

# מתמטיקה 0



## תוכן העניינים

1	מבוא לאלגברה
47	משוואות אלגבריות
69	אי שוויונים אלגבריים
85	גיאומטריה אנליטית - נקודה וישר
110	גיאומטריה אנליטית - המעגל
129	חוקי החזקות והשורשים
139	משוואות ואי-שוויונים מעריכיים
149	חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים
165	טריגונומטריה במשולש ישר זווית
170	זהויות טריגונומטריות
191	משוואות טריגונומטריות
212	מספרים מרוכבים
(ללא ספר)	13. חשבון דיפרנציאלי - הפונקציה הממשית
228	14. חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים
243	15. חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית פולינום
256	16. חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית מנה ושורש
294	17. חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקציות טריגונומטריות
312	18. חשבון דיפרנציאלי - פונקציות מעריכיות
328	19. חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות
344	20. חשבון דיפרנציאלי - פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי
353	21. חשבון אינטגרלי - האינטגרל הכללי
360	22. חשבון אינטגרלי - פונקציה מעריכית, לוגריתמית וחזקה
378	23. אלגברה ליניארית - פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות

## תוכן העניינים

391	24. אלגברה ליניארית - מטריצות
412	25. אלגברה ליניארית - דטרמיננטות
425	26. אלגברה ליניארית - ערכים עצמיים-וקטורים עצמיים-לכסון מטריצות - דימיון

# מתמטיקה 0

## פרק 1 - מבוא לאלגברה

### תוכן העניינים

1	1. מספרים מכוונים
5	2. חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים
7	3. סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים
8	4. שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים
14	5. כפל וחילוק שברים
16	6. חיבור וחסור שברים
20	7. בעיות יסודיות באחוזים
22	8. חזרה על תבניות מספר
24	9. כינוס איברים
26	10. פישוט ביטויים על ידי פתיחת סוגריים
28	11. פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר
30	12. פירוק לגורמים של ביטויים אלגברים
33	13. פירוק הטרינום
35	14. שברים אלגברים
39	15. כפל וחילוק של שברים אלגברים
41	16. חיבור וחסור של שברים אלגברים
45	17. שברים כפולים

## מספרים מכוונים:

### סיכום כללי:

מספרים מכוונים הם מספרים שיכולים לקבל סימן חיובי או שלילי, כגון:

- בקניון גדול ישנן קומות 1, 2, 3, 4, וכן חניונים הממוקמים בקומות 1-, 2-, ו-3-.
- גובה פני הים מוגדר להיות 0 מטרים. העיר חיפה נמצאת כ-103 מטרים מעל פני הים בעוד שים המלח נמצא בגובה 426- מטרים.

### כללים:

- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים זהים, מחברים את המספרים עצמם והסימן נשאר.
- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים מנוגדים, מחסירים את המספרים זה מזה (הקטן מהגדול) וסימן התוצאה כסימן המספר הגדול מביניהם.
- כפל וחילוק יתבצע בשני חלקים:
  - ביצוע הפעולה על המספרים עצמם.
  - קביעת הסימן של התוצאה באופן הבא:
    - כפל או חילוק של שני מספרים בעלי אותו סימן - התוצאה תהיה חיובית.
    - כפל או חילוק של שני מספרים שונים סימן - התוצאה תהיה שלילית.

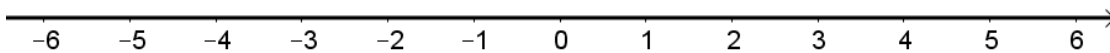
### הערה:

אם יש רצף של מכפלות (או חילוקים), סימן התוצאה תלוי במספר הפעמים שבהם מופיע סימן שלילי (-). אם הסימן מופיע מספר זוגי של פעמים התוצאה חיובית, ואם הוא מופיע מספר אי-זוגי של פעמים אזי התוצאה שלילית.

## שאלות:

(1) סמנו את המספרים הבאים על ציר המספרים בהתאמה:

$$-3\frac{1}{2}, 4, 1\frac{1}{3}, -5, -\frac{1}{2}, 2, 0, \frac{1}{2}, -2$$



(2) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

ב.  $-3-2$

א.  $3+2$

ד.  $-3+2$

ג.  $3-2$

ו.  $7+10$

ה.  $-1-4$

ח.  $-7+3$

ז.  $-6+5$

(3) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

ב.  $5-8-12+17$

א.  $5+7-23+1$

ד.  $-4-11+2+9$

ג.  $3-14+2+6$

ו.  $-7-13+5-3$

ה.  $6-21+3-7$

(4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

ב.  $4 \cdot (-7)$

א.  $4 \cdot 9$

ד.  $(-5) \cdot (-3)$

ג.  $(-6) \cdot (-5)$

ו.  $(-8) \cdot 5$

ה.  $(-2) \cdot 8$

ח.  $2 \cdot 3 \cdot 3$

ז.  $(-2) \cdot (-3) \cdot (-3)$

י.  $(-2) \cdot (-3) \cdot 3$

ט.  $(-2) \cdot 3 \cdot (-3)$

יב.  $(-2) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-2)$

יא.  $2 \cdot 3 \cdot (-3)$

יד.  $1 \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot 2$

יג.  $(-1) \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot 2$

5) מהו הסימן של תוצאת המכפלה בכל מקרה :

א.  $(-2) \cdot (-4) \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot (-6) \cdot (-5)$

ב.  $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot 6 \cdot (-5)$

ג.  $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot (-6) \cdot (-5)$

ד.  $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot 6 \cdot 5$

6) חשבו את ערכי הביטויים הבאים :

ב.  $(-30) : 3$

א.  $(-25) : (-5)$

ד.  $(-32) : (-4)$

ג.  $40 : (-10)$

ו.  $4 : (-16)$

ה.  $(-6) : 18$

7) חשבו את ערכי הביטויים הבאים :

ב.  $\frac{42}{-6}$

א.  $\frac{-60}{12}$

ד.  $\frac{-12}{-3}$

ג.  $\frac{32}{-4}$

8) מה התוצאה של כל אחת מהפעולות הבאות :

ב.  $(-2) \cdot 0$

א.  $0 : 5$

ד.  $6 : 0$

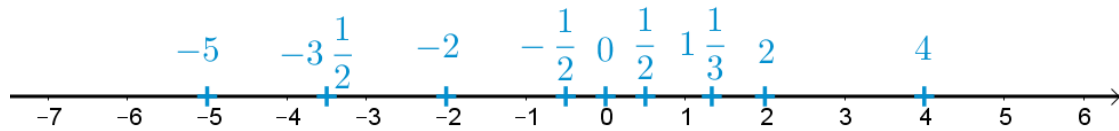
ג.  $0 \cdot (-3) \cdot 4$

ו.  $0 - 4$

ה.  $0 + 4$

## תשובות סופיות:

(1) להלן מערכת הצירים:



- (2) א. 5    ב. -5    ג. 1    ד. -1    ה. -5
- ו. 17    ז. -1    ח. -4
- (3) א. -10    ב. 2    ג. -3    ד. -4    ה. -19    ו. -18
- (4) א. 36    ב. -28    ג. 30    ד. 15    ה. -16
- ו. -40    ז. -18    ח. 18    ט. 18    י. 18
- יא. -18    יב. 36    יג. -16    יד. 16
- (5) א. +    ב. +    ג. -    ד. -
- (6) א. 5    ב. -10    ג. -4    ד. 8    ה.  $-\frac{1}{3}$     ו.  $-\frac{1}{4}$
- (7) א. -5    ב. -7    ג. -8    ד. 4
- (8) א. 0    ב. 0    ג. 0    ד. לא מוגדר    ה. 4    ו. -4

## חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

פעולת החזקה היא צורה מקוצרת שמייצגת פעולת כפל של אותו מספר בעצמו מספר פעמים. סימון החזקה הוא באופן הבא:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

כאשר  $a$  נקרא הבסיס ו- $n$  נקראת החזקה.

#### הערות:

- כאשר הבסיס חיובי, התוצאה תמיד תהיה חיובית ללא קשר האם החזקה היא זוגית או אי-זוגית.
- כאשר הבסיס שלילי, התוצאה תהיה חיובית אם החזקה היא זוגית ושלילית אם החזקה היא אי-זוגית.

#### הגדרה:

פעולת השורש היא הפוכה לפעולת החזקה והיא מאפשרת למצוא את בסיס החזקה. סימון השורש הוא באופן הבא:

$$\sqrt[n]{a}$$

כאשר  $a$  נקרא הבסיס ו- $n$  נקרא סדר השורש.

#### הערות:

- שורש למספר חיובי יכול להיות מסדר זוגי או אי-זוגי.
- שורש למספר שלילי יכול להיות מסדר אי-זוגי בלבד.

## שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- |              |               |
|--------------|---------------|
| א. $3^2$     | ב. $3^3$      |
| ג. $(-3)^3$  | ד. $(-2)^3$   |
| ה. $4^3$     | ו. $3^4$      |
| ז. $(-5)^3$  | ח. $10^4$     |
| ט. $-(-3)^4$ | י. $-5^4$     |
| יא. $-4^3$   | יב. $-(-2)^6$ |

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- |                    |                      |
|--------------------|----------------------|
| א. $\sqrt[3]{-27}$ | ב. $\sqrt[4]{625}$   |
| ג. $\sqrt[4]{-16}$ | ד. $\sqrt[5]{-32}$   |
| ה. $-\sqrt[4]{81}$ | ו. $-\sqrt[3]{1000}$ |

## תשובות סופיות:

- |         |          |             |         |         |         |
|---------|----------|-------------|---------|---------|---------|
| א. 9    | ב. 27    | ג. -27      | ד. -8   | ה. 64   | ו. 81   |
| ז. -125 | ח. 10000 | ט. -81      | י. -625 | יא. -64 | יב. -64 |
| א. -3   | ב. 5     | ג. לא מוגדר | ד. -2   | ה. -3   | ו. -10  |

## סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

סדר פעולות חשבון:

- פעולות כפל וחילוק קודמות לפעולות חיבור וחסור.
- פעולות חזקה ושורש קודמות לפעולות כפל וחילוק.
- סוגריים קודמים לכל.

שאלות:

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

$(-3)^2 : 9 - 2 \cdot (-4^2)$ (2)	$\sqrt{81} + 3 \cdot 2^3 - 40 : 8$ (1)
$3 + 4 \cdot [-3 + 4 \cdot (-2)] + \sqrt{10 + 6}$ (4)	$\sqrt{144} - 20 : 4 + 3 \cdot (-2)^2$ (3)
$-\sqrt{9} + 5^2 : (-4 - 1) - 24 : 12 \cdot 3$ (6)	$(-3)^4 : (-9) - 5 \cdot (-2)^3$ (5)
$\sqrt[3]{-27} + 4 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3^3$ (8)	$-2^5 : (-8) + 4^2 - 3 \cdot 5$ (7)
$(8 - \sqrt[3]{64}) \cdot (2 \cdot (-4) - \sqrt[3]{243})$ (10)	$[6 \cdot (-1)^4 - 10 \cdot (-1)^3] \cdot (-1)^5$ (9)
	$\frac{3^2 \cdot (8 - 2 \cdot 3)^3}{(5^2 \cdot 3 - 72) \cdot (-4)} + 2 \cdot \{15 - 20 : (4 + 3 \cdot 2)\}$ (11)

תשובות סופיות:

-37 (4)	19 (3)	33 (2)	28 (1)
-21 (8)	5 (7)	-14 (6)	31 (5)
	20 (11)	-44 (10)	-16 (9)

## שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים:

### סיכום כללי:

### הגדרה כללית:

השבר הוא חלק מתוך השלם. מקובל לסמן שבר באמצעות קו שבר המפריד בין המונה (החלק העליון) למכנה (החלק התחתון) באופן הבא:

$$\frac{\text{מונה}}{\text{מכנה}}$$

### ישנם שלושה סוגים אפשריים של שברים:

- שבר פשוט – בו המונה קטן מהמכנה (ולכן תמיד יהיה קטן מ-1).
- שבר מדומה – בו המונה גדול מהמכנה (יהיה גדול בערכו מ-1).
- שבר מעורב – המכיל שילוב של מספר שלם ושבר כלשהו.

### שבר עשרוני:

שבר שהמכנה שלו הוא מספר המהווה כפולות של 10 כגון: 10, 100, 1000 ... שבר עשרוני מיוצג ע"י נקודה עשרונית אשר מבדילה בין החלק שלם לחלק השברי באופן הבא:

$$\underbrace{XX}_{\text{שברים שלמים}}.\underbrace{YYY}$$

כדי להמיר שבר פשוט לשבר עשרוני המכנה צריך להיות בכפולות של 10.

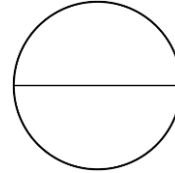
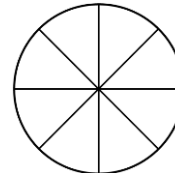
### אחוזים - הגדרה:

השבר  $\frac{1}{100}$  מוגדר להיות אחוז אחד ומסומן באופן הבא: 1%.

באופן זה השבר  $\frac{45}{100}$  יכתב: 45%, והשבר  $\frac{145}{100}$  יכתב: 145%.

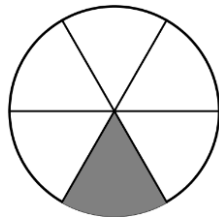
## שאלות:

(1) צבע את החלקים המתאימים בכל עיגול:

ב. צבע  $\frac{1}{6}$  מהעיגולא. צבע  $\frac{1}{2}$  מהעיגולד. צבע  $\frac{2}{5}$  מהעיגולג. צבע  $\frac{3}{8}$  מהעיגול

(2) כתוב את השבר המתאים לחלקים הצבועים בכל אחד מהמקרים הבאים:

ב. שבר:



א. שבר:



ד. שבר:



ג. שבר:



(3) הרחב את השברים הבאים:

א. השבר  $\frac{1}{2}$  לפי בסיס 4, לפי בסיס 18, לפי בסיס 40.ב. השבר  $\frac{3}{5}$  לפי בסיס 10, לפי בסיס 25, לפי בסיס 60.ג. השבר  $\frac{5}{8}$  לפי בסיס 16, לפי בסיס 32, לפי בסיס 88.

(4) צמצם את השברים הבאים ככל הניתן :

א. $\frac{25}{30}$	ב. $\frac{10}{30}$	ג. $\frac{6}{24}$	ד. $\frac{4}{20}$
ה. $\frac{35}{56}$	ו. $\frac{24}{42}$	ז. $\frac{36}{48}$	ח. $\frac{33}{121}$

(5) המר את השברים המדומים הבאים לשברים מעורבים :

א. $-\frac{20}{3}$	ב. $\frac{19}{4}$	ג. $\frac{12}{5}$	ד. $\frac{22}{5}$
ה. $-\frac{34}{6}$	ו. $-\frac{50}{7}$	ז. $\frac{47}{8}$	ח. $\frac{60}{9}$

(6) המר את השברים המעורבים הבאים לשברים מדומים :

א. $1\frac{2}{3}$	ב. $3\frac{5}{6}$	ג. $4\frac{1}{2}$	ד. $6\frac{1}{4}$
ה. $11\frac{3}{4}$	ו. $-2\frac{5}{8}$	ז. $-6\frac{2}{7}$	ח. $12\frac{7}{9}$

(7) קבע איזה שבר גדול יותר בכל אחד מהמקרים הבאים :

א. $\frac{4}{10}$ או $\frac{3}{10}$	ב. $\frac{7}{6}$ או $\frac{7}{8}$
ג. $\frac{5}{6}$ או $\frac{2}{3}$	ד. $\frac{7}{12}$ או $\frac{5}{18}$

(8) המר את השברים העשרוניים הבאים לשברים פשוטים מצומצמים או מעורבים :

א. 0.7	ב. 0.07	ג. 0.007	ד. 0.34
ה. 0.304	ו. 0.65	ז. 1.2	ח. 1.02
ט. 1.42	י. 3.5	יא. 6.03	יב. 5.125

9) המר את השברים הבאים לשברים עשרוניים:

א. $\frac{3}{10}$	ב. $\frac{3}{100}$	ג. $\frac{3}{1000}$	ד. $\frac{23}{1000}$
ה. $\frac{1}{2}$	ו. $\frac{3}{4}$	ז. $\frac{2}{5}$	ח. $\frac{4}{25}$
ט. $\frac{7}{50}$	י. $\frac{3}{20}$	יא. $\frac{7}{8}$	יב. $\frac{9}{16}$
יג. $9\frac{1}{10}$	יד. $3\frac{1}{5}$	טו. $4\frac{7}{8}$	טז. $-4\frac{1}{16}$

10) כתוב את השברים הבאים בצורתם העשרונית (היעזר במחשבון וכתוב עד 3 ספרות אחרי הנקודה העשרונית):

א. $\frac{2}{3}$	ב. $\frac{5}{6}$	ג. $\frac{3}{7}$	ד. $\frac{2}{11}$
------------------	------------------	------------------	-------------------

11) המר מאחוזים לשברים פשוטים:

א. 25%	ב. 32%	ג. 64%	ד. 80%
ה. 120%	ו. 5%	ז. 300%	ח. 150%

12) המר משברים פשוטים לאחוזים:

א. $\frac{3}{4}$	ב. $\frac{1}{8}$	ג. $\frac{4}{5}$	ד. $\frac{7}{20}$
ה. $\frac{11}{40}$	ו. $\frac{70}{125}$	ז. $\frac{5}{6}$	ח. $\frac{4}{9}$

## תשובות סופיות:

- (1) תשובה מודגמת בסרטון.
- (2) א.  $\frac{1}{5}$  ב.  $\frac{1}{6}$  ג.  $\frac{2}{3}$  ד.  $\frac{3}{4}$
- (3) א.  $\frac{4}{8}, \frac{18}{36}, \frac{40}{80}$  ב.  $\frac{30}{50}, \frac{75}{125}, \frac{180}{300}$  ג.  $\frac{80}{128}, \frac{160}{256}, \frac{440}{700}$
- (4) א.  $\frac{5}{6}$  ב.  $\frac{1}{3}$  ג.  $\frac{1}{4}$  ד.  $\frac{1}{5}$  ה.  $\frac{5}{8}$  ו.  $\frac{4}{7}$
- (5) א.  $-6\frac{2}{3}$  ב.  $4\frac{3}{4}$  ג.  $2\frac{2}{5}$  ד.  $4\frac{2}{5}$  ה.  $-5\frac{4}{6}$  ו.  $-7\frac{1}{7}$
- (6) א.  $\frac{5}{3}$  ב.  $\frac{23}{6}$  ג.  $\frac{9}{2}$  ד.  $\frac{25}{4}$  ה.  $\frac{47}{4}$  ו.  $-\frac{21}{8}$
- (7) א.  $\frac{4}{10}$  ב.  $\frac{7}{6}$  ג.  $\frac{5}{6}$  ד.  $\frac{7}{12}$
- (8) א.  $\frac{7}{10}$  ב.  $\frac{7}{100}$  ג.  $\frac{7}{1000}$  ד.  $\frac{17}{50}$  ה.  $\frac{38}{125}$  ו.  $\frac{13}{20}$
- (9) א. 0.3 ב. 0.03 ג. 0.003 ד. 0.023 ה. 0.5 ו. 0.75
- א. 0.4 ב. 0.16 ג. 0.14 ד. 0.15 ה. 0.875 ו. -4.0625
- א.  $0.6\bar{6}$  ב.  $0.8\bar{3}$  ג. 0.428 ד.  $0.1\bar{8}$
- (10) א.  $\frac{1}{4}$  ב.  $\frac{8}{25}$  ג.  $\frac{16}{25}$  ד.  $\frac{4}{5}$  ה.  $1\frac{1}{5}$  ו.  $\frac{1}{20}$
- (11) א. 3 ב.  $1\frac{1}{2}$

12) א. 75%    ב. 12.5%    ג. 80%    ד. 35%    ה. 27.5%    ו. 56%

ז. 83.333%    ח. 44.444%

## כפל וחילוק שברים:

### סיכום כללי:

- כשכופלים שני שברים יש לכפול מונה במונה ומכנה במכנה.
  - במידה ומדובר במספר שלם הכופל שבר, יש לכפול אותו במונה.
  - במידה ומדובר בשברים מעורבים, יש להפוך אותם תחילה לשברים מדומים ורק אז לבצע את פעולת הכפל.
- כדי לחלק שברים, יש לכפול את השבר הראשון בהופכי של השבר השני.
  - הופכי של שבר מסוים מתקבל ע"י החלפת המונה במכנה.

### שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

$\frac{2}{9} \cdot \frac{8}{10}$ ג.	$\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6}$ ב.	$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4}$ א.
$\frac{12}{25} \cdot 5$ ו.	$6 \cdot \frac{2}{3}$ ה.	$3 \cdot \frac{4}{5}$ ד.
$3\frac{3}{7} \cdot 2\frac{2}{5}$ ט.	$3\frac{1}{2} \cdot 4\frac{2}{5}$ ח.	$1\frac{3}{5} \cdot 2\frac{1}{4}$ ז.
$\frac{4^3}{5}$ יב.	$\frac{4}{5^3}$ יא.	$\left(\frac{4}{5}\right)^3$ י.

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

$\frac{3}{25} : \frac{7}{10}$ ג.	$\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ ב.	$\frac{2}{5} : \frac{4}{9}$ א.
$\frac{5}{6} : 3$ ו.	$10 : \frac{2}{3}$ ה.	$8 : \frac{2}{9}$ ד.
$2\frac{2}{5} : 1\frac{3}{15}$ ט.	$3\frac{3}{4} : 5\frac{5}{8}$ ח.	$\frac{2}{5} : 5$ ז.

## תשובות סופיות:

א. $\frac{9}{20}$	ב. $\frac{5}{21}$	ג. $\frac{8}{45}$	ד. $2\frac{2}{5}$	ה. 4	ו. $2\frac{2}{5}$
ז. $3\frac{3}{5}$	ח. $15\frac{2}{5}$	ט. $8\frac{8}{35}$	י. $\frac{64}{125}$	יא. $\frac{4}{125}$	יב. $12\frac{4}{5}$
א. $\frac{9}{10}$	ב. $1\frac{1}{2}$	ג. $\frac{6}{35}$	ד. 36	ה. 15	ו. $\frac{5}{18}$
ז. $\frac{2}{25}$	ח. $\frac{2}{3}$	ט. 2			

## חיבור וחסור שברים:

### סיכום כללי:

#### כפולה משותפת מינימלית:

בהינתן זוג מספרים  $a$  ו- $b$ , המספר הקטן ביותר אשר תוצאת חלוקתו במספרים הנ"ל מניבה מספר שלם נקרא הכפולה המינימלית שלהם.

#### הערות:

- כפולה מינימלית יכולה להיות גם עבור יותר משני מספרים.
- הכפולה המינימלית תהיה המכנה המשותף בעת פעולות חיבור וחסור של שברים.

#### כללי החיבור והחסור של שברים:

- חיבור וחסור של שברים בעלי אותו המכנה מתבצע על המספרים שבמונה בלבד כאשר המכנה נשאר כפי שהוא.

$$\text{דוגמא: } \frac{2}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2-3}{7} = \frac{-1}{7}, \quad \frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$$

- חיבור וחסור של שברים בעלי מכנים שונים מתבצע ע"י פעולת מכנה משותף.

$$\text{דוגמא: } \frac{1}{4} - \frac{5}{6} = \frac{3}{12} - \frac{10}{12} = \frac{3-10}{12} = -\frac{7}{12}, \quad \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{6+5}{15} = \frac{11}{15}$$

- חיבור של שבר עם מספר שלם יתבצע באופן ישיר.

$$\text{דוגמא: } 3 + \frac{1}{4} = 3\frac{1}{4}$$

חסור של שבר ממספר שלם יתבצע ע"י הוצאת שלמים מהשבר.

$$\text{דוגמא: } 3 - \frac{1}{4} = 2\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = 2\frac{3}{4}$$

דרך נוספת היא ע"י העברת המספר השלם לשבר מדומה:  $3 - \frac{1}{4} = \frac{12}{4} - \frac{1}{4} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$

- חיבור וחסור של שברים מעורבים יתבצע ע"י העברתם לשברים מדומים תחילה.

$$\text{דוגמא: } 3\frac{2}{5} + 2\frac{1}{6} = \frac{17}{5} + \frac{13}{6} = \frac{17 \cdot 6}{30} + \frac{13 \cdot 5}{30} = \frac{102 + 65}{30} = \frac{167}{30} = 5\frac{17}{30}$$

ניתן גם לפצל ולבצע את פעולת החיבור (או החיסור) של המספרים השלמים תחילה, ולאחר מכן לבצע את הפעולה עבור השברים.

$$\text{דוגמא: } 2\frac{3}{4} - 5\frac{1}{3} = (2 - 5) + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) = -3 + \left(\frac{9}{12} - \frac{4}{12}\right) = -3 + \frac{5}{12} = -2\frac{7}{12}$$

## שאלות:

- (1) מצא את הכפולה המשותפת המינימלית של המספרים הבאים:

א. 2 ו-3	ב. 2 ו-4	ג. 3 ו-5	ד. 6 ו-10
ה. 4 ו-10	ו. 4 ו-6	ז. 3, 5 ו-10	ח. 2, 3 ו-8

- (2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}$	ב. $\frac{5}{9} + \frac{2}{9}$
ג. $\frac{4}{13} + \frac{9}{13}$	ד. $\frac{7}{8} + \frac{7}{8}$
ה. $\frac{7}{8} - \frac{3}{8}$	ו. $\frac{8}{9} - \frac{7}{9}$
ז. $\frac{2}{12} - \frac{5}{12}$	ח. $\frac{2}{5} - \frac{6}{5}$
ט. $\frac{2}{8} + \frac{5}{8} + \frac{6}{8}$	י. $\frac{7}{15} + \frac{8}{15} - \frac{6}{15}$

(3) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\frac{1}{2} + \frac{4}{3}$

ב.  $\frac{3}{5} + \frac{1}{10}$

ג.  $\frac{4}{6} - \frac{1}{12}$

ד.  $\frac{3}{6} - \frac{5}{8}$

ה.  $\frac{5}{4} + \frac{7}{2} + \frac{2}{8}$

ו.  $\frac{7}{3} + \frac{6}{5} + \frac{3}{10}$

ז.  $\frac{4}{7} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$

ח.  $\frac{1}{4} + \frac{2}{8} - \frac{3}{5}$

(4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $2 + \frac{5}{6}$

ב.  $2 - \frac{5}{6}$

ג.  $2\frac{1}{4} + \frac{5}{6}$

ד.  $2\frac{1}{4} - \frac{5}{6}$

ה.  $3\frac{2}{3} + 4\frac{1}{4}$

ו.  $5\frac{7}{8} - 6\frac{1}{2}$

ז.  $2 + \frac{5}{6} - \frac{1}{9}$

ח.  $\frac{3}{4} - 1\frac{1}{5} + \frac{8}{20}$

(5) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) + 2\frac{1}{3}$

ב.  $\frac{3}{14} : \frac{2}{7} + \frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{4} - \frac{2}{5}$

ג.  $\frac{5}{11} \cdot 2\frac{3}{4} - 6 : \frac{2}{5}$

ד.  $2\frac{4}{5} : \frac{9}{10} \cdot \frac{6}{7} + \frac{1}{6}$

ה.  $\frac{5}{6} : \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot 3\frac{1}{4}$

## תשובות סופיות:

12. ג.	20. ה.	30. ד.	15. ג.	4. ב.	6. א. (1
				24. ח.	30. ז.
$\frac{1}{9}$ . ג.	$\frac{1}{2}$ . ה.	$1\frac{3}{4}$ . ד.	1. ג.	$\frac{7}{9}$ . ב.	$\frac{4}{5}$ . א. (2
		$\frac{3}{5}$ . י.	$1\frac{5}{8}$ . ט.	$-\frac{4}{5}$ . ח.	$-\frac{1}{4}$ . ז.
$3\frac{5}{6}$ . ג.	5. ה.	$-\frac{1}{8}$ . ד.	$\frac{7}{12}$ . ג.	$\frac{7}{10}$ . ב.	$1\frac{5}{6}$ . א. (3
				$-\frac{1}{10}$ . ח.	$\frac{19}{21}$ . ז.
$-\frac{5}{8}$ . ג.	$7\frac{11}{12}$ . ה.	$1\frac{5}{12}$ . ד.	$3\frac{1}{12}$ . ג.	$1\frac{1}{6}$ . ב.	$2\frac{5}{6}$ . א. (4
				$-\frac{1}{20}$ . ח.	$2\frac{13}{18}$ . ז.
	$3\frac{5}{18}$ . ה.	$2\frac{5}{6}$ . ד.	$-13\frac{3}{4}$ . ג.	$1\frac{1}{10}$ . ב.	$2\frac{11}{24}$ . א. (5

## בעיות יסודיות באחוזים:

### סיכום כללי:

נוסחה לביצוע חישובים עם אחוזים:

$$\text{תמורת האחוז} = \text{שלם} \cdot \frac{\text{אחוז}}{100}$$

למשל, בהינתן גודל שלם 120, אשר יש לחשב כמה הם 40 אחוזים ממנו, נקבל לפי הנוסחה:  $48 = \frac{40}{100} \cdot 120$ , כלומר: **תמורת האחוז 40 מהגודל 120 היא 48.**

### שאלות:

- (1) בכיתה 30 תלמידים. 60% מתוכם בנות.
  - א. כמה בנות בכיתה?
  - ב. כמה בנים בכיתה?
- (2) בכיתה 28 בנות המהוות 70% מכלל התלמידים בכיתה.
  - א. כמה תלמידים בכיתה?
  - ב. כמה בנים בכיתה?
- (3) מחיר בגד-ים הוא 300 ₪. בסוף העונה הוא נמכר ב-20% הנחה.
  - א. מהו מחירו בסוף העונה?
  - ב. מה גודל ההנחה?
- (4) מחיר ההשקה של בושם מסוים הוא 500 ₪. לאחר מכן מועלה מחירו ב-8%.
  - א. מה מחירו הסופי?
  - ב. מה גודל ההתייקרות?
- (5) מחיר ליטר דלק הוא 5 ₪ לליטר. בחנוכה מוזל מחירו ב-7%.
  - א. מה מחירו בסוף השנה?
  - ב. מה גודל המוזל?
- (6) מוצר מסויים מתייקר בסוכות ב-12%. בפורים מוזל המוצר ב-12%.
  - א. מה מחירו בסוף השנה?
  - ב. מה גודל המוזל?

7) ענה על השאלות הבאות:

- א. באולם קולנוע 200 צופים, מתוכם 176 בנים.  
מה אחוז הבנים בקהל?
- ב. בכיתה 30 תלמידים, מתוכם 18 בנות.  
מה אחוז הבנות בכיתה?
- ג. מחיר מוצר התייקר מ-80 ₪ ל-120 ₪.  
בכמה אחוזים התייקר המוצר?
- ד. מחיר מוצר הוזל מ-120 ₪ ל-80 ₪.  
בכמה אחוזים הוזל המוצר?
- ה. מחיר מוצר התייקר מ-150 ₪ ל-200 ₪.  
בכמה אחוזים התייקר המוצר?
- ו. מחיר מוצר הוזל מ-200 ₪ ל-150 ₪.  
בכמה אחוזים הוזל המוצר?

### תשובות סופיות:

- 1) א. 18 בנות. ב. 12 בנים.
- 2) א. 40 תלמידים. ב. 12 בנים.
- 3) א. 240 ₪. ב. 60 ₪.
- 4) א. 540 ₪. ב. 40 ₪.
- 5) 4.9755 ₪.
- 6) 400 ₪.
- 7) א. 88% ב. 60% ג. 50% ד. 33.33% ה. 33.33% ו. 25%

## חזרה על תבניות מספר:

### סיכום כללי:

משתנה הוא סמל המתאר כמות או גודל כלשהם אשר אינם ידועים ועשויים להשתנות.

תבנית מספר היא ביטוי אלגברי אשר מכיל משתנה (או משתנים). ניתן להציב במשתנים ערכים מספריים שונים ולקבל תוצאות שונות עבור תבנית המספר עצמה.

במתמטיקה, תפקידה של תבנית המספר הוא להביע גודל מסוים אשר לערכו יש משמעויות שונות. דוגמא לכך היא: קנייה של  $x$  פריטים, אשר כל אחד עולה 3 שקלים, יניבו תבנית מספר של  $3 \cdot x$  אשר מייצגת את הסכום הכולל של הפריטים.

### שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- $x$  הנתון:

א.  $2x+5$  כאשר  $x=3$       ב.  $x^2+3x$  כאשר  $x=2$

ג.  $-x^2+2x+3$  כאשר  $x=5$       ד.  $-x^2-9x+5$  כאשר  $x=5$

ה.  $x^3+1$  כאשר  $x=-2$       ו.  $4-x^3$  כאשר  $x=-1$

ז.  $(x+1)(2-x)$  כאשר  $x=4$       ח.  $x^2(3x-4)$  כאשר  $x=3$

(2) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- $x$  הנתון:

א.  $27x^5-2x^3+x$  כאשר  $x=\frac{1}{3}$

ב.  $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+6$  כאשר  $x=-\frac{2}{3}$

3) הצב את הערכים המספריים במקום הפרמטרים וחשב את ערך תבנית המספר:

- |                                  |   |
|----------------------------------|---|
| א. $a^2 + 2ab + b^2$             | עבור: $a = 3, b = -5$                                   |
| ב. $(x-3)^2 + 3x^2b$             | עבור: $x = 5, b = -1$                                   |
| ג. $-x^3 - 2xy + y^4$            | עבור: $x = -2, y = -1$                                  |
| ד. $\frac{(a-2c)^4}{a} - a^2$    | עבור: $a = 2, c = -2$                                   |
| ה. $\frac{4a^2 - 3b}{c}$         | עבור: $a = -1, b = 2, c = -4$                           |
| ו. $\sqrt{c-3a}$                 | עבור: $c = 13, a = -1$ ועבור: $c = 82, a = \frac{1}{3}$ |
| ז. $\frac{p^3 + 2\sqrt{q+1}}{m}$ | עבור: $p = -5, q = 48, m = 3$                           |

### תשובות סופיות:

- |            |                    |        |        |                  |        |
|------------|--------------------|--------|--------|------------------|--------|
| 11. א. (1) | 10. ב.             | ג. -12 | ד. -65 | ה. -7            | ו. 5   |
| ז. -10     | ח. 45              |        |        |                  |        |
| 10. א. (2) | ב. $\frac{22}{27}$ |        |        |                  |        |
| 4. א. (3)  | ב. -71             | ג. 5   | ד. 644 | ה. $\frac{1}{2}$ | ז. -37 |
- ו. הצבה ראשונה: 4, הצבה שנייה: 9

## כינוס איברים:

### סיכום כללי:

תבניות אלגבריות יכולות להכיל איברים רבים ולכן נרצה לכנס אותם על מנת לפשט את התבנית. כדי לכנס איברים ניקח את כל קבוצת האיברים מאותו הסוג ונחבר את המקדמים שלהם. דוגמא:  $3x + 6x - 5x = (3 + 6 - 5)x = 4x$ .  
 איברים שונים נבדלים זה מזה בערך התבנית האלגברית שלהם.  
 כך:  $3x$  שונה מ- $4y$  ושונה מ- $2xy$ . באותו האופן, האיברים  $x$  ו- $x^2$  הם שונים.

### שאלות:

כנס איברים דומים:

- |   |  |
|---|--|
| $9x^2 - 2x^2 - 3x^2 - 2x^2$ (2)   | $5x + 7x - 4x$ (1)                             |
| $x^2y - 3yx^2 + x^2y$ (4)   | $-10xy + 15xy + xy - 2yx$ (3)                  |
| $2x^2 - 3m^2 - x^2 + 3m^2$ (6)  | $8a^2 + 10a - 5a^2 - 11a + a^2$ (5)            |
| $mn^2 + 4m^2n + 6n^2m - 10nm^2 + mn^2$ (8)  | $3xy + y - 30y + 6yx - 7y$ (7)                 |
| $y^2 + x^2 - 5x^2 + 5y^2 + 4x^2 - 6y^2$ (10)  | $-6 + x^3 + 4 - 3x^3 + 17x^3 - 17$ (9)         |
| $5xy + 2x - 3yx - x + 1$ (12)   | $7x^2 - 3x - 4x + 2$ (11)                      |
| $x + xy + y - 6yx - 6y - 6x$ (14)   | $3 - x - x^2 + 4x + 5x^2 - 12$ (13)            |
| $ab^2 + 6ba^2 - 6b + 16a^2b + 3b - 6b^2a$ (16)  | $mn + n - 5m + 5nm - 14n + 3m$ (15)            |
| $4x^2z + 6xz^2 - 6 - xz^2 + 12 + 10zx^2$ (18)   | $z^3 - 4z^2 + 7 - z^3 - 8 + 8z^2$ (17)         |
| $x^3 - 3x - 4x^2 + 2x + x^3 + x^2 - 2x^3$ (20)  | $2 - x^3 - 3 - 4x^2 + 2x + x^3 + x^2 - 2$ (19) |
| $12x^2y^3 + 13a^2 - 20x^2y^3 + 2a^2$ (22)   | $2a^2b + 3x^2y + 5a^2b + 10x^2y$ (21)          |
| $-2x^3y + 5x^2 - 4yx^3 - 6x^2$ (24)   | $2y^2 - 4x^3y^2 - 10y^2 - x^3y^2$ (23)         |
| $5a^2b - 8ab^2 + 20a^2b - 14ab^2$ (26)  | $2a^2b + 2b + 3a^2 + 5b$ (25)                  |
| $-12x^2 + 2y^2 + 3x^2y + 14xy^2 - 5xy^2 - 6y^2 + 2xy + 11x^2 + x^2y - 9xy$ (27)               |  |
| $21x^3y^3 + x^2y^2 - 3xy^3 + x^3y - 15x^2y^2 - 7x^3y + 12x^3y^3 - 4xy^3 + 4xy^3 - 6x^3y$ (28) |  |

## תשובות סופיות:

- |                           |                        |   |
|---------------------------|------------------------|---|
| $4xy$ (3)                 | $2x^2$ (2)             | $8x$ (1)                                    |
| $x^2$ (6)                 | $4a^2 - a$ (5)         | $-x^2y$ (4)                                 |
| $15x^3 - 19$ (9)          | $8mn^2 - 6nm^2$ (8)    | $9xy - 36y$ (7)                             |
| $2xy + x + 1$ (12)        | $7x^2 - 7x + 2$ (11)   | $0$ (10)                                    |
| $-13n - 2m + 6mn$ (15)    | $-5x - 5y - 5xy$ (14)  | $4x^2 + 3x - 9$ (13)                        |
| $14x^2z + 5xz^2 + 6$ (18) | $4z^2 - 1$ (17)        | $-5ab^2 + 22a^2b - 3b$ (16)                 |
| $7a^2b + 13x^2y$ (21)     | $-3x^2 - x$ (20)       | $-3x^2 + 2x - 3$ (19)                       |
| $-6x^3y - x^2$ (24)       | $-8y^2 - 5x^3y^2$ (23) | $-8x^2y^3 + 15a^2$ (22)                     |
|                           | $25a^2b - 22ab^2$ (26) | $2a^2b + 3a^2 + 7b$ (25)                    |
|                           |                        | $-x^2 - 4y^2 + 4x^2y + 9xy^2 - 7xy$ (27)    |
|                           |                        | $33x^3y^3 - 14x^2y^2 - 3xy^3 - 12x^3y$ (28) |

## פישוט ביטויים ע"י פתיחת סוגריים:

### סיכום כללי:

בעת ביצוע כפל בין שני איברים יש לכפול את המקדמים בנפרד ואת האותיות (משתנים) בנפרד.

כלל הפילוג:

$$\bullet a(b+c) = ab+ac$$

$$\bullet (a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$

### שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $2x \cdot 3x$	ב. $-4x \cdot (-7x)$	ג. $-2x \cdot (-4x) \cdot (-3)$
ד. $8m^2 \cdot 4m^3$	ה. $3a^3 \cdot (-2a^2)$	ו. $-b \cdot 4b^2 \cdot \frac{b^2}{2}$
ז. $a \cdot 3b$	ח. $4a^2 \cdot 7b^2$	ט. $ab \cdot (-2a^2b)$

(2) פשט את הביטויים הבאים ע"י פתיחת סוגריים:

א. $2(3x-4)$	ב. $2(-3x^2+5x-1)$
ג. $(7x-2)4$	ד. $(1-2x)(-2)$
ה. $a(3a-1)$	ו. $b(b^2-3b+4)$
ז. $2x(5x+3)$	ח. $5x(x^2+2x-3)$
ט. $3t^2(4t-t^2+6)$	י. $\frac{5}{2}(4d^4-3d)d$

(3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $5x+(3x-2)+(-4-2x)$	ב. $7x+(-4x-5)+3x+(-1+7x)$
ג. $8-(2x-5)-(4x+2)$	ד. $-6x-(-3x-1)-(-7-4x)+1$

$$\text{ה. } (3-2x^2+4)2+3(x-x^2)-6(7-5x)+4x^2$$

$$\text{ו. } 3y^2-(y+1-2y^2)+6(5y-6)-(-y-4)3+5(y^2+1)-7$$

4 פשט את הביטויים הבאים :

$$\text{א. } (x-1)(x+2) \quad \text{ב. } (x+3)(x-7)$$

$$\text{ג. } (3-x)(x+4) \quad \text{ד. } (3x+4)(5x+1)$$

$$\text{ה. } 3(4x+1)(2x-3) \quad \text{ו. } -2(3x-1)(5-2x)$$

5 פשט את ערכי הביטויים הבאים :

$$\text{א. } (x-1)(x+3)+2(3-x)$$

$$\text{ב. } (a+4)(a-2)-(a+5)(a-3)$$

$$\text{ג. } (2m-3)(4m+3)+5(2m^2-6)$$

$$\text{ד. } -x^2y^2(x^3y+x^2)+2xy(2x^3y-x^4y^2)$$

### תשובות סופיות:

$$\text{(1) א. } 6x^2 \quad \text{ב. } 28x^2 \quad \text{ג. } -24x^2 \quad \text{ד. } 32m^5 \quad \text{ה. } -6a^5 \quad \text{ו. } -2b^5$$

$$\text{ז. } 3ab \quad \text{ח. } 28a^2b^2 \quad \text{ט. } -2a^3b^2$$

$$\text{(2) א. } 6x-8 \quad \text{ב. } -6x^2+10x-2 \quad \text{ג. } 28x-8 \quad \text{ד. } -2+4x$$

$$\text{ה. } 3a^2-a \quad \text{ו. } b^3-3b^2+4b \quad \text{ז. } 10x^2+6x \quad \text{ח. } 5x^3+10x^2-15x$$

$$\text{ט. } 12t^3-3t^4+18t^2 \quad \text{י. } 10d^5-7.5d^2$$

$$\text{(3) א. } 6x-6 \quad \text{ב. } 13x-6 \quad \text{ג. } -6x+11 \quad \text{ד. } x+9 \quad \text{ה. } -3x^2+33x-28$$

$$\text{ו. } 10y^2+32y-27$$

$$\text{(4) א. } x^2+x-2 \quad \text{ב. } x^2-4x-21 \quad \text{ג. } -x^2-x+12$$

$$\text{ד. } 15x^2+23x+4 \quad \text{ה. } 24x^2-30x-9 \quad \text{ו. } 12x^2-34x+10$$

$$\text{(5) א. } x^2+3 \quad \text{ב. } 7 \quad \text{ג. } 18m^2-6m-39 \quad \text{ד. } -3x^5y^3+3x^4y^2$$

## פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר:

### סיכום כללי:

- נוסחת ריבוע של סכום/הפרש:  $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ .
- נוסחה להפרש ריבועים:  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ .

### שאלות:

#### (1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+5)^2$	ב. $(x+2)^2$	ג. $(4x+5)^2$
ד. $(6x+2)^2$	ה. $(7x+y)^2$	ו. $(5x+2y)^2$
ז. $(x^2+7)^2$	ח. $(x^2+y^2)^2$	ט. $(x^3+2y^2x)^2$

#### (2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-6)^2$	ב. $(x-2)^2$	ג. $(5-x)^2$
ד. $(6x-1)^2$	ה. $\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2$	ו. $\left(\frac{1}{3}x-5\right)^2$
ז. $(3m-2n)^2$	ח. $\left(x^2-\frac{3}{5}y\right)^2$	ט. $(x^2y^2-7)^2$

#### (3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-5)(x+5)$	ב. $(3+x)(x-3)$
ג. $(3x-1)(3x+1)$	ד. $(5-7x)(7x+5)$
ה. $\left(\frac{1}{2}x+6\right)\left(\frac{1}{2}x-6\right)$	ו. $\left(5y-\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{1}{4}x+5y\right)$
ז. $(x^2+y)(x^2-y)$	ח. $(3a^2b^3-4)(3a^2b^3+4)$

(4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+1)(x+2)-3x$	ב. $(x-5)(5x-1)+2(4+x)$
ג. $x(2x-1)(2x+1)-4x^2(x+1)$	ד. $-(y+3x)(y-3x)+(y-3x)^2$
ה. $x(x+3)-(6+x)(6x+2)-(x+2)^2$	
ו. $-5(x+7)(x-7)+3(2x+5)(5-x)+(x+1)^2$	

## תשובות סופיות:

א. $x^2+10x+25$	ב. $x^2+4x+4$	ג. $16x^2+40x+25$	(1)
ד. $36x^2+24x+4$	ה. $49x^2+14xy+y^2$	ו. $25x^2+20xy+4y^2$	
ז. $x^4+14x+49$	ח. $x^4+2x^2y^2+y^4$	ט. $x^6+4x^4y^2+4y^4x^2$	
א. $x^2-12x+36$	ב. $x^2-4x+4$	ג. $25-10x+x^2$	(2)
ד. $36x^2-12x+1$	ה. $9x^2-3x+\frac{1}{4}$	ו. $\frac{1}{9}x^2-3\frac{1}{3}x+25$	
ז. $9m^2-12mn+4n^2$	ח. $x^4-\frac{6}{5}x^2y+\frac{9}{25}y^2$	ט. $x^4y^4-14x^2y^2+49$	
א. $x^2-25$	ב. $x^2-9$	ג. $9x^2-1$	(3)
ה. $\frac{1}{4}x^2-36$	ו. $25y^2-\frac{1}{16}x^2$	ז. $x^4-y^2$	
א. $x^2+2$	ב. $5x^2-24x+13$	ג. $-4x^2-x$	(4)
ד. $18x^2-6xy$	ה. $-6x^2-39x-16$	ו. $-10x^2+17x+321$	

## פירוק לגורמים של ביטויים אלגבריים:

### סיכום כללי:

פירוק לגורמים הוא פעולה הפוכה לפתיחת סוגריים – נרצה להוציא את הגורמים המשותפים לאיברים מחוץ לסוגריים.

- פירוק לגורמים ע"י הוצאת איבר אחד משותף:

○ הוצאת מספר משותף:  $2x - 8 = 2(x - 4)$

○ הוצאת אות משותפת:  $x^2 - 12x = x(x - 12)$

○ הוצאת מספר ואות יחד:  $3x^2 - 21x = 3x(x - 7)$

- פירוק לגורמים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר:

○ נוסחת הבינום של ניוטון:  $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

○ נוסחה להפרש ריבועים:  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

### שאלות:

- (1) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א.  $3x - 12$       ב.  $6y - 4$

ג.  $20 - 8a$       ד.  $4a^3 + 8b$

ה.  $75m^2 + 25m + 15$       ו.  $40a^2 - 8b^2 + 64c^2$

- (2) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א.  $y^2 + 5y$       ב.  $3x - 11x^3$

ג.  $6y^2 + 5y^3 + 4y$       ד.  $\frac{1}{2}a^7 - \frac{1}{4}a^5 + a^3$

3 פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף :

א. $2x^2 - 8x$	ב. $3t^2 + 12t$
ג. $5n^3 - 20n^2 + 50n$	ד. $8y^2 + 6y^3 - 2y^4$
ה. $4x^2y^2 + 16x^2y - 20xy^2$	ו. $27mn - 3n^2m + 9n^3m$

4 פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר :

א. $x^2 + 10x + 25$	ב. $x^2 + 12x + 36$
ג. $y^2 - 18y + 81$	ד. $y^2 - 22y + 121$
ה. $4x^2 + 4x + 1$	ו. $16y^2 - 8y + 1$
ז. $9x^2 - 24x + 16$	ח. $25x^2 + 70x + 49$

5 פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר :

א. $r^2 - 25$	ב. $x^2 - 81$
ג. $25y^2 - 49$	ד. $121x^2 - 1$
ה. $x^2y^2 - 4$	ו. $9y^4 - 169x^4$

6 פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף ונוסחאות הכפל המקוצר :

א. $y - y^3$	ב. $x^3 - 10x^2 + 25x$
ג. $m^4 - 1$	ד. $196x^4 - 140x^3 + 25x^2$

## תשובות סופיות:

- א.  $3(x-4)$     ב.  $2(3y-2)$     ג.  $4(5-2a)$     (1)
- ד.  $4(a^3+2b)$     ה.  $5(15m^2+5m+3)$     ו.  $8(5a^2-b^2+8c^2)$
- א.  $y(y+5)$     ב.  $x(3-11x^2)$     ג.  $y(6y+5y^2+4)$     (2)
- ד.  $a^3\left(\frac{1}{2}a^4-\frac{1}{4}a^2+1\right)$
- א.  $2x(x-4)$     ב.  $3t(t+4)$     ג.  $5n(n^2-4n+10)$     (3)
- ד.  $2y^2(4+3y-y^2)$     ה.  $4xy(xy+4x-5y)$     ו.  $3mn(9-n-3n^2)$
- א.  $(x+5)^2$     ב.  $(x+6)^2$     ג.  $(y-9)^2$     ד.  $(y-11)^2$     (4)
- ה.  $(2x+1)^2$     ו.  $(4y-1)^2$     ז.  $(3x-4)^2$     ח.  $(5x+7)^2$
- א.  $(r+5)(r-5)$     ב.  $(x+9)(x-9)$     ג.  $(5y+7)(5y-7)$     (5)
- ד.  $(11x+1)(11x-1)$     ה.  $(xy+2)(xy-2)$     ו.  $(3y^2+13x^2)(3y^2-13x^2)$
- א.  $y(1+y)(1-y)$     ב.  $x(x-5)^2$     ג.  $(m^2+1)(m+1)(m-1)$     (6)
- ד.  $x^2(14x-5)^2$

## פירוק הטרינום:

### סיכום כללי:

טרינום משמעו תלת איבר מהצורה:  $ax^2 + bx + c$  כאשר  $a, b, c$  הם מספרים כלשהם.

שיטת הטרינום מאפשרת לפרק את תלת האיבר ל-4 איברים ע"י פיצול האיבר  $bx$  לשני איברים באופן כזה שמאפשר להוציא גורם משותף.

הכלל הוא למצוא שני מספרים,  $m_1$  ו- $m_2$ , שמקיימים:  $m_1 \cdot m_2 = ac$  ו- $m_1 + m_2 = b$ .  
 לאחר מכן ניתן לפרק את הטרינום:  $ax^2 + bx + c = ax^2 + m_1x + m_2x + c$ .  
 השלב האחרון הוא הוצאת גורם משותף מכל זוג:  $\underbrace{ax^2 + m_1x} + \underbrace{m_2x + c}$ .

### הערה:

במקרה שנוסחת השורשים ידועה, ניתן להיעזר בה כדי למצוא את המספרים  $m_1$  ו- $m_2$  באופן

הבא:  $m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ,  $m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  ולאחר מכן ניתן לכתוב את הטרינום

כמכפלה:  $ax^2 + bx + c = a(x - m_1)(x - m_2)$ . אם קיים פתרון (שורש) אחד  $m_1 = m_2 = \frac{-b}{2a}$  אז

נכתוב:  $ax^2 + bx + c = a(x - m_1)^2$  ואם לא קיימים פתרונות אז לא קיים פירוק כלל.

### שאלות:

(1) פרק את הביטויים הבאים לפי פירוק טרינום:

- |                     |                     |                     |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| א. $x^2 + 5x + 4$   | ב. $x^2 - 8x + 15$  | ג. $x^2 - 33x + 62$ |
| ד. $2x^2 + 7x - 15$ | ה. $3x^2 - 11x + 6$ | ו. $6x^2 + 5x + 1$  |
| ז. $2x^2 + x - 6$   | ח. $x^2 - 18x + 81$ | ט. $x^2 + 2x + 8$   |

(2) פרק את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחת השורשים.

הערה: במידה ולא למדת על נוסחת השורשים התעלם משאלה זו.

- |                      |                    |
|----------------------|--------------------|
| א. $6x^2 + 5x + 1$   | ב. $x^2 + 5x + 4$  |
| ג. $4x^2 + 20x + 25$ | ד. $3x^2 - x + 20$ |

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } (x+1)(x+4) \quad \text{ב. } (x-3)(x-5) \quad \text{ג. } (x-2)(x-31)$$

$$\text{ד. } (2x-3)(x+5) \quad \text{ה. } (3x-2)(x-3) \quad \text{ו. } (3x+1)(2x+1)$$

$$\text{ז. } (x+2)(2x-3) \quad \text{ח. } (x-9)^2 \quad \text{ט. אין פירוק.}$$

$$(2) \quad \text{א. } 6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) \quad \text{ב. } (x+1)(x+4) \quad \text{ג. } (2x+5)^2 \quad \text{ד. אין פירוק.}$$

## שברים אלגברים:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

שבר אלגברי מורכב משתי תבניות, אשר אחת מחלקת את השנייה.

$$\text{דוגמא לשברים אלגבריים: } \frac{x+1}{x+2}, \frac{3x}{x^2+1}, \frac{4}{x-x^3}$$

במקרה בו המכנה הוא מספר, לא מדובר בשבר אלגברי מכיוון שניתן לכתוב את

$$\text{הביטוי ללא צורך בחילוק בין ביטויים שונים כגון: } \frac{3x+5}{4} = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$

#### תחום הגדרה של שבר:

היות ושבר אלגברי הוא תבנית אשר יכולה לקבל ערכים שונים בעת הצבות שונות, חשוב להגביל את המספרים שניתן להציב באופן כזה שלא תתקבל חלוקה באפס.

$$\text{דוגמא: השבר } \frac{1}{x+4} \text{ לא מוגדר כאשר } x = -4 \text{ מכיוון שמתקבל: } \frac{1}{0}$$

במקרים אלו נדרוש **תנאי** על המשתנה אשר יכתב באופן הבא:  $x \neq -4$  ומשמעו היא ש- $x$  יכול לקבל על ערך מספרי אפשרי למעט -4, מכיוון שבמקרה זה השבר לא מוגדר.

#### כלל צמצום שברים אלגברים:

ניתן לצמצם שברים אלגברים ע"י הבאת המונה והמכנה למכפלה של ביטויים. במידה וקיימות פעולות החיבור והחיסור בין איברים שונים לא ניתן לבצע צמצום של איברים דומים בין המונה והמכנה. להלן מספר דוגמאות הנוגעות לצמצומים:

$$\bullet \text{ צמצום ע"י הוצאת גורם משותף: } \frac{2x+8}{x+4} = \frac{2(x+4)}{x+4} = \frac{2 \cdot 1}{1} = 2$$

$$\bullet \text{ צמצום ע"י נוסחת כפל מקוצר: } \frac{3x-15}{x^2-10x+25} = \frac{3(x-5)}{(x-5)^2} = \frac{3 \cdot 1}{x-5} = \frac{3}{x-5}$$

$$\bullet \text{ צמצום ע"י פירוק טרינום: } \frac{x^2-2x-3}{x^2-3x-4} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-4)} = \frac{x-3}{x-4}$$

## שאלות:

(1) מצא את תחום ההגדרה של השברים האלגבריים הבאים:

א. $\frac{x+4}{x+3}$	ב. $\frac{5}{x-6}$
ג. $\frac{x+7}{2x-8}$	ד. $\frac{x^2+1}{x^2-4x}$
ה. $\frac{3}{x^2+2x+1}$	ו. $\frac{x^2}{x^2-4}$
ז. $\frac{6}{y^4-y^2}$	ח. $\frac{8x-2}{3x^3-15x^2+12x}$

(2) צמצם את השברים הבאים (במידה ולא ניתן צמצם הסבר מדוע):

א. $\frac{ax}{a}$	ב. $\frac{a-x}{a}$
ג. $\frac{a-ax}{a}$	ד. $\frac{x+1}{y+1}$
ה. $\frac{x}{x+y}$	ו. $\frac{6x}{6y}$
ז. $\frac{x^2y}{xy^2}$	ח. $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$
ט. $\frac{4x^2y}{xy}$	י. $\frac{3x^2}{x^2+3}$

(3) צמצם את השברים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{3x+12}{x+4}$	ב. $\frac{m^2+4m}{4m+16}$
ג. $\frac{2a-12}{a^2-6a}$	ד. $\frac{x^2-5x}{15-3x}$
ה. $\frac{3-18y^2}{6y^2-1}$	ו. $\frac{4x^3-2x^2}{6x-3}$
ז. $\frac{3y}{y^3-3y^2}$	ח. $\frac{3z^3-12z^2+4z}{z^2+5z}$

4) צמצם את השברים הבאים ע"י פירוק לגורמים וכתוב את תחום הגדרתם:

$\frac{8n - n^2}{n^2 - 16n + 64} \quad \text{ב.}$	$\frac{x^2 + 10x + 25}{2x + 10} \quad \text{א.}$
$\frac{4m^2 + 20m + 25}{4m^2 + 10m} \quad \text{ד.}$	$\frac{z^3 - 4z^2}{2z^2 - 16z + 32} \quad \text{ג.}$
$\frac{a^3 + 4a^2b + 4ab^2}{3ab + 6b^2} \quad \text{ו.}$	$\frac{18y^2 - 24y + 8}{2y - 3y^2} \quad \text{ה.}$

5) צמצם את השברים הבאים ע"י טרינום ריבועי וכתוב את תחום הגדרתם:

$\frac{m^2 - 12m + 32}{m - 4} \quad \text{ב.}$	$\frac{x + 2}{x^2 - 3x - 10} \quad \text{א.}$
$\frac{3z^2 + 26z + 16}{3z + 2} \quad \text{ד.}$	$\frac{4y - 10}{2y^2 + y - 15} \quad \text{ג.}$
$\frac{9n^2 - 12n}{4 + 5n - 6n^2} \quad \text{ו.}$	$\frac{x^2 + 5x - 36}{x^3 + 9x^2} \quad \text{ה.}$
$\frac{x^2 - 14x + 49}{x^2 + x - 56} \quad \text{ח.}$	$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 5x + 6} \quad \text{ז.}$
$\frac{m^3n - m^2n^2 - m^2 + mn}{2m^2n^3 + mn^2 - 3n} \quad \text{י.}$	$\frac{3a^2b - 10ab^2 + 3b^3}{-3a^3b + 11a^2b^2 - 6ab^3} \quad \text{ט.}$

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x \neq -3 \quad \text{ב. } x \neq 6 \quad \text{ג. } x \neq 4 \quad \text{ד. } x \neq 0, x \neq 4$$

$$\text{ה. } x \neq -1 \quad \text{ו. } x \neq -2, x \neq 2 \quad \text{ז. } y \neq 0, y \neq -1, y \neq 1$$

$$\text{ח. } x \neq 0, x \neq 1, x \neq 4$$

$$(2) \quad \text{א. } x \quad \text{ב. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ג. } 1-x$$

$$\text{ד. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ה. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ו. } \frac{x}{y} \quad \text{ז. } \frac{x}{y}$$

$$\text{ח. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ט. } 4x \quad \text{י. לא ניתן לצמצם}$$

$$(3) \quad \text{א. } x \neq -4, 3 \quad \text{ב. } \frac{m}{4}, m \neq -4 \quad \text{ג. } \frac{2}{a}, a \neq 0, 6$$

$$\text{ד. } -\frac{x}{3}, x \neq 5 \quad \text{ה. } -3, y \neq \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \text{ו. } \frac{2x^2}{3}, x \neq \frac{1}{2}$$

$$\text{ז. } \frac{3}{y(y-3)}, y \neq 0, 3 \quad \text{ח. } \frac{3z^2 - 12z + 4}{z+5}, z \neq 0, -5$$

$$(4) \quad \text{א. } \frac{x+5}{2}, x \neq -5 \quad \text{ב. } \frac{n}{8-n}, n \neq 8 \quad \text{ג. } \frac{z^2}{2(z-4)}, z \neq 4$$

$$\text{ד. } \frac{2m+5}{2m}, m \neq 0, -\frac{5}{2} \quad \text{ה. } \frac{2(2-3y)}{y}, y \neq 0, \frac{2}{3} \quad \text{ו. } \frac{a(a+2b)}{3b}, b \neq 0, a \neq -2b$$

$$(5) \quad \text{א. } \frac{1}{x-5}, x \neq 5, -2 \quad \text{ב. } m-8, m \neq 4 \quad \text{ג. } \frac{2}{y+3}, x \neq -3, \frac{5}{2}$$

$$\text{ד. } z+8, z \neq -\frac{2}{3} \quad \text{ה. } \frac{x-4}{x^2}, x \neq 0, -9 \quad \text{ו. } \frac{-3n}{2n+1}, n \neq -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}$$

$$\text{ז. } \frac{x+2}{x+3}, x \neq -2, -3 \quad \text{ח. } \frac{x-7}{x+8}, x \neq 7, -8$$

$$\text{ט. } \frac{3a-b}{a(2b-3a)}, a \neq 0, b \neq 0, a \neq 3b, 2b \neq 3a \quad \text{י. } \frac{m(m-n)}{n(2mn+3)}, mn \neq 1, -\frac{3}{2}, n \neq 0$$

## כפל וחילוק של שברים אלגברים:

### סיכום כללי:

כפל שברים יתבצע ע"י הכפלת כל מונה בנפרד והכפלת כל מכנה בנפרד.  
חילוק שברים יתבצע ע"י לקיחת ההופכי של שבר המחלק וביצוע פעולת כפל.

$$\bullet \text{ דוגמה לכפל שברים: } \frac{x+1}{x^2} \cdot \frac{x}{3x+3} = \frac{x+1}{x^2} \cdot \frac{x}{3(x+1)} = \frac{\cancel{x}(x+1)}{3x^{\cancel{2}}(x+1)} = \frac{1}{3x}$$

$$\bullet \text{ דוגמה לחילוק שברים: } \frac{4x}{y} : \frac{12}{y^2+y} = \frac{4x}{y} \cdot \frac{y^2+y}{12} = \frac{\cancel{4}x}{\cancel{12}} \cdot \frac{\cancel{y}(y+1)}{\cancel{12}_3} = \frac{x(y+1)}{3}$$

### שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

$$\text{א. } \frac{x}{3} \cdot \frac{x}{8} \quad \text{ב. } \frac{x}{3} \cdot \frac{9}{x^2}$$

$$\text{ג. } 7y \cdot \frac{5}{y^2} \quad \text{ד. } 6x^2 \cdot \frac{3}{40x}$$

$$\text{ה. } (x^2+3x) \cdot \frac{2}{3x+9} \quad \text{ו. } (a^2-25) \cdot \frac{20}{5a+25}$$

$$\text{ז. } \frac{w^2-9}{w} \cdot \frac{w^2}{2w+6} \quad \text{ח. } \frac{y+4}{y^2+16} \cdot \frac{y^2-16}{2y+8}$$

$$\text{ט. } \frac{z^2+30z+225}{6z+90} \cdot \frac{12}{2z-10} \quad \text{י. } \frac{5n^2}{n^2-121} \cdot \frac{2n^2+44n+242}{n+2} \cdot \frac{n^2+4n+4}{n}$$

(2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{x}{8} : \frac{x}{6}$	ב. $\frac{y}{25} : \frac{5}{y}$
ג. $a^2 : \frac{1}{6a}$	ד. $\frac{5}{6a} : a^2$
ה. $(d^2 - 3d) : \frac{5d - 15}{5d}$	ו. $\frac{t}{t+4} : \frac{3t}{t+4}$
ז. $\frac{y^2 + 8y + 16}{8y^2} : \frac{y^2 - 16}{7y^2}$	ח. $\frac{a^2 - 64}{a^2 - 36} : \frac{a+8}{a+6}$

תשובות סופיות:

א. $\frac{x^2}{24}$	ב. $\frac{3}{x}$	ג. $\frac{35}{y}$	ד. $\frac{9x}{20}$	ה. $\frac{2x}{3}$	(1)
ו. $4(a-5)$	ז. $\frac{w(w-3)}{2}$	ח. $\frac{y^2 - 16}{2y^2 + 32}$	ט. $\frac{z+15}{z-5}$	י. $\frac{10n(n+11)(n+2)}{n-11}$	
א. $\frac{3}{4}$	ב. $\frac{y^2}{125}$	ג. $6a^3$	ד. $\frac{5}{6a^3}$	ה. $d^2$	ו. $\frac{1}{3}$
ז. $\frac{7(y+4)}{8(y-4)}$	ח. $\frac{a-8}{a-6}$				

## חיבור וחיסור של שברים אלגברים:

### סיכום כללי:

ביצוע פעולת החיבור והחיסור תתבצע באופן זהה לשברים מספריים. נרצה להרחיב את השברים כך שהמכנה של שניהם יהיה זהה, ולאחר מכן נחבר את המונים. כדי להרחיב את השברים נעזר בפעולת מציאת מכנה משותף. לשם כך נעזר בפירוקים השונים כדי להביא את הביטויים שבכל מכנה לצורתם המופשטת. דוגמא לחיבור שברים בעלי אותו מכנה:

$$\frac{1}{x} + \frac{x+1}{x} = \frac{1+(x+1)}{x} = \frac{x+2}{x}$$

דוגמא לחיבור מספר לשבר אלגברי:

$$2 + \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+2)}{x+2} + \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+2)+3}{x+2} = \frac{2x+7}{x+2}$$

דוגמא לחיבור שברים עם מכנים שונים (ע"י פעולת מכנה משותף):

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{x}{x(x+1)} + \frac{x+1}{x(x+1)} = \frac{x+x+1}{x(x+1)} = \frac{2x+1}{x(x+1)}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י שימוש בפירוק לגורמים (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{1}{x^2-3x} + \frac{3}{x-3} = \frac{1}{x^2-3x} + \frac{3x}{x^2-3x} = \frac{1+3x}{x^2-3x}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{3}{x^2-6x+9} - \frac{2}{x^2-9} = \frac{3}{(x-3)^2} - \frac{2}{(x-3)(x+3)} = \frac{3(x+3)-2(x-3)}{(x-3)^2(x+3)} = \frac{x+15}{(x-3)^2(x+3)}$$

## שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

א.  $\frac{a}{6} + \frac{a-5}{6}$

ג.  $\frac{x-2}{x+1} + \frac{3+4x}{x+1}$

ב.  $\frac{5}{x} + \frac{4x+3}{x}$

ד.  $\frac{7z}{2z-3} - \frac{4z}{2z-3} - \frac{z+3}{2z-3}$

(2) פשט את הביטויים הבאים:

א.  $\frac{1}{ab} - \frac{5}{bc}$

ג.  $\frac{c}{ab} - \frac{ad}{bc} + \frac{2b}{cd}$

ב.  $\frac{1}{xy} + \frac{5}{yz} + \frac{4}{xz}$

ד.  $-\frac{5}{x} + \frac{x+1}{xy^2}$

ה.  $\frac{1}{(y+1)^2} + \frac{3}{y+1}$

ו.  $\frac{3}{z(z-3)} - \frac{2}{z(z-2)}$

(3) פשט את הביטויים הבאים:

א.  $1 - \frac{2}{x}$

ג.  $2 + \frac{2}{x+1}$

ב.  $1 + \frac{3}{y^2}$

ד.  $3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x}$

ה.  $\frac{a+1}{a^2} - \frac{3-a}{4a} - 3$

ו.  $\frac{x}{9yz} + \frac{z}{3y^2x} + \frac{3-y}{12xz} - 3\frac{1}{2}$

(4) פשט את הביטויים הבאים:

א.  $\frac{3}{x+1} + \frac{1}{x}$

ג.  $\frac{a+1}{a+2} + \frac{3}{a}$

ב.  $\frac{4}{y+2} - \frac{3}{y}$

ד.  $\frac{1}{z+3} + \frac{2}{3z} - \frac{3}{z}$

5 פשט את הביטויים הבאים:

$$\frac{3}{x^2-16} + \frac{2}{(x+4)^2} \quad \text{ב.}$$

$$\frac{24}{a^2-9} + \frac{4}{a+3} \quad \text{א.}$$

$$\frac{3z}{z^2+4z+3} - \frac{z+0.5}{z^2+2z+1} \quad \text{ד.}$$

$$\frac{y}{(y-2)^2} + \frac{3y}{4-y^2} \quad \text{ג.}$$

$$\frac{2a+3}{2a^2+15a+7} + \frac{a+3}{a^2+14a+49} \quad \text{ו.}$$

$$\frac{x-1}{x^2+3x-40} + \frac{2}{-x^2+8x-15} \quad \text{ה.}$$

$$\frac{1}{a-b} + \frac{2}{a+2b} - \frac{3b}{a^2+ab-2b^2} \quad \text{ח.}$$

$$\frac{x}{x-3} + \frac{9-x}{x^2-8x+15} \quad \text{ז.}$$

6 פשט את הביטויים הבאים:

$$\left(\frac{2}{x}+1\right) \cdot \frac{x^2}{7x+14} \quad \text{ב.}$$

$$\frac{4}{x} \cdot \frac{x^2}{8} + \frac{9}{x+1} \cdot \frac{x+1}{18} \quad \text{א.}$$

$$\left(3x - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}\right) : \frac{6x^3+2x-4}{x^2} \quad \text{ד.}$$

$$\frac{7}{y^2} : \frac{6}{y^3} - \frac{y-4}{63} \cdot \frac{3y-4}{y^2-8y+16} \quad \text{ג.}$$

$$\left(\frac{2x+1}{20x^2-28x-3} - \frac{3x+1}{30x^2-17x-2}\right) : \frac{18x+3}{6x^2-13x+6} \quad \text{ה.}$$

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{2a-5}{6} & \text{ב.} & \frac{4x+8}{x} & \text{ג.} & \frac{5x+1}{x+1} & \text{ד.} & 1 \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{c-5a}{abc} & \text{ב.} & \frac{z+5x+4y}{xyz} & \text{ג.} & \frac{c^2d - a^2d^2 + 2ab^2}{abcd} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{ד.} & \frac{-5y^2 + x + 1}{xy^2} & \text{ה.} & \frac{3y+4}{(y+1)^2} & \text{ו.} & \frac{1}{(z-2)(z-3)} \end{array}$$

$$(3) \quad \begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{x-2}{x} & \text{ב.} & \frac{y^2+3}{y^2} & \text{ג.} & \frac{2x+4}{x+1} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{ד.} & \frac{9x-2}{3x} & \text{ה.} & \frac{-11a^2 + a + 4}{4a^2} & \text{ו.} & \frac{4x^2y + 12z^2 + 9y^2 - 3y^3 - 126xy^2z}{36xy^2z} \end{array}$$

$$(4) \quad \begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{4x+1}{x(x+1)} & \text{ב.} & \frac{y-6}{y(y+2)} & \text{ג.} & \frac{a^2 + 4a + 6}{a(a+2)} \end{array}$$

$$\text{ד.} \quad \frac{4z+21}{3z(z+3)}$$

$$(5) \quad \begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{4}{a-3} & \text{ב.} & \frac{5x+4}{(x-4)(x+4)^2} & \text{ג.} & \frac{2y(4-y)}{(y-2)^2(y+2)} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{ד.} & \frac{(4z+3)(z-1)}{2(z+1)^2(z+3)} & \text{ה.} & \frac{x^2 - 6x - 13}{(x+8)(x-5)(x-3)} & \text{ו.} & \frac{4(a^2 + 6a + 6)}{(a+7)^2(2a+1)} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{ז.} & \frac{x-3}{x-5} \\ \text{ח.} & \frac{3}{a+2b} \end{array}$$

$$(6) \quad \begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{x+1}{2} & \text{ב.} & \frac{x}{7} & \text{ג.} & \frac{147y^2 - 594y + 8}{126(y-4)} & \text{ד.} & \frac{1}{2} & \text{ה.} & \frac{1}{3(10x+1)} \end{array}$$

## שברים כפולים:

### סיכום כללי:

שבר כפול מורכב באופן הבא:  $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$  כאשר מתקיים:  $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

נובע מכאן כי ניתן לצמצם ביטויים בין שני המכנים או שני המונים בלבד.

### שאלות:

פשט את הביטויים הבאים:

$\frac{y+1}{2y+2} \quad (2)$	$\frac{4x}{12} \quad (1)$
$\frac{5}{t^2-81}$	$\frac{x}{5}$
$\frac{9t^2}{6t+54} \quad (4)$	$\frac{t}{30t^2} \quad (3)$
$\frac{4x}{x+1} \quad (6)$	$\frac{3y^3-y^2}{25} \quad (5)$
$\frac{x^2+2x+1}{t^2-t-20}$	$\frac{y^2}{3-y}$
$\frac{16t+8}{25-t^2} \quad (8)$	$\frac{8c^2}{3c^3-9c^2-12c} \quad (7)$
$\frac{2t+1}{x^2+2x+1}$	$\frac{15c+15}{1-4+\frac{x}{x+1}} \quad (9)$
	$\frac{1-3x(x+1)}{5x+5}$

## תשובות סופיות:

$$\frac{x^2}{3} \quad (1)$$

$$2.5 \quad (2)$$

$$\frac{1}{6t^3} \quad (3)$$

$$\frac{t-9}{54t^2} \quad (4)$$

$$\frac{(3y-1)(3-y)}{25} \quad (5)$$

$$\frac{x(x+1)}{2} \quad (6)$$

$$\frac{c}{c-4} \quad (7)$$

$$\frac{t+4}{-8(t+5)} \quad (8)$$

$$\frac{5}{x} \quad (9)$$

# מתמטיקה 0

## פרק 2 - משוואות אלגבריות

### תוכן העניינים

47	1. משוואות ממעלה ראשונה
49	2. מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה
52	3. משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון
53	4. משוואה ממעלה שנייה
55	5. משוואות דו-ריבועיות
57	6. משוואות עם פרמטרים
59	7. משוואות עם שורשים
61	8. משוואות עם ערך מוחלט
62	9. מערכת משוואות ממעלה שנייה
64	10. משוואות מתקדמות מסכמות
67	11. פישוט ביטויים ומשוואות ממעלה שלישית

## משוואה ממעלה ראשונה:

### סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה היא מהצורה:  $ax = b$  (כלומר, החזקה של הנעלם היא 1).

פתרון של משוואה ממעלה ראשונה הוא  $x = \frac{b}{a}$  כאשר  $a \neq 0$ .

שלבי הפתרון הם:

1. ביצוע מכנה משותף (במידה וצריך).
2. פתיחת סוגריים אם ישנם.
3. העברת אגפים וכינוס אברים דומים (בידוד הנעלם באגף אחד והמספרים באגף שני).
4. בידוד הנעלם ומציאתו ע"י חילוק במקדם שלו.

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות ממעלה ראשונה):

ב.  $7 - 2x = 7$

א.  $6x + 2 = 8$

ד.  $2x + 6 = 8 + x$

ג.  $2x + x = 24$

ו.  $6x - 3 + 5 - 7x = x - 5x - 7$

ה.  $-7x + 5 + 2x = 4x - 13$

ח.  $x - 2 + 5x = 4 - 3x - 5 + 7x + 7$

ז.  $2 - 5x + 7 = -3x + 8$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פתיחת סוגריים):

ב.  $7x - 4(3 - 4x) = -x$

א.  $3(x - 1) - 4 = 2$

ד.  $5x - (3x - 7)4 = 21$

ג.  $6(4 - x) - (6 - x) = 3x$

ו.  $(7 - x)(1 - x) - (x - 3)^2 = 0$

ה.  $x(x - 5) = x^2 - 7x + 8$

3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה מספרי):

$$\begin{array}{ll}
 \text{א. } \frac{x}{3} - \frac{x}{9} = -4 & \text{ב. } \frac{4x}{15} - \frac{3x}{10} = 1 \\
 \text{ג. } \frac{2}{3}x + \frac{4}{5}x = x - \frac{7}{15} & \text{ד. } \frac{5x+1}{6} - \frac{6x-1}{5} = \frac{3x+1}{4} - 1 \\
 \text{ה. } \frac{2}{5}(x-3) - \frac{3}{15}(4-x) = x+2 & \text{ו. } 5\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{7}\right) - x = 1
 \end{array}$$

4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם נעלם במכנה):

$$\begin{array}{ll}
 \text{א. } \frac{1}{4} - \frac{2}{x} = 0 & \text{ב. } \frac{1}{2} - \frac{x}{x-1} = 0 \\
 \text{ג. } \frac{3}{x} = \frac{1}{x+2} & \text{ד. } \frac{5}{2x-1} = \frac{4}{3x+2} \\
 \text{ה. } \frac{x+5}{3x^2} - \frac{1}{6x} = \frac{1}{x} & \text{ו. } \frac{1}{4x} + \frac{3}{x} = \frac{13}{2}
 \end{array}$$

5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה משותף ע"י פירוק לגורמים):

$$\begin{array}{ll}
 \text{א. } \frac{x^2+2}{3x^2+5x} = \frac{3x-1}{9x+15} & \text{ב. } \frac{7}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{2-2x} = 0 \\
 \text{ג. } \frac{3}{(2-x)^2} + \frac{5}{12-3x^2} = 0 & \text{ד. } \frac{4x^2-24x+36}{x-3} = 12
 \end{array}$$

### תשובות סופיות:

- (1) א.  $x=1$     ב.  $x=0$     ג.  $x=8$     ד.  $x=2$     ה.  $x=2$     ו.  $x=-3$
- ז.  $x=\frac{1}{2}$     ח.  $x=4$
- (2) א.  $x=3$     ב.  $x=\frac{1}{2}$     ג.  $x=2\frac{1}{4}$     ד.  $x=1$     ה.  $x=4$     ו.  $x=-1$
- (3) א.  $x=-18$     ב.  $x=-30$     ג.  $x=-1$     ד.  $x=1$     ה.  $x=-10$     ו.  $x=-21$
- (4) א.  $x=8$     ב.  $x=-1$     ג.  $x=-3$     ד.  $x=-2$     ה.  $x=2$     ו.  $x=\frac{1}{2}$
- (5) א.  $x=-6$     ב.  $x=-7$     ג.  $x=-7$     ד.  $x=6, x \neq 3$

## מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

הגדרה:

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (ליניאריות) היא מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

כאשר  $a_1, b_1, c_1$  ו- $a_2, b_2, c_2$  הם מקדמים מספריים.

$$\cdot \begin{cases} y = 3x - 1 \\ \frac{x + 3}{2} = y + 6 \end{cases}, \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} : \text{דוגמאות למערכות של משוואות}$$

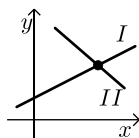
פתרון של מערכת משוואות:

פתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור המקיים את כל המשוואות שבמערכת.

הצגה גרפית של מערכת משוואות:

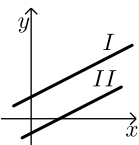
פתרון גרפי של מערכת משוואות הוא נקודת החיתוך של הישרים המייצגים כל משוואה.

יתכנו שלושה מצבים הדדיים בין שני ישרים:



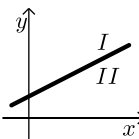
- הישרים נחתכים:

במקרה זה נקודת החיתוך תהיה פתרון המערכת.



- הישרים מקבילים:

במקרה זה לא יהיה פתרון למערכת.



- הישרים מתלכדים:

במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות למערכת המשוואות.

### פתרון אלגברי של מערכת משוואות:

- פתרון ע"י שיטת ההצבה :  
נבודד את אחד הנעלמים ממשוואה אחת ונציב אותו במשוואה השנייה.  
נבחר בשיטה זו במקרים בהם קל לבודד נעלם באחת המשוואות.
  - פתרון ע"י השוואת מקדמים :
1. כופלים (או מחלקים) משוואה אחת (או שתיהן) במספר השונה מאפס כך שתתקבלנה משוואות שקולות בעלות מקדמים נגדיים או זהים עבור אחד המשתנים.
  2. מחברים (או מחסרים) את המשוואות ומקבלים משוואה חדשה עם נעלם אחד.
  3. מוצאים את ערך הנעלם מהמשוואה החדשה ומציבים אותו באחת המשוואות המקוריות למציאת ערך הנעלם השני.

### הערה:

נוח להשתמש בשיטת השוואת המקדמים ע"י כך שמעבירים את המערכת הנתונה למערכת שקולה שבה המשתנים באגף אחד והמספר החופשי באגף השני.

### שאלות:

#### 1) פתור את המשוואות הבאות :

$\begin{cases} -3x + 2y = -16 \\ x = 5y + 14 \end{cases} \text{ ג.}$	$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \text{ ב.}$	$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ y = 5 \end{cases} \text{ א.}$
$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 7y = 11 \end{cases} \text{ ו.}$	$\begin{cases} -5x + 7y = -26 \\ x + 3y = -8 \end{cases} \text{ ה.}$	$\begin{cases} 5x - 2y = -2 \\ x + 4y = 4 \end{cases} \text{ ד.}$

#### 2) פתור את המשוואות הבאות :

$\begin{cases} 5x + 2y = 14 \\ 5x + 3y = 23 \end{cases} \text{ ב.}$	$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x - 3y = 3 \end{cases} \text{ א.}$
$\begin{cases} 4x = 3y - 29 \\ 5y = 9 - 13x \end{cases} \text{ ד.}$	$\begin{cases} 5y = 2x \\ 4x = 5y + 8 \end{cases} \text{ ג.}$

#### 3) פתור את המשוואות הבאות :

$\begin{cases} 2(x - y) + 4y = 1 + x \\ 2 - 7y + x = 3(x - y) \end{cases} \text{ ב.}$	$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 4x + 8y = 5 \end{cases} \text{ א.}$
---	--

4 פתור את המשוואות הבאות :

$$\begin{cases} \frac{x-3}{8} - \frac{x+y}{16} = \frac{y-1}{4} & \text{ב.} \\ 3(2x-y) - 4x - 11 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y - x + 2 = 4x + 2 - 3y & \text{א.} \\ 2x - 3 - y = 5y - 4x + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3x-1}{4} - \frac{2}{5}(x-y) = \frac{3}{10}(x+3) & \text{ג.} \\ \frac{x+1}{4} - \frac{y}{2} = 1 \end{cases}$$

5 פתור את המשוואות הבאות :

$$\begin{cases} 4x - \frac{7}{y} = -3 & \text{ג.} \\ 5x + \frac{2}{y} = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = 2 & \text{ב.} \\ \frac{9}{x} - \frac{4}{y} = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 4 & \text{א.} \\ \frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4 \end{cases}$$

6 פתור את המשוואות הבאות :

$$\begin{cases} xy = 20 & \text{ב.} \\ y(3x-4) = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(y+2) + y = xy - 5 & \text{א.} \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 4xy = 22 & \text{ג.} \\ 6x + xy = -20 \end{cases}$$

### תשובות סופיות :

1 א. (2,5) ב. (-7,-10) ג. (4,-2) ד. (0,1) ה. (1,-3) ו. (-2,3)

2 א.  $(4, \frac{1}{3})$  ב.  $(-\frac{4}{5}, 9)$  ג. (4,1.6) ד. (-2,7)

3 א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות.

4 א. (6,5) ב. (7,1) ג. (7,2)

5 א. (1,1) ב. (-3,1) ג. (1,1)

6 א. (-1,-3) ב. (2,10) ג. (-2,4)

## משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:

### סיכום כללי:

#### משוואה ממעלה ראשונה:

למשוואה ממעלה ראשונה מהצורה:  $ax = b$  יתכן פתרון יחיד אם ורק אם  $a \neq 0$   
 מכיוון שניתן לחלק ולכתוב:  $x = \frac{b}{a}$ .

כאשר  $a = 0$  מתקבלת המשוואה  $0 \cdot x = b$  ויתכנו שני מצבים:

1. אם  $b = 0$  את המשוואה היא  $0x = 0$  ויש אינסוף פתרונות המקיימים אותה.
2. אם  $b \neq 0$  את המשוואה היא  $0x = b \neq 0$  ואין אף ערך של  $x$  המקיים אותה.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$x + 4 = 6 + x \quad (1) \qquad 3x + 6 - x = 4 + 2x + 2 \quad (2)$$

$$6(x - 2) = 2x + 5 + 4x \quad (3) \qquad 5x - 3 + x = 4x + 2x - 3 \quad (4)$$

$$(5) \quad \text{נתונה המשוואה: } 3 - 2(x + 2) = 5x + \square$$

- א. איזה מספר יש להציב ב- $\square$  על מנת שפתרון המשוואה יהיה 1?
- ב. איזה מספר יש להציב ב- $\square$  על מנת שפתרון המשוואה יהיה 0?
- ג. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- $\square$  על מנת שלמשוואה יהיו אינסוף פתרונות.
- ד. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- $\square$  על מנת שלמשוואה לא יהיה פתרון.

### תשובות סופיות:

- (1) אף פתרון.
- (2) אינסוף פתרונות.
- (3) אין פתרון.
- (4) אינסוף פתרונות.
- (5) א. -8      ב. -1      ג.  $-7x - 1$   
 ד.  $-7x + k$  כאשר  $k$  הוא מספר כלשהו השונה מ-1.

## משוואה ממעלה שנייה:

### סיכום כללי:

משוואה מהצורה:  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ), נקראת משוואה ריבועית. פתרונות המשוואה יסומנו ב-  $x_1$  ו-  $x_2$  ויחושבו לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

למשוואה ריבועית יתכנו שלושה סוגים של פתרונות:

- משוואה עם שני פתרונות ממשיים שונים.**  
 אם מתקבל מספר חיובי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים.  
 דוגמא:  $x^2 + 5x - 4 = 0$ .
- משוואה עם פתרון ממשי אחד בלבד.**  
 אם מתקבל אפס בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד בלבד.  
 דוגמא:  $x^2 + 4x + 4 = 0$ .
- משוואה ללא פתרונות ממשיים כלל.**  
 אם מתקבל מספר שלילי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה לא יהיו פתרונות ממשיים כלל.  
 דוגמא:  $x^2 + x + 4 = 0$ .

