מתמטיקה 1

תוכן העניינים

1. חזרה כללית - מבוא לאלגברה 1
2. חזרה כללית - משוואות אלגבריות 47
3. חזרה כללית - אי שוויונים אלגבריים 69
4. חזרה כללית - חוקי החזקות והשורשים 85
5. חזרה כללית - משוואות ואי-שוויונים מעריכיים 95
6. חזרה כללית - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים 105
7. בעיות גדילה ודעיכה 121
8. הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות ..... (ללא ספר)
9. גבול של פונקציה 134
10. חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים 152
11. חשבון דיפרנציאלי - חישובי נגזרות של פונקציה - הרחבות 167
12. חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקציה 180
13. חשבון דיפרנציאלי - כלל לופיטל 203
14. חשבון דיפרנציאלי - מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה 210
15. חשבון דיפרנציאלי - בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון) 215
16. חשבון אינטגרלי - האינטגרל הכללי 228
17. חשבון אינטגרלי - האינטגרל המסוים וחישובי שטחים 235
18. חשבון אינטגרלי - פונקציה מעריכית, לוגריתמית וחזקה 263
19. נושאים נוספים - שיחזור פונקציה מהנגזרת שלה ..... (ללא ספר)
20. נושאים נוספים - רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים 281
21. פונקציות בשני משתנים - עקומות שוות ערך ונגזרות חלקיות 296

מתמטיקה 1

פרק 1 - חזרה כללית - מבוא לאלגברה

תוכן העניינים

1. מספרים מכוונים 1
2. חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים 5
3. סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים 7
4. שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים 8
5. כפל וחילוק שברים 14
6. חיבור וחיסור שברים 16
7. בעיות יסודיות באחוזים 20
8. חזרה על תבניות מספר 22
9. כינוס איברים 24
10. פישוט ביטויים על ידי פתיחת סוגריים 26
11. פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר 28
12. פירוק לגורמים של ביטויים אלגברים 30
13. פירוק הטרינום 33
14. שברים אלגברים 35
15. כפל וחילוק של שברים אלגברים 39
16. חיבור וחיסור של שברים אלגברים 41
17. שברים כפולים 45

מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

מספרים מכוונים הם מספרים שיכולים לקבל סימן חיובי או שלילי, כגון:

- בקניון גדול ישנן קומות 1, 2, 3, 4, וכן חניונים הממוקמים בקומות 1-, 2- ו-3-.
- גובה פני הים מוגדר להיות 0 מטרים. העיר חיפה נמצאת כ-103 מטרים מעל פני הים בעוד שים המלח נמצא בגובה 426- מטרים.

כללים:

- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים זהים, מחברים את המספרים עצמם והסימן נשאר.
- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים מנוגדים, מחסירים את המספרים זה מזה (הקטן מהגדול) וסימן התוצאה כסימן המספר הגדול מביניהם.
- כפל וחילוק יתבצע בשני חלקים:
  - ביצוע הפעולה על המספרים עצמם.
  - קביעת הסימן של התוצאה באופן הבא:
    - כפל או חילוק של שני מספרים בעלי אותו סימן - התוצאה תהיה חיובית.
    - כפל או חילוק של שני מספרים שוני סימן - התוצאה תהיה שלילית.

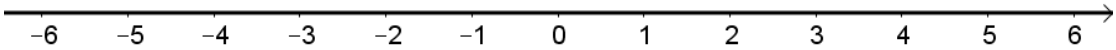
הערה:

אם יש רצף של מכפלות (או חילוקים), סימן התוצאה תלוי במספר הפעמים שבהם מופיע סימן שלילי (-). אם הסימן מופיע מספר זוגי של פעמים התוצאה חיובית, ואם הוא מופיע מספר אי-זוגי של פעמים אזי התוצאה שלילית.

שאלות:

1) סמנו את המספרים הבאים על ציר המספרים בהתאמה:

$-3\frac{1}{2}$, 4 , $1\frac{1}{3}$, -5 , $-\frac{1}{2}$, 2 , 0 , $\frac{1}{2}$, -2



2) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $3+2$	ב. $-3-2$
ג. $3-2$	ד. $-3+2$
ה. $-1-4$	ו. $7+10$
ז. $-6+5$	ח. $-7+3$

3) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $5+7-23+1$	ב. $5-8-12+17$
ג. $3-14+2+6$	ד. $-4-11+2+9$
ה. $6-21+3-7$	ו. $-7-13+5-3$

4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $4\cdot 9$	ב. $4\cdot(-7)$
ג. $(-6)\cdot(-5)$	ד. $(-5)\cdot(-3)$
ה. $(-2)\cdot 8$	ו. $(-8)\cdot 5$
ז. $(-2)\cdot(-3)\cdot(-3)$	ח. $2\cdot 3\cdot 3$
ט. $(-2)\cdot 3\cdot(-3)$	י. $(-2)\cdot(-3)\cdot 3$
יא. $2\cdot 3\cdot(-3)$	יב. $(-2)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-2)$
יג. $(-1)\cdot(-2)\cdot(-4)\cdot 2$	יד. $1\cdot(-2)\cdot(-4)\cdot 2$

5) מהו הסימן של תוצאת המכפלה בכל מקרה:

א. $(-2)\cdot(-4)\cdot(-3)\cdot(-10)\cdot(-6)\cdot(-5)$

ב. $(-1)\cdot 2\cdot 4\cdot(-3)\cdot(-10)\cdot 6\cdot(-5)$

ג. $(-1)\cdot 2\cdot 4\cdot(-3)\cdot(-10)\cdot(-6)\cdot(-5)$

ד. $(-1)\cdot 2\cdot 4\cdot(-3)\cdot(-10)\cdot 6\cdot 5$

6) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(-25):(-5)$

ב. $(-30):3$

ג. $40:(-10)$

ד. $(-32):(-4)$

ה. $(-6):18$

ו. $4:(-16)$

7) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{-60}{12}$

ב. $\frac{42}{-6}$

ג. $\frac{32}{-4}$

ד. $\frac{-12}{-3}$

8) מה התוצאה של כל אחת מהפעולות הבאות:

א. $0:5$

ב. $(-2)\cdot 0$

ג. $0\cdot(-3)\cdot 4$

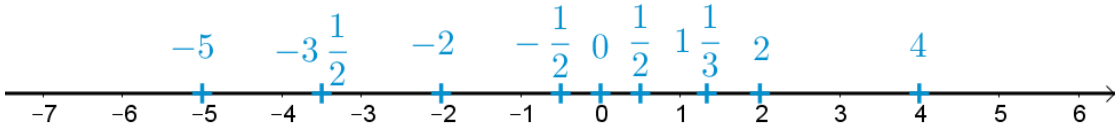
ד. $6:0$

ה. $0+4$

ו. $0-4$

תשובות סופיות:

1) להלן מערכת הצירים:



2) א. 5 ב. -5 ג. 1 ד. -1 ה. -5
ו. 17 ז. -1 ח. -4.

3) א. -10 ב. 2 ג. -3 ד. -4 ה. -19 ו. -18.

4) א. 36 ב. -28 ג. 30 ד. 15 ה. -16
ו. -40 ז. -18 ח. 18 ט. 18 י. 18
יא. -18 יב. 36 יג. -16 יד. 16.

5) א. + ב. + ג. - ד. -.

6) א. 5 ב. -10 ג. -4 ד. 8 ה. $-\frac{1}{3}$ ו. $-\frac{1}{4}$.

7) א. -5 ב. -7 ג. -8 ד. 4.

8) א. 0 ב. 0 ג. 0 ד. לא מוגדר ה. 4 ו. -4.

חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

הגדרה:

פעולת החזקה היא צורה מקוצרת שמייצגת פעולת כפל של אותו מספר בעצמו מספר פעמים. סימון החזקה הוא באופן הבא:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$$

כאשר a נקרא הבסיס ו- n נקראת החזקה.

הערות:

- כאשר הבסיס חיובי, התוצאה תמיד תהיה חיובית ללא קשר האם החזקה היא זוגית או אי-זוגית.
- כאשר הבסיס שלילי, התוצאה תהיה חיובית אם החזקה היא זוגית ושלילית אם החזקה היא אי-זוגית.

הגדרה:

פעולת השורש היא הפוכה לפעולת החזקה והיא מאפשרת למצוא את בסיס החזקה. סימון השורש הוא באופן הבא:

$$\sqrt[n]{a}$$

כאשר a נקרא הבסיס ו- n נקרא סדר השורש.

הערות:

- שורש למספר חיובי יכול להיות מסדר זוגי או אי-זוגי.
- שורש למספר שלילי יכול להיות מסדר אי-זוגי בלבד.

שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. 3^2
ב. 3^3
ג. $(-3)^3$
ד. $(-2)^3$
ה. 4^3
ו. 3^4
ז. $(-5)^3$
ח. 10^4
ט. $-(-3)^4$
י. -5^4
יא. -4^3
יב. $-(-2)^6$

2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sqrt[3]{-27}$
ב. $\sqrt[4]{625}$
ג. $\sqrt[4]{-16}$
ד. $\sqrt[5]{-32}$
ה. $-\sqrt[4]{81}$
ו. $-\sqrt[3]{1000}$

תשובות סופיות:

1) א. 9 ב. 27 ג. -27 ד. -8 ה. 64 ו. 81
ז. -125 ח. 10000 ט. -81 י. -625 יא. -64 יב. -64

2) א.-3 ב. 5 ג. לא מוגדר ד. -2 ה. -3 ו. -10

סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

סדר פעולות חשבון:

- פעולות כפל וחילוק קודמות לפעולות חיבור וחיסור.
- פעולות חזקה ושורש קודמות לפעולות כפל וחילוק.
- סוגריים קודמים לכל.

שאלות:

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

1) $\sqrt{81}+3\cdot 2^3-40:8$

2) $(-3)^2:9-2\cdot\left(-4^2\right)$

3) $\sqrt{144}-20:4+3\cdot(-2)^2$

4) $3+4\cdot\left[-3+4\cdot(-2)\right]+\sqrt{10+6}$

5) $(-3)^4:(-9)-5\cdot(-2)^3$

6) $-\sqrt{9}+5^2:(-4-1)-24:12\cdot 3$

7) $-2^5:(-8)+4^2-3\cdot 5$

8) $\sqrt[3]{-27}+4\cdot 3^2-2\cdot 3^3$

9) $\left[6\cdot(-1)^4-10\cdot(-1)^3\right]\cdot(-1)^5$

10) $\left(8-\sqrt[3]{64}\right)\cdot\left(2\cdot(-4)-\sqrt[5]{243}\right)$

11) $\dfrac{3^2\cdot(8-2\cdot 3)^3}{\left(5^2\cdot 3-72\right)\cdot(-4)}+2\cdot\left\{15-20:(4+3\cdot 2)\right\}$

תשובות סופיות:

1) 28	**2)** 33	**3)** 19	**4)** -37
5) 31	**6)** -14	**7)** 5	**8)** -21
9) -16	**10)** -44	**11)** 20	

שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים:

סיכום כללי:

הגדרה כללית:

השבר הוא חלק מתוך השלם. מקובל לסמן שבר באמצעות קו שבר המפריד בין המונה (החלק העליון) למכנה (החלק התחתון) באופן הבא:

$$\frac{\text{מונה}}{\text{מכנה}}$$

ישנם שלושה סוגים אפשריים של שברים:

- שבר פשוט – בו המונה קטן מהמכנה (ולכן תמיד יהיה קטן מ-1).
- שבר מדומה – בו המונה גדול מהמכנה (יהיה גדול בערכו מ-1).
- שבר מעורב – המכיל שילוב של מספר שלם ושבר כלשהו.

שבר עשרוני:

שבר שהמכנה שלו הוא מספר המהווה כפולות של 10 כגון: 10, 100, 1000 ...
שבר עשרוני מיוצג ע"י נקודה עשרונית אשר מבדילה בין החלק שלם לחלק השברי באופן הבא:

$$\underbrace{XX}_{\text{שלמים}}.\underbrace{YYY}_{\text{שברים}}$$

כדי להמיר שבר פשוט לשבר עשרוני המכנה צריך להיות בכפולות של 10.

אחוזים - הגדרה:

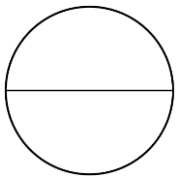
השבר $\frac{1}{100}$ מוגדר להיות אחוז אחד ומסומן באופן הבא: 1%.

באופן זה השבר $\frac{45}{100}$ יכתב: 45% , והשבר $\frac{145}{100}$ יכתב: 145%.

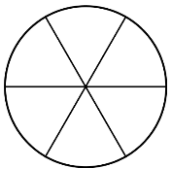
שאלות:

1) צבע את החלקים המתאימים בכל עיגול:

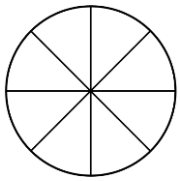
א. צבע $\frac{1}{2}$ מהעיגול



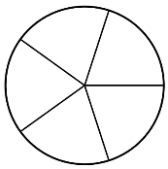
ב. צבע $\frac{1}{6}$ מהעיגול



ג. צבע $\frac{3}{8}$ מהעיגול

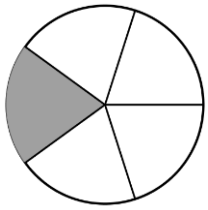


ד. צבע $\frac{2}{5}$ מהעיגול

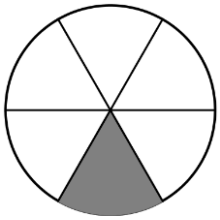


2) כתוב את השבר המתאים לחלקים הצבועים בכל אחד מהמקרים הבאים:

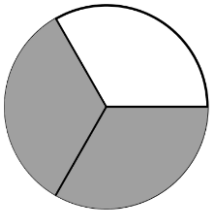
א. שבר:



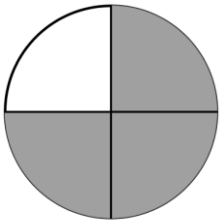
ב. שבר:



ג. שבר:



ד. שבר:



3) הרחב את השברים הבאים:

א. השבר $\frac{1}{2}$ לפי בסיס 4, לפי בסיס 18, לפי בסיס 40.

ב. השבר $\frac{3}{5}$ לפי בסיס 10, לפי בסיס 25, לפי בסיס 60.

ג. השבר $\frac{5}{8}$ לפי בסיס 16, לפי בסיס 32, לפי בסיס 88.

4) צמצם את השברים הבאים ככל הניתן:

א. $\frac{25}{30}$ ב. $\frac{10}{30}$ ג. $\frac{6}{24}$ ד. $\frac{4}{20}$

ה. $\frac{35}{56}$ ו. $\frac{24}{42}$ ז. $\frac{36}{48}$ ח. $\frac{33}{121}$

5) המר את השברים המדומים הבאים לשברים מעורבים:

א. $-\frac{20}{3}$ ב. $\frac{19}{4}$ ג. $\frac{12}{5}$ ד. $\frac{22}{5}$

ה. $-\frac{34}{6}$ ו. $-\frac{50}{7}$ ז. $\frac{47}{8}$ ח. $\frac{60}{9}$

6) המר את השברים המעורבים הבאים לשברים מדומים:

א. $1\frac{2}{3}$ ב. $3\frac{5}{6}$ ג. $4\frac{1}{2}$ ד. $6\frac{1}{4}$

ה. $11\frac{3}{4}$ ו. $-2\frac{5}{8}$ ז. $-6\frac{2}{7}$ ח. $12\frac{7}{9}$

7) קבע איזה שבר גדול יותר בכל אחד מהמקרים הבאים:

א. $\frac{3}{10}$ או $\frac{4}{10}$ ב. $\frac{7}{8}$ או $\frac{7}{6}$

ג. $\frac{2}{3}$ או $\frac{5}{6}$ ד. $\frac{5}{18}$ או $\frac{7}{12}$

8) המר את השברים העשרוניים הבאים לשברים פשוטים מצומצמים או מעורבים:

א. 0.7 ב. 0.07 ג. 0.007 ד. 0.34

ה. 0.304 ו. 0.65 ז. 1.2 ח. 1.02

ט. 1.42 י. 3.5 יא. 6.03 יב. 5.125

9) המר את השברים הבאים לשברים עשרוניים:

א. $\frac{3}{10}$	ב. $\frac{3}{100}$	ג. $\frac{3}{1000}$	ד. $\frac{23}{1000}$
ה. $\frac{1}{2}$	ו. $\frac{3}{4}$	ז. $\frac{2}{5}$	ח. $\frac{4}{25}$
ט. $\frac{7}{50}$	י. $\frac{3}{20}$	יא. $\frac{7}{8}$	יב. $\frac{9}{16}$
יג. $9\frac{1}{10}$	יד. $3\frac{1}{5}$	טו. $4\frac{7}{8}$	טז. $-4\frac{1}{16}$

10) כתוב את השברים הבאים בצורתם העשרונית
(היעזר במחשבון וכתוב עד 3 ספרות אחרי הנקודה העשרונית):

א. $\frac{2}{3}$	ב. $\frac{5}{6}$	ג. $\frac{3}{7}$	ד. $\frac{2}{11}$

11) המר מאחוזים לשברים פשוטים:

א. 25%	ב. 32%	ג. 64%	ד. 80%
ה. 120%	ו. 5%	ז. 300%	ח. 150%

12) המר משברים פשוטים לאחוזים:

א. $\frac{3}{4}$	ב. $\frac{1}{8}$	ג. $\frac{4}{5}$	ד. $\frac{7}{20}$
ה. $\frac{11}{40}$	ו. $\frac{70}{125}$	ז. $\frac{5}{6}$	ח. $\frac{4}{9}$

תשובות סופיות:

1) תשובה מודגמת בסרטון.

2) א. $\frac{1}{5}$ ב. $\frac{1}{6}$ ג. $\frac{2}{3}$ ד. $\frac{3}{4}$

3) א. $\frac{40}{80},\frac{18}{36},\frac{4}{8}$ ב. $\frac{180}{300},\frac{75}{125},\frac{30}{50}$ ג. $\frac{440}{700},\frac{160}{256},\frac{80}{128}$

4) א. $\frac{5}{6}$ ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. $\frac{1}{5}$ ה. $\frac{5}{8}$ ו. $\frac{4}{7}$

ז. $\frac{3}{4}$ ח. $\frac{3}{11}$

5) א. $-6\frac{2}{3}$ ב. $4\frac{3}{4}$ ג. $2\frac{2}{5}$ ד. $4\frac{2}{5}$ ה. $-5\frac{4}{6}$ ו. $-7\frac{1}{7}$

ז. $5\frac{7}{8}$ ח. $6\frac{2}{3}$

6) א. $\frac{5}{3}$ ב. $\frac{23}{6}$ ג. $\frac{9}{2}$ ד. $\frac{25}{4}$ ה. $\frac{47}{4}$ ו. $-\frac{21}{8}$

ז. $-\frac{44}{7}$ ח. $\frac{115}{9}$

7) א. $\frac{4}{10}$ ב. $\frac{7}{6}$ ג. $\frac{5}{6}$ ד. $\frac{7}{12}$

8) א. $\frac{7}{10}$ ב. $\frac{7}{100}$ ג. $\frac{7}{1000}$ ד. $\frac{17}{50}$ ה. $\frac{38}{125}$ ו. $\frac{13}{20}$

ז. $1\frac{1}{5}$ ח. $1\frac{1}{50}$ ט. $1\frac{21}{50}$ י. $3\frac{1}{2}$ יא. $6\frac{3}{100}$ יב. $5\frac{1}{8}$

9) א. 0.3 ב. 0.03 ג. 0.003 ד. 0.023 ה. 0.5 ו. 0.75

ז. 0.4 ח. 0.16 ט. 0.14 י. 0.15 יא. 0.875

יב. 0.5625 יג. 9.1 יד. 3.2 טו. 4.875 טז. -4.0625

10) א. $0.\overline{6}$ ב. $0.8\overline{3}$ ג. 0.428 ד. $0.1\overline{8}$

11) א. $\frac{1}{4}$ ב. $\frac{8}{25}$ ג. $\frac{16}{25}$ ד. $\frac{4}{5}$ ה. $1\frac{1}{5}$ ו. $\frac{1}{20}$

ז. 3 ח. $1\frac{1}{2}$

12) א. 75% ב. 12.5% ג. 80% ד. 35% ה. 27.5% ו. 56%

ז. 83.333% ח. 44.444%

כפל וחילוק שברים:

סיכום כללי:

- כשכופלים שני שברים יש לכפול מונה במונה ומכנה במכנה.
  - במידה ומדובר במספר שלם הכופל שבר, יש לכפול אותו במונה.
  - במידה ומדובר בשברים מעורבים, יש להפוך אותם תחילה לשברים מדומים ורק אז לבצע את פעולת הכפל.
- כדי לחלק שברים, יש לכפול את השבר הראשון בהופכי של השבר השני.
  - הופכי של שבר מסוים מתקבל ע"י החלפת המונה במכנה.

שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}$	ב. $\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}$	ג. $\frac{2}{9}\cdot\frac{8}{10}$
ד. $3\cdot\frac{4}{5}$	ה. $6\cdot\frac{2}{3}$	ו. $\frac{12}{25}\cdot 5$
ז. $1\frac{3}{5}\cdot 2\frac{1}{4}$	ח. $3\frac{1}{2}\cdot 4\frac{2}{5}$	ט. $3\frac{3}{7}\cdot 2\frac{2}{5}$
י. $\left(\frac{4}{5}\right)^3$	יא. $\frac{4}{5^3}$	יב. $\frac{4^3}{5}$

2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{2}{5}:\frac{4}{9}$	ב. $\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$	ג. $\frac{3}{25}:\frac{7}{10}$
ד. $8:\frac{2}{9}$	ה. $10:\frac{2}{3}$	ו. $\frac{5}{6}:3$
ז. $\frac{2}{5}:5$	ח. $3\frac{3}{4}:5\frac{5}{8}$	ט. $2\frac{2}{5}:1\frac{3}{15}$

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{9}{20}$ ב. $\frac{5}{21}$ ג. $\frac{8}{45}$ ד. $2\frac{2}{5}$ ה. 4 ו. $2\frac{2}{5}$

ז. $3\frac{3}{5}$ ח. $15\frac{2}{5}$ ט. $8\frac{8}{35}$ י. $\frac{64}{125}$ יא. $\frac{4}{125}$ יב. $12\frac{4}{5}$

2) א. $\frac{9}{10}$ ב. $1\frac{1}{2}$ ג. $\frac{6}{35}$ ד. 36 ה. 15 ו. $\frac{5}{18}$

ז. $\frac{2}{25}$ ח. $\frac{2}{3}$ ט. 2

חיבור וחיסור שברים:

סיכום כללי:

כפולה משותפת מינימלית:

בהינתן זוג מספרים a ו- b, המספר הקטן ביותר אשר תוצאת חלוקתו במספרים הנ"ל מניבה מספר שלם נקרא הכפולה המינימלית שלהם.

הערות:

- כפולה מינימלית יכולה להיות גם עבור יותר משני מספרים.
- הכפולה המינימלית תהיה המכנה המשותף בעת פעולות חיבור וחיסור של שברים.

כללי החיבור והחיסור של שברים:

- חיבור וחיסור של שברים בעלי אותו המכנה מתבצע על המספרים שבמונה בלבד כאשר המכנה נשאר כפי שהוא.

  דוגמא: $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$, $\frac{2}{7}-\frac{3}{7}=\frac{2-3}{7}=\frac{-1}{7}$.

- חיבור וחיסור של שברים בעלי מכנים שונים מתבצע ע"י פעולת מכנה משותף.

  דוגמא: $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{6+5}{15}=\frac{11}{15}$, $\frac{1}{4}-\frac{5}{6}=\frac{3}{12}-\frac{10}{12}=\frac{3-10}{12}=-\frac{7}{12}$.

- חיבור של שבר עם מספר שלם יתבצע באופן ישיר.

  דוגמא: $3+\frac{1}{4}=3\frac{1}{4}$.

  חיסור של שבר ממספר שלם יתבצע ע"י הוצאת שלמים מהשבר.

  דוגמא: $3-\frac{1}{4}=2\frac{4}{4}-\frac{1}{4}=2\frac{3}{4}$.

  דרך נוספת היא ע"י העברת המספר השלם לשבר מדומה: $3-\frac{1}{4}=\frac{12}{4}-\frac{1}{4}=\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$.

- חיבור וחיסור של שברים מעורבים יתבצע ע"י העברתם לשברים מדומים תחילה.

דוגמא: $3\frac{2}{5}+2\frac{1}{6}=\frac{17}{5}+\frac{13}{6}=\frac{17\cdot 6}{30}+\frac{13\cdot 5}{30}=\frac{102+65}{30}=\frac{167}{30}=5\frac{17}{30}$.

ניתן גם לפצל ולבצע את פעולת החיבור (או החיסור) של המספרים השלמים תחילה, ולאחר מכן לבצע את הפעולה עבור השברים.

דוגמא: $2\frac{3}{4}-5\frac{1}{3}=(2-5)+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)=-3+\left(\frac{9}{12}-\frac{4}{12}\right)=-3+\frac{5}{12}=-2\frac{7}{12}$.

שאלות:

1) מצא את הכפולה המשותפת המינימלית של המספרים הבאים:

א. 2 ו-3 ב. 2 ו-4 ג. 3 ו-5 ד. 6 ו-10

ה. 4 ו-10 ו. 4 ו-6 ז. 3, 5 ו-10 ח. 2, 3 ו-8

2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}$ ב. $\frac{5}{9}+\frac{2}{9}$

ג. $\frac{4}{13}+\frac{9}{13}$ ד. $\frac{7}{8}+\frac{7}{8}$

ה. $\frac{7}{8}-\frac{3}{8}$ ו. $\frac{8}{9}-\frac{7}{9}$

ז. $\frac{2}{12}-\frac{5}{12}$ ח. $\frac{2}{5}-\frac{6}{5}$

ט. $\frac{2}{8}+\frac{5}{8}+\frac{6}{8}$ י. $\frac{7}{15}+\frac{8}{15}-\frac{6}{15}$

3) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2}+\frac{4}{3}$

ב. $\frac{3}{5}+\frac{1}{10}$

ג. $\frac{4}{6}-\frac{1}{12}$

ד. $\frac{3}{6}-\frac{5}{8}$

ה. $\frac{5}{4}+\frac{7}{2}+\frac{2}{8}$

ו. $\frac{7}{3}+\frac{6}{5}+\frac{3}{10}$

ז. $\frac{4}{7}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}$

ח. $\frac{1}{4}+\frac{2}{8}-\frac{3}{5}$

4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2+\frac{5}{6}$

ב. $2-\frac{5}{6}$

ג. $2\frac{1}{4}+\frac{5}{6}$

ד. $2\frac{1}{4}-\frac{5}{6}$

ה. $3\frac{2}{3}+4\frac{1}{4}$

ו. $5\frac{7}{8}-6\frac{1}{2}$

ז. $2+\frac{5}{6}-\frac{1}{9}$

ח. $\frac{3}{4}-1\frac{1}{5}+\frac{8}{20}$

5) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)+2\frac{1}{3}$

ב. $\frac{3}{14}:\frac{2}{7}+\frac{1}{3}\cdot 2\frac{1}{4}-\frac{2}{5}$

ג. $\frac{5}{11}\cdot 2\frac{3}{4}-6:\frac{2}{5}$

ד. $2\frac{4}{5}:\frac{9}{10}\cdot\frac{6}{7}+\frac{1}{6}$

ה. $\frac{5}{6}:\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\cdot 3\frac{1}{4}$

תשובות סופיות:

1)	א. 6	ב. 4	ג. 15	ד. 30	ה. 20	ו. 12
	ז. 30	ח. 24				
2)	א. $\frac{4}{5}$	ב. $\frac{7}{9}$	ג. 1	ד. $1\frac{3}{4}$	ה. $\frac{1}{2}$	ו. $\frac{1}{9}$
	ז. $-\frac{1}{4}$	ח. $-\frac{4}{5}$	ט. $1\frac{5}{8}$	י. $\frac{3}{5}$		
3)	א. $1\frac{5}{6}$	ב. $\frac{7}{10}$	ג. $\frac{7}{12}$	ד. $-\frac{1}{8}$	ה. 5	ו. $3\frac{5}{6}$
	ז. $\frac{19}{21}$	ח. $-\frac{1}{10}$				
4)	א. $2\frac{5}{6}$	ב. $1\frac{1}{6}$	ג. $3\frac{1}{12}$	ד. $1\frac{5}{12}$	ה. $7\frac{11}{12}$	ו. $-\frac{5}{8}$
	ז. $2\frac{13}{18}$	ח. $-\frac{1}{20}$				
5)	א. $2\frac{11}{24}$	ב. $1\frac{1}{10}$	ג. $-13\frac{3}{4}$	ד. $2\frac{5}{6}$	ה. $3\frac{5}{18}$	

בעיות יסודיות באחוזים:

סיכום כללי:

נוסחה לביצוע חישובים עם אחוזים:

$$\text{תמורת האחוז} = \text{שלם} \cdot \frac{\text{אחוז}}{100}$$

למשל, בהינתן גודל שלם 120, אשר יש לחשב כמה הם 40 אחוזים ממנו, נקבל לפי הנוסחה: $\frac{40}{100}\cdot 120 = 48$, כלומר: **תמורת האחוז 40 מהגודל 120 היא 48**.

שאלות:

1) בכיתה 30 תלמידים. 60% מתוכם בנות.
א. כמה בנות בכיתה?
ב. כמה בנים בכיתה?

2) בכיתה 28 בנות המהוות 70% מכלל התלמידים בכיתה.
א. כמה תלמידים בכיתה?
ב. כמה בנים בכיתה?

3) מחיר בגד-ים הוא 300 ₪. בסוף העונה הוא נמכר ב-20% הנחה.
א. מהו מחירו בסוף העונה?
ב. מה גודל ההנחה?

4) מחיר ההשקה של בושם מסוים הוא 500 ₪. לאחר מכן מועלה מחירו ב-8%.
א. מה מחירו הסופי?
ב. מה גודל ההתייקרות?

5) מחיר ליטר דלק הוא 5 ₪ לליטר. בחנוכה מוזל מחירו ב-7%.
בפסח מועלה מחירו ב-7%. מה מחירו בסוף השנה?

6) מוצר מסויים מתייקר בסוכות ב-12%. בפורים מוזל המוצר ב-12%.
מחירו בסוף השנה הוא 394.24 ₪. מה מחירו בתחילת השנה?

7) ענה על השאלות הבאות:

א. באולם קולנוע 200 צופים, מתוכם 176 בנים.
מה אחוז הבנים בקהל?

ב. בכיתה 30 תלמידים, מתוכם 18 בנות.
מה אחוז הבנות בכיתה?

ג. מחיר מוצר התייקר מ-80 ₪ ל-120 ₪.
בכמה אחוזים התייקר המוצר?

ד. מחיר מוצר הוזל מ-120 ₪ ל-80 ₪.
בכמה אחוזים הוזל המוצר?

ה. מחיר מוצר התייקר מ-150 ₪ ל-200 ₪.
בכמה אחוזים התייקר המוצר?

ו. מחיר מוצר מוזל הוזל מ-200 ₪ ל-150 ₪.
בכמה אחוזים הוזל המוצר?

תשובות סופיות:

1) א. 18 בנות. ב. 12 בנים.

2) א. 40 תלמידים. ב. 12 בנים.

3) א. 240 ₪ ב. 60 ₪

4) א. 540 ₪ ב. 40 ₪

5) 4.9755 ₪

6) 400 ₪

7) א. 88% ב. 60% ג. 50% ד. 33.33% ה. 33.33% ו. 25%

חזרה על תבניות מספר:

סיכום כללי:

משתנה הוא סמל המתאר כמות או גודל כלשהם אשר אינם ידועים ועשויים להשתנות.

תבנית מספר היא ביטוי אלגברי אשר מכיל משתנה (או משתנים).
ניתן להציב במשתנים ערכים מספריים שונים ולקבל תוצאות שונות עבור תבנית המספר עצמה.

במתמטיקה, תפקידה של תבנית המספר הוא להביע גודל מסוים אשר לערכו יש משמעויות שונות. דוגמא לכך היא: קנייה של x פריטים, אשר כל אחד עולה 3 שקלים, יניבו תבנית מספר של $3\cdot x$ אשר מייצגת את הסכום הכולל של הפריטים.

שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- x הנתון:

א. $2x+5$ כאשר $x=3$

ב. x^2+3x כאשר $x=2$

ג. $-x^2+2x+3$ כאשר $x=5$

ד. $-x^2-9x+5$ כאשר $x=5$

ה. x^3+1 כאשר $x=-2$

ו. $4-x^3$ כאשר $x=-1$

ז. $(x+1)(2-x)$ כאשר $x=4$

ח. $x^2(3x-4)$ כאשר $x=3$

2) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- x הנתון:

א. $27x^5-2x^3+x$ כאשר $x=\frac{1}{3}$.

ב. $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+6$ כאשר $x=-\frac{2}{3}$.

3) הצב את הערכים המספריים במקום הפרמטרים וחשב את ערך תבנית המספר:

א. $a^2+2ab+b^2$ עבור: $a=3\ ,\ b=-5$.

ב. $(x-3)^2+3x^2b$ עבור: $x=5\ ,\ b=-1$.

ג. $-x^3-2xy+y^4$ עבור: $x=-2\ ,\ y=-1$.

ד. $\frac{(a-2c)^4}{a}-a^2$ עבור: $a=2\ ,\ c=-2$.

ה. $\frac{4a^2-3b}{c}$ עבור: $a=-1\ ,\ b=2\ ,\ c=-4$.

ו. $\sqrt{c-3a}$ עבור: $a=-1\ ,\ c=13$ ועבור: $a=\frac{1}{3}\ ,\ c=82$.

ז. $\frac{p^3+2\sqrt{q+1}}{m}$ עבור: $m=3\ ,\ q=48\ ,\ p=-5$.

תשובות סופיות:

1) א. 11 ב. 10 ג. -12 ד. -65 ה. -7 ו. 5
ז. -10 ח. 45

2) א. $\frac{10}{27}$ ב. $5\frac{22}{27}$

3) א. 4 ב. -71 ג. 5 ד. 644 ה. $\frac{1}{2}$
ו. הצבה ראשונה: 4, הצבה שניה: 9 ז. -37

כינוס איברים:

סיכום כללי:

תבניות אלגבריות יכולות להכיל איברים רבים ולכן נרצה לכנס אותם על מנת לפשט את התבנית. כדי לכנס איברים ניקח את כל קבוצת האיברים מאותו הסוג ונחבר את המקדמים שלהם. דוגמא: $3x+6x-5x=(3+6-5)x=4x$.

איברים שונים נבדלים זה מזה בערך התבנית האלגברית שלהם.

כך: $3x$ שונה מ- $4y$ ושונה מ- $2xy$. באותו האופן, האיברים x ו- x^2 הם שונים.

שאלות:

כנס איברים דומים:

1) $5x+7x-4x$

2) $9x^2-2x^2-3x^2-2x^2$

3) $-10xy+15xy+xy-2yx$

4) $x^2y-3yx^2+x^2y$

5) $8a^2+10a-5a^2-11a+a^2$

6) $2x^2-3m^2-x^2+3m^2$

7) $3xy+y-30y+6yx-7y$

8) $mn^2+4m^2n+6n^2m-10nm^2+mn^2$

9) $-6+x^3+4-3x^3+17x^3-17$

10) $y^2+x^2-5x^2+5y^2+4x^2-6y^2$

11) $7x^2-3x-4x+2$

12) $5xy+2x-3yx-x+1$

13) $3-x-x^2+4x+5x^2-12$

14) $x+xy+y-6yx-6y-6x$

15) $mn+n-5m+5nm-14n+3m$

16) $ab^2+6ba^2-6b+16a^2b+3b-6b^2a$

17) $z^3-4z^2+7-z^3-8+8z^2$

18) $4x^2z+6xz^2-6-xz^2+12+10zx^2$

19) $2-x^3-3-4x^2+2x+x^3+x^2-2$

20) $x^3-3x-4x^2+2x+x^3+x^2-2x^3$

21) $2a^2b+3x^2y+5a^2b+10x^2y$

22) $12x^2y^3+13a^2-20x^2y^3+2a^2$

23) $2y^2-4x^3y^2-10y^2-x^3y^2$

24) $-2x^3y+5x^2-4yx^3-6x^2$

25) $2a^2b+2b+3a^2+5b$

26) $5a^2b-8ab^2+20a^2b-14ab^2$

27) $-12x^2+2y^2+3x^2y+14xy^2-5xy^2-6y^2+2xy+11x^2+x^2y-9xy$

28) $21x^3y^3+x^2y^2-3xy^3+x^3y-15x^2y^2-7x^3y+12x^3y^3-4xy^3+4xy^3-6x^3y$

תשובות סופיות:

1) $8x$
2) $2x^2$
3) $4xy$
4) $-x^2y$
5) $4a^2-a$
6) x^2
7) $9xy-36y$
8) $8mn^2-6nm^2$
9) $15x^3-19$
10) 0
11) $7x^2-7x+2$
12) $2xy+x+1$
13) $4x^2+3x-9$
14) $-5x-5y-5xy$
15) $-13n-2m+6mn$
16) $-5ab^2+22a^2b-3b$
17) $4z^2-1$
18) $14x^2z+5xz^2+6$
19) $-3x^2+2x-3$
20) $-3x^2-x$
21) $7a^2b+13x^2y$
22) $-8x^2y^3+15a^2$
23) $-8y^2-5x^3y^2$
24) $-6x^3y-x^2$
25) $2a^2b+3a^2+7b$
26) $25a^2b-22ab^2$
27) $-x^2-4y^2+4x^2y+9xy^2-7xy$
28) $33x^3y^3-14x^2y^2-3xy^3-12x^3y$

פישוט ביטויים ע"י פתיחת סוגריים:

סיכום כללי:

בעת ביצוע כפל בין שני איברים יש לכפול את המקדמים בנפרד ואת האותיות (משתנים) בנפרד.

כלל הפילוג:

- $a(b+c)=ab+ac$.
- $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$.

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $2x\cdot 3x$ ב. $-4x\cdot(-7x)$ ג. $-2x\cdot(-4x)\cdot(-3)$

ד. $8m^2\cdot 4m^3$ ה. $3a^3\cdot(-2a^2)$ ו. $-b\cdot 4b^2\cdot\frac{b^2}{2}$

ז. $a\cdot 3b$ ח. $4a^2\cdot 7b^2$ ט. $ab\cdot(-2a^2b)$

2) פשט את הביטויים הבאים ע"י פתיחת סוגריים:

א. $2(3x-4)$ ב. $2(-3x^2+5x-1)$

ג. $(7x-2)4$ ד. $(1-2x)(-2)$

ה. $a(3a-1)$ ו. $b(b^2-3b+4)$

ז. $2x(5x+3)$ ח. $5x(x^2+2x-3)$

ט. $3t^2(4t-t^2+6)$ י. $\frac{5}{2}(4d^4-3d)d$

3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $5x+(3x-2)+(-4-2x)$ ב. $7x+(-4x-5)+3x+(-1+7x)$

ג. $8-(2x-5)-(4x+2)$ ד. $-6x-(-3x-1)-(-7-4x)+1$

ה. $(3-2x^2+4)2+3(x-x^2)-6(7-5x)+4x^2$

ו. $3y^2-(y+1-2y^2)+6(5y-6)-(-y-4)3+5(y^2+1)-7$

4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-1)(x+2)$ ב. $(x+3)(x-7)$

ג. $(3-x)(x+4)$ ד. $(3x+4)(5x+1)$

ה. $3(4x+1)(2x-3)$ ו. $-2(3x-1)(5-2x)$

5) פשט את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(x-1)(x+3)+2(3-x)$

ב. $(a+4)(a-2)-(a+5)(a-3)$

ג. $(2m-3)(4m+3)+5(2m^2-6)$

ד. $-x^2y^2(x^3y+x^2)+2xy(2x^3y-x^4y^2)$

תשובות סופיות:

1) א. $6x^2$ ב. $28x^2$ ג. $-24x^2$ ד. $32m^5$ ה. $-6a^5$ ו. $-2b^5$

ז. $3ab$ ח. $28a^2b^2$ ט. $-2a^3b^2$

2) א. $6x-8$ ב. $-6x^2+10x-2$ ג. $28x-8$ ד. $-2+4x$

ה. $3a^2-a$ ו. b^3-3b^2+4b ז. $10x^2+6x$ ח. $5x^3+10x^2-15x$

ט. $12t^3-3t^4+18t^2$ י. $10d^5-7.5d^2$

3) א. $6x-6$ ב. $13x-6$ ג. $-6x+11$ ד. $x+9$ ה. $-3x^2+33x-28$

ו. $10y^2+32y-27$

4) א. x^2+x-2 ב. $x^2-4x-21$ ג. $-x^2-x+12$

ד. $15x^2+23x+4$ ה. $24x^2-30x-9$ ו. $12x^2-34x+10$

5) א. x^2+3 ב. 7 ג. $18m^2-6m-39$ ד. $-3x^5y^3+3x^4y^2$

פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר:

סיכום כללי:

- נוסחת ריבוע של סכום/הפרש: $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.
- נוסחה להפרש ריבועים: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+5)^2$ ב. $(x+2)^2$ ג. $(4x+5)^2$

ד. $(6x+2)^2$ ה. $(7x+y)^2$ ו. $(5x+2y)^2$

ז. $(x^2+7)^2$ ח. $(x^2+y^2)^2$ ט. $(x^3+2y^2x)^2$

2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-6)^2$ ב. $(x-2)^2$ ג. $(5-x)^2$

ד. $(6x-1)^2$ ה. $\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2$ ו. $\left(\frac{1}{3}x-5\right)^2$

ז. $(3m-2n)^2$ ח. $\left(x^2-\frac{3}{5}y\right)^2$ ט. $(x^2y^2-7)^2$

3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-5)(x+5)$ ב. $(3+x)(x-3)$

ג. $(3x-1)(3x+1)$ ד. $(5-7x)(7x+5)$

ה. $\left(\frac{1}{2}x+6\right)\left(\frac{1}{2}x-6\right)$ ו. $\left(5y-\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{1}{4}x+5y\right)$

ז. $(x^2+y)(x^2-y)$ ח. $(3a^2b^3-4)(3a^2b^3+4)$

4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+1)(x+2)-3x$

ב. $(x-5)(5x-1)+2(4+x)$

ג. $x(2x-1)(2x+1)-4x^2(x+1)$

ד. $-(y+3x)(y-3x)+(y-3x)^2$

ה. $x(x+3)-(6+x)(6x+2)-(x+2)^2$

ו. $-5(x+7)(x-7)+3(2x+5)(5-x)+(x+1)^2$

תשובות סופיות:

1) א. $x^2+10x+25$ ב. x^2+4x+4 ג. $16x^2+40x+25$

ד. $36x^2+24x+4$ ה. $49x^2+14xy+y^2$ ו. $25x^2+20xy+4y^2$

ז. $x^4+14x+49$ ח. $x^4+2x^2y^2+y^4$ ט. $x^6+4x^4y^2+4y^4x^2$

2) א. $x^2-12x+36$ ב. x^2-4x+4 ג. $25-10x+x^2$

ד. $36x^2-12x+1$ ה. $9x^2-3x+\frac{1}{4}$ ו. $\frac{1}{9}x^2-3\frac{1}{3}x+25$

ז. $9m^2-12mn+4n^2$ ח. $x^4-\frac{6}{5}x^2y+\frac{9}{25}y^2$ ט. $x^4y^4-14x^2y^2+49$

3) א. x^2-25 ב. x^2-9 ג. $9x^2-1$ ד. $25-49x^2$

ה. $\frac{1}{4}x^2-36$ ו. $25y^2-\frac{1}{16}x^2$ ז. x^4-y^2 ח. $9a^4b^6-16$

4) א. x^2+2 ב. $5x^2-24x+13$ ג. $-4x^2-x$

ד. $18x^2-6xy$ ה. $-6x^2-39x-16$ ו. $-10x^2+17x+321$

פירוק לגורמים של ביטויים אלגברים:

סיכום כללי:

פירוק לגורמים הוא פעולה הפוכה לפתיחת סוגריים – נרצה להוציא את הגורמים המשותפים לאיברים מחוץ לסוגריים.

- פירוק לגורמים ע"י הוצאת איבר אחד משותף:
  - הוצאת מספר משותף: $2x-8=2(x-4)$.
  - הוצאת אות משותפת: $x^2-12x=x(x-12)$.
  - הוצאת מספר ואות יחד: $3x^2-21x=3x(x-7)$.
- פירוק לגורמים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר:
  - נוסחת הבינום של ניוטון: $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$.
  - נוסחה להפרש ריבועים: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $3x-12$ ב. $6y-4$

ג. $20-8a$ ד. $4a^3+8b$

ה. $75m^2+25m+15$ ו. $40a^2-8b^2+64c^2$

2) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. y^2+5y ב. $3x-11x^3$

ג. $6y^2+5y^3+4y$ ד. $\frac{1}{2}a^7-\frac{1}{4}a^5+a^3$

3) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $2x^2-8x$
ב. $3t^2+12t$
ג. $5n^3-20n^2+50n$
ד. $8y^2+6y^3-2y^4$
ה. $4x^2y^2+16x^2y-20xy^2$
ו. $27mn-3n^2m+9n^3m$

4) פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר:

א. $x^2+10x+25$
ב. $x^2+12x+36$
ג. $y^2-18y+81$
ד. $y^2-22y+121$
ה. $4x^2+4x+1$
ו. $16y^2-8y+1$
ז. $9x^2-24x+16$
ח. $25x^2+70x+49$

5) פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר:

א. r^2-25
ב. x^2-81
ג. $25y^2-49$
ד. $121x^2-1$
ה. x^2y^2-4
ו. $9y^4-169x^4$

6) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף ונוסחאות הכפל המקוצר:

א. $y-y^3$
ב. x^3-10x^2+25x
ג. m^4-1
ד. $196x^4-140x^3+25x^2$

תשובות סופיות:

1) א. $3(x-4)$ ב. $2(3y-2)$ ג. $4(5-2a)$

ד. $4(a^3+2b)$ ה. $5(15m^2+5m+3)$ ו. $8(5a^2-b^2+8c^2)$

2) א. $y(y+5)$ ב. $x(3-11x^2)$ ג. $y(6y+5y^2+4)$

ד. $a^3\left(\frac{1}{2}a^4-\frac{1}{4}a^2+1\right)$

3) א. $2x(x-4)$ ב. $3t(t+4)$ ג. $5n(n^2-4n+10)$

ד. $2y^2(4+3y-y^2)$ ה. $4xy(xy+4x-5y)$ ו. $3mn(9-n-3n^2)$

4) א. $(x+5)^2$ ב. $(x+6)^2$ ג. $(y-9)^2$ ד. $(y-11)^2$

ה. $(2x+1)^2$ ו. $(4y-1)^2$ ז. $(3x-4)^2$ ח. $(5x+7)^2$

5) א. $(r+5)(r-5)$ ב. $(x+9)(x-9)$ ג. $(5y+7)(5y-7)$

ד. $(11x+1)(11x-1)$ ה. $(xy+2)(xy-2)$ ו. $(3y^2+13x^2)(3y^2-13x^2)$

6) א. $y(1+y)(1-y)$ ב. $x(x-5)^2$ ג. $(m^2+1)(m+1)(m-1)$

ד. $x^2(14x-5)^2$.

פירוק הטרינום:

סיכום כללי:

טרינום משמעו תלת איבר מהצורה: ax^2+bx+c כאשר a, b ו-c הם מספרים כלשהם.

שיטת הטרינום מאפשרת לפרק את תלת האיבר ל-4 איברים ע"י פיצול האיבר bx לשני איברים באופן כזה שמאפשר להוציא גורם משותף.

הכלל הוא למצוא שני מספרים, m_1 ו-m_2, שמקיימים: $m_1\cdot m_2=ac$ ו-$m_1+m_2=b$.

לאחר מכן ניתן לפרק את הטרינום: $ax^2+bx+c=ax^2+m_1x+m_2x+c$.

השלב האחרון הוא הוצאת גורם משותף מכל זוג: $\underbrace{ax^2+m_1x}+\underbrace{m_2x+c}$.

הערה:

במקרה שנוסחת השורשים ידועה, ניתן להיעזר בה כדי למצוא את המספרים m_1 ו-m_2 באופן הבא: $m_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $m_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ולאחר מכן ניתן לכתוב את הטרינום כמכפלה: $ax^2+bx+c=a(x-m_1)(x-m_2)$. אם קיים פתרון (שורש) אחד $m_1=m_2=\frac{-b}{2a}$ אז נכתוב: $ax^2+bx+c=a(x-m_1)^2$ ואם לא קיימים פתרונות אז לא קיים פירוק כלל.

שאלות:

1) פרק את הביטויים הבאים לפי פירוק טרינום:

א. x^2+5x+4	ב. $x^2-8x+15$	ג. $x^2-33x+62$
ד. $2x^2+7x-15$	ה. $3x^2-11x+6$	ו. $6x^2+5x+1$
ז. $2x^2+x-6$	ח. $x^2-18x+81$	ט. x^2+2x+8

2) פרק את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחת השורשים.
הערה: במידה ולא למדת על נוסחת השורשים התעלם משאלה זו.

א. $6x^2+5x+1$	ב. x^2+5x+4
ג. $4x^2+20x+25$	ד. $3x^2-x+20$

תשובות סופיות:

1) א. $(x+1)(x+4)$ ב. $(x-3)(x-5)$ ג. $(x-2)(x-31)$

ד. $(2x-3)(x+5)$ ה. $(3x-2)(x-3)$ ו. $(3x+1)(2x+1)$

ז. $(x+2)(2x-3)$ ח. $(x-9)^2$ ט. אין פירוק.

2) א. $6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ ב. $(x+1)(x+4)$ ג. $(2x+5)^2$ ד. אין פירוק.

שברים אלגבריים:

סיכום כללי:

הגדרה:

שבר אלגברי מורכב משתי תבניות, אשר אחת מחלקת את השנייה.

דוגמא לשברים אלגבריים: $\frac{4}{x-x^3}$, $\frac{3x}{x^2+1}$, $\frac{x+1}{x+2}$.

במקרה בו המכנה הוא מספר, לא מדובר בשבר אלגברי מכיוון שניתן לכתוב את הביטוי ללא צורך בחילוק בין ביטויים שונים כגון: $\frac{3x+5}{4}=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$.

תחום הגדרה של שבר:

היות ושבר אלגברי הוא תבנית אשר יכולה לקבל ערכים שונים בעת הצבות שונות, חשוב להגביל את המספרים שניתן להציב באופן כזה שלא תתקבל חלוקה באפס.

דוגמא: השבר $\frac{1}{x+4}$ לא מוגדר כאשר $x=-4$ מכיוון שמתקבל: $\frac{1}{0}$.

במקרים אלו נדרוש **תנאי** על המשתנה אשר יכתב באופן הבא: $x\neq -4$ ומשמעו היא ש-x יכול לקבל על ערך מספרי אפשרי למעט 4-, מכיוון שבמקרה זה השבר לא מוגדר.

כלל צמצום שברים אלגבריים:

ניתן לצמצם שברים אלגבריים ע"י הבאת המונה והמכנה למכפלה של ביטויים.
במידה וקיימות פעולות החיבור והחיסור בין איברים שונים לא ניתן לבצע צמצום של איברים דומים בין המונה והמכנה. להלן מספר דוגמאות הנוגעות לצמצומים:

- צמצום ע"י הוצאת גורם משותף: $\frac{2x+8}{x+4}=\frac{2\cancel{(x+4)}}{\cancel{x+4}}=\frac{2\cdot 1}{1}=2$.
- צמצום ע"י נוסחת כפל מקוצר: $\frac{3x-15}{x^2-10x+25}=\frac{3\cancel{(x-5)}}{(x-5)^{\cancel{2}}}=\frac{3\cdot 1}{x-5}=\frac{3}{x-5}$.
- צמצום ע"י פירוק טרינום: $\frac{x^2-2x-3}{x^2-3x-4}=\frac{\cancel{(x+1)}(x-3)}{\cancel{(x+1)}(x-4)}=\frac{x-3}{x-4}$.

שאלות:

1) מצא את תחום ההגדרה של השברים האלגבריים הבאים:

א. $\frac{x+4}{x+3}$

ב. $\frac{5}{x-6}$

ג. $\frac{x+7}{2x-8}$

ד. $\frac{x^2+1}{x^2-4x}$

ה. $\frac{3}{x^2+2x+1}$

ו. $\frac{x^2}{x^2-4}$

ז. $\frac{6}{y^4-y^2}$

ח. $\frac{8x-2}{3x^3-15x^2+12x}$

2) צמצם את השברים הבאים (במידה ולא ניתן צמצם הסבר מדוע):

א. $\frac{ax}{a}$

ב. $\frac{a-x}{a}$

ג. $\frac{a-ax}{a}$

ד. $\frac{x+1}{y+1}$

ה. $\frac{x}{x+y}$

ו. $\frac{6x}{6y}$

ז. $\frac{x^2y}{xy^2}$

ח. $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$

ט. $\frac{4x^2y}{xy}$

י. $\frac{3x^2}{x^2+3}$

3) צמצם את השברים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{3x+12}{x+4}$

ב. $\frac{m^2+4m}{4m+16}$

ג. $\frac{2a-12}{a^2-6a}$

ד. $\frac{x^2-5x}{15-3x}$

ה. $\frac{3-18y^2}{6y^2-1}$

ו. $\frac{4x^3-2x^2}{6x-3}$

ז. $\frac{3y}{y^3-3y^2}$

ח. $\frac{3z^3-12z^2+4z}{z^2+5z}$

4) צמצם את השברים הבאים ע"י פירוק לגורמים וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x^2+10x+25}{2x+10}$

ב. $\frac{8n-n^2}{n^2-16n+64}$

ג. $\frac{z^3-4z^2}{2z^2-16z+32}$

ד. $\frac{4m^2+20m+25}{4m^2+10m}$

ה. $\frac{18y^2-24y+8}{2y-3y^2}$

ו. $\frac{a^3+4a^2b+4ab^2}{3ab+6b^2}$

5) צמצם את השברים הבאים ע"י טרינום ריבועי וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x+2}{x^2-3x-10}$

ב. $\frac{m^2-12m+32}{m-4}$

ג. $\frac{4y-10}{2y^2+y-15}$

ד. $\frac{3z^2+26z+16}{3z+2}$

ה. $\frac{x^2+5x-36}{x^3+9x^2}$

ו. $\frac{9n^2-12n}{4+5n-6n^2}$

ז. $\frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}$

ח. $\frac{x^2-14x+49}{x^2+x-56}$

ט. $\frac{3a^2b-10ab^2+3b^3}{-3a^3b+11a^2b^2-6ab^3}$

י. $\frac{m^3n-m^2n^2-m^2+mn}{2m^2n^3+mn^2-3n}$

תשובות סופיות:

1) א. $x \neq -3$ ב. $x \neq 6$ ג. $x \neq 4$ ד. $x \neq 0 , x \neq 4$

ה. $x \neq -1$ ו. $x \neq -2 , x \neq 2$ ז. $y \neq 0 , y \neq -1 , y \neq 1$

ח. $x \neq 0 , x \neq 1 , x \neq 4$

2) א. x ב. לא ניתן לצמצם ג. $1-x$

ד. לא ניתן לצמצם ה. לא ניתן לצמצם ו. $\frac{x}{y}$ ז. $\frac{x}{y}$

ח. לא ניתן לצמצם ט. $4x$ י. לא ניתן לצמצם

3) א. $3 , x \neq -4$ ב. $\frac{m}{4} , m \neq -4$ ג. $\frac{2}{a} , a \neq 0,6$

ד. $-\frac{x}{3} , x \neq 5$ ה. $-3 , y \neq \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ ו. $\frac{2x^2}{3} , x \neq \frac{1}{2}$

ז. $\frac{3}{y(y-3)} , y \neq 0,3$ ח. $\frac{3z^2-12z+4}{z+5} , z \neq 0,-5$

4) א. $\frac{x+5}{2} , x \neq -5$ ב. $\frac{n}{8-n} , n \neq 8$ ג. $\frac{z^2}{2(z-4)} , z \neq 4$

ד. $\frac{2m+5}{2m} , m \neq 0,-\frac{5}{2}$ ה. $\frac{2(2-3y)}{y} , y \neq 0,\frac{2}{3}$ ו. $\frac{a(a+2b)}{3b} , b \neq 0, a \neq -2b$

5) א. $\frac{1}{x-5} , x \neq 5,-2$ ב. $m-8 , m \neq 4$ ג. $\frac{2}{y+3} , x \neq -3,\frac{5}{2}$

ד. $z+8 , z \neq -\frac{2}{3}$ ה. $\frac{x-4}{x^2} , x \neq 0,-9$ ו. $\frac{-3n}{2n+1} , n \neq -\frac{1}{2},\frac{4}{3}$

ז. $\frac{x+2}{x+3} , x \neq -2,-3$ ח. $\frac{x-7}{x+8} , x \neq 7,-8$

ט. $\frac{3a-b}{a(2b-3a)} , a \neq 0 , b \neq 0, a \neq 3b , 2b \neq 3a$ י. $\frac{m(m-n)}{n(2mn+3)} , mn \neq 1,-\frac{3}{2},n \neq 0$

כפל וחילוק של שברים אלגברים:

סיכום כללי:

כפל שברים יתבצע ע"י הכפלת כל מונה בנפרד והכפלת כל מכנה בנפרד.

