מתמטיקה מתקדמת להנדסת מכונות



תוכן העניינים

1. מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני ..... (ללא ספר)
2. משוואות מסדר ראשון 1
3. בעיות שטורם ליוביל 4
4. משוואת הגלים ..... (ללא ספר)
5. טורי פורייה 9
6. משוואת לפלס ..... (ללא ספר)

מתמטיקה מתקדמת להנדסת מכונות

פרק 1 - מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני

תוכן העניינים

1. מיון משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני ..... (ללא ספר)

מתמטיקה מתקדמת להנדסת מכונות

פרק 2 - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

1. שיטת הקווים האופייניים 1
2. שיטת לגראנג' 2

שיטת הקווים האופייניים

שאלות

1) פתרו את המשוואה עבור $\alpha \neq \frac{1}{2}$ קבוע ממשי.

$$2u_x + u_y = 0 \qquad \gamma = \{y = \alpha x\} \qquad u|_\gamma = x^2 + y^2$$

2) פתרו את המשוואה $3u_x - 2u_y = 0$ $\quad \gamma = \{y = x^2, x \geq 0\}$ $\quad u|_\gamma = x - y$.

3) פתרו את המשוואה $u_x + 2u_y = 0$ $\quad \gamma = \{y = x^2, x \leq 0\}$ $\quad u|_\gamma = x + \sin(xy)$.

4) פתרו את המשוואה

$$\begin{aligned} &u_x - u_y = -u && y \geq 0 \\ &u(x,0) = x^2 - x^4 \end{aligned}$$

.

5) פתרו את המשוואה

$$\begin{aligned} &2u_x - 3u_y + 2u = 0 \\ &u(x,-x) = (x+1)e^{-x} \end{aligned}$$

.

6) פתרו את המשוואה

$$\begin{aligned} &u_x + u_y + u = (2x+1)e^{x^2} && y \geq e^{-x} \\ &u\left(x, e^{-x}\right) = e^{x^2} + e^{-x} \end{aligned}$$

.

7) נתון כי $u(x,y)$ הוא פתרון של הבעיה

$$\begin{aligned} &y^2 u_x + u_y = -u && 0 < x < \infty \quad , \quad y > 0 \\ &u(0,y) = 0 && y > 0 \\ &u(x,0) = 1 && x > 0 \end{aligned}$$

8) פתרו את הבעיה כאשר a קבוע ממשי.

$$\begin{aligned} &2u_x + u_y = -u && 0 < y < x \\ &u(x,0) = a \cdot \cos(x) + \sin(x) && x > 0 \\ &u(y,y) = 0 && y > 0 \end{aligned}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

שיטת לגראנג

שאלות

1) מצאו את הפתרון הכללי ביותר למד"ח $xu_x + yuu_y = u$.

2) מצאו פתרון כללי למשוואה $x^2u_x + y^2u_y = u^2$.

3) מצאו פתרון כללי למשוואה $xu \cdot u_x + yu \cdot u_y = -xy$, כאשר $x, y, u > 0$.

4) מצאו פתרון כללי למשוואה $\left(y^2 + u^2\right)u_x - xyu_y = xu$, כאשר $x, y, u > 0$.

רמז: תוכלו להיעזר בכך שאם $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, אז $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

5) מצאו פתרון למשוואה $\begin{cases} xu_x + yu_y = 2xy & x, y > 0 \\ u(x,1) = x & x > 0 \end{cases}$.

6) פתרו את המשוואה $\begin{cases} e^y u_x - e^x u_y = -e^{x+y}u & u > 0 \\ u(x,0) = 1 \end{cases}$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\frac{1}{e^x\sqrt{y}+1}u_x + yu_y = y^2u$, בתחום $u, y > 0$.

ב. ודאו כי הפתרון שמצאתם אכן מקיים את המשוואה.

8) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\cos(y)u_x + \sin(y)u_y = e^y \sin(y)u$, בתחום שבו $0 < y < \pi$ ו- $u > 0$.

9) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\frac{1}{y}u_x + \frac{1}{x}u_y = 2$.

10) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $(x+y)u_x + (y-x)u_y = x^2 - y^2$, בתחום $x, y > 0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

11) נתון כי $u(x,y)=\frac{e^y}{y+1}F\left(\frac{y+1}{x^2+1}\right)$ הוא הפתרון הכללי של משוואה מהצורה $a(x,y,u)u_x+b(x,y,u)u_y=c(x,y,u)$.

א. מצאו את הפונקציות a,b,c.