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

ב.  $-x^2 + 10x - 16 = 0$

ד.  $2x^2 - 6x + 5 = 0$

א.  $x^2 + 3x - 10 = 0$

ג.  $25x^2 - 20x + 4 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות:

ב.  $-x(x-5) = (1-3x)(1-x) + 4$

ד.  $(2x-1)^2 + x(2x+3) = (x-1)(x-7)$

א.  $4x^2 - 5x + 7 = 4 - x^2 + 13$

ג.  $2(x-5)^2 - (2x-3)^2 = 10x + 21$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת  $b$ ):

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & x^2 - 36 = 0 \\ \text{ב.} & 32x^2 - 18 = 0 \\ \text{ג.} & 4x - x(x+2) = 3(x-1) - x - 6 \\ \text{ד.} & (2x-1)^2 + (2x+1)^2 = 10 \end{array}$$

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת  $c$ ):

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & -7x^2 - 14x = 0 \\ \text{ב.} & 5x^2 - x = 0 \\ \text{ג.} & 6x(x-2) - 1 = 4x - 3(x+1) + 2 \\ \text{ד.} & (5x-2)^2 = (x-2)(x+3) + 10 \end{array}$$

(5) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \frac{4x+1}{3} - \frac{x+2}{2} = \frac{2}{x} \\ \text{ב.} & \frac{x^2-9}{x+3} + x = x^2 - 18 \\ \text{ג.} & \frac{3}{2x+2} - \frac{2x-5}{2(x-1)^2} - \frac{4}{1-x^2} = 0 \\ \text{ד.} & \frac{x}{2x^2-72} + \frac{2}{x^2+12x+36} = \frac{8x-15}{24-4x} + 2 \end{array}$$

### תשובות סופיות:

$$\begin{array}{ll} \text{(1)} & \text{א. } x_1 = 2, x_2 = -5 \quad \text{ב. } x_1 = 2, x_2 = 8 \\ & \text{ג. } x = \frac{2}{5} \quad \text{ד. אין פתרון.} \\ \text{(2)} & \text{א. } x_1 = 2, x_2 = -1 \quad \text{ב. } x_1 = 1, x_2 = 1\frac{1}{4} \\ & \text{ג. } x_1 = 1, x_2 = -10 \quad \text{ד. } x_1 = 0.6, x_2 = -2 \\ \text{(3)} & \text{א. } x = \pm 6 \quad \text{ב. } x = \pm \frac{3}{4} \\ & \text{ג. } x = \pm 3 \quad \text{ד. } x = \pm 1 \\ \text{(4)} & \text{א. } x_1 = 0, x_2 = -2 \quad \text{ב. } x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{5} \\ & \text{ג. } x_1 = 0, x_2 = 2\frac{1}{6} \quad \text{ד. } x_1 = 0, x_2 = \frac{7}{8} \\ \text{(5)} & \text{א. } x_1 = 2, x_2 = -1.2 \quad \text{ב. } x = 5, x \neq -3 \\ & \text{ג. } x_1 = 0, x_2 = -5 \quad \text{ד. } x_1 = -7.6, x_2 = -4\frac{2}{7} \end{array}$$

## משוואות דו-ריבועיות:

### סיכום כללי:

משוואה דו-ריבועית היא משוואה מהצורה:  $ax^4 + bx^2 + c = 0$  כאשר הנעלם הוא  $x$ .  
 פתרון המשוואה יבוצע ע"י מעבר לפרמטר:  $x^2 = t \rightarrow at^2 + bt + c = 0$  ומציאתו.  
 לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה ולמצוא את ערכי  $x$ .

ניתן להביא משוואות לצורה זו ולהגדיר ביטוי המופיע בחזקות 2 ו-4 כגון:  
 $t = x^2 - 1$ : באמצעות פרמטר:  $(x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1) - 2 = 0$   
 ובכך לפתור משוואה:  $t^2 + 3t - 2 = 0$  ולהחזיר את ההצבה עבור מציאת  $x$ .  
 דרך הפתרון תקפה לכל משוואה בה הנעלם מופיע בחזקות כפולות כגון 3 ו-6, או 4 ו-8.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- |  |   |
|--|---|
| $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ (2)   | $5x^4 + 3x^2 - 8 = 0$ (1)   |
| $x^2(x^2 + 1) = 10(3x^2 - 10)$ (4)   | $13x^2(3x^2 - 1) - 2 = 3(x^2 - 1)(x^2 + 1)$ (3)                               |
| $x^3 + 4 = \frac{32}{x^3}$ (6)   | $x^6 + x^3 = 56$ (5)  |
| $x^8 - 4x^4 - 50 = 31x^4 - 84$ (8)   | $x - 9\sqrt{x} + 14 = 0$ (7)  |
| $(2x^2 - x)^2 - 4(2x^2 - x) + 3 = 0$ (10)  | $125x^6 - 1 = 124(x^6 + x^3 + 1)$ (9)   |
| $\frac{21}{x^2 - 4x + 10} = 6 + x^2 - 4x$ (12)   | $(x^2 + 2x)^2 + 7x^2 + 14x = -6$ (11)   |
| $\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{7}{6} - \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2}$ (14) | $\frac{12}{x^2 + 2x - 8} = 1 + \frac{7.5}{x^2 + 2x - 3}$ (13)                 |
| $\frac{x^2 - 1}{4x^2 - 28} + 2 = \frac{9}{x^4 - 8x^2 + 7} + \frac{x^2}{2x^2 - 2}$ (16)     | $\frac{3}{3x^2 - 15} + \frac{1}{x^2 + 5} = \frac{10}{x^4 - 25}$ (15)          |
| $\frac{3x^4}{(x+2)^2} + \frac{3x^2}{x+2} = 6$ (18)   | $\left(2x + \frac{3}{x}\right)^2 + 35 = 12\left(2x + \frac{3}{x}\right)$ (17) |
| $(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 5x - 8) = -24$ (20)  | $(2x - x^2 + 3)(2x - x^2 - 2) = 0$ (19)                                       |

**תשובות סופיות:**

$$x = \pm 1 \quad (1)$$

$$x = \pm 1, \pm \sqrt{2} \quad (2)$$

$$x = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3} \quad (3)$$

$$x = \pm 2, \pm 5 \quad (4)$$

$$x_1 = \sqrt[3]{7}, x_2 = -2 \quad (5)$$

$$x = -2, \sqrt[3]{4} \quad (6)$$

$$x_1 = 4, x_2 = 49 \quad (7)$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{34}, x_{3,4} = \pm 1 \quad (8)$$

$$x = 5, -1 \quad (9)$$

$$x_1 = 1.5, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = -\frac{1}{2} \quad (10)$$

$$x = -1 \quad (11)$$

$$x_{1,2} = 1, 3 \quad (12)$$

$$x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 3.06, x_4 = -5.06 \quad (13)$$

$$x_1 = 0, x_2 = -2 \quad (14)$$

(15) אין פתרונות.

$$x = \pm \sqrt{\frac{3}{7}} \quad (16)$$

$$x = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 3 \quad (17)$$

$$x = -1, 2 \quad (18)$$

$$x = 3, -1 \quad (19)$$

$$x = \pm 1, 4, 6 \quad (20)$$

## משוואות עם פרמטרים:

### סיכום כללי:

משוואה עם פרמטר הינה משוואה שמכילה שני סוגים של גדלים – משתנים ופרמטרים. את המשתנים מקובל לסמן באותיות  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ואת הפרמטרים מסמנים בשאר האותיות. פתרון המשוואה יתקבל ע"י בידוד המשתנה כך שיבוטא באמצעות הפרמטרים שבמשוואה.

למשל פתרון המשוואה:  $mx=4$  (כאשר  $x$  הוא הנעלם ו- $m$  הוא פרמטר) הוא  $x = \frac{4}{m}$

אשר מבוטא באמצעות הפרמטר  $m$ .

בכתיבת פתרון של משוואה עם פרמטרים יש לציין את תחום ההגדרה של הפרמטר עבורו הפתרון הוא בעל משמעות. בדוגמא הנ"ל תחום ההגדרה הוא  $m \neq 0$ .

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

$$\text{א. } 3x - b = (b + 1)x - 6 \quad \text{ב. } \frac{1}{3}(a - 3x) = \frac{1}{a}(ax - 3)$$

$$\text{ג. } (x - 2a)(x - 2b) = x^2 - 2(a^2 + b^2) \quad \text{ד. } \frac{m+1}{x-1} = \frac{m-1}{x+1}$$

$$\text{ה. } \frac{x}{a^2 - a} - \frac{1}{2a} = \frac{ax + x}{2a^3 - 4a^2 + 2a} - \frac{2}{a^3 - 2a^2 + a}$$

(2) פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\text{א. } \begin{cases} x + my = 1 \\ x + y = m \end{cases} \quad \text{ב. } \begin{cases} ax + y = 2 \\ x + ay = 4 \end{cases}$$

$$\text{ג. } \begin{cases} \frac{x}{m} + y = m \\ x - m^2 y = 1 \end{cases} \quad \text{ד. } \begin{cases} (m-1)x - (2m+3)y = 5 \\ (m+2)x - (2m-1)y = 10m \end{cases}$$

$$\text{ה. } \begin{cases} (2a+b)x - (2a-b)y = 8ab \\ (2a-b)x + (2a+b)y = 8a^2 - 2b^2 \end{cases}$$

(3) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

$$\text{א. } x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \quad \text{ב. } x^2 - 2x + 4a = a^2 + 3$$

$$\text{ג. } x^2 + m(x+10) = 2m^2 - 5x \quad \text{ד. } \frac{1}{a-x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+x} = 0$$

$$\text{ה. } (m^2 + 1)x^2 - m^2x - 1 = 0 \quad \text{ו. } \frac{a}{x} + \frac{1}{b} = \frac{x}{a} + b$$

$$\text{ז. } x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$$

תשובות סופיות:

$$\text{(1) א. } x = \frac{b-6}{2-b}, b \neq 2 \quad \text{ב. } x = \frac{a^2+9}{6a}, a \neq 0 \quad \text{ג. } x = a+b \quad \text{ד. } x = -m \quad \text{ה. } x = a+1$$

$$\text{(2) א. } m \neq 1, (m+1, -1) \quad \text{ב. } a \neq \pm 1, \left( \frac{2a-4}{a^2-1}, \frac{4a-2}{a^2-1} \right)$$

$$\text{ג. } m \neq 0-1, \left( m^2 - m + 1, \frac{m-1}{m} \right) \quad \text{ד. } m \neq 1, -2, (2m+1, m-2)$$

$$\text{ה. } b \neq \pm 2a, (2a+b, 2a-b)$$

$$\text{(3) א. } x = m+1, m-1 \quad \text{ב. } x = a-1, 3-a \quad \text{ג. } x = m-5, -2m$$

$$\text{ד. } a \neq 0, x \neq \pm a, x = \pm a\sqrt{3} \quad \text{ה. } x = 1, -\frac{1}{m^2+1}$$

$$\text{ו. } a, b \neq 0, x = \frac{a}{b}, -ab \quad \text{ז. } a \neq \pm b, x = \frac{a+b}{a-b}, \frac{a-b}{a+b}$$

## משוואות עם שורשים:

### סיכום כללי:

פתרון משוואה מהצורה:  $\sqrt{x} = a$  יתקבל ע"י העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה באופן הבא:  $x = a^2 \rightarrow (\sqrt{x})^2 = (a)^2$ .

### הערות:

- (1) יש לזכור בעת העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה יש לבדוק את כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבתם במשוואה המקורית.
- (2) למשוואה מהצורה  $\sqrt{x} = a$  שבה  $a < 0$  אין פתרון.
- (3) יש לסדר תחילה משוואות שבהן הביטוי עם שורש אינו מבודד.
- (4) במשוואות שבהן יותר מביטוי אחד עם שורש יש לבודד תחילה את אחד הביטויים, להעלות בריבוע ולאחר מכן לחזור על התהליך ולבצע העלאה בריבוע פעם נוספת.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- |  |   |
|--|---|
| $\sqrt{x+2} = x$ (2)                           | $\sqrt{2x+5} = 7$ (1)                               |
| $\sqrt{2x+7} + 4 = x$ (4)                      | $\sqrt{3x+1} + x = 13$ (3)                          |
| $\sqrt{10x+6} + 9 = x$ (6)                     | $\sqrt{x-1} + 3 = x$ (5)                            |
| $\sqrt{24-x} + 3 = 2x$ (8)                     | $\sqrt{x+6} - 2 = 2x$ (7)                           |
| $2x = 16 - 3\sqrt{x-1}$ (10)                   | $\sqrt{x+16} + 4 = 2x$ (9)                          |
| $\sqrt{x^2 - 5x + 12} = 2\sqrt{6-x}$ (12)      | $\sqrt{3x+5} = \sqrt{x+17}$ (11)                    |
| $\sqrt{2x-1} + 3 = \sqrt{7x+1}$ (14)           | $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2x-5} = \sqrt{11-x^2}$ (13) |
| $\sqrt{2x-3} + \sqrt{3-x} = 2$ (16)            | $\sqrt{9x-8} - 3\sqrt{x+4} = -2$ (15)               |
| $\sqrt{2x-2} + \sqrt{5x-4} = \sqrt{3x-2}$ (18) | $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4x+1}$ (17)        |
|  | $3\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} = 2\sqrt{x+2}$ (19)      |

**תשובות סופיות:**

- |                           |               |
|---------------------------|---------------|
| $x = 2$ (2                | $x = 22$ (1   |
| $x = 9$ (4                | $x = 8$ (3    |
| $x = 25$ (6               | $x = 5$ (5    |
| $x = 3.75$ (8             | $x = 0.25$ (7 |
| $x = 5$ (10               | $x = 4.25$ (9 |
| $x = 4, -3$ (12           | $x = 6$ (11   |
| $x = 5$ (14               | $x = 3$ (13   |
| $x = 2, 2\frac{8}{9}$ (16 | $x = 12$ (15  |
| $x = 1$ (18               | $x = 6$ (17   |
|                           | $x = 2$ (19   |

## משוואות עם ערך מוחלט:

**סיכום כללי:**

**הגדרה:**

ערך מוחלט הינו המרחק של מספר מ-0 ומוגדר באופן הבא:  $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ .

**משוואה עם ערך מוחלט:**

משוואה עם ערך מוחלט היא מהצורה:  $|x| = a$ .

כדי לפתור משוואה עם ערכים מוחלטים יש למצוא את נקודות האפס של כל ערך מוחלט (קרי: הנקודות בהן הביטוי שבתוך הערך המוחלט מתאפס) ולפצל את המשוואה הנתונה לתחומים עבור כל תחום.

**שאלות:**

פתור את המשוואות הבאות:

$$|3x+14|=7 \quad (1) \qquad |3x-24|=x \quad (2)$$

$$|12-x|=3x \quad (3) \qquad 2x-|8-x|=10 \quad (4)$$

$$|4x-5|=|2x+13| \quad (5) \qquad |14-3x|=2|x+5| \quad (6)$$

$$|x|+7=|2x| \quad (7) \qquad |x+2|+6=|2x-4| \quad (8)$$

$$|x+2|+|2x-6|=|4x+8| \quad (9) \qquad |10-3x|-|x+4|=|2x-6| \quad (10)$$

**תשובות סופיות:**

$$\begin{array}{llll} x = -\frac{7}{3}, -7 & (1) & x = 6, 12 & (2) \\ x = 9, -1\frac{1}{3} & (5) & x = 24, \frac{4}{5} & (6) \\ x = 0, -12 & (9) & x = 0 & (10) \\ x = 6 & (4) & x = 3 & (3) \\ x = 12, -1\frac{1}{3} & (8) & x = \pm 7 & (7) \end{array}$$

## מערכת משוואות ממעלה שנייה:

### סיכום כללי:

מערכת משוואות ריבועיות מיוחסת למערכת של שתי משוואות (לפחות) שאחת מהן מכילה את אחד מהנעלמים בריבוע. למערכת משוואות ריבועיות יכולים להתקבל עד 4 פתרונות שונים. יש לפתור את המערכת לפי הטכניקות הרגילות של בידוד והצבה או השוואת מקדמים.

### שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 36 \\ x^2 + 3y = 10 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 17 \\ xy = -10 \end{cases} \quad (4) \qquad \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 16 \\ 5x^2 - 3y^2 = 17 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 8y^2 = 8 \\ 3xy - 2y^2 = 4 \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} x^2 - xy - 20y^2 = 0 \\ x + 6y = 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} 16x^2 - y^2 = 391 \\ 4x - y = 23 \end{cases} \quad (8) \qquad \begin{cases} x^2 - y^2 = 33 \\ x + y = 11 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{4}{y} - \frac{1}{x} = -19 \end{cases} \quad (10) \qquad \begin{cases} 4xy + x = -15 \\ \frac{3}{y} - 2x = 16 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} xy = 24 \\ (y-x)^2 - 7(y-x) + 10 = 0 \end{cases} \quad (12) \qquad \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 21 \\ \frac{8}{x} - \frac{1}{y} = 13 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{10}{3} \\ x^2 + y^2 = 9xy + 25 \end{cases} \quad (14) \qquad \begin{cases} x^2y - xy^2 = 84 \\ x^2 - 2xy + y^2 + 5x - 5y = 24 \end{cases} \quad (13)$$

## תשובות סופיות:

- (2,4), (4,2) **(1)**
- (±2, ±1) **(3)**
- $\left(-2, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{11}, \frac{1}{11}\right)$  **(5)**
- (7,4) **(7)**
- $\left(-5, \frac{1}{2}\right), \left(-24, -\frac{3}{32}\right)$  **(9)**
- $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$  **(11)**
- (±4, -2) **(2)**
- (5, -2), (-5, 2) **(4)**
- $\left(3, \frac{1}{2}\right), \left(-3, -\frac{1}{2}\right), (2, 1), (-2, -1)$  **(6)**
- (5, -3) **(8)**
- $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right)$  **(10)**
- (4, 6), (-6, -4), (3, 8), (-8, -3) **(12)**
- (-1.65, 6.35), (-6.35, 1.65), (7, 4), (-4, -7) **(13)**
- (5, 45), (-5, -45), (45, 5), (-45, -5) **(14)**

## משוואות מסכמות מתקדמות:

### סיכום כללי:

### תזכורת מהירה:

- משוואה דו-ריבועית יכולה להופיע בכל תצורה (עם שורשים, עם ערכים מוחלטים וכו'). העיקרון הוא זיהוי תבנית של הנעלם אשר חוזרת על עצמה לאורך המשוואה. סימון התבנית במשתנה זמני ופתרון עבור משתנה זה תוביל למשוואה מוגדרת ופתירה. לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה לתבנית של המשתנה המקורי ולמצוא את ערכיו.
- דרך הפתרון של משוואה עם שורשים היא ע"י בידוד השורש והעלאה בריבוע. במידה ויש יותר משורש אחד המופיעים בחיבור/חיסור יש לבצע את הפעולה פעמיים. חשוב לוודא נכונות של כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבה במשוואה המקורית לפני ההעלאות בריבוע.
- דרך הפתרון של משוואה עם ערכים מוחלטים היא ע"י פיצול המשוואה לתחומים לפי סימני הערך המוחלט. זאת יש לבצע ע"י איפוס הביטוי שבכל ערך מוחלט ומציאת ערכי הנעלם המקיימים זאת, חלוקת המשוואה לתחומים מתאימים ופתרונה בכל תחום. יש לזכור לבדוק האם הפתרון המתקבל נמצא בתחום הפתרון – במידה וכן הוא פתרון של המשוואה, אחרת הוא נפסל.
- משוואה עם פרמטרים נפתרת בצורה רגילה (התייחסות לפרמטרים כאל קבועים מספריים) כאשר יש לציין את תחומי ההגדרה שלהם. יש לבדוק פתרונות שמתקבלים המבוטאים באמצעות הפרמטרים במידה וקיימת הגבלת תחום הגדרה במשוואה.

## שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 x^2 + 5x - \sqrt{x^2 + 5x} - 30 = 0 & \text{(2)} & x + \sqrt{x+6} - 6 = 0 & \text{(1)} \\
 2x^2 + 6x - \sqrt{x^2 + 3x + 5} = 5 & \text{(4)} & 4x^2 + 16x - 4\sqrt{x^2 + 4x} - 3 = 0 & \text{(3)} \\
 x^2 - \sqrt{6x^2 - 15} = 1 & \text{(6)} & x^2 - \sqrt{16x^2 + 48} + 7 = 0 & \text{(5)} \\
 \frac{\sqrt{x^2 + 4x - 12}}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+5} = \frac{7}{\sqrt{x-1}} & \text{(8)} & \frac{x^2}{\sqrt{3x-2}} - \sqrt{3x-2} = 1-x & \text{(7)} \\
 \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3} & \text{(9)} \\
 \sqrt{x + \sqrt{14x - 49}} + \sqrt{x - \sqrt{14x - 49}} = \sqrt{14} & \text{(10)} \\
 \sqrt{x+6+6\sqrt{x-3}} - \sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}} = 2 & \text{(11)} \\
 \frac{4}{x + \sqrt{x^2 + x}} - \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + x}} = \frac{3}{x} & \text{(12)}
 \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות עבור  $a > 0$ :

$$x^2 + ax - 2a\sqrt{3x^2 + 3ax - 9a^2} = 0 \quad \text{(14)} \quad x^2 + ax - 2a\sqrt{x^2 + ax - a^2} = 0 \quad \text{(13)}$$

פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 |4 - |5 - x|| = |x + 3| & \text{(16)} & |3 - |2 - x| + |x|| = 1 & \text{(15)} \\
 \sqrt{25 + |16x^2 - 25|} = 4 + 4|x+1| & \text{(18)} & \left| \frac{x + |3 - x|}{x + 2} \right| = 18 & \text{(17)} \\
 & & \frac{x^3 - 5x}{\sqrt{2x^2 - 4x - 1} - |x| + 2} = 0 & \text{(19)}
 \end{array}$$

$$\frac{|x+2|}{|x|+2} = |2-x|+2 : \text{הראה כי אין פתרון למשוואה הבאה:} \quad \text{(20)}$$

### תשובות סופיות:

(1)  $x = 3$

(2)  $x_1 = 4, x_2 = -9$

(3)  $x_1 = 0.5, x_2 = -4.5$

(4)  $x_1 = 1, x_2 = -4$

(5)  $x_{1,2} = \pm 1$

(6)  $x_{1,2} = \pm 2$

(7)  $x = 1$

(8)  $x = 3$

(9)  $x = 2$

(10)  $3.5 \leq x \leq 7$

(11)  $x = 4$

(12)  $x = 1, x = \frac{9}{16}$

(13)  $x_1 = -2a, x_2 = a$

(14)  $x_1 = -2a, x_2 = 3a$

(15)  $x \leq 0$

(16)  $x = -1$

(17)  $x = -\frac{39}{18}, -\frac{33}{18}$

(18)  $x \leq \frac{5}{4}, x = -\frac{1}{4}$

(19)  $x = -\sqrt{5}$

(20) שאלת הוכחה.

## ביטויים ומשוואות ממעלה שלישית:

### סיכום כללי:

נוסחאות הכפל המקוצר ממעלה שלישית:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

### שאלות:

#### פישוט ביטויים:

פשט את הביטויים הבאים:

$$(2y+5)^3 \quad (2)$$

$$(x-3)^3 \quad (1)$$

$$8y^3 + 343 \quad (4)$$

$$8x^3 - 1 \quad (3)$$

$$x^3y^6z^9 - 1 \quad (6)$$

$$a^6 - 27 \quad (5)$$

$$64mn^4 - 8m^4n^7 \quad (8)$$

$$11 + 88x^{12} \quad (7)$$

$$\frac{x^3 + 64}{x^2 + 4x} \quad (10)$$

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8} \quad (9)$$

#### משוואות בנעלם אחד עם נוסחאות הכפל המקוצר:

פתור את המשוואות הבאות:

$$125x^3 = 1 - 15x + 75x^2 \quad (12)$$

$$x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0 \quad (11)$$

$$x^3 - 7x - 6 = 0 \quad (14)$$

$$x^3 + x - 30 = 0 \quad (13)$$

#### משוואות בנעלם אחד עם פירוקים שונים:

פתור את המשוואות הבאות:

$$2x^3 + 5x^2 - 2x - 5 = 0 \quad (16)$$

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0 \quad (15)$$

## מערכת משוואות:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 243 \\ x + y = 9 \end{cases} \quad \text{(17) פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 91 \\ x^2y - xy^2 = 30 \end{cases} \quad \text{(18) פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

## תשובות סופיות:

$$8y^3 + 60y^2 + 150y + 125 \quad \text{(10)}$$

$$(2y + 7)(4y^2 - 17y + 49) \quad \text{(11)}$$

$$(xy^2z^3 - 1)(x^2y^4z^6 + xy^2z^3 + 1) \quad \text{(12)}$$

$$8mn^4(2 - mn)(4 + 2mn + m^2n^2) \quad \text{(13)}$$

$$\frac{x^2 - 4x + 16}{x} \quad \text{(14)}$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{(15)}$$

$$x_{1,2,3} = -2, -1, 3 \quad \text{(16)}$$

$$x_{1,2,3} = -2.5, -1, 1 \quad \text{(17)}$$

$$(-5, -6), (6, 5) \quad \text{(18)}$$

$$x^3 - 9x + 27x - 27 \quad \text{(1)}$$

$$(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) \quad \text{(2)}$$

$$(a^2 - 3)(a^4 + 3a^2 + 9) \quad \text{(3)}$$

$$8(1 + 2x^4)(1 - 2x^4 + 4x^8) \quad \text{(4)}$$

$$\frac{1}{x + 2} \quad \text{(5)}$$

$$x = 4 \quad \text{(6)}$$

$$x = 3 \quad \text{(7)}$$

$$x_{1,2,3} = \frac{1}{2}, 1, 2 \quad \text{(8)}$$

$$(3, 6), (6, 3) \quad \text{(9)}$$

## מתמטיקה 0

### פרק 3 - אי שוויונים אלגבריים

#### תוכן העניינים

69	1. אי שוויונים ממעלה ראשונה
71	2. אי שוויונים ממעלה שנייה
72	3. אי שוויונים ממעלה שלישית
73	4. אי שוויונים עם מנה
75	5. אי שוויונים כפולים מערכות וגם ואו
76	6. שאלות מסכמות
78	7. מציאת תחום הגדרה
80	8. אי שוויונים עם ערך מוחלט
83	9. אי שוויונים עם שורשים

## אי-שוויונים ממעלה ראשונה:

### סיכום כללי:

#### פעולות המותרות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

#### פעולות אסורות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$6x > 2(3x-1) \quad (2) \qquad 45x - 26 > 109 \quad (1)$$

$$(x-2)^2 + 4 < (x+2)^2 + 20 \quad (4) \qquad 2(x-5) \geq \frac{1}{2}(4x+6) \quad (3)$$

$$4(6x-8) < 8(3x-4) \quad (6) \qquad \frac{8x-4}{2} < \frac{9(x+1)}{3} \quad (5)$$

$$\frac{7-x}{10} - \frac{3x-1}{5} + \frac{x+4}{3} < 7 \quad (8) \qquad \frac{x-6}{3} - \frac{x-4}{4} \geq 12-x \quad (7)$$

**תשובות סופיות:**

$$x > 3 \quad (1)$$

$$x \text{ כל} \quad (2)$$

$$x \text{ אף} \quad (3)$$

$$x > -2 \quad (4)$$

$$x < 5 \quad (5)$$

$$x \text{ אף} \quad (6)$$

$$x \geq 12 \quad (7)$$

$$x > -13 \quad (8)$$

## אי-שוויונים ממעלה שנייה:

### סיכום כללי:

אי שוויון ריבועי הוא מהצורה:  $ax^2 + bx + c \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$  כאשר  $a \neq 0$ .

כדי לפתור אי שוויון ריבועי יש למצוא את נקודות האפס של הביטוי הריבועי ולאחר מכן למצוא את תחום ההצבה עבורו הביטוי מקיים את אי השוויון עצמו.

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- |                               |  |
|-------------------------------|--|
| $x^2 - 12x > -32$ (2)         | $x^2 < 144$ (1)                        |
| $(x+2)(x+4) < 35$ (4)         | $(x+2)(x+5) < 0$ (3)                   |
| $(x-3)(x-7) \geq 8x - 56$ (6) | $-x^2 + 13x + 30 < 0$ (5)              |
| $(5x+6)^2 \leq 4(x-3)^2$ (8)  | $(x-5)^2 + x(x+2) < 89$ (7)            |
| $x^2 - 10x + 25 > 0$ (10)     | $-3x^2 + 12x > 0$ (9)                  |
| $2x^2 + 2x + 24 \geq 0$ (12)  | $(x-3)^2 > (x-1)(x+6) - x^2 - 3x$ (11) |

### תשובות סופיות:

- |                           |                      |
|---------------------------|----------------------|
| $x < 4, x > 8$ (2)        | $-12 < x < 12$ (1)   |
| $-9 < x < 3$ (4)          | $-5 < x < -2$ (3)    |
| $x \leq 7, x \geq 11$ (6) | $x < -2, x > 15$ (5) |
| $-4 \leq x \leq 0$ (8)    | $-4 < x < 8$ (7)     |
| $x > 5, x < 5$ (10)       | $0 < x < 4$ (9)      |
| $x$ כל (12)               | $x < 3, x > 5$ (11)  |

## אי-שוויונים ממעלה שלישית:

### סיכום כללי:

אי שוויונים ממעלה גבוהה מיוחסים לכאלה שניתן לכתוב אותם בצורה של פולינומים, כגון:  $x^3 - 4x^2 + 4x + 1 > 0$ ,  $x^4 + 2x^2 + 1 < 0$  וכיו'. בפועל נפתור אותם ע"י פירוק לגורמים ומציאת נקודות האפס של כל גורם. לאחר מכן נבדוק את כל אחד מתחומי המספרים המתקבלים עבור הנעלם ונראה באלו מהם מתקבל פסוק אמת.

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- |                                      |                                    |
|--------------------------------------|------------------------------------|
| $x(x^2 + x + 1) > 0$ (2)             | $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$ (1)          |
| $x^3 - 25x \geq 0$ (4)               | $(-2x^2 - 3x + 2)(x+1) \leq 0$ (3) |
| $(x^2 + 8x + 20)(3x - 5) \leq 0$ (6) | $(x^2 + 3x + 5)(x - 2) > 0$ (5)    |
| $x^3 - 6x^2 + 9x \leq 0$ (8)         | $(x^2 - x - 6)(x - 1) < 0$ (7)     |
| $(x-2)(x-4)(x-1) < 0$ (10)           | $(x^2 + 6)(x+3) > 0$ (9)           |

### תשובות סופיות:

- |                                  |   |
|----------------------------------|---|
| $x > 0$ (2)                      | $1 < x < 2, x > 3$ (1)                      |
| $-5 \leq x \leq 0, x \geq 5$ (4) | $-2 \leq x \leq -1, x \geq \frac{1}{2}$ (3) |
| $x \leq 1\frac{2}{3}$ (6)        | $x > 2$ (5)                                 |
| $x \leq 0, x = 3$ (8)            | $x < -2, 1 < x < 3$ (7)                     |
| $x < 1, 2 < x < 4$ (10)          | $x > -3$ (9)                                |

## אי-שוויונים עם מנה:

### סיכום כללי:

אי שוויון מהצורה:  $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$  או  $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$  נקרא אי-שוויון עם מנה, בו  $f(x)$

ו- $g(x)$  הם פולינומים כלשהם.

למשל:  $\frac{2x+4}{x^2-3x+4} < 0$  בו:  $f(x) = 2x+4$  ו- $g(x) = x^2-3x+4$ .

כדי לפתור אי שוויון עם מנה נמצא את נקודות האפס של  $f(x)$  ושל  $g(x)$  ונציב מספרים בתחומים המתקבלים. אלו שיתנו פסוק אמת יהוו את פתרון אי השוויון.

### הערות:

- ניתן לבצע כפל של המכנה בריבוע בכדי להעביר את אי השוויון לצורה של מכפלות.
- ניתן להעביר אי שוויון המכיל מספר מנות ומספרים שלמים לצורה הנ"ל ע"י פעולות אלגבריות מתאימות תחילה.

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$\frac{x-1}{3x+2} \geq -3$ (2)	$\frac{x-1}{x^2-9} > 0$ (1)
$\frac{x-3}{2x^2-10x+12} > 0$ (4)	$\frac{1}{x^2-16} > 0$ (3)
$\frac{1}{-3(x-1)} < 0$ (6)	$\frac{2x-1}{x-5} \leq 0$ (5)
$\frac{1}{x^2-5x+6} < 0$ (8)	$\frac{x-1}{x+2} \leq 1$ (7)
$\frac{1}{x^2-8x+12} \geq 0$ (10)	$\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7} \geq 0$ (9)

**תשובות סופיות:**

$$x < -\frac{2}{3}, x \geq -\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 < x < 3, x > 3 \quad (4)$$

$$x > 1 \quad (6)$$

$$2 < x < 3 \quad (8)$$

$$x < 2, x > 6 \quad (10)$$

$$-3 < x < 1, x > 3 \quad (1)$$

$$x < -4, x > 4 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \leq x < 5 \quad (5)$$

$$x > -2 \quad (7)$$

$$1 \leq x \leq 6 \quad (9)$$

## אי-שוויונים כפולים - מערכת וגם:

### סיכום כללי:

אי-שוויון כפול הוא צורה מקוצרת להציג שני אי-שוויונים אשר יש לפתור יחד (קרי: כמערכת יוגם!). למשל במקום לכתוב:  $a < b$  וגם  $b < c$ , ניתן לכתוב:  $a < b < c$ . מכאן כי כדי לפתור אי שוויון כפול יש לפצל אותו תחילה לשני אי-שוויונים ולפתור כל אחד בנפרד. לאחר מכן יש לקחת את חיתוך הפתרונות.

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$0 < \frac{1}{x+4} < 2 \quad (2)$$

$$3 < x+1 < 5 \quad (1)$$

$$0 < \frac{8-3x}{5-2x} < 4 \quad (4)$$

$$-1 < \frac{x-1}{x+1} < 1 \quad (3)$$

$$6 < \frac{2x+10}{3} \leq \frac{7x-20}{5} \quad (6)$$

$$6x-38 \leq x-3 \leq 5x+7 \quad (5)$$

$$\frac{4x+5}{15} > \frac{3x-8}{5} + \frac{9-x}{3} > 11 \quad (8)$$

$$-1 \leq \frac{2x-6}{4} < \frac{x+2}{3} \quad (7)$$

### תשובות סופיות:

$$x > -3\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 < x < 4 \quad (1)$$

$$x < 2\frac{2}{5}, x > 2\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$x > 0 \quad (3)$$

$$x \geq 10 \quad (6)$$

$$-2.5 \leq x \leq 7 \quad (5)$$

$$\emptyset \quad (8)$$

$$1 \leq x < 13 \quad (7)$$

## שאלות מסכמות – אי-שוויונים:

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$x \leq -\frac{3}{4} \cap \{-2 < x \leq 5 \cup 0 < x < 8\} \quad (1)$$

$$\frac{(x-3)(x+4)}{2-x} \leq 0 \quad (3) \quad x(x+5) - 3x + 15 \leq 2x - 1 - x(4-x) \quad (2)$$

$$\frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)} \geq 0 \quad (5) \quad \frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)} < 0 \quad (4)$$

$$\frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2} > 0 \quad (7) \quad x(x+3)(2x-5) < 0 \quad (6)$$

$$\frac{x-3}{x^2+2} > 0 \quad (9) \quad \frac{5-2x}{(x-8)^2} \leq 0 \quad (8)$$

$$\frac{x^2-6x+9}{x^3-x} > 0 \quad (11) \quad \frac{x^2-4x}{x^2+2x-3} > 0 \quad (10)$$

$$\frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2} \quad (13) \quad \frac{x-7}{x^2+x+3} > 0 \quad (12)$$

$$6 < 5x - x^2 \cap x^2 > 3x + 10 \quad (15) \quad \frac{2x^2}{x^2-6x+8} \geq \frac{x}{x-4} - \frac{x}{x-2} \quad (14)$$

$$1 < \frac{x-1}{x-4} \leq 2 \quad (17) \quad \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x} > 0 \cup \frac{1}{x-3} < \frac{1}{1-x} \quad (16)$$

(18) לאלו ערכי  $x$  נמצאת הפונקציה  $f(x) = \frac{x}{x-3}$  מעל הפונקציה  $g(x) = \frac{x+1}{x+3}$  ?

## תשובות סופיות:

- |   |                                      |
|---|--------------------------------------|
| $x \leq -4$ (2)                           | $-2 < x \leq -\frac{3}{4}$ (1)       |
| $x < -7, -\frac{1}{3} < x < 2, x > 5$ (4) | $-4 \leq x < 2, 3 \leq x$ (3)        |
| $x < -3, 0 < x < 2.5$ (6)                 | $-1 < x \leq 1.5, 4 < x \leq 12$ (5) |
| $2.5 \leq x < 8, x > 8$ (8)               | $x < -1, 2 < x < 6, x > 6$ (7)       |
| $x < -3, 0 < x < 1, x > 4$ (10)           | $x > 3$ (9)                          |
| $x > 7$ (12)                              | $-1 < x < 0, 1 < x < 3, x > 3$ (11)  |
| $x \leq 0, 1 \leq x < 2, x > 4$ (14)      | $x < -2, 2 < x < 4$ (13)             |
| $x \neq 1$ (16)                           | $x \neq 7$ (15)                      |
| $-3 < x < -\frac{3}{5}, x > 3$ (18)       | $x \geq 7$ (17)                      |

## תחום הגדרה:

### שאלות:

1 מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{3x-4}$	ב. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x - 6}$
ג. $f(x) = \sqrt{12x - x^2 - x^3}$	ד. $f(x) = \sqrt{\frac{x+5}{x^2-4}}$
ה. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}-x}$	ו. $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2-2x-1}}{2x-3}$

2 מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+2}-3}$	ב. $f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$
ג. $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}}$	ד. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$

3 תחום ההגדרה של הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{ax - x^2 - 4}$  הוא  $1 \leq x \leq 4$ . מצא את ערכו של הפרמטר  $a$ .

4 תחום ההגדרה של הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$  הוא  $x \leq -2$ ,  $x > 2$ . מצא את ערכו של הפרמטר  $a$ .

5 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+6}-a}$ , ( $a$  פרמטר חיובי).

א. הבע באמצעות  $a$  את תחום הגדרתה.

ב. מגדירים פונקציה נוספת:  $g(x) = \sqrt{\frac{2x}{x+5}}$ .

ידוע כי תחום ההגדרה של שתי הפונקציות מכסה את כל ציר המספרים. מצא את תחום הערכים האפשרי של הפרמטר  $a$ .

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $x \geq 1\frac{1}{3}$     ב.  $x \leq -1, x \geq 6$     ג.  $x \leq -4, 0 \leq x \leq 3$
- ד.  $-5 \leq x < -2, x > 2$     ה.  $-2 \leq x < 2, x > 2$     ו.  $x \leq -\frac{1}{3}, 1 \leq x < \frac{3}{2}, x > \frac{3}{2}$
- (2) א.  $x \geq 7$     ב.  $-6 \leq x \neq -2$     ג.  $x \leq -1\frac{1}{2}, x \geq 1$
- ד.  $x \leq -3, -2 \leq x \neq 1$
- (3)  $a = 5$
- (4)  $a = 2$
- (5) א.  $x \geq a^2 - 6$     ב.  $0 < a \leq 1$

## אי שוויונים עם ערך מוחלט:

### סיכום כללי:

כללים לפתרון אי שוויון עם ערך מוחלט יחיד:

$ x  > a$	$ x  < a$	מקרה
$x < -a \cap x > a$	$-a < x < a$	פתרון

כללים לפתרון אי שוויון עם מספר ערכים מוחלטים:

- נמצא את הנקודות המאפסות כל ביטוי עם ערך מוחלט.
- מחלקים את אי השוויון לתחומים לפי נקודות האפס.
- פותרים את אי השוויון לכל תחום בנפרד.
- כותבים פתרון כללי (מערכת או) לכל התחומים יחדיו.

### שאלות:

(1) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א.  $|x+2| < 3$       ב.  $|2x+1| > 7$   
 ג.  $|6-2x| < x$       ד.  $|2x+1|-3x > 4$

(2) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א.  $1 < |4-3x| < 7$       ב.  $|2x+3| < 8 < |5-x|$

(3) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א.  $|x^2 + 6x - 4| < 12$       ב.  $|x^2 + x - 10| > 3x - 2$   
 ג.  $|x^2 - 3x| < 4$       ד.  $|6x^2 - 7x - 4| > 1$   
 ה.  $x^2 - 6|x| + 5 \leq 0$       ו.  $x^2 - 6|x+1| - 1 > 0$

(4) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $ x-3 + 2x+2 >7$	ב. $ x+8 <11- 1-3x $
ג. $ 3-2x -11>4- 6+x $	ד. $ 2x-6 + x+5 >14- 1-x $
ה. $ 5+4x - 3-x +\left 4-\frac{1}{2}x\right \leq 22$	ו. $ x+3 + x^2-5x+4 <19$

(5) פתור את אי-השוויונים הבאים:

א. $\left \frac{3x-1}{x-2}\right \geq 3$	ב. $1\leq\left \frac{x+2}{x-2}\right \leq 2$
ג. $\frac{ x-6 +8x}{x-12}\leq 12$	ד. $\left \frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}\right >5$

(6) פתור את אי-השוויונים הבאים (ערך מוחלט ושורשים):

א. $\sqrt{x^2- x-12 }<x$	ב. $2-\sqrt{1-x}\leq x+2 -3$
ג. $\sqrt{ 2x+1 -x-1}\leq 4- 3x $	ד. $\frac{ x+2 - x }{\sqrt{4-x^3}}>0$

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $-5 < x < 1$   
 ג.  $2 < x < 6$
- (2) א.  $1 < x < 1$  או  $1\frac{2}{3} < x < 3\frac{2}{3}$   
 ב.  $-5\frac{1}{2} < x < -3$
- (3) א.  $-2 < x < 2$  או  $-8 < x < -4$   
 ג.  $-1 < x < 4$
- ה.  $-5 \leq x \leq -1$  או  $1 \leq x \leq 5$
- (4) א.  $x < -2$  או  $2 < x$   
 ג.  $x < -6$  או  $4 < x$
- ה.  $-7\frac{3}{7} \leq x \leq 4$
- (5) א.  $\frac{7}{6} \leq x < 2$ ,  $x > 2$   
 ג.  $x < 12$ ,  $x \geq 46$
- (6) א.  $x = -1$ ,  $x \geq 3$ ,  $x \neq 12$   
 ג.  $0 \leq x \leq 1$ ,  $-1 \leq x \leq -\frac{2}{3}$
- ב.  $3 < x$  או  $x < -4$   
 ד.  $x < -1$
- ב.  $-5\frac{1}{2} < x < -3$   
 ד.  $x < -\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{3} < x < \frac{3}{2}$ ,  $x > \frac{5}{3}$
- ב.  $x < 2$  או  $4 < x$   
 ד.  $x < -5$ ,  $x > 7$
- ב.  $-1 < x < 1$   
 ד.  $x < -1$  או  $4 < x$
- ג.  $-2 < x < 6$
- ב.  $0 \leq x \leq \frac{2}{3}$ ,  $x \geq 6$
- ד.  $\frac{1}{2} < x < 1$ ,  $1 < x < 2$ ,  $2 < x \leq 4$
- ב.  $x \leq \frac{-15 + \sqrt{33}}{2}$   
 ד.  $-1 < x < \sqrt[3]{4}$

## אי שוויונים עם שורשים:

סיכום כללי:

מקרים בפתרון אי-שוויונות עם שורשים:

מקרה	אי השוויון	פתרון
$a \geq 0$	$\sqrt{f(x)} < a$	$0 \leq f(x) < a^2$
$a < 0$	$\sqrt{f(x)} < a$	אין פתרון
	$\sqrt{f(x)} > a$	כל $x$ בת.ה. של $f(x)$

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$\sqrt{2x-5} \geq 1 \quad (2)$$

$$\sqrt{x+3} < 7 \quad (1)$$

$$\sqrt{x^2+x-6} < x-3 \quad (4)$$

$$\sqrt{2x^2+5x-6} > 2-x \quad (3)$$

$$\sqrt{x^2+5x+6} - \sqrt{x^2-x+1} < 1 \quad (6)$$

$$\sqrt{x^2+3x+2} - 1 < \sqrt{x^2-x+1} \quad (5)$$

$$\frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2 \quad (8)$$

$$\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} > \frac{3}{2} \quad (7)$$

$$\sqrt{2-\sqrt{3+x}} < \sqrt{4+x} \quad (10)$$

$$\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{4}} < \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \quad (9)$$

$$\sqrt{1+\frac{9}{x}} + 5\sqrt{\frac{x}{x+9}} \geq 4 \quad (12)$$

$$\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5} \quad (11)$$

**תשובות סופיות:**

(1)  $-3 \leq x < 46$

(2)  $x \geq 3$

(3)  $x < -10, x > 1$

(4)  $\emptyset$

(5)  $x \leq -2, -1 \leq x < \frac{-1 + \sqrt{13}}{6}$

(6)  $x \leq -3, -2 \leq x < \frac{-13 + \sqrt{73}}{16}$

(7)  $\frac{12}{25} < x \leq \frac{1}{2}$

(8)  $x < 2\sqrt{5} - 4$

(9)  $1 < x \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$

(10)  $-2.618 < x \leq 1$  : שזה  $-\frac{3 + \sqrt{5}}{2} < x \leq 1$

(11)  $2.5 \leq x < 3$

(12)  $x < -9, x > 0$

## מתמטיקה 0

פרק 4 - גיאומטריה אנליטית - נקודה וישר

תוכן העניינים

85	1. מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית
89	2. משוואת הישר
94	3. מצבים הדדיים בין ישרים
96	4. מציאת משוואות ישר
97	5. שאלות יסודיות שונות עם משוואת הישר
(ללא ספר)	6. נושאים מתקדמים עם משוואת הישר
103	7. חלוקת קטע ביחס נתון
104	8. מרחק נקודה מישר
106	9. מיקום נקודה ביחס לישר
108	10. מרחק בין ישרים מקבילים

## מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית:

סיכום כללי:

נוסחאות כלליות:

- המרחק בין הנקודות  $A(x_1, y_1)$  ו-  $B(x_2, y_2)$  יחושב לפי:  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ .
- אמצע הקטע  $M$  שקצותיו הם:  $A(x_1, y_1)$  ו-  $B(x_2, y_2)$  הוא:  $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$ .

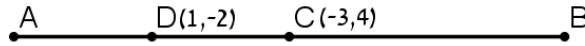
שאלות:

שאלות העוסקות באמצע קטע:

- 1) מצא את אמצעי הקטעים שקדקודיהם נתונים ע"י הנקודות A ו-B:
- א.  $A(1, 4), B(5, -8)$       ב.  $A(-3, 0), B(3, -2)$
- ג.  $A(4, 5), B(-4, -5)$       ד.  $A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), B\left(7\frac{1}{2}, -2\right)$
- ה.  $A(6, -1), B(-3, -1)$       ו.  $A(4, 7), B(4, -12)$
- 2) נתון קטע AB שאמצעו בנקודה M.
- מצא את שיעורי נקודת הקצה B אם נתונים שיעורי הנקודות של A ושל M:
- א.  $A(4, -2), M(2, 1)$       ב.  $A(-6, -8), M(0, 0)$
- ג.  $A(13, -11), M(4, -7)$       ד.  $A\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right), M\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$
- 3) נתון משולש שווה שוקיים ABC שבו A הוא קדקוד הראש.
- ידוע כי שיעורי הקדקודים B ו-C הם  $B(2, -4), C(6, 1)$ .
- מעבירים תיכון AD לבסיס BC. מצא את שיעורי הנקודה D.
- 4) באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.
- ידוע כי:  $A(-2, 1), B(6, 5)$ . מצא את שיעורי הנקודה D.



- (5) באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC. ידוע כי:  $D(1, -2)$ ,  $C(-3, 4)$ . מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.



- (6) הנקודות  $A(2, -7)$ ,  $B(-10, 4)$  ו- $C(6, 11)$  הן שלושה קדקודים של מקבילית ABCD. מצא את שיעורי הקדקוד הרביעי, D.

### שאלות העוסקות במרחק בין שתי נקודות:

- (7) מצא את המרחק בין זוגות הנקודות הבאות:
- א.  $A(4, 7)$ ,  $B(-3, 7)$       ב.  $A(6, 2)$ ,  $B(1, 2)$
- ג.  $A(-3, 10)$ ,  $B(0, 6)$       ד.  $A(6, -9)$ ,  $B(1, 3)$
- ה.  $A(4, 7)$ ,  $B(13, -1)$       ו.  $A(6, 6)$ ,  $B(-9, -9)$
- (8) חשב את היקף המשולש ABC שקודקודיו הם:  $A(3, -2)$ ,  $B(4, 9)$ ,  $C(0, 14)$ .

- (9) נתונות נקודות  $A(14, 4)$ ,  $B(6, y)$  שמרחקן הוא 10 יחידות אורך. מצא את  $y$ .

- (10) נתונות נקודות  $A(x, -12)$ ,  $B(15, -2)$  שמרחקן הוא 26 יחידות אורך. מצא את  $x$ .

- (11) נתונה נקודה B ברביע השלישי, ששיעור ה- $y$  שלה גדול פי 3 משיעור ה- $x$  שלה ומרחקה מהנקודה  $A(-4, 1)$  הוא 5. מצא את שיעורי הנקודה B.

- (12) במשולש שווה שוקיים ABC ( $AB = AC$ ) ידוע כי אורכי השוקיים הוא  $\sqrt{45}$  יחידות אורך. שיעורי הקדקוד A הם  $(0, 4)$  ושיעורי ה- $y$  של הקדקודים B ו-C הוא 2. מצא את קדקודי המשולש B ו-C (הנח B ברביע הרביעי).

- (13) אורך האלכסון AC במלבן ABCD הוא  $d_{AC} = \sqrt{50}$  וידוע כי:  $A(-3, -2)$ ,  $B(-4, 1)$ . מצא את היקף המלבן.

**שאלות העוסקות בשיפוע בין שתי נקודות:****14** מצא את השיפוע בין זוגות הנקודות הבאים:

- א.  $A(5,2)$  ,  $B(4,1)$       ב.  $A(3,-2)$  ,  $B(-3,1)$
- ג.  $A(7,8)$  ,  $B(6,15)$       ד.  $A(0,5)$  ,  $B(7,0)$
- ה.  $A(6,9)$  ,  $B(6,-7)$       ו.  $A(4,-1)$  ,  $B(18,-1)$

**15** מצא את שיפועי הישרים שצלעות המשולש שקודקודיוהם:  $A(6,5)$  ,  $B(2,13)$  ,  $C(4,-7)$ . מונחים עליהם.

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $(3, -2)$     ב.  $(0, -1)$     ג.  $(0, 0)$
- ד.  $\left(4, -\frac{5}{8}\right)$     ה.  $(1.5, -1)$     ו.  $(4, -2.5)$
- (2) א.  $B(0, 4)$     ב.  $B(6, 8)$     ג.  $B(-5, -3)$     ד.  $B\left(1, \frac{2}{3}\right)$
- (3)  $D(4, -1.5)$
- (4)  $D(0, 2)$
- (5)  $A(5, -8)$ ,  $B(-11, 16)$
- (6)  $D(18, 0)$
- (7) א.  $d_{AB} = 7$     ב.  $d_{AB} = 5$     ג.  $d_{AB} = 5$     ד.  $d_{AB} = 13$
- ה.  $d_{AB} = \sqrt{145}$     ו.  $d_{AB} = 15\sqrt{2}$
- (8)  $P_{ABC} \approx 33.862$  יחידות אורך
- (9)  $y = -2$  או  $y = 10$
- (10)  $x = 39$  או  $x = -9$
- (11)  $B(-1, -3)$
- (12)  $B(3, -2)$ ,  $C(-3, -2)$
- (13)  $P_{ABCD} = 6\sqrt{10} \approx 18.97$  יחידות אורך
- (14) א.  $m_{AB} = 1$     ב.  $m_{AB} = -\frac{1}{2}$     ג.  $m_{AB} = -7$     ד.  $m_{AB} = -\frac{5}{7}$
- ה. שיפוע לא מוגדר.    ו.  $m_{AB} = 0$
- (15)  $m_{AB} = -2$ ,  $m_{BC} = -10$ ,  $m_{AC} = 6$

## משוואת הישר:

סיכום כללי:

נוסחאות כלליות:

- שיפוע ישר בין שתי נקודות  $A(x_1, y_1)$  ו-  $B(x_2, y_2)$  הוא:  $m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ .

שיפועים של ישרים:

- שיפועי ישרים מאונכים מקיימים:  $m_1 \cdot m_2 = -1$ .
- הקשר בין שיפוע ישר לזווית שהוא יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ :  $m = \tan \alpha$ .

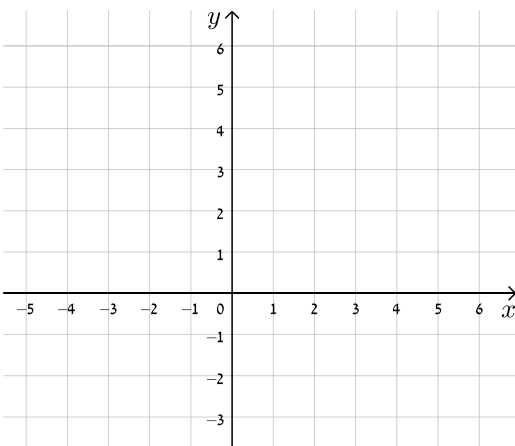
משוואת הישר:

- משוואת ישר מפורשת היא מהצורה:  $y = mx + n$ .
- כאשר:  $m$  הוא שיפוע הישר ו- $n$  הוא ערך ה- $y$  של נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- $y$ .
- נוסחה למציאת משוואת ישר:  $y - y_1 = m(x - x_1)$ .

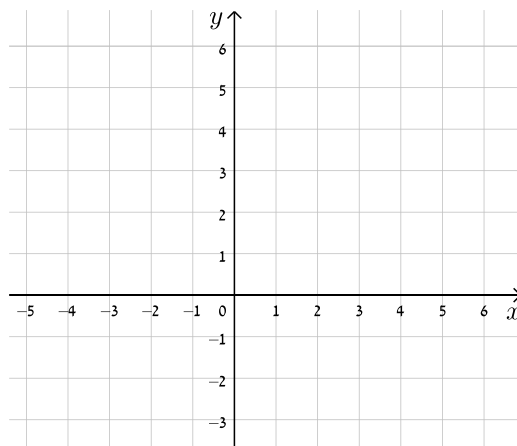
שאלות:

16) עבור כל אחד ממשוואות הישרים הבאות, מצא את נקודות החיתוך עם הצירים וסרטט את הישרים במערכת הצירים שלפניך.

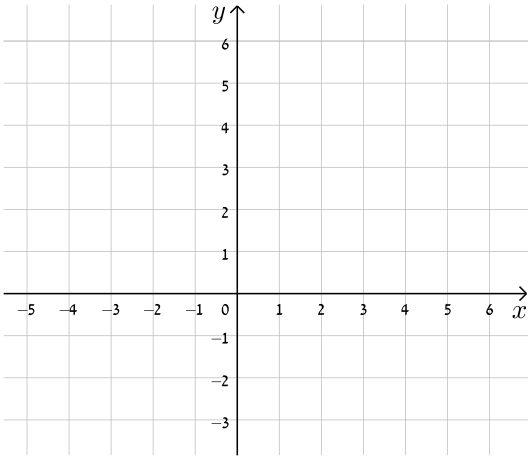
ב.  $y = -x + 5$



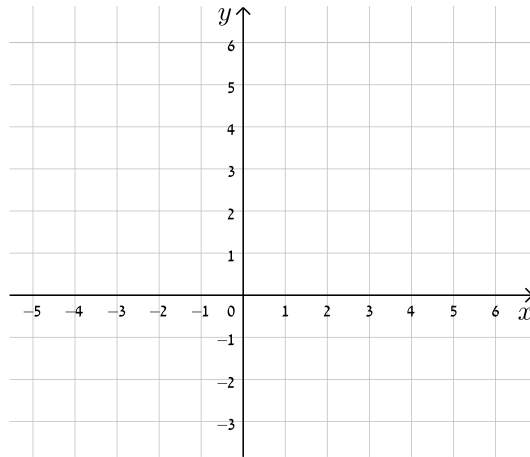
א.  $y = x + 4$



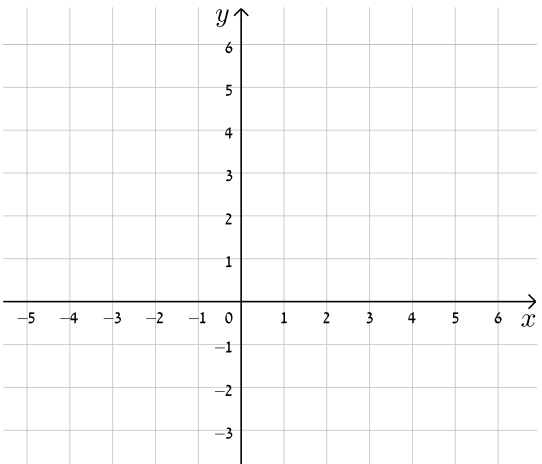
$$y = -3x + 5 \quad \text{ד.}$$



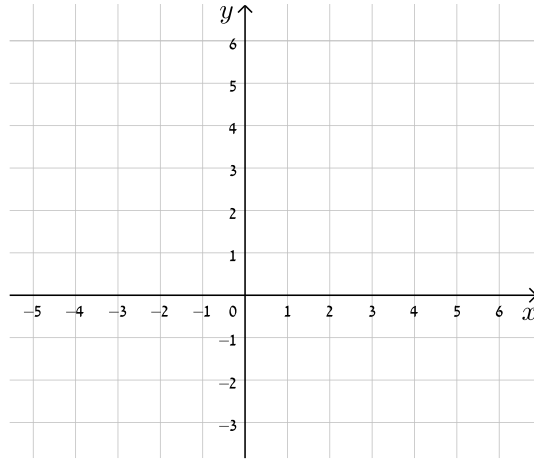
$$y = 2x - 3 \quad \text{ג.}$$



$$y = 8 - 4x \quad \text{ו.}$$

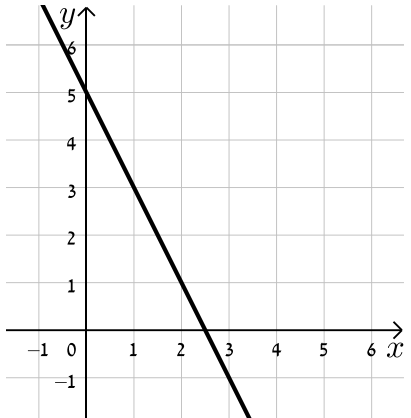


$$y = 3x - 1 \quad \text{ה.}$$

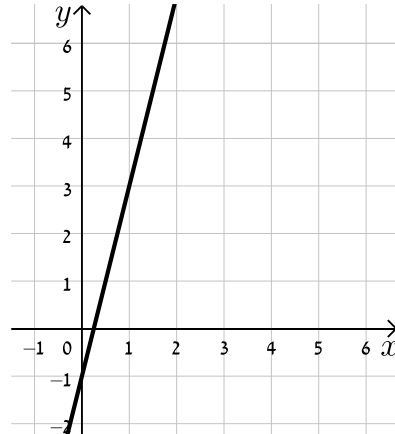


17) כתוב את משוואת הישר המתאימה לכל אחד מהישרים הבאים:

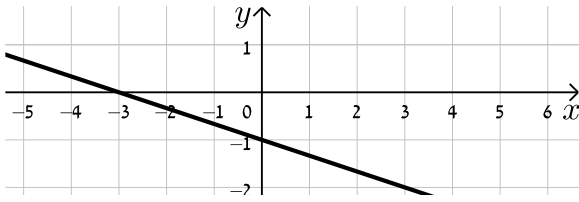
ב.



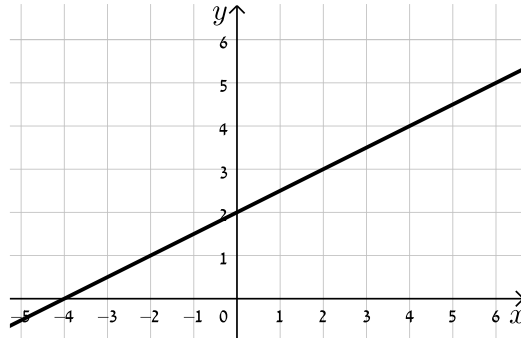
א.



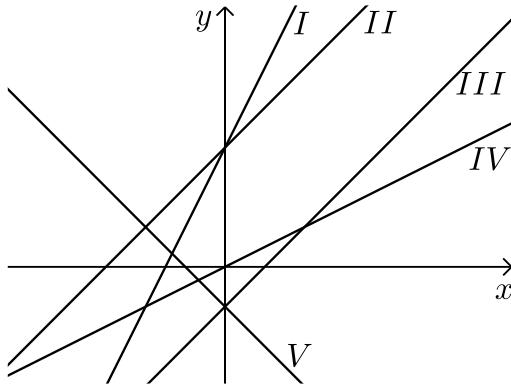
ד.



ג.



18) התאם בין משוואות הישרים הבאים לישרים בשרטוט :



א.  $y = x + 3$

ב.  $y = -x - 1$

ג.  $y = 2x + 3$

ד.  $y = x - 1$

ה.  $y = \frac{1}{2}x$

19) נתונה משוואה הישר הבאה :  $y = 2x + 3$  . קבע אלו מבין הנקודות הבאות נמצאות

עליו :  $A(-1, 1)$  ,  $B(3, 3)$  ,  $C(0, 4)$  ,  $D(6, 15)$  .

20) נתונה משוואת הישר הבאה :  $y = mx - 2.5$  . ידוע כי הנקודה  $A(4, 2)$  נמצאת על

הישר. מצא את  $m$  וקבע האם גם הנקודה  $B(7, -2)$  נמצאת עליו.

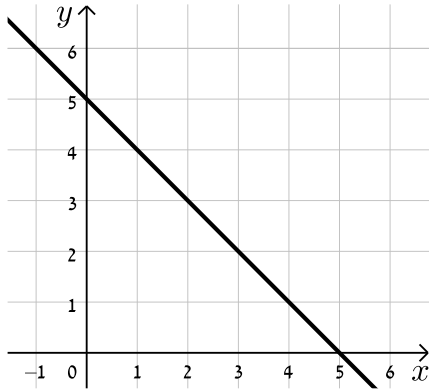
21) הנקודות  $A(5, -3)$  ,  $B(4, 1)$  נמצאות על ישר שמשוואתו היא :  $y = mx + n$  .

מצא את  $m$  ואת  $n$  .

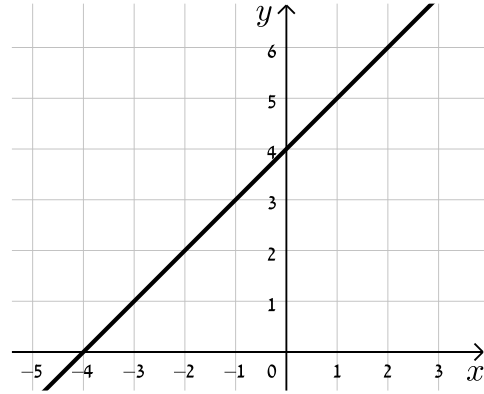
**תשובות סופיות:**

16) להלן הגרפים של משוואות הישרים:

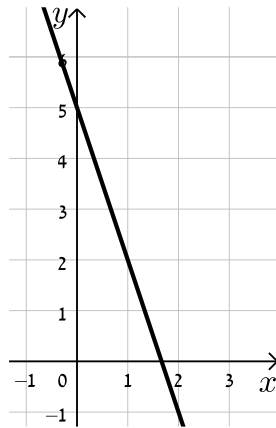
ב.



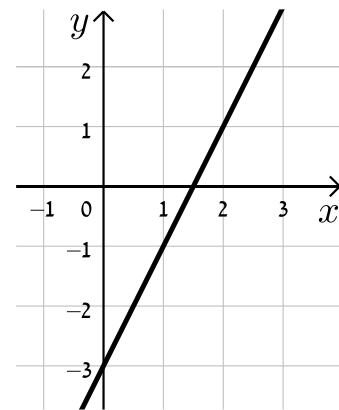
א.



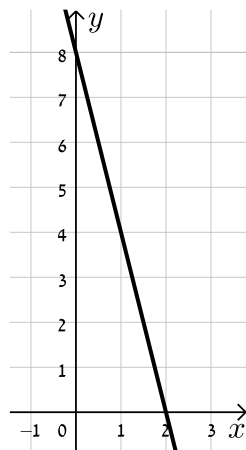
ד.



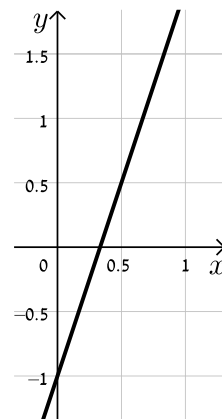
ג.



ו.



ה.



- א.  $y = 4x - 1$     ב.  $y = -2x + 5$     ג.  $y = \frac{1}{2}x + 2$     ד.  $y = -\frac{1}{3}x - 1$     (17)
- א. II    ב. V    ג. I    ד. III    ה. IV    (18)
- נמצאות: A, D. לא נמצאות: B, C.    (19)
- B לא נמצאת,  $m = \frac{9}{8}$     (20)
- $m = -4$ ,  $n = 17$     (21)

## מצבים הדדיים בין ישרים:

### סיכום כללי:

#### מצב הדדי בין שני ישרים:

- ישרים מקבילים מקיימים:  $m_1 = m_2, n_1 \neq n_2$ .
- ישרים חותכים מקיימים:  $m_1 \neq m_2$ .
- ישרים מתלכדים מקיימים:  $m_1 = m_2, n_1 = n_2$ .

### שאלות:

22 מצא את נקודות החיתוך שבין זוגות הישרים הבאים:

$$\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = x + 6 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} y = x - 12 \\ y = 4x + 6 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = -2x - 1 \end{cases} \quad \text{א.}$$

23 קבע את המצב ההדדי בין זוגות הישרים הבאים:

$$\begin{cases} y = x - 7 \\ y = x + 6 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} y = x + 8 \\ y = x + 8 \end{cases} \quad \text{ד.}$$

$$\begin{cases} y = 6x - 15 \\ y = 3x + 41 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

24 קבע אלו מבין זוגות הישרים הבאים הם מאונכים זה לזה:

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{1}{2}x + 4 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 3x - 1 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} y = x - 6 \\ y = -x + 6 \end{cases} \quad \text{ד.}$$

$$\begin{cases} y = -4x - 5 \\ y = \frac{1}{4}x + 5 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

- (25)** משוואת הצלע AB של המלבן ABCD היא  $y = 6x - 2$ .
- א. מה הם שיפועי הצלעות האחרות של המלבן?  
 ב. כיצד תשתנה תשובתך לסעיף הקודם אם משוואת הישר הנ"ל הייתה שייכת לצלע BC במקום AB?
- (26)** במשולש ABC נתונים שיעורי הקודקודים:  $A(5, -1)$ ,  $B(3, 7)$ ,  $C(-5, 5)$ . הוכח שהמשולש ישר זווית ושווה שוקיים.

### תשובות סופיות:

- (22)** א.  $(-1, 1)$       ב.  $(-6, -18)$       ג.  $(10, 16)$
- (23)** א. נחתכים.      ב. מקבילים.      ג. נחתכים.      ד. מתלכדים.
- (24)** מאונכים: ג', ד'.      לא מאונכים: א', ב'.
- (25)** א.  $m_{AB} = m_{CD} = 6$ ,  $m_{BC} = m_{AD} = -\frac{1}{6}$
- ב. הכל הפוך:  $m_{AB} = m_{CD} = -\frac{1}{6}$ ,  $m_{BC} = m_{AD} = 6$
- (26)** שאלת הוכחה.

## מציאת משוואות ישר:

### שאלות:

27) מצא את משוואות הישרים הבאים:

- א. ישר העובר דרך הנקודה  $A(1,3)$  ושיפועו  $m=2$ .
- ב. ישר העובר דרך הנקודה  $A(0,-4)$  ושיפועו  $m=\frac{1}{3}$ .
- ג. ישר העובר דרך הנקודה  $A(5,9)$  ושיפועו  $m=0$ .
- ד. ישר העובר דרך הנקודות  $A(5,-12)$  ו- $B(6,-6)$ .
- ה. ישר העובר דרך הנקודה  $A(-6,4)$  ומקביל לישר:  $y=2x-3$ .
- ו. ישר העובר דרך הנקודה  $A(3,-5)$  ומקביל לציר ה- $y$ .
- ז. ישר העובר דרך הנקודה  $A(-7,-3)$  ומאונך לישר:  $y=x+3$ .
- ח. ישר העובר דרך נקודת החיתוך של הישרים:  $y=11x-4$  ו- $y=3x-12$  ומקביל לישר:  $y=7x+5$ .

### תשובות סופיות:

- 27) א.  $y=2x+1$       ב.  $y=\frac{1}{3}x-4$       ג.  $y=9$       ד.  $y=6x-42$
- ה.  $y=2x+16$       ו.  $x=3$       ז.  $y=-x-10$       ח.  $y=7x-8$

## שאלות יסודיות שונות עם משוואת הישר:

### שאלות:

**(28)** במשולש ABC מעבירים את התיכון AD לצלע BC.

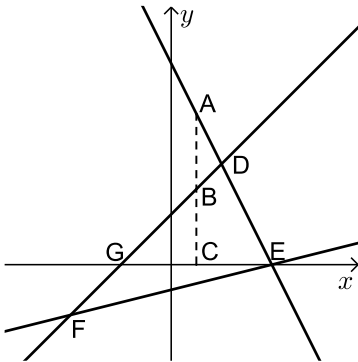
ידוע כי:  $A(3, -2)$ ,  $B(2, 4)$ ,  $D(-2, 2)$ .

- כתוב את משוואת הישר של התיכון AD.
- מצא את שיעורי הקדקוד C.
- כתוב את משוואת הישר של הצלע AC.

**(29)** נתון מעוין ABCD שבו נתונים הקודקודים A(-9,1) ו-B(5,-7).

משוואת הישר עליו מונח האלכסון AC היא  $x + 3y + 6 = 0$ .

- מצא את משוואת הישר עליו מונח האלכסון BD.
- מצא את משוואת הישר עליו מונחת הצלע BC.



**(30)** שלוש המשוואות הבאות מייצגות את הישרים המופיעים

בשרטוט:  $x - y + 2 = 0$ ,  $x - 4y - 4 = 0$ ,  $2x + y - 8 = 0$ .

הקטע AC מקביל לציר ה-y.

- חשב את שטח המשולש DEF.
- נתון:  $d_{BC} = 3$ . חשב את אורך הקטע AB.

**(31)** BD הוא התיכון לצלע AC במשולש ABC שבו נתון הקודקוד A(-6,1).

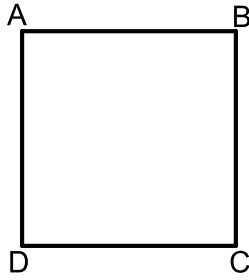
משוואת התיכון BD היא  $x - y = 1$  ומשוואת הצלע BC היא  $3x + 5y = 67$ .

מצא את שיעורי הקדקוד C.

**(32)** נתון טרפז ABCD ( $AB \parallel CD$ ) ובו משוואת השוק BC היא:  $x = 2$ .

משוואת הבסיס CD היא  $2x + 3y = 7$  וידוע כי  $A(-4, 1)$ .

- מצא את משוואת הבסיס AB.
- מצא את שיעורי הקדקודים B ו-C.
- מעבירים את האלכסון AC. הראה כי המשולש ABC הוא ישר זווית ומצא את שטחו.



**33** במרובע ABCD ידוע כי שיפוע הצלע BC הוא 3

ושיעורי הנקודה A הם: (1,4).

א. איזה מרובע הוא המרובע ABCD?  
הראה חישוב מתאים.

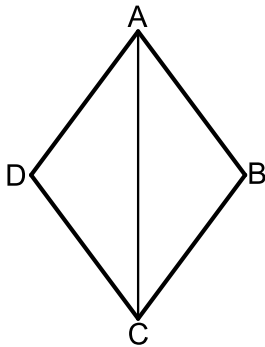
ב. נתון גם:  $D(4,13)$ ,  $m_{CD} = -\frac{1}{3}$  ו- $\sqrt{90}$  ס"מ  $BC =$ .

איזה מרובע הוא המרובע ABCD כעת?  
הראה חישוב מתאים.

ג. נתון גם:  $B(-8,7)$ .

איזה מרובע הוא המרובע ABCD כעת?  
הראה חישוב מתאים.

ד. חשב את שטח המרובע ABCD.



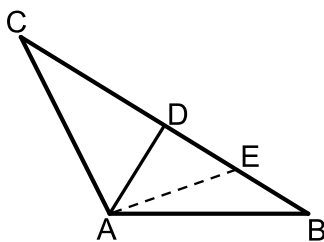
**34** המרובע ABCD הוא מעוין.

ידוע כי שיעורי אחת הנקודות במעוין הם: (0,6).

כמו כן, ידוע גם כי משוואת האלכסון AC היא:  $y = -1.5x + 6$  ואחת ממשוואות הצלעות היא:  $5y + x = 4$ .

א. מצא את משוואת האלכסון השני.

ב. מצא את שאר קדקודי המעוין.



**35** המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים ( $AB = AC$ ).

ב- $\triangle ABC$  מעבירים את הגובה AD לבסיס BC

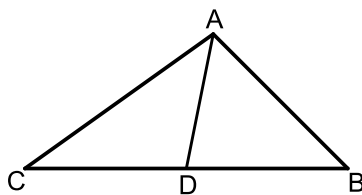
ומסמנים נקודה E כך שמתקיים:  $DE = BE$ .

קדקוד הראש A נמצא בראשית הצירים ונתון

כי:  $D(5,7)$ ,  $E(8.5,2.5)$ .

א. מצא את שיעורי שאר קודקודי המשולש.

ב. כתוב את משוואת השוק AC.



**36** נתון משולש ABC. הנקודה D נמצאת על הצלע BC

של המשולש ABC כך שהקטע AD מחלק אותו

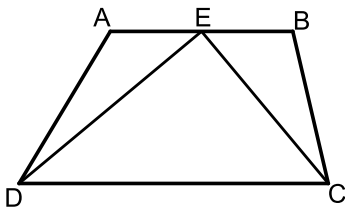
לשני משולשים שווי שטח ABD ו-ACD.

הצלע BC מונחת על הישר:  $y = 4$  וידוע כי

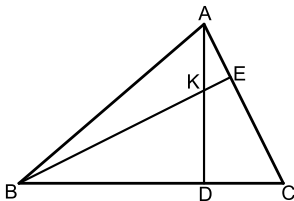
שיעור ה-x של הנקודה C הוא:  $x_C = -1$ .

כמו כן נתון:  $A(7,8)$ ,  $m_{AB} = -2$ .

- א. מצא את משוואת הצלע AB.  
 ב. ענה על הסעיפים הבאים:  
 i. איזה קטע הוא AD בתוך המשולש ABC?  
 ii. מצא את שיעורי הנקודות B ו-D.  
 ג. ענה על הסעיפים הבאים:  
 i. חשב את אורך הצלע BC ואת אורך הקטע AD.  
 ii. איזה משולש הוא המשולש ABC?

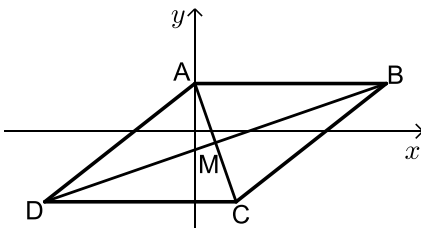


- 37** המרובע ABCD הוא טרפז. הנקודה E היא אמצע הבסיס AB וידוע כי היא נמצאת על ציר ה-x. שיעורי הנקודה B הם (3, 2) והצלע AD מונחת על הישר:  $x = -5$ . אורך הקטע DE הוא  $\sqrt{80}$ . כך ש- $\angle DEC = 90^\circ$ .  
 א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-D.  
 ב. מצא את משוואת הקטע CE ואת משוואת הבסיס CD.  
 ג. מצא את שיעורי הנקודה C.  
 ד. חשב את שטח המשולש DEC.

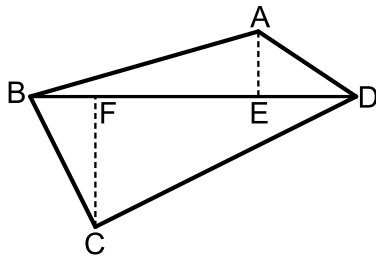


- 38** AD ו-BE הם בהתאמה גבהים לצלעות BC ו-AC במשולש ABC. ידוע כי שיעורי נקודת פגישת הגבהים K הם: (1, 3). שיעורי הנקודות D ו-E הם:  $D(-2, 4)$ ,  $E(3, 5)$ .  
 א. מצא את משוואת הגובה AD ואת משוואת הצלע AC.  
 ב. מצא את שיעורי הקדקוד A.  
 ג. מצא את משוואת הגובה BE ואת משוואת הצלע BC.  
 ד. מצא את שיעורי הקדקוד B.

- 39** נתון מעוין ABCD. ידוע כי הצלע CD מונחת על  $y = -7$ . אלכסוני המעוין AC ו-BD נפגשים בנקודה:  $M(-0.5, -3)$ . שיפוע האלכסון AC הוא -4.  
 א. מצא את משוואת האלכסון AC.  
 ב. מצא את שיעורי הנקודה C.  
 ג. חשב את שטח המשולש BMC.

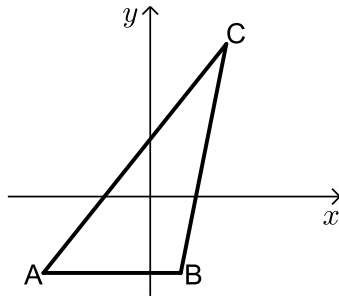


40 נתון מרובע ABCD שקודקודיו הם:  $A(3,13)$ ,  $B(-2,4)$ ,  $C(9,3)$ ,  $D(8,14)$ .



מורידים גבהים AE ו-CF לאלכסון BD.

- מצא את משוואת האלכסון BD ואת אורכו.
- מצא את שיעורי הנקודות E ו-F.
- מצא את אורכי הגבהים AE ו-CF.
- חשב את שטח המרובע ABCD.



41 על הישר  $y = -5$  מסמנים את

הנקודות:  $A(-7, -5)$ ,  $B(2, -5)$ .

הנקודה C נמצאת על הישר:  $y = x - 5$ .

נסמן את שיעור ה-x של הנקודה C ב-t.

א. הבע באמצעות t את שיעור ה-y של הנקודה C.

ב. ידוע כי אורך הצלע AC הוא 17 ס"מ.

הבע באמצעות t את המרחקים של C מ-A ומ-B.

ג. מצא את t ואת אורך הצלע BC.

ד. מסמנים נקודה D על המשך הצלע AB.

ידוע כי D נמצאת ברביע השלישי.

מצא את שיעורי הנקודה D המקיימת ששטח

המשולש DAC יהיה גדול ב-16 יחידות משטח המשולש ABC.

42 המשולש ABC הוא שווה שוקיים ( $AB = BC$ )

ובו נתון:  $A(-4, 12)$ ,  $B(x, 6)$  ו-  $C(4, 8)$ .

א. מצא את x.

ב. הוכח כי המשולש הוא ישר זווית.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את משוואת הצלע AC.

ii. מסמנים את נקודת החיתוך של הצלע AC עם ציר ה-y ב-D.

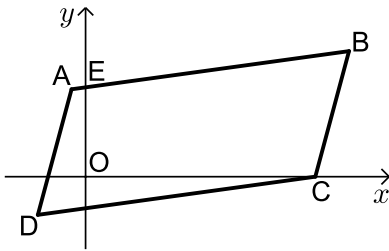
מצא את שיעורי הנקודה D.

ד. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא נקודה E ברביע הראשון ( $x_E < 5$ ) כך שהמשולש DCE יהיה גם

שווה שוקיים וישר זווית ( $\sphericalangle C = 90^\circ$ ).

ii. חשב את יחס השטחים בין המשולשים:  $\frac{S_{DCE}}{S_{ABC}}$ .



43 באיור שלפניך נתונה מקבילית ABCD.

ידועים קודקודי המקבילית הבאים:  $A(-1, y)$

ו-  $B(x, 4)$ .  $x$  ו-  $y$  נעלמים).

שיפוע הצלע CD הוא 0.2 ואורכה הוא:  $d_{CD} = \sqrt{104}$ .

א. מצא את  $x$  ו-  $y$  אם ידוע כי B ברביע הראשון.

ב. נתון גם כי הקדקוד C נמצא על ציר ה- $x$  בחלקו החיובי

וכי:  $d_{BC} = \sqrt{17}$ . מצא את שיעורי הקדקוד C (מצא שתי אפשרויות).

ג. סמן את נקודת החיתוך של הצלע AB עם ציר ה- $y$  ב-E.

שטח המרובע EOCB הוא 25.9 יח"ש. מצא את האפשרות הנכונה עבור

הנקודה C מבין אלו שמצאת בסעיף הקודם.

## תשובות סופיות:

$$(28) \quad \text{א. } y = -\frac{4}{5}x + \frac{2}{5} \quad \text{ב. } C(-6,0) \quad \text{ג. } y = -\frac{2}{9}x - \frac{4}{3}$$

$$(29) \quad \text{א. } l_{BD}: y = 3x - 22 \quad \text{ב. } l_{BC}: y = -\frac{1}{8}x - 6\frac{3}{8}$$

$$(30) \quad \text{א. } 18 \text{ יח"ש} = S_{EDF} \quad \text{ב. } 3 \text{ יחידות אורך} = AB$$

$$(31) \quad C(14,5)$$

$$(32) \quad \text{א. } y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3} \quad \text{ב. } B(2,-3), C(2,1) \quad \text{ג. } 12 \text{ יחידות שטח} = S_{ABC}$$

(33) א. מרובע כללי כלשהו. לא ניתן להצביע על אף תכונה.

ב. מלבן. ניתן להראות כי יש למרובע שני זוגות צלעות נגדיות מקבילות ושוות וזווית ישרה.

ג. ריבוע. ניתן להראות כי קיימות זוג צלעות סמוכות שוות. ד.  $90$  יח"ש =  $S$ .

$$(34) \quad \text{א. } y = \frac{2}{3}x + 1\frac{2}{3} \quad \text{ב. } (-1,1), (4,0), (5,5)$$

$$(35) \quad \text{א. } B(12,-2), C(-2,16) \quad \text{ב. } y = -8x$$

$$(36) \quad \text{א. } y = -2x + 22 \quad \text{ב. i. תיכון - קטע במשולש שחוצה אותו לשני משולשים שווי}$$

$$\text{שטח הוא תיכון. ב. ii. } B(9,4), D(4,4)$$

ג. ii.  $AD = 5, BC = 10$ . ג. ii. משולש ישר זווית - אם במשולש יש תיכון לצלע ששווה

למחציתה אז המשולש הוא ישר זווית.

$$(37) \quad \text{א. } D(-5,-8), A(-5,-2), E(-1,0) \quad \text{ב. } CE: y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, CD: y = \frac{1}{2}x - 5\frac{1}{2}$$

$$\text{ג. } C(5,-3) \quad \text{ד. } 30 \text{ יח"ש} = S_{DEC}$$

$$(38) \quad \text{א. } AD: y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}, AC: y = -x + 8 \quad \text{ב. } A(7,1)$$

$$\text{ג. } BE: y = x + 2, BC: y = 3x + 10 \quad \text{ד. } B(-4,-2)$$

$$(39) \quad \text{א. } y = -4x - 5 \quad \text{ב. } C(0.5,-7) \quad \text{ג. } 34 \text{ סמ"ר} = S_{BMC} = S_{DMC}$$

$$(40) \quad \text{א. } d_{BD} = \sqrt{200}, y = x + 6 \quad \text{ב. } E(5,11), F(3,9)$$

$$\text{ג. } d_{CF} = \sqrt{72}, d_{AE} = \sqrt{8} \quad \text{ד. } S_{ABCD} = 80$$

$$(41) \quad \text{א. } C(t, t-5) \quad \text{ב. i. } AC = \sqrt{2t^2 + 14t + 49}, BC = \sqrt{2t^2 - 4t + 4}$$

$$\text{ii. } 10 \text{ ס"מ} = BC, t = 8 \quad \text{ג. } D(-20,-5)$$

$$(42) \quad \text{א. } x = -2 \quad \text{ג. i. } y = -0.5x + 10 \quad \text{ii. } D(0,10) \quad \text{ד. i. } E(2,4)$$

$$\text{ii. } \frac{S_{DCE}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2}$$

$$(43) \quad \text{א. } x = 9, y = 2 \quad \text{ב. } C(8,0), C(10,0) \quad \text{ג. } C(8,0)$$

## חלוקת קטע ביחס נתון:

### סיכום כללי:

- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו  $A(x_1, y_1)$  ו-  $B(x_2, y_2)$  ביחס של  $k:l$  הם:  $x_p = \frac{k \cdot x_1 + l \cdot x_2}{k+l}, y_p = \frac{k \cdot y_1 + l \cdot y_2}{k+l}$  (בהצלבה).

### שאלות:

- (1) הנקודה P נמצאת על הקטע AB. נתון:  $A(2, -5), B(-12, 16)$ .

$$\frac{AP}{PB} = \frac{2}{5} \text{ . מצא את ערכי הנקודה P, אם נתון כי}$$

- (2) קודקודי משולש ABC הם:  $A(-1, 3), B(6, 0), C(4, -12)$ .

מצא את שיעורי מרכז הכובד של המשולש.  
(מרכז כובד של משולש הוא מפגש תיכוני המשולש).

- (3) מצא את שיעורי מרכז הכובד של משולש ABC

שקודקודיו הם:  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ .

- (4) קודקודי המשולש ABC הם:  $A(5, 1), B(7, -3), C(-1, 4)$ .

מצא את אורכו של חוצה הזווית היוצא מקודקוד A.

### תשובות סופיות:

$$M(3, -3) \quad (2) \qquad P(-2, 1) \quad (1)$$

$$1.697 \text{ יחידות אורך.} \quad (4) \qquad \left( \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right) \quad (3)$$

## מרחק נקודה מישר:

### סיכום כללי:

#### הצגה כללית של ישר ומרחקים:

- הצגה כללית של ישר (צורה סתומה):  $Ax + By + C = 0$ .
- מרחק הנקודה  $A(x_1, y_1)$  מהישר  $Ax + By + C = 0$  הוא:  $d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$  כאשר  $B > 0$ .

- אם הנקודה מעל הישר מורידים את הערך המוחלט.
- אם הנקודה מתחת לישר מורידים את הערך המוחלט ומוסיפים מינוס לאחד האגפים.