חילוק שברים יתבצע ע"י לקיחת ההופכי של שבר המחלק וביצוע פעולת כפל.

- דוגמא לכפל שברים: $\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{x}{3x+3}=\frac{x+1}{x^2}\cdot\frac{x}{3(x+1)}=\frac{\cancel{x}\cancel{(x+1)}}{3x^{\cancel{2}}\cancel{(x+1)}}=\frac{1}{3x}$.

- דוגמא לחילוק שברים: $\frac{4x}{y}:\frac{12}{y^2+y}=\frac{4x}{y}\cdot\frac{y^2+y}{12}=\frac{\cancel{4}^{1}x}{\cancel{y}}\cdot\frac{\cancel{y}(y+1)}{\cancel{12}_{3}}=\frac{x(y+1)}{3}$.

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{8}$

ב. $\frac{x}{3}\cdot\frac{9}{x^2}$

ג. $7y\cdot\frac{5}{y^2}$

ד. $6x^2\cdot\frac{3}{40x}$

ה. $(x^2+3x)\cdot\frac{2}{3x+9}$

ו. $(a^2-25)\cdot\frac{20}{5a+25}$

ז. $\frac{w^2-9}{w}\cdot\frac{w^2}{2w+6}$

ח. $\frac{y+4}{y^2+16}\cdot\frac{y^2-16}{2y+8}$

ט. $\frac{z^2+30z+225}{6z+90}\cdot\frac{12}{2z-10}$

י. $\frac{5n^2}{n^2-121}\cdot\frac{2n^2+44n+242}{n+2}\cdot\frac{n^2+4n+4}{n}$

2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{x}{8}:\frac{x}{6}$

ב. $\frac{y}{25}:\frac{5}{y}$

ג. $a^2:\frac{1}{6a}$

ד. $\frac{5}{6a}:a^2$

ה. $\left(d^2-3d\right):\frac{5d-15}{5d}$

ו. $\frac{t}{t+4}:\frac{3t}{t+4}$

ז. $\frac{y^2+8y+16}{8y^2}:\frac{y^2-16}{7y^2}$

ח. $\frac{a^2-64}{a^2-36}:\frac{a+8}{a+6}$

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{x^2}{24}$ ב. $\frac{3}{x}$ ג. $\frac{35}{y}$ ד. $\frac{9x}{20}$ ה. $\frac{2x}{3}$

ו. $4(a-5)$ ז. $\frac{w(w-3)}{2}$ ח. $\frac{y^2-16}{2y^2+32}$ ט. $\frac{z+15}{z-5}$ י. $\frac{10n(n+11)(n+2)}{n-11}$

2) א. $\frac{3}{4}$ ב. $\frac{y^2}{125}$ ג. $6a^3$ ד. $\frac{5}{6a^3}$ ה. d^2 ו. $\frac{1}{3}$

ז. $\frac{7(y+4)}{8(y-4)}$ ח. $\frac{a-8}{a-6}$

חיבור וחיסור של שברים אלגברים:

סיכום כללי:

ביצוע פעולת החיבור והחיסור תתבצע באופן זהה לשברים מספריים.

נרצה להרחיב את השברים כך שהמכנה של שניהם יהיה זהה, ולאחר מכן נחבר את המונים.

כדי להרחיב את השברים נעזר בפעולת מציאת מכנה משותף.
לשם כך נעזר בפירוקים השונים כדי להביא את הביטויים שבכל מכנה לצורתם המופשטת.

דוגמא לחיבור שברים בעלי אותו מכנה:

$$\frac{1}{x}+\frac{x+1}{x}=\frac{1+(x+1)}{x}=\frac{x+2}{x}$$

דוגמא לחיבור מספר לשבר אלגברי:

$$2+\frac{3}{x+2}=\frac{2(x+2)}{x+2}+\frac{3}{x+2}=\frac{2(x+2)+3}{x+2}=\frac{2x+7}{x+2}$$

דוגמא לחיבור שברים עם מכנים שונים (ע"י פעולת מכנה משותף):

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}=\frac{x}{x(x+1)}+\frac{x+1}{x(x+1)}=\frac{x+x+1}{x(x+1)}=\frac{2x+1}{x(x+1)}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י שימוש בפירוק לגורמים (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{1}{x^2-3x}+\frac{3}{x-3}=\frac{1}{x^2-3x}+\frac{3x}{x^2-3x}=\frac{1+3x}{x^2-3x}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{3}{x^2-6x+9}-\frac{2}{x^2-9}=\frac{3}{(x-3)^2}-\frac{2}{(x-3)(x+3)}=\frac{3(x+3)-2(x-3)}{(x-3)^2(x+3)}=\frac{x+15}{(x-3)^2(x+3)}$$

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{a}{6}+\frac{a-5}{6}$

ב. $\frac{5}{x}+\frac{4x+3}{x}$

ג. $\frac{x-2}{x+1}+\frac{3+4x}{x+1}$

ד. $\frac{7z}{2z-3}-\frac{4z}{2z-3}-\frac{z+3}{2z-3}$

2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{ab}-\frac{5}{bc}$

ב. $\frac{1}{xy}+\frac{5}{yz}+\frac{4}{xz}$

ג. $\frac{c}{ab}-\frac{ad}{bc}+\frac{2b}{cd}$

ד. $-\frac{5}{x}+\frac{x+1}{xy^2}$

ה. $\frac{1}{(y+1)^2}+\frac{3}{y+1}$

ו. $\frac{3}{z(z-3)}-\frac{2}{z(z-2)}$

3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $1-\frac{2}{x}$

ב. $1+\frac{3}{y^2}$

ג. $2+\frac{2}{x+1}$

ד. $3-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x}$

ה. $\frac{a+1}{a^2}-\frac{3-a}{4a}-3$

ו. $\frac{x}{9yz}+\frac{z}{3y^2x}+\frac{3-y}{12xz}-3\frac{1}{2}$

4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{x+1}+\frac{1}{x}$

ב. $\frac{4}{y+2}-\frac{3}{y}$

ג. $\frac{a+1}{a+2}+\frac{3}{a}$

ד. $\frac{1}{z+3}+\frac{2}{3z}-\frac{3}{z}$

5) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{24}{a^2-9}+\frac{4}{a+3}$

ב. $\frac{3}{x^2-16}+\frac{2}{(x+4)^2}$

ג. $\frac{y}{(y-2)^2}+\frac{3y}{4-y^2}$

ד. $\frac{3z}{z^2+4z+3}-\frac{z+0.5}{z^2+2z+1}$

ה. $\frac{x-1}{x^2+3x-40}+\frac{2}{-x^2+8x-15}$

ו. $\frac{2a+3}{2a^2+15a+7}+\frac{a+3}{a^2+14a+49}$

ז. $\frac{x}{x-3}+\frac{9-x}{x^2-8x+15}$

ח. $\frac{1}{a-b}+\frac{2}{a+2b}-\frac{3b}{a^2+ab-2b^2}$

6) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{4}{x}\cdot\frac{x^2}{8}+\frac{9}{x+1}\cdot\frac{x+1}{18}$

ב. $\left(\frac{2}{x}+1\right)\cdot\frac{x^2}{7x+14}$

ג. $\frac{7}{y^2}:\frac{6}{y^3}-\frac{y-4}{63}\cdot\frac{3y-4}{y^2-8y+16}$

ד. $\left(3x-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}\right):\frac{6x^3+2x-4}{x^2}$

ה. $\left(\frac{2x+1}{20x^2-28x-3}-\frac{3x+1}{30x^2-17x-2}\right):\frac{18x+3}{6x^2-13x+6}$

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{2a-5}{6}$ ב. $\frac{4x+8}{x}$ ג. $\frac{5x+1}{x+1}$ ד. 1

2) א. $\frac{c-5a}{abc}$ ב. $\frac{z+5x+4y}{xyz}$ ג. $\frac{c^2d-a^2d^2+2ab^2}{abcd}$

ד. $\frac{-5y^2+x+1}{xy^2}$ ה. $\frac{3y+4}{(y+1)^2}$ ו. $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$

3) א. $\frac{x-2}{x}$ ב. $\frac{y^2+3}{y^2}$ ג. $\frac{2x+4}{x+1}$

ד. $\frac{9x-2}{3x}$ ה. $\frac{-11a^2+a+4}{4a^2}$ ו. $\frac{4x^2y+12z^2+9y^2-3y^3-126xy^2z}{36xy^2z}$

4) א. $\frac{4x+1}{x(x+1)}$ ב. $\frac{y-6}{y(y+2)}$ ג. $\frac{a^2+4a+6}{a(a+2)}$

ד. $-\frac{4z+21}{3z(z+3)}$

5) א. $\frac{4}{a-3}$ ב. $\frac{5x+4}{(x-4)(x+4)^2}$ ג. $\frac{2y(4-y)}{(y-2)^2(y+2)}$

ד. $\frac{(4z+3)(z-1)}{2(z+1)^2(z+3)}$ ה. $\frac{x^2-6x-13}{(x+8)(x-5)(x-3)}$ ו. $\frac{4(a^2+6a+6)}{(a+7)^2(2a+1)}$

ז. $\frac{x-3}{x-5}$ ח. $\frac{3}{a+2b}$

6) א. $\frac{x+1}{2}$ ב. $\frac{x}{7}$ ג. $\frac{147y^2-594y+8}{126(y-4)}$ ד. $\frac{1}{2}$ ה. $\frac{1}{3(10x+1)}$

שברים כפולים:

סיכום כללי:

שבר כפול מורכב באופן הבא: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ כאשר מתקיים: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$.

נובע מכאן כי ניתן לצמצם ביטויים בין שני המכנים או שני המונים בלבד.

שאלות:

פשט את הביטויים הבאים:

1) $\frac{\frac{4x}{12}}{x}$

2) $\frac{\frac{y+1}{2y+2}}{5}$

3) $\frac{\frac{5}{t}}{30t^2}$

4) $\frac{\frac{t^2-81}{9t^2}}{6t+54}$

5) $\frac{\frac{3y^3-y^2}{25}}{\frac{y^2}{3-y}}$

6) $\frac{\frac{4x}{x+1}}{\frac{8}{x^2+2x+1}}$

7) $\frac{\frac{8c^2}{3c^3-9c^2-12c}}{\frac{40}{15c+15}}$

8) $\frac{\frac{t^2-t-20}{16t+8}}{\frac{25-t^2}{2t+1}}$

9) $\frac{\frac{1}{x}-4+\frac{x}{x+1}}{\frac{1-3x(x+1)}{5x+5}}$

תשובות סופיות:

1) $\frac{x^2}{3}$

2) 2.5

3) $\frac{1}{6t^3}$

4) $\frac{t-9}{54t^2}$

5) $\frac{(3y-1)(3-y)}{25}$

6) $\frac{x(x+1)}{2}$

7) $\frac{c}{c-4}$

8) $\frac{t+4}{-8(t+5)}$

9) $\frac{5}{x}$

מתמטיקה 1

פרק 2 - חזרה כללית - משוואות אלגבריות

תוכן העניינים

1. משוואות ממעלה ראשונה 47
2. מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה 49
3. משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון 52
4. משוואה ממעלה שנייה 53
5. משוואות דו-ריבועיות 55
6. משוואות עם פרמטרים 57
7. משוואות עם שורשים 59
8. משוואות עם ערך מוחלט 61
9. מערכת משוואות ממעלה שנייה 62
10. משוואות מתקדמות מסכמות 64
11. פישוט ביטויים ומשוואות ממעלה שלישית 67

משוואה ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה היא מהצורה: $ax=b$ (כלומר, החזקה של הנעלם היא 1).

פתרון של משוואה ממעלה ראשונה הוא $x=\frac{b}{a}$ כאשר $a\neq 0$.

שלבי הפתרון הם:

1. ביצוע מכנה משותף (במידה וצריך).
2. פתיחת סוגריים אם ישנם.
3. העברת אגפים וכינוס אברים דומים (בידוד הנעלם באגף אחד והמספרים באגף שני).
4. בידוד הנעלם ומציאתו ע"י חילוק במקדם שלו.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות ממעלה ראשונה):

א. $6x+2=8$

ב. $7-2x=7$

ג. $2x+x=24$

ד. $2x+6=8+x$

ה. $-7x+5+2x=4x-13$

ו. $6x-3+5-7x=x-5x-7$

ז. $2-5x+7=-3x+8$

ח. $x-2+5x=4-3x-5+7x+7$

2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פתיחת סוגריים):

א. $3(x-1)-4=2$

ב. $7x-4(3-4x)=-x$

ג. $6(4-x)-(6-x)=3x$

ד. $5x-(3x-7)4=21$

ה. $x(x-5)=x^2-7x+8$

ו. $(7-x)(1-x)-(x-3)^2=0$

3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה מספרי):

א. $\frac{x}{3}-\frac{x}{9}=-4$

ב. $\frac{4x}{15}-\frac{3x}{10}=1$

ג. $\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}x=x-\frac{7}{15}$

ד. $\frac{5x+1}{6}-\frac{6x-1}{5}=\frac{3x+1}{4}-1$

ה. $\frac{2}{5}(x-3)-\frac{3}{15}(4-x)=x+2$

ו. $5\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{7}\right)-x=1$

4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם נעלם במכנה):

א. $\frac{1}{4}-\frac{2}{x}=0$

ב. $\frac{1}{2}-\frac{x}{x-1}=0$

ג. $\frac{3}{x}=\frac{1}{x+2}$

ד. $\frac{5}{2x-1}=\frac{4}{3x+2}$

ה. $\frac{x+5}{3x^2}-\frac{1}{6x}=\frac{1}{x}$

ו. $\frac{1}{4x}+\frac{3}{x}=\frac{13}{2}$

5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה משותף ע"י פירוק לגורמים):

א. $\frac{x^2+2}{3x^2+5x}=\frac{3x-1}{9x+15}$

ב. $\frac{7}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}+\frac{3}{2-2x}=0$

ג. $\frac{3}{(2-x)^2}+\frac{5}{12-3x^2}=0$

ד. $\frac{4x^2-24x+36}{x-3}=12$

תשובות סופיות:

1) א. $x=1$ ב. $x=0$ ג. $x=8$ ד. $x=2$ ה. $x=2$ ו. $x=-3$

ז. $x=\frac{1}{2}$ ח. $x=4$.

2) א. $x=3$ ב. $x=\frac{1}{2}$ ג. $x=2\frac{1}{4}$ ד. $x=1$ ה. $x=4$ ו. $x=-1$.

3) א. $x=-18$ ב. $x=-30$ ג. $x=-1$ ד. $x=1$ ה. $x=-10$ ו. $x=-21$.

4) א. $x=8$ ב. $x=-1$ ג. $x=-3$ ד. $x=-2$ ה. $x=2$ ו. $x=\frac{1}{2}$.

5) א. $x=-6$ ב. $x=-7$ ג. $x=-7$ ד. $x=6\ ,\ x\neq 3$.

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

הגדרה:

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (ליניאריות) היא מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

כאשר a_1 , b_1 , c_1 ו- a_2 , b_2 , c_2 הם מקדמים מספריים.

דוגמאות למערכות של משוואות: $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=1 \end{cases}$, $\begin{cases} y=3x-1 \\ \frac{x+3}{2}=y+6 \end{cases}$.

פתרון של מערכת משוואות:

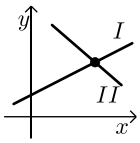
פתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור המקיים את כל המשוואות שבמערכת.

הצגה גרפית של מערכת משוואות:

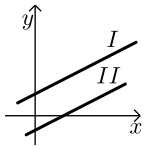
פתרון גרפי של מערכת משוואות הוא נקודת החיתוך של הישרים המייצגים כל משוואה.

יתכנו שלושה מצבים הדדיים בין שני ישרים:

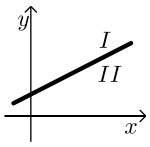
- הישרים נחתכים:
במקרה זה נקודת החיתוך תהיה פתרון המערכת.



- הישרים מקבילים:
במקרה זה לא יהיה פתרון למערכת.



- הישרים מתלכדים:
במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות למערכת המשוואות.



פתרון אלגברי של מערכת משוואות:

- פתרון ע"י שיטת ההצבה:
נבודד את אחד הנעלמים ממשוואה אחת ונציב אותו במשוואה השנייה.
נבחר בשיטה זו במקרים בהם קל לבודד נעלם באחת המשוואות.

- פתרון ע"י השוואת מקדמים:

1. כופלים (או מחלקים) משוואה אחת (או שתיהן) במספר השונה מאפס כך שתתקבלנה משוואות שקולות בעלות מקדמים נגדיים או זהים עבור אחד המשתנים.
2. מחברים (או מחסרים) את המשוואות ומקבלים משוואה חדשה עם נעלם אחד.
3. מוצאים את ערך הנעלם מהמשוואה החדשה ומציבים אותו באחת המשוואות המקוריות למציאת ערך הנעלם השני.

הערה:

נוח להשתמש בשיטת השוואת המקדמים ע"י כך שמעבירים את המערכת הנתונה למערכת שקולה שבה המשתנים באגף אחד והמספר החופשי באגף השני.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} 3x+y=11 \\ y=5 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} y=x-3 \\ y=2x+4 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} -3x+2y=-16 \\ x=5y+14 \end{cases}$

ד. $\begin{cases} 5x-2y=-2 \\ x+4y=4 \end{cases}$

ה. $\begin{cases} -5x+7y=-26 \\ x+3y=-8 \end{cases}$

ו. $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 5x+7y=11 \end{cases}$

2) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x+3y=5 \\ x-3y=3 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} 5x+2y=14 \\ 5x+3y=23 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 5y=2x \\ 4x=5y+8 \end{cases}$

ד. $\begin{cases} 4x=3y-29 \\ 5y=9-13x \end{cases}$

3) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x+2y=1 \\ 4x+8y=5 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} 2(x-y)+4y=1+x \\ 2-7y+x=3(x-y) \end{cases}$.

4) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} 3y-x+2=4x+2-3y \\ 2x-3-y=5y-4x+3 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} \frac{x-3}{8}-\frac{x+y}{16}=\frac{y-1}{4} \\ 3(2x-y)-4x-11=0 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} \frac{3x-1}{4}-\frac{2}{5}(x-y)=\frac{3}{10}(x+3) \\ \frac{x+1}{4}-\frac{y}{2}=1 \end{cases}$.

5) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=4 \\ \frac{5}{x}-\frac{1}{y}=4 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{3}{y}=2 \\ \frac{9}{x}-\frac{4}{y}=-7 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 4x-\frac{7}{y}=-3 \\ 5x+\frac{2}{y}=7 \end{cases}$

6) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x(y+2)+y=xy-5 \\ x-y=2 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} xy=20 \\ y(3x-4)=20 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 5x-4xy=22 \\ 6x+xy=-20 \end{cases}$

תשובות סופיות:

1) א. $(2,5)$ ב. $(-7,-10)$ ג. $(4,-2)$ ד. $(0,1)$ ה. $(1,-3)$ ו. $(-2,3)$.

2) א. $\left(4,\frac{1}{3}\right)$ ב. $\left(-\frac{4}{5},9\right)$ ג. $(4,1.6)$ ד. $(-2,7)$.

3) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות.

4) א. $(6,5)$ ב. $(7,1)$ ג. $(7,2)$.

5) א. $(1,1)$ ב. $(-3,1)$ ג. $(1,1)$.

6) א. $(-1,-3)$ ב. $(2,10)$ ג. $(-2,4)$.

משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה:

למשוואה ממעלה ראשונה מהצורה: $ax=b$ יתכן פתרון יחיד אם ורק אם $a\neq 0$ מכיוון שניתן לחלק ולכתוב: $x=\frac{b}{a}$.

כאשר $a=0$ מתקבלת המשוואה $0\cdot x=b$ ויתכנו שני מצבים:

1. אם $b=0$ את המשוואה היא $0x=0$ ויש אינסוף פתרונות המקיימים אותה.
2. אם $b\neq 0$ את המשוואה היא $0x=b\neq 0$ ואין אף ערך של x המקיים אותה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $x+4=6+x$

2) $3x+6-x=4+2x+2$

3) $6(x-2)=2x+5+4x$

4) $5x-3+x=4x+2x-3$

5) נתונה המשוואה: $3-2(x+2)=5x+\square$.

א. איזה מספר יש להציב ב-$\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 1?

ב. איזה מספר יש להציב ב-$\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 0?

ג. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב-$\square$ על מנת שלמשוואה יהיו אינסוף פתרונות.

ד. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב-$\square$ על מנת שלמשוואה לא יהיה פתרון.

תשובות סופיות:

1) אף פתרון.

2) אינסוף פתרונות.

3) אין פתרון.

4) אינסוף פתרונות.

5) א. 8- ב. 1- ג. $-7x-1$

ד. $-7x+k$ כאשר k הוא מספר כלשהו השונה מ- 1-.

משוואה ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

משוואה מהצורה: $ax^2+bx+c=0$, $(a\neq 0)$ נקראת משוואה ריבועית.

פתרונות המשוואה יסומנו ב- x_1 ו- x_2 ויחושבו לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

למשוואה ריבועית יתכנו שלושה סוגים של פתרונות:

1. **משוואה עם שני פתרונות ממשיים שונים.**
אם מתקבל מספר חיובי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים.
דוגמא: $x^2+5x-4=0$.

2. **משוואה עם פתרון ממשי אחד בלבד.**
אם מתקבל אפס בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד בלבד.
דוגמא: $x^2+4x+4=0$.

3. **משוואה ללא פתרונות ממשיים כלל.**
אם מתקבל מספר שלילי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה לא יהיו פתרונות ממשיים כלל.
דוגמא: $x^2+x+4=0$.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות:

א. $x^2+3x-10=0$

ב. $-x^2+10x-16=0$

ג. $25x^2-20x+4=0$

ד. $2x^2-6x+5=0$

2) פתור את המשוואות הבאות:

א. $4x^2-5x+7=4-x^2+13$

ב. $-x(x-5)=(1-3x)(1-x)+4$

ג. $2(x-5)^2-(2x-3)^2=10x+21$

ד. $(2x-1)^2+x(2x+3)=(x-1)(x-7)$

3) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת b):

א. $x^2-36=0$

ב. $32x^2-18=0$

ג. $4x-x(x+2)=3(x-1)-x-6$

ד. $(2x-1)^2+(2x+1)^2=10$

4) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת c):

א. $-7x^2-14x=0$

ב. $5x^2-x=0$

ג. $6x(x-2)-1=4x-3(x+1)+2$

ד. $(5x-2)^2=(x-2)(x+3)+10$

5) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\frac{4x+1}{3}-\frac{x+2}{2}=\frac{2}{x}$

ב. $\frac{x^2-9}{x+3}+x=x^2-18$

ג. $\frac{3}{2x+2}-\frac{2x-5}{2(x-1)^2}-\frac{4}{1-x^2}=0$

ד. $\frac{x}{2x^2-72}+\frac{2}{x^2+12x+36}=\frac{8x-15}{24-4x}+2$

תשובות סופיות:

1) א. $x_1=2\ ,\ x_2=-5$ ב. $x_1=2\ ,\ x_2=8$ ג. $x=\frac{2}{5}$ ד. אין פתרון.

2) א. $x_1=2\ ,\ x_2=-1$ ב. $x_1=1\ ,\ x_2=1\frac{1}{4}$ ג. $x_1=1\ ,\ x_2=-10$

ד. $x_1=0.6\ ,\ x_2=-2$.

3) א. $x=\pm 6$ ב. $x=\pm\frac{3}{4}$ ג. $x=\pm 3$ ד. $x=\pm 1$

4) א. $x_1=0\ ,\ x_2=-2$ ב. $x_1=0\ ,\ x_2=\frac{1}{5}$ ג. $x_1=0\ ,\ x_2=2\frac{1}{6}$

ד. $x_1=0\ ,\ x_2=\frac{7}{8}$.

5) א. $x_1=2\ ,\ x_2=-1.2$ ב. $x=5\ ,\ x\neq -3$ ג. $x_1=0\ ,\ x_2=-5$

ד. $x_1=-7.6\ ,\ x_2=-4\frac{2}{7}$.

משוואות דו-ריבועיות:

סיכום כללי:

משוואה דו-ריבועית היא משוואה מהצורה: $ax^4+bx^2+c=0$ כאשר הנעלם הוא x.
פתרון המשוואה יבוצע ע"י מעבר לפרמטר: $x^2=t \to at^2+bt+c=0$ ומציאתו.
לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה ולמצוא את ערכי x.

ניתן להביא משוואות לצורה זו ולהגדיר ביטוי המופיע בחזקות 2 ו-4
כגון: $\left(x^2-1\right)^2+3\left(x^2-1\right)-2=0$ באמצעות פרמטר: $t=x^2-1$
ובכך לפתור משוואה: $t^2+3t-2=0$ ולהחזיר את ההצבה עבור מציאת x.
דרך הפתרון תקפה לכל משוואה בה הנעלם מופיע בחזקות כפולות כגון 3 ו-6, או 4 ו-8.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $5x^4+3x^2-8=0$

2) $x^4-3x^2+2=0$

3) $13x^2\left(3x^2-1\right)-2=3\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)$

4) $x^2\left(x^2+1\right)=10\left(3x^2-10\right)$

5) $x^6+x^3=56$

6) $x^3+4=\frac{32}{x^3}$

7) $x-9\sqrt{x}+14=0$

8) $x^8-4x^4-50=31x^4-84$

9) $125x^6-1=124\left(x^6+x^3+1\right)$

10) $\left(2x^2-x\right)^2-4\left(2x^2-x\right)+3=0$

11) $\left(x^2+2x\right)^2+7x^2+14x=-6$

12) $\frac{21}{x^2-4x+10}=6+x^2-4x$

13) $\frac{12}{x^2+2x-8}=1+\frac{7.5}{x^2+2x-3}$

14) $\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\frac{7}{6}-\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}$

15) $\frac{3}{3x^2-15}+\frac{1}{x^2+5}=\frac{10}{x^4-25}$

16) $\frac{x^2-1}{4x^2-28}+2=\frac{9}{x^4-8x^2+7}+\frac{x^2}{2x^2-2}$

17) $\left(2x+\frac{3}{x}\right)^2+35=12\left(2x+\frac{3}{x}\right)$

18) $\frac{3x^4}{(x+2)^2}+\frac{3x^2}{x+2}=6$

19) $\left(2x-x^2+3\right)\left(2x-x^2-2\right)=0$

20) $\left(x^2-5x+6\right)\left(x^2-5x-8\right)=-24$

תשובות סופיות:

1) $x=\pm 1$

2) $x=\pm 1,\pm\sqrt{2}$

3) $x=\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{3}$

4) $x=\pm 2,\pm 5$

5) $x_1=\sqrt[3]{7}\ ,\ x_2=-2$

6) $x=-2,\sqrt[3]{4}$

7) $x_1=4\ ,\ x_2=49$

8) $x_{1,2}=\pm\sqrt[4]{34}\ ,\ x_{3,4}=\pm 1$

9) $x=5,-1$

10) $x_1=1.5\ ,\ x_2=-1\ ,\ x_3=1\ ,\ x_4=-\frac{1}{2}$

11) $x=-1$

12) $x_{1,2}=1,3$

13) $x_1=0\ ,\ x_2=-2\ ,\ x_3=3.06\ ,\ x_4=-5.06$

14) $x_1=0\ ,\ x_2=-2$

15) אין פתרונות.

16) $x=\pm\sqrt{\frac{3}{7}}$

17) $x=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},3$

18) $x=-1,2$

19) $x=3,-1$

20) $x=\pm 1,4,6$

משוואות עם פרמטרים:

סיכום כללי:

משוואה עם פרמטר הינה משוואה שמכילה שני סוגים של גדלים – משתנים ופרמטרים.
את המשתנים מקובל לסמן באותיות x , y , z ואת הפרמטרים מסמנים בשאר האותיות.
פתרון המשוואה יתקבל ע"י בידוד המשתנה כך שיבוטא באמצעות הפרמטר/ים שבמשוואה.

למשל פתרון המשוואה: $mx=4$ (כאשר x הוא הנעלם ו- m הוא פרמטר) הוא $x=\frac{4}{m}$

אשר מבוטא באמצאות הפרמטר m.

בכתיבת פתרון של משוואה עם פרמטרים יש לציין את תחום ההגדרה של הפרמטר עבורו הפתרון הוא בעל משמעות. בדוגמא הנ"ל תחום ההגדרה הוא $m\neq 0$.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות:

א. $3x-b=(b+1)x-6$

ב. $\frac{1}{3}(a-3x)=\frac{1}{a}(ax-3)$

ג. $(x-2a)(x-2b)=x^2-2(a^2+b^2)$

ד. $\frac{m+1}{x-1}=\frac{m-1}{x+1}$

ה. $\frac{x}{a^2-a}-\frac{1}{2a}=\frac{ax+x}{2a^3-4a^2+2a}-\frac{2}{a^3-2a^2+a}$

2) פתור את מערכות המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x+my=1 \\ x+y=m \end{cases}$

ב. $\begin{cases} ax+y=2 \\ x+ay=4 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} \frac{x}{m}+y=m \\ x-m^2y=1 \end{cases}$

ד. $\begin{cases} (m-1)x-(2m+3)y=5 \\ (m+2)x-(2m-1)y=10m \end{cases}$

ה. $\begin{cases} (2a+b)x-(2a-b)y=8ab \\ (2a-b)x+(2a+b)y=8a^2-2b^2 \end{cases}$

3) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

א. $x^2-2mx+m^2-1=0$

ב. $x^2-2x+4a=a^2+3$

ג. $x^2+m(x+10)=2m^2-5x$

ד. $\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+x}=0$

ה. $(m^2+1)x^2-m^2x-1=0$

ו. $\frac{a}{x}+\frac{1}{b}=\frac{x}{a}+b$

ז. $x+\frac{1}{x}=\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}$

תשובות סופיות:

1) א. $x=\frac{b-6}{2-b}\ ,\ b\neq 2$ ב. $x=\frac{a^2+9}{6a}\ ,\ a\neq 0$ ג. $x=a+b$ ד. $x=-m$ ה. $x=a+1$

2) א. $m\neq 1\ ,\ (m+1,-1)$ ב. $a\neq \pm 1\ ,\ \left(\frac{2a-4}{a^2-1},\frac{4a-2}{a^2-1}\right)$

ג. $m\neq 0-1\ ,\ \left(m^2-m+1,\frac{m-1}{m}\right)$ ד. $m\neq 1,-2\ ,\ (2m+1,m-2)$

ה. $b\neq \pm 2a\ ,\ (2a+b,2a-b)$

3) א. $x=m+1,\mathrm{m}-1$ ב. $x=a-1,3-a$ ג. $x=m-5,-2m$

ד. $a\neq 0\ ,\ x\neq \pm a\ ,\ x=\pm a\sqrt{3}$ ה. $x=1,-\frac{1}{m^2+1}$

ו. $a,b\neq 0\ ,\ x=\frac{a}{b},-ab$ ז. $a\neq \pm b\ ,\ x=\frac{a+b}{a-b},\frac{a-b}{a+b}$.

משוואות עם שורשים:

סיכום כללי:

פתרון משוואה מהצורה: $\sqrt{x}=a$ יתקבל ע"י העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה באופן הבא: $\left(\sqrt{x}\right)^2=\left(a\right)^2 \quad \rightarrow \quad x=a^2$.

הערות:

1) יש לזכור בעת העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה יש לבדוק את כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבתם במשוואה המקורית.
2) למשוואה מהצורה $\sqrt{x}=a$ שבה $a<0$ אין פתרון.
3) יש לסדר תחילה משוואות שבהן הביטוי עם שורש אינו מבודד.
4) במשוואות שבהן יותר מביטוי אחד עם שורש יש לבודד תחילה את אחד הביטויים, להעלות בריבוע ולאחר מכן לחזור על התהליך ולבצע העלאה בריבוע פעם נוספת.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $\sqrt{2x+5}=7$
2) $\sqrt{x+2}=x$
3) $\sqrt{3x+1}+x=13$
4) $\sqrt{2x+7}+4=x$
5) $\sqrt{x-1}+3=x$
6) $\sqrt{10x+6}+9=x$
7) $\sqrt{x+6}-2=2x$
8) $\sqrt{24-x}+3=2x$
9) $\sqrt{x+16}+4=2x$
10) $2x=16-3\sqrt{x-1}$
11) $\sqrt{3x+5}=\sqrt{x+17}$
12) $\sqrt{x^2-5x+12}=2\sqrt{6-x}$
13) $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x-5}=\sqrt{11-x^2}$
14) $\sqrt{2x-1}+3=\sqrt{7x+1}$
15) $\sqrt{9x-8}-3\sqrt{x+4}=-2$
16) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{3-x}=2$
17) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{4x+1}$
18) $\sqrt{2x-2}+\sqrt{5x-4}=\sqrt{3x-2}$
19) $3\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-3}=2\sqrt{x+2}$

תשובות סופיות:

1) $x=22$

2) $x=2$

3) $x=8$

4) $x=9$

5) $x=5$

6) $x=25$

7) $x=0.25$

8) $x=3.75$

9) $x=4.25$

10) $x=5$

11) $x=6$

12) $x=4,-3$

13) $x=3$

14) $x=5$

15) $x=12$

16) $x=2,2\frac{8}{9}$

17) $x=6$

18) $x=1$

19) $x=2$

משוואות עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

הגדרה:

ערך מוחלט הינו המרחק של מספר מ-0 ומוגדר באופן הבא: $|x|=\begin{cases} x & x\ge 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$.

משוואה עם ערך מוחלט:

משוואה עם ערך מוחלט היא מהצורה: $|x|=a$.

כדי לפתור משוואה עם ערכים מוחלטים יש למצוא את נקודות האפס של כל ערך מוחלט (קרי: הנקודות בהן הביטוי שבתוך הערך המוחלט מתאפס) ולפצל את המשוואה הנתונה לתחומים עבור כל תחום.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $|3x+14|=7$

2) $|3x-24|=x$

3) $|12-x|=3x$

4) $2x-|8-x|=10$

5) $|4x-5|=|2x+13|$

6) $|14-3x|=2|x+5|$

7) $|x|+7=|2x|$

8) $|x+2|+6=|2x-4|$

9) $|x+2|+|2x-6|=|4x+8|$

10) $|10-3x|-|x+4|=|2x-6|$

תשובות סופיות:

1) $x=-\frac{7}{3},\ -7$

2) $x=6,12$

3) $x=3$

4) $x=6$

5) $x=9,-1\frac{1}{3}$

6) $x=24,\frac{4}{5}$

7) $x=\pm 7$

8) $x=12,-1\frac{1}{3}$

9) $x=0,-12$

10) $x=0$

מערכת משוואות ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

מערכת משוואות ריבועיות מיוחסת למערכת של שתי משוואות (לפחות) שאחת מהן מכילה את אחד מהנעלמים בריבוע. למערכת משוואות ריבועיות יכולים להתקבל עד 4 פתרונות שונים. יש לפתור את המערכת לפי הטכניקות הרגילות של בידוד והצבה או השוואת מקדמים.

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ x+y=6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2+y^2=36 \\ x^2+3y=10 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x^2+4y^2=16 \\ 5x^2-3y^2=17 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2-2y^2=17 \\ xy=-10 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2-xy-20y^2=0 \\ x+6y=1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2-2xy+8y^2=8 \\ 3xy-2y^2=4 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2-y^2=33 \\ x+y=11 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 16x^2-y^2=391 \\ 4x-y=23 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 4xy+x=-15 \\ \frac{3}{y}-2x=16 \end{cases}$

10) $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=5 \\ \frac{4}{y}-\frac{1}{x}=-19 \end{cases}$

11) $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{5}{y}=21 \\ \frac{8}{x}-\frac{1}{y}=13 \end{cases}$

12) $\begin{cases} xy=24 \\ (y-x)^2-7(y-x)+10=0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x^2y-xy^2=84 \\ x^2-2xy+y^2+5x-5y=24 \end{cases}$

14) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{10}{3} \\ x^2+y^2=9xy+25 \end{cases}$

תשובות סופיות:

1) $(2,4),(4,2)$

2) $(\pm 4,-2)$

3) $(\pm 2,\pm 1)$

4) $(5,-2),(-5,2)$

5) $\left(-2,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{5}{11},\frac{1}{11}\right)$

6) $\left(3,\frac{1}{2}\right),\left(-3,-\frac{1}{2}\right),(2,1),(-2,-1)$

7) $(7,4)$

8) $(5,-3)$

9) $\left(-5,\frac{1}{2}\right)$, $\left(-24,-\frac{3}{32}\right)$

10) $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{4}\right)$

11) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

12) $(4,6)$, $(-6,-4)$, $(3,8)$, $(-8,-3)$

13) $(-1.65,6.35)$, $(-6.35,1.65)$, $(7,4)$, $(-4,-7)$

14) $(5,45)$, $(-5,-45)$, $(45,5)$, $(-45,-5)$

משוואות מסכמות מתקדמות:

סיכום כללי:

תזכורת מהירה:

- משוואה דו-ריבועית יכולה להופיע בכל תצורה (עם שורשים, עם ערכים מוחלטים וכו').
העיקרון הוא זיהוי תבנית של הנעלם אשר חוזרת על עצמה לאורך המשוואה.
סימון התבנית במשתנה זמני ופתרון עבור משתנה זה תוביל למשוואה מוגדרת ופתירה.
לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה לתבנית של המשתנה המקורי ולמצוא את ערכיו.

- דרך הפתרון של משוואה עם שורשים היא ע"י בידוד השורש והעלאה בריבוע.
במידה ויש יותר משורש אחד המופיעים בחיבור/חיסור יש לבצע את הפעולה פעמיים.
חשוב לוודא נכונות של כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבה במשוואה המקורית לפני ההעלאות בריבוע.

- דרך הפתרון של משוואה עם ערכים מוחלטים היא ע"י פיצול המשוואה לתחומים לפי סימני הערך המוחלט. זאת יש לבצע ע"י איפוס הביטוי שבכל ערך מוחלט ומציאת ערכי הנעלם המקיימים זאת, חלוקת המשוואה לתחומים מתאימים ופתרונה בכל תחום.
יש לזכור לבדוק האם הפתרון המתקבל נמצא בתחום הפתרון – במידה וכן הוא פתרון של המשוואה, אחרת הוא נפסל.

- משוואה עם פרמטר/ים נפתרת בצורה רגילה (התייחסות לפרמטר/ים כאל קבועים מספריים) כאשר יש לציין את תחומי ההגדרה שלהם. יש לבדוק פתרונות שמתקבלים המבוטאים באמצעות הפרמטר/ים במידה וקיימת הגבלת תחום הגדרה במשוואה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $x+\sqrt{x+6}-6=0$

2) $x^2+5x-\sqrt{x^2+5x}-30=0$

3) $4x^2+16x-4\sqrt{x^2+4x}-3=0$

4) $2x^2+6x-\sqrt{x^2+3x+5}=5$

5) $x^2-\sqrt{16x^2+48}+7=0$

6) $x^2-\sqrt{6x^2-15}=1$

7) $\frac{x^2}{\sqrt{3x-2}}-\sqrt{3x-2}=1-x$

8) $\frac{\sqrt{x^2+4x-12}}{\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+5}=\frac{7}{\sqrt{x-1}}$

9) $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2+2x-3}$

10) $\sqrt{x+\sqrt{14x-49}}+\sqrt{x-\sqrt{14x-49}}=\sqrt{14}$

11) $\sqrt{x+6+6\sqrt{x-3}}-\sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}}=2$

12) $\frac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\frac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=\frac{3}{x}$

פתור את המשוואות הבאות עבור $a>0$:

13) $x^2+ax-2a\sqrt{x^2+ax-a^2}=0$

14) $x^2+ax-2a\sqrt{3x^2+3ax-9a^2}=0$

פתור את המשוואות הבאות:

15) $\left|3-\left|2-x\right|+\left|x\right|\right|=1$

16) $\left|4-\left|5-x\right|\right|=\left|x+3\right|$

17) $\left|\frac{x+\left|3-x\right|}{x+2}\right|=18$

18) $\sqrt{25+\left|16x^2-25\right|}=4+4\left|x+1\right|$

19) $\frac{x^3-5x}{\sqrt{2x^2-4x-1}-\left|x\right|+2}=0$

20) הראה כי אין פתרון למשוואה הבאה: $\frac{\left|x+2\right|}{\left|x\right|+2}=\left|2-x\right|+2$.

תשובות סופיות:

1) $x=3$

2) $x_1=4\ ,\ x_2=-9$

3) $x_1=0.5\ ,\ x_2=-4.5$

4) $x_1=1\ ,\ x_2=-4$

5) $x_{1,2}=\pm 1$

6) $x_{1,2}=\pm 2$

7) $x=1$.

8) $x=3$.

9) $x=2$.

10) $3.5\le x\le 7$.

11) $x=4$.

12) $x=1\ ,\ x=\frac{9}{16}$.

13) $x_1=-2a\ ,\ x_2=a$

14) $x_1=-2a\ ,\ x_2=3a$

15) $x\le 0$.

16) $x=-1$.

17) $x=-\frac{39}{18},-\frac{33}{18}$.

18) $x\le\frac{5}{4}\ ,\ x=-\frac{1}{4}$.

19) $x=-\sqrt{5}$.

20) שאלת הוכחה.

ביטויים ומשוואות ממעלה שלישית:

סיכום כללי:

נוסחאות הכפל המקוצר ממעלה שלישית:

$$(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 \pm b^3 = (a\pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

שאלות:

פישוט ביטויים:

פשט את הביטויים הבאים:

1) $(x-3)^3$

2) $(2y+5)^3$

3) $8x^3-1$

4) $8y^3+343$

5) a^6-27

6) $x^3y^6z^9-1$

7) $11+88x^{12}$

8) $64mn^4-8m^4n^7$

9) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^3+6x^2+12x+8}$

10) $\dfrac{x^3+64}{x^2+4x}$

משוואות בנעלם אחד עם נוסחאות הכפל המקוצר:

פתור את המשוואות הבאות:

11) $x^3-12x^2+48x-64=0$

12) $125x^3=1-15x+75x^2$

13) $x^3+x-30=0$

14) $x^3-7x-6=0$

משוואות בנעלם אחד עם פירוקים שונים:

פתור את המשוואות הבאות:

15) $2x^3-7x^2+7x-2=0$

16) $2x^3+5x^2-2x-5=0$

מערכת משוואות:

17) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} x^3+y^3=243 \\ x+y=9 \end{cases}$.

18) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} x^3-y^3=91 \\ x^2y-xy^2=30 \end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $x^3-9x+27x-27$

2) $(2x-1)(4x^2+2x+1)$

3) $(a^2-3)(a^4+3a^2+9)$

4) $8(1+2x^4)(1-2x^4+4x^8)$

5) $\frac{1}{x+2}$

6) $x=4$

7) $x=3$

8) $x_{1,2,3}=\frac{1}{2}, 1, 2$

9) $(3,6), (6,3)$

10) $8y^3+60y^2+150y+125$

11) $(2y+7)(4y^2-17y+49)$

12) $(xy^2z^3-1)(x^2y^4z^6+xy^2z^3+1)$

13) $8mn^4(2-mn)(4+2mn+m^2n^2)$

14) $\frac{x^2-4x+16}{x}$

15) $x=\frac{1}{}$

16) $x_{1,2,3}=-2, -1, 3$

17) $x_{1,2,3}=-2.5, -1, 1$

18) $(-5,-6), (6,5)$

מתמטיקה 1

פרק 3 - חזרה כללית - אי שוויונים אלגבריים

תוכן העניינים

1. אי שוויונים ממעלה ראשונה 69
2. אי שוויונים ממעלה שנייה 71
3. אי שוויונים ממעלה שלישית 72
4. אי שוויונים עם מנה 73
5. אי שוויונים כפולים מערכות וגם ואו 75
6. שאלות מסכמות 76
7. מציאת תחום הגדרה 78
8. אי שוויונים עם ערך מוחלט 80
9. אי שוויונים עם שורשים 83

אי-שוויונים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

פעולות המותרות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

פעולות אסורות לביצור בפתרון אי-שוויון:

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $45x-26>109$

2) $6x>2(3x-1)$

3) $2(x-5)\geq\frac{1}{2}(4x+6)$

4) $(x-2)^2+4<(x+2)^2+20$

5) $\frac{8x-4}{2}<\frac{9(x+1)}{3}$

6) $4(6x-8)<8(3x-4)$

7) $\frac{x-6}{3}-\frac{x-4}{4}\geq 12-x$

8) $\frac{7-x}{10}-\frac{3x-1}{5}+\frac{x+4}{3}<7$

תשובות סופיות:

1) $x>3$

2) כל x

3) אף x

4) $x>-2$

5) $x<5$

6) אף x

7) $x\geq 12$

8) $x>-13$

אי-שוויונים ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

אי שוויון ריבועי הוא מהצורה: $ax^2+bx+c \overset{>}{\underset{<}{}} 0$ כאשר $a \neq 0$.

כדי לפתור אי שוויון ריבועי יש למצוא את נקודות האפס של הביטוי הריבועי ולאחר מכן למצוא את תחום ההצבה עבורו הביטוי מקיים את אי השוויון עצמו.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $x^2<144$

2) $x^2-12x>-32$

3) $(x+2)(x+5)<0$

4) $(x+2)(x+4)<35$

5) $-x^2+13x+30<0$

6) $(x-3)(x-7)\geq 8x-56$

7) $(x-5)^2+x(x+2)<89$

8) $(5x+6)^2\leq 4(x-3)^2$

9) $-3x^2+12x>0$

10) $x^2-10x+25>0$

11) $(x-3)^2>(x-1)(x+6)-x^2-3x$

12) $2x^2+2x+24\geq 0$

תשובות סופיות:

1) $-12<x<12$

2) $x<4\ ,\ x>8$

3) $-5<x<-2$

4) $-9<x<3$

5) $x<-2\ ,\ x>15$

6) $x\leq 7\ ,\ x\geq 11$

7) $-4<x<8$

8) $-4\leq x\leq 0$

9) $0<x<4$

10) $x>5\ ,\ x<5$

11) $x<3\ ,\ x>5$

12) כל x

אי-שוויונים ממעלה שלישית:

סיכום כללי:

אי שוויונים ממעלה גבוהה מיוחסים לכאלה שניתן לכתוב אותם בצורה של פולינומים, כגון: $x^3-4x^2+4x+1>0$, $x^4+2x^2+1<0$ וכו'.

בפועל נפתור אותם ע"י פירוק לגורמים ומציאת נקודות האפס של כל גורם.

לאחר מכן נבדוק את כל אחד מתחומי המספרים המתקבלים עבור הנעלם ונראה באלו מהם מתקבל פסוק אמת.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $(x-1)(x-2)(x-3)>0$

2) $x(x^2+x+1)>0$

3) $(-2x^2-3x+2)(x+1)\le 0$

4) $x^3-25x\ge 0$

5) $(x^2+3x+5)(x-2)>0$

6) $(x^2+8x+20)(3x-5)\le 0$

7) $(x^2-x-6)(x-1)<0$

8) $x^3-6x^2+9x\le 0$

9) $(x^2+6)(x+3)>0$

10) $(x-2)(x-4)(x-1)<0$

תשובות סופיות:

1) $1<x<2\ ,\ x>3$

2) $x>0$

3) $-2\le x\le -1\ ,\ x\ge \frac{1}{2}$

4) $-5\le x\le 0\ ,\ x\ge 5$

5) $x>2$

6) $x\le 1\frac{2}{3}$

7) $x<-2\ ,\ 1<x<3$

8) $x\le 0\ ,\ x=3$

9) $x>-3$

10) $x<1\ ,\ 2<x<4$

אי-שוויונים עם מנה:

סיכום כללי:

אי שוויון מהצורה: $\frac{f(x)}{g(x)}>0$ (או $\frac{f(x)}{g(x)}<0$) נקרא אי-שוויון עם מנה, בו $f(x)$ ו-$g(x)$ הם פולינומים כלשהם.

למשל: $\frac{2x+4}{x^2-3x+4}<0$ בו: $f(x)=2x+4$ ו-$g(x)=x^2-3x+4$.

כדי לפתור אי שוויון עם מנה נמצא את נקודות האפס של $f(x)$ ושל $g(x)$ ונציב מספרים בתחומים המתקבלים. אלו שיתנו פסוק אמת יהוו את פתרון אי השוויון.

הערות:

- ניתן לבצע כפל של המכנה בריבוע בכדי להעביר את אי השוויון לצורה של מכפלות.
- ניתן להעביר אי שוויון המכיל מספר מנות ומספרים שלמים לצורה הנ"ל ע"י פעולות אלגבריות מתאימות תחילה.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $\frac{x-1}{x^2-9}>0$

2) $\frac{x-1}{3x+2}\geq -3$

3) $\frac{1}{x^2-16}>0$

4) $\frac{x-3}{2x^2-10x+12}>0$

5) $\frac{2x-1}{x-5}\leq 0$

6) $\frac{1}{-3(x-1)}<0$

7) $\frac{x-1}{x+2}\leq 1$

8) $\frac{1}{x^2-5x+6}<0$

9) $\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7}\geq 0$

10) $\frac{1}{x^2-8x+12}\geq 0$

תשובות סופיות:

1) $-3<x<1\ ,\ x>3$

2) $x<-\frac{2}{3}\ ,\ x\geq-\frac{1}{2}$

3) $x<-4\ ,\ x>4$

4) $2<x<3\ ,\ x>3$

5) $\frac{1}{2}\leq x<5$

6) $x>1$

7) $x>-2$

8) $2<x<3$

9) $1\leq x\leq 6$

10) $x<2\ ,\ x>6$

אי-שוויונים כפולים - מערכת וגם:

סיכום כללי:

אי-שוויון כפול הוא צורה מקוצרת להציג שני אי-שיווינים אשר יש לפתור יחד (קרי: כמערכת 'וגם'). למשל במקום לכתוב: $a<b$ וגם $b<c$, ניתן לכתוב: $a<b<c$.

מכאן כי כדי לפתור אי שוויון כפול יש לפצל אותו תחילה לשני אי-שיווינים ולפתור כל אחד בנפרד. לאחר מכן יש לקחת את חיתוך הפתרונות.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $3<x+1<5$

2) $0<\frac{1}{x+4}<2$

3) $-1<\frac{x-1}{x+1}<1$

4) $0<\frac{8-3x}{5-2x}<4$

5) $6x-38\le x-3\le 5x+7$

6) $6<\frac{2x+10}{3}\le\frac{7x-20}{5}$

7) $-1\le\frac{2x-6}{4}<\frac{x+2}{3}$

8) $\frac{4x+5}{15}>\frac{3x-8}{5}+\frac{9-x}{3}>11$

תשובות סופיות:

1) $2<x<4$

2) $x>-3\frac{1}{2}$

3) $x>0$

4) $x<2\frac{2}{5}\ ,\ x>2\frac{2}{3}$

5) $-2.5\le x\le 7$

6) $x\ge 10$

7) $1\le x<13$

8) ϕ

שאלות מסכמות – אי-שוויונים:

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $x \le -\frac{3}{4} \cap \{-2 < x \le 5 \ \cup \ 0 < x < 8\}$

2) $x(x+5)-3x+15 \le 2x-1-x(4-x)$

3) $\frac{(x-3)(x+4)}{2-x} \le 0$

4) $\frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)} < 0$

5) $\frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)} \ge 0$

6) $x(x+3)(2x-5) < 0$

7) $\frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2} > 0$

8) $\frac{5-2x}{(x-8)^2} \le 0$

9) $\frac{x-3}{x^2+2} > 0$

10) $\frac{x^2-4x}{x^2+2x-3} > 0$

11) $\frac{x^2-6x+9}{x^3-x} > 0$

12) $\frac{x-7}{x^2+x+3} > 0$

13) $\frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2}$

14) $\frac{2x^2}{x^2-6x+8} \ge \frac{x}{x-4} - \frac{x}{x-2}$

15) $6 < 5x - x^2 \cap x^2 > 3x+10$

16) $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x} > 0 \ \cup \ \frac{1}{x-3} < \frac{1}{1-x}$

17) $1 < \frac{x-1}{x-4} \le 2$

18) לאלו ערכי x נמצאת הפונקציה $f(x) = \frac{x}{x-3}$ מעל הפונקציה: $g(x) = \frac{x+1}{x+3}$?

תשובות סופיות:

1) $-2 < x \le -\frac{3}{4}$

2) $x \le -4$

3) $-4 \le x < 2 \, , \, 3 \le x$

4) $x < -7 \, , \, -\frac{1}{3} < x < 2 \, , \, x > 5$

5) $-1 < x \le 1.5 \, , \, 4 < x \le 12$

6) $x < -3 \, , \, 0 < x < 2.5$

7) $x < -1 \, , \, 2 < x < 6 \, , \, x > 6$

8) $2.5 \le x < 8 \, , \, x > 8$

9) $x > 3$

10) $x < -3 \, , \, 0 < x < 1 \, , \, x > 4$

11) $-1 < x < 0 \, , \, 1 < x < 3 \, , \, x > 3$

12) $x > 7$

13) $x < -2 \, , \, 2 < x < 4$

14) $x \le 0 \, , \, 1 \le x < 2 \, , \, x > 4$

15) אף x

16) $x \ne 1$

17) $x \ge 7$

18) $-3 < x < -\frac{3}{5} \, , \, x > 3$

תחום הגדרה:

שאלות:

1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{3x-4}$

ב. $f(x)=\sqrt{x^2-5x-6}$

ג. $f(x)=\sqrt{12x-x^2-x^3}$

ד. $f(x)=\sqrt{\frac{x+5}{x^2-4}}$

ה. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+2}-x}$

ו. $f(x)=\frac{\sqrt{3x^2-2x-1}}{2x-3}$

2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+2}-3}$

ב. $f(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$

ג. $f(x)=\sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}}$

ד. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$

3) תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x)=\sqrt{ax-x^2-4}$ הוא $1\le x\le 4$.
מצא את ערכו של הפרמטר a.

4) תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$ הוא $x\le -2\ ,\ x>2$.
מצא את ערכו של הפרמטר a.

5) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+6}-a}$, (a פרמטר חיובי).

א. הבע באמצעות a את תחום הגדרתה.

