לפי הטכניקות הרגילות של בידוד והצבה או השוואת מקדמים.

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 36 \\ x^2 + 3y = 10 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 17 \\ xy = -10 \end{cases} \quad (4) \qquad \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 16 \\ 5x^2 - 3y^2 = 17 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 8y^2 = 8 \\ 3xy - 2y^2 = 4 \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} x^2 - xy - 20y^2 = 0 \\ x + 6y = 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} 16x^2 - y^2 = 391 \\ 4x - y = 23 \end{cases} \quad (8) \qquad \begin{cases} x^2 - y^2 = 33 \\ x + y = 11 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{4}{y} - \frac{1}{x} = -19 \end{cases} \quad (10) \qquad \begin{cases} 4xy + x = -15 \\ \frac{3}{y} - 2x = 16 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} xy = 24 \\ (y-x)^2 - 7(y-x) + 10 = 0 \end{cases} \quad (12) \qquad \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 21 \\ \frac{8}{x} - \frac{1}{y} = 13 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{10}{3} \\ x^2 + y^2 = 9xy + 25 \end{cases} \quad (14) \qquad \begin{cases} x^2y - xy^2 = 84 \\ x^2 - 2xy + y^2 + 5x - 5y = 24 \end{cases} \quad (13)$$

תשובות סופיות:

- (2,4), (4,2) **(1)**
- (±2, ±1) **(3)**
- $\left(-2, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{11}, \frac{1}{11}\right)$ **(5)**
- (7,4) **(7)**
- $\left(-5, \frac{1}{2}\right), \left(-24, -\frac{3}{32}\right)$ **(9)**
- $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ **(11)**
- (±4, -2) **(2)**
- (5, -2), (-5, 2) **(4)**
- $\left(3, \frac{1}{2}\right), \left(-3, -\frac{1}{2}\right), (2, 1), (-2, -1)$ **(6)**
- (5, -3) **(8)**
- $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right)$ **(10)**
- (4, 6), (-6, -4), (3, 8), (-8, -3) **(12)**
- (-1.65, 6.35), (-6.35, 1.65), (7, 4), (-4, -7) **(13)**
- (5, 45), (-5, -45), (45, 5), (-45, -5) **(14)**

משוואות מסכמות מתקדמות:

סיכום כללי:

תזכורת מהירה:

- משוואה דו-ריבועית יכולה להופיע בכל תצורה (עם שורשים, עם ערכים מוחלטים וכו'). העיקרון הוא זיהוי תבנית של הנעלם אשר חוזרת על עצמה לאורך המשוואה. סימון התבנית במשתנה זמני ופתרון עבור משתנה זה תוביל למשוואה מוגדרת ופתירה. לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה לתבנית של המשתנה המקורי ולמצוא את ערכיו.
- דרך הפתרון של משוואה עם שורשים היא ע"י בידוד השורש והעלאה בריבוע. במידה ויש יותר משורש אחד המופיעים בחיבור/חיסור יש לבצע את הפעולה פעמיים. חשוב לוודא נכונות של כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבה במשוואה המקורית לפני ההעלאות בריבוע.
- דרך הפתרון של משוואה עם ערכים מוחלטים היא ע"י פיצול המשוואה לתחומים לפי סימני הערך המוחלט. זאת יש לבצע ע"י איפוס הביטוי שבכל ערך מוחלט ומציאת ערכי הנעלם המקיימים זאת, חלוקת המשוואה לתחומים מתאימים ופתרונה בכל תחום. יש לזכור לבדוק האם הפתרון המתקבל נמצא בתחום הפתרון – במידה וכן הוא פתרון של המשוואה, אחרת הוא נפסל.
- משוואה עם פרמטר/ים נפתרת בצורה רגילה (התייחסות לפרמטר/ים כאל קבועים מספריים) כאשר יש לציין את תחומי ההגדרה שלהם. יש לבדוק פתרונות שמתקבלים המבוטאים באמצעות הפרמטר/ים במידה וקיימת הגבלת תחום הגדרה במשוואה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 x^2 + 5x - \sqrt{x^2 + 5x} - 30 = 0 & \text{(2)} & x + \sqrt{x+6} - 6 = 0 & \text{(1)} \\
 2x^2 + 6x - \sqrt{x^2 + 3x + 5} = 5 & \text{(4)} & 4x^2 + 16x - 4\sqrt{x^2 + 4x} - 3 = 0 & \text{(3)} \\
 x^2 - \sqrt{6x^2 - 15} = 1 & \text{(6)} & x^2 - \sqrt{16x^2 + 48} + 7 = 0 & \text{(5)} \\
 \frac{\sqrt{x^2 + 4x - 12}}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+5} = \frac{7}{\sqrt{x-1}} & \text{(8)} & \frac{x^2}{\sqrt{3x-2}} - \sqrt{3x-2} = 1-x & \text{(7)} \\
 \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3} & \text{(9)} \\
 \sqrt{x + \sqrt{14x - 49}} + \sqrt{x - \sqrt{14x - 49}} = \sqrt{14} & \text{(10)} \\
 \sqrt{x+6+6\sqrt{x-3}} - \sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}} = 2 & \text{(11)} \\
 \frac{4}{x + \sqrt{x^2 + x}} - \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + x}} = \frac{3}{x} & \text{(12)}
 \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות עבור $a > 0$:

$$x^2 + ax - 2a\sqrt{3x^2 + 3ax - 9a^2} = 0 \quad \text{(14)} \qquad x^2 + ax - 2a\sqrt{x^2 + ax - a^2} = 0 \quad \text{(13)}$$

פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 |4 - |5 - x|| = |x + 3| & \text{(16)} & |3 - |2 - x| + |x|| = 1 & \text{(15)} \\
 \sqrt{25 + |16x^2 - 25|} = 4 + 4|x+1| & \text{(18)} & \left| \frac{x + |3 - x|}{x + 2} \right| = 18 & \text{(17)} \\
 & & \frac{x^3 - 5x}{\sqrt{2x^2 - 4x - 1} - |x| + 2} = 0 & \text{(19)}
 \end{array}$$

$$\frac{|x+2|}{|x|+2} = |2-x|+2 : \text{הראה כי אין פתרון למשוואה הבאה:} \quad \text{(20)}$$

תשובות סופיות:

(1) $x = 3$

(2) $x_1 = 4, x_2 = -9$

(3) $x_1 = 0.5, x_2 = -4.5$

(4) $x_1 = 1, x_2 = -4$

(5) $x_{1,2} = \pm 1$

(6) $x_{1,2} = \pm 2$

(7) $x = 1$

(8) $x = 3$

(9) $x = 2$

(10) $3.5 \leq x \leq 7$

(11) $x = 4$

(12) $x = 1, x = \frac{9}{16}$

(13) $x_1 = -2a, x_2 = a$

(14) $x_1 = -2a, x_2 = 3a$

(15) $x \leq 0$

(16) $x = -1$

(17) $x = -\frac{39}{18}, -\frac{33}{18}$

(18) $x \leq \frac{5}{4}, x = -\frac{1}{4}$

(19) $x = -\sqrt{5}$

(20) שאלת הוכחה.

ביטויים ומשוואות ממעלה שלישית:

סיכום כללי:

נוסחאות הכפל המקוצר ממעלה שלישית:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

שאלות:

פישוט ביטויים:

פשט את הביטויים הבאים:

$$(2y+5)^3 \quad (2)$$

$$(x-3)^3 \quad (1)$$

$$8y^3 + 343 \quad (4)$$

$$8x^3 - 1 \quad (3)$$

$$x^3y^6z^9 - 1 \quad (6)$$

$$a^6 - 27 \quad (5)$$

$$64mn^4 - 8m^4n^7 \quad (8)$$

$$11 + 88x^{12} \quad (7)$$

$$\frac{x^3 + 64}{x^2 + 4x} \quad (10)$$

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8} \quad (9)$$

משוואות בנעלם אחד עם נוסחאות הכפל המקוצר:

פתור את המשוואות הבאות:

$$125x^3 = 1 - 15x + 75x^2 \quad (12)$$

$$x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0 \quad (11)$$

$$x^3 - 7x - 6 = 0 \quad (14)$$

$$x^3 + x - 30 = 0 \quad (13)$$

משוואות בנעלם אחד עם פירוקים שונים:

פתור את המשוואות הבאות:

$$2x^3 + 5x^2 - 2x - 5 = 0 \quad (16)$$

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0 \quad (15)$$

מערכת משוואות:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 243 \\ x + y = 9 \end{cases} \quad (17) \text{ פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 91 \\ x^2y - xy^2 = 30 \end{cases} \quad (18) \text{ פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

תשובות סופיות:

$$8y^3 + 60y^2 + 150y + 125 \quad (10)$$

$$(2y + 7)(4y^2 - 17y + 49) \quad (11)$$

$$(xy^2z^3 - 1)(x^2y^4z^6 + xy^2z^3 + 1) \quad (12)$$

$$8mn^4(2 - mn)(4 + 2mn + m^2n^2) \quad (13)$$

$$\frac{x^2 - 4x + 16}{x} \quad (14)$$

$$x = \frac{1}{2} \quad (15)$$

$$x_{1,2,3} = -2, -1, 3 \quad (16)$$

$$x_{1,2,3} = -2.5, -1, 1 \quad (17)$$

$$(-5, -6), (6, 5) \quad (18)$$

$$x^3 - 9x + 27x - 27 \quad (1)$$

$$(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) \quad (2)$$

$$(a^2 - 3)(a^4 + 3a^2 + 9) \quad (3)$$

$$8(1 + 2x^4)(1 - 2x^4 + 4x^8) \quad (4)$$

$$\frac{1}{x + 2} \quad (5)$$

$$x = 4 \quad (6)$$

$$x = 3 \quad (7)$$

$$x_{1,2,3} = \frac{1}{2}, 1, 2 \quad (8)$$

$$(3, 6), (6, 3) \quad (9)$$

מתמטיקה 55004 לתלמידי לוגיסטיקה

פרק 3 - חזרה כללית - אי שוויונים אלגבריים

תוכן העניינים

69	1. אי שוויונים ממעלה ראשונה
71	2. אי שוויונים ממעלה שנייה
72	3. אי שוויונים ממעלה שלישית
73	4. אי שוויונים עם מנה
75	5. אי שוויונים כפולים מערכות וגם ואו
76	6. שאלות מסכמות
78	7. מציאת תחום הגדרה
80	8. אי שוויונים עם ערך מוחלט
83	9. אי שוויונים עם שורשים

אי-שוויונים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

פעולות המותרות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

פעולות אסורות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$6x > 2(3x-1) \quad (2) \qquad 45x - 26 > 109 \quad (1)$$

$$(x-2)^2 + 4 < (x+2)^2 + 20 \quad (4) \qquad 2(x-5) \geq \frac{1}{2}(4x+6) \quad (3)$$

$$4(6x-8) < 8(3x-4) \quad (6) \qquad \frac{8x-4}{2} < \frac{9(x+1)}{3} \quad (5)$$

$$\frac{7-x}{10} - \frac{3x-1}{5} + \frac{x+4}{3} < 7 \quad (8) \qquad \frac{x-6}{3} - \frac{x-4}{4} \geq 12-x \quad (7)$$

תשובות סופיות:

$$x > 3 \quad (1)$$

$$x \text{ כל} \quad (2)$$

$$x \text{ אף} \quad (3)$$

$$x > -2 \quad (4)$$

$$x < 5 \quad (5)$$

$$x \text{ אף} \quad (6)$$

$$x \geq 12 \quad (7)$$

$$x > -13 \quad (8)$$

אי-שוויונים ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

אי שוויון ריבועי הוא מהצורה: $ax^2 + bx + c \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$ כאשר $a \neq 0$.

כדי לפתור אי שוויון ריבועי יש למצוא את נקודות האפס של הביטוי הריבועי ולאחר מכן למצוא את תחום ההצבה עבורו הביטוי מקיים את אי השוויון עצמו.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- | | |
|------------------------------|--|
| $x^2 - 12x > -32$ (2) | $x^2 < 144$ (1) |
| $(x+2)(x+4) < 35$ (4) | $(x+2)(x+5) < 0$ (3) |
| $(x-3)(x-7) \geq 8x-56$ (6) | $-x^2 + 13x + 30 < 0$ (5) |
| $(5x+6)^2 \leq 4(x-3)^2$ (8) | $(x-5)^2 + x(x+2) < 89$ (7) |
| $x^2 - 10x + 25 > 0$ (10) | $-3x^2 + 12x > 0$ (9) |
| $2x^2 + 2x + 24 \geq 0$ (12) | $(x-3)^2 > (x-1)(x+6) - x^2 - 3x$ (11) |

תשובות סופיות:

- | | |
|---------------------------|----------------------|
| $x < 4, x > 8$ (2) | $-12 < x < 12$ (1) |
| $-9 < x < 3$ (4) | $-5 < x < -2$ (3) |
| $x \leq 7, x \geq 11$ (6) | $x < -2, x > 15$ (5) |
| $-4 \leq x \leq 0$ (8) | $-4 < x < 8$ (7) |
| $x > 5, x < 5$ (10) | $0 < x < 4$ (9) |
| x כל (12) | $x < 3, x > 5$ (11) |

אי-שוויונים ממעלה שלישית:

סיכום כללי:

אי שוויונים ממעלה גבוהה מיוחסים לכאלה שניתן לכתוב אותם בצורה של פולינומים, כגון: $x^3 - 4x^2 + 4x + 1 > 0$, $x^4 + 2x^2 + 1 < 0$ וכיו'. בפועל נפתור אותם ע"י פירוק לגורמים ומציאת נקודות האפס של כל גורם. לאחר מכן נבדוק את כל אחד מתחומי המספרים המתקבלים עבור הנעלם ונראה באלו מהם מתקבל פסוק אמת.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- | | |
|--------------------------------------|------------------------------------|
| $x(x^2 + x + 1) > 0$ (2) | $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$ (1) |
| $x^3 - 25x \geq 0$ (4) | $(-2x^2 - 3x + 2)(x+1) \leq 0$ (3) |
| $(x^2 + 8x + 20)(3x - 5) \leq 0$ (6) | $(x^2 + 3x + 5)(x - 2) > 0$ (5) |
| $x^3 - 6x^2 + 9x \leq 0$ (8) | $(x^2 - x - 6)(x - 1) < 0$ (7) |
| $(x-2)(x-4)(x-1) < 0$ (10) | $(x^2 + 6)(x+3) > 0$ (9) |

תשובות סופיות:

- | | |
|----------------------------------|---|
| $x > 0$ (2) | $1 < x < 2, x > 3$ (1) |
| $-5 \leq x \leq 0, x \geq 5$ (4) | $-2 \leq x \leq -1, x \geq \frac{1}{2}$ (3) |
| $x \leq 1\frac{2}{3}$ (6) | $x > 2$ (5) |
| $x \leq 0, x = 3$ (8) | $x < -2, 1 < x < 3$ (7) |
| $x < 1, 2 < x < 4$ (10) | $x > -3$ (9) |

אי-שוויונים עם מנה:

סיכום כללי:

אי שוויון מהצורה: $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ או $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ נקרא אי-שוויון עם מנה, בו $f(x)$

ו- $g(x)$ הם פולינומים כלשהם.

למשל: $\frac{2x+4}{x^2-3x+4} < 0$ בו: $f(x) = 2x+4$ ו- $g(x) = x^2-3x+4$.

כדי לפתור אי שוויון עם מנה נמצא את נקודות האפס של $f(x)$ ושל $g(x)$ ונציב מספרים בתחומים המתקבלים. אלו שיתנו פסוק אמת יהוו את פתרון אי השוויון.

הערות:

- ניתן לבצע כפל של המכנה בריבוע בכדי להעביר את אי השוויון לצורה של מכפלות.
- ניתן להעביר אי שוויון המכיל מספר מנות ומספרים שלמים לצורה הנייל ע"י פעולות אלגבריות מתאימות תחילה.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$\frac{x-1}{3x+2} \geq -3$ (2)	$\frac{x-1}{x^2-9} > 0$ (1)
$\frac{x-3}{2x^2-10x+12} > 0$ (4)	$\frac{1}{x^2-16} > 0$ (3)
$\frac{1}{-3(x-1)} < 0$ (6)	$\frac{2x-1}{x-5} \leq 0$ (5)
$\frac{1}{x^2-5x+6} < 0$ (8)	$\frac{x-1}{x+2} \leq 1$ (7)
$\frac{1}{x^2-8x+12} \geq 0$ (10)	$\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7} \geq 0$ (9)

תשובות סופיות:

$$x < -\frac{2}{3}, x \geq -\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 < x < 3, x > 3 \quad (4)$$

$$x > 1 \quad (6)$$

$$2 < x < 3 \quad (8)$$

$$x < 2, x > 6 \quad (10)$$

$$-3 < x < 1, x > 3 \quad (1)$$

$$x < -4, x > 4 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \leq x < 5 \quad (5)$$

$$x > -2 \quad (7)$$

$$1 \leq x \leq 6 \quad (9)$$

אי-שוויונים כפולים - מערכת וגם:

סיכום כללי:

אי-שוויון כפול הוא צורה מקוצרת להציג שני אי-שוויונים אשר יש לפתור יחד (קרי: כמערכת יוגם!). למשל במקום לכתוב: $a < b$ וגם $b < c$, ניתן לכתוב: $a < b < c$. מכאן כי כדי לפתור אי שוויון כפול יש לפצל אותו תחילה לשני אי-שוויונים ולפתור כל אחד בנפרד. לאחר מכן יש לקחת את חיתוך הפתרונות.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$0 < \frac{1}{x+4} < 2 \quad (2)$$

$$3 < x+1 < 5 \quad (1)$$

$$0 < \frac{8-3x}{5-2x} < 4 \quad (4)$$

$$-1 < \frac{x-1}{x+1} < 1 \quad (3)$$

$$6 < \frac{2x+10}{3} \leq \frac{7x-20}{5} \quad (6)$$

$$6x-38 \leq x-3 \leq 5x+7 \quad (5)$$

$$\frac{4x+5}{15} > \frac{3x-8}{5} + \frac{9-x}{3} > 11 \quad (8)$$

$$-1 \leq \frac{2x-6}{4} < \frac{x+2}{3} \quad (7)$$

תשובות סופיות:

$$x > -3\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 < x < 4 \quad (1)$$

$$x < 2\frac{2}{5}, x > 2\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$x > 0 \quad (3)$$

$$x \geq 10 \quad (6)$$

$$-2.5 \leq x \leq 7 \quad (5)$$

$$\emptyset \quad (8)$$

$$1 \leq x < 13 \quad (7)$$

שאלות מסכמות - אי-שוויונים:

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$x \leq -\frac{3}{4} \cap \{-2 < x \leq 5 \cup 0 < x < 8\} \quad (1)$$

$$\frac{(x-3)(x+4)}{2-x} \leq 0 \quad (3) \quad x(x+5) - 3x + 15 \leq 2x - 1 - x(4-x) \quad (2)$$

$$\frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)} \geq 0 \quad (5) \quad \frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)} < 0 \quad (4)$$

$$\frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2} > 0 \quad (7) \quad x(x+3)(2x-5) < 0 \quad (6)$$

$$\frac{x-3}{x^2+2} > 0 \quad (9) \quad \frac{5-2x}{(x-8)^2} \leq 0 \quad (8)$$

$$\frac{x^2-6x+9}{x^3-x} > 0 \quad (11) \quad \frac{x^2-4x}{x^2+2x-3} > 0 \quad (10)$$

$$\frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2} \quad (13) \quad \frac{x-7}{x^2+x+3} > 0 \quad (12)$$

$$6 < 5x - x^2 \cap x^2 > 3x + 10 \quad (15) \quad \frac{2x^2}{x^2-6x+8} \geq \frac{x}{x-4} - \frac{x}{x-2} \quad (14)$$

$$1 < \frac{x-1}{x-4} \leq 2 \quad (17) \quad \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x} > 0 \cup \frac{1}{x-3} < \frac{1}{1-x} \quad (16)$$

(18) לאלו ערכי x נמצאת הפונקציה $f(x) = \frac{x}{x-3}$ מעל הפונקציה $g(x) = \frac{x+1}{x+3}$?

תשובות סופיות:

- | | |
|---|--------------------------------------|
| $x \leq -4$ (2) | $-2 < x \leq -\frac{3}{4}$ (1) |
| $x < -7, -\frac{1}{3} < x < 2, x > 5$ (4) | $-4 \leq x < 2, 3 \leq x$ (3) |
| $x < -3, 0 < x < 2.5$ (6) | $-1 < x \leq 1.5, 4 < x \leq 12$ (5) |
| $2.5 \leq x < 8, x > 8$ (8) | $x < -1, 2 < x < 6, x > 6$ (7) |
| $x < -3, 0 < x < 1, x > 4$ (10) | $x > 3$ (9) |
| $x > 7$ (12) | $-1 < x < 0, 1 < x < 3, x > 3$ (11) |
| $x \leq 0, 1 \leq x < 2, x > 4$ (14) | $x < -2, 2 < x < 4$ (13) |
| $x \neq 1$ (16) | $x \text{ אף } (15)$ |
| $-3 < x < -\frac{3}{5}, x > 3$ (18) | $x \geq 7$ (17) |

תחום הגדרה:

שאלות:

1 מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{3x-4}$	ב. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x - 6}$
ג. $f(x) = \sqrt{12x - x^2 - x^3}$	ד. $f(x) = \sqrt{\frac{x+5}{x^2-4}}$
ה. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}-x}$	ו. $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2-2x-1}}{2x-3}$

2 מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+2}-3}$	ב. $f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$
ג. $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}}$	ד. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$

3 תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x) = \sqrt{ax - x^2 - 4}$ הוא $1 \leq x \leq 4$. מצא את ערכו של הפרמטר a .

4 תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x) = \sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$ הוא $x \leq -2$, $x > 2$. מצא את ערכו של הפרמטר a .

5 נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+6}-a}$, a פרמטר חיובי.

א. הבע באמצעות a את תחום הגדרתה.

ב. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = \sqrt{\frac{2x}{x+5}}$.

ידוע כי תחום ההגדרה של שתי הפונקציות מכסה את כל ציר המספרים. מצא את תחום הערכים האפשרי של הפרמטר a .

תשובות סופיות:

- (1) א. $x \geq 1\frac{1}{3}$ ב. $x \leq -1, x \geq 6$ ג. $x \leq -4, 0 \leq x \leq 3$
- ד. $-5 \leq x < -2, x > 2$ ה. $-2 \leq x < 2, x > 2$ ו. $x \leq -\frac{1}{3}, 1 \leq x < \frac{3}{2}, x > \frac{3}{2}$
- (2) א. $x \geq 7$ ב. $-6 \leq x \neq -2$ ג. $x \leq -1\frac{1}{2}, x \geq 1$
- ד. $x \leq -3, -2 \leq x \neq 1$
- (3) $a = 5$
- (4) $a = 2$
- (5) א. $x \geq a^2 - 6$ ב. $0 < a \leq 1$

אי שוויונים עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

כללים לפתרון אי שוויון עם ערך מוחלט יחיד:

$ x > a$	$ x < a$	מקרה
$x < -a \cap x > a$	$-a < x < a$	פתרון

כללים לפתרון אי שוויון עם מספר ערכים מוחלטים:

- נמצא את הנקודות המאפסות כל ביטוי עם ערך מוחלט.
- מחלקים את אי השוויון לתחומים לפי נקודות האפס.
- פותרים את אי השוויון לכל תחום בנפרד.
- כותבים פתרון כללי (מערכת או) לכל התחומים יחדיו.

שאלות:

(1) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $|x+2| < 3$ ב. $|2x+1| > 7$
 ג. $|6-2x| < x$ ד. $|2x+1| - 3x > 4$

(2) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $1 < |4-3x| < 7$ ב. $|2x+3| < 8 < |5-x|$

(3) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $|x^2 + 6x - 4| < 12$ ב. $|x^2 + x - 10| > 3x - 2$
 ג. $|x^2 - 3x| < 4$ ד. $|6x^2 - 7x - 4| > 1$
 ה. $x^2 - 6|x| + 5 \leq 0$ ו. $x^2 - 6|x+1| - 1 > 0$

(4) פתור את אי-השוויונים הבאים:

ב. $|x+8| < 11 - |1-3x|$

א. $|x-3| + |2x+2| > 7$

ד. $|2x-6| + |x+5| > 14 - |1-x|$

ג. $|3-2x| - 11 > 4 - |6+x|$

ו. $|x+3| + |x^2 - 5x + 4| < 19$

ה. $|5+4x| - |3-x| + \left|4 - \frac{1}{2}x\right| \leq 22$

(5) פתור את אי-השוויונים הבאים:

ב. $1 \leq \left|\frac{x+2}{x-2}\right| \leq 2$

א. $\left|\frac{3x-1}{x-2}\right| \geq 3$

ד. $\left|\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}\right| > 5$

ג. $\frac{|x-6|+8x}{x-12} \leq 12$

(6) פתור את אי-השוויונים הבאים (ערך מוחלט ושורשים):

ב. $2 - \sqrt{1-x} \leq |x+2| - 3$

א. $\sqrt{x^2 - |x-12|} < x$

ד. $\frac{|x+2| - |x|}{\sqrt{4-x^3}} > 0$

ג. $\sqrt{|2x+1| - x - 1} \leq 4 - |3x|$

תשובות סופיות:

- (1) א. $-5 < x < 1$
 ג. $2 < x < 6$
- (2) א. $1\frac{2}{3} < x < 3\frac{2}{3}$ או $-1 < x < 1$
 ב. $-5\frac{1}{2} < x < -3$
- (3) א. $-2 < x < 2$ או $-8 < x < -4$
 ג. $-1 < x < 4$
- ה. $1 \leq x \leq 5$ או $-5 \leq x \leq -1$
- (4) א. $2 < x$ או $x < -2$
 ג. $4 < x$ או $x < -6$
 ה. $4 \leq x \leq 7\frac{3}{7}$
- (5) א. $2 < x < 2\frac{7}{6}$
 ג. $x < 12, x \geq 46$
- (6) א. $x = -1, x \geq 3, x \neq 12$
 ג. $0 \leq x \leq 1, -1 \leq x \leq -\frac{2}{3}$
- ב. $3 < x$ או $x < -4$
 ד. $x < -1$
- ב. $-\frac{1}{3} < x < \frac{3}{2}, x > \frac{5}{3}$
 ד. $x < -\frac{1}{2}$
- ג. $x < 2$ או $4 < x$
- ו. $x < -5, x > 7$
- ב. $-1 < x < 1$
- ד. $4 < x$ או $x < -1$
- ו. $-2 < x < 6$
- ב. $0 \leq x \leq \frac{2}{3}, x \geq 6$
- ד. $\frac{1}{2} < x < 1, 1 < x < 2, 2 < x \leq 4$
- ב. $x \leq \frac{-15 + \sqrt{33}}{2}$
- ד. $-1 < x < \sqrt[3]{4}$

אי שוויונים עם שורשים:

סיכום כללי:

מקרים בפתרון אי-שוויונות עם שורשים:

פתרון	אי השוויון	מקרה
$0 \leq f(x) < a^2$	$\sqrt{f(x)} < a$	$a \geq 0$
אין פתרון	$\sqrt{f(x)} < a$	$a < 0$
כל x בת.ה. של $f(x)$	$\sqrt{f(x)} > a$	

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$\sqrt{2x-5} \geq 1 \quad (2)$$

$$\sqrt{x+3} < 7 \quad (1)$$

$$\sqrt{x^2+x-6} < x-3 \quad (4)$$

$$\sqrt{2x^2+5x-6} > 2-x \quad (3)$$

$$\sqrt{x^2+5x+6} - \sqrt{x^2-x+1} < 1 \quad (6)$$

$$\sqrt{x^2+3x+2} - 1 < \sqrt{x^2-x+1} \quad (5)$$

$$\frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2 \quad (8)$$

$$\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} > \frac{3}{2} \quad (7)$$

$$\sqrt{2-\sqrt{3+x}} < \sqrt{4+x} \quad (10)$$

$$\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{4}} < \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \quad (9)$$

$$\sqrt{1+\frac{9}{x}} + 5\sqrt{\frac{x}{x+9}} \geq 4 \quad (12)$$

$$\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5} \quad (11)$$

תשובות סופיות:

(1) $-3 \leq x < 46$

(2) $x \geq 3$

(3) $x < -10, x > 1$

(4) \emptyset

(5) $x \leq -2, -1 \leq x < \frac{-1 + \sqrt{13}}{6}$

(6) $x \leq -3, -2 \leq x < \frac{-13 + \sqrt{73}}{16}$

(7) $\frac{12}{25} < x \leq \frac{1}{2}$

(8) $x < 2\sqrt{5} - 4$

(9) $1 < x \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$

(10) $שזה: -2.618 < x \leq 1 - \frac{3 + \sqrt{5}}{2} < x \leq 1$

(11) $2.5 \leq x < 3$

(12) $x < -9, x > 0$

מתמטיקה 55004 לתלמידי לוגיסטיקה

פרק 4 - חזרה כללית - חוקי החזקות והשורשים

תוכן העניינים

85	1. חוקי החזקות
90	2. חוקי השורשים
94	3. כתיבה מדעית של מספרים

חוקי החזקות:

סיכום כללי:

סיכום חוקי החזקות:

$$\begin{array}{lll}
 a^n \cdot a^m = a^{m+n} & .3 & a^1 = a & .2 & a^0 = 1 & .1 \\
 a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m & .6 & (a^n)^m = a^{n \cdot m} & .5 & \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} & .4 \\
 \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m & .9 & a^{-m} = \frac{1}{a^m} & .8 & \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m & .7
 \end{array}$$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^n a^m = a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$$\begin{array}{lll}
 b^2 b^5 b^{12} b^3 & .ג & t^3 t^5 t^7 & .ב & a^2 a^6 & .א \\
 \frac{c^6}{c^2} & .ו & \frac{n^{14}}{n^9} & .ה & \frac{k^8}{k^3} & .ד \\
 \frac{y^3 y^{15}}{y^4 y^{14}} & .ט & \frac{x^{30}}{x^9 x^{18}} & .ח & \frac{a^3 a^{19}}{a^{15}} & .ז \\
 \frac{5^{20} 5^3 5^{16}}{5^4 5^{22} 5^8} & .יב & \frac{2^{16} 2^2}{2^{10}} & .יא & 3^2 3^3 3^4 & .י
 \end{array}$$

(2) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^n a^m = a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$$\begin{array}{lll}
 \frac{x^8 y^5 y^9 x^2}{y^4 x^4} & .ג & \frac{a^{10} b^{13} a^3}{b^4 b^6 b^2 a^{12}} & .ב & \frac{3^4 2^7}{2^6 3^2} & .א
 \end{array}$$

(3) לפניך הביטוי הבא: $\frac{3^6 2^{17} 3^3 2^4}{3^4 2^3 2^2}$

מצא n כך שיתקיים שוויון בין הביטוי $243 \cdot 2^n$ לבין הביטוי הנתון.

4) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים :

$\frac{9^3 \cdot 27^2}{3^9 \cdot 81}$.ב.	$\frac{2^3 \cdot 2^7}{2^4 \cdot 2^5}$.א.	
$2^3 + 2^5$.ד.	$\frac{10^9 \cdot 25^5 \cdot 8^{-1}}{40^3 \cdot 125^5}$.ג.	

5) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוק: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

$(x^3 x^{10})^2$.ג.	$(c^3)^{10}$.ב.	$(a^2)^4$.א.
$\frac{d^{20} (d^4)^2}{d^{12} (d^3)^2}$.ו.	$\frac{n^7 n^8}{(n^3)^4}$.ה.	$\frac{(b^2)^3}{b^2 b^3}$.ד.
$\frac{(8^3)^8 8^{11}}{(8^2 8)^3 8^8}$.ט.	$\frac{3^6 (3^3 3^2)^6}{3^{28} (3^2)^3}$.ח.	$\frac{2^5 (2^4)^2 2^3}{(2^3 2^2)^3}$.ז.
$\frac{(3^2)^7 5^{10} (5^3)^2}{3^9 5^{16}}$.יב.	$\frac{(3^2)^6 5^{31} 3^7}{(5^2)^{10} 5^{11} 3^{18}}$.יא.	$\frac{(2^4)^5 (3^6)^7 2^{20}}{3^{35} 2^{40}}$.י.

6) לפניך הביטויים הבאים: $\left((3^6)^n\right)^2$ ו- $\left((3^2)^3\right)^4$.

מצא n כך שיתקיים שוויון בין שני הביטויים.

7) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים :

$\frac{7^{12} 2^2 2^6}{2^5 7^{10} 7}$.ג.	$\frac{5^{20} 3^{14} 3^8}{3^{20} 5^{12} 5^8}$.ב.	$\frac{2^3 3^5}{2^2 3^4}$.א.
---	---	-------------------------------

8) פשט את הביטויים הבאים :

$125 \cdot 25 \cdot 5^5$.ג.	$64^2 2^3 8^2$.ב.	$3^2 9 \cdot 81^2$.א.
$\frac{\left((3^4)^4\right)^5}{81^3 27^4 3^5}$.ו.	$\frac{(4^2)^3 16}{64 \cdot 2^3}$.ה.	$\frac{2^4 \cdot 16^5}{8 \cdot 512}$.ד.

9 פשט את הביטויים הבאים :

$\frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}}$	ב.	$\frac{(2a^2b)^3 \cdot (ab^{-3})^2}{4ab^{-2} \cdot \left(\frac{a^2}{b}\right)^4}$	א.
$\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^{n+3} + x^{n+5}}{x^{n+2}}$	ד.	$\frac{4^{b+3}}{4^{b+1} + 4^{b+2}}$	ג.

10 פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $(ab)^n = a^n b^n$ ו- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$(x^{12}y^3)^3$	ג.	$(m^4n^3)^5$	ב.	$(a^2b)^3$	א.
$\left(\frac{a^{14}b^4}{a^6ab^3}\right)^3$	ו.	$\left(\frac{i^4}{k^3}\right)^7$	ה.	$\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^4$	ד.
$\left(\frac{(b^{12}c)^2 c^{14}}{c(c^3b^5)^4 b^3}\right)^2$	ט.	$\left(\frac{t^7 r^{20} t^3}{r^2 r^{12} t^8}\right)^2$	ח.	$\left(\frac{x^3 y^5 y^2 x^6}{y^4 x^7}\right)^6$	ז.

11 חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים :

$\left(\frac{7^3 \cdot 16 \cdot 128 \cdot 49}{(2^27)^5}\right)^3$	ג.	$\left(\frac{(5^4)^2 3^6}{3^5 5^7}\right)^2$	ב.	$\left(\frac{3^9 2^6 2^2}{3^6 2^5 3^2}\right)^2$	א.
---	----	--	----	--	----

12 בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה שלילית :

$\frac{1}{2^{10}}$	ג.	$\frac{1}{5^3}$	ב.	$\frac{1}{4^6}$	א.
$\frac{1}{125}$	ו.	$\frac{1}{81}$	ה.	$\frac{1}{8}$	ד.

13 בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה חיובית וחשב את ערכם :

$\frac{1}{5^{-3}}$	ג.	$\frac{1}{3^{-2}}$	ב.	$\frac{1}{4^{-3}}$	א.
--------------------	----	--------------------	----	--------------------	----

(14) חשב את הביטויים הבאים :

ג. $5^6 \cdot 5^{-3} \cdot 5^{-2}$

ב. $2^{-8} \cdot 512 \cdot 2^2$

א. $3^2 \cdot 3^{-5} \cdot 3^7$

ו. $\frac{3^{-6} \cdot 7^7 \cdot 7^{-4}}{3^{-4} \cdot 3^{-3} \cdot 7^3}$

ה. $\frac{2^{-5} \cdot 5^3 \cdot 2^{14}}{5^2 \cdot 5^{-10} \cdot 5^8 \cdot 2^6}$

ד. $2^{14} \cdot 3^{-6} \cdot 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 2^{-30}$

(15) פשט את הביטויים הבאים לצורה ללא חזקות שליליות.

ג. $\frac{2^{-3}5^4}{5^4 \cdot 125 \cdot (5^2)^{-3} \cdot 2^{-4}}$

ב. $\frac{(4^4)^{-4} 3^{-11}}{(3^{-2}4^3)^{-6}}$

א. $\left(\frac{5^{-4}}{3^2}\right)^{-6}$

(16) פשט את הביטויים הבאים :

ג. $\frac{(m^{n+2})^3 \cdot m^{-4n-2}}{\frac{1}{m^{6n+2}} \cdot (m^3)^{n-2}}$

ב. $\frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}}$

א. $\frac{a^{n+2} \cdot a^{2-3n}}{(a^3)^{n+1}}$

תשובות סופיות:

- (1) א. a^8 ב. t^{15} ג. b^{22} ד. k^5 ה. n^5 ו. c^4
- ז. a^7 ח. x^3 ט. 1 י. 3^9 יא. 2^8 יב. 5^5
- (2) א. 18 ב. ab ג. x^6y^{10}
- (3) $n=16$
- (4) א. 2 ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{5}{8}$ ד. 40
- (5) א. a^8 ב. c^{30} ג. x^{26} ד. b ה. n^3 ו. d^{10}
- ז. 2 ח. 9 ט. 8^{18} י. 3^7 יא. 3 יב. 3^5
- (6) $n=2$
- (7) א. 6 ב. 9 ג. 56
- (8) א. 3^{12} ב. 2^{21} ג. 5^{10} ד. 2^{12} ה. 2^7 ו. 3^{51}
- (9) א. $\frac{2b^3}{a}$ ב. k ג. $3\frac{1}{5}$ ד. $\frac{1}{x} + x$
- (10) א. a^6b^3 ב. $m^{20}n^{15}$ ג. $x^{36}y^9$ ד. $\frac{a^{12}}{b^8}$ ה. $\frac{i^{28}}{k^{21}}$ ו. $a^{21}b^3$
- ז. $x^{12}y^{18}$ ח. t^4r^{12} ט. b^2c^6
- (11) א. 576 ב. 225 ג. 8
- (12) א. 4^{-6} ב. 5^{-3} ג. 2^{-10} ד. 2^{-3} ה. 3^{-4} ו. 5^{-3}
- (13) א. 64 ב. 9 ג. 125
- (14) א. 81 ב. 8 ג. 5 ד. $\frac{1}{9}$ ה. 1000 ו. 3
- (15) א. $5^{24} \cdot 3^{12}$ ב. $\frac{4^2}{3^{23}}$ ג. $5^3 \cdot 2^4$
- (16) א. a^{1-5n} ב. k ג. m^{2n+12}

חוקי השורשים:

סיכום כללי:

סיכום חוקי השורשים:

$$\begin{array}{lll}
 \sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} & .3 & \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} & .2 & \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} & .1 \\
 \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} & .6 & \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}} & .5 & \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} & .4
 \end{array}$$

שאלות:

17) הבא את הביטויים הבאים לצורה: $\sqrt[n]{a^m}$.