### שאלות:

(5) ענה על הסעיפים הבאים:

- מצא את מרחק הנקודה  $(-2, 4)$  מהישר  $4x + 3y + 11 = 0$ .
- מצא את מרחק הנקודה  $(4, 3)$  מהישר  $y = 3x - 1$ .
- מצא את מרחק הנקודה  $(3, -11)$  מהישר  $x - 5 = 0$ .

(6) מצא את המרחק בין הנקודה הנתונה לישר הנתון:

- $3x - 4y + 6 = 0$ ,  $A(-5, -1)$     ב.  $12x + 5y - 17 = 0$ ,  $A(-3, 8)$
- $2y + 7 = 0$ ,  $A(11, -2)$     ד.  $3x - 14 = 0$ ,  $A\left(6, -\frac{1}{2}\right)$

(7) מצא את שיעורי הנקודות על הישר  $x + y - 7 = 0$  שמרחקן מהישר  $2x - y + 5 = 0$  הוא:  $\sqrt{20}$ .

(8) מצא את שטחה של מקבילית ששיעורי קודקודיה

הם:  $A(7, -1)$ ,  $B(-5, 4)$ ,  $C(-1, 7)$ ,  $D(11, 2)$ .

- (9) מצא את שטחו של המשולש  $\triangle ABC$  שבו שיעורי קדקוד A הם  $A(5, -3)$  ושניים מתיכוני המשולש מונחים על הישרים  $x - 4 = 0$  ו-  $2x - y - 1 = 0$ .
- (10) מצא את שטחו של משולש שקודקודיו הם:  $A(2, 2)$ ,  $B(-1, 1)$ ,  $C(-5, -2)$ .
- (11) מצא את שיעורי הנקודות על הישר  $3x - 2y + 6 = 0$ , שמרחקן מהישר:  $2x - y - 14 = 0$  הוא  $3\sqrt{5}$ .
- (12) מצא את שיעורי הנקודות על הישר  $4x + 3y - 20 = 0$ , שמרחקן מהישר:  $3x + 2y + 13 = 0$  הוא  $2\sqrt{13}$ .

### תשובות סופיות:

- (5) א. 3 ב.  $\frac{8}{\sqrt{10}}$  ג. 2
- (6) א. 1 ב. 1 ג.  $1\frac{1}{2}$  ד.  $\frac{1}{3}$
- (7)  $(4, 3)$ ,  $\left(-2\frac{2}{3}, 9\frac{2}{3}\right)$
- (8)  $S_{ABCD} = 56$  יח"ש
- (9)  $S_{ABC} = 18$  יח"ש
- (10)  $S_{ABC} = 2.5$  יח"ש
- (11)  $(4, 9)$ ,  $(64, 99)$
- (12)  $(-1, 8)$ ,  $(-157, 216)$

## מיקום נקודה ביחס לישר:

### שאלות:

- 13** מצא את שיעורי הנקודה על הישר  $3x - 2y + 6 = 0$ , שמרחקה מהישר:  $2x - y - 14 = 0$  הוא  $3\sqrt{5}$  והיא נמצאת מתחתיו.
- 14** מצא את שיעורי הנקודה על הישר  $4x + 3y - 20 = 0$ , שמרחקה מהישר:  $3x + 2y + 13 = 0$  הוא  $2\sqrt{13}$  והיא נמצאת מעליו.
- 15** נתון משולש ABC שבו נתונים הקודקודים:  $A(1,1)$ ,  $B(13,6)$ . הקדקוד C נמצא על הישר  $2x - y - 19 = 0$  ונמצא מתחת לצלע AB. מצא את שיעורי הקדקוד C אם ידוע ששטח המשולש הוא 13.
- 16** נתון משולש שצלעותיו מונחות על הישרים:  
 $I: x + 2y + 1 = 0$ ,  $II: x - 2y - 11 = 0$ ,  $III: 2x - y + 6 = 0$   
 מצא שיעורי נקודה הנמצאת בתוך המשולש, שמרחקה מישר I שווה למרחקה מישר III ומרחקה מישר II הוא מחצית מהמרחק משני ישרים אלה.
- 17** מצא את שיעורי מרכז המעגל, החסום במשולש, שצלעותיו מונחות על הישרים:  $I: 4x - 3y + 2 = 0$ ,  $II: 3x - 4y - 51 = 0$ ,  $III: 3x + 4y - 11 = 0$ .
- 18** מצא משוואת ישר ששיפועו 3 אם ידוע שהנקודה  $G(7, -3)$  נמצאת מתחתיו ובמרחק  $2\sqrt{10}$  ממנו.
- 19** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה  $A(-2, 6)$  ומרחקו מהנקודה  $B(2, 9)$  הוא  $\sqrt{5}$ .
- 20** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה  $A(9, 10)$  ומרחקו מהנקודה  $B(8, -3)$  הוא  $5\sqrt{5}$ .
- 21** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה  $A(3, 6)$  ומרחקו מהנקודה  $B(-9, 2)$  הוא 4.

- (22)** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה  $A(1,2)$  ומרחקו מהנקודה  $B(-3,10)$  הוא 4.
- (23)** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה  $A(10,8)$  ומרחקו מהנקודה  $B(7,-1)$  הוא 3.
- (24)** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה  $A(-6,1)$  ומרחקו מהנקודה  $B(2,7)$  הוא 10.

### תשובות סופיות:

- |   |   |
|---|---|
| $(-1,8)$ <b>(14)</b>  | $(64,99)$ <b>(13)</b>   |
| $(-1,-4)$ <b>(16)</b>   | $C(11,3)$ <b>(15)</b>   |
| $y = 3x - 4$ <b>(18)</b>  | $(2,-5)$ <b>(17)</b>  |
| $y = -\frac{22}{31}x + 16\frac{12}{31}$ , $y = \frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2}$ <b>(20)</b> | $y = 2x + 10$ , $y = \frac{2}{11}x + 6\frac{4}{11}$ <b>(19)</b> |
| $x = 1$ או $y = -\frac{3}{4}x + 2\frac{3}{4}$ <b>(22)</b>                               | $y = \frac{3}{4}x + 3\frac{3}{4}$ , $y = 6$ <b>(21)</b>         |
| $y = -\frac{4}{3}x - 7$ <b>(24)</b>   | $x = 10$ או $y = 1\frac{1}{3}x - 5\frac{1}{3}$ <b>(23)</b>      |

## מרחק בין ישרים מקבילים:

### סיכום כללי:

- מרחק בין שני ישרים מקבילים:  $Ax + By + C_1 = 0$  ו-  $Ax + By + C_2 = 0$  כאשר:  $B > 0$

$$\text{הוא: } d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ ומתקיים בהעדר הערך המוחלט:}$$

- אם:  $C_1 > C_2$ ,  $(d > 0)$  אז הישר  $Ax + By + C_1 = 0$  מתחת ל-  $Ax + By + C_2 = 0$ .
- אם:  $C_1 < C_2$ ,  $(d < 0)$  אז הישר  $Ax + By + C_1 = 0$  מעל ל-  $Ax + By + C_2 = 0$ .

### שאלות:

(25) מצא משוואת ישר, המקביל לישר  $3x - 4y + 8 = 0$  ונמצא במרחק 4 ממנו.

(26) מצא את המרחק בין הישרים המקבילים:  $5x + 12y - 14 = 0$ ,  $5x + 12y + 25 = 0$ .

(27) נתונים הישרים:  $y = 6x + 5$ ,  $12x - 2y - 15 = 0$ .  
הראה שהישרים מקבילים ומצא את המרחק ביניהם.

(28) נתון המלבן ABCD. משוואותיהן של שתיים מצלעות המלבן הן  $AB: 3x + y = 0$  ו-  $CD: 3x + y - 6 = 0$ . הקדקוד B נמצא בראשית הצירים. נתון כי הצלע BC ארוכה פי 4 מהצלע BC. מצא את שטח המלבן ואת מפגש אלכסוני המלבן, אם ידוע שהוא ברביע הרביעי.

(29) צלע של ריבוע מונחת על הישר  $3x - 2y + 5 = 0$ . אלכסוני הריבוע נפגשים בנקודה  $B(1, -1)$ . מצא את משוואות הישרים עליהם מונחות הצלעות האחרות של הריבוע.

(30) נתון ישר שעובר בראשית הצירים ושיפועו חיובי. מצא את משוואת הישר אם נתון שהוא נמצא מעל הנקודות  $P(4, 1)$  ו-  $Q(7, 2)$  וסכום המרחקים ממנו לנקודות אלה הוא  $3\sqrt{10}$ .

**(31)** במשולש BKP נתון כי הצלע BK מונחת על הישר  $x - y + 3 = 0$  והצלע BP מונחת על הישר  $x + 2y + 3 = 0$ . אורך הגובה לצלע BP הוא  $3\sqrt{5}$  ואורך הגובה לצלע KP הוא 5. מצא את שיעורי קדקוד P אם ידוע שראשית הצירים נמצאת בתוך המשולש.

### תשובות סופיות:

$$3 \quad (26) \quad 3x - 4y + 28 = 0, 3x - 4y - 12 = 0 \quad (25)$$

$$(2.1, -3.3), S = \text{יח"ש} = 14.4 \quad (28) \quad \frac{25}{\sqrt{148}} \quad (27)$$

$$3x - 2y - 15 = 0, y = -\frac{2}{3}x - 3\frac{2}{3}, y = -\frac{2}{3}x + 3 \quad (29)$$

$$P\left(2, -2\frac{1}{2}\right) \quad (31) \quad y = 3x \quad (30)$$

## מתמטיקה 0

פרק 5 - גיאומטריה אנליטית - המעגל

תוכן העניינים

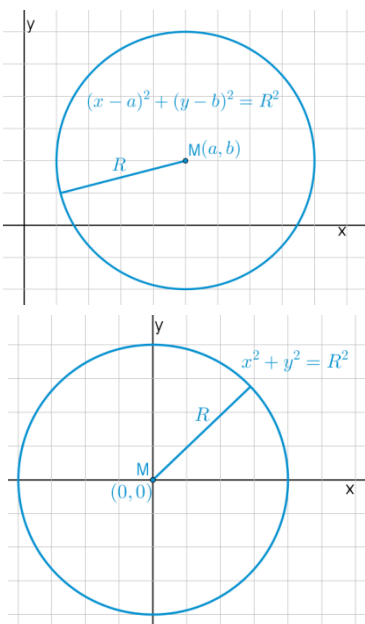
110	1. הכרות עם משוואת המעגל
114	2. מעגל המשיק לצירים
116	3. משיק למעגל
117	4. שאלות יסודיות שונות
(ללא ספר)	5. נושאים מתקדמים במעגל
124	6. כתיבת משוואת מעגל עם השלמה לריבוע
125	7. משוואות המשיקים למעגל
127	8. מיתר המחבר שתי נקודות השקה
128	9. שאלות מסכמות שונות

## הכרות עם משוואת המעגל:

**סיכום כללי:**

**הגדרה:**

המקום הגאומטרי של כל הנקודות, הנמצאות במרחק קבוע מנקודה קבועה במישור נקרא מעגל.



**משוואת מעגל:**

משוואת מעגל שמרכזו בנקודה  $M(a, b)$  ורדיוסו  $R$  היא:  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ .

**משוואת מעגל קנוני:**

משוואת מעגל קנוני (שמרכזו בראשית הצירים  $M(0, 0)$ ) ורדיוסו  $R$  היא:  $x^2 + y^2 = R^2$ .

**שאלות:**

**1) מצא את מרכזם ורדיוסם של המעגלים הבאים:**

א.  $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 49$

ב.  $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 10$

ג.  $(x-m)^2 + (y+n)^2 = m^2 + n^2$

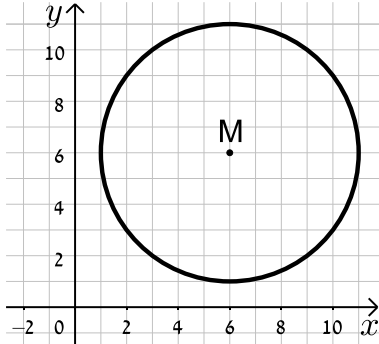
**2) כתוב את משוואות המעגלים שמרכזם  $M$  ורדיוסם  $R$ :**

א.  $M(4, -2), R=3$       ב.  $M(-3, 5), R=10$

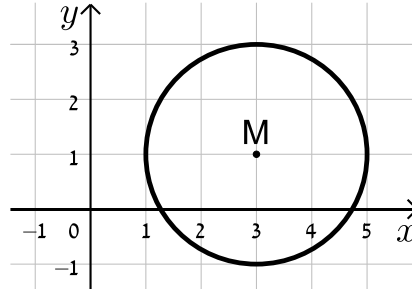
ג.  $M(5, 5), R=\sqrt{40}$       ד.  $M(10, -12), R=\sqrt{30}$

3) כתוב את משוואות המעגלים הבאים בכל מקרה:

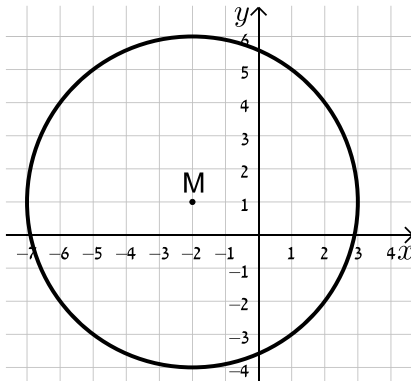
ב.



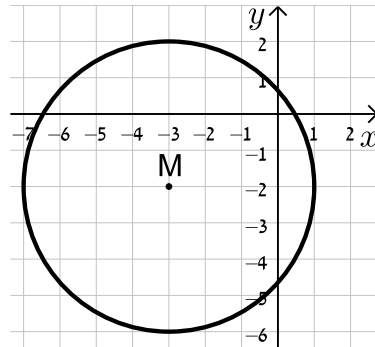
א.



ד.



ג.



4) מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה  $A(-4, 5)$  ומרכזו בנקודה  $O(2, -1)$ .

5) מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה  $M(-5, 6)$  והוא חותך את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 9$ .

6) מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה  $M(0, -7)$  והוא חותך את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = 3$ .

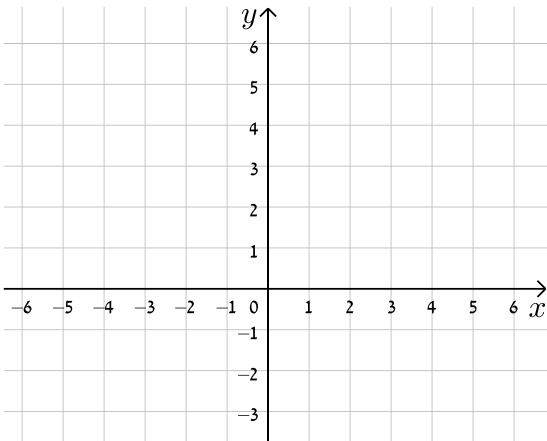
7) מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה  $A(11, 2)$ , רדיוסו 13 ומרכזו נמצא על הישר  $y = 2x - 1$ .

8) מצא את משוואתו של מעגל שהנקודות  $A(-2, 3)$  ו- $B(4, -3)$  הן קצות הקוטר שלו.

9 מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו נמצא על הישר  $x=4$ , רדיוסו 10 והוא חותך מציר ה- $x$  מיתר שאורכו 12.

10 מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו  $M(4, -3)$  אם ידוע כי הישר  $y = -3x + 7$  חותך אותו בשתי נקודות A ו-B כך שאורכו של המיתר AB הוא 4 יחידות אורך.

11 מצא את משוואתו של מעגל החוסם משולש שקודקודיו הם  $A(22, -24)$ ,  $B(-10, 40)$ ,  $C(-30, 28)$ .



12 נתונים שני מעגלים בעלי אותו המרכז  $M(3, -1)$ , האחד הוא בעל רדיוס  $R$  והשני בעל רדיוס של  $2R$ .  
 א. כתוב את המשוואות של שני המעגלים (בטא באמצעות  $R$ ).  
 ב. מה תהיינה המשוואות עבור  $R = 2$ ?  
 ג. צייר את שני המעגלים במערכת הצירים שלפניך.

13 שני מעגלים שמרכזיהם  $M_1(6, 2)$  ו- $M_2(-3, -4)$  חותכים זה את זה בנקודה  $(-2, 3)$ . מצא את משוואות המעגלים.

14 נתונה משוואת המעגל הבאה:  $x^2 + y^2 - 10x - 10y + a = 0$  כאשר  $a$  פרמטר.  
 א. מצא ביטוי של רדיוס המעגל באמצעות  $a$ .  
 ב. איזה מהערכים הבאים יכול להיות הגיוני עבור  $a$ ?  
 נמק ומצא את תחום ההגדרה של  $a$ .  
 i.  $a = 5$   
 ii.  $a = 55$

## תשובות סופיות:

$$\text{M}(-0.5, 0), R = \sqrt{10} \text{ ב.} \quad \text{M}(3, -5), R = 7 \text{ א.} \quad (1)$$

$$\text{M}(m, -n), R = \sqrt{m^2 + n^2} \text{ ג.}$$

$$(x+3)^2 + (y-5)^2 = 100 \text{ ב.} \quad (x-4)^2 + (y+2)^2 = 9 \text{ א.} \quad (2)$$

$$(x-10)^2 + (y+12)^2 = 30 \text{ ד.} \quad (x-5)^2 + (y-5)^2 = 40 \text{ ג.}$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 = 25 \text{ ב.} \quad (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4 \text{ א.} \quad (3)$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25 \text{ ד.} \quad (x+3)^2 + (y+2)^2 = 16 \text{ ג.}$$

$$\text{M}(3, -3), (x-2)^2 + (y+1)^2 = 72 \quad (4)$$

$$(x+5)^2 + (y-6)^2 = 232 \quad (5)$$

$$x^2 + (y+7)^2 = 100 \quad (6)$$

$$(x-7.8)^2 + (y+14.6)^2 = 169 \text{ או } (x+1)^2 + (y+3)^2 = 169 \quad (7)$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 18 \quad (8)$$

$$(x-4)^2 + (y+8)^2 = 100 \text{ או } (x-4)^2 + (y-8)^2 = 100 \quad (9)$$

$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = 4\frac{2}{5} \quad (10)$$

$$(x+2)^2 + (y-4)^2 = 1360 \quad (11)$$

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = R^2, (x-3)^2 + (y+1)^2 = 4R^2 \text{ א.} \quad (12)$$

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4, (x-3)^2 + (y+1)^2 = 16 \text{ ב.}$$

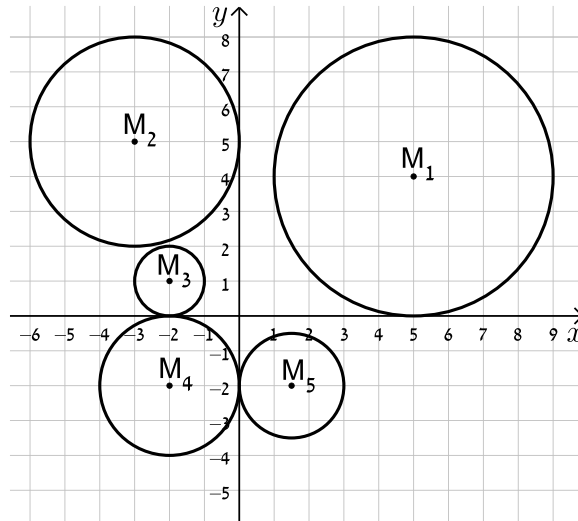
$$(x+3)^2 + (y+4)^2 = 50, (x-6)^2 + (y-2)^2 = 65 \quad (13)$$

$$a < 50 \text{ :ת.ה.} \text{ ב.} \quad a = 5 \text{ א.} \quad R = \sqrt{50-a} \quad (14)$$

## מעגל המשיק לצירים:

שאלות:

15) כתוב את משוואות המעגלים הבאים:



16) מצא את משוואתו של מעגל המשיק לשני הצירים ורדיוסו 4.

17) מצא את משוואת המעגל שמשיק לציר ה- $x$  ומרכזו בנקודה  $M(16,8)$ .

18) מצא את משוואת המעגל שמרכזו נמצא על הישר  $2x + 3y + 6 = 0$  והוא משיק לשני הצירים.

19) מצא את משוואתו של מעגל המשיק לציר ה- $y$  וליר  $y = 6$  ומרכזו על הישר  $y = 3x - 2$  ברביע הראשון.

**תשובות סופיות:**

$$M_1 : (x-5)^2 + (y-4)^2 = 16, M_2 : (x+3)^2 + (y-5)^2 = 9 \quad \mathbf{(15)}$$

$$, M_3 : (x+2)^2 + (y-1)^2 = 1, M_4 : (x+2)^2 + (y+2)^2 = 4$$

$$. M_5 : (x-1.5)^2 + (y+2)^2 = 2\frac{1}{4}$$

$$. (x \pm 4)^2 + (y \pm 4)^2 = 16 \quad \mathbf{(16)}$$

$$. (x-16)^2 + (y-8)^2 = 64 \quad \mathbf{(17)}$$

$$. \left(x+1\frac{1}{5}\right)^2 + \left(y+1\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{36}{25}, (x-6)^2 + (y+6)^2 = 36 \quad \mathbf{(18)}$$

$$. (x-2)^2 + (y-4)^2 = 4 \quad \mathbf{(19)}$$

## משיק למעגל:

### סיכום כללי:

משוואת המשיק למעגל  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$  בנקודה  $A(x_1, y_1)$  שעליו היא:  $(x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) = R^2$ .

### שאלות:

**20** מצא את משוואות המשיקים למעגל  $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$  בנקודות על המעגל שבהן  $y = 5$ .

**21** נתונה משוואת המעגל:  $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 20$  ומשוואת הישר  $y = 2x + m$  כאשר  $m$  פרמטר. מצא עבור אלו ערכים של  $m$  הישר ישיק למעגל ולאילו ערכים הישר יחתוך את המעגל.

### תשובות סופיות:

**20**  $4x - 3y + 35 = 0$  ו-  $4x + 3y = 27$ .

**21** משיק:  $m = 11, -9$ , חותך:  $-9 < m < 11$ .

## שאלות יסודיות שונות:

### שאלות:

(22) נתון מעגל שמשוואתו  $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$ .

- א. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.  
 ב. העבירו קוטר במעגל, המאונך לציר ה- $x$ .  
 מצא את שטח המרובע הנוצר על ידי נקודות החיתוך שמצאת בסעיף א'  
 ונקודת החיתוך של הקוטר עם המעגל הנמצאת ברביע הראשון.

- (23) נתון ישר שמשוואתו  $y = 2x - 10$ . הישר חותך את ציר ה- $x$  בנקודה A ואת ציר ה- $y$  בנקודה B. בנקודה A מעבירים משיק למעגל שהקטע AB הוא קוטרו. המשיק חותך את ציר ה- $y$  בנקודה C. מצא את אורך הקטע BC.

- (24) נתון המעגל שמשוואתו  $x^2 + y^2 = 81$ . מסמנים ב-A את נקודת החיתוך החיובית של המעגל עם ציר ה- $x$ . הנקודה A היא מרכזו של מעגל נוסף בעל רדיוס של 12. מסמנים את נקודות החיתוך של שני המעגלים ב-B ו-C. מצא את שטח המשולש שנוצר בין הנקודות B, C ו-O (ראשית הצירים).

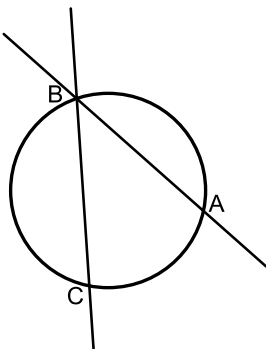
- (25) נתון ישר שמשוואתו  $y = x$ . הישר חותך מעגל קנוני שמשוואתו  $x^2 + y^2 = 32$  בשתי נקודות, A ו-B, כאשר A ברביע הראשון. בנקודה A עובר מעגל נוסף, המשיק למעגל הקנוני ובעל אותו רדיוס. מצא את משוואת המעגל הנוסף ואת משוואת המשיק המשותף לשני המעגלים העובר בנקודה A.

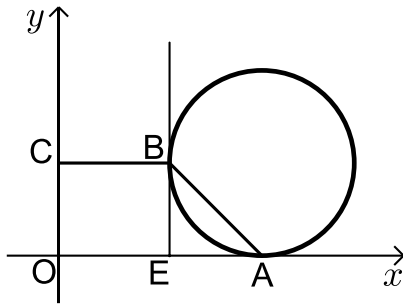
- (26) הישרים:  $9y + 11x = 94$  ו-  $y = -3x + 14$  נחתכים בנקודה B.

דרך נקודה זו עובר מעגל שמרכזו הוא:  $M(-9, 1)$ .

ידוע כי מעגל זה חותך את הישרים (חוץ מהנקודה B) בשתי נקודות A ו-C (ראה איור).

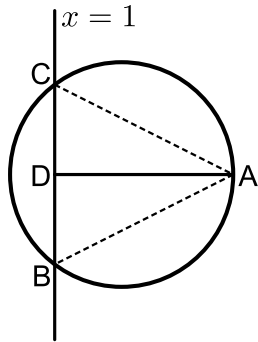
- א. מצא את שיעורי הנקודה B.  
 ב. מצא את משוואת המעגל.  
 ג. מצא את שיעורי הנקודה A – נקודת החיתוך של הישר שמשוואתו:  $y = -3x + 14$  עם המעגל.





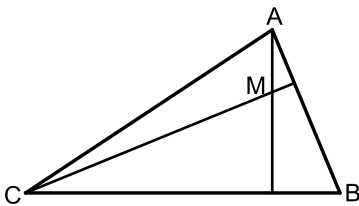
- (27)** נתון מעגל המשיק לציר ה- $x$  בנקודה  $A$ .  
 מהנקודה  $E$  שעל ציר ה- $x$  מעלים אנך המשיק למעגל בנקודה  $B$  (ראה איור).  
 הקטע  $BC$  מקביל לציר ה- $x$  ו- $O$  היא נקודת ראשית הצירים. יוצרים טרפז ישר זווית  $ABCO$  ששטחו הוא  $170$  סמ"ר.  
 ידוע כי:  $C(0,10)$  ו-  $AE = 10$  ס"מ.

- א. ענה על הסעיפים הבאים:  
 i. מצא את שיעורי הנקודה  $B$ .  
 ii. מצא את שיעורי הנקודה  $A$ .  
 ב. כתוב את משוואת המעגל.

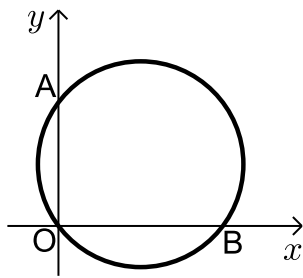


- (28)** הנקודה  $A(17,4)$  נמצאת על המעגל שמשוואתו:  $(x-7)^2 + (y-4)^2 = R^2$ .  
 הישר  $x=1$  חותך את המעגל בשתי נקודות  $B$  ו- $C$  כך ש- $B$  נמצאת ברביע הרביעי. מעבירים את הקטע  $AD$  המאונך לישר  $BC$  וידוע כי הנקודה  $D$  היא אמצע  $BC$ .

- א. מצא את רדיוס המעגל.  
 ב. מצא את שיעורי הנקודות  $B$  ו- $C$ .  
 ג. ענה על הסעיפים הבאים:  
 i. חשב את מרחק הנקודה  $A$  מהישר  $x=1$ .  
 ii. חשב את שטח המשולש  $ABC$ .



- (29)** נתון משולש  $ABC$ . משוואות הצלעות  $AB$  ו- $BC$  במשולש  $ABC$  הן בהתאמה:  $2y - x = 56$  ו-  $8y + x = 104$ .  
 מעבירים גבהים לצלעות  $AB$  ו- $BC$  אשר נחתכים בנקודה  $M(0, -2)$  שבתוך המשולש.  
 א. מצא את משוואות הגבהים.  
 ב. מצא את שיעורי הנקודה  $B$ .  
 ג. מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה  $M$  ורדיוסו הוא הקטע  $BM$ .



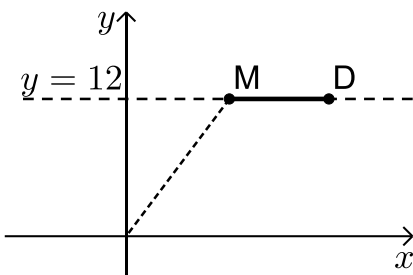
**30** באיור שלפניך מתואר המעגל:  $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$ .

המעגל חותך את הצירים בנקודות A, B ו-O.

- מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.
- מצא נקודה C הנמצאת על היקף המעגל ברביע הראשון כך שהמרובע ABCO יהיה מלבן.
- חשב את היקף המלבן.

**31** המעגל:  $(x+a)^2 + (y-1)^2 = a+4$ ,  $a > 0$ , חותך את ציר ה-x בנקודה שבה:  $x=1$ .

- מצא את a.
- מצא את נקודות החיתוך של המעגל הנתון עם המעגל  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$ .
- כתוב את משוואת הישר העובר דרך נקודות החיתוך של שני המעגלים.
- חשב את שטח המשולש שיוצר הישר שמצאת בסעיף הקודם עם הצירים.



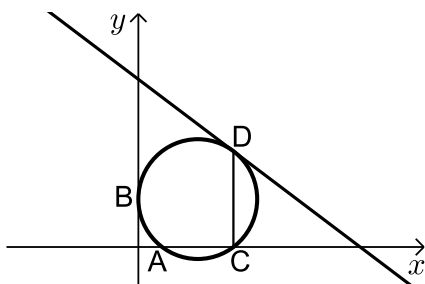
**32** הנקודות M ו-D נמצאות על הישר  $y=12$  ידוע כי שיעור

ה-x של הנקודה M הוא 9 וכי המרחק של הנקודה M מראשית הצירים גדול ב-6 מהמרחק בין הנקודות M ו-D (ראה איור).  
בוניס מעגל שמרכזו נמצא בנקודה M ורדיוסו הוא האורך DM.

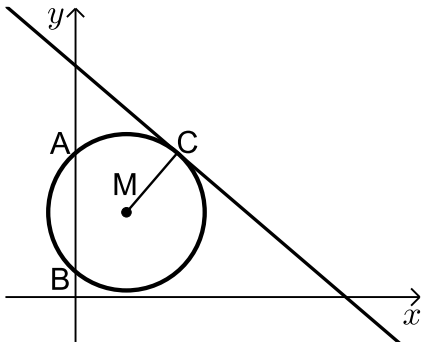
- ענה על הסעיפים הבאים:
  - מצא את מרחק הנקודה M מראשית הצירים.
  - מצא את שיעור ה-x של הנקודה D.
- כתוב את משוואת המעגל.
- האם המעגל הזה חותך את הצירים? הראה חישוב מתאים לטענתך.

**33** מעגל שמרכזו בנקודה M(15,12) משיק לציר ה-y

בנקודה B וחותך את ציר ה-x בשתי נקודות A ו-C כמתואר באיור.



- כתוב את משוואת המעגל.  
מהנקודה C מעלים אנך לציר ה-x שחותך את המעגל בנקודה נוספת D.  
דרך הנקודה D עובר משיק למעגל.
- מצא את שיעורי הנקודות C ו-D.
- מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה D.



34) באיור שלפניך נתון מעגל שמרכזו בנקודה M.

המעגל חותך את ציר ה- $y$  בנקודות A ו-B.

מעבירים משיק למעגל:  $6x + 7y = 191$

דרך הנקודה:  $C(12, 17)$ .

א. כתוב את משוואת הרדיוס MC.

ב. ידוע כי הנקודה M נמצאת על הישר  $y = 10$ .

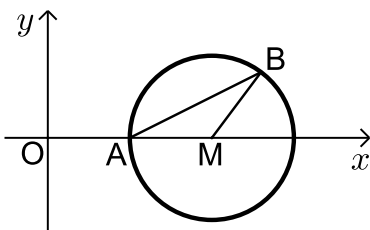
i. מצא את שיעורי הנקודה M.

ii. מצא את אורך רדיוס המעגל.

iii. כתוב את משוואת המעגל.

ג. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- $y$ .

ד. חשב את שטח המשולש AMB.



35) באיור שלפניך נתון מעגל שמרכזו בנקודה M הנמצאת על

ציר ה- $x$ . המעגל חותך את ציר ה- $x$  בנקודה A.

מסמנים את ראשית הצירים ב-O.

ידוע כי A היא אמצע הקטע MO ושיעוריה הם:  $A(5, 0)$ .

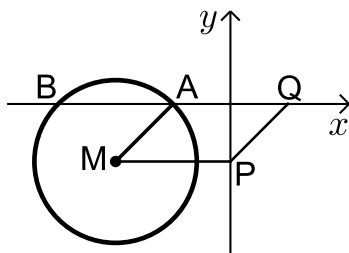
א. מצא את משוואת המעגל.

ב. כתוב את משוואת הישר שעובר דרך הנקודה A ושיפועו הוא 0.5.

ג. מצא את נקודת החיתוך הנוספת של הישר שמצאת עם המעגל.

ד. סמן את הנקודה שמצאת בסעיף הקודם ב-B וחשב

את שטח המשולש AMB.



36) באיור שלפניך נתון מעגל שמשוואתו

$$\text{היא: } (x+4)^2 + (y+2)^2 = 8$$

מסמנים את נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- $x$

ב-A ו-B (ראה איור).

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

מעבירים אנך לציר ה- $y$  מנקודת מרכז המעגל M

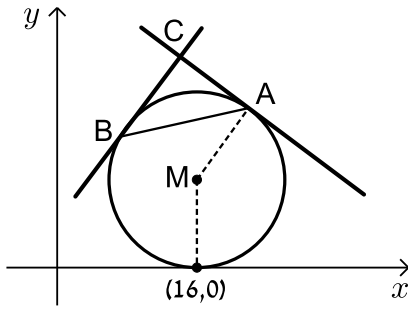
ומסמנים את חיתוכם ב-P.

ב. מצא נקודה Q כך שהמרובע AMPQ יהיה מקבילית. נמק.

ג. כתוב את משוואת הישר PQ.

ד. הוכח כי הישר שמצאת בסעיף הקודם משיק למעגל

בנקודה  $(-2, -4)$ .



**37** נתון מעגל שרדיוסו  $R$  ( $R < 16$ ) ומשיק לציר ה- $x$

בנקודה שבה:  $x = 16$ .

א. הבע באמצעות  $R$  את משוואת המעגל וציין האם הוא חותך את ציר ה- $y$  או לא. נמק.

מהנקודה  $A(22,18)$  שעל המעגל מעבירים משיק.

ב. מצא את  $R$  וכתוב את משוואת המעגל.

ג. כתוב את משוואת המשיק למעגל בנקודה  $A$ .

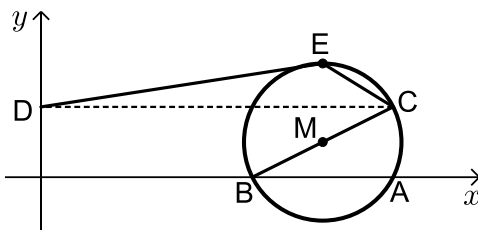
ד. מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה  $B$  שבה  $x_B < x_M$

אם ידוע כי הוא המאונך למשיק הקודם.

ה. המשיקים נחתכים בנקודה  $C$ .

i. מצא את שיעורי הנקודה  $C$ .

ii. מצא את שטח המשולש  $ABC$ .



**38** באיור שלפניך נתון מעגל

שמשוואתו:  $(x+a)^2 + (y-1)^2 = 5$ , פרמטר  $a$ .

ידוע כי המעגל חותך את ציר ה- $x$  בנקודה  $A(10,0)$ .

א. מצא את  $a$  אם ידוע כי  $a > -10$ .

ב. מצא את הנקודה  $B$  - נקודת החיתוך השנייה של המעגל עם ציר ה- $x$ .

ג. כתוב את משוואת הקוטר העובר דרך הנקודה  $B$  ומרכז המעגל  $M$ .

ד. מצא את נקודת החיתוך השנייה של הקוטר עם המעגל.

ה. מעבירים אנך מנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם לציר ה- $y$  בנקודה  $D$ .

הנקודה  $E$  היא הנקודה בעלת שיעור ה- $y$  הגדול ביותר על המעגל.

מחברים את הנקודות  $D$  ו- $E$  כך שנוצר המחומש  $DECBO$ . חשב את שטחו.

**39** באיור שלפניך נתון מעגל שמשוואתו:  $(x-5)^2 + (y-3)^2 = R^2$ , רדיוס המעגל.

ידוע כי המעגל עובר בראשית הצירים.

א. מצא את רדיוס המעגל

וכתוב את משוואת המעגל.

ב. מצא את הנקודות  $A$  ו- $B$  - החיתוך של

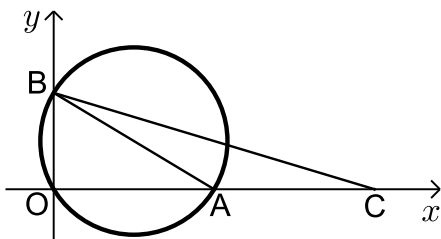
המעגל עם הצירים (ראה איור).

ג. מסמנים נקודה  $C$  על ציר ה- $x$

כך ש- $A$  היא אמצע הקטע  $CO$ .

i. מצא את שיעורי הנקודה  $C$ .

ii. חשב את שטח המשולש  $ABC$ .



## תשובות סופיות:

(22) א.  $(0, -8)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(6, 0)$  ב. 27 יח"ש.

(23) 12.5 יחידות אורך.

(24)  $S_{ABOC} = \sqrt{80}$  יח"ש

(25)  $y = -x + 8$ ,  $(x - 8)^2 + (y - 8)^2 = 32$

(26) א.  $(2, 8)$  ב.  $(x + 9)^2 + (y - 1)^2 = 170$  ג.  $(4, 2)$

(27) א. i.  $B(12, 10)$  ii.  $A(22, 0)$  ב.  $(x - 22)^2 + (y - 10)^2 = 100$

(28) א.  $R = 10$  ב.  $B(1, -4)$ ,  $C(1, 12)$  ג. i.  $d = 16$

ii.  $S = 128$

(29) א.  $y = 8x - 2$ ,  $y = -2x - 2$  ב.  $(-24, 16)$  ג.  $x^2 + (y + 2)^2 = 900$

(30) א.  $O(0, 0)$ ,  $A(0, 6)$ ,  $B(8, 0)$  ב.  $C(8, 6)$  ג. 28 יח"ש  $P =$

(31) א.  $a = 1$  ב.  $(0, -1)$ ,  $(-2, 3)$  ג.  $y = -2x - 1$

ד.  $S = \frac{1}{4}$

(32) א. i.  $d = 15$  ii.  $x = 18$  ב.  $(x - 9)^2 + (y - 12)^2 = 81$

ג. המעגל אינו חותך את ציר ה- $x$  - כאשר מציבים ב- $y$  אפס מתקבלת משוואה ריבועיתללא פתרון. המעגל חותך את ציר ה- $x$  בנקודה אחת- $(12, 0)$ .

(33) א.  $(x - 15)^2 + (y - 12)^2 = 225$  ב.  $C(24, 0)$ ,  $D(24, 24)$  ג.  $y = -\frac{3}{4}x + 42$

(34) א.  $y = \frac{7}{6}x + 3$  ב. i.  $M(6, 10)$  ii.  $\sqrt{85}$

iii.  $(x - 6)^2 + (y - 10)^2 = 85$  ג.  $A(0, 17)$ ,  $B(0, 3)$  ד. 42 יח"ש

(35) א.  $(x - 10)^2 + y^2 = 25$  ב.  $y = 0.5x - 2.5$  ג.  $B(13, 4)$

ד. 10 יח"ש  $S_{AMB} =$

**(36)** א.  $A(-2,0)$ ,  $B(-6,0)$     ב.  $Q(2,0)$     ג.  $y = x - 2$ .

**(37)** א.  $(x-16)^2 + (y-R)^2 = R^2$ , המעגל אינו חותך את ציר ה- $y$ .

ב.  $(x-16)^2 + (y-10)^2 = 100$ ,  $R = 10$     ג.  $y = -\frac{3}{4}x + 34\frac{1}{2}$ .

ד.  $y = \frac{4}{3}x + 5\frac{1}{3}$     ה. i.  $C(14,24)$     ii. 50 יח"ש.

**(38)** א.  $a = -8$     ב.  $B(6,0)$     ג.  $y = 0.5x - 3$ .

ד.  $(10,2)$     ה.  $11 + 5\sqrt{5}$  יח"ש =  $S_{DECB}$ .

**(39)** א.  $\sqrt{34}$  יחידות אורך =  $R$ ,  $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 34$     ב.  $A(10,0)$ ,  $B(0,6)$ .

ג. i.  $C(20,0)$     ii. 30 יח"ש =  $S_{ABC}$ .

## כתיבת משוואת מעגל עם השלמה לריבוע:

### שאלות:

1 מצא את מרכזם ורדיוסם של המעגלים הבאים:

א.  $x^2 + 10x + y^2 + 6y - 2 = 0$       ב.  $x^2 - 2x + y^2 + 20y + 1 = 0$

ג.  $x^2 - 8x + y^2 - 14y = 0$       ד.  $x^2 + y^2 + 2y = 0$

ה.  $x^2 + x + y^2 - 3\frac{3}{4} = 0$       ו.  $x^2 - 2mx + y^2 + 6my + m^2 = 0$

2 משוואתו של מעגל היא  $x^2 + y^2 - 6mx - 2(m+2)y + 4m + 4 = 0$

מצא את ערכו של  $m$  אם ידוע שמרכז המעגל נמצא על הישר  $y = 2x + 7$ .

3 משוואתו של מעגל היא  $x^2 + y^2 - 8x + 12y - 48 = 0$ .

מצא את אורכו של המיתר שחותך הישר  $y = 2x - 4$  מהמעגל בלי למצוא את נקודות הקצה של המיתר.

### תשובות סופיות:

1 א.  $M(-5, -3), R = 6$       ב.  $M(1, -10), R = 10$

ג.  $M(4, 7), R = \sqrt{65}$       ד.  $M(0, -1), R = 1$

ה.  $M\left(-\frac{1}{2}, 0\right), R = 2$       ו.  $M(m, -3m), R = 3m$

2  $m = -1$

3  $2\sqrt{80}$

## משוואות המשיקים למעגל:

### שאלות:

- (4) מצא משוואת מעגל העובר בנקודה  $(1, 8)$  המשיק לשני הצירים.
- (5) מצא את אורך המשיק למעגל שמשוואתו  $x^2 + y^2 - 4x + 14y + 37 = 0$  היוצא מהנקודה  $A(10, -3)$ .
- (6) מצא את משוואת המשיק ואת משוואת הנורמל למעגל שמשוואתו  $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$  בנקודה  $A(5, -4)$ .
- (7) מצא את נקודת החיתוך של המשיקים למעגל שמשוואתו  $x^2 + (y-1)^2 = 5$  בנקודות שבהן  $x = -1$ .
- (8) נתון מעגל שמרכזו בנקודה  $(-2, 6)$  והוא עובר בראשית הצירים. המעגל חותך את הצירים בשתי נקודות נוספות, A ו-B.  
 א. הוכח כי המשיקים למעגל בנקודות A ו-B מקבילים זה לזה.  
 ב. הוכח את סעיף א' בלי למצוא את משוואות המשיקים או את שיפועיהם.
- (9) נתון המעגל  $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 20$  והישר  $y = 2x + m$ .  
 לאלו ערכים של הפרמטר  $m$  הישר משיק למעגל ולאלו ערכים של  $m$  הישר חותך את המעגל?

**תשובות סופיות:**

$$(4) \quad (x-13)^2 + (y-13)^2 = 169 \text{ או } (x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$$

$$(5) \quad .8$$

$$(6) \quad \text{משיק: } y = 3x - 19, \text{ נורמל: } x + 3y + 7 = 0$$

$$(7) \quad .(-5,1)$$

$$(8) \quad \text{שאלת הוכחה.}$$

$$(9) \quad \text{משיק: } m = -9, 11, \text{ חותך: } -9 < m < 11$$

## מיתר המחבר שתי נקודות השקה:

### סיכום כללי:

משוואת המיתר, המחבר את שתי נקודות ההשקה של שני המשיקים

למעגל  $(x-a)^2 = (y-b)^2 = R^2$  היוצאים מהנקודה  $A(x_1, y_1)$  שמחוץ

למעגל היא:  $(x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) = R^2$ .

### שאלות:

10) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את משוואת המיתר במעגל שמשוואתו  $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$ ,

המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים מהנקודה  $A(-3, 8)$

ב. מצא את משוואת המיתר במעגל שמשוואתו  $x^2 + (y-1)^2 = 5$ , המחבר

את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים מהנקודה  $A(-5, 1)$ .

11) נתון מעגל שמשוואתו  $x^2 + y^2 + 16x + 48 = 0$  ונקודה P, שנמצאת על החלק

החיובי של ציר ה-y. הישר המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים

היוצאים למעגל מנקודה P חותך את ציר ה-y בנקודה Q. נתון:  $PQ = 14$ .

מצא את שיעורי הנקודה Q.

### תשובות סופיות:

10) א.  $x - 4y + 11 = 0$ . ב.  $x = -1$ .

11)  $Q(0, -8)$  או  $Q(0, -6)$ .

## שאלות מסכמות שונות:

### שאלות:

**12** נתון מעגל שמשוואתו  $x^2 + y^2 + 16x - 12y + 64 = 0$ . המעגל משיק מבחוץ למעגל קנוני. מצא את משוואת המעגל הקנוני, את נקודת ההשקה בין המעגלים ואת משוואת המשיק המשותף העובר בנקודה זו.

**13** המעגלים  $x^2 + y^2 + 22x - 6y = m$  ו-  $x^2 + y^2 = 26$  נחתכים בזווית ישרה. מצא את ערכו של  $m$ .

**14** בטרפז שווה שוקיים ABCD נתון כי הבסיס הגדול, DC, מונח על הישר:  $3x - y - 9 = 0$  והשוק AD מונחת על הישר  $x + y - 3 = 0$ . שיעורי הקודקוד B הם  $(3, -8)$ . מצא את משוואת המעגל החוסם את הטרפז ABCD.

**15** מצא את משוואתו של מעגל החוסם ריבוע, שאחד מקדקודיו נמצא בראשית הצירים ומשוואת אחד מאלכסונו היא  $3x - y + 10 = 0$ .

### תשובות סופיות:

**12**  $x^2 + y^2 = 16$ ,  $A(-3.2, 2.4)$ ,  $4x - 3y + 20 = 0$

**13**  $m = -26$

**14**  $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 20$

**15**  $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 10$

# מתמטיקה 0

פרק 6 - חוקי החזקות והשורשים

תוכן העניינים

129	.....	1. חוקי החזקות
134	.....	2. חוקי השורשים
138	.....	3. כתיבה מדעית של מספרים

## חוקי החזקות:

סיכום כללי:

סיכום חוקי החזקות:

$$\begin{array}{lll}
 a^n \cdot a^m = a^{m+n} & .3 & a^1 = a & .2 & a^0 = 1 & .1 \\
 a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m & .6 & (a^n)^m = a^{n \cdot m} & .5 & \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} & .4 \\
 \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m & .9 & a^{-m} = \frac{1}{a^m} & .8 & \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m & .7
 \end{array}$$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים:  $a^n a^m = a^{n+m}$  ו-  $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$$\begin{array}{lll}
 b^2 b^5 b^{12} b^3 & .ג & t^3 t^5 t^7 & .ב & a^2 a^6 & .א \\
 \frac{c^6}{c^2} & .ו & \frac{n^{14}}{n^9} & .ה & \frac{k^8}{k^3} & .ד \\
 \frac{y^3 y^{15}}{y^4 y^{14}} & .ט & \frac{x^{30}}{x^9 x^{18}} & .ח & \frac{a^3 a^{19}}{a^{15}} & .ז \\
 \frac{5^{20} 5^3 5^{16}}{5^4 5^{22} 5^8} & .יב & \frac{2^{16} 2^2}{2^{10}} & .יא & 3^2 3^3 3^4 & .י
 \end{array}$$

(2) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים:  $a^n a^m = a^{n+m}$  ו-  $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$$\begin{array}{lll}
 \frac{x^8 y^5 y^9 x^2}{y^4 x^4} & .ג & \frac{a^{10} b^{13} a^3}{b^4 b^6 b^2 a^{12}} & .ב & \frac{3^4 2^7}{2^6 3^2} & .א
 \end{array}$$

(3) לפניך הביטוי הבא:  $\frac{3^6 2^{17} 3^3 2^4}{3^4 2^3 2^2}$

מצא  $n$  כך שיתקיים שוויון בין הביטוי  $243 \cdot 2^n$  לבין הביטוי הנתון.

(4) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

$\frac{9^3 \cdot 27^2}{3^9 \cdot 81}$ .ב.	$\frac{2^3 \cdot 2^7}{2^4 \cdot 2^5}$ .א.	
$2^3 + 2^5$ .ד.	$\frac{10^9 \cdot 25^5 \cdot 8^{-1}}{40^3 \cdot 125^5}$ .ג.	

(5) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוק:  $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ .

$(x^3 x^{10})^2$ .ג.	$(c^3)^{10}$ .ב.	$(a^2)^4$ .א.
$\frac{d^{20} (d^4)^2}{d^{12} (d^3)^2}$ .ו.	$\frac{n^7 n^8}{(n^3)^4}$ .ה.	$\frac{(b^2)^3}{b^2 b^3}$ .ד.
$\frac{(8^3)^8 8^{11}}{(8^2 8)^3 8^8}$ .ט.	$\frac{3^6 (3^3 3^2)^6}{3^{28} (3^2)^3}$ .ח.	$\frac{2^5 (2^4)^2 2^3}{(2^3 2^2)^3}$ .ז.
$\frac{(3^2)^7 5^{10} (5^3)^2}{3^9 5^{16}}$ .יב.	$\frac{(3^2)^6 5^{31} 3^7}{(5^2)^{10} 5^{11} 3^{18}}$ .יא.	$\frac{(2^4)^5 (3^6)^7 2^{20}}{3^{35} 2^{40}}$ .י.

(6) לפניך הביטויים הבאים:  $\left((3^2)^3\right)^4$  ו-  $\left((3^6)^n\right)^2$ .

מצא  $n$  כך שיתקיים שוויון בין שני הביטויים.

(7) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים:

$\frac{7^{12} 2^2 2^6}{2^5 7^{10} 7}$ .ג.	$\frac{5^{20} 3^{14} 3^8}{3^{20} 5^{12} 5^8}$ .ב.	$\frac{2^3 3^5}{2^2 3^4}$ .א.
---	---	-------------------------------

(8) פשט את הביטויים הבאים:

$125 \cdot 25 \cdot 5^5$ .ג.	$64^2 2^3 8^2$ .ב.	$3^2 9 \cdot 81^2$ .א.
$\frac{\left((3^4)^4\right)^5}{81^3 27^4 3^5}$ .ו.	$\frac{(4^2)^3 16}{64 \cdot 2^3}$ .ה.	$\frac{2^4 \cdot 16^5}{8 \cdot 512}$ .ד.

9 פשט את הביטויים הבאים :

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \frac{(2a^2b)^3 \cdot (ab^{-3})^2}{4ab^{-2} \cdot \left(\frac{a^2}{b}\right)^4} \\ \text{ב.} & \frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}} \\ \text{ג.} & \frac{4^{b+3}}{4^{b+1} + 4^{b+2}} \\ \text{ד.} & \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^{n+3} + x^{n+5}}{x^{n+2}} \end{array}$$

10 פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים:  $(ab)^n = a^n b^n$  ו-  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & (a^2b)^3 & \text{ב.} & (m^4n^3)^5 & \text{ג.} & (x^{12}y^3)^3 \\ \text{ד.} & \left(\frac{a^3}{b^2}\right)^4 & \text{ה.} & \left(\frac{i^4}{k^3}\right)^7 & \text{ו.} & \left(\frac{a^{14}b^4}{a^6ab^3}\right)^3 \\ \text{ז.} & \left(\frac{x^3y^5y^2x^6}{y^4x^7}\right)^6 & \text{ח.} & \left(\frac{t^7r^{20}t^3}{r^2r^{12}t^8}\right)^2 & \text{ט.} & \left(\frac{(b^{12}c)^2c^{14}}{c(c^3b^5)^4b^3}\right)^2 \end{array}$$

11 חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים :

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \left(\frac{3^9 2^6 2^2}{3^6 2^5 3^2}\right)^2 & \text{ב.} & \left(\frac{(5^4)^2 3^6}{3^5 5^7}\right)^2 & \text{ג.} & \left(\frac{7^3 \cdot 16 \cdot 128 \cdot 49}{(2^2 7)^5}\right)^3 \end{array}$$

12 בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה שלילית :

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{1}{4^6} & \text{ב.} & \frac{1}{5^3} & \text{ג.} & \frac{1}{2^{10}} \\ \text{ד.} & \frac{1}{8} & \text{ה.} & \frac{1}{81} & \text{ו.} & \frac{1}{125} \end{array}$$

13 בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה חיובית וחשב את ערכם :

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{1}{4^{-3}} & \text{ב.} & \frac{1}{3^{-2}} & \text{ג.} & \frac{1}{5^{-3}} \end{array}$$

14) חשב את הביטויים הבאים :

ג.  $5^6 \cdot 5^{-3} \cdot 5^{-2}$

ב.  $2^{-8} \cdot 512 \cdot 2^2$

א.  $3^2 \cdot 3^{-5} \cdot 3^7$

ו.  $\frac{3^{-6} \cdot 7^7 \cdot 7^{-4}}{3^{-4} \cdot 3^{-3} \cdot 7^3}$

ה.  $\frac{2^{-5} \cdot 5^3 \cdot 2^{14}}{5^2 \cdot 5^{-10} \cdot 5^8 \cdot 2^6}$

ד.  $2^{14} \cdot 3^{-6} \cdot 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 2^{-30}$

15) פשט את הביטויים הבאים לצורה ללא חזקות שליליות.

ג.  $\frac{2^{-3} 5^4}{5^4 \cdot 125 \cdot (5^2 2)^{-3} \cdot 2^{-4}}$

ב.  $\frac{(4^4)^{-4} 3^{-11}}{(3^{-2} 4^3)^{-6}}$

א.  $\left(\frac{5^{-4}}{3^2}\right)^{-6}$

16) פשט את הביטויים הבאים :

ג.  $\frac{(m^{n+2})^3 \cdot m^{-4n-2}}{\frac{1}{m^{6n+2}} \cdot (m^3)^{n-2}}$

ב.  $\frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}}$

א.  $\frac{a^{n+2} \cdot a^{2-3n}}{(a^3)^{n+1}}$

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $a^8$  ב.  $t^{15}$  ג.  $b^{22}$  ד.  $k^5$  ה.  $n^5$  ו.  $c^4$   
 ז.  $a^7$  ח.  $x^3$  ט. 1 י.  $3^9$  יא.  $2^8$  יב.  $5^5$
- (2) א. 18 ב.  $ab$  ג.  $x^6 y^{10}$
- (3)  $n=16$
- (4) א. 2 ב.  $\frac{1}{3}$  ג.  $\frac{5}{8}$  ד. 40
- (5) א.  $a^8$  ב.  $c^{30}$  ג.  $x^{26}$  ד.  $b$  ה.  $n^3$  ו.  $d^{10}$   
 ז. 2 ח. 9 ט.  $8^{18}$  י.  $3^7$  יא. 3 יב.  $3^5$
- (6)  $n=2$
- (7) א. 6 ב. 9 ג. 56
- (8) א.  $3^{12}$  ב.  $2^{21}$  ג.  $5^{10}$  ד.  $2^{12}$  ה.  $2^7$  ו.  $3^{51}$
- (9) א.  $\frac{2b^3}{a}$  ב.  $k$  ג.  $3\frac{1}{5}$  ד.  $\frac{1}{x} + x$
- (10) א.  $a^6 b^3$  ב.  $m^{20} n^{15}$  ג.  $x^{36} y^9$  ד.  $\frac{a^{12}}{b^8}$  ה.  $\frac{i^{28}}{k^{21}}$  ו.  $a^{21} b^3$
- ז.  $x^{12} y^{18}$  ח.  $t^4 r^{12}$  ט.  $b^2 c^6$  ג. 8
- (11) א. 576 ב. 225 ג. 8
- (12) א.  $4^{-6}$  ב.  $5^{-3}$  ג.  $2^{-10}$  ד.  $2^{-3}$  ה.  $3^{-4}$  ו.  $5^{-3}$
- (13) א. 64 ב. 9 ג. 125
- (14) א. 81 ב. 8 ג. 5 ד.  $\frac{1}{9}$  ה. 1000 ו. 3
- (15) א.  $5^{24} \cdot 3^{12}$  ב.  $\frac{4^2}{3^{23}}$  ג.  $5^3 \cdot 2^4$
- (16) א.  $a^{1-5n}$  ב.  $k$  ג.  $m^{2n+12}$

## חוקי השורשים:

סיכום כללי:

סיכום חוקי השורשים:

$$\begin{array}{lll}
 \sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} & .3 & \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} & .2 & \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} & .1 \\
 \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} & .6 & \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}} & .5 & \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} & .4
 \end{array}$$

שאלות:

17) הבא את הביטויים הבאים לצורה:  $\sqrt[n]{a^m}$ .

א. $3^{\frac{1}{4}}$	ב. $2^{\frac{3}{5}}$	ג. $6^{\frac{5}{6}}$
ד. $-12^{\frac{2}{7}}$	ה. $-(-4)^{\frac{1}{3}}$	ו. $-(-3)^{\frac{3}{4}}$
ז. $5^{-\frac{1}{4}}$	ח. $27^{\frac{1}{3}}$	ט. $64^{-\frac{5}{6}}$

18) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

א. $\sqrt{49}$	ב. $-\sqrt{25}$	ג. $\sqrt[3]{8}$
ד. $-\sqrt[3]{128}$	ה. $\sqrt[3]{(-2)^6}$	ו. $(\sqrt[5]{1024})^2$
ז. $(\sqrt[5]{-243})^3$	ח. $\sqrt[4]{-16}$	ט. $\sqrt[4]{-25^2}$
י. $\sqrt[4]{(-25)^2}$		

19) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים :

א. $8^{\frac{2}{3}}$	ב. $32^{\frac{3}{5}}$	ג. $128^{\frac{2}{7}}$
ד. $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$	ה. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2.5}$	ו. $\left(\frac{64}{343}\right)^{\frac{2}{3}}$
ז. $81^{\frac{3}{4}} \cdot 64^{\frac{1}{3}}$	ח. $343^{\frac{2}{3}} \cdot 100^{\frac{1}{2}}$	ט. $16^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{2}}$

20) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא :  $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[3]{128}}$

21) פשט את הביטויים הבאים :

א. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$	ב. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$	ג. $\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$
ד. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$	ה. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$	ו. $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$
ז. $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$	ח. $\frac{\sqrt[3]{500} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[4]{25^2} \cdot \sqrt[3]{4}}$	ט. $\frac{\sqrt[3]{8^2} \sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{400} \sqrt{2}}$

22) הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים :

א. $3\sqrt{2}$	ב. $5\sqrt{3}$	ג. $\frac{\sqrt{36}}{2}$
ד. $2\sqrt[3]{3}$	ה. $x\sqrt{x}$	

23) הכנס את כל המקדמים בביטויים הבאים לתוך השורש :

א. $2\sqrt{5}$	ב. $4\sqrt[3]{2}$	ג. $2\sqrt[5]{3}$
ד. $\frac{\sqrt{24}}{2}$	ה. $\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$	ו. $\frac{3\sqrt[4]{5000}}{10}$
ז. $-5\sqrt[3]{2}$	ח. $-5\sqrt[4]{2}$	ט. $-5\sqrt[5]{-2}$

24) הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר :

- א.  $\sqrt{12}$       ב.  $\sqrt{48}$       ג.  $\sqrt{63}$
- ד.  $\sqrt[3]{54}$       ה.  $\sqrt{x^5}$

25) חלץ מן הביטויים הבאים את המקדם הגבוה ביותר ככל הניתן :

- א.  $\sqrt{40}$       ב.  $\sqrt{50}$       ג.  $\sqrt{320}$
- ד.  $\sqrt[3]{108}$       ה.  $\sqrt[3]{56}$       ו.  $\sqrt[3]{160}$
- ז.  $\sqrt[4]{162}$       ח.  $\sqrt[5]{972}$       ט.  $\sqrt[9]{192}$

26) פשט את הביטויים הבאים :

- א.  $\sqrt{18} - \sqrt{8}$       ב.  $\sqrt{7} + \sqrt{63}$       ג.  $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128}$
- ד.  $\sqrt[4]{405} - \sqrt[4]{80}$       ה.  $\frac{20}{\sqrt{5}}$       ו.  $\frac{\sqrt{8}}{2}$
- ז.  $\frac{16}{\sqrt{2}}$       ח.  $\frac{6}{\sqrt{3} + \sqrt{12}}$       ט.  $\frac{10}{\sqrt[5]{160} - \sqrt[5]{5}}$

27) פשט את הביטויים הבאים :

- א.  $3^{\frac{1}{4}} \cdot 9^{-2.5} \cdot 27^{\frac{3}{2}}$       ב.  $2^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{\frac{1}{2}} \cdot 64^{-3}$       ג.  $125^{\frac{1}{6}} \cdot 5^2 \cdot 5^{-\frac{2}{3}}$
- ד.  $\frac{27^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}$       ה.  $\frac{49^{\frac{2}{5}} \cdot 7^{-\frac{6}{5}}}{343^{\frac{1}{5}}}$       ו.  $\frac{512^{\frac{1}{4}} \cdot 64^{\frac{3}{4}}}{128^{\frac{1}{8}} \cdot 2^{-2}}$

## תשובות סופיות:

- (17) א.  $\sqrt[4]{3}$     ב.  $\sqrt[5]{2^3}$     ג.  $\sqrt[6]{6^5}$     ד.  $-\sqrt[7]{12^2}$     ה.  $-\sqrt[3]{-4}$     ו.  $\phi$
- ז.  $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$     ח.  $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$  או  $\frac{1}{3}$     ט.  $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}}$  או  $\frac{1}{2^5}$
- (18) א. 7    ב. -5    ג. 2    ד. -2    ה. 4    ו. 16
- ז. -27    ח.  $\phi$     ט.  $\phi$     י. 5
- (19) א. 4    ב.  $\frac{1}{8}$     ג.  $\frac{1}{4}$     ד. 125    ה.  $\frac{32}{243}$     ו.  $\frac{49}{16}$
- ז.  $\frac{27}{4}$     ח.  $\frac{10}{49}$     ט.  $\frac{1}{2}$
- (20)  $\sqrt{2}$
- (21) א. 4    ב. 9    ג. 20    ד. 6    ה. 3    ו. 2
- ז.  $\sqrt{2}$     ח.  $\sqrt{5}$     ט.  $\sqrt{2}$
- (22) א.  $\sqrt{18}$     ב.  $\sqrt{75}$     ג.  $\sqrt{9}$     ד.  $\sqrt[3]{24}$     ה.  $\sqrt{x^3}$
- (23) א.  $\sqrt{20}$     ב.  $\sqrt[3]{128}$     ג.  $\sqrt[5]{96}$     ד.  $\sqrt{6}$     ה.  $\sqrt[3]{3}$
- ו.  $\sqrt[4]{40 \cdot \frac{1}{2}}$     ז.  $\sqrt[3]{-250}$     ח.  $-\sqrt[4]{1250}$     ט.  $\sqrt[5]{5^5 \cdot 2}$
- (24) א.  $2\sqrt{3}$     ב.  $4\sqrt{3}$     ג.  $3\sqrt{7}$     ד.  $3\sqrt[3]{2}$     ה.  $x^2\sqrt{x}$
- (25) א.  $2\sqrt{10}$     ב.  $5\sqrt{2}$     ג.  $8\sqrt{5}$     ד.  $3\sqrt[3]{4}$     ה.  $2\sqrt[3]{7}$     ו.  $2\sqrt[5]{5}$
- ז.  $3\sqrt[4]{2}$     ח.  $3\sqrt[5]{4}$     ט.  $2\sqrt[6]{3}$
- (26) א.  $\sqrt{2}$     ב.  $4\sqrt{7}$     ג.  $6\sqrt[3]{2}$     ד.  $\sqrt[4]{5}$     ה.  $4\sqrt{5}$     ו.  $\sqrt{2}$
- ז.  $8\sqrt{2}$     ח.  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  או  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$     ט.  $\frac{10}{\sqrt[3]{5}}$  או  $2\sqrt[5]{5^4}$
- (27) א.  $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$     ב.  $\frac{1}{\sqrt[4]{2^{61}}}$     ג.  $\sqrt[6]{5^{11}}$     ד. 27    ה.  $\frac{1}{7}$     ו.  $\sqrt[8]{2^5}$

## כתיבה מדעית של מספרים:

### שאלות:

28) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. 15,000,000	ב. 1,500,000
ג. 150,000,000,000	ד. 23,400,000
ה. 0.0003	ו. 0.00000042
ז. 0.000000042	ח. 0.00000000042

29) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. $(3,000,000)^2$	ב. $(2,000,000)^2$
ג. $(5,000)^3$	ד. $(50,000)^3$
ה. $(0.0002)^4$	ו. $(0.00004)^3$
ז. $(0.000005)^3$	ח. $(0.000000007)^3$

### תשובות סופיות:

28) א. $1.5 \cdot 10^7$	ב. $1.5 \cdot 10^6$	ג. $1.5 \cdot 10^{11}$	ד. $2.34 \cdot 10^7$	ה. $3 \cdot 10^{-4}$
ו. $4.2 \cdot 10^{-7}$	ז. $4.2 \cdot 10^{-8}$	ח. $4.2 \cdot 10^{-10}$		
29) א. $9 \cdot 10^{12}$	ב. $4 \cdot 10^{12}$	ג. $1.25 \cdot 10^{11}$	ד. $1.25 \cdot 10^{14}$	ה. $1.6 \cdot 10^{-15}$
ו. $6.4 \cdot 10^{-14}$	ז. $1.25 \cdot 10^{-16}$	ח. $3.43 \cdot 10^{-25}$		

## מתמטיקה 0

### פרק 7 - משוואות ואי-שוויונים מעריכיים

#### תוכן העניינים

139	1. משוואות מעריכיות יסודיות.....
141	2. משוואות עם חיבור וחסור איברים.....
143	3. משוואות עם קבוע אוילר.....
144	4. משוואות בהן המשתנה גם בבסיס.....
145	5. משוואות מסכמות שונות.....
146	6. מערכת משוואות מעריכיות.....
147	7. אי שוויונים מעריכיים.....
148	8. אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך.....

## משוואות מעריכיות יסודיות:

### סיכום כללי:

- פתרון כללי של משוואת מעריכית מהצורה:  $a^x = a^y$  הוא:  $x = y$ .
- פתרון של משוואה מהצורה:  $a^x = 1$  הוא:  $x = 0$  שכן:  $a^x = 1 = a^0$ .
- פתרון של משוואה מהצורה:  $a^x = b^x$  הוא:  $x = 0$  שכן:  $a^x = b^x = 1$  ללא תלות בבסיסים.

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי החזקות היסודיים):

א.  $2^x = 16$       ב.  $5^x \cdot 25^{x+2} = 125$

ג.  $10^{x-2} = 10000^{x+1}$       ד.  $9^x \cdot 3^{x^2} = 81^{3x-4}$

ה.  $(2^x \cdot 32)^3 = 8$       ו.  $(5^{x^2})^5 \cdot \frac{1}{5^5} = 625^{x-1}$

ז.  $\frac{7^x}{343^3} = 1$       ח.  $(25 \cdot 0.2^{2x})^2 = \left(\frac{1}{125}\right)^{1-x}$

(2) פתור את המשוואות הבאות (הבסיס הוא שבר):

א.  $27 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{5x+2} = 8$       ב.  $\left(\frac{3}{4}\right)^{2-x} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{9}{16}\right)^{7+x}$

ג.  $25 \left(\frac{7}{5}\right)^{x^2-2x} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{4-x} = 49$

(3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי השורשים):

א.  $\sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3}$       ב.  $\sqrt{3^{x+7}} = 81$

ג.  $(9\sqrt{27})^{3x} \cdot 3^{2-x} = \frac{1}{9}$       ד.  $\sqrt[3]{16} \cdot \left(\frac{1}{2^x}\right)^3 = \frac{1}{16}$

ה.  $2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^x}} = 8(\sqrt{8})^{-\sqrt{x}}$       ו.  $5^x \cdot \frac{1}{25^5} = 125^{\sqrt{x}}$

4) פתור את המשוואות הבאות (מכפלת בסיסים שונים):

א. $2^x = 7^x$	ב. $3^x \cdot \frac{625}{\sqrt{25^x}} = 81$
ג. $2^{3x} \cdot 5^{3x} = 1000000$	ד. $2^{x+1} \cdot 3^{x-2} \cdot 7^x = 392$
ה. $243 \cdot 2^{x-1} \cdot 18^{x-9} = \frac{1}{3^{x-2}}$	ו. $108 \cdot \frac{1}{2^{1-2x}} = 72^x \cdot \sqrt{0.5}$
ז. $2^{2x+2} \cdot 5^{x+1} = (2\sqrt{5})^{4-x}$	

### תשובות סופיות:

א. $x = 4$	ב. $x = -\frac{1}{3}$	ג. $x = -2$	ד. $x = 2, 8$	ה. $x = -4$
ו. $x = 1, -\frac{1}{5}$	ז. $x = 9$	ח. $x = 1$		
א. $x = -1$	ב. $x = -2$	ג. $x = 3, -2$		
א. $x = -\frac{1}{2}$	ב. $x = 1$	ג. $x = -\frac{8}{19}$	ד. $x = 2, -\frac{2}{3}$	ו. $x = 25$
א. $x = 0$	ב. $x = 4$	ג. $x = 2$	ד. $x = 2$	ה. $x = 5$
ו. $x = 1.5$	ז. $x = \frac{2}{3}$			

## משוואות עם חיבור וחסור איברים:

### סיכום כללי:

במשוואות הכוללות חיבור וחסור של איברים, נאתר את הבסיס עם המעריך הקטן ביותר ונסמן אותו ב- $t$ , למשל במשוואה:  $4^x - 3 \cdot 2^x = 4$  נסמן:  $2^x = t$ .  
 נבטא את כל איברים המשוואה באמצעות  $t$  ונפתור אותה עבורו.  
 לאחר מכן נחזיר את ההצבה למציאת ערכי ה- $x$  המתאימים.

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם חיבור וחסור ממעלה ראשונה):

$$\text{ב. } 8^x + 3 \cdot 8^x = 256$$

$$\text{א. } 2^x + 6 \cdot 2^x = 56$$

$$\text{ד. } 2 \cdot 6^x + 6^{x+2} - 6^{x-1} = 227$$

$$\text{ג. } 5 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 162$$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם חיבור וחסור ממעלה ראשונה):

$$\text{ב. } 5^{3x+2} + 4 \cdot 125^x = 29$$

$$\text{א. } 81^{x+1} + 18 \cdot 3^{4x-3} = 735$$

$$\text{ד. } \sqrt{10000^{x+1}} - \sqrt[4]{10^{8x+1}} = \sqrt[4]{1000} \cdot (\sqrt[4]{10^7} - 1)$$

$$\text{ג. } (2^{3x+1})^2 - 64^{x-\frac{1}{3}} = 15$$

$$\text{ו. } 5^{-x} + 25^{\frac{1-x}{2}} - 5^{-x-1} = 145$$

$$\text{ה. } 6^{-x} - 5 \cdot 36^{-\left(\frac{x+1}{2}\right)} = 186$$

$$\text{ח. } 4^{x+2} - 6 \cdot 4^x = 7 \cdot 12^{x+1} + 6 \cdot 12^x$$

$$\text{ז. } 2 \cdot 10^{x+1} + 10^{x+2} = 3 \cdot 5^{x+1}$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחסור ממעלה שנייה):

$$\text{ב. } 16^{x+1} - 65 \cdot 4^x + 4 = 0$$

$$\text{א. } 9^x - 36 \cdot 3^x + 243 = 0$$

$$\text{ד. } 4^{-x} - 3 \cdot 4^x + 2 = 0$$

$$\text{ג. } 6^x - 4 \cdot 6^{-x} + 3 = 0$$

$$\text{ו. } \left(2^{\frac{1}{3}x+2}\right)^2 - 5 \cdot 2^{\frac{1}{3}x+1} + 1 = 0$$

$$\text{ה. } \left(\frac{4}{9}\right)^x - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1} = -\frac{2}{3}$$

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות):

$$\text{ב. } \frac{7^x}{7^x - 4} + \frac{8}{7^x + 5} = 3$$

$$\text{א. } \frac{20}{9^x + 1} = 3 - \frac{8}{9^x - 1}$$

5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות מסכמות):

א. $\frac{1}{25^{1-x}} - 6 \cdot 5^{x-1.5} + 1 = 0$	ב. $3^x - \sqrt{16 \cdot 3^{x+1}} = -9$
ג. $36^x - 6^{x+1} \cdot 3^x + 8 \cdot 9^x = 0$	ד. $4 \cdot 9^x - 10 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0$
ה. $25 \cdot 5^{2x} + 16 \cdot 15^x = 9^{x+1}$	ו. $9^x + 4^x - 6^x = \frac{7}{6^{1-x}}$
ז. $\frac{8^{2x} - 8}{7} = 4^x - 2$	ח. $2^{3x} - 2^{2x+2} - 2^x + 4 = 0$

### תשובות סופיות:

א. $x=3$	ב. $x=2$	ג. $x=4$	ד. $x=1$
א. $x=\frac{1}{2}$	ב. $x=0$	ג. $x=\frac{1}{3}$	ד. $x=\frac{1}{4}$
ה. $x=-3$	ו. $x=-2$	ז. $x=-3$	ח. $x=-2$
א. $x=2,3$	ב. $x=1,-2$	ג. $x=0$	ד. $x=0$
ה. $x=0,1$	ו. $x=-6,-9$		
א. $x=1, -\frac{1}{2}$	ב. $x=1$		
א. $x=\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$	ב. $x=1,3$	ג. $x=1,2$	ד. $x=1,0$
ה. $x=-2$	ו. $x=1,-1$	ז. $x=0, \frac{1}{2}$	ח. $x=0,2$

## משוואות עם קבוע אוילר:

### סיכום כללי:

קבוע אוילר מסומן באות  $e$  וערכו שווה (בערך) ל-2.71828. למספר זה משמעויות רבות במתמטיקה ובמדעים ועל כן הוחלט לסמן אותו באות משלו ולשלב אותו במשוואות מתמטיות ועוד.

דרך הפתרון של משוואה שבה הבסיס הוא  $e$  זהה לחלוטין לשל משוואה מעריכית רגילה כפי שנלמד בפרק זה.

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם קבוע אוילר):

$$e^{3x} = e^{2x-1} \quad \text{א.} \quad e^{5x-1} = e \cdot e^{6x+1} \quad \text{ב.}$$

$$e^{x-5} = (e^{1-x})^3 \quad \text{ג.} \quad e^x \cdot \sqrt{e^{3x-1}} = \left(\frac{1}{e^x}\right)^{1-3x} \quad \text{ד.}$$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחיסור):

$$e^2 \cdot e^x - e^{x+1} = e - 1 \quad \text{א.} \quad \sqrt[3]{e^{x+1}} \cdot e^2 = e^x \sqrt{e} \quad \text{ב.}$$

$$e^{2x} + e^x - 2 = 0 \quad \text{ג.} \quad e^{1+x} + e^{1-x} = e^2 + 1 \quad \text{ד.}$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (המשתנה גם בבסיס):

$$xe^x = \sqrt[4]{e} \cdot x \quad \text{א.} \quad e^{3x} = x \cdot e^{3x} \quad \text{ב.}$$

$$xe^{x^2} = \frac{x}{\sqrt{e^x}} \quad \text{ג.} \quad \sqrt[3]{e^{3x-1}} \cdot x = xe^x \quad \text{ד.}$$

### תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x = -1 \quad \text{ב. } x = -3 \quad \text{ג. } x = 2 \quad \text{ד. } x = 1, \frac{1}{6}$$

$$(2) \quad \text{א. } x = -1 \quad \text{ב. } x = \frac{11}{4} \quad \text{ג. } x = 0 \quad \text{ד. } x = 1, -1$$

$$(3) \quad \text{א. } x = 0, \frac{1}{4} \quad \text{ב. } x = 1 \quad \text{ג. } x = 0, -\frac{1}{2} \quad \text{ד. } x = 0$$

## משוואות בהן המשתנה גם בבסיס:

### סיכום כללי:

במשוואות עם משתנה בבסיס יש לדרוש תנאי עבורו הבסיס חיובי. יש לקחת את חיתוך תחומי ההגדרה (במידה וקיימים ביטויים עם שורשים או שברים) יחד עם תוצאת השוואת המעריכים.

### הערה:

יש לבדוק את ערכי ה- $x$  עבורם הבסיס שווה ל-1 ולראות האם מתקבל פסוק אמת או פסוק שקר. בהתאם יש להוסיף או להוריד אותו מתחום המספרים המהווים את פתרון המשוואה.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$(\sqrt{3-x})^{\sqrt{x}} = (\sqrt[3]{3-x})^x \cdot \sqrt{\sqrt[3]{3-x}} \quad (1)$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2+x} = 1 \quad (2)$$

$$\frac{|x-3|^{x^2-2}}{|x-3|^{x-1}} = |x-3|^{-1} \quad (3)$$

### תשובות סופיות:

$$x = \frac{1}{4}, 1, 2 \quad (1)$$

$$\text{אין פתרון.} \quad (2)$$

$$x = 0, 1, 2, 4 \quad (3)$$

## משוואות מסכמות שונות:

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$.5(2^x - 2) + 2 = 4^x - 2^x \quad (1)$$

$$\cdot \frac{6}{4^{x-1} - 1} + \frac{2^{x+1}}{2^x + 2} = \frac{2^x + 4}{2^x - 2} \quad (2)$$

$$\cdot \frac{4^x}{4^x - 10} - \frac{4}{2^{2x-1} - 3} = \frac{32}{16^x - 4^{x+2} + 60} \quad (3)$$

$$\cdot 3^{2x^2+2} - 3^{x^2+3} + 9 = 3^{x^2+1} \quad (4)$$

$$\cdot \sqrt{x}{10} = 4 \cdot \sqrt[2]{x}{10} + 60 \quad (5)$$

$$\cdot \sqrt[x-1]{8 \cdot 2^{x+1}} = (\sqrt{x}{2})^2 \cdot \sqrt[x-1]{x}{32} \quad (6)$$

$$\cdot 10 \cdot 4^{x+2} - 16 \cdot 10^x - 90 \cdot 6^x + 36 \cdot 15^x = 0 \quad (7)$$

### תשובות סופיות:

$$\cdot x = 1, 2 \quad (1)$$

$$\cdot x = 3 \quad (2)$$

$$\cdot x = 1.5 \quad (3)$$

$$\cdot x = 1, -1 \quad (4)$$

$$\cdot x = \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$\cdot x = -3 \quad (6)$$

$$\cdot x = 1, -2 \quad (7)$$

## מערכת משוואות מעריכיות:

שאלות:

$$(1) \quad \begin{cases} y = 3^x \\ y = 18 - 3^x \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 5^{2x} - 5^y = 5^x - 25 \\ y - x = 2 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{1}{3^y - 4} + \frac{3}{3^x - 2} - \frac{1}{3^x + 2} = 3 \\ 4^y = \sqrt{256^x} \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(4) \quad \begin{cases} 5^x + 2^y = 13 \\ 2 \cdot 5^x - 2^y = 2 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(5) \quad \begin{cases} 2 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^y = 42 \\ 3^{x+1} - 2^{y+1} = 73 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(6) \quad \begin{cases} 5^{2x+1} + 8 \cdot 10^x - 2^{2y+4} = 0 \\ (\sqrt{3})^y = 27^{\frac{x-1}{6}} \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(7) \quad \begin{cases} 6 \cdot 4^x - 7 \cdot 6^{y-1} + 2 \cdot 3^{x+y} = 6^y \\ \sqrt[4]{5^x} \cdot \sqrt{(5\sqrt{5})^y} = \sqrt[4]{125} \cdot 5^x \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

תשובות סופיות:

(1,3) <b>(4)</b>	(1,2) <b>(3)</b>	(0,2), (2,4) <b>(2)</b>	(2,9) <b>(1)</b>
(1,2), (-1,0) <b>(7)</b>	(-1,-2) <b>(6)</b>	(3,2) <b>(5)</b>	

## אי שוויונים מעריכיים:

### סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון:  $a^x > a^y$  הוא:  $x > y$  עבור  $a > 1$  ו-  $x < y$  עבור  $0 < a < 1$ .

### שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$\sqrt{2^x} \leq 4^{x^2-1\frac{1}{4}} \quad (2)$$

$$3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x} \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{5x} \geq \left(\frac{1}{7}\right)^{1-3x} \quad (4)$$

$$e^{\sqrt{x+1}} > e^{2x} \quad (3)$$

$$e^{2x} - 2e^x + 1 \leq 0 \quad (6)$$

$$25^x + 5 < 6 \cdot 5^x \quad (5)$$

### הערה:

השאלות הבאות דורשות הכרות עם מושג הלוגריתם הטבעי ( $\ln$ ) וכן חוקי הלוגריתמים אשר ילמדו בהמשך.

$$e^{2x} - 5e^x + 4 > 0 \quad (8)$$

$$e^x > 3 \quad (7)$$

### תשובות סופיות:

$$x \leq -1 \text{ או } x \geq 1\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$x < \frac{2}{3} \quad (1)$$

$$x \leq \frac{1}{8} \quad (4)$$

$$0 \leq x < 1 \quad (3)$$

$$x = 0 \quad (6)$$

$$0 < x < 1 \quad (5)$$

$$x < 0 \text{ או } x > \ln 4 \quad (8)$$

$$x > \ln 3 \quad (7)$$

## אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך:

### סיכום כללי:

דרך הפתרון של אי שוויון עם משתנה בבסיס ובמעריך:

- יש לדרוש בסיס חיובי ולחבר אי-שוויון בהתאם.
- יש לפתור את אי השוויון לפי השוואת מעריכים.
- יש למצוא את חיתוך הפתרונות.

נתון:  $f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)}$  נדרוש:  $f(x) > 0$ .

דרך הפתרון: אם  $f(x) > 1$  אז  $g(x) > h(x)$ .

אם  $0 < f(x) < 1$  אז  $g(x) < h(x)$ .

לבסוף נמצא את חיתוך התחומים.

### שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$(x-2)^{2x-5} < (x-2)^{x+1} \quad (2) \qquad x^{2x-1} > x^{x+2} \quad (1)$$

$$x^{2x^2+2} < x^{5x} \quad (4) \qquad x^{2x-6} < 1 \quad (3)$$

$$(x+1)^{|x|} < x^2 + 2x + 1 \quad (6) \qquad (x^2 - 6x + 13)^{x^2 - 2x} \geq (x^2 - 6x + 13)^3 \quad (5)$$

### תשובות סופיות:

$$.0 < x < 1, x > 3 \quad (1)$$

$$.3 < x < 6 \quad (2)$$

$$.1 < x < 3 \quad (3)$$

$$.0 < x < 0.5, 1 < x < 2 \quad (4)$$

$$.x \leq -1, x \geq 3 \quad (5)$$

$$.0 < x < 2 \quad (6)$$

## מתמטיקה 0

פרק 8 - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים

תוכן העניינים

149	1. הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות
152	2. חוקי הלוגריתמים
156	3. חישובים עם חזקה לוגריתמית
157	4. מעבר בין בסיסים
159	5. הלוגריתם הטבעי
161	6. משוואות עם בסיסים שונים
162	7. מערכת משוואות לוגריתמיות
163	8. מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות
164	9. אי-שוויונים לוגריתמים

## הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות:

### סיכום כללי:

#### הגדרה:

הלוגריתם מוגדר באופן הבא:  $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$  כאשר:  $a, b > 0, a \neq 1$ .

#### הסבר:

לוגריתם על בסיס  $a$  של  $b$  מוגדר בתור החזקה שיש להעלות את  $a$  על מנת שיהיה שווה ל- $b$ .  
 ערך חזקה זו הוא  $x$ . ערך לוגריתם יכול להיות חיובי, שלילי או אפס. נחשב ערכי לוגריתמים  
 ונפתור משוואות לוגריתמיות ע"י מעבר לפי ההגדרה למשוואה מעריכית מתאימה.

### כללים יסודיים בלוגריתמים:

מהגדרת הלוגריתם נובע כי:  $\log_a a = 1$  וכן:  $\log_a 1 = 0$  לכל  $a > 0, a \neq 1$ .

### שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמים הבאים:

א.  $\log_2 32$       ב.  $\log 1000$       ג.  $\log_{25} 5$

ד.  $\log_8 4$       ה.  $\log_4 \frac{1}{16}$       ו.  $\log_a a^4$

ז.  $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (יסודי - שימוש בהגדרת הלוג):

א.  $\log_{36} 6 = x$       ב.  $\log_2 x = 16$

ג.  $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$       ד.  $\log_x 64 = 3$

ה.  $\log_x 25 = 2$       ו.  $\log_x (3x+4) = 2$

(3) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (כללי - שימוש בהגדרת הלוג):

$$\log_6(4x-2)=1 \quad \text{א.} \quad \log_4(4-x)=\frac{1}{2} \quad \text{ב.}$$

$$\log_8(x^4-73)=1 \quad \text{ג.} \quad \log_3 \frac{x+3}{3-3x}=-2 \quad \text{ד.}$$

$$\log_x(2x^2+x-12)=2 \quad \text{ה.} \quad \log_{\sqrt{x+1}}(2x^2-5)=2 \quad \text{ו.}$$

(4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג מספר פעמים):

$$\log_4(\log_3 x)=1 \quad \text{א.} \quad 3\log_{27}(\log_2(x+3))=1 \quad \text{ב.}$$

$$\log_{\frac{1}{16}}(\log_3(5x^2+1))=-\frac{1}{2} \quad \text{ג.} \quad \log_6(3+\log_2(6+\log_4(x^2+15)))=1 \quad \text{ד.}$$

(5) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

$$\log_2(3^x+37)=6 \quad \text{א.} \quad \log_3(3 \cdot 2^x-303)=4 \quad \text{ב.}$$

$$\log_5(126 \cdot 5^x-25)=2x+1 \quad \text{ג.} \quad 3\log_2\left(3 \cdot 4^{1+\frac{1}{3}x}-11 \cdot 2^{\frac{x}{3}}+3\right)=12+2x \quad \text{ד.}$$

(6) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הצבה):

$$(\log_2 x)^4=10000 \quad \text{א.} \quad 2(\log_3 x)^2+\log_3 x=10 \quad \text{ב.}$$

$$\frac{3 \cdot \log_{14} x+1}{(\log_{14} x)^2}=4 \quad \text{ג.} \quad \sqrt{\log_{\frac{1}{81}} x}+\sqrt{\log_{\frac{1}{81}} x+2}=2 \quad \text{ד.}$$

## תשובות סופיות:

- (1) א. 5    ב. 3    ג.  $\frac{1}{2}$     ד.  $\frac{2}{3}$     ה. -2
- ו. -1.5    ז. 4
- (2) א.  $x = \frac{1}{2}$     ב.  $x = 65,536$     ג.  $x = 27$     ד.  $x = 4$
- ה.  $x = 5$     ו.  $x = 4$
- (3) א.  $x = 2$     ב.  $x = 2$     ג.  $x = \pm 3$     ד.  $x = -2$     ה.  $x = 3$     ו.  $x = 2$
- (4) א.  $x = 81$     ב.  $x = 5$     ג.  $x = \pm 4$     ד.  $x = \pm 1$
- (5) א.  $x = 3$     ב.  $x = 7$     ג.  $x = -1, 2$     ד.  $x = -6$
- (6) א.  $x = 1024, \frac{1}{1024}$     ב.  $x = 9, \frac{1}{9\sqrt{3}}$
- ג.  $x = 14, \frac{1}{\sqrt[4]{14}}$     ד.  $x = \frac{1}{3}$

## חוקי הלוגריתמים:

### סיכום כללי:

- להלן 3 חוקי הלוגריתמים עבור בסיס  $a > 0 \neq 1$  וארגומנטים  $x$  ו- $y$  חיוביים:
- מכפלה לסכום:  $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ .
  - מנה להפרש:  $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ .
  - מקדם למעריך:  $\log_a b^n = n \log_a b$  (כאשר  $b > 0$  ו- $n$  מספר ממשי כלשהו).