ב. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=\sqrt{\frac{2x}{x+5}}$.
ידוע כי תחום ההגדרה של שתי הפונקציות מכסה את כל ציר המספרים.
מצא את תחום הערכים האפשרי של הפרמטר a.

תשובות סופיות:

1) א. $x \ge 1\frac{1}{3}$ ב. $x \le -1 , x \ge 6$ ג. $x \le -4 , 0 \le x \le 3$

ד. $-5 \le x < -2 , x > 2$ ה. $-2 \le x < 2 , x > 2$ ו. $x \le -\frac{1}{3} , 1 \le x < \frac{3}{2} , x > \frac{3}{2}$

2) א. $x \ge 7$ ב. $-6 \le x \ne -2$ ג. $x \le -1\frac{1}{2} , x \ge 1$

ד. $-2 \le x \ne 1 , x \le -3$.

3) $a = 5$.

4) $a = 2$.

5) א. $x \ge a^2 - 6$ ב. $0 < a \le 1$.

אי שוויונים עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

כללים לפתרון אי שוויון עם ערך מוחלט יחיד:

מקרה	$\lvert x\rvert < a$	$\lvert x\rvert > a$
פתרון	$-a < x < a$	$x < -a \cap x > a$

כללים לפתרון אי שוויון עם מספר ערכים מוחלטים:

- נמצא את הנקודות המאפסות כל ביטוי עם ערך מוחלט.
- מחלקים את אי השוויון לתחומים לפי נקודות האפס.
- פותרים את אי השוויון לכל תחום בנפרד.
- כותבים פתרון כללי (מערכת או) לכל התחומים יחדיו.

שאלות:

1) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $\lvert x+2\rvert < 3$

ב. $\lvert 2x+1\rvert > 7$

ג. $\lvert 6-2x\rvert < x$

ד. $\lvert 2x+1\rvert - 3x > 4$

2) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $1 < \lvert 4-3x\rvert < 7$

ב. $\lvert 2x+3\rvert < 8 < \lvert 5-x\rvert$

3) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $\lvert x^2+6x-4\rvert < 12$

ב. $\lvert x^2+x-10\rvert > 3x-2$

ג. $\lvert x^2-3x\rvert < 4$

ד. $\lvert 6x^2-7x-4\rvert > 1$

ה. $x^2-6\lvert x\rvert+5 \le 0$

ו. $x^2-6\lvert x+1\rvert-1 > 0$

4) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $|x-3|+|2x+2|>7$

ב. $|x+8|<11-|1-3x|$

ג. $|3-2x|-11>4-|6+x|$

ד. $|2x-6|+|x+5|>14-|1-x|$

ה. $|5+4x|-|3-x|+\left|4-\frac{1}{2}x\right|\le 22$

ו. $|x+3|+|x^2-5x+4|<19$

5) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $\left|\frac{3x-1}{x-2}\right|\ge 3$

ב. $1\le\left|\frac{x+2}{x-2}\right|\le 2$

ג. $\frac{|x-6|+8x}{x-12}\le 12$

ד. $\left|\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}\right|>5$

6) פתור את אי-השוויונים הבאים (ערך מוחלט ושורשים):

א. $\sqrt{x^2-|x-12|}<x$

ב. $2-\sqrt{1-x}\le|x+2|-3$

ג. $\sqrt{|2x+1|-x-1}\le 4-|3x|$

ד. $\frac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}}>0$

תשובות סופיות:

1) א. $-5<x<1$ ב. $3<x$ או $x<-4$

ג. $2<x<6$ ד. $x<-1$.

2) א. $1\frac{2}{3}<x<3\frac{2}{3}$ או $-1<x<1$ ב. $-5\frac{1}{2}<x<-3$

3) א. $-2<x<2$ או $-8<x<-4$ ב. $4<x$ או $x<2$

ג. $-1<x<4$ ד. $x>\frac{5}{3}$, $-\frac{1}{3}<x<\frac{3}{2}$, $x<-\frac{1}{2}$

ה. $1\le x\le 5$ או $-5\le x\le -1$ ו. $x<-5$, $x>7$

4) א. $2<x$ או $x<-2$ ב. $-1<x<1$

ג. $4<x$ או $x<-6$ ד. $4<x$ או $x<-1$

ה. $-7\frac{3}{7}\le x\le 4$ ו. $-2<x<6$.

5) א. $\frac{7}{6}\le x<2$, $x>2$ ב. $0\le x\le\frac{2}{3}$, $x\ge 6$

ג. $x<12$, $x\ge 46$ ד. $\frac{1}{2}<x<1$, $1<x<2$, $2<x\le 4$

6) א. $x=-1$, $x\ge 3$, $x\ne 12$ ב. $x\le\frac{-15+\sqrt{33}}{2}$

ג. $0\le x\le 1$, $-1\le x\le -\frac{2}{3}$ ד. $-1<x<\sqrt[3]{4}$

אי שוויונים עם שורשים:

סיכום כללי:

מקרים בפתרון אי-שוויונות עם שורשים:

מקרה	אי השוויון	פתרון
$a \geq 0$	$\sqrt{f(x)} < a$	$0 \leq f(x) < a^2$
$a < 0$	$\sqrt{f(x)} < a$	אין פתרון
	$\sqrt{f(x)} > a$	כל x בת.ה. של $f(x)$

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

1) $\sqrt{x+3} < 7$

2) $\sqrt{2x-5} \geq 1$

3) $\sqrt{2x^2+5x-6} > 2-x$

4) $\sqrt{x^2+x-6} < x-3$

5) $\sqrt{x^2+3x+2} - 1 < \sqrt{x^2-x+1}$

6) $\sqrt{x^2+5x+6} - \sqrt{x^2-x+1} < 1$

7) $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} > \frac{3}{2}$

8) $\frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2$

9) $\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{4}} < \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$

10) $\sqrt{2-\sqrt{3+x}} < \sqrt{4+x}$

11) $\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}$

12) $\sqrt{1+\frac{9}{x}} + 5\sqrt{\frac{x}{x+9}} \geq 4$

תשובות סופיות:

1) $-3 \le x < 46$.

2) $x \ge 3$.

3) $x < -10$, $x > 1$.

4) $\varnothing$.

5) $-1 \le x < \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$, $x \le -2$.

6) $-2 \le x < \frac{-13+\sqrt{73}}{16}$, $x \le -3$.

7) $\frac{12}{25} < x \le \frac{1}{2}$.

8) $x < 2\sqrt{5} - 4$.

9) $1 < x \le \frac{2}{\sqrt{3}}$.

10) $-\frac{3+\sqrt{5}}{2} < x \le 1$ שזה: $-2.618 < x \le 1$.

11) $2.5 \le x < 3$.

12) $x < -9$, $x > 0$.

מתמטיקה 1

פרק 4 - חזרה כללית - חוקי החזקות והשורשים

תוכן העניינים

1. חוקי החזקות 85
2. חוקי השורשים 90
3. כתיבה מדעית של מספרים 94

חוקי החזקות:

סיכום כללי:

סיכום חוקי החזקות:

1. $a^0=1$
2. $a^1=a$
3. $a^n\cdot a^m=a^{m+n}$
4. $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$
5. $\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$
6. $a^m\cdot b^m=\left(a\cdot b\right)^m$
7. $\frac{a^m}{b^m}=\left(\frac{a}{b}\right)^m$
8. $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$
9. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}=\left(\frac{b}{a}\right)^m$

שאלות:

1) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^na^m=a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$.

א. a^2a^6 ב. $t^3t^5t^7$ ג. $b^2b^5b^{12}b^3$

ד. $\frac{k^8}{k^3}$ ה. $\frac{n^{14}}{n^9}$ ו. $\frac{c^6}{c^2}$

ז. $\frac{a^3a^{19}}{a^{15}}$ ח. $\frac{x^{30}}{x^9x^{18}}$ ט. $\frac{y^3y^{15}}{y^4y^{14}}$

י. $3^23^33^4$ יא. $\frac{2^{16}2^2}{2^{10}}$ יב. $\frac{5^{20}5^35^{16}}{5^45^{22}5^8}$

2) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^na^m=a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$.

א. $\frac{3^42^7}{2^63^2}$ ב. $\frac{a^{10}b^{13}a^3}{b^4b^6b^2a^{12}}$ ג. $\frac{x^8y^5y^9x^2}{y^4x^4}$

3) לפניך הביטוי הבא: $\frac{3^62^{17}3^32^4}{3^42^32^2}$.

מצא n כך שיתקיים שוויון בין הביטוי $243\cdot 2^n$ לבין הביטוי הנתון.

4) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{2^3\cdot 2^7}{2^4\cdot 2^5}$

ב. $\frac{9^3\cdot 27^2}{3^9\cdot 81}$

ג. $\frac{10^9\cdot 25^5\cdot 8^{-1}}{40^3\cdot 125^5}$

ד. 2^3+2^5

5) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוק: $\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$.

א. $\left(a^2\right)^4$

ב. $\left(c^3\right)^{10}$

ג. $\left(x^3x^{10}\right)^2$

ד. $\frac{\left(b^2\right)^3}{b^2b^3}$

ה. $\frac{n^7n^8}{\left(n^3\right)^4}$

ו. $\frac{d^{20}\left(d^4\right)^2}{d^{12}\left(d^3\right)^2}$

ז. $\frac{2^5\left(2^4\right)^2 2^3}{\left(2^32^2\right)^3}$

ח. $\frac{3^6\left(3^33^2\right)^6}{3^{28}\left(3^2\right)^3}$

ט. $\frac{\left(8^3\right)^8 8^{11}}{\left(8^28\right)^3 8^8}$

י. $\frac{\left(2^4\right)^5\left(3^6\right)^7 2^{20}}{3^{35}2^{40}}$

יא. $\frac{\left(3^2\right)^6 5^{31}3^7}{\left(5^2\right)^{10} 5^{11}3^{18}}$

יב. $\frac{\left(3^2\right)^7 5^{10}\left(5^3\right)^2}{3^95^{16}}$

6) לפניך הביטויים הבאים: $\left(\left(3^2\right)^3\right)^4$ ו- $\left(\left(3^6\right)^n\right)^2$.

מצא n כך שיתקיים שוויון בין שני הביטויים.

7) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים:

א. $\frac{2^33^5}{2^{\,2}3^4}$

ב. $\frac{5^{20}3^{14}3^8}{3^{20}5^{12}5^8}$

ג. $\frac{7^{12}2^22^6}{2^57^{10}7}$

8) פשט את הביטויים הבאים:

א. $3^29\cdot 81^2$

ב. $64^22^38^2$

ג. $125\cdot 25\cdot 5^5$

ד. $\frac{2^4\cdot 16^5}{8\cdot 512}$

ה. $\frac{\left(4^2\right)^3 16}{64\cdot 2^3}$

ו. $\frac{\left(\left(3^4\right)^4\right)^5}{81^327^43^5}$

9) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\dfrac{\left(2a^2b\right)^3\cdot\left(ab^{-3}\right)^2}{4ab^{-2}\cdot\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^4}$

ב. $\dfrac{\left(k^2\right)^{m+2}\cdot k^{1-3m}}{\left(k^{2m}\right)^3\cdot\dfrac{1}{k^{7m-4}}}$

ג. $\dfrac{4^{b+3}}{4^{b+1}+4^{b+2}}$

ד. $\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{x^{n+3}+x^{n+5}}{x^{n+2}}$

10) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $\left(ab\right)^n=a^nb^n$ ו- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$

א. $\left(a^2b\right)^3$

ב. $\left(m^4n^3\right)^5$

ג. $\left(x^{12}y^3\right)^3$

ד. $\left(\dfrac{a^3}{b^2}\right)^4$

ה. $\left(\dfrac{i^4}{k^3}\right)^7$

ו. $\left(\dfrac{a^{14}b^4}{a^6ab^3}\right)^3$

ז. $\left(\dfrac{x^3y^5y^2x^6}{y^4x^7}\right)^6$

ח. $\left(\dfrac{t^7r^{20}t^3}{r^2r^{12}t^8}\right)^2$

ט. $\left(\dfrac{\left(b^{12}c\right)^2c^{14}}{c\left(c^3b^5\right)^4b^3}\right)^2$

11) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים:

א. $\left(\dfrac{3^92^62^2}{3^62^53^2}\right)^2$

ב. $\left(\dfrac{\left(5^4\right)^2\cdot3^6}{3^55^7}\right)^2$

ג. $\left(\dfrac{7^3\cdot16\cdot128\cdot49}{\left(2^27\right)^5}\right)^3$

12) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה שלילית:

א. $\dfrac{1}{4^6}$

ב. $\dfrac{1}{5^3}$

ג. $\dfrac{1}{2^{10}}$

ד. $\dfrac{1}{8}$

ה. $\dfrac{1}{81}$

ו. $\dfrac{1}{125}$

13) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה חיובית וחשב את ערכם:

א. $\dfrac{1}{4^{-3}}$

ב. $\dfrac{1}{3^{-2}}$

ג. $\dfrac{1}{5^{-3}}$

14) חשב את הביטויים הבאים:

א. $3^2\cdot 3^{-5}\cdot 3^7$

ב. $2^{-8}\cdot 512\cdot 2^2$

ג. $5^6\cdot 5^{-3}\cdot 5^{-2}$

ד. $2^{14}\cdot 3^{-6}\cdot 2^{16}\cdot 3^4\cdot 2^{-30}$

ה. $\frac{2^{-5}\cdot 5^3\cdot 2^{14}}{5^2\cdot 5^{-10}\cdot 5^8\cdot 2^6}$

ו. $\frac{3^{-6}\cdot 7^7\cdot 7^{-4}}{3^{-4}\cdot 3^{-3}\cdot 7^3}$

15) פשט את הביטויים הבאים לצורה ללא חזקות שליליות.

א. $\left(\frac{5^{-4}}{3^2}\right)^{-6}$

ב. $\frac{\left(4^4\right)^{-4}3^{-11}}{\left(3^{-2}4^3\right)^{-6}}$

ג. $\frac{2^{-3}5^4}{5^4\cdot 125\cdot\left(5^2 2\right)^{-3}\cdot 2^{-4}}$

16) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{a^{n+2}\cdot a^{2-3n}}{\left(a^3\right)^{n+1}}$

ב. $\frac{\left(k^2\right)^{m+2}\cdot k^{1-3m}}{\left(k^{2m}\right)^3\cdot\frac{1}{k^{7m-4}}}$

ג. $\frac{\left(m^{n+2}\right)^3\cdot m^{-4n-2}}{\frac{1}{m^{6n+2}}\cdot\left(m^3\right)^{n-2}}$

תשובות סופיות:

1) א. a^8 ב. t^{15} ג. b^{22} ד. k^5 ה. n^5 ו. c^4
ז. a^7 ח. x^3 ט. 1 י. 3^9 יא. 2^8 יב. 5^5.

2) א. 18 ב. ab ג. x^6y^{10}.

3) $n=16$.

4) א. 2 ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{5}{8}$ ד. 40.

5) א. a^8 ב. c^{30} ג. x^{26} ד. b ה. n^3 ו. d^{10}
ז. 2 ח. 9 ט. 8^{18} י. 3^7 יא. 3 יב. 3^5.

6) $n=2$.

7) א. 6 ב. 9 ג. 56.

8) א. 3^{12} ב. 2^{21} ג. 5^{10} ד. 2^{12} ה. 2^7 ו. 3^{51}.

9) א. $\frac{2b^3}{a}$ ב. k ג. $3\frac{1}{5}$ ד. $\frac{1}{x}+x$.

10) א. a^6b^3 ב. $m^{20}n^{15}$ ג. $x^{36}y^9$ ד. $\frac{a^{12}}{b^8}$ ה. $\frac{i^{28}}{k^{21}}$ ו. $a^{21}b^3$
ז. $x^{12}y^{18}$ ח. t^4r^{12} ט. b^2c^6.

11) א. 576 ב. 225 ג. 8

12) א. 4^{-6} ב. 5^{-3} ג. 2^{-10} ד. 2^{-3} ה. 3^{-4} ו. 5^{-3}.

13) א. 64 ב. 9 ג. 125.

14) א. 81 ב. 8 ג. 5 ד. $\frac{1}{9}$ ה. 1000 ו. 3.

15) א. $5^{24}\cdot 3^{12}$ ב. $\frac{4^2}{3^{23}}$ ג. $5^3\cdot 2^4$.

16) א. a^{1-5n} ב. k ג. m^{2n+12}.

חוקי השורשים:

סיכום כללי:

סיכום חוקי השורשים:

1. $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$
2. $\sqrt[m]{a}=a^{\frac{1}{m}}$
3. $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$
4. $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{a\cdot b}$
5. $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$
6. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$

שאלות:

17) הבא את הביטויים הבאים לצורה: $\sqrt[n]{a^m}$.

א. $3^{\frac{1}{4}}$ ב. $2^{\frac{3}{5}}$ ג. $6^{\frac{5}{6}}$

ד. $-12^{\frac{2}{7}}$ ה. $-(-4)^{\frac{1}{3}}$ ו. $-(-3)^{\frac{3}{4}}$

ז. $5^{-\frac{1}{4}}$ ח. $27^{-\frac{1}{3}}$ ט. $64^{-\frac{5}{6}}$

18) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{49}$ ב. $-\sqrt{25}$ ג. $\sqrt[3]{8}$

ד. $-\sqrt[7]{128}$ ה. $\sqrt[3]{(-2)^6}$ ו. $\left(\sqrt[5]{1024}\right)^2$

ז. $\left(\sqrt[5]{-243}\right)^3$ ח. $\sqrt[4]{-16}$ ט. $\sqrt[4]{-25^2}$

י. $\sqrt[4]{(-25)^2}$

19) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

א. $8^{\frac{2}{3}}$ ב. $32^{-\frac{3}{5}}$ ג. $128^{-\frac{2}{7}}$

ד. $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$ ה. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2.5}$ ו. $\left(\frac{64}{343}\right)^{-\frac{2}{3}}$

ז. $81^{\frac{3}{4}}\cdot 64^{-\frac{1}{3}}$ ח. $343^{-\frac{2}{3}}\cdot 100^{\frac{1}{2}}$ ט. $16^{\frac{1}{4}}\cdot 8^{-\frac{1}{3}}\cdot 4^{-\frac{1}{2}}$

20) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$.

21) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ ב. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$ ג. $\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}$

ד. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ ה. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$ ו. $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$

ז. $\frac{\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$ ח. $\frac{\sqrt[3]{500}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt[4]{25^2}\cdot\sqrt[3]{4}}$ ט. $\frac{\sqrt[3]{8^2}\sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{400}\sqrt{2}}$

22) הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים:

א. $3\sqrt{2}$ ב. $5\sqrt{3}$ ג. $\frac{\sqrt{36}}{2}$

ד. $2\sqrt[3]{3}$ ה. $x\sqrt{x}$

23) הכנס את כל המקדמים בביטויים הבאים לתוך השורש:

א. $2\sqrt{5}$ ב. $4\sqrt[3]{2}$ ג. $2\sqrt[5]{3}$

ד. $\frac{\sqrt{24}}{2}$ ה. $\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$ ו. $\frac{3\sqrt[4]{5000}}{10}$

ז. $-5\sqrt[3]{2}$ ח. $-5\sqrt[4]{2}$ ט. $-5\sqrt[5]{-2}$

24) הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר:

א. $\sqrt{12}$ ב. $\sqrt{48}$ ג. $\sqrt{63}$

ד. $\sqrt[3]{54}$ ה. $\sqrt{x^5}$

25) חלץ מן הביטויים הבאים את המקדם הגבוה ביותר ככל הניתן:

א. $\sqrt{40}$ ב. $\sqrt{50}$ ג. $\sqrt{320}$

ד. $\sqrt[3]{108}$ ה. $\sqrt[3]{56}$ ו. $\sqrt[5]{160}$

ז. $\sqrt[4]{162}$ ח. $\sqrt[5]{972}$ ט. $\sqrt[6]{192}$

26) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{18}-\sqrt{8}$ ב. $\sqrt{7}+\sqrt{63}$ ג. $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{128}$

ד. $\sqrt[4]{405}-\sqrt[4]{80}$ ה. $\frac{20}{\sqrt{5}}$ ו. $\frac{\sqrt{8}}{2}$

ז. $\frac{16}{\sqrt{2}}$ ח. $\frac{6}{\sqrt{3}+\sqrt{12}}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[5]{160}-\sqrt[5]{5}}$

27) פשט את הביטויים הבאים:

א. $3^{\frac{1}{4}}\cdot 9^{-2.5}\cdot 27^{\frac{3}{2}}$ ב. $2^{\frac{3}{4}}\cdot 16^{\frac{1}{2}}\cdot 64^{-3}$ ג. $125^{\frac{1}{6}}\cdot 5^{2}\cdot 5^{-\frac{2}{3}}$

ד. $\frac{27^{\frac{4}{3}}\cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}$ ה. $\frac{49^{\frac{2}{5}}\cdot 7^{-\frac{6}{5}}}{343^{\frac{1}{5}}}$ ו. $\frac{512^{\frac{1}{4}}\cdot 64^{-\frac{3}{4}}}{128^{-\frac{1}{8}}\cdot 2^{-2}}$

תשובות סופיות:

17) א. $\sqrt[4]{3}$ ב. $\sqrt[5]{2^3}$ ג. $\sqrt[6]{6^5}$ ד. $-\sqrt[7]{12^2}$ ה. $-\sqrt[3]{-4}$ ו. ϕ

ז. $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ ח. $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$ או $\frac{1}{3}$ ט. $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}}$ או $\frac{1}{2^5}$.

18) א. 7 ב. -5 ג. 2 ד. -2 ה. 4 ו. 16

ז. -27 ח. ϕ ט. ϕ י. 5.

19) א. 4 ב. $\frac{1}{8}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. 125 ה. $\frac{32}{243}$ ו. $\frac{49}{16}$

ז. $\frac{27}{4}$ ח. $\frac{10}{49}$ ט. $\frac{1}{2}$.

20) $\sqrt{2}$.

21) א. 4 ב. 9 ג. 20 ד. 6 ה. 3 ו. 2

ז. $\sqrt{2}$ ח. $\sqrt{5}$ ט. $\sqrt{2}$.

22) א. $\sqrt{18}$ ב. $\sqrt{75}$ ג. $\sqrt{9}$ ד. $\sqrt[3]{24}$ ה. $\sqrt{x^3}$.

23) א. $\sqrt{20}$ ב. $\sqrt[3]{128}$ ג. $\sqrt[5]{96}$ ד. $\sqrt{6}$ ה. $\sqrt[3]{3}$

ו. $\sqrt[4]{40\frac{1}{2}}$ ז. $\sqrt[3]{-250}$ ח. $-\sqrt[4]{1250}$ ט. $\sqrt[5]{5^5\cdot 2}$.

24) א. $2\sqrt{3}$ ב. $4\sqrt{3}$ ג. $3\sqrt{7}$ ד. $3\sqrt[3]{2}$ ה. $x^2\sqrt{x}$.

25) א. $2\sqrt{10}$ ב. $5\sqrt{2}$ ג. $8\sqrt{5}$ ד. $3\sqrt[3]{4}$ ה. $2\sqrt[3]{7}$ ו. $2\sqrt[5]{5}$

ז. $3\sqrt[4]{2}$ ח. $3\sqrt[5]{4}$ ט. $2\sqrt[6]{3}$.

26) א. $\sqrt{2}$ ב. $4\sqrt{7}$ ג. $6\sqrt[3]{2}$ ד. $\sqrt[4]{5}$ ה. $4\sqrt{5}$ ו. $\sqrt{2}$

ז. $8\sqrt{2}$ ח. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ או $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[5]{5}}$ או $2\sqrt[5]{5^4}$.

27) א. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ ב. $\frac{1}{\sqrt[4]{2^{61}}}$ ג. $\sqrt[6]{5^{11}}$ ד. 27 ה. $\frac{1}{7}$ ו. $\sqrt[8]{2^5}$.

כתיבה מדעית של מספרים:

שאלות:

28) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. 15,000,000 ב. 1,500,000

ג. 150,000,000,000 ד. 23,400,000

ה. 0.0003 ו. 0.00000042

ז. 0.000000042 ח. 0.00000000042

29) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. $(3,000,000)^2$ ב. $(2,000,000)^2$

ג. $(5,000)^3$ ד. $(50,000)^3$

ה. $(0.0002)^4$ ו. $(0.00004)^3$

ז. $(0.000005)^3$ ח. $(0.000000007)^3$

תשובות סופיות:

28) א. $1.5\cdot10^{7}$ ב. $1.5\cdot10^{6}$ ג. $1.5\cdot10^{11}$ ד. $2.34\cdot10^{7}$ ה. $3\cdot10^{-4}$

ו. $4.2\cdot10^{-7}$ ז. $4.2\cdot10^{-8}$ ח. $4.2\cdot10^{-10}$.

29) א. $9\cdot10^{12}$ ב. $4\cdot10^{12}$ ג. $1.25\cdot10^{11}$ ד. $1.25\cdot10^{14}$ ה. $1.6\cdot10^{-15}$

ו. $6.4\cdot10^{-14}$ ז. $1.25\cdot10^{-16}$ ח. $3.43\cdot10^{-25}$.

מתמטיקה 1

פרק 5 - חזרה כללית - משוואות ואי-שוויונים מעריכיים

תוכן העניינים

1. משוואות מעריכיות יסודיות 95
2. משוואות עם חיבור וחיסור איברים 97
3. משוואות עם קבוע אוילר 99
4. משוואות בהן המשתנה גם בבסיס 100
5. משוואות מסכמות שונות 101
6. מערכת משוואות מעריכיות 102
7. אי שוויונים מעריכיים 103
8. אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך 104

משוואות מעריכיות יסודיות:

סיכום כללי:

- פתרון כללי של משוואת מעריכית מהצורה: $a^x = a^y$ הוא: $x = y$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = 1$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = 1 = a^0$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = b^x$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = b^x = 1$ ללא תלות בבסיסים.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי החזקות היסודיים):

א. $2^x = 16$

ב. $5^x \cdot 25^{x+2} = 125$

ג. $10^{x-2} = 10000^{x+1}$

ד. $9^x \cdot 3^{x^2} = 81^{3x-4}$

ה. $\left(2^x \cdot 32\right)^3 = 8$

ו. $\left(5^{x^2}\right)^5 \cdot \frac{1}{5^5} = 625^{x-1}$

ז. $\frac{7^x}{343^3} = 1$

ח. $\left(25 \cdot 0.2^{2x}\right)^2 = \left(\frac{1}{125}\right)^{1-x}$

2) פתור את המשוואות הבאות (הבסיס הוא שבר):

א. $27 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{5x+2} = 8$

ב. $\left(\frac{3}{4}\right)^{2-x} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{9}{16}\right)^{7+x}$

ג. $25\left(\frac{7}{5}\right)^{x^2-2x} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{4-x} = 49$

3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי השורשים):

א. $\sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3}$

ב. $\sqrt{3^{x+7}} = 81$

ג. $\left(9\sqrt{27}\right)^{3x} \cdot 3^{2-x} = \frac{1}{9}$

ד. $\sqrt[x]{16} \cdot \left(\frac{1}{2^x}\right)^3 = \frac{1}{16}$

ה. $2^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2^x}} = 8\left(\sqrt{8}\right)^{-\sqrt{x}}$

ו. $5^x \frac{1}{25^5} = 125^{\sqrt{x}}$

4) פתור את המשוואות הבאות (מכפלת בסיסים שונים):

א. $2^x = 7^x$

ב. $3^x \cdot \frac{625}{\sqrt{25^x}} = 81$

ג. $2^{3x} \cdot 5^{3x} = 1000000$

ד. $2^{x+1} \cdot 3^{x-2} \cdot 7^x = 392$

ה. $243 \cdot 2^{x-1} \cdot 18^{x-9} = \frac{1}{3^{x-2}}$

ו. $108 \cdot \frac{1}{2^{1-2x}} = 72^x \cdot \sqrt{0.5}$

ז. $2^{2x+2} \cdot 5^{x+1} = \left(2\sqrt{5}\right)^{4-x}$

תשובות סופיות:

1) א. $x=4$ ב. $x=-\frac{1}{3}$ ג. $x=-2$ ד. $x=2,8$ ה. $x=-4$

ו. $x=1,-\frac{1}{5}$ ז. $x=9$ ח. $x=1$.

2) א. $x=-1$ ב. $x=-2$ ג. $x=3,-2$.

3) א. $x=-\frac{1}{2}$ ב. $x=1$ ג. $x=-\frac{8}{19}$ ד. $x=2,-\frac{2}{3}$ ה. $x=4,9$ ו. $x=25$.

4) א. $x=0$ ב. $x=4$ ג. $x=2$ ד. $x=2$ ה. $x=5$

ו. $x=1.5$ ז. $x=\frac{2}{3}$.

משוואות עם חיבור וחיסור איברים:

סיכום כללי:

במשוואות הכוללות חיבור וחיסור של איברים, נאתר את הבסיס עם המעריך הקטן ביותר ונסמן אותו ב-t, למשל במשוואה: $4^x-3\cdot 2^x=4$ נסמן: $2^x=t$.

נבטא את כל איברים המשוואה באמצעות t ונפתור אותה עבורו.
לאחר מכן נחזיר את ההצבה למציאת ערכי ה-x המתאימים.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם חיבור וחיסור ממעלה ראשונה):

א. $2^x+6\cdot 2^x=56$

ב. $8^x+3\cdot 8^x=256$

ג. $5\cdot 3^x-3^{x+1}=162$

ד. $2\cdot 6^x+6^{x+2}-6^{x-1}=227$

2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם חיבור וחיסור ממעלה ראשונה):

א. $81^{x+1}+18\cdot 3^{4x-3}=735$

ב. $5^{3x+2}+4\cdot 125^x=29$

ג. $\left(2^{3x+1}\right)^2-64^{x-\frac{1}{3}}=15$

ד. $\sqrt{10000^{x+1}}-\sqrt[4]{10^{8x+1}}=\sqrt[4]{1000}\cdot\left(\sqrt[4]{10^7}-1\right)$

ה. $6^{-x}-5\cdot 36^{-\left(\frac{x}{2}+1\right)}=186$

ו. $5^{-x}+25^{\frac{1}{2}-\frac{x}{2}}-5^{-x-1}=145$

ז. $2\cdot 10^{x+1}+10^{x+2}=3\cdot 5^{x+1}$

ח. $4^{x+2}-6\cdot 4^x=7\cdot 12^{x+1}+6\cdot 12^x$

3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחיסור ממעלה שנייה):

א. $9^x-36\cdot 3^x+243=0$

ב. $16^{x+1}-65\cdot 4^x+4=0$

ג. $6^x-4\cdot 6^{-x}+3=0$

ד. $4^{-x}-3\cdot 4^x+2=0$

ה. $\left(\frac{4}{9}\right)^x-\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1}=-\frac{2}{3}$

ו. $\left(2^{\frac{1}{3}x+2}\right)^2-5\cdot 2^{\frac{1}{3}x+1}+1=0$

4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות):

א. $\frac{20}{9^x+1}=3-\frac{8}{9^x-1}$

ב. $\frac{7^x}{7^x-4}+\frac{8}{7^x+5}=3$

5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות מסכמות):

א. $\frac{1}{25^{1-x}}-6\cdot 5^{x-1.5}+1=0$

ב. $3^x-\sqrt{16\cdot 3^{x+1}}=-9$

ג. $36^x-6^{x+1}\cdot 3^x+8\cdot 9^x=0$

ד. $4\cdot 9^x-10\cdot 6^x+6\cdot 4^x=0$

ה. $25\cdot 5^{2x}+16\cdot 15^x=9^{x+1}$

ו. $9^x+4^x-6^x=\frac{7}{6^{1-x}}$

ז. $\frac{8^{2x}-8}{7}=4^x-2$

ח. $2^{3x}-2^{2x+2}-2^x+4=0$

תשובות סופיות:

1) א. $x=3$ ב. $x=2$ ג. $x=4$ ד. $x=1$.

2) א. $x=\frac{1}{2}$ ב. $x=0$ ג. $x=\frac{1}{3}$ ד. $x=\frac{1}{4}$

ה. $x=-3$ ו. $x=-2$ ז. $x=-3$ ח. $x=-2$

3) א. $x=2,3$ ב. $x=1,-2$ ג. $x=0$ ד. $x=0$

ה. $x=0,1$ ו. $x=-6,-9$.

4) א. $x=1,-\frac{1}{2}$ ב. $x=1$.

5) א. $x=\frac{1}{2},1\frac{1}{2}$ ב. $x=1,3$ ג. $x=1,2$ ד. $x=1,0$

ה. $x=-2$ ו. $x=1,-1$ ז. $x=0,\frac{1}{2}$ ח. $x=0,2$.

משוואות עם קבוע אוילר:

סיכום כללי:

קבוע אוילר מסומן באות e וערכו שווה (בערך) ל-2.71828.
למספר זה משמעויות רבות במתמטיקה ובמדעים ועל כן הוחלט לסמן אותו באות משלו ולשלב אותו במשוואות מתמטיות ועוד.

דרך הפתרון של משוואה שבה הבסיס הוא e זהה לחלוטין לשל משוואה מעריכית רגילה כפי שנלמד בפרק זה.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם קבוע אוילר):

א. $e^{3x}=e^{2x-1}$ ב. $e^{5x-1}=e\cdot e^{6x+1}$

ג. $e^{x-5}=\left(e^{1-x}\right)^3$ ד. $e^x\cdot\sqrt{e^{3x-1}}=\left(\frac{1}{e^x}\right)^{1-3x}$

2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחיסור):

א. $e^2\cdot e^x-e^{x+1}=e-1$ ב. $\sqrt[3]{e^{x+1}}\cdot e^2=e^x\sqrt{e}$

ג. $e^{2x}+e^x-2=0$ ד. $e^{1+x}+e^{1-x}=e^2+1$

3) פתור את המשוואות הבאות (המשתנה גם בבסיס):

א. $xe^x=\sqrt[4]{e}\cdot x$ ב. $e^{3x}=x\cdot e^{3x}$

ג. $xe^{x^2}=\frac{x}{\sqrt{e^x}}$ ד. $\sqrt[3]{e^{3x-1}}\cdot x=xe^x$

תשובות סופיות:

1) א. $x=-1$ ב. $x=-3$ ג. $x=2$ ד. $x=1\,,\ \frac{1}{6}$.

2) א. $x=-1$ ב. $x=\frac{11}{4}$ ג. $x=0$ ד. $x=1\,,\ -1$.

3) א. $x=0\,,\ \frac{1}{4}$ ב. $x=1$ ג. $x=0\,,\ -\frac{1}{2}$ ד. $x=0$.

משוואות בהן המשתנה גם בבסיס:

סיכום כללי:

במשוואות עם משתנה בבסיס יש לדרוש תנאי עבורו הבסיס חיובי.
יש לקחת את חיתוך תחומי ההגדרה (במידה וקיימים ביטויים עם שורשים או שברים) יחד עם תוצאת השוואת המעריכים.

הערה:

יש לבדוק את ערכי ה- x עבורם הבסיס שווה ל-1 ולראות האם מתקבל פסוק אמת או פסוק שקר. בהתאם יש להוסיף או להוריד אותו מתחום המספרים המהווים את פתרון המשוואה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $\left(\sqrt{3-x}\right)^{\sqrt{x}}=\left(\sqrt[3]{3-x}\right)^{x}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{3-x}}$.

2) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2+x}=1$.

3) $\frac{|x-3|^{x^2-2}}{|x-3|^{x-1}}=|x-3|^{-1}$.

תשובות סופיות:

1) $x=\frac{1}{4}\ ,\ 1\ ,\ 2$

2) אין פתרון.

3) $x=0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,4$

משוואות מסכמות שונות:

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $5\left(2^x-2\right)+2=4^x-2^x$.

2) $\frac{6}{4^{x-1}-1}+\frac{2^{x+1}}{2^x+2}=\frac{2^x+4}{2^x-2}$.

3) $\frac{4^x}{4^x-10}-\frac{4}{2^{2x-1}-3}=\frac{32}{16^x-4^{x+2}+60}$.

4) $3^{2x^2+2}-3^{x^2+3}+9=3^{x^2+1}$.

5) $\sqrt[x]{10}=4\cdot\sqrt[2x]{10}+60$.

6) $\sqrt[x-1]{8\cdot 2^{x+1}}=\left(\sqrt[x]{2}\right)^2\cdot\sqrt[x-1]{\sqrt[x]{32}}$.

7) $10\cdot 4^{x+2}-16\cdot 10^x-90\cdot 6^x+36\cdot 15^x=0$.

תשובות סופיות:

1) $x=1,2$.
2) $x=3$.
3) $x=1.5$.
4) $x=1,-1$.
5) $x=\frac{1}{2}$.
6) $x=-3$.
7) $x=1,-2$.

מערכת משוואות מעריכיות:

שאלות:

1) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} y=3^x \\ y=18-3^x \end{cases}$.

2) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 5^{2x}-5^y=5^x-25 \\ y-x=2 \end{cases}$.

3) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} \frac{1}{3^y-4}+\frac{3}{3^x-2}-\frac{1}{3^x+2}=3 \\ 4^y=\sqrt{256^x} \end{cases}$.

4) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 5^x+2^y=13 \\ 2\cdot 5^x-2^y=2 \end{cases}$.

5) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 2\cdot 3^x-3\cdot 2^y=42 \\ 3^{x+1}-2^{y+1}=73 \end{cases}$.

6) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 5^{2x+1}+8\cdot 10^x-2^{2y+4}=0 \\ \left(\sqrt{3}\right)^y=27^{\frac{x-1}{6}} \end{cases}$.

7) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} 6\cdot 4^x-7\cdot 6^{y-1}+2\cdot 3^{x+y}=6^y \\ \sqrt[4]{5^x}\cdot\sqrt{\left(5\sqrt{5}\right)^y}=\sqrt[4]{125}\cdot 5^x \end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $(2,9)$ 2) $(0,2)$, $(2,4)$ 3) $(1,2)$ 4) $(1,3)$

5) $(3,2)$ 6) $(-1,-2)$ 7) $(1,2)$, $(-1,0)$

אי שוויונים מעריכיים:

סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $a^x > a^y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

שאלות:

פתור את אי השיוויונים הבאים:

1) $3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x}$

2) $\sqrt{2^x} \le 4^{x^2-1\frac{1}{4}}$

3) $e^{\sqrt{x}+1} > e^{2x}$

4) $\left(\frac{1}{7}\right)^{5x} \ge \left(\frac{1}{7}\right)^{1-3x}$

5) $25^x + 5 < 6 \cdot 5^x$

6) $e^{2x} - 2e^x + 1 \le 0$

הערה:

השאלות הבאות דורשות הכרות עם מושג הלוגריתם הטבעי (ln) וכן חוקי הלוגריתמים אשר ילמדו בהמשך.

7) $e^x > 3$

8) $e^{2x} - 5e^x + 4 > 0$

תשובות סופיות:

1) $x < \frac{2}{3}$

2) $x \ge 1\frac{1}{4}$ או $x \le -1$

3) $0 \le x < 1$

4) $x \le \frac{1}{8}$

5) $0 < x < 1$

6) $x = 0$

7) $x > \ln 3$

8) $x > \ln 4$ או $x < 0$

אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך:

סיכום כללי:

דרך הפתרון של אי שוויון עם משתנה בבסיס ובמעריך:

- יש לדרוש בסיס חיובי ולחבר אי-שוויון בהתאם.
- יש לפתור את אי השוויון לפי השוואת מעריכים.
- יש למצוא את חיתוך הפתרונות.

נתון: $f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)}$ נדרוש: $f(x)>0$.

דרך הפתרון: אם: $f(x)>1$ אז: $g(x)>h(x)$.

אם: $0<f(x)<1$ אז: $g(x)<h(x)$.

לבסוף נמצא את חיתוך התחומים.

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

1) $x^{2x-1} > x^{x+2}$

2) $(x-2)^{2x-5} < (x-2)^{x+1}$

3) $x^{2x-6} < 1$

4) $x^{2x^2+2} < x^{5x}$

5) $(x^2-6x+13)^{x^2-2x} \geq (x^2-6x+13)^3$

6) $(x+1)^{|x|} < x^2+2x+1$

תשובות סופיות:

1) $0<x<1\ ,\ x>3$.

2) $3<x<6$.

3) $1<x<3$.

4) $0<x<0.5\ ,\ 1<x<2$.

5) $x\leq -1\ ,\ x\geq 3$.

6) $0<x<2$.

מתמטיקה 1

פרק 6 - חזרה כללית - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים

תוכן העניינים

1. הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות 105
2. חוקי הלוגריתמים 108
3. חישובים עם חזקה לוגריתמית 112
4. מעבר בין בסיסים 113
5. הלוגריתם הטבעי 115
6. משוואות עם בסיסים שונים 117
7. מערכת משוואות לוגריתמיות 118
8. מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות 119
9. אי-שוויונים לוגריתמים 120

הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות:

סיכום כללי:

הגדרה:

הלוגריתם מוגדר באופן הבא: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ כאשר: $a \neq 1$, $b > 0$, a.

הסבר:

לוגריתם על בסיס a של b מוגדר בתור החזקה שיש להעלות את a על מנת שיהיה שווה ל- b. ערך חזקה זו הוא x. ערך לוגריתם יכול להיות חיובי, שלילי או אפס. נחשב ערכי לוגריתמים ונפתור משוואות לוגריתמיות ע"י מעבר לפי ההגדרה למשוואה מעריכית מתאימה.

כללים יסודיים בלוגריתמים:

מהגדרת הלוגריתם נובע כי: $\log_a a = 1$ וכן: $\log_a 1 = 0$ לכל $a > 0$, $a \neq 1$.

שאלות:

1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמים הבאים:

א. $\log_2 32$ ב. $\log 1000$ ג. $\log_{25} 5$

ד. $\log_8 4$ ה. $\log_4 \frac{1}{16}$ ו. $\log_a a^4$

ז. $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$

2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (יסודי - שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\log_{36} 6 = x$ ב. $\log_2 x = 16$

ג. $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$ ד. $\log_x 64 = 3$

ה. $\log_x 25 = 2$ ו. $\log_x (3x+4) = 2$

3) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (כללי - שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\log_6(4x-2)=1$

ב. $\log_4(4-x)=\frac{1}{2}$

ג. $\log_8(x^4-73)=1$

ד. $\log_3\frac{x+3}{3-3x}=-2$

ה. $\log_x(2x^2+x-12)=2$

ו. $\log_{\sqrt{x+1}}(2x^2-5)=2$

4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג מספר פעמים):

א. $\log_4(\log_3 x)=1$

ב. $3\log_{27}(\log_2(x+3))=1$

ג. $\log_{\frac{1}{16}}(\log_3(5x^2+1))=-\frac{1}{2}$

ד. $\log_6(3+\log_2(6+\log_4(x^2+15)))=1$

5) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א. $\log_2(3^x+37)=6$

ב. $\log_3(3\cdot 2^x-303)=4$

ג. $\log_5(126\cdot 5^x-25)=2x+1$

ד. $3\log_2\left(3\cdot 4^{1+\frac{1}{3}x}-11\cdot 2^{\frac{x}{3}}+3\right)=12+2x$

6) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הצבה):

א. $(\log_2 x)^4=10000$

ב. $2(\log_3 x)^2+\log_3 x=10$

ג. $\frac{3\cdot\log_{14}x+1}{(\log_{14}x)^2}=4$

ד. $\sqrt{\log_{\frac{1}{81}}x}+\sqrt{\log_{\frac{1}{81}}x+2}=2$

תשובות סופיות:

1) א. 5 ב. 3 ג. $\frac{1}{2}$ ד. $\frac{2}{3}$ ה. -2
ו. 4 ז. -1.5

2) א. $x=\frac{1}{2}$ ב. $x=65,536$ ג. $x=27$ ד. $x=4$
ה. $x=5$ ו. $x=4$

3) א. $x=2$ ב. $x=2$ ג. $x=\pm 3$ ד. $x=-2$ ה. $x=3$ ו. $x=2$

4) א. $x=81$ ב. $x=5$ ג. $x=\pm 4$ ד. $x=\pm 1$

5) א. $x=3$ ב. $x=7$ ג. $x=-1,\ 2$ ד. $x=-6$

6) א. $x=1024,\ \frac{1}{1024}$ ב. $x=9,\ \frac{1}{9\sqrt{3}}$
ג. $x=14,\ \frac{1}{\sqrt[4]{14}}$ ד. $x=\frac{1}{3}$

חוקי הלוגריתמים:

סיכום כללי:

להלן 3 חוקי הלוגריתמים עבור בסיס $a>0\neq 1$ וארגומנטים x ו- y חיוביים:

- מכפלה לסכום: $\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$.
- מנה להפרש: $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$.
- מקדם למעריך: $\log_a b^n=n\log_a b$ (כאשר $b>0$ ו- n מספר ממשי כלשהו).

שאלות:

שאלות חישוב כלליות:

1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

א. $\log_3 12+\log_3 2.25$

ב. $\log_{\frac{1}{5}} 40+\log_{\frac{1}{5}} 12.5+\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{4}$

ג. $\log_2 200-\log_2 100$

ד. $\log_3 60-\log_3 540$

ה. $\log_4 8+\log_4 12-\log_4 6$

ו. $\log_7 1.5-\log_7 147+\log_7 2$

ז. $3\log_5 2-\log_5 1.6$

ח. $\log_{\sqrt{4}} 6.4+2\log_{\sqrt{4}}\sqrt{10}$

ט. $\frac{1}{2}\left(\log_7\frac{7}{2}+\log_7 2\right)+\log_7 14-\frac{1}{3}\log_7 8$

י. $\frac{1}{4}\log 81-\log 1.5-\frac{1}{2}\log 40$

2) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

א. $\frac{\log_5 16}{\log_5 8}$

ב. $\frac{\log_9 62.5+\log_9 2}{\log_9 0.2}$

ג. $\frac{\log_3 5-\log_3 2+\log_3 50}{\log_3 225-2}$

ד. $\frac{2-2\log_3 4+\log_3 8\frac{8}{9}}{4-\log_3 0.01-2\log_3 18}$

משוואות לוגריתמיות:

3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש ישיר בחוקי הלוגריתמים):

א. $\log_2 x+\log_2(x-6)=4$

ב. $\log_3 x+\log_3(x+2)=1$

ג. $\log_2(x+30)-\log_2 x=4$

ד. $\log_5(x+146)-\log_5(x+2)=2$

ה. $2\log_3(2x-1)-\log_3(22x+9)=-1$

ו. $2\log_5(x-2)=\log_5(4x-15)+\log_5 x$

4) פתור את המשוואות הבאות (פתרון בשיטת לוג שווה לוג):

א. $\log_5(4x-3)=\log_5 7$.

ב. $2\log_2(2x-2)-\log_2(16-x)=\log_2(x-1)+1$.

5) פתור את המשוואות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א. $\log_3(3\cdot 5^x+39)=3+\log_3(5^x-3)$.

ב. $\log_2(3-4^{x+1})-\log_2 11=x$.

6) פתור את המשוואות הבאות (שימוש הפוך בחוקי הלוגריתמים):

א. $\log_4 x\cdot\log_4(16x)=8$.

ב. $\log_2\left(\frac{x}{4}\right)\cdot\log_2(1024x)=-11$.

ג. $\log_2 x^2\log_2\left(\frac{x}{16}\right)=-\log_2(64x)$.

ד. $(\log_4 4x)^2=\log_4 4x^2+1$.

ה. $\log_3(9x^2)\cdot\log_3(9x^3)=\log_3\left(\frac{81}{x}\right)+2$.

ו. $\frac{\log_2\left(\frac{x^3}{32}\right)}{(\log_2 x)^2}+\frac{\log_2(2x)}{\log_2 x}=1\frac{7}{9}$.

שאלות הבעה:

7) נתון: $\log_3 2 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_3 16$ ב. $\log_3 6$

ג. $\log_3 24$ ד. $\log_3 1.5$

8) נתון: $\log_2 5 = b$, $\log_2 3 = a$. הבע באמצעות a ו- b את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_2 45$ ב. $\log_2 60$ ג. $\log_2 \sqrt{7.5}$

9) נתון: $\log_{18} 2 + \log_{18} 3 = a$.

הבע באמצעות a את $\log_{18} 27$ ואת $\log_{18} 16$.

שאלות נוספות:

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

10) $\log 4 \log 40 + \log 5 \log 16 = \log 64$.

11) $2\log^2 2 + \log 25 \cdot \log 20 = 2$.

12) $\log_{12} 16 \cdot \log_{12} 4 + \log_{12} 9 \cdot \log_{12} 48 = 2$

13) $\log_5 10 \cdot \log_5 75 - \log_5 3 \cdot \log_5 2 - \log_5 3 - \log_5 4 = 2$.

תשובות סופיות:

1) א. 3 ב. -3 ג. 1 ד. -2 ה. 2
ו. -2 ז. 1 ח. 6 ט. 1.5 י. -0.5.

2) א. $\frac{4}{3}$ ב. -3 ג. 1.5 ד. 0.5.

3) א. $x=8$ ב. $x=3,\frac{1}{27}$ ג. $x=2$ ד. $x=4$ ה. $x=3$ ו. $x=4$.

4) א. $x=2.5$ ב. $x=6$.

5) א. $x=1$ ב. $x=-2$.

6) א. $x=16,\frac{1}{256}$ ב. $x=2,\frac{1}{512}$ ג. $x=4,2\sqrt{2}$ ד. $x=4,\frac{1}{4}$
ה. $x=\frac{1}{9},\sqrt[6]{3}$ ו. $x=8,\sqrt[7]{2^{15}}$.

7) א. $4a$ ב. $a+1$ ג. $3a+1$ ד. $1-a$.

8) א. $2a+b$ ב. $2+a+b$ ג. $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}$.

9) $4(2a-1)$, $3(1-a)$.

10) הוכחה.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

13) הוכחה.

חישובים עם חזקה לוגריתמית:

סיכום כללי:

מהגדרת הלוגריתם ניתן לנסח את הקשר הבא: $a^{\log_a x}=x$ כאשר $a>0\neq 1$.

שאלות:

1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א. $6^{\log_6 8}$ ב. $4^{\log_2 5}$

2) נתונה התבנית: $3\cdot 4^x$. חשב את ערכה עבור:

א. $x=\log_4 7$ ב. $x=\log_4\sqrt{3}$

ג. $x=2\log_4 0.1$ ד. $x=\sqrt{\log_2 5}$

3) נתונה התבנית: $\frac{1}{6}\cdot 9^x-2\cdot 3^x+1$. חשב את ערכה עבור:

א. $x=-1$ ב. $x=\log_3 5$

ג. $x=\log_3\sqrt{6}$

4) חשב:

א. $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_{\sqrt{36}}81}$ ב. $\sqrt[3]{2^{3-\log_{\sqrt{8}}5}}$

תשובות סופיות:

1) א. 8 ב. 25.

2) א. 21 ב. $3\sqrt{3}$ ג. 0.03 ד. 15.

3) א. $\frac{19}{54}$ ב. $-4\frac{5}{6}$ ג. $2-2\sqrt{6}$.

4) א. $\frac{1}{81}$ ב. $\frac{2}{\sqrt[9]{25}}$.

מעבר בין בסיסים:

סיכום כללי:

מעבר מבסיס a לבסיס m (כאשר: $a>0$ $\neq 1$ ו-$m>0\neq 1$, וכן: $b>0$)
יתבצע באופן הבא: $\log_a b=\frac{\log_m b}{\log_m a}$.

שאלות:

שאלות חישוב כלליות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_4 7\cdot\log_7 4$

ב. $\log_{0.1} 3\cdot\log_9 1000$

ג. $\log_{\sqrt{3}} 5\cdot\log_{\sqrt{125}} 9$

ד. $\log_4 169\cdot\log_{25} 64\cdot\log_{13} 625$

2) הוכח את השוויונים הבאים:

א. $\log_2 25\cdot\log_5 3\cdot\log_9 2=1$.

ב. $\log_{16} 9\cdot\log_5 4\cdot\log_3 5=1$

משוואות לוגריתמיות:

3) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\log_2 x+\log_{32} x=6$

ב. $\log_3 x\cdot\log_{27} x=3$

ג. $\log_2 4x\cdot\log_8\frac{x}{16}=-\frac{5}{3}$

ד. $\log_x 5-6\log_{125} x=1$

שאלות הבעה:

4) נתון: $\log_4 6=a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_2 3$

ב. $\log_{32} 36$

ג. $\log_{216} 96$.

5) נתון: $\log_3 5=b$, $\log_2 3=a$. הבע באמצעות a ו- b את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_3 50$

ב. $\log_2\sqrt{30}$

ג. $\log_5 22.5$

6) נתון $\log 9 = 2b$, $\log_3 7 = a$. הבע באמצעות a ו- b את:

א. $\log 21$.

ב. $\log_3\left(\frac{10}{7}\right)$.

ג. $\log_7 10$.

ד. $\log_{30} 63$.

שאלות נוספות:

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

7) $\log_6 9 \cdot \log_{15} 30 + \log_6 5 \cdot \log_{15} 4 = 2$.

8) $\log\sqrt{3} \cdot \log_6 50 + \log\sqrt{2} \cdot \log_6 300 = 1$.

תשובות סופיות:

1) א. 1 ב. -1.5 ג. $2\frac{2}{3}$ ד. 12.

2) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

3) א. $x = 32$ ב. $x = 27, \frac{1}{27}$ ג. $x = 8, \frac{1}{2}$ ד. $x = \frac{1}{5}, \sqrt{5}$.

4) א. $2a - 1$ ב. $0.8a$ ג. $\frac{a+2}{3a}$.

5) א. $2b + \frac{1}{a}$ ב. $\frac{a}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{1}{2}$ ג. $\frac{2}{b} + 1 - \frac{1}{ab}$.

6) א. $b + ab$ ב. $\frac{1}{b} - a$ ג. $\frac{1}{ab}$ ד. $\frac{ab+2b}{b+1}$.

7) הוכחה.

8) הוכחה.

הלוגריתם הטבעי:

סיכום כללי:

לוגריתם על בסיס e (קבוע אוילר) מסומן: $\log_e \Rightarrow \ln$ והוא נקרא הלוגריתם הטבעי.

למשל: $\ln 3 = \log_e 3$ או $\ln\frac{1}{4} = \log_e \frac{1}{4}$. לוג זה נקרא בשם לן.

מהגדרת הלוגריתם מתקיים: $\ln a = b \to e^b = a$ כאשר $a > 0$ ו- b מספרים כלשהם.

שאלות:

1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הטבעיים הבאים:

א. $\ln e^2$ ב. $\ln\frac{1}{e^4}$ ג. $\ln\frac{1}{e\sqrt{e}}$

2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\ln x = 2$ ב. $\ln x = -\frac{1}{2}$

3) פתור את המשוואות הבאות (הצבה וחוקי הלוגריתמים):

א. $\ln\left(e^{2x} - \frac{1}{2}\right) + \ln 2 = x$

ב. $3\ln^2 x + \ln x = 2$

ג. $\ln\left(e^2 x^3\right) \cdot \ln\frac{1}{x} = \ln\left(ex^2\right)$

4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הוצאת לוג משני אגפי המשוואה)

א. $x^{\ln x} = e^6 x$ ב. $\left(\frac{1}{x}\right)^{2-3\ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x}$

5) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א. $e^{\ln 3}$ ב. $e^{2\ln 3}$

תשובות סופיות:

1) א. 2 ב. -4 ג. -1.5.

2) א. $x=e^2$ ב. $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

3) א. $x=0$ ב. $x=\sqrt[3]{e^2},\frac{1}{e}$ ג. $x=\frac{1}{\sqrt[3]{e}},\frac{1}{e}$.

4) א. $x=e^3,\frac{1}{e^2}$ ב. $x=\sqrt{e},e$.

5) א. 3 ב. 9.

משוואות עם בסיסים שונים:

סיכום כללי:

לעיתים תתקבל משוואה מעריכית שבה לא ניתן למצוא חזקה שלמה, כגון: $3^x = 4$.
במקרים אלו נעזר בהגדרת הלוג כדי לבטא את ערך המעריך: $x = \log_3 4$.

