# מתמטיקה לתלמידי גאוגרפיה ופיתוח סביבתי 2



# תוכן העניינים


1. גיאומטריה אנליטית (חזרה כללית) - נקודה וישר ..... 1
2. גיאומטריה אנליטית (חזרה כללית) - המעגל ..... 26
3. גיאומטריה אנליטית (חזרה כללית) - האליפסה והפרבולה ..... 45
4. גיאומטריה אנליטית (חזרה כללית) - ההיפרבולה ..... 55
5. אלגברה - סדרות ..... 61
6. חשבון דיפרנציאלי - גבול של פונקציה (העשרה) ..... 85
7. חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים ..... 91
8. חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית פולינום ..... 106
9. חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית מנה ושורש ..... 119
10. חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקציות טריגונומטריות ..... 157
11. חשבון דיפרנציאלי - הזזות ומתיחות של פונקציות ..... 175
12. חשבון דיפרנציאלי - הקשר שבין גרף הפונקציה וגרף הנגזרת ..... (ללא ספר)
13. חשבון דיפרנציאלי - פונקציות מעריכיות ..... 210
14. חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות ..... 226
15. חשבון דיפרנציאלי - כלל לופיטל ..... 242
16. חשבון דיפרנציאלי - נגזרת של פונקציה סתומה וגזירה לוגריתמית ..... 246
17. חשבון דיפרנציאלי - בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון) ..... 249
18. טורי טיילור - מקלורן ..... 258
19. חשבון אינטגרלי - האינטגרל הכללי ..... 273
20. חשבון אינטגרלי - האינטגרל המסוים וחישובי שטחים ..... 280
21. חשבון אינטגרלי - פונקציה מעריכית, לוגריתמית וחזקה ..... 308
22. חשבון אינטגרלי - אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים" ..... 326
23. חשבון אינטגרלי - אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים ..... 328

# תוכן העניינים

24. חשבון אינטגרלי - אינטגרלים בשיטת ההצבה . . . . . 332
25. חשבון אינטגרלי - שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת). . . . . 335
26. חשבון אינטגרלי - שימושי האינטגרל המסויים (נפח-שטח מעטפת). . . . . 357
27. שיטת ניוטון רפסון . . . . . 362

# מתמטיקה לתלמידי גאוגרפיה ופיתוח סביבתי 2

## פרק 1 - גיאומטריה אנליטית (חזרה כללית) - נקודה וישר

### תוכן העניינים


1. מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית ..... 1
2. משוואת הישר ..... 5
3. מצבים הדדיים בין ישרים ..... 10
4. מציאת משוואות ישר ..... 12
5. שאלות יסודיות שונות עם משוואת הישר ..... 13
6. נושאים מתקדמים עם משוואת הישר ..... (ללא ספר)
7. חלוקת קטע ביחס נתון ..... 19
8. מרחק נקודה מישר ..... 20
9. מיקום נקודה ביחס לישר ..... 22
10. מרחק בין ישרים מקבילים ..... 24

# מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית:

## סיכום כללי:

### נוסחאות כלליות:

- המרחק בין הנקודות $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$ יחושב לפי: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.
- אמצע הקטע M שקצותיו הם: $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$ הוא: $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}, y_M=\frac{y_1+y_2}{2}$.

## שאלות:

### שאלות העוסקות באמצע קטע:

**1)** מצא את אמצעי הקטעים שקדקודיהם נתונים ע"י הנקודות A ו-B:

א. $A(1,4)$ , $B(5,-8)$

ב. $A(-3,0)$ , $B(3,-2)$

ג. $A(4,5)$ , $B(-4,-5)$

ד. $A\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$ , $B\left(7\frac{1}{2},-2\right)$

ה. $A(6,-1)$ , $B(-3,-1)$

ו. $A(4,7)$ , $B(4,-12)$

**2)** נתון קטע AB שאמצעו בנקודה M.
מצא את שיעורי נקודת הקצה B אם נתונים שיעורי הנקודות של A ושל M:

א. $A(4,-2)$ , $M(2,1)$

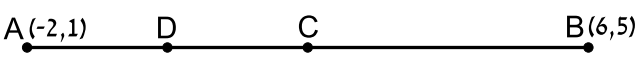
ב. $A(-6,-8)$ , $M(0,0)$

ג. $A(13,-11)$ , $M(4,-7)$

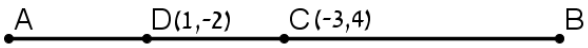
ד. $A\left(\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)$ , $M\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$

**3)** נתון משולש שווה שוקיים ABC שבו A הוא קדקוד הראש.
ידוע כי שיעורי הקדקודים B ו-C הם $C(6,1)$ , $B(2,-4)$.
מעבירים תיכון AD לבסיס BC. מצא את שיעורי הנקודה D.

**4)** באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.
ידוע כי: $B(6,5)$ , $A(-2,1)$. מצא את שיעורי הנקודה D.



**5)** באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.
ידוע כי: $D(1,-2)$ , $C(-3,4)$. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.




**6)** הנקודות $B(-10,4)$ , $A(2,-7)$ ו-$C(6,11)$ הן שלושה קדקודים של מקבילית ABCD.
מצא את שיעורי הקדקוד הרביעי, D.

**שאלות העוסקות במרחק בין שתי נקודות:**

**7)** מצא את המרחק בין זוגות הנקודות הבאות:

א. $A(4,7)$ , $B(-3,7)$

ב. $A(6,2)$ , $B(1,2)$

ג. $A(-3,10)$ , $B(0,6)$

ד. $A(6,-9)$ , $B(1,3)$

ה. $A(4,7)$ , $B(13,-1)$

ו. $A(6,6)$ , $B(-9,-9)$

**8)** חשב את היקף המשולש ABC שקודקודיו הם: $C(0,14)$ , $B(4,9)$ , $A(3,-2)$.

**9)** נתונות נקודות $B(6,y)$ , $A(14,4)$ שמרחקן הוא 10 יחידות אורך.
מצא את $y$.

**10)** נתונות נקודות $B(15,-2)$ , $A(x,-12)$ שמרחקן הוא 26 יחידות אורך.
מצא את $x$.

**11)** נתונה נקודה B ברביע השלישי, ששיעור ה-$y$ שלה גדול פי 3 משיעור ה-$x$ שלה ומרחקה מהנקודה $A(-4,1)$ הוא 5. מצא את שיעורי הנקודה B.

**12)** במשולש שווה שוקיים ABC $(AB=AC)$ ידוע כי אורכי השוקיים הוא $\sqrt{45}$ יחידות אורך. שיעורי הקדקוד A הם $(0,4)$ ושיעורי ה-$y$ של הקדקודים B ו-C הוא 2-. מצא את קדקודי המשולש B ו-C (הנח B ברביע הרביעי).

**13)** אורך האלכסון AC במלבן ABCD הוא $d_{AC}=\sqrt{50}$
וידוע כי: $B(-4,1)$ , $A(-3,-2)$. מצא את היקף המלבן.

**שאלות העוסקות בשיפוע בין שתי נקודות:**

**14)** מצא את השיפוע בין זוגות הנקודות הבאים:

א. $A(5,2)\ ,\ B(4,1)$

ב. $A(3,-2)\ ,\ B(-3,1)$

ג. $A(7,8)\ ,\ B(6,15)$

ד. $A(0,5)\ ,\ B(7,0)$

ה. $A(6,9)\ ,\ B(6,-7)$

ו. $A(4,-1)\ ,\ B(18,-1)$

**15)** מצא את שיפועי הישרים שצלעות המשולש שקודקודיו הם: $A(6,5)\ ,\ B(2,13)\ ,\ C(4,-7)$ מונחים עליהם.

## תשובות סופיות:

1) א. $(3,-2)$ ב. $(0,-1)$ ג. $(0,0)$
ד. $\left(4,-\frac{5}{8}\right)$ ה. $(1.5,-1)$ ו. $(4,-2.5)$.

2) א. $B(0,4)$ ב. $B(6,8)$ ג. $B(-5,-3)$ ד. $B\left(1,\frac{2}{3}\right)$.

3) $D(4,-1.5)$.

4) $D(0,2)$.

5) $B(-11,16)$ , $A(5,-8)$.

6) $D(18,0)$.

7) א. $d_{AB}=7$ ב. $d_{AB}=5$ ג. $d_{AB}=5$ ד. $d_{AB}=13$
ה. $d_{AB}=\sqrt{145}$ ו. $d_{AB}=15\sqrt{2}$.

8) 33.862 יחידות אורך $\approx P_{ABC}$.

9) $y=10$ או $y=-2$.

10) $x=-9$ או $x=39$.

11) $B(-1,-3)$.

12) $B(3,-2)$ , $C(-3,-2)$.

13) 18.97 יחידות אורך $\approx P_{ABCD}=6\sqrt{10}$.

14) א. $m_{AB}=1$ ב. $m_{AB}=-\frac{1}{2}$ ג. $m_{AB}=-7$ ד. $m_{AB}=-\frac{5}{7}$
ה. שיפוע לא מוגדר. ו. $m_{AB}=0$.

15) $m_{AC}=6$ , $m_{BC}=-10$ , $m_{AB}=-2$.

# משוואת הישר:

## סיכום כללי:

### נוסחאות כלליות:

- שיפוע ישר בין שתי נקודות $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$ הוא: $m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$.

### שיפועים של ישרים:

- שיפועי ישרים מאונכים מקיימים: $m_1\cdot m_2=-1$.
- הקשר בין שיפוע ישר לזווית שהוא יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-$x$: $m=\tan\alpha$.

### משוואת הישר:

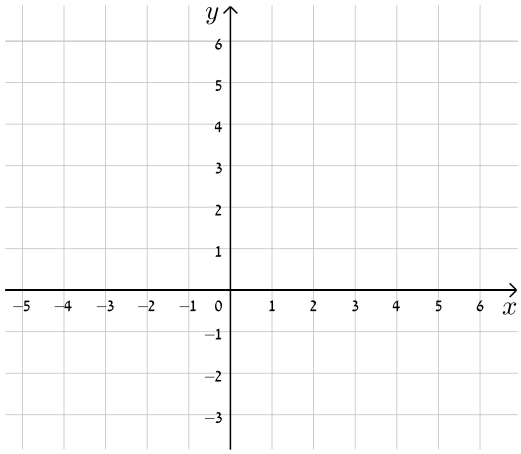
- משוואת ישר מפורשת היא מהצורה: $y=mx+n$.
- כאשר: $m$ הוא שיפוע הישר ו-$n$ הוא ערך ה-$y$ של נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה-$y$.

  נוסחה למציאת משוואת ישר: $y-y_1=m(x-x_1)$.

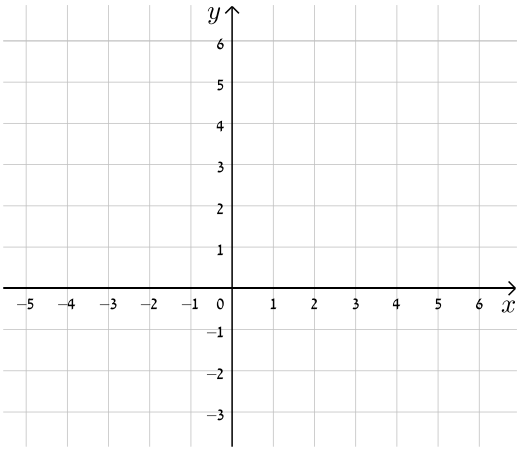
## שאלות:

**16)** עבור כל אחד ממשוואות הישרים הבאות, מצא את נקודות החיתוך עם הצירים וסרטט את הישרים במערכת הצירים שלפניך.

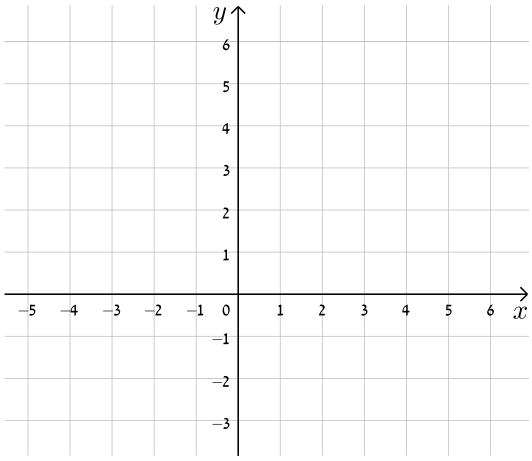
א. $y=x+4$



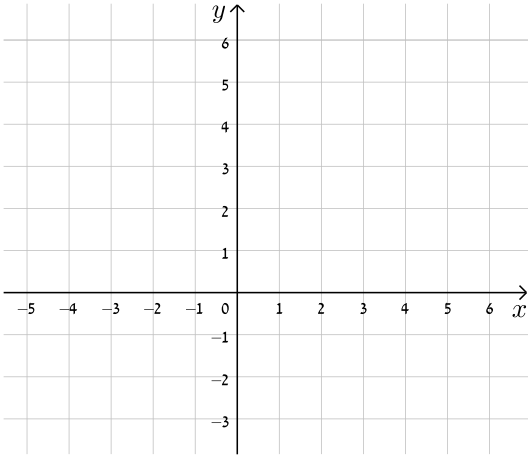

ב. $y=-x+5$



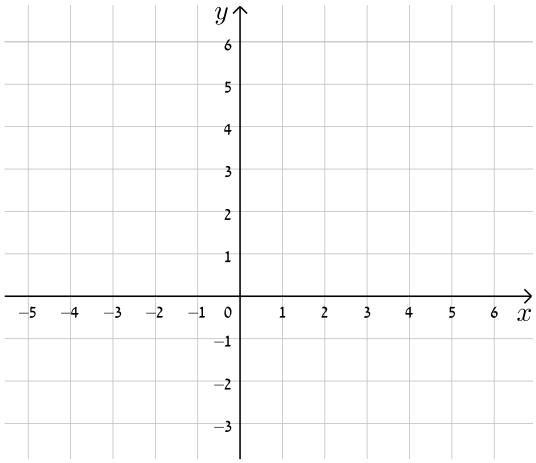
ג. $y=2x-3$



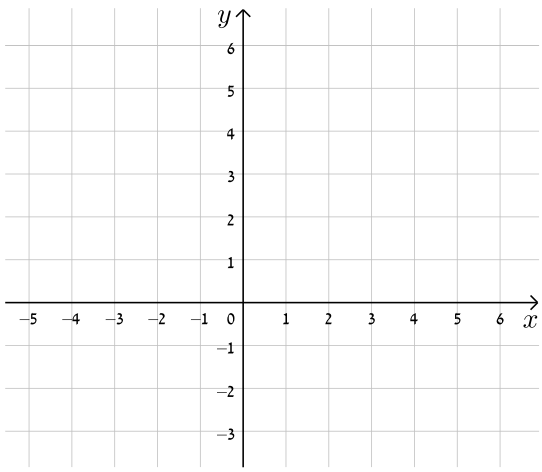
ד. $y=-3x+5$



ה. $y=3x-1$

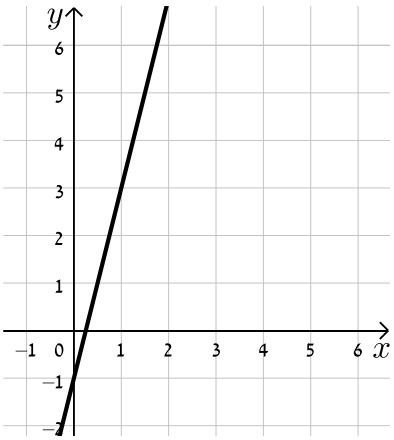


ו. $y=8-4x$

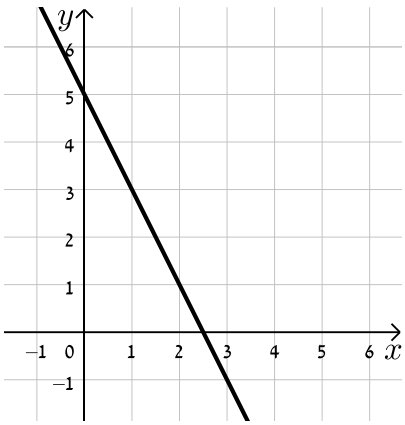


**17)** כתוב את משוואת הישר המתאימה לכל אחד מהישרים הבאים:

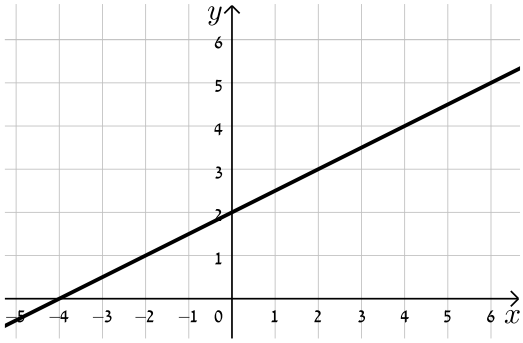
א.



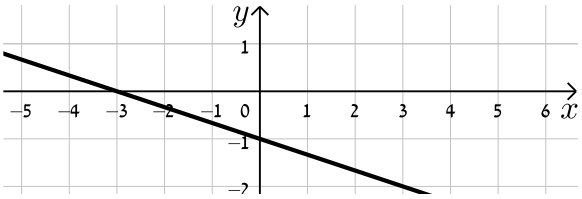
ב.



ג.




ד.




**18)** התאם בין משוואות הישרים הבאים לישרים בשרטוט:

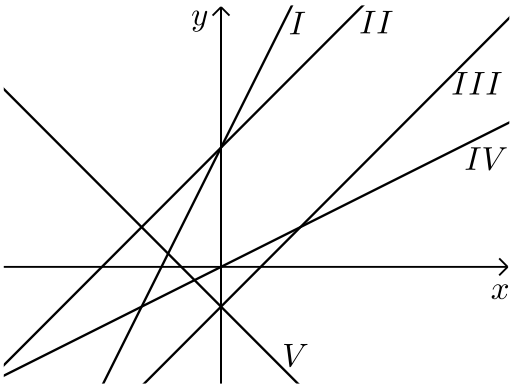
א. $y=x+3$

ב. $y=-x-1$

ג. $y=2x+3$

ד. $y=x-1$

ה. $y=\frac{1}{2}x$




**19)** נתונה משוואה הישר הבאה: $y=2x+3$. קבע אלו מבין הנקודות הבאות נמצאות עליו: $D(6,15)$ , $C(0,4)$ , $B(3,3)$ , $A(-1,1)$.

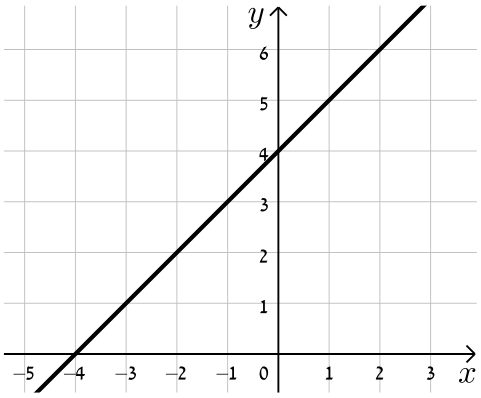
**20)** נתונה משוואת הישר הבאה: $y=mx-2.5$. ידוע כי הנקודה $A(4,2)$ נמצאת על הישר. מצא את $m$ וקבע האם גם הנקודה $B(7,-2)$ נמצאת עליו.

**21)** הנקודות $B(4,1)$ , $A(5,-3)$ נמצאות על ישר שמשוואתו היא: $y=mx+n$.
מצא את $m$ ואת $n$.

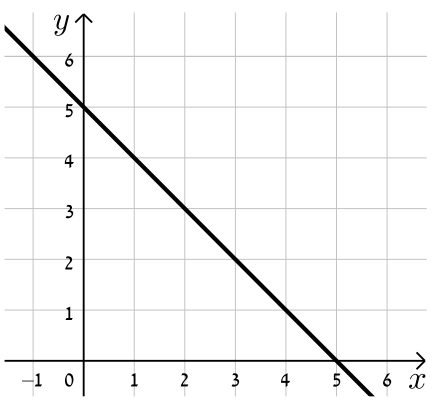
## תשובות סופיות:

**16)** להלן הגרפים של משוואות הישרים:

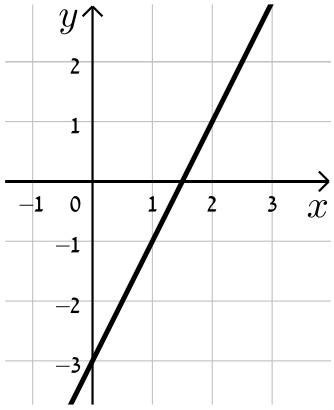
א.



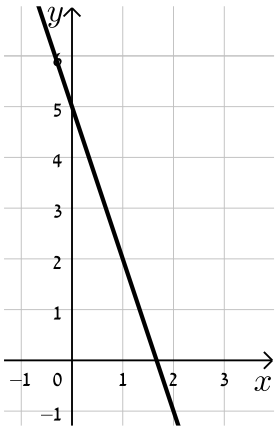

ב.



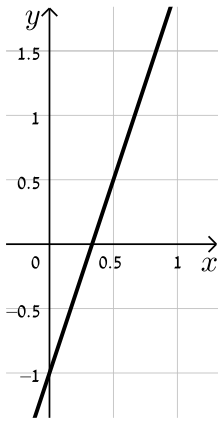

ג.



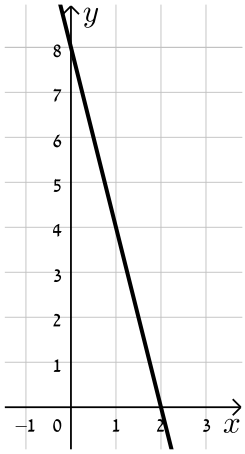

ד.




ה.




ו.



**17)** א. $y=4x-1$ ב. $y=-2x+5$ ג. $y=\frac{1}{2}x+2$ ד. $y=-\frac{1}{3}x-1$.

**18)** א.II. ב.V. ג.I. ד.III. ה.IV.

**19)** נמצאות: A, D. לא נמצאות: B, C.

**20)** $m=\frac{9}{8}$ , B לא נמצאת.

**21)** $n=17$ , $m=-4$.

# מצבים הדדיים בין ישרים:

## סיכום כללי:

**מצב הדדי בין שני ישרים:**

- ישרים מקבילים מקיימים: $m_1 = m_2$ , $n_1 \neq n_2$.
- ישרים חותכים מקיימים: $m_1 \neq m_2$.
- ישרים מתלכדים מקיימים: $m_1 = m_2$ , $n_1 = n_2$.

## שאלות:

**22)** מצא את נקודות החיתוך שבין זוגות הישרים הבאים:

א. $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y = x - 12 \\ y = 4x + 6 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = x + 6 \end{cases}$

**23)** קבע את המצב ההדדי בין זוגות הישרים הבאים:

א. $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y = x - 7 \\ y = x + 6 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} y = 6x - 15 \\ y = 3x + 41 \end{cases}$ ד. $\begin{cases} y = x + 8 \\ y = x + 8 \end{cases}$

**24)** קבע אלו מבין זוגות הישרים הבאים הם מאונכים זה לזה:

א. $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} y = -4x - 5 \\ y = \frac{1}{4}x + 5 \end{cases}$ ד. $\begin{cases} y = x - 6 \\ y = -x + 6 \end{cases}$

**25)** משוואת הצלע AB של המלבן ABCD היא $y=6x-2$.

א. מה הם שיפועי הצלעות האחרות של המלבן?

ב. כיצד תשתנה תשובתך לסעיף הקודם אם משוואת הישר הנ"ל הייתה שייכת לצלע BC במקום AB?

**26)** במשולש ABC נתונים שיעורי הקודקודים: $C(-5,5)$ , $B(3,7)$ , $A(5,-1)$.
הוכח שהמשולש ישר זווית ושווה שוקיים.

## תשובות סופיות:

**22)** א. $(-1,1)$ ב. $(-6,-18)$ ג. $(10,16)$.

**23)** א. נחתכים. ב. מקבילים. ג. נחתכים. ד. מתלכדים.

**24)** מאונכים: ג', ד'. לא מאונכים: א', ב'.

**25)** א. $m_{BC}=m_{AD}=-\frac{1}{6}$ , $m_{AB}=m_{CD}=6$.

ב. הכל הפוך: $m_{BC}=m_{AD}=6$ , $m_{AB}=m_{CD}=-\frac{1}{6}$.

**26)** שאלת הוכחה.

## מציאת משוואות ישר:

### שאלות:

**27)** מצא את משוואות הישרים הבאים:

א. ישר העובר דרך הנקודה $A(1,3)$ ושיפועו $m=2$.

ב. ישר העובר דרך הנקודה $A(0,-4)$ ושיפועו $m=\frac{1}{3}$.

ג. ישר העובר דרך הנקודה $A(5,9)$ ושיפועו $m=0$.

ד. ישר העובר דרך הנקודות $A(5,-12)$ ו-$B(6,-6)$.

ה. ישר העובר דרך הנקודה $A(-6,4)$ ומקביל לישר: $y=2x-3$.

ו. ישר העובר דרך הנקודה $A(3,-5)$ ומקביל לציר ה-$y$.

ז. ישר העובר דרך הנקודה $A(-7,-3)$ ומאונך לישר: $y=x+3$.

ח. ישר העובר דרך נקודת החיתוך של הישרים: $y=11x-4$ ו-$y=3x-12$ ומקביל לישר: $y=7x+5$.

### תשובות סופיות:

**27)** א. $y=2x+1$ ב. $y=\frac{1}{3}x-4$ ג. $y=9$ ד. $y=6x-42$

ה. $y=2x+16$ ו. $x=3$ ז. $y=-x-10$ ח. $y=7x-8$.

## שאלות יסודיות שונות עם משוואת הישר:

### שאלות:

**28)** במשולש ABC מעבירים את התיכון AD לצלע BC.
ידוע כי: $D(-2,2)$ , $B(2,4)$ , $A(3,-2)$.

א. כתוב את משוואת הישר של התיכון AD.

ב. מצא את שיעורי הקדקוד C.

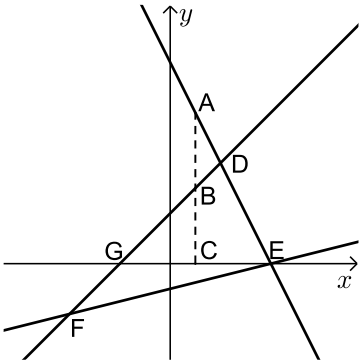
ג. כתוב את משוואת הישר של הצלע AC.

**29)** נתון מעוין ABCD שבו נתונים הקודקודים $A(-9,1)$ ו-$B(5,-7)$.
משוואת הישר עליו מונח האלכסון AC היא $x+3y+6=0$.

א. מצא את משוואת הישר עליו מונח האלכסון BD.

ב. מצא את משוואת הישר עליו מונחת הצלע BC.

**30)** שלוש המשוואות הבאות מייצגות את הישרים המופיעים בשרטוט: $x-4y-4=0$ , $x-y+2=0$ ו- $2x+y-8=0$.
הקטע AC מקביל לציר ה- $y$.




א. חשב את שטח המשולש DEF.

ב. נתון: $d_{BC}=3$.
חשב את אורך הקטע AB.

**31)** BD הוא התיכון לצלע AC במשולש ABC שבו נתון הקודקוד $A(-6,1)$.
משוואת התיכון BD היא $x-y=1$ ומשוואת הצלע BC היא $3x+5y=67$.
מצא את שיעורי הקדקוד C.

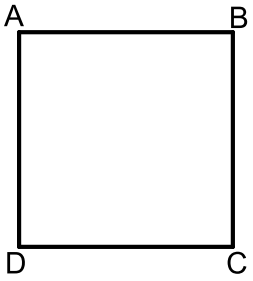
**32)** נתון טרפז ABCD $(AB\|CD)$ ובו משוואת השוק BC היא: $x=2$.
משוואת הבסיס CD היא $2x+3y=7$ וידוע כי $A(-4,1)$.

א. מצא את משוואת הבסיס AB.

ב. מצא את שיעורי הקדקודים B ו-C.

ג. מעבירים את האלכסון AC.
הראה כי המשולש ABC הוא ישר זווית ומצא את שטחו.

**33)** במרובע ABCD ידוע כי שיפוע הצלע BC הוא 3 ושיעורי הנקודה A הם: $(1,4)$.



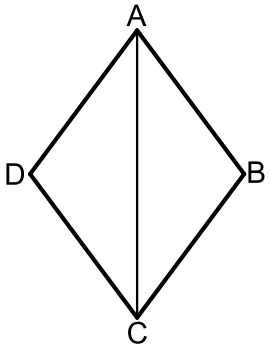

א. איזה מרובע הוא המרובע ABCD?
הראה חישוב מתאים.

ב. נתון גם: $D(4,13)$, $m_{CD}=-\frac{1}{3}$ ו- $\sqrt{90}$ ס"מ $=BC$.
איזה מרובע הוא המרובע ABCD כעת?
הראה חישוב מתאים.

ג. נתון גם: $B(-8,7)$.
איזה מרובע הוא המרובע ABCD כעת?
הראה חישוב מתאים.

ד. חשב את שטח המרובע ABCD.

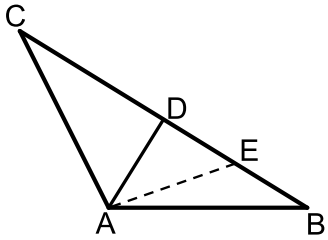
**34)** המרובע ABCD הוא מעוין.
ידוע כי שיעורי אחת הנקודות במעוין הם: $(0,6)$.
כמו כן, ידוע גם כי משוואת האלכסון AC היא: $y=-1.5x+6$ ואחת ממשואות הצלעות היא: $5y+x=4$.




א. מצא את משוואת האלכסון השני.

ב. מצא את שאר קדקודי המעוין

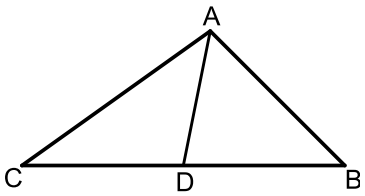
**35)** המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים $(AB=AC)$.
ב-$\Delta ABC$ מעבירים את הגובה AD לבסיס BC ומסמנים נקודה E כך שמתקיים: $DE=BE$.
קדקוד הראש A נמצא בראשית הצירים ונתון כי: $E(8.5,2.5)$, $D(5,7)$.




א. מצא את שיעורי שאר קודקודי המשולש.

ב. כתוב את משוואת השוק AC.

**36)** נתון משולש ABC. הנקודה D נמצאת על הצלע BC של המשולש ABC כך שהקטע AD מחלק אותו לשני משולשים שווי שטח ABD ו-ACD.
הצלע BC מונחת על הישר: $y=4$ וידוע כי שיעור ה-$x$ של הנקודה C הוא: $x_C=-1$.
כמו כן נתון: $A(7,8)$, $m_{AB}=-2$.



א. מצא את משוואת הצלע AB.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. איזה קטע הוא AD בתוך המשולש ABC?

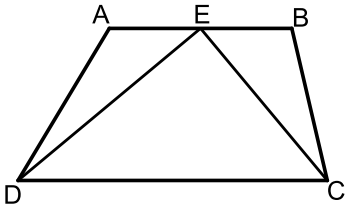
ii. מצא את שיעורי הנקודות B ו-D.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. חשב את אורך הצלע BC ואת אורך הקטע AD.

ii. איזה משולש הוא המשולש ABC?

**37)** המרובע ABCD הוא טרפז. הנקודה E היא אמצע הבסיס AB וידוע כי היא נמצאת על ציר ה-$x$.




שיעורי הנקודה B הם $(3,2)$ והצלע AD מונחת על הישר: $x=-5$. אורך הקטע DE הוא $\sqrt{80}$.

כך ש-D ברביע השלישי וכן: $\sphericalangle DEC=90°$.

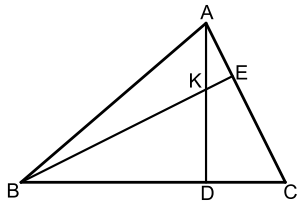
א. מצא את שיעורי הנקודות A , D ו-E.

ב. מצא את משוואת הקטע CE ואת משוואת הבסיס CD.

ג. מצא את שיעורי הנקודה C.

ד. חשב את שטח המשולש DEC.

**38)** AD ו-BE הם בהתאמה גבהים לצלעות BC ו-AC במשולש ABC.




ידוע כי שיעורי נקודת פגישת הגבהים K הם: $(1,3)$.

שיעורי הנקודות D ו-E הם: $E(3,5)$ , $D(-2,4)$.

א. מצא את משוואת הגובה AD ואת משוואת הצלע AC.

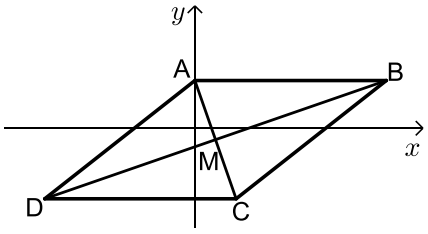
ב. מצא את שיעורי הקדקוד A.

ג. מצא את משוואת הגובה BE ואת משוואת הצלע BC.

ד. מצא את שיעורי הקדקוד B.

**39)** נתון מעוין ABCD. ידוע כי הצלע CD מונחת על $y=-7$.

אלכסוני המעוין AC ו-BD נפגשים בנקודה: $M(-0.5,-3)$. שיפוע האלכסון AC הוא 4-.

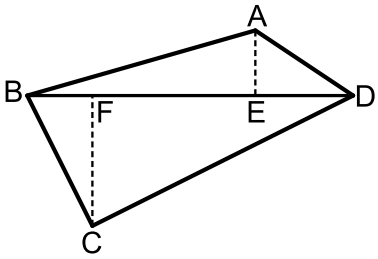



א. מצא את משוואת האלכסון AC.

ב. מצא את שיעורי הנקודה C.

ג. חשב את שטח המשולש BMC.

**40)** נתון מרובע ABCD שקודקודיו הם: $A(3,13)$ , $B(-2,4)$ , $C(9,3)$ , $D(8,14)$.




מורידים גבהים AE ו-CF לאלכסון BD.

א. מצא את משוואת האלכסון BD ואת אורכו.

ב. מצא את שיעורי הנקודות E ו-F.

ג. מצא את אורכי הגבהים AE ו-CF.

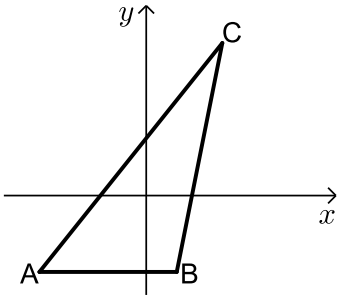
ד. חשב את שטח המרובע ABCD.

**41)** על הישר $y=-5$ מסמנים את

הנקודות: $A(-7,-5)$ , $B(2,-5)$.

הנקודה C נמצאת על הישר: $y=x-5$.

נסמן את שיעור ה-$x$ של הנקודה C ב-$t$.




א. הבע באמצעות $t$ את שיעור ה-$y$ של הנקודה C.

ב. ידוע כי אורך הצלע AC הוא 17 ס"מ.

הבע באמצעות $t$ את המרחקים של C מ-A ומ-B.

ג. מצא את $t$ ואת אורך הצלע BC.

ד. מסמנים נקודה D על המשך הצלע AB.

ידוע כי D נמצאת ברביע השלישי.

מצא את שיעורי הנקודה D המקיימת ששטח

המשולש DAC יהיה גדול ב-16 יחידות משטח המשולש ABC.

**42)** המשולש ABC הוא שווה שוקיים $(AB=BC)$

ובו נתון: $A(-4,12)$ , $B(x,6)$ ו-$C(4,8)$.

א. מצא את $x$.

ב. הוכח כי המשולש הוא ישר זווית.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את משוואת הצלע AC.

ii. מסמנים את נקודת החיתוך של הצלע AC עם ציר ה-$y$ ב-D.

מצא את שיעורי הנקודה D.

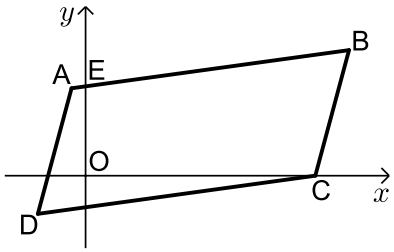
ד. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא נקודה E ברביע הראשון $(x_E<5)$ כך שהמשולש DCE יהיה גם

שווה שוקיים וישר זווית $(\sphericalangle C=90°)$.

ii. חשב את יחס השטחים בין המשולשים: $\frac{S_{DCE}}{S_{ABC}}$.

**43)** באיור שלפניך נתונה מקבילית ABCD.




ידועים קודקודי המקבילית הבאים: $A(-1,y)$

ו-$B(x,4)$. ($x$ ו- $y$ נעלמים).

שיפוע הצלע CD הוא 0.2 ואורכה הוא: $d_{CD}=\sqrt{104}$.

א. מצא את $x$ ו- $y$ אם ידוע כי B ברביע הראשון.

ב. נתון גם כי הקדקוד C נמצא על ציר ה-$x$ בחלקו החיובי

וכי: $d_{BC}=\sqrt{17}$. מצא את שיעורי הקדקוד C (מצא שתי אפשרויות).

ג. סמן את נקודת החיתוך של הצלע AB עם ציר ה- $y$ ב-E.

שטח המרובע EOCB הוא 25.9 יח"ש. מצא את האפשרות הנכונה עבור הנקודה C מבין אלו שמצאת בסעיף הקודם.

## תשובות סופיות:

**28)** א. $y=-\frac{4}{5}x+\frac{2}{5}$ ב. $C(-6,0)$ ג. $y=-\frac{2}{9}x-\frac{4}{3}$.

**29)** א. $l_{BD}: y=3x-22$. ב. $l_{BC}: y=-\frac{1}{8}x-6\frac{3}{8}$.

**30)** א. $S_{EDF}=$ 18 יח"ש. ב. 3 יחידות אורך = AB.

**31)** $C(14,5)$.

**32)** א. $y=-\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$ ב. $C(2,1)$ , $B(2,-3)$ ג. $S_{ABC}=$ 12 יחידות שטח.

**33)** א. מרובע כללי כלשהו. לא ניתן להצביע על אף תכונה.
ב. מלבן. ניתן להראות כי יש למרובע שני זוגות צלעות נגדיות מקבילות ושוות וזווית ישרה.
ג. ריבוע. ניתן להראות כי קיימות זוג צלעות סמוכות שוות. ד. $S=$ 90 יח"ש.

**34)** א. $y=\frac{2}{3}x+1\frac{2}{3}$ ב. $(-1,1)$ , $(4,0)$ , $(5,5)$.

**35)** א. $C(-2,16)$ , $B(12,-2)$ ב. $y=-8x$.

**36)** א. $y=-2x+22$ ב. i. תיכון - קטע במשולש שחוצה אותו לשני משולשים שווי שטח הוא תיכון.
ב. ii. $D(4,4)$ , $B(9,4)$.
ג. ii. $BC=10$ , $AD=5$. ג. ii. משולש ישר זווית - אם במשולש יש תיכון לצלע ששווה למחציתה אז המשולש הוא ישר זווית.

**37)** א. $E(-1,0)$ , $A(-5,-2)$ , $D(-5,-8)$. ב. $CD: y=\frac{1}{2}x-5\frac{1}{2}$ , $CE: y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$
ג. $C(5,-3)$. ד. $S_{DEC}=$ 30 יח"ש.

**38)** א. $AC: y=-x+8$ , $AD: y=-\frac{1}{3}x+3\frac{1}{3}$. ב. $A(7,1)$.
ג. $BC: y=3x+10$ , $BE: y=x+2$. ד. $B(-4,-2)$.

**39)** א. $y=-4x-5$ ב. $C(0.5,-7)$ ג. $S_{DMC}=S_{BMC}=$ 34 סמ"ר.

**40)** א. $y=x+6$ , $d_{BD}=\sqrt{200}$ ב. $E(5,11)$ , $F(3,9)$
ג. $d_{AE}=\sqrt{8}$ , $d_{CF}=\sqrt{72}$ ד. $S_{ABCD}=80$.

**41)** א. $C(t,t-5)$. ב. i. $BC=\sqrt{2t^2-4t+4}$ , $AC=\sqrt{2t^2+14t+49}$
ii. $t=8$ , BC = 10 ס"מ. ג. $D(-20,-5)$.

**42)** א. $x=-2$ ג. i. $y=-0.5x+10$ ii. $D(0,10)$ ד. i. $E(2,4)$
ii. $\frac{S_{DCE}}{S_{ABC}}=\frac{1}{2}$.

**43)** א. $x=9$ , $y=2$ ב. $C(10,0)$ , $C(8,0)$ ג. $C(8,0)$.

# חלוקת קטע ביחס נתון:

## סיכום כללי:

- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $A(x_1,y_1)$ ו-$B(x_2,y_2)$ ביחס של $k:l$ הם: $x_P=\frac{k\cdot x_1+l\cdot x_2}{k+l}, y_P=\frac{k\cdot y_1+l\cdot y_2}{k+l}$ (בהצלבה).

## שאלות:

**1)** הנקודה P נמצאת על הקטע AB. נתון: $B(-12,16)$ , $A(2,-5)$.
מצא את ערכי הנקודה P, אם נתון כי: $\frac{AP}{PB}=\frac{2}{5}$.

**2)** קודקודי משולש ABC הם: $C(4,-12)$ , $B(6,0)$ , $A(-1,3)$.
מצא את שיעורי מרכז הכובד של המשולש.
(מרכז כובד של משולש הוא מפגש תיכוני המשולש).

**3)** מצא את שיעורי מרכז הכובד של משולש ABC
שקודקודיו הם: $C(x_3,y_3)$ , $B(x_2,y_2)$ , $A(x_1,y_1)$.

**4)** קודקודי המשולש ABC הם: $C(-1,4)$ , $B(7,-3)$ , $A(5,1)$.
מצא את אורכו של חוצה הזווית היוצא מקודקוד A.

## תשובות סופיות:

**1)** $P(-2,1)$

**2)** $M(3,-3)$

**3)** $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

**4)** 1.697 יחידות אורך.

# מרחק נקודה מישר:

## סיכום כללי:

**הצגה כללית של ישר ומרחקים:**

- הצגה כללית של ישר (צורה סתומה): $Ax+By+C=0$.
- מרחק הנקודה $A(x_1,y_1)$ מהישר $Ax+By+C=0$ הוא: $d=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$.

  כאשר $B>0$:
  - אם הנקודה מעל הישר מורידים את הערך המוחלט.
  - אם הנקודה מתחת לישר מורידים את הערך המוחלט ומוסיפים מינוס לאחד האגפים.

## שאלות:

**5)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את מרחק הנקודה $(-2,4)$ מהישר $4x+3y+11=0$.

ב. מצא את מרחק הנקודה $(4,3)$ מהישר $y=3x-1$.

ג. מצא את מרחק הנקודה $(3,-11)$ מהישר $x-5=0$.

**6)** מצא את המרחק בין הנקודה הנתונה לישר הנתון:

א. $3x-4y+6=0$, $A(-5,-1)$ ב. $12x+5y-17=0$, $A(-3,8)$

ב. $2y+7=0$, $A(11,-2)$ ד. $3x-14=0$, $A\left(6,-\frac{1}{2}\right)$

**7)** מצא את שיעורי הנקודות על הישר $x+y-7=0$ שמרחקן מהישר $2x-y+5=0$ הוא: $\sqrt{20}$.

**8)** מצא את שטחה של מקבילית ששיעורי קודקודיה הם: $D(11,2)$, $C(-1,7)$, $B(-5,4)$, $A(7,-1)$.

**9)** מצא את שטחו של המשולש $\Delta ABC$ שבו שיעורי קדקוד $A$ הם $A(5,-3)$ ושניים מתיכוני המשולש מונחים על הישרים $x-4=0$ ו- $2x-y-1=0$.

**10)** מצא את שטחו של משולש שקודקודיו הם: $A(2,2)$ , $B(-1,1)$ , $C(-5,-2)$.

**11)** מצא את שיעורי הנקודות על הישר $3x-2y+6=0$, שמרחקן מהישר: $2x-y-14=0$ הוא $3\sqrt{5}$.

**12)** מצא את שיעורי הנקודות על הישר $4x+3y-20=0$, שמרחקן מהישר: $3x+2y+13=0$ הוא $2\sqrt{13}$.

## תשובות סופיות:

**5)** א. 3 ב. $\frac{8}{\sqrt{10}}$ ג. 2.

**6)** א. 1 ב. 1 ג. $1\frac{1}{2}$ ד. $1\frac{1}{3}$.

**7)** $(4,3)$ , $\left(-2\frac{2}{3},9\frac{2}{3}\right)$

**8)** $S_{ABCD}=56$ יח"ש

**9)** $S_{ABC}=18$ יח"ש

**10)** $S_{ABC}=2.5$ יח"ש

**11)** $(4,9)$ , $(64,99)$

**12)** $(-1,8)$ , $(-157,216)$

## מיקום נקודה ביחס לישר:

### שאלות:

**13)** מצא את שיעורי הנקודה על הישר $3x-2y+6=0$, שמרחקה מהישר: $2x-y-14=0$ הוא $3\sqrt{5}$ והיא נמצאת מתחתיו.

**14)** מצא את שיעורי הנקודה על הישר $4x+3y-20=0$, שמרחקה מהישר: $3x+2y+13=0$ הוא $2\sqrt{13}$ והיא נמצאת מעליו.

**15)** נתון משולש ABC שבו נתונים הקודקודים: $A(1,1)$ , $B(13,6)$.
הקדקוד C נמצא על הישר $2x-y-19=0$ ונמצא מתחת לצלע AB.
מצא את שיעורי הקדקוד C אם ידוע ששטח המשולש הוא 13.

**16)** נתון משולש שצלעותיו מונחות על הישרים:
$I: x+2y+1=0$ , $II: x-2y-11=0$ , $III: 2x-y+6=0$
מצא שיעורי נקודה הנמצאת בתוך המשולש, שמרחקה מישר I שווה למרחקה מישר III ושמרחקה מישר II הוא מחצית מהמרחק משני ישרים אלה.

**17)** מצא את שיעורי מרכז המעגל, החסום במשולש, שצלעותיו מונחות על הישרים: $III: 3x+4y-11=0$ , $II: 3x-4y-51=0$ , $I: 4x-3y+2=0$.

