

מתמטיקה מתקדמת



תוכן העניינים

1	1. אינטגרציה בחלקים
5	2. שיטת ההצבה באינטגרלים
8	3. טורי חזקות
(ללא ספר)	4. מספרים מרוכבים
11	5. פונקציות אלמנטריות
14	6. פונקציות אנליטיות
22	7. התמרת פורייה

מתמטיקה מתקדמת

פרק 1 - אינטגרציה בחלקים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים 1

אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-23 :

$$\int x \sin x dx \quad (3) \qquad \int x^4 \ln x dx \quad (2) \qquad \int x e^x dx \quad (1)$$

$$\int x^2 e^{-4x} dx \quad (6) \qquad \int x^2 \sin 4x dx \quad (5) \qquad \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (4)$$

$$\int \arctan x dx \quad (9) \qquad \int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \qquad \int \ln x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad (12) \qquad \int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (11) \qquad \int \arcsin x dx \quad (10)$$

$$\int x^2 \ln(x^2 + 1) dx \quad (15) \qquad \int x \arctan x dx \quad (14) \qquad \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (13)$$

$$\int e^x \cos x dx \quad (18) \qquad \int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (17) \qquad \int \ln^2 x dx \quad (16)$$

$$\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx \quad (21) \qquad \int \sqrt{1-x^2} dx \quad (20) \qquad \int e^{2x} \sin 4x dx \quad (19)$$

$$\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx \quad (23) \qquad \int x \tan^2 x dx \quad (22)$$

(24) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int x^n e^x dx$ כאשר n טבעי.

(25) חשבו את $\int x^4 e^x dx$.

(26) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \cos^n x dx$ כאשר n טבעי.

(27) חשבו את $\int \cos^4 x dx$.

(28) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \sin^n x dx$ באשר n טבעי.

(29) חשבו את $\int \sin^4 x dx$.

(30) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$ באשר n טבעי.

(31) חשבו את $\int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$.

(32) חשבו את האינטגרלים $\int e^{ax} \cos bxdx$, $\int e^{ax} \sin bxdx$.

תשובות סופיות

$$xe^x - e^x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^5}{5} \left(\ln x - \frac{1}{5} \right) + c \quad (2)$$

$$x \cos x + \sin x + c \quad (3)$$

$$\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c \quad (4)$$

$$-\frac{x^2}{4} \cos 4x + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{4} \sin x + \frac{1}{16} \cos 4x \right) + c \quad (5)$$

$$-\frac{x^2}{4} e^{-4x} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} x e^{-4x} - \frac{1}{16} e^{-4x} \right) + c \quad (6)$$

$$x \ln x - x + c \quad (7)$$

$$-\frac{1}{3} (x \ln x - x) + c \quad (8)$$

$$x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + c \quad (9)$$

$$x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{5} \left(\frac{x^2}{2} \ln(x-2) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 4x \ln |x-2| \right) \right) + c \quad (11)$$

$$x \tan x + \ln |\cos x| + c \quad (12)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + c \quad (13)$$

$$\arctan x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} (x - \arctan x) + c \quad (14)$$

$$\frac{x^3}{3} \ln(x^2 + 1) - \frac{2}{3} \left(\frac{x^3}{3} - x + \arctan x \right) + c \quad (15)$$

$$x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + c \quad (16)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{2}{x} (\ln x - 1) + c \quad (17)$$

$$-e^x \cos x + \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + c \quad (18)$$

$$\frac{e^{2x} \left(-\cos 4x + \frac{1}{2} \sin 4x \right)}{5} + c \quad (19)$$

$$\frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + c \quad (20)$$

$$\frac{e^x}{x+1} + c \quad (21)$$

$$x(\tan x - x) + \ln |\cos x| + \frac{x^2}{2} + c \quad (22)$$

$$\frac{2}{9}(x+1)(x+2)^{\frac{9}{2}} - \frac{4}{99}(x+2)^{\frac{11}{2}} + c \quad (23)$$

$$x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \quad (24)$$

$$e^x (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + c \quad (25)$$

$$\frac{1}{n} \left\{ (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} dx \right\} \quad (26)$$

$$\frac{1}{4} (\cos^3 x \sin x + 3 \cdot 5 (\cos x \sin x + x)) + c \quad (27)$$

$$\frac{1}{n} \left(-(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} dx \right) \quad (28)$$

$$\frac{1}{4} (-\sin^3 x \cos x + 3 \cdot 5 (x - \sin x \cos x)) + c \quad (29)$$

$$\frac{1}{2n} \left(\frac{x}{(1+x^2)^n} + \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} (2n-1) \right) \quad (30)$$

$$\frac{1}{6} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{1}{4} \left\{ \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{x}{1+x^2} + \arctan x \right\} \right\} \right\} \quad (31)$$

$$\int e^{ax} \cos bxdx = e^{ax} \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2}, \quad \int e^{ax} \sin bxdx = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} \quad (32)$$

מתמטיקה מתקדמת

פרק 2 - שיטת ההצבה באינטגרלים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת ההצבה 5

אינטגרלים בשיטת ההצבה

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3) \quad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (2) \quad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx \quad (6) \quad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (5) \quad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx \quad (9) \quad \int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \quad \int e^{x^2} x^3 dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x} dx \quad (12) \quad \int x^3 (3x^2-1)^{14} dx \quad (11) \quad \int 2x^3 \cos(x^2+1) dx \quad (10)$$