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } 3^{\frac{1}{4}} & \text{ב. } 2^{\frac{3}{5}} & \text{ג. } 6^{\frac{5}{6}} \\
 \text{ד. } -12^{\frac{2}{7}} & \text{ה. } -(-4)^{\frac{1}{3}} & \text{ו. } -(-3)^{\frac{3}{4}} \\
 \text{ז. } 5^{-\frac{1}{4}} & \text{ח. } 27^{\frac{1}{3}} & \text{ט. } 64^{-\frac{5}{6}}
 \end{array}$$

18) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } \sqrt{49} & \text{ב. } -\sqrt{25} & \text{ג. } \sqrt[3]{8} \\
 \text{ד. } -\sqrt[3]{128} & \text{ה. } \sqrt[3]{(-2)^6} & \text{ו. } (\sqrt[5]{1024})^2 \\
 \text{ז. } (\sqrt[5]{-243})^3 & \text{ח. } \sqrt[4]{-16} & \text{ט. } \sqrt[4]{-25^2} \\
 \text{י. } \sqrt[4]{(-25)^2} & &
 \end{array}$$

19) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים :

א. $8^{\frac{2}{3}}$	ב. $32^{\frac{3}{5}}$	ג. $128^{\frac{2}{7}}$
ד. $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$	ה. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2.5}$	ו. $\left(\frac{64}{343}\right)^{\frac{2}{3}}$
ז. $81^{\frac{3}{4}} \cdot 64^{\frac{1}{3}}$	ח. $343^{\frac{2}{3}} \cdot 100^{\frac{1}{2}}$	ט. $16^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{2}}$

20) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא : $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[3]{128}}$

21) פשט את הביטויים הבאים :

א. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$	ב. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$	ג. $\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$
ד. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$	ה. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$	ו. $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$
ז. $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$	ח. $\frac{\sqrt[3]{500} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[4]{25^2} \cdot \sqrt[3]{4}}$	ט. $\frac{\sqrt[3]{8^2} \sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{400} \sqrt{2}}$

22) הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים :

א. $3\sqrt{2}$	ב. $5\sqrt{3}$	ג. $\frac{\sqrt{36}}{2}$
ד. $2\sqrt[3]{3}$	ה. $x\sqrt{x}$	

23) הכנס את כל המקדמים בביטויים הבאים לתוך השורש :

א. $2\sqrt{5}$	ב. $4\sqrt[3]{2}$	ג. $2\sqrt[5]{3}$
ד. $\frac{\sqrt{24}}{2}$	ה. $\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$	ו. $\frac{3\sqrt[4]{5000}}{10}$
ז. $-5\sqrt[3]{2}$	ח. $-5\sqrt[4]{2}$	ט. $-5\sqrt[5]{-2}$

24) הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר:

- א. $\sqrt{12}$ ב. $\sqrt{48}$ ג. $\sqrt{63}$
- ד. $\sqrt[3]{54}$ ה. $\sqrt{x^5}$

25) חלץ מן הביטויים הבאים את המקדם הגבוה ביותר ככל הניתן:

- א. $\sqrt{40}$ ב. $\sqrt{50}$ ג. $\sqrt{320}$
- ד. $\sqrt[3]{108}$ ה. $\sqrt[3]{56}$ ו. $\sqrt[3]{160}$
- ז. $\sqrt[4]{162}$ ח. $\sqrt[5]{972}$ ט. $\sqrt[9]{192}$

26) פשט את הביטויים הבאים:

- א. $\sqrt{18} - \sqrt{8}$ ב. $\sqrt{7} + \sqrt{63}$ ג. $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128}$
- ד. $\sqrt[4]{405} - \sqrt[4]{80}$ ה. $\frac{20}{\sqrt{5}}$ ו. $\frac{\sqrt{8}}{2}$
- ז. $\frac{16}{\sqrt{2}}$ ח. $\frac{6}{\sqrt{3} + \sqrt{12}}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[5]{160} - \sqrt[5]{5}}$

27) פשט את הביטויים הבאים:

- א. $3^{\frac{1}{4}} \cdot 9^{-2.5} \cdot 27^{\frac{3}{2}}$ ב. $2^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{\frac{1}{2}} \cdot 64^{-3}$ ג. $125^{\frac{1}{6}} \cdot 5^2 \cdot 5^{-\frac{2}{3}}$
- ד. $\frac{27^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}$ ה. $\frac{49^{\frac{2}{5}} \cdot 7^{-\frac{6}{5}}}{343^{\frac{1}{5}}}$ ו. $\frac{512^{\frac{1}{4}} \cdot 64^{\frac{3}{4}}}{128^{\frac{1}{8}} \cdot 2^{-2}}$

תשובות סופיות:

- (17) א. $\sqrt[4]{3}$ ב. $\sqrt[5]{2^3}$ ג. $\sqrt[6]{6^5}$ ד. $-\sqrt[7]{12^2}$ ה. $-\sqrt[3]{-4}$ ו. ϕ
- ז. $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ ח. $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$ או $\frac{1}{3}$ ט. $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}}$ או $\frac{1}{2^5}$
- (18) א. 7 ב. -5 ג. 2 ד. -2 ה. 4 ו. 16
- ז. -27 ח. ϕ ט. ϕ י. 5
- (19) א. 4 ב. $\frac{1}{8}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. 125 ה. $\frac{32}{243}$ ו. $\frac{49}{16}$
- ז. $\frac{27}{4}$ ח. $\frac{10}{49}$ ט. $\frac{1}{2}$
- (20) $\sqrt{2}$
- (21) א. 4 ב. 9 ג. 20 ד. 6 ה. 3 ו. 2
- ז. $\sqrt{2}$ ח. $\sqrt{5}$ ט. $\sqrt{2}$
- (22) א. $\sqrt{18}$ ב. $\sqrt{75}$ ג. $\sqrt{9}$ ד. $\sqrt[3]{24}$ ה. $\sqrt{x^3}$
- (23) א. $\sqrt{20}$ ב. $\sqrt[3]{128}$ ג. $\sqrt[5]{96}$ ד. $\sqrt{6}$ ה. $\sqrt[3]{3}$
- ו. $\sqrt[4]{40 \cdot \frac{1}{2}}$ ז. $\sqrt[3]{-250}$ ח. $-\sqrt[4]{1250}$ ט. $\sqrt[5]{5^5 \cdot 2}$
- (24) א. $2\sqrt{3}$ ב. $4\sqrt{3}$ ג. $3\sqrt{7}$ ד. $3\sqrt[3]{2}$ ה. $x^2\sqrt{x}$
- (25) א. $2\sqrt{10}$ ב. $5\sqrt{2}$ ג. $8\sqrt{5}$ ד. $3\sqrt[3]{4}$ ה. $2\sqrt[3]{7}$ ו. $2\sqrt[5]{5}$
- ז. $3\sqrt[4]{2}$ ח. $3\sqrt[5]{4}$ ט. $2\sqrt[6]{3}$
- (26) א. $\sqrt{2}$ ב. $4\sqrt{7}$ ג. $6\sqrt[3]{2}$ ד. $\sqrt[4]{5}$ ה. $4\sqrt{5}$ ו. $\sqrt{2}$
- ז. $8\sqrt{2}$ ח. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ או $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[3]{5}}$ או $2\sqrt[5]{5^4}$
- (27) א. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ ב. $\frac{1}{\sqrt[4]{2^{61}}}$ ג. $\sqrt[6]{5^{11}}$ ד. 27 ה. $\frac{1}{7}$ ו. $\sqrt[8]{2^5}$

כתיבה מדעית של מספרים:

שאלות:

28) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. 15,000,000	ב. 1,500,000
ג. 150,000,000,000	ד. 23,400,000
ה. 0.0003	ו. 0.00000042
ז. 0.000000042	ח. 0.00000000042

29) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. $(3,000,000)^2$	ב. $(2,000,000)^2$
ג. $(5,000)^3$	ד. $(50,000)^3$
ה. $(0.0002)^4$	ו. $(0.00004)^3$
ז. $(0.000005)^3$	ח. $(0.000000007)^3$

תשובות סופיות:

28) א. $1.5 \cdot 10^7$	ב. $1.5 \cdot 10^6$	ג. $1.5 \cdot 10^{11}$	ד. $2.34 \cdot 10^7$	ה. $3 \cdot 10^{-4}$
ו. $4.2 \cdot 10^{-7}$	ז. $4.2 \cdot 10^{-8}$	ח. $4.2 \cdot 10^{-10}$		
29) א. $9 \cdot 10^{12}$	ב. $4 \cdot 10^{12}$	ג. $1.25 \cdot 10^{11}$	ד. $1.25 \cdot 10^{14}$	ה. $1.6 \cdot 10^{-15}$
ו. $6.4 \cdot 10^{-14}$	ז. $1.25 \cdot 10^{-16}$	ח. $3.43 \cdot 10^{-25}$		

מתמטיקה 55004 לתלמידי לוגיסטיקה

פרק 5 - חזרה כללית - משוואות ואי-שוויונים מעריכיים

תוכן העניינים

95	1. משוואות מעריכיות יסודיות.....
97	2. משוואות עם חיבור וחסור איברים.....
99	3. משוואות עם קבוע אוילר.....
100	4. משוואות בהן המשתנה גם בבסיס.....
101	5. משוואות מסכמות שונות.....
102	6. מערכת משוואות מעריכיות.....
103	7. אי שוויונים מעריכיים.....
104	8. אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך.....

משוואות מעריכיות יסודיות:

סיכום כללי:

- פתרון כללי של משוואת מעריכית מהצורה: $a^x = a^y$ הוא: $x = y$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = 1$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = 1 = a^0$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = b^x$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = b^x = 1$ ללא תלות בבסיסים.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי החזקות היסודיים):

א. $2^x = 16$ ב. $5^x \cdot 25^{x+2} = 125$

ג. $10^{x-2} = 10000^{x+1}$ ד. $9^x \cdot 3^{x^2} = 81^{3x-4}$

ה. $(2^x \cdot 32)^3 = 8$ ו. $(5^{x^2})^5 \cdot \frac{1}{5^5} = 625^{x-1}$

ז. $\frac{7^x}{343^3} = 1$ ח. $(25 \cdot 0.2^{2x})^2 = \left(\frac{1}{125}\right)^{1-x}$

(2) פתור את המשוואות הבאות (הבסיס הוא שבר):

א. $27 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{5x+2} = 8$ ב. $\left(\frac{3}{4}\right)^{2-x} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{9}{16}\right)^{7+x}$

ג. $25 \left(\frac{7}{5}\right)^{x^2-2x} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{4-x} = 49$

(3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי השורשים):

א. $\sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3}$ ב. $\sqrt{3^{x+7}} = 81$

ג. $(9\sqrt{27})^{3x} \cdot 3^{2-x} = \frac{1}{9}$ ד. $\sqrt[3]{16} \cdot \left(\frac{1}{2^x}\right)^3 = \frac{1}{16}$

ה. $2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^x}} = 8(\sqrt{8})^{-\sqrt{x}}$ ו. $5^x \cdot \frac{1}{25^5} = 125^{\sqrt{x}}$

4) פתור את המשוואות הבאות (מכפלת בסיסים שונים):

א. $2^x = 7^x$	ב. $3^x \cdot \frac{625}{\sqrt{25^x}} = 81$
ג. $2^{3x} \cdot 5^{3x} = 1000000$	ד. $2^{x+1} \cdot 3^{x-2} \cdot 7^x = 392$
ה. $243 \cdot 2^{x-1} \cdot 18^{x-9} = \frac{1}{3^{x-2}}$	ו. $108 \cdot \frac{1}{2^{1-2x}} = 72^x \cdot \sqrt{0.5}$
ז. $2^{2x+2} \cdot 5^{x+1} = (2\sqrt{5})^{4-x}$	

תשובות סופיות:

א. $x = 4$	ב. $x = -\frac{1}{3}$	ג. $x = -2$	ד. $x = 2, 8$	ה. $x = -4$
א. $x = 1, -\frac{1}{5}$	ב. $x = 9$	ה. $x = 1$		
א. $x = -1$	ב. $x = -2$	ג. $x = 3, -2$		
א. $x = -\frac{1}{2}$	ב. $x = 1$	ג. $x = -\frac{8}{19}$	ד. $x = 2, -\frac{2}{3}$	ה. $x = 4, 9$
א. $x = 0$	ב. $x = 4$	ג. $x = 2$	ד. $x = 2$	ה. $x = 5$
א. $x = 1.5$	ב. $x = \frac{2}{3}$			ג. $x = 25$

משוואות עם חיבור וחסור איברים:

סיכום כללי:

במשוואות הכוללות חיבור וחסור של איברים, נאתר את הבסיס עם המעריך הקטן ביותר ונסמן אותו ב- t , למשל במשוואה: $4^x - 3 \cdot 2^x = 4$ נסמן: $2^x = t$.
 נבטא את כל איברים המשוואה באמצעות t ונפתור אותה עבורו.
 לאחר מכן נחזיר את ההצבה למציאת ערכי ה- x המתאימים.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם חיבור וחסור ממעלה ראשונה):

ב. $8^x + 3 \cdot 8^x = 256$

א. $2^x + 6 \cdot 2^x = 56$

ד. $2 \cdot 6^x + 6^{x+2} - 6^{x-1} = 227$

ג. $5 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 162$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם חיבור וחסור ממעלה ראשונה):

ב. $5^{3x+2} + 4 \cdot 125^x = 29$

א. $81^{x+1} + 18 \cdot 3^{4x-3} = 735$

ד. $\sqrt{10000^{x+1}} - \sqrt[4]{10^{8x+1}} = \sqrt[4]{1000} \cdot (\sqrt[4]{10^7} - 1)$

ג. $(2^{3x+1})^2 - 64^{x-\frac{1}{3}} = 15$

ו. $5^{-x} + 25^{\frac{1-x}{2}} - 5^{-x-1} = 145$

ה. $6^{-x} - 5 \cdot 36^{-\left(\frac{x+1}{2}\right)} = 186$

ח. $4^{x+2} - 6 \cdot 4^x = 7 \cdot 12^{x+1} + 6 \cdot 12^x$

ז. $2 \cdot 10^{x+1} + 10^{x+2} = 3 \cdot 5^{x+1}$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחסור ממעלה שנייה):

ב. $16^{x+1} - 65 \cdot 4^x + 4 = 0$

א. $9^x - 36 \cdot 3^x + 243 = 0$

ד. $4^{-x} - 3 \cdot 4^x + 2 = 0$

ג. $6^x - 4 \cdot 6^{-x} + 3 = 0$

ו. $\left(2^{\frac{1}{3}x+2}\right)^2 - 5 \cdot 2^{\frac{1}{3}x+1} + 1 = 0$

ה. $\left(\frac{4}{9}\right)^x - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1} = -\frac{2}{3}$

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות):

ב. $\frac{7^x}{7^x-4} + \frac{8}{7^x+5} = 3$

א. $\frac{20}{9^x+1} = 3 - \frac{8}{9^x-1}$

5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות מסכמות):

א. $\frac{1}{25^{1-x}} - 6 \cdot 5^{x-1.5} + 1 = 0$	ב. $3^x - \sqrt{16 \cdot 3^{x+1}} = -9$
ג. $36^x - 6^{x+1} \cdot 3^x + 8 \cdot 9^x = 0$	ד. $4 \cdot 9^x - 10 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0$
ה. $25 \cdot 5^{2x} + 16 \cdot 15^x = 9^{x+1}$	ו. $9^x + 4^x - 6^x = \frac{7}{6^{1-x}}$
ז. $\frac{8^{2x} - 8}{7} = 4^x - 2$	ח. $2^{3x} - 2^{2x+2} - 2^x + 4 = 0$

תשובות סופיות:

א. $x=3$	ב. $x=2$	ג. $x=4$	ד. $x=1$
א. $x=\frac{1}{2}$	ב. $x=0$	ג. $x=\frac{1}{3}$	ד. $x=\frac{1}{4}$
ה. $x=-3$	ו. $x=-2$	ז. $x=-3$	ח. $x=-2$
א. $x=2,3$	ב. $x=1,-2$	ג. $x=0$	ד. $x=0$
ה. $x=0,1$	ו. $x=-6,-9$		
א. $x=1, -\frac{1}{2}$	ב. $x=1$		
א. $x=\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$	ב. $x=1,3$	ג. $x=1,2$	ד. $x=1,0$
ה. $x=-2$	ו. $x=1,-1$	ז. $x=0, \frac{1}{2}$	ח. $x=0,2$

משוואות עם קבוע אוילר:

סיכום כללי:

קבוע אוילר מסומן באות e וערכו שווה (בערך) ל-2.71828. למספר זה משמעויות רבות במתמטיקה ובמדעים ועל כן הוחלט לסמן אותו באות משלו ולשלב אותו במשוואות מתמטיות ועוד.

דרך הפתרון של משוואה שבה הבסיס הוא e זהה לחלוטין לשל משוואה מעריכית רגילה כפי שנלמד בפרק זה.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם קבוע אוילר):

$$\text{א. } e^{3x} = e^{2x-1} \quad \text{ב. } e^{5x-1} = e \cdot e^{6x+1}$$

$$\text{ג. } e^{x-5} = (e^{1-x})^3 \quad \text{ד. } e^x \cdot \sqrt{e^{3x-1}} = \left(\frac{1}{e^x}\right)^{1-3x}$$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחיסור):

$$\text{א. } e^2 \cdot e^x - e^{x+1} = e - 1 \quad \text{ב. } \sqrt[3]{e^{x+1}} \cdot e^2 = e^x \sqrt{e}$$

$$\text{ג. } e^{2x} + e^x - 2 = 0 \quad \text{ד. } e^{1+x} + e^{1-x} = e^2 + 1$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (המשתנה גם בבסיס):

$$\text{א. } xe^x = \sqrt[4]{e} \cdot x \quad \text{ב. } e^{3x} = x \cdot e^{3x}$$

$$\text{ג. } xe^{x^2} = \frac{x}{\sqrt{e^x}} \quad \text{ד. } \sqrt[3]{e^{3x-1}} \cdot x = xe^x$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x = -1 \quad \text{ב. } x = -3 \quad \text{ג. } x = 2 \quad \text{ד. } x = 1, \frac{1}{6}$$

$$(2) \quad \text{א. } x = -1 \quad \text{ב. } x = \frac{11}{4} \quad \text{ג. } x = 0 \quad \text{ד. } x = 1, -1$$

$$(3) \quad \text{א. } x = 0, \frac{1}{4} \quad \text{ב. } x = 1 \quad \text{ג. } x = 0, -\frac{1}{2} \quad \text{ד. } x = 0$$

משוואות בהן המשתנה גם בבסיס:

סיכום כללי:

במשוואות עם משתנה בבסיס יש לדרוש תנאי עבורו הבסיס חיובי. יש לקחת את חיתוך תחומי ההגדרה (במידה וקיימים ביטויים עם שורשים או שברים) יחד עם תוצאת השוואת המעריכים.

הערה:

יש לבדוק את ערכי ה- x עבורם הבסיס שווה ל-1 ולראות האם מתקבל פסוק אמת או פסוק שקר. בהתאם יש להוסיף או להוריד אותו מתחום המספרים המהווים את פתרון המשוואה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$(\sqrt{3-x})^{\sqrt{x}} = (\sqrt[3]{3-x})^x \cdot \sqrt{\sqrt[3]{3-x}} \quad (1)$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2+x} = 1 \quad (2)$$

$$\frac{|x-3|^{x^2-2}}{|x-3|^{x-1}} = |x-3|^{-1} \quad (3)$$

תשובות סופיות:

$$x = \frac{1}{4}, 1, 2 \quad (1)$$

$$\text{אין פתרון.} \quad (2)$$

$$x = 0, 1, 2, 4 \quad (3)$$

משוואות מסכמות שונות:

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$.5(2^x - 2) + 2 = 4^x - 2^x \quad (1)$$

$$\cdot \frac{6}{4^{x-1} - 1} + \frac{2^{x+1}}{2^x + 2} = \frac{2^x + 4}{2^x - 2} \quad (2)$$

$$\cdot \frac{4^x}{4^x - 10} - \frac{4}{2^{2x-1} - 3} = \frac{32}{16^x - 4^{x+2} + 60} \quad (3)$$

$$\cdot 3^{2x^2+2} - 3^{x^2+3} + 9 = 3^{x^2+1} \quad (4)$$

$$\cdot \sqrt{x}{10} = 4 \cdot \sqrt[2]{x}{10} + 60 \quad (5)$$

$$\cdot \sqrt[x-1]{8 \cdot 2^{x+1}} = (\sqrt{x}{2})^2 \cdot \sqrt[x-1]{x}{32} \quad (6)$$

$$\cdot 10 \cdot 4^{x+2} - 16 \cdot 10^x - 90 \cdot 6^x + 36 \cdot 15^x = 0 \quad (7)$$

תשובות סופיות:

$$\cdot x = 1, 2 \quad (1)$$

$$\cdot x = 3 \quad (2)$$

$$\cdot x = 1.5 \quad (3)$$

$$\cdot x = 1, -1 \quad (4)$$

$$\cdot x = \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$\cdot x = -3 \quad (6)$$

$$\cdot x = 1, -2 \quad (7)$$

מערכת משוואות מעריכיות:

שאלות:

$$(1) \quad \begin{cases} y = 3^x \\ y = 18 - 3^x \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 5^{2x} - 5^y = 5^x - 25 \\ y - x = 2 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{1}{3^y - 4} + \frac{3}{3^x - 2} - \frac{1}{3^x + 2} = 3 \\ 4^y = \sqrt{256^x} \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(4) \quad \begin{cases} 5^x + 2^y = 13 \\ 2 \cdot 5^x - 2^y = 2 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(5) \quad \begin{cases} 2 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^y = 42 \\ 3^{x+1} - 2^{y+1} = 73 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(6) \quad \begin{cases} 5^{2x+1} + 8 \cdot 10^x - 2^{2y+4} = 0 \\ (\sqrt{3})^y = 27^{\frac{x-1}{6}} \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(7) \quad \begin{cases} 6 \cdot 4^x - 7 \cdot 6^{y-1} + 2 \cdot 3^{x+y} = 6^y \\ \sqrt[4]{5^x} \cdot \sqrt{(5\sqrt{5})^y} = \sqrt[4]{125} \cdot 5^x \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

תשובות סופיות:

(1,3) (4)	(1,2) (3)	(0,2) , (2,4) (2)	(2,9) (1)
(1,2) , (-1,0) (7)	(-1,-2) (6)	(3,2) (5)	

אי שוויונים מעריכיים:

סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $a^x > a^y$ הוא: $x > y$ עבור $a > 1$ ו- $x < y$ עבור $0 < a < 1$.

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$\sqrt{2^x} \leq 4^{x^2-1\frac{1}{4}} \quad (2)$$

$$3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x} \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{5x} \geq \left(\frac{1}{7}\right)^{1-3x} \quad (4)$$

$$e^{\sqrt{x+1}} > e^{2x} \quad (3)$$

$$e^{2x} - 2e^x + 1 \leq 0 \quad (6)$$

$$25^x + 5 < 6 \cdot 5^x \quad (5)$$

הערה:

השאלות הבאות דורשות הכרות עם מושג הלוגריתם הטבעי (\ln) וכן חוקי הלוגריתמים אשר ילמדו בהמשך.

$$e^{2x} - 5e^x + 4 > 0 \quad (8)$$

$$e^x > 3 \quad (7)$$

תשובות סופיות:

$$x \leq -1 \text{ או } x \geq 1\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$x < \frac{2}{3} \quad (1)$$

$$x \leq \frac{1}{8} \quad (4)$$

$$0 \leq x < 1 \quad (3)$$

$$x = 0 \quad (6)$$

$$0 < x < 1 \quad (5)$$

$$x < 0 \text{ או } x > \ln 4 \quad (8)$$

$$x > \ln 3 \quad (7)$$

אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך:

סיכום כללי:

דרך הפתרון של אי שוויון עם משתנה בבסיס ובמעריך:

- יש לדרוש בסיס חיובי ולחבר אי-שוויון בהתאם.
- יש לפתור את אי השוויון לפי השוואת מעריכים.
- יש למצוא את חיתוך הפתרונות.

נתון: $f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)}$ נדרוש: $f(x) > 0$.

דרך הפתרון: אם: $f(x) > 1$ אז: $g(x) > h(x)$.

אם: $0 < f(x) < 1$ אז: $g(x) < h(x)$.

לבסוף נמצא את חיתוך התחומים.

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$(x-2)^{2x-5} < (x-2)^{x+1} \quad (2) \qquad x^{2x-1} > x^{x+2} \quad (1)$$

$$x^{2x^2+2} < x^{5x} \quad (4) \qquad x^{2x-6} < 1 \quad (3)$$

$$(x+1)^{|x|} < x^2 + 2x + 1 \quad (6) \qquad (x^2 - 6x + 13)^{x^2 - 2x} \geq (x^2 - 6x + 13)^3 \quad (5)$$

תשובות סופיות:

$$.0 < x < 1, x > 3 \quad (1)$$

$$.3 < x < 6 \quad (2)$$

$$.1 < x < 3 \quad (3)$$

$$.0 < x < 0.5, 1 < x < 2 \quad (4)$$

$$.x \leq -1, x \geq 3 \quad (5)$$

$$.0 < x < 2 \quad (6)$$

מתמטיקה 55004 לתלמידי לוגיסטיקה

פרק 6 - חזרה כללית - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים

תוכן העניינים

105	1. הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות
108	2. חוקי הלוגריתמים
112	3. חישובים עם חזקה לוגריתמית
113	4. מעבר בין בסיסים
115	5. הלוגריתם הטבעי
117	6. משוואות עם בסיסים שונים
118	7. מערכת משוואות לוגריתמיות
119	8. מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות
120	9. אי-שוויונים לוגריתמים

הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות:

סיכום כללי:

הגדרה:

הלוגריתם מוגדר באופן הבא: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ כאשר: $a, b > 0, a \neq 1$.

הסבר:

לוגריתם על בסיס a של b מוגדר בתור החזקה שיש להעלות את a על מנת שיהיה שווה ל- b .
 ערך חזקה זו הוא x . ערך לוגריתם יכול להיות חיובי, שלילי או אפס. נחשב ערכי לוגריתמים
 ונפתור משוואות לוגריתמיות ע"י מעבר לפי ההגדרה למשוואה מעריכית מתאימה.

כללים יסודיים בלוגריתמים:

מהגדרת הלוגריתם נובע כי: $\log_a a = 1$ וכן: $\log_a 1 = 0$ לכל $a > 0, a \neq 1$.

שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמים הבאים:

א. $\log_2 32$ ב. $\log 1000$ ג. $\log_{25} 5$

ד. $\log_8 4$ ה. $\log_4 \frac{1}{16}$ ו. $\log_a a^4$

ז. $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (יסודי - שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\log_{36} 6 = x$ ב. $\log_2 x = 16$

ג. $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$ ד. $\log_x 64 = 3$

ה. $\log_x 25 = 2$ ו. $\log_x (3x+4) = 2$

3) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (כללי - שימוש בהגדרת הלוג):

$$\log_4(4-x) = \frac{1}{2} \quad \text{ב.} \qquad \log_6(4x-2) = 1 \quad \text{א.}$$

$$\log_3 \frac{x+3}{3-3x} = -2 \quad \text{ד.} \qquad \log_8(x^4 - 73) = 1 \quad \text{ג.}$$

$$\log_{\sqrt{x+1}}(2x^2 - 5) = 2 \quad \text{ו.} \qquad \log_x(2x^2 + x - 12) = 2 \quad \text{ה.}$$

4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג מספר פעמים):

$$3\log_{27}(\log_2(x+3)) = 1 \quad \text{ב.} \qquad \log_4(\log_3 x) = 1 \quad \text{א.}$$

$$\log_6\left(3 + \log_2\left(6 + \log_4(x^2 + 15)\right)\right) = 1 \quad \text{ד.} \qquad \log_{\frac{1}{16}}\left(\log_3(5x^2 + 1)\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{ג.}$$

5) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

$$\log_3(3 \cdot 2^x - 303) = 4 \quad \text{ב.} \qquad \log_2(3^x + 37) = 6 \quad \text{א.}$$

$$3\log_2\left(3 \cdot 4^{1+\frac{1}{3}x} - 11 \cdot 2^{\frac{x}{3}} + 3\right) = 12 + 2x \quad \text{ד.} \qquad \log_5(126 \cdot 5^x - 25) = 2x + 1 \quad \text{ג.}$$

6) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הצבה):

$$2(\log_3 x)^2 + \log_3 x = 10 \quad \text{ב.} \qquad (\log_2 x)^4 = 10000 \quad \text{א.}$$

$$\sqrt{\log_{\frac{1}{81}} x} + \sqrt{\log_{\frac{1}{81}} x + 2} = 2 \quad \text{ד.} \qquad \frac{3 \cdot \log_{14} x + 1}{(\log_{14} x)^2} = 4 \quad \text{ג.}$$

תשובות סופיות:

- (1) א. 5 ב. 3 ג. $\frac{1}{2}$ ד. $\frac{2}{3}$ ה. -2
- ו. -1.5 ז. 4
- (2) א. $x = \frac{1}{2}$ ב. $x = 65,536$ ג. $x = 27$ ד. $x = 4$
- ה. $x = 5$ ו. $x = 4$
- (3) א. $x = 2$ ב. $x = 2$ ג. $x = \pm 3$ ד. $x = -2$ ה. $x = 3$ ו. $x = 2$
- (4) א. $x = 81$ ב. $x = 5$ ג. $x = \pm 4$ ד. $x = \pm 1$
- (5) א. $x = 3$ ב. $x = 7$ ג. $x = -1, 2$ ד. $x = -6$
- (6) א. $x = 1024, \frac{1}{1024}$ ב. $x = 9, \frac{1}{9\sqrt{3}}$
- ג. $x = 14, \frac{1}{\sqrt[4]{14}}$ ד. $x = \frac{1}{3}$

חוקי הלוגריתמים:

סיכום כללי:

- להלן 3 חוקי הלוגריתמים עבור בסיס $a > 0 \neq 1$ וארגומנטים x ו- y חיוביים:
- מכפלה לסכום: $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.
 - מנה להפרש: $\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$.
 - מקדם למעריך: $\log_a b^n = n \log_a b$ (כאשר $b > 0$ ו- n מספר ממשי כלשהו).

שאלות:

שאלות חישוב כלליות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

א. $\log_3 12 + \log_3 2.25$	ב. $\log_{\frac{1}{5}} 40 + \log_{\frac{1}{5}} 12.5 + \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{4}$
ג. $\log_2 200 - \log_2 100$	ד. $\log_3 60 - \log_3 540$
ה. $\log_4 8 + \log_4 12 - \log_4 6$	ו. $\log_7 1.5 - \log_7 147 + \log_7 2$
ז. $3 \log_5 2 - \log_5 1.6$	ח. $\log_{\sqrt{4}} 6.4 + 2 \log_{\sqrt{4}} \sqrt{10}$
ט. $\frac{1}{2} \left(\log_7 \frac{7}{2} + \log_7 2 \right) + \log_7 14 - \frac{1}{3} \log_7 8$	י. $\frac{1}{4} \log 81 - \log 1.5 - \frac{1}{2} \log 40$

(2) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

א. $\frac{\log_5 16}{\log_5 8}$	ב. $\frac{\log_9 62.5 + \log_9 2}{\log_9 0.2}$
ג. $\frac{\log_3 5 - \log_3 2 + \log_3 50}{\log_3 225 - 2}$	ד. $\frac{2 - 2 \log_3 4 + \log_3 8 \frac{8}{9}}{4 - \log_3 0.01 - 2 \log_3 18}$

משוואות לוגריתמיות:

(3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש ישיר בחוקי הלוגריתמים):

א. $\log_2 x + \log_2 (x-6) = 4$ ב. $\log_3 x + \log_3 (x+2) = 1$

ג. $\log_2 (x+30) - \log_2 x = 4$ ד. $\log_5 (x+146) - \log_5 (x+2) = 2$

ה. $2\log_3 (2x-1) - \log_3 (22x+9) = -1$

ו. $2\log_5 (x-2) = \log_5 (4x-15) + \log_5 x$

(4) פתור את המשוואות הבאות (פתרון בשיטת לוג שווה לוג):

א. $\log_5 (4x-3) = \log_5 7$

ב. $2\log_2 (2x-2) - \log_2 (16-x) = \log_2 (x-1) + 1$

(5) פתור את המשוואות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א. $\log_3 (3 \cdot 5^x + 39) = 3 + \log_3 (5^x - 3)$

ב. $\log_2 (3 - 4^{x+1}) - \log_2 11 = x$

(6) פתור את המשוואות הבאות (שימוש הפוך בחוקי הלוגריתמים):

א. $\log_4 x \cdot \log_4 (16x) = 8$

ב. $\log_2 \left(\frac{x}{4}\right) \cdot \log_2 (1024x) = -11$

ג. $\log_2 x^2 \log_2 \left(\frac{x}{16}\right) = -\log_2 (64x)$

ד. $(\log_4 4x)^2 = \log_4 4x^2 + 1$

ה. $\log_3 (9x^2) \cdot \log_3 (9x^3) = \log_3 \left(\frac{81}{x}\right) + 2$

ו. $\frac{\log_2 \left(\frac{x^3}{32}\right)}{(\log_2 x)^2} + \frac{\log_2 (2x)}{\log_2 x} = 1\frac{7}{9}$

שאלות הבעה:

(7) נתון: $\log_3 2 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_3 16$ ב. $\log_3 6$

ג. $\log_3 24$ ד. $\log_3 1.5$

(8) נתון: $\log_2 5 = b$, $\log_2 3 = a$. הבע באמצעות a ו- b את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_2 45$ ב. $\log_2 60$ ג. $\log_2 \sqrt{7.5}$

(9) נתון: $\log_{18} 2 + \log_{18} 3 = a$.

הבע באמצעות a את $\log_{18} 27$ ואת $\log_{18} 16$.

שאלות נוספות:

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

$$\log 4 \log 40 + \log 5 \log 16 = \log 64 \quad (10)$$

$$2 \log^2 2 + \log 25 \cdot \log 20 = 2 \quad (11)$$

$$\log_{12} 16 \cdot \log_{12} 4 + \log_{12} 9 \cdot \log_{12} 48 = 2 \quad (12)$$

$$\log_5 10 \cdot \log_5 75 - \log_5 3 \cdot \log_5 2 - \log_5 3 - \log_5 4 = 2 \quad (13)$$

תשובות סופיות:

- (1) א. 3 ב. -3 ג. 1 ד. -2 ה. 2 ו. -0.5
- (2) א. $\frac{4}{3}$ ב. -3 ג. 1.5 ד. 0.5
- (3) א. $x=8$ ב. $x=3, \frac{1}{27}$ ג. $x=2$ ד. $x=4$ ה. $x=3$ ו. $x=4$
- (4) א. $x=2.5$ ב. $x=6$
- (5) א. $x=1$ ב. $x=-2$
- (6) א. $x=16, \frac{1}{256}$ ב. $x=2, \frac{1}{512}$ ג. $x=4, 2\sqrt{2}$ ד. $x=4, \frac{1}{4}$ ה. $x=\frac{1}{9}, \sqrt[9]{3}$ ו. $x=8, \sqrt[7]{2^{15}}$
- (7) א. $4a$ ב. $a+1$ ג. $3a+1$ ד. $1-a$
- (8) א. $2a+b$ ב. $2+a+b$ ג. $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}$
- (9) $4(2a-1), 3(1-a)$
- (10) הוכחה.
- (11) הוכחה.
- (12) הוכחה.
- (13) הוכחה.

חישובים עם חזקה לוגריתמית:

סיכום כללי:

מהגדרת הלוגריתם ניתן לנסח את הקשר הבא: $a^{\log_a x} = x$ כאשר $a > 0 \neq 1$.

שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א. $6^{\log_6 8}$ ב. $4^{\log_2 5}$

(2) נתונה התבנית: $3 \cdot 4^x$. חשב את ערכה עבור:

א. $x = \log_4 7$ ב. $x = \log_4 \sqrt{3}$

ג. $x = 2 \log_4 0.1$ ד. $x = \sqrt{\log_2 5}$

(3) נתונה התבנית: $\frac{1}{6} \cdot 9^x - 2 \cdot 3^x + 1$. חשב את ערכה עבור:

א. $x = -1$ ב. $x = \log_3 5$

ג. $x = \log_3 \sqrt{6}$

(4) חשב:

א. $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_{\sqrt{56}} 81}$ ב. $\sqrt[3]{2^{3-\log_{\sqrt{8}} 5}}$

תשובות סופיות:

(1) א. 8 ב. 25

(2) א. 21 ב. $3\sqrt{3}$ ג. 0.03 ד. 15

(3) א. $\frac{19}{54}$ ב. $-4\frac{5}{6}$ ג. $2 - 2\sqrt{6}$

(4) א. $\frac{1}{81}$ ב. $\frac{2}{\sqrt[2]{25}}$

מעבר בין בסיסים:

סיכום כללי:

מעבר מבסיס a לבסיס m (כאשר: $a > 0 \neq 1$ ו- $m > 0 \neq 1$, וכן: $b > 0$)

$$\log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a}$$

יתבצע באופן הבא:

שאלות:

שאלות חישוב כלליות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

ב. $\log_{0.1} 3 \cdot \log_9 1000$

א. $\log_4 7 \cdot \log_7 4$

ד. $\log_4 169 \cdot \log_{25} 64 \cdot \log_{13} 625$

ג. $\log_{\sqrt{3}} 5 \cdot \log_{\sqrt{125}} 9$

(2) הוכח את השוויונים הבאים:

א. $\log_2 25 \cdot \log_5 3 \cdot \log_9 2 = 1$

ב. $\log_{16} 9 \cdot \log_5 4 \cdot \log_3 5 = 1$

משוואות לוגריתמיות:

(3) פתור את המשוואות הבאות:

ב. $\log_3 x \cdot \log_{27} x = 3$

א. $\log_2 x + \log_{32} x = 6$

ד. $\log_x 5 - 6 \log_{125} x = 1$

ג. $\log_2 4x \cdot \log_8 \frac{x}{16} = -\frac{5}{3}$

שאלות הבעה:

(4) נתון: $\log_4 6 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_2 3$ ב. $\log_{32} 36$ ג. $\log_{216} 96$

(5) נתון: $\log_2 3 = a$, $\log_3 5 = b$. הבע באמצעות a ו- b את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_3 50$ ב. $\log_2 \sqrt{30}$ ג. $\log_5 22.5$

6 נתון $\log_3 7 = a$, $\log 9 = 2b$. הבע באמצעות a ו- b את:

א. $\log 21$.