**18)** מצא משוואת ישר ששיפועו 3 אם ידוע שהנקודה $G(7,-3)$ נמצאת מתחתיו ובמרחק $2\sqrt{10}$ ממנו.

**19)** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(-2,6)$ ומרחקו מהנקודה $B(2,9)$ הוא $\sqrt{5}$.

**20)** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(9,10)$ ומרחקו מהנקודה $B(8,-3)$ הוא $5\sqrt{5}$.

**21)** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(3,6)$ ומרחקו מהנקודה $B(-9,2)$ הוא 4.

**22)** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(1,2)$ ומרחקו מהנקודה $B(-3,10)$ הוא 4.

**23)** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(10,8)$ ומרחקו מהנקודה $B(7,-1)$ הוא 3.

**24)** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(-6,1)$ ומרחקו מהנקודה $B(2,7)$ הוא 10.

## תשובות סופיות:

**13)** $(64,99)$

**14)** $(-1,8)$

**15)** $C(11,3)$

**16)** $(-1,-4)$

**17)** $(2,-5)$

**18)** $y=3x-4$

**19)** $y=2x+10$ , $y=\frac{2}{11}x+6\frac{4}{11}$

**20)** $y=\frac{1}{2}x+5\frac{1}{2}$ , $y=-\frac{22}{31}x+16\frac{12}{31}$

**21)** $y=6$ , $y=\frac{3}{4}x+3\frac{3}{4}$

**22)** $x=1$ או $y=-\frac{3}{4}x+2\frac{3}{4}$

**23)** $x=10$ או $y=1\frac{1}{3}x-5\frac{1}{3}$

**24)** $y=-\frac{4}{3}x-7$

# מרחק בין ישרים מקבילים:

## סיכום כללי:

- מרחק בין שני ישרים מקבילים: $Ax+By+C_1=0$ ו- $Ax+By+C_2=0$ כאשר: $B>0$
  הוא: $d=\left|\frac{C_1-C_2}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$ ומתקיים בהעדר הערך המוחלט:
  - אם: $C_1>C_2$, $(d>0)$ אז הישר $Ax+By+C_1=0$ מתחת ל- $Ax+By+C_2=0$.
  - אם: $C_1<C_2$ $(d<0)$ אז הישר $Ax+By+C_1=0$ מעל ל- $Ax+By+C_2=0$.

## שאלות:

**25)** מצא משוואת ישר, המקביל לישר $3x-4y+8=0$ ונמצא במרחק 4 ממנו.

**26)** מצא את המרחק בין הישרים המקבילים: $5x+12y+25=0, 5x+12y-14=0$.

**27)** נתונים הישרים: $y=6x+5, 12x-2y-15=0$.
הראה שהישרים מקבילים ומצא את המרחק ביניהם.

**28)** נתון המלבן ABCD. משוואותיהן של שתיים מצלעות המלבן הן $AB: 3x+y=0$ ו- $CD: 3x+y-6=0$. הקדקוד B נמצא בראשית הצירים. נתון כי הצלע AB ארוכה פי 4 מהצלע BC. מצא את שטח המלבן ואת מפגש אלכסוני המלבן, אם ידוע שהוא ברביע הרביעי.

**29)** צלע של ריבוע מונחת על הישר $3x-2y+5=0$.
אלכסוני הריבוע נפגשים בנקודה $B(1,-1)$.
מצא את משוואות הישרים עליהם מונחות הצלעות האחרות של הריבוע.

**30)** נתון ישר שעובר בראשית הצירים ושיפועו חיובי.
מצא את משוואת הישר אם נתון שהוא נמצא מעל הנקודות $P(4,1)$ ו- $Q(7,2)$
וסכום המרחקים ממנו לנקודות אלה הוא $3\sqrt{10}$.

**31)** במשולש BKP נתון כי הצלע BK מונחת על הישר $x-y+3=0$ והצלע BP מונחת על הישר $x+2y+3=0$. אורך הגובה לצלע BP הוא $3\sqrt{5}$ ואורך הגובה לצלע KP הוא 5. מצא את שיעורי קדקוד P אם ידוע שראשית הצירים נמצאת בתוך המשולש.

## תשובות סופיות:

**25)** $3x-4y+28=0$ , $3x-4y-12=0$ **26)** 3

**27)** $\frac{25}{\sqrt{148}}$ **28)** יח"ש $S=14.4$ , $(2.1,-3.3)$

**29)** $3x-2y-15=0$ , $y=-\frac{2}{3}x-3\frac{2}{3}$ , $y=-\frac{2}{3}x+3$

**30)** $y=3x$ **31)** $P\left(2,-2\frac{1}{2}\right)$

# מתמטיקה לתלמידי גאוגרפיה ופיתוח סביבתי 2

## פרק 2 - גיאומטריה אנליטית (חזרה כללית) - המעגל

### תוכן העניינים


1. הכרות עם משוואת המעגל ..... 26
2. מעגל המשיק לצירים ..... 30
3. משיק למעגל ..... 32
4. שאלות יסודיות שונות ..... 33
5. נושאים מתקדמים במעגל ..... (ללא ספר)
6. כתיבת משוואת מעגל עם השלמה לריבוע ..... 40
7. משוואות המשיקים למעגל ..... 41
8. מיתר המחבר שתי נקודות השקה ..... 43
9. שאלות מסכמות שונות ..... 44

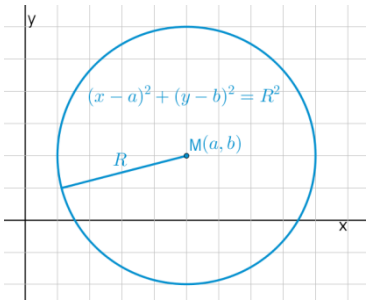
# הכרות עם משוואת המעגל:

## סיכום כללי:

**הגדרה:**

המקום הגאומטרי של כל הנקודות, הנמצאות במרחק קבוע מנקודה קבועה במישור נקרא מעגל.

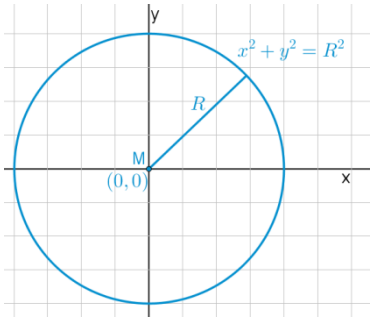
**משוואת מעגל:**




משוואת מעגל שמרכזו בנקודה $M(a,b)$

ורדיוסו $R$ היא: $(x-a)^2=(y-b)^2=R^2$.

**משוואת מעגל קנוני:**




משוואת מעגל קנוני (שמרכזו בראשית הצירים $M(0,0)$)

ורדיוסו $R$ היא: $x^2+y^2=R^2$.

## שאלות:

**1)** מצא את מרכזם ורדיוסם של המעגלים הבאים:

א. $(x-3)^2+(y+5)^2=49$.

ב. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=10$.

ג. $(x-m)^2+(y+n)^2=m^2+n^2$.

**2)** כתוב את משוואות המעגלים שמרכזם M ורדיוסם $R$:

א. $M(4,-2)\ ,\ R=3$

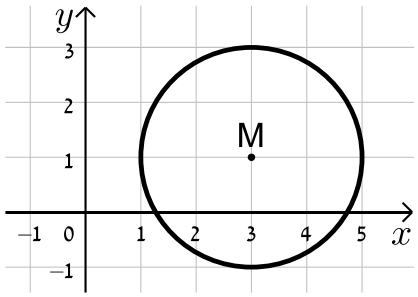
ב. $M(-3,5)\ ,\ R=10$

ג. $M(5,5)\ ,\ R=\sqrt{40}$

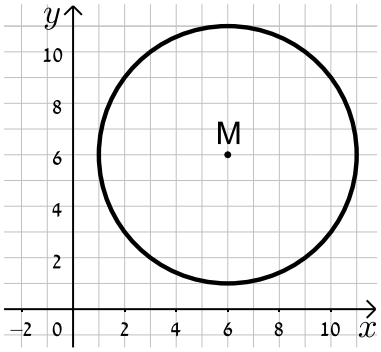
ד. $M(10,-12)\ ,\ R=\sqrt{30}$

**3)** כתוב את משוואות המעגלים הבאים בכל מקרה:

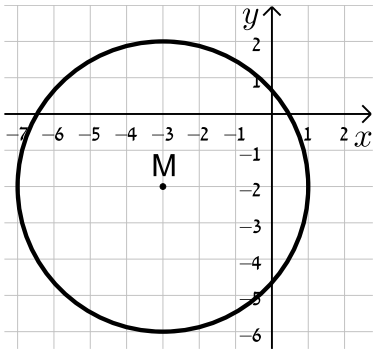
א.



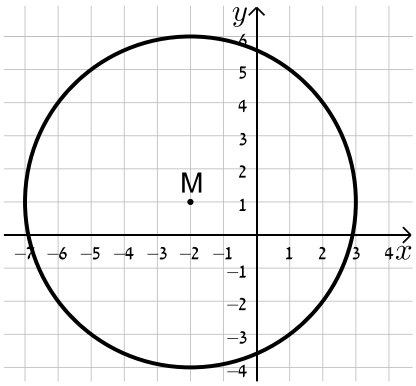

ב.




ג.




ד.




**4)** מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה $A(-4,5)$ ומרכזו בנקודה $O(2,-1)$.

**5)** מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה $M(-5,6)$ והוא חותך את ציר ה-$x$ בנקודה שבה $x=9$.

**6)** מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה $M(0,-7)$ והוא חותך את ציר ה-$y$ בנקודה שבה $y=3$.

**7)** מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה $A(11,2)$, רדיוסו 13 ומרכזו נמצא על הישר $y=2x-1$.

**8)** מצא את משוואתו של מעגל שהנקודות $A(-2,3)$ ו-$B(4,-3)$ הן קצות הקוטר שלו.

**9)** מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו נמצא על הישר $x=4$ , רדיוסו 10 והוא חותך מציר ה-$x$ מיתר שאורכו 12.

**10)** מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו $M(4,-3)$ אם ידוע כי הישר $y=-3x+7$ חותך אותו בשתי נקודות A ו-B כך שאורכו של המיתר AB הוא 4 יחידות אורך.

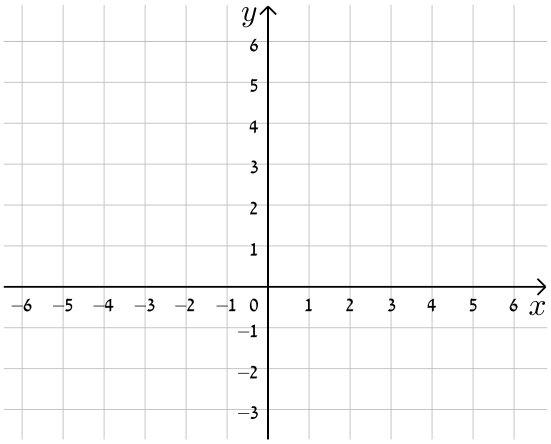
**11)** מצא את משוואתו של מעגל החוסם משולש שקודקודיו הם $C(-30,28)$ , $B(-10,40)$ , $A(22,-24)$.

**12)** נתונים שני מעגלים בעלי אותו המרכז $M(3,-1)$ , האחד הוא בעל רדיוס $R$ והשני בעל רדיוס של $2R$.

א. כתוב את המשוואות של שני המעגלים (בטא באמצעות $R$).

ב. מה תהיינה המשוואות עבור $R=2$ ?

ג. צייר את שני המעגלים במערכת הצירים שלפניך.




**13)** שני מעגלים שמרכזיהם $M_1(6,2)$ ו-$M_2(-3,-4)$ חותכים זה את זה בנקודה $(-2,3)$. מצא את משוואות המעגלים.

**14)** נתונה משוואת המעגל הבאה: $x^2+y^2-10x-10y+a=0$ כאשר $a$ פרמטר.

א. מצא ביטוי של רדיוס המעגל באמצעות $a$.

ב. איזה מהערכים הבאים יכול להיות הגיוני עבור $a$ ?
נמק ומצא את תחום ההגדרה של $a$.

i. $a=5$.

ii. $a=55$.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $M(3,-5)\ ,\ R=7$ ב. $M(-0.5,0)\ ,\ R=\sqrt{10}$

ג. $M(m,-n)\ ,\ R=\sqrt{m^2+n^2}$ .

**2)** א. $(x-4)^2+(y+2)^2=9$ ב. $(x+3)^2+(y-5)^2=100$

ג. $(x-5)^2+(y-5)^2=40$ ד. $(x-10)^2+(y+12)^2=30$ .

**3)** א. $(x-3)^2+(y-1)^2=4$ ב. $(x-6)^2+(y-6)^2=25$

ג. $(x+3)^2+(y+2)^2=16$ ד. $(x+2)^2+(y-1)^2=25$ .

**4)** $(x-2)^2+(y+1)^2=72$ , $M(3,-3)$ .

**5)** $(x+5)^2+(y-6)^2=232$ .

**6)** $x^2+(y+7)^2=100$ .

**7)** $(x+1)^2+(y+3)^2=169$ או $(x-7.8)^2+(y+14.6)^2=169$ .

**8)** $(x-1)^2+y^2=18$ .

**9)** $(x-4)^2+(y-8)^2=100$ או $(x-4)^2+(y+8)^2=100$

**10)** $(x-4)^2+(y+3)^2=4\frac{2}{5}$ .

**11)** $(x+2)^2+(y-4)^2=1360$ .

**12)** א. $(x-3)^2+(y+1)^2=4R^2$ , $(x-3)^2+(y+1)^2=R^2$

ב. $(x-3)^2+(y+1)^2=16$ , $(x-3)^2+(y+1)^2=4$ .

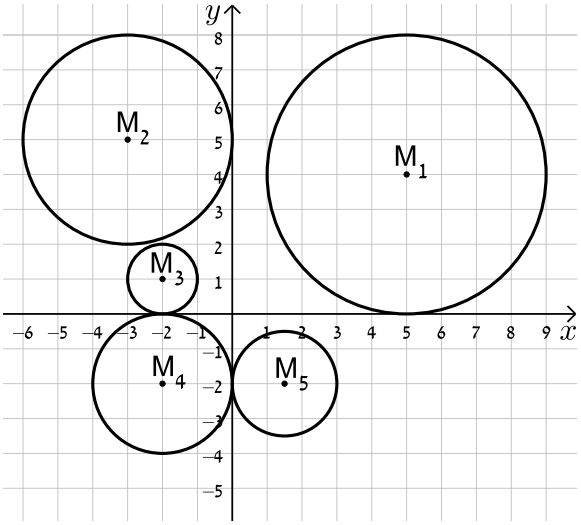
**13)** $(x-6)^2+(y-2)^2=65$ , $(x+3)^2+(y+4)^2=50$

**14)** א. $R=\sqrt{50-a}$ ב. $a=5$ , ת.ה: $a<50$ .

# מעגל המשיק לצירים:

## שאלות:

**15)** כתוב את משוואות המעגלים הבאים:




**16)** מצא את משוואתו של מעגל המשיק לשני הצירים ורדיוסו 4.

**17)** מצא את משוואת המעגל שמשיק לציר ה-$x$ ומרכזו בנקודה $M(16,8)$.

**18)** מצא את משוואת המעגל שמרכזו נמצא על הישר $2x+3y+6=0$ והוא משיק לשני הצירים.

**19)** מצא את משוואתו של מעגל שמשיק לציר ה-$y$ ולישר $y=6$ ומרכזו על הישר $y=3x-2$ ברביע הראשון.

## תשובות סופיות:

**15** $M_1:(x-5)^2+(y-4)^2=16$ , $M_2:(x+3)^2+(y-5)^2=9$ , $M_3:(x+2)^2+(y-1)^2=1$ , $M_4:(x+2)^2+(y+2)^2=4$ , $M_5:(x-1.5)^2+(y+2)^2=2\frac{1}{4}$.

**16** $(x\pm4)^2+(y\pm4)^2=16$.

**17** $(x-16)^2+(y-8)^2=64$.

**18** $(x-6)^2+(y+6)^2=36$ , $\left(x+1\frac{1}{5}\right)^2+\left(y+1\frac{1}{5}\right)^2=\frac{36}{25}$.

**19** $(x-2)^2+(y-4)^2=4$.

# משיק למעגל:

## סיכום כללי:

משוואת המשיק למעגל $(x-a)^2=(y-b)^2=R^2$ בנקודה $A(x_1,y_1)$ שעליו היא: $(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=R^2$.

## שאלות:

**20)** מצא את משוואות המשיקים למעגל $(x+1)^2+(y-2)^2=25$ בנקודות על המעגל שבהן $y=5$.

**21)** נתונה משוואת המעגל: $(x-1)^2+(y-3)^2=20$ ומשוואת הישר $y=2x+m$ כאשר $m$ פרמטר. מצא עבור אלו ערכים של $m$ הישר ישיק למעגל ולאלו ערכים הישר יחתוך את המעגל.

## תשובות סופיות:

**20)** $4x-3y+35=0$ ו- $4x+3y=27$.

**21)** משיק: $m=11,-9$, חותך: $-9<m<11$.

## שאלות יסודיות שונות:

### שאלות:

**22)** נתון מעגל שמשוואתו $(x-3)^2+(y+4)^2=25$.

א. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.

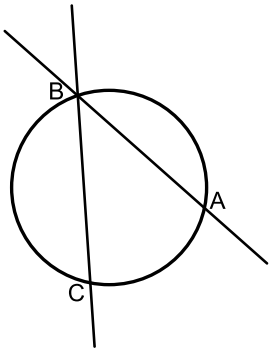
ב. העבירו קוטר במעגל, המאונך לציר ה-$x$.
מצא את שטח המרובע הנוצר על ידי נקודות החיתוך שמצאת בסעיף א' ונקודת החיתוך של הקוטר עם המעגל הנמצאת ברביע הראשון.

**23)** נתון ישר שמשוואתו $y=2x-10$. הישר חותך את ציר ה-$x$ בנקודה A ואת ציר ה-$y$ בנקודה B. בנקודה A מעבירים משיק למעגל שהקטע AB הוא קוטרו.
המשיק חותך את ציר ה-$y$ בנקודה C.
מצא את אורך הקטע BC.

**24)** נתון המעגל שמשוואתו $x^2+y^2=81$. מסמנים ב-A את נקודת החיתוך החיובית של המעגל עם ציר ה-$x$. הנקודה A היא מרכזו של מעגל נוסף בעל רדיוס של 12. מסמנים את נקודות החיתוך של שני המעגלים ב-B ו-C.
מצא את שטח המשולש שנוצר בין הנקודות B, C ו- O (O ראשית הצירים).

**25)** נתון ישר שמשוואתו $y=x$. הישר חותך מעגל קנוני שמשוואתו $x^2+y^2=32$ בשתי נקודות, A ו-B, כאשר A ברביע הראשון. בנקודה A עובר מעגל נוסף, המשיק למעגל הקנוני ובעל אותו רדיוס.
מצא את משוואת המעגל הנוסף ואת משוואת המשיק המשותף לשני המעגלים העובר בנקודה A.

**26)** הישרים: $9y+11x=94$ ו- $y=-3x+14$ נחתכים בנקודה B.
דרך נקודה זו עובר מעגל שמרכזו הוא: $M(-9,1)$.
ידוע כי מעגל זה חותך את הישרים (חוץ מהנקודה B) בשתי נקודות A ו-C (ראה איור).

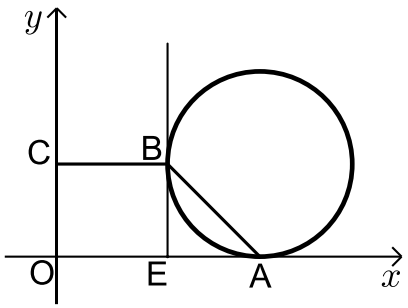



א. מצא את שיעורי הנקודה B.

ב. מצא את משוואת המעגל.

ג. מצא את שיעורי הנקודה A – נקודת החיתוך של הישר שמשוואתו: $y=-3x+14$ עם המעגל.

**27)** נתון מעגל המשיק לציר ה-$x$ בנקודה A.
מהנקודה E שעל ציר ה-$x$ מעלים אנך המשיק למעגל בנקודה B (ראה איור).
הקטע BC מקביל לציר ה-$x$ ו-O היא נקודת ראשית הצירים. יוצרים טרפז ישר זווית ABCO ששטחו הוא 170 סמ"ר.

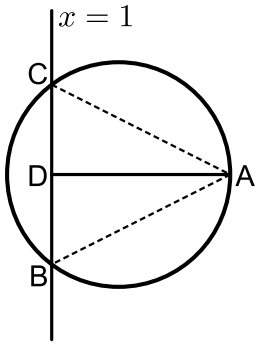



ידוע כי: $C(0,10)$ ו- 10 ס"מ $= AE$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:
   i. מצא את שיעורי הנקודה B.
   ii. מצא את שיעורי הנקודה A.

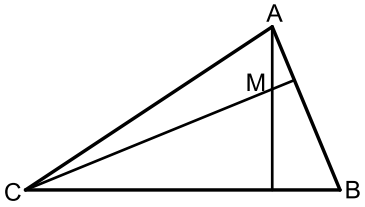
ב. כתוב את משוואת המעגל.

**28)** הנקודה $A(17,4)$ נמצאת על המעגל שמשוואתו: $(x-7)^2+(y-4)^2=R^2$.
הישר $x=1$ חותך את המעגל בשתי נקודות B ו-C כך ש-B נמצאת ברביע הרביעי. מעבירים את הקטע AD המאונך לישר BC וידוע כי הנקודה D היא אמצע BC.



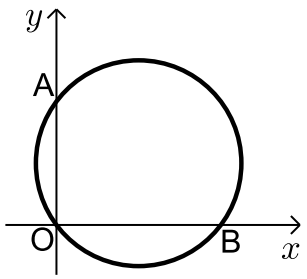

א. מצא את רדיוס המעגל.
ב. מצא את שיעורי הנקודות B ו-C.
ג. ענה על הסעיפים הבאים:
   i. חשב את מרחק הנקודה A מהישר $x=1$:
   ii. חשב את שטח המשולש ABC.

**29)** נתון משולש ABC. משוואות הצלעות AB ו-BC במשולש ABC הן בהתאמה: $2y-x=56$ ו- $8y+x=104$.
מעבירים גבהים לצלעות AB ו-BC אשר נחתכים בנקודה $M(0,-2)$ שבתוך המשולש.




א. מצא את משוואות הגבהים.
ב. מצא את שיעורי הנקודה B.
ג. מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה M ורדיוסו הוא הקטע BM.

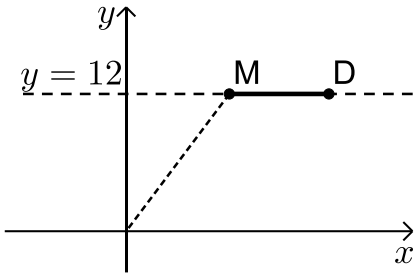
**30)** באיור שלפניך מתואר המעגל: $(x-4)^2+(y-3)^2=25$.
המעגל חותך את הצירים בנקודות A , B ו-O.




א. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.
ב. מצא נקודה C הנמצאת על היקף המעגל ברביע הראשון כך שהמרובע ABCO יהיה מלבן.
ג. חשב את היקף המלבן.

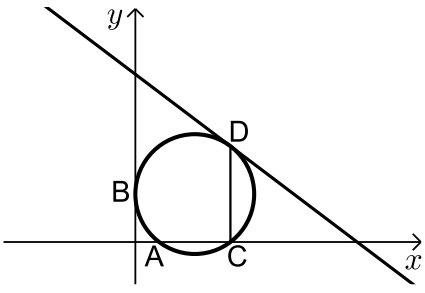
**31)** המעגל: $(x+a)^2+(y-1)^2=a+4$ , $a>0$ חותך את ציר ה-$x$ בנקודה שבה: $x=1$.
א. מצא את $a$.
ב. מצא את נקודות החיתוך של המעגל הנתון עם המעגל $(x-1)^2+(y-2)^2=10$.
ג. כתוב את משוואת הישר העובר דרך נקודות החיתוך של שני המעגלים.
ד. חשב את שטח המשולש שיוצר הישר שמצאת בסעיף הקודם עם הצירים.

**32)** הנקודות M ו-D נמצאות על הישר $y=12$ ידוע כי שיעור ה-$x$ של הנקודה M הוא 9 וכי המרחק של הנקודה M מראשית הצירים גדול ב- 6 מהמרחק בין הנקודות D ו-M (ראה איור).
בונים מעגל שמרכזו נמצא בנקודה M ורדיוסו הוא האורך DM.



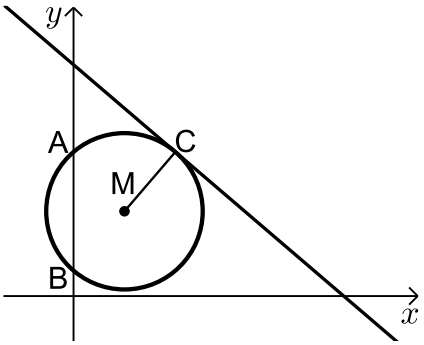

א. ענה על הסעיפים הבאים:
i. מצא את מרחק הנקודה M מראשית הצירים.
ii. מצא את שיעור ה-$x$ של הנקודה D.
ב. כתוב את משוואת המעגל.
ג. האם המעגל הזה חותך את הצירים? הראה חישוב מתאים לטענתך.

**33)** מעגל שמרכזו בנקודה $M(15,12)$ משיק לציר ה-$y$ בנקודה B וחותך את ציר ה-$x$ בשתי נקודות A ו-C כמתואר באיור.



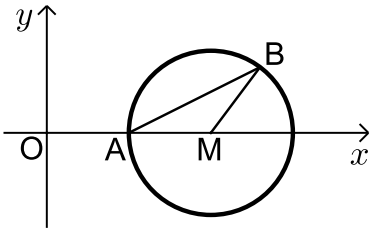

א. כתוב את משוואת המעגל.
מהנקודה C מעלים אנך לציר ה-$x$ שחותך את המעגל בנקודה נוספת D.
דרך הנקודה D עובר משיק למעגל.
ב. מצא את שיעורי הנקודות C ו-D.
ג. מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה D.

**34)** באיור שלפניך נתון מעגל שמרכזו בנקודה M.
המעגל חותך את ציר ה- $y$ בנקודות A ו-B.
מעבירים משיק למעגל: $6x+7y=191$
דרך הנקודה: $C(12,17)$.



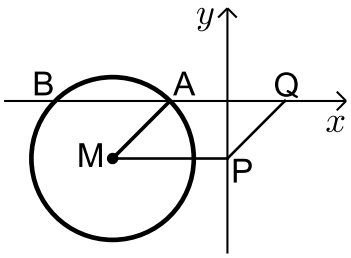

א. כתוב את משוואת הרדיוס MC.
ב. ידוע כי הנקודה M נמצאת על הישר $y=10$.
i. מצא את שיעורי הנקודה M.
ii. מצא את אורך רדיוס המעגל.
iii. כתוב את משוואת המעגל.
ג. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- $y$.
ד. חשב את שטח המשולש AMB.

**35)** באיור שלפניך נתון מעגל שמרכזו בנקודה M הנמצאת על ציר ה- $x$. המעגל חותך את ציר ה- $x$ בנקודה A.
מסמנים את ראשית הצירים ב-O.
ידוע כי A היא אמצע הקטע MO ושיעוריה הם: $A(5,0)$.



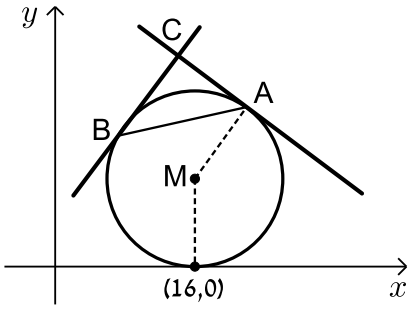

א. מצא את משוואת המעגל.
ב. כתוב את משוואת הישר שעובר דרך הנקודה A ושיפועו הוא 0.5.
ג. מצא את נקודת החיתוך הנוספת של הישר שמצאת עם המעגל.
ד. סמן את הנקודה שמצאת בסעיף הקודם ב-B וחשב את שטח המשולש AMB.

**36)** באיור שלפניך נתון מעגל שמשוואתו היא: $(x+4)^2+(y+2)^2=8$.




מסמנים את נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- $x$ ב-A ו-B (ראה איור).
א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.
מעבירים אנך לציר ה- $y$ מנקודת מרכז המעגל M ומסמנים את חיתוכם ב- P.
ב. מצא נקודה Q כך שהמרובע AMPQ יהיה מקבילית. נמק.
ג. כתוב את משוואת הישר PQ.
ד. הוכח כי הישר שמצאת בסעיף הקודם משיק למעגל בנקודה $(-2,-4)$.

**37)** נתון מעגל שרדיוסו $R$ $(R<16)$ ומשיק לציר ה-$x$ בנקודה שבה: $x=16$.




א. הבע באמצעות R את משוואת המעגל וציין האם הוא חותך את ציר ה-$y$ או לא. נמק.

מהנקודה $A(22,18)$ שעל המעגל מעבירים משיק.

ב. מצא את R וכתוב את משוואת המעגל.

ג. כתוב את משוואת המשיק למעגל בנקודה A.

ד. מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה B שבה $x_B < x_M$ אם ידוע כי הוא המאונך למשיק הקודם.

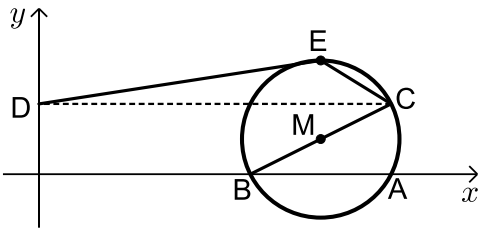
ה. המשיקים נחתכים בנקודה C.

i. מצא את שיעורי הנקודה C.

ii. מצא את שטח המשולש ABC.

**38)** באיור שלפניך נתון מעגל שמשוואתו: $(x+a)^2+(y-1)^2=5$, $a$ פרמטר.

ידוע כי המעגל חותך את ציר ה-$x$ בנקודה $A(10,0)$.




א. מצא את $a$ אם ידוע כי $a>-10$.

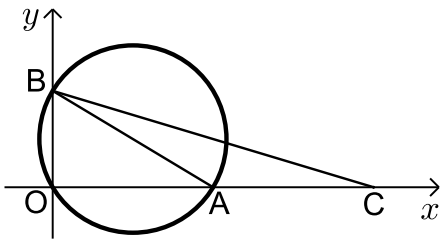
ב. מצא את הנקודה B - נקודת החיתוך השנייה של המעגל עם ציר ה-$x$.

ג. כתוב את משוואת הקוטר העובר דרך הנקודה B ומרכז המעגל M.

ד. מצא את נקודת החיתוך השנייה של הקוטר עם המעגל.

ה. מעבירים אנך מנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם לציר ה-$y$ בנקודה D.
הנקודה E היא הנקודה בעלת שיעור ה-$y$ הגדול ביותר על המעגל.
מחברים את הנקודות E ו-D כך שנוצר המחומש DECBO. חשב את שטחו.

**39)** באיור שלפניך נתון מעגל שמשוואתו: $(x-5)^2+(y-3)^2=R^2$, $R$ רדיוס המעגל.
ידוע כי המעגל עובר בראשית הצירים.




א. מצא את רדיוס המעגל וכתוב את משוואת המעגל.

ב. מצא את הנקודות A ו- B - החיתוך של המעגל עם הצירים (ראה איור).

ג. מסמנים נקודה C על ציר ה-$x$ כך ש-A היא אמצע הקטע CO.

i. מצא את שיעורי הנקודה C.

ii. חשב את שטח המשולש ABC.

## תשובות סופיות:

**22)** א. $(0,0)$ , $(6,0)$ , $(0,-8)$ ב. 27 יח"ש.

**23)** 12.5 יחידות אורך.

**24)** $\sqrt{80}$ יח"ש $= S_{\Delta BOC}$.

**25)** $(x-8)^2+(y-8)^2=32$ , $y=-x+8$.

**26)** א. $(2,8)$ ב. $(x+9)^2+(y-1)^2=170$ ג. $(4,2)$.

**27)** א. i. $B(12,10)$ ii. $A(22,0)$ ב. $(x-22)^2+(y-10)^2=100$.

**28)** א. $R=10$ ב. $B(1,-4)$ , $C(1,12)$ ג. i. $d=16$

ii. $S=128$

**29)** א. $y=8x-2$ , $y=-2x-2$ ב. $(-24,16)$ ג. $x^2+(y+2)^2=900$.

**30)** א. $O(0,0)$ , $A(0,6)$ , $B(8,0)$ ב. $C(8,6)$ ג. $P=$ 28 יח"א.

**31)** א. $a=1$ ב. $(0,-1)$ , $(-2,3)$ ג. $y=-2x-1$

ד. $S=\frac{1}{4}$.

**32)** א. i. $d=15$ ii. $x=18$. ב. $(x-9)^2+(y-12)^2=81$.

ג. המעגל אינו חותך את ציר ה-$x$ -כאשר מציבים ב- $y$ אפס מתקבלת משוואה ריבועית ללא פתרון. המעגל חותך את ציר ה- $x$ בנקודה אחת- $(12,0)$.

**33)** א. $(x-15)^2+(y-12)^2=225$ ב. $C(24,0)$ , $D(24,24)$. ג. $y=-\frac{3}{4}x+42$.

**34)** א. $y=\frac{7}{6}x+3$ ב. i. $M(6,10)$ ii. $\sqrt{85}$

iii. $(x-6)^2+(y-10)^2=85$ ג. $A(0,17)$ , $B(0,3)$ ד. 42 יח"ש.

**35)** א. $(x-10)^2+y^2=25$ ב. $y=0.5x-2.5$ ג. $B(13,4)$

ד. 10 יח"ש $= S_{AMB}$.

**36)** א. $A(-2,0)$ , $B(-6,0)$ ב. $Q(2,0)$ ג. $y=x-2$ .

**37)** א. $(x-16)^2+(y-R)^2=R^2$ , המעגל אינו חותך את ציר ה- $y$ .

ב. $R=10$ , $(x-16)^2+(y-10)^2=100$ ג. $y=-\frac{3}{4}x+34\frac{1}{2}$

ד. $y=\frac{4}{3}x+5\frac{1}{3}$ ה. i. $C(14,24)$ ii. 50 יח"ש.

**38)** א. $a=-8$ ב. $B(6,0)$ ג. $y=0.5x-3$

ד. $(10,2)$. ה. $11+5\sqrt{5}$ יח"ש $=S_{DECBO}$ .

**39)** א. $R=\sqrt{34}$ יחידות אורך , $(x-5)^2+(y-3)^2=34$ . ב. $A(10,0)$ , $B(0,6)$

ג. i. $C(20,0)$. ii. 30 יח"ש $=S_{ABC}$ .

# כתיבת משוואת מעגל עם השלמה לריבוע:

## שאלות:

**1)** מצא את מרכזם ורדיוסם של המעגלים הבאים:

א. $x^2+10x+y^2+6y-2=0$ ב. $x^2-2x+y^2+20y+1=0$

ג. $x^2-8x+y^2-14y=0$ ד. $x^2+y^2+2y=0$

ה. $x^2+x+y^2-3\frac{3}{4}=0$ ו. $x^2-2mx+y^2+6my+m^2=0$

**2)** משוואתו של מעגל היא $x^2+y^2-6mx-2(m+2)y+4m+4=0$.
מצא את ערכו של $m$ אם ידוע שמרכז המעגל נמצא על הישר $y=2x+7$.

**3)** משוואתו של מעגל היא $x^2+y^2-8x+12y-48=0$.
מצא את אורכו של המיתר שחותך הישר $y=2x-4$ מהמעגל בלי למצוא את נקודות הקצה של המיתר.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $M(-5,-3)\ ,\ R=6$ ב. $M(1,-10)\ ,\ R=10$

ג. $M(4,7)\ ,\ R=\sqrt{65}$ ד. $M(0,-1)\ ,\ R=1$

ה. $M\left(-\frac{1}{2},0\right)\ ,\ R=2$ ו. $M(m,-3m)\ ,\ R=3m$.

**2)** $m=-1$.

**3)** $2\sqrt{80}$.

# משוואות המשיקים למעגל:

## שאלות:

**4)** מצא משוואת מעגל העובר בנקודה $(1,8)$ המשיק לשני הצירים.

**5)** מצא את אורך המשיק למעגל שמשוואתו $x^2+y^2-4x+14y+37=0$ היוצא מהנקודה $A(10,-3)$.

**6)** מצא את משוואת המשיק ואת משוואת הנורמל למעגל שמשוואתו $x^2+y^2-4x+6y+3=0$ בנקודה $A(5,-4)$.

**7)** מצא את נקודת החיתוך של המשיקים למעגל שמשוואתו $x^2+(y-1)^2=5$ בנקודות שבהן $x=-1$.

**8)** נתון מעגל שמרכזו בנקודה $(-2,6)$ והוא עובר בראשית הצירים. המעגל חותך את הצירים בשתי נקודות נוספות, A ו-B.

א. הוכח כי המשיקים למעגל בנקודות A ו-B מקבילים זה לזה.

ב. הוכח את סעיף א' בלי למצוא את משוואות המשיקים או את שיפועיהם.

**9)** נתון המעגל $(x-1)^2+(y-3)^2=20$ והישר $y=2x+m$.

לאלו ערכים של הפרמטר $m$ הישר משיק למעגל ולאלו ערכים של $m$ הישר חותך את המעגל?

## תשובות סופיות:

**4)** $(x-5)^2+(y-5)^2=25$ או $(x-13)^2+(y-13)^2=169$.

**5)** 8.

**6)** משיק: $y=3x-19$ , נורמל: $x+3y+7=0$.

**7)** $(-5,1)$.

**8)** שאלת הוכחה.

**9)** משיק: $m=-9,11$ , חותך: $-9<m<11$.

# מיתר המחבר שתי נקודות השקה:

## סיכום כללי:

משוואת המיתר, המחבר את שתי נקודות ההשקה של שני המשיקים למעגל $(x-a)^2=(y-b)^2=R^2$ היוצאים מהנקודה $A(x_1,y_1)$ שמחוץ למעגל היא: $(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=R^2$.

## שאלות:

**10)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את משוואת המיתר במעגל שמשוואתו $x^2+y^2+2x-19=0$, המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים מהנקודה $A(-3,8)$

ב. מצא את משוואת המיתר במעגל שמשוואתו $x^2+(y-1)^2=5$, המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים מהנקודה $A(-5,1)$.

**11)** נתון מעגל שמשוואתו $x^2+y^2+16x+48=0$ ונקודה P, שנמצאת על החלק החיובי של ציר ה- $y$. הישר המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים למעגל מנקודה P חותך את ציר ה- $y$ בנקודה Q. נתון: $PQ=14$.
מצא את שיעורי הנקודה Q.

## תשובות סופיות:

**10)** א. $x-4y+11=0$ ב. $x=-1$.

**11)** $Q(0,-8)$ או $Q(0,-6)$.

# שאלות מסכמות שונות:

## שאלות:

**12)** נתון מעגל שמשוואתו $x^2+y^2+16x-12y+64=0$. המעגל משיק מבחוץ למעגל קנוני. מצא את משוואת המעגל הקנוני, את נקודת ההשקה בין המעגלים ואת משוואת המשיק המשותף העובר בנקודה זו.

**13)** המעגלים $x^2+y^2+22x-6y=m$ ו- $x^2+y^2=26$ נחתכים בזווית ישרה.
מצא את ערכו של $m$.

**14)** בטרפז שווה שוקיים ABCD נתון כי הבסיס הגדול, DC, מונח על הישר: $3x-y-9=0$ והשוק AD מונחת על הישר $x+y-3=0$.
שיעורי הקודקוד B הם $(3,-8)$.
מצא את משוואת המעגל החוסם את הטרפז ABCD.

**15)** מצא את משוואתו של מעגל החוסם ריבוע, שאחד מקדקודיו נמצא בראשית הצירים ומשוואת אחד מאלכסוניו היא $3x-y+10=0$.

## תשובות סופיות:

**12)** $x^2+y^2=16$ , $A(-3.2,2.4)$ , $4x-3y+20=0$.

**13)** $m=-26$.

**14)** $(x-1)^2+(y+4)^2=20$.

**15)** $(x+3)^2+(y-1)^2=10$.

# מתמטיקה לתלמידי גאוגרפיה ופיתוח סביבתי 2

## פרק 3 - גיאומטריה אנליטית (חזרה כללית) - האליפסה והפרבולה

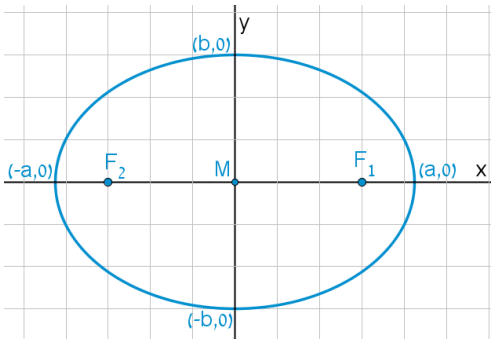
תוכן העניינים

1. האליפסה ..... 45
2. הפרבולה ..... 49

# האליפסה:

## סיכום כללי:

**הגדרה:**




המקום הגאומטרי של כל הנקודות, שסכום מרחקיהן משתי נקודות קבועות במישור קבוע, נקרא אליפסה. הנקודות הקבועות נקראות מוקדי האליפסה.

**מושגים באליפסה:**

- הציר הגדול: הקטע שהאליפסה חותכת מציר ה- $x$.
- הציר הקטן: הקטע שהאליפסה חותכת מציר ה- $y$.
- מרכז האליפסה: מפגש צירי האליפסה (ראה איור).
  באליפסה קנונית מרכז האליפסה נמצא בראשית הצירים.
- מוקדי האליפסה: שתי נקודות קבועות שבעבורך סכום המרחקים מכל נקודה על האליפסה הוא גודל קבוע השווה ל- $2a$. המוקדים יסומנו ב- $F_1$ ו- $F_2$ ושיעוריהם הם: $F_1(c,0)$ , $F_2(-c,0)$.
- רדיוסי ווקטור: המרחקים של כל נקודה על האליפסה משני המוקדים.
  אורך הרדיוס מנקודה $(x,y)$ שעל האליפסה למוקד הימני הוא: $r_1 = a - \frac{cx}{a}$.
  אורך הרדיוס מנקודה $(x,y)$ שעל האליפסה למוקד השמאלי הוא: $r_2 = a + \frac{cx}{a}$.
- מיתר: קטע המחבר שתי נקודות שעל האליפסה.
- קוטר: מיתר העובר דרך מרכז האליפסה.

**משוואות וקשרים:**

- משוואת אליפסה קנונית היא: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ או: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.
- הקשר בין הפרמטרים של האליפסה הוא: $a^2 - b^2 = c^2$.
- מכפלת שיפועי מיתר באליפסה והקוטר החוצה אותו היא קבועה ושווה ל- $-\frac{b^2}{a^2}$.

## שאלות:

**1)** מצא את אורך צירי אליפסה שמשוואתה $x^2+4y^2=36$.

**2)** מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הגדול הוא 18 ואורך צירה הקטן הוא $2\sqrt{3}$.

**3)** מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הגדול הוא 12 והמרחק בין מוקדיה $8\sqrt{2}$.

**4)** מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הקטן הוא 8 והיא עוברת בנקודה $\left(-3\sqrt{3},2\right)$.

**5)** מצא את משוואתה של אליפסה שחסומה במעגל שמשוואתו $x^2+y^2=16$ ומוקד אחד שלה הוא בנקודה $\left(\sqrt{10},0\right)$.

**6)** מצא את משוואתה של אליפסה שחותכת את ציר ה- $y$ בנקודה $\left(0,-2\sqrt{5}\right)$ והמרחק בין המוקד הימני לקדקוד הימני בה הוא 2.

**7)** מצא את משוואתה של אליפסה שעוברת בנקודות $\left(-2,\sqrt{6}\right)$ ו- $\left(\sqrt{14},1\right)$.

**8)** מצא על האליפסה $3x^2+4y^2=144$ את הנקודות שהפרש מרחקיהן מהמוקדים הוא 4.

**9)** מצא את משוואתה של אליפסה שעוברת בנקודה $(-3,1)$ ומכפלת המרחקים מנקודה זו למוקדים הוא 6.

**10)** מצא על האליפסה $x^2+3y^2=12$ את הנקודות שמהן רואים את הקטע שבין שני המוקדים בזווית ישרה.

**11)** מצא את משוואתו של קוטר באליפסה $x^2+4y^2=50$ ששיפועו חיובי ואורכו $\sqrt{56}$.

**12)** נתונים האליפסה $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$ והישר $y=2x+k$. מצא לאלו ערכים של הפרמטר $k$ הישר משיק לאליפסה ולאלו ערכים של הפרמטר $k$ הישר חותך את האליפסה.

**13)** מצא את שטחו של ריבוע החסום באליפסה $3x^2+5y^2=120$ כך שצלעותיו מקבילות לצירים.

**14)** מצא את שטחו של ריבוע החסום באליפסה $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ כך שצלעותיו מקבילות לצירים.

**15)** באליפסה $5x^2+9y^2=90$ חסום מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים. מצא את שטח המלבן אם שתיים מצלעותיו עוברות במוקדי האליפסה.

**16)** באליפסה $x^2+5y^2=16$ חסום משולש שווה צלעות כך שקדקוד אחד שלו הוא הקדקוד הימני של האליפסה. מצא את שיעורי קדקודיו האחרים.

**17)** באליפסה חסום משולש שווה צלעות כך שקדקוד אחד שלו הוא הקדקוד הימני של האליפסה וקדקודיו האחרים הם נקודות החיתוך של האליפסה עם ציר ה- $y$.
מצא את משוואת האליפסה אם אחד ממוקדיה נמצא בנקודה $\left(4\sqrt{2},0\right)$.

**18)** מצא באליפסה $2x^2+3y^2=12$ משוואת מיתר שנקודת האמצע שלו היא $\left(1.5,1\right)$.

**19)** ישר שמשוואתו $x-y-3=0$ חותך מאליפסה מיתר שאמצעו בנקודה $\left(2,-1\right)$.
מצא את משוואת האליפסה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $\left(2\sqrt{2},-2\right)$.

**20)** נתונה המשוואה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2-25}=1$ , $(0<a\neq 5)$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. לאיזה ערך של $a$ המשוואה מייצגת מעגל?

ii. לאלו ערכים של $a$ המשוואה מייצגת אליפסה?

ב. הוכח כי בעבור $a=4$ אין אף נקודה על האליפסה שממנה רואים את הקטע שבין המוקדים בזווית ישרה.