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8+2} \quad (15) \quad \int \ln^3 x dx \quad (14) \quad \int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (18) \quad \int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx \quad (17) \quad \int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} \quad (21) \quad \int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad (20) \quad \int \arctan \sqrt{x} dx \quad (19)$$

$$\int x^5 \sqrt[3]{x^3+1} dx \quad (24) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx \quad (23) \quad \int \cos(\ln x) dx \quad (22)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x^2+1} + c \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \left(\frac{(\sqrt{x^3+4})^5}{5} - \frac{4}{3} (\sqrt{x^3+4})^3 \right) + c \quad (2)$$

$$2 \left(\frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3} - \sqrt{x^2+1} \right) + c \quad (3)$$

$$\arctan(e^x) + c \quad (4)$$

$$-\frac{1}{3(\ln x)^3} + c \quad (5)$$

$$\arcsin(\ln x) + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} (x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) + c \quad (7)$$

$$3e^{\sqrt[3]{x}} (\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2) + c \quad (8)$$

$$\ln \left| \left(x + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}} \right| + c \quad (9)$$

$$x^2 \sin(x^2+1) + \cos(x^2+1) + c \quad (10)$$

$$\frac{1}{18} \left(\frac{(3x^2-1)^{16}}{16} + \frac{(3x^2-1)^{15}}{15} \right) + c \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} \left(\ln x + \frac{1}{2} \sin(2 \ln x) \right) + c \quad (12)$$

$$\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right| + c \quad (13)$$

$$x(\ln^3 x - 3 \ln^2 x + 6 \ln x - 6) + c \quad (14)$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x^4}{\sqrt{2}} \right) + c \quad (15)$$

$$\frac{(\ln x)^5}{5} + c \quad (16)$$

$$\frac{(\arctan x)^3}{3} + c \quad (17)$$

$$\ln |\ln(\ln x)| + c \quad (18)$$

$$x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + c \quad (19)$$

$$-\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{1-x^4} - \ln |1-x^4| \right) + c \quad (20)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^{2x}} - 1}{\sqrt{1+e^{2x}} + 1} \right| + c \quad (21)$$

$$\frac{x}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + c \quad (22)$$

$$6(\sqrt[6]{x} - \arctan \sqrt[6]{x}) + c \quad (23)$$

$$\frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^7}{7} - \frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^4}{4} + c \quad (24)$$

מתמטיקה מתקדמת

פרק 3 - טורי חזקות

תוכן העניינים

- 1. טור טיילור וטור מקלורן 8
- 2. נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות 10

טור טיילור וטור מקלורן

שאלות

בשאלות 1-24 מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x=0$ (טור מקלורן) :

$$f(x) = \sinh x \quad (3) \quad f(x) = x^2 e^{-4x} \quad (2) \quad f(x) = \sin 2x \quad (1)$$

$$f(x) = 2^x \quad (6) \quad f(x) = \cos^2 x \quad (5) \quad f(x) = \sin^2 x \quad (4)$$

$$f(x) = \arcsin x \quad (9) \quad f(x) = \ln(2-3x+x^2) \quad (8) \quad f(x) = x \cos(4x^2) \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (12) \quad f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (11) \quad f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (10)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (15) \quad f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (14) \quad f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (18) \quad f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (17) \quad f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (16)$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (21) \quad f(x) = \ln(1-x) \quad (20) \quad f(x) = \ln(1+x) \quad (19)$$

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{3}\right) \quad (24) \quad f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (23) \quad f(x) = \ln(5-x) \quad (22)$$

הערות : לפתרון שאלות 15 ו-16, יש להכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.
לפתרון סעיפים 18, 19, 23 ו-24 יש להכיר את הנושא גזירה ואינטגרציה של טורי מקלורן.
אפשר להיעזר בפיתוחים הידועים לטור מקלורן המופיעים בנספח.

בשאלות 25-27 מצאו את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס, בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות (נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים) :

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x} \quad (27) \quad f(x) = \tan x \quad (26) \quad f(x) = e^{-x^2} \cos x \quad (25)$$

תשובות סופיות

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n x^{n+2}}{n!} \quad (2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (1)$$

$(-\infty < x < \infty) \quad \quad \quad (-\infty < x < \infty) \quad \quad \quad (-\infty < x < \infty)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n x^n}{n!} \quad (6) \quad \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \quad (4)$$

$(-\infty < x < \infty) \quad \quad \quad (-\infty < x < \infty) \quad \quad \quad (-\infty < x < \infty)$

$$(-1 \leq x < 1) \ln 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (8) \quad (-\infty < x < \infty) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n} x^{4n+1}}{(2n)!} \quad (7)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (10) \quad x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (9)$$

$(-1 < x < 1)$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n} \quad (12) \quad (|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n} \quad (11)$$

$$(|x| < \frac{1}{4}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1} \quad (14) \quad (|x| < 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n \quad (13)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1\right) x^n \quad (16) \quad (|x| < 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}} \quad (15)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (18) \quad (|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n \quad (17)$$

$$(-1 \leq x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (20) \quad (-1 < x \leq 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (19)$$

$$(-5 \leq x < 5) \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)} \quad (22) \quad (|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad (21)$$

$$(|x| \leq 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)} \quad (24) \quad (|x| < \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2} \quad (23)$$

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \quad (26) \quad 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{25}{24}x^4 - \frac{331}{720}x^6 + \dots \quad (25)$$

$$x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \dots \quad (27)$$

נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

<u>טור מקלורן</u>	<u>תחום התכנסות</u>
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$-1 < x \leq 1$
$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$	$-1 \leq x \leq 1$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots$	$-1 < x < 1$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n$	$-1 \leq x \leq 1 \quad (m > 0)$
$= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$	$-1 < x \leq 1 \quad (-1 < m < 0)$
	$-1 < x < 1 \quad (m \leq -1)$
	$m \neq 0, 1, 2, 3, \dots$

מתמטיקה מתקדמת

פרק 4 - מספרים מרוכבים

תוכן העניינים

1. מספרים מרוכבים (ללא ספר)

מתמטיקה מתקדמת

פרק 5 - פונקציות אלמנטריות

תוכן העניינים

- 11 1. אקספוננט מרוכב
- 12 2. סינוס מרוכב
- 13 3. קוסינוס מרוכב

אקספוננט מרוכב:

שאלות:

- (1) פתרו את המשוואה $e^z = -1$.
- (2) הוכיחו כי לכל x ממשי מתקיים $|e^{ix}| = 1$.
- (3) ענו על הסעיפים הבאים:
 - א. הראו כי אם $\text{Im}(z) \geq 0$ אז $|e^{iz}| \leq 1$.
 - ב. הראו כי $|e^z| = 1$ אם ורק אם $\text{Re}(z) = 0$.
- (4) פתרו את המשוואה $e^z = 1$.
- (5) פתרו את המשוואה $e^z = i$.
- (6) פתרו את המשוואה $e^z = 1+i$.
- (7) האם הפונקציה $f(z) = e^z$ היא חח"ע?