את ערך הביטוי $\log_3 4$ ניתן לחשב ע"י מחשבון או ע"י מעבר לבסיס 10: $\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3}$.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות (בסיסים שונים):

א. $3^x = 6$ ב. $2^x - 9 = 0$

ג. $49^x - 8 \cdot 7^x + 15 = 0$ ד. $2 \cdot 3^{\frac{2x}{3}} + 5 \cdot 3^{\frac{x}{3}} + 2 = 0$

2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם בסיס ולוגריתם טבעי):

א. $e^{3x} = 3$ ב. $4 + 3e^x = 9$

ג. $3e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$ ד. $e\left(e^x + 1\right) = 2\sqrt{e^{x+2}} + 9e$

3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם פתרונות לא שלמים):

א. $\log_2\left(7 - 5^x\right) = \log_2 \frac{10}{5^x}$ ב. $\log_2\left(4e^{2x} + 6\right) - 1 = \log_2\left(7e^x\right)$

תשובות סופיות:

1) א. $x = \log_3 6 = 1.63$ ב. $x = \log_2 9 = 3.17$

ג. $x = \log_7 3 = 0.564$, $x = \log_7 5 = 0.827$ ד. אין פתרון.

2) א. $x = \frac{1}{3}\ln 3 = 0.36$ ב. $x = \ln\frac{5}{3} = 0.51$ ג. $x = 0$, $x = -\ln 3 = -1.09$

ד. $x = \ln 16 = 2.7725$.

3) א. $x = 1$, $x = \log_5 2 = 0.43$ ב. $x_1 = \ln\frac{1}{2} = -0.693$, $x = \ln 3 = 1.098$

מערכת משוואות לוגריתמיות:

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

1) $\begin{cases} y=\log_2 x \\ y=6-\log_2 x \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_6^2 x-\log_6(2y-2)=2 \\ \frac{1}{2}x=y-1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_3(x+y)=\log_3(4x+y)-2 \\ \log_5(5x+3y)=2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_2(\log_3(x-y))=1 \\ \log_5(x+y-11)=\log_{25}x+\frac{1}{2}\log_5(y+2) \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_5 x+6\log_4 y=11 \\ 10\log_5 x-2\log_4 y=17 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \log_2 x^2+\log_3\frac{1}{y}=9 \\ \log_2\sqrt{x}+\log_{\sqrt[3]{3}} y=-1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \log_5 x+2^{\log_2 y}=6 \\ x^y=5^8 \end{cases}$

8) $\begin{cases} xy=27 \\ x^{\log_3 y}=9 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2^{\log_{\frac{1}{2}}(2x-y)}=7^{\log_7\frac{2x+y}{15}} \\ \log_3 x+\log_3 y=\frac{1}{\log_{28}3} \end{cases}$

תשובות סופיות:

1) $(8,3)$

2) $(36,19),\left(\frac{1}{6},1\frac{1}{12}\right)$

3) $(8,-5)$

4) $(16,7)$

5) $(25,8)$

6) $\left(16,\frac{1}{3}\right)$

7) $(25,4),(625,2)$

8) $(3,9),(9,3)$

9) $(4,7)$

מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות:

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

1) $\begin{cases} y=\log_2\left(4^x-2\right) \\ y=2x-1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 25^y=\left(5\sqrt{5}\right)^{x+1} \\ \log_5\sqrt{x}+\log_5\sqrt{y}=\log_5 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3y+5\log_6 x=1 \\ 216\cdot x^{2-y}=6^{1-4y} \end{cases}$

4) $\begin{cases} x\cdot\log_2 3=\dfrac{y}{\log_9 2} \\ \log_3\left(9^x+27\right)=2y+\log_3 12 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \left(2^x-1\right)^2-4y+3=0 \\ x=\log_2\left(y+1\right) \end{cases}$

6) $\begin{cases} x=\log_4\left(5-9^y\right) \\ \log_2\left(2^x+3\right)=\log_4\left(29-\left(3^y-3\right)^2\right) \end{cases}$

תשובות סופיות:

1) $(1,1)$

2) $(3,3)$

3) $(36,-3),\left(6,-1\frac{1}{3}\right)$

4) $\left(1,\frac{1}{2}\right),(2,1)$

5) $(1,1),(2,3)$

6) $(1,0)$

אי-שוויונים לוגריתמים:

סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $\log_a x > \log_a y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1) $\log_2 x < \log_2 (5x - 20)$

2) $\log_6 (x^2 - 5x) < 1$

3) $\log_3 x > \log_9 (15 - 2x)$

4) $\log_{\frac{1}{2}} (1 - 3x) \geq \log_{\frac{1}{2}} (7 - x)$

5) $\ln x \geq \ln (x^2 - 12)$

6) $\ln x < 3$

7) $\ln^2 x - 6 \ln x < 7$

8) $\frac{6}{\ln^2 x} \geq 2 - \frac{1}{\ln x}$

תשובות סופיות:

1) $x > 5$

2) $-1 < x < 0 \ , \ 5 < x < 6$

3) $3 < x < 7\frac{1}{2}$

4) $-3 \leq x \leq \frac{1}{3}$

5) $2\sqrt{3} < x \leq 4$

6) $0 < x < e^3$

7) $\frac{1}{e} < x < e^7$

8) $\frac{1}{\sqrt{e^3}} \leq x \leq e^2$ וגם $x \neq 1$

מתמטיקה 1

פרק 7 - בעיות גדילה ודעיכה

תוכן העניינים

1. שאלות חימום 121
2. שאלות העוסקות במציאת הכמות הסופית 125
3. שאלות העוסקות במציאת הכמות ההתחלתית 126
4. שאלות העוסקות במציאת אחוז הגדילה או דעיכה 127
5. שאלות העוסקות במציאת הזמן 128
6. שאלות שונות 129

שאלות חימום:

סיכום כללי:

הגדרת בעיית גדילה ודעיכה מערכית:

הכמות לאחר פרק זמן t, המסומנת M_t, כאשר הכמות ההתחלתית היא M_0 וקצב הגידול/דעיכה הוא q ניתנת ע"י הנוסחה הבאה: $M_t = M_0 \cdot q^t$.

כאשר הגדילה או הדעיכה נתונים באחוזים נמצא את הבסיס לפי: $q = \frac{100 \pm p}{100}$.

שאלות:

1) מצא את שיעור הגדילה/דעיכה מתוך אחוז הגדילה/דעיכה הנתון בבעיה.

א. מחיר מוצר גדל ב-20% לשנה.
ב. מחיר מוצר יורד ב-40% לשנה.
ג. אוכלוסייה מתרבה ב-5% לשנה.
ד. מחיר דירה עולה ב-15% לשנה.
ה. כמות דבורים גדלה פי 2 כל יום.
ו. מחירו של פסל גדל פי 3 כל שנה.
ז. רכב מאבד רבע מערכו בכל שנה.
ח. מנייה מאבדת מחצית מערכה כל חודש.

2) מצא את אחוזי הגדילה/דעיכה מתוך הבסיסים הבאים:

א. $q = 1.2$
ב. $q = 1.6$
ג. $q = 0.85$
ד. $q = 0.72$

3) מצא את M_0:

א. $107.2 = M_0 \cdot 1.05^6$
ב. $70.8 = M_0 \cdot 1.12^4$
ג. $2213.68 = M_0 \cdot 1.4^8$

4) מצא את q:

א. $25=10\cdot q^{6}$

ב. $512.36=6\cdot 10^{7}\cdot q^{40}$

ג. $10^{3}=2.4\cdot 10^{6}\cdot q^{25}$

ד. $9.35=7\cdot q^{10.5}$

ה. $6.42\cdot 10^{4}=10^{7}\cdot q^{3\frac{1}{3}}$

ו. $13.25=9.2\cdot q^{12.3}$

5) מצא את t:

א. $10\cdot 1.05^{t}=70$

ב. $62.08^{t}=39.68$

ג. $7\cdot 10^{7}\cdot 0.82^{t}=10^{5}$

6) אוכלוסיית חיידקים מתרבה בכל דקה פי 2.
בשעה 10:30 בדקו במעבדה מדגם ובו 50 חיידקים.

א. כמה חיידקים יהיו כעבור דקה אחת?

ב. כמה חיידקים יהיו כעבור שתי דקות?

ג. כמה חיידקים יהיו בשעה 10:50?

7) כמות של חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית בכל שבוע ב-2.8%.
במעבדה נשקלה כמות של 2000 גרם של החומר.

א. מה תהיה כמות החומר כעבור שבועיים?

ב. מה תהיה כמות החומר כעבור שלושה חודשים?

ג. האם תישאר כמות מסוימת מהחומר כעבור שנה בת 52 שבועות?

8) מחירו של מוצר לאחר 3 שנים הוא 250 ₪. ערך המוצר יורד ב-25% מדי שנה.
מה היה מחירו ההתחלתי?

9) שרון רצה בכל יום מרחק הגדול ב-10% מאשר ביום הקודם.
ידוע כי שרון רצה מרחק של 2.5 ק"מ ביום השביעי.
כמה ק"מ רצה שרון ביום הראשון?

10) אוכלוסייה במדינה מסוימת מתרבה בצורה מעריכית ב-3.1% בשנה.
כיום יש במדינה זו 528,000 תושבים.

א. כמה תושבים יהיו במדינה זו בעוד 3 שנים?

ב. כמה תושבים היו במדינה זו לפני 4 שנים?

11) כמות אצות באגם מתרבה בצורה מעריכית.
בכל שנה גדלה הכמות פי 4 מאשר בשנה שקדמה לה.
כיום יש באגם $2\cdot10^5$ ק"ג אצות.

א. מה תהיה כמות האצות בעוד שנתיים?

ב. מה הייתה כמות האצות לפני שנה?

ג. מה תהיה כמות האצות בעוד שנתיים ושלושה חודשים?

12) מספר תושבים במדינה מסוימת גדל בשיעור קבוע. במשך 10 שנים גדלה האוכלוסייה במדינה מ-5.4 מיליון תושבים ל-7.2 מיליון תושבים.

א. מה הוא קצב הריבוי בכל שנה במדינה?

ב. אם קצב הגידול של האוכלוסייה יישמר, מה יהיה מספר התושבים כעבור 10 שנים נוספות?

13) בגן חיות ספרו את מספר התוכים. בספירה הראשונה נספרו 1200 תוכים.
בספירה השנייה, כעבור 6 חודשים, נספרו 1450 תוכים.

א. מה הוא קצב הגידול החודשי של התוכים?

ב. מה יהיה מספרם של התוכים כעבור שנה וחצי מהספירה הראשונה?

14) כמות העצים ביער גדלה בצורה מעריכית. אם כמות העצים ביער בשנת 1950 הייתה $5\cdot10^4$ טון עצים ובשנת 1990 הייתה 10^7 טון עצים, מה היה אחוז הגידול השנתי (בהנחה שהגידול היה קבוע)?

15) כמות חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית. החומר נשקל שלוש פעמים ביום מסוים. בשעה 7:00 בבוקר היה משקל החומר 120 ק"ג.
בשעה 10:30 בבוקר היה משקל החומר 95 ק"ג.

א. מהו קצב התפרקות החומר הרדיואקטיבי לחצי שעה?

ב. מה תהיה כמות החומר בשעה 15:00 אחר הצהריים?

16) מכונית מאבדת $\frac{5}{8}$ מערכה במשך 10 שנים.

א. מהו קצב ירידת הערך של המכונית בכל שנה?

ב. איזה אחוז מערכה תאבד המכונית כעבור 15 שנה?

17) מספר התושבים במדינה מסוימת גדל פי 3.5 ב-40 שנים.

א. מצא מהו אחוז הריבוי השנתי.

ב. מצא פי כמה יגדל מספר התושבים כעבור 58 שנים?

תשובות סופיות:

1) א. 1.2 ב. 0.6. ג. 1.05. ד. 1.15.
ה. 2. ו. 3. ז. 0.75 ח. 0.5.

2) א. 20% גדילה ב. 60% גדילה ג. 15% דעיכה ד. 28% דעיכה.

3) א. 80. ב. 45. ג. 150.

4) א. 1.165. ב. 0.7469. ג. 0.732. ד. 1.028.
ה. 0.22. ו. 1.03.

5) א. 39.88 ב. 0.89 ג. 33.01.

6) א. 100. ב. 200. ג. 52,428,800.

7) א. 1889.56 גרם. ב. 1422.4 גרם. ג. כן. 456.747 גרם.

8) 592.6 ₪.

9) 1.41 ק״מ.

10) א. 578,642 תושבים. ב. 467,304 תושבים.

11) א. 3,200,000 ק״ג ב. 50,000 ק״ג. ג. 4,525,483.4 ק״ג.

12) א. 1.029. ב. 9.6 מיליון תושבים.

13) א. 1.032. ב. 2117 תוכים.

14) 14.16%.

15) א. 0.9671. ב. 70.35 גרם.

16) א. 0.90657. ב. 77.1%.

17) א. 3.18% ב. 6.15.

שאלות העוסקות במציאת הכמות הסופית:

שאלות:

1) מספר החסידות המגיעות כל שנה לאגם החולה יורד בצורה מעריכית בקצב של 2.4% בשנה. אם מספר החסידות שהגיעו השנה היה 6,000, מה יהיה מספר החסידות שיגיעו עוד 7 שנים?

2) מספר התושבים בהרצליה בשנת 1990 היה 80,000. אחוז הגידול באוכלוסיית העיר הוא 3% בשנה. מה יהיה מספר התושבים בהרצליה בשנת 1998?

תשובות סופיות:

1) 5,062 חסידות.

2) 101,342 תושבים.

שאלות העוסקות במציאת הכמות ההתחלתית:

שאלות:

3) מספר הזברות בטנזניה גדל בצורה מעריכית בקצב של 1.6% בשנה.
כיום יש בטנזניה 45,000 זברות. כמה זברות היו בטנזניה לפני 16 שנים?

תשובות סופיות:

3) 34,907 זברות.

שאלות העוסקות במציאת אחוז הגדילה או דעיכה:

שאלות:

4) מספר הלידות בבית החולים "איכילוב" גדל בצורה מעריכית.
לפני 8 שנים היו ב"איכילוב" 500 לידות בחודש והשנה יש 600 לידות בחודש.
מהו אחוז הגידול במספר הלידות החודשי משנה לשנה ב"איכילוב"?

5) מספר התושבים ביפן גדל פי 2 תוך 20 שנים.
מה אחוז הגידול השנתי באוכלוסיית יפן?

6) מספר החיידקים במבחנה גדל בצורה מעריכית.
אם לפני 6 שעות היו במבחנה 200 חיידקים ועכשיו יש בה 500 חיידקים,
כמה חיידקים יהיו בה בעוד 4 שעות?

תשובות סופיות:

4) 2.3%.
5) 3.5%.
6) 921 חיידקים.

שאלות העוסקות במציאת הזמן:

שאלות:

7) הריבית על תכנית חיסכון בבנק מסוים היא 2.4% בשנה.
אדם הפקיד בתוכנית החיסכון 12,000 ₪.
תוך כמה שנים יהיו ברשותו 15,000 ₪?

8) אוכלוסיית הדובים בקוטב הצפוני מכפילה את עצמה כל 18 שנה.
אם היום יש בקוטב הצפוני 6,000 דובים, בעוד כמה שנים יהיו 8,000 דובים?

9) חומר רדיואקטיבי מתפרק בצורה מעריכית. אם בתוך 4 שעות הוא מאבד 20% ממשקלו, תוך כמה זמן יאבד 60% ממשקלו?

10) חומר רדיואקטיבי מתפרק בצורה מעריכית.
אם בתוך 4 שעות הוא מאבד 20% ממשקלו, תוך כמה זמן יאבד 50% ממשקלו?

11) זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי הוא 16 ימים.
תוך כמה ימים יאבד שליש ממשקלו?

12) בשעה 08:00 נלקחו שני חומרים רדיואקטיביים. מחומר א' נלקחו 150 גרם וזמן מחצית החיים שלו הוא 10 שעות. מחומר ב' נלקחו 117.4 גרם וזמן מחצית החיים שלו הוא 18 שעות. באיזו שעה משקל החומרים יהיה זהה?

תשובות סופיות:

7) 9.41 שנים.
8) 7.47 שנים.
9) 16.43 שעות.
10) 12.43 שעות.
11) 9.43 ימים.
12) 16:00

שאלות שונות:

שאלות:

13) בנק א' נותן ריבית של 3% כל שנתיים בתוכנית חיסכון מסוימת.
בנק ב' נותן ריבית של 4.5% כל 3 שנים בתוכנית חיסכון אחרת.
אדם מתכוון להפקיד סכום כסף מסוים לתקופה של 18 שנה.
באיזה בנק כדאי לו להשקיע את כספו?

14) נתונות שתי תרביות חיידקים, כל אחת גדלה בצורה מעריכית.
בשעה מסוימת בתרבית א' היו 4,000 חיידקים ובתרבית ב' היו 500 חיידקים.
נסמן:
t_1 - הזמן שחלף עד שבתרבית א' היו פי 2 חיידקים מאשר בתרבית ב'.
t_2 - הזמן שחלף עד שבתרבית ב' היו פי 2 חיידקים מאשר בתרבית א'.
חשב את היחס $\frac{t_1}{t_2}$.

15) מספר החיידקים בתרבית גדל ב- $p\%$ בכל שעה.
בשעה מסוימת מספר החיידקים היה m. כעבור t שעות הוציאו m חיידקים מהתרבית וכעבור עוד t שעות היו $6m$ חיידקים בתרבית.
הבע את t באמצעות p.

הערה:
שאלות 16-17 עוסקות בפתרון בעיות קיצון מעריכיות.

16) נתונה הפונקציה: $f(x)=700\cdot 1.08^x-200x$.
מצא את ערך ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

17) נתונות שתי בריכות דגים. בבריכה א' קצב הריבוי של מספר הדגים הוא 10% בחודש ובבריכה ב' הוא 20% בחודש. כמות הדגים בבריכה א' גדולה פי 5 מכמות הדגים בבריכה ב'. בעוד כמה חודשים לערך ההפרש בין כמות הדגים בבריכה א' לכמות הדגים בבריכה ב' יהיה מקסימלי?

18) כמות עצים ביער גדלה בצורה מעריכית לפי אחוז ריבוי של 15% לשנה.
בשנת 1990 נספרו כמות עצים מסוימת ביער. בשנת 2000 כרתו 30,000 עצים ולאחר 5 שנים נוספות, בשנת 2005, נספרו ביער 753365 עצים.
מצא כמה עצים היו ביער בשנת 1990.

19) ערכה של דירה יורד מדי שנה באחוז קבוע של 6%. ידוע כי ערך הדירה לאחר 10 שנים מיום מכירתה נמוך ב-35,000 ₪ ממחירה המקורי.

א. מצא את המחיר ההתחלתי של הדירה.

ב. מצא לאחר כמה שנים ערך הדירה ירד מתחת ל-30,000 ₪.

20) שני בנקים מציעים שתי תכניות חיסכון כלהלן:
בנק א' מציע תכנית חיסכון ל-8 שנים שבסופה סכום הקרן יגדל ב-80%.
בנק ב' מציע תכנית חיסכון ל-6 שנים שבסופה סכום הקרן יגדל ב-60%.

א. באיזה בנק אחוז הריבית השנתית גבוה יותר?

ב. דני משקיע סכום כסף k לפי תכנית חיסכון של בנק א' ובתום התוכנית הוא מעביר את הסכום שעומד לרשותו לתכנית החיסכון של בנק ב'.
רפי משקיע סכום כסף זהה k לפי תכנית חיסכון של בנק ב' ובתום התכנית הוא מעביר את הסכום שעומד לרשותו לתכנית החיסכון של בנק א'.
למי יהיה סכום גדול יותר בתום שתי התכניות?
נמק את תשובתך והראה חישוב מתאים.

21) שווי שתי מכוניות המוצעות למכירה הוא:
מכונית א' - 60,000 ₪ ומכונית ב'-85,000 ₪.
ידוע כי ערך מכונית ב' יורד ב-4% בכל שנה
וערך מכונית א' יורד ב-2.5% בכל שנה.

א. מצא בעוד כמה שנים יהיו המחירים של שתי המכוניות זהים.

ב. סיגל רוצה לקנות מכונית ולרשותה עומד סכום של 40,000 ₪.
איזו מכונית תוכל לקנות סיגל קודם ולאחר כמה שנים מיום הצעתן?

22) כמות אצות בים מתרבה בצורה מעריכית. ידוע כי לאחר 40 שנים כמות אצות מכפילה את עצמה. כדי לצמצם את כמות האצות מבצעים עבודות ניקיון מדי שנה ובהן מנקים כ-200 ק"ג אצות. בחוף מסוים היו בשנת 1990 כ-1200 ק"ג אצות.

א. מצא את קצב גידול האצות השנתי.

ב. מצא כמה אצות יהיו בחוף המסוים בשנת 1993 לאחר הניקיון באותה שנה.

23) נתונות שתי כמויות התחלתיות זהות, האחת גדלה בצורה מעריכית והשנייה קטנה בצורה מעריכית. לשתי הכמויות אחוז גדילה/דעיכה קבוע והוא 5%.

א. האם הזמן שבו הכמות הראשונה תגדל לכמות הכפולה מהכמות ההתחלתית שלה שווה לזמן שבו תקטן הכמות השנייה למחצית מהכמות ההתחלתית שלה? נמק והראה חישוב מתאים.

ב. ללא קשר לנתון הקודם, הראה כי כדי ששתי הכמויות יגיעו ליעדיהן באותו הזמן אז הבסיסים שלהן (q_1, q_2) צריכים להיות מספרים הופכיים.

24) כמות חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית לפי אחוז קבוע p מדי שעה.
ביום מסוים היו k גרם מהחומר. לאחר 3 שעות הוסיפו עוד k גרם לכמות שנותרה ולאחר 3 שעות נוספות מתברר שנשארו k גרם מהחומר. מצא את p.

25) ערך מנייה מסוימת גדל בצורה מעריכית.
ידוע כי בשנת 1980 הייתה המנייה שווה k שקלים.
המנייה גדלה באחוז קבוע של 2% לשנה עד לשנת 1992 ומשם צנחה בקצב של 5% לשנה במשך 8 שנים נוספות.
לאחר מכן גדלה המנייה בקצב שנתי קבוע עד לשנת 2010.
אדם הרוצה לקנות את המנייה שנת 2010 נוכח לדעת כי מחירה הוא $1.5k$.
מצא באיזה אחוז עלתה המנייה לאחר הצניחה שלה.

26) מספר העופות בשמורת טבע גדל לפי אחוז קבוע של 3% לשנה.
בשנה מסוימת נספרו 2300 עופות בשמורה, לאחר 5 שנים הוסיפו לשמורת הטבע 1000 עופות נוספים.

א. מצא כמה עופות יהיו בשמורה לאחר 5 שנים נוספות.

ב. מצא תוך כמה שנים יהיה מספר העופות בשמורה זהה לזה שמצאת בסעיף א' אילולא היו מוסיפים את 1000 העופות הנוספים, אלא אם הייתה גדילה רציפה.

27) אדם מפקיד סכום של 120,000 ₪ לפי ריבית דריבית של 12% בשנה.
כעבור t שנים הוא משך את כל הסכום שעמד לרשותו והפקיד אותו ל-t שנים נוספות בתוכנית חיסכון חדשה לפי ריבית דריבית של 15%. בתום תקופה זו עמד לרשותו סכום של 330,252 ₪.

א. מצא את t.

לאחר תקופה זו הוא מפקיד את סכום הכסף הסופי בתכנית לפי ריבית דריבית מסוימת. לאחר 5 שנים עמד לרשותו סכום של 821,772 ₪.

ב. מצא את אחוז הריבית החדש.

28) ערכן של שתי חלקות אדמה יורד בצורה מעריכית. ידוע כי בזמן שערכה של אדמה א' מגיע למחצית מערכה המקורי, ערכה של אדמה ב' מגיע ל-30% מערכה המקורי. לאחר 50 שנים אדמה א' מאבדת 60% מערכה.

א. מצא את אחוז הדעיכה של אדמה ב'.

ב. ידוע כי לאחר 100 שנים ערכן של שתי האדמות שווה. ערכה המקורי של אדמה ב' הוא 100,000 ₪. מצא את ערכה המקורי של אדמה א'.

29) מספר העופות בשמורת טבע גדל לפי אחוז קבוע של p אחוזים לשנה.
בשנה מסוימת נספרו 3000 עופות בשמורה, לאחר 4 שנים הוסיפו לשמורה 1000 עופות נוספים.

א. מצא את אחוז הגידול השנתי p אם ידוע כי לאחר 4 שנים נוספות היו בשמורת 5647 עופות.

ב. מצא לאחר כמה שנים יהיו 5647 עופות אילולא היו מוסיפים את 1000 העופות הנוספים.

30) בכוורת דבורים ידוע כי בכל 10 שעות כמות הדבורים גדלה פי 1.5.

א. מצא באיזה אחוז גדלה כמות הדבורים בכל שעה.

ב. מוציאים לאחר 10 שעות 3000 דבורים וידוע כי נשארו 1500 דבורים. חשב כמה דבורים היו בתחילה בכוורת.

31) אדם מפקיד k שקלים בתוכנית חיסכון לפי ריבית שנתית של $p\%$. לאחר 5 שנים הוא מושך מהחיסכון k שקלים ולאחר 5 שנים נוספות מתברר כי הצטבר בפיקדון שלו סך הכול $2.5k$ ₪. מצא את p .

32) ערך מנייה מסוימת גדל בצורה מעריכית.
ידוע כי בשנת 1995 הייתה המנייה שווה k שקלים.
המנייה גדלה באחוז קבוע של 5% לשנה עד לשנת 2000 ושם צנחה בקצב של 8% לשנה במשך 6 שנים נוספות. לאחר מכן גדלה המנייה בקצב שנתי קבוע עד לשנת 2010. אדם הרוצה לקנות את המנייה בשנת 2010 נוכח לדעת כי מחירה הוא k . מצא באיזה אחוז עלתה המנייה לאחר צניחתה.

תשובות סופיות:

13) בנק א'.

14) $\frac{t_1}{t_2}=\frac{1}{2}$

15) $t=\frac{\ln 3}{\ln\left(\frac{100+P}{100}\right)}$

16) $x=17.04$, מינימום.

17) 11 חודשים.

18) 100,000 עצים.

19) א. 75,858.5 ₪ ב. לאחר 15 שנים.

20) א. בנק ב' ב. לשניהם אותו הסכום.

21) א. לאחר 22.46 שנים. ב. מכונית א' ולאחר 16 שנים.

22) א. 1.017 ב. 653.48 ק"ג אצות.

23) א. הכמות השנייה תגיע ליעדה לפני הראשונה.

24) 14.82%

25) ב-5.95%

26) א. 4250 עופות. ב. 20.77 שנים.

27) א. $t=4$ ב. $p=20\%$

28) א. 3.13% ב. 25,909 ₪

29) א. 5% ב. 12.96 שנים.

30) א. ב-4.1% ב. 3000 דבורים .

31) 16.63%

32) ב-6.6%

מתמטיקה 1

פרק 8 - הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות

תוכן העניינים

1. פונקציה - הגדרה ותכונות בסיסיות ..... (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית ..... (ללא ספר)
3. הפונקציה הריבועית ..... (ללא ספר)
4. הפונקציה המעריכית ..... (ללא ספר)
5. הפונקציה הלוגריתמית ..... (ללא ספר)
6. פונקציות מפורסמות נוספות ..... (ללא ספר)
7. הזזות שיקופים מתיחות וכיווצים של פונקציה ..... (ללא ספר)
8. הפונקציות הטריגונומטריות ..... (ללא ספר)

מתמטיקה 1

פרק 9 - גבול של פונקציה

תוכן העניינים

1. הסבר כללי ..... (ללא ספר)
2. הצבה 134
3. צמצום 135
4. הכפלה בצמוד 136
5. גבולות טריגונומטריים 137
6. פונקציה שואפת לאינסוף 140
7. איקס שואף לאינסוף 141
8. הגבול של אוילר 143
9. כלל הסנדויץ 144
10. גבול של פונקציה מפוצלת 146
11. גבול לפי הגדרה 149

הצבה

שאלה

חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 4} x^2+x+1$

ב. $\lim_{x\to 10} \frac{x+1}{x+2}$

ג. $\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x+3}$

ד. $\lim_{x\to 100} 20$

תשובה

א. 21 ב. $\frac{11}{12}$ ג. 2 ד. 20

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

צמצום

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}$

2) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{2x^2-50}{2x^2+3x-35}$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^7-x}{x-1}$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-x}{x-1}$

5) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{2x^2-5x+2}{6x^2-5x+1}$

6) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$

7) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$

8) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$

9) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^3-4x^2+x-4}$

10) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt[5]{x}+1}{x+1}$

תשובות סופיות

1) $\frac{5}{6}$ 2) $\frac{10}{8.5}$ 3) 6 4) $n-1$ 5) -3

6) 32 7) 3 8) 27 9) $\frac{8}{17}$ 10) $\frac{1}{5}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הכפלה בצמוד

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$

2) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3-\sqrt{x+6}}{2x-6}$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1}$

5) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4}$

6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{3x+1}}{1-\sqrt{2x-1}}$

7) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}$

8) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+x}-1}{\sqrt[3]{x}}$

תשובות סופיות

1) $\frac{1}{2}$

2) 4

3) $-\frac{1}{12}$

4) $\frac{3}{8}$

5) $\frac{1}{6}$

6) $\frac{3}{4}$

7) $\frac{1}{3}$

8) $-\frac{8}{3}$

9) $\frac{1}{2}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גבולות טריגונומטריים

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול הטריגונומטרי $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$):

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{4x}$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(4x)}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{\sin 2x}$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

6) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x}$

7) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

8) $\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{x^3}$

9) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

10) $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(1-x)}{x^2-1}$

11) $\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$

12) $\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$

13) $\lim_{x\to a}\frac{\tan x-\tan a}{x-a}$

14) $\lim_{x\to \pi}\frac{\sin 4x}{\sin 10x}$

15) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\tan 2x\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

16) $\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$

17) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\sin^2 x}$

18) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\frac{3}{4}$ 2) $\frac{3}{4}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $\frac{1}{2}$ 5) $\frac{1}{2}$

6) $\frac{1}{2}$ 7) $\frac{1}{8}$ 8) 4 9) $\frac{1}{4}$

10) $-\frac{1}{2}$ 11) $\cos a$ 12) $-\sin a$ 13) $\frac{1}{\cos^2 a}$

14) $\frac{4}{10}$ 15) $\frac{1}{2}$ 16) $\frac{2}{\pi}$ 17) 1

18) $\frac{-1}{12}$

זהויות טריגונומטריות שכדאי להכיר

$$\begin{cases} \sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \\ \sin a-\sin b=2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2} \\ \cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \\ \cos a-\cos b=-2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2} \\ \tan a+\tan b=\frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b} \\ \tan a-\tan b=\frac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b} \end{cases}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

$$\begin{cases} \sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b \\ \sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b \\ \cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b \\ \cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \pi n=0 \\ \cos \pi n=(-1)^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right)=\cos a \\ \cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin a \end{cases}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פונקציה שואפת לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+4}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-1)^2}{x-2}$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{-x^2}{(2-x)^2}$

4) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)}$

5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}$

6) $\lim\limits_{x\to 2^-}-\frac{1}{2}\ln(2-x)$

7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left((\ln x)^2+2\ln x-3\right)$

8) $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$

9) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

10) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

12) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x\cdot\cot x$

13) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt{x-1}}$

תשובות סופיות

1) ϕ
2) ϕ
3) $-\infty$
4) ϕ
5) $-\infty$
6) ∞
7) ∞
8) ϕ
9) 0
10) 1
11) ϕ
12) $-\infty$
13) $-\infty$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

x שואף לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{-x}\right)^{\ln x}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x+e^{x}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+2}{x^2+1000x}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4+2x^2+6}{3x^3+10x}$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+2x^2+6}{3x^5+10x}$

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-5x+6}{2x+10}-\dfrac{x}{2}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

9) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{9x^6-5x}}{x^3-2x^2+1}$

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4+2x^2+6+27x^6}}{\sqrt{3x^3+10x+4x^4}}$

11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$

12) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{16^x+4^{x+1}}{2^{4x+2}+2^{x+3}}$

13) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{16^x+4^{x+\frac{1}{2}}}{2^{4x+2}+2^{x+3}}$

14) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4\cdot 9^x+3^{x+1}}{81^{0.5x}+3^{x+3}}$

15) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4\cdot 9^x+3^{x+1}}{81^{0.5x}+3^{x+3}}$

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{4x^2+2}{x^2+1000x}}$

17) $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{3x^3-5x-1}{x^3-2x^2+1}\right)$

18) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{x^4+2x^2+6}{3x^4+10x}}$

19) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin\left(\dfrac{x^4+2x^2+6}{3x^5+10x}\right)$

20) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[5]{\dfrac{ax+1}{bx+2}}$

21) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)$

22) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+kx}-x\right)$

23) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$

24) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)$

25) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+x^2+1}-x^2\right)$

26) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

27) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-4)^{10}(3x^2-1)^4}{x^2(2x-5)^{10}(x^3+1)^2}$

28) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)^5}{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)^4}$

29) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln\left(5\cdot 2^{x+2}+6\cdot e^{x+1}\right)-x\right]$

תשובות סופיות

1) 0 2) $-\frac{\pi}{2}$ 3) 4 4) $-\infty$

5) 0 6) -5 7) 1 8) -1

9) -3 10) 1.5 11) $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ 12) $\frac{1}{4}$

13) 0 14) 4 15) $\frac{1}{9}$ 16) 2

17) $\ln 3$ 18) $e^{\frac{1}{3}}$ 19) 0

20) אם $b\neq 0$: $\lim=\sqrt[5]{\frac{a}{b}}$. אם $a>0$, $b=0$: ∞. אם: $a<0$, $b=0$: $-\infty$.

21) 2.5 22) $\frac{k}{2}$ 23) $\frac{1}{2}$ 24) $-\frac{1}{2}$

25) $\frac{1}{2}$ 26) $\frac{a-b}{2}$ 27) $\frac{3^4}{2^{10}}$ 28) $\frac{5}{4}$

29) $\ln(6e)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הגבול של אוילר

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול של אוילר : $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$):

1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x$

2) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$

3) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^x$

4) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1}$

5) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x$

6) $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

7) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+x+4}\right)^{4x^2}$

8) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x+1}{x^2+x+2}\right)^{10x}$

9) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\tan\frac{1}{x}\right)^x$

תשובות סופיות

1) $e^{\frac{1}{2}}$ 2) 1 3) e^2 4) e^{-1} 5) e^3

6) e 7) e^{-12} 8) e^{30} 9) e

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

כלל הסנדוויץ'

שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות **1-10**:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos(2x+1)}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+\sin x}{4x+\cos x}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+x+\sin 2x}{x^2+\cos 3x}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot\cos\left(\ln x^2\right)$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+\arctan(2x-3)}{4x+\arctan(x-\ln x)}$

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{2^x+3^x+4^x}$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}[x]$

10) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}[x]$

11) נתונה פונקציה $z:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, המקיימת $\lim\limits_{x\to 2}z(x)=4$,

ונתונה פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, המקיימת $4z(x)\le f(x)\le\left(z(x)\right)^2$, לכל x .

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cos(z(x))}{x}\ ,\ \lim_{x\to-\sqrt{2}}\left(z\left(x^2\right)-x^2\right)\ ,\ \lim_{x\to 2}\tan(z(x))\ ,\ \lim_{x\to 2}f(x)$$

12) חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$.

13) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכח: $\lim\limits_{x\to c}f(x)=0 \Leftarrow \lim\limits_{x\to c}|f(x)|=0$.

ב. האם נכונה גם הטענה: $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\pm 1 \Leftarrow \lim\limits_{x\to c}|f(x)|=1$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) 0 2) 0 3) $\frac{3}{4}$ 4) 3 5) 0

6) 0 7) $\frac{3}{4}$ 8) 4 9) 1 10) 0

11) $\lim_{x\to 2} f(x)=16$, $\lim_{x\to\infty}\frac{\cos(z(x))}{x}=0$,

$\lim_{x\to 2}\tan(z(x))=\tan 4$, $\lim_{x\to -\sqrt{2}}\left(z\left(x^2\right)-x^2\right)=2$

12) 0

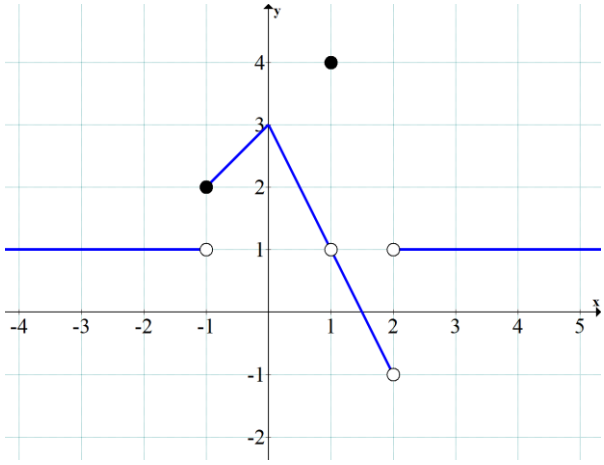
13) א. שאלת הוכחה. ב. לא.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גבול של פונקציה מפוצלת

שאלות

1) להלן גרף של פונקציה:



חשבו את הגבולות הבאים או הוכיחו שהם לא קיימים:

א. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ 3. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ 2. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 1.

ב. $\lim\limits_{x\to -1}\left(3f-f^2\right)$ 2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(3f-f^2\right)$ 1.

ג. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1-f}$ 2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{4-f}$ 1.

2) נגדיר פונקציה $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ 0.5 & x=0\\ 1-x^2 & 0<x<2\\ 1.5x-6 & x\ge 2\end{cases}.$$

א. שרטטו את הפונקציה.

ב. חשבו, אם ניתן, את $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול $\lim\limits_{x\to 2}\left[4\left(f(x)\right)^2+10f(x)\right]$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

3) נגדיר פונקציה $f(x)$: $f(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ 0.5 & x=0\\ \cos x & 0<x<\pi\\ -0.5 & x\ge\pi\end{cases}$.

א. שרטטו את הפונקציה.

ב. חשבו, אם ניתן, את $\lim\limits_{x\to\pi} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול $\lim\limits_{x\to\pi}\left[2\left(f(x)\right)^2+3f(x)\right]$.

חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ של הפונקציות הבאות:

4) $(a=0),\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 4x}{x} & x>0\\ 4+e^{\frac{1}{x}} & x<0\end{cases}$

5) $(a=1),\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & x>1\\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & x<1\end{cases}$

6) $(a=0),\ f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

7) $(a=\infty),\ f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

8) $(a=-\infty),\ f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

9) א. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|1-x|}{x^2+x-2}$

ב. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{|1-x|}{x^2+x-2}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $1.\lim_{x\to1} f(x)=1$, $2.\ \lim_{x\to2} f(x)=\nexists$, $3.\ \lim_{x\to-1} f(x)=\nexists$

ב. $1.\ \lim_{x\to1}\left(3f-f^2\right)=2$, $2.\ \lim_{x\to-1}\left(3f-f^2\right)=2$

ג. $1.\ \lim_{x\to1}\frac{1}{4-f(x)}=\frac{1}{3}$, $2.\ \lim_{x\to1}\frac{1}{1-f(x)}=\nexists$

2) א. ראו בסרטון. ב. $\lim_{x\to0} f(x)=1,\ \lim_{x\to2} f(x)=-3$ ג. 6

3) א. ראו בסרטון. ב. $\lim_{x\to0} f(x)=1,\ \nexists\lim_{x\to\pi} f(x)$ ג. -1

4) 4

5) ϕ

6) ϕ

7) 1

8) -1

9) א. אין גבול. ב. $\frac{1}{6}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גבול לפי הגדרה

שאלות

בשאלות **1-6**, **על פי הגדרת הגבול**, הוכיחו:

1) $\lim_{x\to 2} 7x+14=28$

2) $\lim_{x\to 4} x^2+x=20$

3) $\lim_{x\to 24} \sqrt{x+1}=5$

4) $\lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$

5) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x}{x^2-2}=1$

6) $\lim_{x\to \alpha} \sin x=\sin\alpha$

7) חשבו, **על פי הגדרת הגבול**: $\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x^2-1}$.

הוכיחו **על פי הגדרת הגבול** את מקרים **8-11**:

8) $\lim_{x\to 2} \frac{3+x}{x^2+1}=1$

9) $\lim_{x\to \infty} \frac{x+7}{x+2}=1$

10) $\lim_{x\to \infty} \frac{3-4x}{2x+1}=-2$

11) $\lim_{x\to \infty} \frac{3x^2-1}{x^2+x+1}=3$

12) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת: $\lim_{x\to \infty} f(x)=-5$.
הוכיחו כי קיים $M>0$ ממשי כלשהו, כך שעבור כל $x>M$ מתקיים $f(x)<-4$.

13) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת: $\lim_{x\to \infty} f(x)=5$.
הוכיחו כי קיים $M>0$ ממשי כלשהו, כך שעבור כל $x>M$ מתקיים $f^2(x)>16$.

14) נניח f פונקציה ממשית וחיובית בתחום $[a,\infty)$ המקיימת $\lim_{x\to \infty} f(x)=0$.
הוכיחו שמתקיים $\lim_{x\to \infty} \sqrt{f(x)}=0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

15) נתון הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x}{x^2+3x+2}=1$.

מצאו ערך של $M>0$, עבורו לכל $x>M$ הביטוי שבגבול קרוב לערך הגבול עד כדי 0.1 (במילים אחרות, מצאו M, כך ש-$\left|f(x)-L\right|<0.1$: $\forall x>M$).

16) נגדיר את הפונקציה $f(x)=\begin{cases}2 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}\end{cases}$.

האם הגבולות קיימים? הוכיחו זאת בהסתמך על הגדרת הגבול.

א. $\lim_{x\to\infty}f(x)$ ב. $\lim_{x\to 2.5}f(x)$ ג. $\lim_{x\to\pi}f(x)$

17) בהינתן הגבול $\lim_{x\to 1}\frac{2x+4}{x+11}=\frac{1}{2}$, מצאו $\delta>0$, כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ המקיים $|x-1|<\delta$, אי-השוויון $\left|\frac{2x+4}{x+11}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{100}$ מתקיים.

18) הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=0$, אז $\lim_{x\to\infty}\left(f^2(x)-g^2(x)\right)=0$.

ב. אם $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-g(x)\right)=0$, אז $\lim_{x\to x_0}\left(f^2(x)-g^2(x)\right)=0$.

ג. אם $\lim_{x\to x_0}\left|f(x)\right|=L$, אז: הגבול $\lim_{x\to x_0}f(x)$ קיים ושווה ל-L או $-L$.

ד. אם הגבולות $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)$ ו-$\lim_{x\to x_0}f(x)$ קיימים, אז גם הגבול $\lim_{x\to x_0}g(x)$ קיים.

19) יש להוכיח כי $\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x+3}\neq 1$ לפי ההגדרה.

20) יש להוכיח כי $\lim_{x\to 4}\frac{2x+1}{x+10}\neq 1$ לפי ההגדרה.

21) הוכיחו שאם $\lim_{x\to 0}f(x)=3$, אז קיימת סביבה נקובה של 0 שבה $f(x)>2$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

22) הוכיחו שאם $\lim_{x\to x_0} f(x) > L$, אז קיימת סביבה נקובה של x_0 שבה $f(x) > L$.

23) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו: $\lim_{x\to c} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to c} |f(x)| = 0$.

ב. האם נכונה גם הטענה: $\lim_{x\to c} f(x) = k \Leftrightarrow \lim_{x\to c} |f(x)| = |k|$ $(k \neq 0)$.

תשובות סופיות

7) $\pm\infty$

תשובות לשאר השאלות נמצאות באתר: GOOL.co.il

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה 1

פרק 10 - חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים

תוכן העניינים

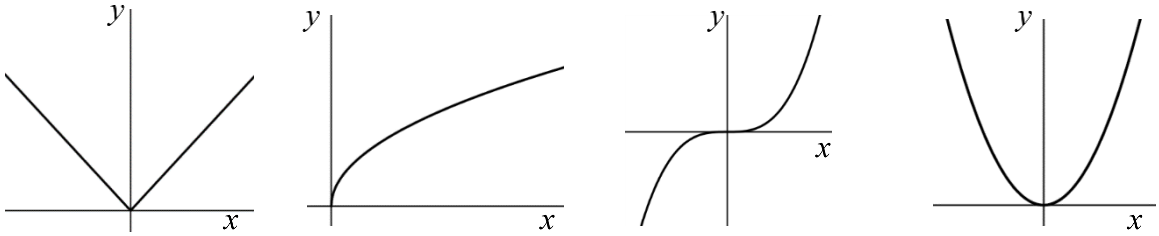
1. הקדמה כללית 152
2. גזירת פונקציות 153
3. מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה 159
4. מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה 160
5. שאלות עם פרמטרים 163
6. שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית 165

הקדמה כללית:

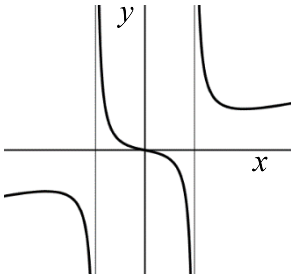
סיכום כללי:

פונקציות נפוצות:

הפונקציה $f(x)=x^2$: הפונקציה $f(x)=x^3$: הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$: הפונקציה $f(x)=|x|$:



פונקציה עם מכנה, למשל: $f(x)=\dfrac{5x^3+4x}{x^2-1}$:



שיפוע של פונקציה:

- השיפוע m של פונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1,y_1)$ שעל הפונקציה הוא ערך הנגזרת בנקודה $A(x_1,y_1)$, כלומר: $m=f'(x_1)$.
- השיפוע של המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1,y_1)$ שעל הפונקציה שווה לשיפוע הפונקציה בנקודה $A(x_1,y_1)$.
- משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1,y_1)$ שעליה מתקבלת על ידי הנוסחה למציאת ישר: $y-y_1=m(x-x_1)$.

הנגזרת:

לכל פונקציה $f(x)$ קיימת פונקציה, הנקראת פונקציית הנגזרת (או רק "הנגזרת") ומסומנת $f'(x)$, המתקבלת ממנה על פי כללי הגזירה.

גזירת פונקציות:

סיכום כללי:

כללי הגזירה:

- כלל גזירה מס' 1: $f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot x^{n-1}$.
- כלל גזירה מס' 2 (כפל בקבוע): $f(x)=ax^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot ax^{n-1}$.
- כלל גזירה מס' 3 (נגזרת של קבוע): $f(x)=a \Rightarrow f'(x)=0$.
- כלל גזירה מס' 4 (סכום והפרש): $f(x)=u\pm v \Rightarrow f'(x)=u'\pm v'$.
- כלל גזירה מס' 5 (פונקציה מורכבת): $f(x)=u^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$.
- כלל גזירה מס' 6 (נגזרת של $\frac{1}{x}$): $f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.
- כלל גזירה מס' 7 (מכפלה): $f(x)=u\cdot v \Rightarrow f'(x)=u'v+v'u$.
- כלל גזירה מס' 8 (מנה): $f(x)=\frac{u}{v} \Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.
- כלל גזירה מס' 9 (שורש): $f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

שאלות:

1) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3$	ב. $f(x)=x^7$	ג. $f(x)=x^2$
ד. $f(x)=x$	ה. $f(x)=x^{-3}$	ו. $f(x)=x^{-1}$
ז. $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$	ח. $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$	ט. $f(x)=x^{\frac{3}{4}}$

2) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=2x^3$	ב. $f(x)=3x^7$	ג. $f(x)=\frac{1}{2}x^4$
ד. $f(x)=\frac{x^6}{7}$	ה. $f(x)=8x$	ו. $f(x)=3x^{-2}$
ז. $f(x)=\frac{4}{x}$	ח. $f(x)=6x^{\frac{1}{2}}$	ט. $f(x)=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$

3) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=12$

ב. $f(x)=\frac{7}{8}$

4) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3+2x^2-3x+5$

ב. $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{x^3}{6}+\frac{3x}{4}-\frac{2}{5}$

ג. $f(x)=7x^2+23x-6$

ד. $f(x)=6x^2+8x+4$

ה. $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x^3$

ו. $f(x)=\frac{x^4}{8}+67$

5) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x-2)^3$

ב. $f(x)=(x^3+6)^5$

ג. $f(x)=3(x-x^2)^2$

ד. $f(x)=\frac{(5-x)^3}{4}$

ה. $f(x)=\frac{2(x+1)^4}{3}$

6) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3}{x}$

ב. $f(x)=-\frac{2}{x}$

ג. $f(x)=\frac{1}{x^2}$

ד. $f(x)=\frac{3}{x^3}$

ה. $f(x)=\frac{1}{x^2-3x}$

ו. $f(x)=\frac{2}{3-x}$

ז. $f(x)=\frac{6}{x+5}$

7) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x+1)(x-3)$

ב. $f(x)=(5x+1)^3(x-3)$

ג. $f(x)=x^3(6-x)^4$

ד. $f(x)=3x^2\cdot x$

ה. $f(x)=x^2\cdot x^3$

ו. $f(x)=x(3x+7)$

ז. $f(x)=3x^3(3x-1)$

ח. $f(x)=(x-2)(2x^2+3)$

ט. $f(x)=(3x-2)(x^2+10x)$

י. $f(x)=(3x^4-4x)(2x^2+5x+2)$

יא. $f(x)=x(x-2)(3x-4)$

8) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(x^2-4)^2$

ב. $f(x)=2x^3(3x+5)^2$

ג. $f(x)=(x^3+2)^2(x-1)^3$

ד. $f(x)=(x^2+1)^3(2x-1)^2$

9) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3x-1}{1+2x}$

ב. $f(x)=\frac{x^2+1}{5x-12}$

ג. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+3}$

ד. $f(x)=\frac{x^2+8}{x-1}$

ה. $f(x)=\frac{1}{x}$

ו. $f(x)=\frac{3}{x^3}$

ז. $f(x)=\frac{(x-1)^2}{x+1}$

ח. $f(x)=\frac{(x^2+3)^2}{x^2-2}$

ט. $f(x)=\frac{x^3-x^2}{2(1-x)}$

י. $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$

10) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x}$

ב. $f(x)=4\sqrt{x+1}$

ג. $f(x)=\sqrt{x^3-1}$

ד. $f(x)=(3x+1)\sqrt{x}$

ה. $f(x)=x^2\sqrt{x+3}$

ו. $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x}}$

11) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x+1}$

ב. $f(x)=\sqrt{2x}$

ג. $f(x)=\sqrt{3x^2+1}$

ד. $f(x)=\sqrt{10-3x}$

ה. $f(x)=\sqrt{2x^2+7x}$

ו. $f(x)=3x^2-8\sqrt{x}$

ז. $f(x)=x^2\sqrt{1-2x}$

ח. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x}$

ט. $f(x)=\frac{x\sqrt{x^2+4}}{2}$

י. $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}}$

יא. $f(x)=\frac{2x^3-x^2+x-5\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$

יב. $f(x)=\sqrt{\frac{3-x}{x}}$

יג. $f(x)=\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x}}$

יד. $f(x)=\frac{x^2+7}{\sqrt{x^2-5}}$

טו. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-1}$

טז. $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$

12) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=ax^4-bx$

ב. $f(x)=\frac{ax^2}{3}-\frac{x}{b}+c$

ג. $f(x)=\frac{x-2a}{x-4a}$

ד. $f(x)=a\sqrt{bx^2+c}$

13) גזור פעמיים את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{x^2+2x+4}{2x}$

ב. $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{2x+10}$

ג. $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$

ד. $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

ה. $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

ו. $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

תשובות סופיות:

1) א. $3x^2$ ב. $7x^6$ ג. $2x$ ד. 1 ה. $-\frac{3}{x^4}$ ו. $-\frac{1}{x^2}$

ז. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ח. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ט. $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$.

2) א. $6x^2$ ב. $21x^6$ ג. $2x^3$ ד. $\frac{6x^5}{7}$ ה. 8.

ו. $-\frac{6}{x^3}$ ז. $-\frac{4}{x^2}$ ח. $\frac{3}{\sqrt{x}}$ ט. $\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$.

3) א. 0 ב. 0.

4) א. $3x^2+4x-3$ ב. $x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{4}$ ג. $14x+23$ ד. $12x+8$ ה. $x-3x^2$ ו. $0.5x^3$.

5) א. $15(5x-2)^2$ ב. $15x^2(x^3+6)^4$ ג. $6(x-x^2)(1-2x)$

ד. $-\frac{3}{4}(5-x)^2$ ה. $\frac{8(x+1)^3}{3}$.

6) א. $-\frac{3}{x^2}$ ב. $\frac{2}{x^2}$ ג. $-\frac{2}{x^3}$ ד. $-\frac{9}{x^4}$ ה. $-\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2}$

ו. $\frac{2}{(3-x)^2}$ ז. $-\frac{6}{(x+5)^2}$.

7) א. $10x-14$ ב. $(5x+1)^2(20x-44)$ ג. $x^2(6-x)^3(18-7x)$.

ד. $9x^2$ ה. $5x^4$ ו. $6x+7$ ז. $36x^3-9x^2$ ח. $6x^2-8x+3$

ט. $9x^2+56x-20$ י. $36x^5+75x^4+24x^3-24x^2-40x-8$

יא. $9x^2-20x+8$.

8) א. $4x(x^2-4)$ ב. $30x^2(x+1)(3x+5)$ ג. $3(x-1)^2(x^3+2)(3x^3-2x^2+2)$

ד. $2(2x-1)(x^2+1)^2(8x^2-3x+2)$.

9) א. $\frac{5}{(1+2x)^2}$ ב. $\frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2}$ ג. $\frac{8x}{(x^2+3)^2}$ ד. $\frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$

ה. $-\frac{1}{x^2}$ ו. $-\frac{9}{x^4}$ ז. $\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$

ח. $\frac{2x(x^2+3)(x^2-7)}{(x^2-2)^2}$ ט. $-x$ י. $-\frac{1}{(x+2)^2}$.

10) א. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ב. $\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ ג. $\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$ ד. $\frac{9x+1}{2\sqrt{x}}$ ה. $\frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}}$

ו. $\frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$

11) א. $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ ב. $\frac{1}{\sqrt{2x}}$ ג. $\frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}$ ד. $-\frac{3}{2\sqrt{10-3x}}$ ה. $\frac{4x+7}{2\sqrt{2x^2+7x}}$

ו. $6x-\frac{4}{\sqrt{x}}$ ז. $\frac{2x-5x^2}{\sqrt{1-2x}}$ ח. $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$ ט. $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+4}}$ י. $\frac{1-3x}{(1-x^2)^{1.5}}$

יא. $3\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}+\frac{5}{x^2}$ יב. $-\frac{3}{2x\sqrt{3x-x^2}}$ יג. $\frac{-x^2+2x+1}{2(1-x)^{1.5}\sqrt{1+x^2}}$

יד. $\frac{x^3-17x}{(x^2-5)^{1.5}}$ טו $-\frac{x+1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$ טז. $-\frac{x+3}{2(x-1)^2\sqrt{x+1}}$.

12) א. $4ax^3-b$ ב. $\frac{2ax}{3}-\frac{1}{b}$ ג. $\frac{-2a}{(x-4a)^2}$ ד. $\frac{abx}{\sqrt{bx^2+c}}$.

13) א. $f''(x)=\frac{4}{x^3}$, $f'(x)=\frac{2x^2-8}{4x^2}$.

ב. $f''(x)=\frac{448}{(2x+10)^3}$, $f'(x)=\frac{2x^2+20x-62}{(2x+10)^2}$.

ג. $f''(x)=\frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$, $f'(x)=\frac{4x}{(x+1)^3}$.