## תשובות סופיות:

**1)** $2a=12$ , $2b=6$

**2)** $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{3}=1$

**3)** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$

**4)** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$

**5)** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{6}=1$

**6)** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$

**7)** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$

**8)** $\left(4,\sqrt{24}\right)$ , $\left(4,-\sqrt{24}\right)$ , $\left(-4,\sqrt{24}\right)$ , $\left(-4,-\sqrt{24}\right)$

**9)** $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$

**10)** $\left(\sqrt{6},\sqrt{2}\right)$ , $\left(-\sqrt{6},\sqrt{2}\right)$ , $\left(\sqrt{6},-\sqrt{2}\right)$ , $\left(-\sqrt{6},-\sqrt{2}\right)$

**11)** $y=\sqrt{6}x$

**12)** משיק: $k=\pm 12$ , חותך: $-12<k<12$.

**13)** $S=$ 60 יח"ש

**14)** $S=\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$

**15)** $S=$ יח"ש $26\frac{2}{3}$

**16)** $\left(1,\sqrt{3}\right)$ , $\left(1,-\sqrt{3}\right)$

**17)** $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{16}=1$

**18)** $y=-x+2.5$

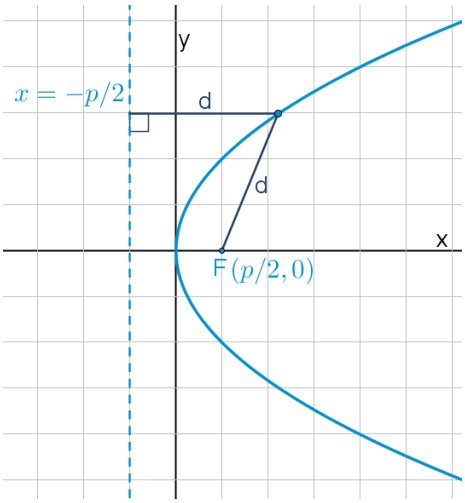
**19)** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$

**20)** א. i. $a=\sqrt{12.5}$ ii. $a\neq\sqrt{12.5}$

# הפרבולה:

## סיכום כללי:

**הגדרה:**




המקום הגאומטרי של כל הנקודות, שמרחקן מנקודה קבועה שווה למרחקן מישר קבוע נקרא פרבולה.
הנקודה הקבועה נקראת מוקד הפרבולה והישר הקבוע נקרא מדריך הפרבולה.

**מושגים בפרבולה:**

- מוקד: נקודה קבועה שמרחק כל נקודה על הפרבולה ממנה שווה למרחק הנקודה מהמדריך.
- מדריך: ישר קבוע שמרחק כל נקודה על הפרבולה אליו שווה למרחק הנקודה מהמוקד.
- קדקוד הפרבולה: ראשית הצירים.
- רדיוס: מרחק בין המוקד לנקודה שעל הפרבולה: $r = x + \frac{p}{2}$.
- מיתר: קטע המחבר בין שתי נקודות על הפרבולה.
- קוטר (לא בחומר): ישר המקביל לציר הסימטריה של הפרבולה (ציר ה- $x$ אצלנו).

**משוואת הפרבולה:**

משוואת הפרבולה הקנונית היא: $y^2 = 2px$ כאשר $p$ הוא פרמטר הפרבולה.

**משיק לפרבולה:**

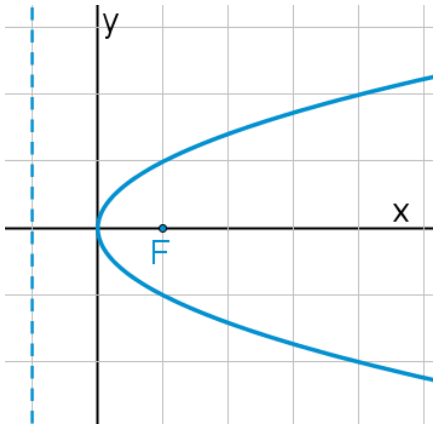
- משוואת המשיק לפרבולה $y^2=2px$ בנקודה $A(x_0,y_0)$ שעליה היא: $yy_0=p(x+x_0)$.
- שיפוע המשיק לפרבולה $y^2=2px$ בנקודה $A(x_0,y_0)$ שעליה הוא: $m=\frac{p}{y_0}$.

**מיתר המחבר שתי נקודות השקה:**

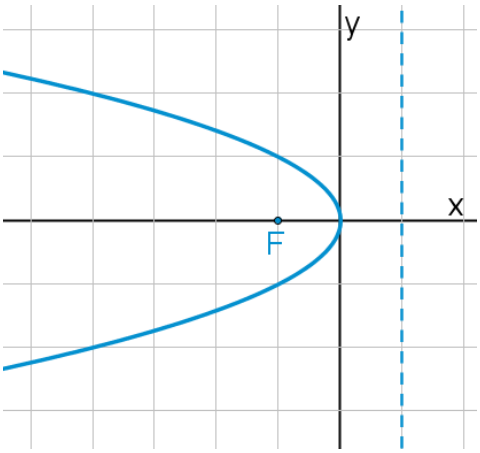
משוואת המיתר, המחבר את שתי נקודות ההשקה של שני המשיקים לפרבולה $y^2=2px$ היוצאים מהנקודה $A(x_0,y_0)$ שמחוץ לפרבולה היא: $yy_0=p(x+x_0)$.

**תיאורים גרפיים:**

פרבולה שמשוואתה $y^2=2px$:




פרבולה שמשוואתה $y^2=-2px$:




**שאלות:**

**1)** נתונה הפרבולה $y^2=18x$. מצא מהו הפרמטר, המוקד והמדריך שלה.

**2)** מצא את משוואתה של פרבולה שהישר $x=-3$ הוא המדריך שלה.

**3)** מצא את משוואתה של פרבולה שהמרחק בין המוקד שלה למדריך שלה הוא 5.

**4)** מצא את משוואתה של פרבולה שעוברת בנקודה $(9,-6)$.

**5)** מצא את משוואתה של פרבולה שמוקדה מתלכד עם המוקד הימני של האליפסה $x^2+2y^2=18$.

**6)** מצא נקודות על הפרבולה $y^2=6x$ שמרחקן מהמוקד הוא 4.

**7)** מצא נקודות על הפרבולה $y^2=8x$ שמרחקן מהמוקד שווה למרחקן מהקדקוד.

**8)** מצא נקודות על הפרבולה $y^2=2px$ שמרחקן מהמוקד שווה למרחקן מהקדקוד.

**9)** מצא את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו נמצא בראשית הצירים ושני קדקודיו האחרים מונחים על הפרבולה $y^2=10x$.

**10)** הבע באמצעות $p$ את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו נמצא בראשית הצירים ושני קדקודיו האחרים מונחים על הפרבולה $y^2=2px$.

**11)** נתונה הפרבולה $y^2=2px$. הבע באמצעות $p$ את שטחו של משולש שווה צלעות שקדקוד אחד שלו מונח על ציר ה-$x$, וקודקודיו האחרים מונחים על מדריך הפרבולה אם ידוע שמפגש תיכוני המשולש הוא מוקד הפרבולה.

**12)** את נקודה A שעל הפרבולה $y^2=20x$ חיברו עם המוקד F וגם העבירו ממנה אנך למדריך. היקף הטרפז, שבסיסיו הם האנך והקטע על ציר ה-$x$ שבין מוקד הפרבולה למדריך שלה, שוק אחת שלו היא AF והשוק השנייה שלו מונחת על המדריך, הוא 27.5. חשב את שטח הטרפז.

**13)** קצות מיתר בפרבולה $y^2=4x$ הם A ו-B. מצא את שיעורי הנקודה B אם ידוע שהמיתר עובר במוקד הפרבולה ושערך ה-$x$ של נקודה A הוא 4.

**14)** מצא משוואת מיתר בפרבולה $y^2=16x$, שעובר בראשית הצירים ומרחקו מהמוקד הוא $\frac{8}{\sqrt{5}}$.

**15)** מצא משוואת מיתר בפרבולה $y^2=2x$ , שאמצעו בנקודה $\left(1\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$.

**16)** נתונה הפרבולה $y^2=4x$ והישר $y=2x+k$ , לאיזה ערך של $k$ הישר משיק לפרבולה?

**17)** נתונה הפרבולה $y^2=6x$ .

א. מצא את משוואות המשיקים לפרבולה בנקודות שבהן $x=1.5$ .

ב. הוכח שנקודת החיתוך של הנורמלים בנקודות אלה נמצאת על ציר ה-$x$ .

**18)** הנקודות A ו-B נמצאות על הפרבולה $y^2=12x$ . נתון כי $y_A=4$ .
מצא את שיעורי נקודה B אם ידוע שהמשיקים לפרבולה בנקודות הנתונות יוצרים זווית ישרה.

**19)** נקודה A נמצאת על הפרבולה $y^2=28x$ בربיע הרביעי.
אורך הנורמל לפרבולה מנקודה A עד לציר ה-$x$ הוא $7\sqrt{5}$ .
מצא את משוואת הנורמל.

**20)** מרחק המוקד של הפרבולה $y^2=8x$ ממשיק לה ששיפועו חיובי הוא $\sqrt{8}$ .
מצא את משוואת המשיק.

**21)** נתונה הפרבולה $y^2=2px$ . הבע באמצעות $p$ את שיעורי הנקודה שעל הפרבולה בربיע הראשון, שמרחק המשיק בה ממוקד הפרבולה הוא $p$ .

**22)** נתונות שתי פרבולות: I. $y^2=6x$ , II. $y^2=12x$
ישר שעובר בראשית הצירים חותך את הפרבולות בנקודות A ו-B.
הראה כי המשיקים בנקודות A ו-B מקבילים.

**23)** נתונה הפרבולה $y^2=14x$ והנקודה $(-1,-3)$ , ממנה יוצאים שני משיקים לפרבולה. מצא את משוואת המיתר המחבר בין נקודות ההשקה.

**24)** נתונה הפרבולה $y^2=18x$ ונקודה ברביע השלישי, ששיעור ה-$x$ שלה קטן ב-1 משיעור ה-$y$ שלה. מהנקודה יוצאים שני משיקים לפרבולה. המיתר המחבר בין נקודות ההשקה יוצר עם הצירים משולש ששטחו 18.
מצא את משוואת המיתר.

**25)** מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו במוקד הפרבולה $y^2=24x$ והוא משיק למדריך שלה.

**26)** מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו בנקודה $(8,0)$ והוא משיק לפרבולה $y^2=10x$ בשתי נקודות.

**27)** נתונה הפרבולה $y^2=2px$ ומעגל שמרכזו על ציר ה-$x$ והוא משיק לפרבולה מבפנים בשתי נקודות. הישר המחבר בין נקודות ההשקה יוצר עם המשיקים בנקודות אלה משולש שווה צלעות. הבע באמצעות $p$ את משוואת המעגל.

**28)** הנקודה $A(2,3)$ נמצאת על פרבולה. מצא את משוואתו של מעגל שמשיק לפרבולה בנקודה A ומשיק לציר ה-$y$.

**29)** נתונה הפרבולה $y^2=2px$ שבה $p>4$. הישר $x=2$ חותך את הפרבולה בנקודות A ו-B. הבע באמצעות $p$ את שיעורי קדקוד C של משולש $\Delta ABC$ שמוקד הפרבולה הוא מפגש האנכים האמצעיים בו, אם ידוע שקדקוד C נמצא על ציר ה-$x$.

**30)** אליפסה שמשוואתה $x^2+4y^2=16$ חותכת את הפרבולה $y^2=2px$ בשתי נקודות. המרובע שקדקודיו הם נקודות החיתוך, מרכז האליפסה וקדקודה הימני של האליפסה הוא מעוין. מצא את משוואת הפרבולה.

## תשובות סופיות:

**1)** $p=9$ , $\mathrm{F}\left(4\frac{1}{2},0\right)$

**2)** $y^2=12x$

**3)** $y^2=10x$

**4)** $y^2=4x$

**5)** $y^2=12x$

**6)** $\left(2\frac{1}{2},\sqrt{15}\right)$ , $\left(2\frac{1}{2},-\sqrt{15}\right)$

**7)** $\left(1,\sqrt{8}\right)$ , $\left(1,-\sqrt{8}\right)$

**8)** $\left(\frac{p}{4},\frac{p}{\sqrt{2}}\right)$ , $\left(\frac{p}{4},-\frac{p}{\sqrt{2}}\right)$

**9)** $S_{\mathrm{OAB}}=300\sqrt{3}$ יח"ש

**10)** $S_{\mathrm{ABO}}=12\sqrt{3}p^2$ יח"ש

**11)** $S_{\mathrm{ABC}}=3\sqrt{3}p^2$ יח"ש

**12)** $S_{\mathrm{ABCF}}=40\frac{5}{8}$ יח"ש

**13)** $\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},-1\right)$ או $\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},1\right)$

**14)** $y=2x$ או $y=-2x$

**15)** $y=2x-2$

**16)** $k=\frac{1}{2}$

**17)** א. $y=x+1\frac{1}{2}$ , $y=-x-1\frac{1}{2}$

**18)** $\mathrm{B}\left(6\frac{3}{4},-9\right)$

**19)** $y=\frac{1}{2}x-7\frac{7}{8}$

**20)** $y=x+2$

**21)** $\mathrm{A}\left(\frac{3}{2}p,\sqrt{3}p\right)$

**22)** הוכחה.

**23)** $7x+3y-7=0$

**24)** $y=-9x+18$

**25)** $(x-6)^2+y^2=144$

**26)** $(x-8)^2+y^2=55$

**27)** $\left(x-2\frac{1}{2}p\right)^2+y^2=4p^2$

**28)** $\left(x-1\frac{1}{4}\right)^2+(y-4)^2=\frac{25}{16}$

**29)** $\mathrm{C}(p+2,0)$

**30)** $y^2=1\frac{1}{2}x$

# מתמטיקה לתלמידי גאוגרפיה ופיתוח סביבתי 2

## פרק 4 - גיאומטריה אנליטית (חזרה כללית) - ההיפרבולה

תוכן העניינים

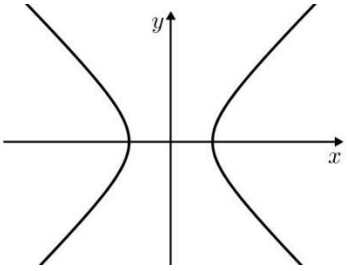
1. הגדרות יסודיות ..... 55
2. הקשר בין הפרמטרים של היפרבולה ..... 56
3. רדיוסים של היפרבולה ..... 57
4. מיתר וקוטר החוצה אותו בהיפרבולה ..... 58
5. אסימפטוטות של היפרבולה ..... 59

# הגדרות יסודיות:

## סיכום כללי:

**הגדרה:**

המקום הגיאומטרי של כל הנקודות, שהפרש מרחקיהן משתי נקודות קבועות במישור קבוע, נקרא היפרבולה. הנקודות הקבועות נקראות מוקדי ההיפרבולה.




- משוואת היפרבולה קנונית: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.
- היפרבולה שבה $a=b$, נקראת היפרבולה שוות שוקיים.
- הקשר בין הפרמטרים: $c^2=a^2+b^2$.

## שאלות:

**1)** מצא את אורך צירי ההיפרבולה שמשוואתה $x^2-4y^2=36$.

**2)** מצא את משוואתה של ההיפרבולה שאורך צירה הממשי הוא 18 ואורך צירה המדומה הוא $2\sqrt{3}$.

**3)** מצא את משוואתה של היפרבולה שאורך צירה הממשי הוא 12 והמרחק בין מוקדיה הוא 20.

## תשובות סופיות:

**1)** אורך הציר הממשי: 12, אורך הציר המדומה: 6.

**2)** $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{3}=1$

**3)** $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{80}=1$

# הקשר בין הפרמטרים של היפרבולה:

## שאלות:

**4)** מצא את משוואתה של היפרבולה שאורך צירה המדומה הוא $8\sqrt{5}$ והיא עוברת בנקודה $\left(-10,3\sqrt{5}\right)$.

**5)** מצא משוואת היפרבולה שוות שוקיים שהמרחק בין מוקדיה הוא $\sqrt{200}$.

## תשובות סופיות:

**4)** $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$

**5)** $x^2-y^2=25$

# רדיוסים של היפרבולה:

## סיכום כללי:

| רדיוסים בהיפרבולה | רדיוסים באליפסה |
|---|---|
| $r_1=\left\|\frac{cx}{a}-a\right\|$ | $r_1=a-\frac{cx}{a}$ |
| $r_2=\left\|\frac{cx}{a}+a\right\|$ | $r_2=a+\frac{cx}{a}$ |

## שאלות:

**6)** נתונה היפרבולה שמשוואתה: $6x^2-y^2=18$.
מצא על ההיפרבולה את הנקודות שמכפלת מרחקיהן מהמוקדים הוא 25.

**7)** נתונה היפרבולה שמשוואתה: $7x^2-9y^2=63$.
מצא על ההיפרבולה את הנקודות שסכום ריבועי מרחקיהן מהמוקדים הוא $74\frac{8}{9}$.

**8)** נתונה היפרבולה שמשוואתה $4x^2-y^2=20$. מצא נקודה על ההיפרבולה ברביע הרביעי שממנה רואים את הקטע שבין המוקדים בזווית ישרה.

**9)** נתונה היפרבולה שמשוואתה $5x^2-4y^2=80$.
מנקודה A שעל ההיפרבולה ברביע הראשון העבירו ישר מקביל לציר ה-$x$, החותך את הענף השמאלי של ההיפרבולה בנקודה B. את נקודה A חיברו עם המוקד הימני $F_1$ של ההיפרבולה ואת הנקודה B חיברו עם המוקד השמאלי של ההיפרבולה $F_2$. נתון כי היקף הטרפז $F_1BAF_2$ הוא 29 יחידות אורך.
מצא את שיעורי הנקודה A.

## תשובות סופיות:

**6)** $\left(\pm2,\pm\sqrt{6}\right)$ **7)** $\left(\pm4,\pm2\frac{1}{3}\right)$

**8)** $(3,-4)$ **9)** $\left(5,\frac{\sqrt[3]{5}}{2}\right)$

# מיתר וקוטר החוצה אותו בהיפרבולה:

## סיכום כללי:

מכפלת שיפועי מיתר וקוטר החוצה אותו בהיפרבולה, היא: $\frac{a^2}{b^2}$.

## שאלות:

**10)** נתונה היפרבולה שמשוואתה $4x^2-3y^2=24$.

מצא את משוואתו של מיתר בהיפרבולה, שהנקודה $(3,4)$ היא אמצעו.

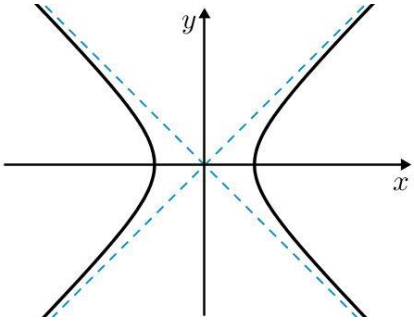
## תשובות סופיות:

**10)** $y=x+1$

# אסימפטוטות של היפרבולה:

## סיכום כללי:

לכל היפרבולה יש שתי אסימפטוטות משופעות, שענפי ההיפרבולה שואפים אליהן.




- משוואות האסימפטוטות הן: $y=\frac{b}{a}x$ , $y=-\frac{b}{a}x$.

## שאלות:

**11)** מצא את משוואת האסימפטוטות של היפרבולה שמשוואתה $4x^2-y^2=48$.

**12)** הישר $y=-\frac{3}{4}x$ הוא אסימפטוטה של היפרבולה, שהמרחק בין מוקדיה הוא 20.
מצא את משוואת ההיפרבולה.

**13)** נתונה היפרבולה שמשוואתה $9x^2-4y^2=k$ ואורך צירה המדומה הוא 6.
מצא נקודה על האסימפטוטה היורדת של ההיפרבולה ברביע הרביעי שממנה רואים את הקטע שבין המוקדים בזווית ישרה.

**14)** ישר שעובר בנקודה $(-6,8)$ הוא אסימפטוטה של היפרבולה שעוברת בנקודה $\left(9,-8\sqrt{2}\right)$.

א. מצא את משוואת ההיפרבולה.

ב. מצא את מרחק אחד ממוקדי ההיפרבולה מאחת האסימפטוטות שלה.

**15)** מוקדיה של היפרבולה שעוברת בנקודה $(4,-1)$ מתלכדים עם מוקדיה של אליפסה שמשוואתה $16x^2+25y^2=400$. מצא נקודה על הענף השמאלי של ההיפרבולה, שמרחקה מהאסיפמטוטה העולה של ההיפרבולה הוא $1\frac{1}{3}$.

## תשובות סופיות:

**11)** $y=2x,\ y=-2x$

**12)** $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$

**13)** $(2,-3)$

**14)** א. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ ב. $d=4$

**15)** $\left(-3,\frac{1}{\sqrt{8}}\right)$

# מתמטיקה לתלמידי גאוגרפיה ופיתוח סביבתי 2

## פרק 5 - אלגברה - סדרות

### תוכן העניינים


1. הקדמה כללית ..... (ללא ספר)
2. סדרה חשבונית ..... 61
3. סדרה הנדסית ..... 68
4. סדרות מעורבות ..... 73
5. סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת ..... 75
6. סדרת נסיגה ..... 81

# סדרה חשבונית:

## סיכום כללי:

- **נוסחת האיבר הכללי:**

נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית המתחילה באיבר $a_1$ והפרשה הוא $d$

נתונה ע"י: $a_n = a_1 + d(n-1)$, כאשר: $n$ הוא מיקום האיבר שערכו $a_n$ בסדרה.

- **כלל נסיגה של סדרה חשבונית:**

כלל נסיגה של סדרה חשבונית $a_n$ שהפרשה הוא $d$ ואיברה הראשון הוא $a_1$

נתון ע"י: $a_{n+1} - a_n = d$.

- **נוסחת הסכום של סדרה חשבונית:**

סכום $n$ האיברים הראשונים של סדרה חשבונית $a_n$ שהפרשה הוא $d$ ואיברה הראשון הוא $a_1$ נתון ע"י: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$.

בהצבת נוסחת האיבר הכללי מקבלים: $S_n = \frac{n(2a_1 + d(n-1))}{2}$.

## שאלות:

**1)** נתונה הסדרה החשבונית: $17, 11, 5, -1, -7...$.
מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 43 איברים.

**2)** בסדרה חשבונית האיבר השישי הוא 15 והאיבר העשירי הוא 31.
מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהו הפרש הסדרה.

**3)** מצא כמה איברים יש בסדרה החשבונית: $2, 4.5, 7, 9.5, 12, 14.5, ..., 49.5$.

**4)** בסדרה חשבונית סכום האיברים השני, החמישי והשמיני הוא 87 וההפרש בין האיבר השנים-עשר לאיבר השישי הוא 24.
מצא כמה איברים בסדרה אם ידוע שהאיבר האחרון בה הוא 201.

**5)** תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 3 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 46 קפיצות?

**6)** כמה מספרים תלת ספרתיים שמתחלקים ב-6 יש בין 201 ל-550?

**7)** כמה איברים חיוביים ישנם בסדרה החשבונית: $82,85,88,91,...$.

**8)** מצא את ערכו של $x$ אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית: $x-3,3x-4,x^2-1$.

**9)** נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1}=a_n+3 \\ a_1=5 \end{cases}$.
הוכח שהסדרה חשבונית ומצא מהו האיבר התשעה-עשר שלה.

**10)** בסדרה חשבונית $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ ידוע כי סכום ארבעת האיברים הראשונים וסכום האיברים ה-6 עד ה-9 הם מספרים נגדיים.

א. הוכח: $a_5=0$.

ב. נתון: $a_3-a_{11}=24$. מצא את $a_1$ ואת $d$.

ג. מגדירים סדרה חשבונית חדשה $b_n$ המקיימת: $b_n=2a_n-3$.
מצא את ערך האיבר השלילי הראשון בסדרה ואת מיקומו הסידורי.

**11)** מצא את סכום ארבעה-עשר האיברים הראשונים בסדרה החשבונית: $-3,2,7,12,...$.

**12)** נתונה הסדרה החשבונית: $5,-1,-7,-13,\ldots$.
כמה איברים יש לחבר בסדרה (החל מהראשון) כדי להגיע לסכום של 987?

**13)** תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגה של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 11 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 2 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 416 קפיצות?

**14)** נתונה הסדרה החשבונית: $-63,-67,-71,\ldots$.
כמה איברים לכל הפחות יש לחבר בסדרה כדי שהסכום המתקבל יהיה חיובי?

**15)** נתונה הסדרה החשבונית: $31,22,13,4,\ldots$.
בסדרה יש 36 איברים. חשב את סכום ארבעה-עשר האיברים האחרונים בסדרה.

**16)** נתונה הסדרה החשבונית: $599,\ldots,19,14,9,4$.
מחקו כל איבר שלישי בסדרה. מצא את סכום האיברים שנותרו.

**17)** סכום $n$ האיברים האחרונים בסדרה חשבונית בת $3n$ איברים גדול ב- 1024 מסכום $n$ האיברים הראשונים שבה.

א. בטא את $n$ באמצעות הפרש הסדרה, $d$.

ב. נתון כי הפרש הסדרה הוא 8. כמה איברים בסדרה?

**18)** נתונה סדרה שבה $S_n = 2n^2 + 4n$.

א. מצא את ערכם של שלושת האיברים הראשונים בסדרה.

ב. הוכח כי הסדרה חשבונית ומצא את הפרשה.

**19)** בסדרה חשבונית ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות ה-5 , ה-7 וה- 16 הוא אפס. כמו כן ידוע כי סכום שלושת האיברים הראשונים הוא 132.

א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת הפרש הסדרה.

ב. מצא את האיבר השלילי הראשון בסדרה.

ג. מצא כמה איברים יש לחבר (החל מהאיבר הראשון) כדי לקבל סכום 210.

**20)** נתונים שני טורים חשבוניים: $\begin{cases}150,144,138,...\\90,93,96,...\end{cases}$.

לשני הטורים אותו מספר איברים. ידוע כי סכום האיברים האחרונים של שני הטורים (האיבר האחרון מהטור הראשון והאיבר אחרון מהטור השני) הוא אפס.

א. מצא את מספר האיברים שבכל טור.

ב. מחברים את $n$ האיברים הראשונים מהטור הראשון יחד עם $n$ האיברים הראשונים מהטור השני. ידוע כי חיבור הסכומים הוא 3480. מצא את $n$ אם ידוע שהוא קטן מ-20.

**21)** נתונות שתי סדרות חשבוניות הבאות: $a_n$ שהפרשה הוא $d_1$ ו- $b_n$ שהפרשה הוא $d_2$. ידוע כי: $d_1=-2d_2$.

סכום 50 האיברים הראשונים של שתי הסדרות שווה והאיבר העומד במקום ה-20 בסדרה $a_n$ גדול ב-1 מהאיבר העומד במקום ה-37 בסדרה $b_n$.

א. מצא את הפרש הסדרה $a_n$ - $d_1$.

ב. ידוע כי האיבר $a_{10}$ קטן ב-1 מ-5 פעמים האיבר $b_{50}$.

מצא את $a_1$ ואת $b_1$.

**22)** נתונה הסדרה החשבונית: $-13,-17,-21,...$.

בסדרה יש 18 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

**23)** בסדרה חשבונית שהפרשה $d$ ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות האי-זוגיים הוא 552 וסכום האיברים במקומות הזוגיים הוא 612.

הוכח כי $nd=60$.

**24)** בסדרה חשבונית עולה, שכל איבריה חיוביים ובה מספר אי-זוגי של איברים, גדול סכום כל איברי הסדרה פי $1\frac{14}{15}$ מסכום איברי הסדרה הנמצאים במקומות האי-זוגיים. כמה איברים יש בסדרה?

**25)** לפניך שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית: $x-5$ , $x-16$ , $2x+23$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את $x$.

ii. מצא את הפרש הסדרה.

ב. ידוע כי: $a_{12}=0$. מצא את $a_1$.

ג. האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n=308$.

מצא את סכום כל האיברים החיוביים העומדים במקומות האי-זוגיים.

**26)** בסדרה חשבונית שבה מספר זוגי של איברים נתון כי סכום ריבועי האיברים העומדים במקומות ה-4 וה-5 שווה לריבוע האיבר העומד במקום ה-6.
האיבר הראשון אינו אפס.

א. הוכח את הטענות הבאות:

i. $a_1=-4d$.

ii. $S_9=0$.

ב. האיבר העומד במקום ה-6 גדול ב-2 מהאיבר העומד במקום ה-5.
מצא את $a_1$ ואת $d$.

ג. מצא את מספר איברי הסדרה אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים הוא 504.

**27)** בסדרה חשבונית שבה $2n$ איברים ידוע כי סכום כל האיברים גדול ב-66 מפעמיים סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

א. הוכח כי $nd=66$.

ב. ידוע כי הפרש הסדרה הוא 3. הבע באמצעות $a_1$ את סכום $n$ האיברים הראשונים.

ג. סכום $n$ האיברים הראשונים הוא 187. מצא את האיבר החיובי הקטן ביותר בסדרה ואת מיקומו הסידורי בסדרה.

**28)** אדם המעוניין לקנות רכב קיבל שתי הצעות מחיר.
ההצעה הראשונה:
לשלם בתשלום הראשון 1000 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הגדול ב-500 ₪ מהתשלום הקודם.
ההצעה השנייה:
לשלם בתשלום הראשון 7200 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הקטן ב-450 ₪ מהתשלום הקודם.
ידוע כי מספר התשלומים בהצעה השנייה קטן ב-4 ממספר התשלומים שבהצעה הראשונה.

א. כמה תשלומים יצטרך לשלם לפי כל הצעה.

ב. מה מחיר הרכב?

## תשובות סופיות:

1) $a_{43}=-235$.

2) $a_1=-5$, $d=4$.

3) 20 איברים.

4) 48 איברים.

5) 15 קפיצות.

6) 58 מספרים.

7) 31 איברים חיוביים.

8) $x=1$, $x=4$.

9) $a_{19}=59$.

10) א. הוכחה. ב. $a_1=12$, $d=-3$. ג. $b_5=-3$.

11) $S_{14}=413$.

12) 21 איברים.

13) 16 דקות.

14) 37 איברים.

15) 3647.

16) 23920.

17) א. $n=\sqrt{\frac{512}{d}}$ ב. 24 איברים.

18) א. $a_1=6$, $a_2=10$, $a_3=14$ ב. $d=4$.

19) א. $a_1=50$, $d=-6$ ב. $a_{10}=-4$ ג. $n=6$.

20) א. $n=81$ ב. $n=16$.

21) א. $d_1=4$ ב. $a_1=-52$, $b_1=95$.

22) אי-זוגיים: $S=99$ זוגיים: $S=135$.

23) שאלת הוכחה.

24) 29 איברים.

25) א. i. $x=-50$ ii. $d=11$ ב. $a_1=-121$ ג. $S=2156$.

26) א. הוכחה. ב. $a_1=-8$, $d=2$ ג. $n=36$.

27) א. הוכחה. ב. $S=22a_1+693$ ג. $a_9=1$.

28) א. 12 לפי ההצעה הראשונה ו-8 לפי ההצעה השנייה. ב. 45000 ₪.

# סדרה הנדסית:

## סיכום כללי:

- **נוסחת האיבר הכללי:**

נוסחת האיבר הכללי של סדרה הנדסית המתחילה באיבר $a_1$ ומנתה היא $q$ נתונה ע"י הנוסחה: $a_n = a_1 q^{n-1}$, כאשר: $n$ הוא מיקום האיבר שערכו $a_n$ בסדרה.

- **כלל נסיגה של סדרה הנדסית:**

כלל נסיגה של סדרה הנדסית $a_n$ שמנתה היא $q$ ואיברה הראשון הוא $a_1$ נתון ע"י הקשר הבא: $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

- **נוסחת הסכום של סדרה הנדסית:**

סכום $n$ האיברים הראשונים של סדרה הנדסית $a_n$ שמנתה היא $q$ ואיברה הראשון הוא $a_1$ נתון ע"י: $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$.

## שאלות:

**1)** נתונה הסדרה ההנדסית: $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, \ldots$.
מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 9 איברים.

**2)** מצא כמה איברים יש בסדרה ההנדסית: $\frac{9}{64}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{64}{81}$.

**3)** בסדרה הנדסית האיבר השישי הוא 8 והאיבר העשירי הוא 128.
מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

**4)** בסדרה הנדסית ההפרש בין האיבר השביעי לאיבר החמישי הוא 432 וההפרש בין האיבר החמישי לשלישי הוא 48. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

**5)** בסדרה הנדסית עולה ההפרש בין האיבר השמיני לאיבר הרביעי הוא 3120 וסכום האיברים השני והרביעי הוא 5.2.
מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

**6)** תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 3 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 324 קפיצות?

**7)** מצא את ערכו של $x$ אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה הנדסית: $x-6,\ x+4,\ 4x+1$. מצא גם את מנת הסדרה.

**8)** נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1}=2a_n \\ a_1=3 \end{cases}$.
הוכח שהסדרה הנדסית ומצא מהו האיבר השמיני בה.

**9)** מצא את סכום תשעת האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית: $5,\ 10,\ 20,\ 40,\ldots$.

**10)** תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגה של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 2 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 5 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 1562 קפיצות?

**11)** סכום $n$ האיברים האחרונים בסדרה הנדסית בת $3n$ איברים שמנתה 2, גדול פי 256 מסכום $n$ האיברים הראשונים בה. כמה איברים בסדרה?

**12)** בסדרה הנדסית עולה שבה $n$ איברים, סכום $n-3$ האיברים האחרונים גדול פי 8 מסכום $n-3$ האיברים הראשונים בה. מצא את מנת הסדרה.

**13)** סכום כל האיברים בסדרה הנדסית הוא 252. האיבר האחרון בסדרה גדול ב- 120 מהאיבר השני בה. מצא כמה איברים יש בסדרה אם ידוע שמנתה 2.

**14)** המספרים: $2x-3\ ,\ x-9\ ,\ x-13$ הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית עולה שכל איבריה חיוביים.

א. מצא את $x$.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. כתוב את נוסחת האיבר הכללי בסדרה זו.

ii. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 18750.

ג. ידוע כי האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n=5^{11}$.
מצא את סכום 7 האיברים האחרונים בסדרה.

**15)** נתונה הסדרה ההנדסית הבאה: $a_{n+1}$ ,...., $36\ ,\ 12\ ,\ 4$. מוסיפים לכל איבר בסדרה זו שישית מהאיבר הבא אחריו ויוצרים סדרה חדשה $b_n$ באופן הבא:

$$b_1=a_1+\frac{a_2}{6}\ \ ,\ \ b_2=a_2+\frac{a_3}{6}\ \ ,\ \ b_3=a_3+\frac{a_4}{6}\ \ ,\ .....\ ,\ \ b_n=a_n+\frac{a_{n+1}}{6}.$$

א. הוכח כי הסדרה $b_n$ היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.

ב. הראה כי היחס בין סכום $n$ האיברים הראשונים של הסדרה $a_n$
ובין סכום $n$ האיברים הראשונים של הסדרה $b_n$ הוא $\frac{2}{3}$.

ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה $b_n$ שסכומם מהווה $\frac{2}{9}$ מ-$a_8$.

**16)** נתונה הסדרה ההנדסית: $7,14,28,...$.
בסדרה יש 8 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

**17)** בסדרה הנדסית ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות הזוגיים גדול פי 4 מסכום האיברים במקומות האי-זוגיים. חשב את מנת הסדרה.

**18)** נתונה סדרה הנדסית שמנתה $q$ ובה מספר זוגי של איברים.
בטא באמצעות $q$ את היחס בין סכום איברי הסדרה כולה לסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים שבה.

**19)** בסדרה הנדסית שבה $2n+1$ איברים, סכום $n$ האיברים הראשונים קטן פי 9 מסכום $n$ האיברים הבאים אחריהם. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-30 מהאיבר הראשון שבה. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

**20)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. הראה כי בסדרה הנדסית שבה $2n$ איברים היחס בין סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים לבין סכום כל איברי הסדרה תלוי במנת בסדרה.

בסדרה הנדסית שבה מספר זוגי של איברים ידוע כי סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים קטן פי 4 מסכום כל איברי הסדרה. האיבר הראשון בסדרה זו קטן ב-2 ממנת הסדרה.

ב. כתוב נוסחה לאיבר כללי של סדרה זו.

ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 324.

**21)** בסדרה הנדסית שבה 12 איברים סכום כל איברי הסדרה גדול פי 3 מסכום האיברים כאשר מחליפים את סימני כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

א. מצא את מנת הסדרה.

ב. ידוע כי ההפרש בין האיבר החמישי לאיבר הרביעי בסדרה הוא 8. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

ג. חשב את סכום כל האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה.

**22)** באחת ממדינות המזרח היה מלך שאהב משחקי חשיבה. לכבוד יום הולדתו הכין לו השר הבכיר שבממלכתו משחק מיוחד המכיל 25 משבצות ו-2 חיילי משחק. המלך, מרוב התלהבות ושמחה לא ידע כיצד לגמול לשר החכם ושאל אותו מה ירצה בתמורה. השר סרב לקבל דבר על מתנתו עד שלבסוף החליט המלך לתת לשר מחצית מכל אוצרות הממלכה המונים כ-40 מיליון אבנים יקרות. לאחר ששמע על כך השר, הוא החליט לאתגר את המלך והעלה את ההצעה הבאה:

תן לי אבן יקרה אחת והכפל אותה בכל משבצת שבמשבצות המשחק באופן הבא: כנגד המשבצת הראשונה - אבן אחת,
כנגד השנייה - שתי אבנים,
כנגד השלישית - ארבע אבנים וכן הלאה...
המלך הסכים להצעה.

א. כמה אבנים המלך ייתן לשר כנגד המשבצת האחרונה במשחק?

ב. העזר בכמות האבנים שברשותו של השר וקבע האם הצעתו שוות-ערך יותר מהחלטת המלך לתת לו מחצית מאוצרות הממלכה.

ג. סמוך לפני שנתן המלך את האבנים לשר, הציעה בתו של המלך הצעה נוספת והיא: תן עבור כל משבצת זוגית $2^n$ אבנים, כאשר $n$ הוא מספר המשבצת. האם כדאי למלך לקבל את הצעת בתו או להישאר עם ההצעה המקורית של השר?

## תשובות סופיות:

1) $a_9 = 729$.

2) $n = 7$.

3) $a_1 = \pm\frac{1}{4}, q = \pm 2$.

4) $a_1 = \frac{2}{3}, q = \pm 3$.

5) $a_1 = \frac{1}{25}, q = 5$.

6) 5 דקות.

7) $x = 11 \to q = 3$ , $x = -\frac{2}{3} \to q = -\frac{1}{2}$.

8) $a_8 = 384$.

9) $S_9 = 2555$.

10) 5 דקות.

11) $n = 4$, יש 12 איברים בסדרה.

12) $q = 2$.

13) $n = 6$.

14) א. $x = 14$ ב.i. $a_n = 5^{n-1}$ ב.ii. $a_6$ , $a_7$ ג. $S_7^* = 61,034,375$.

15) א. $q = 3$. ג. $b_5$ , $b_6$

16) אי-זוגיים: $S = 595$ , זוגיים: $S = 1190$.

17) $q = 4$.

18) $\frac{q+1}{q}$.

19) $a_1 = \frac{3}{8}$.

20) א. $\frac{S_{n(o)}}{S_{2n}} = \frac{1}{q+1}$ ב. $a_n = 3^{n-1}$ ג. $a_5$ , $a_6$.

21) א. $q = 2$ ב. $a_1 = 1$ ג. $S_{6(p)} = 2730$.

22) א. $a_{25} = 16,777,216$

ב. לפי הצעת השר יהיו לו 33,554,431 אבנים ולפי הצעת המלך יהיו לו 20,000,000 אבנים.

ג. $4,16,64,...,2^{24}$ , $S_n = 22,369,620$.

# סדרות מעורבות:

## שאלות:

**1)** נתונים שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית שמנתה 3.
אם נכפול את המספר הראשון ב-3, נוסיף למספר השני 4 ונחסיר מהמספר השלישי 4 תתקבל סדרה חשבונית. מצא את המספרים.

**2)** נתונות שתי סדרות שמתחילות במספר 2 ובשתיהן 3 איברים.
סדרה אחת היא חשבונית והשנייה הנדסית. האיבר השלישי בשתי הסדרות זהה והאיבר השני בסדרה ההנדסית קטן ב-4 מהאיבר השני בסדרה החשבונית.
מצא את מנת הסדרה ההנדסית.

**3)** נתונים ארבעה מספרים בעלי התכונות הבאות:
הראשון, השני והרביעי מהווים שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית שמנתה 2.
הראשון, השלישי והרביעי מהווים שלושה איברים עוקבים בסדרה חשבונית וסכומם $22\frac{1}{2}$. מצא את ארבעת המספרים.

**4)** ההפרש של סדרה חשבונית שווה למנה של סדרה הנדסית עולה.
האיבר הראשון בסדרה ההנדסית הוא 6 וידוע כי סכום 2 האיברים הראשונים בסדרה החשבונית שווה לסכום שני האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית.
האיבר השלישי בסדרה ההנדסית גדול פי 2 מהאיבר השלישי בסדרה החשבונית.

א. מצא את שלושת האיברים של הסדרה החשבונית.

ב. מצא כמה איברים יש לחבר בסדרה החשבונית החל מהאיבר הראשון כדי לקבל את הסכום 60.

ג. מצא את מיקומו הסידורי של איבר בסדרה ההנדסית הגדול פי 12 מהאיבר האחרון שחובר בסכום הסדרה החשבונית שחישבת בסעיף הקודם.

**5)** נתונות שתי הסדרות הבאות: סדרה חשבונית: $a_1 , a_2 , a_3 , ....$
וסדרה הנדסית: $b_1 , b_2 , b_3 , ...$. ידוע כי האיבר הראשון בשתי הסדרות שווה.
האיבר השלישי בסדרה ההנדסית גדול פי 4 מהאיבר הראשון בסדרה החשבונית.

א. מצא את מנת הסדרה ההנדסית אם ידוע כי היא אינה עולה.

ב. נתון גם כי האיבר החמישי בסדרה ההנדסית שווה לאיבר הרביעי בסדרה החשבונית. הוכח כי הפרש הסדרה החשבונית גדול פי 5 מהאיבר הראשון.

ג. בכל סדרה יש 10 איברים. הסכום של כל האיברים של שתי הסדרות יחד הוא 212-. מצא את האיבר הראשון של שתי הסדרות.

## תשובות סופיות:

**1)** המספרים הם: 18, 6, 2.

**2)** $q=-1$ או $q=3$.

**3)** המספרים הם: 12 , 7.5 , 6 , 3.

**4)** א. 8 ,10, 12 ב. 5 ג. 6.

**5)** א. $q=-2$ ג. $a_1=2$.

# סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

## סיכום כללי:

- **הגדרה:**

סדרה הנדסית $a_n$ המקיימת: $|q|<1$ , $(q\neq 0)$ נקראת סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת.

- **נוסחת הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:**

הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת $a_n$ ניתן לחישוב ע"י שימוש בכלל: $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ והצבתו בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית.

מתקבל הכלל הבא: $S=\frac{a_1}{1-q}$.

- **סכום סופי של איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:**

  - כאשר מתבקשים לחשב סכום של $n$ איברים ראשונים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה: $S_n=\frac{a_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$.

  - כאשר מתבקשים לחשב סכום של $n$ איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת המתחילים באיבר $a_k$ יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה באופן הבא: $S_n=\frac{a_k\left(q^n-1\right)}{q-1}$.

## שאלות:

**1)** מצא את סכום כל איברי הסדרה ההנדסית הבאה: $12\ ,\ 4\ ,\ 1\frac{1}{3}\ ,\ \ldots$

**2)** סכום כל איברי סדרה הנדסית אינסופית שמנתה $\frac{1}{4}$ הוא 32.
מצא את האיבר הראשון בסדרה.

**3)** נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 62.5. ידוע כי האיבר השני בסדרה הוא 10. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה (שתי אפשרויות).

**4)** האיבר הראשון בסדרה הנדסית אינסופית יורדת הוא 14. סכום האיברים במקומות הזוגיים הוא $9\frac{1}{3}$. מצא את סכום האיברים במקומות האי-זוגיים.

***הערה: שתי השאלות הבאות מסכמות את סוגי הסכומים וייצוג סדרות שונות באמצעות סדרה נתונה כפי שמקובל בנושא זה ואינן מייצגות אורך של שאלת בגרות.**

**5)** נתונה סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת $a_n$ שמנתה $q$ , $\left(q\neq 0\ ,\ |q|<1\right)$
מגדירים שלוש סדרות חדשות: $b_n$ , $c_n$ ו- $d_n$ באופן הבא:

| הסדרה: | $b_n$ | $c_n$ | $d_n$ |
|---|---|---|---|
| הכלל: | $b_1=a_1$<br>$b_2=a_1+a_2$<br>$b_3=a_1+a_2+a_3$<br>$\vdots$<br>$b_n=a_1+a_2+a_3+..+a_n=S_{a(n)}$ | $c_1=a_2^2-a_1^2$<br>$c_2=a_3^2-a_2^2$<br>$c_3=a_4^2-a_3^2$<br>$\vdots$<br>$c_n=a_{n+1}^2-a_n^2$ | $d_1=S_a+a_1$<br>$d_2=S_a+a_2$<br>$d_3=S_a+a_3$<br>$\vdots$<br>$d_n=S_a+a_n$ |

הסכום $S_a$ הוא סכום הסדרה $a_n$ , והסכום: $S_{a(n)}$ הוא סכום $n$ האיברים הראשונים של הסדרה $a_n$.

א. קבע אלו מבין הסדרות $b_n$ , $c_n$ ו- $d_n$ הן הנדסיות והבע את מנתן ע"י $q$.

ב. הבע באמצעות $a_1$ בלבד את סכום הסדרה ההנדסית שמצאת בסעיף הקודם.

ג. מסמנים את סכום ריבועי האיברים של הסדרה ההנדסית שמצאת בסעיף א' ב- $S_{(S)}$. הוכח כי לא קיים ערך של $q$ עבורו סכום ריבועי האיברים $S_{(S)}$, שווה לסכום הסדרה הנ"ל בריבוע.

**6)** נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת: $a_n$ שמנתה $q$.
מגדירים סדרה חדשה $b_n$ באופן הבא:

$$b_1 = S_1^* = \frac{a_1}{1-q} \quad , b_2 = S_2^* = \frac{a_2}{1-q} \quad , b_3 = S_3^* = \frac{a_3}{1-q} \quad ,..., b_n = S_n^* = \frac{a_n}{1-q} \quad ,..$$

כאשר: $S_n^*$ מייצג את סכום הסדרה $a_n$ החל מהאיבר $a_n$ (ועד אינסוף).

א. הוכח כי הסדרה $b_n$ היא גם הנדסית אינסופית יורדת וכתוב את נוסחת האיבר הכללי שלה באמצעות $a_1$ ו- $q$.

ב. ידוע כי סכום הסדרה $b_n$ הוא 126 וכי סכום 8 האיברים הראשונים בסדרה $a_n$ גדול פי 6560 מהאיבר התשיעי בסדרה $b_n$. מצא את $a_1$ ו- $q$.

ג. היעזר בסעיף הקודם והוכח כי מתקיים: $b_2 + b_3 + ... + b_n + ... = 42$.

ד. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה $b_n$.

ה. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה $b_n$.

ו. מחליפים את סימני האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה $b_n$ כך שנוצרת הסדרה: $b_n^*$. חשב את סכום הסדרה $b_n^*$.