ב. $\log_3 \left(\frac{10}{7} \right)$.

ג. $\log_7 10$.

ד. $\log_{30} 63$.

שאלות נוספות:

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

7 $\log_6 9 \cdot \log_{15} 30 + \log_6 5 \cdot \log_{15} 4 = 2$

8 $\log \sqrt{3} \cdot \log_6 50 + \log \sqrt{2} \cdot \log_6 300 = 1$

תשובות סופיות:

1 א. 1 ב. -1.5 ג. $2\frac{2}{3}$ ד. 12

2 א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

3 א. $x = 32$ ב. $x = 27, \frac{1}{27}$ ג. $x = 8, \frac{1}{2}$ ד. $x = \frac{1}{5}, \sqrt{5}$

4 א. $2a - 1$ ב. $0.8a$ ג. $\frac{a+2}{3a}$

5 א. $2b + \frac{1}{a}$ ב. $\frac{a}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{1}{2}$ ג. $\frac{2}{b} + 1 - \frac{1}{ab}$

6 א. $b + ab$ ב. $\frac{1}{b} - a$ ג. $\frac{1}{ab}$ ד. $\frac{ab+2b}{b+1}$

7 הוכחה.

8 הוכחה.

הלוגריתם הטבעי:

סיכום כללי:

לוגריתם על בסיס e (קבוע אוילר) מסומן: $\log_e \Rightarrow \ln$ והוא נקרא הלוגריתם הטבעי. למשל: $\ln 3 = \log_e 3$ או $\ln \frac{1}{4} = \log_e \frac{1}{4}$. לוג זה נקרא בשם לן. מהגדרת הלוגריתם מתקיים: $\ln a = b \rightarrow e^b = a$ כאשר $a > 0$ ו- b מספרים כלשהם.

שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הטבעיים הבאים:

$$\text{א. } \ln e^2 \quad \text{ב. } \ln \frac{1}{e^4} \quad \text{ג. } \ln \frac{1}{e\sqrt{e}}$$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג):

$$\text{א. } \ln x = 2 \quad \text{ב. } \ln x = -\frac{1}{2}$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (הצבה וחוקי הלוגריתמים):

$$\begin{aligned} \text{א. } \ln\left(e^{2x} - \frac{1}{2}\right) + \ln 2 = x \\ \text{ב. } 3 \ln^2 x + \ln x = 2 \\ \text{ג. } \ln(e^2 x^3) \cdot \ln \frac{1}{x} = \ln(ex^2) \end{aligned}$$

(4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הוצאת לוג משני אגפי המשוואה)

$$\text{א. } x^{\ln x} = e^6 x \quad \text{ב. } \left(\frac{1}{x}\right)^{2-3 \ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x}$$

(5) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

$$\text{א. } e^{\ln 3} \quad \text{ב. } e^{2 \ln 3}$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } 2 \quad \text{ב. } -4 \quad \text{ג. } -1.5$$

$$(2) \quad \text{א. } x = e^2 \quad \text{ב. } x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$(3) \quad \text{א. } x = 0 \quad \text{ב. } x = \sqrt[3]{e^2}, \frac{1}{e} \quad \text{ג. } x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \frac{1}{e}$$

$$(4) \quad \text{א. } x = e^3, \frac{1}{e^2} \quad \text{ב. } x = \sqrt{e}, e$$

$$(5) \quad \text{א. } 3 \quad \text{ב. } 9$$

משוואות עם בסיסים שונים:

סיכום כללי:

לעיתים תתקבל משוואה מעריכית שבה לא ניתן למצוא חזקה שלמה, כגון: $3^x = 4$. במקרים אלו נעזר בהגדרת הלוג כדי לבטא את ערך המעריך: $x = \log_3 4$. את ערך הביטוי $\log_3 4$ ניתן לחשב ע"י מחשבון או ע"י מעבר לבסיס 10: $\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3}$.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (בסיסים שונים):

א. $3^x = 6$ ב. $2^x - 9 = 0$

ג. $49^x - 8 \cdot 7^x + 15 = 0$ ד. $2 \cdot 3^{\frac{2x}{3}} + 5 \cdot 3^{\frac{x}{3}} + 2 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם בסיס ולוגריתם טבעי):

א. $e^{3x} = 3$ ב. $4 + 3e^x = 9$

ג. $3e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$ ד. $e(e^x + 1) = 2\sqrt{e^{x+2}} + 9e$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם פתרונות לא שלמים):

א. $\log_2(7 - 5^x) = \log_2 \frac{10}{5^x}$ ב. $\log_2(4e^{2x} + 6) - 1 = \log_2(7e^x)$

תשובות סופיות:

(1) א. $x = \log_3 6 = 1.63$ ב. $x = \log_2 9 = 3.17$

ג. $x = \log_7 3 = 0.564$, $x = \log_7 5 = 0.827$ ד. אין פתרון.

(2) א. $x = \frac{1}{3} \ln 3 = 0.36$ ב. $x = \ln \frac{5}{3} = 0.51$ ג. $x = 0$, $x = -\ln 3 = -1.09$

ד. $x = \ln 16 = 2.7725$

(3) א. $x = 1$, $x = \log_5 2 = 0.43$ ב. $x_1 = \ln \frac{1}{2} = -0.693$, $x = \ln 3 = 1.098$

מערכת משוואות לוגריתמיות:

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \log_6^2 x - \log_6(2y-2) = 2 \\ \frac{1}{2}x = y-1 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} y = \log_2 x \\ y = 6 - \log_2 x \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \log_3(x+y) = \log_3(4x+y) - 2 \\ \log_5(5x+3y) = 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \log_2(\log_3(x-y)) = 1 \\ \log_5(x+y-11) = \log_{25} x + \frac{1}{2}\log_5(y+2) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \log_2 x^2 + \log_3 \frac{1}{y} = 9 \\ \log_2 \sqrt{x} + \log_{\sqrt[3]{3}} y = -1 \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 6\log_4 y = 11 \\ 10\log_5 x - 2\log_4 y = 17 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} xy = 27 \\ x^{\log_3 y} = 9 \end{cases} \quad (8) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 2^{\log_2 y} = 6 \\ x^y = 5^8 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} 2^{\frac{\log_1(2x-y)}{2}} = 7^{\log_7 \frac{2x+y}{15}} \\ \log_3 x + \log_3 y = \frac{1}{\log_{28} 3} \end{cases} \quad (9)$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{llll} (8, -5) \quad (3) & (36, 19), \left(\frac{1}{6}, 1\frac{1}{12}\right) \quad (2) & (8, 3) \quad (1) \\ \left(16, \frac{1}{3}\right) \quad (6) & (25, 8) \quad (5) & (16, 7) \quad (4) \\ (4, 7) \quad (9) & (3, 9), (9, 3) \quad (8) & (25, 4), (625, 2) \quad (7) \end{array}$$

מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות:

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 25^y = (5\sqrt{5})^{x+1} \\ \log_5 \sqrt{x} + \log_5 \sqrt{y} = \log_5 3 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} y = \log_2(4^x - 2) \\ y = 2x - 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x \cdot \log_2 3 = \frac{y}{\log_9 2} \\ \log_3(9^x + 27) = 2y + \log_3 12 \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} 3y + 5 \log_6 x = 1 \\ 216 \cdot x^{2-y} = 6^{1-4y} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x = \log_4(5 - 9^y) \\ \log_2(2^x + 3) = \log_4(29 - (3^y - 3)^2) \end{cases} \quad (6) \quad \begin{cases} (2^x - 1)^2 - 4y + 3 = 0 \\ x = \log_2(y + 1) \end{cases} \quad (5)$$

תשובות סופיות:

$$(36, -3), \left(6, -1\frac{1}{3}\right) \quad (3) \quad (3, 3) \quad (2) \quad (1, 1) \quad (1)$$

$$(1, 0) \quad (6) \quad (1, 1), (2, 3) \quad (5) \quad \left(1, \frac{1}{2}\right), (2, 1) \quad (4)$$

אי-שוויונים לוגריתמים:

סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $\log_a x > \log_a y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$\log_6(x^2 - 5x) < 1$ (2)	$\log_2 x < \log_2(5x - 20)$ (1)
$\log_{\frac{1}{2}}(1 - 3x) \geq \log_{\frac{1}{2}}(7 - x)$ (4)	$\log_3 x > \log_9(15 - 2x)$ (3)
$\ln x < 3$ (6)	$\ln x \geq \ln(x^2 - 12)$ (5)
$\frac{6}{\ln^2 x} \geq 2 - \frac{1}{\ln x}$ (8)	$\ln^2 x - 6 \ln x < 7$ (7)

תשובות סופיות:

$-1 < x < 0, 5 < x < 6$ (2)	$x > 5$ (1)
$-3 \leq x \leq \frac{1}{3}$ (4)	$3 < x < 7\frac{1}{2}$ (3)
$0 < x < e^3$ (6)	$2\sqrt{3} < x \leq 4$ (5)
וגם $x \neq 1$ וגם $\frac{1}{\sqrt{e^3}} \leq x \leq e^2$ (8)	$\frac{1}{e} < x < e^7$ (7)

מתמטיקה 55004 לתלמידי לוגיסטיקה

פרק 7 - חשבון דיפרנציאלי - הפונקציה הממשית

תוכן העניינים

1. פונקציה - הגדרה ותכונות בסיסיות (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית (ללא ספר)
3. הפונקציה הריבועית (ללא ספר)
4. הפונקציה המעריכית (ללא ספר)
5. הפונקציה הלוגריתמית (ללא ספר)
6. פונקציות מפורסמות נוספות (ללא ספר)
7. הזזות שיקופים מתיחות וכיווצים של פונקציה (ללא ספר)
8. תחום הגדרה של פונקציה 121
9. הרכבת פונקציות 123
10. הפונקציה ההפוכה 126
11. פונקציה זוגית ופונקציה אי זוגית 130
12. פונקציה מפוצלת 132

תחום הגדרה של פונקציה

שאלות

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$y = x^3 - x^2 - 4x + 1 \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{x^2 - 4} \quad (2)$$

$$y = \frac{4x + 1}{x^2 + 1} \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{x^3 - x} \quad (4)$$

$$y = \frac{x^2}{x^2 - x - 2} \quad (5)$$

$$y = \sqrt{x - 4} \quad (6)$$

$$y = \sqrt{x^2 + x - 2} \quad (7)$$

$$y = \sqrt[3]{x^2 + x - 1} \quad (8)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - |x|}} \quad (9)$$

$$y = \ln(x^2 + x - 2) \quad (10)$$

$$y = \log x + \frac{1}{\log x} \quad (11)$$

$$y = e^{x^2 + x + 1} \quad (12)$$

$$y = \log_x(x+4) \quad (13)$$

תשובות סופיות

- (1) כל x .
- (2) $x \neq \pm 2$
- (3) כל x .
- (4) $x \neq 0, 1, -1$
- (5) $x \neq 2, -1$
- (6) $x \geq 4$
- (7) $x \leq -2, x \geq 1$
- (8) כל x .
- (9) $-1 < x < 1$
- (10) $x < -2, x > 1$
- (11) $x > 0, x \neq 1$
- (12) כל x .
- (13) $x > 0, x \neq 1$

הרכבת פונקציות

שאלות

(1) נתונות הפונקציות $h(x) = \frac{4}{x}$, $g(x) = x^2$, $f(x) = x - 4$

חשבו את הפונקציות המורכבות הבאות:

א. $f(g(1))$ ב. $h(g(f(5)))$ ג. $f(g(x))$

ד. $h(f(x))$ ה. $f(f(x))$ ו. $h(h(x))$

(2) נתון $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$

חשבו את $f(f(x))$ עבור $x=3$

(3) נתון $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$, $g(x) = \frac{5-x}{x-7}$

חשבו את $f(g(x)) + g(f(x))$ עבור $x=8$

(4) נתון $f(x) = x^2 - 7x$, $g(x) = \ln x$

חשבו את $f(g(x))$ עבור $x=e^2$

(5) נתון $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = \ln x$

חשבו את $f(g(x))$ עבור $x=2$

(6) נתון $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ x & x = 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x+3 & x > 4 \\ 3x & x \leq 4 \end{cases}$

חשבו את $f(g(x))$, $g(f(x))$

(7) נתונות הפונקציות

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 1 \\ -x^2-2x-1 & x \geq 1 \end{cases}$$

מצאו נוסחה עבור ההרכבה $z(x) = g(f(x))$

8 נתונות הפונקציות

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases} \quad \text{ו-} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 1 \\ -x^2 - 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

א. מצאו נוסחה עבור ההרכבה $h(x) = f(g(x))$.

ב. נתון ש- $n \in \mathbb{Z}$ ו- $h(n) \notin \mathbb{Z}$.

מה ניתן להסיק בוודאות?

1. $n \leq -3$

2. $n \geq 1$

3. n אי-זוגי שלילי.

4. אף תשובה אינה נכונה.

9 נתון $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

מצאו את $f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\dots(f(x))))}_{n \text{ Times}}$

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } -3 \quad \text{ב. } 4 \quad \text{ג. } x^2 - 4 \quad \text{ד. } \frac{4}{x-4} \quad \text{ה. } x-8 \quad \text{ו. } x$$

$$(2) \quad 3$$

$$(3) \quad 69/13$$

$$(4) \quad -10$$

$$(5) \quad 4$$

$$f(g(x)) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & x > 4 \\ \frac{1}{3x} & 0 < x \leq 4 \\ (3x)^2 & x \leq 0 \end{cases}, \quad g(f(x)) = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 2 \\ 3x^2 & -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{x} + 3 & 0 < x < \frac{1}{4} \\ 3\frac{1}{x} & x \geq \frac{1}{4} \end{cases} \quad (6)$$

$$z(x) = \begin{cases} 4x^2 + 16x + 12 & x < -1.5 \\ -4x^2 - 20x - 25 & -1.5 \leq x \leq -1 \\ x - 3 & -1 < x < 0 \\ -x - 2 - 2\sqrt{x+1} & x \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{ב. } n \leq -3 \quad h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3} & x < -\sqrt{3} \\ 2x^2 - 4 & -\sqrt{3} \leq x < 1 \\ -2x^2 - 4x + 2 & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{א. } (8)$$

$$(9) \quad f^n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$$

הפונקציה ההפוכה

שאלות

בשאלות 1-4 הוכיחו שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצאו את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{3} \quad (1)$$

$$(x \geq 0) f(x) = x^2 - 4 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad (3)$$

בשאלות 5-7, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (7)$$

$$f(x) = x^2 - x \quad (6)$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad (5)$$

בשאלות 8-10, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע, אם כן, מצאו את הפונקציה ההפוכה ואת התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^3 \quad (10)$$

$$y = \frac{x^2+3}{2x-1} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (8)$$

$$(11) \text{ נתונה } f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x-1}}$$

האם הפונקציה היא חח"ע? מצאו את התמונה של הפונקציה.

(12) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו את תחום ההגדרה, הטווח והתמונה וקבעו האם היא פונקציה על:

$$f(x) = \frac{x-1}{3}; f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x}; f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2}; f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = x^2 - 4; f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ד.}$$

13 עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו תחום הגדרה, טווח ותמונה. בנוסף, קבעו האם הפונקציה הנתונה היא על.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{א.}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f: \mathbb{R} \rightarrow (0,1] \quad \text{ב.}$$

$$h(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f: (1, \infty) \rightarrow (0,1] \quad \text{ג.}$$

14 תהיינה שתי פונקציות $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$.

תהי $h: A \rightarrow C$ ההרכבה, המוגדרת על ידי $h(x) = g(f(x))$. הוכיחו או הפריכו:

א. אם f ו- g חח"ע אז h חח"ע.

ב. אם f ו- g חח"ע אז h על.

ג. אם f ו- g על אז h על.

ד. אם f ו- g על אז h חח"ע.

ה. אם f חח"ע ו- g על אז h חח"ע.

ו. אם f חח"ע ו- g על אז h על.

ז. אם f על ו- g חח"ע אז h חח"ע.

ח. אם f על ו- g חח"ע אז h על.

15 תהיינה שתי פונקציות $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$.

תהי $h: A \rightarrow C$ ההרכבה, המוגדרת על ידי $h(x) = g(f(x))$.

נתון כי h על.

הוכיחו או הפריכו:

א. f חח"ע.

ב. f על.

ג. g חח"ע.

ד. g על.

16 תהיינה שתי פונקציות $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$.

תהי $h: A \rightarrow C$ ההרכבה, המוגדרת על ידי $h(x) = g(f(x))$.

נתון כי h חח"ע.

הוכיחו או הפריכו:

א. g על.

ב. f על.

ג. g חח"ע.

ד. f חח"ע.

תשובות סופיות

$$(1) \quad f^{-1}(x) = 3x + 1, \text{ כל } y.$$

$$(2) \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}, y \neq 1$$

$$(3) \quad f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{x-3}, y \neq 3$$

$$(4) \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}, y \geq -4$$

$$(5) \quad \text{לא חח"ע. תמונה: } y \leq -2 \text{ או } y \geq 2.$$

$$(6) \quad \text{לא חח"ע. תמונה: } y \geq -\frac{1}{4}.$$

$$(7) \quad \text{לא חח"ע. תמונה } 0 \leq y \leq 1.$$

$$(8) \quad \text{כן חח"ע. תמונה: } y > 0. \text{ פונקציה הפוכה: } x > 0, f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

$$(9) \quad \text{לא חח"ע. תמונה: } y \geq 2.3 \text{ או } y \leq -1.3$$

$$(10) \quad \text{כן חח"ע. תמונה: } y \neq 1. \text{ פונקציה הפוכה: } f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2}.$$

$$(11) \quad \text{לא חח"ע. תמונה: } y \geq \frac{6}{\sqrt{3}}.$$

$$(12) \quad \text{א. תחום הגדרה, טווח ותמונה: } \mathbb{R}; \text{ על.}$$

$$\text{ב. תחום הגדרה } \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ טווח } \mathbb{R}, \text{ תמונה: } \mathbb{R} \setminus \{0\}; \text{ לא על.}$$

$$\text{ג. תחום הגדרה } \mathbb{R} \setminus \{2\}, \text{ טווח ותמונה: } \mathbb{R} \setminus \{3\}; \text{ על.}$$

$$\text{ד. תחום הגדרה } [0, \infty), \text{ טווח } \mathbb{R}, \text{ תמונה: } [-4, \infty); \text{ לא על.}$$

$$(13) \quad \text{א. תחום הגדרה וטווח: } \mathbb{R}, \text{ תמונה: } (0, 1]; \text{ לא על.}$$

$$\text{ב. תחום הגדרה } \mathbb{R}, \text{ טווח ותמונה: } (0, 1]; \text{ על.}$$

$$\text{ג. תחום הגדרה } (1, \infty], \text{ טווח } (0, 1], \text{ תמונה: } (0, 0.5); \text{ לא על.}$$

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16) שאלת הוכחה.

פונקציה זוגית ואי זוגית

שאלות

מצאו איזה מבין הפונקציות בשאלות 1-6 הן אי-זוגיות ואיזה זוגיות:

$$y = 4x^3 \quad (1) \quad y = x^4 + x^{10} \quad (2) \quad y = 1 \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{x} \quad (4) \quad y = 2^x \quad (5) \quad y = \ln x + x^2 \quad (6)$$

(7) נתונה פונקציה אי-זוגית $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\text{ונסמן } k(x) = -f(x), \quad z(x) = f(x^2).$$

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות k, z , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(8) נתונה פונקציה אי-זוגית $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, פונקציה זוגית $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\text{ונסמן } k(x) = -f(x^3) \text{ ו- } z(x) = -g(x^3).$$

טענה א': $z(x)$ אי-זוגית.

טענה ב': $k(x)$ אי-זוגית.

איזו טענה נכונה?

(9) נתונה פונקציה אי-זוגית $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, פונקציה זוגית $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\text{ונסמן } k(x) = f(-x) + x^{11}g(|x|), \quad z(x) = -g(-4x) \cdot f(x^4).$$

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות k, z , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(10) הוכיחו כי:

א. סכום פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית

ב. מכפלת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ג. מנת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ד. הרכבה של פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ה. הרכבה של פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה אי-זוגית.

תשובות סופיות

שאלות 1-6: זוגית: 2,3; אי-זוגית: 1,4; כללית: 5,6.

(7) k אי-זוגית, z זוגית.

(8) טענה ב'.

(9) k אי-זוגית, z זוגית.

(10) שאלת הוכחה.

פונקציה מפוצלת

שאלות

רשמו כל אחת מהפונקציות 1-4 כפונקציה מפוצלת ושרטטו את גרף הפונקציה:

$$y = 3|x+1| \quad (2)$$

$$y = |x-2| \quad (1)$$

$$y = \frac{|x|}{x} \quad (4)$$

$$y = x^2 + 2|x-1| \quad (3)$$

$$(5) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 4 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

א. חשבו $f(1)$, $f(4)$, $f(-4)$, $f(0)$, $f(7)$.

ב. שרטטו את גרף הפונקציה.

ג. בדקו האם הפונקציה זוגית, אי-זוגית או כללית.

תשובות סופיות

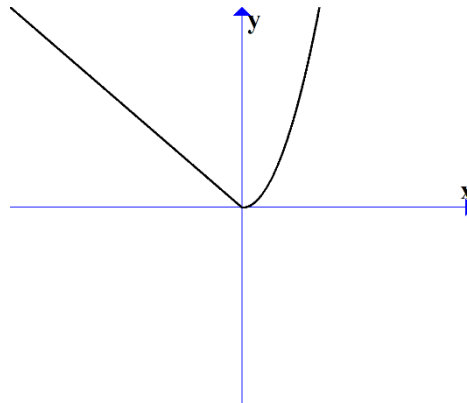
$$y = \begin{cases} 3x+3 & x \geq -1 \\ -3x-3 & x < -1 \end{cases} \quad (2)$$

$$y = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & x < 1 \end{cases} \quad (3)$$

(5) א. $f(1) = 1$, $f(4) = 16$, $f(-4) = 4$, $f(0) = 0$, $f(7) = \text{undefind}$
 ב. ג. כללית.



מתמטיקה 55004 לתלמידי לוגיסטיקה

פרק 8 - חשבון דיפרנציאלי - גבול של פונקציה

תוכן העניינים

133	1. הצבה
134	2. צמצום
135	3. הכפלה בצמוד
136	4. פונקציה שואפת לאינסוף
137	5. x שואף לאינסוף
139	6. הגבול של אוילר
140	7. כלל הסנדוויץ'
141	8. גבול של פונקציה מפוצלת
142	9. גבול לפי הגדרה
(ללא ספר)	10. הסבר כללי

הצבה

שאלה

חשבו את הגבולות הבאים :

א. $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1$

ב. $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2}$

ג. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3}$

ד. $\lim_{x \rightarrow 100} 20$

תשובה

א. 21 ב. $\frac{11}{12}$ ג. 2 ד. 20

צמצום

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (4) \qquad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x - 1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} \quad (6) \qquad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \quad (8) \qquad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad (9)$$

תשובות סופיות

$$\begin{array}{cccccc} -3 & (5) & n-1 & (4) & 6 & (3) & \frac{10}{8.5} & (2) & \frac{5}{6} & (1) \\ & & \frac{8}{17} & (9) & 27 & (8) & 3 & (7) & 32 & (6) \end{array}$$

הכפלה בצמוד

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x+6}}{2x-6} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{3x+1}}{1 - \sqrt{2x-1}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x} \quad (8)$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{6} \quad (5)$$

$$4 \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (6)$$

$$-\frac{1}{12} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (7)$$

$$\frac{3}{8} \quad (4)$$

$$-\frac{8}{3} \quad (8)$$

פונקציה שואפת לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3 \right) \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (11)$$

תשובות סופיות

ϕ (4)

$-\infty$ (3)

ϕ (2)

ϕ (1)

ϕ (8)

∞ (7)

∞ (6)

$-\infty$ (5)

ϕ (11)

1 (10)

0 (9)

x שואף לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

- | | |
|---|---|
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (2)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (4)$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (3)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (6)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (5)$ |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (8)$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (10)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (9)$ |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{x+\frac{1}{2}}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (11)$ |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (13)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (16)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (15)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad (18)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (17)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx} - x) \quad (20)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad (19)$ |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad (22)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad (21)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad (24)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad (23)$ |

הגבול של אוילר

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

(היעזרו בגבול של אוילר : $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x^2+x+4}\right)^{4x^2} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+4x+1}{x^2+x+2}\right)^{10x} \quad (7)$$

תשובות סופיות

e^{-1} (4)	e^2 (3)	1 (2)	$e^{\frac{1}{2}}$ (1)
	e^{30} (7)	e^{-12} (6)	e^3 (5)

כלל הסנדוויץ'

שאלות

בשאלות 1-3 חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2^x + 3^x + 4^x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [x] \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} [x] \quad (3)$$

$$(4) \quad \text{נתונה פונקציה } z: R \rightarrow R, \text{ המקיימת } \lim_{x \rightarrow 2} z(x) = 4,$$

ונתונה פונקציה $f: R \rightarrow R$, המקיימת $4z(x) \leq f(x) \leq (z(x))^2$, לכל x .

$$\text{חשבו את הגבולות } \lim_{x \rightarrow 2} f(x), \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2)$$

תשובות סופיות

(3) 0

(2) 1

(1) 4

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 16 \quad (4)$$

גבול של פונקציה מפוצלת

שאלות

חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ של הפונקציות הבאות:

$$(a=1), f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1} & x > 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & x < 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$(a=0), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (2)$$

$$(a=\infty), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (3)$$

$$(a=-\infty), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|1-x|}{x^2+x-2} \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|1-x|}{x^2+x-2} \quad \text{ב.}$$

תשובות סופיות

- (1) ϕ (2) ϕ (3) 1 (4) -1
- (5) א. אין גבול. ב. $\frac{1}{6}$

גבול לפי הגדרה

שאלות

בשאלות 1-5, על פי הגדרת הגבול, הוכיחו:

$$\lim_{x \rightarrow 24} \sqrt{x+1} = 5 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x = 20 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 7x + 14 = 28 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x}{x^2 - 2} = 1 \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x+2}} = \frac{1}{4} \quad (4)$$

$$(6) \quad \text{חשבו על פי הגדרת הגבול: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-1}$$

הוכיחו על פי הגדרת הגבול, את המקרים 7-10:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+7}{x+2} = 1 \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+x}{x^2+1} = 1 \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-1}{x^2+x+1} = 3 \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-4x}{2x+1} = -2 \quad (9)$$

$$(11) \quad \text{נתונה פונקציה } f(x) \text{ המקיימת: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -5$$

הוכיחו כי קיים $M > 0$ ממשי כלשהו כך שעבור כל $x > M$, מתקיים $f(x) < -4$.

$$(12) \quad \text{נתונה פונקציה } f(x) \text{ המקיימת: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$$

הוכיחו כי קיים $M > 0$ ממשי כלשהו כך שעבור כל $x > M$, מתקיים $f^2(x) > 16$.

$$(13) \quad \text{נניח } f \text{ פונקציה ממשית וחיובית בתחום } [a, \infty) \text{ המקיימת } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\text{הוכיחו שמתקיים } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{f(x)} = 0$$

$$(14) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 3x + 2} = 1 \quad \text{נתון הגבול הבא:}$$

מצאו ערך של $M > 0$ עבורו לכל $x > M$ הביטוי שבגבול קרוב לערך הגבול

עד כדי 0.1. במילים אחרות, מצאו M , כך ש- $|f(x) - L| < 0.1$ $\forall x > M$.

$$(15) \quad f(x) = \begin{cases} 2 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \in \mathbb{R} / \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{מגדירים את הפונקציה הבאה:}$$

האם הגבולות קיימים? הוכיחו זאת בהסתמך על הגדרת הגבול.

$$\text{א. } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{ב. } \lim_{x \rightarrow 2.5} f(x) \quad \text{ג. } \lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$$

$$(16) \quad \text{בהינתן הגבול } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+4}{x+11} = \frac{1}{2} \text{ מצאו } \delta > 0 \text{ כך שלכל } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{המקיים } |x-1| < \delta \text{ , מתקיים אי-השוויון } \left| \frac{2x+4}{x+11} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{100}$$

(17) הוכיחו או הפריכו:

$$\text{א. אם } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0 \text{ , אז } \lim_{x \rightarrow \infty} (f^2(x) - g^2(x)) = 0$$

$$\text{ב. אם } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = 0 \text{ , אז } \lim_{x \rightarrow x_0} (f^2(x) - g^2(x)) = 0$$

$$\text{ג. אם } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = L \text{ , אז הגבול } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ קיים ושווה ל-} L \text{ או } -L$$

$$\text{ד. אם הגבולות } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) \text{ ו-} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ קיימים,}$$

$$\text{אז גם הגבול } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ קיים.}$$

תשובות סופיות

(6) $\pm \infty$

תשובות לשאר השאלות נמצאות באתר GOOL.co.il

מתמטיקה 55004 לתלמידי לוגיסטיקה

פרק 9 - חשבון דיפרנציאלי - הגדרת הנגזרת, גזירות של פונקציה ונגזרות
חד-צדדיות

תוכן העניינים

- 144 1. הגדרת הנגזרת, גזירות של פונקציה.
- 147 2. נגזרות חד-צדדיות.

הגדרת הנגזרת, גזירות של פונקציה

שימו לב

בפרק זה יש לדעת גזירת פונקציות לפי נוסחאות גזירה, כפי שנלמד בבית הספר. למי שלא למדו זאת כדאי לעבור קודם לפרק הבא, ללמוד את הנושא, ורק אחר כך לחזור לכאן.

שאלות*

בשאלות 1-5 חשבו את הנגזרת של הפונקציה הנתונה על פי ההגדרה:

$$(1) \quad f(x) = x^2 + 4x + 1 \quad (2) \quad f(x) = \frac{1}{x+1} \quad (3) \quad f(x) = e^x$$

$$(4) \quad f(x) = \ln x \quad (5) \quad f(x) = \sqrt{x+10}$$

$$(6) \quad \text{חשבו את } f'(0), \text{ אם נתון כי } f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-44).$$

$$(7) \quad \text{חשבו את } f'(0), \text{ אם נתון כי } f(x) = 2x(|x|+1)\sqrt{1+x+x^2}.$$

$$(8) \quad \text{חשבו את } f'(0), \text{ אם נתון כי } f(x) = x \cdot z(x) \text{ כאשר } z(0) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} z(x) = 4.$$

$$(9) \quad \text{נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} & x > 0 \\ -(x+1)^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

א. מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה רציפה.

ב. בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x=1$. האם קיים משיק בנקודה זו?

(10) חשבו את הגבולות הבאים:

$$א. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(4+x) - \ln 4}{x} \quad ב. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1+x} - e}{x}$$

(11) נתון כי f גזירה בנקודה x_0 . הוכיחו כי:

$$א. \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$ב. \quad 2x_0 f(x_0) - x_0^2 f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 f(x_0) - x_0^2 f(x)}{x - x_0}$$

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

(12) נתון כי f גזירה וזוגית.
הוכיחו כי f' אי זוגית.

(13) נתונה פונקציה המוגדרת ב- $[a, b]$ ומקיימת לכל x, y ב- $[a, b]$:
 $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$
הוכיחו כי f גזירה ב- $[a, b]$ וחשבו את נגזרתה.

(14) נתונה הפונקציה
 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ x^3 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
חשבו את $f'(x)$ על פי ההגדרה.

(15) נתונה הפונקציה
 $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
חשבו את $f'(x)$ על פי ההגדרה.

(16) הוכיחו או הפריכו:

- א. אם h גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0 ,
אז $f = g + h$ אינה גזירה ב- x_0 .
- ב. אם h אינה גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0 ,
אז $f = g + h$ אינה גזירה ב- x_0 .
- ג. אם h אינה גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0 ,
אז $f = g \cdot h$ אינה גזירה ב- x_0 .
- ד. אם h גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0 ,
אז $f = g \cdot h$ אינה גזירה ב- x_0 .

(17) הוכיחו או הפריכו:

- א. אם f גזירה, אז $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right]$
- ב. אם הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right]$ קיים וסופי, אז f גזירה.

(18) הוכיחו או הפריכו:

- א. אם f גזירה ב- (a, b) ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$, אז $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \infty$
- ב. אם f גזירה ב- (a, b) ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \infty$, אז $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$

תשובות סופיות

$$f'(x) = 2x + 4 \quad (1)$$

$$f(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \quad (2)$$

$$f'(x) = e^x \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+10}} \quad (5)$$

$$!44 \quad (6)$$

$$2 \quad (7)$$

$$4 \quad (8)$$

(9) א. רציפה לכל x . ב. לא גזירה בנקודה $x=1$. קיים משיק אנכי בנקודה.

$$(10) \text{ א. } \frac{1}{4} \quad \text{ב. } e$$

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה. $f'' = 0$

(14) הפונקציה גזירה רק ב- $x=0$, ומתקיים $f'(0) = 0$.

(15) הפונקציה גזירה רק ב- $x=1$, ומתקיים $f'(1) = 0$.

(16) שאלת הוכחה.

(17) שאלת הוכחה.

(18) שאלת הוכחה.

לפתרונות מלאים בווידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

נגזרות חד-צדדיות

שאלות

1) תארו שתי דרכים שונות לבדיקת גזירות של פונקציה מפוצלת בנקודות התפר שלה (נקודה שבה מתחלפת נוסחת הפונקציה).

השתמשו בפונקציה $f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x & x \geq 2 \\ x^3 + 12 & x < 2 \end{cases}$, על מנת להדגים שתי שיטות אלה.

בנוסף, הסבירו מתי יש להשתמש בכל אחת מהשיטות.

בשאלות 2-7 בדקו גזירות הפונקציות הבאות בתחום הגדרתן, בכל דרך שתבחרו. בנוסף, רשמו נוסחה עבור הנגזרת של כל אחת מהפונקציות:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x & x \geq 2 \\ x^3 - 14 & x < 2 \end{cases} \quad (3) \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & x \geq 2 \\ x^3 - 14 & x < 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+2x) & -0.5 < x < 0 \\ x^2 + 2x & x \geq 0 \end{cases} \quad (5) \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x & x \geq 2 \\ x^3 + 12 & x < 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x) = 3x^2 + x|x| + 1 \quad (7) \qquad f(x) = 2 + 4|x-1| \quad (6)$$

8) בדקו האם הפונקציה משאלה 5 גזירה פעמיים בנקודה $x=0$.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x \geq -1 \\ \frac{1}{x} + a & x < -1 \end{cases} \quad (9) \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

א. עבור איזה ערך של הקבוע a הפונקציה רציפה בנקודה $x=-1$?

ב. עבור ערך ה- a שנמצא בסעיף א', בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם

הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x=-1$.

האם קיים משיק בנקודה זו?

10) מצאו עבור אלו ערכים של הקבועים a ו- b הפונקציה הבאה גזירה בנקודת

$$f(x) = \begin{cases} \ln^3 x & 0 < x \leq e \\ ax + b & x > e \end{cases} \quad \text{התפר:}$$

עבור ערכים אלו, רשמו נוסחה עבור הנגזרת.

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

11 מצאו עבור אלו ערכים של הקבועים a ו- b הפונקציה הבאה גזירה בנקודת

$$\text{התפר: } f(x) = \begin{cases} e^x & 0 < x \leq 1 \\ ax + b & x > 1 \end{cases}$$

עבור ערכים אלו, רשמו נוסחה עבור הנגזרת.

תזכורת (הערך השלם)

פונקציית הערך השלם $[x]$ מחזירה לכל מספר ממשי x את המספר השלם הגדול ביותר, שקטן או שווה ל- x (מעגלת כלפי מטה). למשל: $[-4.1] = -5$, $[4.1] = 4$.

12 נתונה הפונקציה $f(x) = [x] - [-x]$.

חשבו את $f'(x)$.

תשובות סופיות

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+8 & x \geq 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-4 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-5 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+8 & x \geq 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+2x} & -0.5 < x < 0 \\ 2x+2 & x \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$f'(x) = 4 (x > 1) , \quad f'(x) = -4 (x < 1) \quad (6)$$

$$f'(x) = 8x (x \geq 0) , \quad f'(x) = 4x (x < 0) \quad (7)$$

(8) לא גזירה פעמיים בנקודה $x=0$.

(9) א. $a=1$ ב. לא גזירה. לא קיים משיק.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} \ln^2 x & 0 < x < e \\ \frac{3}{e} & x \geq e \end{cases} \quad a = 3/e \quad b = -2 \quad (10)$$

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & 0 < x < 1 \\ e & x \geq 1 \end{cases} \quad a = e \quad b = 0 \quad (11)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Z} \\ \text{undefined} & x \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (12)$$

מתמטיקה 55004 לתלמידי לוגיסטיקה

פרק 10 - חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים

תוכן העניינים

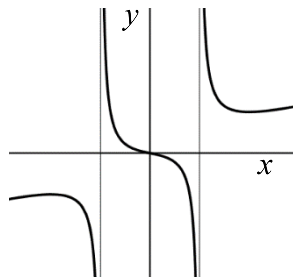
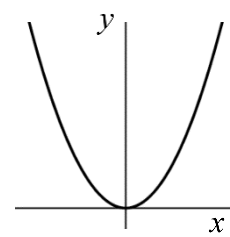
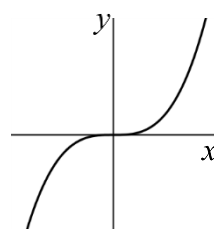
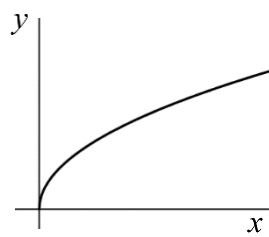
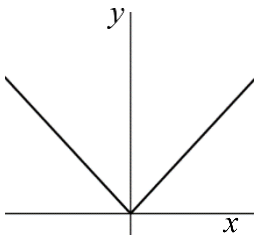
150	1. הקדמה כללית
151	2. גזירת פונקציות
157	3. מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה
158	4. מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה
161	5. שאלות עם פרמטרים
163	6. שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית

הקדמה כללית:

סיכום כללי:

פונקציות נפוצות:

הפונקציה $f(x) = x^2$: הפונקציה $f(x) = x^3$: הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$: הפונקציה $f(x) = |x|$:



פונקציה עם מכנה, למשל: $f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1}$:

שיפוע של פונקציה:

- השיפוע m של פונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעל הפונקציה הוא ערך הנגזרת בנקודה $A(x_1, y_1)$, כלומר: $m = f'(x_1)$.
- השיפוע של המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעל הפונקציה שווה לשיפוע הפונקציה בנקודה $A(x_1, y_1)$.
- משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעליה מתקבלת על ידי הנוסחה למציאת ישר: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

הנגזרת:

לכל פונקציה $f(x)$ קיימת פונקציה, הנקראת פונקציית הנגזרת (או רק "הנגזרת") ומסומנת $f'(x)$, המתקבלת ממנה על פי כללי הגזירה.