### שאלות:

#### שאלות חישוב כלליות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

- |  |   |
|--|---|
| א. $\log_3 12 + \log_3 2.25$   | ב. $\log_{\frac{1}{5}} 40 + \log_{\frac{1}{5}} 12.5 + \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{4}$ |
| ג. $\log_2 200 - \log_2 100$   | ד. $\log_3 60 - \log_3 540$   |
| ה. $\log_4 8 + \log_4 12 - \log_4 6$   | ו. $\log_7 1.5 - \log_7 147 + \log_7 2$   |
| ז. $3 \log_5 2 - \log_5 1.6$   | ח. $\log_{\sqrt{4}} 6.4 + 2 \log_{\sqrt{4}} \sqrt{10}$                                |
| ט. $\frac{1}{2} \left( \log_7 \frac{7}{2} + \log_7 2 \right) + \log_7 14 - \frac{1}{3} \log_7 8$ | י. $\frac{1}{4} \log 81 - \log 1.5 - \frac{1}{2} \log 40$                             |

(2) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

- |   |  |
|---|--|
| א. $\frac{\log_5 16}{\log_5 8}$                             | ב. $\frac{\log_9 62.5 + \log_9 2}{\log_9 0.2}$                                   |
| ג. $\frac{\log_3 5 - \log_3 2 + \log_3 50}{\log_3 225 - 2}$ | ד. $\frac{2 - 2 \log_3 4 + \log_3 8 \frac{8}{9}}{4 - \log_3 0.01 - 2 \log_3 18}$ |

## משוואות לוגריתמיות:

(3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש ישיר בחוקי הלוגריתמים):

א.  $\log_2 x + \log_2 (x-6) = 4$       ב.  $\log_3 x + \log_3 (x+2) = 1$

ג.  $\log_2 (x+30) - \log_2 x = 4$       ד.  $\log_5 (x+146) - \log_5 (x+2) = 2$

ה.  $2\log_3 (2x-1) - \log_3 (22x+9) = -1$

ו.  $2\log_5 (x-2) = \log_5 (4x-15) + \log_5 x$

(4) פתור את המשוואות הבאות (פתרון בשיטת לוג שווה לוג):

א.  $\log_5 (4x-3) = \log_5 7$

ב.  $2\log_2 (2x-2) - \log_2 (16-x) = \log_2 (x-1) + 1$

(5) פתור את המשוואות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א.  $\log_3 (3 \cdot 5^x + 39) = 3 + \log_3 (5^x - 3)$

ב.  $\log_2 (3 - 4^{x+1}) - \log_2 11 = x$

(6) פתור את המשוואות הבאות (שימוש הפוך בחוקי הלוגריתמים):

א.  $\log_4 x \cdot \log_4 (16x) = 8$

ב.  $\log_2 \left(\frac{x}{4}\right) \cdot \log_2 (1024x) = -11$

ג.  $\log_2 x^2 \log_2 \left(\frac{x}{16}\right) = -\log_2 (64x)$

ד.  $(\log_4 4x)^2 = \log_4 4x^2 + 1$

ה.  $\log_3 (9x^2) \cdot \log_3 (9x^3) = \log_3 \left(\frac{81}{x}\right) + 2$

ו.  $\frac{\log_2 \left(\frac{x^3}{32}\right)}{(\log_2 x)^2} + \frac{\log_2 (2x)}{\log_2 x} = 1\frac{7}{9}$

## שאלות הבעה:

(7) נתון:  $\log_3 2 = a$ . הבע באמצעות  $a$  את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\log_3 16$       ב.  $\log_3 6$

ג.  $\log_3 24$       ד.  $\log_3 1.5$

(8) נתון:  $\log_2 5 = b$ ,  $\log_2 3 = a$ . הבע באמצעות  $a$  ו- $b$  את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\log_2 45$       ב.  $\log_2 60$       ג.  $\log_2 \sqrt{7.5}$

(9) נתון:  $\log_{18} 2 + \log_{18} 3 = a$ .

הבע באמצעות  $a$  את  $\log_{18} 27$  ואת  $\log_{18} 16$ .

## שאלות נוספות:

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

$$\log 4 \log 40 + \log 5 \log 16 = \log 64 \quad (10)$$

$$2 \log^2 2 + \log 25 \cdot \log 20 = 2 \quad (11)$$

$$\log_{12} 16 \cdot \log_{12} 4 + \log_{12} 9 \cdot \log_{12} 48 = 2 \quad (12)$$

$$\log_5 10 \cdot \log_5 75 - \log_5 3 \cdot \log_5 2 - \log_5 3 - \log_5 4 = 2 \quad (13)$$

## תשובות סופיות:

- (1) א. 3    ב. -3    ג. 1    ד. -2    ה. 2    ו. -0.5
- (2) א.  $\frac{4}{3}$     ב. -3    ג. 1.5    ד. 0.5
- (3) א.  $x=8$     ב.  $x=3, \frac{1}{27}$     ג.  $x=2$     ד.  $x=4$     ה.  $x=3$     ו.  $x=4$
- (4) א.  $x=2.5$     ב.  $x=6$
- (5) א.  $x=1$     ב.  $x=-2$
- (6) א.  $x=16, \frac{1}{256}$     ב.  $x=2, \frac{1}{512}$     ג.  $x=4, 2\sqrt{2}$     ד.  $x=4, \frac{1}{4}$     ה.  $x=\frac{1}{9}, \sqrt[9]{3}$     ו.  $x=8, \sqrt[7]{2^{15}}$
- (7) א.  $4a$     ב.  $a+1$     ג.  $3a+1$     ד.  $1-a$
- (8) א.  $2a+b$     ב.  $2+a+b$     ג.  $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}$
- (9)  $4(2a-1), 3(1-a)$
- (10) הוכחה.
- (11) הוכחה.
- (12) הוכחה.
- (13) הוכחה.

## חישובים עם חזקה לוגריתמית:

### סיכום כללי:

מהגדרת הלוגריתם ניתן לנסח את הקשר הבא:  $a^{\log_a x} = x$  כאשר  $a > 0 \neq 1$ .

### שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א.  $6^{\log_6 8}$       ב.  $4^{\log_2 5}$

(2) נתונה התבנית:  $3 \cdot 4^x$ . חשב את ערכה עבור:

א.  $x = \log_4 7$       ב.  $x = \log_4 \sqrt{3}$

ג.  $x = 2 \log_4 0.1$       ד.  $x = \sqrt{\log_2 5}$

(3) נתונה התבנית:  $\frac{1}{6} \cdot 9^x - 2 \cdot 3^x + 1$ . חשב את ערכה עבור:

א.  $x = -1$       ב.  $x = \log_3 5$

ג.  $x = \log_3 \sqrt{6}$

(4) חשב:

א.  $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_{\sqrt{56}} 81}$       ב.  $\sqrt[3]{2^{3-\log_{\sqrt{8}} 5}}$

### תשובות סופיות:

(1) א. 8      ב. 25

(2) א. 21      ב.  $3\sqrt{3}$       ג. 0.03      ד. 15

(3) א.  $\frac{19}{54}$       ב.  $-4\frac{5}{6}$       ג.  $2-2\sqrt{6}$

(4) א.  $\frac{1}{81}$       ב.  $\frac{2}{\sqrt[2]{25}}$

## מעבר בין בסיסים:

### סיכום כללי:

מעבר מבסיס  $a$  לבסיס  $m$  (כאשר:  $a > 0 \neq 1$  ו-  $m > 0 \neq 1$ , וכן:  $b > 0$ )

$$\log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a}$$

יתבצע באופן הבא:

### שאלות:

#### שאלות חישוב כלליות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

ב.  $\log_{0.1} 3 \cdot \log_9 1000$

א.  $\log_4 7 \cdot \log_7 4$

ד.  $\log_4 169 \cdot \log_{25} 64 \cdot \log_{13} 625$

ג.  $\log_{\sqrt{3}} 5 \cdot \log_{\sqrt{125}} 9$

(2) הוכח את השוויונים הבאים:

א.  $\log_2 25 \cdot \log_5 3 \cdot \log_9 2 = 1$

ב.  $\log_{16} 9 \cdot \log_5 4 \cdot \log_3 5 = 1$

#### משוואות לוגריתמיות:

(3) פתור את המשוואות הבאות:

ב.  $\log_3 x \cdot \log_{27} x = 3$

א.  $\log_2 x + \log_{32} x = 6$

ד.  $\log_x 5 - 6 \log_{125} x = 1$

ג.  $\log_2 4x \cdot \log_8 \frac{x}{16} = -\frac{5}{3}$

### שאלות הבעה:

(4) נתון:  $\log_4 6 = a$ . הבע באמצעות  $a$  את ערכי הביטויים הבאים:

ג.  $\log_{216} 96$

ב.  $\log_{32} 36$

א.  $\log_2 3$

(5) נתון:  $\log_2 3 = a$ ,  $\log_3 5 = b$ . הבע באמצעות  $a$  ו-  $b$  את ערכי הביטויים הבאים:

ג.  $\log_5 22.5$

ב.  $\log_2 \sqrt{30}$

א.  $\log_3 50$

6 נתון  $\log_3 7 = a$ ,  $\log 9 = 2b$ . הבע באמצעות  $a$  ו- $b$  את:

א.  $\log 21$ .

ב.  $\log_3 \left( \frac{10}{7} \right)$ .

ג.  $\log_7 10$ .

ד.  $\log_{30} 63$ .

**שאלות נוספות:**

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

7  $\log_6 9 \cdot \log_{15} 30 + \log_6 5 \cdot \log_{15} 4 = 2$

8  $\log \sqrt{3} \cdot \log_6 50 + \log \sqrt{2} \cdot \log_6 300 = 1$

**תשובות סופיות:**

1 א. 1      ב. -1.5      ג.  $2\frac{2}{3}$       ד. 12.

2 א. שאלת הוכחה.      ב. שאלת הוכחה.

3 א.  $x = 32$       ב.  $x = 27, \frac{1}{27}$       ג.  $x = 8, \frac{1}{2}$       ד.  $x = \frac{1}{5}, \sqrt{5}$ .

4 א.  $2a - 1$       ב.  $0.8a$       ג.  $\frac{a+2}{3a}$ .

5 א.  $2b + \frac{1}{a}$       ב.  $\frac{a}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{1}{2}$       ג.  $\frac{2}{b} + 1 - \frac{1}{ab}$ .

6 א.  $b + ab$       ב.  $\frac{1}{b} - a$       ג.  $\frac{1}{ab}$       ד.  $\frac{ab+2b}{b+1}$ .

7 הוכחה.

8 הוכחה.

## הלוגריתם הטבעי:

### סיכום כללי:

לוגריתם על בסיס  $e$  (קבוע אוילר) מסומן:  $\log_e \Rightarrow \ln$  והוא נקרא הלוגריתם הטבעי. למשל:  $\ln 3 = \log_e 3$  או  $\ln \frac{1}{4} = \log_e \frac{1}{4}$ . לוג זה נקרא בשם לן. מהגדרת הלוגריתם מתקיים:  $\ln a = b \rightarrow e^b = a$  כאשר  $a > 0$  ו- $b$  מספרים כלשהם.

### שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הטבעיים הבאים:

$$\text{א. } \ln e^2 \quad \text{ב. } \ln \frac{1}{e^4} \quad \text{ג. } \ln \frac{1}{e\sqrt{e}}$$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג):

$$\text{א. } \ln x = 2 \quad \text{ב. } \ln x = -\frac{1}{2}$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (הצבה וחוקי הלוגריתמים):

$$\begin{aligned} \text{א. } \ln\left(e^{2x} - \frac{1}{2}\right) + \ln 2 = x \\ \text{ב. } 3 \ln^2 x + \ln x = 2 \\ \text{ג. } \ln(e^2 x^3) \cdot \ln \frac{1}{x} = \ln(ex^2) \end{aligned}$$

(4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הוצאת לוג משני אגפי המשוואה)

$$\text{א. } x^{\ln x} = e^6 x \quad \text{ב. } \left(\frac{1}{x}\right)^{2-3 \ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x}$$

(5) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

$$\text{א. } e^{\ln 3} \quad \text{ב. } e^{2 \ln 3}$$

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } 2 \quad \text{ב. } -4 \quad \text{ג. } -1.5$$

$$(2) \quad \text{א. } x = e^2 \quad \text{ב. } x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$(3) \quad \text{א. } x = 0 \quad \text{ב. } x = \sqrt[3]{e^2}, \frac{1}{e} \quad \text{ג. } x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \frac{1}{e}$$

$$(4) \quad \text{א. } x = e^3, \frac{1}{e^2} \quad \text{ב. } x = \sqrt{e}, e$$

$$(5) \quad \text{א. } 3 \quad \text{ב. } 9$$

## משוואות עם בסיסים שונים:

### סיכום כללי:

לעיתים תתקבל משוואה מעריכית שבה לא ניתן למצוא חזקה שלמה, כגון:  $3^x = 4$ . במקרים אלו נעזר בהגדרת הלוג כדי לבטא את ערך המעריך:  $x = \log_3 4$ . את ערך הביטוי  $\log_3 4$  ניתן לחשב ע"י מחשבון או ע"י מעבר לבסיס 10:  $\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3}$ .

### שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (בסיסים שונים):

א.  $3^x = 6$       ב.  $2^x - 9 = 0$

ג.  $49^x - 8 \cdot 7^x + 15 = 0$       ד.  $2 \cdot 3^{\frac{2x}{3}} + 5 \cdot 3^{\frac{x}{3}} + 2 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם בסיס ולוגריתם טבעי):

א.  $e^{3x} = 3$       ב.  $4 + 3e^x = 9$

ג.  $3e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$       ד.  $e(e^x + 1) = 2\sqrt{e^{x+2}} + 9e$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם פתרונות לא שלמים):

א.  $\log_2(7 - 5^x) = \log_2 \frac{10}{5^x}$       ב.  $\log_2(4e^{2x} + 6) - 1 = \log_2(7e^x)$

### תשובות סופיות:

(1) א.  $x = \log_3 6 = 1.63$       ב.  $x = \log_2 9 = 3.17$

ג.  $x = \log_7 3 = 0.564$ ,  $x = \log_7 5 = 0.827$       ד. אין פתרון.

(2) א.  $x = \frac{1}{3} \ln 3 = 0.36$       ב.  $x = \ln \frac{5}{3} = 0.51$       ג.  $x = 0$ ,  $x = -\ln 3 = -1.09$

ד.  $x = \ln 16 = 2.7725$

(3) א.  $x = 1$ ,  $x = \log_5 2 = 0.43$       ב.  $x_1 = \ln \frac{1}{2} = -0.693$ ,  $x = \ln 3 = 1.098$

## מערכת משוואות לוגריתמיות:

### שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \log_6^2 x - \log_6(2y-2) = 2 \\ \frac{1}{2}x = y-1 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} y = \log_2 x \\ y = 6 - \log_2 x \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \log_3(x+y) = \log_3(4x+y) - 2 \\ \log_5(5x+3y) = 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \log_2(\log_3(x-y)) = 1 \\ \log_5(x+y-11) = \log_{25} x + \frac{1}{2}\log_5(y+2) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \log_2 x^2 + \log_3 \frac{1}{y} = 9 \\ \log_2 \sqrt{x} + \log_{\sqrt[3]{3}} y = -1 \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 6\log_4 y = 11 \\ 10\log_5 x - 2\log_4 y = 17 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} xy = 27 \\ x^{\log_3 y} = 9 \end{cases} \quad (8) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 2^{\log_2 y} = 6 \\ x^y = 5^8 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} 2^{\frac{\log_1(2x-y)}{2}} = 7^{\log_7 \frac{2x+y}{15}} \\ \log_3 x + \log_3 y = \frac{1}{\log_{28} 3} \end{cases} \quad (9)$$

### תשובות סופיות:

$$\begin{array}{llll} (8, -5) \quad (3) & (36, 19), \left(\frac{1}{6}, 1\frac{1}{12}\right) \quad (2) & (8, 3) \quad (1) \\ \left(16, \frac{1}{3}\right) \quad (6) & (25, 8) \quad (5) & (16, 7) \quad (4) \\ (4, 7) \quad (9) & (3, 9), (9, 3) \quad (8) & (25, 4), (625, 2) \quad (7) \end{array}$$

## מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות:

### שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 25^y = (5\sqrt{5})^{x+1} \\ \log_5 \sqrt{x} + \log_5 \sqrt{y} = \log_5 3 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} y = \log_2(4^x - 2) \\ y = 2x - 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x \cdot \log_2 3 = \frac{y}{\log_9 2} \\ \log_3(9^x + 27) = 2y + \log_3 12 \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} 3y + 5 \log_6 x = 1 \\ 216 \cdot x^{2-y} = 6^{1-4y} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x = \log_4(5 - 9^y) \\ \log_2(2^x + 3) = \log_4(29 - (3^y - 3)^2) \end{cases} \quad (6) \quad \begin{cases} (2^x - 1)^2 - 4y + 3 = 0 \\ x = \log_2(y + 1) \end{cases} \quad (5)$$

### תשובות סופיות:

$$(36, -3), \left(6, -1\frac{1}{3}\right) \quad (3) \quad (3, 3) \quad (2) \quad (1, 1) \quad (1)$$

$$(1, 0) \quad (6) \quad (1, 1), (2, 3) \quad (5) \quad \left(1, \frac{1}{2}\right), (2, 1) \quad (4)$$

## אי-שוויונים לוגריתמים:

### סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון:  $\log_a x > \log_a y$  הוא: עבור  $x > y$ : עבור  $a > 1$  ו- עבור  $x < y$ : עבור  $0 < a < 1$ .

### שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$\log_6(x^2 - 5x) < 1$ (2)	$\log_2 x < \log_2(5x - 20)$ (1)
$\log_{\frac{1}{2}}(1 - 3x) \geq \log_{\frac{1}{2}}(7 - x)$ (4)	$\log_3 x > \log_9(15 - 2x)$ (3)
$\ln x < 3$ (6)	$\ln x \geq \ln(x^2 - 12)$ (5)
$\frac{6}{\ln^2 x} \geq 2 - \frac{1}{\ln x}$ (8)	$\ln^2 x - 6 \ln x < 7$ (7)

### תשובות סופיות:

$-1 < x < 0, 5 < x < 6$ (2)	$x > 5$ (1)
$-3 \leq x \leq \frac{1}{3}$ (4)	$3 < x < 7\frac{1}{2}$ (3)
$0 < x < e^3$ (6)	$2\sqrt{3} < x \leq 4$ (5)
$x \neq 1$ וגם $\frac{1}{\sqrt{e^3}} \leq x \leq e^2$ (8)	$\frac{1}{e} < x < e^7$ (7)

# מתמטיקה 0

פרק 9 - טריגונומטריה במשולש ישר זווית

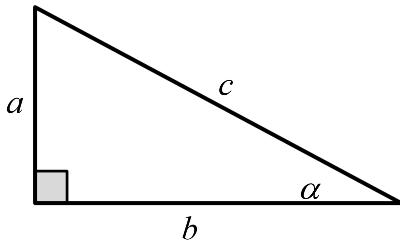
תוכן העניינים

1. משולש ישר זווית.....165

## משולש ישר זווית:

### סיכום כללי:

#### הגדרות הפונקציות הטריגונומטריות:



$$\sin \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{a}{c}$$

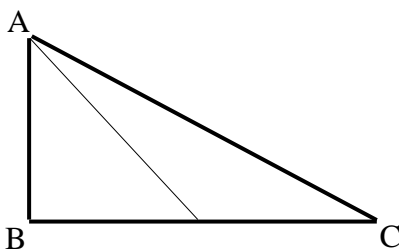
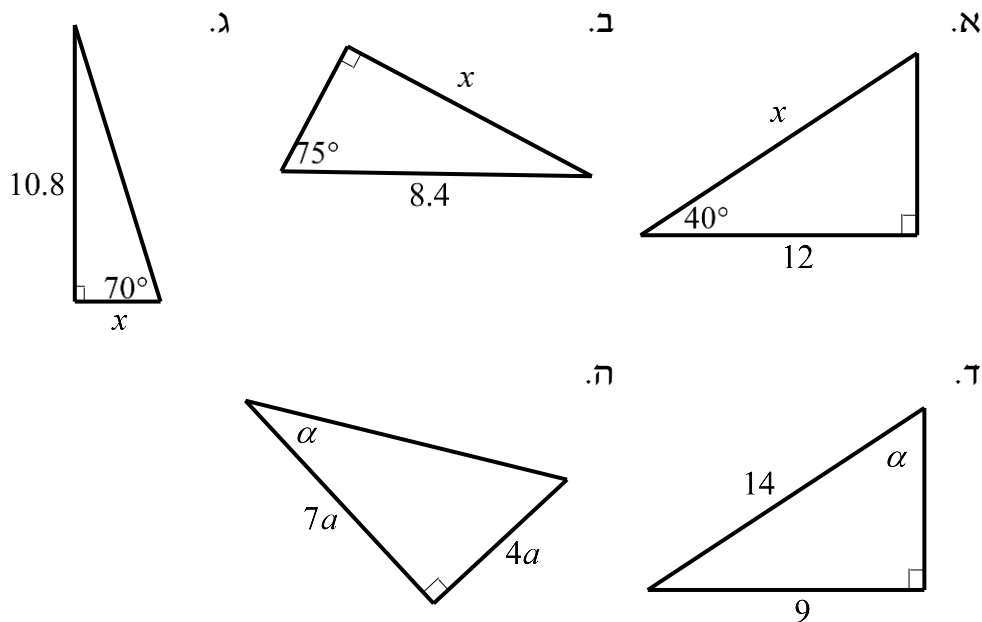
$$\cos \alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{הניצב שליד הזווית}} = \frac{a}{b}$$

$$a^2 + b^2 = c^2: \text{משפט פיתגורס}$$

### שאלות:

1) מצא את ערכו של  $\alpha/x$  במשולשים ישרי הזווית הבאים:



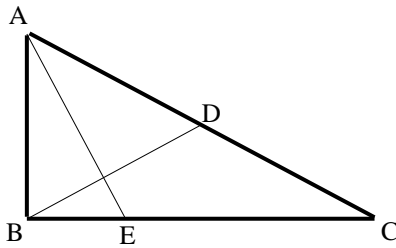
2) המשולש ABC שבציור הוא משולש

ישר זווית ( $\sphericalangle B = 90^\circ$ ).

AD הוא התיכון לניצב BC.

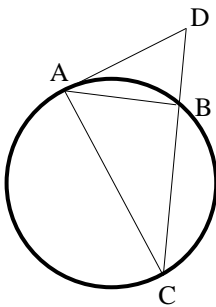
נתון:  $\sphericalangle C = 28^\circ$ ,  $AB = 6$  ס"מ.

מצא את AD ואת  $\sphericalangle BAD$ .



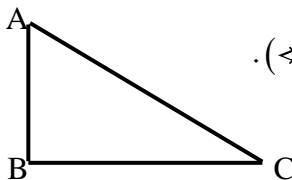
- (3) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ( $\angle B = 90^\circ$ ). BD הוא התיכון ליתר ו-AE הוא חוצה הזווית  $\angle A$ . נתון:  $BC = 8$  ס"מ,  $BD = 5.6$  ס"מ. מצא את BE ואת  $\angle BAE$ .

- (4) מצא את זוויותיו של מעוין שאורכי אלכסונו 24 ס"מ ו-18 ס"מ.

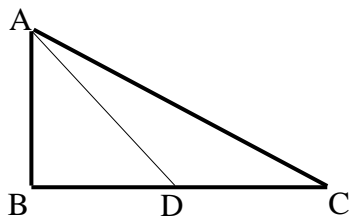


- (5) המשולש ABC חסום במעגל כך שהצלע AC היא קוטר המעגל. המשיק למעגל בנקודה A והמשך הצלע CB נפגשים בנקודה D. נתון:  $\angle DAB = 32^\circ$ ,  $BD = 4$  ס"מ. מצא את אורכו של רדיוס המעגל.

- (6) במשולש שווה שוקיים שבו השוק ארוכה ב-4 ס"מ מהבסיס נתון כי זווית הראש היא  $34.92^\circ$ . מצא את שטח המשולש.

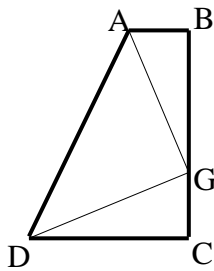


- (7) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ( $\angle B = 90^\circ$ ). נתון:  $AB = a$ ,  $\angle A = \alpha$ . הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $a$  את היקף המשולש.

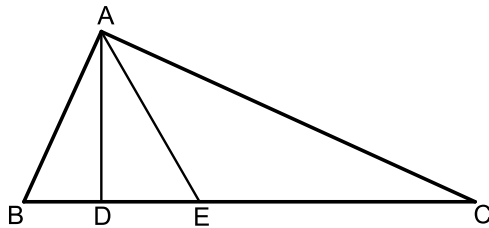


- (8) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ( $\angle B = 90^\circ$ ). AD הוא התיכון לניצב BC. נתון:  $AB = b$ ,  $\angle C = \alpha$ . הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $b$  את אורכי הקטעים AD ו-BD.

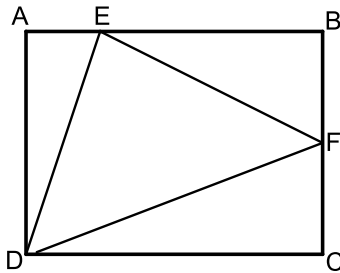
- (9) במשולש ישר זווית אחת הזוויות החדות היא  $\alpha$  ואורך חוצה הזווית זו הוא  $k$ . הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $k$  את שטח המשולש ואת אורך היתר.



- 10** טרפז ABCD הוא טרפז ישר זווית ( $\angle B = \angle C = 90^\circ$ ). הנקודה G נמצאת על השוק BC כך ש- $AG \perp DG$ . נתון:  $\angle BAG = \beta$ ,  $AG = DG = m$ . הבע באמצעות  $\beta$  ו- $m$  את שטח הטרפז.



- 11** המשולש ABC הוא ישר זווית ( $\angle A = 90^\circ$ ). הקטעים AD ו-AE הם בהתאמה גובה ליתר וחוצה זווית. מסמנים:  $\angle DAE = \alpha$ ,  $DE = k$ .  
 א. הבע באמצעות  $k$  ו- $\alpha$  את שטח המשולש ABC.  
 ב. חשב את שטח המשולש ABC אם ידוע כי:  $\alpha = 30^\circ$  ו- $k = 2$ .

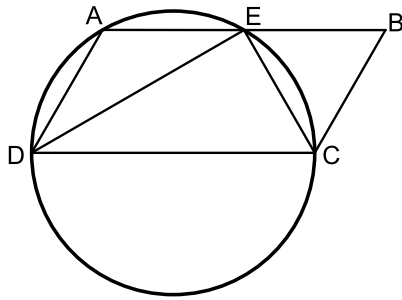


- 12** במלבן ABCD מסמנים את הנקודות E ו-F הנמצאות על הצלעות AB ו-BC בהתאמה כך ש- $3AE = BE$ . מקיימת:  $AD$  שווה לאורך הקטע BE. מעבירים את הקטעים EF, DF ו-DE כך שנוצר במשולש DEF.  
 א. סמן ב- $t$  את אורך הקטע AE והבע באמצעות  $t$  את אורכי צלעות המשולש DEF.  
 ב. חשב את זוויות המשולש EDF.

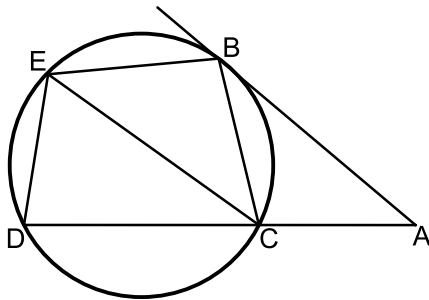
- 13** משולש שווה שוקיים שאורך שוקו  $k$  וזווית הבסיס שלו היא  $\beta$  חוסם מעגל. הבע באמצעות  $\beta$  ו- $k$  את רדיוס המעגל.

- 14** בטרפז ישר זווית חסום מעגל. אורך השוק הארוכה בטרפז היא  $b$  והזווית שהיא יוצרת עם הבסיס הגדול היא  $\alpha$ . הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $b$  את אורכו של הבסיס הגדול בטרפז ואת שטחו.

הערה: השאלות הבאות משלבות ידע בגיאומטריה ובטריגונומטריה יחד:



- 15** דרך הקודקודים  $A, C$  ו- $D$  של המקבילית  $ABCD$  מעבירים מעגל. היקף המעגל חוצה את הצלע  $AB$  בנקודה  $E$ ,  $(AE = BE)$ . נתון כי  $DC$  הוא קוטר במעגל וכי המיתר  $DE$  חוצה את זווית  $D$ .
- הוכח כי המיתר  $CE$  חוצה את זוויות  $C$ .
  - רדיוס המעגל יסומן ב- $R$ .
  - הבע באמצעות  $R$  את היקף המקבילית.
  - מצא את רדיוס המעגל אם ידוע כי שטח המקבילית הוא  $16\sqrt{3}$  סמ"ר.



- 16** מהנקודה  $A$  שמחוץ למעגל מעבירים משיק  $AB$  וישר חותך  $ACD$ . מעבירים את המיתרים  $BC$  ו- $BE$  אשר זהים באורכם. כמו כן מעבירים את המיתר  $DE$ . אורך המיתר  $CE$  שונה מאורך המשיק  $AB$ .
- הוכח כי המרובע  $ABEC$  הוא טרפז.
  - הוכח כי:  $\angle BEC = 2 \cdot \angle EDC$ .
  - נתונים:  $\angle A = 40^\circ$ ,  $AC = 6$  ס"מ,  $AB = 9$  ס"מ,  $CE = 8$  ס"מ. חשב את שטח המרובע  $ABEC$ .

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x = 15.665 \quad \text{ב. } x = 8.114 \quad \text{ג. } x = 3.931 \quad \text{ד. } \alpha = 40.005^\circ \quad \text{ה. } \alpha = 29.745^\circ$$

$$(2) \quad AD = 8.236 \text{ ס"מ}, \quad \sphericalangle BAD = 43.24^\circ$$

$$(3) \quad BE = 3.294 \text{ ס"מ}, \quad \sphericalangle BAE = 22.792^\circ$$

$$(4) \quad 73.74^\circ, 73.74^\circ, 106.26^\circ, 106.26^\circ$$

$$(5) \quad R = 6.04 \text{ ס"מ}$$

$$(6) \quad S = 28.618 \text{ סמ"ר}$$

$$(7) \quad P = a \left( 1 + \tan \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right)$$

$$(8) \quad AD = \sqrt{b^2 + \frac{b^2}{4 \tan^2 \alpha}}, \quad BD = \frac{b}{2 \tan \alpha}$$

$$(9) \quad AC = \frac{k \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}, \quad S = \frac{k^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \tan \alpha}{2}$$

$$(10) \quad \frac{(m \sin \beta + m \cos \beta)^2}{2}$$

$$(11) \quad \text{א. } S = \frac{k^2}{\cos 2\alpha \tan^2 \alpha} \quad \text{ב. } 24 \text{ סמ"ר}$$

$$(12) \quad \text{א. } DE = t\sqrt{10}, EF = t\sqrt{11.25}, DF = t\sqrt{18.25} \quad \text{ב. } 81.86^\circ, 51^\circ, 47.14^\circ$$

$$(13) \quad R = k \cos \beta \tan \frac{\beta}{2}$$

$$(14) \quad \frac{1}{2} b \sin \alpha + \frac{\frac{1}{2} b \sin \alpha}{\tan \frac{\alpha}{2}}, \quad S = \frac{1}{2} b^2 \sin \alpha (1 + \sin \alpha)$$

$$(15) \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. } 6R \quad \text{ג. } 4 \text{ ס"מ}$$

$$(16) \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. שאלת הוכחה.} \quad \text{ג. } 32.78 \text{ סמ"ר}$$

# מתמטיקה 0

## פרק 10 - זהויות טריגונומטריות

### תוכן העניינים

170	1. זהויות יסוד
174	2. ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות
176	3. מעגל היחידה
179	4. סכום והפרש זוויות
183	5. זווית כפולה
186	6. סכום והפרש פונקציות
189	7. מכפלת פונקציות

## זהויות יסוד:

### סיכום כללי:

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$	$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ , $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$	קשרים בין פונקציות
$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$	$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$	זוויות משלימות ל- $90^\circ$
$\tan \alpha = \cot(90^\circ - \alpha)$	$\cot \alpha = \tan(90^\circ - \alpha)$	
$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$	$\cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$	קשרים בין פונקציות

### שאלות:

#### הוכחת זהויות יסודית:

הוכח את הזהויות הבאות תוך שימוש בזהויות היסוד:

$$\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1 \quad (2)$$

$$\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos^2 \alpha \quad (4)$$

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2 \quad (6)$$

$$\sin^2(\alpha + 45^\circ) + \sin^2(45^\circ - \alpha) = 1 \quad (8)$$

$$\frac{\sin \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^3 \alpha} = \tan^3 \alpha \quad (10)$$

$$\cos^2 \alpha (1 + \tan^2 \alpha) = 1 \quad (12)$$

$$\frac{\sin^3 \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha) - \cos^3 \alpha} = \tan \alpha \quad (14)$$

$$\frac{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha \quad (16)$$

$$\tan \alpha \cdot \cos \alpha = \sin \alpha \quad (1)$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \tan \alpha \quad (3)$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} = 2 \quad (5)$$

$$\frac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\cos \alpha} = \tan \alpha \quad (7)$$

$$\sqrt{1 + \tan^2 \alpha} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \tan \alpha \quad (9)$$

$$\frac{\sin(90^\circ - \alpha) - \cos^3 \alpha}{\sin^3 \alpha} = \cot \alpha \quad (11)$$

$$\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \cot \alpha \quad (13)$$

$$\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha \sin^2 \alpha \quad (15)$$

## הוכחות מתקדמות:

$$(17) \quad \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} + \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = 2 + 4 \cot^2 \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(18) \quad \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} + \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{2}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(19) \quad (\cot \alpha - \tan \alpha)(\cot \alpha + \tan \alpha) = (1 + \cot^2 \alpha)(1 + \tan^2 \alpha) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(20) \quad \frac{\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \cot^4 \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(21) \quad 1 - \sin^2 \alpha (1 + \cos^2 \alpha) = \cos^4 \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(22) \quad \left( \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} + \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \right)^2 = 4 + 4 \cot^2 \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(23) \quad \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(24) \quad \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\cot \alpha + \cot \beta} = \tan \alpha \tan \beta \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

## הבעת ביטויים וחישובים באמצעות זהויות יסוד:

$$(25) \quad \text{נתון כי: } \sin \alpha + \cos \alpha = k$$

הבע באמצעות  $k$  את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$

ב.  $\sin \alpha - \cos \alpha$

ג.  $\tan \alpha + \cot \alpha$

ד.  $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$

$$(26) \quad \text{נתון כי: } \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

מבלי למצוא את  $\alpha$  חשב את:  $\tan^2 \alpha - 2 \cot^2 \alpha$

(27) נתון כי:  $\tan \alpha = \sqrt{7}$ .

מבלי למצוא את  $\alpha$  חשב את:  $\frac{\sqrt{7} \sin \alpha + 6 \cos \alpha}{\sqrt{28} \sin \alpha - \cos \alpha}$ .

(28) חשב את ערך המכפלה הבאה:  $\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \cdot \dots \cdot \tan 88^\circ \cdot \tan 89^\circ$ .

**תשובות סופיות:**

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) שאלת הוכחה.
- (3) שאלת הוכחה.
- (4) שאלת הוכחה.
- (5) שאלת הוכחה.
- (6) שאלת הוכחה.
- (7) שאלת הוכחה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) שאלת הוכחה.
- (12) שאלת הוכחה.
- (13) שאלת הוכחה.
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.
- (16) שאלת הוכחה.
- (17) שאלת הוכחה.
- (18) שאלת הוכחה.
- (19) שאלת הוכחה.
- (20) שאלת הוכחה.
- (21) שאלת הוכחה.
- (22) שאלת הוכחה.
- (23) שאלת הוכחה.
- (24) שאלת הוכחה.

$$(25) \text{ א. } \frac{k^2 - 1}{2} \quad \text{ב. } \pm\sqrt{2 - k^2} \quad \text{ג. } \frac{2}{k^2 - 1} \quad \text{ד. } \frac{k}{2}(3 - k^2)$$

$$(26) -7.75$$

$$(27) 1$$

$$(28) 1$$

## ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות:

סיכום כללי:

$\alpha = 90^\circ$	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 0^\circ$	
1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\sin \alpha$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\cos \alpha$
$\phi$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\tan \alpha$
0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\phi$	$\cot \alpha$

הערות:

- ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות של  $0^\circ$  ו- $90^\circ$  תלמדנה בהמשך אך ניתנו כעת כדי להשלים את תמונת ערכי הזוויות.
- ניתן לזכור את הטבלה ע"י כתיבה של שורת הסינוס לפי:  $\frac{\sqrt{4}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{0}}{2}$  אשר נותנים את הערכים של השורה הראשונה לאחר פישוט קל. עבור שורת ה- $\cos \alpha$  יש להפוך את הערכים ולבסוף יש לחלק כל זוג ביטויים כדי לכתוב את ערכי  $\tan \alpha$  ולסובב עבור ערכי  $\cot \alpha$ .

שאלות:

חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בערכי הפונקציות הטריגונומטריות של זוויות מיוחדות:

$$1) \sin 30^\circ + \cos 30^\circ$$

$$2) \frac{\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ}{\sin 60^\circ}$$

$$3) \tan 45^\circ + \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ}$$

$$\cdot \frac{1 + \cos 60^\circ}{2 \sin 60^\circ} \quad (4)$$

$$\cdot \cos^2 45^\circ + \sin^2 30^\circ \quad (5)$$

$$\cdot \frac{\tan^2 60^\circ \cdot \cos^2 30^\circ}{\cos^2 60^\circ} \quad (6)$$

$$\cdot \frac{\tan 30^\circ \cdot \cot 60^\circ - \cot 45^\circ \cdot \tan 45^\circ}{4 \left( \sin^2 60^\circ - \frac{1}{4} \right)} \quad (7)$$

$$\cdot \frac{27 \cot^4 60^\circ}{\sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot \tan 60^\circ} \quad (8)$$

### תשובות סופיות:

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 \quad (3)$$

$$\frac{3}{2\sqrt{3}} \quad (4)$$

$$\frac{3}{4} \quad (5)$$

$$9 \quad (6)$$

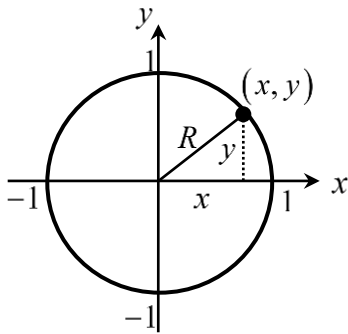
$$-\frac{1}{3} \quad (7)$$

$$2\sqrt{6} \quad (8)$$

## מעגל היחידה – הגדרה וזהויות:

### סיכום כללי:

#### הגדרת מעגל היחידה:



- מעגל קנוני שרדיוסו 1 מוגדר להיות המעגל הטריגונומטרי.
- הנקודות  $(0, -1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  מתאימות לזוויות של  $270^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $0^\circ$ .

#### הזהויות של המעגל הטריגונומטרי:

טנגנס	קוסינוס	סינוס	רביע
$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$	$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$	$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	II
$\tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$	$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$	$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$	III
$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	VI
			סימנים

#### זהויות עבור זווית הגדולות מ-360 מעלות:

ניתן להוסיף או להוריד 'סיבובים' שלמים לזווית לפי:

$$\boxed{\sin(\alpha + 360^\circ k) = \sin \alpha} \quad \boxed{\tan(\alpha + 180^\circ k) = \tan \alpha}$$

$$\boxed{\cos(\alpha + 360^\circ k) = \cos \alpha} \quad \boxed{\cot(\alpha + 180^\circ k) = \cot \alpha}$$

כאשר  $k$  הוא מספר שלם מציין את מספר הסיבובים.

**שאלות:**

(1) העבר את הביטויים הבאים לביטויים עם זווית ברביע הראשון. אין צורך לחשב את ערך הביטוי:

א. $\sin 120^\circ$	ב. $\cos 150^\circ$
ג. $\tan 160^\circ$	ד. $\cot 130^\circ$
ה. $\sin 215^\circ$	ו. $\cos 245^\circ$
ז. $\tan 230^\circ$	ח. $\cot 200^\circ$
ט. $\sin 300^\circ$	י. $\cos 310^\circ$

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים ע"י שימוש בזהויות המעגל הטריגונומטרי:

א. $\sin 150^\circ$	ב. $\cos 210^\circ$	ג. $\tan 120^\circ$
ד. $\sin 330^\circ$	ה. $\tan 225^\circ$	ו. $\sin 315^\circ$
ז. $\cos 120^\circ$	ח. $\tan(-30^\circ)$	ט. $\cos(-45^\circ)$
י. $\sin 510^\circ$	יא. $\cos 930^\circ$	יב. $\tan(-225^\circ)$

(3) חשב את ערכי הביטויים הבאים ללא שימוש במחשבון:

$$\begin{aligned} \text{א. } & (\sin 240^\circ \cdot \tan 150^\circ + \cos(-60^\circ))^2 \\ \text{ב. } & 8\sin^2 150^\circ \cdot \tan 135^\circ - 2 \cdot \sin 135^\circ \cdot \cos(-135^\circ) \\ \text{ג. } & \frac{\cot 225^\circ}{\sin(-225^\circ) - \cos 135^\circ} + \tan^2 210^\circ \end{aligned}$$

(4) הוכח כי אם  $\alpha, \beta$  ו- $\gamma$  הן זוויות במשולש, אז מתקיים:

$$\begin{aligned} \text{א. } & \sin(\alpha + \beta) = \sin \gamma \\ \text{ב. } & \sin\left(\frac{\gamma + \beta}{2}\right) = \cos \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

**תשובות סופיות:**

(1) א.  $\sin 60^\circ$     ב.  $-\cos 30^\circ$     ג.  $-\tan 20^\circ$     ד.  $-\cot 50^\circ$

ה.  $-\sin 35^\circ$     ו.  $-\cos 65^\circ$     ז.  $\tan 50^\circ$     ח.  $\cot 20^\circ$

ט.  $-\sin 60^\circ$     י.  $\cos 50^\circ$

(2) א.  $\frac{1}{2}$     ב.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$     ג.  $-\sqrt{3}$     ד.  $-\frac{1}{2}$

ה. 1    ו.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$     ז.  $-\frac{1}{2}$     ח.  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

ט.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$     י.  $\frac{1}{2}$     יא.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$     יב. -1

(3) א. 1    ב. -1    ג.  $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}$

(4) שאלת הוכחה.

## סכום והפרש זוויות:

### סיכום כללי:

סכום והפרש עבור  $\sin(\alpha \pm \beta)$  ו- $\cos(\alpha \pm \beta)$  יחושב לפי:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

סכום והפרש עבור  $\tan(\alpha \pm \beta)$  ו- $\cot(\alpha \pm \beta)$

$$\begin{aligned} \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \\ \cot(\alpha \pm \beta) &= \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha} \end{aligned}$$

### הערה:

בסרטון התיאוריה אין התייחסות מיוחדת לזהויות עבור  $\tan(\alpha \pm \beta)$  ו- $\cot(\alpha \pm \beta)$ .

### שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בזהויות של סכום והפרש זוויות וללא שימוש במחשבון:

- |                       |                     |                       |
|-----------------------|---------------------|-----------------------|
| א. $\sin 75^\circ$    | ב. $\sin 15^\circ$  | ג. $\sin 105^\circ$   |
| ד. $\sin(-15^\circ)$  | ה. $\cos 75^\circ$  | ו. $\cos 15^\circ$    |
| ז. $\cos(-105^\circ)$ | ח. $\cos 165^\circ$ | ט. $\cos(-195^\circ)$ |

2) חשב ללא שימוש במחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

- א.  $\sin 65^\circ \cos 25^\circ + \sin 25^\circ \cos 65^\circ$   
 ב.  $5 \cos 50^\circ \cos 20^\circ + 5 \sin 50^\circ \sin 20^\circ$

(3) הוכח את הזהויות הבאות :

א.  $\sin(60^\circ + \alpha) + \sin(60^\circ - \alpha) = \sqrt{3} \cos \alpha$

ב.  $\cos(45^\circ - \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha) = \sqrt{2} \sin \alpha$

ג.  $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$

ד.  $\tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$

(4) נתון:  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\cos \beta = \frac{8}{17}$  ו- $\alpha, \beta$  זוויות חדות.

מבלי למצוא את הערכים של  $\alpha$  ו- $\beta$  חשב :

א.  $\sin(\alpha + \beta)$

ב.  $\cos(\alpha + \beta)$

ג.  $\tan(\alpha + \beta)$

(5) הוכח את הזהות:  $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \beta \cos \alpha$

(6) הוכח את הזהות:  $(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha) = \sin 3\alpha + \cos \alpha$

(7) הוכח את הזהות:  $\tan 7\alpha - \tan 5\alpha - \tan 2\alpha = \tan 7\alpha \tan 5\alpha \tan 2\alpha$

(8) הוכח את הזהות:  $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

(9) הוכח את הזהות:  $\cot \alpha - \cot \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$

(10) הוכח את הזהות הבאה :

$\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \sin(\alpha + \beta + \gamma)$

(11) הוכח כי מתקיים:  $\sin 65^\circ \cos 25^\circ + \sin 25^\circ \cos 65^\circ = 1$ .

(12) הוכח כי מתקיים:  $\tan 18^\circ \tan 27^\circ + \tan 18^\circ + \tan 27^\circ = 1$ .

(13) נתון כי:  $\sin 76^\circ = m$ . הבע את  $\sin 31^\circ$  באמצעות  $m$ .

(14) הזוויות  $\alpha$  ו- $\beta$  הן זוויות חדות.

נתון כי:  $\tan \alpha = \frac{(2-k)\sqrt{3}}{3k}$  ו-  $\tan \beta = \frac{(2k-1)\sqrt{3}}{3}$ .

הראה כי מתקיים:  $\alpha + \beta = 60^\circ$ .

(15) היעזר בנוסחה:  $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$  ומצא את  $\tan x$  ו-  $\tan y$ .

אם ידוע כי:  $\tan(x+y) = -3$  ו-  $\tan(x-y) = \frac{1}{3}$ . הבחן בין שני מקרים.

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \begin{array}{l} \text{א. } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{ב. } \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{ג. } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{ד. } \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \quad \text{ה. } \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \text{ו. } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{ז. } \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \quad \text{ח. } -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{ט. } -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{l} \text{א. } 1 \\ \text{ב. } \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

(3) שאלת הוכחה.

$$(4) \quad \begin{array}{l} \text{א. } \frac{84}{85} \\ \text{ב. } -\frac{13}{85} \\ \text{ג. } -6\frac{6}{13} \end{array}$$

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

$$(14) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} (m - \sqrt{1-m^2})$$

(15) שאלת הוכחה.

$$(16) \quad 1 \text{ ו-} 2 \text{ או } -\frac{1}{2} \text{ ו-} -1$$

## זווית כפולה:

### סיכום כללי:

נפתח זווית כפולה לפי הצורות הבאות:

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2\sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha \end{aligned}$$

### שאלות:

(1) הוכח את הזהויות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & 4\sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha = \sin 4\alpha \\ \text{ב.} & (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha \\ \text{ג.} & (\sin 3\alpha - \cos 3\alpha)^2 = 1 - \sin 6\alpha \\ \text{ד.} & \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha \\ \text{ה.} & \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \cot 2\alpha \\ \text{ו.} & \frac{\cos 2\alpha - 2\sin^2 \alpha \cos 2\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{1}{2} \cot 2\alpha \\ \text{ז.} & \cos^2 2\alpha = 4\sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha + 1 \\ \text{ח.} & \cos 4\alpha = 8\cos^4 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 1 \end{array}$$

(2) הוכח את הזהות:  $\sin^3 \alpha = \frac{3\sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$  ע"י כתיבה של  $\sin 3\alpha$

לפי:  $\sin(\alpha + 2\alpha)$  ושימוש בזהויות שנלמדו.

(3) הוכח את הזהות:  $\cos^3 \alpha = \frac{3\cos \alpha + \cos 3\alpha}{4}$  ע"י כתיבה של  $\cos 3\alpha$

לפי:  $\cos(\alpha + 2\alpha)$  ושימוש בזהויות שנלמדו.

(4) נתונה זווית חדה  $\alpha$  המקיימת:  $\sin \alpha = \frac{40}{41}$ . מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א.  $\cos \alpha$

ב.  $\tan \alpha$

ג.  $\sin 2\alpha$

ד.  $\cos 2\alpha$

ה.  $\tan 2\alpha$

(5) נתונה זווית חדה  $\alpha$  המקיימת:  $\tan \alpha = \frac{5}{12}$ . מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א.  $\sin \alpha$ .

ב.  $\cos \alpha$ .

ג.  $\sin 2\alpha$ .

ד.  $\cos 2\alpha$ .

(6) נתונה זווית  $\alpha$  ברביע הראשון וזווית  $\beta$  ברביע השני המקיימות:  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$

ו- $\cos \beta = -0.8$ . מבלי למצוא את  $\alpha$  ו- $\beta$  חשב את הביטויים הבאים:

א.  $\sin(\alpha + \beta)$ .

ב.  $\cos(\alpha + \beta)$ .

ג.  $\sin(2\alpha + \beta)$ .

(7) נתון כי  $\sin \alpha + \cos \alpha = 1.2$  עבור  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . חשב את  $\sin 2\alpha$ .

(8) פשט את הביטוי הבא:  $\sqrt{\frac{1 + \cos 8\alpha}{2}}$

(9) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא:  $\frac{\sin 16^\circ \cos 16^\circ}{3 - 6 \sin^2 29^\circ}$

(10) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא:  $\frac{\sin^2 78^\circ - \cos^2 78^\circ}{\sin 66^\circ}$

(11) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא:  $\frac{5 \tan 15^\circ (1 - 2 \cos^2 15^\circ)}{1 - \tan^2 15^\circ}$

## תשובות סופיות:

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

$$(4) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } \frac{9}{41} & \text{ב. } 4\frac{4}{9} \\ \text{ג. } \frac{720}{1681} & \text{ד. } -\frac{1519}{1681} \end{array}$$

$$\text{ה. } -\frac{720}{1519}$$

$$(5) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } \frac{5}{13} & \text{ב. } \frac{12}{13} \\ \text{ג. } \frac{120}{169} & \text{ד. } \frac{119}{169} \end{array}$$

$$(6) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } \frac{16}{65} & \text{ב. } -\frac{63}{65} \\ \text{ג. } -\frac{123}{845} & \end{array}$$

(7) .0.44

(8)  $\cos 4\alpha$ .

$$(9) \quad \frac{1}{6}$$

(10) .1

(11) .-1.25

## סכום והפרש פונקציות טריגונומטריות:

### סיכום כללי:

להלן נוסחאות הסכום וההפרש של פונקציות טריגונומטריות:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

### הערה:

בסרטון התיאוריה אין התייחסות לזהויות הסכום וההפרש של טנגנס ושל קוטנגנס עקב חוסר השימוש בהן בפתרון שאלות.

### שאלות:

- (1) הוכח את הזהות הבאה:  $\sin 5\alpha + \sin 3\alpha = 2 \sin 4\alpha \cos \alpha$
- (2) הוכח את הזהות הבאה:  $\sin 7\alpha - \sin 2\alpha = 2 \sin 2.5\alpha \cos 4.5\alpha$
- (3) הוכח את הזהות הבאה:  $\cos \alpha + \cos 5\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 3\alpha$
- (4) הוכח את הזהות הבאה:  $\cos 5\alpha - \cos 2\alpha = -2 \sin 3.5\alpha \cos 1.5\alpha$
- (5) הוכח את הזהות הבאה:  $\sin 3\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha$
- (6) הוכח את הזהות הבאה:  $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$
- (7) הוכח את הזהות הבאה:  $\sin(2\alpha + \beta) - 2 \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha = \sin \beta$
- (8) הוכח את הזהות הבאה:  $\frac{\sin 5\alpha - \sin \alpha}{\sin 4\alpha - \sin 2\alpha} = 2 \cos \alpha$

$$(9) \quad \frac{\sin 7\alpha - \sin 3\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 6\alpha} = 2 \sin \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(10) \quad \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \tan 2\alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(11) \quad \tan \alpha + \tan 3\alpha = \frac{2 \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha} \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(12) \quad \text{פשט את הביטוי: } \frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1} \quad \text{ומצא את ערכו מבלי להיעזר}$$

$$\text{במחשבון אם ידוע כי } \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{6}$$

$$(13) \quad \text{נתון כי } \alpha \text{ ו-} \beta \text{ הן זוויות חדות המקיימות: } \sin \alpha = \frac{2mn}{m^2 + n^2} \text{ ו-} \sin \beta = \frac{n^2 - m^2}{m^2 + n^2}$$

$$\text{הראה כי: } \alpha + \beta = 90^\circ$$

$$(14) \quad \text{היעזר במעבר מכפל לסכום או הפרש}$$

$$\text{והוכח כי: } \cos 6\alpha \cos 2\alpha - \cos 5\alpha \cos \alpha = -\sin 7\alpha \sin \alpha$$

$$(15) \quad \text{היעזר במעבר מכפל לסכום או הפרש}$$

$$\text{והוכח כי: } \sin 4\alpha \sin 2\alpha - \sin 5\alpha \sin \alpha + \cos 3\alpha \cos \alpha = \cos 2\alpha$$

$$(16) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: } \sin 52.5^\circ \cdot \sin 7.5^\circ$$

$$(17) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: } \frac{\sin 35^\circ \sin 55^\circ}{\cos 40^\circ \cos 20^\circ - 0.25}$$

$$(18) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: } \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$$

$$(19) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: } \sin 5^\circ \cdot \sin 25^\circ \cdot \sin 35^\circ \cdot \sin 55^\circ \cdot \sin 65^\circ \cdot \sin 85^\circ$$

**תשובות סופיות:**

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) שאלת הוכחה.

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12)  $-\frac{7}{9}$ .

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16)  $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$ .

(17) .1

(18)  $\frac{1}{8}$ .(19)  $\frac{1}{64}$ .

## מכפלת פונקציות:

### סיכום כללי:

להלן נוסחאות המעבר מסכום למכפלה וממכפלה לסכום:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \end{array} \right.$$

### שאלות:

- (1) הוכח את הזהות הבאה:  $\sin 7\alpha \cos \alpha = \frac{1}{2}(\sin 8\alpha + \sin 6\alpha)$
- (2) הוכח את הזהות הבאה:  $\cos 11\alpha \sin 3\alpha = \frac{1}{2}(\sin 14\alpha - \sin 8\alpha)$
- (3) הוכח את הזהות הבאה:  $\cos 4\alpha \cos 10\alpha = \frac{1}{2}(\cos 6\alpha + \cos 14\alpha)$
- (4) הוכח את הזהות הבאה:  $\sin 3\alpha \sin 7\alpha = \frac{1}{2}(\cos 4\alpha - \cos 10\alpha)$
- (5) הוכח את הזהות הבאה:  $2 \sin 7\alpha \sin 2\alpha + \cos 9\alpha = \cos 5\alpha$
- (6) הוכח את הזהות הבאה:  $\sin 7\alpha \cos 4\alpha - \sin 4\alpha \cos \alpha = \sin 3\alpha \cos 8\alpha$
- (7) הוכח את הזהות הבאה:  $\sin \alpha \sin 3\alpha = \cos 2\alpha - \cos 3\alpha \cos \alpha$
- (8) הוכח את הזהות הבאה:  $2(\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha) = \cos 2\alpha - \cos 2\beta$
- (9) הוכח את הזהות הבאה:  $\frac{2}{\cot \beta - \tan \alpha} = \tan(\alpha + \beta) - \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$

**תשובות סופיות:**

(1) הוכחה.

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

(4) הוכחה.

(5) הוכחה.

(6) הוכחה.

(7) הוכחה.

(8) הוכחה.

(9) הוכחה.

# מתמטיקה 0

## פרק 11 - משוואות טריגונומטריות

### תוכן העניינים

191	1. משוואות טריגונומטריות כלליות
194	2. משוואות הנפתרות עי טכניקה אלגברית
196	3. משוואות הנפתרות על ידי זהויות יסוד
198	4. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של מעגל היחידה
199	5. משוואות הנפתרות על ידי חלוקה בקוסינוס
200	6. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש זוויות
201	7. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של זווית כפולה
202	8. משוואות מהצורה $a \sin(x) + b \cos(x) = c$
203	9. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש פונקציות
205	10. משוואות עם תחום נתון
206	11. משוואות עם זוויות ברדיאנים
210	12. אי שוויונים טריגונומטריים

## משוואות טריגונומטריות כלליות:

### סיכום כללי:

פתרון כללי של משוואות טריגונומטריות (במעלות):

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריגונומטריות היסודיות כאשר  $x$  הוא משתנה ו- $\alpha$  היא זווית נתונה/ידועה:

המשוואה	הפתרון
$\sin x = \sin \alpha$	$x_1 = \alpha + 360^\circ k$ , $x_2 = 180^\circ - \alpha + 360^\circ k$
$\cos x = \cos \alpha$	$x_{1,2} = \pm \alpha + 360^\circ k$
$\tan x = \tan \alpha$	$x = \alpha + 180^\circ k$
$\cot x = \cot \alpha$	$x = \alpha + 180^\circ k$

כאשר  $k$  מספר שלם.

### שאלות:

(1) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הסינוס):

$$\text{א. } \sin x = \frac{1}{2} \quad \text{ב. } \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ג. } \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ד. } \sin x = -\frac{1}{2}$$

(2) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הקוסינוס):

$$\text{א. } \cos x = \frac{1}{2} \quad \text{ב. } \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(3) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הטנגנס):

$$\text{א. } \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ב. } \tan x = -1$$

(4) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (זווית כללית):

א.  $\sin x = 0.7$       ב.  $\cos x = -0.6$       ג.  $\tan x = 5$

(5) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות לא מסודרות):

א.  $\sin 3x = \frac{1}{2}$       ב.  $2 \cos 2x = -\sqrt{3}$

ג.  $\tan 5x = -1$       ד.  $3 \sin 2x = 2$

ה.  $3 \cos 3x = 1$       ו.  $2 \tan 4x = 1$

(6) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (ארגומנט מורכב):

א.  $\sin(2x + 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$       ב.  $\cos(75^\circ - 3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$       ג.  $\tan(50^\circ - x) = 1.3$

(7) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציות עם ארגומנטים שונים):

א.  $\sin x = \sin 3x$       ב.  $\sin 2x = \sin(x + 30^\circ)$

ג.  $\sin x = \sin(120^\circ - x)$       ד.  $\cos x = \cos 3x$

ה.  $\cos x = \cos(40^\circ - x)$       ו.  $\tan x = \tan 3x$

ז.  $\tan 2x = \tan(60^\circ - x)$

(8) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות מיוחדות):

א.  $\sin x = 0$       ב.  $\sin x = 1$

ג.  $\sin x = -1$       ד.  $\cos x = 0$

ה.  $\cos x = 1$       ו.  $\cos x = -1$

ז.  $\tan x = 0$       ח.  $\tan x = 1$

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $x_1 = 30^\circ + 360^\circ k$ ,  $x_2 = 150^\circ + 360^\circ k$     ב.  $x_1 = 45^\circ + 360^\circ k$ ,  $x_2 = 135^\circ + 360^\circ k$
- ג.  $x_1 = -60^\circ + 360^\circ k$ ,  $x_2 = 240^\circ + 360^\circ k$     ד.  $x_1 = -30^\circ + 360^\circ k$ ,  $x_2 = 210^\circ + 360^\circ k$
- (2) א.  $x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k$     ב.  $x_{1,2} = \pm 150^\circ + 360^\circ k$
- (3) א.  $x = 30^\circ + 180^\circ k$     ב.  $x = 135^\circ + 180^\circ k$
- (4) א.  $x_1 = 44.427^\circ + 360^\circ k$ ,  $x_2 = 135.573^\circ + 360^\circ k$     ב.  $x_{1,2} = 126.87^\circ + 360^\circ k$
- ג.  $x = 78.69^\circ + 180^\circ k$
- (5) א.  $x_1 = 10^\circ + 120^\circ k$ ,  $x_2 = 50^\circ + 120^\circ k$     ב.  $x_1 = 75^\circ + 180^\circ k$ ,  $x_2 = -75^\circ + 180^\circ k$
- ג.  $x = -9^\circ + 36^\circ k$     ד.  $x_1 = 20.9^\circ + 180^\circ k$ ,  $x_2 = 69.09^\circ + 180^\circ k$
- ה.  $x_{1,2} = \pm 23.5^\circ + 120^\circ k$     ו.  $x = 6.64^\circ + 45^\circ k$
- (6) א.  $x_1 = 105^\circ + 180^\circ k$ ,  $x_2 = -45^\circ + 180^\circ k$     ב.  $x_1 = 10^\circ + 120^\circ k$ ,  $x_2 = 40^\circ + 120^\circ k$
- ג.  $x = 60^\circ + 180^\circ k$     ד.  $x = -2.431^\circ + 180^\circ k$
- (7) א.  $x_1 = 180^\circ k$ ,  $x_2 = 45^\circ + 90^\circ k$     ב.  $x_1 = 30^\circ + 360^\circ k$ ,  $x_2 = 50^\circ + 120^\circ k$
- ג.  $x = 20^\circ + 180^\circ k$     ד.  $x = 90^\circ k$
- ה.  $x = 20^\circ + 180^\circ k$     ו.  $x = 180^\circ k$
- (8) א.  $x = 180^\circ k$     ב.  $x = 90^\circ + 360^\circ k$     ג.  $x = 180^\circ + 360^\circ k$
- ד.  $x = 90^\circ + 180^\circ k$     ה.  $x = 360^\circ k$     ו.  $x = 180^\circ + 360^\circ k$
- ז.  $x = 180^\circ k$     ח.  $x = 45^\circ + 180^\circ k$

## משוואות הנפתרות ע"י טכניקה אלגברית:

### סיכום כללי:

נעזר בטכניקה אלגברית בכדי להביא משוואה מורכבת לצורה של משוואה יסודית.

### טכניקות שכיחות:

- הוצאת שורש ריבועי.
- פירוק לגורמים (ע"י הוצאת גורם משותף, ע"י נוסחאות הכפל המקוצר וע"י פירוק טרינום).
- פתרון משוואה ריבועית.

### שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (טכניקה אלגברית):

$$\sin^2 x = \frac{1}{4} \quad (2) \qquad \cos^2 x = \frac{3}{4} \quad (1)$$

$$\sin x \cos 3x = 0 \quad (4) \qquad \tan^2 2x = 3 \quad (3)$$

$$2 \cos^2 x + \sqrt{3} \cos x = 0 \quad (6) \qquad \sin 2x - 2 \sin^2 2x = 0 \quad (5)$$

$$3 \sin^2 x - \sin x = 2 \quad (8) \qquad 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \quad (7)$$

$$\cos^2 x + 2 \cos x = 3 \quad (10) \qquad 6 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \quad (9)$$

$$\tan^2 x = 4 \tan x - 1 \quad (12) \qquad \tan^2 x - 3 \tan x - 4 = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\sin x}{\cos x - 1} = 0 \quad (14) \qquad \cos x - \frac{2}{\cos x} + 1 = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\cos 2x}{\tan x + 1} = 0 \quad (15)$$

## תשובות סופיות:

$$\cdot x_{1,2} = \pm 30^\circ + 360^\circ k, x_{3,4} = \pm 150^\circ + 360^\circ k \quad (1)$$

$$\cdot x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, x_3 = 330^\circ + 360^\circ k, x_4 = 210^\circ + 360^\circ k \quad (2)$$

$$\cdot x_1 = 30^\circ + 90^\circ k, x_2 = -30^\circ + 90^\circ k \quad (3)$$

$$\cdot x_1 = 180^\circ k, x_2 = 30^\circ + 60^\circ k \quad (4)$$

$$\cdot x_1 = 90^\circ k, x_2 = 15^\circ + 180^\circ k, x_3 = 75^\circ + 180^\circ k \quad (5)$$

$$\cdot x_1 = 90^\circ + 180^\circ k, x_{2,3} = \pm 150^\circ + 360^\circ k \quad (6)$$

$$\cdot x_1 = 90^\circ + 360^\circ k, x_2 = 210^\circ + 360^\circ k, x_3 = -30^\circ + 360^\circ k \quad (7)$$

$$\cdot x_1 = 90^\circ + 360^\circ k, x_2 = -41.8^\circ + 360^\circ k, x_3 = 221.8^\circ + 360^\circ k \quad (8)$$

$$\cdot x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, x_3 = -19.4^\circ + 360^\circ k, x_4 = 199.4^\circ + 360^\circ k \quad (9)$$

$$\cdot x = 360^\circ k \quad (10)$$

$$\cdot x_1 = -45^\circ + 180^\circ k, x_2 = 75.964^\circ + 180^\circ k \quad (11)$$

$$\cdot x_1 = 75^\circ + 180^\circ k, x_2 = 15^\circ + 180^\circ k \quad (12)$$

$$\cdot x = 360^\circ k \quad (13)$$

$$\cdot x = 180^\circ + 360^\circ k \quad (14)$$

$$\cdot x = 45^\circ + 90^\circ k, x \neq -45^\circ + 180^\circ k \quad (15)$$

## משוואות הנפתרות ע"י זהויות יסוד:

### סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

### תזכורת – זהויות היסוד הטריגונומטריות:

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$	$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ , $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$	קשרים בין פונקציות
$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$	$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$	זוויות משלימות ל- $90^\circ$
$\tan \alpha = \cot(90^\circ - \alpha)$	$\cot \alpha = \tan(90^\circ - \alpha)$	
$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$	$\cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$	קשרים בין פונקציות

### שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\sin x = \cos(x + 45^\circ) \quad (2)$$

$$\sin x = \cos x \quad (1)$$

$$2 \cos^2 x = 3 \sin x \quad (4)$$

$$\cos x = \frac{2}{3} \sin^2 x \quad (3)$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \sin x \quad (6)$$

$$\sin^2 x - \cos x = \frac{1}{4} \quad (5)$$

$$\sin x - \tan x = 0 \quad (8)$$

$$\sin^2 x + 2 \cos^2 x = 1.5 \quad (7)$$

**תשובות סופיות:**

$$\cdot x = 45^\circ + 180^\circ k \quad \text{(1)}$$

$$\cdot x = 22.5^\circ + 180^\circ k \quad \text{(2)}$$

$$\cdot x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k \quad \text{(3)}$$

$$\cdot x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k \quad \text{(4)}$$

$$\cdot x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k \quad \text{(5)}$$

$$x_1 = 30^\circ + 120^\circ k, x_2 = -90^\circ + 360^\circ k \quad \text{(6)}$$

$$\cdot x_{1,2} = \pm 45^\circ + 360^\circ k, x_{3,4} = \pm 135^\circ + 360^\circ k \quad \text{(7)}$$

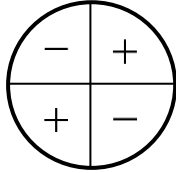
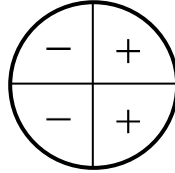
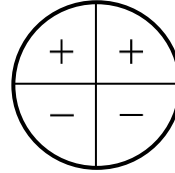
$$\cdot x = 180^\circ k \quad \text{(8)}$$

## משוואות הנפתרות ע"י זהויות של מעגל היחידה:

### סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

### תזכורת – זהויות של מעגל היחידה:

טנגנס	קוסינוס	סינוס	רביע
$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$ $\tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$ $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$ $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$	I II III
			סימנים

### זהויות עבור זויות הגדולות מ-360 מעלות:

$$\boxed{\begin{matrix} \sin(\alpha + 360^\circ k) = \sin \alpha \\ \cos(\alpha + 360^\circ k) = \cos \alpha \end{matrix}}, \quad \boxed{\begin{matrix} \tan(\alpha + 180^\circ k) = \tan \alpha \\ \cot(\alpha + 180^\circ k) = \cot \alpha \end{matrix}}$$

### שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \cos 2x = -\cos 3x & \text{(2)} \\ \sin 3x = -\cos(180^\circ - x) & \text{(4)} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \sin x = -\sin 3x & \text{(1)} \\ \sin(x + 30^\circ) = -\cos x & \text{(3)} \end{array}$$

### תשובות סופיות:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 180^\circ + 360^\circ k, x_2 = 36^\circ + 72^\circ k & \text{(2)} \\ x_1 = 22.5^\circ + 90^\circ k, x_2 = 45^\circ + 180^\circ k & \text{(4)} \end{array} \quad \begin{array}{ll} x_1 = 90^\circ k, x_2 = -90^\circ + 180^\circ k & \text{(1)} \\ x = 120^\circ + 180^\circ k & \text{(3)} \end{array}$$

## משוואות הנפתרות על ידי חלוקה בקוסינוס:

### סיכום כללי:

טכניקה יעילה כדי להעביר משוואה מהצורה:  $\sin x = a \cos x$  לפונקציה טריגונומטרית אחת היא ע"י חלוקה ב- $\cos x$  (בתנאי ש- $\cos x \neq 0$ ). כך מתקבלת המשוואה:

$$\sin x = a \cos x \quad / : \cos x \neq 0$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = a \frac{\cos x}{\cos x}$$

$$\tan x = a$$

$$x = \tan^{-1}(a) + 180^\circ k$$

### הערה:

יש לבדוק האם ערכי  $x$  שמקיימים  $\cos x = 0$  מהווים פתרון למשוואה. אם כן אז יש להוסיף אותם לפתרון הסופי.

### שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$3 \sin x = \cos x \quad (2)$$

$$\sin x = 2 \cos x \quad (1)$$

$$2 \sin x = -5 \cos x \quad (4)$$

$$4 \sin x = 7 \cos x \quad (3)$$

$$3 \sin^2 x = \cos^2 x \quad (6)$$

$$\sin^2 x = 8 \cos^2 x \quad (5)$$

### תשובות סופיות:

$$. x = 63.43^\circ + 180^\circ k \quad (1)$$

$$. x = 18.43^\circ + 180^\circ k \quad (2)$$

$$. x = 60.25^\circ + 180^\circ k \quad (3)$$

$$. x = -68.19^\circ + 180^\circ k \quad (4)$$

$$. x_1 = 70.52^\circ + 180^\circ k, x_2 = -70.52^\circ + 180^\circ k \quad (5)$$

$$. x_1 = 30^\circ + 180^\circ k, x_2 = -30^\circ + 180^\circ k \quad (6)$$

## משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש זוויות:

### סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

### תזכורת – זהויות של סכום והפרש זוויות:

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$	סכום והפרש עבור סינוס וקוסינוס
$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$ $\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$	סכום והפרש עבור טנגנס וקוטנגנס

### שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\sin(x + 45^\circ) \sin(x - 45^\circ) = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$3 \cos^2 x - \sin^2 x = \sin 3x \quad (4)$$

$$2 \sin x = \sin(60^\circ - x) \quad (1)$$

$$\frac{\cos 3x}{\sin x} - \frac{\sin 3x}{\cos x} = 2 \quad (3)$$

### תשובות סופיות:

$$. x = 19.11^\circ + 180^\circ k \quad (1)$$

$$. x = 90^\circ + 180^\circ k \quad (2)$$

$$. x = 15^\circ + 60^\circ k \quad (3)$$

$$. x_{1,2} = \pm 60^\circ + 180^\circ k, x_3 = 90^\circ + 360^\circ k \quad (4)$$

## משוואות הנפתרות ע"י זהויות של זווית כפולה:

### סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

### תזכורת – זהויות של זווית כפולה:

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$	סינוס זווית כפולה
$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$	קוסינוס זווית כפולה

### שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \sqrt{2} \sin x + \sin 2x = 0 & \text{(2)} & \sin x - \sin 2x = 0 & \text{(1)} \\ 2 \cos 2x + \sin 4x = 0 & \text{(4)} & 4 \cos x = \sin 2x & \text{(3)} \\ \cos 2x = 2 \sin x & \text{(6)} & 3 \cos x - \cos 2x = 0 & \text{(5)} \\ 2 \sin^2 x = \cos 2x + 2 & \text{(8)} & \sin x + \cos 2x = 1 & \text{(7)} \end{array}$$

### תשובות סופיות:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 180^\circ k, x_{2,3} = \pm 135^\circ + 360^\circ k & \text{(2)} & x_1 = 360^\circ k, x_2 = 60^\circ + 120^\circ k & \text{(1)} \\ x_1 = 45^\circ + 90^\circ k, x_2 = 135^\circ + 180^\circ k & \text{(4)} & x = 90^\circ + 180^\circ k & \text{(3)} \\ x_1 = 21.1^\circ + 360^\circ k, x_2 = 158.9^\circ + 360^\circ k & \text{(6)} & x_{1,2} = \pm 106.307^\circ + 360^\circ k & \text{(5)} \\ . x_1 = 180^\circ k, x_2 = 30^\circ + 360^\circ k, x_3 = 150^\circ + 360^\circ k & \text{(7)} & & \\ . x_1 = -60 + 360^\circ k, x_2 = 60^\circ + 360^\circ k, x_3 = 120^\circ + 360^\circ k, x_4 = 240^\circ + 360^\circ k & \text{(8)} & & \end{array}$$

## משוואות מהצורה: $a \sin(x) + b \cos(x) = c$

### סיכום כללי:

ניתן להביא משוואה מהצורה:  $a \sin x + b \cos x = c$  לצורה:  $\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}$ .

מציאת זווית  $\alpha$  המקיימת:  $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$  תאפשר לכתוב:  $\sin x + \tan \alpha \cdot \cos x = \frac{c}{a}$ .

שימוש בזהות:  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  וזהות:  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$  יובילו:

$$\sin x + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos x = \frac{c}{a} \quad / \cdot \cos \alpha$$

$$\sin x \cos \alpha + \sin \alpha \cos x = \frac{c}{a} \cos \alpha$$

$$\sin(x + \alpha) = \frac{c}{a} \cos \alpha$$

אם נסמן:  $\frac{c}{a} \cos \alpha = k$  נקבל את המשוואה:  $\sin(x + \alpha) = k$  כאשר  $\alpha$  ו- $k$  ידועים. מכאן הפתרון הוא ישיר לפי משוואת סינוס.

### שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$5 \cos x - 6 \sin x = 1 \quad (2)$$

$$10 \sin x + 3 \cos x = 5 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \sin x + \sqrt{3} \cos^2 \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2} \quad (4)$$

$$\sqrt{3} \sin 2x + 3 \cos 2x = \sqrt{12} \quad (3)$$

$$\cos x + \cos(60^\circ + x) = \sqrt{2} + \cos(60^\circ - x) \quad (5)$$

### תשובות סופיות:

$$x_1 = 11.91^\circ + 360^\circ k, x_2 = 134.69^\circ + 360^\circ k \quad (1)$$

$$x = 15^\circ + 180^\circ k \quad (3) \quad x_1 = 227.156^\circ + 360^\circ k, x_2 = 32.44^\circ + 360^\circ k \quad (2)$$

$$x_1 = -60^\circ + 720^\circ k, x_2 = 180^\circ + 360^\circ k \quad (4)$$

$$x_1 = -105^\circ + 360^\circ k, x_2 = 15^\circ + 360^\circ k \quad (5)$$

## משוואות הנפתרות ע"י זהויות של סכום והפרש פונקציות:

### סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

### תזכורת – זהויות של סכום והפרש פונקציות:

$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$	סכום והפרש פונקציות עבור סינוס
$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$	סכום והפרש פונקציות עבור קוסינוס

### שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\sin x + \sin 3x = \sin 2x \quad (1)$$

$$\cos 2x - \cos 6x = \sin 2x \quad (2)$$

$$\sin x + \sin 3x = 4 \sin^3 x \quad (3)$$

$$\sin 6x - \sin 4x = 1 - \cos 2x \quad (4)$$

$$(\sin 5x + \sin 7x)^2 = (\cos 5x + \cos 7x)^2 \quad (5)$$

$$2 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos 3x + \cos 5x = 1 \quad (6)$$

$$1 + \sin x + \sin 7x = \cos 8x \quad (7)$$

$$2 \sin 3x (\cos 2x + \cos x) = \sin x + \sin 2x \quad (8)$$

$$\sin(x + 60^\circ) - \sin x = \sin(2x + 60^\circ) - \sin 2x \quad (9)$$

$$\cos^2 3x - \cos^2 x = \sin x \cos x \quad (10)$$

$$\sin 8x \sin 2x + \cos 10x = 0 \quad (11)$$

$$\cos x + 3 \sin x = 1 + 2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} \quad (12)$$

$$4 \sin 2x \sin 5x \sin 7x - \sin 4x = 0 \quad (13)$$

$$4 \cos x \cos 2x \cos 3x = 1 \quad (14)$$

### תשובות סופיות:

$$x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k, x_3 = 90^\circ k \quad (1)$$

$$x_1 = 45^\circ + 90^\circ k, x_2 = 180^\circ k \quad (2)$$

$$x_1 = 37.5^\circ + 90^\circ k, x_2 = 7.5^\circ + 90^\circ k, x_3 = 90^\circ k \quad (3)$$

$$x_1 = 15^\circ + 60^\circ k, x_2 = 180^\circ k, x_3 = -22.5^\circ + 90^\circ k \quad (4)$$

$$x_1 = 36^\circ k, x_2 = \left(\frac{180}{7}\right)^\circ + \left(\frac{180}{7}\right)^\circ k \quad (5)$$

$$x_{1,2} = \pm 30^\circ + 90^\circ k, x_3 = 90^\circ + 180^\circ k \quad (6)$$

$$x_1 = -\left(12\frac{6}{7}\right)^\circ k + \left(51\frac{3}{7}\right)^\circ k, x_2 = 45^\circ k \quad (7)$$

$$x_1 = 40^\circ k, x_2 = 180^\circ + 360^\circ k \quad (8)$$

$$x_1 = -20^\circ + 120^\circ k, x_2 = 360^\circ k \quad (9)$$

$$x_1 = 52.5^\circ + 90^\circ k, x_2 = -7.5^\circ + 90^\circ k, x_3 = 90^\circ k \quad (10)$$

$$x_1 = 45^\circ + 90^\circ k, x_2 = 11.25^\circ + 22.5^\circ k \quad (11)$$

$$x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k \quad (12)$$

$$x_1 = 7.5^\circ + 15^\circ k, x_2 = 90^\circ k \quad (13)$$

$$x_1 = 60^\circ + 180^\circ k, x_2 = 22.5^\circ + 45^\circ k \quad (14)$$

## משוואות עם תחום נתון:

### סיכום כללי:

כדי למצוא את הפתרונות של משוואה טריגונומטרית בתחום נתון, נמצא תחילה את הפתרון הכללי שלה ולאחר מכן נציב ערכים ב- $k$  ונבחר את הערכים שנמצאים בתחום הנתון.

### שאלות:

מצא את כל הפתרונות של המשוואות הבאות בתחום הנתון לידן:

$$[0^\circ:180^\circ], 8 \sin x - 4 = 0 \quad (1)$$

$$[-90^\circ:90^\circ], \sin 2x = \sin(x + 60^\circ) \quad (2)$$

$$[-90^\circ:90^\circ], 3 \cos(2x + 30^\circ) + 1 = 0 \quad (3)$$

$$[0^\circ:360^\circ], \cos(50^\circ - x) = -\cos x \quad (4)$$

$$[-30^\circ:30^\circ], 2 \sin 3x - 5 \cos 3x = 0 \quad (5)$$

$$[0^\circ:180^\circ], 2 \cos^2 3x = \sin 6x + 1 \quad (6)$$

$$[-180^\circ:180^\circ], \cos 4x + 1 = 3 \sin 2x \quad (7)$$

$$[-180^\circ:180^\circ], \cos 2x + \cos^2 x + \sin x = 0 \quad (8)$$

### תשובות סופיות:

$$x = 30^\circ, 150^\circ \quad (1)$$

$$x = -80^\circ, 40^\circ, 60^\circ \quad (2)$$

$$x = 39.736^\circ, -69.736^\circ \quad (3)$$

$$x = 115^\circ, 295^\circ \quad (4)$$

$$x = 22.733^\circ \quad (5)$$

$$x = 7.5^\circ, 37.5^\circ, 67.5^\circ, 97.5^\circ, 127.5^\circ, 157.5^\circ \quad (6)$$

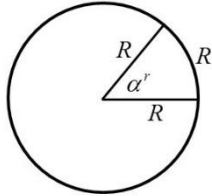
$$x = -165^\circ, -105^\circ, 15^\circ, 75^\circ \quad (7)$$

$$x = -138.19^\circ, -41.81^\circ, 90^\circ \quad (8)$$

## משוואות עם זוויות ברדיאנים:

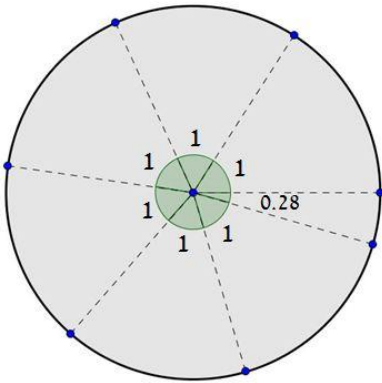
### סיכום כללי:

#### הגדרת הרדיאן:



זווית של רדיאן אחד מוגדרת להיות הזווית המרכזית המתאימה לקשת שאורכה שווה לרדיוס המעגל.

עבור מעגל שרדיוסו  $R$ , תימצאנה  $2\pi$  רדיאנים על היקפו, שכן היקף מעגל הוא  $P = 2\pi \cdot R$ .



באיור שלפניך ניתן לראות חלוקה של מעגל ל- $2\pi = 6.28$  קשתות אשר שוות לרדיוס המעגל. הזווית של כל קשת כזאת שווה לרדיאן אחד, כאשר הזווית האחרונה שווה ל-0.28 מרדיאן. מקבלים  $2\pi$  רדיאנים.

#### קשר בין רדיאנים למעלות:

- נוסחת מעבר מזווית  $\alpha^\circ$  (במעלות) לזווית  $\alpha^r$  (ברדיאנים):  $\alpha^r = \frac{\pi}{180} \alpha^\circ$
- נוסחת מעבר מזווית  $\alpha^r$  (ברדיאנים) לזווית  $\alpha^\circ$  (במעלות):  $\alpha^\circ = \frac{180}{\pi} \alpha^r$

#### פתרונות משוואות טריגונומטריות ברדיאנים:

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריונומטריות היסודיות כאשר  $x$  הוא משתנה ו- $\alpha$  היא זווית ידועה הנתונה ברדיאנים:

המשוואה	הפתרון
$\sin x = \sin \alpha$	$x_1 = \alpha + 2\pi k$ , $x_2 = \pi - \alpha + 2\pi k$
$\cos x = \cos \alpha$	$x_{1,2} = \pm \alpha + 2\pi k$
$\tan x = \tan \alpha$	$x = \alpha + \pi k$
$\cot x = \cot \alpha$	$x = \alpha + \pi k$

כאשר  $k$  מספר שלם.