ב. מצאו פתרון פרטי המקיים $u(0,y)=y^2$.

תשובות סופיות

1) $F\left(\frac{x}{u},\ln(y)-u\right)=0$

2) $u(x,y)=\frac{1}{F\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}}$

3) $u=\sqrt{F\left(\ln\frac{x}{y}\right)-xy}$

4) $F\left(\frac{y}{u},x^2+y^2+u^2\right)=0$

5) $u(x,y)=x\cdot y$

6) $u(x,y)=e^{e^y-1}$

7) א. $u(x,y)=e^{\frac{1}{2}y^2-F\left(\frac{1}{\sqrt{y}}e^{\frac{1}{2}x}+\frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}x}\right)}$ ב. שאלת הוכחה.

8) $u(x,y)=e^{e^y-F\left(e^{-x}\sin y\right)}$

9) $u(x,y)=xy-F\left(\frac{x}{y}\right)$

10) $u(x,y)=\frac{y^2+2xy-x^2-F\left(\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)}{4}$

11) א. $\underbrace{\left(x^2+1\right)}_{a}u_x+\underbrace{2x\left(y+1\right)}_{b}u_y=\underbrace{2xyu}_{c}$ ב. $u(x,y)=\frac{e^y}{y+1}\cdot\frac{\left(\frac{y+1}{x^2+1}-1\right)^2}{e^{\frac{y+1}{x^2+1}-1}}\cdot\frac{y+1}{x^2+1}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

מתמטיקה מתקדמת להנדסת מכונות

פרק 3 - בעיות שטורם ליוביל

תוכן העניינים

1. בעיות שטורם ליוביל 4
2. טורי קוסינוסים וסינוסים ..... (ללא ספר)

בעיות שטורם-ליוביל

שאלות

1) הביאו כל אחת מהמשוואות הבאות לתבנית
$\left(p(x)y'(x)\right)'+\left(\lambda r(x)-q(x)\right)y(x)=0$.

א. $y''-2xy'+\lambda y=0$ (משוואת הרמיט)

ב. $x^2y''+xy'+(x^2-\lambda)y=0$ (משוואת בסל)

2) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} e^{2x}y''+e^{2x}y'+\lambda y=0 \ , \ 0<x<1 \\ y(0)+4y'(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

3) הראו שהבעיה הבאה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית:

$$\begin{cases} (x+2)y''+4y'+xy+\lambda e^x y=0 \ , \ 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

פתרו את בעיות שטורם-ליוביל בשאלות **4-7**:

(עבור כל בעיה יש למצוא ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות)

4)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<1 \\ y'(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}$$

5)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<\pi \\ y(0)-y'(0)=0 \\ y(\pi)-y'(\pi)=0 \end{cases}$$

6)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y(1)+y'(1)=0 \end{cases}$$

7)
$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, \quad 0<x<1 \\ y(0)+y'(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} y''-2y'+(1+\lambda)y=0, & 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases}.$$

א. הוכיחו שהבעיה היא בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.

ב. פתרו את הבעיה.

9) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

א. $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<\ell \\ y(0)=0 \\ y'(\ell)=0 \end{cases}.$

ב. נציב $\ell=1$ בבעיה מסעיף א', ונקבל: $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<1 \\ y(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases}.$

1. פתחו את הפונקציה $f(x)=1\ ,\ 0\le x\le 1$ לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.
התחל את הטור מ-$n=1$.
2. מה סכום הטור ב-$x=0$?
האם הוא שווה לערך הפונקציה ב-$x=0$?

ג. נציב $\ell=2$ בבעיה מסעיף א', ונקבל: $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<2 \\ y(0)=0 \\ y'(2)=0 \end{cases}.$

פתחו את הפונקציה $f(x)=x\ ,\ 0\le x\le 2$ לטור פונקציות עצמיות של בעיית שטורם-ליוביל זו.

10) פתרו את בעיית שטורם-ליוביל הבאה:

א. $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \ , \ 0<x<\pi \\ y'(0)=0 \\ y(\pi)=0 \end{cases}.$

ב. פתחו את הפונקציה $f(x)=e^x, 0\le x\le \pi$ לטור פונקציות עצמיות של הבעיה מסעיף א.
התחילו את הטור מ-$n=1$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) נתונה הבעיה: $\begin{cases} x^2y''+xy'+\lambda y=0 \ , \ 0<x<e \\ y(1)=0 \\ y'(e)=0 \end{cases}$.

א. הוכיחו שהבעיה הנתונה היא אכן בעיית שטורם-ליוביל רגולרית.