תשובות סופיות:

- (1) $z = i \cdot \pi [2n+1]$
- (2) $\sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x)} = 1$
- (3) א. $|e^{iz}| = e^{-y} = \frac{1}{e^y} \leq \frac{1}{e^0} = 1$. ב. הוכחה.
- (4) $z_k = 2\pi i k \quad k \in \mathbb{Z}$
- (5) $z_k = i\pi \left(2k + \frac{1}{2}\right) \quad k \in \mathbb{Z}$
- (6) $z_k = \frac{1}{2} \ln(2) + i\pi \left(2k + \frac{1}{4}\right) \quad k \in \mathbb{Z}$
- (7) לא.

סינוס מרוכב:

שאלות:

- (1) פתרו את המשוואה $\sin(z) = 2$.
- (2) הוכיחו כי $\sin(z) = \sin(x+iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$.
- (3) פתרו את המשוואה $\sin(z) = 5$.

תשובות סופיות:

- (1) כל הפתרונות הם מהצורה הבאה: $z_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n + i \ln(2 \pm \sqrt{3})$, כאשר n מספר שלם.
- (2) הוכחה.
- (3) $z_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - i \ln(5 \pm 2\sqrt{6})$

קוסינוס מרוכב:

שאלות:

(1) הוכיחו כי $\cos(z) = \cos(x + iy) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$.

(2) פתרו את המשוואה $\cos(z) = 2$.

(3) האם $|\cos(z)| \leq 1$ לכל z ?

(4) פתרו את המשוואה $\cos(\pi z) + \frac{3}{4}i = 0$.

(5) הוכיחו כי לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים $|\cos(z)| \leq \frac{e^y + e^{-y}}{2}$ כאשר $y = \text{Im}(z)$.

(6) פתרו את המשוואה $\tan(z) = \frac{i}{3}$.

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

(2) $z_n = 2\pi n + i \ln(2 \pm \sqrt{3})$

(3) לא.

(4) $z_k = -\frac{1}{2} + 2k - i \frac{1}{\pi} \ln(2)$

(5) הוכחה.

(6) $z_k = \pi k + i \frac{1}{2} \ln(2)$

מתמטיקה מתקדמת

פרק 6 - פונקציות אנליטיות

תוכן העניינים

14	1. פונקציות מרוכבות.....
15	2. גבולות מרוכבים ורציפות.....
16	3. נגזרות מרוכבות.....
17	4. משוואות קושי-רימן.....
20	5. פונקציות הרמוניות.....

פונקציות מרוכבות:

שאלות:

(1) רשמו את הפונקציה $f(z) = z \cdot \operatorname{Re}(z)$, בצורה $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$.

(2) רשמו את הפונקציה $f(z) = |z|^2$, בצורה $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$.

(3) רשמו את הפונקציה $f(z) = 2|z|^2 + i(\bar{z})^2$, בצורה $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$.

(4) רשמו את הפונקציה $f(z) = \frac{z}{1+|z|^2}$, בצורה $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$.

(5) רשמו את הפונקציה $f(z) = z^2 + \bar{z}$, בצורה $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$.

(6) רשמו את הפונקציה $f(x+iy) = \frac{x^3}{3} + i \cdot \left(-\frac{y^3}{3}\right)$, כאשר $z = x+iy$, בצורה $f(z)$.

תשובות סופיות:

(1) $f(z) = x^2 + i \cdot xy$

(2) $f(z) = x^2 + y^2 + i \cdot 0$

(3) $f(z) = 2[x^2 + xy + y^2] + i(x^2 - y^2)$

(4) $f(z) = \frac{x}{1+x^2+y^2} + i \cdot \frac{y}{1+x^2+y^2}$

(5) $f(z) = x^2 + x - y^2 + i \cdot (2xy - y)$

(6) $f = \frac{2z^3 + 6z(\bar{z})^2}{24}$

גבולות מרוכבים ורציפות:

שאלות:

מצאו את הגבולות הבאים (אם קיימים):

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z} = ? \quad (1)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^4}{|z|^4} = ? \quad (2)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} e^{\frac{-1}{z^2}} = ? \quad (3)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} e^{\frac{-1}{z^4}} = ? \quad (4)$$

תשובות סופיות:

$$\frac{1-ik}{1+ik} \quad (1)$$

$$\frac{(1+ik)^4}{(1+k)^2} \quad (2)$$

(3) הגבול תלוי במסלול ולכן אינו קיים.

(4) הגבול תלוי במסלול ולכן אינו קיים.

נגזרות מרוכבות:

שאלות:

(1) מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה $f(z) = \bar{z}$ גזירה. הראו עפ"י הגדרת הנגזרת כי $f(z) = \bar{z}$ אינה גזירה ב- z_0 לכל $z_0 \in \mathbb{C}$.

(2) מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה $f(z) = \operatorname{Re}(z)$ גזירה.

(3) מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה $f(z) = |z|^2$ גזירה.

(4) הוכיחו את משפט לופיטל: $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{g(z) - g(z_0)}$

תשובות סופיות:

- (1) הפונקציה לא גזירה. הגבול תלוי במסלול ולכן אינו קיים.
- (2) הפונקציה לא גזירה.
- (3) בראשית הצירים, והנגזרת שלה היא 0.
- (4) הוכחה.