**שאלות:**

**(1)** המר את הזוויות הבאות ממעלות לרדיאנים:

- |                |                |                 |                  |
|----------------|----------------|-----------------|------------------|
| א. $30^\circ$  | ב. $90^\circ$  | ג. $75^\circ$   | ד. $120^\circ$   |
| ה. $210^\circ$ | ו. $315^\circ$ | ז. $18^\circ$   | ח. $285^\circ$   |
| ט. $-15^\circ$ | י. $-80^\circ$ | יא. $510^\circ$ | יב. $-390^\circ$ |

**(2)** המר את הזוויות הבאות מרדיאנים למעלות:

- |                       |                       |                       |                       |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| א. $\pi$              | ב. $2\pi$             | ג. $4\pi$             | ד. $1.5\pi$           |
| ה. $\frac{1}{2}\pi$   | ו. $\frac{\pi}{4}$    | ז. $\frac{\pi}{6}$    | ח. $\frac{1}{18}\pi$  |
| ט. $\frac{13}{18}\pi$ | י. $\frac{19}{12}\pi$ | יא. $1\frac{1}{6}\pi$ | יב. $2\frac{1}{4}\pi$ |

**(3)** פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (משוואות יסודיות שונות):

- |   |   |
|---|---|
| א. $\left[0:\frac{1}{3}\pi\right], 2\sin 3x=1$                            | ב. $[0:\pi], \sqrt{3}+2\cos x=0$  |
| ג. $[0:2\pi], 3-3\tan\frac{x}{2}=0$                                       | ד. $[0:\pi], \sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$                            |
| ה. $\left[0:\frac{1}{2}\pi\right], 4\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2=0$ | ו. $\left[-\frac{5\pi}{18}:\frac{5\pi}{18}\right], \sin x=\sin\left(\frac{2}{3}\pi-2x\right)$ |
| ז. $\left[0:\frac{\pi}{3}\right], 5-5\tan(4x-0.1\pi)=0$                   | ח. $\left[-\frac{\pi}{4}:\frac{\pi}{4}\right], \sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=0.7$         |

**(4)** פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (טכניקה אלגברית):

- |  |   |
|--|---|
| א. $\left[0:\frac{\pi}{2}\right], \sin^2 x=\frac{3}{4}$                  | ב. $\left[-\frac{\pi}{8}:\frac{\pi}{8}\right], 16\cos^2 2x-1=0$         |
| ג. $[0:\pi], 2\tan^2 x-18=0$   | ד. $\left[-\frac{\pi}{3}:\frac{\pi}{3}\right], 3\sin x\cos x+3\cos x=0$ |
| ה. $\left[-\frac{\pi}{2}:\frac{\pi}{2}\right], \sin^2 x-5\sin x\cos x=0$ | ו. $[-\pi:\pi], 2\sin^2 x-5\sin x+2=0$                                  |
| ז. $[-\pi:0], 4\cos^2 x-\sqrt{2}\cos x-1=0$                              | ח. $[0:2\pi], \tan^2 x-7\tan x+10=0$                                    |

(5) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות יסוד):

א.  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

ב.  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $\tan x = 4 \sin x$

ג.  $0 \leq x \leq 2\pi$ ,  $2 \sin^2 x = 3 \cos x$

(6) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות ממעגל היחידה):

א.  $[-\pi : \pi]$ ,  $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin x$

ב.  $[0 : \pi]$ ,  $\sin\left(2x + \frac{2}{9}\pi\right) = -\cos 2x$

ג.  $[0 : \pi]$ ,  $\sin 4x = -\cos(\pi - x)$

ד.  $\left[-\frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\tan x = -\tan 2x$

(7) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (זהויות של זווית כפולה):

א.  $-\pi \leq x \leq \pi$ ,  $\sin 2x + \cos^2 x = 0$

ב.  $[-\pi : \pi]$ ,  $\cos 4x + 1 = 3 \sin 2x$

ג.  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $2 \sin^2 x = \cos 2x + 2$

ד.  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $\cos 4x + \sin^2 x = 1$

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $\frac{\pi}{6}$     ב.  $\frac{\pi}{2}$     ג.  $\frac{5\pi}{12}$     ד.  $\frac{2\pi}{3}$     ה.  $\frac{7\pi}{6}$   
 ו.  $\frac{7\pi}{4}$     ז.  $\frac{\pi}{10}$     ח.  $\frac{19\pi}{12}$     ט.  $-\frac{\pi}{12}$     י.  $-\frac{4\pi}{9}$   
 יא.  $\frac{17\pi}{6}$     יב.  $-\frac{13\pi}{6}$
- (2) א.  $180^\circ$     ב.  $360^\circ$     ג.  $720^\circ$     ד.  $270^\circ$     ה.  $90^\circ$   
 ו.  $45^\circ$     ז.  $30^\circ$     ח.  $10^\circ$     ט.  $130^\circ$     י.  $285^\circ$   
 יא.  $210^\circ$     יב.  $405^\circ$
- (3) א.  $\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}$     ב.  $x = \frac{5\pi}{6}$     ג.  $x = \frac{\pi}{2}$     ד.  $x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$   
 ה.  $x = 0$     ו.  $x = \frac{2\pi}{9}$     ז.  $x = 0.0875\pi$     ח.  $x = 0.224\pi$
- (4) א.  $x = \frac{\pi}{3}$     ב.  $\phi$     ג.  $x = 0.398\pi, 0.602\pi$     ד.  $\phi$   
 ה.  $x = 0, 0.437\pi$     ו.  $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$
- ז.  $x = -\frac{\pi}{4}, -0.615\pi$     ח.  $x = 0.352\pi, 0.437\pi, 1.352\pi, 1.437\pi$
- (5) א.  $x = \frac{\pi}{8}$     ב.  $x = 0, 0.42\pi, \pi$     ג.  $x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$
- (6) א.  $x = \frac{\pi}{12}, -\frac{11\pi}{12}$     ב.  $x = \frac{23\pi}{72}, \frac{59\pi}{72}$
- ג.  $x = \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{9\pi}{10}$     ד.  $x = \pm \frac{\pi}{3}, 0$
- (7) א.  $x = \pm \frac{\pi}{2}, -0.148\pi, 0.852\pi$     ב.  $x = -\frac{7\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}$   
 ג.  $x = \pm \frac{\pi}{3}$     ד.  $x = 0, 0.38\pi, 0.61\pi, \pi$

## אי שוויונים טריגונומטריים:

### סיכום כללי:

- כדי לפתור אי-שוויון טריגונומטרי בתחום מסוים נבצע את השלבים הבאים:
1. נהפוך את סימן אי השוויון לסימן שוויון ונפתור את המשוואה המתקבלת.
  2. נסדר את כל הפתרונות על ציר מספרים ונבחר ערך בכל תחום.
  3. נציב את הערכים באי השוויון המקורי ונאמר כי:
    - אם מתקבל פסוק אמת אז תחום זה מהווה פתרון של אי השוויון.
    - אם מתקבל פסוק שקר אז תחום זה אינו פתרון של אי השוויון.
  4. נרכז את כל התחומים ונכתוב את הפתרון המלא.

### הערה:

במידה והמשוואה אינה מוגדרת עבור ערך מסוים הערך הזה מוכנס גם לציר המספרים.

### שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

$$[0, 1.5\pi] \quad 2\cos x - \sqrt{3} \geq 0 \quad \text{(2)} \qquad [0, 180^\circ] \quad \sin x < \frac{1}{2} \quad \text{(1)}$$

$$[0, \pi] \quad \sin x + \sin 2x + \sin 3x < 0 \quad \text{(4)} \qquad (-90^\circ, 90^\circ) \quad 2\cos^2 x + \sin x \geq 1 \quad \text{(3)}$$

$$(0 < x < \pi) \quad \sin x + \sqrt{3}\cos x \geq 1 \quad \text{(6)} \qquad [0^\circ, 180^\circ] \quad 1 < 2\sin(x + 10^\circ) < \sqrt{3} \quad \text{(5)}$$

$$(-\pi < x < \pi) \quad |\tan(x)| > \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{(8)} \qquad [0, 2\pi] \quad \tan x + \cot x > 0 \quad \text{(7)}$$

**תשובות סופיות:**

$$. 0^\circ \leq x < 30^\circ, 150^\circ \leq x \leq 180^\circ \quad (1)$$

$$. 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \quad (2)$$

$$. -30^\circ \leq x < 90^\circ \quad (3)$$

$$. \frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3} \quad (4)$$

$$. 20^\circ < x < 50^\circ, 110^\circ < x < 140^\circ \quad (5)$$

$$. 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \quad (6)$$

$$. 0 < x < \frac{\pi}{2}, \pi < x < \frac{3}{2}\pi \quad (7)$$

$$. -\frac{5\pi}{6} < x < -\frac{\pi}{6}, x \neq -\frac{\pi}{2} : \text{או} \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}, x \neq \frac{\pi}{2} \quad (8)$$

# מתמטיקה 0

## פרק 12 - מספרים מרוכבים

### תוכן העניינים

212	1. הגדרת המספר המרוכב
215	2. המספר הצמוד
218	3. חקירת משוואה ריבועית מרוכבת
219	4. מישור גאוס והצגה קוטבית של מספר מרוכב
223	5. נוסחת דה-מואבר למציאת שורשים של מספר מרוכב
225	6. שאלות בסדרות עם מספרים מרוכבים
226	7. שאלות שונות עם מספרים מרוכבים

## הגדרת המספר המרוכב:

**סיכום כללי:**

**הגדרות כלליות:**

ע"י הסימון:  $i = \sqrt{-1}$  מגדירים את המספר מהצורה:  $z = a + bi$  כמספר מרוכב בעל חלק ממשי  $a$  וחלק מדומה  $b$ . המספרים  $a$  ו- $b$  הם ממשיים.  
 $a$  נקרא הרכיב הממשי של  $z$  ומסומן גם  $\text{Re}(z)$  (מלשון: Real).  
 $b$  נקרא הרכיב המדומה של  $z$  ומסומן גם  $\text{Im}(z)$  (מלשון: Imaginary).

**שאלות:**

(1) רשום עם  $i$ :

א. $\sqrt{-1} =$	ב. $\sqrt{-4} =$	ג. $\sqrt{-25} =$
ד. $\sqrt{-3} =$	ה. $\sqrt{-5} =$	

(2) חשב:

א. $i =$	ב. $i^2 =$	ג. $i^3 =$
ד. $i^4 =$	ה. $i^5 =$	ו. $i^{17} =$

(3) רשום את ערכם של  $a$  ו- $b$  בעבור המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2 + 5i$	ב. $3 - i$	ג. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
ד. $7i$	ה. $-4$	ו. $0$

(4) כתוב מספר מרוכב  $z$  לפי הדרישות הבאות:

א.  $\text{Re}(z) = -3$ ,  $\text{Im}(z) = 2$ .

ב.  $\text{Re}(z) = \text{Im}(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

(5) מספר מרוכב מסוים  $z$  מקיים:  $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 4$  ו-  $\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z) = -1$ . מצא את  $z$ .

(6) פתור את המשוואות הבאות:

א.  $x^2 = -1$       ב.  $x^2 + 36 = 0$       ג.  $x^2 - 2x + 5 = 0$

(7) פתור את המשוואה הבאה:  $x^2 + x + 1 = 0$ .

(8) פתור את המשוואה הבאה:  $z^2 + iz + 6 = 0$ .

(9) נתון:  $z_1 = 2 + 3i$ ,  $z_2 = 5 - 2i$ . חשב את ערכי הביטויים המרוכבים הבאים:

א.  $z_1 + z_2 =$       ב.  $z_1 - z_2 =$       ג.  $z_1 \cdot z_2 =$

(10) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $(-2 + 6i) + (1 - i)$       ב.  $(4 + 4i) - \left(3 + \frac{1}{2}i\right)$   
 ג.  $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$       ד.  $5 - (3 - 2i)$   
 ה.  $(i - 3) + 6i$       ו.  $(i + 2) - (3i - 2) + (7 - 5i)$

(11) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $(1 + 4i) \cdot (8 - 2i)$       ב.  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$   
 ג.  $(4i - 3) \cdot (4i + 3)$       ד.  $i \cdot (i - 1)$   
 ה.  $(2i + 3) \cdot i$       ו.  $(5i - 1)^2$

12 נתונים שני מספרים מרוכבים  $z_1 = a_1 + b_1i$  ו-  $z_2 = a_2 + b_2i$ .

ידוע כי  $z_1 + z_2$  הוא ממשי וכי  $z_1 - z_2$  הוא מדומה.

א. מצא קשר בין  $a_1$  ל-  $a_2$  וקשר בין  $b_1$  ו-  $b_2$ .

ב. הראה כי המכפלה  $z_1 \cdot z_2$  היא ממשית.

### תשובות סופיות:

1. א.  $i$     ב.  $2i$     ג.  $5i$     ד.  $\sqrt{3}i$     ה.  $\sqrt{5}i$
2. א.  $i$     ב.  $-1$     ג.  $-i$     ד.  $1$     ה.  $i$     ו.  $i$
3. א.  $a = 2, b = 5$     ב.  $a = 3, b = -1$     ג.  $a = \frac{\sqrt{3}}{2}, b = -\frac{1}{2}$     ד.  $a = 0, b = 7$     ה.  $a = -4, b = 0$     ו.  $a = 0, b = 0$
4. א.  $z = -3 + 2i$     ב.  $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
5.  $z = 1.5 + 2.5i$
6. א.  $x = \pm i$     ב.  $x = \pm 6i$     ג.  $x = 1 + 2i, 1 - 2i$
7.  $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
8.  $z = 2i, -3i$
9. א.  $7 + i$     ב.  $-3 + 5i$     ג.  $16 + 11i$
10. א.  $-1 + 5i$     ב.  $1 + 3\frac{1}{2}i$     ג.  $-\sqrt{3}i$     ד.  $2 + 2i$     ה.  $-3 + 7i$     ו.  $11 - 7i$
11. א.  $16 + 30i$     ב.  $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)$     ג.  $-25$     ד.  $-1 - i$
12. א.  $a_1 = a_2, b_1 = -b_2$     ב. הוכחה.    ג.  $-2 + 3i$     ו.  $-24 - 10i$

## המספר הצמוד:

סיכום כללי:

צמוד קומפלקסי (מרוכב):

לכל מספר מרוכב  $z = a + bi$  קיים מספר צמוד המסומן ב- $\bar{z}$  וערכו:  $\bar{z} = a - bi$ .

שאלות:

(13) רשום את המספר הצמוד של המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2 + 5i$	ב. $3 - i$	ג. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
ד. $7i$	ה. $-4$	ו. $0$

(14) חשב:

א. $\frac{11+2i}{2-i}$	ב. $\frac{3+7i}{2-5i}$	ג. $\frac{19-9i}{2-3i}$
------------------------	------------------------	-------------------------

(15) נתון מספר  $z = 5 - 2i$ . חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{z}$	ב. $\frac{z}{z+3}$	ג. $\frac{z+i}{z-i}$
------------------	--------------------	----------------------

(16) המספר  $\frac{3+4i}{a-i}$  הוא ממשי טהור. מצא את  $a$ .

(17) נתונים שני מספרים מרוכבים  $z_1 = a_1 + b_1i$  ו- $z_2 = a_2 + b_2i$ .

הראה כי כדי שתוצאת החילוק  $\frac{z_1}{z_2}$  תהיה ממשית טהורה, צריך להתקיים:  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ .

(18) פתור את המשוואה הבאה:  $3z - 11 = iz - 7i$ .

(19) פתור את המשוואה הבאה:  $iz + 5 = 4i$ .

(20) פתור את מערכת המשוואות הבאה ( $z$  ו- $w$  משתנים מרוכבים):

$$\begin{cases} 3z + iw = 5 - 4i \\ 5iz - 2w = 5 + 8i \end{cases}$$

(21) פתור את המשוואות הבאות שבהן  $a$  ו- $b$  ממשיים:

ב.  $3a - 8 + 5bi = 2b - ai - 3i$

א.  $2a - 3i = 10 + bi$

(22) פתור את המשוואה הבאה:  $2z + 7i = iz + \bar{z} - 3$ .

(23) חשב את ערכי המספרים המרוכבים הבאים:

ב.  $\sqrt{8 + 6i}$

א.  $\sqrt{5 - 12i}$

(24) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

א.  $(1 - i)z^2 - 2z + i + 1 = 0$

ב.  $(-2 + i)z^2 - (6 + 12i)z + 10 - 25i = 0$

(25) פתור את המשוואה הבאה:  $iz^2 - 2(1 - i)z + 6 + 15i = 0$ .

(26) פתור את המשוואה הבאה:  $z^2 - i\bar{z} + 6 = 0$ .

## תשובות סופיות:

- א.  $2-5i$     ב.  $3+i$     ג.  $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$     ד.  $-7i$     ה.  $-4$     ו.  $0$     (13)
- א.  $4+3i$     ב.  $-1+i$     ג.  $.5+3i$     (14)
- א.  $\frac{5}{29} + \frac{2}{29}i$     ב.  $\frac{11}{17} - \frac{3}{34}i$     ג.  $\frac{14}{17} + \frac{5}{17}i$     (15)
- א.  $a = -\frac{3}{4}$     (16)
- שאלת הוכחה.    (17)
- א.  $z = 4-i$     (18)
- א.  $z = 4+5i$     (19)
- א.  $z = 2-3i, w = 5+i$     (20)
- א.  $a = 5, b = -3$     ב.  $a = 2, b = -1$     (21)
- א.  $z = -\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}i$     (22)
- א.  $z = \pm(3-2i)$     ב.  $z = \pm(3+i)$     (23)
- א.  $z_{1,2} = i, 1$     ב.  $z_{1,2} = -2-i, 2-5i$     (24)
- א.  $z_1 = -2-5i, z_2 = 3i$     (25)
- א.  $z_1 = -3i, z_2 = 2i$     (26)

## חקירת משוואה ריבועית מרוכבת:

שאלות:

(27) נתונה המשוואה הבאה:  $(mi-2)z^2 - 2(m+2i)z + 1 = 0$

מצא לאלו ערכים של הפרמטר המרוכב  $m$  למשוואה:

א. יש פתרון יחיד.

ב. אין פתרון.

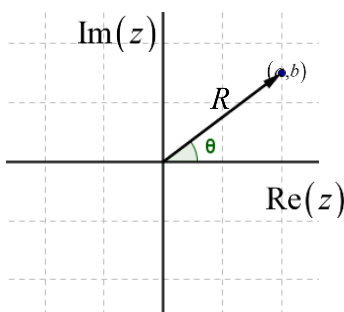
תשובות סופיות:

(27) א.  $m = -i$  ב.  $m = -2i$ .

## מישור גאוס והצגה קוטבית של מספר מרוכב:

### סיכום כללי:

ניתן לאפיין מספר מרוכב  $z$  ע"י הצגתו במישור שבו ציר ה- $x$  מייצג את  $a$ , גודל הערך הממשי של  $z$ , וציר ה- $y$  מייצג את  $b$ , גודל הערך המדומה של  $z$ . מישור זה נקרא מישור גאוס ומופיע באיור הסמוך.



במישור גאוס ניתן לאפיין כל נקודה ע"י הזוג  $(a, b)$  או ע"י הערך המוחלט של המספר (מרחקו מ- $(0, 0)$ ) והזווית שלו בין הקרן החיובית של הציר הממשי לרדיוס. הצמד הנ"ל מוגדר כהצגה קוטבית של מספר מרוכב ויסומן:  $(R, \theta)$ . מספר מרוכב בהצגה קוטבית:

$$z = R \cos \theta + i \cdot R \sin \theta = R(\cos \theta + i \sin \theta) = R \operatorname{cis} \theta$$

### נוסחאות ומעברים:

- מעבר מהצגה קוטבית לקרטזית (אלגברית):  $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\tan \theta = \frac{b}{a}$ .
- מעבר מהצגה קרטזית לקוטבית:  $a = R \cos \theta$ ,  $b = R \sin \theta$ .
- גודל של מספר מרוכב  $z$  יסומן  $|z|$  ויחושב:  $|z| = R = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

### פעולות חשבון בהצגה קוטבית:

- כפל מספרים מרוכבים:  $z_1 \cdot z_2 = (R_1 \operatorname{cis} \theta_1) \cdot (R_2 \operatorname{cis} \theta_2) = R_1 R_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$ .
- חילוק מספרים מרוכבים:  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{R_1 \operatorname{cis} \theta_1}{R_2 \operatorname{cis} \theta_2} = \frac{R_1}{R_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)$ .

## שאלות:

(28) כתוב את המספרים המרוכבים הבאים בהצגה אלגברית:

א. $2\text{cis}60^\circ$	ב. $6\text{cis}135^\circ$	ג. $4\text{cis}330^\circ$
ד. $4\text{cis}(-30^\circ)$	ה. $4\text{cis}690^\circ$	ו. $8\text{cis}90^\circ$
ז. $3\text{cis}270^\circ$	ח. $\text{cis}180^\circ$	ט. $\text{cis}0^\circ$

(29) הפוך להצגה קוטבית:

א. $1+i$	ב. $\sqrt{3}-i$	ג. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$
ד. $3+4i$	ה. $6i$	ו. $-i$
ז. $4$	ח. $-1$	ט. $1$
י. $0$		

(30) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2\text{cis}120^\circ \cdot 3\text{cis}60^\circ$	ב. $\text{cis}210^\circ \cdot 5\text{cis}(-40^\circ)$
ג. $\frac{12\text{cis}315^\circ}{3\text{cis}90^\circ}$	ד. $\frac{1}{2\text{cis}40^\circ}$
ה. $6\text{cis}30^\circ + 2\text{cis}210^\circ$	

(31) נתון המספר המרוכב  $z = R\text{cis}\theta$ . הבע באמצעות  $R$  ו- $\theta$  את המספרים:

א. $\bar{z}$	ב. $1/z$	ג. $-z$
ד. $-\frac{1}{z}$	ה. $iz$	ו. $z \cdot \bar{z}$

(32) הראה כי המספרים הבאים הם ממשיים טהורים:

א. $z + \bar{z}$	ב. $z \cdot \bar{z}$	ג. $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$
------------------	----------------------	--

(33) הראה כי המספרים הבאים הם מדומים טהורים:

א. $z^2 - \bar{z}^2$	ב. $\frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{z}$
----------------------	--------------------------------------

(34) הוכח את הטענות הבאות:

א.  $z - i\bar{z} = \overline{\bar{z} + iz}$       ב.  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

(35) מצא את קדקודיו של ריבוע החסום במעגל קנוני שרדיוסו  $\sqrt{2}$  במישור גאוס אם ידוע שצלעותיו מקבילות לצירים.

(36) ריבוע חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד מקודקודי הריבוע הוא  $1 + \sqrt{3}i$ . מצא את קדקודיו האחרים.

(37) משולש שווה צלעות חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד מקודקודי המשולש הוא  $1 + \sqrt{3}i$ . מצא את קדקודיו האחרים.

(38) משולש שווה שוקיים, שזווית הבסיס שלו היא  $30^\circ$  חסום במעגל קנוני במישור גאוס. קדקוד הראש של המשולש הוא  $1 + \sqrt{3}i$ . מצא את קדקודיו האחרים.

(39)  $z$  הוא מספר מרוכב במישור גאוס הנמצא מחוץ למעגל היחידה. קבע אם המספרים הבאים נמצאים בתוך מעגל היחידה, עליו או מחוץ לו:

א.  $\bar{z}$       ב.  $\frac{1}{z}$       ג.  $\frac{z}{\bar{z}}$       ד.  $z \cdot \bar{z}$

## תשובות סופיות:

- (28) א.  $1 + \sqrt{3}i$     ב.  $-3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$     ג.  $2\sqrt{3} - 2i$     ד.  $2\sqrt{3} - 2i$
- ה.  $2\sqrt{3} - 2i$     ו.  $8i$     ז.  $-3i$     ח.  $-1$     ט.  $1$
- (29) א.  $\sqrt{2}\text{cis}45^\circ$     ב.  $2\text{cis}330^\circ$     ג.  $\text{cis}240^\circ$     ד.  $5\text{cis}53.13^\circ$
- ה.  $6\text{cis}90^\circ$     ו.  $\text{cis}270^\circ$     ז.  $4\text{cis}0^\circ$     ח.  $\text{cis}180^\circ$     ט.  $\text{cis}0^\circ$
- (30) א.  $-6$     ב.  $5\text{cis}170^\circ$     ג.  $4\text{cis}225^\circ$     ד.  $\frac{1}{2}\text{cis}(-40^\circ)$
- ה.  $4\text{cis}30^\circ$
- (31) א.  $R\text{cis}(-\theta)$     ב.  $\frac{1}{R}\text{cis}(-\theta)$     ג.  $R\text{cis}(180^\circ + \theta)$
- ד.  $\frac{1}{R}\text{cis}(180^\circ + \theta)$     ה.  $R\text{cis}(90^\circ + \theta)$     ו.  $R^2$
- (32) שאלת הוכחה.
- (33) שאלת הוכחה.
- (34) שאלת הוכחה.
- (35)  $1+i, -1+i, -1-i, 1-i$
- (36)  $-\sqrt{3}+i, -1-\sqrt{3}i, \sqrt{3}-i$
- (37)  $1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, -2$
- (38)  $1+\sqrt{3}i, -1+\sqrt{3}i, 2$
- (39) א. מחוץ למעגל.    ב. בתוך המעגל    ג. על המעגל    ד. מחוץ למעגל.

## נוסחת דה-מואבר למציאת שורשים של מספר מרוכב:

סיכום כללי:

משפט דה-מואבר:

כדי להעלות מספר מרוכב  $z$  בחזקת  $n$  נעזר בקשר:  $(R\text{cis}\theta)^n = R^n\text{cis}(n\theta)$ .

שורשים של מספר מרוכב:

כדי להוציא שורש  $n$ -י של מספר מרוכב  $z$  השווה למספר מרוכב אחר  $z_0 = R_0\text{cis}\theta_0$

$$\cdot z^n = z_0 = R_0\text{cis}\theta_0 / \sqrt[n]{\phantom{x}} \Rightarrow z_k = \sqrt[n]{R_0} \cdot \text{cis}\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) : 1 \leq k \leq n$$

שאלות:

40 חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בנוסחת דה-מואבר:

א.  $(2\text{cis}30^\circ)^3$       ב.  $(2\text{cis}14^\circ)^5$       ג.  $(1+i)^4$

ד.  $(\sqrt{3}-i)^3$       ה.  $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12}$

41 פתור את המשוואות הבאות:

א.  $z^2 = 36\text{cis}120^\circ$       ב.  $z^4 = (9\text{cis}80^\circ)^2$       ג.  $z^5 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

42 מצא את סכום ומכפלת שורשי היחידה מסדר 4.

43 נתון המספר המרוכב  $z = x+iy$ .

מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה:  $|z|=2$ .

(44) נתון המספר המרוכב  $z = x + iy$ .

מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה:  $|z - 3i| = 5$ .

(45) נתון המספר המרוכב  $z = x + iy$ . מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס

המתקבל בעבור המשוואה:  $|z + i| + |\bar{z} + i| = |1 + 3i|$ .

### תשובות סופיות:

(40) א.  $8i$       ב.  $32\text{cis}70^\circ$       ג.  $-4$       ד.  $-8i$       ה.  $1$ .

(41) א.  $z_0 = 6\text{cis}60^\circ$ ,  $z_1 = 6\text{cis}240^\circ$ .

ב.  $z_0 = 3\text{cis}40^\circ$ ,  $z_1 = 3\text{cis}130^\circ$ ,  $z_2 = 3\text{cis}220^\circ$ ,  $z_3 = 3\text{cis}310^\circ$ .

ג.  $z_0 = \text{cis}12^\circ$ ,  $z_1 = \text{cis}84^\circ$ ,  $z_2 = \text{cis}156^\circ$ ,  $z_3 = \text{cis}228^\circ$ ,  $z_4 = \text{cis}300^\circ$ .

(42) סכום:  $0$ , מכפלה:  $-1$ .

(43)  $x^2 + y^2 = 4$ .

(44)  $x^2 + (y - 3)^2 = 25$ .

(45)  $\frac{2x^2}{3} + \frac{2y^2}{5} = 1$ .

## שאלות בסדרות עם מספרים מרוכבים:

### שאלות:

(46) בסדרה חשבונית האיבר השביעי הוא  $a_7 = 13 + 3i$  והאיבר השלישי הוא  $a_3 = 5 - 9i$ . מצא את סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה.

(47) בסדרה הנדסית האיבר החמישי הוא  $a_5 = 32 + 16i$  והאיבר השני הוא  $a_2 = 2 - 4i$ .  
 א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת מנת הסדרה, אם נתון שמנת הסדרה היא מספר מרוכב הנמצא על הציר המדומה במישור גאוס.  
 ב. מצא את סכום חמשת האיברים הראשונים בסדרה.

(48) נתונים שלושה איברים סמוכים בסדרה הנדסית. האיבר הראשון ביניהם הוא 2. נתון כי אם מוסיפים לאיבר השלישי  $4i$  מתקבלים שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית. מצא את שלושת איברי הסדרה ההנדסית (שתי אפשרויות).

### תשובות סופיות:

$$S_{10} = 100 - 15i \quad (46)$$

$$S_5 = 20 + 25i \quad \text{ב.} \quad a_1 = 2 + i, q = -2i \quad \text{א.} \quad (47)$$

$$2, 4 - 2i, 6 - 8i \quad \text{או} \quad 2, 2i, -2 \quad (48)$$

## שאלות שונות עם מספרים מרוכבים:

### שאלות:

(49) פתור את המשוואה:  $z - \bar{z} + |z| = |2 - i|^2 - 4i + \text{Im}(z)$ .

(50) פתור את המשוואה:  $|2 - 3^{x^2 - x - 1}i| = \sqrt{13}$ .

(51) פתור את המשוואה:  $z^3 = \bar{z}$ .

(52) הוכח: אם מקדמי משוואה ריבועית הם מספרים ממשיים ואין למשוואה פתרונות ממשיים אז פתרונות המשוואה הם שני מספרים צמודים.

(53) נתונים שני מספרים מרוכבים שאינם ממשיים טהורים. הוכח: אם סכום המספרים ממשי ומכפלתם ממשית אז המספרים צמודים.

(54) נתון מספר מרוכב  $z$ , שאינו ממשי טהור ואינו מדומה טהור.

הוכח כי אם  $z - \frac{1}{\bar{z}}$  ממשי אז  $z$  על מעגל היחידה.

(55) הוכח את הנוסחה הבאה:  $R_1 \text{cis} \theta_1 \cdot R_2 \text{cis} \theta_2 = R_1 R_2 \text{cis}(\theta_1 + \theta_2)$ .

(56)  $z$  הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה ברביע הראשון.

נתון:  $|z^4 - z^3| = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ . מצא את  $\arg(z)$ .

(57)  $z$  הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה.

מצא את ערך הביטוי  $z + iz$ , אם ידוע שהוא ממשי.

(58)  $z_1$  ו-  $z_2$  הם פתרונות המשוואה הבאה:  $z^2 - 2\cos\theta \cdot z + 1 = 0$ .  
 הבע באמצעות  $\theta$  את גודל הזווית  $\angle z_1 O z_2$  (O ראשית הצירים).

### תשובות סופיות:

(49)  $z_1 = 3 - 4i$ ,  $z_2 = -3 - 4i$

(50)  $x = 2$ ,  $-1$

(51)  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = i$ ,  $z_3 = -i$ ,  $z_4 = 1$ ,  $z_5 = -1$

(52) שאלת הוכחה.

(53) שאלת הוכחה.

(54) שאלת הוכחה.

(55) שאלת הוכחה.

(56)  $\arg(z) = 30^\circ$

(57)  $z + iz = \sqrt{2}$ ,  $-\sqrt{2}$

(58)  $2\theta$

# מתמטיקה 0

פרק 13 - חשבון דיפרנציאלי - הפונקציה הממשית

תוכן העניינים

1. פונקציה - הגדרה ותכונות בסיסיות..... (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית..... (ללא ספר)
3. הפונקציה הריבועית..... (ללא ספר)
4. הפונקציה המעריכית..... (ללא ספר)
5. הפונקציה הלוגריתמית..... (ללא ספר)
6. פונקציות מפורסמות נוספות..... (ללא ספר)
7. הפונקציות הטריגונומטריות..... (ללא ספר)

## מתמטיקה 0

פרק 14 - חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים

תוכן העניינים

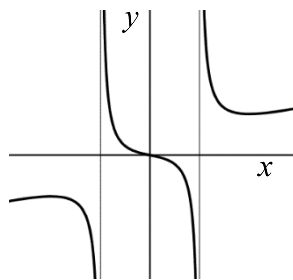
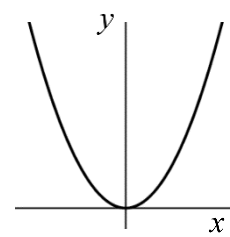
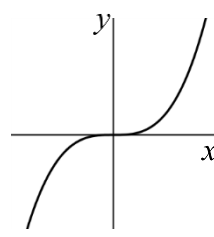
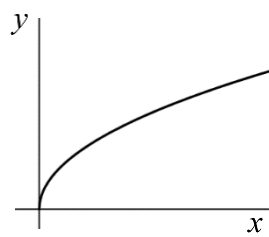
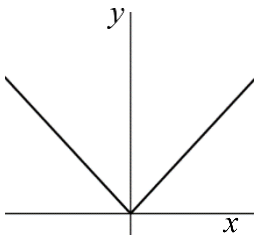
228	1. הקדמה כללית
229	2. גזירת פונקציות
235	3. מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה
236	4. מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה
239	5. שאלות עם פרמטרים
241	6. שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית

## הקדמה כללית:

### סיכום כללי:

### פונקציות נפוצות:

הפונקציה  $f(x) = x^2$  : הפונקציה  $f(x) = x^3$  : הפונקציה  $f(x) = \sqrt{x}$  : הפונקציה  $f(x) = |x|$  :



פונקציה עם מכנה, למשל:  $f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1}$  :

### שיפוע של פונקציה:

- השיפוע  $m$  של פונקציה  $f(x)$  בנקודה  $A(x_1, y_1)$  שעל הפונקציה הוא ערך הנגזרת בנקודה  $A(x_1, y_1)$ , כלומר:  $m = f'(x_1)$ .
- השיפוע של המשיק לפונקציה  $f(x)$  בנקודה  $A(x_1, y_1)$  שעל הפונקציה שווה לשיפוע הפונקציה בנקודה  $A(x_1, y_1)$ .
- משוואת המשיק לפונקציה  $f(x)$  בנקודה  $A(x_1, y_1)$  שעליה מתקבלת על ידי הנוסחה למציאת ישר:  $y - y_1 = m(x - x_1)$ .

### הנגזרת:

לכל פונקציה  $f(x)$  קיימת פונקציה, הנקראת פונקציית הנגזרת (או רק "הנגזרת") ומסומנת  $f'(x)$ , המתקבלת ממנה על פי כללי הגזירה.

## גזירת פונקציות:

### סיכום כללי:

#### כללי הגזירה:

- כלל גזירה מס' 1:  $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
- כלל גזירה מס' 2 (כפל בקבוע):  $f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$
- כלל גזירה מס' 3 (נגזרת של קבוע):  $f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$
- כלל גזירה מס' 4 (סכום והפרש):  $f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$
- כלל גזירה מס' 5 (פונקציה מורכבת):  $f(x) = u^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
- כלל גזירה מס' 6 (נגזרת של  $\frac{1}{x}$ ):  $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
- כלל גזירה מס' 7 (מכפלה):  $f(x) = u \cdot v \Rightarrow f'(x) = u'v + v'u$
- כלל גזירה מס' 8 (מנה):  $f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- כלל גזירה מס' 9 (שורש):  $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

### שאלות:

#### (1) גזור את הפונקציות הבאות:

- |                             |                             |                             |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| א. $f(x) = x^3$             | ב. $f(x) = x^7$             | ג. $f(x) = x^2$             |
| ד. $f(x) = x$               | ה. $f(x) = x^{-3}$          | ו. $f(x) = x^{-1}$          |
| ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ | ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ | ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ |

#### (2) גזור את הפונקציות הבאות:

- |                           |                              |                                       |
|---------------------------|------------------------------|---------------------------------------|
| א. $f(x) = 2x^3$          | ב. $f(x) = 3x^7$             | ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$            |
| ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$ | ה. $f(x) = 8x$               | ו. $f(x) = 3x^{-2}$                   |
| ז. $f(x) = \frac{4}{x}$   | ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$ | ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$ |

(3) גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = 12 \quad \text{א.} \quad f(x) = \frac{7}{8} \quad \text{ב.}$$

(4) גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5 \quad \text{א.} \quad f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = 7x^2 + 23x - 6 \quad \text{ג.} \quad f(x) = 6x^2 + 8x + 4 \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^3 \quad \text{ה.} \quad f(x) = \frac{x^4}{8} + 67 \quad \text{ו.}$$

(5) גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = (5x - 2)^3 \quad \text{א.} \quad f(x) = (x^3 + 6)^5 \quad \text{ב.} \quad f(x) = 3(x - x^2)^2 \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{(5-x)^3}{4} \quad \text{ד.} \quad f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3} \quad \text{ה.}$$

(6) גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{3}{x} \quad \text{א.} \quad f(x) = -\frac{2}{x} \quad \text{ב.} \quad f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{3}{x^3} \quad \text{ד.} \quad f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x} \quad \text{ה.} \quad f(x) = \frac{2}{3-x} \quad \text{ו.}$$

$$f(x) = \frac{6}{x+5} \quad \text{ז.}$$

(7) גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = (5x+1)(x-3) \quad \text{א.} \quad f(x) = (5x+1)^3(x-3) \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = x^3(6-x)^4 \quad \text{ג.} \quad f(x) = 3x^2 \cdot x \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = x^2 \cdot x^3 \quad \text{ה.} \quad f(x) = x(3x+7) \quad \text{ו.}$$

$$f(x) = 3x^3(3x-1) \quad \text{ז.} \quad f(x) = (x-2)(2x^2+3) \quad \text{ח.}$$

$$f(x) = (3x-2)(x^2+10x) \quad \text{ט.} \quad f(x) = (3x^4-4x)(2x^2+5x+2) \quad \text{י.}$$

$$f(x) = x(x-2)(3x-4) \quad \text{יא.}$$

8) גזור את הפונקציות הבאות :

$f(x) = 2x^3(3x+5)^2$ .ב.	$f(x) = (x^2 - 4)^2$ .א.
$f(x) = (x^2 + 1)^3(2x-1)^2$ .ד.	$f(x) = (x^3 + 2)^2(x-1)^3$ .ג.

9) גזור את הפונקציות הבאות :

$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3}$ .ג.	$f(x) = \frac{x^2 + 1}{5x - 12}$ .ב.	$f(x) = \frac{3x - 1}{1 + 2x}$ .א.
$f(x) = \frac{3}{x^3}$ .ו.	$f(x) = \frac{1}{x}$ .ה.	$f(x) = \frac{x^2 + 8}{x - 1}$ .ד.
$f(x) = \frac{x^3 - x^2}{2(1-x)}$ .ט.	$f(x) = \frac{(x^2 + 3)^2}{x^2 - 2}$ .ח.	$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1}$ .ז.
		$f(x) = \frac{x-2}{x^2 - 4}$ .י.

10) גזור את הפונקציות הבאות :

$f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$ .ג.	$f(x) = 4\sqrt{x+1}$ .ב.	$f(x) = \sqrt{x}$ .א.
$f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$ .ו.	$f(x) = x^2\sqrt{x+3}$ .ה.	$f(x) = (3x+1)\sqrt{x}$ .ד.

11) גזור את הפונקציות הבאות :

$f(x) = \sqrt{2x}$ .ב.	$f(x) = \sqrt{x+1}$ .א.
$f(x) = \sqrt{10-3x}$ .ד.	$f(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$ .ג.
$f(x) = 3x^2 - 8\sqrt{x}$ .ו.	$f(x) = \sqrt{2x^2 + 7x}$ .ה.
$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$ .ח.	$f(x) = x^2\sqrt{1-2x}$ .ז.
$f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}}$ .י.	$f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+4}}{2}$ .ט.
$f(x) = \sqrt{\frac{3-x}{x}}$ .יב.	$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + x - 5\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$ .יא.
$f(x) = \frac{x^2 + 7}{\sqrt{x^2 - 5}}$ .יד.	$f(x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x}}$ .יג.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1} \quad \text{טז.}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1} \quad \text{טו.}$$

**(12)** גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{x-2a}{x-4a} \quad \text{ג.} \quad f(x) = \frac{ax^2}{3} - \frac{x}{b} + c \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = ax^4 - bx \quad \text{א.}$$

$$f(x) = a\sqrt{bx^2 + c} \quad \text{ד.}$$

**(13)** גזור פעמיים את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad \text{ו.}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad \text{ה.}$$

**תשובות סופיות:**

- (1) א.  $3x^2$    ב.  $7x^6$    ג.  $2x$    ד. 1   ה.  $-\frac{3}{x^4}$    ו.  $-\frac{1}{x^2}$
- ז.  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$    ח.  $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$    ט.  $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$
- (2) א.  $6x^2$    ב.  $21x^6$    ג.  $2x^3$    ד.  $\frac{6x^5}{7}$    ה. 8
- ו.  $-\frac{6}{x^3}$    ז.  $-\frac{4}{x^2}$    ח.  $\frac{3}{\sqrt{x}}$    ט.  $\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$
- (3) א. 0   ב. 0
- (4) א.  $3x^2 + 4x - 3$    ב.  $x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}$    ג.  $14x + 23$    ד.  $12x + 8$    ה.  $x - 3x^2$    ו.  $0.5x^3$
- (5) א.  $15(5x - 2)^2$    ב.  $15x^2(x^3 + 6)^4$    ג.  $6(x - x^2)(1 - 2x)$
- ד.  $-\frac{3}{4}(5 - x)^2$    ה.  $\frac{8(x + 1)^3}{3}$
- (6) א.  $-\frac{3}{x^2}$    ב.  $\frac{2}{x^2}$    ג.  $-\frac{2}{x^3}$    ד.  $\frac{9}{x^4}$    ה.  $-\frac{2x - 3}{(x^2 - 3x)^2}$
- ו.  $\frac{2}{(3 - x)^2}$    ז.  $-\frac{6}{(x + 5)^2}$
- (7) א.  $10x - 14$    ב.  $(5x + 1)^2(20x - 44)$    ג.  $x^2(6 - x)^3(18 - 7x)$
- ד.  $9x^2$    ה.  $5x^4$    ו.  $6x + 7$    ז.  $36x^3 - 9x^2$    ח.  $6x^2 - 8x + 3$
- ט.  $9x^2 + 56x - 20$    י.  $36x^5 + 75x^4 + 24x^3 - 24x^2 - 40x - 8$    יא.  $9x^2 - 20x + 8$
- (8) א.  $4x(x^2 - 4)$    ב.  $30x^2(x + 1)(3x + 5)$    ג.  $3(x - 1)^2(x^3 + 2)(3x^3 - 2x^2 + 2)$
- ד.  $2(2x - 1)(x^2 + 1)^2(8x^2 - 3x + 2)$
- (9) א.  $\frac{5}{(1 + 2x)^2}$    ב.  $\frac{5x^2 - 24x - 5}{(5x - 12)^2}$    ג.  $\frac{8x}{(x^2 + 3)^2}$    ד.  $\frac{(x - 4)(x + 2)}{(x - 1)^2}$
- ה.  $-\frac{1}{x^2}$    ו.  $-\frac{9}{x^4}$    ז.  $\frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}$
- ח.  $\frac{2x(x^2 + 3)(x^2 - 7)}{(x^2 - 2)^2}$    ט.  $-x$    י.  $-\frac{1}{(x + 2)^2}$

$$\frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}} \cdot \text{ה} \quad \frac{9x+1}{2\sqrt{x}} \cdot \text{ז} \quad \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}} \cdot \text{ג} \quad \frac{2}{\sqrt{x+1}} \cdot \text{ב} \quad \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \text{א} \quad (10)$$

$$\frac{x-3}{2x\sqrt{x}} \cdot \text{ו}$$

$$\frac{4x+7}{2\sqrt{2x^2+7x}} \cdot \text{ה} \quad -\frac{3}{2\sqrt{10-3x}} \cdot \text{ז} \quad \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}} \cdot \text{ג} \quad \frac{1}{\sqrt{2x}} \cdot \text{ב} \quad \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot \text{א} \quad (11)$$

$$\frac{1-3x}{(1-x^2)^{1.5}} \cdot \text{ו} \quad \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+4}} \cdot \text{ט} \quad -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \cdot \text{ה} \quad \frac{2x-5x^2}{\sqrt{1-2x}} \cdot \text{ז} \quad 6x - \frac{4}{\sqrt{x}} \cdot \text{ו}$$

$$\frac{-x^2+2x+1}{2(1-x)^{1.5}\sqrt{1+x^2}} \cdot \text{ז} \quad -\frac{3}{2x\sqrt{3x-x^2}} \cdot \text{ב} \quad 3\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{5}{x^2} \cdot \text{א}$$

$$-\frac{x+3}{2(x-1)^2\sqrt{x+1}} \cdot \text{ט} \quad -\frac{x+1}{2\sqrt{x}(x-1)^2} \cdot \text{ט} \quad \frac{x^3-17x}{(x^2-5)^{1.5}} \cdot \text{ז}$$

$$\frac{abx}{\sqrt{bx^2+c}} \cdot \text{ז} \quad \frac{-2a}{(x-4a)^2} \cdot \text{ג} \quad \frac{2ax}{3} - \frac{1}{b} \cdot \text{ב} \quad 4ax^3 - b \cdot \text{א} \quad (12)$$

$$\cdot f'(x) = \frac{2x^2-8}{4x^2}, f''(x) = \frac{4}{x^3} \cdot \text{א} \quad (13)$$

$$\cdot f'(x) = \frac{2x^2+20x-62}{(2x+10)^2}, f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \cdot \text{ב}$$

$$\cdot f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4} \cdot \text{ג}$$

$$\cdot f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}, f''(x) = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3} \cdot \text{ד}$$

$$\cdot f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4} \cdot \text{ה}$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, f''(x) = \frac{12(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \cdot \text{ו}$$

## מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה:

שאלות:

(14) מצא את שיפוע הפונקציה  $f(x) = 2x^3 - 7x$  בנקודה  $(2, 2)$ .

(15) מצא את שיפוע הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$  בנקודה בה  $x = -2$ .

(16) מצא את שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = 4\sqrt{x}$  בנקודה בה  $x = 1$ .

תשובות סופיות:

$$m = 17 \quad (14)$$

$$m = 4 \quad (15)$$

$$m = 2 \quad (16)$$

## מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה:

---

שאלות:

(17) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = 2(4x+3)^3$  בנקודה בה  $x = -1$ .

(18) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{8}{x+1}$  בנקודה בה  $y = 2$ .

(19) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה  $f(x) = x^2 - 2x - 8$  בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ .

(20) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = x^4 - 2x$  ששיפועו 2.

(21) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2 - 2}$  בנקודה שבה  $x = 1$ .

(22) נתון כי הישר  $2y - 3x = 3$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = 3\sqrt{x}$ . מצא את נקודת ההשקה.

(23) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$  בנקודה בה  $x = 1$ .

(24) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = 3x^2 - 8\sqrt{x}$  בנקודה בה  $x = 4$ .

(25) נתונה הפונקציה הבאה  $f(x) = 4x - 2\sqrt{x}$ .

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המקביל לישר  $f(x) = 3x - \frac{1}{2}$ .

ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$ .

(26) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x-1}}$  ששיפועו -2.

(27) מצא את משוואות המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$  בנקודה שבה  $x=2$ .

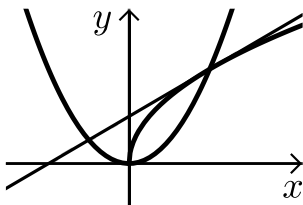
(28) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה  $f(x) = \frac{1}{3x^3}$  היוצרים עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$  זווית של  $135^\circ$ .

(29) מצא את משוואות המשיקים המשותפים לפונקציות הבאות:  $y = x^2$ ,  $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$ .

(30) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$  ונתון הישר:  $y = 2x$ .

- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר הנמצאת ברביע הראשון.
- מצא את משוואות המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שמצאת בסעיף הקודם.
- חשב את השטח שנוצר בין המשיק והצירים.

(31) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = x^2$ .



- מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.
- מצא את משוואות המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  העובר דרך נקודת החיתוך שמצאת הנמצאת ברביע הראשון.
- מצא את נקודת החיתוך הנוספת של המשיק שמצאת עם גרף הפונקציה  $g(x)$ .

**תשובות סופיות:**

**(17)**  $y = 24x + 22$

**(18)**  $y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$

**(19)**  $y = 6x - 24$ ,  $y = -6x - 12$

**(20)**  $y = 2x - 3$

**(21)**  $y = -12x + 9$

**(22)**  $(1, 3)$

**(23)**  $y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$

**(24)**  $y = 22x - 56$

**(25)**  $y = 3x - 1$  .א  $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$  .ב

**(26)**  $y = -2x + 8$

**(27)**  $y = \frac{11}{16}x - \frac{15}{8}$

**(28)**  $y = -x + 1\frac{1}{3}$ ,  $y = -x - 1\frac{1}{3}$

**(29)**  $y = 2x - 1$ ,  $y = -2x - 1$

**(30)** .א  $(1, 2)$  .ב  $y = -1.5x + 3.5$  .ג  $S = 4\frac{1}{12}$

**(31)** .א  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  .ב  $y = 0.5x + 0.5$  .ג  $(-0.5, 0.25)$

## שאלות עם פרמטרים:

---

### שאלות:

**32** שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = ax^2 - 4x$  בנקודה שבה  $x = 3$  הוא 8. מצא את ערכו של הפרמטר  $a$  ואת משוואת המשיק.

**33** נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt{ax}$ ,  $(a > 0)$ .

המשיק לפונקציה בנקודה שבה  $x = \frac{1}{2}$  הוא בעל שיפוע 1. מצא את ערך הפרמטר  $a$ .

**34** נתונה הפונקציה:  $y = x^3 + a\sqrt{x}$  ( $a$  פרמטר).

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 1$  הוא 5. מצא את ערך הפרמטר  $a$ .

**35** נתונה הפונקציה:  $y = 2\sqrt{x} - \frac{A}{x}$  ( $A$  פרמטר).

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 1$  הוא 2. מצא את ערך הפרמטר  $A$ .

**36** הישר  $y = 4x + b$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$ .

מצא את  $b$  ואת נקודת ההשקה.

**37** שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{2}{ax+3}$  בנקודה שבה  $y = 2$  הוא -4.

מצא את ערכו של הפרמטר  $a$  ואת משוואת המשיק.

**38** הישר  $y = ax + \frac{1}{2}$  משיק לגרף הפונקציה  $g(x) = \frac{2}{x+c}$  בנקודה  $x = 0$ .

מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $c$ .

**39** הישר  $y = 3x$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = x\sqrt{x} + b$ .

מצא את  $b$  ואת נקודת ההשקה.

**(40)** שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{a}{\sqrt{bx-1}}$  בנקודה  $(1, 6)$  הוא  $-6$ .

מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$  ואת משוואת המשיק.

**(41)** לאילו ערכי  $k$  ישיק הישר  $y = -5x + 6$  לגרף הפונקציה  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + k$ ?  
לכל ערך כזה של  $k$  מצא את נקודת ההשקה.

**(42)** הפונקציות  $y = \frac{1}{x}$  ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$  משיקות זו לזו.

מצא את  $k$  ואת נקודת ההשקה.

### תשובות סופיות:

**(32)**  $a = 2, y = 8x - 18$

**(33)**  $a = 2$

**(34)**  $a = 4$

**(35)**  $A = 1$

**(36)**  $(-1, 5), y = 4x + 9$

**(37)**  $a = 2, y = -4x - 2$

**(38)**  $a = -\frac{1}{8}, c = 4$

**(39)**  $b = 4, (4, 12)$

**(40)**  $b = 2, a = 6, y = -6x + 12$

**(41)**  $k = 6 : (1, 1)$  או  $k = \frac{158}{27} : \left(\frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right)$

**(42)**  $(1, 1), k = 1.5$

## שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית:

---

### שאלות:

43) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. בטא באמצעות  $t$  את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = x^2 + 1$  בנקודה שבה  $x = t$ .
- ב. מצא את ערכיו של  $t$  אם נתון שהמשיק עובר בנקודה  $(-1, 1)$ .

44) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה:  $f(x) = 5x - x^2$  העוברים דרך הנקודה  $(3, 7)$ .

45) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה:  $f(x) = x^2 + 5x - 6$  העוברים דרך הנקודה  $(0, -10)$ .

46) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה:  $f(x) = 12x - x^3$  העוברים דרך הנקודה  $(2, 24)$ .

47) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  העובר בנקודה  $(3, 0)$ .

48) מצא משוואת המשיק לפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  אם ידוע ששטח המשולש שהוא יוצר עם הצירים הוא 4.5 יחידות שטח.

49) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-2}}$  העוברים דרך הנקודה  $(2, 3)$ .

### תשובות סופיות:

ב.  $t = 0, -2$ .

(43)  $y = 2tx - t^2 + 1$  א.

(44)  $y = x + 4$  ,  $y = -3x + 16$

(45)  $y = 9x - 10$  ,  $y = x - 10$

(46)  $y = 12x$  ,  $y = -15x + 54$

(47)  $y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$

(48)  $y = -\frac{1}{16}x + \frac{3}{4}$

(49)  $y = -x + 5$

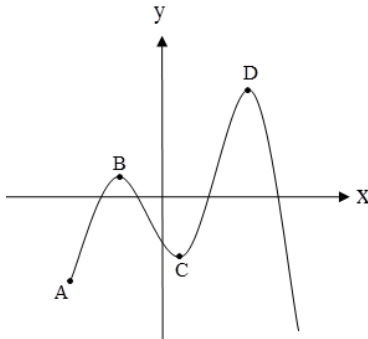
# מתמטיקה 0

פרק 15 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית פולינום

תוכן העניינים

243	1. נקודות קיצון של פונקציות
246	2. חקירת פונקציה פולינומית
250	3. פונקציה זוגית ואי-זוגית

## נקודות קיצון של פונקציות:



**סיכום כללי:**

**נקודות קיצון (נקודות מינימום/מקסימום):**

- מינימום או מקסימום מקומי (פנימי) – B, C, D.
- מינימום או מקסימום קצה – A.
- מינימום או מקסימום מוחלט – D.

**נקודות קיצון מקומיות:**

- שיפוע המשיק לפונקציה בנקודות קיצון מקומיות הוא אפס.
- בנקודה שבה שיפוע המשיק לפונקציה הוא אפס תיתכן נקודת קיצון מקומית.
- נקודה כזו נקראת נקודה חשודה כקיצון. ניתן לבדוק אם היא אכן נקודת קיצון.

**שלבים למציאת נקודות קיצון מקומיות:**

- נגזור את הפונקציה.
- נשווה את הנגזרת לאפס ונחלץ את ערכי ה- $x$  של הנקודות החשודות כקיצון.
- נציב את ערכי ה- $x$  מסעיף ב' בפונקציה המקורית לקבלת ערכי ה- $y$ .
- נקבע אם הנקודה היא נקודת קיצון ונסווג את סוג הקיצון על ידי טבלה.

**שאלות:**

(1) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x) = 10x - x^2$ .

(2) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^3 - 12x$ .

- א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?  
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

- (3) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ .
- א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?  
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- (4) נתונה הפונקציה  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$ .
- א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?  
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- (5) לפונקציה  $f(x) = ax - x^3 - 5$  יש נקודת קיצון בנקודה שבה  $x = -1$ . מצא את ערכו של הפרמטר  $a$ .
- (6) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + x^2$ . ידוע שהנקודה  $x = 1$  נקודת קיצון. מצא את הקבוע  $a$ .
- (7) לפונקציה  $f(x) = Ax^3 + Bx^2 - 1$  יש נקודת קיצון ששיעוריה:  $(2, 3)$ . מצא את ערכי הפרמטרים  $A, B$ .
- (8) לפונקציה  $f(x) = Ax^3 + Bx^2 - 4x$  יש נקודת קיצון ב- $x = -1$  ו- $x = 4$ . מצא את הפרמטרים ואת שיעור ה- $y$  של שתי נקודות הקיצון.
- (9) נתונה הפונקציה  $f(x) = ax^3 + bx^2$ . ידוע שהנקודה  $(1, 2)$  נקודת קיצון. מצא את הפרמטרים  $a, b$ .
- (10) לפונקציה  $f(x) = ax^4 + bx^2 + 35$  יש נקודת קיצון ששיעוריה  $(2, 3)$ . מצא את ערכי הפרמטרים  $a, b$ .

## תשובות סופיות:

(1)  $\max(5, 25)$

(2) א.  $\min(2, -16)$ ,  $\max(-2, 16)$  ב. עולה:  $x > 2$ ,  $x < -2$  יורדת:  $-2 < x < 2$ .

(3) א.  $\max(0, 9)$ ,  $\min(\sqrt{5}, -16)$ ,  $\min(-\sqrt{5}, -16)$

ב. עולה:  $-\sqrt{5} < x < 0$ ,  $x > \sqrt{5}$  יורדת:  $0 < x < \sqrt{5}$ ,  $x < -\sqrt{5}$ .

(4) א.  $\min(3, 5)$  ב. עולה:  $x > 3$  יורדת:  $x < 3$ .

(5)  $a = 3$

(6)  $a = -\frac{2}{3}$

(7)  $A = -1$ ,  $B = 3$

(8)  $A = \frac{1}{3}$ ,  $B = -\frac{3}{2}$ ,  $\left(-1, 2\frac{1}{6}\right)$ ,  $\left(4, -18\frac{2}{3}\right)$

(9)  $b = 6$ ,  $a = -4$

(10)  $a = 2$ ,  $b = -16$

## חקירת פונקציה פולינומית:

### שאלות:

**(11)** נתונה הפונקציה  $f(x) = 10x - x^2$ .

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(12)** נתונה הפונקציה  $f(x) = x^3 - 12x$ .

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(13)** נתונה הפונקציה  $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ .

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(14)** נתונה הפונקציה  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$  חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

15 נתונה הפונקציה  $f(x) = x^3$  חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

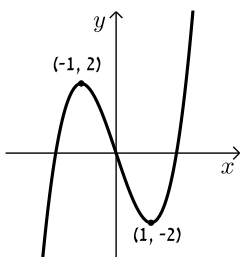
16 נתונה הפונקציה:  $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 54x - 50$ .

- לאילו ערכים של הפרמטר  $a$  עולה הפונקציה בכל תחום הגדרתה?
- הצב בפונקציה  $a = 6$  וחקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים: תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודת חיתוך עם ציר ה- $y$ , סרטוט.

17 נתונה הפונקציה:  $y = -3x^3 + 6x^2 - 4x + d$  (פרמטר  $d$ ).

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה:  $x = 2$ .

- מצא את  $d$ .
- האם יש לפונקציה נקודות קיצון?
- כתוב את תחומי העלייה וירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

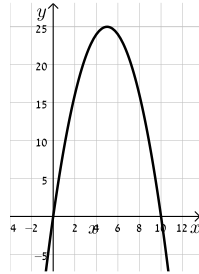


18 לפניך גרף הפונקציה  $f(x) = x^3 - 3x$ :

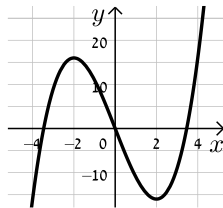
- מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $f(x) = 5$ ?
- מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $f(x) = 2$ ?
- מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $f(x) = 0.5$ ?
- עבור איזה ערך של  $k$  למשוואה  $f(x) = k$  יש בדיוק פתרון אחד?
- עבור איזה ערך של  $k$  למשוואה  $f(x) = k$  יש בדיוק שני פתרונות?
- עבור איזה ערך של  $k$  למשוואה  $f(x) = k$  יש בדיוק שלושה פתרונות?
- האם קיים ערך של  $k$  עבורו למשוואה  $f(x) = k$  אין פתרון?

**תשובות סופיות:**

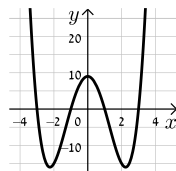
- (11)** א. כל  $x$       ב.  $\max(5,25)$       ג. עלייה:  $x < 5$ , ירידה:  $x > 5$       ד.  $(0,0)$ ,  $(10,0)$ .  
ה. להלן גרף:



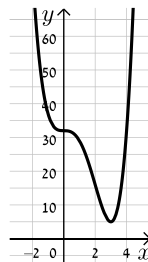
- (12)** א. כל  $x$       ב.  $\min(2,-16)$ ,  $\max(-2,16)$       ג. עלייה:  $x > 2$ ,  $x < -2$ , ירידה:  $-2 < x < 2$       ד.  $(0,0)$ ,  $(\sqrt{12},0)$ ,  $(-\sqrt{12},0)$ .  
ה. להלן גרף:



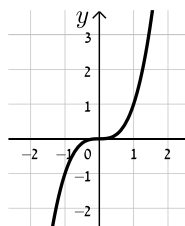
- (13)** א. כל  $x$       ב.  $\max(0,9)$ ,  $\min(\sqrt{5},-16)$ ,  $\min(-\sqrt{5},-16)$       ג. עלייה:  $-\sqrt{5} < x < 0$ ,  $x > \sqrt{5}$ , ירידה:  $x < -\sqrt{5}$ ,  $0 < x < \sqrt{5}$       ד.  $(0,9)$ ,  $(\pm 1,0)$ ,  $(\pm 3,0)$ .  
ה. להלן גרף:



- (14)** א. כל  $x$       ב.  $\min(3,5)$       ג. תחומי עלייה:  $x > 3$ , תחומי ירידה:  $x < 3$       ד.  $(0,32)$ .  
ה. להלן גרף:

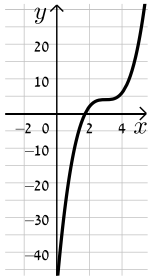


- (15)** א. כל  $x$       ב. אין.      ג. עולה לכל  $x$       ד.  $(0,0)$ .  
ה. להלן גרף:



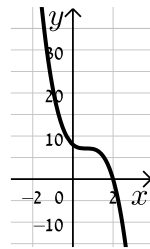
16) א.  $-6 < a < 6$  ב. תחום הגדרה: כל  $x$ , נקודות קיצון: אין, תחומי עלייה: כל  $x$ ,

תחומי ירידה: אין, נקודת חיתוך עם הצירים:  $(0, -50)$ , להלן גרף:



17) א.  $d = 8$  ב. לא ג. יורדת בתחום  $x \neq \frac{2}{3}$

ד.  $(0, 8)$  ה. להלן גרף:



18) א. 1 ב. 2 ג. 3 ד.  $k > 2, k < -2$

ה.  $k = \pm 2$  ו.  $-2 < k < 2$  ז. לא

## פונקציה זוגית ואי-זוגית:

### סיכום כללי:

#### הגדרות:

- פונקציה  $f(x)$  תיקרא זוגית אם לכל  $x$  בתחום הגדרתה מתקיים:  $f(x) = f(-x)$ .
- פונקציה  $f(x)$  תיקרא אי-זוגית אם לכל  $x$  בתחום הגדרתה מתקיים:  $f(-x) = -f(x)$ .

#### שאלות:

1) קבע אלו מהפונקציות הבאות הן זוגיות/אי-זוגיות לא זו ולא זו:

א.  $f(x) = 3x - 5$

ב.  $f(x) = 3x^2$

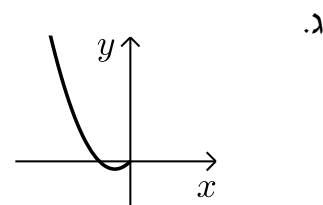
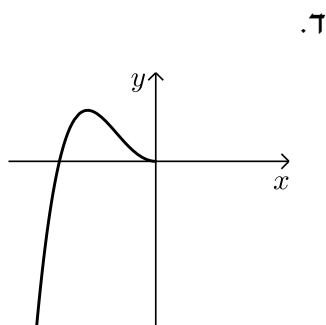
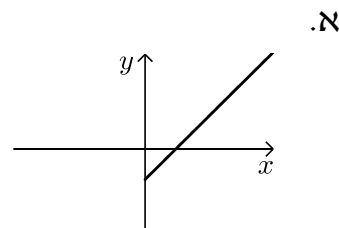
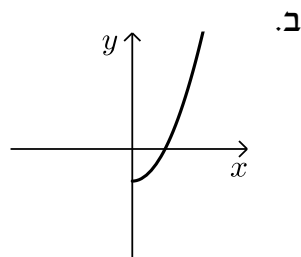
ג.  $f(x) = 2x^3$

ד.  $f(x) = x^3 - 2x^2$

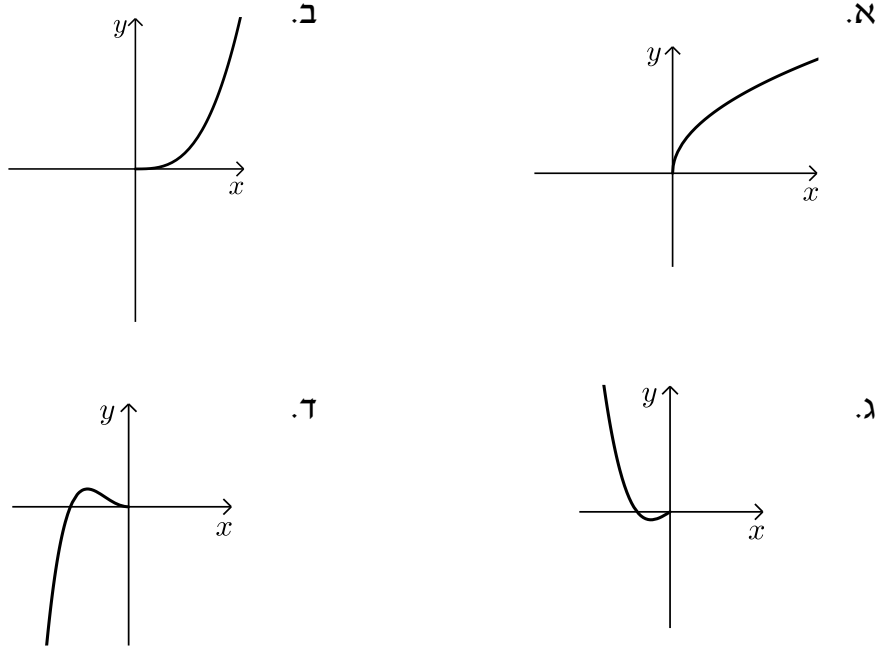
ה.  $f(x) = 4x^4 - 3x^2 + 1$

ו.  $f(x) = 4x^5 - 3x^3 - 1$

2) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל  $x$ . השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתקבל פונקציה זוגית:



3) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל  $x$ . השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתקבל פונקציה אי-זוגית:



4) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = x^4 - 4x^2$  בתחום:  $[0:3]$ .

א. חקור את הפונקציה בתחום הנ"ל לפי הסעיפים הבאים:

- i. תחום הגדרה.
- ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
- iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
- iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.
- v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. הוכח כי הפונקציה  $f(x)$  היא פונקציה זוגית.

ג. התבסס על ממצאריך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום:  $[-3:3]$  (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום  $[-3:0]$  לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

5) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = x^6 - 3x^2 + 3$ .

- א. חקור את הפונקציה בתחום:  $[0:4]$  לפי הסעיפים הבאים:
  - תחום הגדרה, מציאת חיתוך עם ציר ה- $y$ , מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה בתחום הנ"ל.
- ב. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זו ולא זו? נמק באמצעות חישוב מתאים.
- ג. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה ששרטטת בסעיף א', את עקום הפונקציה בתחום  $[-4:0]$ .
- ד. הוכח כי הפונקציה חיובית לכל  $x$  בתחום הגדרתה.

6) לפניך הפונקציה:  $f(x) = -2x^6 + 3x^4 + a$ , פרמטר  $a$ .

ידוע כי לפונקציה ערך מירבי של 1.

- א. מצא את  $a$  וכתוב את הפונקציה  $f(x)$ .
- ב. חקור את הפונקציה בתחום:  $[-2:0]$  לפי הסעיפים הבאים:
  - כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים, מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.
- ג. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זה ולא זה? נמק באמצעות חישוב מתאים.
- ד. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים ושרטט את גרף הפונקציה בתחום:  $[-2:2]$ .

7) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = 3x^3 - 9x$ .

- א. חקור את הפונקציה בתחום:  $[0:5]$  לפי הסעיפים הבאים:
  - כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים, מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.
- ב. הוכח כי הפונקציה היא אי-זוגית.
- ג. התבסס על ממציאך מהסעיפים הקודמים ושרטט את הפונקציה בתחום:  $[-5:5]$  (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום  $[-5:0]$  לגרף ששרטטת בסעיף הקודם).

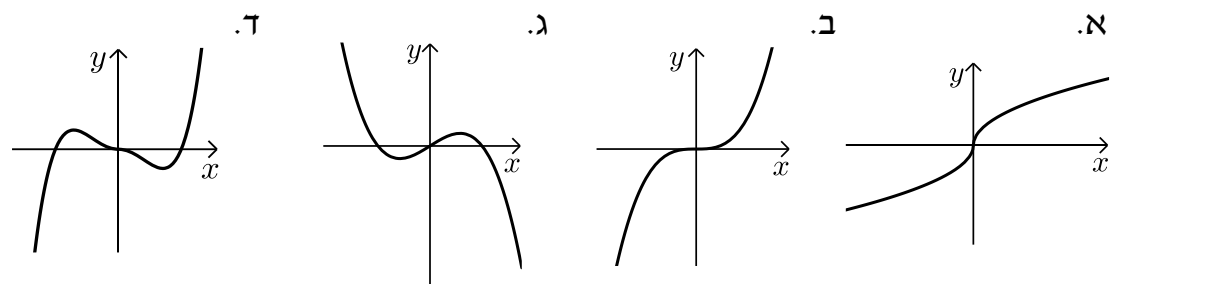
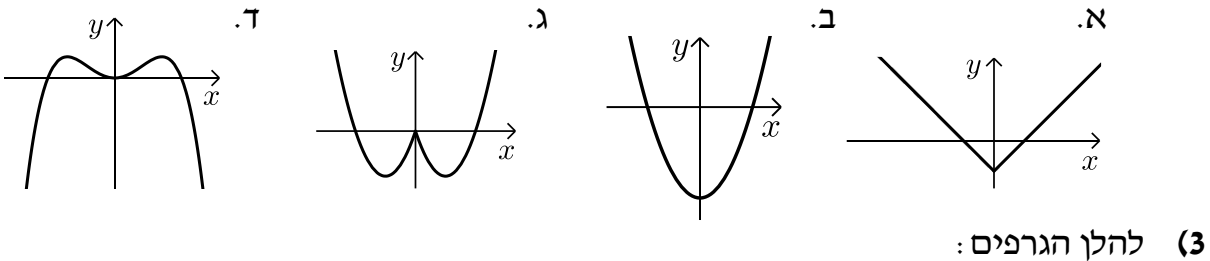
- 8) לפניך הפונקציה הבאה:  $f(x) = 5x^3 - 3x^5 + b$ , פרמטר  $b$ . ידוע כי הישר  $y = 2x$  עובר דרך כל הנקודות על גרף הפונקציה שמקיימות:  $f'(x) = 0$ .
- מצא את  $b$  וכתוב את הפונקציה  $f(x)$ .
  - חקור את הפונקציה בתחום:  $[0:2]$  לפי הסעיפים הבאים:
    - תחום הגדרה.
    - מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
    - מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
    - כתיבת תחומי עלייה וירידה.
    - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
  - בדוק האם הפונקציה היא זוגית/אי-זוגית או לא זו ולא זו. נמק את קביעתך באמצעות חישוב מתאים.
  - הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה של גרף הפונקציה את הגרף בתחום  $[-2:0]$ .

9) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^7 - x}{3}$

- חקור את הפונקציה בתחום:  $[-4:0]$  לפי הסעיפים הבאים:
  - תחום הגדרה.
  - מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
  - מציאת נקודות קיצון וסיווגן (בתשובתך השאר עד 2 ספרות לאחר הנקודה העשרונית).
  - כתיבת תחומי עלייה וירידה.
  - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? או לא זו ולא זו? נמק ע"י חישוב מתאים.
- הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שעשית את גרף הפונקציה בתחום  $[0:4]$ .

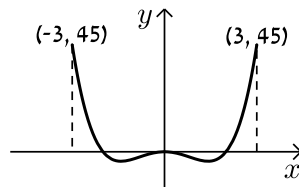
**תשובות סופיות:**

- (1) זוגית: ב', ה'.  
 (2) להלן הגרפים: אי-זוגית: ג', לא זו ולא זו: א', ד', ו'.

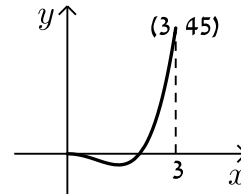


- (4) א. i.  $0 \leq x \leq 3$  ii.  $(0,0), (2,0)$  iii.  $\max(3,45)$  קצה,  $\min(\sqrt{2}, -4)$   
 iv. עולה:  $\sqrt{2} < x < 3$ , יורדת:  $0 < x < \sqrt{2}$ . ב. סעיף הוכחה.

**סרטוט עבור סעיף ג:**

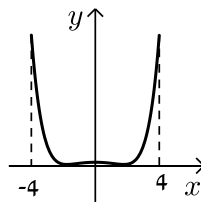


**סרטוט עבור חלק v:**

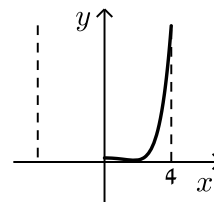


- (5) א. תחום הגדרה:  $0 \leq x \leq 4$ , חיתוך עם ציר ה- $y$ :  $(0,3)$ , נקודות קיצון:  $\max(4,4051)$  קצה,  $\min(1,1)$ ,  $\max(0,3)$  קצה, עולה:  $1 < x < 4$ , יורדת:  $0 < x < 1$ . ב. זוגית. ד. הוכחה עפ"י הסרטוט.

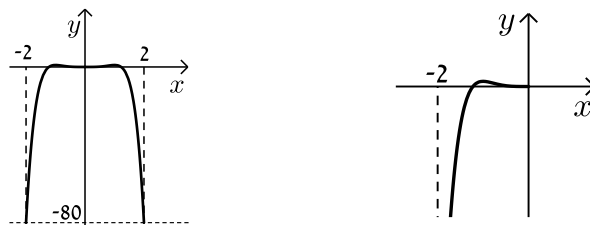
**סרטוט עבור סעיף ג:**



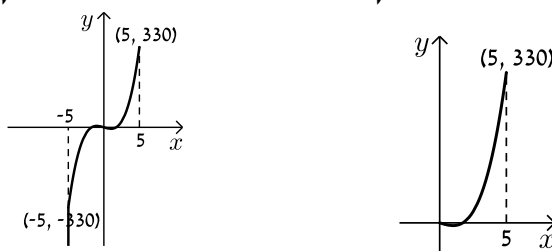
**סרטוט עבור סעיף א:**



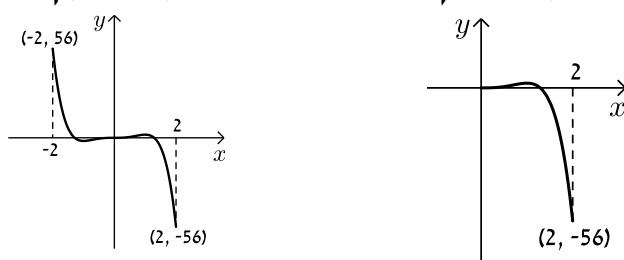
- 6) א.  $a=0$  ב. תחום הגדרה:  $-2 \leq x \leq 0$ , חיתוך עם הצירים:  
 נקודות קיצון:  $(0,0)$ ,  $(-1.225,0)$ ,  $\min(-2,-80)$ ,  $\max(-1,1)$ ,  $\min(0,0)$  קצה,  
 עולה:  $-2 < x < -1$ , יורדת:  $-1 < x < 0$ . ג. זוגית.  
**סרטוט עבור סעיף א:** **סרטוט עבור סעיף ד:**



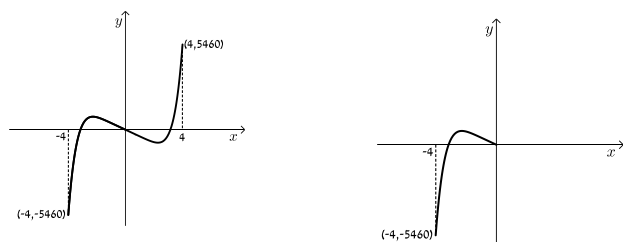
- 7) א. תחום הגדרה:  $0 \leq x \leq 5$ , חיתוך עם הצירים:  $(0,0)$ ,  $(\sqrt{3},0)$   
 נקודות קיצון:  $\max(5,330)$  קצה,  $\min(1,-6)$ ,  $\max(0,0)$  קצה,  
 עולה:  $1 < x < 5$ , יורדת:  $0 < x < 1$ . ב. אי-זוגית.  
**סרטוט עבור סעיף א:** **סרטוט עבור סעיף ג:**



- 8) א.  $b=0$  ב. i  $0 \leq x \leq 2$  ii  $(0,0)$ ,  $(1.29,0)$  iii  $\min(2,-56)$  קצה,  
 iv. עולה:  $0 < x < 1$ , יורדת:  $1 < x < 2$ . ג. אי-זוגית.  
**סרטוט עבור סעיף ד:** **סרטוט עבור חלק v:**



- 9) א. i  $-4 \leq x \leq 0$  ii  $(-1,0)$ ,  $(0,0)$  iii  $\min(0,0)$  קצה,  $\max(-0.723,0.207)$ ,  
 iv. עולה:  $-4 < x < -0.723$ . ג. אי-זוגית. **סרטוט עבור סעיף ד:** **סרטוט עבור חלק v:**



# מתמטיקה 0

פרק 16 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית מנה ושורש

תוכן העניינים

256	1. מציאת תחום הגדרה
258	2. מציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה
259	3. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים
264	4. חקירת פונקצית מנה
273	5. חקירת פונקצית שורש
281	6. תחומי קעירות ונקודות פיתול
287	7. חקירת פונקציה עם פרמטר
290	8. פונקציות ללא תבנית מפורשת

## מציאת תחום הגדרה:

### סיכום כללי:

- כל פולינום מוגדר לכל  $x$ .
- בפונקציה עם מכנה, אסור שיתקבל אפס במכנה.
- בפונקציה עם שורש זוגי, אסור שיתקבל מספר שלילי בתוך השורש.

### שאלות:

1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x$	ב. $f(x) = 4x^3 - x^2 + \frac{x}{2} + 1$
ג. $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 1$	ד. $f(x) = \frac{2x}{x-3}$
ה. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$	ו. $f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1}$
ז. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$	ח. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x - 8}$
ט. $f(x) = \frac{6}{x^2 + 1}$	י. $f(x) = \frac{4x + 1}{x^2 + 1}$
יא. $f(x) = \frac{1}{x^3 - x}$	יב. $f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 4x}$

2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{x}$	ב. $f(x) = 2\sqrt{x-3}$
ג. $f(x) = \sqrt{x-4}$	ד. $f(x) = 3x\sqrt{1-2x}$
ה. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 10}$	ו. $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$
ז. $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x+4}}$	ח. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 5x + 6}}{x-1}$
ט. $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + 5x + 9}}$	י. $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^3 - 9x}}$
יא. $f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x+6}}$	יב. $f(x) = \frac{x+1}{x - \sqrt{2-x}}$
יג. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1- x }}$	יד. $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+2} - 3}$

### תשובות סופיות:

- (1) א. כל  $x$     ב. כל  $x$     ג. כל  $x$     ד.  $x \neq 3$     ה.  $x \neq \pm 2$     ו.  $x \neq \pm 1$   
 ז.  $x \neq -1, 2$     ח.  $x \neq 4, -2$     ט. כל  $x$     י. כל  $x$     יא.  $x \neq \pm 1, 0$     יב.  $x \neq \pm 2, 0$
- (2) א.  $x \geq 0$     ב.  $x \geq 3$     ג.  $x \geq 4$     ד.  $x \leq \frac{1}{2}$     ה.  $x \leq -5, x \geq 2$   
 ו.  $x \leq -2, x \geq 1$     ז.  $x > -4$     ח.  $x \leq -3, -2 \leq x < 1, x > 1$     ט.  $x \leq -1.5, x \geq 1$   
 י.  $-3 < x < 0, x > 3$     יא.  $-6 \leq x < -2, x > -2$     יב.  $x < 1, 1 < x \leq 2$   
 יג.  $-1 < x < 1$     יד.  $x \geq 7$

## מציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה:

שאלות:

(3) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{6x}{x^2 - 10x + 9}$ .

- א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?  
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

תשובות סופיות:

(3) א.  $\min\left(-3, -\frac{3}{8}\right), \max\left(3, -1\frac{1}{2}\right)$ .

ב. עולה:  $-3 < x < 3$ , יורדת:  $x < -3, 3 < x \neq 9$ ,  $x \neq 1$ .

## מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים:

### סיכום כללי:

#### אסימפטוטה אנכית:

הגדרה: הישר:  $x = k$  הוא אסימפטוטה אנכית של פונקציה מהצורה:  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

אם הוא מקיים:  $g(k) = 0$  וגם:  $f(k) \neq 0$ . בצורה מתמטית: אם:  $\lim_{x \rightarrow k^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$

או:  $\lim_{x \rightarrow k^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$  או שניהם אז הישר:  $x = k$  הוא אסימפטוטה אנכית לפונקציה  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ .

### הסבר כללי:

בעבור ערכי  $x$  שמאפסים את המכנה, אבל לא את המונה יש אסימפטוטה אנכית. כאשר ערך  $x$  מאפס את המכנה וגם את המונה יש לפרק את המונה והמכנה (על ידי נוסחאות כפל מקוצר או טרינום למשל) ולצמצם. אם אחרי הצמצום אותו ערך של  $x$  עדיין מאפס את המכנה תתקבל אסימפטוטה אנכית, אך אם ערך  $x$  זה לא מאפס את המכנה אחרי שצומצם אין אסימפטוטה אנכית אלא נקודת אי הגדרה.

#### אסימפטוטה אופקית:

הגדרה: ישר מהצורה:  $y = n$  הוא אסימפטוטה אופקית לפונקציה מהצורה:  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

אם מתקיים:  $\lim_{x \rightarrow \infty^+} \frac{f(x)}{g(x)} = n$  או:  $\lim_{x \rightarrow \infty^-} \frac{f(x)}{g(x)} = n$  או שניהם.

אופן החישוב הכללי:

נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{ax^m + \dots}{bx^n + \dots}$  (יש בפונקציה קו שבר אחד!)

- אם  $m > n$ , לפונקציה אין אסימפטוטה אופקית.
- אם  $m = n$ , לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה  $y = \frac{a}{b}$ .
- אם  $m < n$ , לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה  $y = 0$ .

### חוקי גבולות לאינסוף:

במקרים רבים נרצה לדעת האם פונקציה מסוימת מתכנסת לערך כלשהו כאשר  $x$  שואף לערכים ההולכים וגדלים (לאינסוף, או למינוס אינסוף). עבור ערכי  $x$  שהולכים וגדלים (או קטנים) נרשום:  $x = \infty$  או  $x = -\infty$  בהתאמה.

ישנם 4 מצבים בהם ערך הפונקציה בשאיפת  $x$  לאחד הקצוות ניתן לחישוב ישיר:

- הגבול:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$

- הגבול:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$  ניתן לפיצול לשני מקרים:

- אם:  $x \rightarrow 0^+$  (מתקרב ל-0 מהכיוון החיובי) אז:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

- אם:  $x \rightarrow 0^-$  (מתקרב ל-0 מהכיוון השלילי) אז:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

- הגבול מהצורה  $\infty \cdot \infty$  (מכפלת שני ביטויים של  $x$  אשר כל אחד מהם שואף לאינסוף בפני עצמו) מקיים:  $\infty \cdot \infty = \infty$

- הגבול מהצורה  $\infty + \infty$  (סכום שני ביטויים של  $x$  אשר כל אחד מהם שואף לאינסוף בפני עצמו) מקיים:  $\infty + \infty = \infty$

ישנם 3 מקרים בהם לא ניתן לדעת מהו ערך הפונקציה בלקיחת הגבול בצורה ישירה והם:

- הגבול מהצורה:  $\frac{\infty}{\infty}$  (מנת שני ביטויים שהולכים וגדלים עם שאיפת  $x$ ).

- הגבול מהצורה:  $\frac{0}{0}$  (מנת שני ביטויים שהולכים וקטנים עם שאיפת  $x$ ).

- הגבול מהצורה:  $\infty - \infty$  (הפרש של שני ביטויים שהולכים וגדלים עם שאיפת  $x$ ). במקרים אלו נעזר בפישוטים שהוצגו לעיל על מנת למצוא את ערך הגבול עצמו.

## שאלות:

(4) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$

(5) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{5x^2+1}{x^2-9}$

(6) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{2x^2-5x+2}{1+3x^2}$

(7) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{3x}{x^2-2x-15}$

(8) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{6x^3-5x+1}{1+2x^2}$

(9) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{ax+b}{x-b}$

(10) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$   
 ואת נקודת אי הרציפות שלה.

(11) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2}{2x^2-4x}$   
 ואת נקודת אי הרציפות שלה.

(12) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$

(13) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x}}$

14) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

15) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{2x}{x-\sqrt{x}}$

16) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+5}}$

17) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2-16}}$

18) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{4x^2+1}{ax^2-x+b}$

האסימפטוטה האופקית של הפונקציה ואחת האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה

נפגשות בנקודה  $(-1, 2)$ .

מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

19) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{ax+8}{x+b\sqrt{x}}$

הפונקציה חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה בנקודה  $(16, 2)$ .

מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

### תשובות סופיות:

(4)  $x = 2, y = 3$

(5)  $x = \pm 3, y = 5$

(6)  $y = \frac{2}{3}$

(7)  $x = -3, x = 5, y = 0$

(8) אין.

(9)  $x = b, y = a$

(10) נקודת אי-הגדרה:  $(2, 4)$ ,  $x = 1, y = 1$

(11) נקודת אי-הגדרה:  $(0, 0)$ ,  $x = 2, y = \frac{1}{2}$

(12)  $x = 2, y = 0$

(13)  $x = 4$

(14)  $x = 1, y = -1$

(15)  $x = 1, y = 2$

(16)  $y = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) = 3, y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = -3$

(17)  $x = 4, x = -4, y = 5, y = -5$

(18)  $b = -3, a = 2$

(19)  $b = 1, a = 2$

## חקירת פונקצית מנה:

### שאלות:

(20) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{6x^2 - 10x + 6}{3x^2 - 10x + 3}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(21) נתונה הפונקציה:  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(22) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(23)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{6x}{x^2 - 5x + 4}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(24)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 3}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(25)** נתונה הפונקציה הבאה:  $y = \frac{2x^2 - 5x + 2}{4x}$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- תחום הגדרה.
- נקודות קיצון.
- קביעת סוג הקיצון ותחומי עלייה וירידה.
- חיתוך עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטה אנכית.
- שרטוט סקיצה.

**(26)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום הגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(27) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(28) לגרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{ax + 4}{x^2}$  יש נקודת קיצון שבה  $x = -8$ .

- א. מצא את  $a$  וכתוב את הפונקציה.
- ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ד. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(29) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{3x^2}{2x^2 - 8}$ .

- א. מהו תחום הגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. קבע את סוג הקיצון ותחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה.
- ה. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(30) נתונה הפונקציה:  $y = \frac{a^2x - 4}{2x^2 - 1}$ ,  $(a$  קבוע).

- ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה:  $x = 1$  הוא:  $m = 4$ .
- א. מצא את כל הערכים האפשריים עבור  $a$ .
  - ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
  - ג. מצא את נקודת החיתוך בין המשיק הנתון ומשיק העובר דרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .

**31** נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = 1.5x - \frac{5x+1}{x+5}$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה.
- ב. נקודות קיצון וסוגן.
- ג. תחומי עלייה וירידה.
- ד. חיתוך עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה.