ב. מצאו את הערכים עצמיים והפונקציות העצמיות של הבעיה.

ג. הראו שהפונקציות העצמיות אורתוגונליות ביחס לפונקציית המשקל של הבעיה.

ד. פתחו את $f(x)=\begin{cases} 1 & 1\le x\le \sqrt{e} \\ 0 & \sqrt{e}\le x\le e \end{cases}$, לטור פונקציות עצמיות.

הראו שסכום הטור וערך הפונקציה עבור $x=1$ שונים.

ה. חשבו את סכום הטור מסעיף ד', עבור $x=2$, $x=1.5$, $x=\sqrt{e}$.

זהויות שכדאי להכיר:

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=\cos(\pi n)=(-1)^n$$

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)=\sin(\pi n)=0$$

$$n=0,1,2,\ldots$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $\left(e^{-x^2}y'\right)'+\left(\lambda e^{-x^2}-0\right)y=0$ ב. $\left(xy'\right)'+\left(\lambda\left(-\frac{1}{x}\right)-\left(-x\right)\right)y=0$

2) שאלת הוכחה.

3) שאלת הוכחה.

4) פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)=\cos(n\pi x),\ n=1,2,3,\ldots$,

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2=(n\pi)^2\quad n=1,2,3,\ldots$.

5) פונקציות עצמיות: $\phi_n(x)=n\cos nx+\sin nx\qquad n=1,2,3,\ldots$,

ערכים עצמיים: $\lambda_n=n^2,\quad n=1,2,3,\ldots$; בנוסף, $\lambda=-1$ הוא ע"ע של הבעיה,

המתאים לפונקציה העצמית $\varphi(x)=e^x$.

6) פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)=\sin(\omega_n x),\ n=1,2,3,\ldots$,

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2\qquad n=1,2,3,\ldots$.

7) פונקציות עצמיות: $y_n(x)=\sin(\omega_n x)-\omega_n\cos(\omega_n x)\qquad n=1,2,3,\ldots$,

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2\qquad n=1,2,3,\ldots$.

בנוסף, $\lambda_0=0$ הוא ע"ע של הבעיה, המתאים לפונקציה העצמית $\varphi(x)=x-1$.

8) א. שאלת הוכחה. ב. פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)=e^x\sin n\pi x,\qquad n=1,2,3,\ldots$.

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2=(n\pi)^2\qquad n=1,2,3,\ldots$.

9) א. פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2l}x\right)\qquad n=0,1,2,\ldots$.

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2=\left((2n+1)\frac{\pi}{2l}\right)^2\qquad n=0,1,2,\ldots$.

ב. סכום הטור ב-$x=0$ הוא 0, והוא אינו שווה לערך הפונקציה ב-$x=0$.

ג. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\varphi_n x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{16(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2}\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{4}x\right)$, כאשר $(0<x<2)$.

10) א. פונקציות עצמיות: $\varphi_n(x)=\cos\frac{2n+1}{2}x\qquad n=0,1,2,\ldots$.

ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\omega_n)^2=\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\qquad n=0,1,2,\ldots$.

ב. $e^x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\pi}\left(n-\frac{1}{2}\right)(-1)^{n+1}-1}{1^2+\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)$, כאשר $0<x<\pi$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) א. שאלת הוכחה.

ב. פונקציות עצמיות: $n=0,1,2,\ldots$ $\varphi_n(x)=\sin\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi\ln x\right)$.

ערכים עצמיים: $n=0,1,2,\ldots$ $\lambda_n=\pi^2\left(\frac{1}{2}+n\right)^2$.

ג. שאלת הוכחה.

ד. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-2\cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi}\sin\left(\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\ln x\right)$

ה. סכום הטור ב- $x=\sqrt{e}$ הוא $\frac{1}{2}$; ב- $x=1.5$ הוא 1; וב- $x=2$ הוא 0.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה מתקדמת להנדסת מכונות

פרק 4 - משוואת הגלים

תוכן העניינים

1. הפרדת משתנים עבור משוואה הומוגנית ..... (ללא ספר)
2. הפרדת משתנים עבור משוואה לא הומוגנית ..... (ללא ספר)
3. קטע אינסופי ..... (ללא ספר)
4. קטע חצי אינסופי ..... (ללא ספר)

מתמטיקה מתקדמת להנדסת מכונות

פרק 5 - טורי פורייה

תוכן העניינים

1. הקדמה ..... (ללא ספר)
2. טור פורייה ממשי 9
3. טור פורייה מרוכב 10
4. המשכה זוגית ואי זוגית 11
5. גזירה ואינטגרציה של טורי פורייה 12
6. משפט הקונבולוציה 15

טור פורייה ממשי:

שאלות:

1) חשבו טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\pi\\ 0 & -\pi<x<0\end{cases}$.