ז. מחליפים את סימני האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה $b_n$ כך שנוצרת הסדרה: $b_n^{**}$. חשב את סכום הסדרה $b_n^{**}$.

ח. מעלים בריבוע את כל איברי הסדרה $b_n$. מסמנים את הסכום המתקבל ב- $S_{(S)}$ (מלשון: square). כמו כן, מסמנים את סכום הסדרה המקורית $b_n$ ב- $S_b$.
הראה כי: $S_b^2 \neq S_{(S)}$.

ט. הוכח כי היחס בין סכום איברי הסדרה $a_n$ וסכום איברי הסדרה $b_n$ הוא $\frac{2}{3}$.

**7)** נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 24. מאיברי הסדרה הנתונה יצרו את סדרה חדשה באופן הבא: $a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_4, a_4+a_5, \ldots$.

א. הוכח שהסדרה החדשה היא הנדסית אינסופית יורדת.

ב. ידוע שסכום כל איברי הסדרה החדשה הוא 32.
מצא את האיבר הראשון והמנה של הסדרה המקורית.

**8)** בסדרה הנדסית אינסופית יורדת $a_n$ ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים גדול פי $1\frac{2}{3}$ מסכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.

א. מצא את מנת הסדרה.

מחברים כל שני איברים סמוכים בסדרה הנתונה ויוצרים סדרה חדשה $b_n$.

ב. הוכח כי הסדרה $b_n$ גם היא הנדסית יורדת ומצא את מנתה.

ג. הראה כי סכום הסדרה $b_n$ שווה לסכום הסדרה $a_n$.

ד. סכום שתי הסדרות יחד הוא 1000. מצא את האיבר הראשון בסדרה $a_n$.

**9)** נתונה סדרה הנדסית אינסופית $a_1, a_2, a_3, \ldots$ שמנתה היא $q$, $(0<q<1)$.
נגדיר את הסכומים הבאים: $V=a_3+a_7+a_{11}+\ldots$, $T=a_1+a_2+a_5+a_6+a_9+a_{10}+\ldots$.
נתון כי: $T=6V$.

א. מצא את מנת הסדרה $q$.

ב. פי כמה קטן $V$ מסכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה?

ג. מצא את האיבר הראשון אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים הוא $1365\frac{1}{3}$.

**10)** נתונה הסדרה ההנדסית הבאה: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2n}$ שמנתה היא $q$.
בונים סדרה חדשה מריבועי כל האיברים הסדרה באופן הבא: $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots, a_{2n}^2$.

א. הוכח כי היחס בין סכום $n$ האיברים הראשונים בסדרת הריבועים ובין סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה הנתונה תלוי רק באיבר הראשון של הסדרה.
בסדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 640 ידוע כי סכום 10 האיברים הראשונים כאשר מעלים אותם בריבוע גדול פי 320 מסכום 10 האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.

ב. מצא את מנת הסדרה.

ג. מחברים את כל איברי הסדרה החל מאיבר $a_n$ כלשהו.
ידוע כי סכום זה קטן פי 16 מסכום הסדרה המקורי. מצא את האיבר $a_n$.

**11)** נתונה סדרה הנדסית אינסופית $a_1 , a_2 , a_3 , .....$ שמנתה היא $q$ , $(q \neq 0 , |q|<1)$.

נגדיר את הסכומים הבאים: $V = a_2 + a_7 + a_{12} + ... , .. , T = a_1 + a_3 + a_6 + a_8 + a_{11} + a_{13}$ .

נתון כי: $V = 0.3T$.

א. מצא את מנת הסדרה $q$.

מחליפים את הסימנים של כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים ומתקבלת סדרה חדשה שסכומה הוא 12.

ב. מצא את האיבר הראשון בסדרה המקורית.

ג. מעלים את כל איברי הסדרה בריבוע. חשב את סכום הסדרה כעת.

## תשובות סופיות:

**1)** $S=18$.

**2)** $a_1=24$.

**3)** $a_1=50\ ,\ q=\frac{1}{5}$ או $a_1=12\frac{1}{2}\ ,\ q=\frac{4}{5}$.

**4)** $S=18\frac{2}{3}$.

**5)** א. הסדרה $b_n$: $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{\frac{a_{n+1}\left(q^{n+1}-1\right)}{q-1}}{\frac{a_n\left(q^n-1\right)}{q-1}}=\frac{a_{n+1}\left(q^{n+1}-1\right)}{a_n\left(q^n-1\right)}=q\cdot\frac{q^{n+1}-1}{q^n-1}$

היות והיא תלויה ב-$n$ היא אינה הנדסית.

הסדרה $c_n$ הנדסית: $\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{a_{n+2}^2-a_{n+1}^2}{a_{n+1}^2-a_n^2}=\frac{a_n^2q^4-a_n^2q^2}{a_n^2q^2-a_n^2}=\frac{a_n^2q^2\left(q^2-1\right)}{a_n^2\left(q^2-1\right)}=q^2$.

הסדרה $d_n$: $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{S+a_{n+1}}{S+a_n}=\frac{\frac{a_1}{1-q}+a_{n+1}}{\frac{a_1}{1-q}+a_n}=\frac{a_1+(1-q)a_{n+1}}{a_1+(1-q)a_n}=\frac{a_1\left(1+(1-q)q^n\right)}{a_1\left(1+(1-q)q^{n-1}\right)}=\frac{q^n-q^{n+1}+1}{q^{n-1}-q^n+1}$

היות והיא תלויה ב-$n$ היא אינה הנדסית. ב. $-a_1^2$. $S_{(c_n)}=\frac{c_1}{1-q_c}=\frac{a_2^2-a_1^2}{1-q^2}=\frac{a_1^2\left(q^2-1\right)}{1-q^2}$.

ג. מההשוואה: $S_{(s)}=S^2$ מקבלים כי פתרון המשוואה הוא: $q=0,\pm1$.
כולם נפסלים מכיוון שמנת הסדרה הנתונה $a_n$ היא שבר.
עבור $|q|>1$ הסדרות אינן מתכנסות ולכן לא קיים ערך של $q$ עבורו השוויון יתקיים. מש"ל.

**6)** א. $b_n=\frac{a_1}{1-q}q^{n-1}$ ב. $a_1=56\ ,\ q=\frac{1}{3}$ ג. הוכחה. ד. 31.5
ה. 94.5 ו. -63 ז. 63 ח. 7938
ט. הסכום: $S^2$ משמעו: $\left(b_1+b_2+...+b_n+..\right)^2$.
הסכום: $S_{(s)}$ משמעו: $b_1^2+b_2^2+...+b_n^2+..$. ברור כי הביטויים אינם שווים.

**7)** א. הוכחה. ב. $a_1=16\ ,\ q=\frac{1}{3}$.

**8)** א. $q=0.6$ ב. $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{2n+1}+a_{2n+2}}{a_{2n-1}+a_{2n}}=q^2$ ד. $a_1=200$

**9)** א. $q=\frac{1}{2}$ ב. פי 5 ג. $a_1=1024$

**10)** א. הוכחה. ב. $q=0.5$ ג. $a_5=20$.

**11)** א. $q=\frac{1}{3}$ ב. $a_1=-16$ ג. $S=288$.

# סדרת נסיגה:

## שאלות:

**1)** נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1}=a_n+2n-11 \\ a_1=-6 \end{cases}$.

א. מצא את האיבר השלישי בסדרה.

ב. נתון כי האיבר השלושה-עשר בסדרה הוא 18. מצא את $a_{14}$ ו- $a_{12}$.

ג. נתון כי האיבר השלושים ואחת בסדרה הוא $k$.
הבע באמצעות $k$ את $a_{32}$ ו- $a_{30}$.

ד. מצא את מיקומם של שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 133.

ה. הסבר מדוע אין שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 62.

**2)** נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1}=a_n+2n \\ a_1=0 \end{cases}$.

נתון כי $a_k=72$. הבע באמצעות $k$ את $a_{k+2}$.

**3)** נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1}=2a_n+n^2-31 \\ a_7=t \end{cases}$

מצא את ערכו של $t$ שבעבורו האיברים $a_7, a_8, a_9$ הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית.

**4)** סדרה שהאיבר הכללי בה הוא $a_n$ מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1}=a_n+6n-2$
מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא $b_n$ באופן הבא: $b_n=a_{n+1}-a_n$.

א. הוכח שהסדרה $b_n$ היא סדרה חשבונית ומצא את הפרשה.

ב. חשב את $b_1$.

**5)** סדרה שהאיבר הכללי בה הוא $a_n$ מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1}=3a_n+4$.
מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא $b_n$ באופן הבא: $b_n=a_n+2$.

א. הוכח שהסדרה $b_n$ היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.

ב. נתון: $b_5=162$. חשב את $a_1$.

**6)** סדרה מוגדרת ע"י הכלל: $a_1=3\ ,\ a_{n+1}=3a_n+10n-5$.
מגדירים סדרה חדשה המקיימת לכל $n$ טבעי: $b_n=a_n+5n$.

א. הוכח כי הסדרה $b_n$ היא סדרה הנדסית.

ב. חשב את האיבר $b_5$.

ג. חשב את הסכום: $b_2+b_4+b_6+.....+b_{12}$.

**7)** סדרה מוגדרת לכל $n$ טבעי ע"י הנוסחה: $a_1=k\ ,\ a_{n+1}=8n-a_n+3$.

א. הבע באמצעות $k$ את ארבעת האיברים הראשונים בסדרה.

ב. הוכח כי סדרת האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים וסדרת האיברים העומדים במקומות הזוגיים הן חשבוניות ומצא את הפרשן.

ג. חשב את סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה.

**8)** סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה הבא: $a_1=2\ ,\ a_{n+1}=\dfrac{3a_n}{2a_n+3}$.

מגדירים סדרה חדשה לפי: $b_n=\dfrac{4-7a_n}{a_n}$.

א. הוכח כי הסדרה $b_n$ היא חשבונית ומצא את הפרשה.

ב. חשב את הסכום הבא: $b_2+b_4+b_6+.....+b_{22}$.

**9)** סדרה מקיימת את כלל הנסיגה: $a_1=1\ ,\ a_{n+1}=3n-a_n-7$.

א. חשב את 5 האיברים הראשונים וקבע האם הסדרה היא חשבונית.

ב. הוכח כי לכל $n$ טבעי מתקיים: $a_{n+2}=a_n+3$.

ג. כתוב נוסחה לסכום $n$ האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.

ד. חשב את הסכום הבא: $a_1+a_3+a_5+.....+a_{17}$.

**10)** סדרה מוגדרת לפי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1}=a_n+2\cdot 3^n+2$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הבע את $a_{n+2}$ באמצעות $a_n$.

ii. מצא את מיקומו הסידורי של איבר הגדול ב-652 מהאיבר העומד שני מקומות לפניו.

ב. הנוסחה לסכום $n$ האיברים הראשונים של אחת מהסדרות המיוצגות ע"י כלל הנסיגה הנ"ל היא: $S_n=1.5\cdot 3^n+n^2+n-1.5$.

חשב את הסכום הבא: $a_6+a_7+a_8+....+a_{11}$.

ג. מהו האיבר הראשון של הסדרה המיוצגת ע"י כלל הנסיגה ונוסחת הסכום הנ"ל?

**11)** סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה: $a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+5}$ , $a_1=6$.

מגדירים סדרה חדשה $b_n$ המקיימת לכל $n$ טבעי: $b_n=\frac{a_n+3}{a_n}$.

א. הוכח כי הסדרה $b_n$ היא הנדסית ומצא את מנתה.

ב. כתוב נוסחה ל-$b_n$ באמצעות $n$ בלבד.

ג. חשב את הסכום הבא: $b_1-b_2+b_3-b_4+.....-b_{10}$.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $a_3=-22$ ב. $a_{14}=33\ ,\ a_{12}=5$ ג. $a_{32}=k+51\ ,\ a_{30}=k-49$

ד. $a_{62}, a_{63}$

**2)** $a_{k+2}=74+4k$

**3)** $t=-33$

**4)** א. $d=6$ ב. $b_1=4$

**5)** א. $q=3$ ב. $a_1=0$

**6)** א. $b_{n+1}=3b_n$ ב. $b_5=648$ ג. $S=1594320$

**7)** א. $a_1=k\ ,\ a_2=11-k\ ,\ a_3=k+8\ ,\ a_4=19-k$ ב. 8

ג. 830

**8)** ב. $S_{11(p)}=267\frac{2}{3}$

**9)** א. $a_1=1\ ,\ a_2=-5\ ,\ a_3=4\ ,\ a_4=-2\ ,\ a_5=7$ ג. $S_{n(o)}=1.5n^2-0.5n$

ד. $S_{9(o)}=117$

**10)** א. i. $a_{n+2}=a_n+8\cdot 3^n+4$ ii. $a_4$

ב. $S_{6-11}=265458$ ג. $a_1=5$.

**11)** א. $q=2.5$ ב. $b_n=1.5\cdot 2.5^{n-1}$ ג. $S_{10}^{*}=-4086.74$

# מתמטיקה לתלמידי גאוגרפיה ופיתוח סביבתי 2

## פרק 6 - חשבון דיפרנציאלי - גבול של פונקציה (העשרה)

### תוכן העניינים

1. הסבר כללי ..... (ללא ספר)
2. הצבה ..... 85
3. צמצום ..... 86
4. הכפלה בצמוד ..... 87
5. פונקציה שואפת לאינסוף ..... 88
6. איקס שואף לאינסוף ..... 89

# הצבה

## שאלה

חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 4} x^2+x+1$

ב. $\lim_{x\to 10} \frac{x+1}{x+2}$

ג. $\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x+3}$

ד. $\lim_{x\to 100} 20$

## תשובה

א. 21 ב. $\frac{11}{12}$ ג. 2 ד. 20


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# צמצום

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}$

2) $\lim_{x\to -5}\frac{2x^2-50}{2x^2+3x-35}$

3) $\lim_{x\to 1}\frac{x^7-x}{x-1}$

4) $\lim_{x\to 1}\frac{x^n-x}{x-1}$

5) $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{2x^2-5x+2}{6x^2-5x+1}$

6) $\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$

7) $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$

8) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$

9) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^3-4x^2+x-4}$

10) $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[5]{x}+1}{x+1}$

## תשובות סופיות

1) $\frac{5}{6}$ 2) $\frac{10}{8.5}$ 3) 6 4) $n-1$ 5) -3

6) 32 7) 3 8) 27 9) $\frac{8}{17}$ 10) $\frac{1}{5}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# הכפלה בצמוד

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}$

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-\sqrt{x+6}}{2x-6}$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1}$

5) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4}$

6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{3x+1}}{1-\sqrt{2x-1}}$

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}$

8) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+x}-1}{\sqrt[3]{x}}$

## תשובות סופיות

1) $\frac{1}{2}$

2) $4$

3) $-\frac{1}{12}$

4) $\frac{3}{8}$

5) $\frac{1}{6}$

6) $\frac{3}{4}$

7) $\frac{1}{3}$

8) $-\frac{8}{3}$

9) $\frac{1}{2}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# פונקציה שואפת לאינסוף

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+4}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)^2}{x-2}$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-x^2}{(2-x)^2}$

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{(x-2)(x-5)}$

5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x}$

6) $\lim\limits_{x\to 2^-}-\dfrac{1}{2}\ln(2-x)$

7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left((\ln x)^2+2\ln x-3\right)$

8) $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$

9) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

10) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

12) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x\cdot\cot x$

13) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt{x-1}}$

## תשובות סופיות

1) $\phi$
2) $\phi$
3) $-\infty$
4) $\phi$
5) $-\infty$
6) $\infty$
7) $\infty$
8) $\phi$
9) $0$
10) $1$
11) $\phi$
12) $-\infty$
13) $-\infty$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# $x$ שואף לאינסוף

## שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

**1)** $\lim_{x\to\infty}\left(e^{-x}\right)^{\ln x}$

**2)** $\lim_{x\to-\infty}\arctan x+e^{x}$

**3)** $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+2}{x^2+1000x}$

**4)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+2x^2+6}{3x^3+10x}$

**5)** $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^2+6}{3x^5+10x}$

**6)** $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-5x+6}{2x+10}-\frac{x}{2}\right)$

**7)** $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

**8)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

**9)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^6-5x}}{x^3-2x^2+1}$

**10)** $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4+2x^2+6+27x^6}}{\sqrt{3x^3+10x+4x^4}}$

**11)** $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$

**12)** $\lim_{x\to\infty}\frac{16^x+4^{x+1}}{2^{4x+2}+2^{x+3}}$

**13)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{16^x+4^{x+\frac{1}{2}}}{2^{4x+2}+2^{x+3}}$

**14)** $\lim_{x\to\infty}\frac{4\cdot9^x+3^{x+1}}{81^{0.5x}+3^{x+3}}$

**15)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{4\cdot9^x+3^{x+1}}{81^{0.5x}+3^{x+3}}$

**16)** $\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{4x^2+2}{x^2+1000x}}$

**17)** $\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{3x^3-5x-1}{x^3-2x^2+1}\right)$

**18)** $\lim_{x\to\infty}e^{\frac{x^4+2x^2+6}{3x^4+10x}}$

**19)** $\lim_{x\to-\infty}\sin\left(\frac{x^4+2x^2+6}{3x^5+10x}\right)$

**20)** $\lim_{x\to\infty}\sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}}$

**21)** $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)$

**22)** $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+kx}-x\right)$

**23)** $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$

**24)** $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)$

**25)** $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+x^2+1}-x^2\right)$

**26)** $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}\right)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

27) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-4)^{10}(3x^2-1)^4}{x^2(2x-5)^{10}(x^3+1)^2}$

28) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^5}{1-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^4}$

29) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln\left(5\cdot 2^{x+2}+6\cdot e^{x+1}\right)-x\right]$

## תשובות סופיות

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) 0 | 2) $-\frac{\pi}{2}$ | 3) 4 | 4) $-\infty$ |
| 5) 0 | 6) -5 | 7) 1 | 8) -1 |
| 9) -3 | 10) 1.5 | 11) $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ | 12) $\frac{1}{4}$ |
| 13) 0 | 14) 4 | 15) $\frac{1}{9}$ | 16) 2 |
| 17) $\ln 3$ | 18) $e^{\frac{1}{3}}$ | 19) 0 | |

20) אם $b\neq 0$ : $\lim=\sqrt[5]{\frac{a}{b}}$ . אם $a>0$ , $b=0$ : $\infty$ . אם : $a<0$ , $b=0$ : $-\infty$ .

| | | | |
|---|---|---|---|
| 21) 2.5 | 22) $\frac{k}{2}$ | 23) $\frac{1}{2}$ | 24) $-\frac{1}{2}$ |
| 25) $\frac{1}{2}$ | 26) $\frac{a-b}{2}$ | 27) $\frac{3^4}{2^{10}}$ | 28) $\frac{5}{4}$ |

29) $\ln(6e)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מתמטיקה לתלמידי גאוגרפיה ופיתוח סביבתי 2

## פרק 7 - חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים

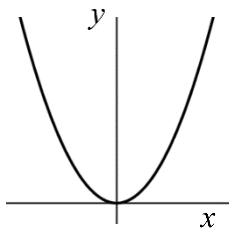
### תוכן העניינים

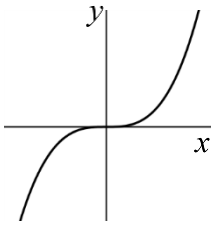
1. הקדמה כללית ..... 91
2. גזירת פונקציות ..... 92
3. מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה ..... 98
4. מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה ..... 99
5. שאלות עם פרמטרים ..... 102
6. שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית ..... 104

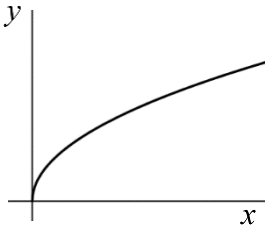
# הקדמה כללית:

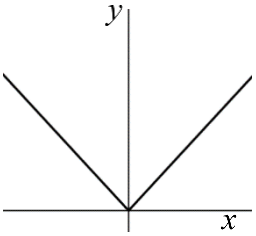
## סיכום כללי:

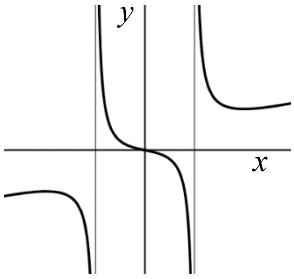
### פונקציות נפוצות:

הפונקציה $f(x)=x^2$ : 

הפונקציה $f(x)=x^3$ : 

הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$ : 

הפונקציה $f(x)=|x|$ : 

פונקציה עם מכנה, למשל: $f(x)=\frac{5x^3+4x}{x^2-1}$ : 

### שיפוע של פונקציה:

- השיפוע $m$ של פונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1,y_1)$ שעל הפונקציה הוא ערך הנגזרת בנקודה $A(x_1,y_1)$, כלומר: $m=f'(x_1)$.
- השיפוע של המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1,y_1)$ שעל הפונקציה שווה לשיפוע הפונקציה בנקודה $A(x_1,y_1)$.
- משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1,y_1)$ שעליה מתקבלת על ידי הנוסחה למציאת ישר: $y-y_1=m(x-x_1)$.

### הנגזרת:

לכל פונקציה $f(x)$ קיימת פונקציה, הנקראת פונקציית הנגזרת (או רק "הנגזרת") ומסומנת $f'(x)$, המתקבלת ממנה על פי כללי הגזירה.

# גזירת פונקציות:

## סיכום כללי:

### כללי הגזירה:

- כלל גזירה מס' 1: $f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot x^{n-1}$.
- כלל גזירה מס' 2 (כפל בקבוע): $f(x)=ax^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot ax^{n-1}$.
- כלל גזירה מס' 3 (נגזרת של קבוע): $f(x)=a \Rightarrow f'(x)=0$.
- כלל גזירה מס' 4 (סכום והפרש): $f(x)=u\pm v \Rightarrow f'(x)=u'\pm v'$.
- כלל גזירה מס' 5 (פונקציה מורכבת): $f(x)=u^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$.
- כלל גזירה מס' 6 (נגזרת של $\frac{1}{x}$): $f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.
- כלל גזירה מס' 7 (מכפלה): $f(x)=u\cdot v \Rightarrow f'(x)=u'v+v'u$.
- כלל גזירה מס' 8 (מנה): $f(x)=\frac{u}{v} \Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.
- כלל גזירה מס' 9 (שורש): $f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

## שאלות:

**1)** גזור את הפונקציות הבאות:

| | | |
|---|---|---|
| א. $f(x)=x^3$ | ב. $f(x)=x^7$ | ג. $f(x)=x^2$ |
| ד. $f(x)=x$ | ה. $f(x)=x^{-3}$ | ו. $f(x)=x^{-1}$ |
| ז. $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ | ח. $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ | ט. $f(x)=x^{\frac{3}{4}}$ |

**2)** גזור את הפונקציות הבאות:

| | | |
|---|---|---|
| א. $f(x)=2x^3$ | ב. $f(x)=3x^7$ | ג. $f(x)=\frac{1}{2}x^4$ |
| ד. $f(x)=\frac{x^6}{7}$ | ה. $f(x)=8x$ | ו. $f(x)=3x^{-2}$ |
| ז. $f(x)=\frac{4}{x}$ | ח. $f(x)=6x^{\frac{1}{2}}$ | ט. $f(x)=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$ |

**3)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=12$ ב. $f(x)=\frac{7}{8}$

**4)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3+2x^2-3x+5$ ב. $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{x^3}{6}+\frac{3x}{4}-\frac{2}{5}$

ג. $f(x)=7x^2+23x-6$ ד. $f(x)=6x^2+8x+4$

ה. $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x^3$ ו. $f(x)=\frac{x^4}{8}+67$

**5)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x-2)^3$ ב. $f(x)=(x^3+6)^5$ ג. $f(x)=3(x-x^2)^2$

ד. $f(x)=\frac{(5-x)^3}{4}$ ה. $f(x)=\frac{2(x+1)^4}{3}$

**6)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3}{x}$ ב. $f(x)=-\frac{2}{x}$ ג. $f(x)=\frac{1}{x^2}$

ד. $f(x)=\frac{3}{x^3}$ ה. $f(x)=\frac{1}{x^2-3x}$ ו. $f(x)=\frac{2}{3-x}$

ז. $f(x)=\frac{6}{x+5}$

**7)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x+1)(x-3)$ ב. $f(x)=(5x+1)^3(x-3)$

ג. $f(x)=x^3(6-x)^4$ ד. $f(x)=3x^2\cdot x$

ה. $f(x)=x^2\cdot x^3$ ו. $f(x)=x(3x+7)$

ז. $f(x)=3x^3(3x-1)$ ח. $f(x)=(x-2)(2x^2+3)$

ט. $f(x)=(3x-2)(x^2+10x)$ י. $f(x)=(3x^4-4x)(2x^2+5x+2)$

יא. $f(x)=x(x-2)(3x-4)$

**8)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(x^2-4)^2$

ב. $f(x)=2x^3(3x+5)^2$

ג. $f(x)=(x^3+2)^2(x-1)^3$

ד. $f(x)=(x^2+1)^3(2x-1)^2$

**9)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3x-1}{1+2x}$

ב. $f(x)=\frac{x^2+1}{5x-12}$

ג. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+3}$

ד. $f(x)=\frac{x^2+8}{x-1}$

ה. $f(x)=\frac{1}{x}$

ו. $f(x)=\frac{3}{x^3}$

ז. $f(x)=\frac{(x-1)^2}{x+1}$

ח. $f(x)=\frac{(x^2+3)^2}{x^2-2}$

ט. $f(x)=\frac{x^3-x^2}{2(1-x)}$

י. $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$

**10)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x}$

ב. $f(x)=4\sqrt{x+1}$

ג. $f(x)=\sqrt{x^3-1}$

ד. $f(x)=(3x+1)\sqrt{x}$

ה. $f(x)=x^2\sqrt{x+3}$

ו. $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x}}$

**11)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x+1}$

ב. $f(x)=\sqrt{2x}$

ג. $f(x)=\sqrt{3x^2+1}$

ד. $f(x)=\sqrt{10-3x}$

ה. $f(x)=\sqrt{2x^2+7x}$

ו. $f(x)=3x^2-8\sqrt{x}$

ז. $f(x)=x^2\sqrt{1-2x}$

ח. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x}$

ט. $f(x)=\frac{x\sqrt{x^2+4}}{2}$

י. $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}}$

יא. $f(x)=\frac{2x^3-x^2+x-5\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$

יב. $f(x)=\sqrt{\frac{3-x}{x}}$

יג. $f(x)=\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x}}$

יד. $f(x)=\frac{x^2+7}{\sqrt{x^2-5}}$

טו. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-1}$

טז. $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$

**12)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=ax^4-bx$

ב. $f(x)=\frac{ax^2}{3}-\frac{x}{b}+c$

ג. $f(x)=\frac{x-2a}{x-4a}$

ד. $f(x)=a\sqrt{bx^2+c}$

**13)** גזור פעמיים את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{x^2+2x+4}{2x}$

ב. $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{2x+10}$

ג. $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$

ד. $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

ה. $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

ו. $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $3x^2$ ב. $7x^6$ ג. $2x$ ד. $1$ ה. $-\frac{3}{x^4}$ ו. $-\frac{1}{x^2}$

ז. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ח. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ט. $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$.

**2)** א. $6x^2$ ב. $21x^6$ ג. $2x^3$ ד. $\frac{6x^5}{7}$ ה. $8$.

ו. $-\frac{6}{x^3}$ ז. $-\frac{4}{x^2}$ ח. $\frac{3}{\sqrt{x}}$ ט. $\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$.

**3)** א. $0$ ב. $0$.

**4)** א. $3x^2+4x-3$ ב. $x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{4}$ ג. $14x+23$ ד. $12x+8$ ה. $x-3x^2$ ו. $0.5x^3$.

**5)** א. $15(5x-2)^2$ ב. $15x^2(x^3+6)^4$ ג. $6(x-x^2)(1-2x)$

ד. $-\frac{3}{4}(5-x)^2$ ה. $\frac{8(x+1)^3}{3}$.

**6)** א. $-\frac{3}{x^2}$ ב. $\frac{2}{x^2}$ ג. $-\frac{2}{x^3}$ ד. $-\frac{9}{x^4}$ ה. $-\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2}$

ו. $\frac{2}{(3-x)^2}$ ז. $-\frac{6}{(x+5)^2}$.

**7)** א. $10x-14$ ב. $(5x+1)^2(20x-44)$ ג. $x^2(6-x)^3(18-7x)$.

ד. $9x^2$ ה. $5x^4$ ו. $6x+7$ ז. $36x^3-9x^2$ ח. $6x^2-8x+3$

ט. $9x^2+56x-20$ י. $36x^5+75x^4+24x^3-24x^2-40x-8$

יא. $9x^2-20x+8$.

**8)** א. $4x(x^2-4)$ ב. $30x^2(x+1)(3x+5)$ ג. $3(x-1)^2(x^3+2)(3x^3-2x^2+2)$

ד. $2(2x-1)(x^2+1)^2(8x^2-3x+2)$.

**9)** א. $\frac{5}{(1+2x)^2}$ ב. $\frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2}$ ג. $\frac{8x}{(x^2+3)^2}$ ד. $\frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$

ה. $-\frac{1}{x^2}$ ו. $-\frac{9}{x^4}$ ז. $\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$

ח. $\frac{2x(x^2+3)(x^2-7)}{(x^2-2)^2}$ ט. $-x$ י. $-\frac{1}{(x+2)^2}$.

**10)** א. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ב. $\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ ג. $\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$ ד. $\frac{9x+1}{2\sqrt{x}}$ ה. $\frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}}$

ו. $\frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$

**11)** א. $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ ב. $\frac{1}{\sqrt{2x}}$ ג. $\frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}$ ד. $-\frac{3}{2\sqrt{10-3x}}$ ה. $\frac{4x+7}{2\sqrt{2x^2+7x}}$

ו. $6x-\frac{4}{\sqrt{x}}$ ז. $\frac{2x-5x^2}{\sqrt{1-2x}}$ ח. $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$ ט. $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+4}}$ י. $\frac{1-3x}{(1-x^2)^{1.5}}$

יא. $3\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}+\frac{5}{x^2}$ יב. $-\frac{3}{2x\sqrt{3x-x^2}}$ יג. $\frac{-x^2+2x+1}{2(1-x)^{1.5}\sqrt{1+x^2}}$

יד. $\frac{x^3-17x}{(x^2-5)^{1.5}}$ טו $-\frac{x+1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$ טז. $-\frac{x+3}{2(x-1)^2\sqrt{x+1}}$.

**12)** א. $4ax^3-b$ ב. $\frac{2ax}{3}-\frac{1}{b}$ ג. $\frac{-2a}{(x-4a)^2}$ ד. $\frac{abx}{\sqrt{bx^2+c}}$.

**13)** א. $f'(x)=\frac{2x^2-8}{4x^2}$ , $f''(x)=\frac{4}{x^3}$.

ב. $f'(x)=\frac{2x^2+20x-62}{(2x+10)^2}$ , $f''(x)=\frac{448}{(2x+10)^3}$.

ג. $f'(x)=\frac{4x}{(x+1)^3}$ , $f''(x)=\frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$.

ד. $f'(x)=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$ , $f''(x)=\frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$.

ה. $f'(x)=\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$ , $f''(x)=\frac{6x}{(x+1)^4}$.

ו. $f'(x)=-\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}$ , $f''(x)=\frac{12(x+1)(x+3)}{(x-1)^5}$

# מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה:

## שאלות:

**14)** מצא את שיפוע הפונקציה $f(x)=2x^3-7x$ בנקודה $(2\ ,\ 2)$.

**15)** מצא את שיפוע הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^2-3}$ בנקודה בה $x=-2$.

**16)** מצא את שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=4\sqrt{x}$ בנקודה בה $x=1$.

## תשובות סופיות:

**14)** $m=17$
**15)** $m=4$
**16)** $m=2$

# מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה:

## שאלות:

**17)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=2(4x+3)^3$ בנקודה בה $x=-1$.

**18)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{8}{x+1}$ בנקודה בה $y=2$.

**19)** מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x)=x^2-2x-8$ בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה-$x$.

**20)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=x^4-2x$ ששיפועו 2.

**21)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{x^3+3x-1}{x^2-2}$ בנקודה שבה $x=1$.

**22)** נתון כי הישר $2y-3x=3$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=3\sqrt{x}$.
מצא את נקודת ההשקה.

**23)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{x}$ בנקודה בה $x=1$.

**24)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=3x^2-8\sqrt{x}$ בנקודה בה $x=4$.

**25)** נתונה הפונקציה הבאה $f(x)=4x-2\sqrt{x}$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המקביל לישר $f(x)=3x-\frac{1}{2}$.

ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה-$x$.

**26)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{4}{\sqrt{x-1}}$ ששיפועו 2-.

**27)** מצא את משוואות המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$ בנקודה שבה $x=2$.

**28)** מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x)=\frac{1}{3x^3}$ היוצרים עם הכיוון החיובי של ציר ה-$x$ זווית של $135°$.

**29)** מצא את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות הבאות: $y=-\frac{1}{4}x^2-5$ , $y=x^2$.

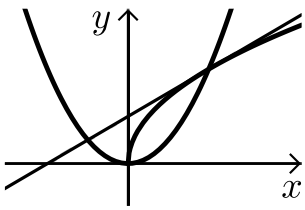
**30)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$ ונתון הישר: $y=2x$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר הנמצאת ברביע הראשון.

ב. מצא את משוואות המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שמצאת בסעיף הקודם.

ג. חשב את השטח שנוצר בין המשיק והצירים.

**31)** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $g(x)=x^2$ , $f(x)=\sqrt{x}$.




א. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ העובר דרך נקודת החיתוך שמצאת הנמצאת ברביע הראשון.

ג. מצא את נקודת החיתוך הנוספת של המשיק שמצאת עם גרף הפונקציה $g(x)$.

## תשובות סופיות:

**17)** $y=24x+22$

**18)** $y=-\frac{1}{2}x+3\frac{1}{2}$

**19)** $y=6x-24$ , $y=-6x-12$

**20)** $y=2x-3$

**21)** $y=-12x+9$

**22)** $(1\ ,\ 3)$

**23)** $y=-\frac{1}{2}x+2\frac{1}{2}$

**24)** $y=22x-56$

**25)** א. $y=3x-1$ ב. $\left(\frac{1}{3}\ ,\ 0\right)$

**26)** $y=-2x+8$

**27)** $y=\frac{11}{16}x-\frac{15}{8}$

**28)** $y=-x+1\frac{1}{3}$ , $y=-x-1\frac{1}{3}$

**29)** $y=2x-1$ , $y=-2x-1$

**30)** א. $(1\ ,\ 2)$ ב. $y=-1.5x+3.5$ ג. $S=4\frac{1}{12}$.

**31)** א. $(1\ ,\ 1)$ , $(0\ ,\ 0)$ ב. $y=0.5x+0.5$ ג. $(-0.5\ ,\ 0.25)$.

# שאלות עם פרמטרים:

## שאלות:

**32)** שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=ax^2-4x$ בנקודה שבה $x=3$ הוא 8.
מצא את ערכו של הפרמטר $a$ ואת משוואת המשיק.

**33)** נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{ax}$ , $(a>0)$.
המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=\frac{1}{2}$ הוא בעל שיפוע 1.
מצא את ערך הפרמטר $a$.

**34)** נתונה הפונקציה: $y=x^3+a\sqrt{x}$ ($a$ פרמטר).
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$ הוא 5.
מצא את ערך הפרמטר $a$.

**35)** נתונה הפונקציה: $y=2\sqrt{x}-\frac{A}{x}$ (A פרמטר).
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$ הוא 2.
מצא את ערך הפרמטר A.

**36)** הישר $y=4x+b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x^2}+3$.
מצא את $b$ ואת נקודת ההשקה.

**37)** שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{2}{ax+3}$ בנקודה שבה $y=2$ הוא -4.
מצא את ערכו של הפרמטר $a$ ואת משוואת המשיק.

**38)** הישר $y=ax+\frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x)=\frac{2}{x+c}$ בנקודה $x=0$.
מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו-$c$.

**39)** הישר $y=3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=x\sqrt{x}+b$.
מצא את $b$ ואת נקודת ההשקה.

**40)** שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{a}{\sqrt{bx-1}}$ בנקודה $(1\ ,\ 6)$ הוא 6-.
מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$ ואת משוואת המשיק.

**41)** לאילו ערכי $k$ ישיק הישר $y=-5x+6$ לגרף הפונקציה $f(x)=x^3-2x^2-4x+k$ ?
לכל ערך כזה של $k$ מצא את נקודת ההשקה.

**42)** הפונקציות $y=\frac{1}{x}$ ו- $y=-\frac{1}{2}x^2+k$ משיקות זו לזו.
מצא את $k$ ואת נקודת ההשקה.

## תשובות סופיות:

**32)** $a=2\ ,\ y=8x-18$

**33)** $a=2$

**34)** $a=4$

**35)** $A=1$

**36)** $(-1\ ,\ 5)\ ,\ y=4x+9$

**37)** $a=2\ ,\ y=-4x-2$

**38)** $a=-\frac{1}{8}\ ,\ c=4$

**39)** $b=4\ ,\ (4\ ,\ 12)$

**40)** $b=2\ ,\ a=6\ ,\ y=-6x+12$

**41)** $k=6:(1\ ,\ 1)$ או: $\left(\frac{1}{3}\ ,\ \frac{13}{3}\right):k=\frac{158}{27}$.

**42)** $(1\ ,\ 1)\ ,\ k=1.5$

## שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית:

**שאלות:**

**43)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. בטא באמצעות $t$ את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=x^2+1$ בנקודה שבה $x=t$.

ב. מצא את ערכיו של $t$ אם נתון שהמשיק עובר בנקודה $(-1\ ,\ 1)$.

**44)** מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=5x-x^2$ העוברים דרך הנקודה $(3\ ,\ 7)$.

**45)** מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=x^2+5x-6$ העוברים דרך הנקודה $(0\ ,-10)$.

**46)** מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=12x-x^3$ העוברים דרך הנקודה $(2\ ,\ 24)$.

**47)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ העובר בנקודה $(3\ ,\ 0)$.

**48)** מצא משוואת המשיק לפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ אם ידוע ששטח המשולש שהוא יוצר עם הצירים הוא 4.5 יחידות שטח.

**49)** מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x-2}}$ העוברים דרך הנקודה $(2\ ,\ 3)$.

## תשובות סופיות:

**43)** א. $y=2tx-t^2+1$ ב. $t=0,-2$.

**44)** $y=-3x+16$ , $y=x+4$

**45)** $y=x-10$ , $y=9x-10$

**46)** $y=-15x+54$ , $y=12x$

**47)** $y=-\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2}$

**48)** $y=-\frac{1}{16}x+\frac{3}{4}$

**49)** $y=-x+5$

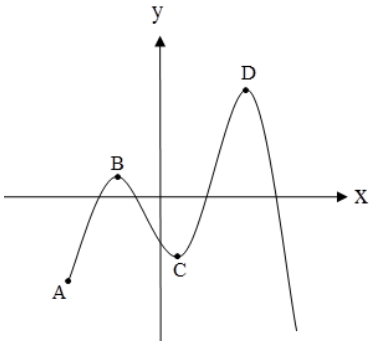
# מתמטיקה לתלמידי גאוגרפיה ופיתוח סביבתי 2

## פרק 8 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית פולינום

### תוכן העניינים

1. נקודות קיצון של פונקציות ..... 106
2. חקירת פונקציה פולינומית ..... 109
3. פונקציה זוגית ואי-זוגית ..... 113

# נקודות קיצון של פונקציות:




## סיכום כללי:

**נקודות קיצון (נקודות מינימום/מקסימום):**

- מינימום או מקסימום מקומי (פנימי) – B , C , D.
- מינימום או מקסימום קצה – A.
- מינימום או מקסימום מוחלט – D.

**נקודות קיצון מקומיות:**

- שיפוע המשיק לפונקציה בנקודות קיצון מקומיות הוא אפס.
- בנקודה שבה שיפוע המשיק לפונקציה הוא אפס תיתכן נקודת קיצון מקומית. נקודה כזו נקראת נקודה חשודה כקיצון. ניתן לבדוק אם היא אכן נקודת קיצון.

**שלבים למציאת נקודות קיצון מקומיות:**

- נגזור את הפונקציה.
- נשווה את הנגזרת לאפס ונחלץ את ערכי ה-$x$ של הנקודות החשודות כקיצון.
- נציב את ערכי ה-$x$ מסעיף ב' בפונקציה המקורית לקבלת ערכי ה-$y$.
- נקבע אם הנקודה היא נקודת קיצון ונסווג את סוג הקיצון על ידי טבלה.

## שאלות:

**1)** מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)=10x-x^2$.

**2)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-12x$.

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

**3)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-10x^2+9$ .

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

**4)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-4x^3+32$ .

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

**5)** לפונקציה $f(x)=ax-x^3-5$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=-1$ .
מצא את ערכו של הפרמטר $a$ .

**6)** נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+x^2$ . ידוע שהנקודה $x=1$ נקודת קיצון.
מצא את הקבוע $a$

**7)** לפונקציה $f(x)=Ax^3+Bx^2-1$ יש נקודת קיצון ששיעוריה : $(2,3)$ .
מצא את ערכי הפרמטרים B , A.

**8)** לפונקציה $f(x)=Ax^3+Bx^2-4x$ יש נקודת קיצון ב-$x=-1$ ו-$x=4$ .
מצא את הפרמטרים ואת שיעור ה-$y$ של שתי נקודות הקיצון.

**9)** נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+bx^2$ . ידוע שהנקודה $(1,2)$ נקודת קיצון.
מצא את הפרמטרים $a$ , $b$ .

**10)** לפונקציה $f(x)=ax^4+bx^2+35$ יש נקודת קיצון ששיעוריה $(2,3)$ .
מצא את ערכי הפרמטרים $a$ , $b$ .

## תשובות סופיות:

1) $\max(5,25)$.

2) א. $\max(-2,16)$ , $\min(2,-16)$ ב. עולה: $x>2$ , $x<-2$ יורדת: $-2<x<2$.

3) א. $\min(-\sqrt{5},-16)$ , $\min(\sqrt{5},-16)$ , $\max(0,9)$

ב. עולה: $-\sqrt{5}<x<0$ , $x>\sqrt{5}$ יורדת: $0<x<\sqrt{5}$ , $x<-\sqrt{5}$.

4) א. $\min(3,5)$ ב. עולה: $x>3$ יורדת: $x<3$.

5) $a=3$.

6) $a=-\frac{2}{3}$.

7) $A=-1$ , $B=3$.

8) $\left(4,-18\frac{2}{3}\right)$ , $\left(-1,2\frac{1}{6}\right)$ , $B=-\frac{3}{2}$ , $A=\frac{1}{3}$.

9) $a=-4$ , $b=6$.

10) $a=2$ , $b=-16$.

# חקירת פונקציה פולינומית:

## שאלות:

**11)** נתונה הפונקציה $f(x)=10x-x^2$ .
חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**12)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-12x$ .
חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**13)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-10x^2+9$ .
חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**14)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-4x^3+32$ חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**15)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^3$ חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**16)** נתונה הפונקציה: $f(x)=2x^3-3ax^2+54x-50$.

א. לאלו ערכים של הפרמטר $a$ עולה הפונקציה בכל תחום הגדרתה?

ב. הצב בפונקציה $a=6$ וחקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודת חיתוך עם ציר ה- $y$, סרטוט.

**17)** נתונה הפונקציה: $y=-3x^3+6x^2-4x+d$ ($d$ פרמטר).
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$ בנקודה שבה: $x=2$.

א. מצא את $d$.

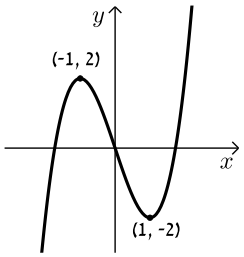
ב. האם יש לפונקציה נקודות קיצון?

ג. כתוב את תחומי העלייה וירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $y$.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**18)** לפניך גרף הפונקציה $f(x)=x^3-3x$:




א. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=5$?

ב. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=2$?

ג. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=0.5$?

ד. עבור איזה ערך של $k$ למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק פתרון אחד?

ה. עבור איזה ערך של $k$ למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק שני פתרונות?

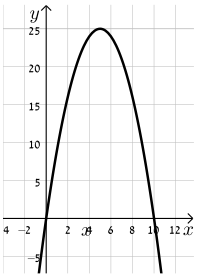
ו. עבור איזה ערך של $k$ למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק שלושה פתרונות?

ז. האם קיים ערך של $k$ עבורו למשוואה $f(x)=k$ אין פתרון?

## תשובות סופיות:

**11)** א. כל $x$ ב. $\max(5,25)$ ג. עלייה: $x<5$, ירידה: $x>5$

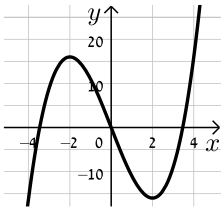
ד. $(10,0)$, $(0,0)$. ה. להלן גרף:



**12)** א. כל $x$ ב. $\max(-2,16)$, $\min(2,-16)$

ג. עלייה: $x>2$, $x<-2$, ירידה: $-2<x<2$

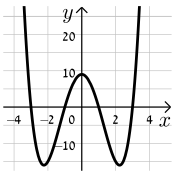
ד. $(-\sqrt{12},0)$, $(\sqrt{12},0)$, $(0,0)$. ה. להלן גרף:



**13)** א. כל $x$ ב. $\min(-\sqrt{5},-16)$, $\min(\sqrt{5},-16)$, $\max(0,9)$

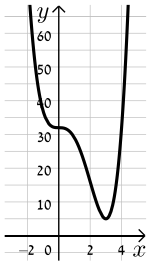
ג. עלייה: $-\sqrt{5}<x<0$, $x>\sqrt{5}$, ירידה: $x<-\sqrt{5}$, $0<x<\sqrt{5}$.

ד. $(\pm 3,0)$, $(\pm 1,0)$, $(0,9)$. ה. להלן גרף:



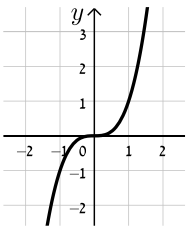
**14)** א. כל $x$ ב. $\min(3,5)$ ג. תחומי עלייה: $x>3$, תחומי ירידה: $x<3$

ד. $(0,32)$. ה. להלן גרף:

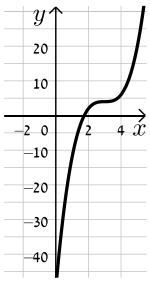


**15)** א. כל $x$ ב. אין. ג. עולה לכל $x$

ד. $(0,0)$. ה. להלן גרף:

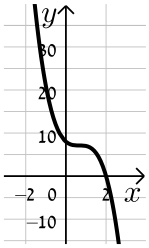


**16)** א. $-6<a<6$ ב. תחום הגדרה: כל $x$, נקודות קיצון: אין, תחומי עלייה: כל $x$, תחומי ירידה: אין, נקודת חיתוך עם הצירים: $(0,-50)$, להלן גרף:




**17)** א. $d=8$ ב. לא. ג. יורדת בתחום $x\neq\frac{2}{3}$

ד. $(0,8)$. ה. להלן גרף:




**18)** א. 1. ב. 2. ג. 3. ד. $k<-2$ , $k>2$

ה. $k=\pm 2$ ו. $-2<k<2$ ז. לא.