**32** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x-a}{x-1}$ ,  $(a \neq 1)$ .

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
- ג. הבע באמצעות  $a$  את השיעורים של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  ועם ציר ה- $y$ .
- ד. ענה על הסעיפים הבאים:
  - i. מצא עבור אילו ערכים של  $a$  הפונקציה  $f(x)$  עולה לכל  $x$  בתחום ההגדרה.
  - ii. ישר המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה שבה  $x=a$  מקביל לישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה:  $x=2$ . מצא את הערך של  $a$  אם נתון כי הפונקציה עולה לכל  $x$ .

**33** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2+ax+6}{x-2}$ ,  $(a$  פרמטר).

- ידוע שאחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- $y$ .
- א. מצא את הערך של  $a$ .
  - ב. הצב את הערך של  $a$  שמצאת בסעיף א' ומצא:
    - i. את תחום ההגדרה של הפונקציה.
    - ii. את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
    - iii. את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
    - iv. את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).
  - ג. עבור אלו ערכי  $x$  הפונקציה שלילית?
  - ד. נתון הישר:  $y = k$ . עבור אלו ערכי  $k$  אין נקודות משותפות לישר ולגרף הפונקציה? נמק.

34 נתונה הפונקציה:  $y = \frac{x+3}{x-2} + A$ , (A פרמטר). גרף הפונקציה עובר בנקודה (3A, A).

- א. מצא את ערך הפרמטר A.
  - ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
  - ג. הוכח כי גרף הפונקציה יורד לכל  $x$ .
  - ד. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
  - ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
  - ו. נתון הישר:  $y = k$ .
- האם קיים ערך של  $k$  עבורו הישר חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות שונות? נמק.

35 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{ax^2 - 20x + 28}{x^2 + 2a}$ .

- ידוע כי גרף הפונקציה חותך את האסימפטוטה האופקית שלו בנקודה (3, 0.5).
- א. מצא את ערך הפרמטר  $a$  וכתוב את הפונקציה ואת תחום הגדרתה.
  - ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
  - ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
  - ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
  - ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
  - ו. העזר בגרף הפונקציה וקבע עבור אלו ערכים של  $k$  הישר:  $y = k$  יחתוך את גרף הפונקציה בנקודה אחת בלבד.

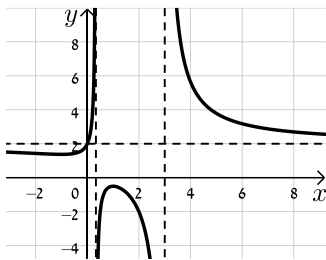
36 ענה על הסעיפים הבאים:

- א. הוכח כי לגרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{9-x^2}{x^2-k}$  יש נקודת קיצון שנמצאת על ציר ה- $y$ .
- ב. הוכח כי הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת לכל  $x$  אם ידוע כי שיעור ה- $y$  של נקודת הקיצון הוא 3.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- ד. מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה וקבע בכמה נקודות יחתוך אותו הישר  $y = -1$ . נמק את תשובתך.

**תשובות סופיות:**

20 א.  $x \neq 3, x \neq \frac{1}{3}$  ב.  $\min\left(-1, 1\frac{3}{8}\right), \max\left(1, -\frac{1}{2}\right)$

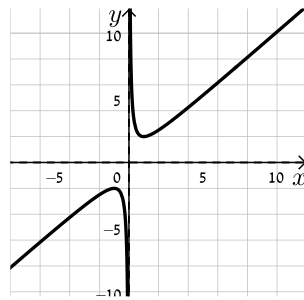
ג. תחומי עלייה:  $-1 < x < 1$  וגם  $x \neq \frac{1}{3}$ , תחומי ירידה:  $1 < x \neq 3$  או  $x < -1$ .



ד.  $(0, 2)$  ה.  $x = 3, x = \frac{1}{3}, y = 2$  ו. להלן סקיצה:

21 א.  $x \neq 0$  ב.  $\min(1, 2), \max(-1, -2)$

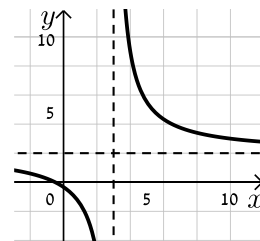
ג. עולה:  $x > 1$  או  $x < -1$ , יורדת:  $-1 < x < 1$ ,  $x \neq 0$  ד. אין



ה. להלן סקיצה:

22 א.  $x \neq 3$  ב. אין ג. הפונקציה יורדת בכל ת.ה.

ד.  $\left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(0, -\frac{1}{3}\right)$  ה.  $y = 2, x = 3$

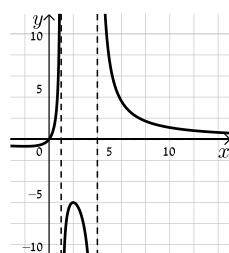


ו. להלן סקיצה:

23 א.  $x \neq 1, x \neq 4$  ב.  $\min\left(-2, -\frac{2}{3}\right), \max(2, -6)$

ג. תחומי עלייה:  $-2 < x < 2$ ,  $x \neq 1$ , תחומי ירידה:  $x < -2$  או  $x > 2, x \neq 4$

ד.  $(0, 0)$  (אסימפטוטות:  $y = 0, x = 1, x = 4$ ).

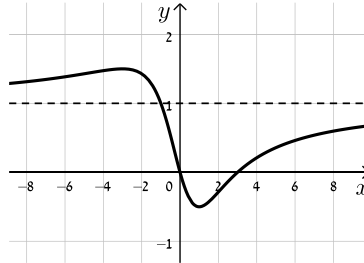


ה. להלן סקיצה:

**(24)** א. כל  $x$       ב.  $\min\left(1, -\frac{1}{2}\right), \max\left(-3, 1\frac{1}{2}\right)$

ד.  $(0,0), (3,0)$  (אסימפטוטה:  $y=1$ ).

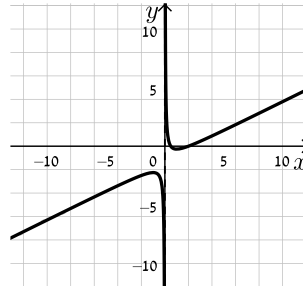
ג. עולה:  $x > 1$  או  $x < -3$ , יורדת:  $-3 < x < 1$   
ה. להלן סקיצה:



**(25)** א.  $x \neq 0$       ב.  $\min(1, -0.25), \max(-1, -2.25)$

ג. עולה:  $x > 1, x < -1$ , יורדת:  $-1 < x < 1, x \neq 0$       ד.  $(0.5,0), (2,0)$       ה.  $x=0$

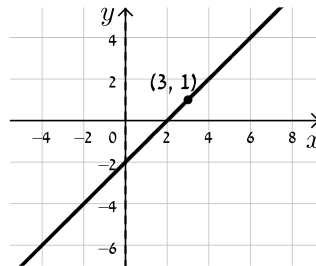
ו. להלן סקיצה:



**(26)** א.  $x \neq 3$       ב. אין      ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה

ד.  $(0,-2), (2,0)$       ה. אין, יש נקודת אי הגדרה ששיעוריה  $(3,1)$ .

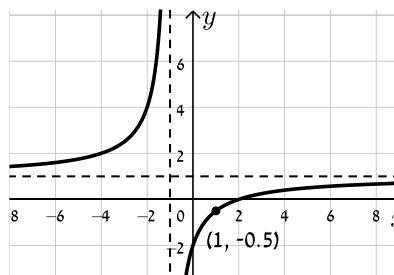
ו. להלן סקיצה:



**(27)** א.  $x \neq \pm 1$       ב. אין      ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה

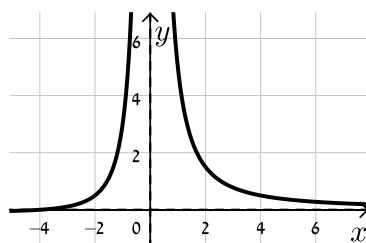
ד.  $(0,-2), (2,0)$       ה.  $y=1, x=-1$ , יש נקודת אי הגדרה:  $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ .

ו. להלן סקיצה:



28 א.  $f(x) = \frac{x+4}{x^2}$ ,  $a=1$  ב. עולה:  $-8 < x < 0$  יורדת:  $x < -8, x > 0$

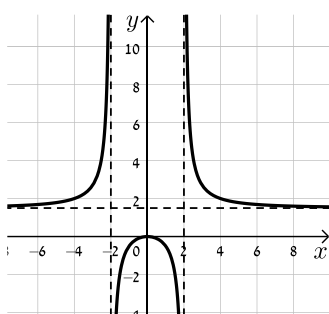
ג.  $(-4, 0)$  ד.  $x=0, y=0$



ה. להלן סקיצה:

29 א.  $x \neq \pm 2$  ב.  $\max(0, 0)$  ג. יורדת:  $x > 0, x \neq 2$  עולה:  $x < 0, x \neq -2$

ד.  $(0, 0)$  ה.  $x = \pm 2, y = 1.5$  ו. להלן סקיצה:



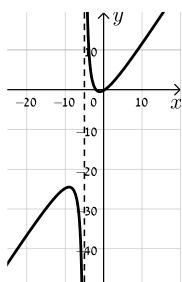
30 א.  $a = \pm 2$  ב.  $(1, 0), (0, 4)$

ג. המשיק:  $y = -4x + 4$  אשר עובר בנקודה  $(1, 0)$ . נקודת החיתוך:  $(1, 0)$ .

31 א.  $x \neq -5$  ב.  $\min(-1, -0.5), \max(-9, -24.5)$

ג. עולה:  $x > -1, x < -9$  יורדת:  $-9 < x < -1, x \neq -5$

ד.  $(-2, 0), (\frac{1}{3}, 0), (0, -0.2)$  ה.  $x = -5$  ו. להלן סקיצה:



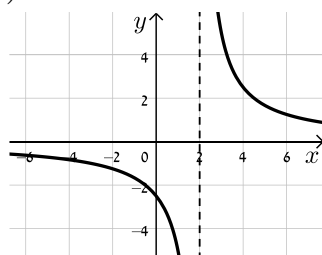
32 א.  $x \neq 1$  ב.  $x=1, y=1$  ג.  $(a, 0), (0, a)$  ד. i.  $a > 1$  ii.  $a = 2$

33 א.  $a = -3$  ב. i.  $x \neq 2$  ii.  $(0, -3)$  iii.  $\max(0, -3), \min(4, 5)$

ג.  $x < 2$  ד. iv.  $x = 2$  ה.  $-3 < k < 5$

34 א.  $A = -1$  ב.  $x \neq 2$  ד.  $(0, -2.5)$

ו. לא



ה. להלן סקיצה:

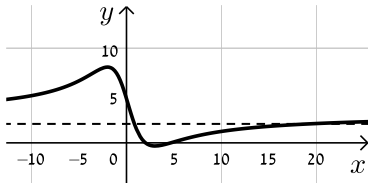
35 א.  $f(x) = \frac{3x^2 - 20x + 28}{x^2 + 6}$ ,  $a = 3$ . כל  $x$ .

ב.  $\min\left(3, -\frac{1}{3}\right)$ ,  $\max(-2, 8)$

ד.  $(2, 0)$ ,  $\left(0, 4\frac{2}{3}\right)$ ,  $\left(4\frac{2}{3}, 0\right)$

ו.  $k = 8$ ,  $-\frac{1}{3}$ ,  $3$

ג. עולה:  $x < -2$ ,  $x > 3$ , יורדת:  $-2 < x < 3$



ה. להלן סקיצה:

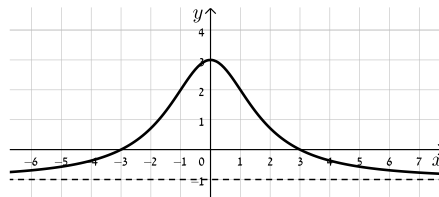
ה. באף נקודה.

ד.  $y = -1$

ג.  $(3, 0)$ ,  $(-3, 0)$

ב.  $k = -3$  36

ו. להלן סקיצה:



## חקירת פונקציות שורש:

### שאלות:

- (37)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{x-3}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:
- מציאת תחום ההגדרה.
  - מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
  - כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
  - מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
  - מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
  - שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- (38)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = (x-4)\sqrt{x-1}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:
- מציאת תחום ההגדרה.
  - מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
  - כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
  - מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
  - מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
  - שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- (39)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = x\sqrt{6-x}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:
- מציאת תחום ההגדרה.
  - מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
  - כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
  - מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
  - שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

40 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{4\sqrt{x}}{x^2+3}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

41 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

42 נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x^2}$ .

- א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות קיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

43 נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$ .

- א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- ב. האם ניתן להעביר משיק לגרף הפונקציה המקביל לציר ה- $x$ ? נמק והראה חישוב מתאים.
- ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ .
- ד. חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק והצירים.

(44) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}-1}$ .

- מהו תחום הגדרה של הפונקציה?
- כמה נקודות יש לגרף הפונקציה שהמשיק העובר דרכן מקביל לציר ה- $x$ ? מצא אותן.
- כתוב את משוואות המשיקים בנקודות שמצאת בסעיף הקודם.

(45) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום הגדרה.
- מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(46) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{ax+6}{\sqrt{9-x^2}}$ , פרמטר  $a$ .

- מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ . ידוע כי הוא מקביל לישר:  $3y-x=0$ .
- מצא את ערך הפרמטר  $a$ .
  - כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
  - מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
  - כתוב את התחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(47) נתונות שתי הפונקציות הבאות:  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+k}}$ ,  $g(x) = \frac{\sqrt{x-k}}{x}$  ( $k$  פרמטר חיובי).

- ידוע כי הפונקציות חותכות זו את זו בנקודה שבה:  $x=0.8$ .
- מצא את  $k$ .
  - האם הפונקציות נחתכות בנקודה נוספת מלבד לנקודה הנתונה? אם כן מצא אותה.
  - מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה שבה:  $x=0.52$ .

(48) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{kx}{\sqrt{k-x^2}}$ , פרמטר חיובי.

- א. ענה על הסעיפים הבאים:
- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה? (בטא באמצעות  $k$ ).
  - מהן האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה?
- ב. הראה כי הפונקציה עולה עבור כל ערך של  $k$  בתחום הגדרתה.
- ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ . (בטא באמצעות  $k$ ).
- ד. המשיק אשר מצאת בסעיף הקודם חותך את אחת האסימפטוטות של הפונקציה בנקודה A. ידוע כי שטח המשולש הכלוא בין המשיק, ציר ה- $x$  והאסימפטוטה הנ"ל הוא:  $4$  יח"ש  $S$ . מצא את ערך הפרמטר  $k$ .

(49) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x+2}{x+4}$ . מגדירים פונקציה נוספת:  $g(x) = \sqrt{f(x)}$ .

- א. כתוב בצורה מפורשת את הפונקציה  $g(x)$ .
- ב. לפניך מספר טענות המתייחסות לפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$ . קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:
- לפונקציות תחום הגדרה זהה.
  - שתי הפונקציות עולות בכל תחום הגדרתן.
  - שתי הפונקציות חותכות את ציר ה- $x$  באותה נקודה.
  - לשתי הפונקציות יש אסימפטוטה משותפת.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של כל פונקציה עם ציר ה- $y$ . אסף פתר את סעיפים א' ו-ב' והחליט לטעון את הטענה הבאה:
- היות והפונקציה  $g(x)$  מוגדרת להיות:  $g(x) = \sqrt{f(x)}$  אזי ניתן למצוא את שיעור ה- $y$  של כל נקודה שעל גרף הפונקציה  $f(x)$  ע"י כך שנמצא תחילה את שיעור ה- $y$  של הנקודה בעלת אותו שיעור  $x$  על הגרף של  $g(x)$  ונעלה אותה בריבוע.
- ד. האם אסף צודק? נמק בצורה איכותית (חישובים אינם נדרשים) את שיקולך.

50) לפניך הפונקציות הבאות:  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$ ,  $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$

א. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

i. לשתי הפונקציות יש את אותו תחום ההגדרה.

ii. לשתי הפונקציות יש נקודות קיצון הנמצאות על הישר:  $y = x$ .

iii. הפונקציות לא חותכות זו את זו.

מגדירים פונקציה נוספת והיא:  $h(x) = (g(x))^2$ .

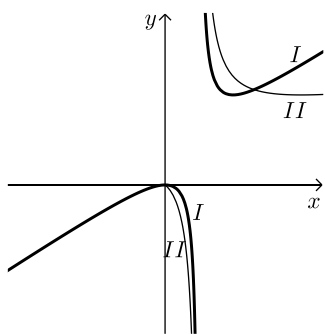
ב. כתוב באופן מפורש את הפונקציה החדשה:  $h(x)$ .

ג. האם תחום ההגדרה של הפונקציה  $h(x)$  זהה לשל  $g(x)$ ?

ד. באיור הסמוך ישנם שני גרפים.

קבע על סמך הסעיפים הקודמים איזו פונקציה כל גרף

מתאר מבין הפונקציות:  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$ . נמק את בחירותיך.



51) לפניך שלוש פונקציות:  $f(x) = x^2\sqrt{k-x^2}$ ,  $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{k-x^2}}$ ,  $h(x) = \frac{\sqrt{k-x^2}}{x^2}$ . ( $k > 0$ )

א. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

i. לפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$  תחום הגדרה זהה, השונה מתחום ההגדרה של  $h(x)$ .

ii. קיימת פונקציה אשר אינה חותכת את ציר ה- $x$  כלל.

iii. הפונקציות:  $h(x)$  ו- $g(x)$  הפוכות זו מזו בתחומי העלייה והירידה שלהן

(כאשר אחת עולה השנייה יורדת).

iv. לפונקציה:  $f(x)$  יש נקודת קיצון אחת בלבד.

מסמנים נקודה  $A(0, \sqrt{12})$  על ציר ה- $y$ . ידוע כי מרחקה מאחת מנקודות החיתוך

של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה- $x$  שאינה בראשית הוא:  $d = 6$ .

ב. מצא את  $k$ .

ג. מצא את נקודות הקיצון של גרף

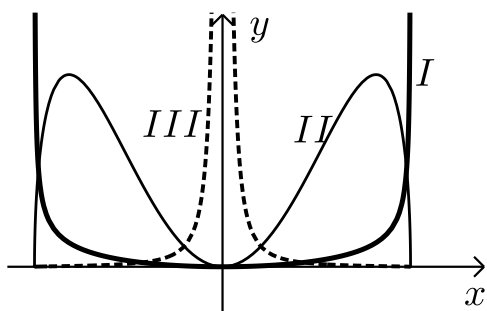
הפונקציה  $f(x)$  וקבע את סוגן.

ד. לפניך איור ובו מסורטטות הסקיצות של

שלושת הפונקציות.

קבע עפ"י הסעיפים הקודמים איזה גרף

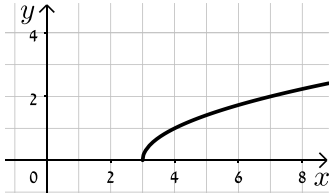
שייך לכל פונקציה.



**תשובות סופיות:**

**(37)** א.  $x \geq 3$     ב.  $\min(3,0)$  קצה    ג. הפונקציה עולה בכל ת.ה.

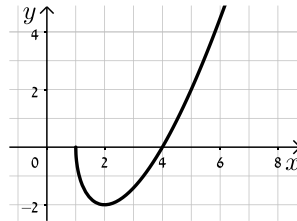
ד.  $(3,0)$     ה. אין.    ו. להלן סקיצה:



**(38)** א.  $x \geq 1$     ב.  $\max(1,0)$ ,  $\min(2,-2)$  קצה

ג. עולה:  $x > 2$ , יורדת:  $1 < x < 2$     ד.  $(1,0)$ ,  $(4,0)$     ה. אין.

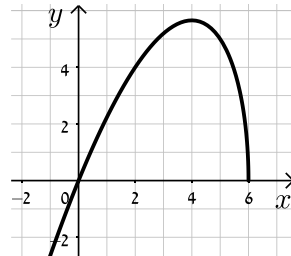
ו. להלן סקיצה:



**(39)** א.  $x \leq 6$     ב.  $\min(6,0)$ ,  $\max(4,4\sqrt{2})$  קצה

ג. עלייה:  $x < 4$ , ירידה:  $4 < x < 6$     ד.  $(6,0)$ ,  $(0,0)$

ה. להלן סקיצה:



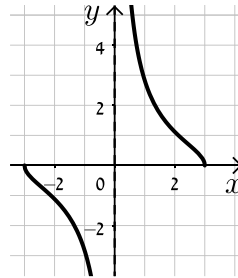
**(40)** א.  $x \geq 0$     ב.  $\min(0,0)$ ,  $\max(1,1)$  קצה

ג. עולה:  $0 < x < 1$ , יורדת:  $x > 1$     ד.  $(0,0)$     ה.  $y = 0$ .

ו. להלן סקיצה:

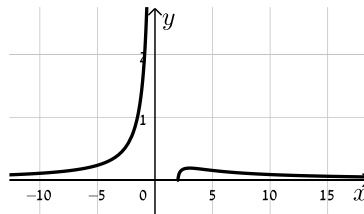


- (41)** א.  $-3 \leq x \leq 3$  וגם  $x \neq 0$       ב.  $\max(-3,0)$  קצה,  $\min(3,0)$  קצה  
 ג. עולה: אף  $x$ , יורדת:  $-3 \leq x \leq 3, x \neq 0$       ד.  $(-3,0), (3,0)$



ה.  $x=0$ .      ו. להלן סקיצה:

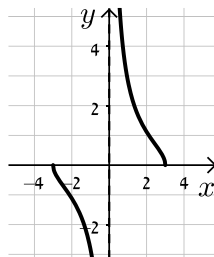
- (42)** א.  $x < 0, x \geq 2$       ב.  $\min(2,0), \max\left(3, \frac{1}{\sqrt{27}}\right)$       ג.  $(2,0)$       ד. להלן סקיצה:



- (43)** א.  $(2,0)$       ב. לא      ג.  $y = 2\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}$       ד.  $S = 4\sqrt{2}$

- (44)** א.  $x \neq 1, x \geq 0$       ב.  $(9,6)$       ג.  $y = 6$

- (45)** א.  $-3 \leq x \leq 3$  וגם  $x \neq 0$       ב.  $\max(-3,0)$  קצה,  $\min(3,0)$  קצה  
 ג. עולה: אף  $x$ , יורדת:  $-3 \leq x \leq 3$  וגם  $x \neq 0$       ד.  $(-3,0), (3,0)$



ה.  $x=0$ .      ו. להלן סקיצה:

- (46)** א.  $a=1$       ב.  $-3 < x < 3$       ג.  $(-1.5, \sqrt{3})$       ד. יורדת:  $-3 < x < -1.5$ , עולה:  $-1.5 < x < 3$

- (47)** א.  $k=0.48$       ב. כן,  $(0.6, 0.57)$       ג.  $y = 0.74x + 0.1352$

- (48)** א. i.  $-\sqrt{k} < x < \sqrt{k}$       ii.  $x = \pm\sqrt{k}$       ב.  $f'(x) = \frac{k^2}{(k-x^2)^{1.5}} > 0$       ג.  $y = \sqrt{k}x$       ד.  $k=4$

$$g(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x+4}} \quad \text{א. (49)}$$

ב. i. לא נכון      ii. נכון

$$f(x) : \left(0, \frac{1}{2}\right), g(x) : \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{ג.}$$

iii. נכון      iv. נכון

ד. אסף צודק.

$$h(x) = \frac{x^2}{x-1} \quad \text{ב.}$$

iii. נכון

א. i. לא נכון      ii. נכון      (50)

$$\text{I} = h(x), \text{II} = f(x) \quad \text{ד.}$$

$$h(x) : x \neq 1, \text{ג.}$$

iv. נכון

iii. נכון

ii. לא נכון

i. לא נכון      (51)

$$\text{ב. } k = 24 \quad \text{ג. } \min(0,0), \max(\pm 4, 32\sqrt{2})$$

$$\text{ד. } \text{I} = g(x), \text{II} = f(x), \text{III} = h(x)$$

## תחומי קעירות ונקודות פיתול:

### סיכום כללי:

#### תחומי קעירות – הגדרה:

- פונקציה  $f(x)$  קעורה כלפי מטה (קמורה) בתחום  $[x_0, x_1]$  אם לכל  $x$  בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מעל לגרף הפונקציה.  
כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מטה יש למצוא תחום שבו:  $f''(x) < 0$ .
- פונקציה  $f(x)$  קעורה כלפי מעלה (קעורה) בתחום  $[x_0, x_1]$  אם לכל  $x$  בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מתחת לגרף הפונקציה.  
כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מעלה יש למצוא תחום שבו:  $f''(x) > 0$ .

#### נקודת פיתול – הגדרות:

- נקודת פיתול היא נקודה שבה הפונקציה עוברת מתחום קעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה ולהיפך.
- נקודת פיתול מקיימת:  $f''(x) = 0$  כאשר ערך הנגזרת השנייה משנה את סימנו בתחום שלפני ואחרי הנקודה המאפסת אותו.
- בנקודת פיתול המשיק לגרף הפונקציה חותך אותה ולא רק משיק לה מכיוון אחד.

### שאלות:

(52) מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה:  $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2$ .

(53) מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה:  $f(x) = \frac{3x-2}{x^2}$ .

(54) מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה:  $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x-1}}$ .

(55) מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה:  $f(x) = x(x-2)^3$ .

56 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{a}{x^2 + b}$ ,  $a, b$  פרמטרים.

הנקודה  $(-1, 1)$  היא נקודת פיתול של הפונקציה.  
מצא את ערכי הפרמטרים  $a, b$ .

57 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + 2$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. מציאת נקודות פיתול.
- ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
- ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

58 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{2x}{x - \sqrt{x}}$ . חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. מציאת נקודות פיתול.
- ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
- ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

59) חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים :

- i. מציאת תחום הגדרה.
- ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
- iii. מציאת נקודות קיצון וקביעת סוגן.
- iv. מציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- v. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- vi. מציאת נקודות הפיתול של הפונקציה.
- vii. מציאת תחומי הקעירות של הפונקציה.
- viii. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad \text{ב.} \qquad f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad \text{ד.} \qquad f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)} \quad \text{ו.} \qquad f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad \text{ה.}$$

$$f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1} \quad \text{ח.} \qquad f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad \text{ז.}$$

הערה: בסעיפים ו ו-ז יש לבצע חקירה ללא סעיפים vi ו-vii.

**תשובות סופיות:**

52 (1,7), (2,16) , קעירות כלפי מעלה :  $x > 2$  או  $x < 1$  , קעירות כלפי מטה :  $1 < x < 2$  .

53 (2,1) , קעירות כלפי מעלה :  $x > 2$  , קעירות כלפי מטה :  $0 \neq x < 2$  .

54 קיצון :  $\min(2,4)$  , פיתול :  $\left(4, \frac{8}{\sqrt{3}}\right)$  .

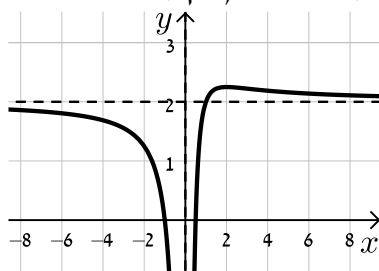
55 קיצון :  $\min\left(\frac{1}{2}, -\frac{27}{16}\right)$  , פיתול : (1,-1), (2,0) .

56 .  $a = 4, b = 3$

57 א.  $x \neq 0$  . ב.  $\max\left(2, 2\frac{1}{4}\right)$  . ג. עולה :  $0 < x < 2$  ; יורדת :  $x > 2, x < 0$  .

ד.  $\left(\frac{1}{2}, 0\right), (-1, 0)$  . ה.  $x = 0, y = 2$  . ו.  $\left(3, 2\frac{2}{9}\right)$  .

ז. קעירות כלפי מעלה :  $x > 3$  , קעירות כלפי מטה :  $0 \neq x < 3$  .  
ח. להלן סקיצה :

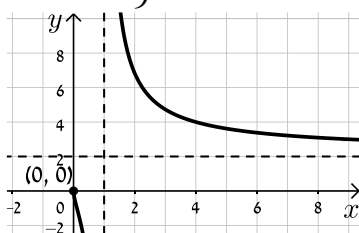


58 א.  $1 \neq x > 0$  . ב. אין . ג. יורדת בכל תחום הגדרתה .

ד. אין . ה.  $x = 1, y = 2$  נקודת אי הגדרה : (0,0) . ו.  $\left(\frac{1}{9}, -1\right)$  .

ז. קעירות כלפי מעלה :  $x > 1$  או  $0 < x < \frac{1}{9}$  , קעירות כלפי מטה :  $\frac{1}{9} < x < 1$  .

ח. להלן סקיצה :



59 א. i.  $x \neq 0$  . ii. (1,0) . iii.  $x = 0, y = 0$  . iv.  $\max(2, 0.25)$  .

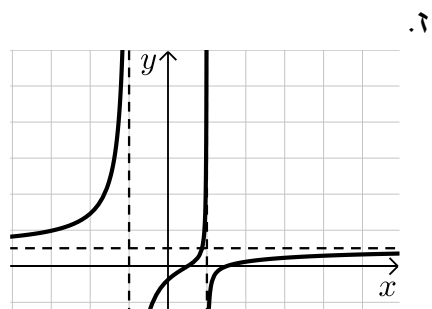
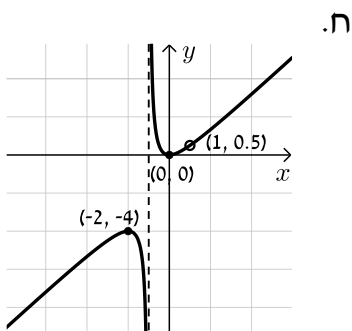
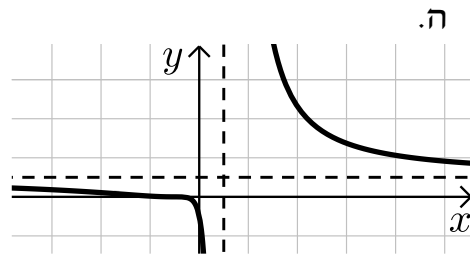
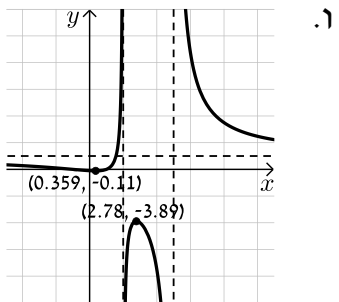
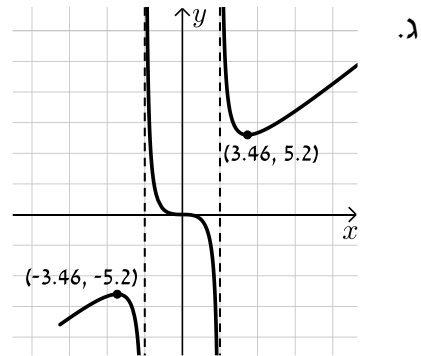
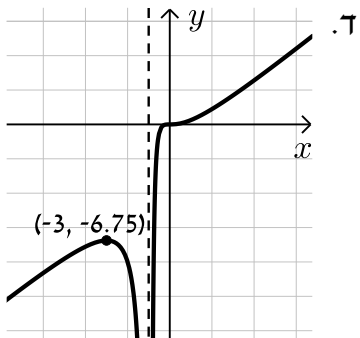
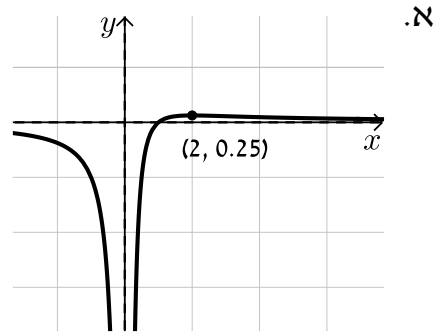
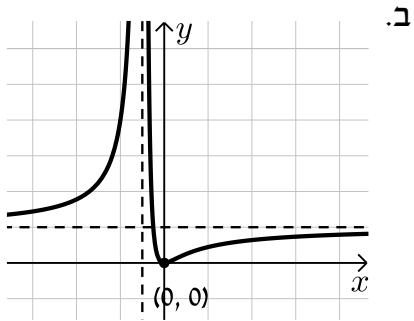
v. עולה :  $0 < x < 2$  , יורדת :  $x < 0, x > 2$  . vi.  $\left(3, \frac{2}{9}\right)$  .

vii. קעורה כלפי מעלה :  $x > 3$  , קעורה כלפי מטה :  $0 < x < 3, x < 0$  .

ב. i.  $x \neq -1$  . ii. (0,0) . iii.  $x = -1, y = 2$  . iv.  $\min(0,0)$  .

- v. עולה:  $x < -1$ ,  $x > 0$ , יורדת:  $-1 < x < 0$  .vi  $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{9}\right)$
- vii. קעורה כלפי מעלה:  $-1 < x < \frac{1}{2}$ , קעורה כלפי מטה:  $x < -1$ ,  $x < \frac{1}{2}$
- ג. i.  $x \neq \pm 2$  .ii  $(0,0)$  .iii  $x = \pm 2$
- iv.  $\min(\sqrt{12}, 5.2)$ ,  $\max(-\sqrt{12}, -5.2)$
- v. עולה:  $x > \sqrt{12}$ ,  $x < -\sqrt{12}$ , יורדת:  $2 < x < \sqrt{12}$ ,  $-2 < x < 2$ ,  $-\sqrt{12} < x < -2$  .vi  $(0,0)$
- vii. קעורה כלפי מעלה:  $x > 2$ ,  $-2 < x < 0$ , קעורה כלפי מטה:  $0 < x < 2$ ,  $x < -2$
- ד. i.  $x \neq -1$  .ii  $(0,0)$  .iii  $x = -1$  .iv  $\max(-3, -6.75)$
- v. עולה:  $x > -1$ ,  $x < -3$ , יורדת:  $-3 < x < -1$  .vi  $(0,0)$
- vii. קעורה כלפי מעלה:  $x > 0$ , קעורה כלפי מטה:  $-1 < x < 0$ ,  $x < -1$
- ה. i.  $x \neq 1$  .ii  $(-1,0), (0,-1)$  .iii  $x = 1, y = 1$  .iv אין
- v. יורדת בכל ת.ה. .vi  $\left(-3, \frac{1}{8}\right), (-1,0)$
- vii. קעורה כלפי מעלה:  $-3 < x < -1$ ,  $x > 1$ , קעורה כלפי מטה:  $-1 < x < 1$ ,  $x < -3$
- ו. i.  $x \neq 2, 5$  .ii  $(0,-0.1), (-1,0), (1,0)$  .iii  $x = 2, x = 5, y = 1$
- iv.  $\min(0.359, -0.11)$ ,  $\max(2.78, -3.89)$
- v. עולה:  $2 < x < 2.78$ ,  $0.359 < x < 2$ , יורדת:  $x > 5$ ,  $2.78 < x < 5$ ,  $x < 0.359$
- ז. i.  $x \neq \pm 2$  .ii  $(3,0), (1,0), (0,-0.75)$  .iii  $x = \pm 2, y = 1$
- iv. אין .v יורדת בכל ת.ה.
- ח. i.  $x \neq \pm 1$  .ii  $(0,0)$  .iii  $x = -1$  .iv  $\min(0,0)$ ,  $\max(-2,-4)$
- v. עולה:  $x > 0$ ,  $x < -2$ ,  $x \neq 1$ , יורדת:  $-1 < x < 0$ ,  $-2 < x < -1$
- vi. אין .vii קעורה כלפי מעלה:  $x > -1$ ,  $x \neq 1$ , קעורה כלפי מטה:  $x < -1$

**סקיצות:**



## חקירת פונקציה עם פרמטר:

### סיכום כללי:

סיווג נקודות קיצון באמצעות  $y''$  :

אם הנקודה  $A(x_1, y_1)$  היא נקודת קיצון אז :

- אם  $f''(x_1) > 0$  הנקודה  $A(x_1, y_1)$  היא נקודת מינימום.
- אם  $f''(x_1) < 0$  הנקודה  $A(x_1, y_1)$  היא נקודת מקסימום.

### שאלות:

(1) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה:  $f(x) = x^3 - 12x$ .

(2) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה:  $f(x) = x^2 - 6x - 16$ .

(3) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה:  $f(x) = x^3 - 3b^2x$ ,  $b > 0$ , פרמטר. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(4) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{2x}{a^2 + x^2}$ ,  $(a > 0)$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(5) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1-x^2}{(x-b)^2}$ ,  $(b > 1)$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(6) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 4x\sqrt{b^2 - x^2}$ ,  $(b > 0)$ .

חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(7) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 - m}{ax - 4}$ ,  $a, m$  פרמטרים קבועים כאשר:  $a > 0$ .

ידוע כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- $y$ .

- א. מצא את הערך של הפרמטר  $m$ .
- ב. הצב את הערך של  $m$  שמצאת בסעיף א' והבא באמצעות  $a$  את:
  - i. תחום ההגדרה של הפונקציה.
  - ii. נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
  - iii. האסימפטוטות לגרף הפונקציה המקבילות לצירים.
- ג. סרטט סקיצה וסמן בה את נקודות הקיצון ואת משוואות האסימפטוטות שהבעת באמצעות  $a$  בסעיף הקודם.
- ד. ידוע כי נקודת הקיצון שאינה על ציר ה- $y$  נמצאת במרחקים שווים מהצירים. מצא את הערך של הפרמטר  $a$ .
- ה. נתון הישר:  $y = k$ . מצא עבור אילו ערכים של  $k$  אין לישר ולגרף הפונקציה נקודות משותפות כלל.

**תשובות סופיות:**

(1)  $\min(2, -16)$  ,  $\max(-2, 16)$

(2)  $\min(3, -25)$

(3)  $\min(b, -2b^3)$  ,  $\max(-b, 2b^3)$

(4) א. כל  $x$  ב.  $\max\left(a, \frac{1}{a}\right)$  ,  $\min\left(-a, -\frac{1}{a}\right)$

ג. עולה:  $-a < x < a$  יורדת:  $x < -a$  ,  $x > a$

ד.  $(0, 0)$  ה. אסימפטוטה אופקית:  $y = 0$

(5) א.  $x \neq b$  ב.  $\max\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{b^2 - 1}\right)$  ג. עולה:  $x > b$  ,  $x < \frac{1}{b}$  יורדת:  $\frac{1}{b} < x < b$

ד.  $(1, 0)$  ,  $(-1, 0)$  ,  $\left(0, \frac{1}{b^2}\right)$  ה.  $x = b$  ,  $y = -1$

(6) א.  $-b \leq x \leq b$  ב.  $\min\left(-\frac{b}{\sqrt{2}}, -2b^2\right)$  ,  $\max\left(\frac{b}{\sqrt{2}}, 2b^2\right)$  ,  $\min(-b, 0)$  קצה,

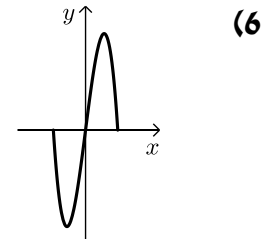
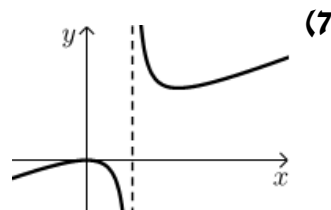
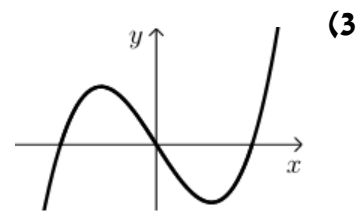
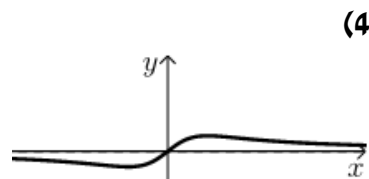
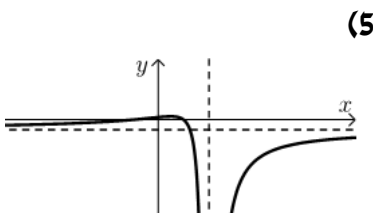
ג. עולה:  $-\frac{b}{\sqrt{2}} < x < \frac{b}{\sqrt{2}}$  , יורדת:  $\frac{b}{\sqrt{2}} < x < b$  ,  $-b < x < -\frac{b}{\sqrt{2}}$

ד.  $(b, 0)$  ,  $(-b, 0)$  ,  $(0, 0)$

(7) א.  $m = 0$  ב.  $x \neq \frac{4}{a}$  ב. ii.  $\max(0, 0)$  ,  $\min\left(\frac{8}{a}, \frac{16}{a^2}\right)$

ג. iii.  $x = \frac{4}{a}$  ד.  $a = 2$  ה.  $0 < k < 4$

**סקיצות לשאלות:**



## פונקציות ללא תבנית מפורשת:

**סיכום כללי:**

**הגדרת פונקציה:**

פונקציה  $f$  היא התאמה בין ערך  $x$  לערך  $y$  ומסומנת באופן הבא:  $f: x \rightarrow y$ .  
 כך שלכל  $x$  מתאים ערך אחד בלבד של  $y$ . סימון אחר:  $y = f(x)$ .  
 הנגזרת של פונקציה  $f(x)$  מסומנת  $f'(x)$ .

**כללי הגזירה לפי כלל השרשרת:**

- סימון הנגזרת:  $(f(x))' = f'(x)$
- גזירה של פונקציה בחזקה:  $(f^2(x))' = 2f(x)f'(x)$
- גזירה של הרכבת פונקציות:  $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

**שאלות:**

**(1)** הפונקציה  $f(x)$  מקיימת:  $f(1) = 3$  ו- $f'(1) = -2$ .  
 חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $f(1) + 4$

ב.  $f'(1) + 4$

ג.  $\frac{f(1)+1}{f'(1)-1}$

ד.  $\sqrt{f(1)+f'(1)}$

**(2)** נתונה פונקציה  $f$  המקיימת:  $f(4) = 0$  ו- $f'(4) = 1$ .

מגדירים:  $g(x) = 2x + f(2x)$ .

חשב את  $g(2)$  ואת  $g'(2)$ .

- (3) נתונה פונקציה המקיימת:  $f(8) = -1$  ו- $f'(8) = 1$ .
- א. נתון:  $g(x) = x^2 \sqrt{f(4x) + f'(x+6)}$ . חשב את  $g(2)$ .
- ב. נתון:  $h(x) = \frac{f(x+2) + x + 2}{f'(14-x) - 14 + x}$ . חשב את  $h(6)$ .
- (4) נתונה פונקציה המקיימת:  $f(9) = -4$ ,  $f'(9) = 3$ .
- מגדירים:  $g(x) = f^2(3x) + f'(x^2)$ . חשב את  $g(3)$ .
- (5) פונקציה  $f$  מקיימת:  $f(4) = 2$ ,  $f'(4) = 1$ .
- מגדירים:  $g(x) = f^2(x) + f(x) + x$ .
- חשב את  $g(4)$  ואת  $g'(4)$ .
- (6) פונקציה  $f$  מקיימת:  $f(1) = -3$ ,  $f'(1) = 3$ . מגדירים:  $g(x) = \frac{x \cdot f(x)}{x + f(x)}$ .
- חשב את  $g(1)$  ואת  $g'(1)$ .
- (7) פונקציה  $f$  מקיימת:  $f(-2) = 6$ ,  $f'(-2) = 2$ . מגדירים:  $g(x) = \sqrt{f^2(x) + 1}$ .
- חשב את  $g(-2)$  ואת  $g'(-2)$ .
- (8) פונקציה  $f$  מקיימת:  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$ ,  $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}$ . מגדירים:  $g(x) = 3x \cdot f(2x)$ .
- חשב את  $g\left(\frac{1}{4}\right)$  ואת  $g'\left(\frac{1}{4}\right)$ .
- (9) פונקציה  $f$  מקיימת:  $f(6) = \frac{2}{3}$ ,  $f'(6) = -\frac{3}{2}$ . מגדירים:  $g(x) = \frac{x+3+f(x+3)}{f(2x)+3}$ .
- חשב את  $g(3)$  ואת  $g'(3)$ .

**(10)** נתונה פונקציה המקיימת:  $f(8) = -3$ . מגדירים:  $g(x) = \frac{f(4x)+1}{f(x+6)+2}$ .

א. חשב את  $g(2)$ .

ב. חשב את  $f'(8)$  אם ידוע כי:  $g'(2) = 1$ .

ג. חשב את  $f'(8)$  אם ידוע כי:  $g'(2) = (f'(8))^2$  וכי  $f'(8) < 0$ .

**(11)** נתונה פונקציה המקיימת:  $f(3) = -2$ .

מגדירים:  $g(x) = \frac{x^2 \cdot f(x-2)}{f(2x-7)}$  וידוע כי  $g'(5) = -15$ .

חשב את  $g(5)$  ואת  $f'(3)$ .

**(12)** נתונה פונקציה שמקיימת:  $f(4) = \frac{1}{2}$ .

מגדירים:  $g(x) = x^2 \cdot f(x^2) + f'^2(x^2)$ .

א. הבע את  $g'(x)$  באמצעות  $f$ .

ב. חשב את  $g(-2)$  ואת  $g(2)$  אם ידוע כי  $f'(4) = 1$ .

ג. חשב את  $f'(4)$  אם ידוע כי  $g'(2) = 11$  ו-  $f''(4) = \frac{1}{4}$ .



## מתמטיקה 0

פרק 17 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקציות טריגונומטריות

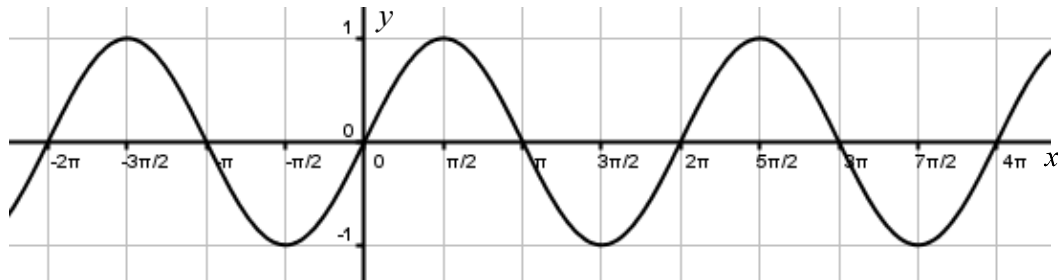
תוכן העניינים

294	1. הגדרות כלליות
296	2. גזירה של פונקציות טריגונומטריות
298	3. שאלות עם משיקים
300	4. מציאת תחום ההגדרה של פונקציות טריגונומטריות
301	5. מציאת נקודות קיצון
302	6. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים
303	7. מציאת נקודות פיתול ותחומי קעירות
304	8. חקירת פונקציה טריגונומטרית

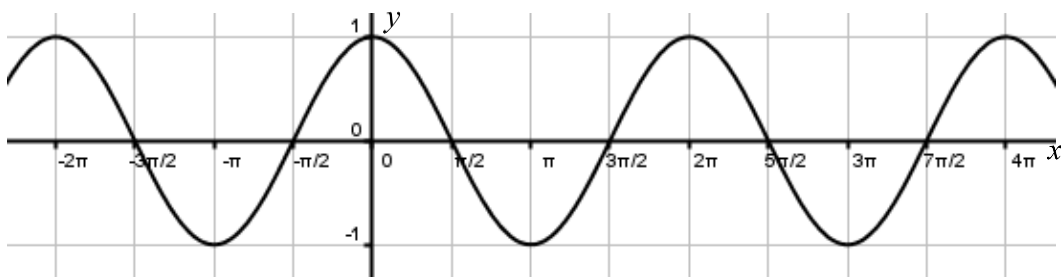
## הגדרות כלליות:

### סיכום כללי:

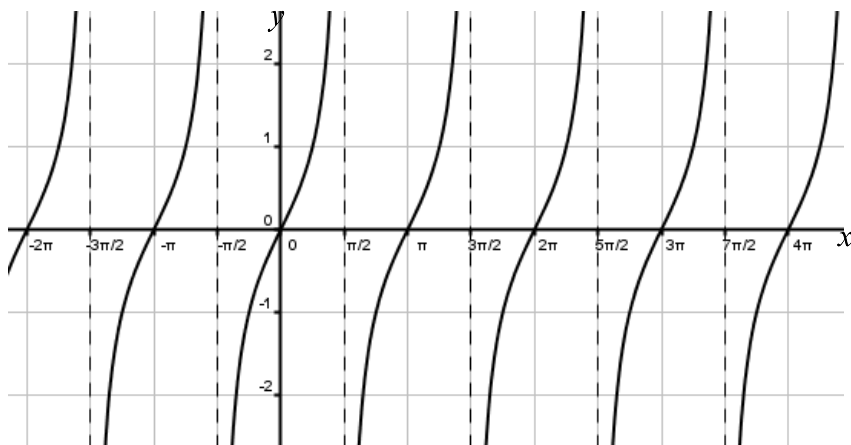
תיאור גרפי של פונקציית הסינוס  $y = \sin x$ :



תיאור גרפי של פונקציית הקוסינוס  $y = \cos x$ :



תיאור גרפי של פונקציית הטנגנס  $y = \tan x$ :



**הנגזרות הטריגונומטריות היסודיות:**

הנגזרת	הפונקציה
$y' = \cos x$	$y = \sin x$
$y' = -\sin x$	$y = \cos x$
$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = \tan x$
$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$y = \cot x$

**זוגיות של פונקציות:**

- פונקציה  $f(x)$  תקרא זוגית אם היא מקיימת את התכונה הבאה:  $f(x) = f(-x)$ .
- פונקציה  $f(x)$  תקרא אי-זוגית אם היא מקיימת את התכונה הבאה:  $f(x) = -f(-x)$ .
- פונקציה אשר אינה מקיימת אף אחת מהתכונות הנ"ל אינה זוגית ואינה אי-זוגית.

**מחזוריות של פונקציות:**

(1) פונקציה  $f(x)$  תיקרא מחזורית במחזור  $T$  אם היא מקיימת:  $f(x+T) = f(x)$  לכל  $x$  בתחום הגדרתה.

(2) מחזור של פונקציות טריגונומטריות:

- הפונקציה  $f(x) = \sin x$  מחזורית במחזור  $T = 2\pi$  שכן:  $\sin(x+2\pi) = \sin x$ .
- הפונקציה  $f(x) = \cos x$  מחזורית במחזור  $T = 2\pi$  שכן:  $\cos(x+2\pi) = \cos x$ .
- הפונקציה  $f(x) = \tan x$  מחזורית במחזור  $T = \pi$  שכן:  $\tan(x+\pi) = \tan x$ .
- הפונקציה  $f(x) = \cot x$  מחזורית במחזור  $T = \pi$  שכן:  $\cot(x+\pi) = \cot x$ .

## גזירה של פונקציות טריגונומטריות:

### שאלות:

(1) גזור את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = \sin x + 3 \cos x + x$

ג.  $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}$

ב.  $f(x) = 2x \sin x + 4 \tan x$

(2) גזור את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = \sin 3x + 2 \cos 5x$

ב.  $f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x}$

(3) גזור את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = \sin^3 x$

ג.  $f(x) = \sin^2 x$

ה.  $f(x) = \cos^2 2x$

ב.  $f(x) = 2 \cos^4 x$

ד.  $f(x) = \sin^3 2x$

ו.  $f(x) = \tan^2 4x$

(4) גזור את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = \sqrt{\sin 3x}$

ב.  $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$

(5) גזור את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$

ג.  $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$

ב.  $f(x) = \sin^4 2x - \cos^4 2x$

**תשובות סופיות:**

$$\frac{\cos x}{(1 + \sin x)^2} \cdot \lambda \quad 2 \sin x + 2x \cos x + \frac{4}{\cos^2 x} \cdot \beta \quad \cos x - 3 \sin x + 1 \cdot \aleph \quad (1)$$

$$\cdot -\frac{2}{1 + \sin 2x} \cdot \beta \quad 3 \cos 3x - 10 \sin 5x \cdot \aleph \quad (2)$$

$$\sin 2x \cdot \lambda \quad -8 \cos^3 x \sin x \cdot \beta \quad 3 \sin^2 x \cdot \cos x \cdot \aleph \quad (3)$$

$$\cdot \frac{8 \tan 4x}{\cos^2 4x} \cdot \lambda \quad -2 \sin 4x \cdot \eta \quad 6 \sin^2 2x \cos 2x \cdot \delta$$

$$\cdot \frac{\cos^2 2x + 1}{\cos 2x \sqrt{\cos 2x}} \cdot \beta \quad \frac{3 \cos 3x}{2 \sqrt{\sin 3x}} \cdot \aleph \quad (4)$$

$$\cdot -\sin 4x \cdot \lambda \quad 4 \sin 4x \cdot \beta \quad 2 \sin 2x \cdot \aleph \quad (5)$$

## שאלות עם משיקים:

### שאלות:

(6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה:  $f(x) = \cos x$  בנקודה  $A\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

(7) מצא את משוואת המשיק לפונקציה:  $f(x) = \sin 2x$  בנקודה שבה  $x = \frac{\pi}{2}$ .

(8) מצא את משוואת המשיק לפונקציה:  $f(x) = \tan 3x$  בנקודה שבה  $x = \frac{\pi}{9}$ .

(9) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה:  $f(x) = 4\sin^2 x$  בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר  $y = 1$  בתחום  $[0, \pi]$ .

(10) שיפוע המשיק לפונקציה:  $f(x) = \sqrt{\sin x + a}$ ,  $a$  (פרמטר) בנקודה שבה  $y = 1$

בתחום  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  הוא  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ .

מצא את ערך הפרמטר  $a$ .

(11) נתונה הפונקציה:  $f(x) = a\sin^2 x - 5\sin x + ax$ ,  $a$  (פרמטר) בתחום:  $0 \leq x \leq \pi$ .

ידוע כי הישר:  $y = ax - 2$  חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = \frac{\pi}{6}$ .

א. מצא את  $a$  וכתוב את הפונקציה  $f(x)$ .

ב. מצא נקודה על גרף הפונקציה בתחום הנתון שבה שיפוע המשיק הוא:  $m = 2$ .

ג. האם קיימות נקודות נוספות בתחום הנתון ששיפוע המשיק דרכן הוא 2? נמק את תשובתך.

ד. כתוב את משוואת המשיק העובר דרך הנקודה שמצאת.

**(12)** נתונות הפונקציות הבאות:  $f(x) = x^2 + \cos^2 x$ ,  $g(x) = x^2 + \sin^2 x$ .

א. הוכח כי ההפרש:  $f(x) - g(x)$  שווה ל- $\cos 2x$ .

ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות בתחום:  $-\pi < x < \pi$ .

ג. ישר  $x = t$ ,  $(0 < t < 1)$  חותך את הגרפים בנקודות A ו-B ומהן מעבירים משיקים

לפונקציות. ידוע כי ההפרש בין שיפוע המשיק של גרף הפונקציה  $g(x)$  לשיפוע

המשיק של גרף הפונקציה  $f(x)$  הוא 1.

מצא את כל הערכים האפשריים עבור  $t$ .

### תשובות סופיות:

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (6)$$

$$y = -2x + \pi \quad (7)$$

$$y = 12x - \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3} \quad (8)$$

$$y = 2\sqrt{3}x - \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + 1, y = -2\sqrt{3}x + \frac{5\pi\sqrt{3}}{3} + 1 \quad (9)$$

$$a = \frac{1}{2} \quad (10)$$

$$f(x) = 2\sin^2 x - 5\sin x + 2x, a = 2. \text{ א. } \left(\frac{\pi}{2}, \pi - 3\right). \text{ ב. } \left(\frac{\pi}{2}, \pi - 3\right). \text{ ג. לא. } \tau. y = 2x - 3. \quad (11)$$

$$\left(-\frac{3\pi}{4}, 6.05\right), \left(-\frac{\pi}{4}, 1.11\right), \left(\frac{3\pi}{4}, 6.05\right), \left(\frac{\pi}{4}, 1.11\right). \text{ ב. } t = \frac{\pi}{12}. \text{ ג. } \quad (12)$$

## מציאת תחום ההגדרה של פונקציות טריגונומטריות:

שאלות:

13 מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות בתחום הנתון:

ב.  $f(x) = \frac{1}{\sin x - \cos x}$ ,  $[-\pi, \pi]$

א.  $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos 2x}$ ,  $[0, 2\pi]$

ג.  $f(x) = \tan x$ ,  $[0, 2\pi]$

תשובות סופיות:

ב.  $-\pi \leq x \leq \pi$  וגם  $x \neq \frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}$

13 א.  $0 \leq x \leq 2\pi$  וגם  $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

ג.  $0 \leq x \leq 2\pi$  וגם  $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

## מציאת נקודות קיצון:

### שאלות:

14 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה:  $f(x) = \sin x + \cos x$  בתחום:  $[0, 2\pi]$ .

15 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה:  $f(x) = \sin x - \frac{x}{2}$  בתחום:  $[0, 2\pi]$ .

16 מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}$  בתחום:  $[0, 2\pi]$ .

17 מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{1}{3} \sin^3 x - 2 \sin x$  בתחום:  $[0, 1.5\pi]$ .

18 לפונקציה:  $f(x) = a \sin x + b \sin^3 x$  (פרמטרים  $a, b$ ) יש נקודת קיצון ששיעוריה  $\left(\frac{7\pi}{6}, -1\right)$ . מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

### תשובות סופיות:

14 קצה  $\max(2\pi, 1)$ ,  $\min\left(\frac{5}{4}\pi, -\sqrt{2}\right)$ ,  $\max\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ , קצה  $\min(0, 1)$

15 קצה  $\max(2\pi, -\pi)$ ,  $\min\left(\frac{5}{3}\pi, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{6}\pi\right)$ ,  $\max\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$ , קצה  $\min(0, 0)$

16 קצה  $\min(2\pi, -1)$ , קצה  $(0, -1)$ , קצה  $\max\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right)$  מוחלט.

17  $\max\left(\frac{3}{2}\pi, 2\frac{2}{15}\right)$ ,  $\min\left(\frac{\pi}{2}, -2\frac{2}{15}\right)$

18  $b = -4$ ,  $a = 3$

## מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים:

שאלות:

(19) מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{\sin 3x}$  בתחום:  $[0, \pi]$ .

(20) מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}$  בתחום:  $[0, \pi]$ .

(21) מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה:  $f(x) = \tan x$  בתחום:  $[-\pi, \pi]$ .

תשובות סופיות:

(19)  $x = 0, x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}, x = \pi$

(20)  $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$

(21)  $x = \frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{2}$

## מציאת נקודות פיתול ותחומי קעירות:

שאלות:

22) מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה של הפונקציה  $f(x) = \sin^2 x - 2 \sin x$  בתחום  $[0, 2\pi]$ .

תשובות סופיות:

22) נקודות פיתול:  $\left(\frac{7}{6}\pi, 1\frac{1}{4}\right), \left(\frac{11}{6}\pi, 1\frac{1}{4}\right)$  קעור מעלה:  $0 < x < \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi < x < 2\pi$   
 קעור מטה:  $\frac{7}{6}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$

## חקירת פונקציה טריגונומטרית:

### שאלות:

**(23)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = x + 2\cos x$  בתחום  $[0, 2\pi]$ .

חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- מציאת נקודות פיתול.
- מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקציה.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(24)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$  בתחום  $[0, \pi]$ .

חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  בתחום הנתון.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(25)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = 4\sin 2x - 2$  בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ .

- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מעבירים את הישר  $y = k$  היעזר בסקיצה ומצא לאילו ערכי  $k$  הישר יחתוך את גרף הפונקציה בשתי נקודות בדיוק.
- העבירו ישר המשיק לפונקציה בנקודת המקסימום המוחלט שלה. כמו כן העבירו מנקודה זו אנך לציר  $x$ . מצא את שטח המלבן הנוצר על ידי הצירים, המשיק והאנך.

**(26)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \cos^2 x - \cos x - 2$  בתחום:  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(27)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \cos x + \frac{1}{m} \sin mx$ ,  $1 < m < 3$ , ( $m$  פרמטר).

הנגזרת של הפונקציה מתאפסת כאשר:  $x = -\frac{\pi}{2}$ .

- מצא את ערך הפרמטר  $m$ .
- האם הנקודה שבה:  $x = -\frac{\pi}{2}$  היא נקודת קיצון? אם כן קבע את סוגה. אם לא נמק מדוע.
- מצא כמה נקודות קיצון מקומיות יש לגרף הפונקציה בתחום:  $0 < x < 2\pi$ .
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  בתחום הנתון.

**(28)** נתונה הפונקציה הבאה:  $y = \cos x \cdot (\sin x + 1)$  בתחום:  $0 \leq x \leq 1.5\pi$ .

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- כמה פתרונות יש למשוואה:  $\cos x \cdot (\sin x + 1) = 1$  בתחום הנתון?

**(29)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$ .

- מצא בתחום  $[0, \pi]$  את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה ואת נקודות הקיצון שלה.
- הוכח שהפונקציה זוגית.
- שרטט את הפונקציה בתחום  $[-\pi, \pi]$ .

**(30)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = 4x - 3 \tan x$  בתחום  $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ .

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
- מציאת אסימפטוטות אנכיות.
- מציאת נקודות פיתול.
- מציאת תחומי קעירות כלפי מעלה ומטה.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(31)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \tan 2x - 8 \sin 2x$  בתחום:  $-0.25\pi < x < 0.25\pi$ .

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
- כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה בתחום הנתון.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

**(32)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \tan(x^2 - 4x)$  בתחום  $[0, 4]$ .

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(33)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = x \cos x - x$  בתחום:  $-3\pi \leq x \leq 3\pi$ .

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- ענה על הסעיפים הבאים:

i. הראה כי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  הנגזרת של הפונקציה מתאפסת.

- ii. ידוע גם כי:  $f'(-3.67) = 0$ ,  $f'(3.67) = 0$  וכי אין נקודות נוספות בתחום הנתון שבהן הנגזרת מתאפסת. קבע אלו נקודות, מבין נקודות החיתוך שמצאת, הן נקודות קיצון ואלו אינן נקודות קיצון. מצא את סוג הקיצון בכל מקרה.

**(34)** נתונה הפונקציה:  $y = (\cos x + k)^2$ , פרמטר, בתחום:  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = \frac{2\pi}{3}$ .

- מצא את  $k$  וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודת המקסימום שאיננה מוחלטת בתחום הנתון.
- האם יש לגרף הפונקציה נקודות מינימום שאינן מוחלטות? אם כן מהן?

**(35)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = m \sin x + k \cos^2 x$ , ( $m$  פרמטר).

מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = \pi$  שמשוואתו:  $y = -6x + 6\pi + \sqrt{7}$ .

- מצא את ערכי הפרמטרים  $k$  ו- $m$ .
- מצא את נקודות הקיצון בתחום:  $-0.5\pi \leq x \leq 1.5\pi$ .
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה וקבע עפ"י הסקיצה בכמה נקודות גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$  בתחום הנ"ל.

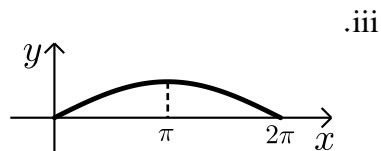
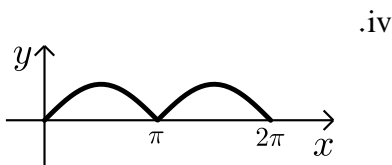
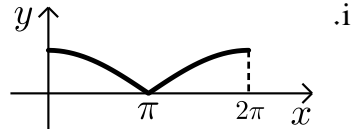
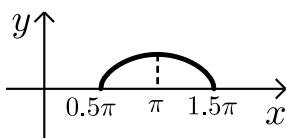
**(36)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \tan x + kx$ , ( $k$  פרמטר) בתחום:  $0 \leq x \leq \pi$ .

- מצא את האסימפטוטה האנכית של הפונקציה בתחום הנתון.
- הפונקציה:  $g(x) = \tan^2 x + kx$  חותכת את הפונקציה  $f(x)$  בשתי נקודות החיתוך שלה עם ציר ה- $x$  בתחום הנתון.
- מצא את ערך הפרמטר  $k$ , ( $k \neq 0$ ).
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  בתחום הנתון וקבע את סוגן.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

37) לפניך הפונקציות הבאות:  $f(x) = \sqrt{-\cos x}$ ,  $g(x) = \sqrt{\cos x + 1}$ .

הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת בתחום  $0.5\pi \leq x \leq 1.5\pi$  והפונקציה  $g(x)$  מוגדרת בתחום  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

- א. האם הגרפים חותכים את ציר ה- $x$  בתחום הנתון? הראה חישוב מתאים.
- ב. האם הגרפים חותכים זה את זה בתחום הנתון? אם כן מצא את נקודות החיתוך.
- ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  בתחום הנתון וקבע את סוגה.
- ד. לפניך ארבעה איורים: i, ii, iii, iv. קבע על סמך הסעיפים הקודמים איזה איור מתאר את הגרף של  $f(x)$  ואיזה מתאר את הגרף של  $g(x)$ . נמק.



**תשובות סופיות:**

**(23) א.**  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

ב.  $\max(2\pi, 2\pi + 2)$  קצה,  $\min\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)$ ,  $\min\left(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}\right)$  קצה,  $\min(0, 2)$  קצה.

ג. תחומי עלייה:  $\frac{5\pi}{6} < x < 2\pi$  או  $0 < x < \frac{\pi}{6}$ , תחומי ירידה:  $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$ .

ד.  $(0, 2)$ . ה. אין. ו.  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ .

ז. קעירות כלפי מעלה:  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$ , קעירות כלפי מטה:  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$  או  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .

**(24) א.**  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ;  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ . ב.  $\min\left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right)$ .

ג. תחומי עלייה:  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ,  $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ , תחומי ירידה:  $0 < x < \frac{\pi}{4}$ .

ד.  $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$ . ה. אנכית:  $x = \pi$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x = 0$ .

**(25) א.**  $(0, -2)$ ,  $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$ ,  $\left(\frac{5}{12}\pi, 0\right)$ .

ב.  $\min(0, -2)$ ,  $\max\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$ ,  $\min\left(\frac{3\pi}{4}, -6\right)$ ,  $\max(\pi, -2)$ .

ד.  $-6 < k < 2$  וגם  $k \neq -2$ . ה.  $\frac{\pi}{2}$ .

**(26) א.**  $(\pi, 0)$ ,  $(0, -2)$ .

ב.  $\max(0, -2)$ ,  $\min\left(\frac{\pi}{3}, -2.25\right)$ ,  $\max(\pi, 0)$ ,  $\min\left(1\frac{2}{3}\pi, -2.25\right)$ ,  $\max(2\pi, -2)$ .

ג. עולה:  $\frac{\pi}{3} < x < \pi$ ,  $1\frac{2}{3}\pi < x < 2\pi$ ; יורדת:  $\pi < x < 1\frac{2}{3}\pi$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{3}$ .

**(27) א.**  $m = 2$ . ב. נקודת פיתול. ג. 2 נקודות.

ד.  $(0.5\pi, 0)$ ,  $(1.5\pi, 0)$ .

**(28) א.**  $(0, 1)$ ,  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ,  $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ . ב.  $(0, 1)$ ,  $\left(\frac{\pi}{6}, 1.29\right)$ ,  $\left(\frac{5}{6}\pi, -1.29\right)$ ,  $(1.5\pi, 0)$ .

ד. 2 פתרונות.

**(29) א.** חיתוך:  $(0, 0)$ ,  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ , קיצון:  $\min(\pi, -2)$ , קצה:  $\min(0, 0)$ ,  $\max\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4}\right)$ .

$$(30) \text{ א. } -\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \text{ וגם } x \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ב. קצה } \min\left(\frac{2}{3}\pi, 13.57\right), \max\left(-\frac{\pi}{6}, -0.36\right), \text{ קצה}$$

$$\text{ג. תחומי עלייה: } -\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6}, \text{ תחומי ירידה: } \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \text{ וגם } x \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ד. } (0,0) \quad \text{ה. אנכית: } x = \frac{\pi}{2} \quad \text{ו. } (0,0)$$

$$\text{ז. קעירות כלפי מעלה: } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \text{ או } -\frac{\pi}{6} \leq x \leq 0, \text{ קעירות כלפי מטה: } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$(31) \text{ א. } (0,0), (\pm 0.23\pi, 0) \quad \text{ב. } x = \pm 0.25\pi \quad \text{ג. } \min\left(\frac{\pi}{6}, -\sqrt{27}\right), \max\left(-\frac{\pi}{6}, \sqrt{27}\right)$$

$$(32) \text{ א. } 0 \leq x \leq 4 \text{ וגם } x \neq 0.44, x \neq 3.56$$

$$\text{ב. קצה } \max(0,0), \min(2, -1.16), \text{ קצה } \max(4,0)$$

$$(33) \text{ א. } (0,0), (2\pi,0), (-2\pi,0)$$

$$\text{ב. ii. } \min(-2\pi,0), \max(2\pi,0), (0,0) \text{ פיתול}$$

$$(34) \text{ א. } y = (\cos x + 0.5)^2, k = 0.5 \quad \text{ב. } (\pi, 0.25) \quad \text{ג. לא}$$

$$(35) \text{ א. } m = 6, k = \sqrt{7} \quad \text{ב. } (-0.5\pi, -6), (0.5\pi, 6), (1.5\pi, -6) \quad \text{ג. בשתי נקודות}$$

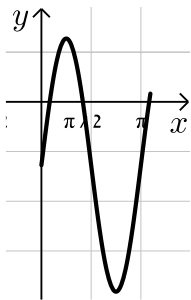
$$(36) \text{ א. } x = 0.5\pi \quad \text{ב. } k = -\frac{4}{\pi} \approx -1.27$$

$$\text{ג. } \max(0,0), \min(0.15\pi, -0.07), \max(0.84\pi, -3.9), \min(\pi, -4)$$

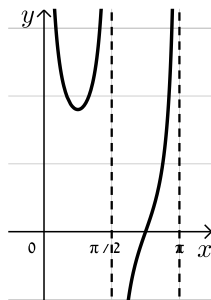
$$(37) \text{ א. כן. } f(x): (0.5\pi, 0), (1.5\pi, 0), g(x): (\pi, 0) \quad \text{ב. כן, } \left(\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{4}{3}\pi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\text{ג. } \max(0.5\pi, 0), \min(1.5\pi, 0), \max(\pi, 1) \quad \text{ד. איור I - } g(x), \text{ איור II - } f(x)$$

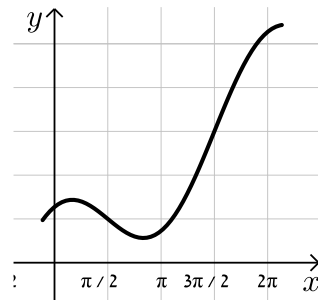
## סקיצות לשאלות החקירה:



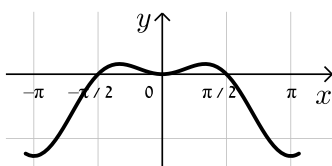
(25)



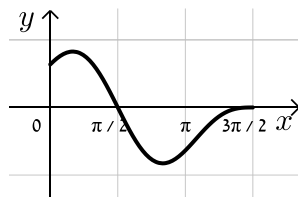
(24)



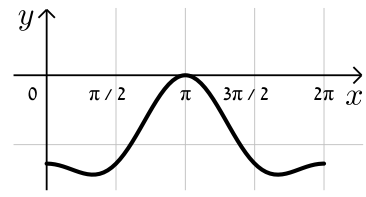
(23)



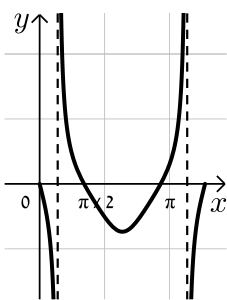
(29)



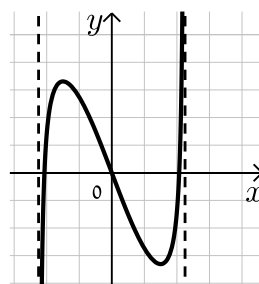
(28)



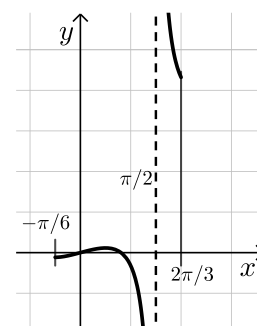
(26)



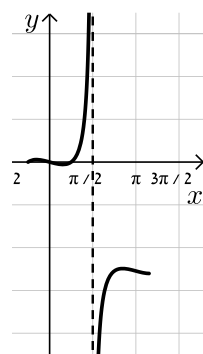
(32)



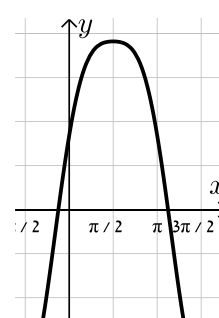
(31)



(30)



(36)



(35)

# מתמטיקה 0

פרק 18 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות מעריכיות

תוכן העניינים

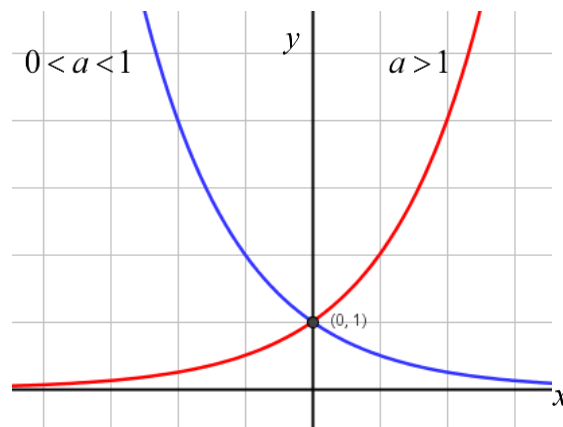
312	.....	1. הנגזרת של פונקציה מעריכית
316	.....	2. שימושי הנגזרת
317	.....	3. חקירה של פונקציה מעריכית

## הנגזרת של פונקציה מעריכית:

סיכום כללי:

הגדרות כלליות:

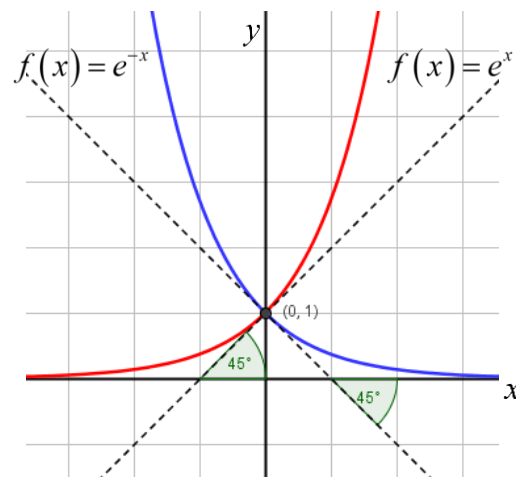
להלן תיאורים גרפיים של פונקציה מעריכית כללית מהצורה:  $f(x) = a^x$   
 עבור:  $a > 1$  ו-  $0 < a < 1$ :



תכונות כלליות:

1. הפונקציות מוגדרות לכל  $x$ .
2. הפונקציות תמיד חיוביות.
3. הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- $y$  בנקודה:  $(0, 1)$ .
4. עבור:  $a > 1$  הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור:  $0 < a < 1$  הפונקציה יורדת בכל ת.ה.

עבור הפונקציות  $f(x) = e^x$  ו-  $f(x) = e^{-x}$  נקבל:



**תכונות נוספות:**

1. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = e^x$  בנקודת החיתוך עם ציר ה- $y$  הוא 1.
2. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = e^{-x}$  בנקודת החיתוך עם ציר ה- $y$  הוא -1.

**נגזרות של פונקציות מעריכיות:**

הפונקציה	הנגזרת
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

**תזכורת - כללי הגזירה:**

מספר כלל	הפונקציה	תיאור	הנגזרת
1.	$y = a \cdot f(x)$	מכפלה בקבוע	$y' = a \cdot f'(x)$
2.	$y = f(x) + g(x)$	סכום פונקציות	$y' = f'(x) + g'(x)$
3.	$y = f(x) \cdot g(x)$	מכפלת פונקציות	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4.	$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	מנת פונקציות	$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
5.	$y = f(g(x))$	פונקציה מורכבת	$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

## שאלות:

(1) גזור את הפונקציות הבאות (סכום פונקציות):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = 3e^x + e^{2x} + e^{-x} + 2x + 1 & \text{ב. } f(x) = e^{x^2-3x} + ex \\ \text{ג. } f(x) = 2^{3x} & \text{ד. } f(x) = 3^{x^2} + 4^{-x} \end{array}$$

(2) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלת פונקציות):

$$\text{א. } f(x) = x \cdot e^x \quad \text{ב. } f(x) = x^2 \cdot e^{4x} \quad \text{ג. } f(x) = (x+1) \cdot 2^x$$

(3) גזור את הפונקציות הבאות (מנת פונקציות):

$$\text{א. } f(x) = \frac{x^2}{e^x} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

(4) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציה מורכבת):

$$\text{א. } f(x) = 5(e^{2x} - 1)^3 \quad \text{ב. } f(x) = \sqrt{e^{2x} + e^{-2x}} \quad \text{ג. } f(x) = \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^x + 1}}$$

(5) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות שונות):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = e^{2x} & \text{ב. } f(x) = e^x + 1 \\ \text{ג. } f(x) = e^{\frac{1}{x}} & \text{ד. } f(x) = (x^2 + 1)e^x \\ \text{ה. } f(x) = e^{-x}(x^2 + 4x + 1) & \text{ו. } f(x) = e^{3x-2} \\ \text{ז. } f(x) = e^x \cdot \frac{1}{x} & \text{ח. } f(x) = x^3 e^{2x} \\ \text{ט. } f(x) = e^{-2x}(x+4) & \text{י. } f(x) = e^{2x+1}(1-x) \\ \text{יא. } f(x) = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} & \text{יב. } f(x) = \frac{x^3}{e^{3x}} \\ \text{יג. } f(x) = \frac{2+x^2}{e^{x^2}} & \text{יד. } f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^{-x} + e^x} \\ \text{טו. } f(x) = \frac{x^2+1}{e^{-x}} & \text{טז. } f(x) = \frac{e^x}{1-e^{x+1}} \end{array}$$

**תשובות סופיות:**

(1) א.  $3e^x + 2e^{2x} - e^{-x} + 2$  ב.  $(2x-3)e^{x^2-3x} + e$  ג.  $3\ln 2 \cdot 2^{3x}$  ד.  $2x \ln 3 \cdot 3^{x^2} - \ln 4 \cdot 4^{-x}$

(2) א.  $(1+x)e^x$  ב.  $2xe^{4x}(1+2x)$  ג.  $2^x(1+x\ln 2 + \ln 2)$

(3) א.  $\frac{x(2-x)}{e^x}$  ב.  $\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

(4) א.  $30e^{2x}(e^{2x}-1)^2$  ב.  $\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}}}$  ג.  $\frac{5e^{4x}+6e^{3x}}{2\sqrt{(e^x+1)^3}}$

(5) א.  $2e^{2x}$  ב.  $e^x$  ג.  $-\frac{e^{1/x}}{x^2}$  ד.  $(x+1)^2 e^x$

ה.  $e^{-x}(-x^2-2x+3)$  ו.  $3e^{3x-2}$

ז.  $\frac{e^x(x-1)}{x^2}$  ח.  $x^2 e^{2x}(3+2x)$  ט.  $-e^{-2x}(2x+7)$

י.  $e^{2x+1}(1-2x)$

יא.  $\frac{e^{-1/x}}{x^2}$  יב.  $\frac{3x^2(1-x)}{e^{3x}}$  יג.  $\frac{-2x(x^2+1)}{e^{x^2}}$

יד.  $\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$  טו.  $\frac{(x+1)^2}{e^{-x}}$  טז.  $\frac{e^x}{(1-e^{x+1})^2}$

## שימושי הנגזרת:

### שאלות:

- (6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = e^x$  בנקודה  $A(1, e)$ .
- (7) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = e^{2x} + xe^{-x}$  בנקודה שבה  $x = 0$ .
- (8) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה  $f(x) = (e+1)e^x - e^{2x}$  בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר  $y = e$ .
- (9) נתונה הפונקציה:  $y = e^{2x} + 3ex$ .  
 לפונקציה העבירו משיק דרך הנקודה שבה:  $x = 2$ .  
 מצא את משוואת המשיק.
- (10) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = a \cdot 3^{2x-1} + 3^{x-b}$  בנקודה  $(1, 15)$  הוא  $21 \ln 3$ .  
 מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

### תשובות סופיות:

- (6)  $y = ex$
- (7)  $y = 3x + 1$
- (8)  $y = (-e^2 + e)x + e^2$ ,  $y = (e-1)x + e$
- (9)  $y = 2e^4x + 3ex - 3e^4$
- (10)  $b = -1$ ,  $a = 2$

## חקירה של פונקציה מעריכית:

### שאלות:

(11) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } f(x) = \frac{2x-1}{e^x} & \text{ב. } f(x) = \frac{3}{e^x-1} & \text{ג. } f(x) = \frac{x+1}{e^x-5} \\
 \text{ד. } f(x) = \frac{1}{e^{2x}-3e^x+2} & \text{ה. } f(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^x} & \text{ו. } f(x) = \frac{\sqrt{e^x-1}}{5x-2} \\
 \text{ז. } f(x) = \sqrt{e^{2x}-4e^x+3} & & 
 \end{array}$$

(12) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = x^2e^x$ .

(13) מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{e^x}{x-2}$ .

(14) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{ax^2+bx+9}{e^x}$ .

הפונקציה משיקה לציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 1.5$ . מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$  ואת נקודות הקיצון של הפונקציה.

(15) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 8^x + p \cdot 2^x + q$ . לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה  $(\log_2 3, -19)$ . מצא את ערכי הפרמטרים  $p$  ו- $q$ .

(16) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = e^{2x} + e^x$ .

(17) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}}$ .

(18) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{e^x + 5}{e^x - 1}$ .

(19) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x - 5}$

(20) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(21) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^{2x} - 5e^x + 6}$

(22) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$

(23) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{x^3 - 1}{e^x}$

(24) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{x-1}{e^{3x} - e}$

(25) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = (x-3)e^x$

(26) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

(27) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 + a}{be^x}$ . לפונקציה יש נקודת פיתול בנקודה  $(1, \frac{2}{e})$ . מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$  ואת נקודת הפיתול השנייה של הפונקציה.

**(28)** חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים הבאים:

1. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
2. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
3. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
4. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

$$f(x) = (x^2 + 1)e^x \quad \text{ב.} \qquad f(x) = (x-1)e^x \quad \text{א.}$$

$$f(x) = e^{x^2-x} \quad \text{ד.} \qquad f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{4}x^2} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^{x+1}} \quad \text{ו.} \qquad f(x) = \frac{2}{e^{x^2} + 1} \quad \text{ה.}$$

**(29)** נתונה הפונקציה  $f(x) = (x-3)e^x$ . חקור על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(30)** נתונה הפונקציה  $f(x) = e^{2x} - 8e^x + 6x + 10$ . חקור על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(31)** נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{4x}{e^{0.5x^2}}$ . חקור על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(32)** נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$ . חקור על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(33)** נתונה הפונקציה  $f(x) = 2x \cdot 3^x$ . חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(34)** נתונה הפונקציה  $f(x) = 2e^{\frac{x}{x^2+1}}$ . חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ז. לאלו ערכי  $m$  יש למשוואה  $f(x) = m$  בדיוק פתרון אחד?

**(35)** נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ . חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. מציאת נקודות פיתול של הפונקציה.
- ז. כתיבת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.

ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$(36) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \frac{e^{3x}}{12x^2 + 1}$$

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$(37) \text{ שיפוע המשיק לגרף הפונקציה: } f(x) = \frac{1}{e^{3x^2+6x+k}} \text{ בנקודה שבה } x=1 \text{ הוא } -\frac{12}{e^{10}}$$

- מצא את ערך הפרמטר  $k$  וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- הוכח על סמך הסקיצה את אי-השוויון הבא:  $0 < \frac{1}{e^{3x^2+6x+1}} \leq e^2$ .

$$(38) \text{ נתונה הפונקציה הבאה: } f(x) = e^{2x} + ae^x + b \text{ . גוזרים את הפונקציה פעמיים}$$

$$\text{וידוע כי כאשר } x = \ln \frac{2}{3} \text{ הנגזרות מקיימות: } f'(x) + f''(x) = 8$$

- מצא את  $a$ .
- משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא:  $y = 16x + 7 - 16 \ln 2$ .
- מצא את שיעור ה- $x$  של נקודת ההשקה.
- מצא את  $b$ .
- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

$$(39) \text{ נתונות הפונקציות הבאות: } f(x) = 6x - e^x \text{ ו- } g(x) = ae^x - e^{2x} + b$$

ידוע כי לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה אותו שיעור  $x$  וכי שתיהן נפגשות על ציר ה- $y$ .

- מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .
- הראה כי לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה משותפים.

**40** לגרף הפונקציה:  $f(x) = ax^2 \cdot e^{-bx^2}$  יש נקודת קיצון:  $\left(2, \frac{4}{e}\right)$ ,  $a, b \neq 0$ .

- מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$  וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון הנוספות של הפונקציה וקבע את סוגן.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מעבירים ישר:  $y = k$ . באיזה תחום ערכים צריך להימצא  $k$  כדי שהישר יחתוך את גרף הפונקציה ב-4 נקודות שונות?

**41** לפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 - 6x - 7}{e^{ax-1}}$  יש קיצון בנקודה שבה:  $x = 1$ .

- מצא את ערך הפרמטר  $a$ .
- האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון נוספות? אם כן מצא אותן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**42** הישר  $x = \sqrt{6}$  הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה:  $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 + m}$ .

- מצא את ערך הפרמטר  $m$  וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**43** נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^3 \cdot e^{2x}$ .

- מצא את הנקודות המקיימות:  $f'(x) = 0$  וקבע כמה מהן הן נקודות קיצון.
- מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- בכמה נקודות חותך הישר  $y = -0.01$  את גרף הפונקציה?

44 נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = e^{2x} + ae^x + b$ . גוזרים את הפונקציה פעמיים

$$f'(x) + f''(x) = 12 \text{ הנגזרות מקיימות: } x = \ln \frac{2}{3}$$

א. מצא את  $a$ .

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא:  $y = 22x + 28 - 22 \ln 2$ .

ב. מצא את שיעור ה- $x$  של נקודת ההשקה.

ג. מצא את  $b$ .

ד. האם הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$ ? אם כן מצא את הנקודות.