משוואות קושי-רימן:

שאלות:

(1) הראו כי $f(z) = z^2 + \text{Im}(z)$ אינה גזירה לכל z .

(2) הראו כי $f(z) = xy + i(x^2 + y^2)$ אינה גזירה בכל הנקודות בהן $z \neq 0$, אך כן גזירה בנקודה $z = 0$ (לפי הגדרה).

(3) מצאו מספרים ממשיים a, b כך שהפונקציה $f(z) = e^{ax} \cos(3y) + i(-e^{-3x} \sin(by))$ תהיה גזירה בכל נקודה.

(4) נתון כי $f(z) = \frac{z}{z}$ אינה רציפה ב $z = 0$.

מצאו את כל הנקודות (אם קיימות) בהן הפונקציה גזירה.

משפט קושי-רימן: הוכחה (הפתרון בסרטון)

אם $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$, גזירה ב- $z_0 = x_0 + iy_0$,

אז מתקיימות משוואות קושי-רימן בנקודה זו, כלומר:

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$$

$$u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$$

(5) נניח כי $f(z)$ גזירה בתחום D , ונניח כי $\text{Re}\{f(z)\} = 0$ לכל $z \in D$. הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.

(6) נניח כי $f(z)$ פונקציה גזירה שאינה קבועה בתחום D .

נגדיר $g(z) = \overline{f(z)}$ לכל $z \in D$.

הוכיחו כי $g(z)$ אינה גזירה בכל D .

(7) נתונה הפונקציה $f(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$ הוכיחו את הטענות הבאות:

א. הפונקציה אינה רציפה בראשית.

ב. משוואות קושי-רימן מתקיימות בראשית.

- (8) נניח כי $f(z)$ אנליטית בתחום $H^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$.
 הוכיחו כי $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ אנליטית בתחום $H^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) < 0\}$.
- (9) הוכיחו כי $f(z) = e^{\text{Re}(z)}$ אינה גזירה בשום נקודה במישור המרוכב.
- (10) נתונה הפונקציה $f(z) = cx^2 - xy + ixy^2$, כאשר c קבוע מרוכב כלשהו.
 נתון כי $f(z)$ גזירה בנקודה $1+i$.
 מצאו את הקבוע c ואת כל הנקודות בהן הפונקציה גזירה.
- (11) נתונה הפונקציה $f(z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.
 קבעו האם הפונקציה $f(z)$ אנליטית בחצי המישור הימני $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) > 0\}$.
- (12) נתונה הפונקציה $f(z) = e^{\frac{x^2-y^2}{2}} [\cos(xy) + i \cdot a \sin(xy)]$.
 עבור אילו ערכי a זוהי פונקציה הולומורפית (אנליטית) בכל המישור?
- (13) נניח כי $g(z)$ הולומורפית בתחום $\overline{D(0,1)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$
 ומקיימת $\forall |z| \leq 1 \quad |g(z)| = 1$.
 הוכיחו כי $g(z)$ קבועה.
 הדרכה: ניתן לכתוב את $g(z)$ באופן הבא: $g(z) = e^{i h(x,y)}$.
- (14) נניח כי $R > 0$ ונתונה הפונקציה $f: D(0,R) \rightarrow \mathbb{C}$ גזירה בכל התחום.
 נגדיר: $g(z) = \overline{f\left(\frac{R}{\bar{z}}\right)}$.
 מצאו תחום בו $g(z)$ מוגדרת, ובדקו אם היא גזירה שם.

תשובות סופיות:

$$u'_y = -2y + 1, \quad v'_x = 2y \quad (1)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$a = -3, \quad b = 3 \quad (3)$$

$$x = 0, \quad y = 0 \quad (4)$$

הוכחה (5)

הוכחה (6)

א. הוכחה (7) ב. הוכחה

הוכחה (8)

הוכחה (9)

$$y = 0, \quad y = 1, \quad y = 0.5$$

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = 0.25, \quad c = a + i \cdot b = \frac{3}{2} \quad (10)$$

$$z = 0, \quad z = 1 + i, \quad z = 0.25 + 0.5 \cdot i$$

$$u_x = \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad u_y = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (11)$$

$$a = 1 \quad (12)$$

הוכחה (13)

$$A = \{z \mid |z| > 1\} \quad (14)$$

פונקציות הרמוניות:

שאלות:

- (1) הראו כי הפונקציה $x^3 - 3xy^2$, היא פונקציה הרמונית בכל המישור.
- (2) הראו כי הפונקציה $x^2 - y^2$, היא פונקציה הרמונית בכל המישור, ומצאו לה צמודה הרמונית.
- (3) הראו כי הפונקציה $f(z) = xy + i(x^2 + y^2)$, היא פונקציה גזירה בראשית-הצירים, אך החלק המדומה שלה אינו פונקציה הרמונית. האם $f(z)$ הולומורפית בראשית?
- (4) הראו כי הפונקציה $u(x, y) = \sin(x) \cosh(y)$, היא פונקציה הרמונית בכל המישור, ומצאו את הצמודה ההרמונית שלה $v(x, y)$ המקיימת $v(0, 0) = 2$.
רמז: $f(z) = \sin(z)$.
- (5) הראו כי הפונקציה $u(x, y) = \cos(x) \sinh(y)$, היא פונקציה הרמונית בכל המישור, ומצאו פונקציה הולומורפית כך שמתקיים $u(x, y) = \operatorname{Re}\{f\}$.
- (6) הראו כי הפונקציה $v(x, y) = e^y \sin(x)$, היא פונקציה הרמונית במישור, מצאו לה פונקציה צמודה הרמונית $u(x, y)$ ופונקציה שלמה $f(z)$, כך שמתקיים: $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.
- (7) הראו כי הפונקציה $u(r, \theta) = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos(\theta)$, היא פונקציה הרמונית בתחום $r \neq 0$.
רמז: $u(r, \theta)$ תקרא הרמונית אם היא מקיימת $r^2 u''_{rr} + r u'_r + u''_{\theta\theta} = 0$.
- (8) נתון כי $u(r, \theta) = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos(\theta)$ היא פונקציה הרמונית בתחום $r \neq 0$. מצאו לה צמודה הרמונית בתחום זה.