# פונקציה זוגית ואי-זוגית:

## סיכום כללי:

**הגדרות:**

- פונקציה $f(x)$ תיקרא זוגית אם לכל $x$ בתחום הגדרתה מתקיים: $f(x)=f(-x)$.
- פונקציה $f(x)$ תיקרא אי-זוגית אם לכל $x$ בתחום הגדרתה מתקיים: $f(-x)=-f(x)$.

## שאלות:

**1)** קבע אלו מהפונקציות הבאות הן זוגיות/אי-זוגיות לא זו ולא זו:

א. $f(x)=3x-5$

ב. $f(x)=3x^2$

ג. $f(x)=2x^3$

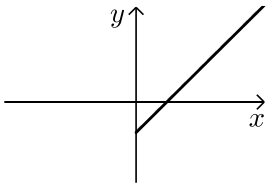
ד. $f(x)=x^3-2x^2$

ה. $f(x)=4x^4-3x^2+1$

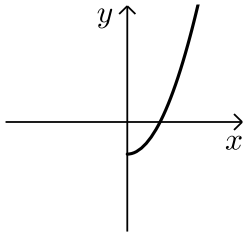
ו. $f(x)=4x^5-3x^3-1$

**2)** הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל $x$.
השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה זוגית:

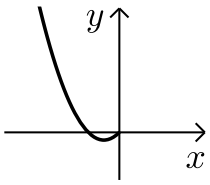
א.



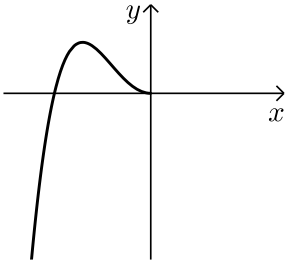

ב.




ג.

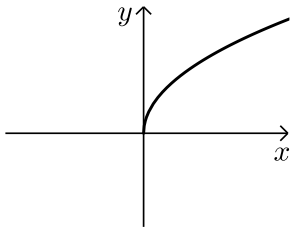



ד.

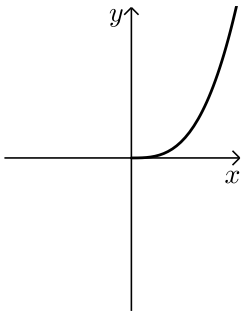


**3)** הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל $x$.
השלם את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה אי-זוגית:

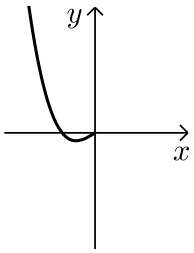
א.



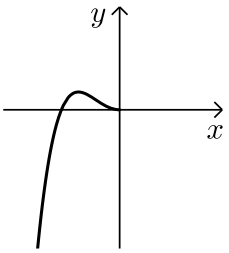

ב.




ג.




ד.




**4)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=x^4-4x^2$ בתחום: $[0:3]$.

א. חקור את הפונקציה בתחום הנ"ל לפי הסעיפים הבאים:

i. תחום הגדרה.

ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.

iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן.

iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.

v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. הוכח כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.

ג. התבסס על ממצאיך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום: $[-3:3]$ (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-3:0]$ לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

**5)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=x^6-3x^2+3$.

א. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:4]$ לפי הסעיפים הבאים:
תחום הגדרה, מציאת חיתוך עם ציר ה- $y$, מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה בתחום הנ"ל.

ב. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זו ולא זו?
נמק באמצעות חישוב מתאים.

ג. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שסרטטת בסעיף א', את עקום הפונקציה בתחום $[-4:0]$.

ד. הוכח כי הפונקציה חיובית לכל $x$ בתחום הגדרתה.

**6)** לפניך הפונקציה: $f(x)=-2x^6+3x^4+a$, $a$ פרמטר.
ידוע כי לפונקציה ערך מירבי של 1.

א. מצא את $a$ וכתוב את הפונקציה $f(x)$.

ב. חקור את הפונקציה בתחום: $[-2:0]$ לפי הסעיפים הבאים:
כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים,
מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.

ג. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זה ולא זה?
נמק באמצעות חישוב מתאים.

ד. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את גרף הפונקציה בתחום: $[-2:2]$.

**7)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=3x^3-9x$.

א. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:5]$ לפי הסעיפים הבאים:
כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים,
מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.

ב. הוכח כי הפונקציה היא אי-זוגית.

ג. התבסס על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט את הפונקציה בתחום: $[-5:5]$ (הוסף את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-5:0]$ לגרף שסרטטת בסעיף הקודם).

**8)** לפניך הפונקציה הבאה: $f(x)=5x^3-3x^5+b$ , $b$ פרמטר.
ידוע כי הישר $y=2x$ עובר דרך כל הנקודות על גרף הפונקציה שמקיימות: $f'(x)=0$.

א. מצא את $b$ וכתוב את הפונקציה $f(x)$.

ב. חקור את הפונקציה בתחום: $[0:2]$ לפי הסעיפים הבאים:

i. תחום הגדרה.
ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן.
iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.
v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. בדוק האם הפונקציה היא זוגית/אי-זוגית או לא זו ולא זו.
נמק את קביעתך באמצעות חישוב מתאים.

ד. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה של גרף הפונקציה את הגרף בתחום $[-2:0]$.

**9)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^7-x}{3}$.

א. חקור את הפונקציה בתחום: $[-4:0]$ לפי הסעיפים הבאים:

i. תחום הגדרה.
ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
iii. מציאת נקודות קיצון וסיווגן
(בתשובתך השאר עד 2 ספרות לאחר הנקודה העשרונית).
iv. כתיבת תחומי עלייה וירידה.
v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

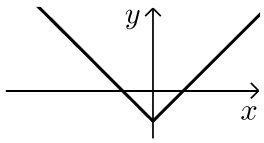
ב. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? או לא זו ולא זו?
נמק ע"י חישוב מתאים.

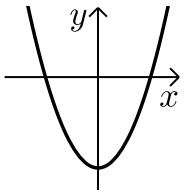
ג. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שעשית את גרף הפונקציה בתחום $[0:4]$.

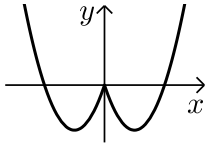
## תשובות סופיות:

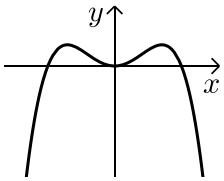
**1)** זוגית: ב', ה'. אי-זוגית: ג', לא זו ולא זו: א', ד', ו'.

**2)** להלן הגרפים:

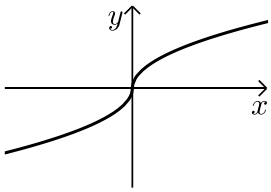
א.


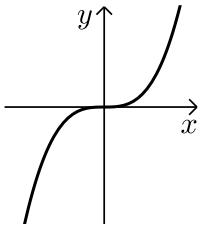

ב.


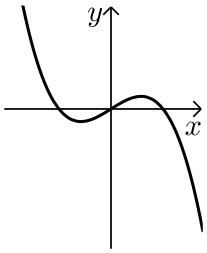

ג.


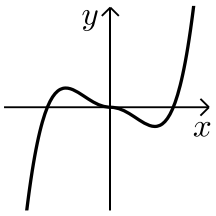

ד.



**3)** להלן הגרפים:

א.



ב.


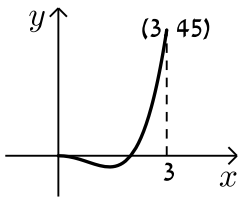

ג.



ד.


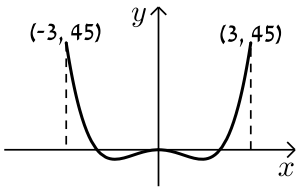

**4)** א. i. $0 \le x \le 3$ ii. $(0,0),(2,0)$ iii. $\max(3,45)$ קצה, $\min\left(\sqrt{2},-4\right)$,

$\max(0,0)$ קצה. iv. עולה: $\sqrt{2} < x < 3$, יורדת: $0 < x < \sqrt{2}$ ב. סעיף הוכחה.

**סרטוט עבור חלק v:**




**סרטוט עבור סעיף ג:**



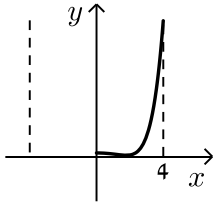

**5)** א. תחום הגדרה: $0 \le x \le 4$, חיתוך עם ציר ה-$y$: $(0,3)$,

נקודות קיצון: $\max(4,4051)$ קצה, $\min(1,1)$, $\max(0,3)$ קצה,

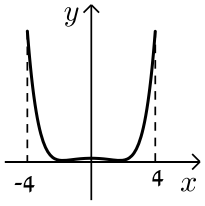
עולה: $1 < x < 4$, יורדת: $0 < x < 1$ ב. זוגית.

ד. הוכחה עפ"י הסרטוט.

**סרטוט עבור סעיף א:**

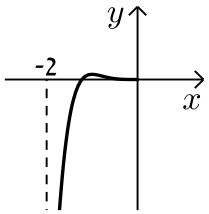



**סרטוט עבור סעיף ג:**

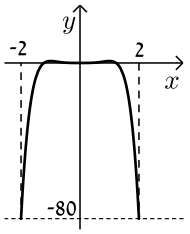


**6)** א. $a=0$ ב. תחום הגדרה: $-2\le x\le 0$, חיתוך עם הצירים: $(0,0),(-1.225,0)$, נקודות קיצון: $\min(-2,-80)$ קצה, $\max(-1,1)$, $\min(0,0)$ קצה,
עולה: $-2<x<-1$, יורדת: $-1<x<0$. ג. זוגית.

**סרטוט עבור סעיף א:**

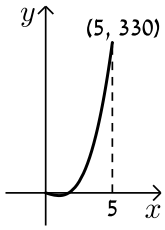



**סרטוט עבור סעיף ד:**

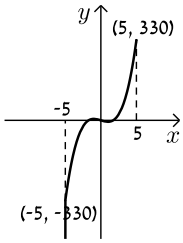



**7)** א. תחום הגדרה: $0\le x\le 5$, חיתוך עם הצירים: $(0,0),\left(\sqrt{3},0\right)$,
נקודות קיצון: $\max(5,330)$ קצה, $\min(1,-6)$, $\max(0,0)$ קצה,
עולה: $1<x<5$, יורדת: $0<x<1$, ב. אי-זוגית.

**סרטוט עבור סעיף א:**

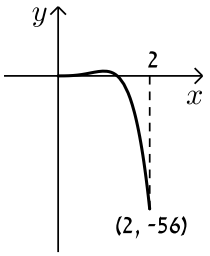



**סרטוט עבור סעיף ג:**

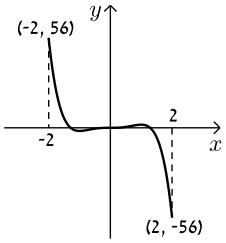



**8)** א. $b=0$ ב. i $0\le x\le 2$ ii. $(0,0),(1.29,0)$ iii. $\min(2,-56)$ קצה,
$\max(1,2)$, $\min(0,0)$ קצה. iv. עולה: $0<x<1$, יורדת: $1<x<2$
ג. אי-זוגית.

**סרטוט עבור חלק v:**

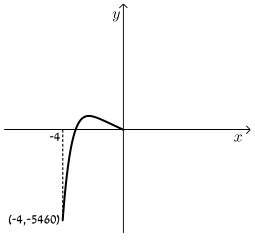



**סרטוט עבור סעיף ד:**

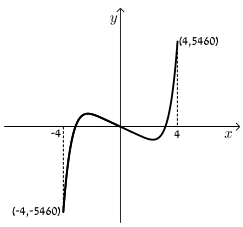



**9)** א. i $-4\le x\le 0$ ii. $(-1,0),(0,0)$ iii. $\min(0,0)$ קצה, $\max(-0.723,0.207)$,
$\min(-4,-5460)$ קצה. iv. עולה: $-4<x<-0.723$,
יורדת: $-0.723<x<0$ ג. אי-זוגית.

**סרטוט עבור חלק v:**




**סרטוט עבור סעיף ד:**



# מתמטיקה לתלמידי גאוגרפיה ופיתוח סביבתי 2

## פרק 9 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקצית מנה ושורש

### תוכן העניינים

1. מציאת תחום הגדרה ..... 119
2. מציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה ..... 121
3. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים ..... 122
4. חקירת פונקצית מנה ..... 127
5. חקירת פונקצית שורש ..... 136
6. תחומי קעירות ונקודות פיתול ..... 144
7. חקירת פונקציה עם פרמטר ..... 150
8. פונקציות ללא תבנית מפורשת ..... 153

# מציאת תחום הגדרה:

## סיכום כללי:

- כל פולינום מוגדר לכל $x$.
- בפונקציה עם מכנה, אסור שיתקבל אפס במכנה.
- בפונקציה עם שורש זוגי, אסור שיתקבל מספר שלילי בתוך השורש.

## שאלות:

**1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^2+\frac{1}{2}x$

ב. $f(x)=4x^3-x^2+\frac{x}{2}+1$

ג. $f(x)=x^3-x^2-4x+1$

ד. $f(x)=\frac{2x}{x-3}$

ה. $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$

ו. $f(x)=\frac{5x^3+4x}{x^2-1}$

ז. $f(x)=\frac{x^2}{x^2-x-2}$

ח. $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-2x-8}$

ט. $f(x)=\frac{6}{x^2+1}$

י. $f(x)=\frac{4x+1}{x^2+1}$

יא. $f(x)=\frac{1}{x^3-x}$

יב. $f(x)=\frac{x^2}{x^3-4x}$

**2)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x}$

ב. $f(x)=2\sqrt{x-3}$

ג. $f(x)=\sqrt{x-4}$

ד. $f(x)=3x\sqrt{1-2x}$

ה. $f(x)=\sqrt{x^2+3x-10}$

ו. $f(x)=\sqrt{x^2+x-2}$

ז. $f(x)=\frac{5x}{\sqrt{x+4}}$

ח. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$

ט. $f(x)=\sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}}$

י. $f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^3-9x}}$

יא. $f(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$

יב. $f(x)=\frac{x+1}{x-\sqrt{2-x}}$

יג. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-|x|}}$

יד. $f(x)=\sqrt{\sqrt{x+2}-3}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. כל $x$ ב. כל $x$ ג. כל $x$ ד. $x\neq 3$ ה. $x\neq \pm 2$ ו. $x\neq \pm 1$
ז. $x\neq -1,2$ ח. $x\neq 4,-2$ ט. כל $x$ י. כל $x$ יא. $x\neq \pm 1,0$ יב. $x\neq \pm 2,0$.

**2)** א. $x\geq 0$ ב. $x\geq 3$ ג. $x\geq 4$ ד. $x\leq \frac{1}{2}$ ה. $x\leq -5\ ,\ x\geq 2$
ו. $x\geq 1\ ,\ x\leq -2$ ז. $x>-4$ ח. $x\leq -3\ ,\ -2\leq x<1\ ,\ x>1$ ט. $x\leq -1.5\ ,\ x\geq 1$
י. $-3<x<0\ ,\ x>3$ יא. $-6\leq x<-2\ ,\ x>-2$ יב. $x<1\ ,\ 1<x\leq 2$
יג. $-1<x<1$ יד. $x\geq 7$.

# מציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה:

## שאלות:

**3)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{6x}{x^2-10x+9}$.

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

## תשובות סופיות:

**3)** א. $\max\left(3,-1\frac{1}{2}\right)$, $\min\left(-3,-\frac{3}{8}\right)$.

ב. עולה: $-3<x<3$, $x\neq 1$, יורדת: $3<x\neq 9$, $x<-3$.

# מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים:

## סיכום כללי:

### אסימפטוטה אנכית:

הגדרה: הישר $x=k$ הוא אסימפטוטה אנכית של פונקציה מהצורה: $y=\frac{f(x)}{g(x)}$

אם הוא מקיים: $g(k)=0$ וגם: $f(k)\neq 0$. בצורה מתמטית: אם: $\lim_{x\to k^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$

או: $\lim_{x\to k^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$ או שניהם אז הישר: $x=k$ הוא אסימפטוטה אנכית לפונקציה $y=\frac{f(x)}{g(x)}$.

### הסבר כללי:

בעבור ערכי $x$ שמאפסים את המכנה, אבל לא את המונה יש אסימפטוטה אנכית.
כאשר ערך $x$ מאפס את המכנה וגם את המונה יש לפרק את המונה והמכנה
(על ידי נוסחאות כפל מקוצר או טרינום למשל) ולצמצם.
אם אחרי הצמצום אותו ערך של $x$ עדיין מאפס את המכנה תתקבל אסימפטוטה אנכית,
אך אם ערך $x$ זה לא מאפס את המכנה אחרי שצומצם אין אסימפטוטה אנכית אלא
נקודת אי הגדרה.

### אסימפטוטה אופקית:

הגדרה: ישר מהצורה: $y=n$ הוא אסימפטוטה אופקית לפונקציה מהצורה: $y=\frac{f(x)}{g(x)}$

אם מתקיים: $\lim_{x\to\infty^+}\frac{f(x)}{g(x)}=n$ או: $\lim_{x\to\infty^-}\frac{f(x)}{g(x)}=n$ או שניהם.

אופן החישוב הכללי:

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{ax^m+\ldots}{bx^n+\ldots}$ (יש בפונקציה קו שבר אחד!)

- אם $m>n$, לפונקציה אין אסימפטוטה אופקית.
- אם $m=n$, לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y=\frac{a}{b}$.
- אם $m<n$, לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y=0$.

**חוקי גבולות לאינסוף:**

במקרים רבים נרצה לדעת האם פונקציה מסוימת מתכנסת לערך כלשהו כאשר $x$ שואף לערכים ההולכים וגדלים (לאינסוף, או למינוס אינסוף).
עבור ערכי $x$ שהולכים וגדלים (או קטנים) נרשום: $x=\infty$ או $x=-\infty$ בהתאמה.

ישנם 4 מצבים בהם ערך הפונקציה בשאיפת $x$ לאחד הקצוות ניתן לחישוב ישיר:

- הגבול: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\text{"}\frac{1}{\infty}\text{"}=0$.
- הגבול: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ ניתן לפיצול לשני מקרים:
  - אם: $x\to 0^+$ (מתקרב ל- 0 מהכיוון החיובי) אז: $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\text{"}\frac{1}{0^+}\text{"}=+\infty$.
  - אם: $x\to 0^-$ (מתקרב ל- 0 מהכיוון השלילי) אז: $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=\text{"}\frac{1}{0^-}\text{"}=-\infty$.
- הגבול מהצורה $\infty\cdot\infty$ (מכפלת שני ביטויים של $x$ אשר כל אחד מהם שואף לאינסוף בפני עצמו) מקיים: $\infty\cdot\infty=\infty$.
- הגבול מהצורה $\infty+\infty$ (סכום שני ביטויים של $x$ אשר כל אחד מהם שואף לאינסוף בפני עצמו) מקיים: $\infty+\infty=\infty$.

ישנם 3 מקרים בהם לא ניתן לדעת מהו ערך הפונקציה בלקיחת הגבול בצורה ישירה והם:

- הגבול מהצורה: $\frac{\infty}{\infty}$ (מנת שני ביטויים שהולכים וגדלים עם שאיפת $x$).
- הגבול מהצורה: $\frac{0}{0}$ (מנת שני ביטויים שהולכים וקטנים עם שאיפת $x$).
- הגבול מהצורה: $\infty-\infty$ (הפרש של שני ביטויים שהולכים וגדלים עם שאיפת $x$).
במקרים אלו נעזר בפישוטים שהוצגו לעיל על מנת למצוא את ערך הגבול עצמו.

## שאלות:

4) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{x-2}+3$.

5) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{5x^2+1}{x^2-9}$.

6) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{2x^2-5x+2}{1+3x^2}$.

7) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{3x}{x^2-2x-15}$.

8) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{6x^3-5x+1}{1+2x^2}$.

9) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{ax+b}{x-b}$.

10) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$
ואת נקודת אי הרציפות שלה.

11) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2}{2x^2-4x}$
ואת נקודת אי הרציפות שלה.

12) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$.

13) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{x}{\sqrt{4-x}}$.

**14)** מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

**15)** מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{2x}{x-\sqrt{x}}$.

**16)** מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{3x}{\sqrt{x^2+5}}$.

**17)** מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x)=\frac{5x}{\sqrt{x^2-16}}$.

**18)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{4x^2+1}{ax^2-x+b}$.
האסימפטוטה האופקית של הפונקציה ואחת האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה נפגשות בנקודה $(-1,2)$.
מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.

**19)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{ax+8}{x+b\sqrt{x}}$.
הפונקציה חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה בנקודה $(16,2)$.
מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.

## תשובות סופיות:

4) $x=2\ ,\ y=3$.

5) $x=\pm 3\ ,\ y=5$.

6) $y=\frac{2}{3}$.

7) $x=-3\ ,\ x=5\ ,\ y=0$.

8) אין.

9) $x=b\ ,\ y=a$.

10) $x=1\ ,\ y=1$, נקודת אי-הגדרה: $(2,4)$.

11) $x=2\ ,\ y=\frac{1}{2}$, נקודת אי-הגדרה: $(0,0)$.

12) $x=2\ ,\ y=0$.

13) $x=4$.

14) $x=1\ ,\ y=-1$.

15) $x=1\ ,\ y=2$.

16) $y=\lim_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)\right)=3\ ,\ y=\lim_{x\to-\infty}\left(f\left(x\right)\right)=-3$.

17) $x=4\ ,\ x=-4\ ,\ y=5\ ,\ y=-5$.

18) $a=2\ ,\ b=-3$.

19) $a=2\ ,\ b=1$.

# חקירת פונקצית מנה:

## שאלות:

**20)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{6x^2-10x+6}{3x^2-10x+3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**21)** נתונה הפונקציה: $f(x)=x+\frac{1}{x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**22)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**23)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{6x}{x^2-5x+4}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**24)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-3x}{x^2+3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**25)** נתונה הפונקציה הבאה: $y=\frac{2x^2-5x+2}{4x}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה.
ב. נקודות קיצון.
ג. קביעת סוג הקיצון ותחומי עלייה וירידה.
ד. חיתוך עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטה אנכית.
ו. סרטוט סקיצה.

**26)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום הגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**27)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום הגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**28)** לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{ax+4}{x^2}$ יש נקודת קיצון שבה $x=-8$.

א. מצא את $a$ וכתוב את הפונקציה.

ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**29)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{3x^2}{2x^2-8}$.

א. מהו תחום הגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. קבע את סוג הקיצון ותחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה.

ה. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.

ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**30)** נתונה הפונקציה: $y=\frac{a^2x-4}{2x^2-1}$, ($a$ קבוע).

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=1$ הוא: $m=4$.

א. מצא את כל הערכים האפשריים עבור $a$.

ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ג. מצא את נקודת החיתוך בין המשיק הנתון ומשיק העובר דרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$.

**31)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=1.5x-\frac{5x+1}{x+5}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה.

ב. נקודות קיצון וסוגן.

ג. תחומי עלייה וירידה.

ד. חיתוך עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. סרטוט סקיצה.

**32)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x-a}{x-1}$, $(a\neq 1)$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ג. הבע באמצעות $a$ את השיעורים של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-$x$ ועם ציר ה-$y$.

ד. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא עבור אילו ערכים של $a$ הפונקציה $f(x)$ עולה לכל $x$ בתחום ההגדרה.

ii. ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=a$ מקביל לישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=2$.
מצא את הערך של $a$ אם נתון כי הפונקציה עולה לכל $x$.

**33)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2+ax+6}{x-2}$, ($a$ פרמטר).
ידוע שאחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה-$y$.

א. מצא את הערך של $a$.

ב. הצב את הערך של $a$ שמצאת בסעיף א' ומצא:

i. את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

iii. את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

iv. את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).

ג. עבור אלו ערכי $x$ הפונקציה שלילית?

ד. נתון הישר: $y=k$. עבור אלו ערכי $k$ אין נקודות משותפות לישר ולגרף הפונקציה? נמק.

**34)** נתונה הפונקציה: $y=\frac{x+3}{x-2}+A$ , ($A$ פרמטר). גרף הפונקציה עובר בנקודה $(3A\ ,\ A)$.

א. מצא את ערך הפרמטר $A$.

ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. הוכח כי גרף הפונקציה יורד לכל $x$.

ד. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. נתון הישר: $y=k$.
האם קיים ערך של $k$ עבורו הישר חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות שונות? נמק.

**35)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{ax^2-20x+28}{x^2+2a}$.

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את האסימפטוטה האופקית שלו בנקודה $(3\ ,\ 0.5)$.

א. מצא את ערך הפרמטר $a$ וכתוב את הפונקציה ואת תחום הגדרתה.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. העזר בגרף הפונקציה וקבע עבור אלו ערכים של $k$ הישר: $y=k$ יחתוך את גרף הפונקציה בנקודה אחת בלבד.

**36)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{9-x^2}{x^2-k}$ יש נקודת קיצון שנמצאת על ציר ה- $y$.

ב. הוכח כי הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל $x$ אם ידוע כי שיעור ה- $y$ של נקודת הקיצון הוא 3.

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$.

ד. מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.

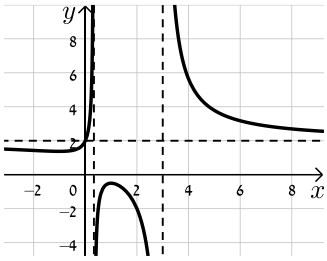
ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה וקבע בכמה נקודות יחתוך אותו הישר $y=-1$.
נמק את תשובתך.

## תשובות סופיות:

**20)** א. $x\neq 3\ ,\ x\neq \frac{1}{3}$ ב. $\max\left(1,-\frac{1}{2}\right)\ ,\ \min\left(-1,1\frac{3}{8}\right)$.

ג. תחומי עלייה: $-1<x<1$ וגם $1<x\neq 3$, תחומי ירידה: $x\neq\frac{1}{3}$ או $x<-1$.

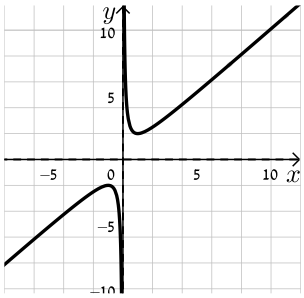
ד. $(0,2)$ ה. $y=2\ ,\ x=\frac{1}{3}\ ,\ x=3$. ו. להלן סקיצה:



**21)** א. $x\neq 0$ ב. $\max(-1,-2)\ ,\ \min(1,2)$

ג. עולה: $x>1$ או $x<-1$, יורדת: $-1<x<1\ ,\ x\neq 0$ ד. אין

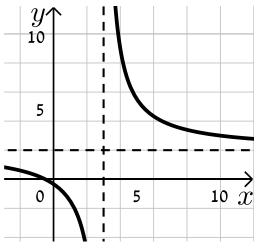
ה. להלן סקיצה:



**22)** א. $x\neq 3$ ב. אין. ג. הפונקציה יורדת בכל ת.ה

ד. $\left(0,-\frac{1}{3}\right)\ ,\ \left(-\frac{1}{2},0\right)$ ה. $x=3\ ,\ y=2$.

ו. להלן סקיצה:

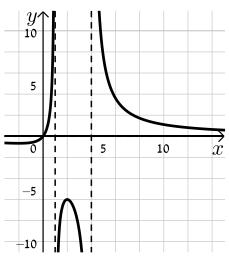


**23)** א. $x\neq 1\ ,\ x\neq 4$ ב. $\max(2,-6)\ ,\ \min\left(-2,-\frac{2}{3}\right)$

ג. תחומי עלייה: $-2<x<2\ ,\ x\neq 1$, תחומי ירידה: $x>2\ ,\ x\neq 4$ או $x<-2$

ד. $(0,0)$ (אסימפטוטות: $x=4\ ,\ x=1\ ,\ y=0$).

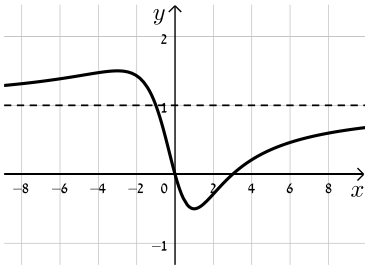
ה. להלן סקיצה:



**24)** א. כל $x$ ב. $\min\left(1,-\frac{1}{2}\right)$ , $\max\left(-3,1\frac{1}{2}\right)$

ג. עולה: $x>1$ או $x<-3$ , יורדת: $-3<x<1$ ד. $(3,0),(0,0)$ (אסימפטוטה: $y=1$).

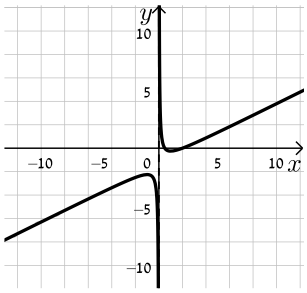
ה. להלן סקיצה:




**25)** א. $x\neq 0$ ב. $\min(1,-0.25)$ , $\max(-1,-2.25)$

ג. עולה: $x>1$ , $x<-1$ , יורדת: $-1<x<1$ , $x\neq 0$ ד. $(0.5,0),(2,0)$ ה. $x=0$.

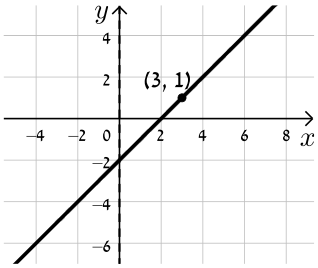
ו. להלן סקיצה:




**26)** א. $x\neq 3$ ב. אין ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה

ד. $(0,-2),(2,0)$ ה. אין, יש נקודת אי הגדרה ששיעוריה $(3,1)$.

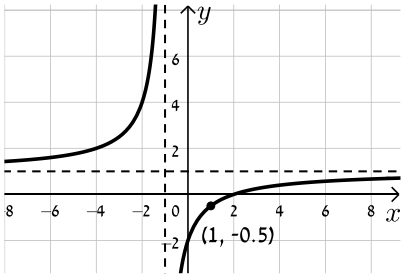
ו. להלן סקיצה:




**27)** א. $x\neq \pm 1$ ב. אין ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה

ד. $(0,-2),(2,0)$ ה. $x=-1$ , $y=1$ , יש נקודת אי הגדרה: $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$.

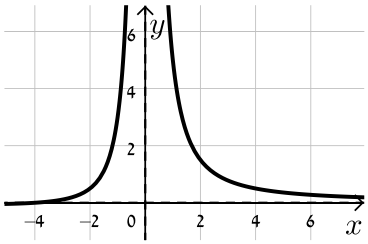
ו. להלן סקיצה:



**28)** א. $a=1$ , $f(x)=\frac{x+4}{x^2}$ ב. עולה: $-8<x<0$ יורדת: $x<-8$ , $x>0$

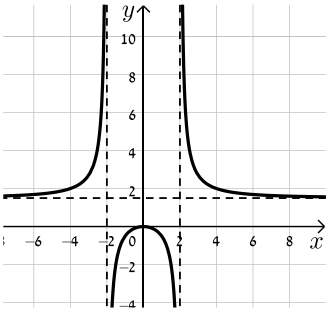
ג. $(-4,0)$ ד. $x=0$ , $y=0$.

ה. להלן סקיצה:




**29)** א. $x\neq\pm2$ ב. $\max(0,0)$ ג. יורדת: $x>0$ , $x\neq2$ עולה: $x<0$ , $x\neq-2$

ד. $(0,0)$ ה. $x=\pm2$ , $y=1.5$. ו. להלן סקיצה:



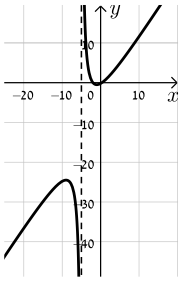

**30)** א. $a=\pm2$ ב. $(0,4)$ , $(1,0)$

ג. המשיק: $y=-4x+4$ אשר עובר בנקודה $(1,0)$. נקודת החיתוך: $(1,0)$.

**31)** א. $x\neq-5$ ב. $\max(-9,-24.5)$ , $\min(-1,-0.5)$

ג. עולה: $x<-9$ , $x>-1$ יורדת: $-9<x<-1$ , $x\neq-5$

ד. $(-2,0),\left(\frac{1}{3},0\right),(0,-0.2)$ ה. $x=-5$. ו. להלן סקיצה:



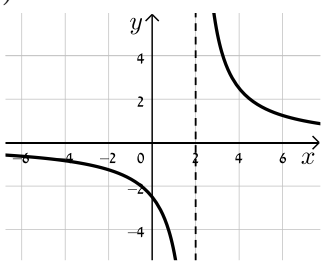

**32)** א. $x\neq1$ ב. $x=1$ , $y=1$ ג. $(a,0),(0,a)$ ד. i. $a>1$ ii. $a=2$.

**33)** א. $a=-3$ ב. i. $x\neq2$ ii. $(0,-3)$ iii. $\max(0,-3)$ , $\min(4,5)$

iv. $x=2$ ג. $x<2$ ד. $-3<k<5$.

**34)** א. A $=-1$ ב. $x\neq2$ ד. $(0,-2.5)$

ה. להלן סקיצה:




ו. לא

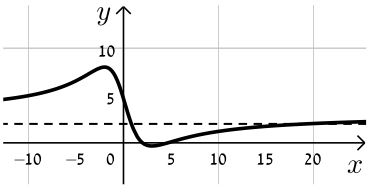
**35)** א. $a=3$ , $f(x)=\frac{3x^2-20x+28}{x^2+6}$ , כל $x$.

ב. $\max(-2,8)$ , $\min\left(3,-\frac{1}{3}\right)$

ג. עולה: $x>3$ , $x<-2$ ; יורדת: $-2<x<3$

ד. $(2,0),\left(0,4\frac{2}{3}\right),\left(4\frac{2}{3},0\right)$

ה. להלן סקיצה:

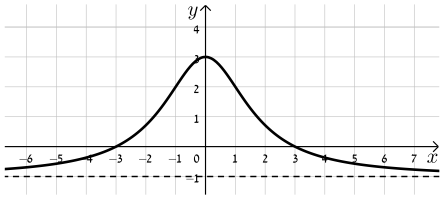



ו. $3$ , $-\frac{1}{3}$ , $k=8$.

**36)** ב. $k=-3$ ג. $(3,0),(-3,0)$ ד. $y=-1$

ה. באף נקודה.

ו. להלן סקיצה:



# חקירת פונקצית שורש:

## שאלות:

**37)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x-3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**38)** נתונה הפונקציה: $f(x)=(x-4)\sqrt{x-1}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**39)** נתונה הפונקציה: $f(x)=x\sqrt{6-x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**40)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{4\sqrt{x}}{x^2+3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**41)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**42)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x^2}$.

א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודות קיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**43)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ב. האם ניתן להעביר משיק לגרף הפונקציה המקביל לציר ה-$x$? נמק והראה חישוב מתאים.

ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה-$x$.

ד. חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק והצירים.

**44)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x}-1}$.

א. מהו תחום הגדרה של הפונקציה?

ב. כמה נקודות יש לגרף הפונקציה שהמשיק העובר דרכן מקביל לציר ה-$x$? מצא אותן.

ג. כתוב את משוואות המשיקים בנקודות שמצאת בסעיף הקודם.

**45)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום הגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**46)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{ax+6}{\sqrt{9-x^2}}$, $a$ פרמטר.

מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-$y$.

ידוע כי הוא מקביל לישר: $3y-x=0$.

א. מצא את ערך הפרמטר $a$.

ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.

ד. כתוב את התחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

**47)** נתונות שתי הפונקציות הבאות: $g(x)=\frac{\sqrt{x-k}}{x}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+k}}$ ($k$ פרמטר חיובי).

ידוע כי הפונקציות חותכות זו את זו בנקודה שבה: $x=0.8$.

א. מצא את $k$.

ב. האם הפונקציות נחתכות בנקודה נוספת מלבד לנקודה הנתונה? אם כן מצא אותה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x=0.52$.

**48)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{kx}{\sqrt{k-x^2}}$ , $k$ פרמטר חיובי.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה? (בטא באמצעות $k$).

ii. מהן האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה?

ב. הראה כי הפונקציה עולה עבור כל ערך של $k$ בתחום הגדרתה.

ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-$x$. (בטא באמצעות $k$).

ד. המשיק אשר מצאת בסעיף הקודם חותך את אחת האסימפטוטות של הפונקציה בנקודה A. ידוע כי שטח המשולש הכלוא בין המשיק, ציר ה-$x$ והאסימפטוטה הנ"ל הוא: 4 יח"ש $S=$. מצא את ערך הפרמטר $k$.

**49)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+2}{x+4}$. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

א. כתוב בצורה מפורשת את הפונקציה $g(x)$.

ב. לפניך מספר טענות המתייחסות לפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$.
קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות.
הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

i. לפונקציות תחום הגדרה זהה.

ii. שתי הפונקציות עולות בכל תחום הגדרתן.

iii. שתי הפונקציות חותכות את ציר ה-$x$ באותה נקודה.

iv. לשתי הפונקציות יש אסימפטוטה משותפת.

ג. מצא את נקודות החיתוך של כל פונקציה עם ציר ה-$y$.

אסף פתר את סעיפים א' ו-ב' והחליט לטעון את הטענה הבאה:

היות והפונקציה $g(x)$ מוגדרת להיות: $g(x)=\sqrt{f(x)}$ אזי ניתן למצוא את שיעור ה-$y$ של כל נקודה שעל גרף הפונקציה $f(x)$ ע"י כך שנמצא תחילה את שיעור ה-$y$ של הנקודה בעלת אותו שיעור $x$ על הגרף של $g(x)$ ונעלה אותה בריבוע.

ד. האם אסף צודק? נמק בצורה איכותית (חישובים אינם נדרשים) את שיקולך.

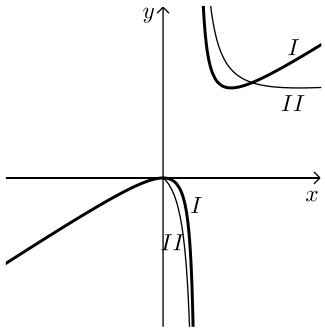
**50)** לפניך הפונקציות הבאות: $g(x)=\frac{x}{\sqrt{x-1}}$ , $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x}-1}$ .

א. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות.
הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

i. לשתי הפונקציות יש את אותו תחום ההגדרה.

ii. לשתי הפונקציות יש נקודות קיצון הנמצאות על הישר: $y=x$ .

iii. הפונקציות לא חותכות זו את זו.




מגדירים פונקציה נוספת והיא: $h(x)=\left(g(x)\right)^2$ .

ב. כתוב באופן מפורש את הפונקציה החדשה: $h(x)$ .

ג. האם תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$ זהה לשל $g(x)$ ?

ד. באיור הסמוך ישנם שני גרפים.
קבע על סמך הסעיפים הקודמים איזו פונקציה כל גרף
מתאר מבין הפונקציות: $h(x)$ , $g(x)$ , $f(x)$ . נמק את בחירותיך.

**51)** לפניך שלוש פונקציות: $h(x)=\frac{\sqrt{k-x^2}}{x^2}$ , $g(x)=\frac{x^2}{\sqrt{k-x^2}}$ , $f(x)=x^2\sqrt{k-x^2}$ $(k>0)$ .

א. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך
באמצעות חישוב מתאים:

i. לפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ תחום הגדרה זהה, השונה מתחום ההגדרה של $h(x)$ .

ii. קיימת פונקציה אשר אינה חותכת את ציר ה-$x$ כלל.

iii. הפונקציות: $h(x)$ ו-$g(x)$ הפוכות זו מזו בתחומי העלייה והירידה שלהן
(כאשר אחת עולה השנייה יורדת).

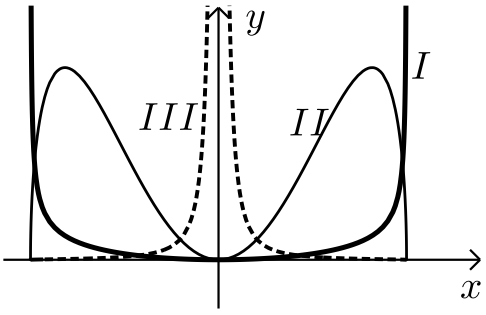
iv. לפונקציה: $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד.

מסמנים נקודה $A\left(0,\sqrt{12}\right)$ על ציר ה-$y$ . ידוע כי מרחקה מאחת מנקודות החיתוך
של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-$x$ שאינה בראשית הוא: $d=6$ .

ב. מצא את $k$ .

ג. מצא את נקודות הקיצון של גרף
הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.

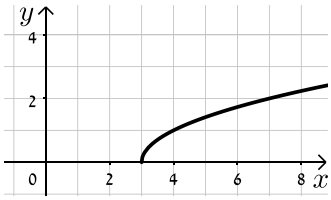
ד. לפניך איור ובו מסורטטות הסקיצות של
שלושת הפונקציות.
קבע עפ"י הסעיפים הקודמים איזה גרף
שייך לכל פונקציה.



## תשובות סופיות:

**37)** א. $x\geq 3$ ב. $\min(3,0)$ קצה ג. הפונקציה עולה בכל ת.ה.

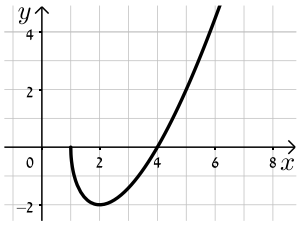
ד. $(3,0)$ ה. אין. ו. להלן סקיצה:




**38)** א. $x\geq 1$ ב. $\min(2,-2)$ , $\max(1,0)$ קצה

ג. עולה: $x>2$ , יורדת: $1<x<2$. ד. $(1,0),(4,0)$ ה. אין.

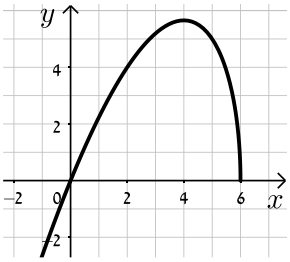
ו. להלן סקיצה:




**39)** א. $x\leq 6$ ב. $\min(6,0)$ , $\max\left(4,4\sqrt{2}\right)$ קצה

ג. עלייה: $x<4$ , ירידה: $4<x<6$ ד. $(6,0),(0,0)$.

ה. להלן סקיצה:




**40)** א. $x\geq 0$ ב. $\min(0,0)$ , $\max(1,1)$ קצה

ג. עולה: $0<x<1$ , יורדת: $x>1$ ד. $(0,0)$ ה. $y=0$.

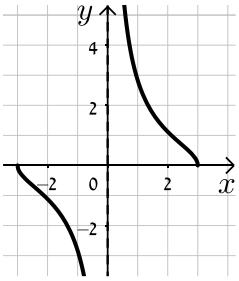
ו. להלן סקיצה:



**41** א. $-3\le x\le 3$ וגם $x\ne 0$ ב. $\max(-3,0)$ קצה, $\min(3,0)$ קצה

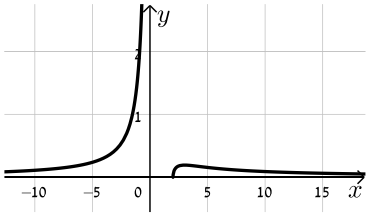
ג. עולה: אף $x$, יורדת: $-3\le x\le 3$ , $x\ne 0$ ד. $(-3,0),(3,0)$

ה. $x=0$. ו. להלן סקיצה:




**42** א. $x<0$ , $x\ge 2$ ב. $\max\left(3,\frac{1}{\sqrt{27}}\right)$ $\min(2,0)$ ג. $(2,0)$.

ד. להלן סקיצה:



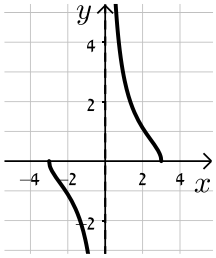

**43** א. $(2,0)$ ב. לא ג. $y=2\sqrt{2}x-4\sqrt{2}$ ד. $S=4\sqrt{2}$.

**44** א. $x\ne 1$ , $x\ge 0$ ב. $(9,6)$ ג. $y=6$.

**45** א. $-3\le x\le 3$ וגם $x\ne 0$ ב. $\max(-3,0)$ קצה, $\min(3,0)$ קצה

ג. עולה: אף $x$, יורדת: $-3\le x\le 3$ וגם $x\ne 0$ ד. $(-3,0),(3,0)$

ה. $x=0$ ו. להלן סקיצה:




**46** א. $a=1$ ב. $-3<x<3$ ג. $\left(-1.5,\sqrt{3}\right)$

ד. יורדת: $-3<x<-1.5$ , עולה: $-1.5<x<3$.

**47** א. $k=0.48$ ב. כן, $(0.6,0.57)$ ג. $y=0.74x+0.1352$.

**48** א. i. $-\sqrt{k}<x<\sqrt{k}$ ii. $x=\pm\sqrt{k}$ ב. $f'(x)=\frac{k^2}{\left(k-x^2\right)^{1.5}}>0$

ג. $y=\sqrt{k}x$ ד. $k=4$.

**49)** א. $g(x)=\sqrt{\frac{x+2}{x+4}}$ ב. i. לא נכון ii. נכון

iii. נכון iv. נכון ג. $f(x):\left(0,\frac{1}{2}\right)$ , $g(x):\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

ד. אסף צודק.

**50)** א. i. לא נכון ii. נכון iii. נכון ב. $h(x)=\frac{x^2}{x-1}$

ג. לא, $h(x):x\neq 1$ ד. $\mathrm{I}=h(x)$ , $\mathrm{II}=f(x)$.

**51)** א. i. לא נכון ii. לא נכון iii. נכון iv. נכון

ב. $k=24$ ג. $\max\left(\pm 4,32\sqrt{2}\right)$ , $\min(0,0)$

ד. $\mathrm{I}=g(x)$ , $\mathrm{II}=f(x)$ , $\mathrm{III}=h(x)$.

# תחומי קעירות ונקודות פיתול:

## סיכום כללי:

**תחומי קעירות – הגדרה:**

- פונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה (קמורה) בתחום $[x_0, x_1]$ אם לכל $x$ בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מעל לגרף הפונקציה.
כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מטה יש למצוא תחום שבו: $f''(x) < 0$.
- פונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה (קעורה) בתחום $[x_0, x_1]$ אם לכל $x$ בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מתחת לגרף הפונקציה.
כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מעלה יש למצוא תחום שבו: $f''(x) > 0$.