3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\sin(|x|)$.

4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & else\end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $\sum_{n=1}^{20}-\frac{2}{n}(-1)^n\sin(nx)$

2) $f(x)\sim\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k-1)}\sin((2k-1)x)$

3) $\sin(|x|)\sim\frac{2}{\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\frac{1}{1-(2k)^2}\cos(2kx)$

4) $f(x)\sim\frac{1}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{\sin(n)}{n}\cos(nx)$

טור פורייה מרוכב:

שאלות:

1) חשבו טור פורייה מרוכב לפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

2) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}-x & -\pi\le x<0\\ 0 & 0\le x<\pi\end{cases}$.

3) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}x & -\pi\le x<0\\ 2x & 0\le x<\pi\end{cases}$.

4) מצאו טור פורייה של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}1 & -\pi\le x<0\\ -2 & 0\le x<\pi\end{cases}$.

5) מצאו טור פורייה מרוכב של $f(x)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $f(x)=\begin{cases}0 & -\pi\le x<0\\ \sin(x) & 0\le x<\pi\end{cases}$.

תשובות סופיות:

1) $x\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} i\frac{(-1)^n}{n}e^{inx}$

2) $f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}-\frac{1}{2\pi}\left\{-\pi\frac{(-1)^n}{in}+\frac{1-(-1)^n}{n^2}\right\}e^{inx}$

3) $f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n^2}-3(-1)^n\frac{\pi}{in}\right]e^{inx}$

4) $f(x)\sim-\frac{1}{2}-\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\frac{3}{\pi i(2k-1)}e^{i(2k-1)x}$

5) $f(x)\sim\frac{1}{4i}e^{ix}-\frac{1}{4i}e^{-ix}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1-(2k)^2}e^{i[2k]x}$

המשכה זוגית ואי זוגית:

שאלות:

1) נתונה הפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[0,\pi]$.

מצאו לה טור קוסינוסים: $f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)$ והוכיחו כי לכל $0<x<\pi$

מתקיים $x=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2k-1)^2}\cos([2k-1]x)$.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=1$ בקטע $[0,\pi]$.

מצאו לה טור סינוסים: $f\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)$ והוכיחו כי:

א. לכל $0<x<\pi$ מתקיים $1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)}\sin([2k-1]x)$

ב. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)}=-\frac{\pi}{4}$

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. הוכחה. ב. הוכחה.

גזירה ואינטגרציה של טורי פורייה:

שאלות:

1) תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$ המקיימת $f(-\pi)=f(\pi)$
ונניח כי היא גזירה למקוטעין ברציפות (כלומר נניח $f'(x)\in L^2_{PC}[-\pi,\pi]$).

נסמן $f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$ אזי הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$ מתכנס בהחלט.

2) נתונה הפונקציה $f(x)=x(\pi-x)$ בקטע $[0,\pi]$.

א. פתחו את הפונקציה לטור סינוסים.

ב. לאיזו פונקציה מתכנס הטור?
שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים).

ג. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}=\frac{\pi^6}{960}$.

ד. הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$.

ה. מצאו פיתוח לטור קוסינוסים של $g(x)=\frac{\pi x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$ בקטע $[0,\pi]$.

ו. בעזרת הטור הקודם הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$. רמז: הציבו $x=0$.

3) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{x^2}$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

נסמן $f(x)\sim\sum_{-\infty}^{\infty}\left|c_ne^{inx}\right|$ פיתוח פורייה מרוכב.

א. האם הטור $\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|$ מתכנס?

ב. האם הטור $\sum_{-\infty}^{\infty}n|c_n|$ מתכנס?

ג. האם הטור $\sum_{-\infty}^{\infty}n^2|c_n|^2$ מתכנס?

4) נתבונן בטור הפורייה $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{in(x+i)}$.

כמה פעמים ניתן לגזור את $f(x)$?

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}=\frac{\pi-x}{2}$ בקטע $(0,2\pi)$.

ב. נסמן $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^3}$. מצאו את $g(x)$ באופן מפורש (ללא טור) בקטע $(0,2\pi)$.