45 נתונה הפונקציה:  $f(x) = x \cdot a^x$ ,  $(a > 0)$ .

$$\text{לפונקציה יש נקודת קיצון שבה: } x = -\frac{1}{\ln 2}$$

א. מצא את  $a$ .

ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

הנקודה שבה  $x = 2$  היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$

$$\text{עם גרף הפונקציה: } g(x) = x^2 \cdot 2^x - kx \cdot 2^x$$

ג. מצא את  $k$ .

ד. מצא נקודה נוספת שבה הגרפים נחתכים.

46 נתונה הפונקציה:  $f(x) = 3^{2x} + 2 \cdot 3^{1-x}$ .

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה

עם ציר ה- $y$ .

ב. הוכח כי גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה- $x$ .

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

## תשובות סופיות:

$$(11) \quad \text{א. כל } x \quad \text{ב. } x \neq 0 \quad \text{ג. } x \neq \ln 5 \quad \text{ד. } x \neq \ln 2, x \neq 0 \quad \text{ה. כל } x$$

$$\text{ו. } 0 \leq x \neq \frac{2}{5} \quad \text{ז. } x \leq 0, x \geq \ln 3$$

$$(12) \quad \min(0,0), \max\left(-2, \frac{4}{e^2}\right)$$

$$(13) \quad \min(3, e^3)$$

$$(14) \quad \min(1.5,0), \max(3.5,0.483), b=-12, a=4$$

$$(15) \quad p=-27, q=35$$

$$(16) \quad y=0$$

$$(17) \quad y=0$$

$$(18) \quad x=0, y=-5, y=1$$

$$(19) \quad x=\ln 5, y=-\frac{1}{5}$$

$$(20) \quad y=-1, y=1$$

$$(21) \quad \text{נקודת אי הגדרה: } (\ln 2, -1), x=\ln 3, y=-\frac{1}{3}, y=0$$

$$(22) \quad x=0, y=0$$

$$(23) \quad y=0$$

$$(24) \quad x=\frac{1}{3}, y=0$$

$$(25) \quad y=0$$

$$(26) \quad \text{נקודת אי הגדרה: } (0,0), x=0$$

$$(27) \quad \left(3, \frac{10}{e^3}\right), a=1, b=1$$

$$(28) \quad \text{א. כל } x \quad \text{ב. } (0,-1), (1,0) \quad \text{ג. } \min(0,-1) \quad \text{ד. עולה: } x > 0 \quad \text{יורדת: } x < 0$$

$$\text{ב. כל } x \quad \text{ג. } (0,1) \quad \text{ד. עולה: } x < -1, x > -1 \quad \text{פיתול } \left(-1, \frac{2}{e}\right)$$

$$\text{ג. כל } x \quad \text{ד. } (0,0) \quad \text{א. } \max\left(2, \frac{4}{e}\right), \min(0,0), \max\left(-2, \frac{4}{e}\right)$$

$$\text{ב. עולה: } x < -2, 0 < x < 2 \quad \text{יורדת: } x > 2, -2 < x < 0$$

$$\text{ד. כל } x \quad \text{א. } (0,1) \quad \text{ב. } \min(0.5, e^{-0.25}) \quad \text{ג. עולה: } x > 0.5 \quad \text{יורדת: } x < 0.5$$

- ה.1. כל  $x$  .2.  $(0,1)$  .3.  $\max(0,1)$  .4. עולה:  $x < 0$  יורדת:  $x > 0$
- ו.1. כל  $x$  .2.  $(0, 2e^{-1})$  .3.  $\min(0, 2e^{-1})$  .4. עולה:  $x > 0$  יורדת:  $x < 0$
- (29) א. כל  $x$  .ב.  $\min(2, -e^2)$  .ג. תחומי עלייה:  $x > 2$  תחומי ירידה:  $x < 2$
- ד.  $(3,0)$ ,  $(0,-3)$
- (30) א. כל  $x$  .ב.  $\max(0,3)$ ,  $\min(\ln 3, 1.59)$  .ג. תחומי עלייה:  $x > \ln 3$  או  $x < 0$  תחומי ירידה:  $0 < x < \ln 3$  .ד.  $(0,3)$
- (31) א. כל  $x$  .ב.  $\min\left(-1, -\frac{4}{e^{0.5}}\right)$ ,  $\max\left(1, \frac{4}{e^{0.5}}\right)$  .ג. תחומי עלייה:  $-1 < x < 1$  תחומי ירידה:  $x > 1$  או  $x < -1$  .ד.  $(0,0)$
- (32) א. כל  $x$  .ב.  $\max\left(3, \frac{27}{e^3}\right)$  .ג. עולה:  $x < 3$ , יורדת:  $x > 3$
- ד.  $(0,0)$
- (33) א. כל  $x$  .ב.  $\min(-0.91, -0.67)$  .ג. עולה:  $x > -0.91$  יורדת:  $x < -0.91$
- ד.  $(0,0)$
- (34) א. כל  $x$  .ב.  $\max(1, 2\sqrt{e})$ ,  $\min\left(-1, \frac{2}{\sqrt{e}}\right)$  .ג. עולה:  $-1 < x < 1$  יורדת:
- ד.  $(0,2)$  .ה.  $y = 2$  .ו.  $m = 2$ ,  $m = 2\sqrt{e}$ ,  $m = \frac{2}{\sqrt{e}}$
- (35) א.  $x \neq 0$  .ב.  $\min\left(\frac{1}{2}, \frac{e^2}{4}\right)$  .ג. עולה:  $x > \frac{1}{2}$ , יורדת:  $0 \neq x < \frac{1}{2}$
- ד. אין
- (36) א. כל  $x$  .ב.  $\max\left(\frac{1}{6}, \frac{3\sqrt{e}}{4}\right)$ ,  $\min\left(\frac{1}{2}, \frac{e^{1.5}}{4}\right)$  .ג. עולה:  $x > \frac{1}{2}$ ,  $x < \frac{1}{6}$  יורדת:
- ד.  $\frac{1}{6} < x < \frac{1}{2}$  .ד.  $(0,1)$
- (37) א.  $k = 1$ ,  $f(x) = \frac{1}{e^{3x^2+6x+1}}$  .ב.  $(-1, e^2)$
- ד. ניתן לראות עפ"י הגרף כי ערך הפונקציה  $f(x)$  נמצא בתחום  $0 < f(x) \leq e^2$
- (38) א.  $a = 4$  .ב.  $x = \ln 2$  .ג.  $b = -5$  .ד.  $(0,0)$
- (39) א.  $a = 12$ ,  $b = -12$  .ב. עולות:  $x < \ln 6$  יורדות:  $x > \ln 6$

א.  $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{4}x^2}$ ,  $a=1$ ,  $b=0.25$  (40)  
 ב.  $\max\left(-2, \frac{4}{e}\right)$ ,  $\min(0,0)$  ג.

ג.  $(0,0)$  ה.  $0 < k < \frac{4}{e}$

א.  $a = \frac{1}{3}$  (41)  
 ב. כן:  $\left(11, \frac{48}{e^{\frac{2}{3}}}\right)$  ג. עולה:  $1 < x < 11$  יורדת:  $x < 1, x > 11$

ד.  $(-1,0)$ ,  $(7,0)$ ,  $(0, -7e)$

א.  $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 - 6}$ ,  $m = -6$  (42)  
 ב.  $\max\left(-2, -\frac{1}{2e^4}\right)$ ,  $\min\left(3, \frac{e^6}{3}\right)$  ג.  $\left(0, -\frac{1}{6}\right)$

א.  $x = 0, -1.5$ . נקודת הקיצון היא:  $\min\left(-1.5, -3\frac{3}{8}e^{-3}\right)$  (43)  
 ב.  $y = 0$

ד. 2 נקודות.

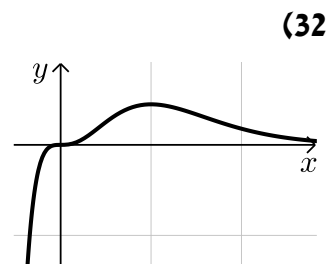
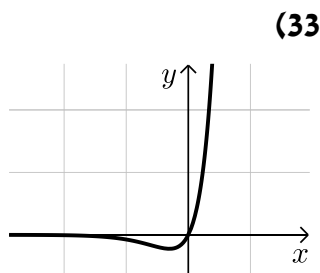
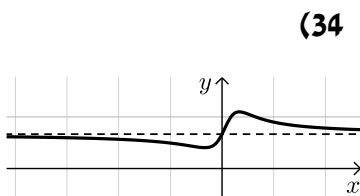
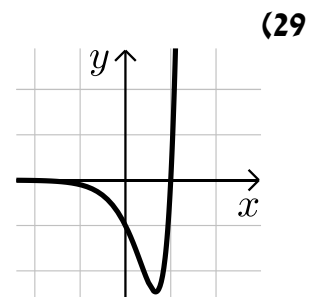
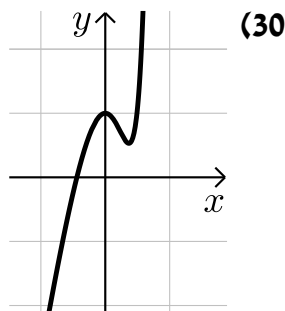
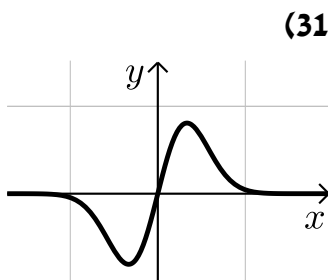
א.  $a = 7$  (44)  
 ב.  $x = \ln 2$  ג.  $b = 10$  ד. לא.

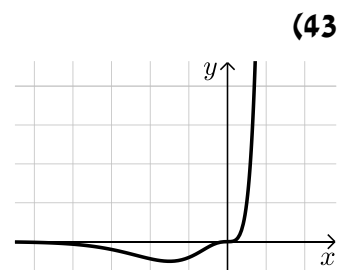
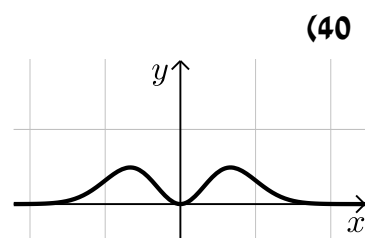
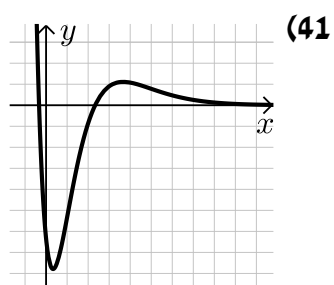
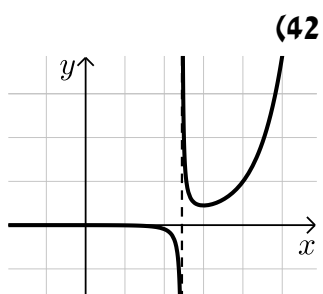
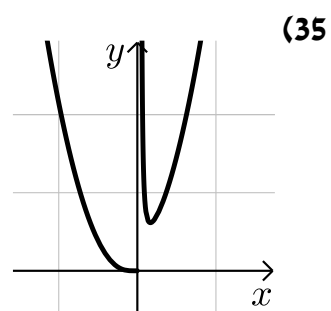
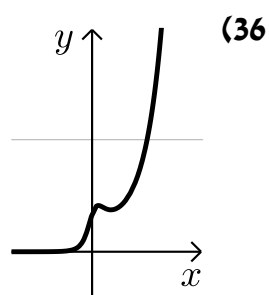
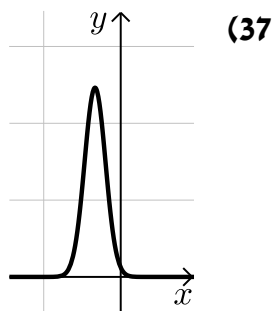
א.  $a = 2$  (45)  
 ב. עולה:  $x > -\frac{1}{\ln 2}$  יורדת:  $x < -\frac{1}{\ln 2}$  ג.  $k = 1$

ד.  $(0,0)$

א.  $y = -x \ln 81 + 7$  (46)  
 ג.  $\min\left(\frac{1}{3}, \sqrt[3]{243}\right)$

סקיצות לשאלות החקירה:





# מתמטיקה 0

פרק 19 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות

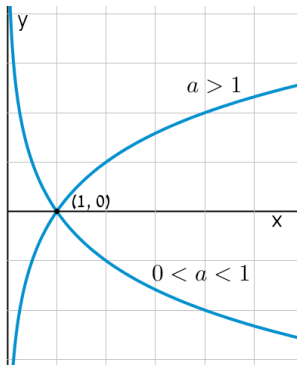
תוכן העניינים

- 1. הנגזרת של פונקציה לוגריתמית ..... 328
- 2. שימושי הנגזרת ..... 333
- 3. חקירה של פונקציה לוגריתמית ..... 334

## הנגזרת של פונקציה לוגריתמית:

**סיכום כללי:**

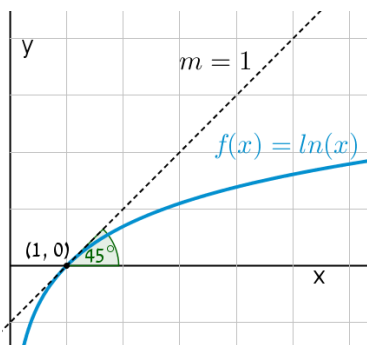
**הגדרות כלליות:**



להלן תיאורים גרפיים של פונקציה לוגריתמית כללית מהצורה:  $f(x) = \log_a x$  עבור  $a > 1$  ו-  $0 < a < 1$ :

**תכונות כלליות:**

- לפונקציות תחום הגדרה  $x > 0$ .
- הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- $x$  בנקודה  $(1, 0)$ .
- עבור  $a > 1$  הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור  $0 < a < 1$  הפונקציה יורדת בכל ת.ה.



עבור הפונקציות  $f(x) = \ln x = \log_e x$  נקבל כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$  הוא 1:

**תחום הגדרה של פונקציה לוגריתמית:**

תחום ההגדרה של פונקציה לוגריתמית מהצורה:  $y = \log(f(x))$  הוא:  $f(x) > 0$ .

## נגזרות של פונקציות לוגריתמיות:

הנגזרת	הפונקציה
$y' = \frac{1}{x \ln a}$	$y = \log_a x$
$y' = \frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$	$y = \log_a f(x)$
$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln x$
$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$	$y = \ln f(x)$

## שאלות:

1) גזור את הפונקציות הבאות (גזירה לוגריתמית יסודית עם ביטויים פנימיים שונים):

א.  $f(x) = 3 \ln x + 4 \ln(x+2) - \ln(5x-1)$     ב.  $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$

ג.  $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$     ד.  $f(x) = \ln(e^x + 1)$

ה.  $f(x) = \ln(\cos x)$     ו.  $f(x) = \log_2 x + 5 \log_3(2x-1)$

2) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלה ומנה של פונקציות):

א.  $f(x) = x \ln x$     ב.  $f(x) = (3x+1)^2 \ln x$     ג.  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

ד.  $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2}$     ה.  $f(x) = \sqrt{\ln x + x}$

3) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציות מורכבות):

א.  $f(x) = \ln^3 x$     ב.  $f(x) = 3 \ln^2 x$

ג.  $f(x) = x^2 \ln^2 x$     ד.  $f(x) = \frac{\ln^2 x + 1}{(\ln x + 1)^2}$

4) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות שונות):

- |                                  |                                     |
|----------------------------------|-------------------------------------|
| א. $f(x) = \ln(x+2)$             | ב. $f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3$   |
| ג. $f(x) = x^2 \ln x$            | ד. $f(x) = x^3 \ln x$               |
| ה. $f(x) = \ln e^{2x}$           | ו. $f(x) = e^x \ln x$               |
| ז. $f(x) = e^{-x^2} \ln x$       | ח. $f(x) = x^2(2 \ln x - 1)$        |
| ט. $f(x) = \ln(x^2)$             | י. $f(x) = \ln(x^4)$                |
| יא. $f(x) = (\ln x)^4$           | יב. $f(x) = x \ln x - \ln x^2$      |
| יג. $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ | יד. $f(x) = \ln \sqrt{x}$           |
| טו. $f(x) = \sqrt{\ln x}$        | טז. $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ |

5) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות אתגר):

- |  |  |
|--|--|
| א. $f(x) = \ln \frac{x+2}{x}$          | ב. $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$          |
| ג. $f(x) = \ln \frac{x-3}{x+3}$        | ד. $f(x) = \ln \frac{(x-5)^3}{(x+1)^2}$  |
| ה. $f(x) = \ln \sqrt{x^2 - 1}$         | ו. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$    |
| ז. $f(x) = e^{\sqrt{\ln x}}$           | ח. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}}$     |
| ט. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ | י. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+5x}{1-5x}}$ |
| יא. $f(x) = \frac{\ln \sqrt[3]{x}}{x}$ | יב. $f(x) = \frac{(\ln x)^3}{x}$         |
| יג. $f(x) = \frac{x}{\ln(x^2)}$        | יד. $f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x}$ |
| טו. $f(x) = \frac{x}{\ln^4 x}$         |  |

**תשובות סופיות:**

$$\begin{array}{lll}
 f'(x) = \frac{-2}{(x-1)(x+1)} \cdot \lambda & f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x} \cdot \beta & f'(x) = \frac{3}{x} + \frac{4}{x+2} - \frac{5}{5x-1} \cdot \aleph \quad (1) \\
 f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} + \frac{10}{(2x-1) \ln 3} \cdot \iota & f'(x) = -\tan x \cdot \eta & f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} \cdot \daleth \\
 f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} \cdot \lambda & f'(x) = (3x+1) \left( 6 \ln x + \frac{3x+1}{x} \right) \cdot \beta & f'(x) = \ln x + 1 \cdot \aleph \quad (2) \\
 & f'(x) = \frac{1+x}{2x\sqrt{\ln x+x}} \cdot \eta & f'(x) = \frac{4}{x(\ln x+2)^2} \cdot \daleth \\
 f'(x) = 2x \ln x (\ln x + 1) \cdot \lambda & f'(x) = \frac{6 \ln x}{x} \cdot \beta & f'(x) = \frac{3 \ln^2 x}{x} \cdot \aleph \quad (3) \\
 & & f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{x(\ln x + 1)^3} \cdot \daleth \\
 x(2 \ln x + 1) \cdot \lambda & \frac{2 \ln x + 2}{x} \cdot \beta & \frac{1}{x+2} \cdot \aleph \quad (4) \\
 e^x \left( \ln x + \frac{1}{x} \right) \cdot \iota & 2 \cdot \eta & x^2 (3 \ln x + 1) \cdot \daleth \\
 \frac{4}{x} \cdot \delta & \frac{2}{x} \cdot \upsilon & 4x \ln x \cdot \theta & e^{-x^2} \left( \frac{1}{x} - 2x \ln x \right) \cdot \beth \\
 \frac{2 \ln x - \ln^2 x}{x^2} \cdot \gamma & \ln x + 1 - \frac{2}{x} \cdot \beta & \frac{4(\ln x)^3}{x} \cdot \aleph & \\
 \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} \cdot \upsilon & \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} \cdot \tau & \frac{1}{2x} \cdot \daleth & \\
 \frac{6}{x^2-9} \cdot \lambda & \frac{2}{x^2-1} \cdot \beta & -\frac{2}{x(x+2)} \cdot \aleph \quad (5) \\
 \frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{x\sqrt{x^2+a^2}+x^2+a^2} \cdot \iota & \frac{x}{x^2-1} \cdot \eta & \frac{3}{x-5} - \frac{2}{x+1} \cdot \daleth \\
 \frac{1}{x^2-1} \cdot \upsilon & \frac{1}{4-2x} \cdot \theta & \frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}} \cdot \beth
 \end{array}$$

$$\frac{3\ln^2 x - \ln^3 x}{x^2} \quad \text{י.ב.}$$

$$\frac{\ln x - 4}{\ln^5 x} \quad \text{ט.ו.}$$

$$\frac{1 - 3\ln \sqrt[3]{x}}{3x^2} \quad \text{י.א.}$$

$$\frac{2(\ln^4 x - 1)}{x \ln^3 x} \quad \text{י.ד.}$$

$$\frac{5}{1 - 25x^2} \quad \text{י.}$$

$$\frac{\ln(x^2) - 2}{\ln^2(x^2)} \quad \text{י.ג.}$$

## שימושי הנגזרת:

### שאלות:

(6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $f(x) = \ln x$  בנקודה  $A(e, 1)$ .

(7) שיפוע המשיק לפונקציה  $f(x) = \frac{\ln^2 x + a}{\ln x + b}$  בנקודה  $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$  הוא  $\frac{e}{3}$ .  
מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

(8) הגרפים של הפונקציות  $f(x) = \ln x$  ו- $g(x) = 1 - \ln x$  נחתכים בנקודה  $A$  ברביע הראשון.  
בנקודה  $A$  העבירו משיק ל- $f(x)$ .  
מצא את משוואת המשיק והוכח שמשיק זה עובר דרך הראשית.

(9) לפונקציה  $g(x) = \frac{\ln x^2}{x}$  העבירו משיק בנקודה שבה  $x = e^2$ .  
מצא את משוואת המשיק.

(10) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $y = x \ln(x^2 + 1)$  בנקודה שבה  $x = 1$ .

### תשובות סופיות:

(6)  $y = \frac{1}{e}x$

(7)  $a = 2, b = -2$

(8)  $y = \frac{1}{e}x$

(9)  $y = -\frac{2}{e^4}x + \frac{6}{e^2}$

(10)  $y = \ln 2 \cdot x + x - 1$

## חקירה של פונקציה לוגריתמית:

### שאלות:

11 מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \ln x$	ב. $f(x) = \ln(x^2)$
ג. $f(x) = \log_3(x^2 - 8x - 20)$	ד. $f(x) = \ln(e^x - 4)$
ה. $f(x) = \frac{x-1}{\ln x - 1}$	ו. $f(x) = \frac{1}{\ln^2 x - 2 \ln x - 3}$
ז. $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$	

12 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = 2 \ln x - x^2$ .

13 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = x^2 \ln x$ .

14 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{\sqrt{2 \ln x - 1}}{x}$ .

15 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$ .

16 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{a \ln x + b}{x}$ . הנקודה  $(e^2, \frac{1}{e^2})$  היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

17 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{a \ln^2 x + b \ln x}{(\ln x + 1)^2}$ . הנקודה  $(\sqrt[3]{e}, -\frac{1}{8})$  היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים  $a$  ו- $b$ .

18 מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \ln(x-3)$ .

19 מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{1}{\ln x - 1}$ .

(20) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{2 \ln x - 1}{\ln x + 1}$ .

(21) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln^2 x - 4}$ .

(22) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

(23) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\ln^2 x + 1}$ .

(24) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה:  $f(x) = x \ln x + 2$ .

(25) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ . מצא את נקודת הפיתול של הפונקציה.

(26) חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים הבאים:

- i. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ii. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- iii. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- iv. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

$y = x \ln x$ ב.	$y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3 \ln x$ א.
$y = \sqrt{x} \ln x$ ד.	$y = x \ln x - x$ ג.
$y = \ln(x^2 + 1)$ ו.	$y = x^2 \ln x$ ה.

**(27)** נתונה הפונקציה  $f(x) = 2x \ln^2 x$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(28)** נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x}{\ln x - 1}$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- תחום הגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא לאלו ערכי  $k$  הישר  $y = k$  חותך את הפונקציה בשתי נקודות.

**(29)** נתונה הפונקציה  $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

- תחום הגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**(30)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{\ln x}$ .

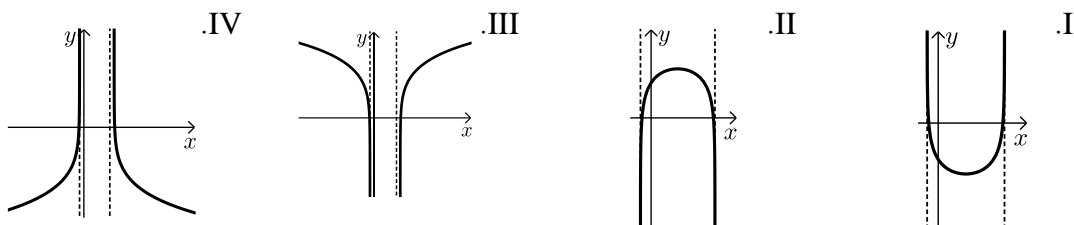
- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- הוכח כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.
- מגדירים פונקציה נוספת:  $g(x) = \ln x$ .
- מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.
- הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$  והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה  $g(x)$ . ידוע כי לנקודות A ו-B אותו שיעור  $x$ ,  $(x_A = x_B)$ .
- מצא את שיעור ה- $x$  של שתי הנקודות אם ידוע כי המשיקים לגרפים של הפונקציות בנקודות אלו מקבילים.

**31** נתונה שתי הפונקציות הבאות:  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ ,  $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

- א. קבע אילו מהמשפטים הבאים נכונים ואלו שגויים.  
 נמק זאת ע"י חישוב מתאים ותקן במשפטים השגויים את הטעות.
- לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.
  - לשתי הפונקציות יש נקודת קיצון מאותו סוג ובעלות שיעור  $x$  זהה.
  - לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה זהים.
  - לשתי הפונקציות יש אסימפטוטות אנכיות.
- ב. בוחרים באקראי שתי נקודות, אחת על כל גרף, כך ששיעור ה- $x$  שלהן זהה. הוכח כי מכפלת שיעורי ה- $y$  של כל זוג נקודות כאלו שווה ל-1.

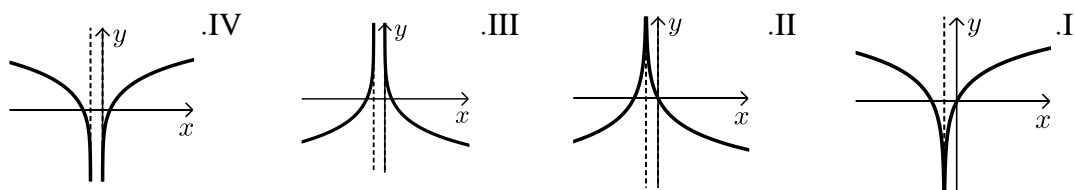
**32** נתונה הפונקציה הבאה:  $y = \ln(x^2 - 6x - 7)$ .

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.  
 ב. מהן האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לציר ה- $y$ ?  
 ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.  
 ד. לפניך 4 גרפים: I, II, III, ו-IV.



**33** נתונה הפונקציה:  $y = \ln(x^2 + 2x + 1)$ .

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.  
 ב. מהי האסימפטוטה של הפונקציה המקבילה לציר ה- $y$ ?  
 ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.  
 ד. לפניך 4 גרפים: I, II, III, ו-IV.



ה. העזר בגרף שבחרת וכתוב את תחומי השליליות של הפונקציה.

**34** לפניך הפונקציה הבאה :  $f(x) = \ln(1 - \ln x)$ .

- א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. הוכח כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

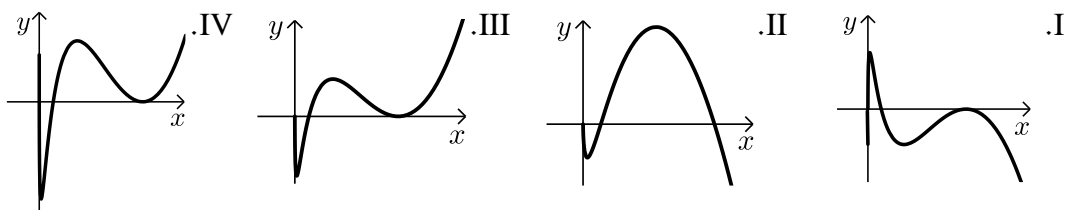
**35** נתונה הפונקציה הבאה :  $y = \ln \frac{2x+1}{x-1}$ .

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- ד. הראה כי גרף הפונקציה יורד בכל תחום הגדרתו.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**36** נתונה הפונקציה הבאה :  $f(x) = x(\ln^3 x + 2\ln^2 x)$ .

- א. הראה כי נגזרת הפונקציה היא :  $f'(x) = \ln^3 x + 5\ln^2 x + 4\ln x$ .
- ב. מצא את התחום בו הפונקציה עולה.
- ג. ענה על השאלות הבאות :
  - i. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
  - ii. מצא את התחום בו הפונקציה חיובית.

ד. לפניך 4 גרפים. קבע איזה מהם מתאר את הפונקציה  $f(x)$  ונמק את בחירתך.



**37** נתונה הפונקציה :  $f(x) = \ln^3 x - 3\ln x$ .

- א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ה. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הפונקציה  $g(x) = \ln x$ .

38) ענה על הסעיפים הבאים :

א. פתור את המשוואה הבאה :  $\ln(x+e) - \ln(x\sqrt{e}) = \ln 2 - 0.5$

נתונה הפונקציה :  $f(x) = \ln(x+e) - \ln(x\sqrt{e})$

ב. הראה כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה :  $x = e$ .

39) נתונה הפונקציה הבאה :  $y = \frac{x+a}{\ln(x+a)}$  , פרמטר חיובי,  $a \neq 1$

א. הבע באמצעות  $a$  את :

i. תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. הנקודה המקיימת  $y' = 0$ .

iii. נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

iv. האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.

ב. ידוע כי גרף הפונקציה עולה רק בתחום :  $x > e - 2$ . מצא את  $a$ .

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום  $x > -1$ .

ד. נתון הישר :  $y = k$ . מצא בסקיצה את תחום הערכים של  $k$  עבורו לישר ולגרף הפונקציה לא תהיה אף נקודה משותפת.

40) נתונה הפונקציה הבאה :  $y = \ln x + \frac{1}{x}$

א. ענה על הסעיפים הבאים :

i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ii. יש לגרף הפונקציה אסימפטוטה מקבילה לציר  $y$ ?

אם כן מצא אותה.

ב. מצא את נקודת הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגה.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של גרף הפונקציה.

**תשובות סופיות:**

(11) א.  $x > 0$     ב.  $x \neq 0$     ג.  $x > 10$  או  $x < -2$     ד.  $x > \ln 4$

ה.  $0 < x \neq e$     ו.  $x > 0$  וגם  $x \neq e^3, e^{-1}$     ז.  $x \geq e$

(12)  $\max(1, -1)$

(13)  $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right)$

(14)  $\max\left(e, \frac{1}{e}\right)$  קצה,  $\min(\sqrt{e}, 0)$

(15)  $\min(4, -1)$

(16)  $a = 1, b = -1$

(17)  $a = 1, b = -1$

(18)  $x = 3$

(19) נקודת אי הגדרה  $(0, 0)$ ,  $y = 0, x = e$

(20) נקודת אי הגדרה  $(0, 2)$ ,  $y = 2, x = \frac{1}{e}$

(21) נקודת אי הגדרה  $(e^2, \frac{1}{4})$ ,  $(0, 0)$ ;  $y = 0, x = \frac{1}{e^2}$

(22)  $x = 0, y = 0$

(23) נקודת אי הגדרה  $(0, 0)$

(24) נקודת אי הגדרה  $(0, 2)$

(25)  $\left(\sqrt{e^3}, \frac{3}{2\sqrt{e^3}}\right)$

(26) א. i.  $x > 0$     iii.  $\max(1, -3.5), \min(3, \ln 27 - 7.5)$

iv. עולה:  $0 < x < 1, x > 3$  יורדת:  $1 < x < 3$     ב. i.  $x > 0$     ii.  $(1, 0)$

iii.  $\min(e^{-1}, -e^{-1})$     iv. עולה:  $x > e^{-1}$  יורדת:  $0 < x < e^{-1}$

ג. i.  $x > 0$     ii.  $(e, 0)$     iii.  $\min(1, -1)$     iv. עולה:  $x > 1$  יורדת:  $0 < x < 1$

ד. i.  $x > 0$     ii.  $(1, 0)$     iii.  $\min\left(e^{-2}, -\frac{2}{e}\right)$     iv. עולה:  $x > e^{-2}$  יורדת:  $0 < x < e^{-2}$

ה. i.  $x > 0$  ii.  $(1, 0)$  iii.  $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right)$  iv. עולה:  $x > \frac{1}{\sqrt{e}}$  יורדת:  $0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$

ו. i. כל  $x$  ii.  $(0, 0)$  iii.  $\min(0, 0)$  iv. עולה:  $x > 0$  יורדת:  $x < 0$

(27) א.  $x > 0$  ב.  $\max\left(\frac{1}{e^2}, \frac{8}{e^2}\right), \min(1, 0)$

ג. עלייה:  $x > 1$  או  $0 < x < \frac{1}{e^2}$ , ירידה:  $\frac{1}{e^2} < x < 1$  ד.  $(1, 0)$

(28) א.  $0 < x \neq e$  ב.  $\min(e^2, e^2)$  ג. עלייה:  $x > e^2$ , ירידה:

$0 < x < e^2$  וגם  $x \neq e$  ד. אין. ו.  $k > e^2$

(29) א.  $x > 0$  ב.  $\min(4, -1)$  ג. עלייה:  $x > 4$ , ירידה:  $0 < x < 4$

ד.  $(1, 0), (16, 0)$

(30) א.  $x \geq 1$  ב. מתקבל:  $f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} > 0$  ג.  $(1, 0), (e, 1)$

ד.  $x = \sqrt[4]{e}$

(31) א. i. לא נכון. תחום ההגדרה של  $f(x)$  הוא:  $x > 0, x \neq 1$  ותחום ההגדרה

של  $g(x)$  הוא:  $x > 0$ .

ii. לא נכון. לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה  $x = e$  אך עבור  $f(x)$  מדובר

במינימום ועבור  $g(x)$  מדובר במקסימום.

iii. לא נכון. עבור  $f(x)$ : עולה:  $x > e$  יורדת:  $0 < x < e, x \neq 1$ .

ועבור  $g(x)$ : עולה:  $0 < x < e$  יורדת:  $x > e$ . iv. נכון.

ב. לגבי כל נקודה נאמר כי שיעור ה- $y$  שלה הוא:  $y = \frac{x}{\ln x}$  ו- $y = \frac{\ln x}{x}$ .

נכפול:  $y = \frac{x}{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x} = 1$

(32) א.  $x < -1, x > 7$  ב.  $x = -1, 7$  ג. עולה:  $x > 7$  יורדת:  $x < -1$

ד. III. הסבר: באיורים I ו-II גרף הפונקציה לא בתחום.

באיור IV תחומי העלייה והירידה הפוכים.

(33) א.  $x \neq -1$  ב.  $x = -1$  ג. עולה:  $x > -1$  יורדת:  $x < -1$

ד. I. הסבר: באיור II תחומי העלייה והירידה הפוכים.

באיורים III ו-IV יש אסימפטוטה מיותרת. ה.  $x \neq -1, -2 < x < 0$

34 א.  $0 < x < e$ . (שימו לב כי תנאי ת.ה. הם:  $1 - \ln x > 0$  וגם  $x > 0$ ).

ב.  $f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{1 - \ln x} = -\frac{1}{x(1 - \ln x)} < 0$ . ולכן הפונקציה יורדת בת.ה.

ג.  $(1, 0)$ .

35 א.  $x < -\frac{1}{2}, x > 1$ . ב.  $x = -\frac{1}{2}, 1$ . ג.  $(-2, 0)$ .

ד. מתקבל:  $y' = \frac{-3}{(2x+1)(x-1)} < 0$ .

36 ב.  $x > 1, e^{-4} < x < e^{-1}$ .

ג. i. 2 נקודות והן:  $(e^{-2}, 0)$ ,  $(1, 0)$ . הנקודה שבה:  $x = 0$  לא קיימת עקב ת.ה.

ii.  $x \neq 1, x > e^{-2}$ . ד. III – בראשית הצירים יש חור ולא אסימפטוטה.

שאר הנתונים כפי שהתקבלו בסעיפים הקודמים.

37 א.  $x > 0$ . ב.  $(e^{-\sqrt{3}}, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(e^{\sqrt{3}}, 0)$ . ג.  $\min(e, -2)$ ,  $\max(e^{-1}, 2)$ .

ה.  $(1, 0)$ ,  $(e^2, 2)$ ,  $(e^{-2}, -2)$ .

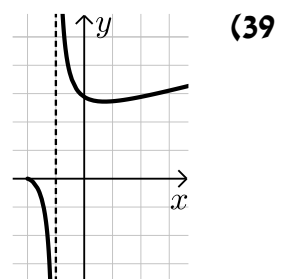
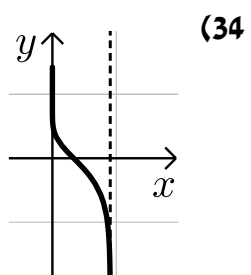
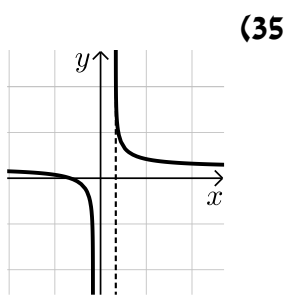
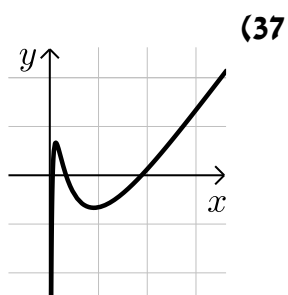
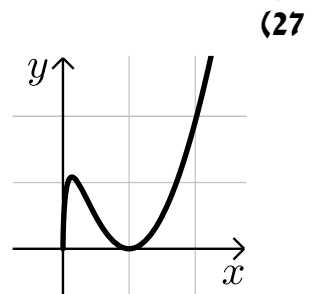
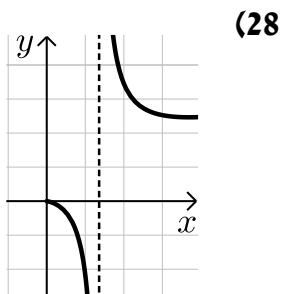
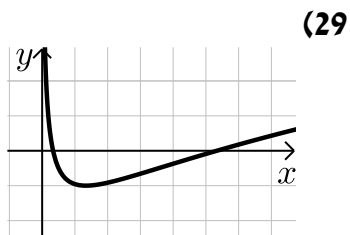
38 א.  $x = e$ . ב. מתקבל:  $y' = \frac{-e}{x(x+e)} < 0$ . ג.  $y = -\frac{1}{2e}x + \ln 2$ .

39 א. i.  $x > -a, x \neq 1 - a$ . ii.  $(e - a, e)$ . iii.  $(0, \frac{a}{\ln a})$ .

iv.  $x = 1 - a$ . ב.  $a = 2$ . ד.  $k < e$ .

40 א. i.  $x > 0$ . ii.  $x = 0$ . ב.  $\min(1, 1)$ . ג. עולה:  $x > 1$ , יורדת:  $0 < x < 1$ .

## סקיצות לשאלות:



## מתמטיקה 0

פרק 20 - חשבון דיפרנציאלי - פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי

תוכן העניינים

- 1. הנגזרת של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי. 344 .....
- 2. שימושי הנגזרת. 347 .....
- 3. חקירה של פונקצית חזקה. 349 .....

## הנגזרת של פונקציות חזקה עם מעריך רציונאלי:

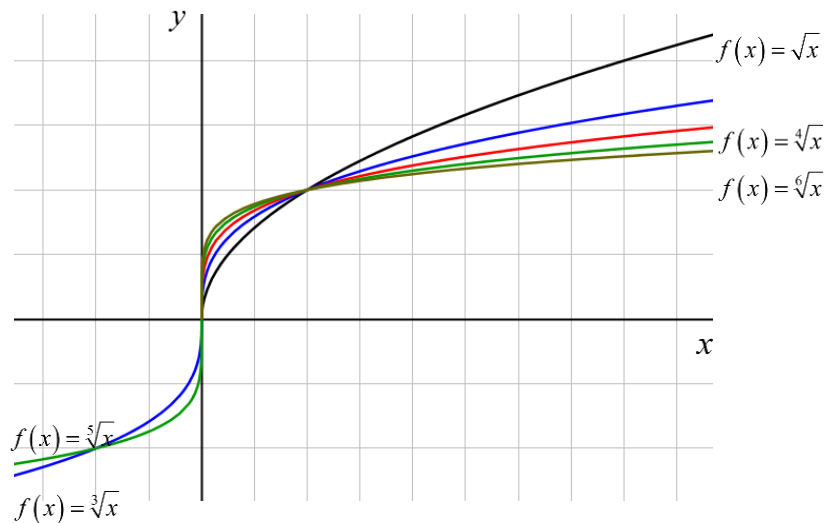
**סיכום כללי:**

**הגדרות כלליות:**

הצורה הכללית של פונקציות חזקה עם מעריך רציונאלי:  $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ .

תזכורת:  $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$ .

להלן מספר דוגמאות לפונקציה מהצורה:  $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ .



**תכונות כלליות:**

1. פונקציית חזקה:  $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$  מוגדרת לכל  $x$  עבור  $n$  אי-זוגי ומוגדרת לכל  $x \geq 0$  עבור  $n$  זוגי.
2. הפונקציה:  $f(x) = (ax+b)^{\frac{m}{n}}$  מוגדרת לכל  $x$  עבור  $n$  אי-זוגי ולכל  $x \geq -\frac{b}{a}$  עבור  $n$  זוגי.

**נגזרת של פונקציות חזקה:**

הפונקציה	הנגזרת
$y = x^{\frac{m}{n}}$	$y' = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$
$y = (ax+b)^{\frac{m}{n}}$	$y' = a \cdot \frac{m}{n} (ax+b)^{\frac{m}{n}-1}$

**שאלות:**

(1) כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א.  $y = \sqrt[4]{x}$     ב.  $y = \sqrt[7]{x}$     ג.  $y = \sqrt[3]{x+1}$     ד.  $y = \sqrt[8]{2-3x}$   
 ה.  $y = \frac{1}{\sqrt[6]{x}}$     ו.  $y = \frac{1}{\sqrt[7]{x}}$     ז.  $y = \frac{3x}{\sqrt[3]{3x+7}}$     ח.  $y = \frac{x^2-2x}{\sqrt[20]{(2x-4)^3}}$

(2) גזור את הפונקציות הבאות:

א.  $y = 4x + \sqrt[4]{x}$     ב.  $y = 27 - \sqrt[3]{x+1}$   
 ג.  $y = (x+2)^2 \cdot \sqrt[3]{x}$     ד.  $y = (3-x^3) \cdot \sqrt[6]{x}$   
 ה.  $y = \sqrt[3]{(3x+1)^5}$     ו.  $y = \sqrt[10]{(8-7x)^7}$   
 ז.  $y = (x^2-4) \cdot \sqrt[8]{(4x+3)^3}$     ח.  $y = x^3 \cdot \sqrt[7]{1-x}$   
 ט.  $y = \frac{6}{\sqrt[5]{x+2}}$     י.  $y = \frac{2}{\sqrt[7]{(4-3x)^4}}$

(3) גזור פעמיים את הפונקציות הבאות:

א.  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$     ב.  $f(x) = \sqrt[3]{x^2-1}$   
 ג.  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x)$

**תשובות סופיות:**

(1) א.  $x \geq 0$       ב. כל  $x$       ג. כל  $x$       ד.  $x \leq \frac{2}{3}$

ה.  $x > 0$       ו.  $x \neq 0$       ז.  $x \neq -\frac{7}{3}$       ח.  $x > 2$

(2) א.  $y' = 4 + \frac{1}{4\sqrt{x^3}}$       ב.  $y' = -\frac{1}{3\sqrt{(x+1)^2}}$       ג.  $y' = \frac{(x+2)(7x+2)}{3\sqrt{x^2}}$

ד.  $y' = \frac{3-19x^3}{6\sqrt{x^5}}$       ה.  $y' = 5\sqrt{(3x+1)^2}$       ו.  $y' = -\frac{49}{10\sqrt{(8-7x)^3}}$

ז.  $y' = \frac{9.5x^2 + 6x - 6}{\sqrt[8]{(4x+3)^5}}$       ח.  $y' = \frac{21x^2 - 22x^3}{7\sqrt{(1-x)^6}}$       ט.  $y' = -\frac{6}{5\sqrt{(x+2)^6}}$

י.  $y' = \frac{24}{7\sqrt{(4-3x)^{11}}}$

(3) א.  $f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$ ,  $f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}}$

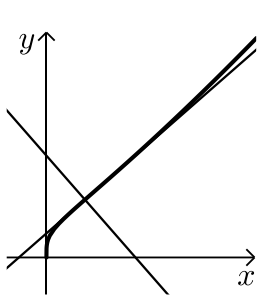
ב.  $f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$ ,  $f''(x) = -\frac{2}{9} \frac{x^2+3}{(x^2-1)^{5/3}}$

ג.  $f'(x) = \frac{2-5x}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$ ,  $f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}}$

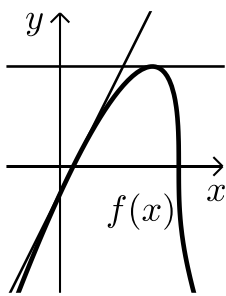
## שימושי הנגזרת:

### שאלות:

- 4) לפניך מספר פונקציות.  
מצא את ערך הנגזרת של הפונקציה בנקודה המצוינת לידה:
- א.  $y = \frac{10}{\sqrt[5]{x^4}}$  ;  $x = 1$   
 ב.  $y = 2x + \sqrt[3]{3x-1}$  ;  $x = 3$
- 5) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה:  $y = \sqrt[4]{6-x} - x$  בנקודה שבה:  $x = -10$ .



- 6) באיור שלפניך נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = (2x+4) \cdot \sqrt[4]{x}$ .
- א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך  $(1, 6)$ .
- ב. מצא את משוואת הנורמל לפונקציה בנקודה  $(1, 6)$ .
- ג. חשב את השטח הנוצר ע"י שני הישרים והצירים.



- 7) באיור שלפניך מתואר הגרף של הפונקציה:  $f(x) = (x-1) \cdot \sqrt[3]{9-x}$ .
- א. מצא נקודה על הפונקציה ששיפוע המשיק העובר דרכה הוא 0.
- ב. כתוב את משוואת המשיק העובר דרך הנקודה שמצאת בסעיף הקודם.
- ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$  הקרובה יותר לראשית.
- ד. חשב את שטח המשולש הנוצר בין שני המשיקים שמצאת וציר ה- $y$ .

- 8) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \sqrt[4]{2x+7} - Ax^2$ , ( $A$  פרמטר).  
 ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה:  $x = 4.5$  הוא:  $m = -\frac{1}{2}$ .  
 מצא את  $A$ .

- (9) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt[5]{1-x}}{Ax+B}$  (פרמטרים  $A, B$ ). משוואת המשיק לגרף הפונקציה דרך הנקודה:  $x=2$  היא:  $45y = 2x - 19$ . מצא את  $A$  ואת  $B$ .

**תשובות סופיות:**

- (4) א. -8      ב. 2.25
- (5)  $33x + 32y - 54 = 0 \leftarrow y = -\frac{33}{32}x + 1\frac{11}{16}$
- (6) א.  $y = 3.5x + 2.5$       ב.  $y = -\frac{2}{7}x + 6\frac{2}{7}$       ג. 67.25 סמ"ר
- (7) א.  $(7, 6\sqrt[3]{2})$       ב.  $y = 6\sqrt[3]{2}$       ג.  $y = 2x - 2$       ד. 22.84 סמ"ר
- (8)  $A = \frac{1}{16}$
- (9)  $A = B = 1$

## חקירה של פונקציות חזקה:

### שאלות:

10 חקור את הפונקציה:  $f(x) = (x^2 - 36)\sqrt[4]{x}$  לפי הסעיפים הבאים:

- תחום הגדרה.
- מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
- מציאת נקודות קיצון מקומיות (פנימיות) וקצה וקביעת סוגן.
- מציאת תחומי העלייה והירידה.
- מציאת אסימפטוטות אנכיות.
- סרטוט סקיצה.

11 חקור את הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sqrt[5]{8x-2}}{x^2+1}$  לפי הסעיפים הבאים:

- תחום הגדרה.
- מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
- מציאת נקודות קיצון מקומיות (פנימיות) וקצה וקביעת סוגן.
- מציאת תחומי העלייה והירידה.
- מציאת אסימפטוטות אנכיות.
- סרטוט סקיצה.

12 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - 6$ .

- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- הוכח כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מגדירים פונקציה נוספת:  $g(x) = -f(x)$ . קבע לגבי כל טענה האם היא נכונה או שגויה. נמק.
  - לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.
  - שתי הפונקציות חותכות את הצירים באותן הנקודות.
  - שתי הפונקציות עולות בכל תחום הגדרתן.

- 13** נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^3 + k\sqrt[3]{x} + 8$ ,  $k$  פרמטר.
- ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה:  $x = -2.741$ .
- מצא את ערך הפרמטר  $k$ , עגל למספר שלם.
  - הראה כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת גם היא על ציר ה- $x$ .
  - כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
  - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
  - העזר בסקיצה וקבע כמה פתרונות יהיו למשוואה הבאה:  $x^3 - 9\sqrt[3]{x} = 8$ .

- 14** נתונות הפונקציות הבאות:  $f(x) = (x-2)^2$ ,  $g(x) = \sqrt[3]{2x+2.6}$ .
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות עם ציר ה- $x$ .
  - מגדירים פונקציה חדשה:  $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ .
  - כתוב מפורשות את הפונקציה  $h(x)$  ואת תחום הגדרתה.
  - מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה  $h(x)$ .
  - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $h(x)$ .
  - מצא עבור אלו ערכים של  $k$  יחתוך הישר  $y = k$  את גרף הפונקציה ב-3 נקודות שונות.

- 15** נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \frac{5x^2 - 66x - 440}{\sqrt[3]{x}}$ .
- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?  
האם יש לפונקציה אסימפטוטה אנכית?
  - האם הפונקציה חותכת את הצירים בתחום:  $[0:18]$ ? נמק ע"י חישוב.
  - מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
  - סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
  - מגדירים פונקציה נוספת  $g(x)$  המקיימת:  $g(x) = -f(x)$ .
- לפניך מספר טענות המתייחסות לפונקציה  $g(x)$ . קבע אלו מהטענות הבאות נכונות ואלו שגויות. נמק ע"י הסבר או חישוב מתאים.
- $g(x)$  חיובית בכל התחום  $[0:18]$ .
  - ל- $g(x)$  אותן נקודות קיצון (אותם שיעורים ואותו סוג) כמו  $f(x)$ .
  - ל- $g(x)$  אותו תחום הגדרה כמו ל- $f(x)$ .

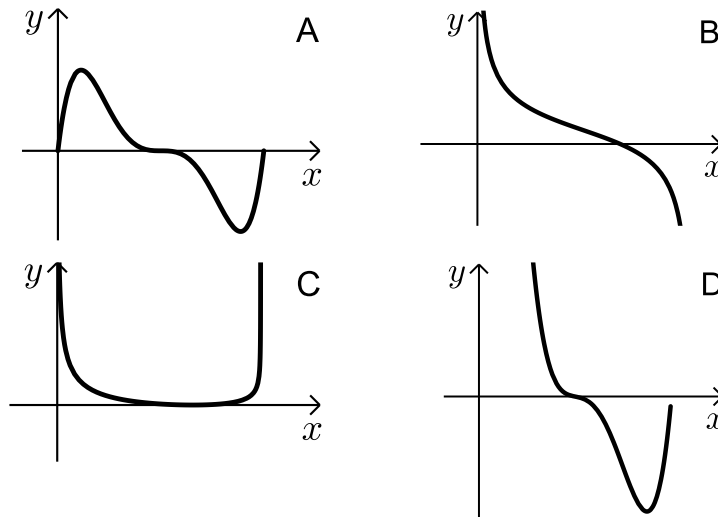
16 נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{9-x}$ .

- א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?  
 ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (מקומיות וקצה) וקבע את סוגן.  
 ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.  
 ד. על סמך הסעיפים הקודמים קבע כמה פתרונות יש למשוואה הבאה:  $\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{9-x} = k$  כאשר:

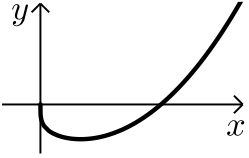
i.  $k = -2$

ii.  $k = 1$

- ה. קבע איזה מבין הגרפים הבאים (A-D) מתאר את הנגזרת של הפונקציה. נמק.

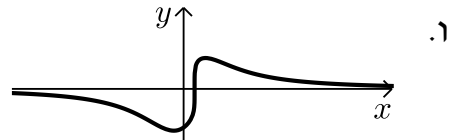



**תשובות סופיות:**

**(10)** א.  $x \geq 0$     ב.  $(0,0)$  ,  $(6,0)$     ג.  $\min(2,-38)$     ד. יורדת:  $0 < x < 2$  , עולה:  $x > 2$     ה. אין.    ו. 

**(11)** א. כל  $x$     ב.  $(0,-1.14)$  ,  $(0.25,0)$     ג.  $\max(0.5,0.91)$  ,  $\min(-\frac{2}{9},-1.24)$

ד. יורדת:  $x > \frac{1}{2}$  ,  $x < -\frac{2}{9}$  , עולה:  $-\frac{2}{9} < x < \frac{1}{2}$     ה. אין



**(12)** א.  $x \geq 0$     ב.  $(0,-6)$  ,  $(64,0)$     ג. הנגזרת:  $f'(x) = \frac{1+2\sqrt[6]{x}}{6x^{5/6}} > 0$  בת.ה.    ד. 

ה. i. נכון    ה. ii. לא נכון, החיתוך עם ציר ה- $y$  שונה.    ה. iii. לא נכון.

**(13)** א.  $k = -9$     ב.  $\min(1,0)$  ,  $\max(-1,16)$     ג. עולה:  $x < -1$  ,  $x > 1$

יורדת:  $-1 < x < 1$     ה. 2.

**(14)** א.  $(-1.3,0)$  ,  $(2,0)$     ב.  $h(x) = (x-2)^2 \sqrt[5]{2x+2.6}$  , כל  $x$

ג.  $\min(2,0)$  ,  $\max(-1,8.126)$     ה.  $0 < k < 8.126$

**(15)** א.  $x = 0$  ,  $x > 0$  אסימפטוטה אנכית.    ב. לא

ג.  $\min(4,-495.27)$  ,  $\max(2,-491.77)$     ה. i. נכון    ה. ii. לא נכון.

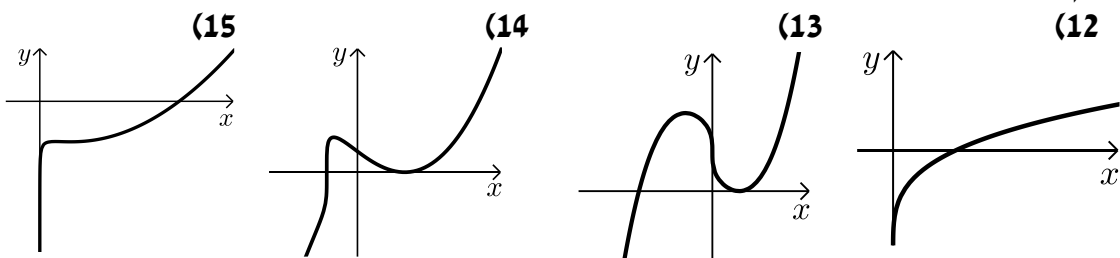
ה. iii. נכון.

**(16)** א.  $0 \leq x \leq 9$     ב.  $\min(0,0)$  , קצה,  $\min(9,0)$  קצה.

ג. עולה:  $0 < x < 6$  , יורדת:  $6 < x < 9$     ד. i.  $k = -2$  אין פתרון.

ii.  $k = 1$  שני פתרונות.    ה. B.

**סקיצות לשאלות:**



# מתמטיקה 0

פרק 21 - חשבון אינטגרלי - האינטגרל הכללי

תוכן העניינים

1. חישובי אינטגרלים ..... 353
2. מציאת פונקציה קדומה ..... 358

## חישובי אינטגרלים:

### סיכום כללי:

#### הגדרה וכללי האינטגרציה:

- כלל האינטגרציה של פונקציה פולינומית:  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$
- עבור מקדם קבוע  $a$  נקבל:  $\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$
- כללי האינטגרציה של פונקציות טריגונומטריות:

$$\int \sin x dx = -\cos x + c, \quad \int \cos x dx = \sin x + c, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

### שאלות:

#### 1 מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int x^3 dx$	ב. $\int 12x^5 dx$
ג. $\int x^4 dx$	ד. $\int 2x^3 dx$
ה. $\int \frac{2}{3} x^5 dx$	ו. $\int 7 dx$
ז. $\int \left( \frac{5}{6} x^4 + 16x^3 - \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{1}{3} \right) dx$	ח. $\int \left( \frac{4x^3}{5} - ax^2 - \frac{2ax}{b} + b \right) dx$

#### 2 מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int x^{-3} dx$	ב. $\int \frac{1}{x^3} dx$
ג. $\int \left( \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \frac{a}{x^3} + \frac{x}{a} \right) dx$	ד. $\int \frac{2x^3 + x - 2}{x^3} dx$

3 מצא את האינטגרלים הבאים :

$$\begin{array}{ll} \int \sqrt{x} dx & \text{ב.} \\ \int \left( \frac{4}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x} \right) dx & \text{ד.} \end{array} \quad \begin{array}{l} \int x^{\frac{1}{2}} dx \quad \text{א.} \\ \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad \text{ג.} \end{array}$$

4 מצא את האינטגרלים הבאים :

$$\begin{array}{lll} \int \frac{18}{(6x+5)^2} dx & \text{ג.} & \int 3(2-7x)^4 dx \quad \text{ב.} & \int (5x-1)^3 dx \quad \text{א.} \\ & & \int \sqrt{ax+bdx} \quad \text{ה.} & \int \frac{1}{\sqrt{6x-3}} dx \quad \text{ד.} \end{array}$$

5 מצא את תוצאת החילוק :

$$\begin{array}{ll} \frac{x^3+x^2+3x-5}{x-1} = & \text{ב.} \\ \frac{x^3-4x^2+9}{x-3} = & \text{ד.} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \frac{x^2-5x-14}{x+2} = & \text{א.} \\ \frac{x^4+x^3-x^2+14x-3}{x+3} = & \text{ג.} \\ \frac{x^3+5x^2-4x-20}{x+5} = & \text{ה.} \end{array}$$

6 מצא את האינטגרלים הבאים :

$$\begin{array}{ll} \int \frac{x^3+x^2+3x-5}{x-1} dx & \text{ב.} \\ \int \frac{x^3-4x^2+9}{x-3} dx & \text{ד.} \\ \int \frac{2x^5+x^4-4x^2+1}{2x+1} dx & \text{ו.} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \int \frac{x^2-5x-14}{x+2} dx & \text{א.} \\ \int \frac{x^4+x^3-x^2+14x-3}{x+3} dx & \text{ג.} \\ \int \frac{x^3+5x^2-4x-20}{x+5} dx & \text{ה.} \end{array}$$

7 מצא את האינטגרלים הבאים :

$$\begin{array}{ll} \int \frac{x^2}{(x^3+6)^2} dx & \text{ב.} \\ \int \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} dx & \text{ד.} \\ \int 8x(x^2+1)^3 dx & \text{ו.} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \int -\frac{2x}{(x^2-1)^2} dx & \text{א.} \\ \int \frac{x-2}{(x^2-4x+1)^2} dx & \text{ג.} \\ \int \frac{6x-3}{\sqrt{x-x^2}} dx & \text{ה.} \\ \int (2-x^2)(6x-x^3)^2 dx & \text{ז.} \end{array}$$

8) חשב את האינטגרלים הבאים :

א.  $\int \left( \sin x - 3 \cos x + \frac{4}{\cos^2 x} + 5 \right) dx$

ב.  $\int \left( \cos 3x - 2 \sin 4x + \frac{4}{\cos^2 3x} \right) dx$

ג.  $\int \left( \sin(\pi - x) + \frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x} \right) dx$

9) חשב את האינטגרלים הבאים (שימוש בזהויות) :

א.  $\int (2 \sin x \cos x) dx$

ב.  $\int (\sin 3x \cos 3x) dx$

ג.  $\int (\sin^4 x - \cos^4 x) dx$

ד.  $\int (\sin^2 x) dx$

10) חשב את האינטגרלים הבאים :

א.  $\int \left( \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \right) dx$

ב.  $\int \left( \frac{\sin x}{\cos^2 x} \right) dx$

ג.  $\int (\cos x \sin^2 x) dx$

11) חשב את האינטגרלים הבאים :

א.  $\int \left( \sin 2x - 4 \cos \frac{x}{3} \right) dx$

ב.  $\int \frac{1}{\cos^2 4x} dx$

ג.  $\int \frac{1}{\sin^2 10x} dx$

ד.  $\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$

ה.  $\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx$

ו.  $\int (\cos x + \sin x)^2 dx$

ז.  $\int (\sin x \cos x \cos(2x)) dx$

ח.  $\int \tan^2 x dx$

ט.  $\int \frac{1}{(\sin x \cos x)^2} dx$

י.  $\int \cos^2 x dx$

יא.  $\int \sin^2 4x dx$

12) חשב את ערכי האינטגרלים הבאים (שאלות אתגר):

$$\int (\cos^4 x + \sin^4 x) dx \quad \text{א.} \quad \int \cos^4 x dx \quad \text{ב.}$$

$$\int \sin^4 4x dx \quad \text{ג.} \quad \int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx \quad \text{ד.}$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx \quad \text{ה.}$$

### תשובות סופיות:

$$7x + c \quad \text{א.} \quad \frac{x^4}{4} + c \quad \text{ב.} \quad 2x^6 + c \quad \text{ג.} \quad \frac{x^5}{5} + c \quad \text{ד.} \quad \frac{x^4}{2} + c \quad \text{ה.} \quad \frac{x^6}{9} + c \quad \text{ו.} \quad \frac{x^4}{5} + c \quad \text{ז.}$$

$$\frac{x^5}{6} + 4x^4 - \frac{x^3}{6} + 2x^2 - \frac{1}{3}x + c \quad \text{א.} \quad \frac{x^4}{5} - \frac{ax^3}{3} - \frac{ax^2}{b} + bx + c \quad \text{ב.}$$

$$- \frac{x^{-2}}{2} + c \quad \text{א.} \quad - \frac{1}{2x^2} + c \quad \text{ב.} \quad - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{a}{2x^2} + \frac{x^2}{2a} + c \quad \text{ג.} \quad 2x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + c \quad \text{ד.}$$

$$\frac{x^{1.5}}{1.5} + c \quad \text{א.} \quad \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c \quad \text{ב.} \quad 2\sqrt{x} + c \quad \text{ג.} \quad 8\sqrt{x} + 2\sqrt{x^3} + c \quad \text{ד.}$$

$$\frac{(5x-1)^4}{20} + c \quad \text{א.} \quad - \frac{3(2-7x)^5}{35} + c \quad \text{ב.} \quad - \frac{3}{6x+5} + c \quad \text{ג.}$$

$$\frac{\sqrt{6x-3}}{3} + c \quad \text{א.} \quad \frac{2\sqrt{(ax+b)^3}}{3a} + c \quad \text{ב.}$$

$$x-7 \quad \text{א.} \quad x^2 + 2x + 5 \quad \text{ב.} \quad x^3 - 2x^2 + 5x - 1 \quad \text{ג.}$$

$$x^2 - x - 3 \quad \text{א.} \quad x^2 - 4 \quad \text{ב.}$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - x + c \quad \lambda \quad \frac{x^3}{3} + x^2 + 5x + c \quad \text{ב.} \quad \frac{x^2}{2} - 7x + c \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$\cdot \frac{x^5}{5} - x^2 + x + c \quad \text{ו.} \quad \frac{x^3}{3} - 4x + c \quad \text{ה.} \quad \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 3x + c \quad \text{ז.}$$

$$-\frac{1}{2(x^2 - 4x + 1)} + c \quad \lambda \quad -\frac{1}{3(x^3 + 6)} + c \quad \text{ב.} \quad \frac{1}{x^2 - 1} + c \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$(x^2 + 1)^4 + c \quad \text{ו.} \quad -6\sqrt{x - x^2} + c \quad \text{ה.} \quad \sqrt{x^2 + 2} + c \quad \text{ז.}$$

$$\cdot \frac{(6x - x^3)^3}{9} + c \quad \text{ט.}$$

$$\frac{\sin 3x}{3} + \frac{\cos 4x}{2} + \frac{4 \tan 3x}{3} + c \quad \text{ב.} \quad -\cos x - 3 \sin x + 4 \tan x + 5x + c \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$\cdot \cos(\pi - x) + \tan x + x + c \quad \text{ג.}$$

$$-\frac{\sin 2x}{2} + c \quad \lambda \quad -\frac{\cos 6x}{12} + c \quad \text{ב.} \quad -\frac{1}{2} \cos 2x + c \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$\cdot \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + c \quad \text{ז.}$$

$$\cdot \frac{1}{3} \sin^3 x + c \quad \lambda \quad \frac{1}{\cos x} + c \quad \text{ב.} \quad 2\sqrt{\sin x} + c \quad \text{א.} \quad (10)$$

$$-\frac{1}{10} \cot 10x + c \quad \lambda \quad \frac{1}{4} \tan 4x + c \quad \text{ב.} \quad -\frac{1}{2} \cos 2x - 12 \sin \frac{x}{3} + c \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$x - \frac{1}{2} \cos 2x + c \quad \text{ו.} \quad \frac{1}{2} \sin 2x + c \quad \text{ה.} \quad \frac{1}{2} \sin 2x + c \quad \text{ז.}$$

$$\tan x - \cot x + c \quad \text{ט.} \quad \tan x - x + c \quad \text{ח.} \quad -\frac{1}{16} \cos 4x + c \quad \text{ט.}$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{16} \sin 8x + c \quad \text{א.} \quad \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + c \quad \text{ז.}$$

$$\frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \quad \text{ב.} \quad \frac{3}{4}x + \frac{1}{16} \sin 4x + c \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$-\cot x - x + c \quad \text{ז.} \quad \frac{3}{8}x - \frac{1}{16} \sin 8x + \frac{1}{128} \sin 16x + c \quad \text{ג.}$$

$$-\cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + c \quad \text{ה.}$$

## מציאת פונקציה קדומה:

### שאלות:

- (1) נתונה נגזרת של פונקציה:  $f'(x) = 3x^2 - 7$ . מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה  $(-1, 2)$ .
- (2) נתונה נגזרת של פונקציה:  $f'(x) = 2x - 6$ . ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5. מצא את הפונקציה.
- (3) הנגזרת של פונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = x^2 - 8x + 2$ . נתון:  $f(-2) = 1$ .  
 א. מצא את  $f(x)$ .  
 ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 1$ .
- (4) נתונה הנגזרת של פונקציה  $f(x)$ :  $f'(x) = 9x^2 - 4$ . ערך הפונקציה בנקודה  $x = 1$  הוא 3.  
 א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 1$ .  
 ב. מצא את  $f(x)$ .  
 ג. מצא את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.
- (5) הנגזרת של פונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = 2x - 3$ . לפונקציה משיק ששיפועו הוא -3.  
 א. מצא את שיעור ה- $x$  של נקודת ההשקה.  
 ב. מצא את  $f(x)$  אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא 7.
- (6) הנגזרת של פונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = -6x - 5$ . המשיק לפונקציה בנקודה A יוצר זווית של  $45^\circ$  עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$ .  
 א. מצא את שיעור ה- $x$  של הנקודה A.  
 ב. מצא את  $f(x)$  אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא -6.  
 ג. מצא את משוואת המשיק.

- (7) הנגזרת של פונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = 3x - 4$ .  
 הישר  $y = 2x + 5$  משיק לגרף הפונקציה. מצא את  $f(x)$ .

### תשובות סופיות:

- (1)  $f(x) = x^3 - 7x + 5$
- (2)  $f(x) = x^2 - 6x + 14$
- (3) א.  $f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 2x + 23\frac{2}{3}$  ב.  $y = -5x + 27$
- (4) א.  $y = 5x - 2$  ב.  $f(x) = 3x^3 - 4x + 4$  ג.  $(0, -2), (0.4, 0)$
- (5) א.  $x = 0$  ב.  $f(x) = x^2 - 3x + 7$
- (6) א.  $x = -1$  ב.  $f(x) = -3x^2 - 5x - 8$  ג.  $y = x - 5$
- (7)  $f(x) = \frac{3x^2}{2} - 4x + 11$

# מתמטיקה 0

פרק 22 - חשבון אינטגרלי - פונקציה מעריכית, לוגריתמית וחזקה

תוכן העניינים

- 1. פונקציה מעריכית..... 360
- 2. פונקציה לוגריתמית..... 366
- 3. פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי..... 372

## פונקציה מעריכית:

סיכום כללי:

אינטגרלים מיידיים של פונקציות מעריכיות:

אינטגרלים יסודיים	אינטגרלים של פונקציות מורכבות
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$

שאלות:

אינטגרל כללי:

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

א.  $\int (5e^x - e^{3x} + e^{-x} + 1) dx$

ג.  $\int (6\sqrt{e^{4x-1}}) dx$

ב.  $\int (3^x + 5^{2x}) dx$

ד.  $\int (e^x + e^{-x})^2 dx$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים:

א.  $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} dx$

ב.  $\int \frac{3e^{3x} - 5e^{2x} + 4e^x - 2}{e^x - 1} dx$

(3) חשב את האינטגרלים הבאים:

א.  $\int (e^{4x} + e^{-x}) dx$

ג.  $\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx$

ב.  $\int (e^{x+1})^2 dx$

ד.  $\int \left( 4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx$

4) חשב את האינטגרלים הבאים:

א.  $\int \left( \frac{e^x}{\sqrt{e^x+3}} \right) dx$     ב.  $\int \left( \frac{3-e^x}{(e^x-3x)^2} \right) dx$     ג.  $\int (xe^{x^2}) dx$

**אינטגרל מסוים:**

5) נתונה נגזרת של פונקציה:  $f'(x) = 2e^x - \frac{1}{e^x}$ .

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה  $\left( \ln 2, 3\frac{1}{4} \right)$ .

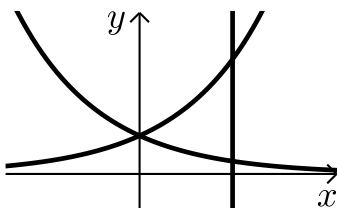
6) נתונה נגזרת של פונקציה:  $f'(x) = e^{2x} + e^x - 2$ .

מצא את הפונקציה אם ידוע שערך הפונקציה בנקודת המינימום שלה הוא  $\frac{1}{2}$ .

7) נתונה נגזרת של פונקציה:  $f'(x) = 6x^2 e^{x^3} - \frac{1}{x^2}$ .

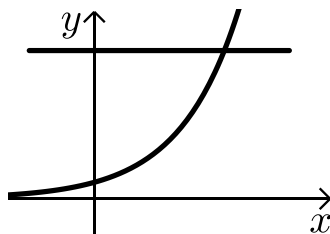
מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה  $\left( -1, \frac{2}{e} \right)$ .

**חישובי שטחים:**



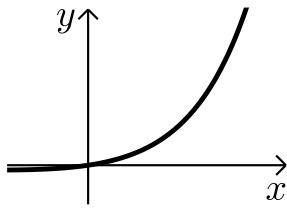
8) נתונות הפונקציות:  $f(x) = e^x$ ,  $g(x) = e^{-x}$ .

מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות לישר  $x = \ln 3$ .

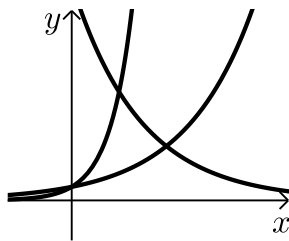


9) נתונה הפונקציה:  $f(x) = 3^x$ .

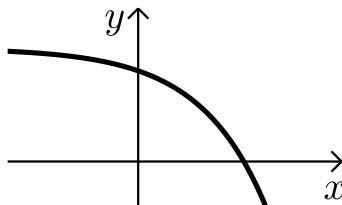
מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישר  $y = 9$  וציר ה- $y$ .



- 10** נתונה הפונקציה:  $f(x) = e^{2x} - e^x$ .  
 לפונקציה העבירו משיק בראשית הצירים.  
 מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,  
 המשיק והישר  $x = 2$ .



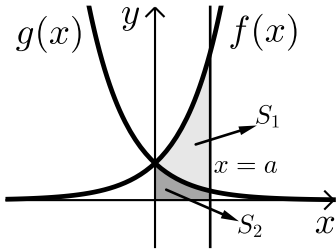
- 11** נתונות הפונקציות:  
 $f(x) = e^x$ ,  $g(x) = e^{3x}$ ,  $h(x) = 16e^{-x}$ .  
 חשב את גודל השטח הכלוא שבין שלוש הפונקציות.



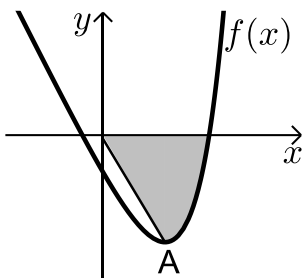
- 12** נתונה הפונקציה:  $f(x) = 5 - e^x$ .  
 העבירו לפונקציה משיק ששיפועו  $-e$ .  
 חשב את גודל השטח הכלוא בין  
 הפונקציה, המשיק וציר ה- $x$ .  
 ניתן להשאיר  $e$  ו- $\ln$  בתשובה.

- 13** נתונה הפונקציה:  $f(x) = e^{bx}$ ,  $(0 < b)$ .  
 גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר  
 בראשית הצירים וציר ה- $y$  הוא  $\frac{e-2}{4}$ .  
 מצא את ערכו של הפרמטר  $b$ .

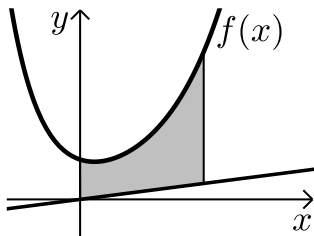
- 14** נתונות הפונקציות:  $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ ,  $g(x) = e^{-x}$ .  
 מנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה  $g(x)$  ברביע הראשון הורידו אנך לשני  
 הצירים. המשך האנך לציר ה- $y$  חותך את הפונקציה  $f(x)$  ומנקודת החיתוך  
 יורד אנך נוסף לציר ה- $x$  כך שנוצר מלבן.  
 הוכח כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא  $\frac{3}{e}$ .



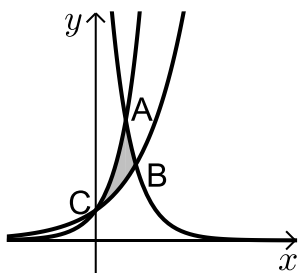
- 15** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:  $f(x) = e^{2x}$  ו-  $g(x) = e^{-2x}$ . מעבירים אנך לציר ה- $x$  את הישר  $x = a$ ,  $a > 0$ , כמתואר באיור. אנך זה יוצר את השטחים  $S_1$  ו-  $S_2$ . ידוע כי השטח  $S_1$  גדול פי 3 מהשטח  $S_2$ . מצא את  $a$ .



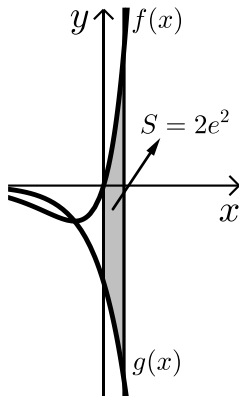
- 16** נתונה הפונקציה:  $f(x) = e^{2x-1} - 2ex - 2$ . הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה. א. מצא את שיעורי הנקודה A. מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים. ב. כתוב את משוואת הישר המחבר את הנקודה A עם הראשית. ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- $x$ , אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 1.7$ .



- 17** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{e^x + e^{ax}}{4}$ . ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה:  $(1, \frac{e^3 + 1}{4e^2})$ . א. מצא את  $a$  וכתוב את הפונקציה. ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה  $f(x)$  והישר:  $y = 0.1x$ . חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר  $y$  והאנך:  $x = 2$ .



- 18** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של שלוש פונקציות: I.  $f(x) = 2^x$ . II.  $g(x) = 4^x$ . III.  $h(x) = 2^{4-2x}$ . א. קבע איזה גרף מתאר כל פונקציה. ב. מצא את שיעורי הנקודות A, B ו- C. (נקודות החיתוך שבין הגרפים). ג. חשב את השטח המסומן באיור.



**19** ענה על הסעיפים הבאים:

א. גזור את הפונקציה הבאה:  $y = e^x(x-1)$ .

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

הפונקציות:  $f(x) = xe^x$ ,  $g(x) = -e^x$ .

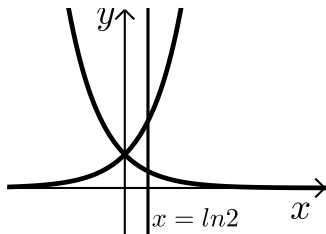
מעבירים ישר  $x = a$  ( $a > 0$ ), החותך את הגרפים

של שתי הפונקציות ויוצר את השטח המתואר

הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- $y$  והישר.

ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$ . מצא את  $a$ .

**חישובי נפחים:**



**20** נתונות הפונקציות:  $f(x) = e^x$ ,  $g(x) = e^{-x}$ .

השטח הכלוא בין הפונקציות והישר:  $x = \ln 2$

מסתובב סביב ציר ה- $x$ .

חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $5e^x - \frac{e^{3x}}{3} - e^{-x} + x + c$     ב.  $\frac{3^x}{\ln 3} + \frac{5^{2x}}{2\ln 5} + c$
- ג.  $3e^{2x-\frac{1}{2}} + c$     ד.  $\frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + c$
- (2) א.  $e^x + x + c$     ב.  $\frac{3e^{2x}}{2} - 2e^x + 2x + c$
- (3) א.  $\frac{1}{4}e^{4x} - e^{-x} + c$     ב.  $\frac{1}{2}e^{2x+2} + c$
- ג.  $\frac{0.4^x}{\ln 0.4} + \frac{3.2^x}{\ln 3.2} + \frac{200^x}{\ln 200} + c$     ד.  $8\sqrt{e^x} - \frac{3}{4}e^{-\frac{4x}{3}} + c$
- (4) א.  $2\sqrt{e^x+3} + c$     ב.  $\frac{1}{e^x-3x} + c$     ג.  $\frac{1}{2}e^{x^2} + c$
- (5)  $f(x) = 2e^x + e^{-x} - 1.25$
- (6)  $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + e^x - 2x - 1$
- (7)  $f(x) = 2e^{x^3} + \frac{1}{x} + 1$
- (8)  $S = 1\frac{1}{3}$  יח"ש
- (9)  $S = 10.72$  יח"ש
- (10)  $S = 18.41$  יח"ש
- (11)  $S = 3\frac{1}{3}$  יח"ש
- (12)  $S = 0.192$  יח"ש
- (13)  $b = 2$
- (15)  $a = \ln 2$
- (16) א.  $A(1, -e-2)$     ב.  $y = -(e+2)x$     ג.  $S = 4.744$  יח"ש
- (17) א.  $a = -2$     ב.  $f(x) = \frac{e^x + e^{-2x}}{4}$     ג.  $1.52$
- (18) א.  $C(0,1)$     ב.  $B\left(1\frac{1}{3}, 2.52\right)$     ג.  $A(1,4)$     ד.  $S = 1.03$  יח"ש
- (19) א.  $y' = xe^x$     ב.  $a = 2$
- (20)  $1\frac{1}{8}$  יח"ש

## פונקציה לוגריתמית:

### סיכום כללי:

אינטגרלים מיידיים של פונקציות לוגריתמיות:

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + c$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b  + c$

### שאלות:

#### אינטגרל כללי:

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \left( \frac{3}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{4}{3x-1} \right) dx \quad \text{א.} \quad \int \frac{x^2+3x-4}{x} dx \quad \text{ב.} \quad \int \frac{x+3}{x^2-9} dx \quad \text{ג.}$$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{x^2+3x+5}{x+1} dx \quad \text{א.} \quad \int \frac{x^3-x^2+5x-6}{x-2} dx \quad \text{ב.} \quad \int \frac{x^4+3}{x+1} dx \quad \text{ג.}$$

(3) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{2x}{x^2-3} dx \quad \text{א.} \quad \int \frac{x-1}{x^2-2x} dx \quad \text{ב.} \quad \int \frac{e^x}{e^x+5} dx \quad \text{ג.} \\ \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx \quad \text{ד.} \quad \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \quad \text{ה.}$$

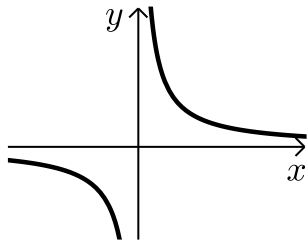
#### אינטגרל מסוים:

(4) נתונה נגזרת של פונקציה:  $f'(x) = 2x - \frac{1}{x-4}$ .

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה (5, 28).

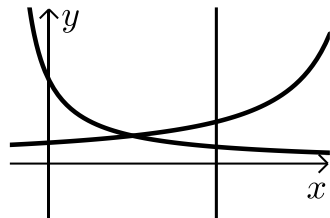
- (5) נתונה נגזרת שנייה של פונקציה:  $f''(x) = 6x - \frac{1}{x^2}$ . מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה  $(1, -2)$  וששיפועה בנקודה זו הוא 3.

**חישובי שטחים:**



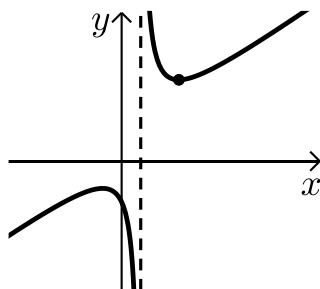
- (6) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים  $x = -1$  ו- $x = -4$  וציר ה- $x$ . ניתן להשאיר  $\ln$  בתשובה.



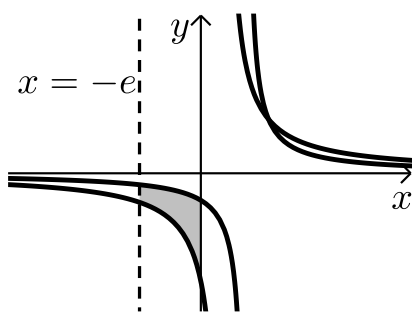
- (7) נתונות הפונקציות:  $f(x) = \frac{2}{x+1}$ ,  $f(x) = \frac{4}{8-x}$ .

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות, הישר  $x = 4$  והצירים.



- (8) נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ .

חשב את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודה שבה  $x = 2$  ואנך לציר ה- $x$  העובר בנקודת המינימום של הפונקציה. אפשר להשאיר ביטוי עם  $\ln$  בתשובה.

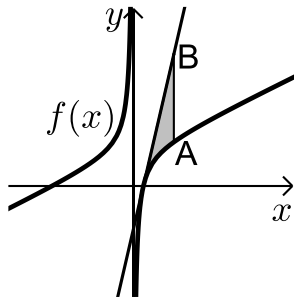


- (9) באיור שלפניך נתונות הפונקציות:  $f(x) = \frac{a}{x-1}$ .

ו-  $g(x) = \frac{a-1}{x-2}$  בתחום:  $x < 0$ .

ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה  $x = 3$ .

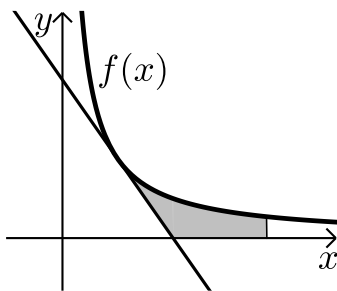
- א. מצא את  $a$  וכתוב את שתי הפונקציות.  
 ב. חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- $y$  והישר  $x = -e$ .



**10** נתונה הפונקציה:  $f(x) = 7 + ax + \frac{b}{x}$ .

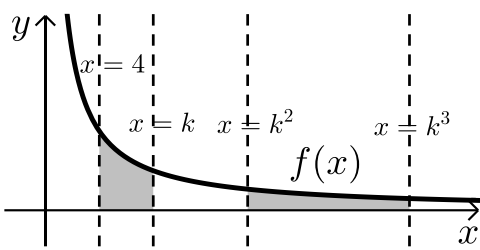
ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה  
בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$  היא:  $y = 18x - 9$ .  
א. מצא את  $a$  ו- $b$  וכתוב את הפונקציה.  
מעבירים ישר המקביל לציר ה- $y$  שחותך את גרף  
הפונקציה בנקודה A ואת משוואת המשיק בנקודה B.  
אורך הקטע AB הוא 18.

- ב. מצא את משוואת הישר הנ"ל אם ידוע כי הנקודה A  
נמצאת מימין לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.



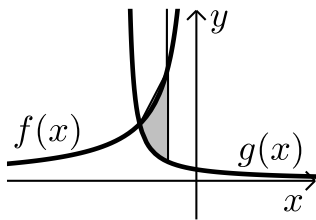
**11** הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$ .

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  
שבה:  $x = 2$  היא:  $y = 4 - x$ .  
א. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .  
ב. באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה  $f(x)$   
והמשיק בתחום:  $x > 0$ .  
חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק,  
ציר ה- $x$  והישר  $x = e^2$ .



**12** באיור שלפניך נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{2}{x}$ .

בתחום:  $x > 0$ . מעבירים את הישרים:  
 $x = 4$ ,  $x = k$ ,  $x = k^2$ ,  $x = k^3$   
כמתואר  $x > 4$ .  
א. הבע באמצעות  $k$  את השטחים  $S_1$  ו- $S_2$ .  
ב. הראה כי ההפרש:  $S_2 - S_1$  אינו תלוי ב- $k$  וחשב את ערכו.  
ג. נתון כי השטח  $S_2$  גדול פי 3 מהשטח  $S_1$ . מצא את  $k$ .



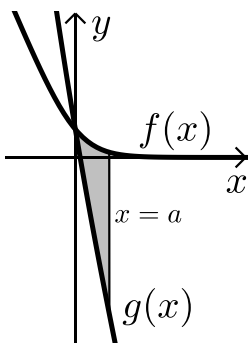
**13** נתונות הפונקציות:  $f(x) = -\frac{4}{x}$  ו-  $g(x) = \frac{k}{2x+5}$ .

גרף הפונקציה  $g(x)$  חותך את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = 0.4$ .

א. מצא את הפונקציה  $g(x)$ .

ב. מצא את נקודת החיתוך של שני הגרפים.

ג. חשב את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר  $x = -1$ .



**14** באיור מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$  ו-  $g(x) = \ln(e^{-2x} + e^{-3x})$

בתחום:  $(x \geq 0)$ .

א. הראה כי הגרפים נחתכים על ציר ה- $y$ .