(9) הוכיחו כי $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$, היא פונקציה הרמונית ומצאו לה צמודה הרמונית.

(10) תהי $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ פונקציה שלמה. הוכיחו כי $g(x, y) = u(x, y)^2 - v(x, y)^2$ פונקציה הרמונית.

(11) תהי $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ פונקציה שלמה. הוכיחו כי $g(x, y) = \sin[u(x, y)] \cdot \cosh[v(x, y)]$ פונקציה הרמונית.

(12) האם קיימות פונקציות הרמוניות מהצורה $u(x, y) = \varphi\left(\frac{x^2 + y^2}{x}\right)$

(כאשר $\varphi \in C^2$ פונקציה לא ידועה)?
אם כן, מצאו אותן.

(13) האם קיימות פונקציות הרמוניות מהצורה $u(x, y) = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$

(כאשר $\varphi \in C^2$ פונקציה לא ידועה)?
אם כן, מצאו אותן.

(14) הראו כי הפונקציה $\sinh(x) \cos(y)$ היא פונקציה הרמונית בכל המישור, ומצאו את הצמודה ההרמונית שלה.

תשובות סופיות:

ראה פתרונות מלאים בסרטוני הוידאו.

מתמטיקה מתקדמת

פרק 7 - התמרת פורייה

תוכן העניינים

22	1. מבוא כללי
24	2. נוסחת כיווץ והזזה
26	3. נוסחת הנגזרת
27	4. נוסחאות כפל באקספוננט ומודולציה
29	5. נוסחת המומנט
31	6. נוסחת ההתמרה ההפוכה
(ללא ספר)	7. נוסחת התמרה כפולה
32	8. משפט פלנשראל
33	9. משפט הקונבולוציה
37	10. תרגילים מסכמים

מבוא כללי:

שאלות:

$$\cdot \chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1,1] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{חשבו את התמרת פורייה של} \quad (1)$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} 1-|x| & |x| < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור} \quad (2)$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור} \quad (3)$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 2 & 1 < |x| < 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור} \quad (4)$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & x > 0 \\ e^{bx} & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{הוכיחו כי התמרת פורייה של} \quad (5)$$

$$\cdot f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{b-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} \right]$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה של} \quad (6)$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 2 & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור} \quad (7)$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} e^{-x} & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה עבור} \quad (8)$$

$$\cdot f(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin[2-\omega]}{2-\omega} \quad \text{הינה} \quad f(x) = \begin{cases} e^{2ix} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{הוכיחו התמרת פורייה של} \quad (9)$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} \sin(x) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{מצאו התמרת פורייה של} \quad (10)$$

$$\cdot a > 0 \quad f(x) = \begin{cases} x & |x| < a \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{חשבו את התמרת פורייה של} \quad (11)$$

$$\cdot f(\omega) = \begin{cases} 1-|\omega| & |\omega| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & |\omega| > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{האם קיימת} \quad f \in L^1_{PC}(\mathbb{R}) \quad \text{כך ש-} \quad (12)$$

תשובות סופיות:

$$\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega} \quad (1)$$

$$f(\omega) = \frac{1 - \cos(\omega)}{\pi\omega^2} \quad (2)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi(1+i\omega)} \quad (3)$$

$$f(\omega) = \frac{2\sin(2\omega) - \sin(\omega)}{\pi\omega} \quad (4)$$

(5) הוכחה.

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(\omega) + i[\cos(\omega) - 1]}{\omega} \quad (6)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 + e^{-i\omega} - 2e^{-i2\omega}}{i\omega} \quad (7)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{(1-i)\omega} - 1}{1-i\omega} \quad (8)$$

(9) הוכחה.

$$f(\omega) = -i \cdot \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\sin([1-\omega])}{1-\omega} - \frac{\sin([1+\omega])}{1+\omega} \right\} \quad (10)$$

$$f(\omega) = -\frac{1}{\pi} i \frac{\sin(\omega a) - \omega a \cos(\omega a)}{\omega^2} \quad (11)$$

$$\omega = \pm \frac{1}{2} \quad (12) \text{ לא. אינה רציפה בנקודות}$$

נוסחת כיווץ והזזה:

שאלות:

(1) מצאו התמרת פורייה של $\chi_{[-r,r]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-r,r] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ כאשר $r > 0$.

(2) מצאו התמרת פורייה של $f(x) = e^{-4x^2-4x-1}$ על ידי שימוש בעובדה

$$F\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

כי

(3) נתונה פונקציה $g(x) \in G(\mathbb{R})$ בעלת התמרת פורייה $g(\omega)$.

מצאו פונקציה $f(x)$ (כתלות ב- $g(x)$) בעלת התמרת פורייה $g(\omega)\cos(\omega)$.

(4) מצאו התמרת פורייה של $f(x) = e^{-ax^2}$ כאשר $a > 0$.

$$F\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad \text{רמז:}$$

(5) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega) = \cos(4\pi\omega) \cdot \frac{\sin(2\omega)}{\omega}$.

$$F\{\chi_{[-1,1]}(x)\} = \frac{\sin(\omega)}{\pi\omega} \quad \text{רמז:}$$

תשובות סופיות:

$$\frac{\sin(\omega \cdot r)}{\pi \omega} \quad (1)$$

$$f(\omega) = \frac{e^{i\frac{\omega}{2}}}{4\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{16}} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{g(x+1) + g(x-1)}{2} \quad (3)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{(\omega)^2}{4a}} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \begin{cases} 1 & 4\pi - 2 \leq x \leq 4\pi + 2 \text{ or } -4\pi - 2 \leq x \leq -4\pi + 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (5)$$

נוסחת הנגזרת:

שאלות:

(1) נניח כי $f(x) \in G$ גזירה, מקיימת $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $f'(x) \in G$ ו- $f(\omega) = \frac{\omega}{1+\omega^{30}}$. מצאו התמרת פורייה של $f'(x)\cos(2x)$.