6) תהי $f(x)$ גזירה ברציפות $k-1$ פעמים בקטע $[-\pi,\pi]$, גזירה ברציפות למקוטעין k פעמים כך שמתקיים $f^{(j)}(-\pi)=f^{(j)}(\pi)$ לכל $j=0,1,...k-1$. נסמן $f\sim\sum_{-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}$.

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}(n^k c_n)=0$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f(x)\in L^2{}_{PC}[-\pi,\pi]$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $f(-\pi)=f(\pi)$ ו-$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0$. הראו כי מתקיים $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx\le\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2dx$.

ב. תהי $f(x)\in L^2{}_{PC}[0,\pi]$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $f(0)=f(\pi)=0$.

הראו כי מתקיים $\int_{0}^{\pi}|f(x)|^2dx\le\int_{0}^{\pi}|f'(x)|^2dx$.

8) נגדיר $f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}e^{in^2x}$.

א. הוכיחו כי $f(x)$ רציפה.

ב. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה ברציפות.

9) נגדיר $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+1}\sin(n^{2.5}x)$

א. הוכיחו כי $f(x)$ רציפה.

ב. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה ברציפות.

10) נסמן $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^{1.4}}+\frac{\sin(nx)}{n^{2.8}}$.

א. האם f רציפה?

ב. האם f גזירה ברציפות?

11) נגדיר $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^4}$. הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה 4 פעמים ברציפות.

12) נסמן $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{3.1}+i\cdot n^{2.2}}\cdot e^{inx}$. הוכיחו כי f גזירה ברציפות פעמיים.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

2) א. $[0,\pi]$ $f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{\pi(2k-1)^3}\sin([2k-1]x)$

ב. ראו סרטון. ג. הוכחה. ד. הוכחה.

ה. $[0,\pi]$ $\frac{\pi x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\sim\frac{\pi^3}{12}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-8}{\pi(2k-1)^4}\cos([2k-1]x)$ ו. הוכחה.

3) א. $\sum_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{n}\cdot nc_n\right|\le\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}n^2|c_n|^2<\infty$ ב. $\sum_{-\infty}^{\infty}n|c_n|<\infty$

ג. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2\,dx=\sum_{-\infty}^{\infty}n^2|c_n|^2$

4) ראו סרטון.

5) א. הוכחה. ב. $-\frac{\pi}{2}\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}+\frac{\pi^2}{6}x$

6) הוכחה.

7) א. הוכחה. ב. הוכחה.

8) א. הוכחה. ב. הוכחה.

9) א. הוכחה. ב. הוכחה.

10) א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{.4}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2.8}}<\infty$ ב. נניח בשלילה כי f גזירה ברציפות.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

משפט הקונבולוציה:

שאלות:

1) הוכח את הטענה כי אם $f(x)$, $g(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות-2π אז $(f*g)_{(x)}$ מחזוריות-2π.

2) הוכח את הטענה כי אם $f(x)$, $g(x)$ רציפות למקוטעין, מחזוריות-2π ופונקציות זוגיות אז $(f*g)_{(x)}$ זוגית.

3) נתונה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית-2π כך שלכל $x\in[-\pi,\pi]$ מתקיים $f(x)=\sqrt{2\pi}\cdot\chi_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}(x)$.

חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$.

הערה: $\chi_{[a,b]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[a,b]\\ 0 & else\end{cases}$.

4) נתונות $f(x)$, $g(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות-2π כך שלכל $x\in[-\pi,\pi]$ מתקיים $f(x)=x^2$, $g(x)=\cos(x)$.

חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f*g)_{(x)}$.

5) נתונות $f(x)$, $g(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות-2π כך שלכל $x\in[-\pi,\pi]$ מתקיים $f(x)=x$, $g(x)=\chi_{[0,1]}(x)$.

חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f*g)_{(x)}$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) $\pi - x$
4) לכל $-\pi \le x \le \pi$, $(f*g)_{(x)} = -2\cos(x)$
5) $$(f*g)_{(x)} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}\left(x^2 - (x-1)^2\right) & -\pi+1 \le x \le \pi \\ \frac{1}{4\pi}\left[x^2 - \left(x+(2\pi-1)\right)^2\right] & -\pi \le x \le -\pi+1 \end{cases}$$

מתמטיקה מתקדמת להנדסת מכונות

פרק 6 - משוואת לפלס

תוכן העניינים

1. חזרה על אינטגרל קווי ..... (ללא ספר)
2. משוואת לפלס בעיגול ..... (ללא ספר)
3. משוואת לפלס בטבעת ..... (ללא ספר)
4. משוואת לפלס במלבן ..... (ללא ספר)