ד. $f''(x)=\frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$, $f'(x)=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$.

ה. $f''(x)=\frac{6x}{(x+1)^4}$, $f'(x)=\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$.

ו. $f''(x)=\frac{12(x+1)(x+3)}{(x-1)^5}$, $f'(x)=-\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}$

מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה:

שאלות:

14) מצא את שיפוע הפונקציה $f(x)=2x^3-7x$ בנקודה $(2\ ,\ 2)$.

15) מצא את שיפוע הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^2-3}$ בנקודה בה $x=-2$.

16) מצא את שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=4\sqrt{x}$ בנקודה בה $x=1$.

תשובות סופיות:

14) $m=17$
15) $m=4$
16) $m=2$

מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה:

שאלות:

17) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=2(4x+3)^3$ בנקודה בה $x=-1$.

18) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{8}{x+1}$ בנקודה בה $y=2$.

19) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x)=x^2-2x-8$ בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה-x.

20) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=x^4-2x$ ששיפועו 2.

21) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{x^3+3x-1}{x^2-2}$ בנקודה שבה $x=1$.

22) נתון כי הישר $2y-3x=3$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=3\sqrt{x}$.
מצא את נקודת ההשקה.

23) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{x}$ בנקודה בה $x=1$.

24) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=3x^2-8\sqrt{x}$ בנקודה בה $x=4$.

25) נתונה הפונקציה הבאה $f(x)=4x-2\sqrt{x}$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המקביל לישר $f(x)=3x-\frac{1}{2}$.

ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה-x.

26) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{4}{\sqrt{x-1}}$ ששיפועו 2-.

27) מצא את משוואות המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$ בנקודה שבה $x=2$.

28) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x)=\frac{1}{3x^3}$ היוצרים עם הכיוון החיובי של ציר ה-x זווית של $135°$.

29) מצא את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות הבאות: $y=-\frac{1}{4}x^2-5$, $y=x^2$.

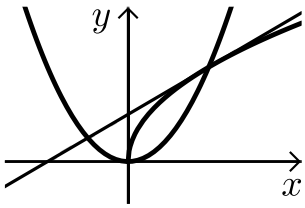
30) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$ ונתון הישר: $y=2x$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר הנמצאת ברביע הראשון.

ב. מצא את משוואות המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שמצאת בסעיף הקודם.

ג. חשב את השטח שנוצר בין המשיק והצירים.

31) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x^2$.



א. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ העובר דרך נקודת החיתוך שמצאת הנמצאת ברביע הראשון.

ג. מצא את נקודת החיתוך הנוספת של המשיק שמצאת עם גרף הפונקציה $g(x)$.

תשובות סופיות:

17) $y=24x+22$

18) $y=-\frac{1}{2}x+3\frac{1}{2}$

19) $y=6x-24\ ,\ y=-6x-12$

20) $y=2x-3$

21) $y=-12x+9$

22) $(1\ ,\ 3)$

23) $y=-\frac{1}{2}x+2\frac{1}{2}$

24) $y=22x-56$

25) א. $y=3x-1$ ב. $\left(\frac{1}{3}\ ,\ 0\right)$

26) $y=-2x+8$

27) $y=\frac{11}{16}x-\frac{15}{8}$

28) $y=-x+1\frac{1}{3}\ ,\ y=-x-1\frac{1}{3}$

29) $y=2x-1\ ,\ y=-2x-1$

30) א. $(1\ ,\ 2)$ ב. $y=-1.5x+3.5$ ג. $S=4\frac{1}{12}$.

31) א. $(1\ ,\ 1)\ ,\ (0\ ,\ 0)$ ב. $y=0.5x+0.5$ ג. $(-0.5\ ,\ 0.25)$.

שאלות עם פרמטרים:

שאלות:

32) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=ax^2-4x$ בנקודה שבה $x=3$ הוא 8.
מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

33) נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{ax}$, $(a>0)$.
המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=\frac{1}{2}$ הוא בעל שיפוע 1.
מצא את ערך הפרמטר a.

34) נתונה הפונקציה: $y=x^3+a\sqrt{x}$ (a פרמטר).
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$ הוא 5.
מצא את ערך הפרמטר a.

35) נתונה הפונקציה: $y=2\sqrt{x}-\frac{A}{x}$ (A פרמטר).
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$ הוא 2.
מצא את ערך הפרמטר A.

36) הישר $y=4x+b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x^2}+3$.
מצא את b ואת נקודת ההשקה.

37) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{2}{ax+3}$ בנקודה שבה $y=2$ הוא -4.
מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

38) הישר $y=ax+\frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x)=\frac{2}{x+c}$ בנקודה $x=0$.
מצא את ערכי הפרמטרים a ו-c.

39) הישר $y=3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=x\sqrt{x}+b$.
מצא את b ואת נקודת ההשקה.

40) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{a}{\sqrt{bx-1}}$ בנקודה $(1\ ,\ 6)$ הוא -6.
מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת משוואת המשיק.

41) לאילו ערכי k ישיק הישר $y=-5x+6$ לגרף הפונקציה $f(x)=x^3-2x^2-4x+k$?
לכל ערך כזה של k מצא את נקודת ההשקה.

42) הפונקציות $y=\frac{1}{x}$ ו- $y=-\frac{1}{2}x^2+k$ משיקות זו לזו.
מצא את k ואת נקודת ההשקה.

תשובות סופיות:

32) $a=2\ ,\ y=8x-18$

33) $a=2$

34) $a=4$

35) $\mathrm{A}=1$

36) $(-1\ ,\ 5)\ ,\ y=4x+9$

37) $a=2\ ,\ y=-4x-2$

38) $a=-\frac{1}{8}\ ,\ c=4$

39) $b=4\ ,\ (4\ ,\ 12)$

40) $b=2\ ,\ a=6\ ,\ y=-6x+12$

41) $k=6:(1\ ,\ 1)$ או: $\left(\frac{1}{3}\ ,\ \frac{13}{3}\right):k=\frac{158}{27}$.

42) $(1\ ,\ 1)\ ,\ k=1.5$

שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית:

שאלות:

43) ענה על הסעיפים הבאים:

א. בטא באמצעות t את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=x^2+1$ בנקודה שבה $x=t$.

ב. מצא את ערכיו של t אם נתון שהמשיק עובר בנקודה $(-1\ ,\ 1)$.

44) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=5x-x^2$ העוברים דרך הנקודה $(3\ ,\ 7)$.

45) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=x^2+5x-6$ העוברים דרך הנקודה $(0\ ,-10)$.

46) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=12x-x^3$ העוברים דרך הנקודה $(2\ ,\ 24)$.

47) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ העובר בנקודה $(3\ ,\ 0)$.

48) מצא משוואת המשיק לפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ אם ידוע ששטח המשולש שהוא יוצר עם הצירים הוא 4.5 יחידות שטח.

49) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x-2}}$ העוברים דרך הנקודה $(2\ ,\ 3)$.

תשובות סופיות:

43) א. $y=2tx-t^2+1$ ב. $t=0,-2$.

44) $y=-3x+16$, $y=x+4$

45) $y=x-10$, $y=9x-10$

46) $y=-15x+54$, $y=12x$

47) $y=-\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2}$

48) $y=-\frac{1}{16}x+\frac{3}{4}$

49) $y=-x+5$

מתמטיקה 1

פרק 11 - חשבון דיפרנציאלי - חישובי נגזרות של פונקציה - הרחבות

תוכן העניינים

1. כללי הגזירה ..... (ללא ספר)

2. תרגול בכללי הגזירה 167

3. תרגילים נוספים לפי סוגים 171

4. גזירה סתומה 174

5. כלל השרשרת 176

6. גזירה לוגריתמית 179

תרגול בכללי הגזירה

שאלות

גזרו פעמיים את הפונקציות הבאות (בשאלות **27-35** מצאו רק את הנגזרת הראשונה):

1) $f(x)=\frac{x^2+2x+4}{2x}$

2) $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{2x+10}$

3) $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$

4) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

5) $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

6) $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

7) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

8) $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

9) $f(x)=x\cdot\ln x$

10) $f(x)=x^2\cdot\ln x$

11) $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1}{2-x}}$

12) $f(x)=\ln^2 x+2\ln x-32$

13) $f(x)=\ln^2 x+\frac{1}{\ln^2 x}$

14) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

15) $f(x)=(x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}}$

16) $f(x)=x\cdot e^{-2x^2}$

17) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

18) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$

19) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(1-x)$

20) $f(x)=\sin(x^3)$

21) $f(x)=\cos(x^4)$

22) $f(x)=\sin^3 x$

23) $f(x)=\tan(x^2)$

24) $f(x)=\ln(\cos x^2)$

25) $f(x)=\arcsin(2x+3)$

26) $f(x)=\arctan(x^2)$

27) $f(x)=(x+1)^{\sin x}$

28) $f(x)=(\sin x)^x$

29) $f(x)=(\cos x)^{\ln x}$

30) $y=x^{\ln x}$

31) $y=\sqrt[x]{x}$

32) $y=x^{\sqrt{x}}$

33) $y=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$

34) $y=(x^2+1)^x$

35) $y=(x+1)^{(x+1)}$

הערה: בשאלות **28** ו-**29** נציג שתי דרכי פתרון. מומלץ לצפות בשתיהן.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $f'(x)=\frac{2x^2-8}{4x^2},\quad f''(x)=\frac{4}{x^3}$

2) $f'(x)=\frac{2x^2+20x-62}{(2x+10)^2},\quad f''(x)=\frac{448}{(2x+10)^3}$

3) $f'(x)=\frac{4x}{(x+1)^3},\quad f''(x)=\frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$

4) $f'(x)=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2},\quad f''(x)=\frac{4x\cdot(2x^2+24)}{(x^2-4)^3}$

5) $f'(x)=\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3},\quad f''(x)=\frac{6x}{(x+1)^4}$

6) $f'(x)=-\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4},\quad f''(x)=12\frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5}$

7) $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2},\quad f''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}$

8) $f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x^{1.5}},\quad f''(x)=\frac{3\ln x-8}{4x^{2.5}}$

9) $f'(x)=\ln x+1,\quad f''(x)=\frac{1}{x}$

10) $f'(x)=x(2\ln x+1),\quad f''(x)=2\ln x+3$

11) $f'(x)=\frac{1}{2(2-x)},\quad f''(x)=\frac{1}{(4-2x)^2}$

12) $f'(x)=\frac{2}{x}(\ln x+1),\quad f''(x)=\frac{-2\ln x}{x^2}$

13) $f'(x)=\frac{2}{x}\left[\frac{(\ln x)^4-1}{(\ln x)^3}\right],\quad f''(x)=-\frac{2}{x^2}\left\{\frac{(\ln x)^5-(\ln x)^4-(\ln x)-3}{(\ln x)^4}\right\}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

14) $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right),\quad f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1+2x}{x^4}\right)$

15) $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x^2-x-2}{x^2}\right),\quad f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{5x+2}{x^4}\right)$

16) $f'(x)=e^{-2x^2}(1-4x^2),\quad f''(x)=-4xe^{-2x^2}(3-4x^2)$

17) $f'(x)=\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}},\quad f''(x)=-\frac{2}{9\cdot\sqrt[3]{x^4}}$

18) $f'(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}},\quad f''(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{-\frac{1}{3}x^2-1}{(x^2-1)^{5/3}}$

19) $f'(x)=\frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}},\quad f''(x)=-\frac{2}{9}\cdot\frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}}$

20) $f'(x)=\cos(x^3)\cdot 3x^2,\quad f''(x)=-9x^4\sin(x^3)+6x\cdot\cos(x^3)$

21) $f'(x)=-\sin(x^4)\cdot 4x^3,\quad f''(x)=-16x^6\cos(x^4)-12x^2\cdot\sin(x^4)$

22) $f'(x)=3\sin^2 x\cdot\cos x,\quad f''(x)=6\sin x\cos^2 x-3\sin^3 x$

23) $f'(x)=\frac{2x}{\cos^2(x^2)},\quad f''(x)=\frac{2\cdot\cos^2(x^2)-8x^2\cos(x^2)\sin(x^2)}{\cos^4(x^2)}$

24) $f'(x)=\tan(x^2)\cdot(-2x),\quad f''(x)=\frac{-4x^2}{\cos^2(x^2)}-2\tan(x^2)$

25) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}\cdot 2,\quad f''(x)=\frac{4(2x+3)}{\left(1-(2x+3)^2\right)^{1.5}}$

26) $f'(x)=\frac{2x}{1+x^4},\quad f''(x)=\frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$

27) $f'(x)=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln(x+1)+\frac{\sin x}{x+1}\right)$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

28) $f'(x)=(\sin x)^{x}\left(\ln(\sin x)+\cot x\cdot x\right)$

29) $f'(x)=(\cos x)^{\ln x}\cdot\left(\frac{\ln(\cos x)}{x}-\tan x\cdot\ln x\right)$

30) $y'=x^{\ln x}\left(\frac{2\ln x}{x}\right)$

31) $y'=x^{\frac{1}{x}-2}\left(1-\ln x\right)$

32) $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x}{2}+1\right)$

33) $y'=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x^{2}}\right)\cdot\sqrt{x}\right)$

34) $y'=\left(x^{2}+1\right)^{x}\left(1\cdot\ln\left(x^{2}+1\right)+\frac{1}{x^{2}+1}\cdot 2x\cdot x\right)$

35) $y'=\left(x+1\right)^{(x+1)}\left[\ln\left(x+1\right)+1\right]$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תרגילים נוספים לפי סוגים

שאלות

הנגזרת של פונקציית חזקה

1) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3$ ב. $f(x)=x^7$ ג. $f(x)=x^2$

ד. $f(x)=x^1$ ה. $f(x)=x^{-3}$ ו. $f(x)=x^{-1}$

ז. $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ ח. $f(x)=x\frac{1}{3}$ ט. $f(x)=x^{\frac{3}{4}}$

הנגזרת של קבוע כפול פונקציה

2) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=2x^3$ ב. $f(x)=3x^7$ ג. $f(x)=\frac{1}{2}x^4$

ד. $f(x)=\frac{x^6}{7}$ ה. $f(x)=8x^1$ ו. $f(x)=3x^{-2}$

ז. $f(x)=\frac{4}{x}$ ח. $f(x)=6x^{\frac{1}{2}}$ ט. $f(x)=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$

הנגזרת של קבוע

3) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=12$ ב. $f(x)=\frac{7}{8}$

הנגזרת של סכום והפרש

4) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3+2x^2-3x+5$ ב. $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{x^3}{6}+\frac{3x}{4}-\frac{2}{5}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

הנגזרת של פונקציה חזקה מורכבת

5) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x-2)^3$ ב. $f(x)=(x^3+6)^5$ ג. $f(x)=3(x-x^2)^2$

ד. $f(x)=\frac{(5-x)^3}{4}$ ה. $f(x)=\frac{2(x+1)^4}{3}$

הנגזרת של אחד חלקי איקס

6) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3}{x}$ ב. $f(x)=\frac{2}{x}$ ג. $f(x)=\frac{1}{x^2}$ ד. $f(x)=\frac{3}{x^3}$

ה. $f(x)=\frac{1}{x^2-3x}$ ו. $f(x)=\frac{2}{3-x}$ ז. $f(x)=\frac{6}{x+5}$

הנגזרת של מכפלה

7) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x+1)(x-3)$

ב. $f(x)=(5x+1)^3(x-3)$

ג. $f(x)=x^3(6-x)^4$

הנגזרת של מנה

8) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3x-1}{1+2x}$ ב. $f(x)=\frac{x^2+1}{5x-12}$ ג. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+3}$

ד. $f(x)=\frac{x^2+8}{x-1}$ ה. $f(x)=\frac{1}{x}$ ו. $f(x)=\frac{3}{x^3}$

הנגזרת של שורש

9) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x}$ ב. $f(x)=4\sqrt{x+1}$ ג. $f(x)=\sqrt{x^3-1}$

ד. $f(x)=(3x+1)\sqrt{x}$ ה. $f(x)=x^2\sqrt{x+3}$ ו. $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x}}$

כתב ופתר – גיא סולומון ©

תשובות סופיות

1)

א. $f'(x)=3x^2$ ב. $f'(x)=7x^6$ ג. $f'(x)=2x$

ד. $f'(x)=1$ ה. $f'(x)=3x^{-4}$ ו. $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

ז. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ח. $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ט. $f'(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$

2)

א. $f'(x)=6x^2$ ב. $f'(x)=21x^6$ ג. $f'(x)=2x^3$

ד. $f'(x)=\frac{6x^5}{7}$ ה. $f'(x)=8$ ו. $f'(x)=-\frac{6}{x^3}$

ז. $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$ ח. $f'(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$ ט. $f'(x)=\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$

3) א. 0 ב. 0

4) א. $f'(x)=3x^2+4x-3$ ב. $f'(x)=x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{4}$

5) א. $f'(x)=15(5x-x)^2$ ב. $f'(x)=15x^2(x^3+6)^4$

ג. $f'(x)=6(x-x^2)(1-2x)$ ד. $f'(x)=-\frac{3}{4}(5-x)^2$ ה. $f'(x)=\frac{8(x+1)^3}{3}$

6) א. $f'(x)=-\frac{3}{x^2}$ ב. $f'(x)=\frac{2}{x^2}$ ג. $f'(x)=-\frac{2}{x^3}$ ד. $f'(x)=-\frac{9}{x^4}$

ה. $f'(x)=-\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2}$ ו. $f'(x)=\frac{2}{(3-x)^2}$ ז. $f'(x)=-\frac{6}{(x+3)^2}$

7) א. $f'(x)=10x-14$ ב. $f'(x)=(5x+1)^2(20x-44)$

ג. $f'(x)=x^2(6-x)^3(18-7x)$

8) א. $f'(x)=\frac{5}{(1+2x)^2}$ ב. $f'(x)=\frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2}$ ג. $f'(x)=\frac{8x}{(x^2+3)^2}$

ד. $f'(x)=\frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$ ה. $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ ו. $f'(x)=-\frac{9}{x^4}$

9) א. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ב. $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ ג. $f'(x)=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$

ד. $f'(x)=\frac{9x+1}{2\sqrt{x}}$ ה. $f'(x)=\frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}}$ ו. $f'(x)=\frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

גזירה סתומה

שאלות

1) גזרו את הפונקציה הסתומה $x^2+y^5-1=1$.

2) גזרו את הפונקציה הסתומה $4\ln x+10\ln y=y^2$.

3) גזרו את הפונקציה הסתומה $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{xy}$.

4) נתונה הפונקציה הסתומה הבאה $e^{y^2-4x}+x^2y^3=\sin(y-2x)+4y+1$.
חשבו את y' בנקודה $(1,2)$.

5) נתונה הפונקציה הסתומה הבאה $\sqrt{4x+y^3}+\cos^2(xy)=\ln(x^2y+1)+\ln e^3$.
חשבו את y' בנקודה בה $y=0$.

6) גזרו את הפונקציה הסתומה $x^y-xy=10$.

7) גזרו את הפונקציה הסתומה $x^y-y^x=1$.

8) נתונה פונקציה סתומה $xy-y^3+x^2-x=0$.
מצאו את ערך y^n בנקודה בה $y=1$.

9) נתון עקום שמשוואתו $yx^2+e^y=x$.

א. הראו שעבור $x=1$ קיים ערך y אחד ויחיד ומצאו אותו.

ב. חשבו את y'' בנקודה בה $x=1$.

10) נתון כי המשוואה $h(y)-x+1=2x^3+4e^y+2y$,
מגדירה את $y=y(x)$ כפונקציה סתומה של x.
נתון כי $h(y)$ גזירה ברציפות ויורדת.
הוכיחו כי $y(x)$ יורדת חזק.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y'=\frac{-2x}{5y^4-1}$ $\quad 5y^4-1\neq 0,$

2) $y'=\frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y}-2y}$ $\quad \frac{10}{y}-2y\neq 0,$

3) $y'=\frac{\sqrt{y}-1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{2\sqrt{y}}{1-\sqrt{x}}$ $\quad \sqrt{x}\neq 0,\quad \sqrt{x}\neq 1,$

4) $y'_{(1,2)}=-\frac{14}{11}$

5) $y'_{(1,0)}=1$

6) $y'=\frac{y-x^y\cdot\frac{y}{x}}{x^y\cdot\ln x-x}$ $\quad x^y\cdot\ln x-x\neq 0,$

7) $y'=\frac{-x^y\cdot\frac{y}{x}+y^x\cdot\ln y}{x^y\ln x-y^x\cdot\frac{x}{y}}$ $\quad x^y\ln x-y^x\cdot\frac{x}{y}\neq 0,$

8) -1

9) ב. $y''_{(1,0)}=-\frac{9}{8}$

10) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

כלל השרשרת

שאלות

1) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(4)=10$.

נגדיר פונקציה חדשה: $g(x)=f(x^2)$.

חשבו את $g'(2)$.

2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונה פונקציה $f(x)$. נגדיר פונקציה חדשה

$z(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)-f(4x+1)$.

חשב ואת $z'(x)$.

ב. נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(1)=2,\ f'(1)=e$.

נגדיר פונקציה חדשה $z(x)=f^2(\ln x)+\frac{1}{f^2(\ln x)}$.

חשבו את $z'(e)$.

3) נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{f^2(\sqrt{x})-1}{f(\sqrt{x})}$.

ידוע כי $f(10)=f'(10)=4$.

חשבו $g'(100)$.

4) נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)+4}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)}$.

ידוע כי $f'(1)=4$, $f(1)=1$.

חשבו $g'(1)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{f^2(\ln x)}{f(\ln x)+1}$.

ידוע כי $f'(0)=1$, $f(0)=2$.

חשבו $g'(1)$.

6) נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{f^{10}(4x)+1}{f\left(\dfrac{4}{x}\right)+1}$.

ידוע כי $f'(4)=2$, $f(4)=1$.

חשבו $g'(1)$.

7) נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{\sqrt[4]{f^7(x^2)}}{f(x^4)}$.

ידוע כי $f'(1)=4$, $f(1)=1$.

חשבו $g'(1)$.

8) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהנגזרת של פונקציה זוגית היא פונקציה אי-זוגית והנגזרת של פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.

ב. הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית. בדקו האם הפונקציה $f''''(x)$ היא זוגית או אי-זוגית.

ג. הפונקציה $f(x)$ אי-זוגית נגדיר $g(x)=(f(x))^4$.
קבעו האם הפונקציה $g'(x)$ זוגית או אי-זוגית.

ד. ידוע שנגזרת של פונקציה היא זוגית.
האם ניתן לקבוע שהפונקציה היא אי-זוגית?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) 40

2) א. $z'(x) = f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) - f'(4x+1)\cdot 4$ ב. $z'(e) = 3\frac{3}{4}$

3) $\frac{17}{80}$

4) 36

5) $\frac{8}{9}$

6) 44

7) -2

8) ב. אי-זוגית. ג. אי-זוגית. ד. לא.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גזירה לוגריתמית

שאלות

גזרו את הפונקציות הבאות:

1) $y=\sqrt[4]{\frac{10x-1}{x+1}}\cdot\sqrt[10]{(2x+1)^7}$

2) $y=\left(\sqrt[4]{10x+1}\right)^{2x}$

3) $y=\frac{(x+2)^{3x+4}\cdot(5x+6)}{(7x+8)\cdot(9x+10)}$

תשובות סופיות

1) $y'=y\left[\frac{1}{4}\frac{1}{10x-1}\cdot 10+\frac{7}{10}\frac{1}{2x+1}\cdot 2-\frac{1}{4}\frac{1}{x+1}\right]$

2) $y'=\left((10x+1)^{\frac{1}{4}}\right)^{2^x}\cdot\frac{1}{4}\left[2^x\cdot\ln 2\cdot\ln(10x+1)+\frac{1}{10x+1}\cdot 10\cdot 2^x\right]$

3) $y'=y\left[3\cdot\ln(x+2)+\frac{1}{x+2}(3x+4)+\frac{1}{5x+6}\cdot 5-\frac{1}{7x+8}\cdot 7-\frac{1}{9x+10}\cdot 9\right]$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה 1

פרק 12 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקציה

תוכן העניינים

1. מושגי יסוד 180
2. חקירת פולינום 181
3. חקירת פונקציה רציונלית 182
4. חקירת פונקציה מעריכית 186
5. חקירת פונקציה לוגריתמית 189
6. חקירת פונקציה עם שורשים 193
7. חקירת פונקציה לא גזירה - שורש וערך מוחלט 194
8. חקירת פונקציה טריגונומטרית 197
9. חקירת פונקציות טריגונומטריות הפוכות 201

הערות

1. בשאלות החקירה בפרק זה יש לחקור לפי השלבים הבאים:
   - תחום הגדרה ורציפות.
   - נקודות חיתוך עם הצירים.
   - זוגיות ואי-זוגיות.
   - אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות.
   - תחומי עלייה וירידה.
   - נקודות קיצון.
   - תחומי קמירות וקעירות.
   - נקודות פיתול.
   - שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
2. יש האומרים על פונקציה קמורה שהיא קעורה כלפי מעלה ועל פונקציה קעורה שהיא קעורה כלפי מטה. אלה מינוחים שמקובלים בדרך כלל בתיכון.
3. ברוב המוסדות האקדמיים לומדים למצוא אסימפטוטה משופעת, שכוללת בתוכה גם את האפשרות לאסימפטוטה אופקית. יחד עם זאת, בחלק מהמוסדות לומדים רק אסימפטוטה אופקית, ולכן בכל חקירה אני מוצא גם אסימפטוטה משופעת וגם אופקית. צפו בפתרון רק בחלק ברלוונטי עבורכם.
4. בחלק מהחקירות אציין בשאלה שאין צורך לעבור על כל שלבי החקירה. שימו לב לזה.
5. אני ממליץ על תוכנה חינמית בשם Graph, שניתן להוריד מכאן.

   בעזרתה תוכלו לשרטט כל פונקציה בקלות ולבדוק את תשובותיכם.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

חקירת פולינום

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f(x)=x(x-9)^2$

2) $f(x)=x^4-2x^3$

תשובות סופיות

1) תחום הגדרה: כל x. נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0, עם ציר ה- x: 0 ו-9.

נקודות קיצון: מינימום: $(9,0)$, מקסימום: $(3,108)$.

תחום עלייה: $x<3$ or $x>9$, ירידה: $3<x<9$.

תחום קמירות: $x>6$, קעירות: $x<6$.

נקודת פיתול: $(6,54)$.

2) תחום הגדרה: כל x. נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0, עם ציר ה- x: 0 ו-2.

נקודות קיצון: מינימום: $\left(1.5,\frac{-27}{16}\right)$.

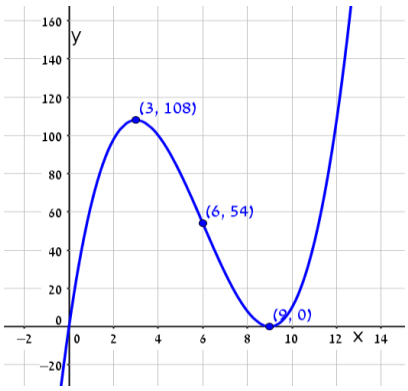
תחום עלייה: $x>1.5$, ירידה: $x<1.5$.

תחום קמירות: $x>1$ or $x<0$, קעירות: $0<x<1$.

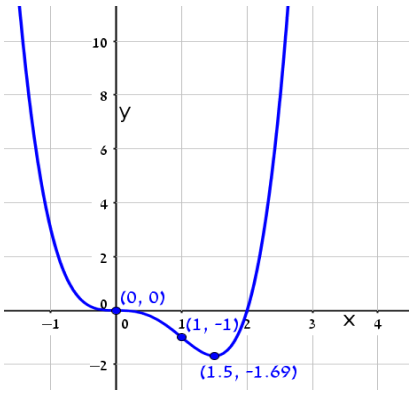
נקודות פיתול: $(1,-1)$, $(0,0)$.

גרפים

1)



2)



לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חקירת פונקציה רציונלית

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$

2) $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$

3) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

4) $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

5) $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

6) $f(x)=\frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)}$

7) $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2-4}$

8) $f(x)=\frac{x^3-x^2}{x^2-1}$

הערות

1. בשאלה 6 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואה ממעלה שלישית.
2. בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.
3. בשאלה 8 מצאתי רק אסימפטוטה אופקית ולא משופעת. מומלץ למצוא גם אסימפטוטה משופעת. פונקציה כמעט זהה יש בסרטון ההסבר על אסימפטוטה משופעת. בכל אופן מקבלים שם אסימפטוטה משופעת $y=x-1$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 0$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: אין, עם ציר ה- x: 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(2,0.25)$. נקודת פיתול: $\left(3,\frac{2}{9}\right)$.
תחום עליה: $0<x<2$, ירידה: $x<0 \ \ or \ \ x>2$.
תחום קמירות: $x>3$, קעירות: $x<0 \ \ or \ \ 0<x<3$.

2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq -1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0, עם ציר ה- x: 0.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=-1$, משופעת ואופקית: הישר $y=2$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מינימום: $(0,0)$. נקודת פיתול: $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{9}\right)$.
תחום עליה: $x<-1 \ \ or \ \ x>0$, ירידה: $-1<x<0$.
תחום קמירות: $-1<x<\frac{1}{2} \ \ or \ \ x<-1$, קעירות: $x>\frac{1}{2}$.

3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq \pm 2$. זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0, עם ציר ה- x: 0.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=-2,\ x=2$, משופעת: הישר $y=x$ ב- $\pm\infty$,
אופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $\left(-\sqrt{12},-\sqrt{27}\right)$, מקסימום: $\left(\sqrt{12},\sqrt{27}\right)$.
תחום עליה: $x>\sqrt{12} \ \ or \ \ x<-\sqrt{12}$, ירידה: $-\sqrt{12}<x\neq\pm 2<\sqrt{12}$.
נקודת פיתול: $(0,0)$.
תחום קמירות: $-2<x<0 \ \ or \ \ x>2$, קעירות: $0<x<2 \ \ or \ \ x<-2$.

4) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq -1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0, עם ציר ה- x: 0.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=-1$, משופעת: הישר $y=x-2$ ב- $\pm\infty$,
אופקית: אין, כי הפונקציה רציונלית, שבה מעלת המונה גדולה ממעלת המכנה.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(-3,-\frac{27}{4}\right)$.
תחום עליה: $x>-1 \ \ or \ \ x<-3$, ירידה: $-3<x<-1$.
נקודת פיתול: $(0,0)$.
תחום קמירות: $x>0$, קעירות: $-1<x<0 \ \ or \ \ x<-1$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: -1, עם ציר ה- x: -1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=1$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין; הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
נקודות פיתול: $(-1,0)$, $\left(-3,\frac{1}{8}\right)$.
תחום קמירות: $-3<x<-1$ & $x>1$, קעירות: $-1<x<1$ or $x<-3$.

6) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 2,\ x \neq 5$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: $y=-\frac{1}{10}$, עם ציר ה- x: ± 1.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2,\ x=5$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(2.78,-3.88)$, מינימום: $(0.36,-0.11)$.
תחום עלייה: $0.36<x<2$ or $2<x<2.78$,
ירידה: $x>5$ or $2.78<x<5$ or $x<0.36$. נקודת פיתול: $(-1,0)$.
תחום קמירות: $-1<x<2$ or $x>5$, קעירות: $2<x<5$ or $x<-1$.

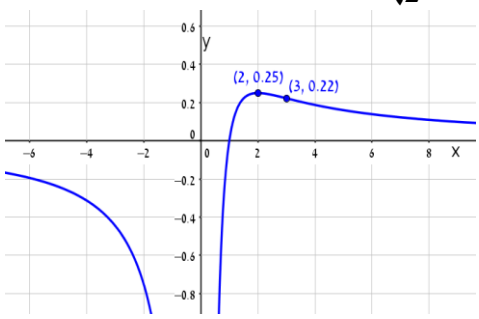
7) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq \pm 2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: $y=-\frac{3}{4}$, עם ציר ה- x: $x=1,\ x=3$.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2,\ x=-2$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין; כי למשוואה הריבועית שקיבלנו אין פתרון.
תחום עלייה: הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
נקודת פיתול: $(0.85,-0.09)$.
תחום קמירות: $0.85<x<2$ or $x<-2$, קעירות: $-2<x<0.85$ or $x>2$.

8) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 1,\ x \neq -1$.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0, עם ציר ה- x: 0.
אסימפטוטה אופקית: אין, אנכית: הישר $x=-1$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(-2,-4)$, מינימום: $(0,0)$.
תחום עלייה: $x<-2$ or $0<x<1$ or $x>1$, ירידה: $-2<x<-1$ or $-1<x<0$.
נקודת פיתול: אין.
תחום קמירות: $-1<x<1$ or $x>1$, קעירות: $x<-1$.

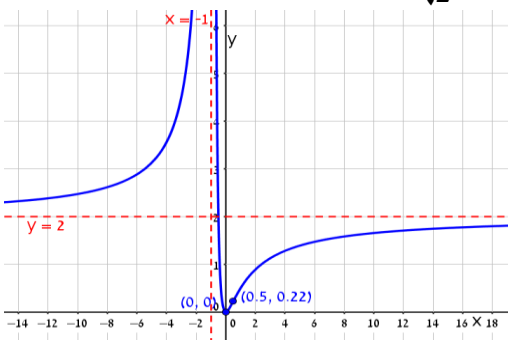
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גרפים

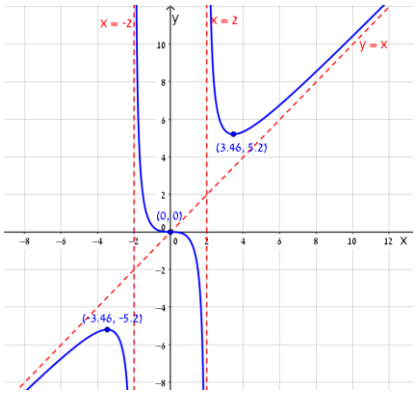
1)



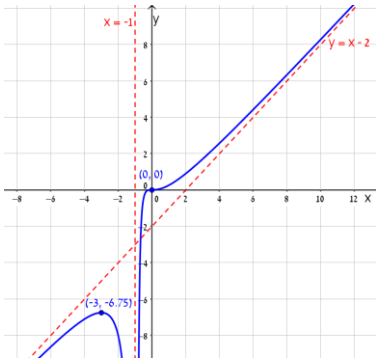
2)



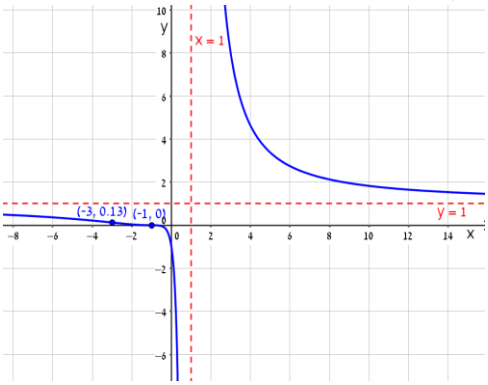
3)



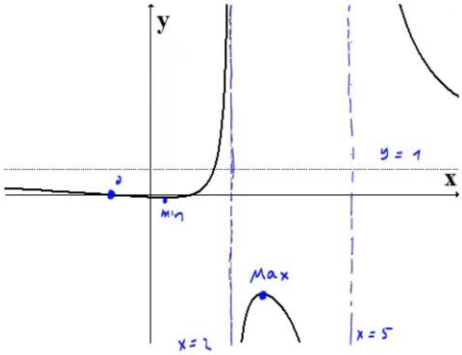
4)



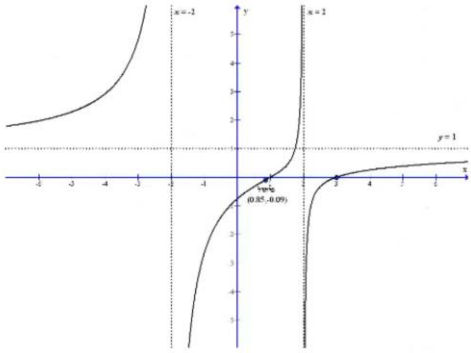
5)



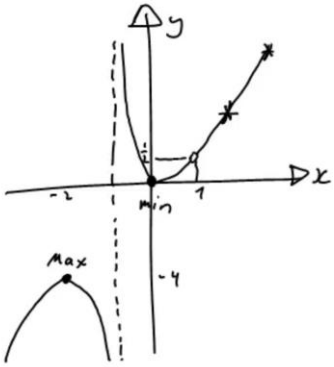
6)



7)



8)



חקירת פונקציה מעריכית

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f(x)=x-e^{x}$

2) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

3) $f(x)=(x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}}$

4) $f(x)=x\cdot e^{-2x^{2}}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: -1, עם ציר ה- x: אין (ראו בהרחבה בסרטון).
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: הישר $y=x$ ב- $-\infty$ בלבד.
נקודות קיצון: מקסימום: $(0,-1)$. תחום עלייה: $x<0$, ירידה: $x>0$.
נקודת פיתול: אין. תחום קמירות: קעורה לכל x.

2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq 0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: אין, עם ציר ה- x: אין.
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין.
תחום עלייה וירידה: הפונקציה יורדת בתחום הגדרתה.
נקודת פיתול: $\left(-0.5,e^{-2}\right)$.
תחום קמירות: $-0.5<x<0$ or $x>0$, תחום קעירות: $x<-0.5$.

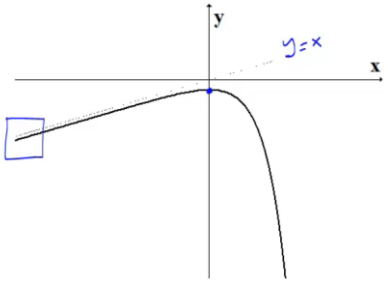
3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq 0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: אין, עם ציר ה- x: -2.
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x=0$, משופעת: הישר $y=x+3$ ב- $\pm\infty$.
אופקית: אין. נקודות קיצון: מקסימום: $\left(-1,e^{-1}\right)$, מינימום: $\left(2,4e^{\frac{1}{2}}\right)$.
תחום עלייה: $x<-1$ or $x>2$, ירידה: $-1<x<0$ or $0<x<2$.
נקודת פיתול: $\left(-0.4,1.6e^{-2.5}\right)$.
תחום קמירות: $-0.4<x<0$ or $x>0$, תחום קעירות: $x<-0.4$.

4) תחום הגדרה ורציפות: לכל x. זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0, עם ציר ה- x: 0.
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת (אופקית): הישר $y=0$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right)$, מינימום: $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right)$.
תחום עלייה: $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$, ירידה: $x<-\frac{1}{2}$ or $x>\frac{1}{2}$.
נקודות פיתול: $\left(\sqrt{\frac{3}{4}},\sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{3}{4}},-\sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5}\right)$, $(0,0)$.
תחום קמירות: $-\sqrt{\frac{3}{4}}<x<0$ or $x>\sqrt{\frac{3}{4}}$, תחום קעירות:
$0<x<\sqrt{\frac{3}{4}}$ or $x<-\sqrt{\frac{3}{4}}$.

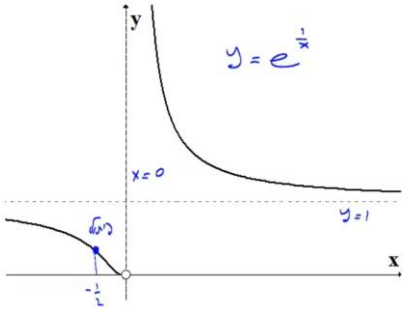
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גרפים

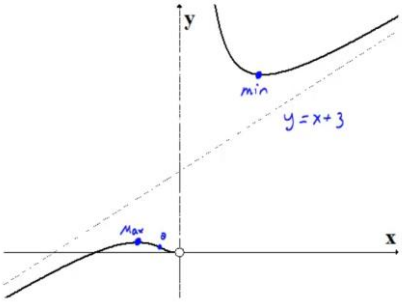
1)



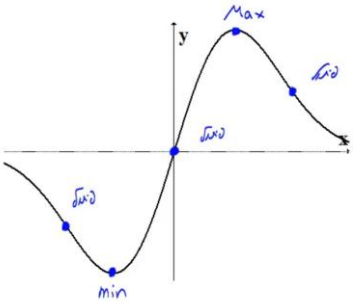
2)



3)



4)



כתב ופתר – גיא סלומון ©

חקירת פונקציה לוגריתמית

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

2) $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

3) $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1}{2-x}}$

4) $f(x)=x\cdot\ln x$

5) $f(x)=\ln^2 x+2\ln x-3$

6) $f(x)=4\ln^2 x-4\ln x-3$

7) $f(x)=\ln^2 x+\frac{1}{\ln^2 x}$

הערה

בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: אין, עם ציר ה- x: 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב- ∞.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e,\frac{1}{e}\right)$.
תחום עלייה: $0<x<e$, ירידה: $x>e$.
נקודת פיתול: $\left(e^{1.5},\frac{1.5}{e^{1.5}}\right)$.
תחום קמירות: $x>e^{1.5}$, קעירות: $0<x<e^{1.5}$.

2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: אין, עם ציר ה- x: 1.
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): הישר $x=0$,
משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב- ∞.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e^2,\frac{2}{e}\right)$.
תחום עלייה: $0<x<e^2$, ירידה: $x>e^2$.
נקודת פיתול: $\left(e^{\frac{8}{3}},\frac{\frac{8}{3}}{\sqrt{e^{\frac{8}{3}}}}\right)$. תחום קמירות: $0<x<e^{\frac{8}{3}}$, קעירות: $x>e^{\frac{8}{3}}$.

3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x<2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: $y=-\frac{1}{2}\ln 2$, עם ציר ה- x: 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=2$, משופעת: אין.
נקודות קיצון: אין.
תחום עלייה: עולה בכל תחום הגדרתה.
נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.

4) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: אין, עם ציר ה- x: 1.
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{-1},-e^{-1}\right)$.
תחום עלייה: $x>e^{-1}$, ירידה: $0<x<e^{-1}$.
נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.

נקודות חיתוך עם ציר ה- y: אין, עם ציר ה- x: $x=e^{-3},\ x=e^{1}$.

אסימפטוטה אנכית: $x=0$, משופעת ואופקית: אין.

נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{-1},-4\right)$.

תחום עלייה: $x>e^{-1}$, ירידה: $0<x<e^{-1}$.

נקודת פיתול: $(1,-3)$. תחום קמירות: $x>1$, קעירות: $0<x<1$.

6) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0$. זוגיות: כללית.

נקודות חיתוך עם ציר ה- y: אין, עם ציר ה- x: $x=e^{-0.5},\ x=e^{1.5}$.

אסימפטוטה אנכית: $x=0$, משופעת ואופקית: אין.

נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{\frac{1}{2}},-4\right)$.

תחום עלייה: $x>e^{\frac{1}{2}}$, ירידה: $0<x<e^{\frac{1}{2}}$.

נקודת פיתול: $\left(e^{1.5},0\right)$. תחום קמירות: $0<x<1.5$, קעירות: $x>1.5$.

7) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x>0,\ x\neq 1$. זוגיות: כללית.

נקודות חיתוך עם ציר ה- y: אין, עם ציר ה- x: אין.

אסימפטוטה אנכית: $x=1$, משופעת ואופקית: אין.

נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{-1},2\right),(e,2)$.

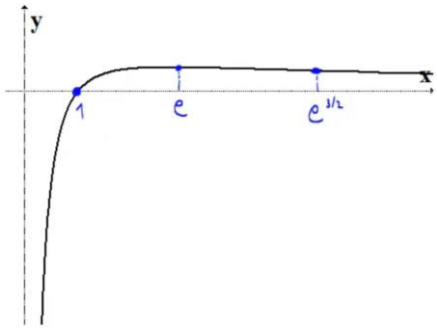
תחום עלייה: $e^{-1}<x<1\ \ or\ \ x>e$, ירידה: $x<e^{-1}\ \ or\ \ 1<x<e$.

נקודת פיתול: $(5.15,3.06)$.

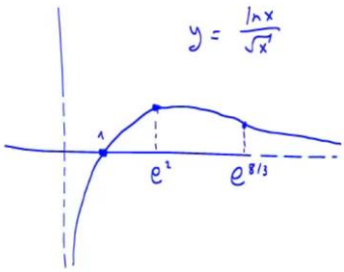
תחום קמירות: $0<x<1\ \ or\ \ 1<x<5.15$, קעירות: $x>5.15$.

גרפים

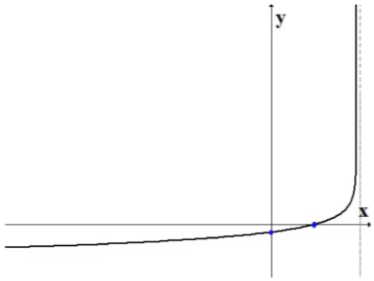
(1



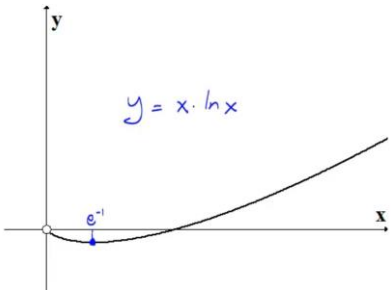
(2



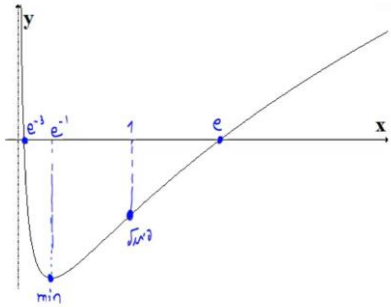
(3



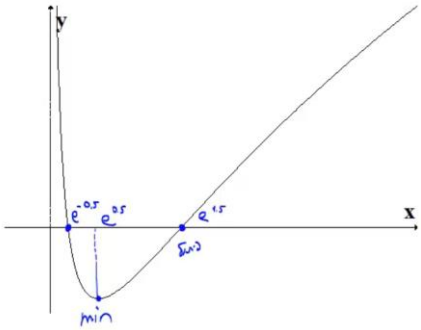
(4



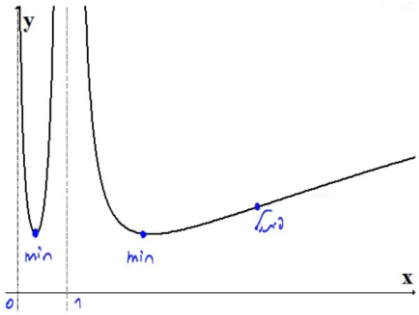
(5



(6



(7



כתב ופתר – גיא סלומון ©

חקירת פונקציה עם שורשים

שאלה

1) חקור את הפונקציה הבאה חקירה מלאה: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

תשובה

1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x.

נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 1, עם ציר ה- x: אין.

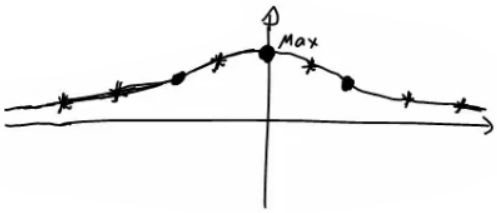
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: $y=0$.

נקודות קיצון: מקסימום: $(0,1)$. תחום עלייה: $x<0$, ירידה: $x>0$.

נקודות פיתול: $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}},\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{1}{2}},\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$.

תחום קמירות: $x<\sqrt{\frac{1}{2}}$ or $x<-\sqrt{\frac{1}{2}}$, קעירות: $-\sqrt{\frac{1}{2}}<x<\sqrt{\frac{1}{2}}$.

גרף:



כתב ופתר – גיא סלומון ©

חקירת פונקציה לא גזירה – שורש וערך מוחלט

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(1-x)=x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{5}{3}}$

2) $f(x)=\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)^2$

3) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$

4) $f(x)=\frac{|x-3|}{x-2}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0, עם ציר ה- x: 0 או 1.
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(\frac{2}{5},0.326\right)$, מינימום: $(0,0)$.
תחום עלייה: $0<x<\frac{2}{5}$, ירידה: $x<0 \ \ or \ \ x>\frac{2}{5}$.
נקודות פיתול: $(-0.2,0.41)$.
תחום קמירות: $x<-0.2$, קעירות: $x>0 \ \ or \ \ -0.2<x<0$.

2) תחום הגדרה ורציפות: לכל x.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 1, עם ציר ה- x: 1- או 1.
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $(0,1)$, מינימום: $(1,0)$, $(-1,0)$.
תחום עלייה: $-1<x<0 \ \ or \ \ x>1$, ירידה: $x<-1 \ \ or \ \ 0<x<1$.
נקודות פיתול: אין.
תחום קמירות: קמורה לכל x.

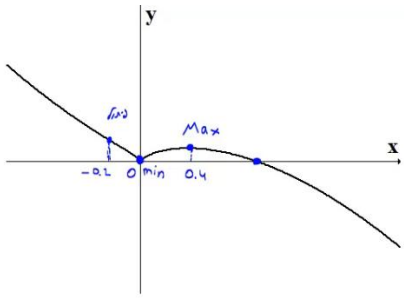
3) תחום הגדרה ורציפות: לכל x. זוגיות: זוגית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: -1, עם ציר ה- x: ± 1.
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $(0,-1)$.
תחום עלייה: $0<x<1 \ \ or \ \ x>1$, ירידה: $x<-1 \ \ or \ \ -1<x<0$.
נקודות פיתול: $(1,0)$, $(-1,0)$.
תחום קמירות: $-1<x<1$, קעירות: $x>1 \ \ or \ \ x<-1$.

4) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x\neq 2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: -1.5, עם ציר ה- x: 3.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=2$,
משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- ∞, ו- $y=-1$ ב- $-\infty$.
נקודות קיצון: מינימום: $(3,0)$.
תחום עלייה: $x>3$, ירידה: $2<x<3 \ \ or \ \ x<2$.
נקודות פיתול: $(3,0)$.
תחום קמירות: $2<x<3$, קעירות: $x>3 \ or \ \ x<2$.

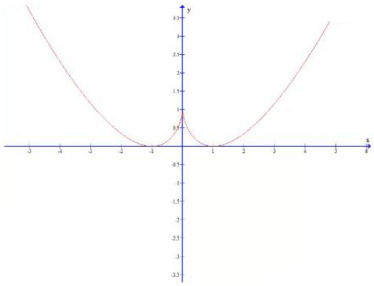
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גרפים

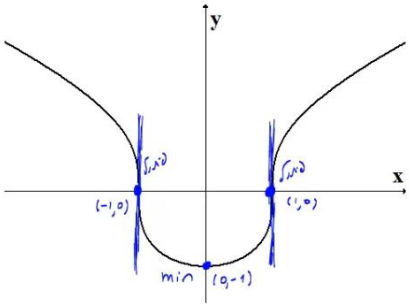
1)



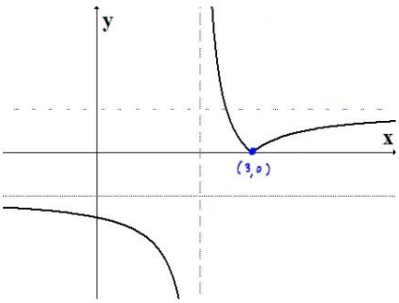
2)



3)



4)



לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חקירת פונקציה טריגונומטרית

שאלות

1) נתונה הפונקציה: $f(x)=x+2\cos x$ בתחום $[0,2\pi]$.

חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.

ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. מציאת נקודות פיתול.

ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.

ח. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

2) נתונה הפונקציה: $f(x)=4x-3\tan x$ בתחום $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.

ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y.

ה. מציאת אסימפטוטות אנכיות.

ו. מציאת נקודות פיתול.

ז. מציאת תחומי קעירות כלפי מעלה ומטה.

ח. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}$ בתחום $[0,\pi]$.

חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.

ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=\cos^2 x-\cos x-2$ בתחום: $0\le x\le 2\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ב. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

5) נתונה הפונקציה הבאה: $y=(\sin x+1)\cdot\cos x$ בתחום: $0\le x\le 1.5\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ב. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. כמה פתרונות יש למשוואה: $\cos x\cdot(\sin x+1)=1$ בתחום הנתון?

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sin^2 x+\cos x-1$.

א. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים ואת נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום $[0,\pi]$.

ב. הוכח שהפונקציה זוגית.

ג. שרטט את הפונקציה בתחום $[-\pi,\pi]$.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\tan 2x-8\sin 2x$ בתחום: $-0.25\pi<x<0.25\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.

ב. כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.

ג. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

8) $f(x)=8\cos x+2\cos 2x-3$, $[0,2\pi]$

9) $f(x)=2\cos^2 x-\sin 2x$, $[0,\pi]$

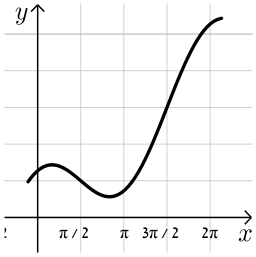
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $0<x<2\pi$.

ב. $\max(2\pi,2\pi+2)$ קצה, $\min\left(\frac{5}{6}\pi,\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)$, $\min(0,2)$ קצה.

ג. תחומי עלייה: $\frac{5\pi}{6}<x<2\pi$ או $0<x<\frac{\pi}{6}$, תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$.



ד. $(0,2)$. ה. אין. ו. $\left(\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

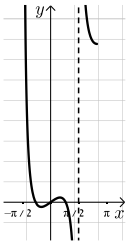
ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$,

קעירות כלפי מטה: $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ או $0<x<\frac{\pi}{2}$.

2) א. $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ וגם $x\ne\frac{\pi}{2}$

ב. $\min\left(\frac{2}{3}\pi,13.57\right)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{6},0.36\right)$, $\min\left(-\frac{\pi}{6},-0.36\right)$ קצה.

ג. תחומי עלייה: $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{6}$, תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ וגם $x\ne\frac{\pi}{2}$.

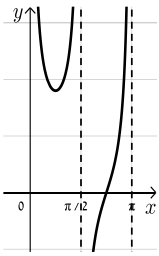


ד. $(0,0)$ ה. אנכית: $x=\frac{\pi}{2}$ ו. $(0,0)$

ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ או $-\frac{\pi}{6}\le x\le 0$,

קעירות כלפי מטה: $0<x<\frac{\pi}{2}$.

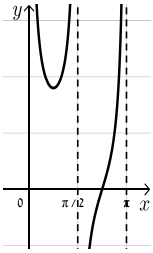
3) א. $0<x<\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ ב. $\min\left(\frac{\pi}{4},2\sqrt{2}\right)$.



ג. תחומי עלייה: $\frac{\pi}{2}<x<\pi$, $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ תחומי ירידה: $0<x<\frac{\pi}{4}$

ד. $\left(\frac{3}{4}\pi,0\right)$ ה. אנכית: $x=\pi$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=0$.

4) א. $(\pi,0),(0,-2)$.



ב. $\max(\pi,0)$, $\min\left(\frac{\pi}{3},-2.25\right)$, $\max(0,-2)$, $\max(2\pi,-2)$, $\max\left(1\frac{2}{3}\pi,-2.25\right)$

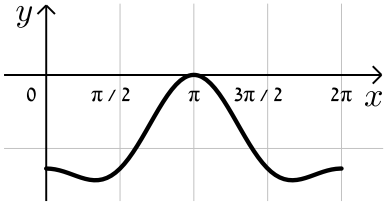
ג. עולה: $1\frac{2}{3}\pi<x<2\pi$, $\frac{\pi}{3}<x<\pi$, יורדת: $\pi<x<1\frac{2}{3}\pi$, $0<x<\frac{\pi}{3}$. גרף:

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) א. $(0,1)$, $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$

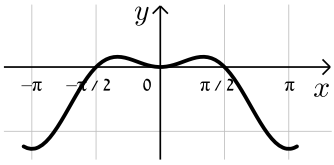
ב. $(1.5\pi,0),\left(\frac{5}{6}\pi,-1.29\right),\left(\frac{\pi}{6},1.29\right),(0,1)$

ד. 2 פתרונות.