**נקודת פיתול – הגדרות:**

- נקודת פיתול היא נקודה שבה הפונקציה עוברת מתחום קעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה ולהיפך.
- נקודת פיתול מקיימת: $f''(x) = 0$ כאשר ערך הנגזרת השנייה משנה את סימנו בתחום שלפני ואחרי הנקודה המאפסת אותו.
- בנקודת פיתול המשיק לגרף הפונקציה חותך אותה ולא רק משיק לה מכיוון אחד.

## שאלות:

**52)** מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה: $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2$.

**53)** מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה: $f(x) = \frac{3x-2}{x^2}$.

**54)** מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x-1}}$.

**55)** מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה: $f(x) = x(x-2)^3$.

**56)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{a}{x^2+b}$ , $a,b$ פרמטרים.
הנקודה $(-1\ ,\ 1)$ היא נקודת פיתול של הפונקציה.
מצא את ערכי הפרמטרים $a,b$.

**57)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+2$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום הגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. מציאת נקודות פיתול.
ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**58)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2x}{x-\sqrt{x}}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום הגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. מציאת נקודות פיתול.
ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**59)** חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים:

i. מציאת תחום הגדרה.
ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
iii. מציאת נקודות קיצון וקביעת סוגן.
iv. מציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
v. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
vi. מציאת נקודות הפיתול של הפונקציה.
vii. מציאת תחומי הקעירות של הפונקציה.
viii. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

א. $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$

ב. $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$

ג. $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

ד. $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

ה. $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

ו. $f(x)=\frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)}$

ז. $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2-4}$

ח. $f(x)=\frac{x^3-x^2}{x^2-1}$

**הערה: בסעיפים ו ו-ז יש לבצע חקירה ללא סעיפים vi ו-vii.**

## תשובות סופיות:

**52)** $(1,7),(2,16)$, קעירות כלפי מעלה: $x>2$ או $x<1$, קעירות כלפי מטה: $1<x<2$.

**53)** $(2,1)$, קעירות כלפי מעלה: $x>2$, קעירות כלפי מטה: $0\neq x<2$.

**54)** קיצון: $\min(2,4)$, פיתול: $\left(4,\frac{8}{\sqrt{3}}\right)$.

**55)** קיצון: $\min\left(\frac{1}{2},-\frac{27}{16}\right)$, פיתול: $(2,0),(1,-1)$.

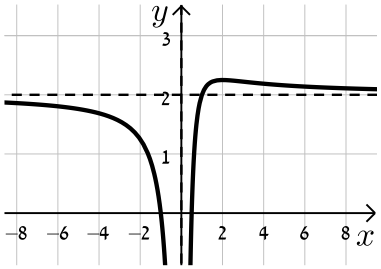
**56)** $a=4$, $b=3$.

**57)** א. $x\neq 0$ ב. $\max\left(2,2\frac{1}{4}\right)$ ג. עולה: $0<x<2$ יורדת: $x>2$, $x<0$

ד. $\left(\frac{1}{2},0\right),(-1,0)$ ה. $x=0$, $y=2$ ו. $\left(3,2\frac{2}{9}\right)$.

ז. קעירות כלפי מעלה: $x>3$, קעירות כלפי מטה: $0\neq x<3$.

ח. להלן סקיצה:

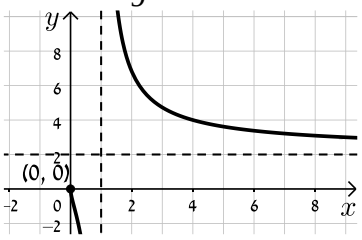



**58)** א. $1\neq x>0$ ב. אין. ג. יורדת בכל תחום הגדרתה.

ד. אין. ה. $x=1$, $y=2$ נקודת אי הגדרה: $(0,0)$. ו. $\left(\frac{1}{9},-1\right)$.

ז. קעירות כלפי מעלה: $x>1$ או $0<x<\frac{1}{9}$, קעירות כלפי מטה: $\frac{1}{9}<x<1$.

ח. להלן סקיצה:




**59)** א. i. $x\neq 0$ ii. $(1,0)$ iii. $x=0$, $y=0$ iv. $\max(2,0.25)$

v. עולה: $0<x<2$, יורדת: $x<0$, $x>2$ vi. $\left(3,\frac{2}{9}\right)$

vii. קעורה כלפי מעלה: $x>3$, קעורה כלפי מטה: $0<x<3$, $x<0$.

ב. i. $x\neq -1$ ii. $(0,0)$ iii. $x=-1$, $y=2$ iv. $\min(0,0)$

v. עולה: $x<-1$ , $x>0$ , יורדת: $-1<x<0$ vi. $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{9}\right)$

vii. קעורה כלפי מעלה: $-1<x<\frac{1}{2}$ , קעורה כלפי מטה: $x<-1$ , $x<\frac{1}{2}$.

ג. i. $x\neq\pm2$ ii. $(0,0)$ iii. $x=\pm2$

iv. $\max\left(-\sqrt{12},-5.2\right)$ , $\min\left(\sqrt{12},5.2\right)$.

v. עולה: $x>\sqrt{12}$ , $x<-\sqrt{12}$ , יורדת: $2<x<\sqrt{12}$ , $-2<x<2$ , $-\sqrt{12}<x<-2$

vi. $(0,0)$.

vii. קעורה כלפי מעלה: $x>2$ , $-2<x<0$ , קעורה כלפי מטה: $0<x<2$ , $x<-2$.

ד. i. $x\neq-1$ ii. $(0,0)$ iii. $x=-1$ iv. $\max(-3,-6.75)$

v. עולה: $x>-1$ , $x<-3$ , יורדת: $-3<x<-1$ vi. $(0,0)$

vii. קעורה כלפי מעלה: $x>0$ , קעורה כלפי מטה: $-1<x<0$ , $x<-1$.

ה. i. $x\neq1$ ii. $(-1,0),(0,-1)$ iii. $x=1$ , $y=1$ iv. אין.

v. יורדת בכל ת.ה. vi. $\left(-3,\frac{1}{8}\right),(-1,0)$

vii. קעורה כלפי מעלה: $-3<x<-1$ , $x>1$ , קעורה כלפי מטה: $-1<x<1$ , $x<-3$.

ו. i. $x\neq2,5$ ii. $(0,-0.1),(-1,0),(1,0)$ iii. $x=2$ , $x=5$ , $y=1$

iv. $\min(0.359,-0.11)$ , $\max(2.78,-3.89)$

v. עולה: $2<x<2.78$ , $0.359<x<2$ , יורדת: $x>5$ , $2.78<x<5$ , $x<0.359$.

ז. i. $x\neq\pm2$ ii. $(3,0),(1,0),(0,-0.75)$ iii. $x=\pm2$ , $y=1$

iv. אין. v. יורדת בכל ת.ה.

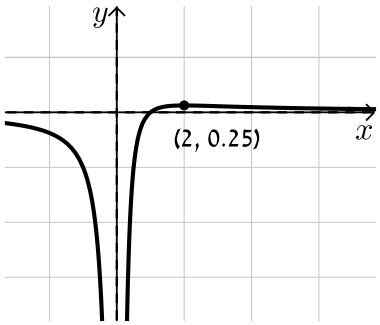
ח. i. $x\neq\pm1$ ii. $(0,0)$ iii. $x=-1$ iv. $\max(-2,-4)$ , $\min(0,0)$.

v. עולה: $x>0$ , $x<-2$ , $x\neq1$ , יורדת: $-1<x<0$ , $-2<x<-1$

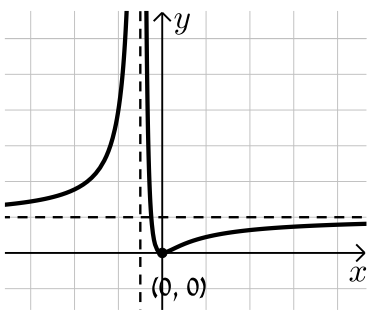
vi. אין. vii. קעורה כלפי מעלה: $x>-1$ , $x\neq1$ , קעורה כלפי מטה: $x<-1$.

**סקיצות:**

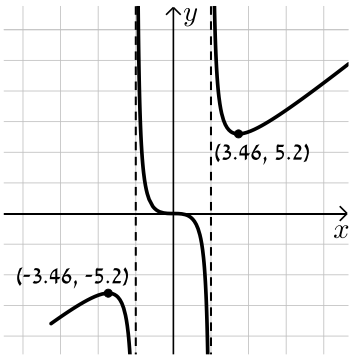
א.



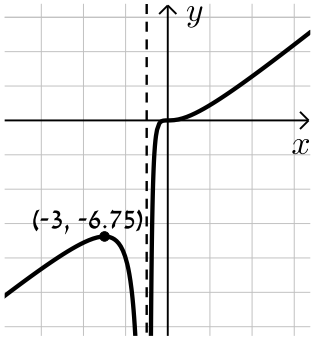

ב.



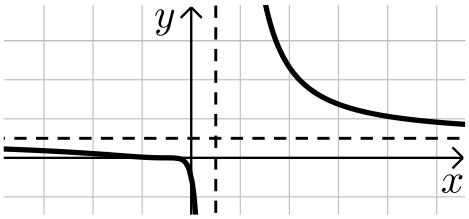

ג.



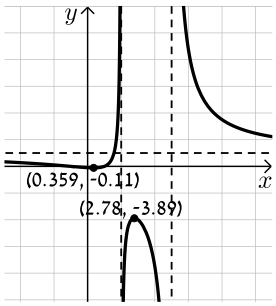

ד.



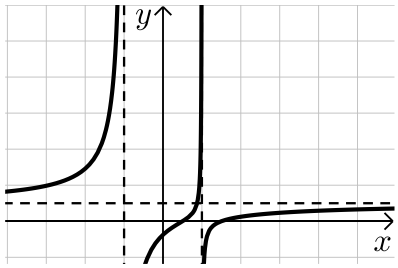

ה.



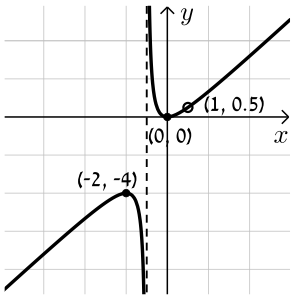

ו.




ז.




ח.



# חקירת פונקציה עם פרמטר:

## סיכום כללי:

סיווג נקודות קיצון באמצעות "$y$" :

אם הנקודה $A(x_1,y_1)$ היא נקודת קיצון אז :

- אם $f''(x_1)>0$ הנקודה $A(x_1,y_1)$ היא נקודת מינימום.
- אם $f''(x_1)<0$ הנקודה $A(x_1,y_1)$ היא נקודת מקסימום.

## שאלות:

**1)** מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה : $f(x)=x^3-12x$ .

**2)** מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה : $f(x)=x^2-6x-16$ .

**3)** מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה : $f(x)=x^3-3b^2x$ , $b>0$ פרמטר.
שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**4)** נתונה הפונקציה : $f(x)=\frac{2x}{a^2+x^2}$ $(a>0)$. חקור לפי הסעיפים הבאים :

א. מציאת תחום ההגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**5)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1-x^2}{(x-b)^2}$ , $(b>1)$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**6)** נתונה הפונקציה: $f(x)=4x\sqrt{b^2-x^2}$ , $(b>0)$.

חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**7)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-m}{ax-4}$ , $a,m$ פרמטרים קבועים כאשר: $a>0$.

ידוע כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- $y$.

א. מצא את הערך של הפרמטר $m$.

ב. הצב את הערך של $m$ שמצאת בסעיף א' והבא באמצעות $a$ את:

i. תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

iii. האסימפטוטות לגרף הפונקציה המקבילות לצירים.

ג. סרטט סקיצה וסמן בה את נקודות הקיצון ואת משוואות האסימפטוטות שהבעת באמצעות $a$ בסעיף הקודם.

ד. ידוע כי נקודת הקיצון שאינה על ציר ה- $y$ נמצאת במרחקים שווים מהצירים. מצא את הערך של הפרמטר $a$.

ה. נתון הישר: $y=k$. מצא עבור אילו ערכים של $k$ אין לישר ולגרף הפונקציה נקודות משותפות כלל.

## תשובות סופיות:

1) $\max(-2,16)$ , $\min(2,-16)$

2) $\min(3,-25)$

3) $\min(b,-2b^3)$ , $\max(-b,2b^3)$

4) א. כל $x$ ב. $\min\left(-a,-\frac{1}{a}\right)$ , $\max\left(a,\frac{1}{a}\right)$.

ג. עולה: $-a<x<a$ יורדת: $x>a$ , $x<-a$.

ד. $(0,0)$ ה. אסימפטוטה אופקית: $y=0$

5) א. $x\neq b$ ב. $\max\left(\frac{1}{b},\frac{1}{b^2-1}\right)$ ג. עולה: $x>b$ , $x<\frac{1}{b}$ יורדת: $\frac{1}{b}<x<b$.

ד. $\left(0,\frac{1}{b^2}\right)$ , $(-1,0)$ , $(1,0)$ ה. $x=b$ , $y=-1$.

6) א. $-b\le x\le b$ ב. $\min\left(-\frac{b}{\sqrt{2}},-2b^2\right)$ , $\max\left(\frac{b}{\sqrt{2}},2b^2\right)$ , $\min(-b,0)$ קצה,

ג. עולה: $-\frac{b}{\sqrt{2}}<x<\frac{b}{\sqrt{2}}$, יורדת: $\frac{b}{\sqrt{2}}<x<b$ , $-b<x<-\frac{b}{\sqrt{2}}$. $\min(b,0)$ קצה

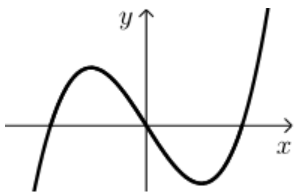
ד. $(0,0)$ , $(-b,0)$ , $(b,0)$.

7) א. $m=0$ ב. i. $x\neq\frac{4}{a}$ ii. $\min\left(\frac{8}{a},\frac{16}{a^2}\right)$ , $\max(0,0)$

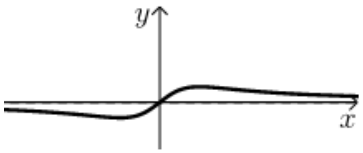
ב. iii. $x=\frac{4}{a}$ ד. $a=2$ ה. $0<k<4$.

## סקיצות לשאלות:

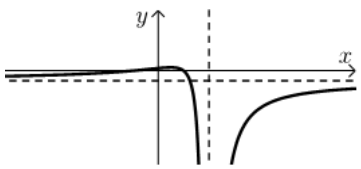
3)



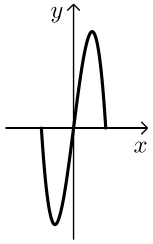

4)



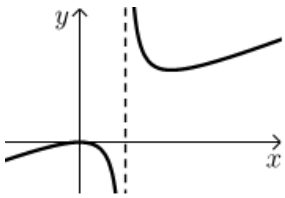

5)




6)




7)



# פונקציות ללא תבנית מפורשת:

## סיכום כללי:

**הגדרת פונקציה:**

פונקציה $f$ היא התאמה בין ערך $x$ לערך $y$ ומסומנת באופן הבא: $f:x\to y$.
כך שלכל $x$ מתאים ערך אחד בלבד של $y$. סימון אחר: $y=f(x)$.
הנגזרת של פונקציה $f(x)$ מסומנת $f'(x)$.

**כללי הגזירה לפי כלל השרשרת:**

- סימון הנגזרת: $\left(f(x)\right)'=f'(x)$.
- גזירה של פונקציה בחזקה: $\left(f^2(x)\right)'=2f(x)f'(x)$.
- גזירה של הרכבת פונקציות: $\left(f\left(g(x)\right)\right)'=f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$.

## שאלות:

**1)** הפונקציה $f(x)$ מקיימת: $f(1)=3$ ו- $f'(1)=-2$.
חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $f(1)+4$.

ב. $f'(1)+4$.

ג. $\dfrac{f(1)+1}{f'(1)-1}$.

ד. $\sqrt{f(1)+f'(1)}$.

**2)** נתונה פונקציה $f$ המקיימת: $f(4)=0$ ו- $f'(4)=1$.
מגדירים: $g(x)=2x+f(2x)$.
חשב את $g(2)$ ואת $g'(2)$.

**3)** נתונה פונקציה המקיימת: $f(8)=-1$ ו-$f'(8)=1$.

א. נתון: $g(x)=x^2\sqrt{f(4x)+f'(x+6)}$. חשב את $g(2)$.

ב. נתון: $h(x)=\dfrac{f(x+2)+x+2}{f'(14-x)-14+x}$. חשב את $h(6)$.

**4)** נתונה פונקציה המקיימת: $f(9)=-4$, $f'(9)=3$.

מגדירים: $g(x)=f^2(3x)+f'(x^2)$. חשב את $g(3)$.

**5)** פונקציה $f$ מקיימת: $f(4)=2$, $f'(4)=1$.

מגדירים: $g(x)=f^2(x)+f(x)+x$.

חשב את $g(4)$ ואת $g'(4)$.

**6)** פונקציה $f$ מקיימת: $f(1)=-3$, $f'(1)=3$. מגדירים: $g(x)=\dfrac{x\cdot f(x)}{x+f(x)}$.

חשב את $g(1)$ ואת $g'(1)$.

**7)** פונקציה $f$ מקיימת: $f(-2)=6$, $f'(-2)=2$. מגדירים: $g(x)=\sqrt{f^2(x)+1}$.

חשב את $g(-2)$ ואת $g'(-2)$.

**8)** פונקציה $f$ מקיימת: $f\left(\frac{1}{2}\right)=3$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3}$. מגדירים: $g(x)=3x\cdot f(2x)$.

חשב את $g\left(\frac{1}{4}\right)$ ואת $g'\left(\frac{1}{4}\right)$.

**9)** פונקציה $f$ מקיימת: $f(6)=\frac{2}{3}$, $f'(6)=-\frac{3}{2}$. מגדירים: $g(x)=\dfrac{x+3+f(x+3)}{f(2x)+3}$.

חשב את $g(3)$ ואת $g'(3)$.

**10)** נתונה פונקציה המקיימת: $f(8)=-3$. מגדירים: $g(x)=\frac{f(4x)+1}{f(x+6)+2}$.

א. חשב את $g(2)$.

ב. חשב את $f'(8)$ אם ידוע כי: $g'(2)=1$.

ג. חשב את $f'(8)$ אם ידוע כי: $g'(2)=\left(f'(8)\right)^2$ וכי $f'(8)<0$.

**11)** נתונה פונקציה המקיימת: $f(3)=-2$.

מגדירים: $g(x)=\frac{x^2\cdot f(x-2)}{f(2x-7)}$ וידוע כי $g'(5)=-15$.

חשב את $g(5)$ ואת $f'(3)$.

**12)** נתונה פונקציה שמקיימת: $f(4)=\frac{1}{2}$.

מגדירים: $g(x)=x^2\cdot f\left(x^2\right)+f'^2\left(x^2\right)$.

א. הבע את $g'(x)$ באמצעות $f$.

ב. חשב את $g(-2)$ ואת $g(2)$ אם ידוע כי $f'(4)=1$.

ג. חשב את $f'(4)$ אם ידוע כי $g'(2)=11$ ו- $f''(4)=\frac{1}{4}$.

## תשובות סופיות:

1) א. 7 ב. 2 ג. $-\frac{4}{3}$ ד. 1.

2) $g(2)=4\,,\,g'(2)=4$.

3) א. $g(2)=0$ ב. $h(6)=-1$.

4) $g(3)=19$.

5) $g(4)=10\,,\,g'(4)=6$.

6) $g(1)=1.5\,,\,g'(1)=3$.

7) $g(-2)=\sqrt{37}\,,\,g'(2)=\frac{12}{\sqrt{37}}$.

8) $g\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{4}\,,\,g'\left(\frac{1}{4}\right)=11$.

9) $g(3)=1\frac{9}{11}\,,\;g'(3)=\frac{327}{242}=1.351$.

10) א. $g(2)=2$ ב. $f'(8)=-\frac{1}{2}$ ג. $f'(8)=-2$.

11) $g(5)=25\,,\,f'(3)=-2$.

12) א. $g'(x)=2x\,f\left(x^2\right)+2x^3 f'\left(x^2\right)+4x\,f'\left(x^2\right)f''\left(x^2\right)$

ב. $g(2)=3\,,\,g'(-2)=3$ ג. $f'(4)=\frac{1}{2}$.

# מתמטיקה לתלמידי גאוגרפיה ופיתוח סביבתי 2

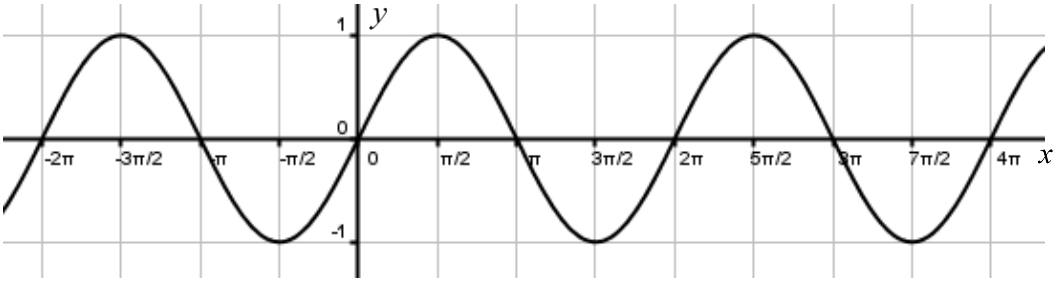
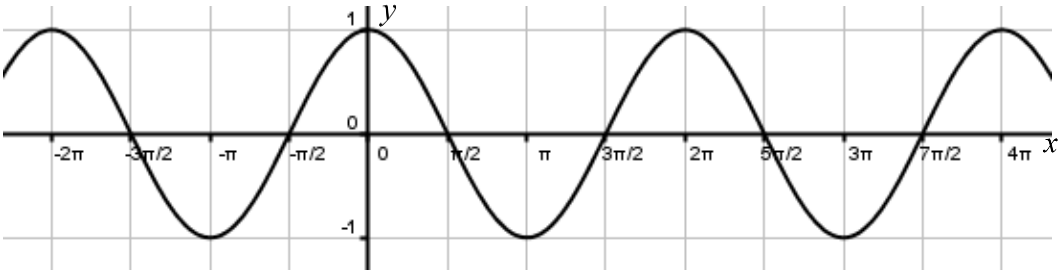
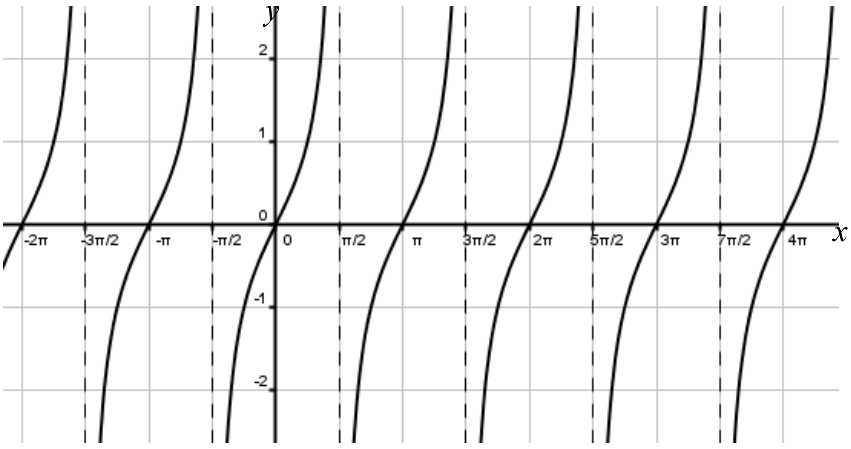
## פרק 10 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקציות טריגונומטריות

### תוכן העניינים

1. הגדרות כלליות ..... 157
2. גזירה של פונקציות טריגונומטריות ..... 159
3. שאלות עם משיקים ..... 161
4. מציאת תחום ההגדרה של פונקציות טריגונומטריות ..... 163
5. מציאת נקודות קיצון ..... 164
6. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים ..... 165
7. מציאת נקודות פיתול ותחומי קעירות ..... 166
8. חקירת פונקציה טריגונומטרית ..... 167

# הגדרות כלליות:

## סיכום כללי:

| |
|---|
| תיאור גרפי של פונקציית הסינוס $y=\sin x$ : |
|   |
| תיאור גרפי של פונקציית הקוסינוס $y=\cos x$ : |
|   |
| תיאור גרפי של פונקציית הטנגנס $y=\tan x$ : |
|   |

**הנגזרות הטריגונומטריות היסודיות:**

| הפונקציה | הנגזרת |
|---|---|
| $y=\sin x$ | $y'=\cos x$ |
| $y=\cos x$ | $y'=-\sin x$ |
| $y=\tan x$ | $y'=\frac{1}{\cos^2 x}$ |
| $y=\cot x$ | $y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$ |

**זוגיות של פונקציות:**

- פונקציה $f(x)$ תקרא זוגית אם היא מקיימת את התכונה הבאה: $f(x)=f(-x)$.
- פונקציה $f(x)$ תקרא אי-זוגית אם היא מקיימת את התכונה הבאה: $f(x)=-f(-x)$.
- פונקציה אשר אינה מקיימת אף אחת מהתכונות הנ"ל אינה זוגית ואינה אי-זוגית.

**מחזוריות של פונקציות:**

1) פונקציה $f(x)$ תיקרא מחזורית במחזור $T$ אם היא מקיימת: $f(x+T)=f(x)$ לכל $x$ בתחום הגדרתה.
2) מחזור של פונקציות טריגונומטריות:

- הפונקציה $f(x)=\sin x$ מחזורית במחזור $T=2\pi$ שכן: $\sin(x+2\pi)=\sin x$.
- הפונקציה $f(x)=\cos x$ מחזורית במחזור $T=2\pi$ שכן: $\cos(x+2\pi)=\cos x$.
- הפונקציה $f(x)=\tan x$ מחזורית במחזור $T=\pi$ שכן: $\tan(x+\pi)=\tan x$.
- הפונקציה $f(x)=\cot x$ מחזורית במחזור $T=\pi$ שכן: $\cot(x+\pi)=\cot x$.

# גזירה של פונקציות טריגונומטריות:

## שאלות:

**1)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sin x+3\cos x+x$

ב. $f(x)=2x\sin x+4\tan x$

ג. $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$

**2)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sin 3x+2\cos 5x$

ב. $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{1+\sin 2x}$

**3)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sin^3 x$

ב. $f(x)=2\cos^4 x$

ג. $f(x)=\sin^2 x$

ד. $f(x)=\sin^3 2x$

ה. $f(x)=\cos^2 2x$

ו. $f(x)=\tan^2 4x$

**4)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{\sin 3x}$

ב. $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$

**5)** גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sin^2 x-\cos^2 x$

ב. $f(x)=\sin^4 2x-\cos^4 2x$

ג. $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$

## תשובות סופיות:

1) א. $\cos x-3\sin x+1$ ב. $2\sin x+2x\cos x+\frac{4}{\cos^2 x}$ ג. $\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$

2) א. $3\cos 3x-10\sin 5x$ ב. $-\frac{2}{1+\sin 2x}$.

3) א. $3\sin^2 x\cdot\cos x$ ב. $-8\cos^3 x\sin x$ ג. $\sin 2x$

ד. $6\sin^2 2x\cos 2x$ ה. $-2\sin 4x$ ו. $\frac{8\tan 4x}{\cos^2 4x}$.

4) א. $\frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$ ב. $\frac{\cos^2 2x+1}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}$.

5) א. $2\sin 2x$ ב. $4\sin 4x$ ג. $-\sin 4x$.

# שאלות עם משיקים:

## שאלות:

**6)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה: $f(x)=\cos x$ בנקודה $A\left(\frac{\pi}{6},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

**7)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה: $f(x)=\sin 2x$ בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{2}$.

**8)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה: $f(x)=\tan 3x$ בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{9}$.

**9)** מצא את משוואות המשיקים לפונקציה: $f(x)=4\sin^2 x$ בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y=1$ בתחום $[0,\pi]$.

**10)** שיפוע המשיק לפונקציה: $f(x)=\sqrt{\sin x+a}$, ($a$ פרמטר) בנקודה שבה $y=1$ בתחום $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ הוא $\frac{\sqrt{3}}{4}$.
מצא את ערך הפרמטר $a$.

**11)** נתונה הפונקציה: $f(x)=a\sin^2 x-5\sin x+ax$, ($a$ פרמטר) בתחום: $0\le x\le\pi$.
ידוע כי הישר: $y=ax-2$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{6}$.

א. מצא את $a$ וכתוב את הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא נקודה על גרף הפונקציה בתחום הנתון שבה שיפוע המשיק הוא: $m=2$.

ג. האם קיימות נקודות נוספות בתחום הנתון ששיפוע המשיק דרכן הוא 2?
נמק את תשובתך.

ד. כתוב את משוואת המשיק העובר דרך הנקודה שמצאת.

**12)** נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=x^2+\cos^2 x$ , $g(x)=x^2+\sin^2 x$.

א. הוכח כי ההפרש: $f(x)-g(x)$ שווה ל- $\cos 2x$.

ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות בתחום: $-\pi<x<\pi$.

ג. ישר $x=t$ , $(0<t<1)$ חותך את הגרפים בנקודות A ו-B ומהן מעבירים משיקים לפונקציות. ידוע כי ההפרש בין שיפוע המשיק של גרף הפונקציה $g(x)$ לשיפוע המשיק של גרף הפונקציה $f(x)$ הוא 1.
מצא את כל הערכים האפשריים עבור $t$.

## תשובות סופיות:

**6)** $y=-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**7)** $y=-2x+\pi$.

**8)** $y=12x-\frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}$.

**9)** $y=2\sqrt{3}x-\frac{\pi\sqrt{3}}{3}+1$ , $y=-2\sqrt{3}x+\frac{5\pi\sqrt{3}}{3}+1$.

**10)** $a=\frac{1}{2}$.

**11)** א. $a=2$ , $f(x)=2\sin^2 x-5\sin x+2x$ ב. $\left(\frac{\pi}{2},\pi-3\right)$ ג. לא. ד. $y=2x-3$.

**12)** ב. $\left(\frac{\pi}{4},1.11\right)$ , $\left(\frac{3\pi}{4},6.05\right)$ , $\left(-\frac{\pi}{4},1.11\right)$ , $\left(-\frac{3\pi}{4},6.05\right)$ ג. $t=\frac{\pi}{12}$.

# מציאת תחום ההגדרה של פונקציות טריגונומטריות:

## שאלות:

**13)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות בתחום הנתון:

א. $f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos 2x}$ , $[0,2\pi]$

ב. $f(x)=\frac{1}{\sin x-\cos x}$ , $[-\pi,\pi]$

ג. $f(x)=\tan x$ , $[0,2\pi]$

## תשובות סופיות:

**13)** א. $0\le x\le 2\pi$ וגם $x\ne \frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$

ב. $-\pi\le x\le \pi$ וגם $x\ne \frac{\pi}{4},-\frac{3\pi}{4}$.

ג. $0\le x\le 2\pi$ וגם $x\ne \frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$.

# מציאת נקודות קיצון:

## שאלות:

**14)** מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x)=\sin x+\cos x$ בתחום: $[0,2\pi]$.

**15)** מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x)=\sin x-\frac{x}{2}$ בתחום: $[0,2\pi]$.

**16)** מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה: $f(x)=\frac{\sin x+1}{\sin x-1}$ בתחום: $[0,2\pi]$.

**17)** מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{1}{3}\sin^3 x-2\sin x$
בתחום: $[0,1.5\pi]$.

**18)** לפונקציה: $f(x)=a\sin x+b\sin^3 x$, ($a,b$ פרמטרים) יש נקודת קיצון
ששיעוריה $\left(\frac{7\pi}{6},-1\right)$.
מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.

## תשובות סופיות:

**14)** $\min(0,1)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)$ , $\min\left(\frac{5}{4}\pi,-\sqrt{2}\right)$ , $\max(2\pi,1)$ קצה.

**15)** $\min(0,0)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$ , $\min\left(\frac{5}{3}\pi,-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{6}\pi\right)$ , $\max(2\pi,-\pi)$ קצה.

**16)** $\min(2\pi,-1)$ קצה, $(0,-1)$ קצה, $\max\left(\frac{3}{2}\pi,0\right)$ מוחלט.

**17)** $\max\left(\frac{3}{2}\pi,2\frac{2}{15}\right)$ , $\min\left(\frac{\pi}{2},-2\frac{2}{15}\right)$

**18)** $a=3$ , $b=-4$.

# מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים:

## שאלות:

**19)** מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sin 3x}$ בתחום: $[0,\pi]$.

**20)** מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos x}$ בתחום: $[0,\pi]$.

**21)** מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה: $f(x)=\tan x$ בתחום: $[-\pi,\pi]$.

## תשובות סופיות:

**19)** $x=\pi$ , $x=\frac{2\pi}{3}$ , $x=\frac{\pi}{3}$ , $x=0$.

**20)** $x=\pi$ , $x=\frac{\pi}{2}$ , $x=0$.

**21)** $x=-\frac{\pi}{2}$ , $x=\frac{\pi}{2}$.

# מציאת נקודות פיתול ותחומי קעירות:

## שאלות:

**22)** מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה של הפונקציה: $f(x)=\sin^2 x-2\sin x$ בתחום: $[0,2\pi]$.

## תשובות סופיות:

**22)** נקודות פיתול: $\left(\frac{11}{6}\pi,1\frac{1}{4}\right)$ , $\left(\frac{7}{6}\pi,1\frac{1}{4}\right)$, קעור מעלה: $0<x<\frac{7}{6}\pi$ , $\frac{11}{6}\pi<x<2\pi$

קעור מטה: $\frac{7}{6}\pi<x<\frac{11}{6}\pi$.

# חקירת פונקציה טריגונומטרית:

## שאלות:

**23)** נתונה הפונקציה: $f(x)=x+2\cos x$ בתחום $[0,2\pi]$.
חקור לפי הסעיפים הבאים:
א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. מציאת נקודות פיתול.
ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקציה.
ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**24)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}$ בתחום $[0,\pi]$.
חקור לפי הסעיפים הבאים:
א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ בתחום הנתון.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**25)** נתונה הפונקציה: $f(x)=4\sin 2x-2$ בתחום $0\le x\le\pi$.
א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.
ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ד. מעבירים את הישר $y=k$ היעזר בסקיצה ומצא לאילו ערכי $k$ הישר יחתוך את גרף הפונקציה בשתי נקודות בדיוק.
ה. העבירו ישר המשיק לפונקציה בנקודת המקסימום המוחלט שלה.
כמו כן העבירו מנקודה זו אנך לציר $x$.
מצא את שטח המלבן הנוצר על ידי הצירים, המשיק והאנך.

**26)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\cos^2 x-\cos x-2$ בתחום: $0\le x\le 2\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ב. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**27)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\cos x+\frac{1}{m}\sin mx$ , $1<m<3$ ( $m$ פרמטר).

הנגזרת של הפונקציה מתאפסת כאשר: $x=-\frac{\pi}{2}$.

א. מצא את ערך הפרמטר $m$.

ב. האם הנקודה שבה: $x=-\frac{\pi}{2}$ היא נקודת קיצון? אם כן קבע את סוגה.
אם לא נמק מדוע.

ג. מצא כמה נקודות קיצון מקומיות יש לגרף הפונקציה בתחום: $0<x<2\pi$.

ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-$x$ בתחום הנתון.

**28)** נתונה הפונקציה הבאה: $y=\cos x\cdot(\sin x+1)$ בתחום: $0\le x\le 1.5\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ב. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. כמה פתרונות יש למשוואה: $\cos x\cdot(\sin x+1)=1$ בתחום הנתון?

**29)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\sin^2 x+\cos x-1$.

א. מצא בתחום $[0,\pi]$ את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה
ואת נקודות הקיצון שלה.

ב. הוכח שהפונקציה זוגית.

ג. שרטט את הפונקציה בתחום $[-\pi,\pi]$.

**30)** נתונה הפונקציה: $f(x)=4x-3\tan x$ בתחום $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.

ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$.

ה. מציאת אסימפטוטות אנכיות.

ו. מציאת נקודות פיתול.

ז. מציאת תחומי קעירות כלפי מעלה ומטה.

ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**31)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\tan 2x-8\sin 2x$ בתחום: $-0.25\pi<x<0.25\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.

ב. כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.

ג. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

**32)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\tan\left(x^2-4x\right)$ בתחום $[0,4]$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.

ג. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**33)** נתונה הפונקציה: $f(x)=x\cos x-x$ בתחום: $-3\pi\le x\le 3\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הראה כי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ הנגזרת של הפונקציה מתאפסת.

ii. ידוע גם כי: $f'(-3.67)=0$, $f'(3.67)=0$ וכי אין נקודות נוספות בתחום הנתון שבהן הנגזרת מתאפסת. קבע אלו נקודות, מבין נקודות החיתוך שמצאת, הן נקודות קיצון ואלו אינן נקודות קיצון.
מצא את סוג הקיצון בכל מקרה.

**34)** נתונה הפונקציה: $y=\left(\cos x+k\right)^2$ , $k$ פרמטר, בתחום: $0\le x\le 2\pi$.

הפונקציה חותכת את ציר ה-$x$ בנקודה שבה $x=\frac{2\pi}{3}$.

א. מצא את $k$ וכתוב את הפונקציה.

ב. מצא את נקודת המקסימום שאיננה מוחלטת בתחום הנתון.

ג. האם יש לגרף הפונקציה נקודות מינימום שאינן מוחלטות? אם כן מהן?

**35)** נתונה הפונקציה: $f\left(x\right)=m\sin x+k\cos^2 x$ ( $m$ פרמטר).

מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=\pi$ שמשוואתו: $y=-6x+6\pi+\sqrt{7}$.

א. מצא את ערכי הפרמטרים $k$ ו-$m$.

ב. מצא את נקודות הקיצון בתחום: $-0.5\pi\le x\le 1.5\pi$.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה וקבע עפ"י הסקיצה בכמה נקודות גרף הפונקציה חותך את ציר ה-$x$ בתחום הנ"ל.

**36)** נתונה הפונקציה: $f\left(x\right)=\tan x+kx$ ( $k$ פרמטר) בתחום: $0\le x\le \pi$.

א. מצא את האסימפטוטה האנכית של הפונקציה בתחום הנתון.

הפונקציה: $g\left(x\right)=\tan^2 x+kx$ חותכת את הפונקציה $f\left(x\right)$ בשתי נקודות החיתוך שלה עם ציר ה-$x$ בתחום הנתון.

ב. מצא את ערך הפרמטר $k$, $\left(k\ne 0\right)$.

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f\left(x\right)$ בתחום הנתון וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f\left(x\right)$.

**37)** לפניך הפונקציות הבאות: $f\left(x\right)=\sqrt{-\cos x}$ , $g\left(x\right)=\sqrt{\cos x+1}$ .

הפונקציה $f\left(x\right)$ מוגדרת בתחום $0.5\pi\le x\le 1.5\pi$ והפונקציה $g\left(x\right)$ מוגדרת בתחום $0\le x\le 2\pi$ .

א. האם הגרפים חותכים את ציר ה-$x$ בתחום הנתון? הראה חישוב מתאים.

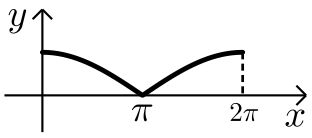
ב. האם הגרפים חותכים זה את זה בתחום הנתון? אם כן מצא את נקודות החיתוך.

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $f\left(x\right)$ בתחום הנתון וקבע את סוגה.

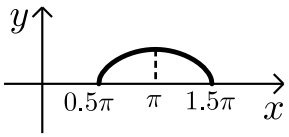
ד. לפניך ארבעה איורים: i , ii , iii , iv.

קבע על סמך הסעיפים הקודמים איזה איור מתאר את הגרף של $f\left(x\right)$ ואיזה מתאר את הגרף של $g\left(x\right)$ . נמק.

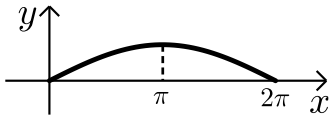
i.



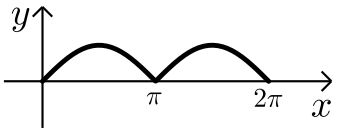

ii.




iii.




iv.



## תשובות סופיות:

**23)** א. $0 \le x \le 2\pi$.

ב. $\max(2\pi, 2\pi+2)$ קצה, $\min\left(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}\right)$ , $\max\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)$ , $\min(0,2)$ קצה.

ג. תחומי עלייה: $\frac{5\pi}{6} < x < 2\pi$ או $0 < x < \frac{\pi}{6}$ , תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$ .

ד. $(0,2)$. ה. אין. ו. $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ , $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$ , קעירות כלפי מטה: $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ או $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

**24)** א. $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ; $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ב. $\min\left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right)$.

ג. תחומי עלייה: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ , $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ תחומי ירידה: $0 < x < \frac{\pi}{4}$

ד. $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$ ה. אנכית: $x = \pi$ , $x = \frac{\pi}{2}$ , $x = 0$.

**25)** א. $\left(\frac{5}{12}\pi, 0\right)$ , $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$ , $(0,-2)$.

ב. $\max(\pi,-2), \min\left(\frac{3\pi}{4}, -6\right) \min\left(\frac{\pi}{4}, 2\right), \min(0,-2)$.

ד. $-6 < k < 2$ וגם $k \ne -2$ ה. $\frac{\pi}{2}$.

**26)** א. $(\pi,0), (0,-2)$.

ב. $\max(2\pi,-2), \min\left(1\frac{2}{3}\pi, -2.25\right), \max(\pi,0), \min\left(\frac{\pi}{3}, -2.25\right), \max(0,-2)$ .

ג. עולה: $1\frac{2}{3}\pi < x < 2\pi$ , $\frac{\pi}{3} < x < \pi$ , יורדת: $\pi < x < 1\frac{2}{3}\pi$ , $0 < x < \frac{\pi}{3}$ .

**27)** א. $m = 2$ ב. נקודת פיתול ג. 2 נקודות

ד. $(0.5\pi, 0), (1.5\pi, 0)$.

**28)** א. $(0,1)$ , $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ , $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ב. $(1.5\pi, 0), \left(\frac{5}{6}\pi, -1.29\right), \left(\frac{\pi}{6}, 1.29\right), (0,1)$

ד. 2 פתרונות.

**29)** א. חיתוך: $(0,0), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ , קיצון: $\min(\pi,-2)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4}\right), \min(0,0)$ קצה.

**30)** א. $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ וגם $x\ne\frac{\pi}{2}$

ב. $\min\left(\frac{2}{3}\pi,13.57\right)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{6},0.36\right),\min\left(-\frac{\pi}{6},-0.36\right)$ קצה

ג. תחומי עלייה: $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{6}$, תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ וגם $x\ne\frac{\pi}{2}$.

ד. $(0,0)$ ה. אנכית: $x=\frac{\pi}{2}$ ו. $(0,0)$

ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{2}{3}\pi$ או $-\frac{\pi}{6}\le x\le 0$, קעירות כלפי מטה: $0<x<\frac{\pi}{2}$.

**31)** א. $(0,0),(\pm 0.23\pi,0)$ ב. $x=\pm 0.25\pi$. ג. $\max\left(-\frac{\pi}{6},\sqrt{27}\right)$, $\min\left(\frac{\pi}{6},-\sqrt{27}\right)$.

**32)** א. $0\le x\le 4$ וגם $x\ne 3.56$, $x\ne 0.44$

ב. $\max(0,0)$ קצה, $\min(2,-1.16)$, $\max(4,0)$ קצה.

**33)** א. $(0,0),(2\pi,0),(-2\pi,0)$

ב. ii. $\min(-2\pi,0)$, $\max(2\pi,0)$, $(0,0)$ פיתול.

**34)** א. $k=0.5$, $y=(\cos x+0.5)^2$ ב. $(\pi,0.25)$

ג. לא.

**35)** א. $m=6$, $k=\sqrt{7}$ ב. $(-0.5\pi,-6),(0.5\pi,6),(1.5\pi,-6)$. ג. בשתי נקודות.

**36)** א. $x=0.5\pi$ ב. $k=-\frac{4}{\pi}\approx -1.27$

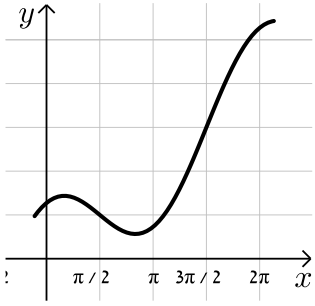
ג. $\min(\pi,-4),\max(0.84\pi,-3.9),\min(0.15\pi,-0.07),\max(0,0)$.

**37)** א. כן. $(0.5\pi,0),(1.5\pi,0)$. ב. כן, $g(x):(\pi,0)$, $f(x):\left(\frac{4}{3}\pi,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{2}{3}\pi,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

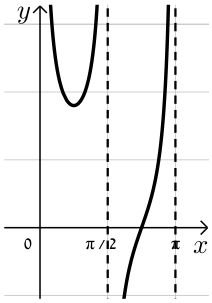
ג. $\max(0.5\pi,0),\min(1.5\pi,0),\max(\pi,1)$ ד. איור I - $g(x)$, איור II - $f(x)$.