(2) יהי a ממשי כלשהו. הוכיחו כי $F \left\{ \frac{x}{(x^2+a^2)^2} \right\}_\omega = \left(-\frac{1}{2} \right) (i\omega) \frac{1}{2|a|} e^{-|a\omega|}$

(3) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega) = \omega^2 e^{-|\omega|}$. רמז: $F \left\{ \frac{1}{1+x^2} \right\} = \frac{1}{2} e^{-|x|}$

תשובות סופיות:

$$\frac{i \cdot \frac{(\omega-2)^2}{1+(\omega-2)^{30}} + i \cdot \frac{(\omega+2)^2}{1+(\omega+2)^{30}}}{2} \quad (1)$$

(2) הוכחה.

$$f(x) = (-2) \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3} \quad (3)$$

נוסחאות כפל באקספוננט ומודולציה:

שאלות:

(1) הוכיחו כי התמרת פורייה של $F\left\{\sin(cx)e^{-|x|}\right\}_{(\omega)} = \frac{1}{\pi i} \frac{2c \cdot \omega}{\left[1+(\omega-c)^2\right]\left[1+(\omega+c)^2\right]}$

(2) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega) = \frac{\sin(\omega-1)}{\omega-1} - \frac{\sin(\omega+1)}{\omega+1}$

(3) הוכיחו כי התמרת פורייה של $g(x) = \begin{cases} \sin(ax)e^{-bx} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ כאשר $a, b > 0$ קבועים,

הינה $g(\omega) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{bi - (\omega - a)} - \frac{1}{bi - (\omega + a)} \right]$

(4) מצאו התמרת פורייה של $g(x) = e^{-|x|} \cos(2x)$ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה ובעובדה כי $F\left\{e^{-|x|}\right\} = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$

(5) מצאו התמרת פורייה של $g(x) = e^{-|x|} \sin^2(3x)$ על ידי שימוש בנוסחת מודולציה ובעובדה כי $F\left\{e^{-|x|}\right\} = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$

(6) נניח כי $f(x) \in G(R)$ ונגדיר $g(x) = f(3x-2) \cdot \cos(x)$. בטאו את $g(\omega)$ על ידי $f(\omega)$.

(7) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega) = e^{3i\omega} \cdot e^{-|\omega-2|}$. רמז: $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\} = \frac{1}{2} e^{-|\omega|}$

(8) תהי $H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

חשבו את התמרת הפורייה של הפונקציות הבאות:

א. $H(x)e^{-ax}$ כאשר $a > 0$.

ב. $H(x)e^{-ax} \cos(bx)$ כאשר $a, b > 0$.

ג. $H(x)e^{-ax} \sin(bx)$ כאשר $a, b > 0$.

תשובות סופיות:

(1) הוכחה.

$$f(x) = 2\pi i \cdot \chi_{[-1,1]}(x) \cdot \sin(x) \quad (2)$$

(3) הוכחה.

$$F\{e^{-|x|} \cos(2x)\} = \frac{1}{2\pi(1+[\omega+2]^2)} + \frac{1}{2\pi(1+[\omega-2]^2)} \quad (4)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi(1+\omega^2)} - \left[\frac{1}{2\pi(1+[\omega+6]^2)} + \frac{1}{2\pi(1+[\omega-6]^2)} \right] \quad (5)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{6} \left[e^{-\frac{2}{3}(\omega+1)} f\left(\frac{\omega+1}{3}\right) + e^{-\frac{2}{3}(\omega-1)} f\left(\frac{\omega-1}{3}\right) \right] \quad (6)$$

$$F\left\{e^{2i[x+3]} \frac{2}{1+[x+3]^2}\right\} \quad (7)$$

$$\frac{1}{2\pi(a+i\omega)} \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{a+i[\omega-b]} + \frac{1}{a+i[\omega+b]} \right) \quad \text{ב.}$$

$$\frac{1}{4\pi i} \left(\frac{1}{a+i[\omega-b]} + \frac{1}{a+i[\omega+b]} \right) \quad \text{ג.}$$

נוסחת המומנט:

שאלות:

(1) מצאו התמרת פורייה של $g(x) = \begin{cases} x & x \in (-1,1) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ על ידי שימוש

$$.F\{x \cdot f(x)\} = i \frac{d}{d\omega} f(\omega)$$

(2) מצאו התמרת פורייה של $g(x) = x^2 e^{-x^2}$ על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה

$$.F\{e^{-x^2}\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad \text{כי}$$

(3) מצאו התמרת פורייה של $g(x) = x \cdot e^{-|x|}$ על ידי שימוש בנוסחת המומנט ובעובדה

$$.F\{e^{-|x|}\} = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)} \quad \text{כי}$$

(4) מצאו את התמרת פורייה של $f(x) = e^{-x^2}$.

(5) מצאו התמרת פורייה של $f(x) = 8x^3 e^{\frac{-4(x+1)^2+5}{3}}$.

(6) תהי $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^5} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$

הוכיחו כי $f(\omega)$ גזירה ברציפות 3 פעמים.

(7) נתון כי התמרת פורייה של $f \in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ רציפה היא $f(\omega) = \frac{1}{1+|\omega|}$

הוכיחו כי האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} |x \cdot f(x)| dx$ מתבדר.