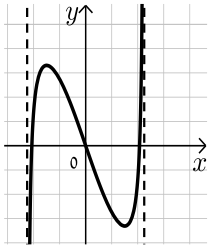
6) א. חיתוך: $(0,0)$, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, קיצון: $\min(\pi,-2)$ קצה,

$\min(0,0)$, $\max\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{4}\right)$ קצה.



7) א. $(0,0),(\pm 0.23\pi,0)$ ב. $x=\pm 0.25\pi$.

ג. $\max\left(-\frac{\pi}{6},\sqrt{27}\right)$, $\min\left(\frac{\pi}{6},-\sqrt{27}\right)$.



8) נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 7, עם ציר ה- x : $x=7$, $x=\frac{5\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{3}$.

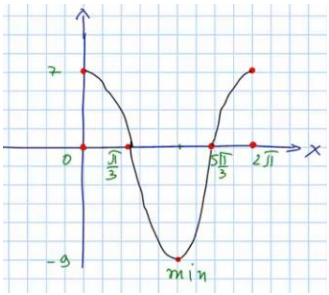
נקודות קיצון: מינימום: $(\pi,-9)$, מקסימום: $(2\pi,7)$, $(0,7)$.

נקודות פיתול: $x=\frac{5\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{3}$.

תחום קמירות: $\frac{\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{3}$,

קעירות: $0<x<\frac{\pi}{3}$ or $\frac{5\pi}{3}<x<2\pi$.

תחום עלייה: $x>3$, ירידה: $2<x<3$ or $x<2$.



9) נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 2, עם ציר ה- x : $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{4}$.

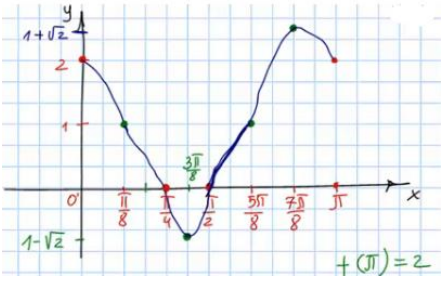
נקודות קיצון: מינימום: $\left(\frac{3\pi}{8},1-\sqrt{2}\right)$, מקסימום: $\left(\frac{7\pi}{8},1+\sqrt{2}\right)$.

תחום עלייה: $\frac{3\pi}{8}<x<\frac{7\pi}{8}$, ירידה: $\frac{7\pi}{8}<x<\pi$ or $0<x<\frac{3\pi}{8}$.

נקודות פיתול: $\left(\frac{5\pi}{8},1\right)$, $\left(\frac{\pi}{8},1\right)$.

תחום קמירות: $\frac{\pi}{8}<x<\frac{5\pi}{8}$,

קעירות: $\frac{5\pi}{8}<x<\pi$ or $0<x<\frac{\pi}{8}$.



כתב ופתר – גיא סלומון ©

חקירת פונקציות טריגונומטריות הפוכות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

1) $f(x) = x - 2\arctan x$

2) $f(x) = \arcsin(\sin x)$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

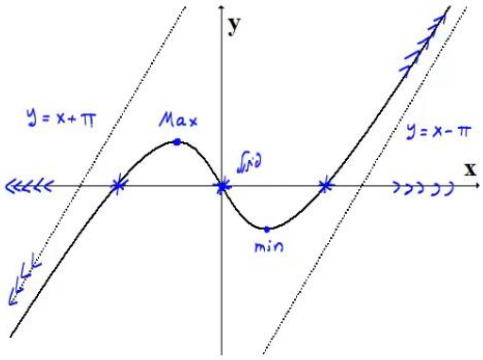
תשובות סופיות

1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x. זוגיות: אי-זוגית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0.
אסימפטוטה אנכית: אין,
משופעת: הישר $y=x+\pi$ ב- $-\infty$, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $(-1,0.575)$, מינימום: $(1,-0.575)$.
תחום עלייה: $x>1$ or $x<-1$, ירידה: $-1<x<1$.
נקודות פיתול: $(0,0)$.
תחום קמירות: $x>0$, קעירות: $x<0$.

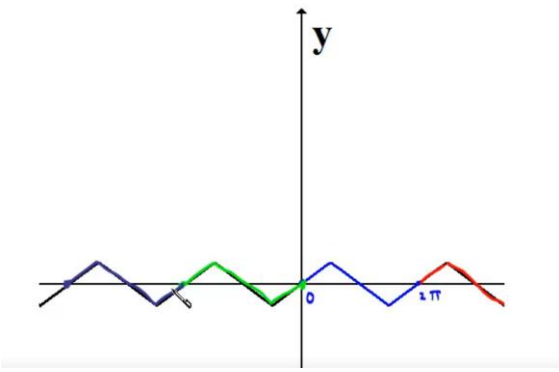
2) תחום הגדרה ורציפות: לכל x. זוגיות: אי-זוגית.
מחזוריות: כן, ממחזור 2π.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y: 0, עם ציר ה- x: $x=0,\ \pi,\ 2\pi$.
אסימפטוטה אנכית: אין,
משופעת: הישר $y=x+\pi$ ב- $-\infty$, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, מינימום: $\left(\frac{3\pi}{2},\frac{-\pi}{2}\right)$.
תחום עלייה: $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ or $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$, ירידה: $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$.
נקודות פיתול: אין.

גרפים

1)



2)



כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה 1

פרק 13 - חשבון דיפרנציאלי - כלל לופיטל

תוכן העניינים

1. גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף 203
2. גבול מהצורה אפס כפול אינסוף 206
3. גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף 207
4. גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף 208
5. מקרים בהם כלל לופיטל נכשל 209

גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה $\frac{0}{0}$ **ו-** $\frac{\infty}{\infty}$

חשבו את הגבולות הבאים (ביטויים רציונאליים):

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}$

2) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{2x^2-50}{2x^2+3x-35}$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-x}{x-1}$

חשבו את הגבולות הבאים (ביטויים אי- רציונאליים):

4) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

5) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4}$

6) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{\sqrt{x-2}-1}$

7) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x^2-1}-\sqrt{x}}{x-1}$

8) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\sqrt{1-\frac{3}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות חזקות):

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}\ (a,b>0)$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$

12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x-x^2-2x-2}{2x^3}$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות לוגריתמיות):

13) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{x^2-2x+1}$

14) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}{\frac{1}{x^2}}$

15) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln^2(x+1)+x}{x}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות טריגונומטריות):

16) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

17) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\left(ax^2\right)}{bx^2}$

18) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$

19) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

20) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

חשבו את הגבולות הבאים (שאלות משולבות):

21) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x}$

22) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

23) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$

24) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-\sin\left(x^2\right)}{x^4}$

25) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\cos x^2\right)}{x^4}$

26) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan\left(x^2+3x\right)}{\arcsin\left(x^2-4x\right)}$

27) $\lim\limits_{x\to\infty}\tanh x$

28) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sinh x}$

29) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cosh x-2}{1-\cos 2x}$

30) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2+x+3}$

31) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}$

32) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x+x+1}{e^x}$

33) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^2+2\ln x-3}{x}$

34) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)}$

35) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\frac{5}{6}$	2) $\frac{20}{17}$	3) $n-1$	4) 4	5) $\frac{1}{6}$
6) $\frac{3}{2}$	7) $\frac{5}{6}$	8) $-\frac{3}{2}$	9) 1	10) $\ln\frac{a}{b}$
11) $\frac{1}{2}$	12) $\frac{1}{6}$	13) $-\frac{1}{2}$	14) 2	15) 1
16) 1	17) $\frac{a}{b}$	18) $\frac{a}{b}$	19) $\frac{1}{6}$	20) $\frac{1}{2}$
21) $\frac{1}{2}$	22) $\frac{1}{8}$	23) $\frac{1}{3}$	24) $-\frac{1}{3}$	25) $-\frac{1}{2}$
26) $-\frac{3}{4}$	27) 1	28) 1	29) $\frac{2}{3}$	30) $\frac{1}{2}$
31) $\frac{1}{2}$	32) ∞	33) 0	34) ∞	35) 0

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גבול מהצורה אפס כפול אינסוף

גבולות מהצורה $\infty\cdot 0$

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot e^{x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{2}e^{-x}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln x$

4) $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\tan x\cdot\ln x$

5) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cot x$

6) $\lim\limits_{x\to 0^{+}}x\cdot\ln x$

7) $\lim\limits_{x\to 3^{+}}(x^{2}-9)\cdot\ln(x-3)$

8) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right)$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\left[\sqrt{1+\frac{5}{x}}-1\right]$

תשובות סופיות

1) ∞ 2) 0 3) 0 4) 0 5) 0

6) 0 7) 0 8) 6 9) $\frac{5}{2}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה $\infty-\infty$

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln(3x)-\ln(\sin 5x)\right]$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}+x$

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$

תשובות סופיות

1) 0

2) $\frac{1}{2}$

3) $\ln\frac{3}{5}$

4) $\frac{1}{2}$

5) $-\frac{1}{2}$

6) $\frac{1}{3}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה: ∞^0, $0^{\pm\infty}$, $1^{\pm\infty}$

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} (ax)^x \ , \ (a>0)$

3) $\lim\limits_{x\to 2^+} (2x-4)^{x-2}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$

5) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$

6) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\tan 3x)^{\frac{1}{x}}$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

8) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cos x^2\right)^{\frac{1}{x^4}}$

9) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^{\tan x}$

10) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\tan x}$

11) $\lim\limits_{x\to 0} (x+1)^{\cot x}$

12) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x+\sin x)^{\tan x}$

13) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(1+x^2\right)^{\cot^2 x}$

14) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

15) $\lim\limits_{x\to 1^-} \left[\ln(1-\ln x)\right]^{x-1}$

תשובות סופיות

1) e 2) 1 3) 1 4) 1 5) e^2

6) 1 7) e^3 8) $e^{1/3}$ 9) $e^{-1/2}$ 10) 1

11) 1 12) e 13) 1 14) e 15) 0

כתב ופתר – גיא סלומון ©

מקרים בהם כלל לופיטל נכשל

שאלות

כל אחד מהגבולות הבאים הוא מן הסוג $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.
הראו זאת והסבירו מדוע, למרות כך, כלל לופיטל אינו ישים.
לבסוף, חשבו את הגבול.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{16^x+4^{x+1}}{2^{4x+2}+2^{x+3}}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+\sin x}{4x+\cos x}$

תשובות סופיות

1) 1

2) $\frac{1}{4}$

3) $\frac{3}{4}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה 1

פרק 14 - חשבון דיפרנציאלי - מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה

תוכן העניינים

1. מציאת מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה 210
2. שאלות המשלבות קיצון מוחלט עם קיצון מקומי 213
3. הוכחת אי שוויונים 214

מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה

שאלות

בשאלות **1-7** מצאו את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציות, בתחומים הרשומים לידן (אם יש כאלה):

1) $f(x)=x^3-3x^2+3x \quad (-1\le x\le 3)$

2) $f(x)=\sqrt{-x^2+4x+5}$

3) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}(20-x) \quad (-1\le x\le 20)$

4) $f(x)=\begin{cases}4x-2 & x<1\\ (x-2)(x-3) & x\ge 1\end{cases} \quad \left[\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right]$

5) $f(x)=1+\left|9-x^2\right| \quad (-5\le x\le 1)$

6) $f(x)=\frac{x^2}{x+1} \quad (-5<x<-1)$

7) $f(x)=x^3-9x+1 \quad (-\infty<x<\infty)$

8) נתונה הפונקציה $f(x)=x^x$ בתחום $x>0$.

א. מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של הפונקציה בתחום הנתון.

ב. דני טוען שהפונקציה הפיכה בקטע $(0,0.5)$.
הוכיחו שדני טועה.

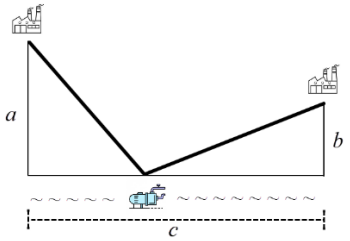
9) מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של הפונקציה $f(x)=x^2+\left|\ln x\right|$.

10) מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$, ב- $\mathbb{R}$.
הערה: אין להשתמש בנגזרות בתרגיל זה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של $f(x)=\left|x^2-4x+3\right|$,
ב- $\mathbb{R}$ וב- $[1,3]$.
הערה: אין להשתמש בנגזרות בתרגיל זה.

12) לחברת מי עדן יש שני מפעלים.
האחד מרוחק a ק"מ מהמעיין.
השני מרוחק b ק"מ מהמעיין.
המרחק האופקי בין המפעלים הוא c ק"מ.
החברה מעוניינת להקים תחנת שאיבה במעיין
בין שני המפעלים. התחנה מחוברת למפעלים.
מהו האורך המינימלי של צינורות שאיבה שהחברה תצטרך?
הראו שהאורך המינימלי מתקבל כאשר הזויות בין כל צינור למעיין שוות.



13) גליל חסום בכדור.
הוכיחו, מבין כל הגלילים האפשריים הגדול ביותר בנפחו הוא זה שגובהו פי $\sqrt{2}$ מרדיוס הבסיס שלו.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $(-1,-7)$ מינימום מוחלט, $(3,9)$ מקסימום מוחלט.

2) $(-1,0)$ מינימום מוחלט, $(5,0)$ מינימום מוחלט, $(2,3)$ מקסימום מוחלט.

3) $(0,0)$ מינימום מוחלט, $(20,0)$ מינימום מוחלט, $(8,48)$ מקסימום מוחלט.

4) $(2.5,-0.25)$ מינימום מוחלט, $(1,2)$ מקסימום מוחלט.

5) $(-3,1)$ מינימום מוחלט, $(-5,17)$ מקסימום מוחלט.

6) $(-2,-4)$ מקסימום מוחלט. אין מינימום מוחלט.

7) אין מקסימום ואין מינימום מוחלטים.

8) א. אין מקסימום מוחלט. מינימום מוחלט הוא $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$. ב. שאלת הוכחה.

9) אין מקסימום מוחלט. מינימום מוחלט $0.5(1+\ln 2)$.

10) מקסימום מוחלט 1, מינימום מוחלט $\frac{1}{2}$.

11) ב- $\mathbb{R}$: $(3,0)$, $(1,0)$ מינימום מוחלט, מקסימום מוחלט לא קיים.

ב- $[1,3]$: $(3,0)$, $(1,0)$ מינימום מוחלט, $(2,1)$ מקסימום מוחלט.

12) האורך המינימלי של צינורות שאיבה שהחברה תצטרך הוא $\sqrt{(a+b)^2+c^2}$.

13) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שאלות המשלבות קיצון מוחלט עם קיצון מקומי

שאלות

1) תהי f פונקציה רציפה ב-$[a,b]$ וגזירה ב-(a,b).
נניח שקיימת נקודה $c\in(a,b)$, כך ש-$(f(c)-f(a))(f(b)-f(c))<0$.
הוכיחו כי קיימת נקודה $d\in(a,b)$, כך ש-$f'(d)=0$.

2) פונקציה $f(x)$ גזירה פעמיים בקטע $[a,b]$.
וידוע כי $f(x)$ מקיימת $f(x)-f'(x)=f''(x)$ לכל x, וכן $f(a)=f(b)=0$.
הוכיחו כי $f(x)=0$ לכל x בקטע.

3) הפונקציה f גזירה פעמיים ומקיימת $f''(x)+f'(x)g(x)-f(x)=0$ עבור פונקציה g מסוימת.
הוכיחו: אם הפונקציה f מקבלת את הערך 0 בשתי נקודות, אז היא שווה אפס בכל הקטע בין הנקודות.

4) תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה פעמיים בקטע (a,b), כך ש-$f''(x)<0$ בקטע זה.
נתון כי $f(a)=f(b)=0$.
א. הוכיחו כי $f(x)>0$ בקטע (a,b).
ב. האם סעיף א' נשאר נכון אם מורידים את דרישת הרציפות? הוכיחו או הפריכו.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הוכחת אי שוויונים

שאלות

בשאלות **1-3** הוכיחו את אי-השוויונים שמימין, לגבי התחום שבסוגריים משמאל:

1) $x^3e^{-x} \le \frac{27}{e^3}$ (לכל x)

2) $xe^{-\sqrt{x}} \le 1$ $\quad (x \ge 0)$,

3) $0 \le x^2e^{x-1} \le 1$ $\quad (x \le 1)$,

4) יהיו a ו- b מספרים חיוביים.
הוכיחו שאי-השוויונים הבאים לא יכולים להתקיים בעת ובעונה אחת:

$$(1)\ a(1-b) > \frac{1}{4}, \qquad (2)\ b(1-a) > \frac{1}{4}$$

הערת סימון: $[a,b] \Leftrightarrow a \le x \le b$; $(a,b) \Leftrightarrow a < x < b$; $[a,b) \Leftrightarrow a \le x < b$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה 1

פרק 15 - חשבון דיפרנציאלי - בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון)

תוכן העניינים

1. הסבר כללי על בעיות קיצון ..... (ללא ספר)
2. בעיות קיצון יסודיות עם מספרים 215
3. בעיות קיצון בהנדסת המישור 216
4. בעיות קיצון בפונקציות וגרפים 218
5. בעיות קיצון כלכליות מסוג ראשון 220
6. בעיות קיצון כלכליות מסוג שני 226

בעיות קיצון יסודיות עם מספרים

שאלות

1) נתונים שלושה מספרים שסכומם 24. המספר הראשון שווה למספר השני.
מצאו מהם המספרים, אם ידוע שמכפלתם מקסימלית.

2) מצאו את המספר החיובי, שאם נוסיף לו את המספר ההופכי לו,
הסכום המתקבל יהיה מינימלי.

3) נתונים שלושה מספרים שסכומם הוא 36. ידוע שמספר אחד זהה לשני.
א. מה צריכים להיות שלושת המספרים כדי שמכפלתם תהיה מקסימלית?
ב. כיצד תשתנה התוצאה אם מספר אחד יהיה גדול פי 2 מהשני במקום שווה לו?
ג. באיזה מקרה תהיה מכפלה גדולה יותר?

4) x ו- y הם שני מספרים המקיימים $x+6y=60$.
א. הביעו את y באמצעות x.
ב. מה צריכים להיות המספרים x ו- y,
כדי שמכפלת ריבועיהם תהיה מקסימלית?
ג. מהי המכפלה הנ"ל?

תשובות סופיות

1) 8,8,8

2) 1

3) א. 12, 12, 12 ב. 8, 12, 16 ג. מקרה א'.

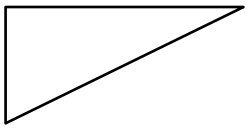
4) א. $y=10-\frac{x}{6}$ ב. $x=30$, $y=5$ ג. $M=22500$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

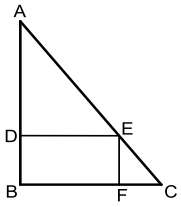
בעיות קיצון בהנדסת המישור

שאלות

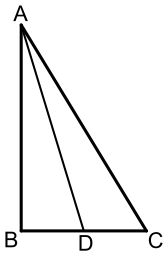
1) אדם מתכנן לבנות מרפסת בביתו
ורוצה להציב מעקה סביב המרפסת.
שטח המרפסת המתוכנן הוא 24 מ״ר.
מחיר מעקה בחזית המרפסת (BC)
הוא 120 ₪ למטר,
ומחיר מעקה בצדי המרפסת הוא 40 ₪ למטר.
מה צריכים להיות ממדי המרפסת, כדי שמחיר המעקה יהיה מינימלי?



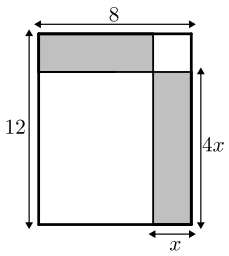
2) במשולש ישר זווית סכום אורכי הניצבים הוא 12 ס״מ.
מה צריך להיות אורך כל ניצב,
כדי ששטח המשולש יהיה מקסימלי?



3) במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle B=90°$)
הנקודה E נמצאת על היתר AC,
כך שהמרובע EDBF הוא מלבן.
נתון: $AB=$ 20 ס״מ , $BC=$ 16 ס״מ .
מצאו את שטחו של המלבן בעל השטח
הגדול ביותר.



4) במשולש ישר הזווית ABC ($\sphericalangle B=90°$),
AD הוא תיכון לניצב BC.
ידוע כי סכום אורכי הניצבים הוא 20 ס״מ.
מצאו מה צריכים להיות אורכי הניצבים,
עבורם אורך התיכון AD יהיה מינימלי.



5) נתון מלבן שאורכי צלעותיו הם 8 ס״מ ו-12 ס״מ,
כמתואר באיור.
מקצים קטעים באורכים של x ו- $4x$
על צלעות המלבן, כך שנוצרים המלבנים המקווקווים.
מצאו את x עבורו סכום שטחי המלבנים הוא מינימלי.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $4\cdot 6$

2) א. 6 ס"מ ו-6 ס"מ ב. 18 סמ"ר ג. $6\sqrt{2}\approx 8.48$ ס"מ.

3) 80 סמ"ר $= S$.

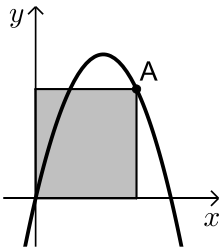
4) 4 ס"מ, 16 ס"מ.

5) $x = 2.75$

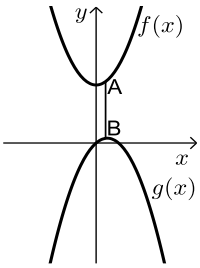
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בעיות קיצון בפונקציות וגרפים

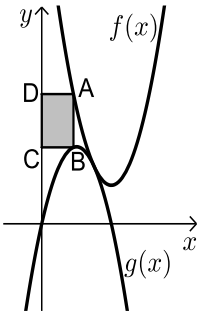
שאלות



1) נתונה הפונקציה $f(x)=6x-x^2$. מנקודה A שעל הפונקציה ברביע הראשון הורידו אנכים לצירי השיעורים כך שנוצר מלבן כמתואר בשרטוט.
מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?

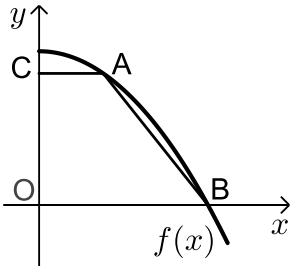


2) נתונות הפונקציות: $f(x)=x^2+12$ ו- $g(x)=2x-x^2$
כמתואר: הנקודות A ו-B נמצאות בהתאמה על הגרפים של הפונקציות: $f(x)$ ו- $g(x)$, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .
מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.



3) באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות:
$f(x)=x^2-8x+18$ ו- $g(x)=-x^2+4x$.
הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . מעבירים אנכים מהנקודות A ו-B לציר ה- y כך שנוצר מלבן (המסומן).
נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .

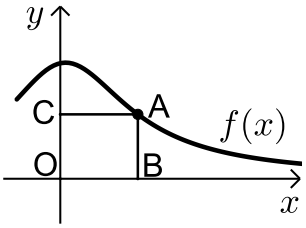
א. הביעו באמצעות t את שטח המלבן המסומן.
ב. מצאו את ערכו של t עבורו שטח המלבן הוא מקסימלי.
ג. מה יהיה שטח המלבן במקרה זה?



4) נתונה הפונקציה $f(x)=36-x^2$.
על גרף הפונקציה ברביע הראשון מסמנים נקודה A.
מהנקודה A מעבירים ישר, המקביל לציר ה- x, שחותך את ציר ה- y בנקודה C.
הנקודה B היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x ו-O ראשית הצירים.

א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי ששטח הטרפז ABOC יהיה מקסימלי?
ב. מה יהיה שטח הטרפז במקרה זה?

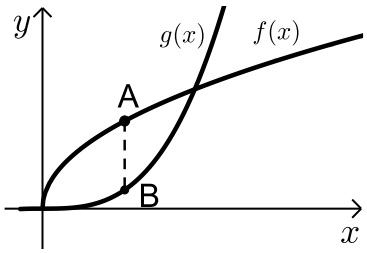
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©



5) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x+12}{x^2+3}$, בתחום $x\geq 0$.
נקצה נקודה A על גרף הפונקציה וממנה נוריד אנכים לצירים, כך שנוצר המלבן ABCO, כמתואר באיור.

א. מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, עבורם שטח המלבן יהיה מקסימלי.

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, עבורם שטח המלבן יהיה מינימלי בתחום הנ"ל.



6) נתונות הפונקציות $f(x)=2\sqrt{x}$ ו- $g(x)=\frac{1}{3}x^3$.
את הנקודה A שעל $f(x)$ חיברו עם הנקודה B, שנמצאת מתחתיה על $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .
מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?

תשובות סופיות

1) $A(4,8)$

2) $A(0.5,12.25)$

3) א. $S=2t^3-12t^2+18t$ ב. $t=1$ ג. $S=8$

4) א. $A(2,32)$ ב. $S=128$

5) א. $A(2,2)$ ב. $A(0,4)$

6) $A(1,2)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שלבי עבודה

- נגדיר את אחד הגדלים בשאלה כ- x .
- נבטא את שאר הגדלים בשאלה באמצעות x .
- נבנה פונקציה שמבטאת את מה שרצינו שיהיה מינימלי/מקסימלי.
- נגזור את הפונקציה, נשווה לאפס ונחלץ ערך/ערכי ה- x .
- נוודא שערך ה- x מסעיף 4 הוא אכן מינימום/מקסימום באמצעות "y (או טבלה).
- ננסח את התשובה לשאלה המקורית.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בעיות קיצון כלכליות מסוג ראשון

שאלות

1) כאשר חברת 'יוטבתה' מוכרת x ליטר שוקו ליום,
היא יכולה לקבל מחיר של $p(x)=-\frac{1}{4}x+10$ שקל לליטר.

א. מהו מחיר ליטר אחד, אם הכמות שנמכרת ביום היא 4 ליטר?
ב. מהו מחיר ליטר אחד, אם הכמות שנמכרת ביום היא 12 ליטר?
ג. מהי הכמות הנמכרת ביום, אם המחיר הוא 6 ₪ לליטר?
ד. שרטטו את הגרף של פונקציית הביקוש, ומצאו את תחום ההגדרה שלה.
ה. פונקציית הביקוש הנתונה מתארת את מחיר המוצר, כפונקציה של הכמות הנמכרת ממנו. שנו את נוסחת הפונקציה, כך שהיא תתאר את הכמות הנמכרת מהמוצר, כפונקציה של מחירו.

2) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x)=-0.6x+120$.

א. מצאו את פונקציית הפדיון ואת התחום שלה.
ב. אם $x=20$, מהו מחיר המוצר ומהו הפדיון?
ג. אם המחיר הוא 12 ₪, מהו הפדיון?

3) פונקציית הפדיון של מוצר מסוים היא $R(x)=-0.08x^2+40x$.

א. מהו התחום של פונקציית הפדיון?
ב. שרטטו את הגרף של פונקציית הפדיון.
ג. מצאו את פונקציית הביקוש ושרטטו את הגרף שלה.

4) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x)=-0.4x+100$.

א. מצאו את תחום הפונקציה.
ב. מצאו את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון הממוצע.
ג. מצאו את פונקציית הפדיון השולי.
ד. לאיזה ערך של x יתקבל פדיון מקסימלי, ומהו?

5) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x)=-6x^2+240x+1800$.

א. מצאו את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון השולי.
ב. אם $x=40$, האם כדאי להגדיל את הייצור?
ג. מתי יהיה הפדיון מקסימלי, ומהו?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים נתונה ע"י $Q(x)=10x-\frac{x^2}{5}$.

א. מצאו את המחיר, הנותן את הפדיון המקסימלי.

ב. מהו הביקוש במקרה זה?

ג. מהו הביקוש השולי בנקודת המחיר שמצאנו? מה משמעותו?

7) פונקציית ההוצאות של יצרן, המייצר x קפה ביום, היא $C(x)=5x+150$.

א. שרטטו גרף של פונקציית ההוצאות. מהן ההוצאות הקבועות?

ב. מצאו כמה ק"ג קפה מייצר היצרן, אם ההוצאות הן 1,000 ₪.

ג. מהן ההוצאות, אם מייצרים 20 ק"ג קפה ביום?

ד. מצאו את פונקציית ההוצאה השולית.

8) פונקציית העלות, של יצרן כובעים, היא $TC(x)=0.04x^2+10x+400$ שקל ליום.

א. חשבו את העלות הממוצעת ליום, אם הוא מייצר 40 כובעים.

ב. כמה כובעים עליו לייצר, כדי שהעלות הממוצעת תהיה מינימלית?

ג. חשבו את העלות השולית ליום, עבור $x=100$. איזו מסקנה ניתן להסיק?

9) פונקציית העלות של מוצר מסוים היא $C(x)=0.004x^2+10x+200$.

א. חשבו את העלות, כאשר $x=100$ וכאשר $x=101$.

ב. חשבו את העלות השולית, כאשר $x=100$.

ג. חשבו כמה תעלה יחידת מוצר נוספת, כאשר הייצור יעבור מ- $x=100$ ל- $x=101$, והשוו עם התוצאה של סעיף ב. מהי המסקנה?

ד. מצאו האם קצב השינוי של העלות גדל או קטן.

10) ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q)=100-0.06Q$,

ופונקציית עלות כוללת $TC(Q)=200+4Q$.

מהי הכמות, Q, שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
מהו המקסימום במקרה זה?

11) ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q)=20$,

ופונקציית עלות $TC(Q)=300+2Q^2$.

מהי הכמות שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
מהו המקסימום במקרה זה?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q)=-0.15Q+50$,
ופונקציית עלות שולית $MC(Q)=0.06Q^2+20$.
מהי הכמות שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?

13) ליצרן פונקציית ביקוש $Q=\frac{5000-50P}{3}$,
ופונקציית עלות $TC(Q)=200+4Q$.
מהי הכמות, Q, שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
מהו המקסימום במקרה זה?

14) ליצרן פונקציית עלות שולית $MC(Q)=0.06Q^2+20$.
מצאו את פונקציית העלות, אם ידוע שכאשר הכמות המיוצרת היא $Q=10$,
אז העלות הכוללת היא 225 ₪.

15) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהרווח המקסימלי מתקבל כאשר הפדיון השולי שווה להוצאה השולית. הסבר את המשמעות הגרפית.

ב. הוכיחו שאם מחיר המוצר קבוע, אז הרווח המקסימלי מתקבל כאשר ההוצאה שולית שווה למחיר המוצר.

16) $C(x)$ – פונקציית הוצאות, $C'(x)$ – הוצאות שוליות, $\frac{C(x)}{x}$ – הוצאות ממוצעות.

א. האם ייתכן שהוצאה שולית קבועה, למרות שהוצאה ממוצעת משתנה?

ב. האם ייתכן להפך?

ג. הוכיחו כי ההוצאה הממוצעת היא פונקציה עולה אם ורק אם ההוצאה השולית גדולה מן ההוצאה הממוצעת.

17) מפעל המייצר מוצר מסוים משתמש בשני גורמי הייצור.
נסמן את מחירי גורמי הייצור, ליחידה, ב- p_1 וב- p_2, בהתאמה.
אם נשתמש ב- x יחידות מג"י אחד וב- y יחידות מג"י 2,
המפעל מייצר $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ יחידות. תקציב המפעל A ₪.

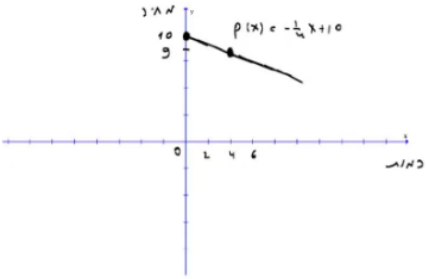
א. הוכיחו כי באילוץ התקציב, הייצור מקסימלי
כאשר מתקיימת הנוסחה $\frac{x}{y}=\frac{p_2^2}{p_1^2}$.

ב. חשבו x ו- y, עבורם הייצור מקסימלי, אם נתון:
$p_1=$ ₪ 3,000 , $p_2=$ ₪ 100 , $A=$ ₪ 372,000 .

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

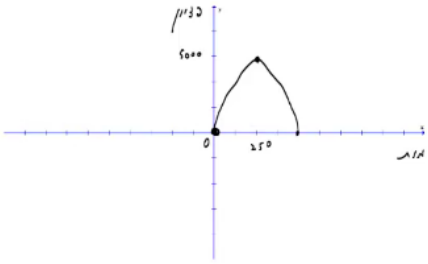
תשובות סופיות

1) א. 9 ב. 7 ג. 16 ה. $x(p)=40-4p$ ד.

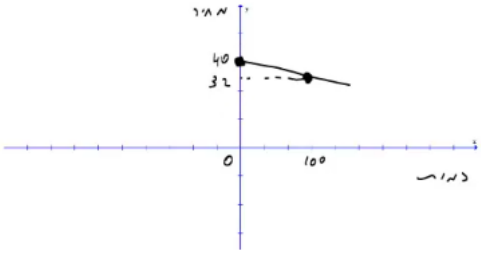


2) א. $R(x)=-0.6x^2+120x$, בתחום: $x\ge 0$. ב. 2,160 ג. 2,160

3) א. $x\ge 0$ ב.



ג.



4) א. $x\ge 0$ ב. פונקציית הפדיון: $R(x)=-0.04x^2+100x$,

הפדיון הממוצע: $AR(x)=-0.4x+100$ $x>0$. ג. $R'(x)=-0.08x+100$

ד. 1,250 ; הפדיון המקסימלי: 62,500.

5) א. פונקציית הפדיון: $R(x)=-6x^3+240x^2+1800x$,

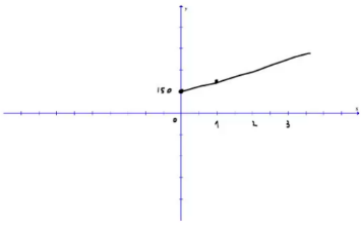
הפדיון השולי: $R'(x)=-18x^2+480x+1800$. ב. לא.

ג. 30 ; הפדיון המקסימלי: 108,000.

6) א. $33\frac{1}{3}$ ב. $Q\left(33\frac{1}{3}\right)=10\cdot 33\frac{1}{3}-\frac{33\frac{1}{3}^2}{5}$

ג. $-3\frac{1}{3}$; העלאת המחיר ביחידה אחת – תקטין את הביקוש ב-3.33 יח', בערך.

7) א.



ההוצאות הקבועות הן הוצאות המפעל, גם כאשר הוא אינו מייצר. ב. 170

ג. 250 ד. $MC(x)=5$

8) א. 21.6 ב. 100 ג. 18 ₪ ; אם המפעל יעלה את הייצור ביחידה אחת, מ-100 ל-101, העלות הכוללת שלו תגדל ב-18 ₪ בערך.

9) א. $C(100)=1240,\ C(101)=1250.804$ ב. 10.8

ג. בערך הסכום שיעלה למפעל לייצר יחידה נוספת. ד. גדל.

10) הכמות: 800, המקסימום: 38,200.

11) הכמות: 5, המקסימום: -250.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) 25

13) הכמות : 800, המקסימום : 38,200.

14) $TC(Q) = 0.02Q^3 + 20Q + 5$

15) שאלת הוכחה.

16) א. כן. ב. לא. ג. שאלת הוכחה.

17) א. שאלת הוכחה. ב. $x = 4, \quad y = 3600$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

בעיות קיצון כלכליות מסוג שני

שאלות

1) יצרן מכונות כביסה מוכר 500 מכונות בשבוע, במחיר של $225 למכונה.
עלות הייצור למכונת כביסה אחת היא $125. סקר שוק מראה, שעל כל הוזלה של $5 במחיר – מספר המכונות הנמכרות בשבוע עולה ב-50.

א. מהו המחיר שהיצרן צריך לקבוע למכשיר, על מנת להגיע לרווח מקסימלי?

ב. מהן ההוצאות במצב זה? האם בהכרח אלו ההוצאות המינימליות? נמקו.

2) מחיר חבילת זמן אוויר בחברת סלולר הוא 100 ₪ ל-200 דקות.
בסקר שוק שערכה החברה התגלה, כי על כל הוזלה של 2 ₪ בתשלום, לקוחות מנצלים 10 דקות זמן אוויר נוספות.
לאור תוצאות הסקר, איזו חבילה (כלומר, **מה המחיר** שיש לקבוע **ולכמה דקות**) כדאי לחברה להציע ללקוחותיה, כדי להגיע להכנסה מקסימלית?

3) אמן מייצר תכשיטים, בעלות של 30 ₪ עבור כל תכשיט.
הוא מצליח למכור 100 תכשיטים, כאשר מחירם 40 ₪ לתכשיט.
על כל עלייה של 2 ₪ במחיר, הוא מוכר 4 תכשיטים פחות.

א. מצאו כמה תכשיטים האמן צריך לייצר, כדי ש**הרווח** שלו יהיה מקסימלי.

ב. באיזה מחיר ימכור האמן כל תכשיט במצב זה?

ג. מהי עלות הייצור של האמן (עבור כל התכשיטים) במצב זה?

4) חברת 'טיול נעים' משכירה אוטובוס ל-30 תיירים, שכל אחד מהם משלם 100 דולר. על כל תייר נוסף שמצטרף, החברה מסכימה להוריד את התשלום לכל אחד מהתיירים, בשני דולר.
מה צריך להיות מספר התיירים, כדי שלחברה יהיה הרווח הגדול ביותר?

5) מחיר שליחת SMS ברשת 'סלקום' הוא 50 אג',
ומספר ה-SMS־ים החודשי הממוצע הוא 200.
על כל 5 אג' ש'סלקום מעלה – יורד מספר ה-SMS־ים החודשי הממוצע בעשר.
מצאו מה צריך להיות מחיר שליחת SMS,
כדי שהכנסתה של 'סלקום' תהיה מקסימלית.

6) קולנוע 'חן' מוכר כל שבוע 60 כרטיסים לסרטי תלת-מימד במחיר של 45 ₪ לכרטיס. כל הורדה של מחיר הכרטיס בחצי שקל גורמת למכירת שני כרטיסים נוספים בשבוע.
מה צריך להיות מחיר הכרטיס, כדי שהכנסתו של בית הקולנוע תהיה בגדולה ביותר? מצאו גם מהי ההכנסה המקסימלית.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) הייצור של בובת 'בוב ספוג' עולה לחברת 'ניקולדיאון' 25 ₪.
אם החברה מוכרת את הבובה ב-45 ₪, היא מצליחה למכור 200 בובות ליום.
על כל חצי שקל שהחברה מורידה ממחיר הבובה, היא מצליחה למכור 10 בובות נוספות ליום.
מהו הרווח היומי המקסימלי של החברה?

8) חברת 'אופיס דיפו' רוכשת מספר מסוים של מוצרים ב-800 ₪.
5 מהמוצרים היא מוכרת ברווח של 20% לכל מוצר,
ואת שאר המוצרים היא מוכרת ברווח של 2 ₪ לכל מוצר.
הוכיחו שהרווח של החברה, בעסקה כזו, הוא לפחות 70 ₪.

9) חברת BMX מוכרת 300 זוגות אופניים בחיר של 500 ₪ לזוג אופניים.
לכל x זוגות אופניים נוספים שהיא מוכרת, היא מורידה – את מחירם בלבד – ב- $2x$ ₪ לזוג אופניים, ואילו את מחירם של 300 הזוגות הראשונים היא מורידה רק ב- x ₪ לזוג אופניים.
מה מספר זוגות האופניים שעל החברה למכור,
על מנת שהכנסתה תהיה מקסימלית?

תשובות סופיות

1) א. 200 ב. $93,750 ; לא, כי תמיד ניתן לייצר פחות וכך להקטין הוצאות.

2) 70 ₪ ל-350 דקות.

3) א. 60 ב. 60 ₪ ג. 1,800 ₪

4) 40

5) 75 אג'.

6) מחיר הכרטיס : 30 ₪, ההכנסה המקסימלית : 3,600 ₪.

7) 4,500 ₪.

8) שאלת הוכחה.

9) 350

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה 1

פרק 16 - חשבון אינטגרלי - האינטגרל הכללי

תוכן העניינים

1. חישובי אינטגרלים 228
2. מציאת פונקציה קדומה 233

חישובי אינטגרלים:

סיכום כללי:

הגדרה וכללי האינטגרציה:

- כלל האינטגרציה של פונקציה פולינומית: $\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \ , \ (n \neq -1)}$.
- עבור מקדם קבוע a נקבל: $\boxed{\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c \ , \ (n \neq -1)}$.
- כללי האינטגרציה של פונקציות טריגונומטריות:

$\boxed{\int \sin x dx = -\cos x + c}$, $\boxed{\int \cos x dx = \sin x + c}$, $\boxed{\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c}$, $\boxed{\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c}$

שאלות:

1) מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int x^3 dx$

ב. $\int 12x^5 dx$

ג. $\int x^4 dx$

ד. $\int 2x^3 dx$

ה. $\int \frac{2}{3} x^5 dx$

ו. $\int 7 dx$

ז. $\int \left(\frac{5}{6} x^4 + 16x^3 - \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{1}{3} \right) dx$

ח. $\int \left(\frac{4x^3}{5} - ax^2 - \frac{2ax}{b} + b \right) dx$

2) מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int x^{-3} dx$

ב. $\int \frac{1}{x^3} dx$

ג. $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \frac{a}{x^3} + \frac{x}{a} \right) dx$

ד. $\int \frac{2x^3 + x - 2}{x^3} dx$

3) מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int x^{\frac{1}{2}}dx$

ב. $\int \sqrt{x}dx$

ג. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

ד. $\int \left(\frac{4}{\sqrt{x}}+3\sqrt{x}\right)dx$

4) מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int (5x-1)^3 dx$

ב. $\int 3(2-7x)^4 dx$

ג. $\int \frac{18}{(6x+5)^2}dx$

ד. $\int \frac{1}{\sqrt{6x-3}}dx$

ה. $\int \sqrt{ax+b}dx$

5) מצא את תוצאת החילוק:

א. $\frac{x^2-5x-14}{x+2}=$

ב. $\frac{x^3+x^2+3x-5}{x-1}=$

ג. $\frac{x^4+x^3-x^2+14x-3}{x+3}=$

ד. $\frac{x^3-4x^2+9}{x-3}=$

ה. $\frac{x^3+5x^2-4x-20}{x+5}=$

6) מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \frac{x^2-5x-14}{x+2}dx$

ב. $\int \frac{x^3+x^2+3x-5}{x-1}dx$

ג. $\int \frac{x^4+x^3-x^2+14x-3}{x+3}dx$

ד. $\int \frac{x^3-4x^2+9}{x-3}dx$

ה. $\int \frac{x^3+5x^2-4x-20}{x+5}dx$

ו. $\int \frac{2x^5+x^4-4x^2+1}{2x+1}dx$

7) מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int -\frac{2x}{(x^2-1)^2}dx$

ב. $\int \frac{x^2}{(x^3+6)^2}dx$

ג. $\int \frac{x-2}{(x^2-4x+1)^2}dx$

ד. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx$

ה. $\int \frac{6x-3}{\sqrt{x-x^2}}dx$

ו. $\int 8x(x^2+1)^3 dx$

ז. $\int (2-x^2)(6x-x^3)^2 dx$

8) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\left(\sin x-3\cos x+\frac{4}{\cos^2 x}+5\right)dx$

ב. $\int\left(\cos 3x-2\sin 4x+\frac{4}{\cos^2 3x}\right)dx$

ג. $\int\left(\sin(\pi-x)+\frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)dx$

9) חשב את האינטגרלים הבאים (שימוש בזהויות):

א. $\int(2\sin x\cos x)dx$

ב. $\int(\sin 3x\cos 3x)dx$

ג. $\int(\sin^4 x-\cos^4 x)dx$

ד. $\int(\sin^2 x)dx$

10) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\left(\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\right)dx$

ב. $\int\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx$

ג. $\int(\cos x\sin^2 x)dx$

11) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\left(\sin 2x-4\cos\frac{x}{3}\right)dx$

ב. $\int\frac{1}{\cos^2 4x}dx$

ג. $\int\frac{1}{\sin^2 10x}dx$

ד. $\int(\cos^2 x-\sin^2 x)dx$

ה. $\int(\cos^4 x-\sin^4 x)dx$

ו. $\int(\cos x+\sin x)^2 dx$

ז. $\int(\sin x\cos x\cos(2x))dx$

ח. $\int\tan^2 xdx$

ט. $\int\frac{1}{(\sin x\cos x)^2}dx$

י. $\int\cos^2 xdx$

יא. $\int\sin^2 4xdx$

12) חשב את ערכי האינטגרלים הבאים (שאלות אתגר):

א. $\int\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)dx$

ב. $\int\cos^4 x dx$

ג. $\int\sin^4 4x dx$

ד. $\int\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}dx$

ה. $\int\frac{\sin^3 x}{1-\cos x}dx$

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{x^4}{4}+c$ ב. $2x^6+c$ ג. $\frac{x^5}{5}+c$ ד. $\frac{x^4}{2}+c$ ה. $\frac{x^6}{9}+c$ ו. $7x+c$

ז. $\frac{x^5}{6}+4x^4-\frac{x^3}{6}+2x^2-\frac{1}{3}x+c$ ח. $\frac{x^4}{5}-\frac{ax^3}{3}-\frac{ax^2}{b}+bx+c$.

2) א. $-\frac{x^{-2}}{2}+c$ ב. $-\frac{1}{2x^2}+c$ ג. $-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}+\frac{a}{2x^2}+\frac{x^2}{2a}+c$ ד. $2x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+c$.

3) א. $\frac{x^{1.5}}{1.5}+c$ ב. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+c$ ג. $2\sqrt{x}+c$ ד. $8\sqrt{x}+2\sqrt{x^3}+c$.

4) א. $\frac{(5x-1)^4}{20}+c$ ב. $-\frac{3(2-7x)^5}{35}+c$ ג. $-\frac{3}{6x+5}+c$

ד. $\frac{\sqrt{6x-3}}{3}+c$ ה. $\frac{2\sqrt{(ax+b)^3}}{3a}+c$.

5) א. $x-7$ ב. x^2+2x+5 ג. x^3-2x^2+5x-1

ד. x^2-x-3 ה. x^2-4

6) א. $\frac{x^2}{2}-7x+c$ ב. $\frac{x^3}{3}+x^2+5x+c$ ג. $\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-x+c$

ד. $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-3x+c$ ה. $\frac{x^3}{3}-4x+c$ ו. $\frac{x^5}{5}-x^2+x+c$.

7) א. $\frac{1}{x^2-1}+c$ ב. $-\frac{1}{3\left(x^3+6\right)}+c$ ג. $-\frac{1}{2\left(x^2-4x+1\right)}+c$

ד. $\sqrt{x^2+2}+c$ ה. $-6\sqrt{x-x^2}+c$ ו. $\left(x^2+1\right)^4+c$

ז. $\frac{\left(6x-x^3\right)^3}{9}+c$.

8) א. $-\cos x-3\sin x+4\tan x+5x+c$ ב. $\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\cos 4x}{2}+\frac{4\tan 3x}{3}+c$

ג. $\cos\left(\pi-x\right)+\tan x+x+c$.

9) א. $-\frac{1}{2}\cos 2x+c$ ב. $-\frac{\cos 6x}{12}+c$ ג. $-\frac{\sin 2x}{2}+c$

ד. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+c$.

10) א. $2\sqrt{\sin x}+c$ ב. $\frac{1}{\cos x}+c$ ג. $\frac{1}{3}\sin^3 x+c$.

11) א. $-\frac{1}{2}\cos 2x-12\sin\frac{x}{3}+c$ ב. $\frac{1}{4}\tan 4x+c$ ג. $-\frac{1}{10}\cot 10x+c$

ד. $\frac{1}{2}\sin 2x+c$ ה. $\frac{1}{2}\sin 2x+c$ ו. $x-\frac{1}{2}\cos 2x+c$

ז. $-\frac{1}{16}\cos 4x+c$ ח. $\tan x-x+c$ ט. $\tan x-\cot x+c$

י. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+c$ יא. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{16}\sin 8x+c$

12) א. $\frac{3}{4}x+\frac{1}{16}\sin 4x+c$ ב. $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$

ג. $\frac{3}{8}x-\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{128}\sin 16x+c$ ד. $-\cot x-x+c$

ה. $-\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x+c$

מציאת פונקציה קדומה:

שאלות:

1) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=3x^2-7$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(2,-1)$.

2) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=2x-6$.

ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.

מצא את הפונקציה.

3) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=x^2-8x+2$. נתון: $f(-2)=1$.

א. מצא את $f(x)$.

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$.

4) נתונה הנגזרת של פונקציה $f(x)$: $f'(x)=9x^2-4$.

ערך הפונקציה בנקודה $x=1$ הוא 3.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=1$.

ב. מצא את $f(x)$.

ג. מצא את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.

5) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=2x-3$.

לפונקציה משיק ששיפועו הוא 3-.

א. מצא את שיעור ה- x של נקודת ההשקה.

ב. מצא את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא 7.

6) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=-6x-5$.

המשיק לפונקציה בנקודה A יוצר זווית של 45° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x.

א. מצא את שיעור ה- x של הנקודה A.

ב. מצא את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא 6-.

ג. מצא את משוואת המשיק.

7) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=3x-4$.
הישר $y=2x+5$ משיק לגרף הפונקציה. מצא את $f(x)$.

תשובות סופיות:

1) $f(x)=x^3-7x+5$.

2) $f(x)=x^2-6x+14$.

3) א. $f(x)=\frac{x^3}{3}-4x^2+2x+23\frac{2}{3}$ ב. $y=-5x+27$.

4) א. $y=5x-2$ ב. $f(x)=3x^3-4x+4$ ג. $(0.4,0)$, $(0,-2)$.

5) א. $x=0$ ב. $f(x)=x^2-3x+7$.

6) א. $x=-1$ ב. $f(x)=-3x^2-5x-8$ ג. $y=x-5$.

7) $f(x)=\frac{3x^2}{2}-4x+11$.

מתמטיקה 1

פרק 17 - חשבון אינטגרלי - האינטגרל המסוים וחישובי שטחים

תוכן העניינים

1. האינטגרל המסוים 235
2. חישובי שטחים יסודיים 237
3. חישובי שטחים יסודיים עם פרמטרים 243
4. חישובי שטחים כאשר נתונה נגזרת הפונקציה 245
5. חישובי שטחים עם פונקציה רציונאלית 248
6. חישובי שטחים עם פונקצית שורש 250
7. חישובי שטחים עם פונקציות טריגונומטריות 254
8. חישובי שטחים בין גרף הנגזרת והצירים 257

האינטגרל המסוים:

סיכום כללי:

תהא פונקציה $f(x)$ שנגזרתה היא $f'(x)$ ($f(x)$ מוגדרת בתחום $a \le x \le b$).

הקשר שבין האינטגרל המסוים לפונקציה קדומה הוא: $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$.

הערה:

יש להשתמש בכל כללי האינטגרציה המיידיים של הפונקציות השונות אשר נלמדו.

שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\int_2^5 (x^2+5x)dx$

ב. $\int_{-4}^{-1} x^2(x-3)dx$

ג. $\int_{-3}^{3} (x^3+4x)dx$

ד. $\int_{-1}^{1} 3(2x-1)^5 dx$

ה. $\int_1^2 \frac{2}{(x-3)^2}dx$

ו. $\int_1^4 \frac{x-1}{x^3}dx$

ז. $\int_{-3}^{0} \frac{2x^2+7x-4}{x+4}dx$

ח. $\int_3^4 \frac{3x^2-7x+2}{x-2}dx$

ט. $\int_1^2 \sqrt{3x-1}dx$

י. $\int_{-5}^{0} \frac{3}{\sqrt{4-x}}dx$

2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\int_0^{\pi} (\cos x)dx$

ב. $\int_0^{\pi} (\sin 2x+1)dx$

ג. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x - 3\cos 2x)dx$

ד. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{3}{\cos^2 x}+2\right)dx$

3) לפניך האינטגרל הבא: $\int_{1}^{a}(4x-7)\,dx$.

מצא עבור אלו ערכים של a ערך האינטגרל יהיה שווה ל-1-.

4) לפניך האינטגרל הבא: $\int_{a}^{2}(x-3x^2)\,dx$.

א. כתוב ביטוי לערך האינטגרל כתלות ב- a.

ב. מצא עבור אלו ערכים של a ערך האינטגרל יהיה שווה ל- $\frac{a-12}{2}$.

5) לפניך האינטגרל הבא: $\int_{a}^{a+4}\left(\frac{1}{\sqrt{x-a}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx$.

א. כתוב את ערך האינטגרל כתלות ב- a.

ב. מצא את ערכו של a עבורו ערך האינטגרל יהיה שווה ל-2.

6) לפניך האינטגרל הבא: $\int_{0}^{a}(\sin x+2\cos 2x)\,dx$, $0<a<3$.

מצא עבור אלו ערכים של a ערך האינטגרל יהיה שווה ל-1.

תשובות סופיות:

1) א. 91.5 ב. -126.75 ג. 0 ד. -182 ה. 1

ו. $\frac{9}{32}$ ז. -12 ח. 9.5 ט. 1.856 י. 6.

2) א. 0 ב. π ג. 0 ד. $3\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi\approx 7.29$.

3) $a=2\,,\,1.5$.

4) א. $a^3-\frac{1}{2}a^2-6$ ב. $a=0\,,\,1\,,\,-\frac{1}{2}$.

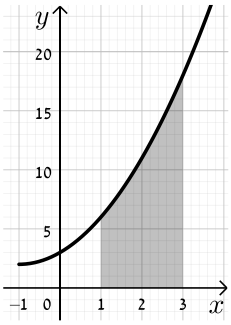
5) א. $4+2\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a+5}\right)$ ב. $a=1\frac{1}{4}$.

6) $a=\frac{\pi}{6}\,,\,\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{5\pi}{6}$.

חישובי שטחים יסודיים:

שאלות:

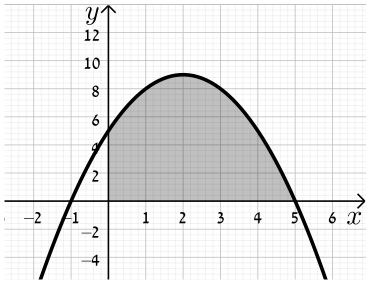
1) חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)=x^2+2x+3$, ציר ה-x והישרים $x=1$ ו-$x=3$.



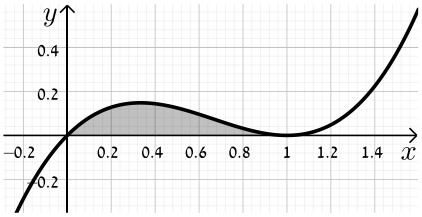
2) נתונה הפונקציה $y=-x^2+4x+5$.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.

ב. מצא את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה-x וציר ה-y.



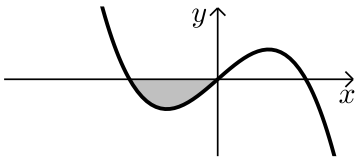
3) מצא את השטח המוגבל תחת הפונקציה $f(x)=x^3-2x^2+x$ וציר ה-x כמתואר באיור.



שאלות עם שטח מתחת לציר ה-x:

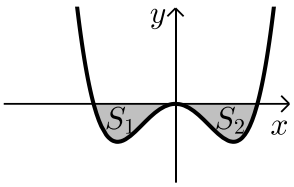
4) נתונה הפונקציה $f(x)=x(4-x^2)$.

חשב את השטח המוגבל שמתחת הפונקציה וציר ה-x שברביע השלישי.

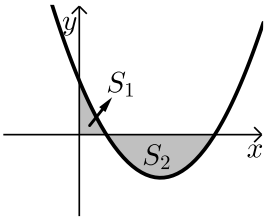


5) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{2}x^4-2x^2$.