גזירת פונקציות:

סיכום כללי:

כללי הגזירה:

- כלל גזירה מס' 1: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
- כלל גזירה מס' 2 (כפל בקבוע): $f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$
- כלל גזירה מס' 3 (נגזרת של קבוע): $f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$
- כלל גזירה מס' 4 (סכום והפרש): $f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$
- כלל גזירה מס' 5 (פונקציה מורכבת): $f(x) = u^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
- כלל גזירה מס' 6 (נגזרת של $\frac{1}{x}$): $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
- כלל גזירה מס' 7 (מכפלה): $f(x) = u \cdot v \Rightarrow f'(x) = u'v + v'u$
- כלל גזירה מס' 8 (מנה): $f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- כלל גזירה מס' 9 (שורש): $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

שאלות:

(1) גזור את הפונקציות הבאות:

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| א. $f(x) = x^3$ | ב. $f(x) = x^7$ | ג. $f(x) = x^2$ |
| ד. $f(x) = x$ | ה. $f(x) = x^{-3}$ | ו. $f(x) = x^{-1}$ |
| ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ | ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ | ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ |

(2) גזור את הפונקציות הבאות:

- | | | |
|---------------------------|------------------------------|---------------------------------------|
| א. $f(x) = 2x^3$ | ב. $f(x) = 3x^7$ | ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$ |
| ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$ | ה. $f(x) = 8x$ | ו. $f(x) = 3x^{-2}$ |
| ז. $f(x) = \frac{4}{x}$ | ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$ | ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$ |

3) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 12$ ב. $f(x) = \frac{7}{8}$

4) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ ב. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$

ג. $f(x) = 7x^2 + 23x - 6$ ד. $f(x) = 6x^2 + 8x + 4$

ה. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^3$ ו. $f(x) = \frac{x^4}{8} + 67$

5) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = (5x - 2)^3$ ב. $f(x) = (x^3 + 6)^5$ ג. $f(x) = 3(x - x^2)^2$

ד. $f(x) = \frac{(5-x)^3}{4}$ ה. $f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3}$

6) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{3}{x}$ ב. $f(x) = -\frac{2}{x}$ ג. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

ד. $f(x) = \frac{3}{x^3}$ ה. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x}$ ו. $f(x) = \frac{2}{3-x}$

ז. $f(x) = \frac{6}{x+5}$

7) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = (5x+1)(x-3)$ ב. $f(x) = (5x+1)^3(x-3)$

ג. $f(x) = x^3(6-x)^4$ ד. $f(x) = 3x^2 \cdot x$

ה. $f(x) = x^2 \cdot x^3$ ו. $f(x) = x(3x+7)$

ז. $f(x) = 3x^3(3x-1)$ ח. $f(x) = (x-2)(2x^2+3)$

ט. $f(x) = (3x-2)(x^2+10x)$ י. $f(x) = (3x^4-4x)(2x^2+5x+2)$

יא. $f(x) = x(x-2)(3x-4)$

8) גזור את הפונקציות הבאות :

$f(x) = 2x^3(3x+5)^2$.ב.	$f(x) = (x^2 - 4)^2$.א.
$f(x) = (x^2 + 1)^3(2x-1)^2$.ד.	$f(x) = (x^3 + 2)^2(x-1)^3$.ג.

9) גזור את הפונקציות הבאות :

$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3}$.ג.	$f(x) = \frac{x^2 + 1}{5x - 12}$.ב.	$f(x) = \frac{3x - 1}{1 + 2x}$.א.
$f(x) = \frac{3}{x^3}$.ו.	$f(x) = \frac{1}{x}$.ה.	$f(x) = \frac{x^2 + 8}{x - 1}$.ד.
$f(x) = \frac{x^3 - x^2}{2(1-x)}$.ט.	$f(x) = \frac{(x^2 + 3)^2}{x^2 - 2}$.ח.	$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1}$.ז.
		$f(x) = \frac{x-2}{x^2 - 4}$.י.

10) גזור את הפונקציות הבאות :

$f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$.ג.	$f(x) = 4\sqrt{x+1}$.ב.	$f(x) = \sqrt{x}$.א.
$f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$.ו.	$f(x) = x^2\sqrt{x+3}$.ה.	$f(x) = (3x+1)\sqrt{x}$.ד.

11) גזור את הפונקציות הבאות :

$f(x) = \sqrt{2x}$.ב.	$f(x) = \sqrt{x+1}$.א.
$f(x) = \sqrt{10-3x}$.ד.	$f(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$.ג.
$f(x) = 3x^2 - 8\sqrt{x}$.ו.	$f(x) = \sqrt{2x^2 + 7x}$.ה.
$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$.ח.	$f(x) = x^2\sqrt{1-2x}$.ז.
$f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}}$.י.	$f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+4}}{2}$.ט.
$f(x) = \sqrt{\frac{3-x}{x}}$.יב.	$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + x - 5\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$.יא.
$f(x) = \frac{x^2 + 7}{\sqrt{x^2 - 5}}$.יד.	$f(x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x}}$.יג.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1} \quad \text{ט.ז.}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1} \quad \text{ט.ו.}$$

(12) גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{x-2a}{x-4a} \quad \text{ג.} \quad f(x) = \frac{ax^2}{3} - \frac{x}{b} + c \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = ax^4 - bx \quad \text{א.}$$

$$f(x) = a\sqrt{bx^2 + c} \quad \text{ד.}$$

(13) גזור פעמיים את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad \text{ו.}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad \text{ה.}$$

תשובות סופיות:

- (1) א. $3x^2$ ב. $7x^6$ ג. $2x$ ד. 1 ה. $-\frac{3}{x^4}$ ו. $-\frac{1}{x^2}$
- ז. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ח. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ט. $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$
- (2) א. $6x^2$ ב. $21x^6$ ג. $2x^3$ ד. $\frac{6x^5}{7}$ ה. 8
- ו. $-\frac{6}{x^3}$ ז. $-\frac{4}{x^2}$ ח. $\frac{3}{\sqrt{x}}$ ט. $\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$
- (3) א. 0 ב. 0
- (4) א. $3x^2 + 4x - 3$ ב. $x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}$ ג. $14x + 23$ ד. $12x + 8$ ה. $x - 3x^2$ ו. $0.5x^3$
- (5) א. $15(5x - 2)^2$ ב. $15x^2(x^3 + 6)^4$ ג. $6(x - x^2)(1 - 2x)$
- ד. $-\frac{3}{4}(5 - x)^2$ ה. $\frac{8(x + 1)^3}{3}$
- (6) א. $-\frac{3}{x^2}$ ב. $\frac{2}{x^2}$ ג. $-\frac{2}{x^3}$ ד. $-\frac{9}{x^4}$ ה. $-\frac{2x - 3}{(x^2 - 3x)^2}$
- ו. $\frac{2}{(3 - x)^2}$ ז. $-\frac{6}{(x + 5)^2}$
- (7) א. $10x - 14$ ב. $(5x + 1)^2(20x - 44)$ ג. $x^2(6 - x)^3(18 - 7x)$
- ד. $9x^2$ ה. $5x^4$ ו. $6x + 7$ ז. $36x^3 - 9x^2$ ח. $6x^2 - 8x + 3$
- ט. $9x^2 + 56x - 20$ י. $36x^5 + 75x^4 + 24x^3 - 24x^2 - 40x - 8$ יא. $9x^2 - 20x + 8$
- (8) א. $4x(x^2 - 4)$ ב. $30x^2(x + 1)(3x + 5)$ ג. $3(x - 1)^2(x^3 + 2)(3x^3 - 2x^2 + 2)$
- ד. $2(2x - 1)(x^2 + 1)^2(8x^2 - 3x + 2)$
- (9) א. $\frac{5}{(1 + 2x)^2}$ ב. $\frac{5x^2 - 24x - 5}{(5x - 12)^2}$ ג. $\frac{8x}{(x^2 + 3)^2}$ ד. $\frac{(x - 4)(x + 2)}{(x - 1)^2}$
- ה. $-\frac{1}{x^2}$ ו. $-\frac{9}{x^4}$ ז. $\frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}$
- ח. $\frac{2x(x^2 + 3)(x^2 - 7)}{(x^2 - 2)^2}$ ט. $-x$ י. $-\frac{1}{(x + 2)^2}$

$$(10) \quad \text{א. } \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ב. } \frac{2}{\sqrt{x+1}} \quad \text{ג. } \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}} \quad \text{ד. } \frac{9x+1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ה. } \frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}}$$

$$\text{ו. } \frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$$

$$(11) \quad \text{א. } \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \quad \text{ב. } \frac{1}{\sqrt{2x}} \quad \text{ג. } \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}} \quad \text{ד. } -\frac{3}{2\sqrt{10-3x}} \quad \text{ה. } \frac{4x+7}{2\sqrt{2x^2+7x}}$$

$$\text{ו. } 6x - \frac{4}{\sqrt{x}} \quad \text{ז. } \frac{2x-5x^2}{\sqrt{1-2x}} \quad \text{ח. } -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \quad \text{ט. } \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+4}} \quad \text{י. } \frac{1-3x}{(1-x^2)^{1.5}}$$

$$\text{יא. } 3\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{5}{x^2} \quad \text{יב. } -\frac{3}{2x\sqrt{3x-x^2}} \quad \text{יג. } \frac{-x^2+2x+1}{2(1-x)^{1.5}\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{יד. } \frac{x^3-17x}{(x^2-5)^{1.5}} \quad \text{טו. } -\frac{x+1}{2\sqrt{x}(x-1)^2} \quad \text{טז. } -\frac{x+3}{2(x-1)^2\sqrt{x+1}}$$

$$(12) \quad \text{א. } 4ax^3 - b \quad \text{ב. } \frac{2ax}{3} - \frac{1}{b} \quad \text{ג. } \frac{-2a}{(x-4a)^2} \quad \text{ד. } \frac{abx}{\sqrt{bx^2+c}}$$

$$(13) \quad \text{א. } f'(x) = \frac{2x^2-8}{4x^2}, f''(x) = \frac{4}{x^3}$$

$$\text{ב. } f'(x) = \frac{2x^2+20x-62}{(2x+10)^2}, f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3}$$

$$\text{ג. } f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$$

$$\text{ד. } f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}, f''(x) = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

$$\text{ה. } f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4}$$

$$\text{ו. } f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, f''(x) = \frac{12(x+1)(x+3)}{(x-1)^5}$$

מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה:

שאלות:

(14) מצא את שיפוע הפונקציה $f(x) = 2x^3 - 7x$ בנקודה $(2, 2)$.

(15) מצא את שיפוע הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$ בנקודה בה $x = -2$.

(16) מצא את שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = 4\sqrt{x}$ בנקודה בה $x = 1$.

תשובות סופיות:

$$m = 17 \quad (14)$$

$$m = 4 \quad (15)$$

$$m = 2 \quad (16)$$

מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה:

שאלות:

(17) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = 2(4x+3)^3$ בנקודה בה $x = -1$.

(18) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{8}{x+1}$ בנקודה בה $y = 2$.

(19) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = x^2 - 2x - 8$ בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x .

(20) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^4 - 2x$ ששיפועו 2.

(21) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2 - 2}$ בנקודה שבה $x = 1$.

(22) נתון כי הישר $2y - 3x = 3$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = 3\sqrt{x}$. מצא את נקודת ההשקה.

(23) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ בנקודה בה $x = 1$.

(24) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = 3x^2 - 8\sqrt{x}$ בנקודה בה $x = 4$.

(25) נתונה הפונקציה הבאה $f(x) = 4x - 2\sqrt{x}$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המקביל לישר $f(x) = 3x - \frac{1}{2}$.

ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .

(26) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x-1}}$ ששיפועו -2.

(27) מצא את משוואות המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$ בנקודה שבה $x=2$.

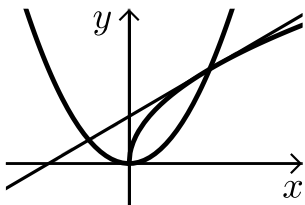
(28) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = \frac{1}{3x^3}$ היוצרים עם הכיוון החיובי של ציר ה- x זווית של 135° .

(29) מצא את משוואות המשיקים המשותפים לפונקציות הבאות: $y = x^2$, $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$.

(30) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$ ונתון הישר: $y = 2x$.

- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר הנמצאת ברביע הראשון.
- מצא את משוואות המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שמצאת בסעיף הקודם.
- חשב את השטח שנוצר בין המשיק והצירים.

(31) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$.



- מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.
- מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ העובר דרך נקודת החיתוך שמצאת הנמצאת ברביע הראשון.
- מצא את נקודת החיתוך הנוספת של המשיק שמצאת עם גרף הפונקציה $g(x)$.

תשובות סופיות:

$$y = 24x + 22 \quad (17)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2} \quad (18)$$

$$y = 6x - 24, y = -6x - 12 \quad (19)$$

$$y = 2x - 3 \quad (20)$$

$$y = -12x + 9 \quad (21)$$

$$(1, 3) \quad (22)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2} \quad (23)$$

$$y = 22x - 56 \quad (24)$$

$$\left(\frac{1}{3}, 0\right) \text{ ב. } y = 3x - 1 \text{ א. } (25)$$

$$y = -2x + 8 \quad (26)$$

$$y = \frac{11}{16}x - \frac{15}{8} \quad (27)$$

$$y = -x + 1\frac{1}{3}, y = -x - 1\frac{1}{3} \quad (28)$$

$$y = 2x - 1, y = -2x - 1 \quad (29)$$

$$.S = 4\frac{1}{12} \text{ ג.}$$

$$y = -1.5x + 3.5 \text{ ב. } (1, 2) \text{ א. } (30)$$

$$.(-0.5, 0.25) \text{ ג.}$$

$$y = 0.5x + 0.5 \text{ ב. } (0, 0), (1, 1) \text{ א. } (31)$$

שאלות עם פרמטרים:

שאלות:

32 שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = ax^2 - 4x$ בנקודה שבה $x = 3$ הוא 8. מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

33 נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{ax}$, $(a > 0)$.

המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{1}{2}$ הוא בעל שיפוע 1. מצא את ערך הפרמטר a .

34 נתונה הפונקציה: $y = x^3 + a\sqrt{x}$ (a פרמטר).

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$ הוא 5. מצא את ערך הפרמטר a .

35 נתונה הפונקציה: $y = 2\sqrt{x} - \frac{A}{x}$ (A פרמטר).

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$ הוא 2. מצא את ערך הפרמטר A .

36 הישר $y = 4x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$.

מצא את b ואת נקודת ההשקה.

37 שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{2}{ax+3}$ בנקודה שבה $y = 2$ הוא -4.

מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

38 הישר $y = ax + \frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x) = \frac{2}{x+c}$ בנקודה $x = 0$.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- c .

39 הישר $y = 3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} + b$.

מצא את b ואת נקודת ההשקה.

(40) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{a}{\sqrt{bx-1}}$ בנקודה (1, 6) הוא -6.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת משוואת המשיק.

(41) לאילו ערכי k ישיק הישר $y = -5x + 6$ לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + k$?
לכל ערך כזה של k מצא את נקודת ההשקה.

(42) הפונקציות $y = \frac{1}{x}$ ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$ משיקות זו לזו.

מצא את k ואת נקודת ההשקה.

תשובות סופיות:

$a = 2, y = 8x - 18$ (32)

$a = 2$ (33)

$a = 4$ (34)

$A = 1$ (35)

$(-1, 5), y = 4x + 9$ (36)

$a = 2, y = -4x - 2$ (37)

$a = -\frac{1}{8}, c = 4$ (38)

$b = 4, (4, 12)$ (39)

$b = 2, a = 6, y = -6x + 12$ (40)

$k = \frac{158}{27} : \left(\frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right)$ או $k = 6 : (1, 1)$ (41)

$(1, 1), k = 1.5$ (42)

שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית:

שאלות:

43) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. בטא באמצעות t את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^2 + 1$ בנקודה שבה $x = t$.
- ב. מצא את ערכיו של t אם נתון שהמשיק עובר בנקודה $(-1, 1)$.

44) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = 5x - x^2$ העוברים דרך הנקודה $(3, 7)$.

45) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = x^2 + 5x - 6$ העוברים דרך הנקודה $(0, -10)$.

46) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = 12x - x^3$ העוברים דרך הנקודה $(2, 24)$.

47) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ העובר בנקודה $(3, 0)$.

48) מצא משוואת המשיק לפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ אם ידוע ששטח המשולש שהוא יוצר עם הצירים הוא 4.5 יחידות שטח.

49) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-2}}$ העוברים דרך הנקודה $(2, 3)$.

תשובות סופיות:ב. $t = 0, -2$.

(43) $y = 2tx - t^2 + 1$

(44) $y = x + 4$, $y = -3x + 16$

(45) $y = 9x - 10$, $y = x - 10$

(46) $y = 12x$, $y = -15x + 54$

(47) $y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$

(48) $y = -\frac{1}{16}x + \frac{3}{4}$

(49) $y = -x + 5$

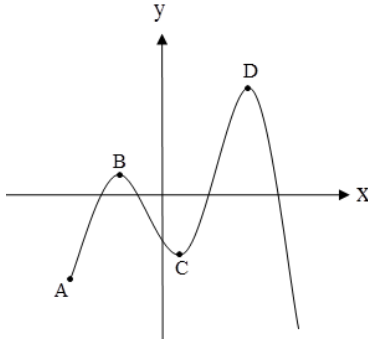
מתמטיקה 55004 לתלמידי לוגיסטיקה

פרק 11 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית פולינום

תוכן העניינים

165	1. נקודות קיצון של פונקציות
168	2. חקירת פונקציה פולינומית
172	3. פונקציה זוגית ואי-זוגית

נקודות קיצון של פונקציות:



סיכום כללי:

נקודות קיצון (נקודות מינימום/מקסימום):

- מינימום או מקסימום מקומי (פנימי) – B, C, D.
- מינימום או מקסימום קצה – A.
- מינימום או מקסימום מוחלט – D.

נקודות קיצון מקומיות:

- שיפוע המשיק לפונקציה בנקודות קיצון מקומיות הוא אפס.
- בנקודה שבה שיפוע המשיק לפונקציה הוא אפס תיתכן נקודת קיצון מקומית.
- נקודה כזו נקראת נקודה חשודה כקיצון. ניתן לבדוק אם היא אכן נקודת קיצון.

שלבים למציאת נקודות קיצון מקומיות:

- נגזור את הפונקציה.
- נשווה את הנגזרת לאפס ונחלץ את ערכי ה- x של הנקודות החשודות כקיצון.
- נציב את ערכי ה- x מסעיף ב' בפונקציה המקורית לקבלת ערכי ה- y .
- נקבע אם הנקודה היא נקודת קיצון ונסווג את סוג הקיצון על ידי טבלה.

שאלות:

(1) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x) = 10x - x^2$.

(2) נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 12x$.

- א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

- (3) נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.
- א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- (4) נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$.
- א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- (5) לפונקציה $f(x) = ax - x^3 - 5$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = -1$. מצא את ערכו של הפרמטר a .
- (6) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$. ידוע שהנקודה $x = 1$ נקודת קיצון. מצא את הקבוע a .
- (7) לפונקציה $f(x) = Ax^3 + Bx^2 - 1$ יש נקודת קיצון ששיעוריה: $(2, 3)$. מצא את ערכי הפרמטרים A, B .
- (8) לפונקציה $f(x) = Ax^3 + Bx^2 - 4x$ יש נקודת קיצון ב- $x = -1$ ו- $x = 4$. מצא את הפרמטרים ואת שיעור ה- y של שתי נקודות הקיצון.
- (9) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. ידוע שהנקודה $(1, 2)$ נקודת קיצון. מצא את הפרמטרים a, b .
- (10) לפונקציה $f(x) = ax^4 + bx^2 + 35$ יש נקודת קיצון ששיעוריה $(2, 3)$. מצא את ערכי הפרמטרים a, b .

תשובות סופיות:

(1) $\max(5, 25)$

(2) א. $\min(2, -16)$, $\max(-2, 16)$ ב. עולה: $x > 2$, $x < -2$ יורדת: $-2 < x < 2$.

(3) א. $\max(0, 9)$, $\min(\sqrt{5}, -16)$, $\min(-\sqrt{5}, -16)$

ב. עולה: $-\sqrt{5} < x < 0$, $x > \sqrt{5}$ יורדת: $0 < x < \sqrt{5}$, $x < -\sqrt{5}$.

(4) א. $\min(3, 5)$ ב. עולה: $x > 3$ יורדת: $x < 3$.

(5) $a = 3$

(6) $a = -\frac{2}{3}$

(7) $A = -1$, $B = 3$

(8) $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{3}{2}$, $\left(-1, 2\frac{1}{6}\right)$, $\left(4, -18\frac{2}{3}\right)$

(9) $b = 6$, $a = -4$

(10) $a = 2$, $b = -16$

חקירת פונקציה פולינומית:

שאלות:

(11) נתונה הפונקציה $f(x) = 10x - x^2$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(12) נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 12x$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(13) נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(14) נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$ חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

15 נתונה הפונקציה $f(x) = x^3$ חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

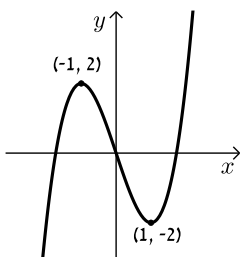
16 נתונה הפונקציה: $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 54x - 50$.

- לאילו ערכים של הפרמטר a עולה הפונקציה בכל תחום הגדרתה?
- הצב בפונקציה $a = 6$ וחקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים: תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודת חיתוך עם ציר ה- y , סרטוט.

17 נתונה הפונקציה: $y = -3x^3 + 6x^2 - 4x + d$ (פרמטר d).

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה: $x = 2$.

- מצא את d .
- האם יש לפונקציה נקודות קיצון?
- כתוב את תחומי העלייה וירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y .
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

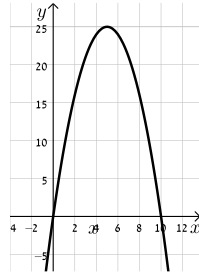


18 לפניך גרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x$:

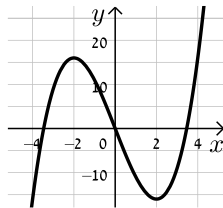
- מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 5$?
- מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 2$?
- מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 0.5$?
- עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק פתרון אחד?
- עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שני פתרונות?
- עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שלושה פתרונות?
- האם קיים ערך של k עבורו למשוואה $f(x) = k$ אין פתרון?

תשובות סופיות:

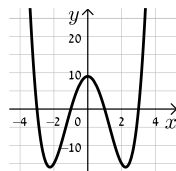
- (11)** א. כל x ב. $\max(5,25)$ ג. עלייה: $x < 5$, ירידה: $x > 5$ ד. $(0,0)$, $(10,0)$.
ה. להלן גרף:



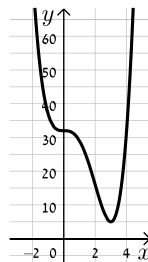
- (12)** א. כל x ב. $\min(2,-16)$, $\max(-2,16)$ ג. עלייה: $x > 2$, $x < -2$, ירידה: $-2 < x < 2$ ד. $(0,0)$, $(\sqrt{12},0)$, $(-\sqrt{12},0)$.
ה. להלן גרף:



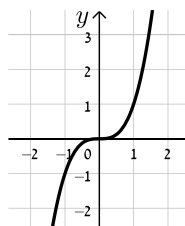
- (13)** א. כל x ב. $\max(0,9)$, $\min(\sqrt{5},-16)$, $\min(-\sqrt{5},-16)$ ג. עלייה: $-\sqrt{5} < x < 0$, $x > \sqrt{5}$, ירידה: $x < -\sqrt{5}$, $0 < x < \sqrt{5}$ ד. $(0,9)$, $(\pm 1,0)$, $(\pm 3,0)$.
ה. להלן גרף:



- (14)** א. כל x ב. $\min(3,5)$ ג. תחומי עלייה: $x > 3$, תחומי ירידה: $x < 3$ ד. $(0,32)$.
ה. להלן גרף:

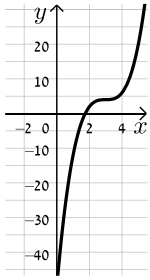


- (15)** א. כל x ב. אין. ג. עולה לכל x ד. $(0,0)$.
ה. להלן גרף:



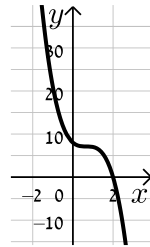
16) א. $-6 < a < 6$ ב. תחום הגדרה: כל x , נקודות קיצון: אין, תחומי עלייה: כל x ,

תחומי ירידה: אין, נקודת חיתוך עם הצירים: $(0, -50)$, להלן גרף:



17) א. $d = 8$ ב. לא ג. יורדת בתחום $x \neq \frac{2}{3}$

ד. $(0, 8)$ ה. להלן גרף:



18) א. 1 ב. 2 ג. 3 ד. $k > 2, k < -2$

ה. $k = \pm 2$ ו. $-2 < k < 2$ ז. לא

פונקציה זוגית ואי-זוגית:

סיכום כללי:

הגדרות:

- פונקציה $f(x)$ תיקרא זוגית אם לכל x בתחום הגדרתה מתקיים: $f(x) = f(-x)$.
- פונקציה $f(x)$ תיקרא אי-זוגית אם לכל x בתחום הגדרתה מתקיים: $f(-x) = -f(x)$.

שאלות:

(1) קבע אלו מהפונקציות הבאות הן זוגיות/אי-זוגיות לא זו ולא זו:

א. $f(x) = 3x - 5$

ב. $f(x) = 3x^2$

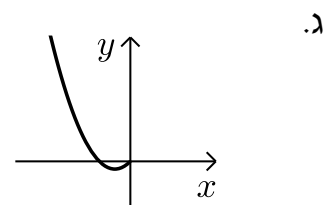
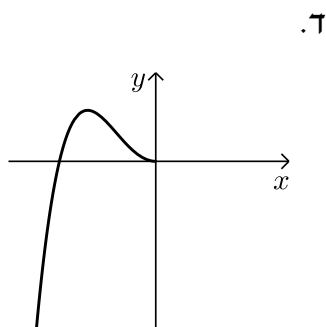
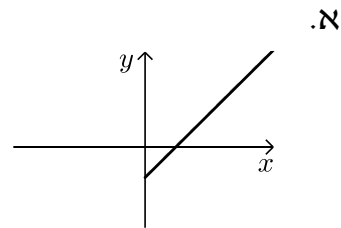
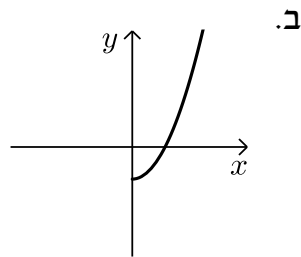
ג. $f(x) = 2x^3$

ד. $f(x) = x^3 - 2x^2$

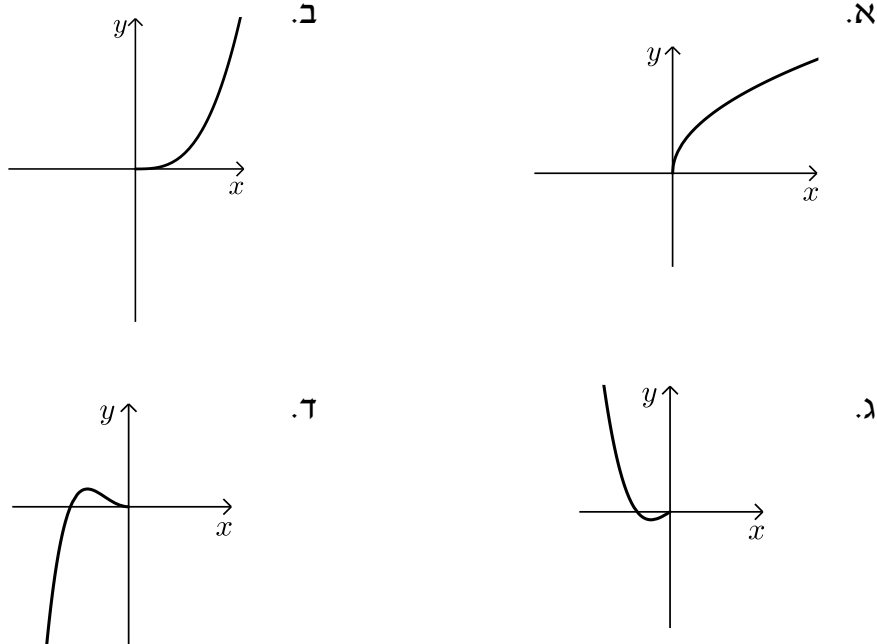
ה. $f(x) = 4x^4 - 3x^2 + 1$

ו. $f(x) = 4x^5 - 3x^3 - 1$

(2) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x . השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתקבל פונקציה זוגית:



3) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x . השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתקבל פונקציה אי-זוגית:



4) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = x^4 - 4x^2$ בתחום: $[0:3]$.

א. חקור את הפונקציה בתחום הנ"ל לפי הסעיפים הבאים:

- i. תחום הגדרה.
- ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
- iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
- iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.
- v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. הוכח כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.

ג. התבסס על ממצאיך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום: $[-3:3]$ (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-3:0]$ לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

5) נתונה הפונקציה הבאה : $f(x) = x^6 - 3x^2 + 3$.

- א. חקור את הפונקציה בתחום : $[0:4]$ לפי הסעיפים הבאים :
 תחום הגדרה, מציאת חיתוך עם ציר ה- y , מציאת נקודות קיצון וסיווגן,
 כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה בתחום הנ"ל.
- ב. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זו ולא זו?
 נמק באמצעות חישוב מתאים.
- ג. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה ששרטטת
 בסעיף א', את עקום הפונקציה בתחום $[-4:0]$.
- ד. הוכח כי הפונקציה חיובית לכל x בתחום הגדרתה.

6) לפניך הפונקציה : $f(x) = -2x^6 + 3x^4 + a$, פרמטר a .

ידוע כי לפונקציה ערך מירבי של 1.

- א. מצא את a וכתוב את הפונקציה $f(x)$.
- ב. חקור את הפונקציה בתחום : $[-2:0]$ לפי הסעיפים הבאים :
 כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים,
 מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.
- ג. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זה ולא זה?
 נמק באמצעות חישוב מתאים.
- ד. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים ושרטט את גרף הפונקציה
 בתחום : $[-2:2]$.

7) נתונה הפונקציה הבאה : $f(x) = 3x^3 - 9x$.

- א. חקור את הפונקציה בתחום : $[0:5]$ לפי הסעיפים הבאים :
 כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים,
 מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.
- ב. הוכח כי הפונקציה היא אי-זוגית.
- ג. התבסס על ממציאך מהסעיפים הקודמים ושרטט את הפונקציה
 בתחום : $[-5:5]$ (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-5:0]$
 לגרף ששרטטת בסעיף הקודם).

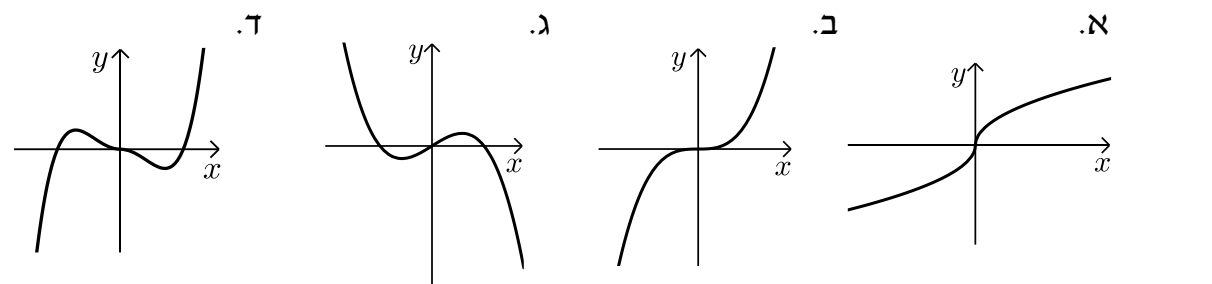
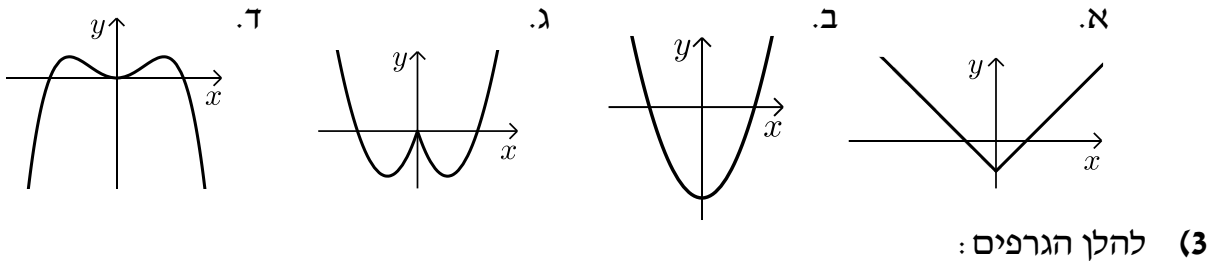
- 8) לפניך הפונקציה הבאה: $f(x) = 5x^3 - 3x^5 + b$, פרמטר b . ידוע כי הישר $y = 2x$ עובר דרך כל הנקודות על גרף הפונקציה שמקיימות: $f'(x) = 0$.
- מצא את b וכתוב את הפונקציה $f(x)$.
 - חקור את הפונקציה בתחום: $[0:2]$ לפי הסעיפים הבאים:
 - תחום הגדרה.
 - מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
 - מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
 - כתיבת תחומי עלייה וירידה.
 - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
 - בדוק האם הפונקציה היא זוגית/אי-זוגית או לא זו ולא זו. נמק את קביעתך באמצעות חישוב מתאים.
 - הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה של גרף הפונקציה את הגרף בתחום $[-2:0]$.

9) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^7 - x}{3}$

- חקור את הפונקציה בתחום: $[-4:0]$ לפי הסעיפים הבאים:
 - תחום הגדרה.
 - מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
 - מציאת נקודות קיצון וסיווגן (בתשובתך השאר עד 2 ספרות לאחר הנקודה העשרונית).
 - כתיבת תחומי עלייה וירידה.
 - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? או לא זו ולא זו? נמק ע"י חישוב מתאים.
- הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שעשית את גרף הפונקציה בתחום $[0:4]$.

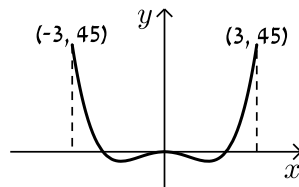
תשובות סופיות:

- (1) זוגית: ב', ה'.
 (2) להלן הגרפים: אי-זוגית: ג', לא זו ולא זו: א', ד', ו'.

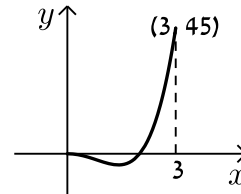


- (4) א. i. $0 \leq x \leq 3$ ii. $(0,0), (2,0)$ iii. $\max(3,45)$ קצה, $\min(\sqrt{2}, -4)$
 iv. עולה: $\sqrt{2} < x < 3$, יורדת: $0 < x < \sqrt{2}$. ב. סעיף הוכחה.

סרטוט עבור סעיף ג:

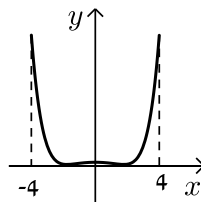


סרטוט עבור חלק v:

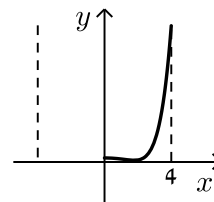


- (5) א. תחום הגדרה: $0 \leq x \leq 4$, חיתוך עם ציר ה- y : $(0,3)$, נקודות קיצון: $\max(4,4051)$ קצה, $\min(1,1)$, $\max(0,3)$ קצה, עולה: $1 < x < 4$, יורדת: $0 < x < 1$. ב. זוגית. ד. הוכחה עפ"י הסרטוט.