תשובות סופיות:

$$i \cdot \frac{\omega \cos \omega - \sin \omega}{\pi \omega^2} \quad (1)$$

$$F\{x^2 e^{-x^2}\} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{\omega^2}{2}\right) e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad (2)$$

$$F\{x \cdot e^{-|x|}\} = -\frac{i}{\pi} \frac{2\omega}{(1+\omega^2)^2} \quad (3)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad (4)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{256} \sqrt{\frac{3}{\pi}} (27i\omega^3 + 216\omega^2 - 792i\omega - 1088) e^{i\omega - \frac{3\omega^2}{16} - \frac{5}{3}} \quad (5)$$

הוכחה. (6)

הוכחה. (7)

נוסחת ההתמרה ההפוכה:

שאלות:

(1) חשבו $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{\pi(1+\omega^2)} d\omega$ לכל x ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

(2) חשבו $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \frac{\sin(\omega) \cos(\omega x)}{\pi\omega} d\omega$ לכל x ממשי על ידי שימוש במשפט התמרה הפוכה.

תשובות סופיות:

(1) ראו סרטון.

$$\begin{cases} 0 & |x| > 1 \\ 1 & |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1, x = -1 \end{cases} \quad (2)$$

משפט פלנשראלי:

שאלות:

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$ עבור $a > 0$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} \frac{\sin(bx)}{x} dx$ עבור $a, b > 0$.

(2) הוכיחו כי $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} \sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{4}$. תוכלו להיעזר בעובדה: $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\} = \frac{1}{2} e^{-|\omega|}$.

(3) הוכיחו כי $\int_0^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x(1+4x^2)} dx = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right)$.

(4) הוכיחו כי לא קיימת פונקציה $f(x) \in L^1_{PC}(\mathbb{R}) \cap L^2_{PC}(\mathbb{R})$ כך ש- $f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+|\omega|}}$.

תשובות סופיות:

א. $f(\omega) = \frac{\sin(\omega a)}{\pi \omega}$. ב. $\pi \cdot \min\{a, b\}$.

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

(4) הוכחה.

משפט הקונבולוציה:

שאלות:

(1) חשבו את הקונבולוציה $(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]})_{(x)}$.

תזכורת: $\chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1,1] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

רמז: חלקו למקרים.

(2) חשבו את הקונבולוציה $(f * f)_{(x)}$ כאשר $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

רמז: חלקו למקרים $x > 0$ ו- $x \leq 0$.

(3) מצאו פונקציה $f \in G$ כך ש- $f(\omega) = \left(\frac{\sin \omega}{\omega}\right)^2$

(4) נסמן ב- E את מרחב הפונקציות הממשיות הגזירות פעמיים $f(t)$

המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ וגם $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$

מצאו פונקציה $g(x)$ כך שלכל $f(t) \in E$ מתקיים השוויון.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(t) - f''(t)) g(x-t) dt = 2f(x)$$

(5) נגדיר $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$, $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$. מצאו את הקונבולוציה $(f * g)_{(x)}$.

תזכורת: $F\left\{\frac{1}{x^2+a^2}\right\} = \frac{1}{2a} e^{-a|\omega|}$

(6) ענה על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $(1+|x|)e^{-|x|}$.

ב. פתרו את המשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|} f(t) dt = e^{-|x|} + |x|e^{-|x|}$

(7) ענו על הסעיפים הבאים :

א. חשבו את הקונבולוציה $(f * f)_{(x)}$ כאשר $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$.

ב. הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \cos x)^2}{x^4} dx = \frac{\pi}{3}$.

(8) חשבו את הקונבולוציה $(f * f)_{(x)}$ כאשר $f(x) = \chi_{[1,2]}(x)$.

(9) חשבו את הקונבולוציה $(f * f)_{(x)}$ כאשר $f(x) = \chi_{[0,2]}(x)$.

(10) חשבו את הקונבולוציה $(\chi_{[0,1]}(x) * \chi_{[1,2]}(x))_{(x)}$.

(11) חשבו את הקונבולוציה $(e^{-x^2} * e^{-x^2})_{(x)}$.

א. לפי ההגדרה.

ב. על ידי שימוש במשפט הקונבולוציה.

הערה: תוכלו להיעזר בעובדה $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

(12) מצאו פתרון למשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(x-t)dt = e^{-\frac{3(x+1)^2}{2}}$.

(13) נניח כי $f(x) \in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ רציפה ומקיימת את המשוואה האינטגרלית

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-y^2}e^{2xy}dy \equiv 0$$

הוכיחו כי $f(x) \equiv 0$.

תשובות סופיות:

$$\left(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}\right)_{(x)} = \begin{cases} 2+x & x \in [-2,0] \\ 2-x & x \in [0,2] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (1)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} xe^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(2+x) & x \in [-2,0] \\ \frac{\pi}{2}(2-x) & x \in [0,2] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (3)$$

$$g(x) = e^{-|x|} \quad (4)$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{x^2+9} \quad (5)$$

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \text{ב. הוכחה.} \quad \frac{2}{\pi(1+\omega^2)^2} \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$\text{ב. הוכחה.} \quad (f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 2 \\ 2-x & 1 < x < 2 \\ x & 0 < x < 1 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 4 \\ 4-x & 3 < x < 4 \\ x-2 & 2 < x < 3 \\ 0 & x < 2 \end{cases} \quad (8)$$

$$(f * f)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 4 \\ 4-x & 2 < x < 4 \\ x & 0 < x < 2 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\left(\chi_{[0,1]}(x) * \chi_{[1,2]}(x)\right)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x > 3 \\ 3-x & 2 < x < 3 \\ x-1 & 1 < x < 2 \\ 0 & x < 1 \end{cases} \quad (10)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{ב.}$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{6}{\pi}} e^{-3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} \quad (12)$$

(13) הוכחה.