חשב את השטח המוגבל שבין הפונקציה לציר ה-x.



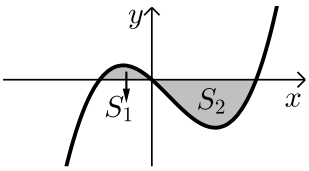
6) חשב את האינטגרל המסוים של
הפונקציה $y=x^2-6x+5$ בין 0 ל-5.
האם התוצאה מייצגת את סכום השטחים: S_1+S_2?
אם כן, הסבר. אם לא, נמק וחשב את סכום זה.



7) נתונה הפונקציה $y=x^3-x^2-2x$.
יוצרים את השטחים S_1 ו-S_2 בין גרף הפונקציה וציר ה-x כמתואר באיור.

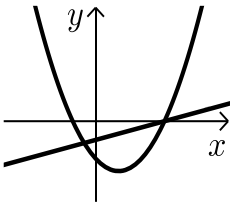
א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה-x.

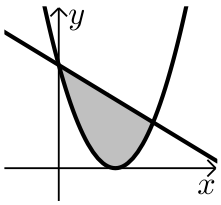


שאלות עם שטחים בין שתי פונקציות:

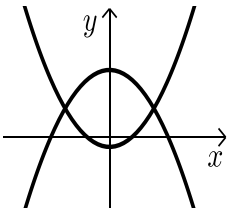
8) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=x^2-4x-12$ ו- $g(x)=x-6$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות הנ"ל.



9) נתונות הפונקציות: $y=(x-3)^2$, $y=-x+9$.
חשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות.



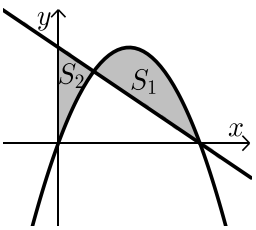
10) נתונות הפונקציות: $f(x)=x^2-1$, $g(x)=7-x^2$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של
הפונקציות הנ"ל.



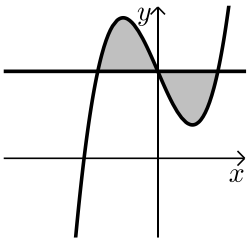
11) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=-x^2+4x$ ו- $g(x)=-x+4$.
מסמנים את השטח הכלוא בין שני הגרפים ב-S_1
ואת השטח הכלוא בין הגרפים וציר ה-y ב-S_2
כמתואר באיור.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות.

ב. חשב את היחס שבין השטחים: $\frac{S_1}{S_2}$.



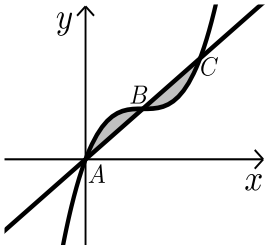
12) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3-4x+5$ והישר $y=5$.



א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה והישר.

ב. חשב את השטח המוגבל ביניהן.

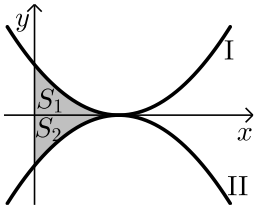
13) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3-3x^2+3x$.



הישר AC חותך את גרף הפונקציה בנקודות הבאות: $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(2,2)$.

חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה לישר AC.

14) נתונות הפונקציות $f(x)=(x-2)^2$ ו- $g(x)=-(x-2)^2$ כמתואר באיור.



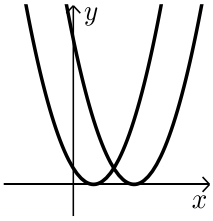
א. התאם בין הפונקציות לגרפים I ו-II.

ב. מסמנים את השטחים שבין כל פונקציה והצירים ב- S_1 ו- S_2 כמתואר באיור.

הראה כי השטחים S_1 ו- S_2 שווים זה לזה.

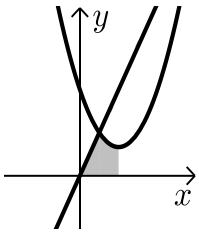
שאלות עם שטחים מורכבים:

15) נתונות הפונקציות: $f(x)=x^2-2x+1$, $g(x)=x^2-6x+9$.



חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- x.

16) נתונות הפונקציות: $y=x^2-4x+6$, $y=3x$.

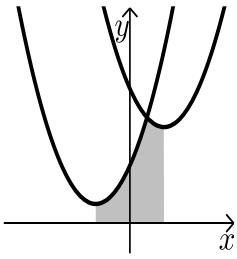


א. מצא את קדקוד הפרבולה.

ב. מצא נקודת חיתוך של הפרבולה עם הישר שמשמאל לקדקוד הפרבולה.

ג. חשב את השטח המסומן שבשרטוט.

17) נתונות הפונקציות: $y=x^2+4x+6$, $y=x^2-4x+14$.

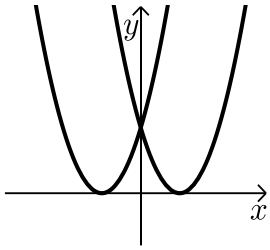


א. מצא את שיעורי ה- x של קודקודי הפרבולות.

ב. חשב את נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות.

ג. חשב את השטח המסומן בשרטוט.

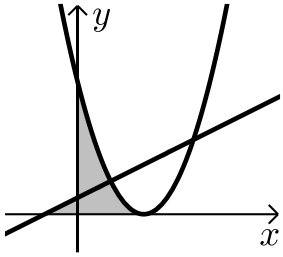
18) נתונות הפונקציות: $g(x)=(x+3)^2$, $f(x)=(x-3)^2$.
חשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות וציר ה-x .



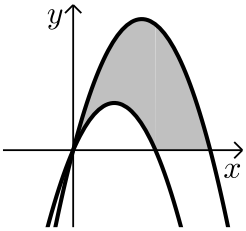
19) נתונות שתי הפונקציות: $y=(x-2)^2$, $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

א. מצא את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות לציר ה-x .

ב. מצא את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות לציר ה-y .



20) נתונות הפרבולות הבאות: $f(x)=-x^2+5x$ ו- $g(x)=-x^2+3x$.
חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של הפרבולות וציר ה-x .

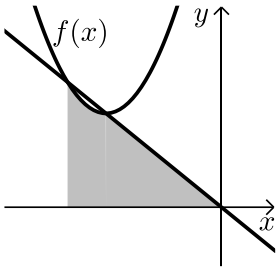


21) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2+6x+12$.
ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-4$ כמתואר באיור.

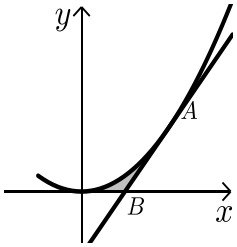
א. מצא את משוואת הישר.

ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.

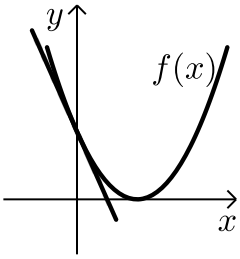
ג. מצא את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה-x והישר $x=-4$.



22) נתונה הפונקציה: $y=2x^2$.
מעבירים משיק לגרף הפונקציה מהנקודה: $A(1,2)$.
המשיק חותך את ציר ה-x בנקודה B.
חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה, המשיק וציר ה-x .

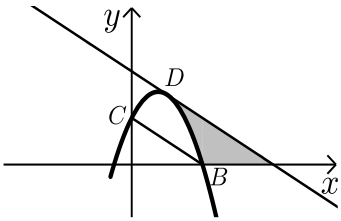


23) נתונה הפונקציה: $f(x)=(x-2)^2$.
מנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y
מעבירים משיק.



א. מצא את משוואת המשיק.
ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x
ג. חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- x.

24) משוואת הפרבולה היא: $f(x)=-2x^2+3x+2$.
הנקודות $C(0,2)$, $B(2,0)$ הן נקודות חיתוך
של הפרבולה עם הצירים.
המשיק לפרבולה בנקודה D מקביל לישר BC.



א. מצא את משוואת המשיק.
ב. מצא את השטח המוגבל בין הפרבולה, המשיק וציר ה- x.
ג. מצא את השטח המוגבל בין הפרבולה, המשיק וציר ה- y.

תשובות סופיות:

1) $22\frac{2}{3}$ יח"ש.

2) א. $(5,0)$, $(-1,0)$ ב. $33\frac{1}{3}$ יח"ש.

3) $\frac{1}{12}$ יח"ש.

4) 4 יח"ש.

5) $4\frac{4}{15}$ יח"ש.

6) לא. השטח הוא: 13 יח"ש.

7) א. $(2,0)$, $(0,0)$, $(-1,0)$ ב. $3\frac{1}{12}$ יח"ש.

8) $57\frac{1}{6}$ יח"ש.

9) $20\frac{5}{6}$ יח"ש.

10) $21\frac{1}{3}$ יח"ש.

11) א. $(4,0)$, $(1,3)$ ב. $2\frac{5}{11}$.

12) א. $(2,5)$, $(0,5)$, $(-2,5)$ ב. 8 יח"ש.

13) 0.5 יח"ש.

14) א. $f(x)=\text{I}$, $g(x)=\text{II}$ ב. הוכחה.

15) $\frac{2}{3}$ יח"ש.

16) א. $(2,2)$ ב. $(1,3)$ ג. $3\frac{5}{6}$ יח"ש.

17) א. $x=-2$, $x=2$ ב. $(1,11)$ ג. $25\frac{1}{3}$ יח"ש.

18) 18 יח"ש.

19) א. $\frac{4}{3}$ יח"ש ב. $1\frac{7}{12}$ יח"ש.

20) $16\frac{1}{3}$ יח"ש.

21) א. $y=-x$ ב. $(-3,3)$ ג. $7\frac{5}{6}$ יח"ש.

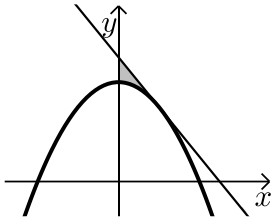
22) $\frac{1}{6}$ יח"ש.

23) א. $y=-4x+4$ ב. $(1,0)$ ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.

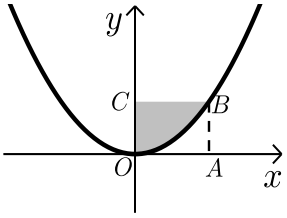
24) א. $y=-x+4$ ב. $2\frac{2}{3}$ יח"ש. ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.

חישובי שטחים יסודיים עם פרמטרים:

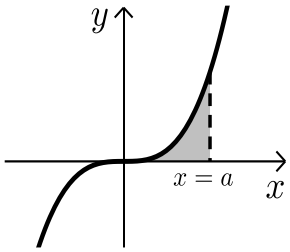
שאלות:



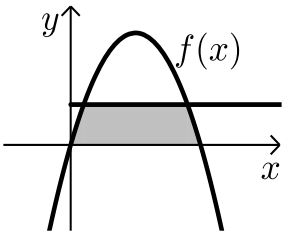
25) נתונה הפרבולה: $y=ax^2+8$.
שיפוע המשיק לגרף הפרבולה בנקודה שבה $x=2$ הוא 2-.
א. חשב את a.
ב. חשב את השטח המוגבל על ידי המשיק, הפרבולה וציר y.



26) הפונקציה המתוארת בשרטוט היא: $y=ax^2$, (a פרמטר).
המרובע ABCO הוא ריבוע.
הקדקוד B נמצא על גרף הפונקציה.
ידוע כי אורך צלע הריבוע היא 2 יחידות.
מצא את ערך הפרמטר a ואת השטח המסומן בסרטוט.



27) נתונה הפונקציה $y=x^3$.
מעבירים אנך לציר ה-x: $x=a$ (a פרמטר חיובי)
כך שנוצר שטח הכלוא בין האנך, גרף הפונקציה וציר ה-x.
א. הבע באמצעות a את השטח המקווקו בציור.
ב. חשב את a אם ידוע כי שטח זה שווה ל-a^2.



28) נתונה הפונקציה: $f(x)=kx-x^2$.
הישר $y=9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.
ידוע כי שיעור ה-x של אחת מנקודות החיתוך הוא $x=9$.
א. מצא את ערך הפרמטר k.
ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.
ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה-x (השטח המסומן).

תשובות סופיות:

25) א. $a=-\frac{1}{2}$ ב. $\frac{4}{3}$ יח"ש.

26) $a=\frac{1}{2}$, $2\frac{2}{3}$ יח"ש.

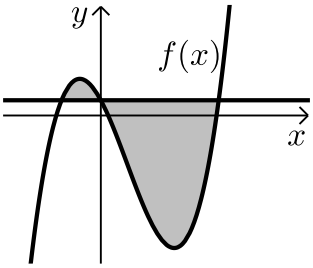
27) א. $\frac{a^4}{4}$ ב. $a=2$.

28) א. $k=10$ ב. $(1,9)$ ג. $81\frac{1}{3}$ יח"ש.

חישובי שטחים כאשר נתונה נגזרת הפונקציה:

שאלות:

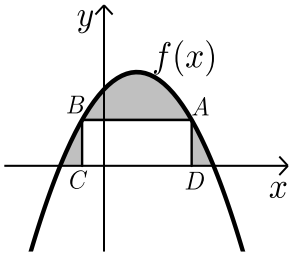
29) נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=3x^2-8x-12$.
הישר $y=5$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$
על ציר ה- y.



א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את השטח המוגבל בין הישר והפונקציה.

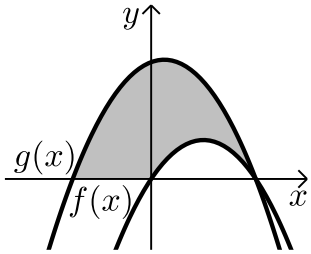
30) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ המתוארת באיור שלפניך היא: $f'(x)=3-2x$.
ישר AB שמשוואתו: $y=6$ חותך את גרף
הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו-B.
מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- x
כך שנוצר מלבן ABCD.
ידוע ששיעור ה- x של הנקודה A הוא 4.



א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- x.

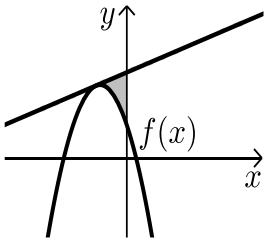
31) באיור שלפניך מתוארות הפונקציות שנגזרותיהן: $f'(x)=4-2x$, $g'(x)=-2x+1$.
ידוע ששתי הפונקציות חותכות את ציר ה- x כאשר: $x=4$.



א. מצא את הפונקציות.

ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות וציר ה- x (המסומן).

32) נתונה פונקציה $f(x)$.
משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x=-2$ היא: $y=x+13$.
הנגזרת של הפונקציה היא: $f'(x)=-4x-7$.



א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- y.

33) נתונה פונקציה $f(x)$ שנגזרתה היא: $f'(x)=3x^2-6x-9$.
ישר ששיפועו 15 משיק לפונקציה ברביע הרביעי בנקודה שבה: $y=-20$.

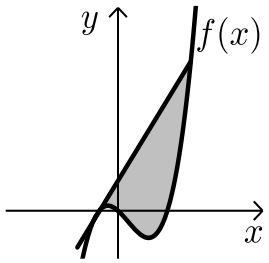
א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש עוד משיקים לגרף הפונקציה בעלי שיפוע 15?
אם כן- מצא אותם.

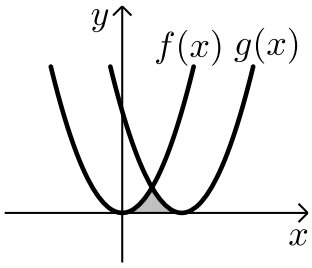
ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הראה כי הנקודה שבה $x=7$ משותפת למשיק שמצאת בסעיף הקודם ולפונקציה $f(x)$.

ii. מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והמשיק שמצאת בסעיף הקודם (ראה איור).



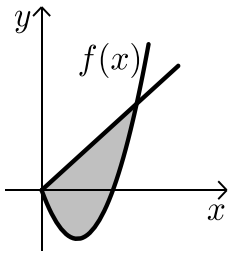
34) באיור שלפניך חותך גרף הפונקציה: $f(x)=x^2$
את גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x=2$.
הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ היא: $g'(x)=2x-8$.



א. מצא את הפונקציה $g(x)$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה-x (המסומן).

35) באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y=2x$.
נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=2x-6$
וידוע כי הישר חותך את הפונקציה בנקודה שבה ערך ה-y הוא 16.



א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן מצא אותן.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.

תשובות סופיות:

29) א. $f(x)=x^3-4x^2-12x+5$ ב. $189\frac{1}{3}$ יח"ש.

30) א. $f(x)=-x^2+3x+10$ ב. $27\frac{1}{6}$ יח"ש.

31) א. $f(x)=4x-x^2$, $g(x)=-x^2+x+12$ ב. 46.5 יח"ש.

32) א. $f(x)=-2x^2-7x+5$ ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.

33) א. $f(x)=x^3-3x^2-9x$ ב. $y=15x+28$

ג. i. $(7,133)$ ג. ii. 546.75 יח"ש.

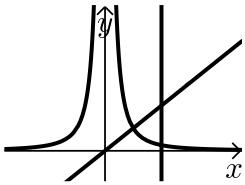
34) א. $g(x)=(x-4)^2$ ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.

35) א. $f(x)=x^2-6x$ ב. $(0,0)$ ג. $85\frac{1}{3}$ יח"ש.

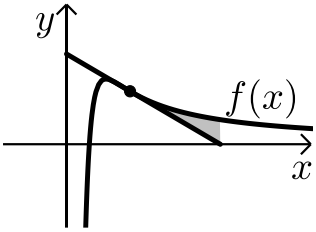
חישובי שטחים עם פונקציה רציונאלית:

שאלות:

1) נתונות שתי פונקציות: $g(x)=x$, $f(x)=\frac{1}{x^2}$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,
הישר $x=2$ וציר ה-x .



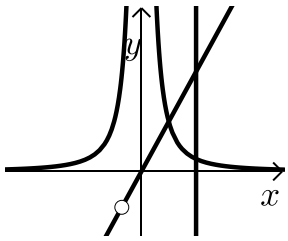
2) ענה על הסעיפים הבאים:



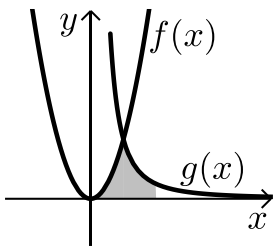
א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}$
מצא את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה
והמשיק שמצאת בסעיף א'.
חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,
המשיק ואנך לציר ה-x היוצא מנקודת החיתוך
של המשיק עם ציר ה-x .

3) נתונות שתי פונקציות: $g(x)=\frac{x^2+2x}{x+2}$, $f(x)=\frac{1}{x^2}$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,
הישר $x=2$ וציר ה-x .



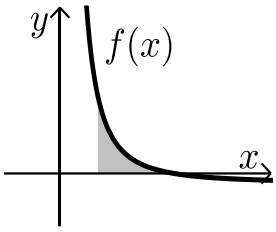
4) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=2x^2$ ו- $g(x)=\frac{a}{x^2}$
(a קבוע) בתחום: $x>0$.
ידוע כי הגרפים נחתכים ברביע הראשון בנקודה
הנמצאת על הישר: $y=4x$.



א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים ואת a .

ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה-x
והישר: $x=4$.

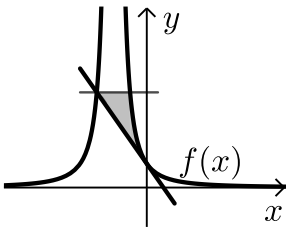
5) גרף הפונקציה: $f(x)=\frac{a-x^2}{x^2}$ (a קבוע) חותך את ציר ה-x בנקודה $(6,0)$.



א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.

ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה-x והישר: $x=2$.

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{A}{(2x+A)^2}$ (A פרמטר חיובי).



ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-y הוא: $-\frac{1}{9}$.

א. מצא את ערך הפרמטר A.

ב. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך עם ציר ה-y.

ג. הראה כי המשיק חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=-4.5$.

ד. העבר ישר אופקי מנקודת החיתוך של המשיק וגרף הפונקציה מהסעיף הקודם. מצא את נקודת החיתוך הנוספת של ישר זה עם גרף הפונקציה.

ה. חשב את השטח כלוא בין המשיק, הישר וגרף הפונקציה (היעזר באיור).

תשובות סופיות:

1) 1 יח"ש.

2) א. $y=-x+2$ ב. $\frac{1}{8}$ יח"ש.

3) 1 יח"ש.

4) א. $a=32$, $(2,8)$ ב. $13\frac{1}{3}$ יח"ש.

5) א. $a=36$, $f(x)=\frac{36-x^2}{x^2}$ ב. 8 יח"ש.

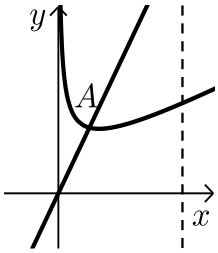
6) א. $A=6$ ב. $y=-\frac{1}{9}x+\frac{1}{6}$ ג. הוכחה.

ד. $\left(-1.5,\frac{2}{3}\right)$ ה. $\frac{5}{8}$ יח"ש.

חישובי שטחים עם פונקצית שורש:

שאלות:

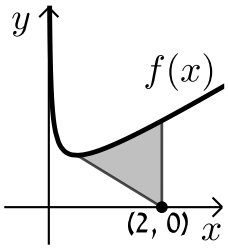
1) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}+x$.
מעבירים ישר: $y=4x$ החותך את גרף הפונקציה בנקודה A המסומנת באיור.



א. מצא את שיעורי הנקודה A.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, הישר $y=4x$, ציר ה-x ואנך לציר ה-x: $x=4$.

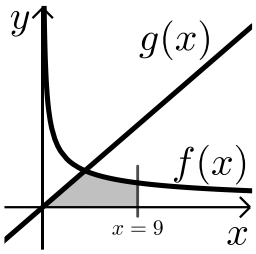
2) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x}}+x$.



א. מצא את נקודת המינימום שלה.

ב. מנקודת המינימום של הפונקציה מעבירים ישר לנקודה $(2,0)$ שעל ציר ה-x.
מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר ואנך לציר ה-x היוצא מהנקודה $(2,0)$ עד לנקודת החיתוך עם גרף הפונקציה.

3) באיור הבא מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=\frac{16}{\sqrt{x}}$ ו-$g(x)=2x$.

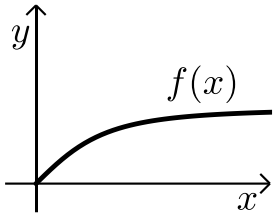


א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.

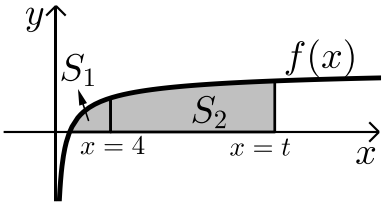
ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה-x והישר $x=9$.

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=(x-6)\sqrt{x}$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודת המינימום שלה וציר ה-y.

5) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ברביע הראשון.
לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,
המשיק והישר $x=\sqrt{3}$.



6) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x}}$.
מעבירים שני אנכים לציר ה-x והם: $x=4$
ו-$x=t$ $(t>4)$. נסמן:
S_1 - השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה-x.
S_2 - השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה-x והאנכים.
ידוע כי: $8S_1=S_2$. מצא את t.



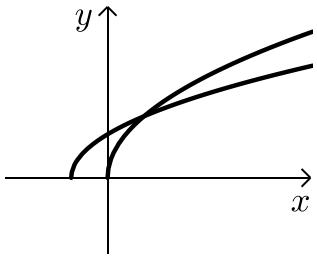
7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:
i. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ii. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.
iii. הראה כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

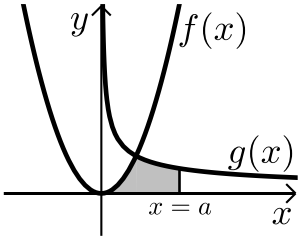
ב. מעבירים משיק לגרף הפונקציה ששיפועו הוא: $m=\frac{17}{16}$. מצא את נקודת ההשקה.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה-x ואנך לציר ה-x מנקודת ההשקה שמצאת בסעיף הקודם.

8) נתונות שתי פונקציות: $g(x)=\sqrt{2x}$, $f(x)=\sqrt{x+b}$ $(b>0)$
גודל השטח הכלוא בין הפונקציות וציר ה-x הוא $2\frac{2}{3}$ יח"ש.
מצא את ערכו של הפרמטר b.



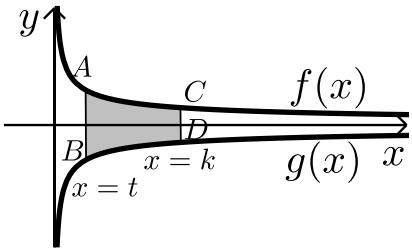
9) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=x^2$
ו- $g(x)=\frac{32}{\sqrt{x}}$ ברביע הראשון.
מעבירים ישר $x=a$ החותך את גרף הפונקציה $g(x)$
ויוצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר.
ידוע כי שטח זה שווה ל- $S=85\frac{1}{3}$.
מצא את a.



10) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x)=-\frac{3}{\sqrt{x}}$.
מעבירים שני ישרים: $x=k$ ו- $x=t$ אשר חותכים את הגרפים
של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.
ידוע כי: 2CD=AB.

א. הראה כי: $k=4t$.

ב. השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות
והישרים: $x=k$ ו- $x=t$ הוא: $S=12$.
מצא את t.



11) ענה על הסעיפים הבאים:

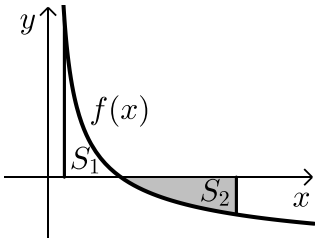
א. מצא עבור איזה ערך של a, $(a>1)$ יתקיים: $\int_1^a\left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}}-1\right)dx=0$.

ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=\frac{3}{\sqrt{2x-1}}-1$.
מעבירים שני אנכים לציר ה- x והם: $x=1$ ו- $x=13$
כך שנוצרים השטחים S_1 ו- S_2.
מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,
ציר ה- x והאנך $x=1$, (S_1).

ii. היעזר בתוצאה שקיבלת ובסעיף א' וקבע לכמה שווה השטח S_2.
נמק את טענתך.

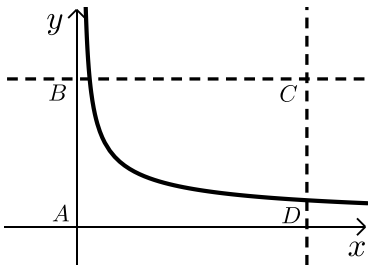


12) באיור שלפניך מתוארת הפונקציה: $f(x)=\frac{9}{\sqrt{2x-1}}$

מעבירים את הישרים המקבילים לצירים: $x=13$

ו- $y=3$ כך שנוצר המלבן ABCD כמתואר באיור.

הישר $y=3$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה M.



א. מצא את שיעורי הנקודה M.

ב. מסמנים את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והישרים ב- S_1 ואת שטח המלבן ב- S_2.

הראה כי: $\frac{S_1}{S_2}=\frac{2}{13}$.

תשובות סופיות:

1) א. $A(1,4)$ ב. 15.5 יח"ש.

2) א. $\min(0.5,1.5)$ ב. 1.75 יח"ש.

3) א. $(4,8)$ ב. 48 יח"ש.

4) 2.26 יח"ש.

5) 0.5 יח"ש

6) $t=16$.

7) א. i. $x>0$ ii. $(4,0)$ iii. $f'(x)=1+\frac{4}{x\sqrt{x}}>0$

ב. $(16,14)$ ג. 88 יח"ש.

8) $b=2$.

9) $a=9$.

10) א. הוכחה ב. $t=1$.

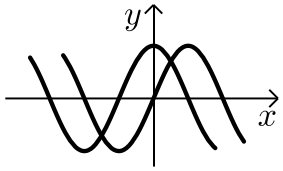
11) א. $a=13$ ב. $(5,0)$ ג. i. $S_1=2$ ii. $S_2=|-S_1|=2$.

12) א. $M(5,3)$.

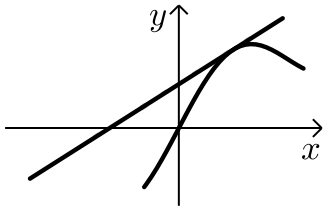
חישובי שטחים עם פונקציות טריגונומטריות:

שאלות:

1) נתונות הפונקציות: $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות לציר ה- y ברביע הראשון.



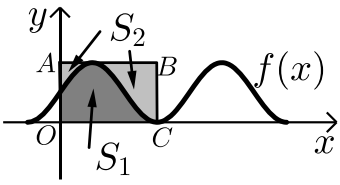
2) נתונה הפונקציה: $f(x)=x+2\sin x$.
בתחום שבין ראשית הצירים לנקודת המקסימום הראשונה מימינה העבירו לפונקציה משיק ששיפועו 1.



א. מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x ברביעים הראשון והשני.

3) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=\frac{\sin 2x+1}{2}$
בתחום: $-0.25\pi \le x \le 1.75\pi$ מעבירים משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה ומעלים אנך לציר ה- x מנקודת החיתוך הראשונה של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון המסומנת ב-C כך שנוצר המלבן ABCO.
השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים יסומן ב- S_1 (ראה סימון בציור).
השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה- y יסומן ב- S_2 .



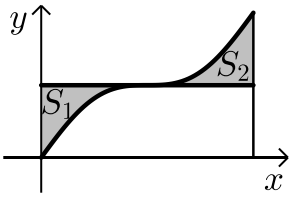
א. מצא את משוואת הצלע AB של המלבן.

ב. חשב את היחס: $\frac{S_1}{S_2}$.

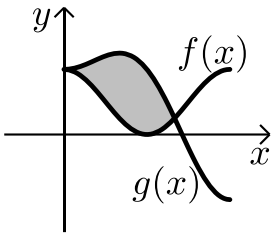
4) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $y=\sin x+x$ בתחום: $0\le x\le 2\pi$.

א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות בתחום הנתון?

ב. מורידים אנך מגרף הפונקציה לציר ה- x בנקודה שבה: $x=2\pi$.
מעבירים ישר המקביל לציר ה- x מהנקודה שמאפסת את הנגזרת.
הראה כי השטחים S_1 ו- S_2 המסומנים בסרטוט שווים.

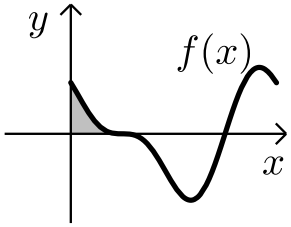


5) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה
הבאות: $f(x)=\cos^2 x$ ו- $g(x)=\sin^2 x+\cos x$
בתחום: $0\le x\le \pi$.



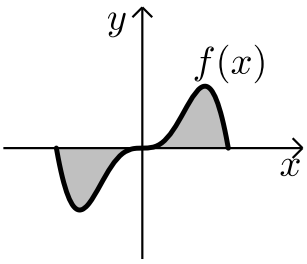
א. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.
ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים.
השתמש בזהות: $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

6) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=-\cos 2x-\sin x$.



א. מצא את שיעורי ה-x של הנקודות
המקיימות: $f'(x)=0$ בתחום: $0<x<2\pi$.
ידוע כי הנקודה המקיימת $f'(x)=0$ אשר אינה
קיצון נמצאת על ציר ה-x.
ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.
ג. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה בתחום הנתון.
חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.

7) ענה על הסעיפים הבאים:



א. נתונה הפונקציה: $y=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x$
הוכח כי הנגזרת של הפונקציה היא: $y'=x^2\sin x$
באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2\sin x$
בתחום: $-\pi\le x\le \pi$.
ב. הראה כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.
ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה
וציר ה-x בתחום הנתון.

8) נתונה הפונקציה: $f(x)=a\cos x+b\sin x$, a,b פרמטרים.
הפונקציה חותכת את ציר ה-x בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{4}$ והיא חיובית בתחום $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.
גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה בתחום $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ הוא $2\sqrt{2}-2$.
מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b.

תשובות סופיות:

1) 0.41 יח"ש.

2) א. $y=x+2$ ב. π יח"ש.

3) א. $y=1$ ב. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi+2}{3\pi-2}=1.538$.

4) א. אין נקודת קיצון, הנקודה (π,π) היא נקודת פיתול.

ב. $S=0.5\pi^2-2=2.934$.

5) א. $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{1}{4}\right)$, $(0,1)$ ב. $S=1.5\frac{\sqrt{3}}{2}=1.299$.

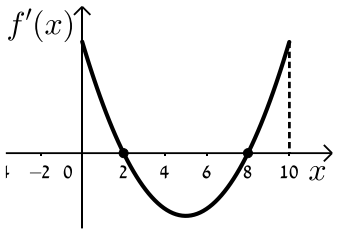
6) א. $x=\frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$ ב. $f(x)=-\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x$ ג. $\frac{1}{2}$ יח"ש.

7) א. הוכחה ב. הוכחה ג. $S=2(\pi^2-4)\approx 11.74$.

8) $a=2$, $b=-2$.

חישובי שטחים בין גרף הנגזרת והצירים:

שאלות:



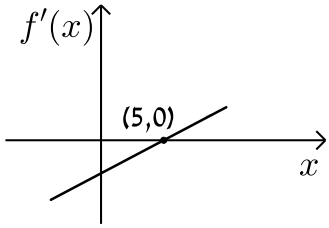
1) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0 \le x \le 10$.

בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.

א. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$

אם: $f(2)=6$, $f(0)=-4$, $f(5)=0$ וכן: $f(10)>0$.

ב. חשב את השטח המוגבל ע"י **<u>גרף הנגזרת</u>** **<u>והצירים</u>** ברביע הראשון עד לנקודה שבה $x=2$.



2) לפניך הגרף של הפונקציה $f'(x)$.

הגרף המתואר חותך את ציר ה-x בנקודה אחת בלבד והיא $(5,0)$.

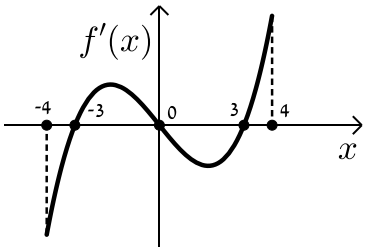
א. מצא את התחומים שבהם $f'(x)$ היא חיובית ואת התחומים שבהם היא שלילית.

ב. קבע מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ג. כתוב את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ אם ידוע כי שיעור ה-y שלה הוא 2-.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה-y כאשר $y=8$.

ה. חשב את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים.



3) בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$.

א. רשום את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

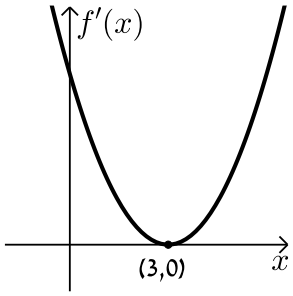
ב. מצא את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של $f(x)$ וקבע את סוגן.

ג. נתון כי הפונקציה $f(x)$ עוברת בראשית הצירים וגם מקיימת: $f(-3)=f(3)=m$.

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנ"ל (הבע באמצעות m).

ד. השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ וציר ה-x ברביעים השני והרביעי הוא 16 יח"ש. מצא את m.

4) הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$ מתוארת באיור הבא.

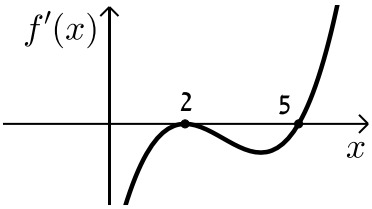


א. האם ל-$f(x)$ יש נקודות קיצון? נמק.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$
אם ידוע כי $f(3)=4$ וכי היא חותכת את ציר ה-y בנקודה שבה $y=-5$.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים ברביע הראשון.

5) באיור שלפניך מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$.



ידוע כי הנקודות $A(5,-4.75)$, $B(2,2)$
ו-$C(0,14)$ נמצאות על $f(x)$.

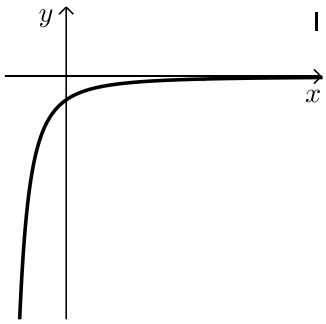
א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$.

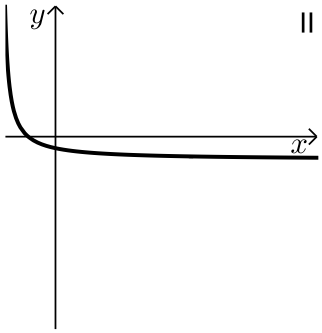
ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. חשב את השטח מוגבל בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים בתחום $0\le x\le 5$.

6) באיורים שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$f'(x)$:

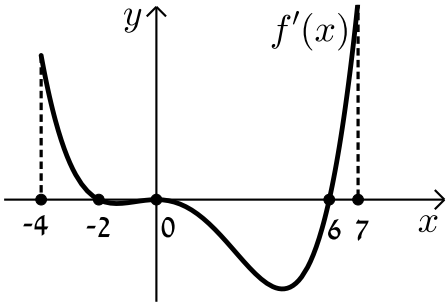




א. זהה איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמק.

ב. נתון כי $f(10)=-3$ וכי $f(x)$ חותכת את ציר ה-y בנקודה שבה $y=-2$.
מהו השטח המוגבל בין גרף הנגזרת $f'(x)$, הצירים והישר $x=10$?

7) נתון גרף הנגזרת $f'(x)$ הבא:

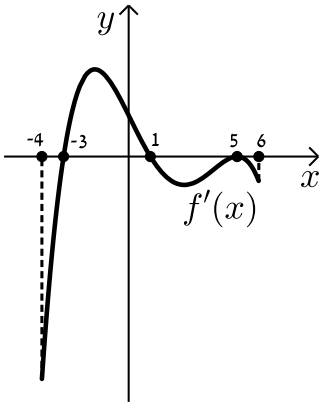


א. סרטט את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \le x \le 7$ לפי הנתונים: $f(0)=-2$, $f(-2)=7.6$ ו- $f(6)=-606.8$.

ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- x ברביע השלישי.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- x ברביע הרביעי.

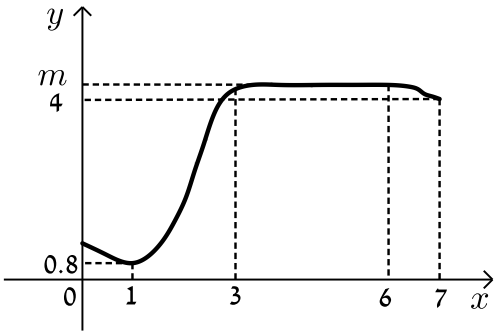
8) נתון גרף הנגזרת $f'(x)$ הבא:



א. סרטט את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \le x \le 6$ עבור הנתונים: $f(5)=-83\frac{1}{3}$, $f(1)=36\frac{2}{15}$, $f(-3)=-356\frac{2}{5}$.

ב. חשב את כלל השטח הכלוא בין גרף הנגזרת וציר ה- x בתחום: $-3 \le x \le 5$.

9) בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $0<x<7$:



הסתמך על הגרף של $f(x)$ ועל הערכים הרשומים על הצירים וענה על השאלות הבאות:

א. מצא עבור אילו ערכים של x השונים מ-6 מתקיים:

i. $f'(x)>0$

ii. $f'(x)=0$

iii. $f'(x)<0$

ב. נתון כי: $\int_3^6 m\,dx=15$, כאשר m הוא פרמטר המסומן על ציר ה-y.

מצא את $f(5)$.

ג. סרטט סקיצה של גרף פונקצית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $0<x<3$.

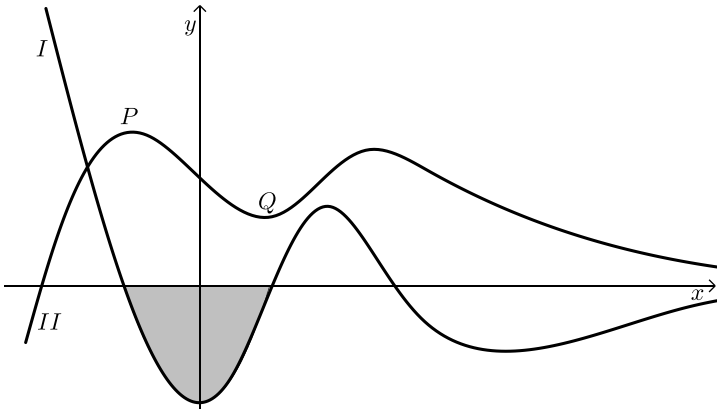
ד. מצא את השטח המוגבל בין הגרף של פונקצית הנגזרת $f'(x)$ וציר ה-x בתחום $1<x<3$.

10) בסרטוט נתונים הגרפים של פונקציה ושל נגזרתה.

א. קבע איזה מהגרפים, I או II, שייך לפונקציה ואיזה שייך לנגזרת. נמק.

ב. כמה נקודות פיתול יש לפונקציה? נמק וסמן אותן על הסרטוט.

ג. נתון: $P(-2,4)$, $Q(2,1)$. מצא את גודלו של השטח הכלוא בין גרף I לציר ה-x (השטח המסומן בסרטוט).



תשובות סופיות:

הערה: סרטוטי הסקיצות מופיעות במרוכז בעמוד הבא.

1) ב. 10 יח"ש.

2) א. חיובית: $x>5$, שלילית: $x<5$. ב. עולה: $x>5$, יורדת: $x<5$

ג. $\min(5,-2)$ ד. הוכחה. ה. 10 יח"ש.

3) א. עולה: $3<x\le 4$, $-3<x<0$, יורדת: $0<x<3$, $-4\le x<-3$

ב. $x_{\min}=3$, $x_{\max}=0$, $x_{\min}=-3$. ג. הוכחה. ד. $m=-8$

4) א. לא. הנקודה $(3,0)$ היא פיתול מכיוון שהפונקציה עולה לפניה ואחריה.

ב. הוכחה. ג. 9 יח"ש.

5) א. $\min(5,-4.75)$. ב. עולה: $x>5$, יורדת: $x<5$.

ג. הוכחה. ד. 18.75 יח"ש.

6) א. $f'(x):\mathrm{I}$, $f(x):\mathrm{II}$ ב. 1 יח"ש.

7) א. הוכחה. ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.

8) א. הוכחה. ב. 512 יח"ש.

9) א. i. $f'(x)>0:1<x<3$ א. ii. $f'(x)=0:\ x=1\ ,\ 3\le x<6$

א. iii. $f'(x)<0:\ 6<x<7\ ,\ 0<x<1$

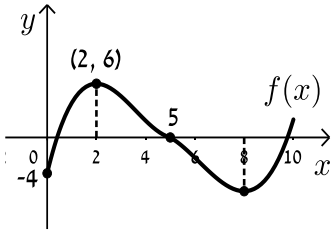
ב. $f(5)=5\ ,\ m=5$ ד. 4.2 יח"ש.

10) א. גרף I - $f'(x)$ וגרף II - $f(x)$. ב. 3 נקודות פיתול.

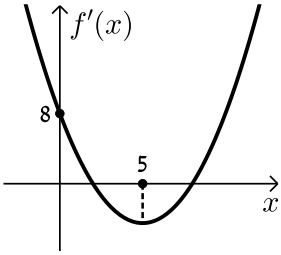
ג. 3 יח"ש.

סרטוטי גרפים לפי מספרי שאלות:

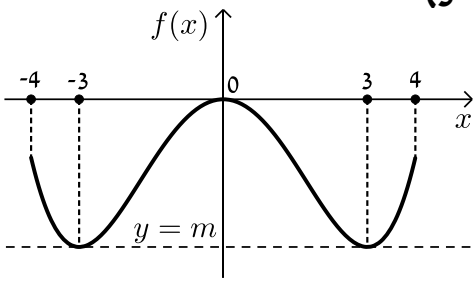
(1



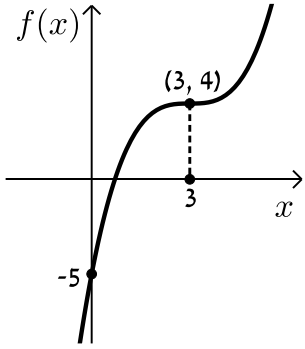
(2



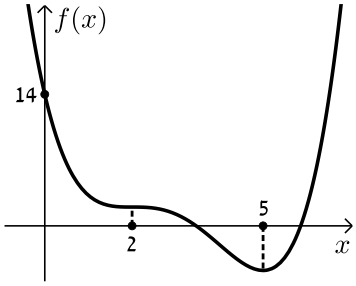
(3



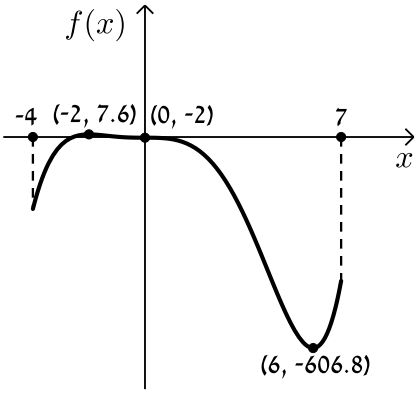
(4



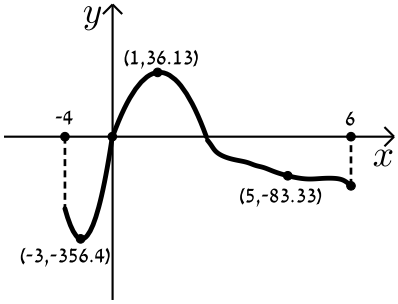
(5



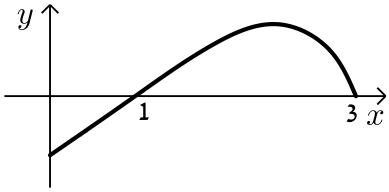
(7



(8



(9



מתמטיקה 1

פרק 18 - חשבון אינטגרלי - פונקציה מעריכית, לוגריתמית וחזקה

תוכן העניינים

1. פונקציה מעריכית 263
2. פונקציה לוגריתמית 269
3. פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי 275

פונקציה מעריכית:

סיכום כללי:

אינטגרלים מיידים של פונקציות מעריכיות:

אינטגרלים של פונקציות מורכבות	אינטגרלים יסודיים
$\int a^{mx+n}dx=\frac{a^{mx+n}}{m\cdot\ln a}+c$	$\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+c$
$\int e^{mx+n}dx=\frac{e^{mx+n}}{m}+c$	$\int e^{x}dx=e^{x}+c$

שאלות:

אינטגרל כללי:

1) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\left(5e^{x}-e^{3x}+e^{-x}+1\right)dx$

ב. $\int\left(3^{x}+5^{2x}\right)dx$

ג. $\int\left(6\sqrt{e^{4x-1}}\right)dx$

ד. $\int\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}dx$

2) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\frac{e^{2x}-1}{e^{x}-1}dx$

ב. $\int\frac{3e^{3x}-5e^{2x}+4e^{x}-2}{e^{x}-1}dx$

3) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\left(e^{4x}+e^{-x}\right)dx$

ב. $\int\left(e^{x+1}\right)^{2}dx$

ג. $\int\frac{2^{x}+4^{2x}+10^{3x}}{5^{x}}dx$

ד. $\int\left(4\sqrt{e^{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}}\right)dx$

4) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\left(\frac{e^x}{\sqrt{e^x+3}}\right)dx$ ב. $\int\left(\frac{3-e^x}{\left(e^x-3x\right)^2}\right)dx$ ג. $\int\left(xe^{x^2}\right)dx$

אינטגרל מסוים:

5) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=2e^x-\frac{1}{e^x}$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $\left(\ln 2,3\frac{1}{4}\right)$.

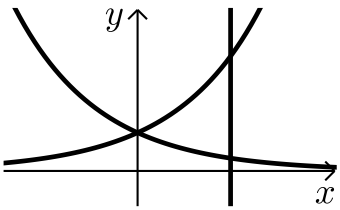
6) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=e^{2x}+e^x-2$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שערך הפונקציה בנקודת המינימום שלה הוא $\frac{1}{2}$.

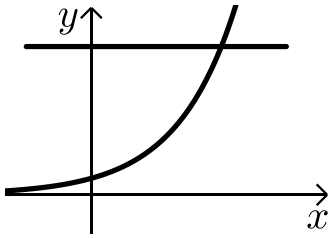
7) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=6x^2e^{x^3}-\frac{1}{x^2}$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $\left(-1,\frac{2}{e}\right)$.

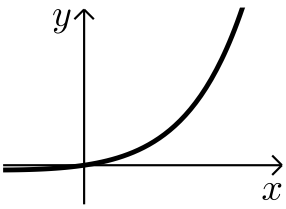
חישובי שטחים:



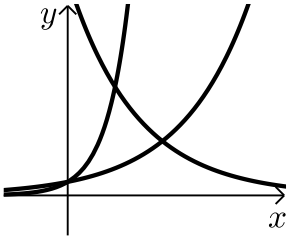
8) נתונות הפונקציות: $f(x)=e^x$, $g(x)=e^{-x}$.
מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות
לישר $x=\ln 3$.



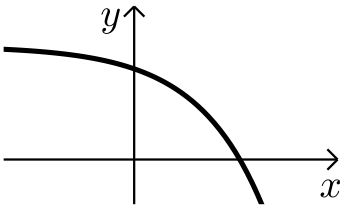
9) נתונה הפונקציה: $f(x)=3^x$.
מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,
הישר $y=9$ וציר ה- y.



10) נתונה הפונקציה: $f(x)=e^{2x}-e^{x}$.
לפונקציה העבירו משיק בראשית הצירים.
מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,
המשיק והישר $x=2$.



11) נתונות הפונקציות:
$f(x)=e^{x}$, $g(x)=e^{3x}$, $h(x)=16e^{-x}$.
חשב את גודל השטח הכלוא שבין שלוש הפונקציות.

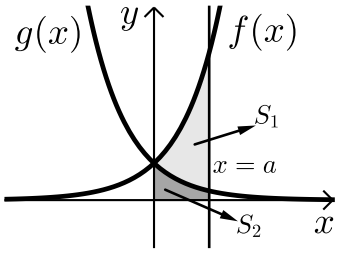


12) נתונה הפונקציה: $f(x)=5-e^{x}$.
העבירו לפונקציה משיק ששיפועו $-e$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין
הפונקציה, המשיק וציר ה- x.
ניתן להשאיר e ו-ln בתשובה.

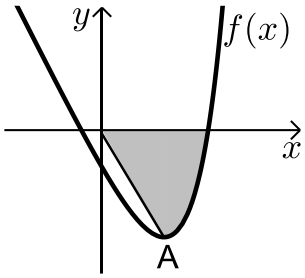
13) נתונה הפונקציה: $f(x)=e^{bx}$, $(0<b)$.
גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר
בראשית הצירים וציר ה- y הוא $\frac{e-2}{4}$.
מצא את ערכו של הפרמטר b.

14) נתונות הפונקציות: $g(x)=e^{-x}$, $f(x)=e^{\frac{1}{2}x}$.
מנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ ברביע הראשון הורידו אנך לשני
הצירים. המשך האנך לציר ה- y חותך את הפונקציה $f(x)$ ומנקודת החיתוך
יורד אנך נוסף לציר ה- x כך שנוצר מלבן.
הוכח כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא $\frac{3}{e}$.

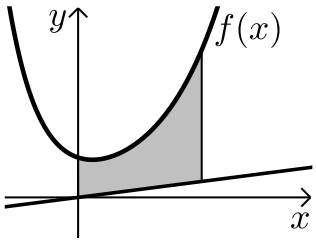
15) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=e^{2x}$ ו- $g(x)=e^{-2x}$.
מעבירים אנך לציר ה- x את הישר $x=a$, $a>0$ כמתואר באיור.
אנך זה יוצר את השטחים S_1 ו- S_2.
ידוע כי השטח S_1 גדול פי 3 מהשטח S_2.
מצא את a.



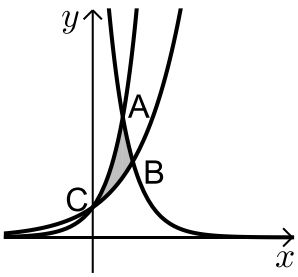
16) נתונה הפונקציה: $f(x)=e^{2x-1}-2ex-2$.
הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה.
א. מצא את שיעורי הנקודה A.
מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים.
ב. כתוב את משוואת הישר המחבר את הנקודה A עם הראשית.
ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x, אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x=1.7$.



17) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{e^x+e^{ax}}{4}$.
ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה: $\left(1,\frac{e^3+1}{4e^2}\right)$.
א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.
ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והישר: $y=0.1x$.
חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר y והאנך: $x=2$.



18) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של שלוש פונקציות:
I. $f(x)=2^x$ II. $g(x)=4^x$ II. $h(x)=2^{4-2x}$
א. קבע איזה גרף מתאר כל פונקציה.
ב. מצא את שיעורי הנקודות A , B ו-C (נקודות החיתוך שבין הגרפים).
ג. חשב את השטח המסומן באיור.



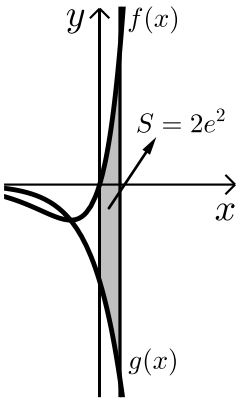
19) ענה על הסעיפים הבאים:

א. גזור את הפונקציה הבאה: $y=e^x(x-1)$.

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $g(x)=-e^x$, $f(x)=xe^x$.

מעבירים ישר $x=a$, $(a>0)$ החותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח המתואר הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- y והישר.

ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$. מצא את a.

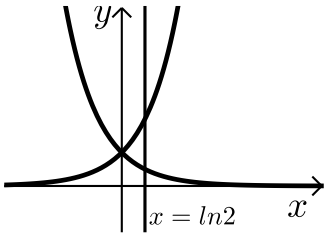


חישובי נפחים:

20) נתונות הפונקציות: $g(x)=e^{-x}$, $f(x)=e^x$.

השטח הכלוא בין הפונקציות והישר: $x=\ln 2$ מסתובב סביב ציר ה- x.

חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.



תשובות סופיות:

1) א. $5e^x-\frac{e^{3x}}{3}-e^{-x}+x+c$ ב. $\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{5^{2x}}{2\ln 5}+c$

ג. $3e^{2x-\frac{1}{2}}+c$ ד. $\frac{1}{2}e^{2x}+2x-\frac{1}{2}e^{-2x}+c$

2) א. e^x+x+c ב. $\frac{3e^{2x}}{2}-2e^x+2x+c$

3) א. $\frac{1}{4}e^{4x}-e^{-x}+c$ ב. $\frac{1}{2}e^{2x+2}+c$

ג. $\frac{0.4^x}{\ln 0.4}+\frac{3.2^x}{\ln 3.2}+\frac{200^x}{\ln 200}+c$ ד. $8\sqrt{e^x}-\frac{3}{4}e^{\frac{-4x}{3}}+c$

4) א. $2\sqrt{e^x+3}+c$ ב. $\frac{1}{e^x-3x}+c$ ג. $\frac{1}{2}e^{x^2}+c$

5) $f(x)=2e^x+e^{-x}-1.25$

6) $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+e^x-2x-1$

7) $f(x)=2e^{x^3}+\frac{1}{x}+1$

8) $S=$ יח"ש $1\frac{1}{3}$

9) $S=$ יח"ש 10.72

10) $S=$ יח"ש 18.41

11) $S=$ יח"ש $3\frac{1}{3}$

12) $S=$ יח"ש 0.192

13) $b=2$

15) $a=\ln 2$

16) א. $A(1,-e-2)$ ב. $y=-(e+2)x$ ג. $S=$ יח"ש 4.744

17) א. $a=-2$, $f(x)=\frac{e^x+e^{-2x}}{4}$ ב. 1.52

18) ב. $C(0,1)$, $A(1,4)$, $B\left(1\frac{1}{3},2.52\right)$ ג. $S=$ יח"ש 1.03

19) א. $y'=xe^x$ ב. $a=2$

20) $1\frac{1}{8}\pi$ יח"נ.