## סקיצות לשאלות החקירה:

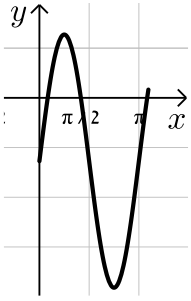
**(23**



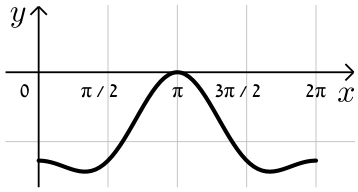

**(24**



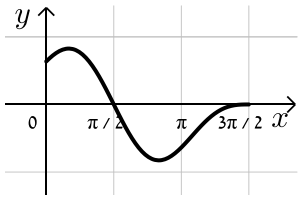

**(25**



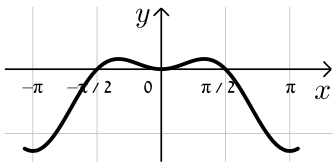

**(26**



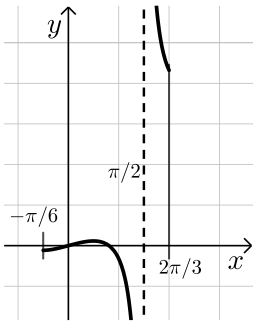

**(28**



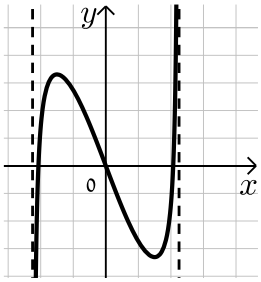

**(29**



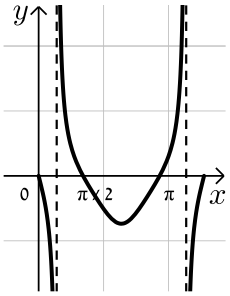

**(30**



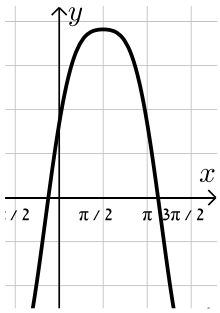

**(31**



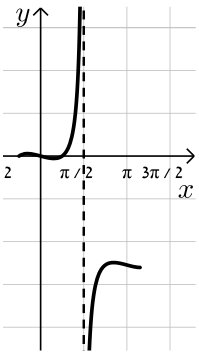

**(32**




**(35**




**(36**



# מתמטיקה לתלמידי גאוגרפיה ופיתוח סביבתי 2

## פרק 11 - חשבון דיפרנציאלי - הזזות ומתיחות של פונקציות

תוכן העניינים


1. הקדמה כללית ..... 175
2. הוספת קבוע לפונקציה ..... 177
3. הכפלת פונקציה בקבוע ..... 185
4. הזזת פונקציה ימינה ושמאלה ..... 192
5. מתיחה וכיווץ של פונקציה ..... 196
6. היפוך גרף פונקציה ביחס לציר y ..... 201
7. ערך מוחלט של פונקציה ..... 206

# הקדמה כללית:

## סיכום כללי:

- הוספת קבוע לפונקציה:
בהינתן פונקציה $y=f(x)$, כל הנקודות שעל גרף הפונקציה: $g(x)=f(x)+k$ מתקבלת ע"י הוספת קבוע $k$ לערך ה-$y$. במילים אחרות, אם נקודה $(x_0,y_0)$ נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ אז הנקודה $(x_0,y_0+k)$ תִּמָּצֵא על גרף הפונקציה $g(x)$.
הוספת קבוע מעלה ומורידה את גרף הפונקציה $f(x)$ ב- $k$ יחידות.

- הכפלת פונקציה בקבוע:
בהינתן פונקציה $y=f(x)$ ועליה נקודה כללית $(x_0,y_0)$, הפונקציה $g(x)=k\cdot f(x)$ מתקבלת ע"י הכפלת $f(x)$ בקבוע $k$ $(k\neq 0)$. נקודה על $g(x)$ תהיה מהצורה: $(x_0,k\cdot y_0)$. הכפלת פונקציה בקבוע חיובי מותחת ומכווצת את גרף הפונקציה בצורה אנכית. הכפלת פונקציה בקבוע שלילי מותחת ומכווצת את גרף הפונקציה בצורה אנכית והופכת אותו ביחס לציר ה-$x$.

- הזזת פונקציה ימינה ושמאלה:
כדי להזיז פונקציה $y=f(x)$, $k$ יחידות ימינה נציב: $g(x)=f(x-k)$
וכדי להזיז אותה שמאלה ב-$k$ יחידות נציב: $g(x)=f(x+k)$.

- מתיחה וכיווץ אופקיים של פונקציה:
כדי לכווץ פונקציה כלשהי $y=f(x)$ פי $k$ (מניחים $k>1$) נציב: $g(x)=f(k\cdot x)$.
כדי להרחיב פונקציה כלשהי $y=f(x)$ פי $k$ (מניחים $k>1$) נציב: $g(x)=f(x/k)$.

- שיקוף גרף פונקציה ביחס לציר $y$:
כדי לשקף את גרף הפונקציה $y=f(x)$ סביב ציר ה-$y$ נכפיל את ערך ה-$x$ פי 1-.
הגרפים של הפונקציות $y_1=f(x)$ ו-$y_2=f(-x)$ מהווים שיקוף זה לזה ביחס לציר ה-$y$.

- ערך מוחלט של פונקציה:

הערך המוחלט של: $y=f(x)$, מתקבל ע"י לקיחת ערכי ה- $y$ בגודלם בלבד.

במילים אחרות, הערך המוחלט של $f(x)$ הוא: $y=|f(x)|$. הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $|f(x)|$ זהים לחלוטין בערכם החיובי (ז"א בחלקם שמעל לציר ה- $x$) וסימטריים לחלוטין בערכם השלילי ביחס לציר ה- $x$ כאשר הגרף של $f(x)$ נמצא מתחת לציר ה- $x$ והגרף של $|f(x)|$ נמצא מעל לציר ה- $x$.

# הוספת קבוע לפונקציה:

## שאלות:

**1)** סרטט במערכת צירים אחת את גרף הפונקציה $f(x)=x^2$ ואת הגרף $y=f(x)+k$ עבור $k=1$ ו- $k=-4$.

**2)** נתונה הפונקציה: $f(x)=-2x^2$. מגדירים את הפונקציה: $g(x)=f(x)+b$

א. מהו ערך הפרמטר $b$ עבורו גרף הפונקציה $g(x)$ יעבור בנקודה $(2,10)$?

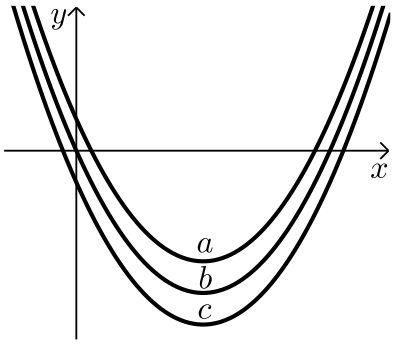
ב. מצא את ערך הפרמטר $b$ עבורו $g(x)$ תקבל ערך מקסימלי של 4.

ג. מצא את ערך הפרמטר $b$ עבורו $g(x)$ תקבל ערך מקסימלי של 3-.

**3)** לפניך שלוש גרפים של פונקציות:

$h(x)=x^2-6x+2$ , $g(x)=x^2-6x-2$ , $f(x)=x^2-6x$.

התאם כל גרף מבין הגרפים $a$, $b$ ו- $c$ לכל פונקציה:




**4)** נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3-4x$. מגדירים את הפונקציה: $g(x)=f(x)+A$

כאשר $A$ הוא פרמטר השונה מאפס.

א. הבע באמצעות $A$ את הפונקציה $g(x)$.

ב. מהו $A$ עבורו גרף הפונקציה $g(x)$ יהיה נמוך משל $f(x)$ ב-5 יחידות?

ג. מהו $A$ עבורו גרף הפונקציה $g(x)$ יחתוך את ציר ה- $y$ בנקודה שבה $y=3$?

**5)** נתונות שתי פונקציות: $f(x)=\frac{3-2x}{x}$ ו- $g(x)=\frac{3}{x}$.

א. הראה כי גרף הפונקציה $f(x)$ נמצא מתחת לגרף הפונקציה $g(x)$ לכל ערך של $x$ וחשב בכמה יחידות $f(x)$ מתחת ל-$g(x)$.

ב. כתוב פונקציה שערכיה יהיו גדולים משל $g(x)$ ב-4 יחידות לכל $x$.

**6)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2}{x^2}$. מגדירים את הפונקציה: $g(x)=f(x)+B$ , $B\neq 0$.

א. מהן האסימפטוטות האופקיות של $f(x)$ ושל $g(x)$?

ב. סרטט במערכת צירים אחת באופן איכותי את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ עבור $B>0$.

ג. האם גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה-$x$ עבור $B>0$?
נמק אלגברית וגרפית (היעזר בסעיף הקודם).

ד. מצא את $B$ עבורו גרף הפונקציה $g(x)$ יחתוך את ציר ה-$x$ בנקודה שבה $x=2$ וקבע איזה גרף מבין השנים יהיה מעל השני ובכמה יחידות.

**7)** מצא בכמה יחידות יש להוריד את גרף הפונקציה $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ על מנת שהיא תהיה אי-חיובית בכל תחום הגדרתה.

**8)** הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x}+b$ , ($b$ פרמטר) חותכת את ציר ה-$x$ בנקודה שבה $x=9$.
מצא בכמה יחידות היא נמוכה מהפונקציה: $g(x)=\sqrt{x}$.

**9)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{9-x^2}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה, נקודת הקיצון המקומית שלה ונקודות החיתוך שלה עם הצירים.

ב. מגדירים את הפונקציה $g(x)=f(x)+3$.
סרטט במערכת צירים את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$.

**10)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+b}{(x+a)^2}$ , $a,b\neq 0$. ידוע כי לפונקציה נקודת קיצון $\left(-1,\frac{1}{4}\right)$.

א. מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.

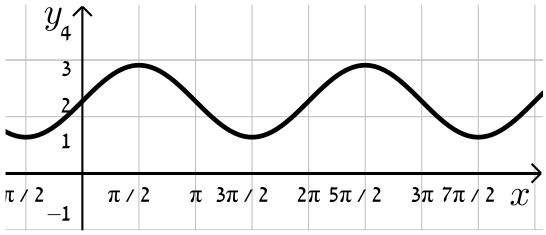
ב. חקור את הפונקציה לפי: תחום ההגדרה, נקודות קיצון וסוגן, תחומי עלייה וירידה, נקודות חיתוך עם הצירים, אסימפטוטות המקבילות לצירים, סרטוט סקיצה.

ג. מגדירים: $g(x)=f(x)+k$. מצא לאלו ערכי $k$ יהיה גרף הפונקציה $g(x)$ כולו מתחת לציר ה- $x$.

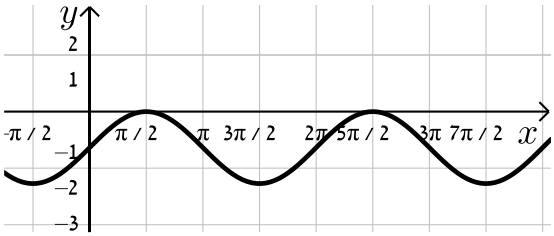
**11)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\sin x+b$.

קבע את הערך של $b$ בכל אחד מהמקרים הבאים:

א.



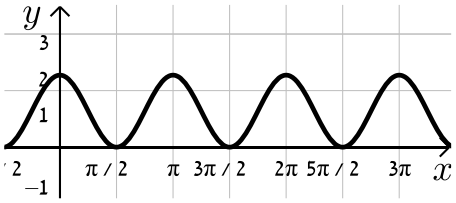

ב.



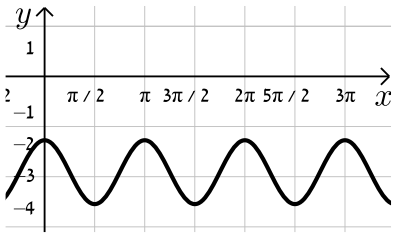

**12)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\cos 2x+b$.

קבע את הערך של $b$ בכל אחד מהמקרים הבאים:

א.




ב.




**13)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{a}{x+1}+\frac{x+1}{x+b}$ ( $a,b$ פרמטרים).

ידוע כי הפונקציה $g(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ מקיימת: $f(x)=g(x)+k$

כאשר $k$ הוא ערך קבוע כלשהו.

א. מצא את ערכי הפרמטרים $a$ , $b$ ו- $k$.

ב. מצא את נק' הקיצון ואת תחומי העלייה והירידה של שתי הפונקציות.

ג. הראה כי לפונקציות אין נקודות פיתול.

ד. סרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של שתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.
ציין על הגרפים את נקודות הקיצון והחיתוך עם הצירים.

**14)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+a}}{x+1}$ , $a$ פרמטר.

ידוע כי הפונקציה מקבלת ערך מינימלי של $-\sqrt{2}$.

א. מצא את $a$ וכתוב את הפונקציה $f(x)$.

ב. חקור את הפונקציה לפי: תחום הגדרה, נקודות קיצון וסוגן, תחומי עלייה וירידה, נקודות חיתוך עם הצירים, מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים, סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. מגדירים פונקציה: $g(x)=f(x)+k$. מצא את הערכים של $k$ עבורם לפונקציה $g(x)$ ולציר ה-$x$ לא יהיו נקודות משותפות כלל.

**15)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{a}{\sqrt{ax^2+2x+2}}$ , $a\neq 0$ פרמטר.

א. עבור אלו ערכים של $a$ הפונקציה מוגדרת לכל $x$?

ב. הבע באמצעות $a$ את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה אם נתון שהפונקציה מוגדרת לכל $x$.

ג. ידוע כי לפונקציה: $g(x)=f(x)-a$ יש נקודת קיצון על ציר ה-$x$.
מצא את ערכו של $a$.

**16)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{\sin x+a}{\cos x+1}$ בתחום $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, ($a$ פרמטר).

א. עבור אילו ערכים של $a$ אין לפונקציה נקודות קיצון בתחום הנתון.

ב. מגדירים פונקציה נוספת ע"י הוספת הקבוע $k$ באופן הבא: $g(x)=f(x)+k$.
ידוע כי ל-$g(x)$ נקודת קיצון $\left(-\frac{\pi}{4},3\right)$.
מצא את ערכו של הפרמטר $k$.

**17)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x+2}{(2x-1)^2}$.

א. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

i. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

iii. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

iv. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.

ב. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=\frac{9x-8x^2}{(2x-1)^2}$.

i. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

ii. מה הן נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים?

iii. הראה כי לכל נקודה $A(x_0,y_0)$ שבתחום ההגדרה של $f(x)$, מתקיים: $f(x_0)-g(x_0)=k$ ומצא את $k$.
מה ניתן לומר על הקשר שבין שתי הפונקציות?

ג. סרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של שתי הפונקציות.

**18)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{x}+a}{\sqrt{x+a}}$, כאשר $a$ הוא פרמטר השונה מאפס.

א. הבע את תחום ההגדרה של $f(x)$ באמצעות $a$ (הבחן בין שני מקרים).

ב. הראה כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון והבע את סוגה כתלות ב-$a$.
עבור הסעיפים הבאים הנח כי $a=3$.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. כתוב את האסימפטוטה האופקית של $f(x)$.

ii. מצא את נקודות החיתוך של $f(x)$ עם הצירים.

iii. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=\frac{bx+3b+\left(\sqrt{x}+3\right)\sqrt{x+3}+2x+6}{x+3}$.
$b$ פרמטר.

i. הבע באמצעות $b$ את האסימפטוטה האופקית של $g(x)$.

ii. היעזר בסעיפים הקודמים וקבע האם ניתן לכתוב את $g(x)$ באופן הבא: $g(x)=f(x)+k$. אם כן, הבע את $k$ באמצעות $b$.

## תשובות סופיות:

**1)** סרטוט בסוף.

**2)** א. $b=18$ ב. $b=4$ ג. $b=-3$.

**3)** ההתאמה: $h(x)\to a$ , $g(x)\to c$ , $f(x)\to b$.

**4)** א. $g(x)=x^3-4x+A$ ב. $A=-5$ ג. $A=3$.

**5)** א. הוכחה. ב. $h(x)=\dfrac{3+4x}{x}$.

**6)** א. $f(x)\to y=0$ , $g(x)\to y=B$ ב. סרטוט בסוף ג. לא.

ד. $B=-\dfrac{1}{2}$. $f(x)$ נמצאת מעל $g(x)$ ב- $\dfrac{1}{2}$ יחידה.

**7)** $\dfrac{1}{2}$ יחידה (לפחות).

**8)** 3 יחידות.

**9)** א. תחום הגדרה: $-3\le x\le 3$ , נקודת קיצון: $\max(0,3)$ ,

נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,3)$ , $(3,0)$ , $(-3,0)$ ב. סרטוט בסוף.

**10)** א. $a=3,b=2$ ב. תחום הגדרה: $x\ne -3$ , נקודת קיצון: $\max\left(-1,\dfrac{1}{4}\right)$ ,

עולה: $-3<x<-1$ , יורדת: $-1<x$ , $x<-3$ , חיתוך עם הצירים: $\left(0,\dfrac{2}{9}\right)$ , $(-2,0)$ ,

אסימפטוטות: $x=-3$ , $y=0$ ג. $k<-\dfrac{1}{4}$.

**11)** א. $b=2$ ב. $b=-1$.

**12)** א. $b=1$ ב. $b=-3$.

**13)** א. $a=1,b=2,k=1$ ב. נקודת קיצון של $f(x)$ $\max\left(-1\dfrac{1}{2},-3\right)$ ,

נקודת קיצון של $g(x)$ $\max\left(-1\dfrac{1}{2},-4\right)$. תחום עלייה: $x<-2$ או $-2<x<-1\dfrac{1}{2}$ ,

תחום ירידה: $-1\dfrac{1}{2}<x<-1$ או $-1<x$.

ג. סעיף הוכחה, אין נקודות פיתול. ד. סרטוט בסוף.

**14)** א. $a=-2$. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-2}}{x+1}$.

ב. תחום הגדרה: $x\le -\sqrt{2}$ או $\sqrt{2}\le x$ ,

נקודת קיצון $\min\left(-2,-\sqrt{2}\right)$ , $\min\left(\sqrt{2},0\right)$ , $\max\left(-\sqrt{2},0\right)$.

תחום עלייה: $\sqrt{2}<x$ או $-2<x<-\sqrt{2}$ , תחום ירידה $x<-2$.

נקודות חיתוך עם הצירים: $\left(\sqrt{2},0\right),\left(-\sqrt{2},0\right)$.

אסימפטוטות: יש אסימפטוטה אופקית $y=1$ כאשר $x\to\infty$, $y=-1$ כאשר $x\to-\infty$.

סרטוט בסוף.

ג. $k>\sqrt{2}$ או $k\le-1$.

**15)** א. $a>\frac{1}{2}$ ב. $\max\left(-\frac{1}{a},\sqrt{\frac{a^3}{2a-1}}\right)$ ג. $a=1$.

**16)** א. $a=0$ ב. $k=3$.

**17)** א. i. $x\neq0.5$ ii. אין. iii. $(0,2)$ iv. $x=0.5$, $y=0$

ב. i. $x\neq0.5$ ii. $\left(\frac{9}{8},0\right)$, $(0,0)$ iii. $k=2$, $g(x)=f(x)-2$.

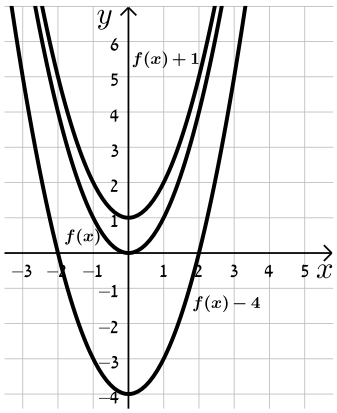
**18)** א. $a>0$: $x\ge0$, $a<0$: $x>-a$ ב. אם $a>0$, אז: $\max\left(1,\sqrt{a+1}\right)$

אם: $-1<a<0$ אז: $\min\left(1,\sqrt{a+1}\right)$ אם: $a\le-1$ אז: אין קיצון.

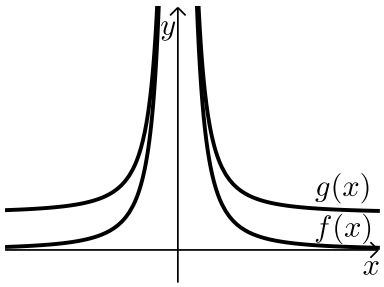
ג. i. $y=1$ ii. $\left(0,\sqrt{3}\right)$ ד. i. $y=b+3$ ii. כן, $k=b+2$.

## סרטוטים מרוכזים לפי מספרי שאלות:

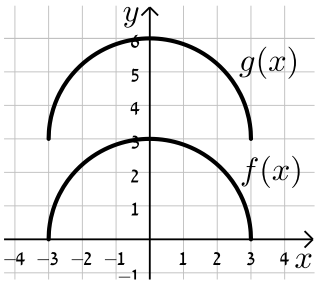
**1)**



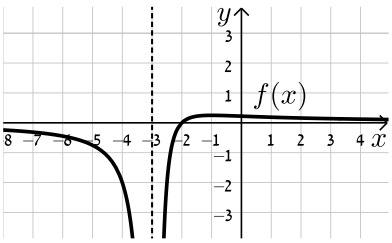

**6)**



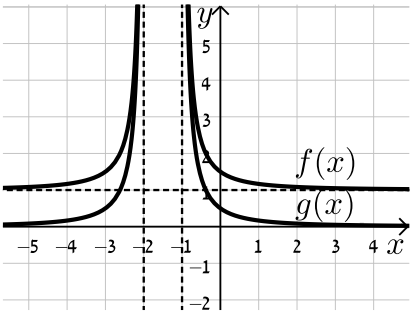

**9)**



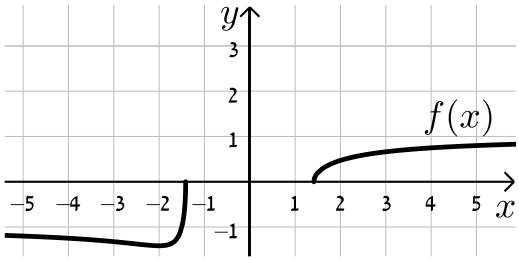

**10)**



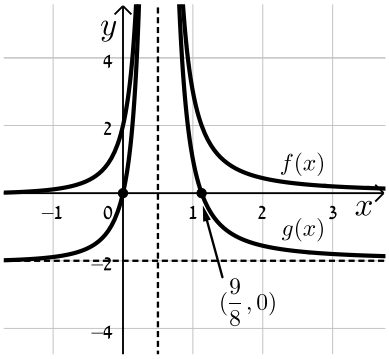
**(13**



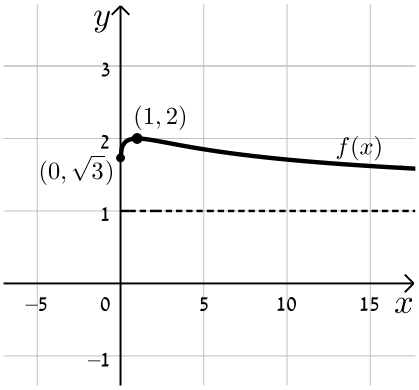

**(14**




**(17**




**(18**



## הכפלת פונקציה בקבוע:

### שאלות:

**19)** סרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות:
$f(x)=x^2$ , $g(x)=2x^2$ , $h(x)=4x^2$.

**20)** סרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות:
$f(x)=x^2$ , $g(x)=\frac{1}{2}x^2$ , $h(x)=\frac{1}{4}x^2$.

**21)** סרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות:
$f(x)=x^2$ , $g(x)=-2x^2$ , $h(x)=-\frac{1}{2}x^2$.

**22)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=8-x^3$.

א. מגדירים פונקציה חדשה: $g_1(x)=m\cdot f(x)$ , $m>1$.
סרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g_1(x)$.

ב. מגדירים פונקציה חדשה: $g_2(x)=m\cdot f(x)$ , $0<m<1$.
סרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g_2(x)$.

ג. נסמן ב-A את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- $y$,
ב- $B_1$ את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $g_1(x)$ עם ציר ה- $y$
וב- $B_2$ את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $g_2(x)$ עם ציר ה- $y$.

i. מצא את ערך הפרמטר $m$ עבור סעיף א' שמקיים: $y_{B_1}-y_A=24$.

ii. מצא את ערך הפרמטר $m$ עבור סעיף ב' שמקיים: $y_A-y_{B_2}=4$.

**23)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+8}$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של $f(x)$ עם הצירים.

ה. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ז. מגדירים את הפונקציה: $g(x)=3\cdot f(x)$. ענה על השאלות הבאות:

i. מהו תחום ההגדרה של $g(x)$?

ii. מהן נקודות הקיצון של $g(x)$?

iii. מהם תחומי העלייה והירידה של $g(x)$?

iv. מהם שיעורי נקודות החיתוך של $g(x)$ עם הצירים?

v. מהם האסימפטוטות המקבילות לצירים של $g(x)$?

ח. סרטט על אותה מערכת הצירים את גרף הפונקציה $g(x)$ לצד $f(x)$.

**24)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+8}$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של $f(x)$ עם הצירים.

ה. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ז. מגדירים את הפונקציה: $g(x)=-2\cdot f(x)$. ענה על השאלות הבאות:

i. מהו תחום ההגדרה של $g(x)$?

ii. מהן נקודות הקיצון של $g(x)$?

iii. מהם תחומי העלייה והירידה של $g(x)$?

iv. מהם שיעורי נקודות החיתוך של $g(x)$ עם הצירים?

v. מהם האסימפטוטות המקבילות לצירים של $g(x)$?

ח. סרטט על אותה מערכת הצירים את גרף הפונקציה $g(x)$ לצד $f(x)$.

**25)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x}{x^2+a}$, $a\neq 0$.

ידוע כי לגרף הפונקציה יש נקודת קיצון עבור $x=1$.

א. מצא את $a$ וכתוב את הפונקציה $f(x)$ ואת תחום הגדרתה.

ב. האם יש ל-$f(x)$ נקודות קיצון נוספות? אם כן מצא אותן וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. מהן האסימפטוטות המקבילות לצירים של $f(x)$?

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה של $f(x)$.

ו. מגדירים את הפונקציה $g(x)=k\cdot f(x)$.
ידוע כי ל-$g(x)$ יש נקודת קיצון $(1,1)$.
מצא את $k$ ואת נקודת הקיצון השנייה של הפונקציה $g(x)$.

ז. מוסיפים קבוע $B$ לפונקציה $g(x)$ כך שמתקבלת הפונקציה $h(x)=g(x)+B$
ובה אחת מנקודות הקיצון נמצאת על ציר ה-$x$.
מצא את כל הערכים האפשריים עבור הקבוע $B$.

**26)** נתונה הפונקציה: $f(x)=4x^3-x$ ומגדירים גם את הפונקציה: $g(x)=-f(x)$.

א. מצא את נקודות הקיצון ונקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה $f(x)$.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. התייחס לפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ וענה על השאלות הבאות:

i. הוכח כי לשתי הפונקציות אותן נקודות חיתוך עם ציר ה-$x$.

ii. מה הקשר בין נקודת החיתוך עם ציר ה-$y$ של כל פונקציה?

iii. מה הקשר בין נקודות הקיצון של כל פונקציה?

iv. האם, ואם כן – כיצד, משתנים תחומי העלייה והירידה של $g(x)$ ביחס ל-$f(x)$? נמק.

**27)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=k\cdot\frac{x-1}{x^2+3}$, $k>0$.
ידוע כי הנקודה הגבוהה ביותר על גרף הפונקציה מקיימת: $y=1$.

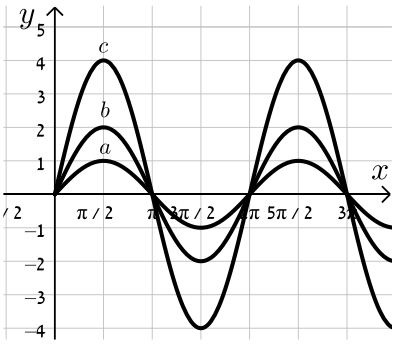
א. מצא את $k$ וכתוב את הפונקציה $f(x)$.

ב. חקור את הפונקציה לפי: תחום הגדרה, נקודות קיצון וסוגן, תחומי עלייה וירידה, נקודות חיתוך עם הצירים, אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. הוסף באותו הסרטוט סקיצה של הפונקציה: $g(x)=-f(x)$.

**28)** נתונה הפונקציה: $f(x)=k\sin x$.
באיור שלפניך 3 גרפים שונים.
קבע מה צריך להיות ערכו של הפרמטר $k$
עבורו כל גרף יתאים לפונקציה $f(x)$:



**29)** מהפונקציה $f(x)=\cos x$ בונים פונקציה חדשה $g(x)$ המתקבלת ע"י הכפלת הפונקציה המקורית פי 3 והזזתה כלפי מעלה ב-2 יחידות.

א. סרטט סקיצה של הפונקציה $g(x)$.

ב. בהנחה וסדר הפעולות של יצירת הפונקציה $g(x)$ היה הפוך, כלומר תחילה היינו מזיזים את הפונקציה המקורית כלפי מעלה ב-2 יחידות ורק לאחר מכן הפונקציה הייתה מוכפלת פי 3, האם הפונקציה המתקבלת הייתה זהה לזו שקיבלת בסעיף הקודם? נמק.

## תשובות סופיות:

**19)** סרטוט בסוף.

**20)** סרטוט בסוף.

**21)** סרטוט בסוף.

**22)** א. סרטוט בסוף. ב. סרטוט בסוף. ג. i. $m=4$ ii. $k=\frac{1}{2}$.

**23)** א. תחום הגדרה: כל $x$ ב. נקודת קיצון: $\max\left(-2,\frac{1}{4}\right)$ ג. עולה: $x<-2$

יורדת: $x>-2$ ד. נקודות חיתוך עם הצירים: $\left(0,\frac{1}{8}\right)$

ה. אסימפטוטות: $y=0$ ו. סרטוט בסוף. ז. i. תחום הגדרה: כל $x$.

ii. נקודת קיצון: $\min\left(-2,\frac{3}{4}\right)$ iii. עולה: $x<-2$ , יורדת: $x>-2$

iv. נקודות חיתוך עם הצירים: $\left(0,\frac{3}{8}\right)$ v. אסימפטוטות: $y=0$

ח. סרטוט בסוף.

**24)** א. תחום הגדרה: כל $x$ ב. נקודת קיצון: $\max\left(-2,\frac{1}{4}\right)$ ג. עולה: $x<-2$

יורדת: $x>-2$ ד. נקודות חיתוך עם הצירים: $\left(0,\frac{1}{8}\right)$

ה. אסימפטוטות: $y=0$ ו. סרטוט בסוף. ז. i. תחום הגדרה: כל $x$

ii. נקודת קיצון: $\min\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$ iii. עולה: $x>-2$ , יורדת: $x<-2$

iv. נקודות חיתוך עם הצירים: $\left(0,-\frac{1}{4}\right)$ v. אסימפטוטות: $y=0$

ח. סרטוט בסוף.

**25)** א. $a=1$ , $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ , תחום הגדרה: כל $x$

ב. נקודות קיצון: $\min\left(-1,-\frac{1}{2}\right),\max\left(1,\frac{1}{2}\right)$

ג. עולה: $-1<x<1$ , יורדת: $x>1$ , $x<-1$ ד. אסימפטוטות: $y=0$

ה. סרטוט בסוף. ו. $k=2$ , $\min(-1,-1)$ ז. $B=\pm 1$.

**26)** א. נקודות קיצון: $\max\left(-\frac{1}{\sqrt{12}},0.192\right),\min\left(\frac{1}{\sqrt{12}},-0.192\right)$ , נקודות חיתוך עם

הצירים: $(0,0)$ , $\left(\frac{1}{2},0\right)$ , $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ ב. סרטוט בסוף.

ג. i. הוכחה. ii. זו אותה נקודה.
iii. שיעורי ה-$x$ של נקודות הקיצון זהים, אך שיעורי ה-$y$ הפוכים בסימנם וסוג הקיצון הפוך. iv. כל תחומי העלייה והירידה מתהפכים.

**27)** א. $k=6$ , $f(x)=\frac{6(x-1)}{x^2+3}$

ב. תחום הגדרה: כל $x$ , נקודות קיצון: $\max(3,1)$ , $\min(-1,-3)$ , עולה: $-1<x<3$ ,
יורדת: $x>3$ , $x<-1$ , נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,-2)$ , $(1,0)$ , אסימפטוטות: $y=0$.

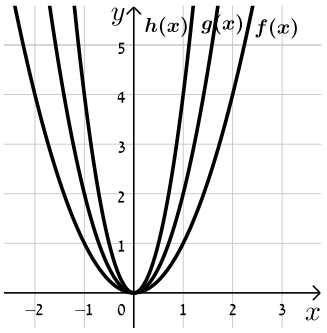
ג. סרטוט בסוף. ד. סרטוט בסוף.

**28)** $c:k=4$ , $b:k=2$ , $a:k=1$.

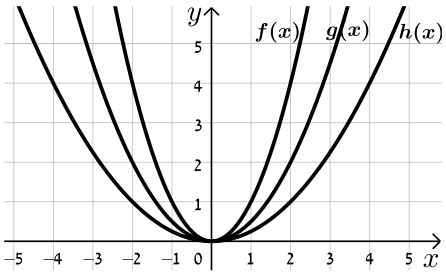
**29)** א. סרטוט בסוף. ב. לא הייתה מתקבלת אותה הפונקציה.

**סרטוטים מרוכזים לפי מספרי שאלות:**

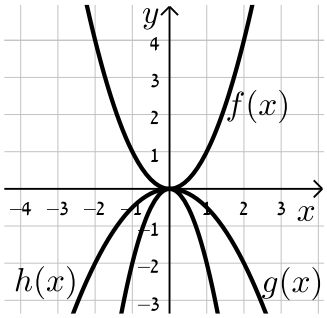
**19)**



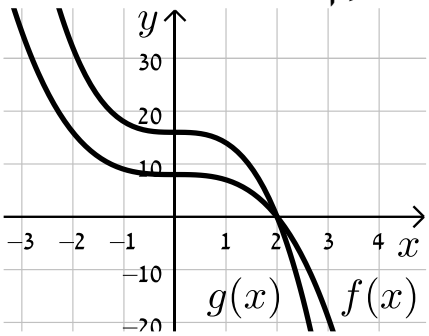

**20)**



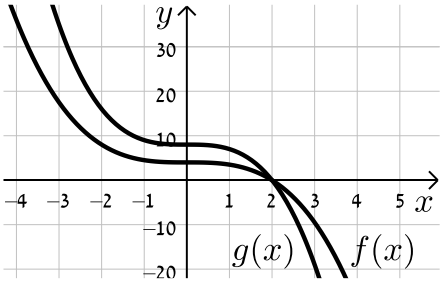

**21)**



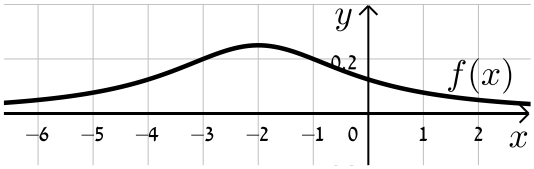

**22) סעיף א**



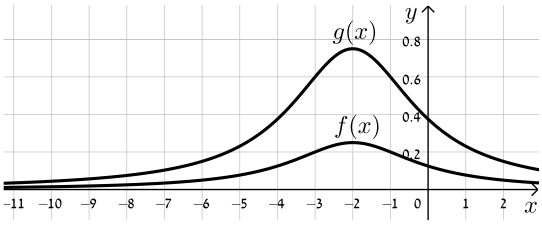

**22) סעיף ב**



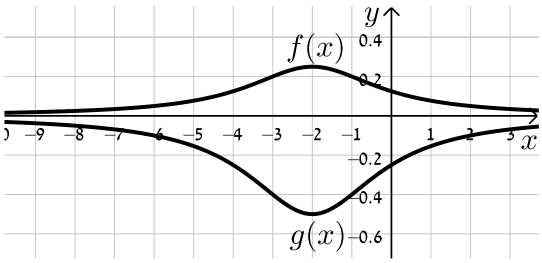

**23) סעיף ו**



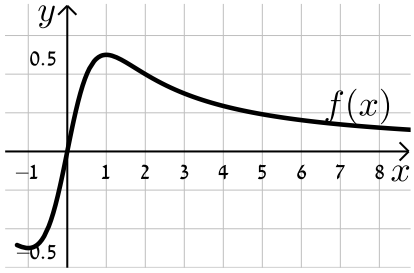
23) סעיף ח



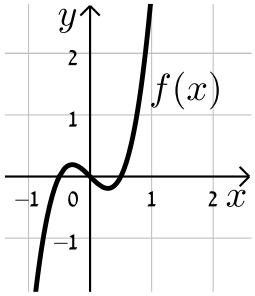

24) סעיף ח



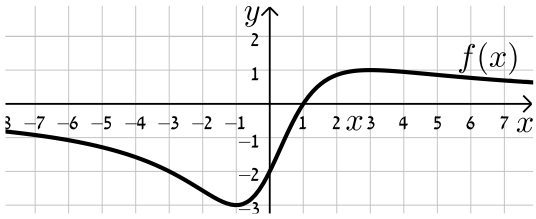

25)



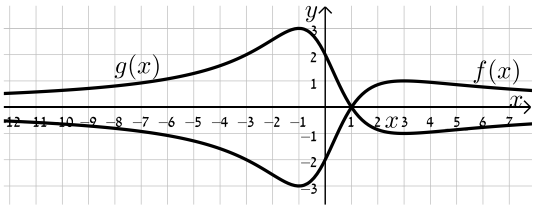

26)



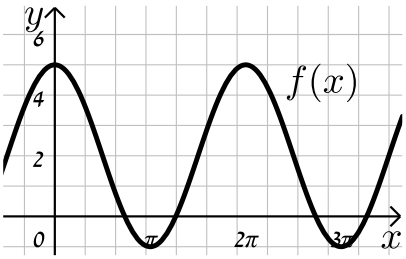

27) סעיף ג




27) סעיף ד




29)



## הזזת פונקציה ימינה ושמאלה:

### שאלות:

**30)** לפניך הפונקציה: $f(x)=x^2$.
סרטט במערכת צירים אחת את גרף הפונקציה $f(x)$ ואת הגרפים של הפונקציות: $g(x)=f(x-2)$ ו-$h(x)=f(x+3)$.

**31)** נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2$.

א. כתוב ביטוי מפושט לפונקציה המתקבלת מהזזת $f(x)$ 3 יחידות ימינה ו-4 יחידות למעלה.

ב. כתוב ביטוי מפושט לפונקציה המתקבלת מהזזת $f(x)$ 4 יחידות שמאלה ו-2 יחידות למטה.

ג. כתוב ביטוי מפושט לפונקציה המתקבלת מהזזת $f(x)$ $\frac{1}{2}$ יחידה שמאלה ולמעלה.

**32)** נתונה פונקציה $f(x)=x^2$. מזיזים את הפונקציה ומקבלים: $g(x)=f(x+a)+b$
כאשר $a$ ו-$b$ הם פרמטרים השונים מאפס.

א. מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו-$b$ אם ידוע כי: $g(x)=x^2+2x$.

ב. מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו-$b$ אם ידוע כי: $g(x)=x^2-4x+7$.

**33)** מזיזים את גרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$ 5 יחידות ימינה כך שמתקבלת הפונקציה $g(x)$.

א. כתוב באופן מפורש את הפונקציה $g(x)$.

ב. מצא בכמה יחידות יש להזיז את גרף הפונקציה $f(x)$ שמאלה על מנת שיחתוך את ציר ה-$y$ בנקודה שבה $y=1$.

**34)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-3x}{x+1}$.

א. כתוב את תחום ההגדרה של $f(x)$ ואת האסימפטוטות המקבילות לצירים.

ב. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. מגדירים את הפונקציה: $g(x)=f(x-1)$.

i. כתוב באופן מפורש את הפונקציה $g(x)$.

ii. על סמך ממצאיך מהסעיפים הקודמים, סרטט את גרף הפונקציה $g(x)$.

**35)** לפניך הפונקציה: $f(x)=\frac{x^3}{x-4}$.

א. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

i. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. נקודות קיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.

iii. תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.

iv. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.

v. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

vi. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. סרטט את גרף הפונקציה $g(x)=\frac{(x+2)^3}{x-2}$ על סמך הסעיפים הקודמים.

**36)** מזיזים את הפונקציה: $f(x)=\sin x+\cos x$ במספר יחידות $a$ כך שיש לה נקודת מקסימום על ציר ה- $y$.

א. מצא בכמה יחידות יש להזיז את הפונקציה $f(x)$ על מנת שתקיים את הדרישה וקבע האם התזוזה היא ימינה או שמאלה. נמק.
האם קיים רק ערך אחד של הפרמטר $a$ אשר מקיים את דרישה זו?

ב. היעזר בזהות: $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ והראה כי הפונקציה $g(x)=k\cos x$ המוזזת יכולה להיות מיוצגת ע"י $k$ ומצא את ערך הפרמטר.

## תשובות סופיות:

**30)** סרטוט בסוף.

**31)** א. $g(x)=x^2-6x+13$ ב. $g(x)=x^2+8x+14$ ג. $g(x)=x^2+x+\frac{3}{4}$.

**32)** א. $a=1\ ,\ b=-1$ ב. $a=-2\ ,\ b=3$.

**33)** א. $g(x)=\sqrt{x-5}$ ב. 1.

**34)** א. תחום הגדרה: $x\neq -1$, אסימפטוטות: $x=-1$

ב. נקודות קיצון: $\min(1,-1)\ ,\ \max(-3,-9)$

ג. עולה: $x>1\ ,\ x<-3$, יורדת: $-1<x<1\ ,\ -3<x<-1$

ד. נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0)\ ,\ (3,0)$

ה. סרטוט בסוף ו. i. $g(x)=\frac{x^2-5x+4}{x}$ ii. סרטוט בסוף.

**35)** א. i. תחום הגדרה: $x\neq 4$ ii. נקודת קיצון: $\min(6,108)$

iii. עולה: $x>6$, יורדת: $4<x<6\ ,\ x<4$

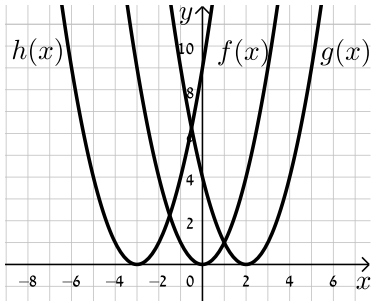
iv. נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0)$

v. אסימפטוטות: $x=4$ vi. סרטוט בסוף ב. סרטוט בסוף.

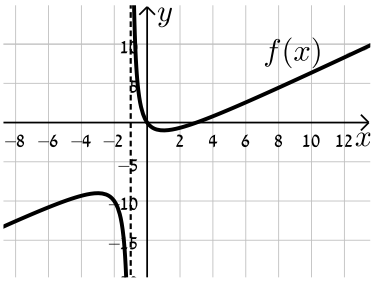
**36)** א. יחידות $\frac{\pi}{4}$ ב. $k=\sqrt{2}$

### סרטוטים מרוכזים לפי מספרי שאלות:

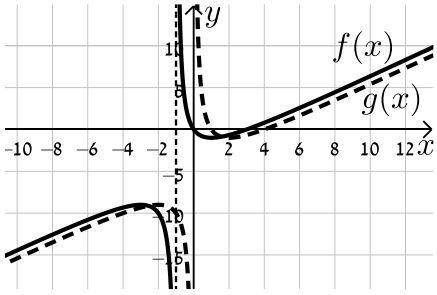
**30)**



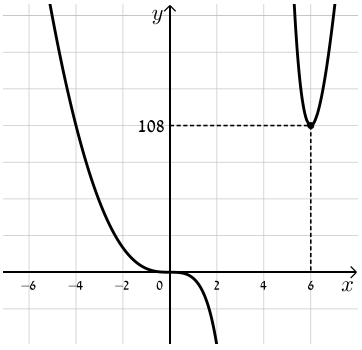

**34) סעיף ה**



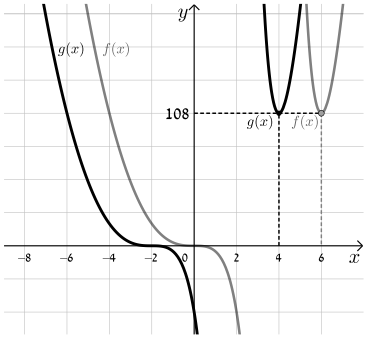

**34) סעיף ו.ii**




**35) סעיף א.iv**



**35) סעיף ב**



## מתיחה וכיווץ של פונקציה:

### שאלות:

**37)** נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2$. כתוב באופן מפורש וסרטט במערכת צירים אחת את הפונקציות הבאות: $g(x)=f(2x)$, $h(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)$.

**38)** נתונה הפונקציה: $f(x)=6x-2x^2$. כתוב באופן מפורש וסרטט במערכת צירים אחת את הפונקציות הבאות: $g(x)=f(2x)$, $h(x)=f\left(\frac{x}{4}\right)$.

**39)** נתונה הפונקציה: $f(x)=12x-3x^3$. רוצים לכווץ את הפונקציה כך שנקודת החיתוך החיובית שלה עם ציר ה-$x$ תקטן פי 4. כתוב פונקציה מפושטת המתארת את הכיווץ הנ"ל.

**40)** הפונקציה: $f(x)=\frac{x^4-8x}{16}$ חותכת את ציר ה-$x$ בחלקו החיובי בנקודה A.
מצא כיווץ של הפונקציה כך ששיעורי הנקודה A יהיו $(1,0)$.

**41)** נתונה הפונקציה: $f(x)=6x-x^2$. רוצים לכווץ אותה פי $k$ כך שנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-$x$ שאינה ראשית הצירים תקטן פי 3. נסמן את הפונקציה המכווצת ב-$g$.

א. מצא את ערכו של הפרמטר $k$.

ב. כתוב את הפונקציה המכווצת $g(x)$ בצורה מפורשת.

ג. סרטט את הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ באותה מערכת צירים.

ד. הראה כיצד משתנה נקודת הקיצון במקרה זה.

**42)** גרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{ax-x^2}$ , $a\neq 0$ חותך את ציר ה-$x$ בנקודה A שאינה בראשית הצירים, וגרף הפונקציה $g(x)=f(4x)$ חותך את ציר ה-$x$ בנקודה B שאינה בראשית הצירים. ידוע כי $x_B=3$.

א. מצא את ערך הפרמטר $a$ וחקור את הפונקציה $f(x)$ לפי הסעיפים הבאים:

i. תחום הגדרה.

ii. נקודות קיצון (מקומיות ומוחלטות אם ישנן) וקביעת סוגן.

iii. תחומי עלייה וירידה.

iv. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. היעזר בתוצאות הסעיף הקודם וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$. נמק כל שלב בקביעותיך.

**43)** מותחים את הפונקציה $f(x)=\sqrt{4-3x-x^2}$ פי $k$ , $(k>1)$ כך שמתקבלת הפונקציה $g(x)$. ידוע כי תחום ההגדרה של $g(x)$ הוא: $-16\le x\le 4$.

א. מצא את $k$.

ב. האם לגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ אותה נקודת קיצון מקומית? אם כן – מהי? אם לא – נמק קביעותיך.

**44)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{3}{x^2+8x+12}$ ומגדירים את: $g(x)=f(x/4)$ ו- $h(x)=f(3x)$.

א. חקור את $f(x)$ לפי: תחום הגדרה, אסימפטוטות המקבילות לצירים, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון וסוגן, תחומי עלייה וירידה.

ב. היעזר בסעיפים הקודמים וענה על השאלות הבאות:

i. מהו הקשר בין האסימפטוטות של הפונקציות $g(x)$ ו-$h(x)$ לבין האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$?

ii. מהו הקשר בין נקודות הקיצון של הפונקציות $g(x)$ ו-$h(x)$ לבין נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$?

ג. סרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של $f(x)$ ושל $g(x)$ ו-$h(x)$.

**45)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{a\sin^2 x+1}$ , $a>0$.

א. מצא את ערך הפרמטר $a$ אם ידוע כי לפונקציה ערך מינימלי של $\frac{1}{5}$.