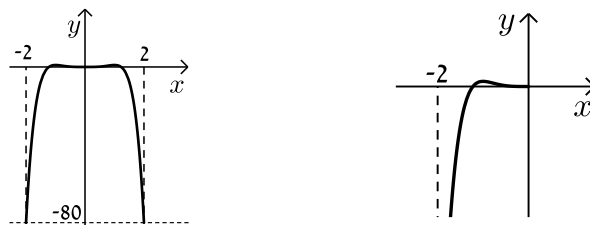
סרטוט עבור סעיף ג:



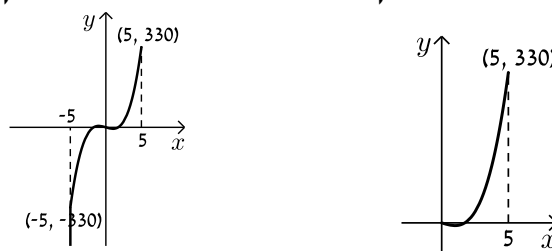
סרטוט עבור סעיף א:



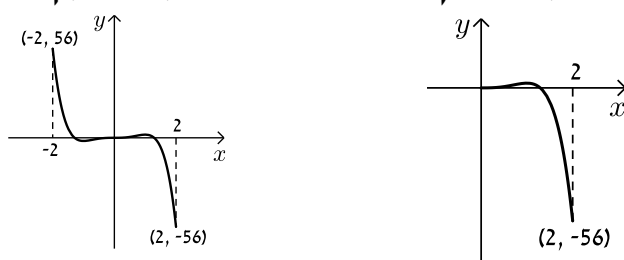
6. א. $a=0$ ב. תחום הגדרה: $-2 \leq x \leq 0$, חיתוך עם הצירים:
 נקודות קיצון: $(0,0)$, $(-1.225,0)$, $\min(-2,-80)$, $\max(-1,1)$, $\min(0,0)$ קצה,
 עולה: $-2 < x < -1$, יורדת: $-1 < x < 0$. ג. זוגית.
סרטוט עבור סעיף א: **סרטוט עבור סעיף ד:**



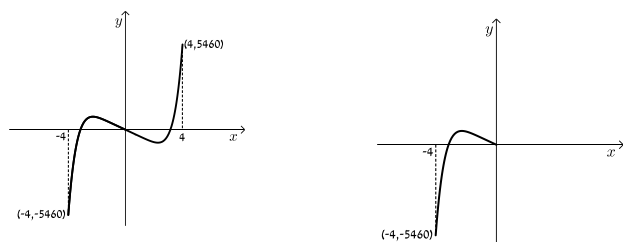
7. א. תחום הגדרה: $0 \leq x \leq 5$, חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, $(\sqrt{3},0)$
 נקודות קיצון: $\max(5,330)$ קצה, $\min(1,-6)$, $\max(0,0)$ קצה,
 עולה: $1 < x < 5$, יורדת: $0 < x < 1$. ב. אי-זוגית.
סרטוט עבור סעיף א: **סרטוט עבור סעיף ג:**



8. א. $b=0$ ב. i $0 \leq x \leq 2$ ii $(0,0)$, $(1.29,0)$ iii $\min(2,-56)$ קצה,
 iv. עולה: $0 < x < 1$, יורדת: $1 < x < 2$. ג. אי-זוגית.
סרטוט עבור סעיף ד: **סרטוט עבור חלק v:**



9. א. i $-4 \leq x \leq 0$ ii $(-1,0)$, $(0,0)$ iii $\min(0,0)$ קצה, $\max(-0.723,0.207)$,
 iv. עולה: $-4 < x < -0.723$. ג. אי-זוגית. **סרטוט עבור סעיף ד:** **סרטוט עבור חלק v:**



מתמטיקה 55004 לתלמידי לוגיסטיקה

פרק 12 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית מנה ושורש

תוכן העניינים

178	1. מציאת תחום הגדרה
180	2. מציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה
181	3. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים
186	4. חקירת פונקצית מנה
195	5. חקירת פונקצית שורש
203	6. תחומי קעירות ונקודות פיתול
209	7. חקירת פונקציה עם פרמטר
212	8. פונקציות ללא תבנית מפורשת

מציאת תחום הגדרה:

סיכום כללי:

- כל פולינום מוגדר לכל x .
- בפונקציה עם מכנה, אסור שיתקבל אפס במכנה.
- בפונקציה עם שורש זוגי, אסור שיתקבל מספר שלילי בתוך השורש.

שאלות:

1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x$	ב. $f(x) = 4x^3 - x^2 + \frac{x}{2} + 1$
ג. $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 1$	ד. $f(x) = \frac{2x}{x-3}$
ה. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$	ו. $f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1}$
ז. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$	ח. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x - 8}$
ט. $f(x) = \frac{6}{x^2 + 1}$	י. $f(x) = \frac{4x + 1}{x^2 + 1}$
יא. $f(x) = \frac{1}{x^3 - x}$	יב. $f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 4x}$

2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{x}$	ב. $f(x) = 2\sqrt{x-3}$
ג. $f(x) = \sqrt{x-4}$	ד. $f(x) = 3x\sqrt{1-2x}$
ה. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 10}$	ו. $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$
ז. $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x+4}}$	ח. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 5x + 6}}{x-1}$
ט. $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + 5x + 9}}$	י. $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^3 - 9x}}$
יא. $f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x+6}}$	יב. $f(x) = \frac{x+1}{x - \sqrt{2-x}}$
יג. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1- x }}$	יד. $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+2} - 3}$

תשובות סופיות:

- (1) א. כל x ב. כל x ג. כל x ד. $x \neq 3$ ה. $x \neq \pm 2$ ו. $x \neq \pm 1$
 ז. $x \neq -1, 2$ ח. $x \neq 4, -2$ ט. כל x י. כל x יא. $x \neq \pm 1, 0$ יב. $x \neq \pm 2, 0$
- (2) א. $x \geq 0$ ב. $x \geq 3$ ג. $x \geq 4$ ד. $x \leq \frac{1}{2}$ ה. $x \leq -5, x \geq 2$
- ו. $x \leq -2, x \geq 1$ ז. $x > -4$ ח. $x \leq -3, -2 \leq x < 1, x > 1$ ט. $x \leq -1.5, x \geq 1$
 י. $-3 < x < 0, x > 3$ יא. $-6 \leq x < -2, x > -2$ יב. $x < 1, 1 < x \leq 2$
 יג. $-1 < x < 1$ יד. $x \geq 7$

מציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה:

שאלות:

(3) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{6x}{x^2 - 10x + 9}$.

- א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

תשובות סופיות:

(3) א. $\min\left(-3, -\frac{3}{8}\right), \max\left(3, -1\frac{1}{2}\right)$.

ב. עולה: $-3 < x < 3$, יורדת: $x < -3, 3 < x \neq 9$, $x \neq 1$.

מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים:

סיכום כללי:

אסימפטוטה אנכית:

הגדרה: הישר: $x = k$ הוא אסימפטוטה אנכית של פונקציה מהצורה: $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

אם הוא מקיים: $g(k) = 0$ וגם: $f(k) \neq 0$. בצורה מתמטית: אם: $\lim_{x \rightarrow k^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$

או: $\lim_{x \rightarrow k^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ או שניהם אז הישר: $x = k$ הוא אסימפטוטה אנכית לפונקציה $y = \frac{f(x)}{g(x)}$.

הסבר כללי:

בעבור ערכי x שמאפסים את המכנה, אבל לא את המונה יש אסימפטוטה אנכית. כאשר ערך x מאפס את המכנה וגם את המונה יש לפרק את המונה והמכנה (על ידי נוסחאות כפל מקוצר או טרינום למשל) ולצמצם. אם אחרי הצמצום אותו ערך של x עדיין מאפס את המכנה תתקבל אסימפטוטה אנכית, אך אם ערך x זה לא מאפס את המכנה אחרי שצומצם אין אסימפטוטה אנכית אלא נקודת אי הגדרה.

אסימפטוטה אופקית:

הגדרה: ישר מהצורה: $y = n$ הוא אסימפטוטה אופקית לפונקציה מהצורה: $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

אם מתקיים: $\lim_{x \rightarrow \infty^+} \frac{f(x)}{g(x)} = n$ או: $\lim_{x \rightarrow \infty^-} \frac{f(x)}{g(x)} = n$ או שניהם.

אופן החישוב הכללי:

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^m + \dots}{bx^n + \dots}$ (יש בפונקציה קו שבר אחד!)

- אם $m > n$, לפונקציה אין אסימפטוטה אופקית.
- אם $m = n$, לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = \frac{a}{b}$.
- אם $m < n$, לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = 0$.

חוקי גבולות לאינסוף:

במקרים רבים נרצה לדעת האם פונקציה מסוימת מתכנסת לערך כלשהו כאשר x שואף לערכים ההולכים וגדלים (לאינסוף, או למינוס אינסוף). עבור ערכי x שהולכים וגדלים (או קטנים) נרשום: $x = \infty$ או $x = -\infty$ בהתאמה.

ישנם 4 מצבים בהם ערך הפונקציה בשאיפת x לאחד הקצוות ניתן לחישוב ישיר:

- הגבול: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$

- הגבול: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ ניתן לפיצול לשני מקרים:

- אם: $x \rightarrow 0^+$ (מתקרב ל-0 מהכיוון החיובי) אז: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

- אם: $x \rightarrow 0^-$ (מתקרב ל-0 מהכיוון השלילי) אז: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

- הגבול מהצורה $\infty \cdot \infty$ (מכפלת שני ביטויים של x אשר כל אחד מהם שואף לאינסוף בפני עצמו) מקיים: $\infty \cdot \infty = \infty$

- הגבול מהצורה $\infty + \infty$ (סכום שני ביטויים של x אשר כל אחד מהם שואף לאינסוף בפני עצמו) מקיים: $\infty + \infty = \infty$

ישנם 3 מקרים בהם לא ניתן לדעת מהו ערך הפונקציה בלקיחת הגבול בצורה ישירה והם:

- הגבול מהצורה: $\frac{\infty}{\infty}$ (מנת שני ביטויים שהולכים וגדלים עם שאיפת x).

- הגבול מהצורה: $\frac{0}{0}$ (מנת שני ביטויים שהולכים וקטנים עם שאיפת x).

- הגבול מהצורה: $\infty - \infty$ (הפרש של שני ביטויים שהולכים וגדלים עם שאיפת x). במקרים אלו נעזר בפישוטים שהוצגו לעיל על מנת למצוא את ערך הגבול עצמו.

שאלות:

(4) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$

(5) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{5x^2+1}{x^2-9}$

(6) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{2x^2-5x+2}{1+3x^2}$

(7) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{3x}{x^2-2x-15}$

(8) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{6x^3-5x+1}{1+2x^2}$

(9) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{ax+b}{x-b}$

(10) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$
 ואת נקודת אי הרציפות שלה.

(11) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2}{2x^2-4x}$
 ואת נקודת אי הרציפות שלה.

(12) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$

(13) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x}}$

14) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

15) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{x-\sqrt{x}}$

16) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+5}}$

17) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2-16}}$

18) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4x^2+1}{ax^2-x+b}$

האסימפטוטה האופקית של הפונקציה ואחת האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה

נפגשות בנקודה $(-1, 2)$.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

19) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax+8}{x+b\sqrt{x}}$

הפונקציה חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה בנקודה $(16, 2)$.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

תשובות סופיות:

(4) $x = 2, y = 3$

(5) $x = \pm 3, y = 5$

(6) $y = \frac{2}{3}$

(7) $x = -3, x = 5, y = 0$

(8) אין.

(9) $x = b, y = a$

(10) נקודת אי-הגדרה: $(2, 4)$, $x = 1, y = 1$

(11) נקודת אי-הגדרה: $(0, 0)$, $x = 2, y = \frac{1}{2}$

(12) $x = 2, y = 0$

(13) $x = 4$

(14) $x = 1, y = -1$

(15) $x = 1, y = 2$

(16) $y = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) = 3, y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = -3$

(17) $x = 4, x = -4, y = 5, y = -5$

(18) $b = -3, a = 2$

(19) $b = 1, a = 2$

חקירת פונקצית מנה:

שאלות:

(20) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{6x^2 - 10x + 6}{3x^2 - 10x + 3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(21) נתונה הפונקציה: $f(x) = x + \frac{1}{x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(22) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(23) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{6x}{x^2 - 5x + 4}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(24) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(25) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \frac{2x^2 - 5x + 2}{4x}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה.
- ב. נקודות קיצון.
- ג. קביעת סוג הקיצון ותחומי עלייה וירידה.
- ד. חיתוך עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטה אנכית.
- ו. שרטוט סקיצה.

(26) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(27) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(28) לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{ax + 4}{x^2}$ יש נקודת קיצון שבה $x = -8$.

- א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.
- ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ד. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(29) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{3x^2}{2x^2 - 8}$.

- א. מהו תחום הגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. קבע את סוג הקיצון ותחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה.
- ה. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(30) נתונה הפונקציה: $y = \frac{a^2x - 4}{2x^2 - 1}$, $(a$ קבוע).

- ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 1$ הוא: $m = 4$.
- א. מצא את כל הערכים האפשריים עבור a .
 - ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
 - ג. מצא את נקודת החיתוך בין המשיק הנתון ומשיק העובר דרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .

(31) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = 1.5x - \frac{5x+1}{x+5}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה.
- ב. נקודות קיצון וסוגן.
- ג. תחומי עלייה וירידה.
- ד. חיתוך עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה.

(32) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x-a}{x-1}$, $(a \neq 1)$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
- ג. הבע באמצעות a את השיעורים של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x ועם ציר ה- y .
- ד. ענה על הסעיפים הבאים:
 - i. מצא עבור אילו ערכים של a הפונקציה $f(x)$ עולה לכל x בתחום ההגדרה.
 - ii. ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=a$ מקביל לישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=2$. מצא את הערך של a אם נתון כי הפונקציה עולה לכל x .

(33) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2+ax+6}{x-2}$, $(a \text{ פרמטר})$.

- ידוע שאחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- y .
- א. מצא את הערך של a .
 - ב. הצב את הערך של a שמצאת בסעיף א' ומצא:
 - i. את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - ii. את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
 - iii. את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
 - iv. את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).
 - ג. עבור אלו ערכי x הפונקציה שלילית?
 - ד. נתון הישר: $y=k$. עבור אלו ערכי k אין נקודות משותפות לישר ולגרף הפונקציה? נמק.

34 נתונה הפונקציה: $y = \frac{x+3}{x-2} + A$, (A פרמטר). גרף הפונקציה עובר בנקודה (A, 3A).

- מצא את ערך הפרמטר A.
 - כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - הוכח כי גרף הפונקציה יורד לכל x.
 - מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-y.
 - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 - נתון הישר: $y = k$.
- האם קיים ערך של k עבורו הישר חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות שונות? נמק.

35 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax^2 - 20x + 28}{x^2 + 2a}$.

- ידוע כי גרף הפונקציה חותך את האסימפטוטה האופקית שלו בנקודה (3, 0.5).
- מצא את ערך הפרמטר a וכתוב את הפונקציה ואת תחום הגדרתה.
 - מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
 - כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 - מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
 - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 - העזר בגרף הפונקציה וקבע עבור אלו ערכים של k הישר: $y = k$ יחתוך את גרף הפונקציה בנקודה אחת בלבד.

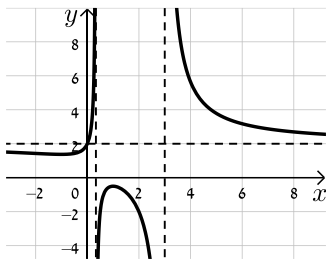
36 ענה על הסעיפים הבאים:

- הוכח כי לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{9-x^2}{x^2-k}$ יש נקודת קיצון שנמצאת על ציר ה-y.
- הוכח כי הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x אם ידוע כי שיעור ה-y של נקודת הקיצון הוא 3.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x.
- מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה וקבע בכמה נקודות יחתוך אותו הישר $y = -1$. נמק את תשובתך.

תשובות סופיות:

20 א. $x \neq 3, x \neq \frac{1}{3}$ ב. $\min\left(-1, 1\frac{3}{8}\right), \max\left(1, -\frac{1}{2}\right)$

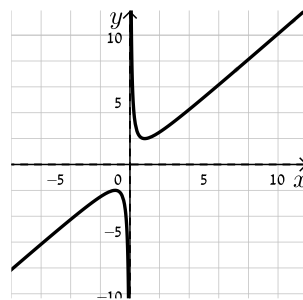
ג. תחומי עלייה: $-1 < x < 1$ וגם $x \neq \frac{1}{3}$, תחומי ירידה: $1 < x \neq 3$ או $x < -1$.



ד. $(0, 2)$ ה. $x = 3, x = \frac{1}{3}, y = 2$ ו. להלן סקיצה:

21 א. $x \neq 0$ ב. $\min(1, 2), \max(-1, -2)$

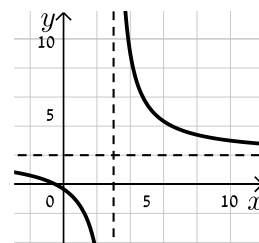
ג. עולה: $x > 1$ או $x < -1$, יורדת: $-1 < x < 1$, $x \neq 0$ ד. אין



ה. להלן סקיצה:

22 א. $x \neq 3$ ב. אין ג. הפונקציה יורדת בכל ת.ה.

ד. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(0, -\frac{1}{3}\right)$ ה. $y = 2, x = 3$



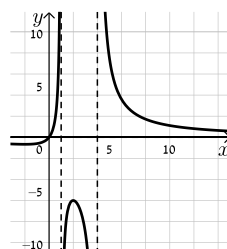
ו. להלן סקיצה:

23 א. $x \neq 1, x \neq 4$ ב. $\min\left(-2, -\frac{2}{3}\right), \max(2, -6)$

ג. תחומי עלייה: $-2 < x < 2$, $x \neq 1$, תחומי ירידה: $x < -2$ או $x > 2$, $x \neq 4$

ד. $(0, 0)$ (אסימפטוטות: $y = 0, x = 1, x = 4$)

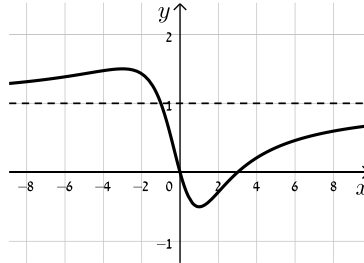
ה. להלן סקיצה:



24) א. כל x ב. $\min\left(1, -\frac{1}{2}\right), \max\left(-3, 1\frac{1}{2}\right)$

ד. $(0,0), (3,0)$ (אסימפטוטה: $y=1$).

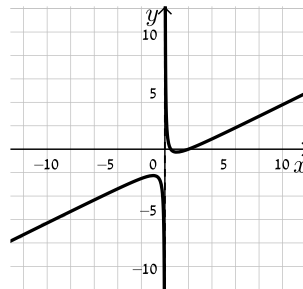
ג. עולה: $x > 1$ או $x < -3$, יורדת: $-3 < x < 1$
ה. להלן סקיצה:



25) א. $x \neq 0$ ב. $\min(1, -0.25), \max(-1, -2.25)$

ג. עולה: $x > 1, x < -1$, יורדת: $-1 < x < 1, x \neq 0$ ד. $(0.5,0), (2,0)$ ה. $x=0$

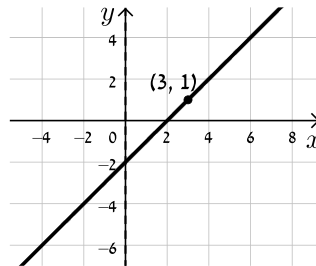
ו. להלן סקיצה:



26) א. $x \neq 3$ ב. אין ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה

ד. $(0,-2), (2,0)$ ה. אין, יש נקודת אי הגדרה ששיעוריה $(3,1)$.

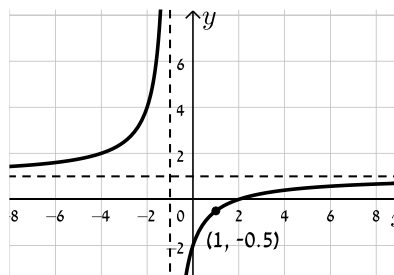
ו. להלן סקיצה:



27) א. $x \neq \pm 1$ ב. אין ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה

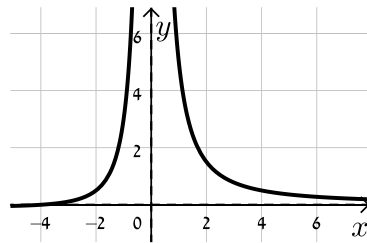
ד. $(0,-2), (2,0)$ ה. $y=1, x=-1$, יש נקודת אי הגדרה: $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$.

ו. להלן סקיצה:



28 א. $f(x) = \frac{x+4}{x^2}$, $a=1$ ב. עולה: $-8 < x < 0$ יורדת: $x < -8, x > 0$

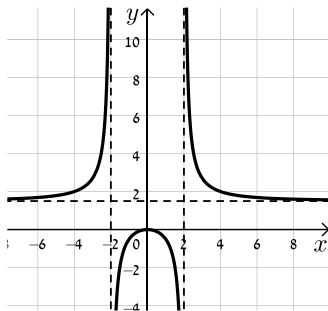
ג. $(-4, 0)$ ד. $x=0, y=0$



ה. להלן סקיצה:

29 א. $x \neq \pm 2$ ב. $\max(0, 0)$ ג. יורדת: $x > 0, x \neq 2$ עולה: $x < 0, x \neq -2$

ד. $(0, 0)$ ה. $x = \pm 2, y = 1.5$ ו. להלן סקיצה:



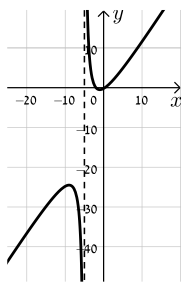
30 א. $a = \pm 2$ ב. $(1, 0), (0, 4)$

ג. המשיק: $y = -4x + 4$ אשר עובר בנקודה $(1, 0)$. נקודת החיתוך: $(1, 0)$.

31 א. $x \neq -5$ ב. $\min(-1, -0.5), \max(-9, -24.5)$

ג. עולה: $x < -9, x > -1$ יורדת: $-9 < x < -1$

ד. $(-2, 0), (\frac{1}{3}, 0), (0, -0.2)$ ה. $x = -5$ ו. להלן סקיצה:



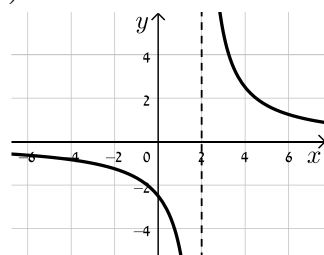
32 א. $x \neq 1$ ב. $x=1, y=1$ ג. $(a, 0), (0, a)$ ד. i. $a > 1$ ii. $a = 2$

33 א. $a = -3$ ב. i. $x \neq 2$ ii. $(0, -3)$ iii. $\max(0, -3), \min(4, 5)$

ג. $x < 2$ ד. iv. $x = 2$ ה. $-3 < k < 5$

34 א. $A = -1$ ב. $x \neq 2$ ד. $(0, -2.5)$

ו. לא



ה. להלן סקיצה:

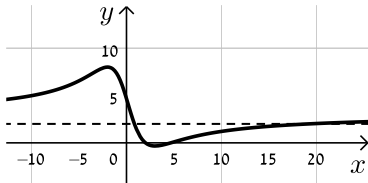
35 א. $a = 3$, $f(x) = \frac{3x^2 - 20x + 28}{x^2 + 6}$, כל x .

ב. $\min\left(3, -\frac{1}{3}\right)$, $\max(-2, 8)$

ד. $(2, 0)$, $\left(0, 4\frac{2}{3}\right)$, $\left(4\frac{2}{3}, 0\right)$

ו. $k = 8$, $-\frac{1}{3}$, 3

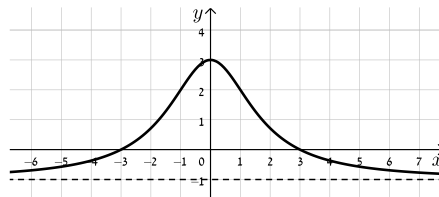
ג. עולה: $x < -2$, $x > 3$, יורדת: $-2 < x < 3$



ה. להלן סקיצה:

ה. באף נקודה.

36 ב. $k = -3$ ג. $(3, 0)$, $(-3, 0)$ ד. $y = -1$



ו. להלן סקיצה:

חקירת פונקציות שורש:

שאלות:

37 נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x-3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

38 נתונה הפונקציה: $f(x) = (x-4)\sqrt{x-1}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

39 נתונה הפונקציה: $f(x) = x\sqrt{6-x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

40 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4\sqrt{x}}{x^2+3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

41 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

42 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x^2}$.

- א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות קיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

43 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$.

- א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- ב. האם ניתן להעביר משיק לגרף הפונקציה המקביל לציר ה- x ? נמק והראה חישוב מתאים.
- ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x .
- ד. חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק והצירים.

(44) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}-1}$.

- מהו תחום הגדרה של הפונקציה?
- כמה נקודות יש לגרף הפונקציה שהמשיק העובר דרכן מקביל לציר ה- x ? מצא אותן.
- כתוב את משוואות המשיקים בנקודות שמצאת בסעיף הקודם.

(45) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום הגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(46) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{ax+6}{\sqrt{9-x^2}}$, פרמטר a .

- מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y . ידוע כי הוא מקביל לישר: $3y-x=0$.
- מצא את ערך הפרמטר a .
 - כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
 - כתוב את התחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(47) נתונות שתי הפונקציות הבאות: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+k}}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x-k}}{x}$ (k פרמטר חיובי).

- ידוע כי הפונקציות חותכות זו את זו בנקודה שבה: $x=0.8$.
- מצא את k .
 - האם הפונקציות נחתכות בנקודה נוספת מלבד לנקודה הנתונה? אם כן מצא אותה.
 - מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x=0.52$.

48 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{kx}{\sqrt{k-x^2}}$, פרמטר חיובי.

- א. ענה על הסעיפים הבאים:
- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה? (בטא באמצעות k).
 - מהן האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה?
- ב. הראה כי הפונקציה עולה עבור כל ערך של k בתחום הגדרתה.
- ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x . (בטא באמצעות k).
- ד. המשיק אשר מצאת בסעיף הקודם חותך את אחת האסימפטוטות של הפונקציה בנקודה A. ידוע כי שטח המשולש הכלוא בין המשיק, ציר ה- x והאסימפטוטה הנ"ל הוא: $S = 4$ יח"ש. מצא את ערך הפרמטר k .

49 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+2}{x+4}$. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

- א. כתוב בצורה מפורשת את הפונקציה $g(x)$.
- ב. לפניך מספר טענות המתייחסות לפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:
- לפונקציות תחום הגדרה זהה.
 - שתי הפונקציות עולות בכל תחום הגדרתן.
 - שתי הפונקציות חותכות את ציר ה- x באותה נקודה.
 - לשתי הפונקציות יש אסימפטוטה משותפת.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של כל פונקציה עם ציר ה- y . אסף פתר את סעיפים א' ו-ב' והחליט לטעון את הטענה הבאה:
- היות והפונקציה $g(x)$ מוגדרת להיות: $g(x) = \sqrt{f(x)}$ אזי ניתן למצוא את שיעור ה- y של כל נקודה שעל גרף הפונקציה $f(x)$ ע"י כך שנמצא תחילה את שיעור ה- y של הנקודה בעלת אותו שיעור x על הגרף של $g(x)$ ונעלה אותה בריבוע.
- ד. האם אסף צודק? נמק בצורה איכותית (חישובים אינם נדרשים) את שיקולך.

50) לפניך הפונקציות הבאות: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$, $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$

א. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

i. לשתי הפונקציות יש את אותו תחום ההגדרה.

ii. לשתי הפונקציות יש נקודות קיצון הנמצאות על הישר: $y = x$.

iii. הפונקציות לא חותכות זו את זו.

מגדירים פונקציה נוספת והיא: $h(x) = (g(x))^2$.

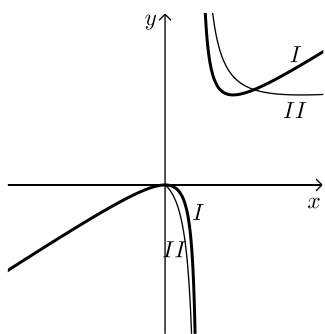
ב. כתוב באופן מפורש את הפונקציה החדשה: $h(x)$.

ג. האם תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$ זהה לשל $g(x)$?

ד. באיור הסמוך ישנם שני גרפים.

קבע על סמך הסעיפים הקודמים איזו פונקציה כל גרף

מתאר מבין הפונקציות: $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$. נמק את בחירותיך.



51) לפניך שלוש פונקציות: $f(x) = x^2\sqrt{k-x^2}$, $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{k-x^2}}$, $h(x) = \frac{\sqrt{k-x^2}}{x^2}$ ($k > 0$).

א. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

i. לפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ תחום הגדרה זהה, השונה מתחום ההגדרה של $h(x)$.

ii. קיימת פונקציה אשר אינה חותכת את ציר ה- x כלל.

iii. הפונקציות: $h(x)$ ו- $g(x)$ הפוכות זו מזו בתחומי העלייה והירידה שלהן

(כאשר אחת עולה השנייה יורדת).

iv. לפונקציה: $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד.

מסמנים נקודה $A(0, \sqrt{12})$ על ציר ה- y . ידוע כי מרחקה מאחת מנקודות החיתוך

של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x שאינה בראשית הוא: $d = 6$.

ב. מצא את k .

ג. מצא את נקודות הקיצון של גרף

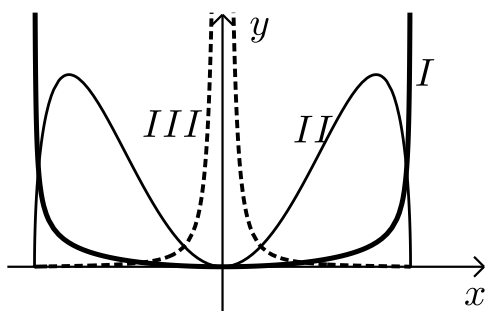
הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.

ד. לפניך איור ובו מסורטטות הסקיצות של

שלושת הפונקציות.

קבע עפ"י הסעיפים הקודמים איזה גרף

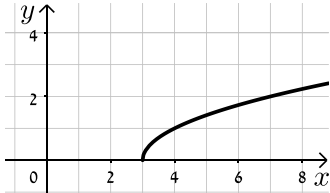
שייך לכל פונקציה.



תשובות סופיות:

(37) א. $x \geq 3$ ב. קצה $\min(3,0)$ ג. הפונקציה עולה בכל ת.ה.

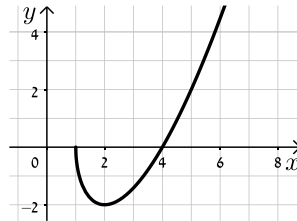
ד. $(3,0)$ ה. אין. ו. להלן סקיצה:



(38) א. $x \geq 1$ ב. קצה $\max(1,0)$, $\min(2,-2)$

ג. עולה: $x > 2$, יורדת: $1 < x < 2$ ד. $(1,0), (4,0)$ ה. אין.

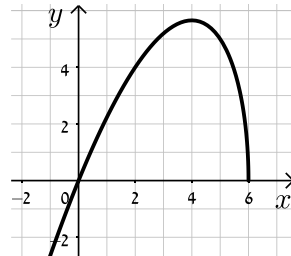
ו. להלן סקיצה:



(39) א. $x \leq 6$ ב. קצה $\min(6,0)$, $\max(4,4\sqrt{2})$

ג. עלייה: $x < 4$, ירידה: $4 < x < 6$ ד. $(6,0), (0,0)$

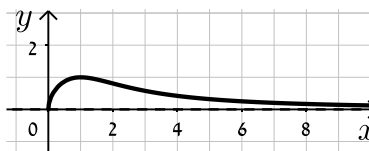
ה. להלן סקיצה:



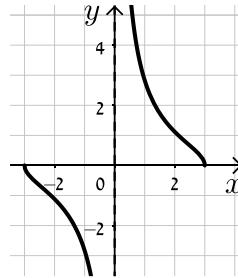
(40) א. $x \geq 0$ ב. קצה $\min(0,0)$, $\max(1,1)$

ג. עולה: $0 < x < 1$, יורדת: $x > 1$ ד. $(0,0)$ ה. $y = 0$.

ו. להלן סקיצה:

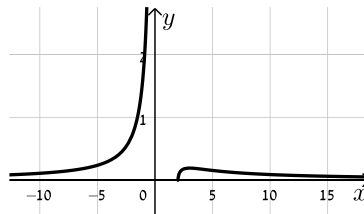


- (41)** א. $-3 \leq x \leq 3$ וגם $x \neq 0$ ב. $\max(-3,0)$ קצה, $\min(3,0)$ קצה
 ג. עולה: אף x , יורדת: $-3 \leq x \leq 3$, $x \neq 0$ ד. $(-3,0), (3,0)$



ה. $x=0$. ו. להלן סקיצה:

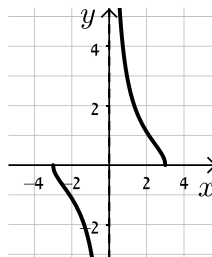
- (42)** א. $x < 0$, $x \geq 2$ ב. $\min(2,0)$, $\max\left(3, \frac{1}{\sqrt{27}}\right)$ ג. $(2,0)$ ד. להלן סקיצה:



- (43)** א. $(2,0)$ ב. לא ג. $y = 2\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}$ ד. $S = 4\sqrt{2}$

- (44)** א. $x \neq 1$, $x \geq 0$ ב. $(9,6)$ ג. $y = 6$

- (45)** א. $-3 \leq x \leq 3$ וגם $x \neq 0$ ב. $\max(-3,0)$ קצה, $\min(3,0)$ קצה
 ג. עולה: אף x , יורדת: $-3 \leq x \leq 3$ וגם $x \neq 0$ ד. $(-3,0), (3,0)$



ה. $x=0$. ו. להלן סקיצה:

- (46)** א. $a=1$ ב. $-3 < x < 3$ ג. $(-1.5, \sqrt{3})$ ד. יורדת: $-3 < x < -1.5$, עולה: $-1.5 < x < 3$

- (47)** א. $k=0.48$ ב. כן, $(0.6, 0.57)$ ג. $y = 0.74x + 0.1352$

- (48)** א. i. $-\sqrt{k} < x < \sqrt{k}$ ii. $x = \pm\sqrt{k}$ ב. $f'(x) = \frac{k^2}{(k-x^2)^{1.5}} > 0$ ג. $y = \sqrt{k}x$ ד. $k=4$

$$g(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x+4}} \quad \text{א. (49)}$$

ב. i. לא נכון ii. נכון

$$f(x) : \left(0, \frac{1}{2}\right), g(x) : \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{ג.}$$

iii. נכון iv. נכון

ד. אסף צודק.

$$h(x) = \frac{x^2}{x-1} \quad \text{ב.}$$

iii. נכון

א. i. לא נכון ii. נכון (50)

$$\text{I} = h(x), \text{II} = f(x) \quad \text{ד.}$$

$$h(x) : x \neq 1, \text{ג.}$$

iv. נכון

iii. נכון

ii. לא נכון

i. לא נכון (51)

$$\text{ב. } k = 24 \quad \text{ג. } \min(0,0), \max(\pm 4, 32\sqrt{2})$$

$$\text{ד. } \text{I} = g(x), \text{II} = f(x), \text{III} = h(x)$$

תחומי קעירות ונקודות פיתול:

סיכום כללי:

תחומי קעירות – הגדרה:

- פונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה (קמורה) בתחום $[x_0, x_1]$ אם לכל x בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מעל לגרף הפונקציה.
כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מטה יש למצוא תחום שבו: $f''(x) < 0$.
- פונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה (קעורה) בתחום $[x_0, x_1]$ אם לכל x בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מתחת לגרף הפונקציה.
כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מעלה יש למצוא תחום שבו: $f''(x) > 0$.

נקודת פיתול – הגדרות:

- נקודת פיתול היא נקודה שבה הפונקציה עוברת מתחום קעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה ולהיפך.
- נקודת פיתול מקיימת: $f''(x) = 0$ כאשר ערך הנגזרת השנייה משנה את סימנו בתחום שלפני ואחרי הנקודה המאפסת אותו.
- בנקודת פיתול המשיק לגרף הפונקציה חותך אותה ולא רק משיק לה מכיוון אחד.

שאלות:

(52) מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה: $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2$.

(53) מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה: $f(x) = \frac{3x-2}{x^2}$.

(54) מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x-1}}$.

(55) מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה: $f(x) = x(x-2)^3$.

56 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a}{x^2 + b}$, a, b פרמטרים.

הנקודה $(-1, 1)$ היא נקודת פיתול של הפונקציה.
מצא את ערכי הפרמטרים a, b .

57 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + 2$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. מציאת נקודות פיתול.
- ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
- ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

58 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{x - \sqrt{x}}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. מציאת נקודות פיתול.
- ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
- ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

59) חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים :

- i. מציאת תחום הגדרה.
- ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
- iii. מציאת נקודות קיצון וקביעת סוגן.
- iv. מציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- v. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- vi. מציאת נקודות הפיתול של הפונקציה.
- vii. מציאת תחומי הקעירות של הפונקציה.
- viii. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad \text{ב.} \qquad f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad \text{ד.} \qquad f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)} \quad \text{ו.} \qquad f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad \text{ה.}$$

$$f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1} \quad \text{ח.} \qquad f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad \text{ז.}$$

הערה: בסעיפים ו ו-ז יש לבצע חקירה ללא סעיפים vi ו-vii.

תשובות סופיות:

52 (1,7), (2,16) , קעירות כלפי מעלה : $x > 2$ או $x < 1$, קעירות כלפי מטה : $1 < x < 2$.

53 (2,1) , קעירות כלפי מעלה : $x > 2$, קעירות כלפי מטה : $0 \neq x < 2$.

54 קיצון : $\min(2,4)$, פיתול : $\left(4, \frac{8}{\sqrt{3}}\right)$.

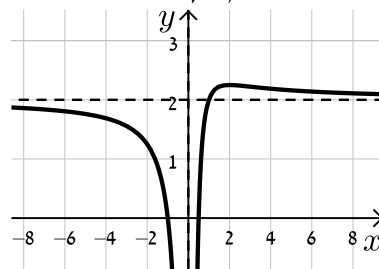
55 קיצון : $\min\left(\frac{1}{2}, -\frac{27}{16}\right)$, פיתול : (1,-1), (2,0) .

56 . $a = 4, b = 3$

57 א. $x \neq 0$. ב. $\max\left(2, 2\frac{1}{4}\right)$. ג. עולה : $0 < x < 2$; יורדת : $x > 2, x < 0$.

ד. $\left(\frac{1}{2}, 0\right), (-1, 0)$. ה. $x = 0, y = 2$. ו. $\left(3, 2\frac{2}{9}\right)$.

ז. קעירות כלפי מעלה : $x > 3$, קעירות כלפי מטה : $0 \neq x < 3$.

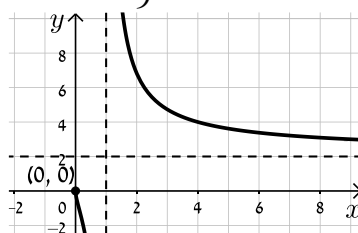


ח. להלן סקיצה :

58 א. $1 \neq x > 0$. ב. אין . ג. יורדת בכל תחום הגדרתה .