תרגילים מסכמים:

שאלות:

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & |x| \leq \pi \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ב. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה

$$g(x) = \begin{cases} \cos(x) & |x| \leq \pi \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ג. חשבו את האינטגרל

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\pi x) \sin(x)}{(1-x^2)} dx$$

ד. חשבו את האינטגרל

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1-x^2)^2} \sin^2(\pi x) dx$$

(2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של $f(x) = x \cdot e^{-|x|}$

ב. מצאו את כל הפונקציות $h(y)$ המקיימות

$$\int_{-\infty}^{\infty} h'(y) e^{-|x-y|} dy = x \cdot e^{-|x|}$$

(3) יהי $A > 0$ קבוע. נגדיר

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq A \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ידוע כי ישנה פונקציה $g(x) \in G$ המקיימת $g(\omega) = f(\omega) f(-\omega)$. מצאו במפורש את $g(x)$.

(4) נניח כי $f(x) \in C^2(-\infty, \infty)$ כך ש- $f'(x), x \cdot f'(x), f''(x) \in L^1_{PC}(-\infty, \infty)$ ומתקיים

$$f''(x) + x \cdot f'(x) + f(x) = 0 \text{ לכל } x \text{ ממשי.}$$

א. הוכיחו כי $f(x) \in L^1_{PC}(-\infty, \infty)$

ב. חשבו את $f(\omega)$ אם נתון כי $f(0) = 1$.

ג. מצאו את $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & |x| \leq 1 \\ 4 & 1 \leq |x| \leq 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{תהי } (5)$$

א. חשבו את $f(\omega)$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty} \frac{[2 \sin(2t) - \sin(t)]^2}{t^2} dt$

ג. חשבו את האינטגרל $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \frac{2 \sin(2t) - \sin(t)}{\pi t} \cos(t) dt$

(6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{\pi^2} & |x| \leq \pi \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

ב. חשבו את האינטגרלים: $\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin(\pi x) - \pi x \cos(\pi x)}{\pi^3 x^3} \right)^2 dx$

ו- $\int_0^{\infty} \frac{\sin(\pi x) - \pi x \cos(\pi x)}{\pi^3 x^3} \cos(x) dx$

(7) נגדיר $\phi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$. הוכיחו כי המערכת $\{\phi(x-n)\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$ מהווה מערכת

אורתונורמלית ב- $L^2_{PC}(-\infty, \infty)$.

(8) תהי $f \in G$ פונקציה כך ש- $f' \in G$ פונקציה רציפה. מצאו פונקציה $g \in G$

המקיימת את המשוואה $g(t) = \int_{-\infty}^t e^{u-t} g(u) du + f'(t)$.

(9) מצאו פונקציה שהתמרת פורייה שלה היא $f(\omega) = \frac{1}{(1+\omega^2)^2}$

(10) פתרו את המשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + b^2} dt = \frac{x}{(x^2 + a^2)^2}$

$$\cdot f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}(\omega - t) \chi_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}(t) e^{i\omega x} dt d\omega \quad (11)$$

מצאו ביטוי מפורש (ללא אינטגרלים) עבור $f(x)$.

$$\cdot \chi_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1 & t \in [a,b] \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{תזכורת:}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(a^2 + x^2)(x^2 + b^2)} dx \quad (12)$$

כאשר $a, b > 0$.

$$\cdot f(x) = e^{-(x^2 + 2x + 5)} \quad (13)$$

$$\cdot \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos(bx) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}} \quad (14)$$

הוכיחו כי $a, b > 0$ לכל קבועים.

$$\cdot \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(x) \cos(x)}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{8e} \left(1 - \frac{1}{e^2}\right) \quad (15)$$

$$\cdot \int_0^{\infty} \sin^3(x) x e^{-x} dx = \frac{9}{25} \quad (16)$$

תשובות סופיות:

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\omega \sin(\omega\pi)}{1-\omega^2} \quad \text{ב.} \quad f(\omega) = -i \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \sin(\omega\pi) \cdot \frac{2}{1-\omega^2} \quad \text{א. (1)}$$

$$\frac{\pi^2}{2} \quad \text{ד.} \quad \frac{\pi}{2} \sin(1) \quad \text{ג.}$$

$$-h(y) = e^{-|y|}, \quad h(y) = -e^{-|y|} \quad \text{ב.} \quad -\frac{2i\omega}{\pi(1+\omega^2)^2} \quad \text{א. (2)}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{(A+x)^3}{3} - \frac{(A+x)^2}{2} x \right) & -A < x < 0 \\ \frac{1}{2\pi} \left(\frac{A^3}{3} - \frac{A^2}{2} x + \frac{x^3}{6} \right) & 0 < x < A \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{(3)}$$

$$\sqrt{2\pi} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{ג.} \quad e^{-\frac{\omega^2}{2}} \quad \text{ב.} \quad \text{א. הוכחה. (4)}$$

$$\frac{3\pi}{2} \quad \text{ג.} \quad \frac{5\pi}{2} \quad \text{ב.} \quad \frac{4 \cdot \sin(2\omega) - 2 \cdot \sin(\omega)}{\pi\omega} \quad \text{א. (5)}$$

$$\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\pi^2} \right) \quad \text{ב.} \quad \frac{1}{15} \quad \text{א.} \quad \frac{2 \sin(\pi\omega) - \pi\omega \cos(\pi\omega)}{\pi^3 \omega^3} \quad \text{א. (6)}$$

(7) הוכחה.

$$g(t) = f(t) + f'(t) \quad \text{(8)}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} e^x (1-x) & x < 0 \\ \frac{\pi}{2} e^{-x} (1+x) & x > 0 \end{cases} \quad \text{(9)}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{b}{a} \frac{(a-b)x}{(x^2 + (a-b)^2)^2} \quad \text{(10)}$$

$$f(x) = 4 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2} \quad \text{(11)}$$

$$\frac{\pi}{a+b} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{a^2 + \omega^2} \frac{\omega}{b^2 + \omega^2} d\omega \quad \text{(12)}$$

$$f(\omega) = \frac{1}{e^4} \cdot e^{i\omega} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \quad \text{(13)}$$

(14) הוכחה.

15) הוכחה.

16) הוכחה.