פונקציה לוגריתמית:

סיכום כללי:

אינטגרלים מיידים של פונקציות לוגריתמיות:

אינטגרל של פונקציה מורכבת	אינטגרל יסודי
$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + c$	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + c$

שאלות:

אינטגרל כללי:

1) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x+1}-\frac{4}{3x-1}\right)dx$ ב. $\int \frac{x^2+3x-4}{x}dx$ ג. $\int \frac{x+3}{x^2-9}dx$

2) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \frac{x^2+3x+5}{x+1}dx$ ב. $\int \frac{x^3-x^2+5x-6}{x-2}dx$ ג. $\int \frac{x^4+3}{x+1}dx$

3) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \frac{2x}{x^2-3}dx$ ב. $\int \frac{x-1}{x^2-2x}dx$ ג. $\int \frac{e^x}{e^x+5}dx$

ד. $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$ ה. $\int \frac{\cos x}{\sin x}dx$

אינטגרל מסוים:

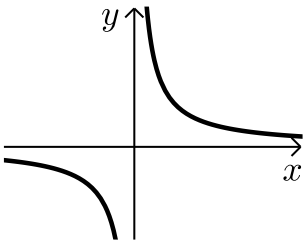
4) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=2x-\frac{1}{x-4}$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(5,28)$.

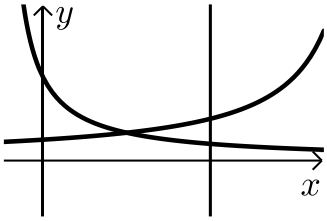
5) נתונה נגזרת שנייה של פונקציה: $f''(x)=6x-\frac{1}{x^2}$. מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(1,-2)$ וששיפועה בנקודה זו הוא 3.

חישובי שטחים:

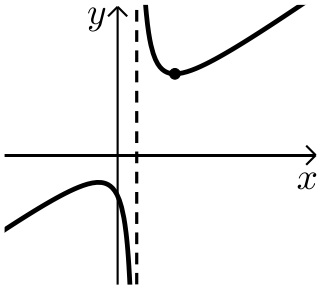
6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{x}$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x=-1$ ו-$x=-4$ וציר ה-x.
ניתן להשאיר ln בתשובה.



7) נתונות הפונקציות: $f(x)=\frac{4}{8-x}$, $f(x)=\frac{2}{x+1}$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות, הישר $x=4$ והצירים.



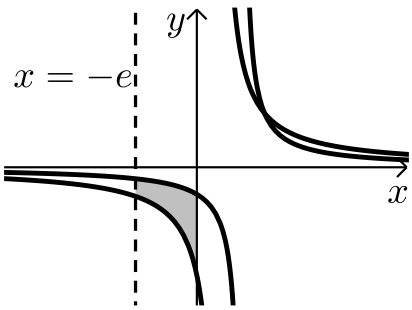
8) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=2$ ואנך לציר ה-x העובר בנקודת המינימום של הפונקציה.
אפשר להשאיר ביטוי עם ln בתשובה.



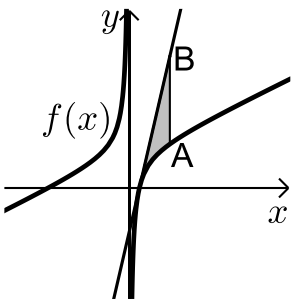
9) באיור שלפניך נתונות הפונקציות: $f(x)=\frac{a}{x-1}$
ו-$g(x)=\frac{a-1}{x-2}$ בתחום: $x<0$.
ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x=3$.

א. מצא את a וכתוב את שתי הפונקציות.

ב. חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה-y והישר $x=-e$



10) נתונה הפונקציה: $f(x)=7+ax+\frac{b}{x}$.



ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-x היא: $y=18x-9$.

א. מצא את a ו-b וכתוב את הפונקציה.

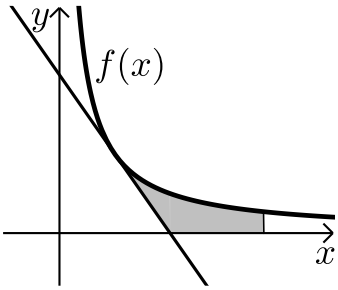
מעבירים ישר המקביל לציר ה-y שחותך את גרף הפונקציה בנקודה A ואת משוואת המשיק בנקודה B.

אורך הקטע AB הוא 18.

ב. מצא את משוואת הישר הנ"ל אם ידוע כי הנקודה A נמצאת מימין לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.

11) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$.



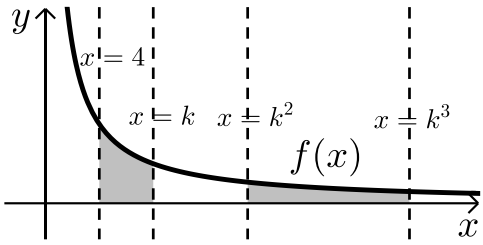
משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=2$ היא: $y=4-x$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק בתחום: $x>0$.

חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה-x והישר $x=e^2$.

12) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2}{x}$



בתחום: $x>0$. מעבירים את הישרים:

$x=4$, $x=k$, $x=k^2$, $x=k^3$

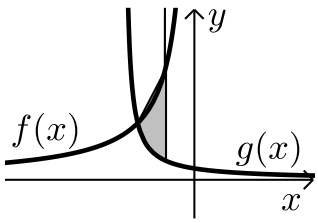
כמתואר $x>4$.

א. הבע באמצעות k את השטחים: S_1 ו-S_2.

ב. הראה כי ההפרש: S_2-S_1 אינו תלוי ב-k וחשב את ערכו.

ג. נתון כי השטח S_2 גדול פי 3 מהשטח S_1. מצא את k.

13) נתונות הפונקציות: $f(x)=-\frac{4}{x}$ ו- $g(x)=\frac{k}{2x+5}$.



גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y=0.4$.

א. מצא את הפונקציה $g(x)$.

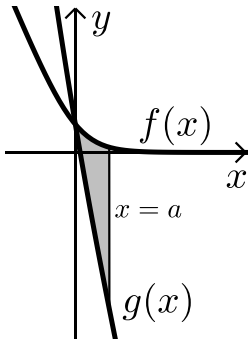
ב. מצא את נקודת החיתוך של שני הגרפים.

ג. חשב את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר $x=-1$.

14) באיור מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$f(x)=\ln\left(e^{-x}+1\right)$ ו- $g(x)=\ln\left(e^{-2x}+e^{-3x}\right)$

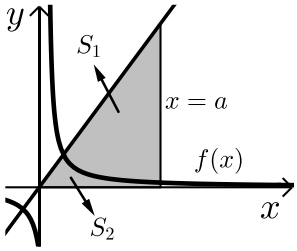
בתחום: $(x\ge 0)$.



א. הראה כי הגרפים נחתכים על ציר ה- y.

ב. מעבירים ישר $x=a$, $(a>1)$ המאונך לציר ה- x אשר חותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח S (ראה איור).
מצא את ערכו של a עבורו מתקיים: $S=4$.

15) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה: $f(x)=\frac{2}{3x-1}$ והישר: $y=x$.



א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציות הנמצאת ברביע הראשון.

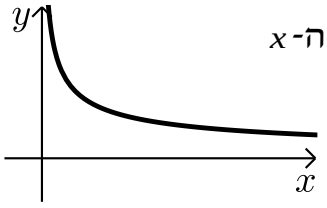
מעבירים אנך לציר ה- x - $x=a$ הנמצא מימין לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.
האנך החותך את הגרפים ויוצר את השטחים S_1 ו- S_2 המתוארים האיור.

ב. מצא את הערך של a עבורו השטח S_2 יהיה שווה ל- $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\ln 7$.

ג. עבור ערך ה- a שמצאת בסעיף הקודם חשב את יחס השטחים: $\frac{S_1}{S_2}$.

חישובי נפחים:

16) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$.



השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x=1$ ו-$x=3$ וציר ה-x מסתובב סביב ציר ה-x.
מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר באופן זה.
אפשר להשאיר ln בתשובה.

17) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}$.

השטח הכלוא בין הפונקציה, הצירים והישר $x=\ln\sqrt{3}$ מסתובב סביב ציר ה-x. חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

18) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}$.

השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x=a$ ו-$x=a+3$, $(a>0)$
וציר ה-x מסתובב סביב ציר ה-x.
חשב את נפח גוף הסיבוב המינימלי שנוצר באופן הזה.

תשובות סופיות:

1) א. $3\ln|x|+2\ln|x+1|-\frac{4\ln|3x-1|}{3}+c$ ב. $\frac{x^2}{2}+3x-4\ln|x|+c$ ג. $\ln|x-3|+c$

2) א. $\frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x+1|+c$ ב. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+7x+8\ln|x-2|+c$

ג. $\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+4\ln|x+1|+c$

3) א. $\ln|x^2-3|+c$ ב. $\frac{1}{2}\ln|x^2-2x|+c$ ג. $\ln|e^x+5|+c$

ד. $\ln|e^x+e^{-x}|+c$ ה. $\ln|\sin x|+c$

4) $f(x)=x^2-\ln|x-4|+3$

5) $f(x)=x^3+\ln|x|-x-2$

6) $S=$ יח"ש $\ln 4$

7) $S=$ יח"ש 2.17

8) $S=$ יח"ש $4\ln 2-2$

9) א. $a=2$, $g(x)=\frac{1}{x-2}$, $f(x)=\frac{2}{x-1}$ ב. $S=$ יח"ש 1.76

10) א. $b=-4$, $a=2$, $f(x)=7+2x-\frac{4}{x}$ ב. $x=2$

ג. $S=6+\ln 256\approx$ יח"ש 11.54

11) א. $f(x)=\frac{4}{x}$ ב. $S=$ יח"ש $6-4\ln 2$

12) א. $S_2=2\ln k$, $S_1=2\ln k-\ln 16$ ב. $S_2-S_1=\ln 16$ ג. $k=8$

13) א. $g(x)=\frac{2}{2x+5}$ ב. $(-2,2)$ ג. $S=$ יח"ש $\ln 5\frac{1}{3}\approx 1.674$

14) ב. $a=2$

15) א. $(1,1)$ ב. $a=5$ ג. $\frac{S_1}{S_2}=5.955$

16) $V=$ יח"נ $\pi\ln 3$

17) $V=$ יח"נ $\frac{\pi}{2}\ln 2$

18) $V=$ יח"נ $\pi\left(19\frac{1}{2}+4\ln 4\right)$

פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי:

סיכום כללי:

אינטגרלים מיידים של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי:

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \sqrt[n]{x^m}\,dx = \int x^{\frac{m}{n}}\,dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + c$	$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m}\,dx = \int (ax+b)^{\frac{m}{n}}\,dx = \frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a\cdot\left(\frac{m}{n}+1\right)} + c$

תנאי לקיום האינטגרציה: $\frac{m}{n} \neq -1$.

שאלות:

אינטגרל של פונקצית חזקה:

1) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \sqrt[3]{x}\,dx$

ב. $\int \left(4x - 2\sqrt[4]{x}\right)dx$

ג. $\int \left(x\cdot\sqrt[5]{x}\right)dx$

ד. $\int \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

ה. $\int \frac{x+4}{\sqrt[4]{x}}\,dx$

ו. $\int \frac{x^3-3x+5}{\sqrt{x}}\,dx$

ז. $\int \sqrt[3]{2x-3}\,dx$

ח. $\int \sqrt[4]{5-x}\,dx$

ט. $\int \frac{3}{\sqrt[8]{7x+12}}\,dx$

י. $\int \frac{7}{\sqrt[5]{14-2x}}\,dx$

2) חשב את ערכי האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^8 \left(x+\sqrt[5]{4x}\right)dx$

ב. $\int_3^{16} \left(\sqrt[4]{5x+1}\right)dx$

ג. $\int_{-10}^{5} \frac{2}{\sqrt[4]{6-x}}\,dx$

אינטגרל מסוים:

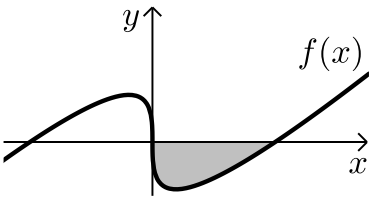
3) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=2x-\sqrt[3]{4x}$.
ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(2,3)$.
מצא את הפונקציה.

4) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=\sqrt[3]{5x+7}$.
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה-x בנקודה שבה $x=4$.
מצא את הפונקציה.

5) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=\frac{10}{\sqrt[5]{x+1}}+(x-1)^2$.
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה-y בנקודה שבה $y=-6$.
מצא את הפונקציה.

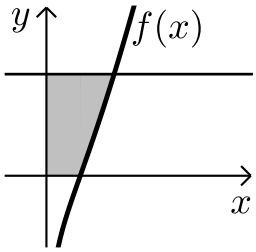
חישובי שטחים:

6) באיור שלפניך מופיע גרף הפונקציה: $f(x)=x-4\sqrt[3]{x}$.



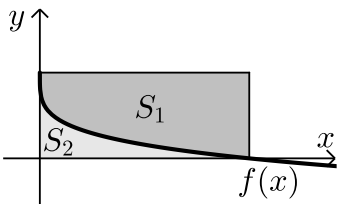
א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.
ב. חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.

7) באיור שלפניך מצויר גרף הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$.



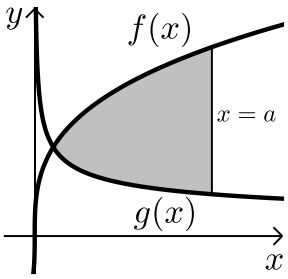
א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
ב. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.
ג. מעבירים אנך לציר ה-y מהנקודה $(4,6)$.
חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והצירים.

8) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=2-\sqrt[4]{x}$.
מעבירים אנכים לצירים מנקודות החיתוך של
גרף הפונקציה עם הצירים כך שנוצר מלבן.
מסמנים את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים:
ב- S_1 ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב- S_2.



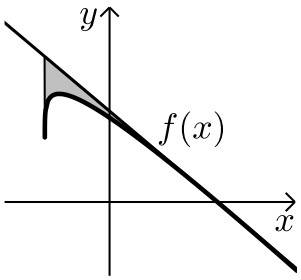
מצא את היחס: $\frac{S_1}{S_2}$.

9) באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות
הבאות: $f(x)=4\sqrt[3]{x}$, $g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.



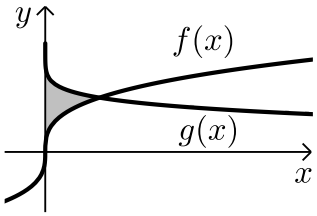
א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים בתחום: $x>0$.
ב. מעבירים אנך לציר ה- x , $x=a$, (a פרמטר).
ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים מנקודת
החיתוך שלהם ועד לאנך הוא: $42\frac{3}{16}$ סמ"ר.
מצא את a.

10) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt[4]{5x+6}-ax$, (a פרמטר).
ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x=2$.



א. מצא את הפרמטר a וכתוב את הפונקציה.
ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
ג. מצא את נקודת קיצון הקצה של הפונקציה.
ד. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר
דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x.
ה. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$
והמשיק שמצאת בסעיף הקודם. מורידים אנך
מהמשיק אל נקודת קיצון הקצה של הפונקציה שמצאת בסעיף ג'.
חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק.

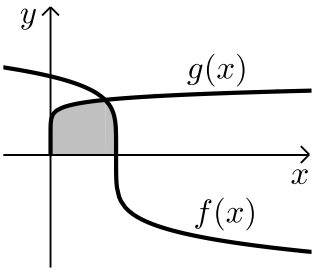
11) באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $g(x)=2-\sqrt[6]{x}$.



א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- y .

12) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$.

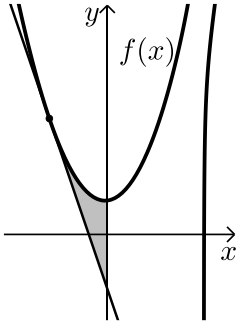


ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה: $x=1.2$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, גרף הפונקציה: $g(x)=\sqrt[10]{x}$ וציר ה- x .

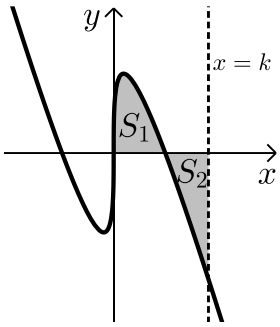
13) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{3}{\sqrt[3]{5-x}}+\frac{1}{2}x^2$.



א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-3$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, המשיק וציר ה- y .

14) נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt[3]{x}-4x$.



א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

ג. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה ברביע הראשון. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x יסומן ב- S_1 .
מעבירים ישר $x=k$ אשר יוצר את השטח S_2 כמתואר.
מצא את k אם ידוע כי: $S_1=S_2$.

תשובות סופיות:

1) א. $0.75\sqrt[3]{x^4}+c$ ב. $2x^2-1.6\sqrt[4]{x^5}+c$ ג. $\frac{5}{11}\sqrt[5]{x^{11}}+c$

ד. $4.5\sqrt[3]{x^2}+c$ ה. $\frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7}+\frac{16}{3}\sqrt[4]{x^3}+c$ ו. $\frac{2}{7}\sqrt{x^7}-2\sqrt{x^3}+10\sqrt{x}+c$

ז. $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(2x-3)^4}+c$ ח. $-0.8\sqrt[4]{(5-x)^5}+c$ ט. $\frac{24}{49}\sqrt[8]{(7x+12)^7}+c$

י. $-\frac{35}{8}\sqrt[5]{(14-2x)^4}+c$

2) א. $45\frac{1}{3}$ ב. 33.76 ג. $18\frac{2}{3}$

3) $f(x)=x^2-\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x)^4}+2$

4) $f(x)=\frac{3}{20}\sqrt[3]{(5x+7)^4}-12.15$

5) $f(x)=12.5\sqrt[5]{(x+1)^4}+\frac{1}{3}(x-1)^3-18\frac{1}{6}$

6) א. $(0,0)\ ;\ (8,0)$ ב. $S=$ 16 יח"ש

7) א. $x>0$ ב. $(2,0)$ ג. $S=$ 18.149 יח"ש

8) $\frac{S_1}{S_2}=4$

9) א. $\left(\frac{1}{8},2\right)$ ב. $a=8$

10) א. $a=1$, $f(x)=\sqrt[4]{5x+6}-x$ ב. $x\geq -1.2$ ג. $(-1.2,1.2)$

ד. $y=-\frac{27}{32}x+\frac{27}{16}$ ה. $S=$ 0.48 יח"ש

11) א. $(1,1)$ ב. $S=\frac{11}{28}$ יח"ש

12) א. $f(x)=(6-5x)^{\frac{1}{5}}$ ב. $S=1\frac{5}{66}$ יח"ש

13) א. $y=-2\frac{15}{16}x-\frac{45}{16}$ ב. $S=$ 4.56 יח"ש

14) א. כל x ב. $\left(-\frac{1}{8},0\right)$, $\left(\frac{1}{8},0\right)$, $(0,0)$ ג. $k=\left(\frac{3}{8}\right)^{1.5}=0.2296..$

מתמטיקה 1

פרק 19 - נושאים נוספים - שיחזור פונקציה מהנגזרת שלה

תוכן העניינים

1. כללי ..... (ללא ספר)

מתמטיקה 1

פרק 20 - נושאים נוספים - רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים

תוכן העניינים

1. רציפות של פונקציה 281
2. משפט ערך הביניים 288
3. תכונות נוספות של פונקציות רציפות 292
4. שיטת החצייה 295

רציפות של פונקציה

שאלות

בשאלות **1-6**: בדקו את רציפות הפונקציות ב"נקודת התפר"[1] שלהן,
ובשאלות **1** ו-**2**, שרטטו גם את גרף הפונקציה:

1) $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\le 2 \\ 5-x & x>2 \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} x & x\ge 1 \\ x^2 & x<1 \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x\le 1 \\ |x-2| & 1<x<2 \\ 1 & x=2 \\ x-2 & x>2 \end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} \sin x & x<0 \\ x^2 & 0\le x<1 \\ 2-x & 1\le x<2 \\ x-3 & x\ge 2 \end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x>0 \\ 4+e^{\frac{1}{x}} & x<0 \end{cases}$

6) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x>0 \\ 2 & x=0 \\ 1+e^{\frac{1}{x}} & x<0 \end{cases}$

7) עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **3-6**:
רשמו עבור כל נקודת אי רציפות מאיזה סוג היא.
בנוסף, הדגימו פונקציה בעלת נקודת אי רציפות מסוג שני.

בשאלות **8-11**: מה צריך להיות הערך הקבוע של k, על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות לכל x?

8) $f(x)=\begin{cases} kx^2+x-2 & x\le 2 \\ 5kx-6 & x>2 \end{cases}$

9) $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2+2x-3}{x-1} & x\ne 1 \\ k & x=1 \end{cases}$

10) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} & x\ne 2 \\ k & x=2 \end{cases}$

11) $f(x)=\begin{cases} 2x-k & x\le 0 \\ x^{2x} & x>0 \end{cases}$

הערה: שאלה **11** ניתן לפתור רק בעזרת 'כלל לופיטל'.

[1] נקודת תפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **12-15**: מה צריכים להיות הערכים של הקבועים a ו- b, על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות בתחום הגדרתן?

12) $$f(x)=\begin{cases} ax+b & x\le 0 \\ \dfrac{\sin x}{2x} & 0<x<\pi \\ a\cos x & x\ge \pi \end{cases}$$

13) $$f(x)=\begin{cases} a\sqrt[3]{x}+x^2 & x<-1 \\ bx^2+x-1 & -1\le x\le 1 \\ 4\dfrac{\sqrt{x-1+a}-\sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x>1 \end{cases}$$

14) $$f(x)=\begin{cases} x^{\frac{1}{1-x}} & x>1 \\ (x-1)\ln(x+1)+b & 0\le x\le 1 \\ a\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-2}{2^{\frac{1}{x}}+4} & x<0 \end{cases}$$

15) $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} & x<1 \\ ax^2+b & 1\le x\le 2 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x>2 \end{cases}$$

הערה: שאלות 14-15 ניתן לפתור רק בעזרת 'כלל לופיטל'.

16) הוכיחו או הפריכו:

א. סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.

ב. הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.

ג. מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.

ד. מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.

17) ידוע ש- f רציפה ו- g לא רציפה. האם $f+g$ רציפה?
הוכיחו זאת.

18) תהי $f(x)=\begin{cases}|x|-1 & |x+1|\ge 4\\ 2 & |x+1|<4\end{cases}$.

א. שרטטו את גרף הפונקציה.

ב. מצאו את נקודות האי רציפות של הפונקציה ואת סוגן (במידה ויש).

ג. תהי $g(x)=x+\frac{1}{x}$, ותהי $f(x)$ מוגדרת וחיובית לכל x.
האם ההרכבה $g(f(x))$ בהכרח רציפה לכל x?

19) תהי f פונקציה חסומה בקטע $(0,1)$.
תהי g הפונקציה המוגדרת בקטע $(0,2)$, על ידי $g(x)=\begin{cases}f(x) & 0<x<1\\ x^2 & 1\le x<2\end{cases}$.

א. האם יתכן שהנקודה $x_0=1$ היא נקודת אי-רציפות סליקה של g? נמקו.

ב. האם g חסומה בקטע $(0,2)$? נמקו.

20) תהי $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ פונקציה שמקיימת $f(x+y)=f(x)f(y)$, לכל $x,y\in\mathbb{R}$.
נניח ש- f רציפה ב- $x=0$.
הוכיחו ש- f רציפה לכל x.

21) תהי $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ פונקציה שמקיימת $f(x+y)=\left[f(x)f(y)\right]^2$, לכל $x,y\in\mathbb{R}$.
נניח ש- f רציפה ב- $x=0$.
הוכיחו ש- f רציפה לכל x.

22) נתונה הפונקציה $f(x)=x-\frac{1}{2}\lfloor 2x\rfloor$.
הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה f חסומה לכל x.

ב. הפונקציה f רציפה לכל x.

ג. הפונקציה f מונוטונית לכל x.

ד. הפונקציה f זוגית או אי-זוגית לכל x.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

23) ענו על הסעיפים הבאים:

א. פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)|\le x$ לכל x.

הוכיחו שהפונקציה רציפה ב- $x=0$.

ב. פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)|\le \sin x$ לכל x.

הוכיחו שהפונקציה רציפה באינסוף נקודות שונות.

24) הפונקציה $f(x)$ רציפה לכל x.

ידוע כי עבור $x\ne\pm1$, $f(x)$ נתונה על ידי הנוסחה $f(x)=\dfrac{\sin(\pi x)}{1-|x|}$.

מצאו את הנוסחה של $f(x)$ לכל x.

25) הפונקציות $3g(x)+2f(x)$ ו- $f(x)-2g(x)$ רציפות לכל x.

הוכיחו שהפונקציה $|f(x)-g(x)|$ רציפה לכל x.

26) תהי $f(x)$ מוגדרת לכל x ומקיימת $\lim\limits_{x\to0}\left[f(x)(1-f(x))\right]=0$.

א. הוכיחו או הפריכו: $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$ או $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$.

ב. האם תשתנה תשובתך לסעיף א' אם נחליף את המילה 'מוגדרת' במילה 'רציפה'?

27) תהי f מוגדרת לכל x.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $f(\sin x)$ רציפה לכל x, אז f רציפה לכל x.

ב. אם $\sin(f(x))$ רציפה לכל x, אזי f רציפה לכל x.

ג. אם לכל x_0 מתקיים $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=4$, אזי $f(x)=4$ לכל x.

כיצד תשתנה תשובתך, אם ידוע בנוסף כי f רציפה לכל x?

כתב ופתר – גיא סלומון ©

28) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי לכל $x, y \in \mathbb{R}$:

1. $\min\{x, y\} = \frac{1}{2}[(x+y) - |x-y|]$
2. $Max\{x, y\} = \frac{1}{2}[(x+y) + |x-y|]$

ב. הוכיחו כי אם f, g רציפות ב- $\mathbb{R}$ אז גם הפונקציות הבאות רציפות ב- $\mathbb{R}$:

1. $z_1(x) = \min\{f(x), g(x)\}$
2. $z_2(x) = Max\{f(x), g(x)\}$

תשובות סופיות

1) רציפה.

2) רציפה.

3) רציפה בנקודה $x=1$, לא רציפה בנקודה $x=2$.

4) רציפה בנקודות $x=0,1$, לא רציפה בנקודה $x=2$.

5) לא רציפה.

6) לא רציפה.

7) 5. סליקה. 6. סליקה. 4. סוג ראשון. 3. סליקה.

8) $k=1$

9) $k=4$

10) $k=\frac{2}{3}$

11) $k=-1$

12) $a=0$, $b=\frac{1}{2}$

13) $a=1$, $b=2$ או $a=2$, $b=1$.

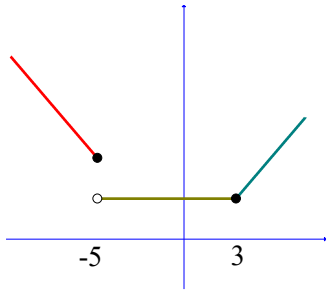
14) $a=-2e^{-1}$, $b=e^{-1}$

15) $a=\frac{e}{3}$, $b=-\frac{e}{3}$

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

18) א.



ב. הפונקציה רציפה לכל $x\neq -5$. ב--5 יש אי רציפות מסוג ראשון. ג. לא.

19) א. לא. ב. כן.

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) א. טענה נכונה. ב. טענה לא נכונה. ג. טענה לא נכונה. ד. טענה לא נכונה.

23) שאלת הוכחה.

24) $$f(x)=\begin{cases}-\pi & x=-1\\ \dfrac{\sin(\pi x)}{1-|x|} & x\neq\pm1\\ \pi & x=1\end{cases}$$

25) שאלת הוכחה.

26) שאלת הוכחה.

27) שאלת הוכחה.

28) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משפט ערך הביניים

שאלות

בשאלות **1-4** הוכיחו שלמשוואה יש לפחות פתרון אחד:

1) $x^3+4x-1=0$

2) $x^2=-\ln x$

3) $x-0.25\sin x=7$

4) $x^3+bx^2+cx+d=0$

בשאלות **5-6** הוכיחו שלמשוואה יש לפחות שני פתרונות:

5) $e^x-5x=0$

6) $4x^3+5x-\frac{1}{x}=0$

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי f פונקציה רציפה לכל x, המקיימת: $f(1)=2$, $f(0)=1$.
הוכיחו שלמשוואה $f(x)+\sin x=4x$ יש לפחות פתרון אחד.

ב. תהי $f:\mathbb{R}\to[-4,4]$ פונקציה רציפה.
הוכיחו שלמשוואה $2x+f(x)=1$ יש לפחות פתרון אחד.

8) מצאו קטע, שאורכו אינו עולה על יחידה אחת,
בו למשוואה $x^2=10-\frac{1}{x}$ יש פתרון.

9) נגדיר $f(x)=x^2+\frac{1}{x-1}$.

א. חשבו את $f(2)$, $f(0)$.

ב. האם ניתן להסיק לפי משפט ערך הביניים שלמשוואה $x^2+\frac{1}{x-1}=0$
יש פתרון בקטע $(0,2)$?

כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) תהיינה f,g פונקציות רציפות ב-$[a,b]$ המקיימות $f(a)<g(a), f(b)>g(b)$
הוכיחו שקיימת נקודה $a<c<b$ שבה $f(c)=g(c)$.

11) נתונה פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$ שהוא חלקי לתחום הגדרתה.
נניח ש-$f([a,b])\subseteq[a,b]$.
הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in[a,b]$ כך ש-$f(c)=c$.
נקודה c כנ"ל נקראת "**נקודת שֶׁבֶת**" של הפונקציה.

12) נתונה פונקציה רציפה $f:[0,1]\to[0,1]$.
הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש-$f(c)=c^{1.5}$.

13) נתונה פונקציה רציפה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ המקיימת $f(0)=f(1)$.
א. הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in[0,0.5]$ כך ש-$f(c)=f(c+0.5)$.
ב. הוכיחו כי קיימות נקודות $c,d\in[0,1]$ כך ש-$f(c)=f(d)$.

14) נתונה פונקציה רציפה $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ המקיימת $f(0)<f(2)<f(1)$.
הוכיחו כי קיימים $c_1,c_2\in[0,2]$ כך ש-$f(c_1)=f(c_2)$.

15) נתונה פונקציה רציפה $f:[0,8]\to\mathbb{R}$ המקיימת $f(0)=f(8)$.
הוכיחו כי קיימות נקודות $c_1,c_2,c_3,c_4\in[0,8]$ כך ש-
$f(c_1)=f(c_2),\ f(c_3)=f(c_4)$.

16) הוכיחו שהפונקציה $f(x)=x+\sin x$ היא על $\mathbb{R}$.

17) הוכיחו שהפונקציה $f(x)=x\cdot\sin x$ היא על $\mathbb{R}$.

18) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ומחזורית עם מחזור 2π.
הוכיחו שקיים $x_0\in\mathbb{R}$ כך ש-$f(x_0+\pi)=f(x_0)$.

19) יהיו $0\le a_1,\dots,a_n\le 1$ קבועים המקיימים $a_1+\dots+a_n=1$.
הוכיחו כי למשוואה $|x-a_1|+\dots+|x-a_n|=\frac{n}{2}$ יש לפחות פתרון אחד.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

20) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה חח"ע ורציפה.
הוכיחו כי f עולה ממש או יורדת ממש.

ב. תהי $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ פונקציה חח"ע ועל.
הוכיחו כי f לא רציפה ב- $\mathbb{R}$.

21) תהי $f:\mathbb{R}\to[-1,1]$ פונקציה רציפה.
הוכיחו כי קיימים אינסוף ערכים של x, שעבורם $f(x)=\sin x$.

22) יהי P פולינום ממעלה **זוגית**, מהצורה $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$,
ונניח כי $a_0<0$.
הוכיחו כי ל- P ישנם לפחות שני שורשים ממשיים, שונים זה מזה.

23) יהיו f,g פונקציות רציפות המקיימות:
$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=k,\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-k,\ \lim\limits_{x\to\infty}g(x)=-k,\ \lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=k$, כאשר $0<k\in\mathbb{R}$.
הוכיחו כי קיים לפחות פתרון אחד למשוואה $f(x)=g(x)$.

24) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי f פונקציה רציפה בקטע (a,b), ותהיינה $x_1,\ldots,x_n$ (כאשר $n>1$)
נקודות כלשהן ב- (a,b).
הוכיחו שקיימת נקודה c בקטע (a,b), כך ש-
$f(c)=\frac{1}{n}\left(f(x_1)+\ldots+f(x_n)\right)$.

ב. תהי f פונקציה רציפה בקטע (a,b).
האם לכל $c\in(a,b)$, ניתן למצוא נקודות $x_1,\ldots,x_n$, שונות זו מזו,
כאשר $n>1$, כך ש- $f(c)=\frac{1}{n}\left(f(x_1)+\ldots+f(x_n)\right)$?
הוכיחו זאת.

25) תהי f פונקציה רציפה בקטע פתוח (a,b).
נניח כי: $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=-\infty$.
הראו כי תמונת הקטע (a,b) היא $\mathbb{R}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

26) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, המקיימת $f(0)=-1,\ f(1)=4$.

תהי $S=\{x\in[0,1]\mid f(x)=0\}$.

א. הוכיחו ש- S לא ריקה.

ב. הוכיחו שלקבוצה S יש חסם עליון, שנסמנו α.

ג. הוכיחו כי $\alpha\in(0,1]$.

ד. הוכיחו כי $f(\alpha)=0$.

27) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה, כך ש- $f(a)=f(b)$.

הוכיחו שקיימים $a<x_1<x_2<b$, כך ש- $f(x_1)=f(x_2)$.

28) תהי $z(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ ויהי $0\le r\le 1$.

הוכיחו שיש c בקטע, עבורו מתקיים $z(c)=rz(a)+(1-r)z(b)$.

29) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי למשוואה $A\sin x+B\cos x=C\sin 2x$ יש פתרון.

ב. תהי $f(x)$ רציפה לכל x המקיימת $f(0)>0,\ f(4)>2f(2)$.

הוכיחו שקיים c כך ש- $f(2c)=2f(c)$.

ג. תהי $f(x)$ רציפה לכל x המקיימת $f(0)=1,\ f(1)=2$.

הוכיחו שקיים a כך ש- $f(a)=\frac{1}{a}$.

30) פונקציה f מוגדרת לכל x.

לפונקציה יש את התכונה הבאה:

כל ערך ממשי מתקבל על ידי הפונקציה בדיוק פעמיים.

הוכיחו כי הפונקציה אינה יכולה להיות רציפה.

תשובות סופיות

8) $[0.1,1]$

9) א. $f(0)=-1\ ,\ f(2)=5$ ב. לא.

שאלות **1-7** ושאלות **10-30** הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תכונות נוספות של פונקציות רציפות

שאלות

1) קבעו בכל סעיף האם הטענה נכונה או לא נכונה, והוכיחו זאת.
קיימת פונקציה המוגדרת בקטע $[0,1]$, שהיא:

א. חח"ע, אבל לא מונוטונית.
ב. מונוטונית, אבל לא רציפה.
ג. מונוטונית, אבל לא חסומה.
ד. חסומה, אבל לא רציפה.
ה. רציפה, אבל לא חסומה.
ו. הופכת מחיובית לשלילית מבלי לעבור דרך האפס.
ז. מקבלת מקסימום ומינימום אבל לא רציפה.
ח. רציפה אבל לא מקבלת מקסימום.
ט. חסומה, שתמונתה אינו קטע.
י. רציפה, שתמונתה אינה קטע.
יא. אינה רציפה בקטע זה, אבל בעלת התכונה,
שתמונת הקטע $[0,1]$, על ידי f, היא קטע.

2) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, המקיימת $f(x)>0$, לכל $x\in[a,b]$.
הוכיחו שקיים $\alpha>0$, כך ש- $f(x)\ge\alpha$, לכל $x\in[a,b]$.

3) תהי $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, ונניח כי $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ קיים.
הוכיחו ש- f חסומה.

4) יהיו $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות רציפות. נתון שלכל שתי נקודות x_1,x_2,
המקיימות $x_1<x_2$, קיימת נקודה $x_1<x_3<x_2$, שעבורה $f(x_3)=g(x_3)$.
הוכיחו כי $f(x)=g(x)$, לכל x.

5) תהי $f:[0,1]\to(0,1)$ פונקציה על.
הוכיחו ש- f לא רציפה ב- $[0,1]$.

6) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, שמקיימת $f(x)=f(x^2)$, לכל $x\in\mathbb{R}$.
הוכיחו ש- f פונקציה קבועה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, שמקיימת $f(x+y)=f(x)+f(y)$,
לכל $x,y\in\mathbb{R}$.
הוכיחו כי $f(x)=f(1)x$, לכל $x\in\mathbb{R}$.

8) תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע (a,b) , ונניח שקיים קבוע ממשי K ,
כך שלכל שתי נקודות, x_1 ו-x_2 , בקטע (a,b) , מתקיים **תנאי ליפשיץ** :
$|f(x_1)-f(x_2)|\le K|x_1-x_2|$
הוכיחו כי $f(x)$ רציפה בקטע (a,b) .
* נסו להוכיח בשתי דרכים שונות.

9) הוכיחו שלכל פולינום ממעלה זוגית יש נקודת מינימום מוחלט.
באריכות :
הוכיחו שאם f פולינום ממעלה זוגית, אז קיימת נקודה $x_0\in\mathbb{R}$,
כך ש-$f(x)\ge f(x_0)$, לכל $x\in\mathbb{R}$.

10) בסעיפים א ו-ב הוכיחו :
א. שלכל מספר ממשי, קיימת סדרה של רציונליים שמתכנסת אליו.
ב. שלכל מספר ממשי, קיימת סדרה של אי-רציונליים שמתכנסת אליו.
ג. תהי $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$. הוכיחו שהפונקציה לא רציפה בכל נקודה $x\in\mathbb{R}$.
הערה : פונקציה זאת נקראת פונקציית דִירִיכְלֶה.

11) הוכיחו או הפריכו :
א. אם $f(x)$ רציפה בנקודה c , אז $|f(x)|$ רציפה בנקודה c .
ב. אם $|f(x)|$ רציפה בנקודה c , אז $f(x)$ רציפה בנקודה c .

בשאלות **12-13** הוכיחו :

12) אם f רציפה ב-x_0 , אז קיימת סביבה של x_0 , בה f חסומה.

13) אם f רציפה ב-x_0 , ואם $f(x_0)>0$, אז קיימת סביבה של x_0 , שבה $f(x)>0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

14) יהיו $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות רציפות המקיימות $f(a)\neq g(a)$,
עבור a ממשי מסוים.
הראו שקיימת סביבה של a , שבה $f(x)\neq g(x)$.

<u>הערה</u>
תרגיל זה מכיל בתוכו גם את הטענה הבאה:
תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $f(a)\neq 0$, עבור a ממשי מסוים.
הראו שקיימת סביבה של a , שבה $f(x)\neq 0$.
פשוט לקחנו $g(x)=0$.
בטענה זו נשתמש בשאלה האחרונה תחת הנושא 'משפט ערך הביניים', בסעיף האחרון.

15) הוכיחו כי אם הפונקציה $f(x)$ רציפה בנקודה a , אזי הפונקציה $g(x)$,
המוגדרת על ידי $g(x)=\begin{cases}-c & f(x)<-c\\ f(x) & |f(x)|\le c\\ c & f(x)>c\end{cases}$, גם רציפה בנקודה a
(כאשר c מספר חיובי כלשהו).

16) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x}{x} & x\ge 1\\ e^{-x}-e^{-1} & x<1\end{cases}$.
בדקו האם f הפיכה בתחום הגדרתה. אם כן, מצאו את $f^{-1}(x)$.

17) הוכיחו כי אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ו- $f(x)>0$ לכל $x\in[a,b]$ אז יש $c>0$ כך ש-
$f(x)>c$ לכל $x\in[a,b]$.

18) הוכיחו כי אם f,g רציפות ב- $\mathbb{R}$ אז גם הפונקציה $z(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ רציפה ב- $\mathbb{R}$.
הערה: יש להוכיח לפי ההגדרה (בלשון ε,δ).
השוו לשאלה 28 בנושא הראשון בפרק זה.

תשובות סופיות

16) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & -1<x\le 0\\ -\ln\left(x+e^{-1}\right) & x>0\end{cases}$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il

שיטת החצייה

שאלות

1) נתונה המשוואה $x^3-2x^2-x+2=0$. בעזרת שיטת החצייה בקטע $[-2,3]$,
מצאו שורש מקורב של המשוואה על ידי 6 איטרציות.
מהו קירוב השורש?

2) נתונה המשוואה: $x^3-x-2=0$.

א. מצאו קטע שאורכו לא עולה על 1, המכיל שורש של המשוואה.

ב. כמה איטרציות של שיטת החצייה יש לבצע, כדי למצוא קירוב של השורש בדיוק של 0.001?

ג. חשבו את השורש שמצאתם בדיוק של 0.001 .

הערה: בסרטון ההסבר של שיטת החצייה יש תרגיל נוסף.

תשובות סופיות

1) 0.07

2) א. $[1,2]$ ב. 10 ג. $x=1.520$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה 1

פרק 21 - פונקציות בשני משתנים - עקומות שוות ערך ונגזרות חלקיות

תוכן העניינים

1. פונקציות של שני משתנים - קווי גובה 296
2. נגזרות חלקיות 300

פונקציות של שני משתנים – קווי גובה

שאלות

1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x,y)=\frac{y}{x}$?
שרטט מפת קווי גובה.

2) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x,y)=\ln x+\ln y$?
שרטט מפת קווי גובה.

3) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x,y)=x^2+y^2$?
שרטט מפת קווי גובה.

4) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$?
שרטט מפת קווי גובה.

5) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x,y)=\ln(x^2-y)$?
שרטט מפת קווי גובה.

6) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x,y)=x\sqrt{y}$?
שרטט מפת קווי גובה.

7) תהי: $u(x,y)=(x+p)(y+q)$, $x\ge 0$, $y\ge 0$ פונקציית תועלת של פרט.
הנקודות: $(0,14)$, $(3,2)$, $(1,6)$ מונחות על אותה עקומת אדישות.

א. מצא את p ו- q. הצב אותם בפונקציית התועלת.

ב. מהי משוואת עקומת האדישות עליה מונחות הנקודות הנתונות?
עליך להגיע למשוואה מפורשת. שרטט את עקומת האדישות.

8) שרטט לפונקציה: $f(x,y)=\begin{cases} x^2+3x-y-3 & x^2\ge y \\ -x^2+3x+y-3 & x^2<y \end{cases}$
את קו הגובה: $f(x,y)=1$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

9) נגדיר: $f(x,y)=\begin{cases}3x+y & y>x\\ 4x & y\le x\end{cases}$. הנח כי: $x,y\ge 0$.

שרטט את העקומות שוות הערך: $f(x,y)=4,12$ עבור הפונקציה הנתונה.

10) שרטט את מפת העקומות שוות הערך של: $f(x,y)=\min\left\{\frac{x}{3},y\right\}$, $f:R_+^2\to R_+$.

11) שרטט עקומות שוות ערך לפונקציה: $f(x,y)=\min\{3x,y\}$.

12) שרטט לפונקציה: $f(x,y)=\min\{y-x^2,x+y\}$,

את קווי הגובה: $f(x,y)=0$, $f(x,y)=2$.

13) נתונה הפונקציה: $f(x,y)=\begin{cases}x^2-y & x\le 1\\ 2x+y & x>1\end{cases}$.

א. שרטט את קו הגובה: $f(x,y)=0$.

ב. לאילו ערכי C קו הגובה: $f(x,y)=C$ יהיה קו רציף?
צייר את קו הגובה במקרה זה.

14) פונקציית התועלת של פרט הצורך את המוצרים x ו- y

היא: $u(x,y)=\begin{cases}y-x^2+4x & x\le 4\\ x-y & 4<x\le 6\\ y-\ln x & 6<x\end{cases}$.

א. שרטט את קו הגובה: $u(x,y)=3$.

ב. הסבר מהי המשמעות הכלכלית של קו הגובה שמצאת.

ג. ידוע כי הפרט צורך את הכמויות $(4,8)$.
האם הפרט יהיה אדיש במעבר לצריכת הכמויות $(7,9)$?

15) שרטט את מפת העקומות שוות הערך של: $f(x,y)=100-5x-2y$, $f:R^2\to R$.

באיזה כיוון עליך לזוז מעקומה לעקומה על מנת להגדיל את הערך של f?

כתב ופתר – גיא סלומון ©

16) שרטט עקומות שוות ערך לפונקציה: $f(x,y)=3x-y+3$.

17) שרטט עקומות שוות ערך לפונקציה: $f(x,y)=x^3-y$.

18) שרטט עקומות שוות ערך לפונקציה: $f(x,y)=(x-1)^2+(y+3)^2$.

19) שרטט עקומות שוות ערך לפונקציה: $f(x,y)=e^{x-y}$.

20) שרטט עקומות שוות ערך לפונקציה: $f(x,y)=2\ln x+\ln y$.

21) שרטט לפונקציה: $f(x,y)=(x-y)^2$,
את קווי הגובה: $f(x,y)=4$, $f(x,y)=0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $x \neq 0$, המישור ללא ציר ה- y .
2) $x > 0, y > 0$, הרביע הראשון ללא הצירים.
3) כל המישור.
4) $x^2 + y^2 \leq 1$, עיגול היחידה.
5) $y < x^2$
6) $y \geq 0$, חצי המישור העליון.
7) א. $p = 1$, $q = 2$, $u(x,y) = (x+1)\cdot(y+2)$ ב. $y = \frac{16}{x+1} - 2$
8) ראה סרטון.
9) ראה סרטון.
10) ראה סרטון.
11) ראה סרטון.
12) ראה סרטון.
13) א. ראה סרטון. ב. $C = 1.5$
14) א. ראה סרטון. ב. ראה סרטון. ג. הפרט לא אדיש.
15) ראה סרטון.
16) ראה סרטון.
17) ראה סרטון.
18) ראה סרטון.
19) ראה סרטון.
20) ראה סרטון.
21) ראה סרטון.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

פונקציות של שני משתנים – נגזרות חלקיות

שאלות

1) נתונה הפונקציה: $f(x,y)=4x^3-3x^2y^2+2x+3y$.
חשב את הנגזרת לפי x ואת הנגזרת לפי y.

2) נתונה הפונקציה: $f(x,y)=x^5\cdot\ln y$.
חשב את הנגזרת לפי x ואת הנגזרת לפי y.

3) נתונה הפונקציה: $f(x,y)=\dfrac{x^2y^4\left(\sqrt{y}+5\ln y\right)}{y^2+5y+y^y}$.
חשב את הנגזרת לפי x.

4) נתונה הפונקציה: $f(x,y)=\left(x^2+y^3\right)\cdot\left(2x+3y\right)$.
חשב את הנגזרת לפי x ואת הנגזרת לפי y.

5) נתונה הפונקציה: $f(x,y)=\dfrac{x^2-3y}{x+y^2}$.
חשב את הנגזרת החלקית לפי x ואת הנגזרת לפי y.

6) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור: $f(x,y)=x^3+y^3-6xy$.

7) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור:
$f(x,y)=x^3+y^3+3(1-y)(x-y)$.

8) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור: $f(x,y)=xy(x-y)$.

9) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור:
$f(x,y)=(x-9)(2y-6)(4x-3y+12)$.

10) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור: $f(x,y)=e^{xy}(x+y)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור: $f(x,y)=e^{x+y}\left(x^2+y^2\right)$.

12) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור: $f(x,y)=\left(x^2+2y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$.

13) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור: $f(x,y)=\ln\left(1+x^2+y^2\right)$.

14) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור: $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$.

15) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור: $f(x,y)=\ln\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)$.

16) חשב: $f'_{xy}(1,1)$ עבור: $f(x,y)=\ln\left(xy-x^2-y^2\right)$.

17) חשב: $f'_{xy}(1,1)$ עבור: $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$.

18) חשב: $f'_{xy}(1,1)$ עבור: $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

19) נתון: $z(x,y)=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$.

הוכח כי: $x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}$.

20) נתון: $f(x,y,z)=e^x\cdot\left(y^2-\frac{1}{z}\right)$.

חשב: $\frac{\partial f}{\partial z}\left(0,-1,\frac{1}{2}\right)$, $\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,-1,\frac{1}{2}\right)$, $\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,-1,\frac{1}{2}\right)$.

21) נתון: $f(x,y)=\frac{x^2}{\ln y+x}$.

חשב: $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,e)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,e)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,e)$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

22) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור:
$f(x,y)=4x^2-x^2y^2+4x+10y$.

23) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור: $f(x,y)=x^4\cdot\ln y$.

24) חשב את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני עבור: $f(x,y,z)=xyz$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $f_x(x,y)=12x^2-6xy^2+2$, $f_y(x,y)=-6x^2y+3$

2) $f_x(x,y)=5x^4\ln y$, $f_y(x,y)=\frac{x^5}{y}$

3) $f_x(x,y)=\frac{y^4\left(\sqrt{y}+5\ln y\right)}{y^2+5y+y^y}\cdot 2x$

4) $f_x(x,y)=2x(2x+3y)+2\left(x^2+y^3\right)$, $f_y(x,y)=(2x+3y)+3\left(x^2+y^2\right)$

5) $f_x(x,y)=\frac{2x\left(x+y^2\right)-1\left(x^2-3y\right)}{\left(x+y^2\right)^2}$, $f_y(x,y)=\frac{-3x-3y^2-2x^2y+6y^2}{\left(x+y^2\right)^2}$

6) סדר ראשון:

$f_x(x,y)=3x^2-6y$, $f_y(x,y)=3y^2-6x$

סדר שני:

$f_{xx}=6x-0$, $f_{yy}=6y-0$, $f_{xy}=0-6$, $f_{yx}=-6$

7) סדר ראשון:

$f_x(x,y)=3x^2+3-3y$, $f_y(x,y)=3y^2+3-3x-6y$

סדר שני:

$f_{xx}=6x$, $f_{yy}=6y-6$, $f_{xy}=f_{yx}=-3$

8) סדר ראשון:

$f_x(x,y)=2xy-y^2$, $f_y(x,y)=x^2-2xy$

סדר שני:

$f_{xx}=2y$, $f_{yy}=-2x$, $f_{xy}=f_{yx}=2x-2y$

9) סדר ראשון:

$f_x(x,y)=2\left[8xy-3y^2\cdot 1-24x-0+57y\cdot 1+72+0+0\right]$,

$f_y(x,y)=2\left[4x^2\cdot 1-3x\cdot 2y-0-54y+57x\cdot 1+0+27+0\right]$

סדר שני:

$f_{xx}=2[8y-0-24]$, $f_{yy}=2[0-6x\cdot 1-54+0+0]$,

$f_{xy}=f_{yx}=2[8x\cdot 1-6y-0+57+0]$

10) סדר ראשון:

$f_x(x,y)=e^{xy}\left(xy+y^2+1\right)$, $f_y(x,y)=e^{xy}\left(x^2+xy+1\right)$

סדר שני:

$f_{xx}=e^{xy}\cdot y\cdot\left(xy+y^2+1\right)+(y+0+0)\cdot e^{xy}$, $f_{yy}=e^{xy}\cdot x\cdot\left(x^2+xy+1\right)+(0+x)\cdot e^{xy}$,

$f_{xy}=f_{yx}=e^{xy}\cdot x\cdot\left(xy+y^2+1\right)+(x+2y)\cdot e^{xy}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) סדר ראשון:

$$f_y(x,y)=e^{x+y}\left(x^2+y^2+2y\right)\ ,\ f_x(x,y)=e^{x+y}\left(x^2+y^2+2x\right)$$

סדר שני:

$$,\ f_{yy}=e^{x+y}\cdot\left(x^2+y^2+2y\right)+(2y+2)\cdot e^{x+y}\ ,\ f_{xx}=e^{x+y}\cdot\left(x^2+y^2+2x\right)+(2x+2)\cdot e^{x+y}$$

$$f_{xy}=f_{yx}=e^{x+y}\cdot\left(x^2+y^2+2x\right)+2y\cdot e^{x+y}$$

12) סדר ראשון:

$$f_y(x,y)=e^{-x^2-y^2}\left(4y-2x^2y-4y^3\right)\ ,\ f_x(x,y)=e^{-x^2-y^2}\left(2x-2x^3-4xy^2\right)$$

סדר שני:

$$,\ f_{xx}=e^{-x^2-y^2}(-2x)\cdot\left(2x-2x^3-4xy^2\right)+\left(2-6x^2-4y^2\right)\cdot e^{-x^2-y^2}$$

$$,\ f_{yy}=e^{-x^2-y^2}(-2y)\cdot\left(4y-2x^2y-4y^3\right)+\left(4-2x^2-12y^2\right)\cdot e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{xy}=f_{yx}=e^{-x^2-y^2}(-2y)\cdot\left(2x-2x^3-4xy^2\right)+(-4x\cdot 2y)\cdot e^{-x^2-y^2}$$

13) סדר ראשון:

$$f_y(x,y)=\frac{2y}{1+x^2+y^2}\ ,\ f_x(x,y)=\frac{2x}{1+x^2+y^2}$$

סדר שני:

$$,\ f_{yy}=\frac{2\cdot\left(1+x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}\ ,\ f_{xx}=\frac{2x\left(1+x^2+y^2\right)+2x\cdot 2x}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}$$

$$f_{xy}=f_{yx}=\frac{0\cdot\left(1+x^2+y^2\right)-2y\cdot 2x}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}$$

14) סדר ראשון:

$$f_y(x,y)=\frac{2y}{x^2+y^2}\ ,\ f_x(x,y)=\frac{2x}{x^2+y^2}$$

סדר שני:

$$,\ f_{yy}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\ ,\ f_{xx}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$f_{xy}=f_{yx}=\frac{0\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

15) ראה סרטון.

16) $f_{xy}(1,1)=-2$

17) $f_{xy}(1,1)=1$

18) $f_{xy}(1,1)=\frac{-1}{2\sqrt{2}}$

19) הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

20) $f_z = 4 \ , \ f_y = -2 \ , \ f_x = -1$

21) $f_{xx} = \frac{1}{4} \ , \ f_{yy} = \frac{\frac{4}{e^2}\left(1+\frac{1}{e}\right)}{16} \ , \ f_{xy} = f_{yx} = -\frac{1}{4e}$

22) סדר ראשון:

$$f_x(x,y) = 8x - 2xy^2 + 4 \ , \ f_y(x,y) = -2x^2y + 10$$

סדר שני:

$$f_{xx} = 8 - 2y^2 \ , \ f_{yy} = -2x^2 \ , \ f_{xy} = f_{yx} = -4xy$$

23) סדר ראשון:

$$f_x(x,y) = 4x^3 \ln y \ , \ f_y(x,y) = x^4 \cdot \frac{1}{y}$$

סדר שני:

$$f_{xx} = 12x^2 \ln y \ , \ f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2} \ , \ f_{xy} = f_{yx} = \frac{4x^3}{y}$$

24) סדר ראשון:

$$f_x(x,y,z) = yz \cdot 1 \ , \ f_y(x,y) = xz \cdot 1 \ , \ f_z(x,y,z) = xy \cdot 1$$

סדר שני:

$$f_{xx} = 0 \ , \ f_{yy} = 0 \ , \ f_{zz} = 0 \ , \ f_{xy} = f_{yx} = z \cdot 1 \ , \ f_{xz} = y \cdot 1 \ , \ f_{yz} = x \cdot 1$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©