ד. אין . ה. $x = 1, y = 2$ נקודת אי הגדרה : (0,0) . ו. $\left(\frac{1}{9}, -1\right)$.

ז. קעירות כלפי מעלה : $x > 1$ או $0 < x < \frac{1}{9}$, קעירות כלפי מטה : $\frac{1}{9} < x < 1$.



ח. להלן סקיצה :

59 א. i. $x \neq 0$. ii. (1,0) . iii. $x = 0, y = 0$. iv. $\max(2, 0.25)$.

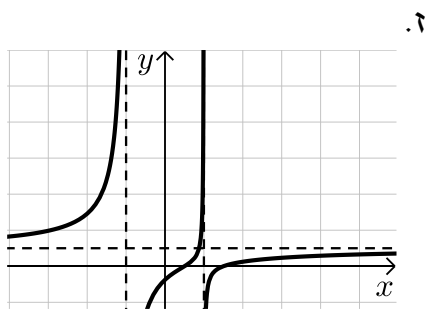
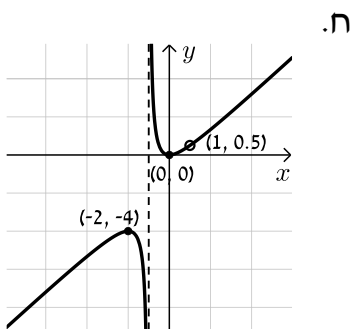
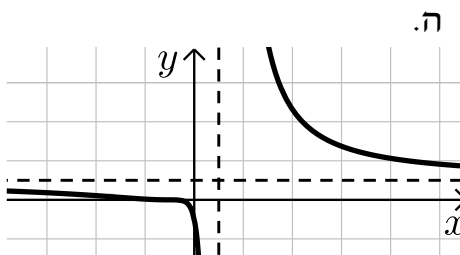
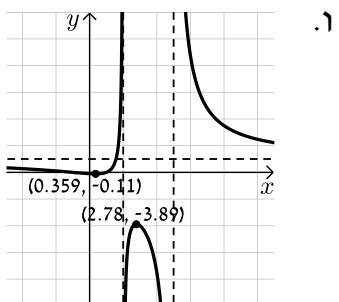
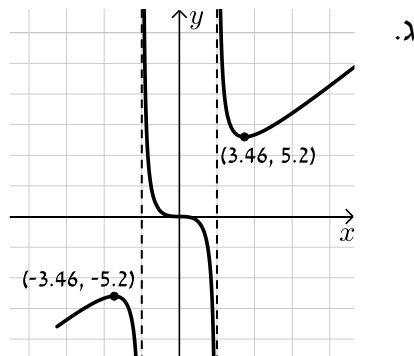
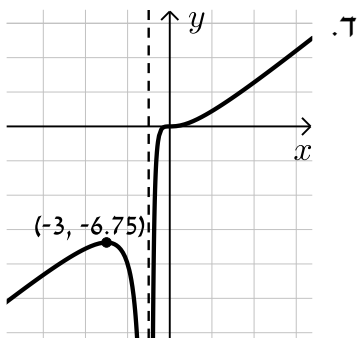
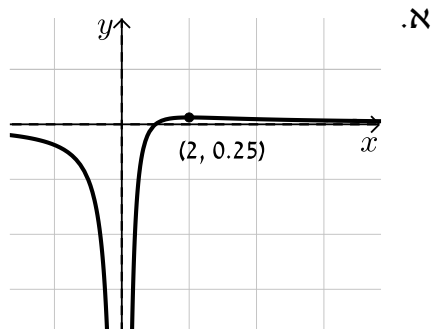
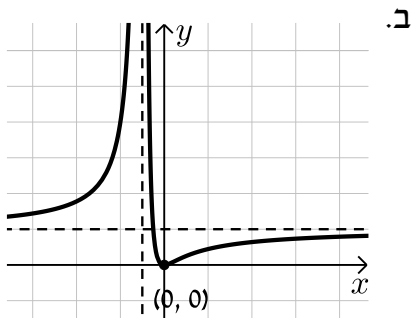
v. עולה : $0 < x < 2$, יורדת : $x < 0, x > 2$. vi. $\left(3, \frac{2}{9}\right)$.

vii. קעורה כלפי מעלה : $x > 3$, קעורה כלפי מטה : $0 < x < 3, x < 0$.

ב. i. $x \neq -1$. ii. (0,0) . iii. $x = -1, y = 2$. iv. $\min(0,0)$.

- v. עולה: $x < -1$, $x > 0$, יורדת: $-1 < x < 0$.vi $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{9}\right)$
- vii. קעורה כלפי מעלה: $-1 < x < \frac{1}{2}$, קעורה כלפי מטה: $x < -1$, $x < \frac{1}{2}$
- ג. i. $x \neq \pm 2$.ii $(0,0)$.iii $x = \pm 2$
- iv. $\min(\sqrt{12}, 5.2)$, $\max(-\sqrt{12}, -5.2)$
- v. עולה: $x > \sqrt{12}$, $x < -\sqrt{12}$, יורדת: $2 < x < \sqrt{12}$, $-2 < x < 2$, $-\sqrt{12} < x < -2$.vi $(0,0)$
- vii. קעורה כלפי מעלה: $x > 2$, $-2 < x < 0$, קעורה כלפי מטה: $0 < x < 2$, $x < -2$
- ד. i. $x \neq -1$.ii $(0,0)$.iii $x = -1$.iv $\max(-3, -6.75)$
- v. עולה: $x > -1$, $x < -3$, יורדת: $-3 < x < -1$.vi $(0,0)$
- vii. קעורה כלפי מעלה: $x > 0$, קעורה כלפי מטה: $-1 < x < 0$, $x < -1$
- ה. i. $x \neq 1$.ii $(-1,0), (0,-1)$.iii $x = 1, y = 1$.iv אין
- v. יורדת בכל ת.ה. .vi $\left(-3, \frac{1}{8}\right), (-1,0)$
- vii. קעורה כלפי מעלה: $-3 < x < -1$, $x > 1$, קעורה כלפי מטה: $-1 < x < 1$, $x < -3$
- ו. i. $x \neq 2, 5$.ii $(0, -0.1), (-1, 0), (1, 0)$.iii $x = 2, x = 5, y = 1$
- iv. $\min(0.359, -0.11)$, $\max(2.78, -3.89)$
- v. עולה: $2 < x < 2.78$, $0.359 < x < 2$, יורדת: $x > 5$, $2.78 < x < 5$, $x < 0.359$
- ז. i. $x \neq \pm 2$.ii $(3,0), (1,0), (0,-0.75)$.iii $x = \pm 2, y = 1$
- iv. אין .v יורדת בכל ת.ה.
- ח. i. $x \neq \pm 1$.ii $(0,0)$.iii $x = -1$.iv $\min(0,0)$, $\max(-2,-4)$
- v. עולה: $x > 0$, $x < -2$, $x \neq 1$, יורדת: $-1 < x < 0$, $-2 < x < -1$
- vi. אין .vii קעורה כלפי מעלה: $x > -1$, $x \neq 1$, קעורה כלפי מטה: $x < -1$

סקיצות:



חקירת פונקציה עם פרמטר:

סיכום כללי:

סיווג נקודות קיצון באמצעות y'' :

אם הנקודה $A(x_1, y_1)$ היא נקודת קיצון אז :

- אם $f''(x_1) > 0$ הנקודה $A(x_1, y_1)$ היא נקודת מינימום.
- אם $f''(x_1) < 0$ הנקודה $A(x_1, y_1)$ היא נקודת מקסימום.

שאלות:

(1) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = x^3 - 12x$.

(2) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = x^2 - 6x - 16$.

(3) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = x^3 - 3b^2x$, $b > 0$, פרמטר. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{a^2 + x^2}$ ($a > 0$). חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1-x^2}{(x-b)^2}$, $(b > 1)$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(6) נתונה הפונקציה: $f(x) = 4x\sqrt{b^2 - x^2}$, $(b > 0)$.

חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(7) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - m}{ax - 4}$, a, m פרמטרים קבועים כאשר: $a > 0$.

ידוע כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- y .

- א. מצא את הערך של הפרמטר m .
- ב. הצב את הערך של m שמצאת בסעיף א' והבא באמצעות a את:
 - i. תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - ii. נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
 - iii. האסימפטוטות לגרף הפונקציה המקבילות לצירים.
- ג. סרטט סקיצה וסמן בה את נקודות הקיצון ואת משוואות האסימפטוטות שהבעת באמצעות a בסעיף הקודם.
- ד. ידוע כי נקודת הקיצון שאינה על ציר ה- y נמצאת במרחקים שווים מהצירים. מצא את הערך של הפרמטר a .
- ה. נתון הישר: $y = k$. מצא עבור אילו ערכים של k אין לישר ולגרף הפונקציה נקודות משותפות כלל.

תשובות סופיות:

(1) $\min(2, -16)$, $\max(-2, 16)$

(2) $\min(3, -25)$

(3) $\min(b, -2b^3)$, $\max(-b, 2b^3)$

(4) א. כל x ב. $\max\left(a, \frac{1}{a}\right)$, $\min\left(-a, -\frac{1}{a}\right)$

ג. עולה: $-a < x < a$ יורדת: $x < -a$, $x > a$

ד. $(0, 0)$ ה. אסימפטוטה אופקית: $y = 0$

(5) א. $x \neq b$ ב. $\max\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{b^2 - 1}\right)$ ג. עולה: $x > b$, $x < \frac{1}{b}$ יורדת: $\frac{1}{b} < x < b$

ד. $\left(0, \frac{1}{b^2}\right)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$ ה. $x = b$, $y = -1$

(6) א. $-b \leq x \leq b$ ב. $\min\left(-\frac{b}{\sqrt{2}}, -2b^2\right)$, $\max\left(\frac{b}{\sqrt{2}}, 2b^2\right)$, $\min(-b, 0)$ קצה,

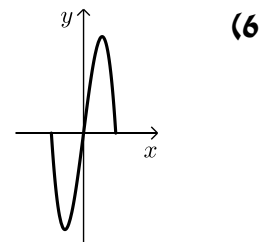
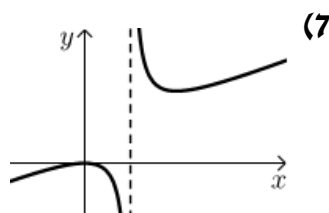
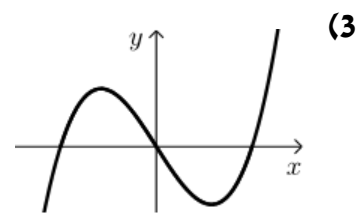
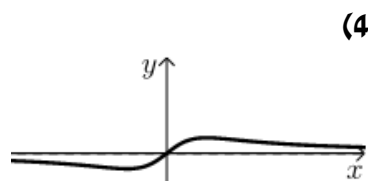
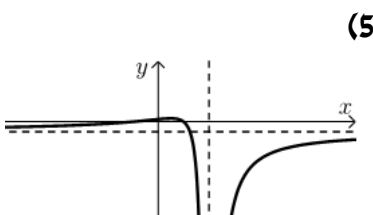
ג. עולה: $-\frac{b}{\sqrt{2}} < x < \frac{b}{\sqrt{2}}$, יורדת: $\frac{b}{\sqrt{2}} < x < b$, $-b < x < -\frac{b}{\sqrt{2}}$

ד. $(b, 0)$, $(-b, 0)$, $(0, 0)$

(7) א. $m = 0$ ב. $x \neq \frac{4}{a}$ ב. ii. $\max(0, 0)$, $\min\left(\frac{8}{a}, \frac{16}{a^2}\right)$

ג. iii. $x = \frac{4}{a}$ ד. $a = 2$ ה. $0 < k < 4$

סקיצות לשאלות:



פונקציות ללא תבנית מפורשת:

סיכום כללי:

הגדרת פונקציה:

- פונקציה f היא התאמה בין ערך x לערך y ומסומנת באופן הבא: $f: x \rightarrow y$.
- כך שלכל x מתאים ערך אחד בלבד של y . סימון אחר: $y = f(x)$.
- הנגזרת של פונקציה $f(x)$ מסומנת $f'(x)$.

כללי הגזירה לפי כלל השרשרת:

- סימון הנגזרת: $(f(x))' = f'(x)$
- גזירה של פונקציה בחזקה: $(f^2(x))' = 2f(x)f'(x)$
- גזירה של הרכבת פונקציות: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

שאלות:

- (1) הפונקציה $f(x)$ מקיימת: $f(1) = 3$ ו- $f'(1) = -2$.
 חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $f(1) + 4$

ב. $f'(1) + 4$

ג. $\frac{f(1)+1}{f'(1)-1}$

ד. $\sqrt{f(1)+f'(1)}$

- (2) נתונה פונקציה f המקיימת: $f(4) = 0$ ו- $f'(4) = 1$.

מגדירים: $g(x) = 2x + f(2x)$.

חשב את $g(2)$ ואת $g'(2)$.

- (3) נתונה פונקציה המקיימת: $f(8) = -1$ ו- $f'(8) = 1$.
- א. נתון: $g(x) = x^2 \sqrt{f(4x) + f'(x+6)}$. חשב את $g(2)$.
- ב. נתון: $h(x) = \frac{f(x+2) + x + 2}{f'(14-x) - 14 + x}$. חשב את $h(6)$.
- (4) נתונה פונקציה המקיימת: $f(9) = -4$, $f'(9) = 3$.
- מגדירים: $g(x) = f^2(3x) + f'(x^2)$. חשב את $g(3)$.
- (5) פונקציה f מקיימת: $f(4) = 2$, $f'(4) = 1$.
- מגדירים: $g(x) = f^2(x) + f(x) + x$.
- חשב את $g(4)$ ואת $g'(4)$.
- (6) פונקציה f מקיימת: $f(1) = -3$, $f'(1) = 3$. מגדירים: $g(x) = \frac{x \cdot f(x)}{x + f(x)}$.
- חשב את $g(1)$ ואת $g'(1)$.
- (7) פונקציה f מקיימת: $f(-2) = 6$, $f'(-2) = 2$. מגדירים: $g(x) = \sqrt{f^2(x) + 1}$.
- חשב את $g(-2)$ ואת $g'(-2)$.
- (8) פונקציה f מקיימת: $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}$. מגדירים: $g(x) = 3x \cdot f(2x)$.
- חשב את $g\left(\frac{1}{4}\right)$ ואת $g'\left(\frac{1}{4}\right)$.
- (9) פונקציה f מקיימת: $f(6) = \frac{2}{3}$, $f'(6) = -\frac{3}{2}$. מגדירים: $g(x) = \frac{x+3+f(x+3)}{f(2x)+3}$.
- חשב את $g(3)$ ואת $g'(3)$.

10 נתונה פונקציה המקיימת: $f(8) = -3$. מגדירים: $g(x) = \frac{f(4x)+1}{f(x+6)+2}$.

א. חשב את $g(2)$.

ב. חשב את $f'(8)$ אם ידוע כי: $g'(2) = 1$.

ג. חשב את $f'(8)$ אם ידוע כי: $g'(2) = (f'(8))^2$ וכי $f'(8) < 0$.

11 נתונה פונקציה המקיימת: $f(3) = -2$.

מגדירים: $g(x) = \frac{x^2 \cdot f(x-2)}{f(2x-7)}$ וידוע כי $g'(5) = -15$.

חשב את $g(5)$ ואת $f'(3)$.

12 נתונה פונקציה שמקיימת: $f(4) = \frac{1}{2}$.

מגדירים: $g(x) = x^2 \cdot f(x^2) + f'^2(x^2)$.

א. הבע את $g'(x)$ באמצעות f .

ב. חשב את $g(-2)$ ואת $g(2)$ אם ידוע כי $f'(4) = 1$.

ג. חשב את $f'(4)$ אם ידוע כי $g'(2) = 11$ ו- $f''(4) = \frac{1}{4}$.

מתמטיקה 55004 לתלמידי לוגיסטיקה

פרק 13 - חשבון דיפרנציאלי - הקשר שבין גרף הפונקציה וגרף הנגזרת

תוכן העניינים

1. כללי (ללא ספר)

מתמטיקה 55004 לתלמידי לוגיסטיקה

פרק 14 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות מעריכיות

תוכן העניינים

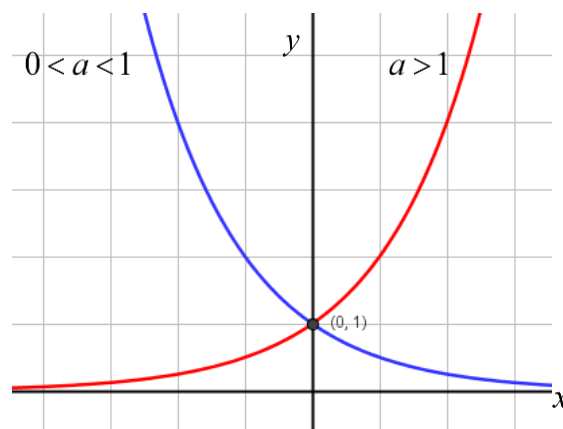
- 1. הנגזרת של פונקציה מעריכית 216
- 2. שימושי הנגזרת 220
- 3. חקירה של פונקציה מעריכית 221

הנגזרת של פונקציה מעריכית:

סיכום כללי:

הגדרות כלליות:

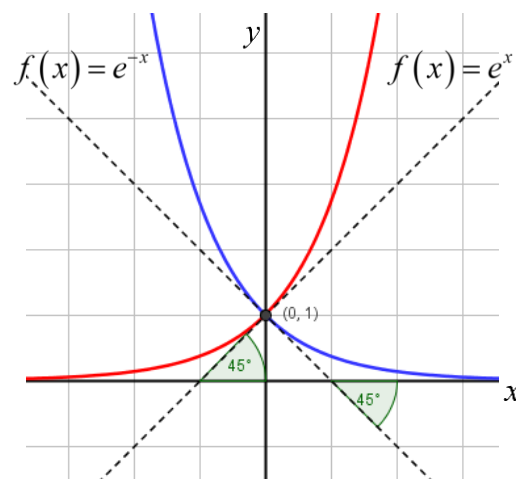
להלן תיאורים גרפיים של פונקציה מעריכית כללית מהצורה: $f(x) = a^x$
 עבור: $a > 1$ ו- $0 < a < 1$:



תכונות כלליות:

1. הפונקציות מוגדרות לכל x .
2. הפונקציות תמיד חיוביות.
3. הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- y בנקודה: $(0, 1)$.
4. עבור: $a > 1$ הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור: $0 < a < 1$ הפונקציה יורדת בכל ת.ה.

עבור הפונקציות $f(x) = e^x$ ו- $f(x) = e^{-x}$ נקבל:



תכונות נוספות:

1. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^x$ בנקודת החיתוך עם ציר ה- y הוא 1.
2. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^{-x}$ בנקודת החיתוך עם ציר ה- y הוא -1.

נגזרות של פונקציות מעריכיות:

הפונקציה	הנגזרת
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

תזכורת - כללי הגזירה:

מספר כלל	הפונקציה	תיאור	הנגזרת
1.	$y = a \cdot f(x)$	מכפלה בקבוע	$y' = a \cdot f'(x)$
2.	$y = f(x) + g(x)$	סכום פונקציות	$y' = f'(x) + g'(x)$
3.	$y = f(x) \cdot g(x)$	מכפלת פונקציות	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4.	$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	מנת פונקציות	$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
5.	$y = f(g(x))$	פונקציה מורכבת	$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

שאלות:

(1) גזור את הפונקציות הבאות (סכום פונקציות):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = 3e^x + e^{2x} + e^{-x} + 2x + 1 & \text{ב. } f(x) = e^{x^2-3x} + ex \\ \text{ג. } f(x) = 2^{3x} & \text{ד. } f(x) = 3^{x^2} + 4^{-x} \end{array}$$

(2) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלת פונקציות):

$$\text{א. } f(x) = x \cdot e^x \quad \text{ב. } f(x) = x^2 \cdot e^{4x} \quad \text{ג. } f(x) = (x+1) \cdot 2^x$$

(3) גזור את הפונקציות הבאות (מנת פונקציות):

$$\text{א. } f(x) = \frac{x^2}{e^x} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

(4) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציה מורכבת):

$$\text{א. } f(x) = 5(e^{2x} - 1)^3 \quad \text{ב. } f(x) = \sqrt{e^{2x} + e^{-2x}} \quad \text{ג. } f(x) = \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^x + 1}}$$

(5) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות שונות):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = e^{2x} & \text{ב. } f(x) = e^x + 1 \\ \text{ג. } f(x) = e^{\frac{1}{x}} & \text{ד. } f(x) = (x^2 + 1)e^x \\ \text{ה. } f(x) = e^{-x}(x^2 + 4x + 1) & \text{ו. } f(x) = e^x \cdot \frac{1}{x} \\ \text{ז. } f(x) = e^{-2x}(x+4) & \text{ח. } f(x) = x^3 e^{2x} \\ \text{ט. } f(x) = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} & \text{י. } f(x) = e^{2x+1}(1-x) \\ \text{יא. } f(x) = \frac{2+x^2}{e^{x^2}} & \text{יב. } f(x) = \frac{x^3}{e^{3x}} \\ \text{יג. } f(x) = \frac{x^2+1}{e^{-x}} & \text{יד. } f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^{-x} + e^x} \\ \text{טו. } f(x) = \frac{x^2+1}{e^{-x}} & \text{טז. } f(x) = \frac{e^x}{1 - e^{x+1}} \end{array}$$

תשובות סופיות:

(1) א. $3e^x + 2e^{2x} - e^{-x} + 2$ ב. $(2x-3)e^{x^2-3x} + e$ ג. $3\ln 2 \cdot 2^{3x}$ ד. $2x \ln 3 \cdot 3^{x^2} - \ln 4 \cdot 4^{-x}$

(2) א. $(1+x)e^x$ ב. $2xe^{4x}(1+2x)$ ג. $2^x(1+x\ln 2 + \ln 2)$

(3) א. $\frac{x(2-x)}{e^x}$ ב. $\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

(4) א. $30e^{2x}(e^{2x}-1)^2$ ב. $\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}}}$ ג. $\frac{5e^{4x}+6e^{3x}}{2\sqrt{(e^x+1)^3}}$

(5) א. $2e^{2x}$ ב. e^x ג. $-\frac{e^{1/x}}{x^2}$ ד. $(x+1)^2 e^x$

ה. $e^{-x}(-x^2-2x+3)$ ו. $3e^{3x-2}$

ז. $\frac{e^x(x-1)}{x^2}$ ח. $x^2 e^{2x}(3+2x)$ ט. $-e^{-2x}(2x+7)$

י. $e^{2x+1}(1-2x)$

יא. $\frac{e^{-1/x}}{x^2}$ יב. $\frac{3x^2(1-x)}{e^{3x}}$ יג. $\frac{-2x(x^2+1)}{e^{x^2}}$

יד. $\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$ טו. $\frac{(x+1)^2}{e^{-x}}$ טז. $\frac{e^x}{(1-e^{x+1})^2}$

שימושי הנגזרת:

שאלות:

- (6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = e^x$ בנקודה $A(1, e)$.
- (7) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = e^{2x} + xe^{-x}$ בנקודה שבה $x = 0$.
- (8) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = (e+1)e^x - e^{2x}$ בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y = e$.
- (9) נתונה הפונקציה: $y = e^{2x} + 3ex$.
 לפונקציה העבירו משיק דרך הנקודה שבה: $x = 2$.
 מצא את משוואת המשיק.
- (10) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = a \cdot 3^{2x-1} + 3^{x-b}$ בנקודה $(1, 15)$ הוא $21 \ln 3$.
 מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

תשובות סופיות:

- (6) $y = ex$
- (7) $y = 3x + 1$
- (8) $y = (-e^2 + e)x + e^2$, $y = (e-1)x + e$
- (9) $y = 2e^4x + 3ex - 3e^4$
- (10) $b = -1$, $a = 2$

חקירה של פונקציה מעריכית:

שאלות:

(11) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } f(x) = \frac{2x-1}{e^x} & \text{ב. } f(x) = \frac{3}{e^x-1} & \text{ג. } f(x) = \frac{x+1}{e^x-5} \\
 \text{ד. } f(x) = \frac{1}{e^{2x}-3e^x+2} & \text{ה. } f(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^x} & \text{ו. } f(x) = \frac{\sqrt{e^x-1}}{5x-2} \\
 \text{ז. } f(x) = \sqrt{e^{2x}-4e^x+3} & &
 \end{array}$$

(12) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = x^2e^x$.

(13) מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x}{x-2}$.

(14) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax^2+bx+9}{e^x}$.

הפונקציה משיקה לציר ה- x בנקודה שבה $x = 1.5$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת נקודות הקיצון של הפונקציה.

(15) נתונה הפונקציה: $f(x) = 8^x + p \cdot 2^x + q$. לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה $(\log_2 3, -19)$. מצא את ערכי הפרמטרים p ו- q .

(16) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = e^{2x} + e^x$.

(17) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}}$.

(18) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x + 5}{e^x - 1}$.

(19) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x - 5}$

(20) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(21) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^{2x} - 5e^x + 6}$

(22) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$

(23) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x^3 - 1}{e^x}$

(24) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x-1}{e^{3x} - e}$

(25) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = (x-3)e^x$

(26) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

(27) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 + a}{be^x}$. לפונקציה יש נקודת פיתול בנקודה $(1, \frac{2}{e})$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת נקודת הפיתול השנייה של הפונקציה.

(28) חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים הבאים:

1. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
2. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
3. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
4. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

$$f(x) = (x^2 + 1)e^x \quad \text{ב.} \qquad f(x) = (x-1)e^x \quad \text{א.}$$

$$f(x) = e^{x^2-x} \quad \text{ד.} \qquad f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{4}x^2} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^{x+1}} \quad \text{ו.} \qquad f(x) = \frac{2}{e^{x^2} + 1} \quad \text{ה.}$$

(29) נתונה הפונקציה $f(x) = (x-3)e^x$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(30) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{2x} - 8e^x + 6x + 10$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(31) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{4x}{e^{0.5x^2}}$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(32) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(33) נתונה הפונקציה $f(x) = 2x \cdot 3^x$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(34) נתונה הפונקציה $f(x) = 2e^{\frac{x}{x^2+1}}$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ז. לאלו ערכי m יש למשוואה $f(x) = m$ בדיוק פתרון אחד?

(35) נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. מציאת נקודות פיתול של הפונקציה.
- ז. כתיבת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.

ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$(36) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \frac{e^{3x}}{12x^2 + 1}$$

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$(37) \text{ שיפוע המשיק לגרף הפונקציה: } f(x) = \frac{1}{e^{3x^2+6x+k}} \text{ בנקודה שבה } x=1 \text{ הוא } -\frac{12}{e^{10}}$$

- מצא את ערך הפרמטר k וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- הוכח על סמך הסקיצה את אי-השוויון הבא: $0 < \frac{1}{e^{3x^2+6x+1}} \leq e^2$.

$$(38) \text{ נתונה הפונקציה הבאה: } f(x) = e^{2x} + ae^x + b \text{ . גוזרים את הפונקציה פעמיים}$$

$$\text{וידוע כי כאשר } x = \ln \frac{2}{3} \text{ הנגזרות מקיימות: } f'(x) + f''(x) = 8$$

- מצא את a .
- משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא: $y = 16x + 7 - 16 \ln 2$.
- מצא את שיעור ה- x של נקודת ההשקה.
- מצא את b .
- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

$$(39) \text{ נתונות הפונקציות הבאות: } f(x) = 6x - e^x \text{ ו- } g(x) = ae^x - e^{2x} + b$$

ידוע כי לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה אותו שיעור x וכי שתיהן נפגשות על ציר ה- y .

- מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .
- הראה כי לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה משותפים.

40 לגרף הפונקציה: $f(x) = ax^2 \cdot e^{-bx^2}$ יש נקודת קיצון: $\left(2, \frac{4}{e}\right)$, $a, b \neq 0$.

- מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון הנוספות של הפונקציה וקבע את סוגן.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מעבירים ישר: $y = k$. באיזה תחום ערכים צריך להימצא k כדי שהישר יחתוך את גרף הפונקציה ב-4 נקודות שונות?

41 לפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 6x - 7}{e^{ax-1}}$ יש קיצון בנקודה שבה: $x = 1$.

- מצא את ערך הפרמטר a .
- האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון נוספות? אם כן מצא אותן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

42 הישר $x = \sqrt{6}$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה: $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 + m}$.

- מצא את ערך הפרמטר m וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

43 נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 \cdot e^{2x}$.

- מצא את הנקודות המקיימות: $f'(x) = 0$ וקבע כמה מהן הן נקודות קיצון.
- מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- בכמה נקודות חותך הישר $y = -0.01$ את גרף הפונקציה?

44 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = e^{2x} + ae^x + b$. גוזרים את הפונקציה פעמיים

$$f'(x) + f''(x) = 12 \text{ הנגזרות מקיימות: } x = \ln \frac{2}{3}$$

א. מצא את a .

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא: $y = 22x + 28 - 22 \ln 2$.

ב. מצא את שיעור ה- x של נקודת ההשקה.

ג. מצא את b .

ד. האם הפונקציה חותכת את ציר ה- x ? אם כן מצא את הנקודות.

45 נתונה הפונקציה: $f(x) = x \cdot a^x$, $(a > 0)$.

$$\text{לפונקציה יש נקודת קיצון שבה: } x = -\frac{1}{\ln 2}$$

א. מצא את a .

ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

הנקודה שבה $x = 2$ היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$

$$\text{עם גרף הפונקציה: } g(x) = x^2 \cdot 2^x - kx \cdot 2^x$$

ג. מצא את k .

ד. מצא נקודה נוספת שבה הגרפים נחתכים.

46 נתונה הפונקציה: $f(x) = 3^{2x} + 2 \cdot 3^{1-x}$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה

עם ציר ה- y .

ב. הוכח כי גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה- x .

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

תשובות סופיות:

$$(11) \quad \text{א. כל } x \quad \text{ב. } x \neq 0 \quad \text{ג. } x \neq \ln 5 \quad \text{ד. } x \neq \ln 2, x \neq 0 \quad \text{ה. כל } x$$

$$\text{ו. } 0 \leq x \neq \frac{2}{5} \quad \text{ז. } x \leq 0, x \geq \ln 3$$

$$(12) \quad \min(0,0), \max\left(-2, \frac{4}{e^2}\right)$$

$$(13) \quad \min(3, e^3)$$

$$(14) \quad \min(1.5, 0), \max(3.5, 0.483), b = -12, a = 4$$

$$(15) \quad p = -27, q = 35$$

$$(16) \quad y = 0$$

$$(17) \quad y = 0$$

$$(18) \quad x = 0, y = -5, y = 1$$

$$(19) \quad x = \ln 5, y = -\frac{1}{5}$$

$$(20) \quad y = -1, y = 1$$

$$(21) \quad \text{נקודת אי הגדרה: } (\ln 2, -1), x = \ln 3, y = -\frac{1}{3}, y = 0$$

$$(22) \quad x = 0, y = 0$$

$$(23) \quad y = 0$$

$$(24) \quad x = \frac{1}{3}, y = 0$$

$$(25) \quad y = 0$$

$$(26) \quad \text{נקודת אי הגדרה: } (0,0), x = 0$$

$$(27) \quad \left(3, \frac{10}{e^3}\right), a = 1, b = 1$$

$$(28) \quad \text{א. כל } x \quad \text{ב. } (1,0), (0,-1) \quad \text{ג. } \min(0,-1) \quad \text{ד. עולה: } x > 0 \quad \text{יורדת: } x < 0$$

$$\text{ב. כל } x \quad \text{ג. } (0,1) \quad \text{ד. עולה: } x < -1, x > -1 \quad \text{פיתול } \left(-1, \frac{2}{e}\right)$$

$$\text{ג. כל } x \quad \text{ד. } (0,0) \quad \text{א. } \max\left(2, \frac{4}{e}\right), \min(0,0), \max\left(-2, \frac{4}{e}\right)$$

$$\text{ב. עולה: } x < -2, 0 < x < 2 \quad \text{יורדת: } x > 2, -2 < x < 0$$

$$\text{ד. כל } x \quad \text{א. } (0,1) \quad \text{ב. } \min(0.5, e^{-0.25}) \quad \text{ג. עולה: } x > 0.5 \quad \text{יורדת: } x < 0.5$$

- ה.1. כל x .2. $(0,1)$.3. $\max(0,1)$.4. עולה: $x < 0$ יורדת: $x > 0$
- ו.1. כל x .2. $(0, 2e^{-1})$.3. $\min(0, 2e^{-1})$.4. עולה: $x > 0$ יורדת: $x < 0$
- (29) א. כל x .ב. $\min(2, -e^2)$.ג. תחומי עלייה: $x > 2$ תחומי ירידה: $x < 2$
- ד. $(3,0)$, $(0,-3)$
- (30) א. כל x .ב. $\max(0,3)$, $\min(\ln 3, 1.59)$.ג. תחומי עלייה: $x > \ln 3$ או $x < 0$ תחומי ירידה: $0 < x < \ln 3$.ד. $(0,3)$
- (31) א. כל x .ב. $\min\left(-1, -\frac{4}{e^{0.5}}\right)$, $\max\left(1, \frac{4}{e^{0.5}}\right)$.ג. תחומי עלייה: $-1 < x < 1$ תחומי ירידה: $x > 1$ או $x < -1$.ד. $(0,0)$
- (32) א. כל x .ב. $\max\left(3, \frac{27}{e^3}\right)$.ג. עולה: $x < 3$, יורדת: $x > 3$
- ד. $(0,0)$
- (33) א. כל x .ב. $\min(-0.91, -0.67)$.ג. עולה: $x > -0.91$ יורדת: $x < -0.91$
- ד. $(0,0)$
- (34) א. כל x .ב. $\max(1, 2\sqrt{e})$, $\min\left(-1, \frac{2}{\sqrt{e}}\right)$.ג. עולה: $-1 < x < 1$ יורדת: $x < -1$, $x > 1$
- ד. $(0,2)$.ה. $y = 2$.ו. $m = 2$, $m = 2\sqrt{e}$, $m = \frac{2}{\sqrt{e}}$
- (35) א. $x \neq 0$.ב. $\min\left(\frac{1}{2}, \frac{e^2}{4}\right)$.ג. עולה: $x > \frac{1}{2}$, יורדת: $0 \neq x < \frac{1}{2}$
- ד. אין
- (36) א. כל x .ב. $\max\left(\frac{1}{6}, \frac{3\sqrt{e}}{4}\right)$, $\min\left(\frac{1}{2}, \frac{e^{1.5}}{4}\right)$.ג. עולה: $x > \frac{1}{2}$, $x < \frac{1}{6}$ יורדת: $\frac{1}{6} < x < \frac{1}{2}$
- ד. $(0,1)$
- (37) א. $k = 1$, $f(x) = \frac{1}{e^{3x^2+6x+1}}$.ב. $(-1, e^2)$
- ד. ניתן לראות עפ"י הגרף כי ערך הפונקציה $f(x)$ נמצא בתחום $0 < f(x) \leq e^2$
- (38) א. $a = 4$.ב. $x = \ln 2$.ג. $b = -5$.ד. $(0,0)$
- (39) א. $a = 12$, $b = -12$.ב. עולות: $x < \ln 6$ יורדות: $x > \ln 6$

א. $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{4}x^2}$, $a=1$, $b=0.25$ (40) ב. $\max\left(-2, \frac{4}{e}\right)$, $\min(0,0)$

ג. $(0,0)$ ה. $0 < k < \frac{4}{e}$

א. $a = \frac{1}{3}$ (41) ב. כן: $\left(11, \frac{48}{e^{\frac{2}{3}}}\right)$ ג. עולה: $1 < x < 11$ יורדת: $x < 1, x > 11$

ד. $(-1,0)$, $(7,0)$, $(0,-7e)$

א. $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 - 6}$, $m = -6$ (42) ב. $\max\left(-2, -\frac{1}{2e^4}\right)$, $\min\left(3, \frac{e^6}{3}\right)$ ג. $\left(0, -\frac{1}{6}\right)$

א. $x = 0, -1.5$. נקודת הקיצון היא: $\min\left(-1.5, -3\frac{3}{8}e^{-3}\right)$ (43) ב. $y = 0$

ד. 2 נקודות.

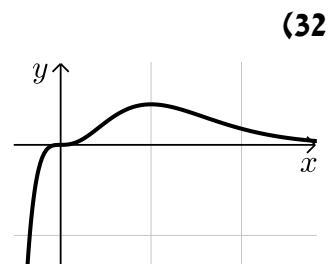
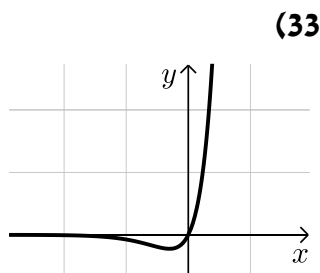
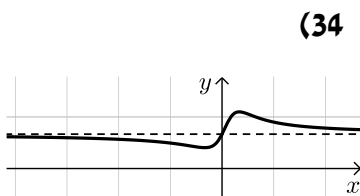
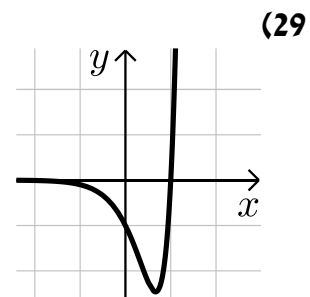
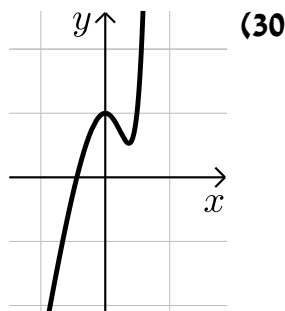
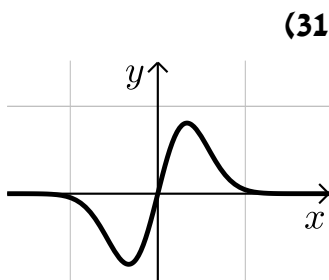
א. $a = 7$ (44) ב. $x = \ln 2$ ג. $b = 10$ ד. לא.