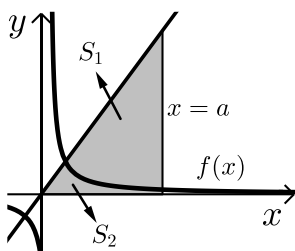
ב. מעבירים ישר  $x = a$ ,  $(a > 1)$  המאונך

לציר ה- $x$  אשר חותך את הגרפים של שתי

הפונקציות ויוצר את השטח  $S$  (ראה איור).

מצא את ערכו של  $a$  עבורו מתקיים:  $S = 4$ .

**15** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{2}{3x-1}$  והישר:  $y = x$ .



א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציות הנמצאת ברביע הראשון.

מעבירים אנך לציר ה- $x$   $x = a$  הנמצא מימין

לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.

האנך חותך את הגרפים ויוצר את השטחים  $S_1$  ו- $S_2$

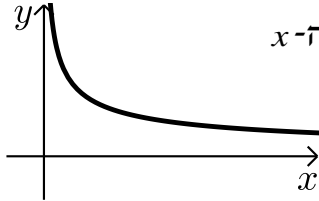
המתוארים האיור.

ב. מצא את הערך של  $a$  עבורו השטח  $S_2$  יהיה שווה ל-  $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \ln 7$ .

ג. עבור ערך ה- $a$  שמצאת בסעיף הקודם חשב את יחס השטחים:  $\frac{S_1}{S_2}$ .

## חישובי נפחים:

$$(16) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$



השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים  $x=1$  ו- $x=3$  וציר ה- $x$  מסתובב סביב ציר ה- $x$ . מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר באופן זה. אפשר להשאיר  $\ln$  בתשובה.

$$(17) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}$$

השטח הכלוא בין הפונקציה, הצירים והישר  $x = \ln \sqrt{3}$  מסתובב סביב ציר ה- $x$ . חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

$$(18) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים  $x=a$  ו- $x=a+3$  ( $a > 0$ ), וציר ה- $x$  מסתובב סביב ציר ה- $x$ . חשב את נפח גוף הסיבוב המינימלי שנוצר באופן זה.

## תשובות סופיות:

$$\ln|x-3|+c \quad \lambda \quad \frac{x^2}{2}+3x-4\ln|x|+c \quad \text{ב.} \quad 3\ln|x|+2\ln|x+1|-\frac{4\ln|3x-1|}{3}+c \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+7x+8\ln|x-2|+c \quad \text{ב.} \quad \frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x+1|+c \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+4\ln|x+1|+c \quad \lambda$$

$$\ln|e^x+5|+c \quad \lambda \quad \frac{1}{2}\ln|x^2-2x|+c \quad \text{ב.} \quad \ln|x^2-3|+c \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$\ln|\sin x|+c \quad \text{ה.} \quad \ln|e^x+e^{-x}|+c \quad \text{ז.}$$

$$f(x)=x^2-\ln|x-4|+3 \quad (4)$$

$$f(x)=x^3+\ln|x|-x-2 \quad (5)$$

$$S = \text{יח"ש} \ln 4 \quad (6)$$

$$S = \text{יח"ש} 2.17 \quad (7)$$

$$S = \text{יח"ש} 4\ln 2 - 2 \quad (8)$$

$$S = \text{יח"ש} 1.76 \quad \text{ב.} \quad f(x) = \frac{2}{x-1}, \quad g(x) = \frac{1}{x-2}, \quad a=2 \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$x=2 \quad \text{ב.} \quad f(x) = 7+2x-\frac{4}{x}, \quad a=2, \quad b=-4 \quad \text{א.} \quad (10)$$

$$S = 6 + \ln 256 \approx \text{יח"ש} 11.54 \quad \lambda$$

$$S = \text{יח"ש} 6-4\ln 2 \quad \text{ב.} \quad f(x) = \frac{4}{x} \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$k=8 \quad \lambda \quad S_2 - S_1 = \ln 16 \quad \text{ב.} \quad S_1 = 2\ln k - \ln 16, \quad S_2 = 2\ln k \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$S = \text{יח"ש} \ln 5 \frac{1}{3} \approx 1.674 \quad \lambda \quad (-2, 2) \quad \text{ב.} \quad g(x) = \frac{2}{2x+5} \quad \text{א.} \quad (13)$$

$$a=2 \quad \text{ב.} \quad (14)$$

$$\frac{S_1}{S_2} = 5.955 \quad \lambda \quad a=5 \quad \text{ב.} \quad (1, 1) \quad \text{א.} \quad (15)$$

$$V = \text{יח"נ} \pi \ln 3 \quad (16)$$

$$V = \text{יח"נ} \frac{\pi}{2} \ln 2 \quad (17)$$

$$V = \text{יח"נ} \pi \left( 19 \frac{1}{2} + 4 \ln 4 \right) \quad (18)$$

## פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי:

### סיכום כללי:

אינטגרלים מיידיים של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי:

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \sqrt[n]{x^m} dx = \int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + c$	$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx = \int (ax+b)^{\frac{m}{n}} dx = \frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a \cdot \left(\frac{m}{n}+1\right)} + c$

תנאי לקיום האינטגרציה:  $\frac{m}{n} \neq -1$ .

### שאלות:

אינטגרל של פונקצית חזקה:

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\begin{array}{lll} \int (x \cdot \sqrt[5]{x}) dx & \text{ג.} & \int (4x - 2\sqrt[4]{x}) dx & \text{ב.} & \int \sqrt[3]{x} dx & \text{א.} \\ \int \frac{x^3 - 3x + 5}{\sqrt{x}} dx & \text{ו.} & \int \frac{x+4}{\sqrt[4]{x}} dx & \text{ה.} & \int \frac{3}{\sqrt[3]{x}} dx & \text{ד.} \\ \int \frac{3}{\sqrt[8]{7x+12}} dx & \text{ט.} & \int \sqrt[4]{5-x} dx & \text{ח.} & \int \sqrt[3]{2x-3} dx & \text{ז.} \\ & & & & \int \frac{7}{\sqrt[5]{14-2x}} dx & \text{י.} \end{array}$$

(2) חשב את ערכי האינטגרלים הבאים:

$$\begin{array}{lll} \int_{-10}^5 \frac{2}{\sqrt[4]{6-x}} dx & \text{ג.} & \int_3^{16} (\sqrt[4]{5x+1}) dx & \text{ב.} & \int_0^8 (x + \sqrt[5]{4x}) dx & \text{א.} \end{array}$$

**אינטגרל מסוים:**

(3) נתונה הנגזרת הבאה:  $f'(x) = 2x - \sqrt[3]{4x}$

ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה  $(2, 3)$ .  
מצא את הפונקציה.

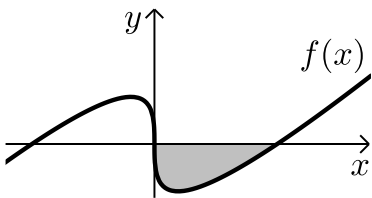
(4) נתונה הנגזרת הבאה:  $f'(x) = \sqrt[3]{5x+7}$

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 4$ .  
מצא את הפונקציה.

(5) נתונה הנגזרת הבאה:  $f'(x) = \frac{10}{\sqrt[3]{x+1}} + (x-1)^2$

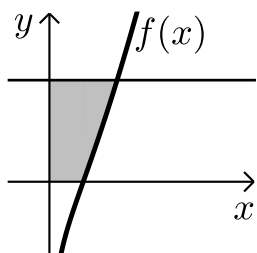
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = -6$ .  
מצא את הפונקציה.

**חישובי שטחים:**



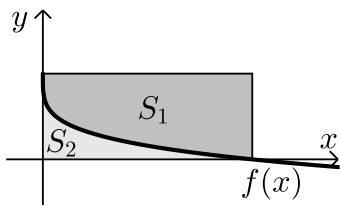
(6) באיור שלפניך מופיע גרף הפונקציה:  $f(x) = x - 4\sqrt[3]{x}$

- א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- ב. חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.

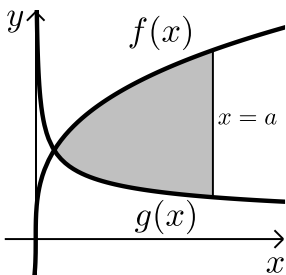


(7) באיור שלפניך מצויר גרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}$

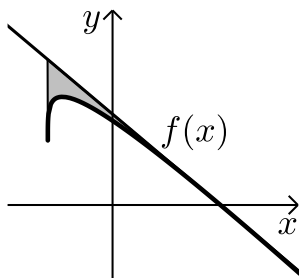
- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .
- ג. מעבירים אנך לציר ה- $y$  מהנקודה  $(4, 6)$ .  
חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והצירים.



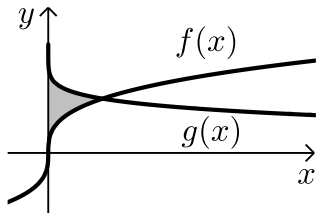
- 8 באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:  $f(x) = 2 - \sqrt[4]{x}$ .  
 מעבירים אנכים לצירים מנקודות החיתוך של  
 גרף הפונקציה עם הצירים כך שנוצר מלבן.  
 מסמנים את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים:  
 ב-  $S_1$  ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב-  $S_2$ .  
 מצא את היחס:  $\frac{S_1}{S_2}$ .



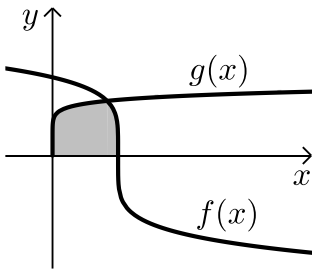
- 9 באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות  
 הבאות:  $f(x) = 4\sqrt[3]{x}$ ,  $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ .  
 א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים בתחום:  $x > 0$ .  
 ב. מעבירים אנך לציר ה- $x$ ,  $x = a$ , ( $a$  פרמטר).  
 ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים מנקודת  
 החיתוך שלהם ועד לאנך הוא:  $42 \frac{3}{16}$  סמ"ר.  
 מצא את  $a$ .



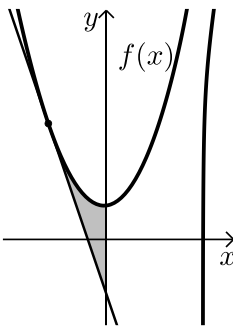
- 10 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - ax$ , ( $a$  פרמטר).  
 ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 2$ .  
 א. מצא את הפרמטר  $a$  וכתוב את הפונקציה.  
 ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?  
 ג. מצא את נקודת קיצון הקצה של הפונקציה.  
 ד. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר  
 דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ .  
 ה. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה  $f(x)$   
 והמשיק שמצאת בסעיף הקודם. מורידים אנך  
 מהמשיק אל נקודת קיצון הקצה של הפונקציה שמצאת בסעיף ג'.  
 חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה  $f(x)$  והמשיק.



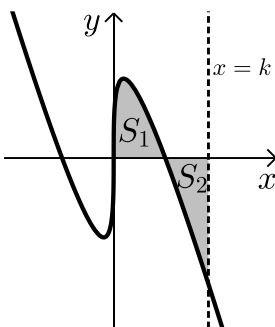
- 11** באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות:  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $g(x) = 2 - \sqrt{x}$ .  
 א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.  
 ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- $y$ .



- 12** הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$ .  
 ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה:  $x = 1.2$ .  
 א. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .  
 ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $f(x)$ , גרף הפונקציה:  $g(x) = \sqrt[10]{x}$  וציר ה- $x$ .



- 13** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{5-x}} + \frac{1}{2}x^2$ .  
 א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = -3$ .  
 ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $f(x)$ , המשיק וציר ה- $y$ .



- 14** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt[3]{x} - 4x$ .  
 א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?  
 ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
 ג. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה ברביע הראשון. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$  יסומן ב- $S_1$ .  
 מעבירים ישר  $x = k$  אשר יוצר את השטח  $S_2$  כמתואר. מצא את  $k$  אם ידוע כי:  $S_1 = S_2$ .

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $0.75\sqrt[3]{x^4} + c$     ב.  $2x^2 - 1.6\sqrt[4]{x^5} + c$     ג.  $\frac{5}{11}\sqrt[5]{x^{11}} + c$
- ד.  $4.5\sqrt[3]{x^2} + c$     ה.  $\frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7} + \frac{16}{3}\sqrt[4]{x^3} + c$     ו.  $\frac{2}{7}\sqrt{x^7} - 2\sqrt{x^3} + 10\sqrt{x} + c$
- ז.  $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(2x-3)^4} + c$     ח.  $-0.8\sqrt[4]{(5-x)^5} + c$     ט.  $\frac{24}{49}\sqrt[8]{(7x+12)^7} + c$
- י.  $-\frac{35}{8}\sqrt[5]{(14-2x)^4} + c$
- (2) א.  $45\frac{1}{3}$     ב. 33.76    ג.  $18\frac{2}{3}$
- (3)  $f(x) = x^2 - \frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x)^4} + 2$
- (4)  $f(x) = \frac{3}{20}\sqrt[3]{(5x+7)^4} - 12.15$
- (5)  $f(x) = 12.5\sqrt[5]{(x+1)^4} + \frac{1}{3}(x-1)^3 - 18\frac{1}{6}$
- (6) א.  $(0,0) ; (8,0)$     ב. 16 יח"ש = S
- (7) א.  $x > 0$     ב.  $(2,0)$     ג. 18.149 יח"ש = S
- (8)  $\frac{S_1}{S_2} = 4$
- (9) א.  $\left(\frac{1}{8}, 2\right)$     ב.  $a = 8$
- (10) א.  $f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - x, a = 1$     ב.  $x \geq -1.2$     ג.  $(-1.2, 1.2)$
- ד.  $y = -\frac{27}{32}x + \frac{27}{16}$     ה. 0.48 יח"ש = S
- (11) א.  $(1,1)$     ב.  $\frac{11}{28}$  יח"ש = S
- (12) א.  $f(x) = (6-5x)^{\frac{1}{5}}$     ב.  $1\frac{5}{66}$  יח"ש = S

$$y = -2\frac{15}{16}x - \frac{45}{16} \quad \text{א. (13)} \quad \text{ב. } S = 4.56 \text{ יח"ש}$$

$$k = \left(\frac{3}{8}\right)^{1.5} = 0.2296.. \quad \text{ג. } (0,0), \left(\frac{1}{8}, 0\right), \left(-\frac{1}{8}, 0\right) \quad \text{ב.} \quad \text{א. כל } x \quad \text{(14)}$$

## מתמטיקה 0

פרק 23 - אלגברה ליניארית - פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות

תוכן העניינים

1. פתרון מערכת משוואות ליניאריות ..... 378
2. חקירת מערכת משוואות ליניאריות (עם פרמטר) ..... 383
3. פתרון וחקירת מערכת הומוגנית של משוואות ליניאריות ..... 386
4. שימושים של מערכת משוואות ליניאריות ..... 389

## פתרון מערכת משוואות לינאריות

### שאלות

(1) מצאו אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות:

$$\begin{array}{llll}
 2x + y = 4 & x - y = 0 & x - 4y = -7 & x + 10y = 11 \\
 x + y = 3 \quad \text{ד.} & 2x + y = 3 \quad \text{ג.} & x - y = -1 \quad \text{ב.} & 2x - 2y = 0 \quad \text{א.}
 \end{array}$$

(2) רשמו את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{llll}
 x = 3 & 2x + y + z = 3 & x - 4y + z = -7 & x + 10y = 11 \\
 2x + y = 4 \quad \text{ד.} & x - z = 0 \quad \text{ג.} & x - y = -1 \quad \text{ב.} & 2x - 2 = 0 \quad \text{א.} \\
 z + t = 8 & & x + y + z = 5 & x + y = 3
 \end{array}$$

בשאלות 3-5 בצעו על כל מטריצה את הפעולות הרשומות מתחתיה, בזו אחר זו, ומצאו את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

$$\begin{array}{lll}
 \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(5)} & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(4)} & \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{(3)} \\
 R_1 \rightarrow R_1 + 3R_3, R_2 \rightarrow R_2 + 3R_3 & R_2 \rightarrow 4R_2, R_2 \rightarrow R_2 + R_1 & R_1 \leftrightarrow R_2, R_1 \rightarrow 2R_1 \\
 R_1 \rightarrow 5R_1 - 8R_2 & R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2 & R_3 \rightarrow R_3 + R_1, R_1 \leftrightarrow R_3
 \end{array}$$

(6) מצאו איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל,

כדי לקבל את המטריצה מימין:

$$\begin{array}{l}
 \text{א.} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 \text{ב.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
 \text{ג.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

בשאלות 7-15 הביאו את המטריצות הבאות לצורה מדורגת  
 (בשאלות 7, 9, 11 ו-13 – גם לצורה מדורגת קנונית):

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (8) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (10) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (12) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad (14) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 2+i & 1+3i \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$F=\mathbb{C}, F=\mathbb{R}$$

\* בשאלה 15 יש לדרג את המטריצה פעם מעל השדה  $\mathbb{C}$  ופעם מעל השדה  $\mathbb{R}$ .

בשאלות 16-27 פתרו את מערכות המשוואות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דירוג):

$$\begin{aligned} 4x + 8y &= 20 \\ 3x + 6y &= 15 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 5x - 4y &= -3 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 10x_1 - 6x_2 - 2x_3 &= 32 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} 8x - 4y &= 10 \\ -6x + 3y &= 1 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 3 \\ 4x + 6y + 16z &= 8 \\ 3x + 2y + 17z &= 1 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= -11 \\ 2x + 3y - z &= -5 \\ 3x + y - z &= 2 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} 4x - 7y &= 0 \\ 8x - 14y &= 2 \\ -16x + 28y &= 4 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} x + 3y &= 2 \\ 2x + y &= -1 \\ x - y &= -2 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z + 2t &= 2 \\ 2x + 5y - 8z + 6t &= 5 \\ 6x + 8y - 10z + 4t &= 8 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ -9x + 6y &= -3 \\ 6x - 4y &= 2 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 2 \\ 3x - 2y - z &= 5 \\ 2x - 5y + 3z &= -4 \\ 2x + 8y + 12z &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 13x_4 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

28) פתרו את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס, מעל השדה  $\mathbf{F}$ :

$$z_1 + iz_2 + (1-i)z_3 = 1 + 4i$$

$$iz_1 + z_2 + (1+i)z_3 = 2 + i$$

$$(-1+3i)z_1 + (3-i)z_2 + (2+4i)z_3 = 5 - i$$

א.  $\mathbf{F} = \mathbb{R}$

ב.  $\mathbf{F} = \mathbb{C}$

## תשובות סופיות

(1) א ו-ג שקולות, ו-ב ו-ד שקולות.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ג.} \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ ב.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ א.} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \text{ ד.}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} \text{ (5)} \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ (4)} \quad \begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix} \text{ (3)}$$

 $R_2 \rightarrow 2R_2 + 4R_1$  ג.     $R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1$  ב.     $R_1 \rightarrow 2R_1 + R_2$  א. (6)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ -ג} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ (7)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ (8)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \text{ -ג} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ (9)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ (10)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ -ג} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ (11)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ (12)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$F=\mathbb{R}$                        $F=\mathbb{C}$

$$\phi \quad (18) \quad (x, y) = (5 - 2t, t) \quad (17) \quad (x, y) = (1, 2) \quad (16)$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, -3, -2) \quad (20) \quad \phi \quad (19)$$

$$(x, y) = (-1, 1) \quad (22) \quad (x, y, z) = (-1 - 7t, 2 + 2t, t) \quad (21)$$

$$(x, y) = \left( \frac{1+2t}{3}, t \right) \quad (24) \quad \phi \quad (23)$$

$$\phi \quad (26) \quad (x, y, z, t) = (-a + 2b, 1 + 2a - 2b, a, b) \quad (25)$$

$$(x, y, z) = (2, 1, -1) \quad (27)$$

$$(z_1, z_2, z_3) = ((-1+i)t + 1 + i, 3, t) \cdot \beta \quad (28) \quad (z_1, z_2, z_3) = (2, 3, -1) \cdot \alpha \quad (28)$$

$F=\mathbb{C}$                        $F=\mathbb{R}$

## חקירת מערכת משוואות לינאריות (עם פרמטר)

### שאלות

בשאלות 1-6 מצאו לאילו ערכי  $k$  (אם יש כאלה) יש למערכות:  
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{l} x+ky+z=1 \\ x+y+kz=1 \quad (2) \\ kx+y+z=1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x-y+z=1 \\ 5x-7y+(k^2+3)z=k^2+1 \quad (1) \\ 3x-y+(k+3)z=3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x-y+z=0 \\ x+2y-z=0 \quad (4) \\ 5x+(1-k)y+k^2z=1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x+2ky+z=0 \\ 3x+y+kz=2 \quad (3) \\ x+9ky+5z=-2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x+ky+3z=2 \\ kx-y+z=4 \quad (6) \\ 3x+y+(2+k)z=0 \end{array} \quad \begin{array}{l} kx-y=1 \\ (k-2)x+ky=-2 \quad (5) \\ (k^2-1)z=9 \end{array}$$

בשאלות 7-9 מצאו לאילו ערכי  $k$  (אם יש כאלה) יש למערכות:  
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{l} 2x-3y+z=1 \\ 4x+(k^2-5k)y+2z=k \quad (8) \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x+ky=3 \\ (k+3)x+2y=k^2+5 \quad (7) \\ 6x+3ky=7k^2+2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x+4y-z=2 \\ kx-2y+z=-1 \\ x+8y-3z=k \\ 2x+6y-2z=0.5k+1 \end{array} \quad (9)$$

בשאלות 10-12 מצאו לאילו ערכים של  $a$  ושל  $b$  (אם יש כאלה) יש למערכות:  
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{l} x+y-z+t=1 \\ ax+y+z+t=b \quad (12) \\ 3x+2y+at=1+a \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x+4y+az=-1 \\ x+2y+4z=-4 \\ x+2y-4z=0 \\ x+2y+6z=-2b \end{array} \quad \begin{array}{l} x+2y-4z=b \\ 7x-10y+16z=7 \quad (10) \\ 2x-ay+3z=1 \end{array} \quad (11)$$

$$x + az = 1$$

$$y + 2z = 2 \quad (13) \text{ נתונה מערכת המשוואות:}$$

$$bx + cy + dz = 3$$

- א. מצאו תנאי עבור  $a, b, c, d$ , כך שלמערכת יהיה פתרון יחיד.  
 ב. מצאו תנאי עבור  $b, c, d$ , כך שלכל  $a$ , למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

$$(14) \text{ נתונה המערכת: } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 7y + (k^2 + 1)z = k^2 - 1 \\ 4x - 6y + (k + 2)z = 4 \end{cases}$$

- א. רשמו את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות.  
 ב. רשמו את הצורה המדורגת של המטריצה מסעיף א.  
 ג. מצאו לאילו ערכי  $k$  יש למערכת:  
 1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.  
 ד. רשמו את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.  
 ה. מצאו לאילו ערכי  $k$  יש למערכת פתרון שבו  $z = 0$ .  
 ו. מצאו לאילו ערכי  $k$  יש למערכת פתרון יחיד שבו  $z = 0$ .  
 ז. מצאו עבור איזה ערך של  $k$  פתרון של המשוואה השלישית הוא  $(1, 2, 3)$ .  
 האם ייתכן שהפתרון הנ"ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבירו.  
 ח. מצאו לאיזה ערך של  $k$ , הוא הפתרון היחיד של המערכת.

$$(15) \text{ נתונות המשוואות של 3 מישורים: } \begin{cases} 3x + my = 3 \\ mx + 2y - mz = 1 \\ -x + mz = -1 \end{cases}$$

- בסעיפים א-ג מצאו עבור אילו ערכים של הקבוע  $m$  שלושת המישורים:  
 א. נפגשים בנקודה אחת (מצא נקודה זו).  
 ב. לא נפגשים באף נקודה.  
 ג. בעלי אינסוף נקודות משותפות (מצא נקודות אילו).  
 ד. האם קיים ערך של  $m$  עבורו 3 המישורים מתלכדים או מקבילים?

## תשובות סופיות

$$(1) \quad 1. \ k \neq 1, k \neq -2 \quad 2. \ k = 1 \quad 3. \ k = -2$$

$$(2) \quad 1. \ k \neq 1, k \neq -2 \quad 2. \ k = -2 \quad 3. \ k = 1$$

$$(3) \quad 1. \ k \neq -1, k \neq \frac{4}{7} \quad 2. \ k = \frac{4}{7} \quad 3. \ k = -1$$

$$(4) \quad 1. \ k \neq 1, k \neq -0.4 \quad 2. \ k = 1, k = -0.4$$

$$(5) \quad 1. \ k \neq \pm 1, k \neq -2 \quad 2. \ k = \pm 1, k = -2$$

$$(6) \quad 1. \ k \neq -1, k \neq -3, k \neq 2 \quad 2. \ k = -1, k = -3, k = 2$$

$$(7) \quad 1. \ k = -1 \quad 2. \ k \neq \pm 1 \quad 3. \ k = 1$$

$$(8) \quad 1. \ k = 3 \quad 2. \ k = 3 \quad 3. \ k \neq 3$$

$$(9) \quad 1. \ k \neq 1 \quad 2. \ k = 1$$

$$(10) \quad 1. \ a \neq 2 \quad 2. \ a = 2, b \neq -3 \quad 3. \ a = 2, b = -3$$

$$(11) \quad 1. \ a \neq -6 \text{ או } b \neq 2.5 \quad 2. \ a = -6, b = 2.5$$

$$(12) \quad 1. \ a = 2, b \neq 2 \quad 2. \ a \neq 2 \text{ או } a = 2, b = 2$$

$$(13) \quad 1. \ ab + 2c \neq d \quad 2. \ b = 0, c = 1.5, d = 3$$

$$(14) \quad 1. \ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & k^2 + 4 & k^2 - 4 \\ 0 & 0 & -k^2 + k + 2 & 4 - k^2 \end{pmatrix} \quad 2. \ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & k^2 + 1 & k^2 - 1 \\ 4 & -6 & k + 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(15) \quad 1. \ k \neq 2, k \neq -1 \quad 2. \ k = -1 \quad 3. \ k = 2 \quad 4. \ (x, y, z) = (1 + 0.2t, 0.8t, t)$$

$$5. \ k = \pm 2 \quad 6. \ k = -2 \quad 7. \ k = 2, \text{ לא} \quad 8. \ k = -2$$

$$9. \ m \neq 0, -2, 3 \quad 10. \ m = -2, 3 \quad 11. \ m = 0 \quad 12. \ \text{לא}$$

## פתרון וחקירת מערכת הומוגנית של משוואות לינאריות

### שאלות

$$(1) \quad \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + 2z = 6 \\ 4x - 2y + 5z = 12 \end{cases} \quad \text{פתרו את המערכת}$$

על סמך הפתרון, קבעו את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה.

$$(2) \quad \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + 2z = 6 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \quad \text{פתרו את המערכת}$$

על סמך הפתרון, קבעו את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה.

$$(3) \quad \begin{cases} x - y = 1 \\ -x + 2y - z = k \\ 2x + my + z = 3 \end{cases} \quad \text{נתונה המערכת:}$$

- א. מצאו את ערכי  $m$ , עבורם למערכת ההומוגנית המתאימה אינסוף פתרונות.  
 ב. עבור ערך  $m$  שנמצא ב-א, מצאו את ערכי  $k$ , עבורם למערכת פתרון.  
 ג. עבור ערכי  $m, k$  שנמצאו בסעיפים הקודמים, מצאו את הפתרון הכללי של המערכת הנתונה, וקבעו את הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

(4) נתון שהחמישייה  $(4t - 2s + 4, -t + s, 2, t, s)$  מהווה פתרון כללי של מערכת ליניארית נתונה. קבעו אילו מבין הטענות הבאות נכונות:

- א. המערכת הנתונה היא מערכת הומוגנית.  
 ב. החמישייה  $(4, 0, 2, 0, 0)$ , היא פתרון פרטי של המערכת הנתונה.  
 ג. החמישייה  $(4, 0, 2, 1, 1)$ , היא פתרון של המערכת הנתונה.  
 ד. לכל  $a$  ממשי, החמישייה  $(4a, 0, 2a, 0, 0)$  אינה פתרון של המערכת הנתונה.  
 ה. החמישייה  $(4t - 2s, -t + s, 0, t, s)$ , היא פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.  
 ו. החמישייה  $(0, 1, 0, 1, 2)$ , היא פתרון פרטי של המערכת ההומוגנית המתאימה.  
 ז. במערכת הנתונה, מספר המשוואות לאחר דירוג הוא 2.

$$(5) \quad \begin{cases} 3x + my = 0 \\ mx + 2y - mz = 0 \\ -x + mz = 0 \end{cases}$$

נתונה המערכת ההומוגנית

- יהי  $W$  אוסף הפתרונות של המערכת.  
 עבור אילו ערכים של הקבוע  $m$  (אם בכלל)  $W$  הוא:
- א. נקודה (מצאו נקודה זו).
  - ב. ישר (מצאו ישר זה).
  - ג. מישור (מצאו מישור זה).

$$(6) \quad \text{נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & a & b & c \\ 4 & d & e & f \\ -3 & g & h & i \end{pmatrix}$$

- נסמן ב- $A'$  את הצורה המדורגת של  $A$ .  
 ידוע כי בממ"ל ההומוגנית המתאימה יש יותר משתנים חופשיים ממשתנים תלויים.  
 מצאו את  $A$ .

## תשובות סופיות

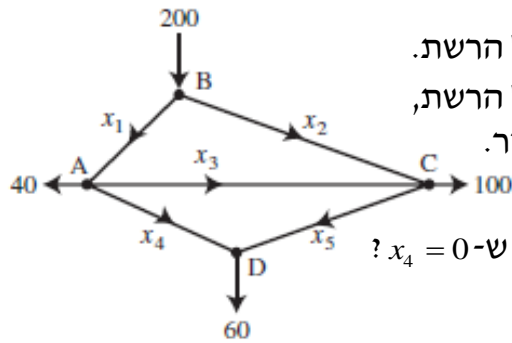
- (1) פתרון כללי של המערכת  $(4 - \frac{3}{2}t, -\frac{1}{2}t + 2, t)$ .
- פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא  $(-\frac{3}{2}t, -\frac{1}{2}t, t)$ .
- (2) למערכת פתרון יחיד  $(x, y, z) = (1, 1, 2)$ .
- למערכת ההומוגנית המתאימה פתרון יחיד  $(0, 0, 0)$ .
- (3) א.  $m = -3$  ב.  $k = -2$  ג. פתרון כללי של המערכת  $(x, y, z) = (t, t - 1, t)$ .
- פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא  $(t, t, t)$ .
- (4) א. הטענה לא נכונה. ב. הטענה נכונה. ג. הטענה לא נכונה. ד. הטענה לא נכונה. ה. הטענה נכונה. ו. הטענה לא נכונה. ז. הטענה לא נכונה.
- (5) א.  $m \neq 0, -2, 3$ . הנקודה היא  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ .
- ב. אם  $m = 0$  נקבל ישר  $\underline{x} = t(0, 0, 1)$ . אם  $m = 2$  נקבל ישר  $\underline{x} = t(2, -1, 1)$ .
- אם  $m = 3$  נקבל ישר  $\underline{x} = t(3, -3, 1)$ .
- ג. אין ערכים של  $m$  עבורם נקבל מישור.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \\ -3 & -6 & -9 & -12 \end{pmatrix} \quad (6)$$

## שימושים של מערכת משוואות לינאריות

## שאלות

1) באיור שלהלן רשת זרימה המתארת את זרם התנועה (במכוניות לדקה) של מספר רחובות בתל אביב.



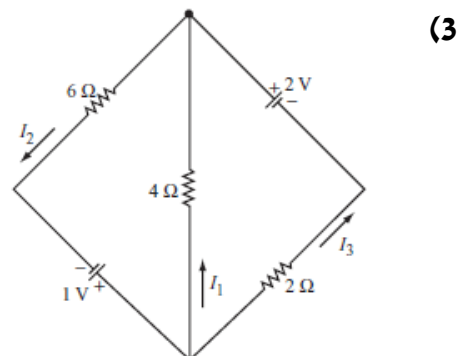
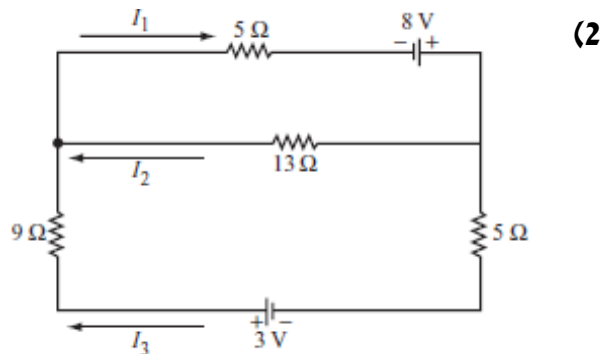
א. מצאו את תבנית הזרימה הכללית של הרשת.

ב. מצאו את תבנית הזרימה הכללית של הרשת,

אם ידוע שהכביש שהזרם שלו  $x_4$  סגור.

ג. מהו הערך המינימלי של  $x_1$ , אם ידוע ש- $x_4 = 0$ ?

בשאלות 2-3 מצאו את הזרמים במעגלים החשמליים (חוקי קירכהוף וחוק אוהם):



\* בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות הנוגעות בנושא מערכת משוואות לינאריות.

### תשובות סופיות

(1) א.  $x_3$  ו-  $x_5$  חופשיים.  $x_1 = 100 + x_3 - x_5$ ,  $x_2 = 100 - x_3 + x_5$ ,  $x_4 = 60 - x_5$ .

ב.  $x_3$  חופשי.  $x_1 = 40 + x_3$ ,  $x_2 = 160 - x_3$ ,  $x_4 = 0$ ,  $x_5 = 60$ . ג. 40.

(2) א.  $I_1 = \frac{255}{317}$ ,  $I_2 = \frac{97}{317}$ ,  $I_3 = \frac{158}{317}$

(3)  $I_1 = -\frac{5}{22}$ ,  $I_2 = \frac{7}{22}$ ,  $I_3 = \frac{6}{11}$

# מתמטיקה 0

פרק 24 - אלגברה ליניארית - מטריצות

תוכן העניינים

391	1. מטריצות
396	2. מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות
397	3. המטריצה ההופכית
404	4. בחזרה למערכת משוואות ליניארית
411	5. שיטת הריבועים הפחותים - רגרסיה ליניארית

## מטריצות

### שאלות

1 נתונות המטריצות הבאות:  $A_{4 \times 6}$ ,  $B_{4 \times 6}$ ,  $C_{6 \times 2}$ ,  $D_{4 \times 2}$ ,  $E_{6 \times 4}$ .  
 קבעו אילו מבין המטריצות הבאות מוגדרות.  
 במידה והמטריצה מוגדרת, רשמו את סדר המטריצה:

- א.  $A+B$     ב.  $AB$     ג.  $AC-D$     ד.  $AE-B$
- ה.  $B+AB$     ו.  $E(B+A)$     ז.  $(E+A^T)D$     ח.  $E^T B$
- ט.  $E(AC)$     י.  $E(B-A)$

2 מצאו את  $x, y, z$ , אם ידוע כי:

$$\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$$

בשאלות 3-8 נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשבו (במידה וניתן):

3 א.  $E+D$     ב.  $E-D+I_3$

ג.  $5C$     ד.  $2D+4EI_3$

4  $2tr(D^2 - 2E)$

5 א.  $4C^T + A$     ב.  $\frac{1}{2}A^T + \frac{1}{4}C$

6  $I_2 BC$

7  $tr(C^T C)$

8  $DABC$

9 נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר  $n$ .

$$\text{נתון כי } (A - I)(A + I) = 0.$$

הוכיחו או הפריכו:  $A = I$  או  $A = -I$ .

10 אפיינו את כל המטריצות  $A_{2 \times 2}$  שמקימות  $A^2 = -4I$ .

$$11 \text{ הוכיחו כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 1-2^n & 1 \end{pmatrix}$$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שנדרש לדעת הוכחות באינדוקציה.

12 שתי מטריצות  $A$  ו- $B$  יקראו מתחלפות אם  $AB = BA$ .

הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

א. אם המטריצות  $A$  ו- $B$  מתחלפות עם המטריצה  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , אז המטריצות

$A$  ו- $B$  מתחלפות.

ב. אם המטריצה  $A$  מתחלפת עם המטריצה  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , אז  $A^T = -A$ .

13 תהי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר  $n$ .

נתון כי  $AA^T = 0$ . הוכיחו כי  $A = 0$ .

האם הטענה נשארת נכונה אם איברי  $A$  מרוכבים?

אם כן, הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

14 יהיו  $A$  ו- $B$  מטריצות ריבועיות המקיימות  $AB = BA$  (מטריצות מתחלפות).

א. הוכיחו כי לכל  $k$  טבעי מתקיים  $AB^k = B^k A$ .

ב. הוכיחו כי לכל  $k$  טבעי מתקיים  $(AB)^k = A^k B^k$ .

$$15 \text{ לפי נוסחת הבינום של ניוטון } (A+B)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k, \text{ כאשר}$$

$$A, B \in \mathbb{R}, n, k \in \mathbb{N}$$

א. האם נוסחת הבינום נשארת נכונה גם אם  $A$  ו- $B$  מטריצות ריבועיות

מסדר  $\ell$ ?

ב. מצאו תנאי מספיק על המטריצות  $A$  ו- $B$ , על מנת שנוסחת הבינום

תהיה נכונה עבורן.

ג. מצאו את הפיתוח של  $(A+I)^n$  ו- $(A-I)^n$ , כאשר  $A$  ו- $I$  ריבועיות מסדר

$\ell$ .

- 16** א. הגדירו והדגימו את המונח מטריצה נילפוטנטית.  
 ב. נניח ש- $A$  ו- $B$  מטריצות מתחלפות ונילפוטנטיות.  
 הוכיחו שגם המטריצות  $AB$  ו- $A+B$  נילפוטנטיות.

**17** תהי  $A_{n \times n}$  מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי:  $a_{ij} = \min\{i, j\}$ .  
 תהי  $B_{n \times n}$  מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי:  $b_{ij} = \begin{cases} 1 & i + j = n + 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ .

- א. כתבו את המטריצות  $A$  ו- $B$  בצורה מפורשת.  
 ב. המטריצה  $C$  מקיימת  $C = A \cdot B$ .  
 חשבו את  $C$  ומצאו נוסחה עבור  $c_{ij}$  לכל  $1 \leq i, j \leq n$ .

**18** מצאו מטריצה ממשית  $A$ , כך שיתקיים  $A - \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A \right)^T = A - A^T$ .

## תשובות סופיות

(1) א.  $4 \times 6$     ב. לא.    ג.  $4 \times 2$     ד. לא.    ה. לא. ו.  $6 \times 6$

ז.  $6 \times 2$     ח. לא

(2)  $(x, y, z) = (2, 1, -1)$

(3) א.  $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$     ב.  $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$     ג.  $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}$

ד.  $\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

(4) 230

(5) א.  $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$     ב.  $\begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}$

(6)  $\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}$

(7) 63

(8)  $\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}$

(9) שאלת הוכחה.

(10)  $A = \begin{pmatrix} a & -\frac{a^2+4}{c} \\ c & -a \end{pmatrix}$

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) א+ב. שאלת הוכחה.

$$(A+I)^n = \binom{n}{0} A^n + \binom{n}{1} A^{n-1} + \binom{n}{2} A^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} A^1 + \binom{n}{n} I$$

$$(A-I)^n = \binom{n}{0} A^n - \binom{n}{1} A^{n-1} + \binom{n}{2} A^{n-2} - \dots + (-1)^{n+1} \binom{n}{n-1} A^1 + (-1)^n \binom{n}{n} I$$

(16) שאלת הוכחה.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & \dots & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{א. (17)}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \dots & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & \dots & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & \dots & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & \dots & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & \dots & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } c_{ij} = \min\{i, n+1-j\}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(18)}$$

## מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות

### שאלות

מטריצה ריבועית  $A$  תיקרא סימטרית אם  $A^T = A$ , ואנטי-סימטרית אם  $A^T = -A$ .

(1) ידוע ש- $A$  מטריצה ריבועית.  
מי מבין הבאים נכון (אחד או יותר):

1.  $AA^T$  סימטרית.
2.  $A + A^T$  סימטרית.
3.  $A - A^T$  אנטי-סימטרית.

(2) ידוע ש- $A$  ו- $B$  אנטי-סימטריות מאותו סדר.  
מי מבין הבאים נכון:

1.  $BABABA$  אנטי-סימטרית.
2.  $A^2 - B^2$  סימטרית.
3.  $A^2 + B$  סימטרית.

(3) ידוע ש- $A$  ו- $B$  סימטריות מאותו סדר ונתון כי  $AB = -BA$ .  
מי מבין הבאים נכון:

1.  $AB^3$  אנטי-סימטרית.
2.  $AB^2$  סימטרית.
3.  $(A - B)^2$  סימטרית.

(4) ידוע ש- $A$  סימטרית ו- $B$  אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי  $AB = BA$ .  
הוכיחו:

1.  $AB$  אנטי-סימטרית.
2.  $AB + B$  אנטי-סימטרית.

(5) נתון:  $A, B, AB$  סימטריות מאותו סדר.

הוכיחו כי  $A^4 B^4 = B^4 A^4$ .

### תשובות סופיות

- (1) 1,2,3
- (2) 2
- (3) 1,2,3
- (4) שאלת הוכחה.
- (5) שאלת הוכחה.

## המטריצה ההופכית

### שאלות

בשאלות 1-9 מצאו את ההפוכה של כל מטריצה. בדקו את התשובות על ידי כפל מטריצות מתאים.

$$\begin{array}{lll}
 \begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \text{(3)} & \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} & \text{(2)} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(1)} \\
 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(6)} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \text{(5)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \text{(4)} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} & \text{(9)} & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} & \text{(8)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(7)}
 \end{array}$$

(10) עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$  המטריצה  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 \\ 3 & -1 & k+3 \end{pmatrix}$  הפיכה?

(11) עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$  המטריצה  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  איננה הפיכה?

הניחו שהמטריצות בשאלות 12-14 הן הפיכות מסדר  $n$ , וחלצו את  $X$ :

(12) א.  $AXC = D$  ב.  $A^{-1}XC = A^{-1}DC$  ג.  $P^{-1}X^T P = A$

(13) א.  $C^{-1}(A+X)D^{-2} = I$  ב.  $(A-AX)^{-1} = X^{-1}C$

(14)  $ABC^T X^{-1} BA^T C = AB^T$

(15) נתון  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ .

חשבו את  $X$ , אם ידוע כי  $B^2 X (2B)^{-1} = B + I$ .

$$(16) \text{ נתון } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} . \text{ חשבו את } Y, \text{ אם ידוע כי } BYB^T = B^{-1} + B .$$

$$(17) \text{ נתון } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} .$$

$$\text{חשבו את } B, \text{ אם נתון בנוסף כי: } 5A^T B(I+2A)^{-2} = (7A)^{-2} .$$

(18) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתון:  $A$  מטריצה ריבועית המקיימת  $A^2 - 5A - 2I = 0$ .

הוכיחו כי  $A$  הפיכה ובטאו את  $A^{-1}$  במונחי  $A$  ו- $I$ .

ב. נתון:  $A$  מטריצה ריבועית המקיימת  $(A-3I)(A+2I) = 0$ .

הוכיחו כי  $A$  הפיכה ובטאו את  $A^{-1}$  במונחי  $A$  ו- $I$ .

$$(19) \text{ נתון כי } p(x) = x^3 - 4x^2 - 20x + 48, \text{ } A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} .$$

א. חשבו את  $p(A)$ .

ב. בעזרת תוצאת סעיף א (ולא בדרך אחרת), הוכיחו ש- $A$  הפיכה, ובטאו את  $A^{-1}$  בעזרת  $A$  ו- $I$  בלבד.

(20) נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית המקיימת  $A^4 = 0$ .

א. הוכיחו כי  $A$  לא הפיכה.

ב. הוכיחו כי המטריצה  $I - A$  הפיכה, ומצאו את ההופכית שלה.

$$(21) \text{ נתון כי } \begin{cases} P^{-1}AP = B \\ Q^{-1}BQ = C \end{cases} .$$

הוכיחו כי קיימת מטריצה הפיכה  $D$ , כך ש- $D^{-1}AD = C$ .

\* הניחו שכל המטריצות הנתונות ריבועיות, מאותו סדר והפיכות.  
 \*\* לסטודנטים המכירים את המושג **דמיון מטריצות**, ניתן לנסח את השאלה כך:  
 הוכיחו: אם  $A$  דומה ל- $B$  ו- $B$  דומה ל- $C$ , אז  $A$  דומה ל- $C$ .  
 (כלומר יחס הדמיון הוא יחס טרנזיטיבי)

הערה: בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

**(22)** תהיינה  $A, B$  מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר  $n \geq 2$ . הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- א.  $AB = BA$ .  
 ב. אם  $A^2 - AB = I_n$ , אז בהכרח  $B$  הפיכה.  
 ג. אם  $A^2 - AB = I_n$ , אז בהכרח  $A$  הפיכה.  
 ד. אם  $(AB)^{100} = I$ , אז בהכרח  $(BA)^{100} = I$ .  
 ה. אם  $(AB)^{100} = 0$ , אז בהכרח  $(BA)^{101} = 0$ .

**(23)** תהיינה  $A, B$  מטריצות מסדר  $n \times n$ , עבורן  $A^2 + AB = I$ .

- א. הוכיחו ש- $AB = BA$ .  
 ב. אם נתון בנוסף ש- $B^2 + BA$  היא מטריצת האפס, הוכיחו שגם  $B$  היא מטריצת האפס.

**(24)** תהיינה  $A, B$  מטריצות כלשהן.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

- א. אם  $AB = I$  אז  $B = A^{-1}$ .  
 ב. אם המכפלה  $AB$  היא מטריצה ריבועית, אזי  $A, B$  מטריצות ריבועיות.  
 ג. אם המכפלה  $AB$  היא מטריצה הפיכה, אזי  $A, B$  מטריצות ריבועיות.  
 ד. המכפלה  $AB$  לא הפיכה.  
 ה. אם  $A$  מטריצה ריבועית והמכפלה  $AB$  מוגדרת, אזי  $B$  מטריצה ריבועית.

**(25)** מטריצה ריבועית  $A$  תיקרא אידמפוטנטית אם  $A^2 = A$ . הוכיחו:

- א. למעט המקרה בו  $A = I$ , מטריצה אידמפוטנטית היא לא הפיכה.  
 ב. אם נחסר מטריצה אידמפוטנטית ממטריצת היחידה נקבל מטריצה אידמפוטנטית.  
 ג. אם  $A$  מטריצה אידמפוטנטית ריבועית מסדר 2, אז  $\text{tr}(A) = 1$  או ש- $A$  מטריצה אלכסונית.  
 ד.  $A$  אידמפוטנטית  $\Leftrightarrow A^n = A$ , לכל  $n$  טבעי.

$$(26) \text{ נתונה } M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

מצאו תנאי על הקבועים  $a, b, c, d$  כך ש- $M$  תהיה הפיכה ומצאו את  $M^{-1}$  במקרה זה.

$$(27) \text{ נתון כי } A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \text{ הפיכה.}$$

לגבי כל אחת מהמערכות הבאות קבע את מספר הפתרונות של המערכת.

$$\alpha_{11}x + \alpha_{12}y = \alpha_{13}$$

$$\alpha_{21}x + \alpha_{22}y = \alpha_{23} \quad \text{א.}$$

$$\alpha_{31}x + \alpha_{32}y = \alpha_{33}$$

$$\alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + w = 0$$

$$\alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z - 4w = 1 \quad \text{ב.}$$

$$\alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + 3w = -4$$

$$\alpha_{11}x + \alpha_{21}y + \alpha_{31}z = 3$$

$$\alpha_{12}x + \alpha_{22}y + \alpha_{32}z = 1 \quad \text{ג.}$$

$$\alpha_{13}x + \alpha_{23}y + \alpha_{33}z = 1$$

(28) תהינה  $A, B$  מטריצות מסדר  $n \times n$ .

הוכיחו:

א. אם  $BA = I - A^2$  וגם  $B^2 = -AB$ , אז  $B = 0$ .

ב. אם  $A^2 = 2I$ , אז  $A + I$  ו- $A - I$  הפיכות.

(29) תהינה  $A, B$  מטריצות מסדר  $n \times n$ , כך ש- $B^2A = -2B^3$  וגם

$$(2) \quad B^3 + AB^2 = 3I$$

הוכיחו ש- $A$  ו- $B$  הפיכות, ובטאו את  $A^{-1}$  ו- $B^{-1}$  באמצעות  $B$ .

(30) תהינה  $A, B$  מטריצות מסדר  $n \times n$ , כך ש- $BA + 2I = B$ .

א. הוכיחו ש- $B$  הפיכה.

ב. ידוע ש- $B$  סימטרית.

הוכיחו כי  $A$  סימטרית.

(31) תהי  $A$  מטריצה נילפוטנטית (כלומר, קיים  $n$  טבעי כך ש- $A^n = 0$ ).

א. הוכיחו כי  $A$  לא הפיכה.

ב. הוכיחו כי  $I - A$  ו- $I + A$  הפיכות.

ג. נגדיר:  $e^A = I + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots + \frac{1}{n!}A^n + \dots$

הוכיחו: אם  $e^A = I$  אז  $A = 0$ .

**(32)** נתונות שתי מטריצות,  $A$  ו- $B$ , מסדר  $n$ .

סמנו את הטענה שנכונה בהכרח:

- א. ל- $A$  ול- $A^T$  יש אותה צורה מדורגת קנונית.
- ב. אם  $A, B$  מדורגות קנונית, אז  $A+B$  מדורגת קנונית.
- ג. אם  $A, B$  מדורגות קנונית, אז  $A-B$  מדורגת קנונית.
- ד. אם בצורה המדורגת קנונית של  $B$  יש שורת אפסים, אז גם בצורה המדורגת קנונית של  $AB$  יש שורת אפסים.

## תשובות סופיות

$$\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$k=1, k=-4 \quad (11)$$

$$k \neq 1, k \neq -2 \quad (10)$$

$$(P^{-1})^T A^T P^T \quad \lambda \quad D \quad \text{ב.} \quad A^{-1}DC^{-1} \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$(A+C^{-1})^{-1}A \quad \text{ב.} \quad CD^2 - A \quad \text{א.} \quad (13)$$

$$X = 4 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$BA^T C(B^{-1})^T BC^T \quad (14)$$

$$B = \frac{1}{245} \begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}A - \frac{1}{6}I \quad \text{ב.}$$

$$A^{-1} = 0.5A - 2.5I \quad \text{א.} \quad (18)$$

$$B^{-1} = -\frac{1}{48}B^2 + \frac{1}{12}B + \frac{5}{12}I \quad \text{ב.}$$

$$f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{א.} \quad (19)$$

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 \quad \text{ב.}$$

(20) א. שאלת הוכחה.

(21) שאלת הוכחה.

(22) שאלת הוכחה.

(23) שאלת הוכחה.

(24) שאלת הוכחה.

(25) שאלת הוכחה.

$$((a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)) \quad M^{-1} = \frac{1}{(a^2+b^2+c^2+d^2)} M^T \quad (26)$$

- 27) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות. ג. פתרון יחיד.  
28) שאלת הוכחה.  
29) שאלת הוכחה.  
30) שאלת הוכחה.  
31) שאלת הוכחה.  
32) ד

## בחזרה למערכת משוואות ליניארית

### שאלות

1) בסעיפים הבאים מצאו מטריצות  $A$ ,  $\underline{x}$  ו- $\underline{b}$ , המבטאות את מערכת המשוואות הנתונה ע"י המשוואה היחידה  $A\underline{x} = \underline{b}$ :

$$2x - 3y + z + t = 1$$

$$4x + y + 2z = 4$$

$$y + z + t = 1$$

$$x - 4z - 2y = 10$$

$$2x + y - z = 3$$

$$x + 2y - 4z = 5 \quad \text{א.}$$

$$6x + 4y + z = 2$$

בשאלות 2-6 נתון כי  $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$   $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$   $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ .

בטאו כל אחת מהמשוואות בשאלות אלה כמערכת משוואות ליניאריות:

$$A\underline{x} = -k\underline{x} + \underline{b} \quad (4)$$

$$A\underline{x} = 4\underline{x} + \underline{b} \quad (3)$$

$$A\underline{x} = \underline{b} \quad (2)$$

$$A^T \underline{x} = 2\underline{x} + 3\underline{b} \quad (6)$$

$$A\underline{x} = \underline{x} \quad (5)$$

$$2x - y + z = 3$$

7) פתרו את מערכת המשוואות  $3x - 2y + 2z = 5$ ,

$$5x - 3y + 4z = 11$$

בעזרת המטריצה ההפוכה.

$$x + 4y + 2z + 4t = 1$$

$$x + 2y - z = 0$$

$$y + z + t = 1$$

$$x + 3y - z - 2t = 0$$

8) פתרו את מערכת המשוואות

בעזרת המטריצה ההפוכה.

9) למערכת משוואות מסוימת יש את שני הפתרונות הבאים:

$$(x, y, z) = (2, -8, 4) \quad , \quad (x, y, z) = (-1, 4, -2)$$

הוכיחו שהמערכת חייבת להיות הומוגנית.

**10** למערכת משוואות לא הומוגנית יש את שני הפתרונות הבאים :  
 $(x, y, z) = (-1, 4, -2)$  ,  $(x, y, z) = (2, 3, 4)$  .  
 מצאו פתרון לא טריוויאלי כלשהו של המערכת ההומוגנית המתאימה.

$$(11) \text{ נתונה המערכת } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 7y + (k^2 + 1)z = k^2 - 1 \\ 4x - 6y + (k + 2)z = 4 \end{cases}$$

מצאו עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$ , למערכת :  
 א. פתרון יחיד. ב. אין פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

\* השתמשו בפתרון במושג 'דרגה של מטריצה'.

$$(12) \text{ נתון } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & k \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$$

ידוע כי  $rank(A) = 3$ , וידוע כי למערכת  $Ax = b$  יש פתרון.  
 מצאו את הקבועים  $k, m$ .

**13** נתונה מטריצה ריבועית  $A$ , המקיימת את התכונה הבאה :  
 סכום האיברים בכל שורה של המטריצה  $A$  שווה 0.  
 הוכיחו ש- $A$  מטריצה לא הפיכה.

**14** נתונה מטריצה ריבועית הפיכה  $A$ , המקיימת את התכונה הבאה :  
 סכום האיברים בכל שורה של המטריצה  $A$  שווה  $k$ .  
 הוכיחו שסכום האיברים בכל שורה של המטריצה הוא קבוע.  
 בטאו קבוע זה בעזרת  $k$ .

$$(15) \text{ מטריצה } A \text{ מקיימת } A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 0$$

הוכיחו כי הווקטור  $\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$  הוא פתרון של המערכת ההומוגנית  $Ax = 0$ .

- 16** יהיו  $A, B$  מטריצות ממשיות מסדר  $n \times n$ .
- עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או לא.
- א. אם למערכת  $(AB)x = 0$  קיימים שני פתרונות שונים, אז בהכרח  $A$  לא הפיכה.
- ב. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת  $(AB)x = 0$ , אז למערכת  $(BA)x = 0$  קיים פתרון שונה מ-0.
- ג. אם למערכת  $Ax = 0$  קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2 = 0$ .
- ד. אם למערכת  $(A^t A)x = 0$  קיים פתרון יחיד, אז  $A$  לא הפיכה.
- ה. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת ההומוגנית  $(AB)x = 0$ , אז למערכת ההומוגנית  $Ax = 0$  קיים פתרון שונה מ-0.

- 17** נתונה מערכת משוואות מעל  $\mathbb{R}$ :  $Ax = d$  ( $d \neq 0$ ).
- נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר 4, המקיימת  $\text{rank}(A) = 2$ .
- ידוע כי הווקטורים הבאים פותרים את המערכת הנתונה:
- $$u = (x_1, x_2, 6, 7), \quad v = (y_1, y_2, 1, 2), \quad w = (z_1, z_2, 4, 3)$$
- מי מבין הבאים הוא הפתרון הכללי של המערכת הנתונה:
- א.  $x = au + bv + cw$
- ב.  $x = (a + b + 1)u - av - bw$
- ג.  $x = au + bv + w$
- ד.  $x = (a - b)u + (b - c)v + (c - a)w$
- ה.  $x = (a + b)u - (av + bw + u)$ , כאשר  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

- הערה:** בחלקו האחרון של פתרון תרגיל זה נדרש הידע הבא מהפרק מרחבים וקטורים:
- בהינתן מערכת הומוגנית  $Ax = 0$ :
- אוסף כל הפתרונות של המערכת נקרא מרחב הפתרונות של המערכת.
  - מספר המשתנים החופשיים במערכת לאחר דירוג נקרא המימד של מרחב הפתרונות.
- בכל אופן, מומלץ לחזור לתרגיל זה אחרי שתעברו על הפרק מרחבים וקטורים.

- 18** נתונה מערכת  $A_{m \times n} \cdot x = b$ .
- הוכיחו או הפריכו:
- א. אם  $u$  וגם  $\lambda u$  ( $\lambda \neq 1$ ) פתרונות של המערכת אז המערכת הומוגנית.
- ב. אם  $u$  ו- $v$  וגם  $\alpha u + \beta v$  ( $\alpha, \beta \neq 0$ ) פתרונות של המערכת אז היא הומוגנית.
- ג. אם הווקטורים  $(1, 2, \dots, n), (n, \dots, 2, 1)$  פותרים את המערכת והווקטור  $(n + 1, \dots, n + 1)$  לא פותר את המערכת, אז המערכת לא הומוגנית.

**19** תהי  $A$  מטריצה כך שלמערכת  $Ax=0$  פתרון יחיד. הוכיחו או הפריכו:

- א.  $A$  הפיכה.  
 ב. למערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים  $A^T$  פתרון יחיד.  
 ג. לכל מערכת לא הומוגנית עם מטריצת מקדמים  $A$  פתרון יחיד.

**20** תהי  $A_{m \times n}$  מטריצה ממשית כך ש- $m < n$ . הוכיחו או הפריכו:

- א. ממד מרחב הפתרונות של המערכת  $Ax=0$  הוא  $n-m$ .  
 ב. למערכת  $(A^T A)x=0$  יש אינסוף פתרונות.  
 ג. ייתכן מצב בו למערכת  $(A^T A)x=0$  יש פתרון יחיד.  
 ד. ייתכן מצב בו למערכת  $(AA^T)x=0$  יש פתרון יחיד.

**21** תהי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר  $n$ , כך שלכל מטריצה ריבועית  $B \neq 0$  מסדר  $n$ , מתקיים  $AB \neq 0$ . הוכיחו ש- $\text{rank}(A) = n$ .

**22** תהי  $A$  מטריצה ממשית מסדר  $m \times n$ .

לגבי כל אחת מהטענות הבאות, קבעו אם היא נכונה או לא. נמקו.

- א. אם למערכת  $Ax=b$  יש פתרון לכל  $b \in \mathbb{R}^m$ , אז בהכרח למערכת  $A^T x=b$  יש פתרון לכל  $b \in \mathbb{R}^m$ .  
 ב. עבור  $m=n$ , אם למערכת  $Ax=b$  יש פתרון לכל  $b \in \mathbb{R}^m$ , אז בהכרח למערכת  $A^T x=b$  יש פתרון לכל  $b \in \mathbb{R}^m$ .  
 ג. אם למערכת ההומוגנית  $Ax=0$  יש אינסוף פתרונות, אז בהכרח  $m < n$ .  
 ד. ייתכן ש- $A^T A = I_n$  וגם  $AA^T = I_m$ .  
 ה. אם  $m \neq n$  ואם למערכת  $Ax=0$  יש פתרון יחיד, אז יש מערכת לא הומוגנית  $Ax=b$  עם יותר מפתרון אחד.

**23** תהא  $A \in M_{4 \times 4}(R)$  ויהי  $b \in R^4$ .

ידוע כי  $u$  ו- $v$  פתרונות של המערכת הלא הומוגנית  $Ax=b$ .

- א. נגדיר  $w = \alpha u + \beta v$ . הוכיחו כי אם גם  $w$  פתרון של המערכת  $Ax=b$ , אז  $\alpha + \beta = 1$ .  
 ב. נניח בנוסף כי  $w = -u + 2v$  הוא פתרון של המערכת  $A^2 x = b$ . הוכיחו כי  $A-I$  לא הפיכה.

$$(24) \text{ נתון } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 \\ -3 & -6 & 3 & -8 & -8 \end{pmatrix}, \text{ ויהי } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

א. הראו כי  $v = (2, -1, 1, -1, 1)^T$  הוא פתרון של המערכת  $Ax = b$ .

ב. מצאו את קבוצת הפתרונות של המערכת ההומוגנית  $Ax = 0$ .

ג. מצאו  $C, D \in M_{5 \times 2}(\mathbb{R})$ , כך ש- $C \neq D$  ו- $AC = AD = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ .

## תשובות סופיות

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{א. (1)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{ב.}$$

$$4x - 2y + 4z = 1$$

$$x - y + z = 2 \quad \text{(2)}$$

$$x - 6y + 3z = 3$$

$$-2y + 4z = 1$$

$$x - 5y + z = 2 \quad \text{(3)}$$

$$x - 6y - z = 3$$

$$(4+k)x - 2y + 4z = 1$$

$$x + (k-1)y + z = 2 \quad \text{(4)}$$

$$x - 6y + (3+k)z = 3$$

$$3x - 2y + 4z = 0$$

$$x - 2y + z = 0 \quad \text{(5)}$$

$$x - 6y + 2z = 0$$

$$2x + y + z = 3$$

$$-2x - 3y - 6z = 6 \quad \text{(6)}$$

$$4x + y + z = 9$$

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) \quad \text{(7)}$$

$$(x, y, z, t) = (-13, 4, -5, 2) \quad \text{(8)}$$

(9) שאלת הוכחה.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{(10)}$$

(11) אם  $k \neq 2$  או  $k \neq -1$ , אז יש פתרון אחד.

אם  $k = 2$ , אז יש אינסוף פתרונות.

אם  $k = -1$ , אז אין פתרונות.

$$m = 5, k = 9 \quad \text{(12)}$$

(13) שאלת הוכחה.

14) סכום האיברים בכל שורה של  $A^{-1}$  הוא קבוע השווה ל- $\frac{1}{k}$ .

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

18) שאלת הוכחה.

19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

23) שאלת הוכחה.

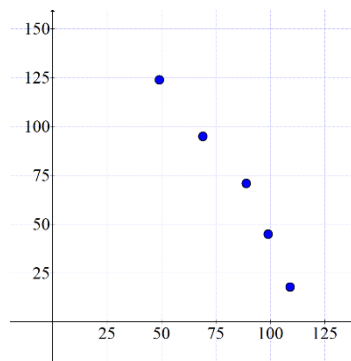
24) א. שאלת הוכחה. ב.  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-t, -2s, s, -t, -t, t)$ .

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} (t=s=0) \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} (t=s=1) \text{ ג.}$$

## שיטת הריבועים הפחותים – רגרסיה ליניארית

### שאלות

- (1) נתונות חמש נקודות במישור:  $(-4, -1)$ ,  $(-2, 0)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(4, 5)$ ,  $(5, 6)$ . מצאו את הישר הקרוב ביותר לנקודות הללו במובן הריבועים הפחותים.
- (2) בטבלה הבאה הביקוש של מוצר מסוים ביחס למחיר שלו בתקופה של חודש.



$price(x)$	$Demand / sales(y)$
49\$	124
69\$	95
89\$	71
99\$	45
109\$	18

- א. מצא את הישר כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר והנקודות יהיה מינימלי. ישר זה נקרא ישר הרגרסיה.
- ב. בעזרת ישר זה נבא את הביקוש אם המחיר הוא 54\$.
- ג. מה משמעות השיפוע של הישר?
- ד. מצא את השגיאה בחישוב הנ"ל.

### תשובות סופיות

- (1)  $f(x) = 0.8x + 2$
- (2) א.  $f(x) = -1.7x + 211$  ב. 119.2 יחידות. ג. אם נעלה את המחיר של המוצר ב-1\$ נצפה לירידה במכירות של 1.7 יחידות בחודש. ד. 14.41

# מתמטיקה 0

פרק 25 - אלגברה ליניארית - דטרמיננטות

תוכן העניינים

1. חישוב דטרמיננטה לפי הגדרה ולפי דירוג. 412 .....
2. חישוב דטרמיננטה כללית מסדר n. 417 .....
3. חישוב דטרמיננטה לפי חוקי דטרמיננטות. 422 .....
4. כלל קרמר ופתרון מערכת משוואות. 424 .....

## חישוב דטרמיננטה לפי הגדרה ולפי דירוג

### שאלות

בשאלות 1-5 חשבו את הדטרמיננטה על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

$$(1) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(2) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(3) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(4) \quad \begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(5) \quad \begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

בשאלות 6-7 חשבו את הדטרמיננטה של המטריצות על ידי דירוג.

$$(6) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix} \text{ ב.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix} \text{ א. (7)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} \text{ ג.}$$

בשאלות 8-10 חשבו את הדטרמיננטה על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{vmatrix} \text{ (8)}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{vmatrix} \text{ (9)}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{vmatrix} \text{ (10)}$$

בשאלות 11-12 הראו, ללא חישוב, שהדטרמיננטה של המטריצות שווה אפס:

$$\begin{vmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{vmatrix} \text{ ג.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} \text{ ב.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \text{ א. (11)}$$

$$\begin{vmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{vmatrix} \cdot \text{ב.} \quad \begin{vmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \text{א. (12)}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \text{ד.} \quad \begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \text{ג.}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4 \quad \text{בשאלות 13-15 נתון כי:}$$

חשבו:

$$\begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix} \quad \text{(13)}$$

$$\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix} \quad \text{(14)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{(15)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \quad \text{(16) הוכיחו כי:}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z) \quad \text{(17) הוכיחו כי:}$$

$$\text{det} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{(18) חשבו:}$$

(19) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. נתונות שתי מטריצות ריבועיות  $A$  ו- $B$  מסדר  $n$  הנבדלות ביניהן רק בשורה ה- $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ).
- תהי  $C$  מטריצה הזוהה למטריצות  $A$  ו- $B$  אך נבדלת מהן בשורה ה- $k$ , שם היא שווה לסכום השורה ה- $k$  של  $A$  והשורה ה- $k$  של  $B$ .
- הוכיחו כי  $|A| + |B| = |C|$ .

$$\text{ב. חשבו:} \quad \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y \end{vmatrix}$$

## תשובות סופיות

- (1) א.  $ad - bc$     ב. 29    ג. -1
- (2) א. -1    ב. -3    ג. -14
- (3) א. 24    ב. 234    ג. -300
- (4) 9
- (5) 6
- (6) א. 0    ב. 0    ג. 3
- (7) א. 24    ב. 44    ג. 104
- (8) 120
- (9) 114
- (10) 6
- (11) פתרונות באתר: [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)
- (12) פתרונות באתר.
- (13) -8
- (14) 16
- (15) 9
- (16) שאלת הוכחה.
- (17) שאלת הוכחה.
- (18)  $(k-1)^4(k+4)$
- (19) א. שאלת הוכחה.    ב. 0

## חישוב דטרמיננטה כללית מסדר $n$

### שאלות

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה  $A_{n \times n} = (a_{ij})$  הנתונה ע"י:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j < n \\ a & 1 \leq i \leq n, j = n \\ a & 1 \leq j \leq n, i = n \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ב. עבור אילו ערכים של המספרים הממשיים  $a_0, \dots, a_{n-1}$ , המטריצה הבאה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{הפיכה:}$$

(2) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה  $A_{n \times n} = (a_{ij})$  הנתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} j & i = j + 1 \\ n & i = 1, j = n \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

האם קיים ערך של  $n$  עבורו דרגת המטריצה קטנה מ- $n$ ?

(3) חשבו את  $|A|$  כאשר המטריצה  $A = (a_{ij})$  נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j = 1 \\ 0 & i = j \neq 1 \\ j & i < j \\ -j & i > j \end{cases}$$

(4) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה  $A_{n \times n} = (a_{ij})$  הנתונה ע"י:  $a_{ij} = |i - j|$ .

(5) חשבו את  $|A|$  כאשר המטריצה  $A = (a_{ij})$  נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} a & i = j \\ b & i \neq j \end{cases}$$

(6) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר  $n$ , כאשר  $n \geq 1$ :

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 6 & 6 & -3 & 6 & \cdots & 6 \\ 8 & 8 & 8 & -4 & \cdots & 8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 2n & 2n & 2n & 2n & \cdots & -n \end{vmatrix}$$

(7) חשבו את  $|A|$  כאשר המטריצה  $A = (a_{ij})$  נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \min\{i, j\} \quad \text{א.}$$

$$a_{ij} = \max\{i, j\} \quad \text{ב.}$$

(8) המטריצה  $A = (a_{ij})$  נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} \min\{3(i-1), 3(j-1)\} & 1 < i, j \leq n \\ 1 & i=1 \text{ or } j=1 \end{cases}$$

חשבו את  $|A|$ .

(9) המטריצה  $A = (a_{ij})$  נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} \min\{k(i-1), k(j-1)\} & 1 < i, j \leq n \\ 1 & i=1 \text{ or } j=1 \end{cases}$$

חשבו את  $|A|$  ומצאו עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$  המטריצה הפיכה.

(10) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר  $n$ , כאשר  $n \geq 3$ :

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ 1 & 2 \leq i \leq n, j = 1 \\ 1 & 2 \leq j \leq n, i = 1 \\ x & \text{else} \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & x & x & \cdots & x \\ 1 & x & 0 & x & \cdots & x \\ 1 & x & x & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & x & \ddots & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}$$

(11) תהי  $A = (a_{ij})$  מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} ij & i \neq j \\ 1+ij & i = j \end{cases}$$

חשבו את  $D_n = |A_{n \times n}|$ .

הערה: נפתור תרגיל זה בדרך אחרת בפרק על ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

$$(12) \text{ המטריצה } A = (a_{ij}) \text{ נתונה על ידי: } a_{ij} = \begin{cases} a & i = j \\ b & i = j+1 \\ c & j = i+1 \end{cases}$$

א. מצאו נוסחת נסיגה לחישוב  $D_n = |A_{n \times n}|$ .

ב. הניחו כי  $a=3, b=1, c=2$  וחשבו:

1. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה.

2. את הדטרמיננטה עבור  $n=20$ .

(13) נתונה מטריצה  $A_{n \times n}$ .

במטריצה זו מבצעים את פעולות השורה הבאות:  
מחליפים בין השורה הראשונה לשורה האחרונה, בין השורה השנייה לשורה  
הלפני אחרונה וכך הלאה, עד שלא ניתן יותר להחליף שורות.

בסוף התהליך מקבלים מטריצה  $B$ .

חשבו את  $|B|$  במונחי  $|A|$ .

$$(14) \text{ חשבו את } D_n = \begin{vmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{vmatrix}_{n \times n} \text{ כאשר } n \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & i+j = n+1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ הערה:}$$

$$(15) \text{ חשבו את } D_n = \det \begin{pmatrix} 2 & & 1 \\ & \ddots & 2 \\ n & & 2 \end{pmatrix}_{n \times n} \text{ כאשר } n \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} i & i+j = n+1 \\ 2 & \text{else} \end{cases} \text{ הערה:}$$

$$(16) \text{ חשבו את } D_n = \det \begin{pmatrix} a & & b \\ & \ddots & b \\ b & & a \end{pmatrix}_{n \times n} \text{ כאשר } n \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} b & i+j = n+1 \\ a & \text{else} \end{cases} \text{ הערה:}$$

(17) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה של  $A_{n \times n} = (a_{ij})$  הנתונה ע"י:

$$a_{ij} = \min \{i, n-j+1\}$$

$$\begin{vmatrix}
 a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & x \\
 a_n & a_{n-1} & \cdots & x & a_1 \\
 a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 a_n & x & \cdots & a_2 & a_1 \\
 a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1
 \end{vmatrix}$$

(18) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר  $n$ , כאשר  $n \geq 2$

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } |A| = a - (n-1)a^2 \quad \text{ב. } A \text{ הפיכה אם ורק אם } a_0 \neq 0$$

$$(2) \quad \text{א. } (-1)^{n+1} n! \quad \text{ב. לא.}$$

$$(3) \quad |A| = n!$$

$$(4) \quad |A| = (-1)^{n+1} (n-1) 2^{n-2}$$

$$(5) \quad |A| = (a-b)^{n-2} [a + (n-1)b]$$

$$(6) \quad (-3)^{n-1} (2n-3)n!$$

$$(7) \quad \text{א. } |A| = 1 \quad \text{ב. } |A| = (-1)^{n+1} n$$

$$(8) \quad |A| = 2 \cdot 3^{n-2}$$

$$(9) \quad |A| = (k-1) \cdot k^{n-2} \text{ והמטריצה הפיכה אם ורק אם } k \neq 1 \text{ וגם } k = 0$$

$$(10) \quad |A| = (-1)^{n-1} x^{n-2} (n-1)$$

$$(11) \quad D_n = 1 + \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$(12) \quad \text{א. } D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-1}, D_2 = a^2 - bc, D_3 = a^3 - 2abc$$

$$\text{ב.1. } D_n = 2^{n+1} - 1 \quad \text{ב.2. } D_{20} = 2^{21} - 1$$

$$|B| = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} |A| & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} |A| & n \text{ odd} \end{cases} \quad (13)$$

$$D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ odd} \end{cases} \quad (14)$$

$$D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n+2}{2}} 2(n-2)! & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} 2(n-2)! & n \text{ odd} \end{cases} \quad (15)$$

$$D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} (b-a)^{n-1} [b + (n-1)a] & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} (b-a)^{n-1} [b + (n-1)a] & n \text{ odd} \end{cases} \quad (16)$$

$$D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ odd} \\ (-1)^{\frac{n-2}{2} + n-1} & n \text{ even} \end{cases} \quad (17)$$

$$D_n = \begin{cases} a_n (-1)^{\frac{n}{2}} (x-a_1)(x-a_2) \cdots (x-a_{n-1}) & n \text{ even} \\ a_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} (x-a_1)(x-a_2) \cdots (x-a_{n-1}) & n \text{ odd} \end{cases} \quad (18)$$

## חישוב דטרמיננטה לפי משפטי דטרמיננטות

### שאלות

בשאלות 1-2 נתון כי  $A$  ו- $B$  מטריצות מסדר 3,  $|A|=4$ ,  $|B|=2$ .  
 חשבו:

(1) א.  $|ABA^{-1}B^T|$       ב.  $|4A^2B^3|$

(2) א.  $| -A^{-2}B^T A^3 |$       ב.  $| -2A^2 A^T \text{adj} B |$

(3) נתון:  $(PQ)^{-1}APQ = B$ .  
 הוכיחו:  $|A|=|B|$ .

(4) נתון:  $A$  ו- $B$  מטריצות הפיכות מסדר 4, כך ש- $2AB+3I=0$ ,  $|A|=2$ .  
 חשבו את  $|B|$ .

(5) נתון:  $A$  ו- $B$  מטריצות הפיכות מסדר 3, כך ש- $B^2-2A^{-1}=0$ ,  $A+3B=0$ .  
 חשבו את  $|A|$ ,  $|B|$ .

(6) הוכיחו: 1.  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$       2.  $|\text{adj}(A_{n \times n})| = |A|^{n-1}$ .

(7) נתון כי  $A$  מטריצה אנטי-סימטרית מסדר אי-זוגי.  
 הוכיחו ש- $|A|=0$ .

(8) נתון:  $A$  מטריצה מסדר  $n$ ,  $|A|=128$ ,  $2AB=B^T A^2$ , ו- $B$  הפיכה.  
 מצאו את  $n$ .

(9) נתון:  $\det(A_{n \times n}) = 2$ ,  $\det(B_{n \times n}) = \frac{1}{3}$ .

חשבו:  $\det \left| \frac{1}{3} B^{-n} A^{2n} \right|$ .

$$(10) \text{ נתון } M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

הוכיחו כי  $\det(M) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$ .

### תשובות סופיות

(1) א. 4      ב.  $2^{13}$

(2) א. -8      ב.  $-2^{11}$

(3) שאלת הוכחה.

(4)  $\frac{81}{32}$

(5)  $|A|=18, |B|=-2/3$

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) 7

(9)  $4^n$

(10) שאלת הוכחה.

## כלל קרמר

### שאלות

בשאלות 1-3 פתרו את מערכות המשוואות בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{array}{l}
 x+2z+5t=8 \\
 -2x-6y=-8 \\
 5x+3y-7z+4t=5 \\
 2x+5y+44z=51
 \end{array}
 \quad (3)
 \quad
 \begin{array}{l}
 x+z=3 \\
 4x+y+8z=21 \\
 2x+3z=8
 \end{array}
 \quad (2)
 \quad
 \begin{array}{l}
 x+2y=5 \\
 3x+4y=11
 \end{array}
 \quad (1)$$

$$\begin{array}{l}
 kx+y+z+t+r=1 \\
 x+ky+z+t+r=1 \\
 x+y+kz+t+r=1 \\
 x+y+z+kt+r=1 \\
 x+y+z+t+kr=1
 \end{array}
 \quad (4)$$

א. עבור איזה ערך של  $k$  למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של  $k$  למערכת פתרון יחיד שבו  $x = \frac{1}{2}$ ?

ג. האם קיים  $k$  עבורו למערכת פתרון יחיד שבו  $x = \frac{1}{5}$ ?

ד. הוכיחו שאם למערכת פתרון יחיד, אז בהכרח מתקיים ש-

$$x = y = z = t = r$$

(5) יהיו  $A, B$  מטריצות ממשיות מסדר  $n \times n$ .

עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או לא.

א. אם למערכת ההומוגנית  $Ax=0$  קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2=0$ .

ב. אם למערכת ההומוגנית  $(A^t A)x=0$  קיים פתרון יחיד, אז  $|A|=0$ .

ג. אם למערכת ההומוגנית  $(AB)x=0$  קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $|A|=0$ .

### תשובות סופיות

$$x=1, y=2 \quad (1)$$

$$x=1, y=1, z=2 \quad (2)$$

$$x=y=z=t=1 \quad (3)$$

$$k \neq 1, k \neq -4 \quad (4)$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{א. לא נכונה.} & \text{ב. } k = -2. \\
 \text{ב. לא נכונה.} & \text{ג. לא.} \\
 \text{ג. לא נכונה.} & \text{ד. הוכחה.}
 \end{array}$$

# מתמטיקה 0

פרק 26 - אלגברה ליניארית - ערכים עצמיים-וקטורים עצמיים-לכסון מטריצות - דימיון

תוכן העניינים

1. לכסון מטריצות - תרגילי חישוב.....425

## לכסון מטריצות – תרגילי חישוב

### שאלות

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות 1-4:

- מצאו מטריצה אופיינית.
- מצאו פולינום אופייני.
- מצאו ערכים עצמיים ואת הריבוב האלגברי של כל ערך עצמי.
- מצאו מרחבים עצמיים ואת הריבוב הגיאומטרי של כל ערך עצמי.
- מצאו וקטורים עצמיים.
- קבעו האם המטריצה ניתנת ללכסון.
- במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסנו אותה. כלומר, מצאו מטריצה הפיכה  $P$ , כך ש- $P^{-1}AP = D$ , באשר  $D$  מטריצה אלכסונית.
- במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, חשבו  $A^{2009}$ .
- מצאו את הפולינום המינימלי.
- קבעו האם המטריצה הפיכה לפי ערכיה העצמיים. במידה והמטריצה הפיכה, בטאו את  $A^{-1}$  בעזרת  $A$  ו- $I$  בלבד, תוך שימוש במשפט קיילי המילטון.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

- עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות 5-6 מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסנו אותה. כלומר, מצאו מטריצה הפיכה  $P$ , כך ש- $P^{-1}AP = D$ , כאשר  $D$  מטריצה אלכסונית. פתרו פעם מעל  $\mathbb{C}$  ופעם מעל  $\mathbb{R}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות 7-11 מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

(12) תהי  $A$  מטריצה ממשית ריבועית מסדר  $3 \times 3$ .

ידוע כי הווקטורים העצמיים של המטריצה הם  $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

והם מתאימים לערכים העצמיים:  $\lambda_1 = 6$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = -4$ .

מצאו את המטריצה  $A$ .

(13) קבעו האם קיימת מטריצה ממשית ריבועית מסדר  $3 \times 3$ ,

בעלת וקטורים עצמיים  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

המתאימים לערכים העצמיים:  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 3$ .

במידה וקיימת מטריצה כזאת, מצאו אותה.

## תשובות סופיות

$$\text{א. } \begin{bmatrix} x & -2 & 1 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & -1 & x \end{bmatrix} \quad \text{ב. } p(x) = x(x-1)^2 \quad \text{ג. } x=0, x=1 \quad \text{ד. } (1)$$

הריבוב האלגברי של  $x=1$  הוא 2, והריבוב האלגברי של  $x=0$  הוא 1.

ד.  $V_{x=1} = sp\{\langle 1, 1, 1 \rangle\}$  – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה.  $V_{x=0} = sp\{\langle 1, 0, 0 \rangle\}$  – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה.  $\langle 1, 1, 1 \rangle, \langle 1, 0, 0 \rangle$  – ו-ח. לא ניתנת.

ט.  $m(x) = x(x-1)^2$   $\deg = 3$  – הפולינום האופייני הוא גם הפולינום המינימלי.  
י. לא הפיכה.

$$\text{א. } \begin{bmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{bmatrix} \quad \text{ב. } p(x) = (x-1)^2(x-2) \quad \text{ג. } x=1, x=2 \quad \text{ד. } (2)$$

הריבוב האלגברי של  $x=1$  הוא 2, והריבוב האלגברי של  $x=2$  הוא 1.

ד.  $V_{x=1} = sp\{\langle 1, 0, 0 \rangle\}$  – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה.  $V_{x=2} = sp\{\langle 0, 0, 1 \rangle\}$  – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה.  $\langle 0, 0, 1 \rangle, \langle 1, 0, 0 \rangle$  – ו-ח. לא ניתנת.

ט.  $m(x) = (x-1)^2(x-2)$   $\deg = 3$  – הפולינום האופייני הוא גם המינימלי.  
י. הפיכה.

$$\text{א. } \begin{bmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & x-1 \end{bmatrix} \quad \text{ב. } p(x) = x(x-1)(x-2) \quad \text{ג. } x=0, x=1, x=2 \quad \text{ד. } (3)$$

$x=0$  – ריבוב אלגברי: 1,  $x=1$  – ריבוב אלגברי: 1,  $x=2$  – ריבוב אלגברי: 1.

ד.  $V_{x=0} = sp\{\langle -1, 0, 1 \rangle\}$  – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה.  $V_{x=1} = sp\{\langle 0, 1, 0 \rangle\}$  – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה.  $\langle 0, 1, 0 \rangle, \langle 1, 0, 1 \rangle, \langle -1, 0, 1 \rangle$  – ו. ניתנת ללכסון. ז.  $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ט.  $m(x) = x(x-1)(x-2)$  – י. לא הפיכה. ח.  $\begin{bmatrix} 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \end{bmatrix}$

$$p(x) = (x-6)(x-2)(x+4) \quad \text{ב.} \quad \begin{bmatrix} x+1 & -3 & 0 \\ -3 & x+1 & 0 \\ 2 & 2 & x-6 \end{bmatrix} \quad \text{א.} \quad (4)$$

$$\text{ג. } x=6, x=2, x=-4$$

1.  $x=-4$  – ריבוב אלגברי: 1,  $x=2$  – ריבוב אלגברי: 1,  $x=6$  – ריבוב אלגברי: 1.

$$\text{ד. } V_{x=6} = \text{sp}\{\langle 0, 0, 1 \rangle\} \text{ – ריבוב גיאומטרי: 1.}$$

$$V_{x=2} = \text{sp}\{\langle 1, 1, 1 \rangle\} \text{ – ריבוב גיאומטרי: 1.}$$

$$V_{x=-4} = \text{sp}\{\langle -1, 1, 0 \rangle\} \text{ – ריבוב גיאומטרי: 1.}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ז.} \quad \text{ה. } \langle 0, 0, 1 \rangle, \langle -1, 1, 0 \rangle, \langle 1, 1, 1 \rangle \quad \text{ו. ניתנת ללכסון.}$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2^{2017} + (-4)^{2017} & 2^{2017} - (-4)^{2017} & 0 \\ 2^{2017} - (-4)^{2017} & 2^{2017} + (-4)^{2017} & 0 \\ -6^{2017} + 2^{2017} & -6^{2017} + 2^{2017} & 2 \cdot 6^{2017} \end{bmatrix} \quad \text{ח.}$$

$$\text{ט. } m(x) = (x-6)(x-2)(x+4) \quad \text{י. הפיכה.}$$

(5) אין פתרונות מעל  $\mathbb{R}$ , ולכן אין ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

$$\text{מעל } \mathbb{C}: x = 1 \pm 2i, \quad \mathbf{v}_{x=1+2i} = \langle 1+i, 2 \rangle, \quad \mathbf{v}_{x=1-2i} = \langle 1-i, 2 \rangle$$

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 1 & 1-2i \end{bmatrix}$$

(6) ערכים עצמיים:  $x=3$ , ווקטורים עצמיים:  $\mathbf{v}_{x=3} = \langle -1, 1 \rangle$ . לא ניתנת ללכסון.

(7) ערכים עצמיים:  $x_1=2, x_{2,3}=3$

$$\text{וקטורים עצמיים: } V_{x=2} = (1, 1, 1), \quad v_{x=3}^{(1)} = (1, 0, 1), \quad v_{x=3}^{(2)} = (1, 1, 0)$$

$$(8) \quad \mathbf{v}_{x=-2} = (-1, 1, 1), \quad \mathbf{v}_{x=3} = (1, 2, 1), \quad \mathbf{v}_{x=1} = (-1, 4, 1), \quad x=1, x=3, x=-2$$

$$(9) \quad \mathbf{v}_{x=-1} = (-1, 0, 1), \quad \mathbf{v}_{x=4} = (1, 1, 1), \quad \mathbf{v}_{x=1} = (1, -2, 1), \quad x=1, x=4, x=-1$$

$$(10) \quad \mathbf{v}_{x=3} = (1, 2), \quad \mathbf{v}_{x=1} = (-1, 2), \quad x=-1, x=3$$

$$(11) \quad \mathbf{v}_{x=1+\sqrt{3}i} = (1-\sqrt{3}i, 1+\sqrt{3}i, -2), \quad \mathbf{v}_{x=1} = \langle 1, 1, 1 \rangle, \quad x=1, x=1 \pm \sqrt{3}i$$

$$\mathbf{v}_{x=1-\sqrt{3}i} = (1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, -2)$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix} \quad (12)$$

(13) אין כזו מטריצה.