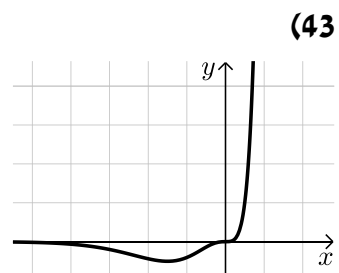
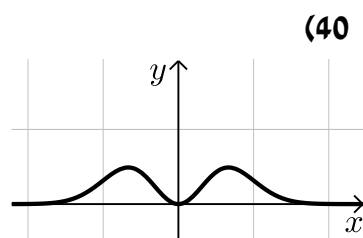
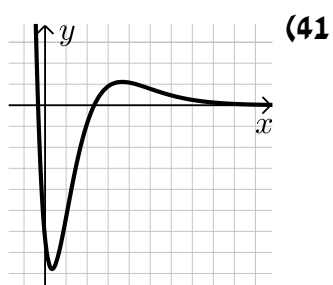
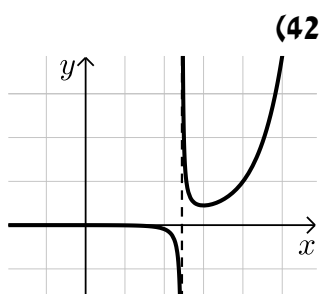
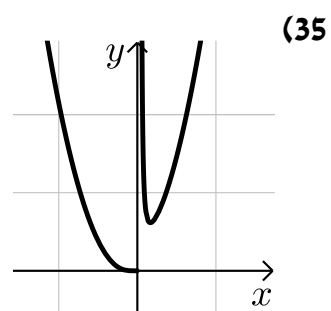
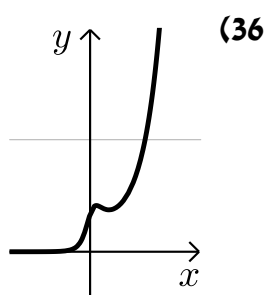
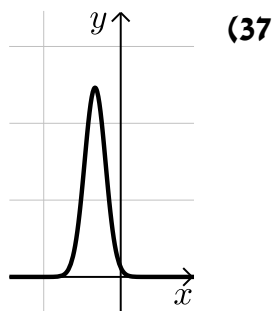
א. $a = 2$ (45) ב. עולה: $x > -\frac{1}{\ln 2}$ יורדת: $x < -\frac{1}{\ln 2}$ ג. $k = 1$

ד. $(0,0)$

א. $y = -x \ln 81 + 7$ (46) ג. $\min\left(\frac{1}{3}, \sqrt[3]{243}\right)$

סקיצות לשאלות החקירה:





מתמטיקה 55004 לתלמידי לוגיסטיקה

פרק 15 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות

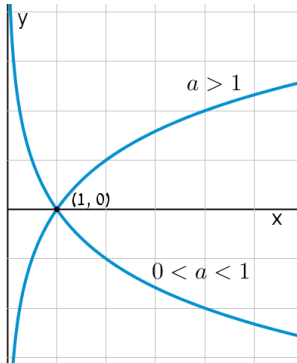
תוכן העניינים

1. הנגזרת של פונקציה לוגריתמית 232
2. שימושי הנגזרת 237
3. חקירה של פונקציה לוגריתמית 238

הנגזרת של פונקציה לוגריתמית:

סיכום כללי:

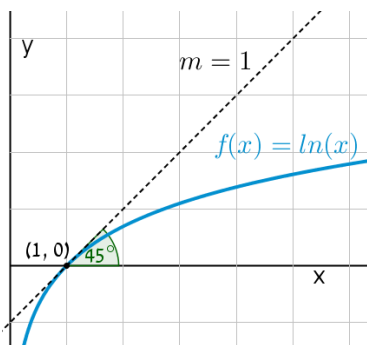
הגדרות כלליות:



להלן תיאורים גרפיים של פונקציה לוגריתמית כללית מהצורה: $f(x) = \log_a x$ עבור $a > 1$ ו- $0 < a < 1$:

תכונות כלליות:

- לפונקציות תחום הגדרה $x > 0$.
- הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- x בנקודה $(1, 0)$.
- עבור $a > 1$ הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור $0 < a < 1$ הפונקציה יורדת בכל ת.ה.



עבור הפונקציות $f(x) = \ln x = \log_e x$ נקבל כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x הוא 1:

תחום הגדרה של פונקציה לוגריתמית:

תחום ההגדרה של פונקציה לוגריתמית מהצורה: $y = \log(f(x))$ הוא: $f(x) > 0$.

נגזרות של פונקציות לוגריתמיות:

הפונקציה	הנגזרת
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
$y = \log_a f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \ln f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

שאלות:

1 גזור את הפונקציות הבאות (גזירה לוגריתמית יסודית עם ביטויים פנימיים שונים):

א. $f(x) = 3 \ln x + 4 \ln(x+2) - \ln(5x-1)$ ב. $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$

ג. $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$ ד. $f(x) = \ln(e^x + 1)$

ה. $f(x) = \ln(\cos x)$ ו. $f(x) = \log_2 x + 5 \log_3(2x-1)$

2 גזור את הפונקציות הבאות (מכפלה ומנה של פונקציות):

א. $f(x) = x \ln x$ ב. $f(x) = (3x+1)^2 \ln x$ ג. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

ד. $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2}$ ה. $f(x) = \sqrt{\ln x + x}$

3 גזור את הפונקציות הבאות (פונקציות מורכבות):

א. $f(x) = \ln^3 x$ ב. $f(x) = 3 \ln^2 x$

ג. $f(x) = x^2 \ln^2 x$ ד. $f(x) = \frac{\ln^2 x + 1}{(\ln x + 1)^2}$

4) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות שונות):

א. $f(x) = \ln(x+2)$	ב. $f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3$
ג. $f(x) = x^2 \ln x$	ד. $f(x) = x^3 \ln x$
ה. $f(x) = \ln e^{2x}$	ו. $f(x) = e^x \ln x$
ז. $f(x) = e^{-x^2} \ln x$	ח. $f(x) = x^2(2 \ln x - 1)$
ט. $f(x) = \ln(x^2)$	י. $f(x) = \ln(x^4)$
יא. $f(x) = (\ln x)^4$	יב. $f(x) = x \ln x - \ln x^2$
יג. $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$	יד. $f(x) = \ln \sqrt{x}$
טו. $f(x) = \sqrt{\ln x}$	טז. $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

5) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות אתגר):

א. $f(x) = \ln \frac{x+2}{x}$	ב. $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$
ג. $f(x) = \ln \frac{x-3}{x+3}$	ד. $f(x) = \ln \frac{(x-5)^3}{(x+1)^2}$
ה. $f(x) = \ln \sqrt{x^2 - 1}$	ו. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$
ז. $f(x) = e^{\sqrt{\ln x}}$	ח. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}}$
ט. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$	י. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+5x}{1-5x}}$
יא. $f(x) = \frac{\ln \sqrt[3]{x}}{x}$	יב. $f(x) = \frac{(\ln x)^3}{x}$
יג. $f(x) = \frac{x}{\ln(x^2)}$	יד. $f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x}$
טו. $f(x) = \frac{x}{\ln^4 x}$	

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{lll}
 f'(x) = \frac{-2}{(x-1)(x+1)} \cdot \lambda & f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x} \cdot \beta & f'(x) = \frac{3}{x} + \frac{4}{x+2} - \frac{5}{5x-1} \cdot \aleph \quad (1) \\
 f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} + \frac{10}{(2x-1) \ln 3} \cdot \iota & f'(x) = -\tan x \cdot \eta & f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} \cdot \daleth \\
 f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} \cdot \lambda & f'(x) = (3x+1) \left(6 \ln x + \frac{3x+1}{x} \right) \cdot \beta & f'(x) = \ln x + 1 \cdot \aleph \quad (2) \\
 & f'(x) = \frac{1+x}{2x\sqrt{\ln x+x}} \cdot \eta & f'(x) = \frac{4}{x(\ln x+2)^2} \cdot \daleth \\
 f'(x) = 2x \ln x (\ln x + 1) \cdot \lambda & f'(x) = \frac{6 \ln x}{x} \cdot \beta & f'(x) = \frac{3 \ln^2 x}{x} \cdot \aleph \quad (3) \\
 & & f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{x(\ln x + 1)^3} \cdot \daleth \\
 x(2 \ln x + 1) \cdot \lambda & \frac{2 \ln x + 2}{x} \cdot \beta & \frac{1}{x+2} \cdot \aleph \quad (4) \\
 e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) \cdot \iota & 2 \cdot \eta & x^2 (3 \ln x + 1) \cdot \daleth \\
 \frac{4}{x} \cdot \delta & \frac{2}{x} \cdot \upsilon & 4x \ln x \cdot \theta & e^{-x^2} \left(\frac{1}{x} - 2x \ln x \right) \cdot \beth \\
 \frac{2 \ln x - \ln^2 x}{x^2} \cdot \gamma & \ln x + 1 - \frac{2}{x} \cdot \beta & \frac{4(\ln x)^3}{x} \cdot \aleph & \\
 \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} \cdot \upsilon & \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} \cdot \tau & \frac{1}{2x} \cdot \daleth & \\
 \frac{6}{x^2-9} \cdot \lambda & \frac{2}{x^2-1} \cdot \beta & -\frac{2}{x(x+2)} \cdot \aleph \quad (5) \\
 \frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{x\sqrt{x^2+a^2}+x^2+a^2} \cdot \iota & \frac{x}{x^2-1} \cdot \eta & \frac{3}{x-5} - \frac{2}{x+1} \cdot \daleth \\
 \frac{1}{x^2-1} \cdot \upsilon & \frac{1}{4-2x} \cdot \theta & \frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}} \cdot \beth
 \end{array}$$

$$\frac{3\ln^2 x - \ln^3 x}{x^2} \quad \text{י.ב.}$$

$$\frac{\ln x - 4}{\ln^5 x} \quad \text{ט.ו.}$$

$$\frac{1 - 3\ln \sqrt[3]{x}}{3x^2} \quad \text{י.א.}$$

$$\frac{2(\ln^4 x - 1)}{x \ln^3 x} \quad \text{י.ד.}$$

$$\frac{5}{1 - 25x^2} \quad \text{י.}$$

$$\frac{\ln(x^2) - 2}{\ln^2(x^2)} \quad \text{י.ג.}$$

שימושי הנגזרת:

שאלות:

(6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודה $A(e, 1)$.

(7) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{\ln^2 x + a}{\ln x + b}$ בנקודה $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$ הוא $\frac{e}{3}$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

(8) הגרפים של הפונקציות $f(x) = \ln x$ ו- $g(x) = 1 - x$ נחתכים בנקודה A ברביע הראשון. בנקודה A העבירו משיק ל- $f(x)$. מצא את משוואת המשיק והוכח שמשיק זה עובר דרך הראשית.

(9) לפונקציה $g(x) = \frac{\ln x^2}{x}$ העבירו משיק בנקודה שבה $x = e^2$. מצא את משוואת המשיק.

(10) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y = x \ln(x^2 + 1)$ בנקודה שבה $x = 1$.

תשובות סופיות:

(6) $y = \frac{1}{e}x$

(7) $a = 2, b = -2$

(8) $y = \frac{1}{e}x$

(9) $y = -\frac{2}{e^4}x + \frac{6}{e^2}$

(10) $y = \ln 2 \cdot x + x - 1$

חקירה של פונקציה לוגריתמית:

שאלות:

11 מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \ln x$	ב. $f(x) = \ln(x^2)$
ג. $f(x) = \log_3(x^2 - 8x - 20)$	ד. $f(x) = \ln(e^x - 4)$
ה. $f(x) = \frac{x-1}{\ln x - 1}$	ו. $f(x) = \frac{1}{\ln^2 x - 2 \ln x - 3}$
ז. $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$	

12 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = 2 \ln x - x^2$.

13 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = x^2 \ln x$.

14 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\sqrt{2 \ln x - 1}}{x}$.

15 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$.

16 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a \ln x + b}{x}$. הנקודה $(e^2, \frac{1}{e^2})$ היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

17 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a \ln^2 x + b \ln x}{(\ln x + 1)^2}$. הנקודה $(\sqrt[3]{e}, -\frac{1}{8})$ היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

18 מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \ln(x-3)$.

19 מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{1}{\ln x - 1}$.

(20) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{2\ln x - 1}{\ln x + 1}$.

(21) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln^2 x - 4}$.

(22) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

(23) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\ln^2 x + 1}$.

(24) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = x \ln x + 2$.

(25) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. מצא את נקודת הפיתול של הפונקציה.

(26) חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים הבאים:

- i. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ii. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- iii. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- iv. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

$y = x \ln x$ ב.	$y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3 \ln x$ א.
$y = \sqrt{x} \ln x$ ד.	$y = x \ln x - x$ ג.
$y = \ln(x^2 + 1)$ ו.	$y = x^2 \ln x$ ה.

(27) נתונה הפונקציה $f(x) = 2x \ln^2 x$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(28) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\ln x - 1}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ו. מצא לאלו ערכי k הישר $y = k$ חותך את הפונקציה בשתי נקודות.

(29) נתונה הפונקציה $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(30) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

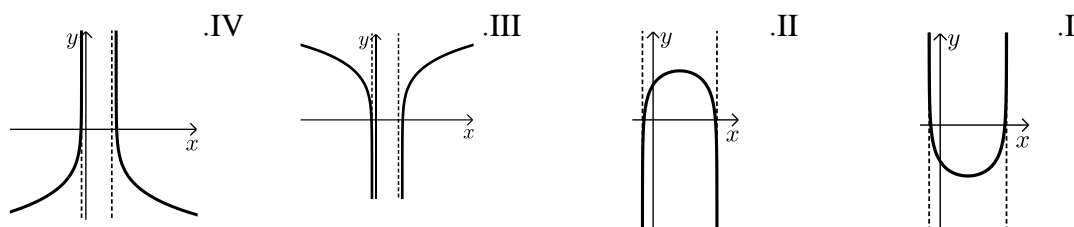
- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. הוכח כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.
- ג. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = \ln x$.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.
- ד. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$. ידוע כי לנקודות A ו-B אותו שיעור x , $(x_A = x_B)$.
- ה. מצא את שיעור ה- x של שתי הנקודות אם ידוע כי המשיקים לגרפים של הפונקציות בנקודות אלו מקבילים.

31 נתונה שתי הפונקציות הבאות: $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, $g(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- א. קבע אילו מהמשפטים הבאים נכונים ואלו שגויים.
 נמק זאת ע"י חישוב מתאים ותקן במשפטים השגויים את הטעות.
- לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.
 - לשתי הפונקציות יש נקודת קיצון מאותו סוג ובעלות שיעור x זהה.
 - לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה זהים.
 - לשתי הפונקציות יש אסימפטוטות אנכיות.
- ב. בחרים באקראי שתי נקודות, אחת על כל גרף, כך ששיעור ה- x שלהן זהה. הוכח כי מכפלת שיעורי ה- y של כל זוג נקודות כאלו שווה ל-1.

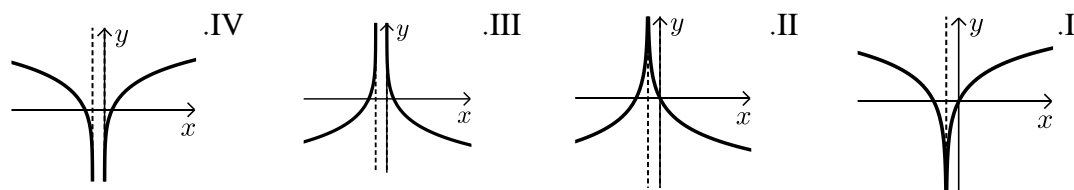
32 נתונה הפונקציה הבאה: $y = \ln(x^2 - 6x - 7)$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. מהן האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לציר ה- y ?
 ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. לפניך 4 גרפים: I, II, III, ו-IV. איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.



33 נתונה הפונקציה: $y = \ln(x^2 + 2x + 1)$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. מהי האסימפטוטה של הפונקציה המקבילה לציר ה- y ?
 ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. לפניך 4 גרפים: I, II, III, ו-IV. איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.



ה. העזר בגרף שבחרת וכתוב את תחומי השליליות של הפונקציה.

34 לפניך הפונקציה הבאה : $f(x) = \ln(1 - \ln x)$.

- מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- הוכח כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

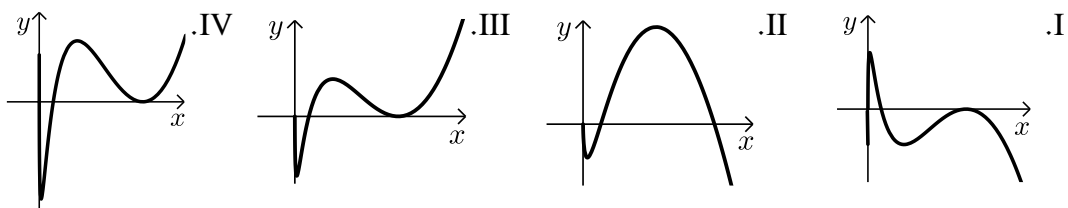
35 נתונה הפונקציה הבאה : $y = \ln \frac{2x+1}{x-1}$.

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- הראה כי גרף הפונקציה יורד בכל תחום הגדרתו.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

36 נתונה הפונקציה הבאה : $f(x) = x(\ln^3 x + 2\ln^2 x)$.

- הראה כי נגזרת הפונקציה היא : $f'(x) = \ln^3 x + 5\ln^2 x + 4\ln x$.
- מצא את התחום בו הפונקציה עולה.
- ענה על השאלות הבאות :
 - מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 - מצא את התחום בו הפונקציה חיובית.

ד. לפניך 4 גרפים. קבע איזה מהם מתאר את הפונקציה $f(x)$ ונמק את בחירתך.



37 נתונה הפונקציה : $f(x) = \ln^3 x - 3\ln x$.

- מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הפונקציה $g(x) = \ln x$.

38) ענה על הסעיפים הבאים :

א. פתור את המשוואה הבאה : $\ln(x+e) - \ln(x\sqrt{e}) = \ln 2 - 0.5$

נתונה הפונקציה : $f(x) = \ln(x+e) - \ln(x\sqrt{e})$

ב. הראה כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה : $x = e$.

39) נתונה הפונקציה הבאה : $y = \frac{x+a}{\ln(x+a)}$, פרמטר חיובי, $a \neq 1$

א. הבע באמצעות a את :

i. תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. הנקודה המקיימת $y' = 0$.

iii. נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

iv. האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.

ב. ידוע כי גרף הפונקציה עולה רק בתחום : $x > e - 2$. מצא את a .

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום $x > -1$.

ד. נתון הישר : $y = k$. מצא בסקיצה את תחום הערכים של k עבורו לישר ולגרף הפונקציה לא תהיה אף נקודה משותפת.

40) נתונה הפונקציה הבאה : $y = \ln x + \frac{1}{x}$

א. ענה על הסעיפים הבאים :

i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ii. יש לגרף הפונקציה אסימפטוטה מקבילה לציר y ?

אם כן מצא אותה.

ב. מצא את נקודת הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגה.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של גרף הפונקציה.

תשובות סופיות:

(11) א. $x > 0$ ב. $x \neq 0$ ג. $x > 10$ או $x < -2$ ד. $x > \ln 4$

ה. $0 < x \neq e$ ו. $x > 0$ וגם $x \neq e^3, e^{-1}$ ז. $x \geq e$

(12) $\max(1, -1)$

(13) $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right)$

(14) $\min(\sqrt{e}, 0)$ קצה, $\max\left(e, \frac{1}{e}\right)$

(15) $\min(4, -1)$

(16) $a = 1, b = -1$

(17) $a = 1, b = -1$

(18) $x = 3$

(19) נקודת אי הגדרה $(0, 0)$, $y = 0, x = e$

(20) נקודת אי הגדרה $(0, 2)$, $y = 2, x = \frac{1}{e}$

(21) נקודת אי הגדרה $(e^2, \frac{1}{4})$, $(0, 0)$; $y = 0, x = \frac{1}{e^2}$

(22) $x = 0, y = 0$

(23) נקודת אי הגדרה $(0, 0)$

(24) נקודת אי הגדרה $(0, 2)$

(25) $\left(\sqrt{e^3}, \frac{3}{2\sqrt{e^3}}\right)$

(26) א. i. $x > 0$ iii. $\max(1, -3.5), \min(3, \ln 27 - 7.5)$

iv. עולה: $0 < x < 1, x > 3$ יורדת: $1 < x < 3$ ב. i. $x > 0$ ii. $(1, 0)$

iii. $\min(e^{-1}, -e^{-1})$ iv. עולה: $x > e^{-1}$ יורדת: $0 < x < e^{-1}$

ג. i. $x > 0$ ii. $(e, 0)$ iii. $\min(1, -1)$ iv. עולה: $x > 1$ יורדת: $0 < x < 1$

ד. i. $x > 0$ ii. $(1, 0)$ iii. $\min\left(e^{-2}, -\frac{2}{e}\right)$ iv. עולה: $x > e^{-2}$ יורדת: $0 < x < e^{-2}$

ה. i. $x > 0$ ii. $(1, 0)$ iii. $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right)$ iv. עולה: $x > \frac{1}{\sqrt{e}}$ יורדת: $0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$

ו. i. כל x ii. $(0, 0)$ iii. $\min(0, 0)$ iv. עולה: $x > 0$ יורדת: $x < 0$

(27) א. $x > 0$ ב. $\max\left(\frac{1}{e^2}, \frac{8}{e^2}\right), \min(1, 0)$

ג. עלייה: $x > 1$ או $0 < x < \frac{1}{e^2}$, ירידה: $\frac{1}{e^2} < x < 1$ ד. $(1, 0)$.

(28) א. $0 < x \neq e$ ב. $\min(e^2, e^2)$ ג. עלייה: $x > e^2$, ירידה: $0 < x < e^2$

ו. $k > e^2$ ד. אין.

(29) א. $x > 0$ ב. $\min(4, -1)$ ג. עלייה: $x > 4$, ירידה: $0 < x < 4$

ד. $(1, 0), (16, 0)$.

(30) א. $x \geq 1$ ב. מתקבל: $f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} > 0$ ג. $(1, 0), (e, 1)$

ד. $x = \sqrt[4]{e}$.

(31) א. i. לא נכון. תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא: $x > 0, x \neq 1$ ותחום ההגדרה של $g(x)$ הוא: $x > 0$.

ii. לא נכון. לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה $x = e$ אך עבור $f(x)$ מדובר במינימום ועבור $g(x)$ מדובר במקסימום.

iii. לא נכון. עבור $f(x)$: עולה: $x > e$ יורדת: $0 < x < e, x \neq 1$.

ועבור $g(x)$: עולה: $0 < x < e$ יורדת: $x > e$ iv. נכון.

ב. לגבי כל נקודה נאמר כי שיעור ה- y שלה הוא: $y = \frac{x}{\ln x}$ ו- $y = \frac{\ln x}{x}$.

נכפול: $y = \frac{x}{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x} = 1$.

(32) א. $x < -1, x > 7$ ב. $x = -1, 7$ ג. עולה: $x > 7$ יורדת: $x < -1$.

ד. III. הסבר: באיורים I ו-II גרף הפונקציה לא בתחום. באיור IV תחומי העלייה והירידה הפוכים.

(33) א. $x \neq -1$ ב. $x = -1$ ג. עולה: $x > -1$ יורדת: $x < -1$.

ד. I. הסבר: באיור II תחומי העלייה והירידה הפוכים.

באיורים III ו-IV יש אסימפטוטה מיותרת. ה. $x \neq -1, -2 < x < 0$.

34 א. $0 < x < e$. (שימו לב כי תנאי ת.ה. הם: $1 - \ln x > 0$ וגם $x > 0$).

ב. $f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{1 - \ln x} = -\frac{1}{x(1 - \ln x)} < 0$. ולכן הפונקציה יורדת בת.ה.

ג. $(1, 0)$.

35 א. $x < -\frac{1}{2}, x > 1$. ב. $x = -\frac{1}{2}, 1$. ג. $(-2, 0)$.

ד. מתקבל: $y' = \frac{-3}{(2x+1)(x-1)} < 0$.

36 ב. $x > 1, e^{-4} < x < e^{-1}$.

ג. i. 2 נקודות והן: $(e^{-2}, 0)$, $(1, 0)$. הנקודה שבה: $x = 0$ לא קיימת עקב ת.ה.

ii. $x \neq 1, x > e^{-2}$. ד. III – בראשית הצירים יש חור ולא אסימפטוטה.

שאר הנתונים כפי שהתקבלו בסעיפים הקודמים.

37 א. $x > 0$. ב. $(e^{-\sqrt{3}}, 0)$, $(1, 0)$, $(e^{\sqrt{3}}, 0)$. ג. $\min(e, -2)$, $\max(e^{-1}, 2)$.

ה. $(1, 0)$, $(e^2, 2)$, $(e^{-2}, -2)$.

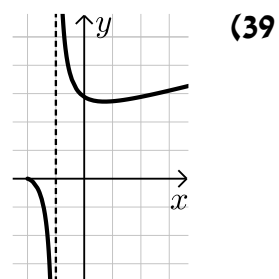
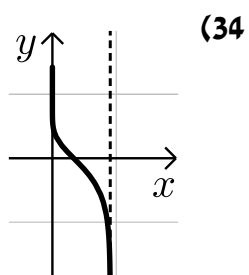
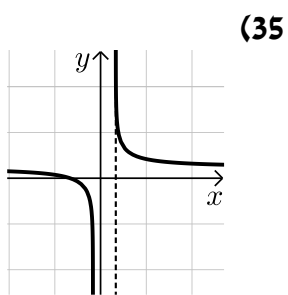
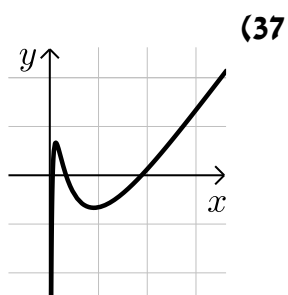
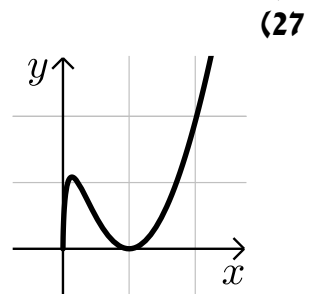
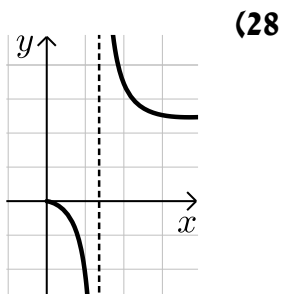
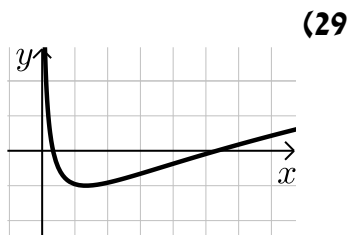
38 א. $x = e$. ב. מתקבל: $y' = \frac{-e}{x(x+e)} < 0$. ג. $y = -\frac{1}{2e}x + \ln 2$.

39 א. i. $x > -a, x \neq 1 - a$. ii. $(e - a, e)$. iii. $(0, \frac{a}{\ln a})$.

iv. $x = 1 - a$. ב. $a = 2$. ד. $k < e$.

40 א. i. $x > 0$. ii. $x = 0$. ב. $\min(1, 1)$. ג. עולה: $x > 1$, יורדת: $0 < x < 1$.

סקיצות לשאלות:



מתמטיקה 55004 לתלמידי לוגיסטיקה

פרק 16 - חשבון דיפרנציאלי - בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון)

תוכן העניינים

1. הסבר כללי על בעיות קיצון (ללא ספר)
2. בעיות קיצון יסודיות עם מספרים 248
3. בעיות קיצון בהנדסת המישור 249
4. בעיות קיצון בפונקציות וגרפים 251
5. בעיות קיצון כלכליות מסוג ראשון 253
6. בעיות קיצון כלכליות מסוג שני 259

בעיות קיצון יסודיות עם מספרים

שאלות

- (1) נתונים שלושה מספרים שסכומם 24. המספר הראשון שווה למספר השני. מצאו מהם המספרים, אם ידוע שמכפלתם מקסימלית.
- (2) מצאו את המספר החיובי, שאם נוסיף לו את המספר ההופכי לו, הסכום המתקבל יהיה מינימלי.
- (3) נתונים שלושה מספרים שסכומם הוא 36. ידוע שמספר אחד זהה לשני.
 א. מה צריכים להיות שלושת המספרים כדי שמכפלתם תהיה מקסימלית?
 ב. כיצד תשתנה התוצאה אם מספר אחד יהיה גדול פי 2 מהשני במקום שווה לו?
 ג. באיזה מקרה תהיה מכפלה גדולה יותר?
- (4) x ו- y הם שני מספרים המקיימים $x + 6y = 60$.
 א. הביעו את y באמצעות x .
 ב. מה צריכים להיות המספרים x ו- y , כדי שמכפלת ריבועיהם תהיה מקסימלית?
 ג. מהי המכפלה הנ"ל?

תשובות סופיות

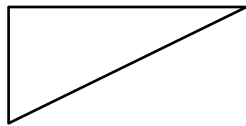
- (1) 8,8,8
- (2) 1
- (3) א. 12, 12, 12 ב. 8, 12, 16 ג. מקרה א'.
- (4) א. $y = 10 - \frac{x}{6}$ ב. $x = 30, y = 5$ ג. $M = 22500$

בעיות קיצון בהנדסת המישור

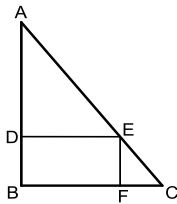
שאלות



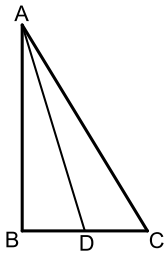
- 1) אדם מתכנן לבנות מרפסת בביתו ורוצה להציב מעקה סביב המרפסת. שטח המרפסת המתוכנן הוא 24 מ"ר. מחיר מעקה בחזית המרפסת (BC) הוא 120 ₪ למטר, ומחיר מעקה בצדי המרפסת הוא 40 ₪ למטר. מה צריכים להיות ממדי המרפסת, כדי שמחיר המעקה יהיה מינימלי?



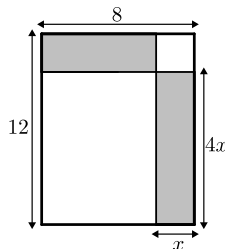
- 2) במשולש ישר זווית סכום אורכי הניצבים הוא 12 ס"מ. מה צריך להיות אורך כל ניצב, כדי ששטח המשולש יהיה מקסימלי?



- 3) במשולש ישר זווית ABC ($\angle B = 90^\circ$) הנקודה E נמצאת על היתר AC, כך שהמרובע EDBF הוא מלבן. נתון: $AB = 20$ ס"מ, $BC = 16$ ס"מ. מצאו את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.



- 4) במשולש ישר הזווית ABC ($\angle B = 90^\circ$), AD הוא תיכון לניצב BC. ידוע כי סכום אורכי הניצבים הוא 20 ס"מ. מצאו מה צריכים להיות אורכי הניצבים, עבורם אורך התיכון AD יהיה מינימלי.



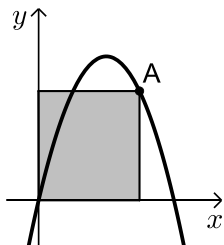
- 5) נתון מלבן שאורכי צלעותיו הם 8 ס"מ ו-12 ס"מ, כמתואר באיור. מקצים קטעים באורכים של x ו- $4x$ על צלעות המלבן, כך שנוצרים המלבנים המקווקווים. מצאו את x עבורו סכום שטחי המלבנים הוא מינימלי.

תשובות סופיות

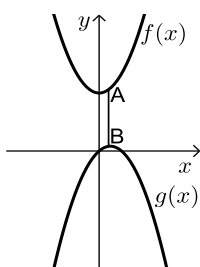
- (1) 4.6
- (2) א. 6 ס"מ ו-6 ס"מ ב. 18 סמ"ר ג. $8.48 \approx 6\sqrt{2}$ ס"מ.
- (3) 80 סמ"ר = S .
- (4) 4 ס"מ, 16 ס"מ.
- (5) $x = 2.75$

בעיות קיצון בפונקציות וגרפים

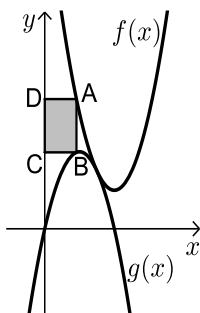
שאלות



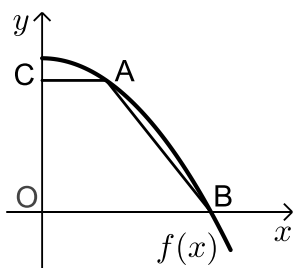
- (1) נתונה הפונקציה $f(x) = 6x - x^2$. מנקודה A שעל הפונקציה ברביע הראשון הורידו אנכים לצירי השיעורים כך שנוצר מלבן כמתואר בשרטוט. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



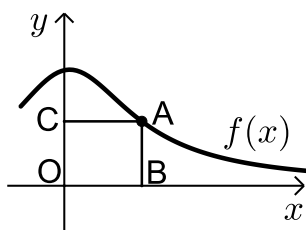
- (2) נתונות הפונקציות: $f(x) = x^2 + 12$ ו- $g(x) = 2x - x^2$ כמתואר: הנקודות A ו-B נמצאות בהתאמה על הגרפים של הפונקציות: $f(x)$ ו- $g(x)$, כך שהקטע AB מקביל לציר ה-y. מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.



- (3) באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = x^2 - 8x + 18$ ו- $g(x) = -x^2 + 4x$. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$, כך שהקטע AB מקביל לציר ה-y. מעבירים אנכים מהנקודות A ו-B לציר ה-y כך שנוצר מלבן (המסומן). נסמן את שיעור ה-x של הנקודה A ב-t. א. הביעו באמצעות t את שטח המלבן המסומן. ב. מצאו את ערכו של t עבורו שטח המלבן הוא מקסימלי. ג. מה יהיה שטח המלבן במקרה זה?



- (4) נתונה הפונקציה $f(x) = 36 - x^2$. על גרף הפונקציה ברביע הראשון מסמנים נקודה A. מהנקודה A מעבירים ישר, המקביל לציר ה-x, שחותך את ציר ה-y בנקודה C. הנקודה B היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x ו-O ראשית הצירים. א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי ששטח הטרפז ABOC יהיה מקסימלי? ב. מה יהיה שטח הטרפז במקרה זה?

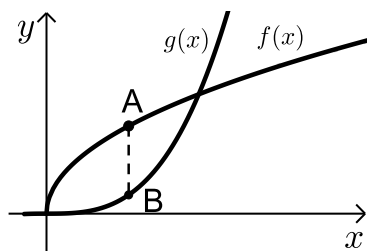


(5) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x+12}{x^2+3}$, בתחום $x \geq 0$.

נקצה נקודה A על גרף הפונקציה וממנה נוריד אנכים לצירים, כך שנוצר המלבן ABCO, כמתואר באיור.

א. מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, עבורם שטח המלבן יהיה מקסימלי.

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, עבורם שטח המלבן יהיה מינימלי בתחום הנ"ל.



(6) נתונות הפונקציות $f(x) = 2\sqrt{x}$ ו- $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1$.

את הנקודה A שעל $f(x)$ חיברו עם הנקודה

B, שנמצאת מתחתיה על $g(x)$ כך שהקטע

AB מקביל לציר ה-y.

מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי

שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?

תשובות סופיות

(1) A(4,8)

(2) A(0.5,12.25)

(3) א. $S = 2t^3 - 12t^2 + 18t$

(4) א. A(2,32) ב. $S = 128$

(5) א. A(2,2) ב. A(0,4)

(6) A(1,2)

ג. $S = 8$

ב. $t = 1$

שלבי עבודה

- נגדיר את אחד הגדלים בשאלה כ- x .
- נבטא את שאר הגדלים בשאלה באמצעות x .
- נבנה פונקציה שמבטאת את מה שרצינו שיהיה מינימלי/מקסימלי.
- נגזור את הפונקציה, נשווה לאפס ונחלץ ערך/ערכי ה- x .
- נוודא שערך ה- x מסעיף 4 הוא אכן מינימום/מקסימום באמצעות " y (או טבלה).
- ננסח את התשובה לשאלה המקורית.

בעיות קיצון כלכליות מסוג ראשון

שאלות

1) כאשר חברת 'יוטבתה' מוכרת x ליטר שוקו ליום, היא יכולה לקבל מחיר של $p(x) = -\frac{1}{4}x + 10$ שקל לליטר.

- מהו מחיר ליטר אחד, אם הכמות שנמכרת ביום היא 4 ליטר?
- מהו מחיר ליטר אחד, אם הכמות שנמכרת ביום היא 12 ליטר?
- מהי הכמות הנמכרת ביום, אם המחיר הוא 6 ₪ לליטר?
- שרטטו את הגרף של פונקציית הביקוש, ומצאו את תחום ההגדרה שלה.
- פונקציית הביקוש הנתונה מתארת את מחיר המוצר, כפונקציה של הכמות הנמכרת ממנו. שנו את נוסחת הפונקציה, כך שהיא תתאר את הכמות הנמכרת מהמוצר, כפונקציה של מחירו.

2) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -0.6x + 120$.

- מצאו את פונקציית הפדיון ואת התחום שלה.
- אם $x = 20$, מהו מחיר המוצר ומהו הפדיון?
- אם המחיר הוא 12 ₪, מהו הפדיון?

3) פונקציית הפדיון של מוצר מסוים היא $R(x) = -0.08x^2 + 40x$.

- מהו התחום של פונקציית הפדיון?
- שרטטו את הגרף של פונקציית הפדיון.
- מצאו את פונקציית הביקוש ושרטטו את הגרף שלה.

4) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -0.4x + 100$.

- מצאו את תחום הפונקציה.
- מצאו את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון הממוצע.
- מצאו את פונקציית הפדיון השולי.
- לאיזה ערך של x יתקבל פדיון מקסימלי, ומהו?

5) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -6x^2 + 240x + 1800$.

- מצאו את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון השולי.
- אם $x = 40$, האם כדאי להגדיל את הייצור?
- מתי יהיה הפדיון מקסימלי, ומהו?

6 פונקציית הביקוש של מוצר מסוים נתונה ע"י $Q(x) = 10x - \frac{x^2}{5}$.

- א. מצאו את המחיר, הנותן את הפדיון המקסימלי.
 ב. מהו הביקוש במקרה זה?
 ג. מהו הביקוש השולי בנקודת המחיר שמצאנו? מה משמעותו?

7 פונקציית ההוצאות של יצרן, המייצר x קפה ביום, היא $C(x) = 5x + 150$.

- א. שרטטו גרף של פונקציית ההוצאות. מהן ההוצאות הקבועות?
 ב. מצאו כמה ק"ג קפה מייצר היצרן, אם ההוצאות הן 1,000 ₪.
 ג. מהן ההוצאות, אם מייצרים 20 ק"ג קפה ביום?
 ד. מצאו את פונקציית ההוצאה השולית.

8 פונקציית העלות, של יצרן כובעים, היא $TC(x) = 0.04x^2 + 10x + 400$ שקל ליום.

- א. חשבו את העלות הממוצעת ליום, אם הוא מייצר 40 כובעים.
 ב. כמה כובעים עליו לייצר, כדי שהעלות הממוצעת תהיה מינימלית?
 ג. חשבו את העלות השולית ליום, עבור $x = 100$. איזו מסקנה ניתן להסיק?

9 פונקציית העלות של מוצר מסוים היא $C(x) = 0.004x^2 + 10x + 200$.

- א. חשבו את העלות, כאשר $x = 100$ וכאשר $x = 101$.
 ב. חשבו את העלות השולית, כאשר $x = 100$.
 ג. חשבו כמה תעלה יחידת מוצר נוספת, כאשר הייצור יעבור מ- $x = 100$ ל- $x = 101$, והשוו עם התוצאה של סעיף ב. מהי המסקנה?
 ד. מצאו האם קצב השינוי של העלות גדל או קטן.

10 ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = 100 - 0.06Q$,

ופונקציית עלות כוללת $TC(Q) = 200 + 4Q$.

- מהי הכמות, Q , שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
 מהו המקסימום במקרה זה?

11 ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = 20$,

ופונקציית עלות $TC(Q) = 300 + 2Q^2$.

- מהי הכמות שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
 מהו המקסימום במקרה זה?

12 ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = -0.15Q + 50$, ופונקציית עלות שולית $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$. מהי הכמות שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?

13 ליצרן פונקציית ביקוש $Q = \frac{5000 - 50P}{3}$, ופונקציית עלות $TC(Q) = 200 + 4Q$. מהי הכמות, Q , שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו? מהו המקסימום במקרה זה?

14 ליצרן פונקציית עלות שולית $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$. מצאו את פונקציית העלות, אם ידוע שכאשר הכמות המיוצרת היא $Q = 10$, אז העלות הכוללת היא 225 ₪.

15 ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהרווח המקסימלי מתקבל כאשר הפדיון השולי שווה להוצאה השולית. הסבר את המשמעות הגרפית.

ב. הוכיחו שאם מחיר המוצר קבוע, אז הרווח המקסימלי מתקבל כאשר ההוצאה שולית שווה למחיר המוצר.

16 $C(x)$ – פונקציית הוצאות, $C'(x)$ – הוצאות שוליות, $\frac{C(x)}{x}$ – הוצאות ממוצעות.

א. האם ייתכן שהוצאה שולית קבועה, למרות שהוצאה ממוצעת משתנה?

ב. האם ייתכן להפך?

ג. הוכיחו כי ההוצאה הממוצעת היא פונקציה עולה אם ורק אם ההוצאה השולית גדולה מן ההוצאה הממוצעת.

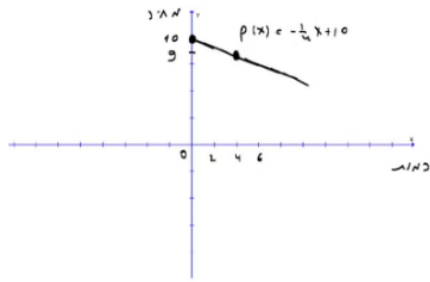
17 מפעל המייצר מוצר מסוים משתמש בשני גורמי הייצור. נסמן את מחירי גורמי הייצור, ליחידה, ב- p_1 וב- p_2 , בהתאמה. אם נשתמש ב- x יחידות מג"י אחד וב- y יחידות מג"י 2, המפעל מייצר $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ יחידות. תקציב המפעל A ₪.

א. הוכיחו כי באילוץ התקציב, הייצור מקסימלי

$$\frac{x}{y} = \frac{p_2^2}{p_1^2}$$

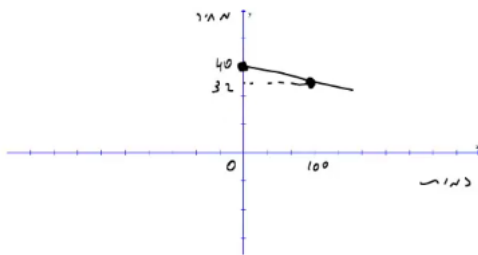
ב. חשבו x ו- y , עבורם הייצור מקסימלי, אם נתון: $p_1 = 100$ ₪, $p_2 = 100$ ₪, $A = 3,000$ ₪.

תשובות סופיות

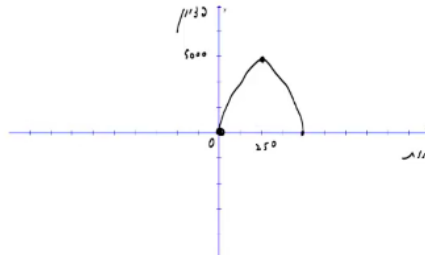


(1) א. 9 ב. 7 ג. 16 ה. $x(p) = 40 - 4p$ ד.

(2) א. $R(x) = -0.6x^2 + 120x$, בתחום: $x \geq 0$ ב. 2,160 ג. 2,160



(3) א. $x \geq 0$ ב. ג.



(4) א. $x \geq 0$ ב. פונקציית הפדיון: $R(x) = -0.04x^2 + 100x$

הפדיון הממוצע: $AR(x) = -0.4x + 100$, $x > 0$ ג. $R'(x) = -0.08x + 100$

ד. 1,250; הפדיון המקסימלי: 62,500.

(5) א. פונקציית הפדיון: $R(x) = -6x^3 + 240x^2 + 1800x$

הפדיון השולי: $R'(x) = -18x^2 + 480x + 1800$. ב. לא.

ג. 30; הפדיון המקסימלי: 108,000.

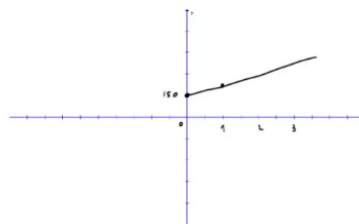
(6) א. $33\frac{1}{3}$ ב. $Q\left(33\frac{1}{3}\right) = 10 \cdot 33\frac{1}{3} - \frac{33\frac{1}{3}^2}{5}$

ג. $-3\frac{1}{3}$; העלאת המחיר ביחידה אחת – תקטין את הביקוש ב-3.33 יח', בערך.

(7) א. ההוצאות הקבועות הן הוצאות המפעל,

גם כאשר הוא אינו מייצר. ב. 170

ג. 250 ד. $MC(x) = 5$



(8) א. 21.6 ב. 100 ג. 18 ש; אם המפעל יעלה את הייצור ביחידה אחת, מ-100 ל-101, העלות הכוללת שלו תגדל ב-18 ש בערך.

(9) א. $C(100) = 1240$, $C(101) = 1250.804$ ב. 10.8

ג. בערך הסכום שיעלה למפעל לייצר יחידה נוספת. ד. גדל.

(10) הכמות: 800, המקסימום: 38,200.

(11) הכמות: 5, המקסימום: -250.

25 (12)

(13) הכמות : 800, המקסימום : 38,200.

$$TC(Q) = 0.02Q^3 + 20Q + 5 \quad (14)$$

(15) שאלת הוכחה.

(16) א. כן. ב. לא. ג. שאלת הוכחה.

(17) א. שאלת הוכחה. ב. $x = 4, y = 3600$.

בעיות קיצון כלכליות מסוג שני

שאלות

- (1) יצרן מכונות כביסה מוכר 500 מכונות בשבוע, במחיר של \$225 למכונה. עלות הייצור למכונת כביסה אחת היא \$125. סקר שוק מראה, שעל כל הוזלה של \$5 במחיר – מספר המכונות הנמכרות בשבוע עולה ב-50.

א. מהו המחיר שהיצרן צריך לקבוע למכשיר, על מנת להגיע לרווח מקסימלי?
 ב. מהן ההוצאות במצב זה? האם בהכרח אלו ההוצאות המינימליות? נמקו.
- (2) מחיר חבילת זמן אוויר בחברת סלולר הוא 100 ₪ ל-200 דקות. בסקר שוק שערכה החברה התגלה, כי על כל הוזלה של 2 ₪ בתשלום, לקוחות מנצלים 10 דקות זמן אוויר נוספות.

לאור תוצאות הסקר, איזו חבילה (כלומר, מה המחיר שיש לקבוע ולכמה דקות) כדאי לחברה להציע ללקוחותיה, כדי להגיע להכנסה מקסימלית?
- (3) אמן מייצר תכשיטים, בעלות של 30 ₪ עבור כל תכשיט. הוא מצליח למכור 100 תכשיטים, כאשר מחירם 40 ₪ לתכשיט. על כל עלייה של 2 ₪ במחיר, הוא מוכר 4 תכשיטים פחות.

א. מצאו כמה תכשיטים האמן צריך לייצר, כדי שהרווח שלו יהיה מקסימלי.
 ב. באיזה מחיר ימכור האמן כל תכשיט במצב זה?
 ג. מהי עלות הייצור של האמן (עבור כל התכשיטים) במצב זה?
- (4) חברת 'טיול נעים' משכירה אוטובוס ל-30 תיירים, שכל אחד מהם משלם 100 דולר. על כל תייר נוסף שמצטרף, החברה מסכימה להוריד את התשלום לכל אחד מהתיירים, בשני דולר.

מה צריך להיות מספר התיירים, כדי שלחברה יהיה הרווח הגדול ביותר?
- (5) מחיר שליחת SMS ברשת 'סלקום' הוא 50 אג', ומספר ה-SMS החודשי הממוצע הוא 200.

על כל 5 אג' ש'סלקום' מעלה – יורד מספר ה-SMS החודשי הממוצע בעשר. מצאו מה צריך להיות מחיר שליחת SMS, כדי שהכנסתה של 'סלקום' תהיה מקסימלית.
- (6) קולנוע 'חן' מוכר כל שבוע 60 כרטיסים לסרטי תלת-מימד במחיר של 45 ₪ לכרטיס. כל הורדה של מחיר הכרטיס בחצי שקל גורמת למכירת שני כרטיסים נוספים בשבוע.

מה צריך להיות מחיר הכרטיס, כדי שהכנסתו של בית הקולנוע תהיה בגדולה ביותר? מצאו גם מהי ההכנסה המקסימלית.

- (7) הייצור של בובת 'בוב ספוג' עולה לחברת 'ניקולדיאון' 25 ₪. אם החברה מוכרת את הבובה ב-45 ₪, היא מצליחה למכור 200 בובות ליום. על כל חצי שקל שהחברה מורידה ממחיר הבובה, היא מצליחה למכור 10 בובות נוספות ליום. מהו הרווח היומי המקסימלי של החברה?
- (8) חברת 'אופיס דיפו' רוכשת מספר מסוים של מוצרים ב-800 ₪. 5 מהמוצרים היא מוכרת ברווח של 20% לכל מוצר, ואת שאר המוצרים היא מוכרת ברווח של 2 ₪ לכל מוצר. הוכיחו שהרווח של החברה, בעסקה כזו, הוא לפחות 70 ₪.
- (9) חברת BMX מוכרת 300 זוגות אופניים בחיר של 500 ₪ לזוג אופניים. לכל x זוגות אופניים נוספים שהיא מוכרת, היא מורידה – את מחירם בלבד – ב- $2x$ ₪ לזוג אופניים, ואילו את מחירם של 300 הזוגות הראשונים היא מורידה רק ב- x ₪ לזוג אופניים. מה מספר זוגות האופניים שעל החברה למכור, על מנת שהכנסתה תהיה מקסימלית?

תשובות סופיות

- (1) א. 200 ב. \$93,750 ; לא, כי תמיד ניתן לייצר פחות וכך להקטין הוצאות.
- (2) 70 ₪ ל-350 דקות.
- (3) א. 60 ב. 60 ג. 1,800 ₪
- (4) 40
- (5) 75 אג'.
 (6) מחיר הכרטיס : 30 ₪, ההכנסה המקסימלית : 3,600 ₪.
- (7) 4,500 ₪.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) 350

מתמטיקה 55004 לתלמידי לוגיסטיקה

פרק 17 - פונקציות של שני משתנים - מבוא כללי

תוכן העניינים

- 1. מבוא לפונקציה של שני משתנים 261
- 2. קווי גובה לפונקציה של שני משתנים 263
- 3. משטחים מפורסמים 265
- 4. נספח - משטחים ממעלה שנייה 267

מבוא לפונקציה של שני משתנים

שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. מצאו את תחום ההגדרה D של הפונקציה.

ב. שרטטו סקיזה של הקבוצה D .

$$f(x, y) = \sqrt{5 - x^2 - y^2} + \ln(4y - x^2) \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \sqrt{-x^2 + y^2 + 1} + \frac{x+y}{x-y} \quad (3)$$

$$g(x, y) = \sqrt{x+4y} + \sqrt{x-4y} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x+4y}} + \frac{1}{\sqrt{x-4y}} \quad (5)$$

$$h(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y+4}} \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy} \sqrt{\ln \frac{4}{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4} \quad (7)$$

$$z(x, y) = \frac{4}{\sqrt{1 - |x| - |y|}} \quad (8)$$

$$z(x, y) = \ln \left(\frac{x-4y}{x+4y} \right) \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln [x \ln(y - 4x)] \quad (10)$$

$$u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x+4}} + \frac{1}{\sqrt{y-1}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \quad (11)$$

(ענו על סעיף א בלבד)

תשובות סופיות

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x^2 \leq y \leq \sqrt{5-x^2} \right\} \quad (1)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4, x > 0 \right\} \quad (2)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 - y^2 \leq 1, y \neq x \right\} \quad (3)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x \leq y \leq \frac{1}{4}x \right\} \quad (4)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (5)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -4 \leq y \leq x^2 - 4, x \geq 0 \right\} \quad (6)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 4 \right\} \quad (7)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid |x| + |y| < 1 \right\} \quad (8)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x < y < -\frac{1}{4}x \text{ or } -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (9)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid [x < 0 \text{ and } 4x < y < 4x + 1] \text{ or } [x > 0 \text{ and } y > 4x + 1] \right\} \quad (10)$$

$$D = \left\{ (x, y, z) \mid x > -4, y > 1, z > 0 \right\} \quad (11)$$

קווי גובה לפונקציה של שני משתנים

שאלות

בשאלות 1-6, מצאו תחום הגדרה, ושרטטו אותו ואת מפת קווי הגובה/רמה.

$$f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 7-10 שרטטו מפת קווי גובה :

$$f(x, y) = (x-1)^2 + (y+3)^2 \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x-y} \quad (8)$$

$$f(x, y) = 2 \ln x + \ln y \quad (9)$$

$$f(x, y) = \min\{3x, y\} \quad (10)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 11-13, שרטטו את קו הגובה k :

$$(k = 0, 4) \quad f(x, y) = (x - y)^2 \quad (11)$$

$$(k = 0, 2) \quad f(x, y) = \min\{y - x^2, x + y\} \quad (12)$$

$$(k = 1) \quad f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 3x - y - 3 & x^2 \geq y \\ -x^2 + 3x + y - 3 & x^2 < y \end{cases} \quad (13)$$

$$14) \text{ נתונה הפונקציה } f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y & x \leq 1 \\ 2x + y & x > 1 \end{cases}$$

- א. שרטטו את קו הגובה $f(x, y) = 0$.
- ב. לאילו ערכי C קו הגובה $f(x, y) = C$ הוא קו רציף?
ציירו את קו הגובה במקרה זה.

הערות

- * בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.
- ** קווי גובה = קווי רמה = עקומות אדישות = עקומות שוות ערך.

תשובות סופיות

- (1) $x \neq 0$, המישור ללא ציר ה- y .
- (2) $x > 0, y > 0$, הרביע הראשון ללא הצירים.
- (3) כל המישור.
- (4) $x^2 + y^2 \leq 1$, עיגול היחידה.
- (5) $y < x^2$
- (6) $y \geq 0$, חצי המישור העליון.

לפתרונות מלאים ושרטוטים של שאר השאלות, היכנסו לאתר GooL.co.il

משטחים מפורסמים

שאלות

זהו ושרטטו את המשטחים בשאלות 1-3 :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1 \quad (1)$$

$$z = 5x^2 + 1.25y^2 \quad (2)$$

$$20x^2 + 45y^2 = 180 + 36z^2 \quad (3)$$

זהו ושרטטו את המשטחים הבאים :

$$z = 4x^2 + y^2 + 1 \quad \text{א.}$$

$$z = 3 - x^2 - y^2 \quad \text{ב.}$$

זהו כל אחד מהמשטחים הבאים :

$$25x^2 + 100y^2 + 4z^2 = 100 \quad \text{א.}$$

$$25x^2 + 4y^2 - 50x - 16y - 100z + 41 = 0 \quad \text{ב.}$$

$$x^2 + 4y^2 - 4z^2 + 80z - 404 = 0 \quad \text{ג.}$$

מצאו את החיתוך בין המשטח $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ לבין המשטח $z = 12$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

ענו על הסעיפים הבאים :

$$\text{א. זהו את המשטח } 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 16x - 4y + 40z + 206 = 0$$

ב. מצאו את נקודות החיתוך של המשטח הנייל עם הישר

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+14}{2}$$

מצאו את החיתוך בין שני המשטחים $x^2 + y^2 + (z-10)^2 = 24$,

$$\text{ו- } x^2 + y^2 + z^2 = 64$$

הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

9) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. זהו את המשטח $36z^2 + 4x^2 - 9y^2 = 36$ ושרטטו אותו.
 ב. רשמו הצגה פרמטרית של שני ישרים שאינם נמצאים באותו מישור, ושנמצאים כולם על המשטח מסעיף א'.

• להלן נספח עם סיכום של כל המשטחים הנפוצים.

תשובות סופיות

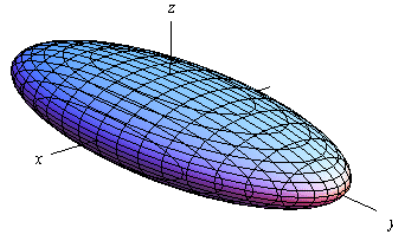
- 1) אליפסואיד.
 2) פרבולואיד אליפטי הנפתח כלפי מעלה.
 3) היפרבולואיד חד יריעתי.
 4) א. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,1)$ ונפתח כלפי מעלה.
 ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,3)$ ונפתח כלפי מטה.
 5) א. אליפסואיד.
 ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(1,2,0)$ ונפתח כלפי מעלה.
 ג. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו בנקודה $(0,0,10)$.
 6) החיתוך הוא מעגל $x^2 + y^2 = 25$ שמרכזו בנקודה $(0,0,12)$.
 7) א. ספירה שמרכזה $(4,1,-10)$ ורדיוסה $\sqrt{14}$.
 נקודות החיתוך הן $A(7,0,-12)$, $B(\frac{59}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{112}{9})$.
 8) החיתוך הוא המעגל $x^2 + y^2 = 15$ שמרכזו בנקודה $(0,0,7)$.
 9) א. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו על ציר ה- y .
 ב. $\ell_1 : (x, y, z) = (3t, 2t, 1)$ $\ell_2 : (x, y, z) = (3, 2t, t)$

נספח – משטחים ממעלה שנייה

אליפסואיד

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

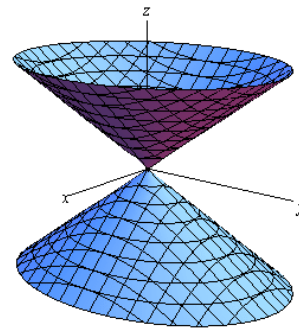
תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a=b=c$, נקבל **כדור** עם רדיוס a והחתכים הנ"ל הם מעגלים.



חרוט אליפטי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

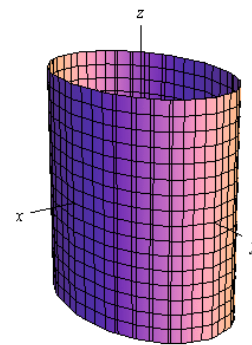
תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות. * מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.



גליל אליפטי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא $x^2 + y^2 = r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים. * מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע

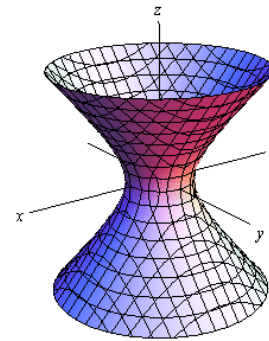


היפרבולואיד חד-יריעתי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

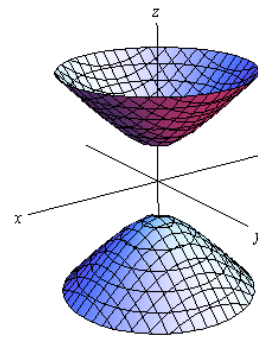
* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים

היפרבולואיד דו-יריעתי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

תיאור: למשטח זה אין חתך במישור xy ; החתכים במישורים מקבילים למישור xy , החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים

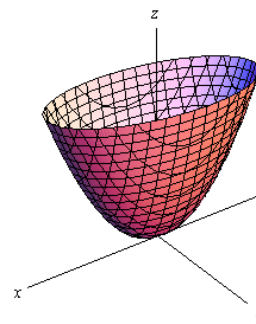
פרבולואיד אליפטי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$



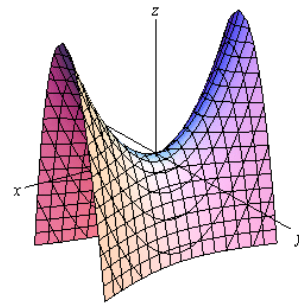
$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- x ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- y . החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

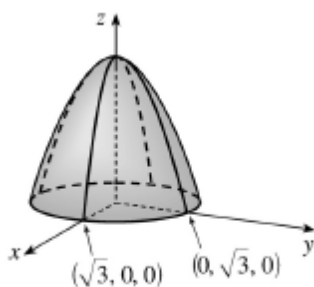
* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$

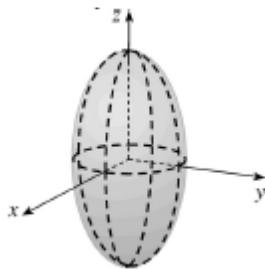
פרבולואיד היפרבולי



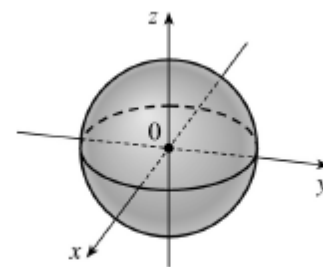
דוגמאות שונות



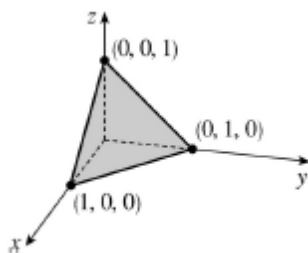
$$z = 3 - x^2 - y^2$$



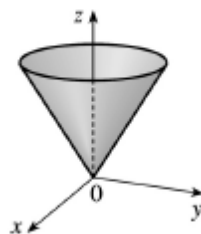
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$



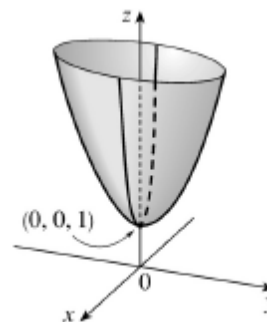
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



$$x + y + z = 1$$



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$z = 4x^2 + y^2 + 1$$

נוסחאות - גבולות

	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow \infty$
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty} = 0$	$\frac{1}{0^+} = \infty, \frac{1}{0^-} = -\infty$	$\frac{1}{\infty} = 0$
$y = e^x$	$e^{-\infty} = 0$	$e^0 = 1$	$e^\infty = \infty$
$y = \ln x$	---	$\ln(0^+) = -\infty$	$\ln(\infty) = \infty$
$y = a^x, a > 1$	$a^{-\infty} = 0$	$a^0 = 1$	$a^\infty = \infty$
$y = a^x, 0 < a < 1$	$a^{-\infty} = \infty$	$a^0 = 1$	$a^\infty = 0$
$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	e	(from right) 1	e
$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	---	e	1
$y = \sqrt{x}$	---	$\sqrt{0^+} = 0$	$\sqrt{\infty} = \infty$
$y = \sqrt[3]{x}$	$-\infty$	$\sqrt[3]{0} = 0$	$\sqrt[3]{\infty} = \infty$

Defined Limits:

$\infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty(-\infty) = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad \infty \pm a = \infty, \quad \infty \cdot (\pm a) = \pm\infty, \quad \infty / (\pm a) = \pm\infty$

Undefined Limits:

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$

מתמטיקה 55004 לתלמידי לוגיסטיקה

פרק 18 - פונקציות של שני משתנים - נגזרות חלקיות

תוכן העניינים

- 271 1. נגזרות חלקיות מסדר ראשון
- 273 2. נגזרות חלקיות מסדר שני

נגזרות חלקיות מסדר ראשון

שאלות

בשאלות 1-6 חשבו את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה הנתונה:

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2) \qquad f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4) \qquad f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3) \text{ (רק } f_x \text{)}$$

$$f(x, y, z) = xy^2z^3 \quad (6) \qquad f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

$$z(x, y) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \quad \text{נתון:} \quad (7)$$

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} \quad \text{הוכיחו כי}$$

$$f(x, y, z) = e^x \left(y^2 - \frac{1}{z} \right) \quad \text{נתון:} \quad (8)$$

$$\text{חשבו: } \frac{\partial f}{\partial x} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right), \frac{\partial f}{\partial y} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right), \frac{\partial f}{\partial z} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right)$$

הערת סימון

$$f = f(x, y) \Rightarrow f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 ; f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$$

תשובות סופיות

$$f_y = -6x^2y + 3 \qquad f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2 \quad (1)$$

$$f_y = \frac{x^5}{y} \qquad f_x = 5x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f_x = 2x \frac{y^4(\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2 \qquad f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3 \quad (4)$$

$$f_y = \frac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{(x + y^2)^2} \qquad f_x = \frac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{(x + y^2)^2} \quad (5)$$

$$f_z = 3xy^2z^2 \qquad f_y = 2xyz^3 \qquad f_x = y^2z^3 \quad (6)$$

(7) שאלת הוכחה.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right) = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right) = -2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right) = 4 \quad (8)$$

הערת סימון

	$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1$	$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$
$f = f(x, y) \Rightarrow$	$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11}$	$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22}$
	$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12}$	$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21}$

נגזרות חלקיות מסדר שני

שאלות

בשאלות 1-13 חשבו את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני של הפונקציה הנתונה:

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3(1-y)(x+y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = xy(x-y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = (x-9)(2y-6)(4x-3y+12) \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy}(x+y) \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x+y}(x^2 + y^2) \quad (8)$$

$$f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)} \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2) \quad (10)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \quad (11)$$

$$f(x, y) = \ln(\sqrt[3]{x^2 + y^2}) \quad (12)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (13)$$

14) חשבו $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x, y) = \ln(xy - x^2 - y^2)$.

15) חשבו $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$.

16) חשבו $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

17) נתון: $f(x, y) = \frac{x^2}{\ln y + x}$

חשבו: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, e)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, e)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, e)$

הערת סימון

$f = f(x, y) \Rightarrow \begin{array}{ll} f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 & f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\ f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} & f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\ f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} & f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21} \end{array}$

תשובות סופיות

$$f_y = -2x^2y + 10 \quad f_{xx} = 8 - 2y^2 \quad f_x = 8x - 2xy^2 + 4 \quad (1)$$

$$f_{yx} = -4xy \quad f_{xy} = -4xy \quad f_{yy} = -2x^2$$

$$f_y = \frac{x^4}{y} \quad f_{xx} = 12x^2 \ln y \quad f_x = 4x^3 \ln y \quad (2)$$

$$f_{yx} = \frac{4x^3}{y} \quad f_{xy} = \frac{4x^3}{y} \quad f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2}$$

$$f_y = 3y^2 - 6x \quad f_{xx} = 6x \quad f_x = 3x^2 - 6y \quad (3)$$

$$f_{yx} = -6 \quad f_{xy} = 6 \quad f_{yy} = 6y$$

$$f_y = 3y^2 + 3 - 3x - 6y \quad f_{xx} = 6x \quad f_x = 3x^2 + 3 - 3y \quad (4)$$

$$f_{xy} = -3 \quad f_{yy} = 6y - 6$$

$$f_y = x^2 - 2xy \quad f_{xx} = 2y \quad f_x = 2xy - y^2 \quad (5)$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 2x - 2y \quad f_{yy} = -2x$$

$$f_x = 2[8xy - 3y^2 \cdot 1 - 24x - 0 + 57y \cdot 1 + 72 + 0 + 0] \quad (6)$$

$$f_y = 2[4x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2y - 0 - 54y + 57x \cdot 1 + 0 + 27 + 0]$$

$$, f_{yy} = 2[0 - 6x \cdot 1 - 54 + 0 + 0] \quad f_{xx} = 2[8y - 0 - 24]$$

$$f_{xy} = 2[8x \cdot 1 - 6y - 0 + 57 + 0]$$

$$f_y = e^{xy}(x^2 + xy + 1) \quad f_x = e^{xy}(xy + y^2 + 1) \quad (7)$$

$$f_{xx} = e^{xy} \cdot y(xy + y^2 + 1) + (y + 0 + 0) \cdot e^{xy}$$

$$f_{yy} = e^{xy} \cdot x(x^2 + xy + 1) + (0 + x) \cdot e^{xy}$$

$$f_{xy} = e^{xy} \cdot x(xy + y^2 + 1) + (x + 2y) \cdot e^{xy}$$

$$f_y = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2y) \quad f_x = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) \quad (8)$$

$$f_{xx} = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) + (2x + 2)e^{x+y}$$

$$f_{yy} = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2y) + (2y + 2)e^{x+y}$$

$$f_{xy} = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) + 2y \cdot e^{x+y}$$

$$f_y = e^{-x^2-y^2}(4y - 2x^2y - 4y^3) \quad f_x = e^{-x^2-y^2}(2x - 2x^3 - 4xy^2) \quad (9)$$

$$f_{xx} = e^{-x^2-y^2}(-2x)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (2 - 6x^2 - 4y^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{yy} = e^{-x^2-y^2}(-2y)(4y - 2x^2y - 4y^3) + (4 - 2x^2 - 12y^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{xy} = e^{-x^2-y^2}(-2y)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (-4x \cdot 2y)e^{-x^2-y^2}$$

$$f_y = \frac{2y}{1+x^2+y^2} \qquad f_x = \frac{2x}{1+x^2+y^2} \quad (10)$$

$$f_{yy} = \frac{2 \cdot (1+x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2} \qquad f_{xy} = \frac{2y \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \qquad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \qquad f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad (11)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \qquad f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3} \qquad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3} \qquad f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3} \quad (12)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3} \qquad f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$f_y = xz \qquad f_{xz} = y \qquad f_{xy} = z \qquad f_{xx} = 0 \qquad f_x = yz \quad (13)$$

$$f_{zx} = y \qquad f_z = xy \qquad f_{yz} = x \qquad f_{yy} = 0 \qquad f_{yx} = z$$

$$f_{zz} = 0 \qquad f_{zy} = x$$

$$-2 \quad (14)$$

$$-1 \quad (15)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (16)$$

$$\frac{4}{e^2} \left(1 + \frac{1}{e}\right) \quad (17)$$

16

מתמטיקה 55004 לתלמידי לוגיסטיקה

פרק 19 - פונקציות של שני משתנים - קיצון ואוכף של פונקציה

תוכן העניינים

1. קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים 277

קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-7,

מצאו נקודות קריטיות וסווגו אותן למקסימום, מינימום או אוכף:

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

$$z = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (8)$$

מצאו את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

(9) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשבו את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(10) יצרן מוכר מחשבוני, בארץ ובסין.

עלות הייצור של מחשבון בארץ היא 6\$ ועלות ייצור מחשבון בסין היא 8\$.

מנהל השיווק אומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ, ואת הביקוש Q_2

למחשבון בסין, על ידי: $Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$, $Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$.

כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבוני, P_1 ו- P_2 ,

על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

11 נתונה הפונקציה $f(x, y) = x^2 + y^2 + axy$.

א. הוכיחו שהנקודה $(0, 0)$, היא נקודה קריטית.

ב. בעזרת מבחן הנגזרת השנייה, קבעו עבור אילו ערכים של a , הנקודה מסעיף א' היא מקסימום, מינימום, אוסף, או שלא ניתן לדעת.

תשובות סופיות

- 1) $(-0.5, 1)$ אוסף; $(1.5, -3)$ מינימום.
- 2) $(1, 2)$ מינימום; $(-1, -2)$ מקסימום; $(-1, 2)$, $(1, -2)$ אוסף.
- 3) $(0, 0)$ אוסף; $(1, 1)$ מינימום.
- 4) $(-1, -1)$, $(-1, 1)$ מינימום; $(1, 0)$ מקסימום; $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, 0)$ אוסף.
- 5) $(0, 2)$ מקסימום.
- 6) $(4, 4)$ מקסימום.
- 7) $(-0.5, 4)$ מקסימום.
- 8) $z = 4$, $z = 3$
- 9) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.
- 10) $P_1 = 10\$$, $P_2 = 12\$$ רווח מקסימלי 288\$.
- 11) א. שאלת הוכחה. ב. עבור $a = -2$, $a = 2$, לא ניתן לדעת; $a < -2$, $a > 2$ אוסף; $-2 < a < 2$ מינימום.

מתמטיקה 55004 לתלמידי לוגיסטיקה

פרק 20 - פונקציות של שני משתנים - קיצון של פונקציה תחת אילוץ (כופלי לגראנז)

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז)..... 279

קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

שאלות

מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציות בשאלות 1-4, בכפוף לאילוץ הנתון:

$$f(x, y) = x^2 + y^2; \quad 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2; \quad x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 4x + 6y; \quad x^2 + y^2 = 13 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^2 y; \quad x^2 + 2y^2 = 6 \quad (4)$$

$$\max \{xy\} \quad s.t. \quad x + 3y = 12 \quad (5)$$

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

$$\max \{2x + y\} \quad s.t. \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9, \quad x, y \geq 0 \quad (6)$$

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

$$\text{מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר } x + 3y = 12, \quad (7)$$

מצאו את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

$$\text{מבין כל הנקודות שעל העקומה } 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2, \text{ מצאו את הנקודות} \quad (8)$$

שמרחקהן מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחקן

מראשית הצירים הוא מקסימלי.

$$\text{מיושליה קונה בשוק } x \text{ ק"ג מלפפונים ו- } y \text{ ק"ג עגבניות.} \quad (9)$$

התועלת מצריכת הסל, (x, y) , נתונה על ידי $u(x, y) = \ln x + \ln y$.

מחיר ק"ג מלפפונים הוא 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.

מיושליה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$,

והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית.

נסחו ופתרו את בעיית מיושליה.

- 10** דני קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות.
 התועלת מצריכת הסל (x, y) נתונה על ידי $u(x, y) = xy$.
 מחיר ק"ג מלפפונים הוא 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.
 לדני תקציב של 12 ש"ח.
 נסחו ופתרו את בעיית דני.
- 11** עקומת התמורה בין מנגו, (x) , ואננס, (y) , היא $x^2 + y^2 = 13$.
 לדני תועלת $f(x, y) = 4x + 6y$.
 דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) (x, y) , על עקומת התמורה,
 המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס.
 נסחו ופתרו את הבעיה.
- 12** ליצרן פונקציית ייצור $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$.
 המחירים ליחידת K ו- L הם $P_K = 2, P_L = 1$.
 היצרן נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף (K^*, L^*) ,
 המביא למינימום את העלות.
 נסחו את בעיית היצרן (אל תפתרו).

תשובות סופיות

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) \quad \text{(1)}$$

$$\max(0, \pm 1) \quad \min(\pm 1, 0) \quad \text{(2)}$$

$$\max(2, 3) \quad \min(-2, -3) \quad \text{(3)}$$

$$\max(\pm 2, 1) \quad \min(\pm 2, -1) \quad \text{(4)}$$

$$\max(6, 2) \quad \text{(5)}$$

$$\max(9, 36) \quad \text{(6)}$$

$$(6, 2) \quad \text{(7)}$$

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) \quad \text{(8)}$$

$$\min(\sqrt{32}, \sqrt{8}) \quad \text{(9)}$$

$$\max(6, 2) \quad \text{(10)}$$

$$\max(2, 3) \quad \text{(11)}$$

$$\min\{2K + L\}; \quad \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100 \quad \text{(12)}$$

מתמטיקה 55004 לתלמידי לוגיסטיקה

פרק 21 - פונקציות של שני משתנים - קיצון מוחלט של פונקציה בקבוצה סגורה וחסומה

תוכן העניינים

1. קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה 282

קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה

שאלות

- (1) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של הפונקציה $f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור בצורת משולש שקודקודיו הם $(0, 5), (3, 0), (0, 0)$.
- (2) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של הפונקציה $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - 2x + 6y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור בצורת ריבוע שקודקודיו הם $(2, 0), (2, 2), (0, 2), (0, 0)$.
- (3) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של הפונקציה $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ בתחום R , כאשר R הוא העיגול $x^2 + y^2 \leq 4$.
- (4) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של הפונקציה $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור $R = \{(x, y) \mid x + y \geq -3, x \leq 0, y \leq 0\}$.
- (5) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של הפונקציה $f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, 3x \geq -y\}$.

תשובות סופיות

- | | |
|--------------------------------------|----------------------------------|
| (1) מקסימום מוחלט 7. | מינימום מוחלט -11. |
| (2) מקסימום מוחלט 3. | מינימום מוחלט -1. |
| (3) מקסימום מוחלט $\frac{33}{4}$. | מינימום מוחלט $-\frac{1}{4}$. |
| (4) מקסימום מוחלט 6. | מינימום מוחלט -1. |
| (5) מקסימום מוחלט $1 + 6\sqrt{10}$. | מינימום מוחלט $1 - 6\sqrt{10}$. |