ב. הראה כי לפונקציה נקודות מקסימום המקיימות: $x_{max}=\pi k$ , $k$ שלם.
וכי הערך המירבי של הפונקציה הוא 1.

ג. מגדירים פונקציה: $g(x)=B\cdot f(x/m)$ אשר מקיימת:

i. נקודות המקסימום של הפונקציה מקיימות: $x_{max}=\frac{\pi}{2}k$ , $k$ שלם

ii. הערך המירבי של הפונקציה הוא 2.
מצא את ערכי הפרמטרים $m$ ו- $B$.

## תשובות סופיות:

**37)** $h(x)=\frac{x^2}{4}$ , $g(x)=4x^2$.

**38)** $h(x)=1\frac{1}{2}x-\frac{x^2}{8}$ , $g(x)=12x-8x^2$.

**39)** $f(4x)=48-192x^3$.

**40)** $f(2x)=x^4-x$.

**41)** א. $k=3$ ב. $g(x)=18x-9x^2$ ג. סרטוט בסוף

ד. ערך ה-$x$ של נקודת הקיצון מתכווץ פי 3 (במקום $\max(3,9)$ הופך ל-$\max(1,9)$).

**42)** א. $a=12$ i. תחום הגדרה: $0\le x\le 12$ ii. נקודת קיצון: $\min(12,0)$

קצה, $\max(6,6)$ , $\min(0,0)$ קצה, iii. עולה: $0<x<6$ , יורדת: $6<x<12$ iv. סרטוט בסוף ב. סרטוט בסוף.

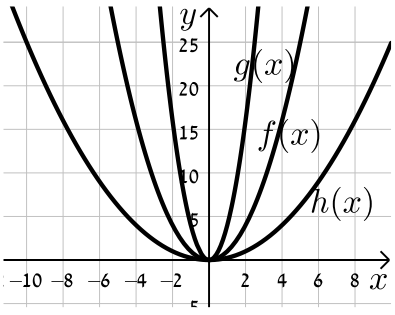
**43)** א. $k=4$ ב. לגרפים אין את אותה נקודת קיצון. ערך ה-$x$ של נקודת הקיצון של $g(x)$ גדל פי 4 ביחס ל-$f(x)$ (מ-$x_{max}=-1.5$ ל-$x_{max}=-6$) עקב חלוקת ה-$x$ ב-4, כמו כל הנקודות בפונקציה (וערך ה-$y$ נותר ללא שינוי).

**44)** א. תחום הגדרה: $x\ne -2,-6$ , אסימפטוטות: $y=0$ , $x=-2,-6$ , נקודות חיתוך עם הצירים: $\left(0,\frac{1}{4}\right)$, נקודת קיצון: $\max\left(-4,-\frac{3}{4}\right)$, עולה: $x<-6$ , $-6<x<-4$ יורדת: $x>-2$ , $-4<x<-2$ ב. i. האסימפטוטה האופקית נותרת ללא שינוי. האסימפטוטות האנכיות משתנות ב-$g(x)$ הן מוכפלות ב-4 וב-$h(x)$ הן מחולקות ב-3. ii. ערך ה-$x$ של נקודת הקיצון משתנה: ב-$g(x)$ הוא מוכפל ב-4 וב-$h(x)$ הוא מחולק ב-3. ערך ה-$y$ של נקודת הקיצון נותר ללא שינוי וכך גם סוג הקיצון. ג. סרטוט בסוף.

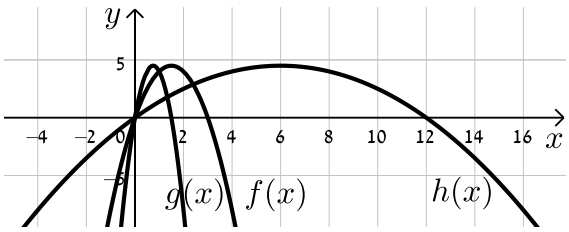
**45)** א. $a=4$ ב. הוכחה. ג. i. $(0,2)$ ii. $B=2$ , $m=\frac{1}{2}$.

### סרטוטים מרוכזים לפי מספרי שאלות:

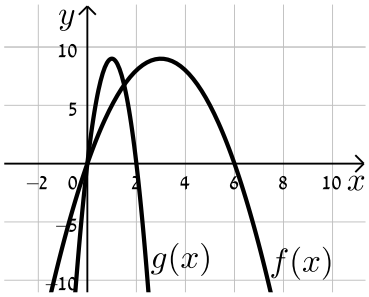
**37)**



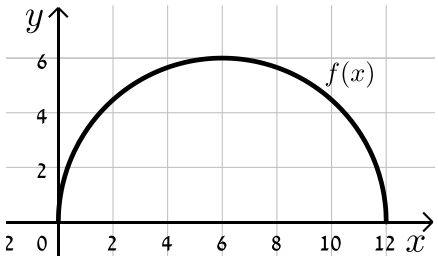

**38)**



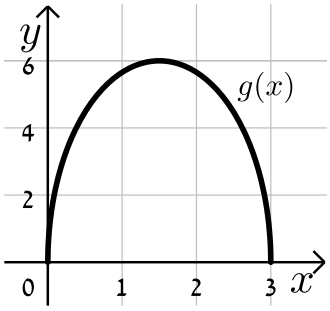
41)



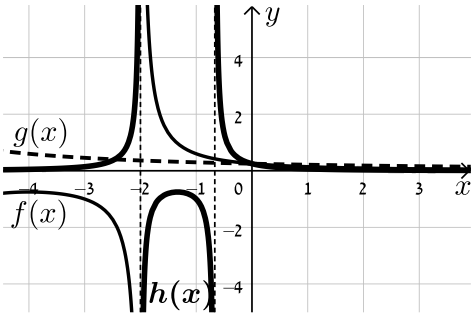

42) סעיף iv.א




42) סעיף ב




44)



# היפוך גרף פונקציה ביחס לציר y:

## שאלות:

**46)** סרטט במערכת צירים אחת את הפונקציות: $f(x)=(x-2)^2$ ו- $g(x)=f(-x)$
והראה כי ציר ה- $y$ מהווה את ציר הסימטריה בין הגרפים.

**47)** שקף כל אחת מהפונקציות הבאות וכתוב ביטוי מפושט לכל אחת מהן:

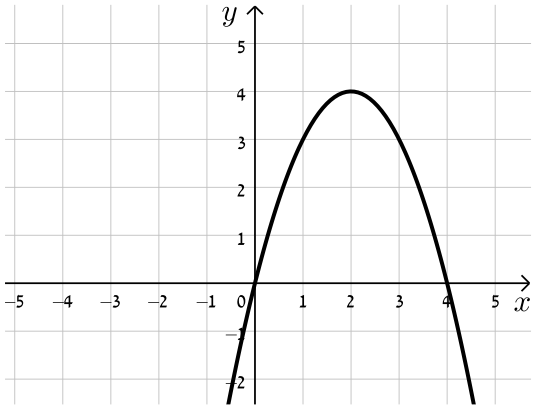
א. $f(x)=x^3+2x-1$.

ב. $f(x)=\dfrac{x}{x+3}$.

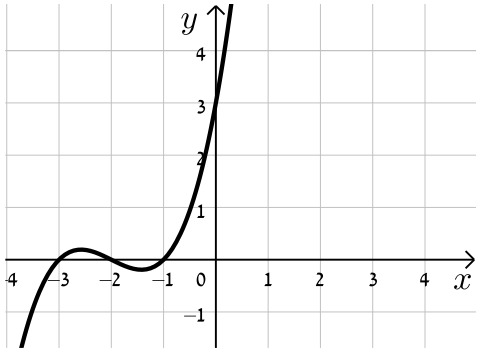
ג. $f(x)=\sqrt{4x-x^2}$.

**48)** לפניך סרטוטים של פונקציות שונות.
הוסף לכל מערכת צירים גרף משוקף ביחס לציר ה- $y$.

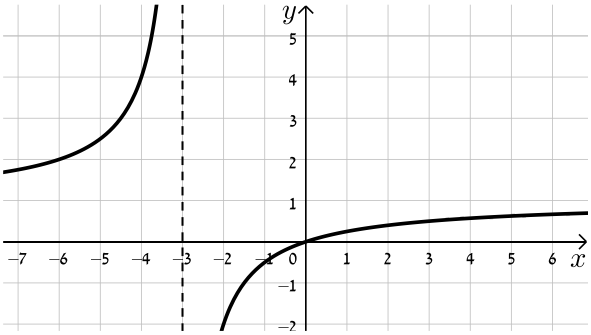
א.



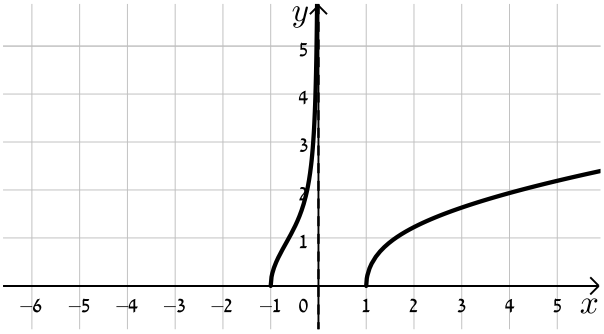

ב.




ג.




ד.



**49)** נתונה הפונקציה: $f(x)=x^4-3x^3+2x^2$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-$x$.

ב. שקף את הפונקציה וכתוב ביטוי מפושט של הפונקציה המתקבלת.

ג. הראה כי נקודות החיתוך עם ציר ה-$x$ של הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ושל הפונקציה המשוקפת שלה הם מספרים נגדיים.

**50)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{10x-x^2}$.

סרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות $f(x)$, $g(x)=f(-x)$ ו-$h(x)=-f(x)$ והסבר איזה ציר מהווה סימטריה בכל מקרה ביחס ל-$f(x)$.

**51)** הראה כי הפונקציה $f(x)=x^4+\sqrt{x^2+1}$ זהה לפונקציה $g(x)=f(-x)$ והסבר מה ניתן לומר על הגרפים של הפונקציות הללו ועל הסימטריה שלהן זו לזו ביחס לציר ה-$y$.

**52)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{18\sqrt{x}}{x^2+7x+10}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה ואת תחומי העלייה והירידה שלה.

ג. הראה כי הפונקציה חותכת את הצירים רק בראשית הצירים וכי ציר ה-$x$ הוא האסימפטוטה האופקית שלה.

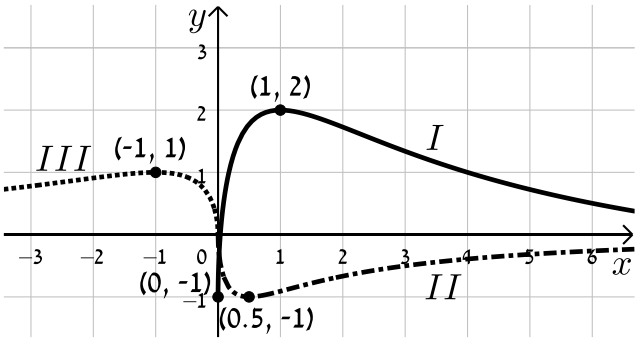
ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. לפניך מספר פונקציות:

- $g_1(x)=f(-x)$.
- $g_2(x)=k\cdot f(x)+B$ כאשר: $k>1$, $B\neq 0$.
- $g_3(x)=-f(ax)$ כאשר: $a>1$.

באיור שלפניך מופיעים הגרפים של שלוש הפונקציות. התאם כל גרף לכל פונקציה ומצא את ערכי הפרמטרים $a$, $k$ ו-$b$ על בסיס הנתונים המספריים.

נמק.



**53)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{(x-a)^2}{(x-b)^3}$ , $a\cdot b<0$.

מגדירים פונקציה נוספת $g(x)$ המקיימת: $g(x)=f(ax)$.

א. בטא באמצעות $a$ ו-$b$ את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

ב. מהן האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$?

ג. הוכח כי לפונקציה $g(x)$ נקודת קיצון $(x_0,y_0)$ המקיימת: $x_0>3$.

ד. נתון כי $x_0=7$. מצא את משוואת האסימפטוטה האנכית של הפונקציה (ללא פרמטרים).

ה. נתון כי $y_0=-\frac{4}{81}$.

i. מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו-$b$.

ii. סרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$.

היעזר בהגדרת הפונקציה $g(x)$.

**54)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x-2}-2x+1}$.

א. מה הוא תחום ההגדרה של $f(x)$?

ב. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של $f(x)$.

ג. מצא את נקודת הקיצון של $f(x)$ ורשום את תחומי העלייה והירידה שלה.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. מגדירים את הפונקציות: $g(x)=f(ax)$ ו-$h(x)=f(x+a)$, $a$ פרמטר.

הנח $a=1.5$ וענה על הסעיפים הבאים:

i. האם לכל הגרפים אותו תחום הגדרה? נמק.

ii. האם לכל הגרפים אותו סוג קיצון? נמק.

iii. לאיזה מבין הגרפים של הפונקציות הנ"ל תהיה נקודת קיצון בעלת שיעור $x$ הקטן ביותר ולאיזה תהיה נקודת קיצון בעלת שיעור $x$ הגדול ביותר? נמק איכותית.

## תשובות סופיות:

**46)** סרטוט בסוף.

**47)** א. $f(-x)=-x^3-2x-1$ ב. $f(-x)=\frac{x}{x-3}$ ג. $f(-x)=\sqrt{-4x-x^2}$.

**48)** סרטוט בסוף.

**49)** א. $(2,0)$ , $(1,0)$ , $(0,0)$ ב. $f(-x)=x^4+3x^3+2x^2$ ג. הוכחה.

**50)** סרטוט בסוף. ציר ה-$y$ מהווה את ציר הסימטריה בין $f(x)$ ל-$g(x)$ וציר ה-$x$ מהווה את ציר הסימטריה בין $f(x)$ ל-$h(x)$.

**51)** הפונקציות זהות. עבור שתיהן ציר ה-$y$ מהווה ציר סימטריה.

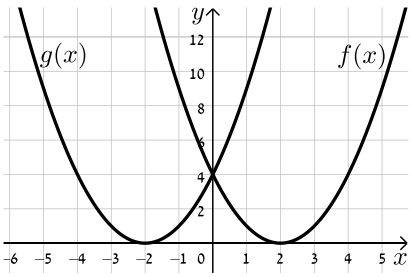
**52)** א. תחום הגדרה: $0\le x$ ב. נקודות קיצון: $\max(1,1)$ , $\min(0,0)$ קצה,
עולה: $0<x<1$ , יורדת: $x>1$ ג. הוכחה. ד. סרטוט בסוף.
ה. $g_1(x)\leftrightarrow III$ , $g_2(x)\leftrightarrow I$ , $g_3(x)\leftrightarrow II$ , $a=2$ , $B=-1$ , $k=3$.

**53)** א. תחום ההגדרה: $x\ne\frac{b}{a}$ ב. אסימפטוטות מאונכות: $y=0$ , $x=\frac{b}{a}$
ג. הוכחה ד. $x=-2$ ה. i. $a=-1$ , $b=2$
ii. סרטוט בסוף.

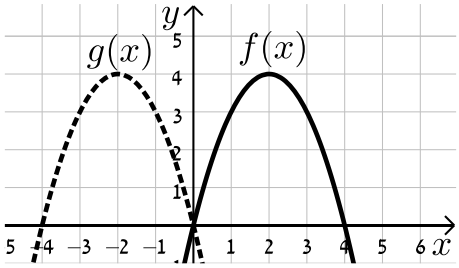
**54)** א. $2\le x$ ב. אסימפטוטות מקבילות: $y=-1$
ג. נקודות קיצון: $\min(3,-2)$ , $\max\left(2,-1\frac{1}{3}\right)$, תחום עלייה: $3<x$,
תחום ירידה: $2<x<3$ ד. סרטוט בסוף.
ה. i. לא: $h(x)x\ge\frac{1}{2}$ , $g(x):x\ge1\frac{1}{3}$ , $f(x):x\ge2$ ii. כן.
iii. ל-$f(x)$ השיעור הגבוה ביותר, ל-$h(x)$ השיעור הקטן ביותר.

## סרטוטים מרוכזים לפי מספרי שאלות:

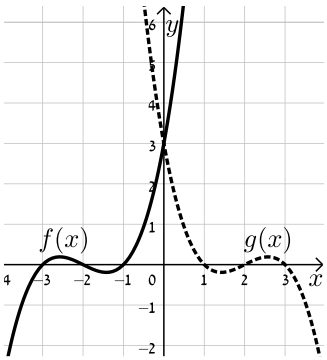
**46)**



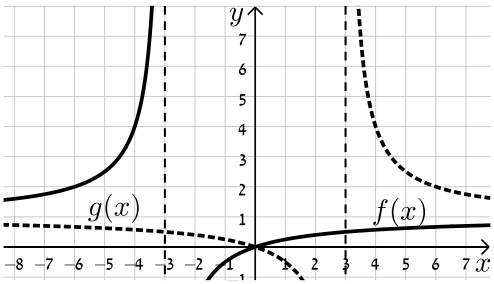

**48) סעיף א**



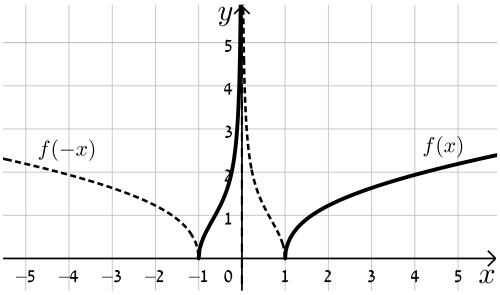
**48) סעיף ב**



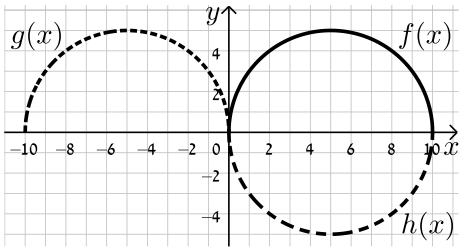

**48) סעיף ג**



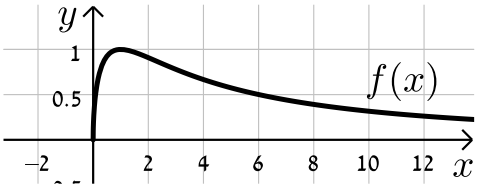

**49) סעיף ד**



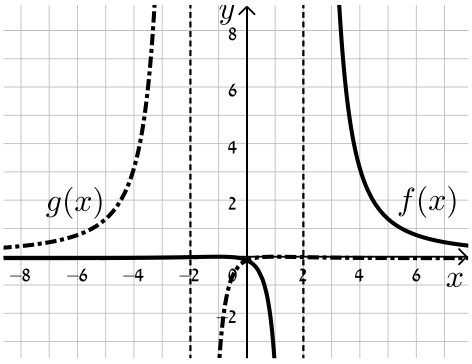

**50)**



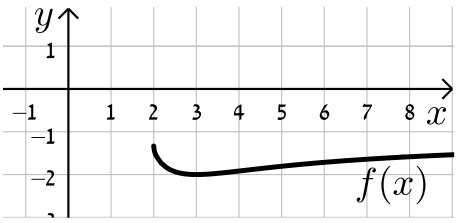

**52)**




**53)**




**54)**



## ערך מוחלט של פונקציה:

### שאלות:

**55)** נתונות הפונקציות: $f(x)=x$ ו- $g(x)=|x|$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים עם ציר ה-$x$.

ב. סרטט את שני הגרפים במערכת צירים אחת והסבר מה ההבדל ביניהם.

ג. כיצד ישתנו הגרפים עבור: $f(x)=x-2$?

ד. כיצד ישתנו הגרפים עבור: $f(x)=3(x-2)$?

ה. כיצד ישתנו הגרפים עבור: $f(x)=3x-2$?

**56)** סרטט במערכת צירים אחת את זוגות הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^2-2x$ ו- $g(x)=|x^2-2x|$.

ב. $f(x)=x^3$ ו- $g(x)=|x^3|$.

ג. $f(x)=\frac{1}{x}$ ו- $g(x)=\left|\frac{1}{x}\right|$.

**57)** סרטט את הגרפים של הפונקציות: $f(x)=\tan x$ ו- $g(x)=|\tan x|$.

**58)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{x}$ ועליה מבצעים את הפעולות הבאות:

- מזיזים את הפונקציה $f(x)$ ב-3 יחידות ימינה.
- מורידים 4 יחידות מערך הפונקציה.
- לוקחים את הערך המוחלט של הפונקציה.

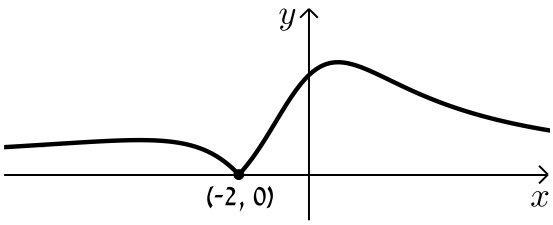
א. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה המתקבלת.

ב. האם תשתנה התוצאה אם נחליף בין שתי הפעולות הראשונות?

**59)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{ax+2}{x^2+ax+6}$ , $a\neq 0$.

באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $g(x)=|f(x)|$.

מצא את ערכו של הפרמטר $a$.



**60)** לפניך הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}}$.

א. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

i. תחום הגדרה.

ii. נקודות קיצון מקומיות וקצה (אם ישנן).

iii. תחומי עלייה וירידה.

iv. נקודות חיתוך עם הצירים (אם ישנן).

v. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. הוסף לאותה מערכת הצירים את הסקיצה של גרף הפונקציה: $g(x)=|f(-x)|$.
נמק את שיקוליך.

**61)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x+1}$ בתחום $[-2\pi:2\pi]$.

א. הראה כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ג. נתון כי לפונקציה יש שתי אסימפטוטות אנכיות בתחום הנתון.
מצא את משוואותיהן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. קבע בכמה נקודות חותך הישר $y=1$ את גרף הפונקציה $|f(x)|$ בתחום הנתון.
מצא את נקודות החיתוך.

## תשובות סופיות:

**55)** א. $(0,0)$ ב. סרטוט בסוף.

**56)** א. סרטוט בסוף. ב. סרטוט בסוף. ג. סרטוט בסוף

**57)** סרטוט בסוף.

**58)** א. סרטוט בסוף ב. התוצאה לא תשתנה.

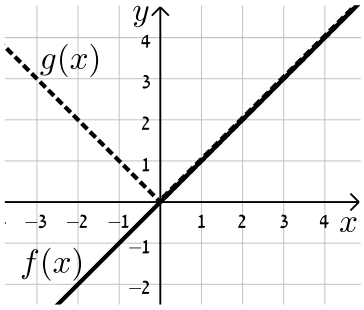
**59)** $a=1$.

**60)** א. i. תחום הגדרה: $0<x$ ii. נקודת קיצון: אין.
iii. עולה: $x>0$ iv. נקודות חיתוך עם הצירים: $(1,0)$
v. סרטוט בסוף ב. סרטוט בסוף.

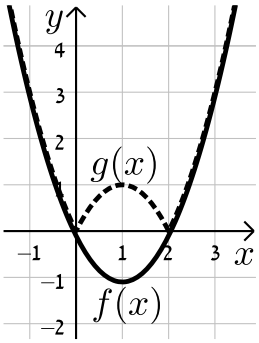
**61)** א. הוכחה. ב. $\left(-\frac{3\pi}{2},0\right)$ , $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ , $(0,1)$ ג. $x=\frac{3\pi}{2}$ , $-\frac{\pi}{2}$
ד. סרטוט בסוף. ה. 2 נקודות: $(\pi,-1)$ , $(-\pi,-1)$.

### סרטוטים מרוכזים לפי מספרי שאלות:

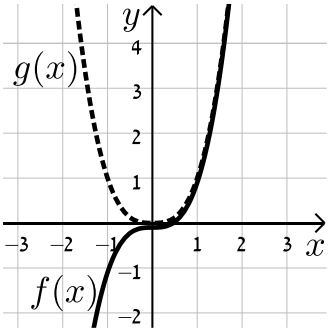
**55)**



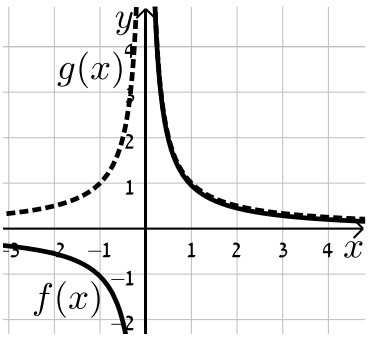

**56) סעיף א**



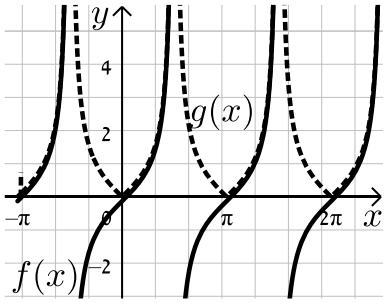

**56) סעיף ב**



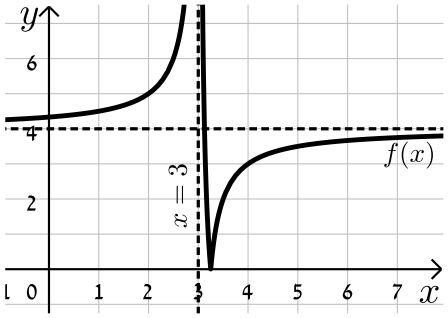

**56) סעיף ג**



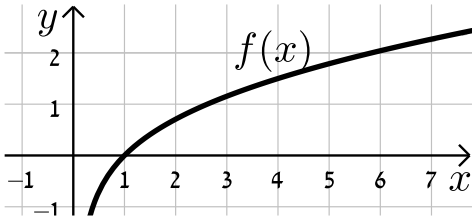
57)



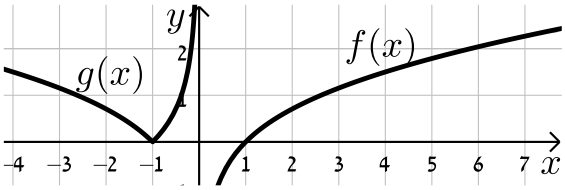

58)



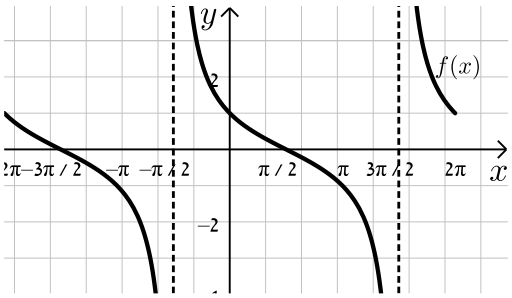

60) סעיף א. v




60) סעיף ב




61)



# מתמטיקה לתלמידי גאוגרפיה ופיתוח סביבתי 2

## פרק 12 - חשבון דיפרנציאלי - הקשר שבין גרף הפונקציה וגרף הנגזרת

תוכן העניינים

1. כללי (ללא ספר) .....

# מתמטיקה לתלמידי גאוגרפיה ופיתוח סביבתי 2

## פרק 13 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות מעריכיות

### תוכן העניינים

1. הנגזרת של פונקציה מעריכית ..... 210
2. שימושי הנגזרת ..... 214
3. חקירה של פונקציה מעריכית ..... 215

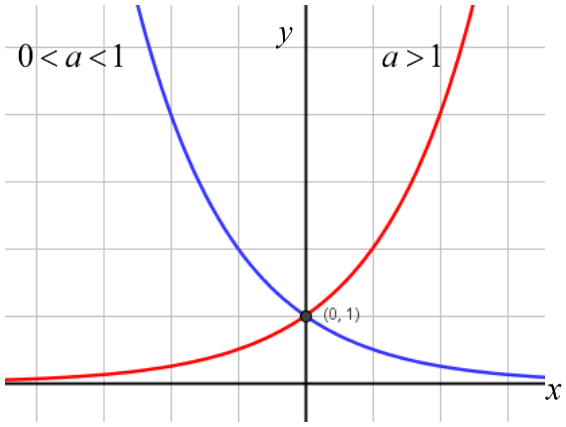
# הנגזרת של פונקציה מעריכית:

## סיכום כללי:

### הגדרות כלליות:

להלן תיאורים גרפיים של פונקציה מעריכית כללית מהצורה: $f(x)=a^x$

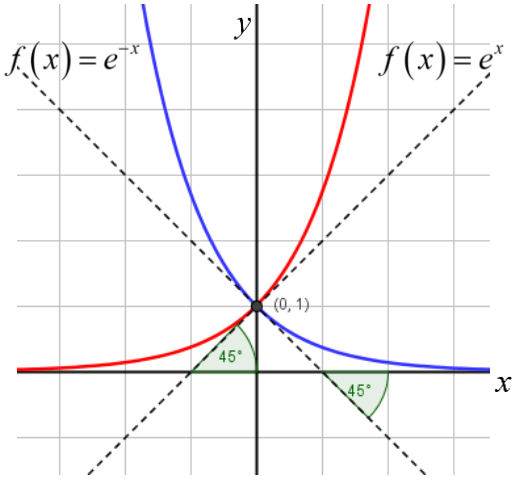
עבור: $a>1$ ו-$0<a<1$:




### תכונות כלליות:

1. הפונקציות מוגדרות לכל $x$.
2. הפונקציות תמיד חיוביות.
3. הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- $y$ בנקודה: $(0,1)$.
4. עבור: $a>1$ הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור: $0<a<1$ הפונקציה יורדת בכל ת.ה.

עבור הפונקציות $f(x)=e^x$ ו- $f(x)=e^{-x}$ נקבל:



**תכונות נוספות:**

1. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=e^x$ בנקודת החיתוך עם ציר ה- $y$ הוא 1.
2. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)=e^{-x}$ בנקודת החיתוך עם ציר ה- $y$ הוא 1-.

**נגזרות של פונקציות מעריכיות:**

| הפונקציה | הנגזרת |
|---|---|
| $y=a^x$ | $y'=a^x\cdot\ln a$ |
| $y=a^{f(x)}$ | $y'=a^{f(x)}\cdot f'(x)\cdot\ln a$ |
| $y=e^x$ | $y'=e^x$ |
| $y=e^{f(x)}$ | $y'=e^{f(x)}\cdot f'(x)$ |

**תזכורת - כללי הגזירה:**

| מספר כלל | הפונקציה | תיאור | הנגזרת |
|---|---|---|---|
| 1. | $y=a\cdot f(x)$ | מכפלה בקבוע | $y'=a\cdot f'(x)$ |
| 2. | $y=f(x)+g(x)$ | סכום פונקציות | $y'=f'(x)+g'(x)$ |
| 3. | $y=f(x)\cdot g(x)$ | מכפלת פונקציות | $y'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$ |
| 4. | $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ | מנת פונקציות | $y'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ |
| 5. | $y=f(g(x))$ | פונקציה מורכבת | $y'=f'(g(x))\cdot g'(x)$ |

## שאלות:

**1)** גזור את הפונקציות הבאות (סכום פונקציות):

א. $f(x)=3e^{x}+e^{2x}+e^{-x}+2x+1$

ב. $f(x)=e^{x^2-3x}+ex$

ג. $f(x)=2^{3x}$

ד. $f(x)=3^{x^2}+4^{-x}$

**2)** גזור את הפונקציות הבאות (מכפלת פונקציות):

א. $f(x)=x\cdot e^{x}$

ב. $f(x)=x^2\cdot e^{4x}$

ג. $f(x)=(x+1)\cdot 2^{x}$

**3)** גזור את הפונקציות הבאות (מנת פונקציות):

א. $f(x)=\frac{x^2}{e^{x}}$

ב. $f(x)=\frac{e^{x}}{e^{x}+1}$

**4)** גזור את הפונקציות הבאות (פונקציה מורכבת):

א. $f(x)=5\left(e^{2x}-1\right)^{3}$

ב. $f(x)=\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}}$

ג. $f(x)=\frac{e^{3x}}{\sqrt{e^{x}+1}}$

**5)** גזור את הפונקציות הבאות (שאלות שונות):

א. $f(x)=e^{2x}$

ב. $f(x)=e^{x}+1$

ג. $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

ד. $f(x)=\left(x^2+1\right)e^{x}$

ה. $f(x)=e^{-x}\left(x^2+4x+1\right)$

ו. $f(x)=e^{3x-2}$

ז. $f(x)=e^{x}\cdot\frac{1}{x}$

ח. $f(x)=x^3e^{2x}$

ט. $f(x)=e^{-2x}(x+4)$

י. $f(x)=e^{2x+1}(1-x)$

יא. $f(x)=\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}$

יב. $f(x)=\frac{x^3}{e^{3x}}$

יג. $f(x)=\frac{2+x^2}{e^{x^2}}$

יד. $f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{-x}+e^{x}}$

טו. $f(x)=\frac{x^2+1}{e^{-x}}$

טז. $f(x)=\frac{e^{x}}{1-e^{x+1}}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $3e^x+2e^{2x}-e^{-x}+2$ ב. $(2x-3)e^{x^2-3x}+e$ ג. $3\ln 2\cdot 2^{3x}$ ד. $2x\ln 3\cdot 3^{x^2}-\ln 4\cdot 4^{-x}$

**2)** א. $(1+x)e^x$ ב. $2xe^{4x}(1+2x)$ ג. $2^x(1+x\ln 2+\ln 2)$

**3)** א. $\frac{x(2-x)}{e^x}$ ב. $\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

**4)** א. $30e^{2x}(e^{2x}-1)^2$ ב. $\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}}}$ ג. $\frac{5e^{4x}+6e^{3x}}{2\sqrt{(e^x+1)^3}}$

**5)** א. $2e^{2x}$ ב. $e^x$ ג. $-\frac{e^{1/x}}{x^2}$ ד. $(x+1)^2e^x$

ה. $e^{-x}(-x^2-2x+3)$ ו. $3e^{3x-2}$

ז. $\frac{e^x(x-1)}{x^2}$ ח. $x^2e^{2x}(3+2x)$ ט. $-e^{-2x}(2x+7)$

י. $e^{2x+1}(1-2x)$

יא. $\frac{e^{-1/x}}{x^2}$ יב. $\frac{3x^2(1-x)}{e^{3x}}$ יג. $\frac{-2x(x^2+1)}{e^{x^2}}$

יד. $\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$ טו. $\frac{(x+1)^2}{e^{-x}}$ טז. $\frac{e^x}{(1-e^{x+1})^2}$

## שימושי הנגזרת:

### שאלות:

**6)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=e^x$ בנקודה $A(1,e)$.

**7)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=e^{2x}+xe^{-x}$ בנקודה שבה $x=0$.

**8)** מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x)=(e+1)e^x-e^{2x}$ בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y=e$.

**9)** נתונה הפונקציה: $y=e^{2x}+3ex$.
לפונקציה העבירו משיק דרך הנקודה שבה: $x=2$.
מצא את משוואת המשיק.

**10)** שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=a\cdot 3^{2x-1}+3^{x-b}$ בנקודה $(1,15)$ הוא $21\ln 3$.
מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.

### תשובות סופיות:

**6)** $y=ex$

**7)** $y=3x+1$

**8)** $y=(e-1)x+e$ , $y=(-e^2+e)x+e^2$

**9)** $y=2e^4x+3ex-3e^4$

**10)** $a=2$ , $b=-1$

# חקירה של פונקציה מעריכית:

## שאלות:

**11)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{2x-1}{e^x}$ ב. $f(x)=\frac{3}{e^x-1}$ ג. $f(x)=\frac{x+1}{e^x-5}$

ד. $f(x)=\frac{1}{e^{2x}-3e^x+2}$ ה. $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^x}$ ו. $f(x)=\frac{\sqrt{e^x-1}}{5x-2}$

ז. $f(x)=\sqrt{e^{2x}-4e^x+3}$

**12)** מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x)=x^2e^x$.

**13)** מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{e^x}{x-2}$.

**14)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{ax^2+bx+9}{e^x}$.
הפונקציה משיקה לציר ה-$x$ בנקודה שבה $x=1.5$.
מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו-$b$ ואת נקודות הקיצון של הפונקציה.

**15)** נתונה הפונקציה: $f(x)=8^x+p\cdot 2^x+q$. לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה $(\log_2 3,-19)$. מצא את ערכי הפרמטרים $p$ ו-$q$.

**16)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=e^{2x}+e^x$.

**17)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^{2x}}$.

**18)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{e^x+5}{e^x-1}$.

**19)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{e^{2x}+1}{e^x-5}$.

**20)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

**21)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{e^x-2}{e^{2x}-5e^x+6}$.

**22)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{e^x}{x^2}$.

**23)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{x^3-1}{e^x}$.

**24)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{x-1}{e^{3x}-e}$.

**25)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=(x-3)e^x$.

**26)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$.

**27)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2+a}{be^x}$. לפונקציה יש נקודת פיתול בנקודה $\left(1,\frac{2}{e}\right)$.
מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$ ואת נקודת הפיתול השנייה של הפונקציה.

**28)** חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים הבאים:

1. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
2. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
3. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
4. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

א. $f(x)=(x-1)e^x$

ב. $f(x)=(x^2+1)e^x$

ג. $f(x)=x^2e^{-\frac{1}{4}x^2}$

ד. $f(x)=e^{x^2-x}$

ה. $f(x)=\frac{2}{e^{x^2}+1}$

ו. $f(x)=\frac{e^{2x}+1}{e^{x+1}}$

**29)** נתונה הפונקציה $f(x)=(x-3)e^x$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**30)** נתונה הפונקציה $f(x)=e^{2x}-8e^x+6x+10$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$.
ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**31)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{4x}{e^{0.5x^2}}$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**32)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^3}{e^x}$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**33)** נתונה הפונקציה $f(x)=2x\cdot 3^x$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**34)** נתונה הפונקציה $f(x)=2e^{\frac{x}{x^2+1}}$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
ז. לאלו ערכי $m$ יש למשוואה $f(x)=m$ בדיוק פתרון אחד?

**35)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^2e^{\frac{1}{x}}$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
ו. מציאת נקודות פיתול של הפונקציה.
ז. כתיבת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.

ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**36)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{e^{3x}}{12x^2+1}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**37)** שיפוע המשיק לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{e^{3x^2+6x+k}}$ בנקודה שבה $x=1$ הוא $-\frac{12}{e^{10}}$.

א. מצא את ערך הפרמטר $k$ וכתוב את הפונקציה.

ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. הוכח על סמך הסקיצה את אי-השוויון הבא: $0<\frac{1}{e^{3x^2+6x+1}}\le e^2$.

**38)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=e^{2x}+ae^x+b$. גוזרים את הפונקציה פעמיים וידוע כי כאשר $x=\ln\frac{2}{3}$ הנגזרות מקיימות: $f'(x)+f''(x)=8$.

א. מצא את $a$.

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא: $y=16x+7-16\ln 2$.

ב. מצא את שיעור ה-$x$ של נקודת ההשקה.

ג. מצא את $b$.

ד. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.

**39)** נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=6x-e^x$ ו- $g(x)=ae^x-e^{2x}+b$.

ידוע כי לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה אותו שיעור $x$ וכי שתיהן נפגשות על ציר ה-$y$.

א. מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו-$b$.

ב. הראה כי לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה משותפים.

**40)** לגרף הפונקציה: $f(x)=ax^2\cdot e^{-bx^2}$ יש נקודת קיצון: $\left(2,\frac{4}{e}\right)$, $a,b\neq 0$.

א. מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו-$b$ וכתוב את הפונקציה.

ב. מצא את נקודות הקיצון הנוספות של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. מעבירים ישר: $y=k$. באיזה תחום ערכים צריך להימצא $k$ כדי שהישר יחתוך את גרף הפונקציה ב-4 נקודות שונות?

**41)** לפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-6x-7}{e^{ax-1}}$ יש קיצון בנקודה שבה: $x=1$.

א. מצא את ערך הפרמטר $a$.

ב. האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון נוספות? אם כן מצא אותן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**42)** הישר $x=\sqrt{6}$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה: $f(x)=\frac{e^{2x}}{x^2+m}$.

א. מצא את ערך הפרמטר $m$ וכתוב את הפונקציה.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**43)** נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3\cdot e^{2x}$.

א. מצא את הנקודות המקיימות: $f'(x)=0$ וקבע כמה מהן הן נקודות קיצון.

ב. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. בכמה נקודות חותך הישר $y=-0.01$ את גרף הפונקציה?

**44)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=e^{2x}+ae^{x}+b$. גוזרים את הפונקציה פעמיים וידוע כי כאשר $x=\ln\frac{2}{3}$ הנגזרות מקיימות: $f'(x)+f''(x)=12$.

א. מצא את $a$.

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא: $y=22x+28-22\ln 2$.

ב. מצא את שיעור ה-$x$ של נקודת ההשקה.

ג. מצא את $b$.

ד. האם הפונקציה חותכת את ציר ה-$x$? אם כן מצא את הנקודות.

**45)** נתונה הפונקציה: $f(x)=x\cdot a^{x}$, $(a>0)$.

לפונקציה יש נקודת קיצון שבה: $x=-\frac{1}{\ln 2}$.

א. מצא את $a$.

ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

הנקודה שבה $x=2$ היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם גרף הפונקציה: $g(x)=x^{2}\cdot 2^{x}-kx\cdot 2^{x}$.

ג. מצא את $k$.

ד. מצא נקודה נוספת שבה הגרפים נחתכים.

**46)** נתונה הפונקציה: $f(x)=3^{2x}+2\cdot 3^{1-x}$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-$y$.

ב. הוכח כי גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה-$x$.

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

## תשובות סופיות:

**11)** א. כל $x$ ב. $x\neq 0$ ג. $x\neq \ln 5$ ד. $x\neq 0\ ,\ x\neq \ln 2$ ה. כל $x$

ו. $0\le x\neq \frac{2}{5}$ ז. $x\le 0\ ,\ x\ge \ln 3$

**12)** $\min(0,0)\ ,\ \max\left(-2,\frac{4}{e^2}\right)$

**13)** $\min\left(3,e^3\right)$

**14)** $a=4\ ,\ b=-12\ ,\ \max(3.5,0.483)\ ,\ \min(1.5,0)$

**15)** $q=35\ ,\ p=-27$

**16)** $y=0$

**17)** $y=0$

**18)** $y=1\ ,\ y=-5\ ,\ x=0$

**19)** $x=\ln 5\ ,\ y=-\frac{1}{5}$

**20)** $y=1\ ,y=-1$

**21)** $y=0\ ,\ x=\ln 3, y=-\frac{1}{3}$ , נקודת אי הגדרה: $(\ln 2,-1)$

**22)** $y=0\ ,\ x=0$

**23)** $y=0$

**24)** $y=0\ ,\ x=\frac{1}{3}$

**25)** $y=0$

**26)** $x=0$ , נקודת אי הגדרה: $(0,0)$

**27)** $a=1\ ,\ b=1\ ,\ \left(3,\frac{10}{e^3}\right)$

**28)** א.1. כל $x$ 2. $(0,-1)\ ,\ (1,0)$ 3. $\min(0,-1)$ 4. עולה: $x>0$ יורדת: $x<0$

ב.1. כל $x$ 2. $(0,1)$ 3. פיתול $\left(-1,\frac{2}{e}\right)$ 4. עולה: $x<-1\ ,\ x>-1$

ג.1. כל $x$ 2. $(0,0)$ 3. $\max\left(-2,\frac{4}{e}\right)\ ,\ \min(0,0)\ ,\ \max\left(2,\frac{4}{e}\right)$

4. עולה: $x<-2\ ,\ 0<x<2$ יורדת: $-2<x<0\ ,\ x>2$

ד.1. כל $x$ 2. $(0,1)$ 3. $\min\left(0.5,e^{-0.25}\right)$ 4. עולה: $x>0.5$ יורדת: $x<0.5$

ה.1. כל $x$ .2 $(0,1)$ .3 $\max(0,1)$ .4 עולה: $x<0$ יורדת: $x>0$

ו.1. כל $x$ .2 $(0,2e^{-1})$ .3 $\min(0,2e^{-1})$ .4 עולה: $x>0$ יורדת: $x<0$

**29)** א. כל $x$ ב. $\min(2,-e^2)$ ג. תחומי עלייה: $x>2$ תחומי ירידה: $x<2$

ד. $(0,-3)$ , $(3,0)$

**30)** א. כל $x$ ב. $\min(\ln 3,1.59)$ , $\max(0,3)$

ג. תחומי עלייה: $x>\ln 3$ או $x<0$ תחומי ירידה: $0<x<\ln 3$ ד. $(0,3)$

**31)** א. כל $x$ ב. $\max\left(1,\frac{4}{e^{0.5}}\right)$ , $\min\left(-1,-\frac{4}{e^{0.5}}\right)$

ג. תחומי עלייה: $-1<x<1$ תחומי ירידה: $x>1$ או $x<-1$ ד. $(0,0)$

**32)** א. כל $x$ ב. $\max\left(3,\frac{27}{e^3}\right)$ ג. עולה: $x<3$ , יורדת: $x>3$

ד. $(0,0)$

**33)** א. כל $x$ ב. $\min(-0.91,-0.67)$ ג. עולה: $x>-0.91$ יורדת: $x<-0.91$

ד. $(0,0)$

**34)** א. כל $x$ ב. $\min\left(-1,\frac{2}{\sqrt{e}}\right)$ , $\max(1,2\sqrt{e})$ ג. עולה: $-1<x<1$ יורדת:

$x<-1$ , $x>1$ ד. $(0,2)$ ה. $y=2$ ז. $m=\frac{2}{\sqrt{e}}$ , $m=2\sqrt{e}$ , $m=2$

**35)** א. $x\neq 0$ ב. $\min\left(\frac{1}{2},\frac{e^2}{4}\right)$ ג. עולה: $x>\frac{1}{2}$ , יורדת: $0\neq x<\frac{1}{2}$

ד. אין

**36)** א. כל $x$ ב. $\min\left(\frac{1}{2},\frac{e^{1.5}}{4}\right)$ , $\max\left(\frac{1}{6},\frac{3\sqrt{e}}{4}\right)$ ג. עולה: $x>\frac{1}{2}$ , $x<\frac{1}{6}$ יורדת:

$\frac{1}{6}<x<\frac{1}{2}$ ד. $(0,1)$

**37)** א. $k=1$ , $f(x)=\frac{1}{e^{3x^2+6x+1}}$ ב. $(-1,e^2)$

ד. ניתן לראות עפ"י הגרף כי ערך הפונקציה $f(x)$ נמצא בתחום $0<f(x)\le e^2$

**38)** א. $a=4$ ב. $x=\ln 2$ ג. $b=-5$ ד. $(0,0)$

**39)** א. $a=12$ , $b=-12$ ב. עולות: $x<\ln 6$ יורדות: $x>\ln 6$

**40)** א. $f(x)=x^2e^{-\frac{1}{4}x^2}$ , $a=1$ , $b=0.25$ ב. $\max\left(-2,\frac{4}{e}\right)$ , $\min(0,0)$

ג. $(0,0)$ ה. $0<k<\frac{4}{e}$

**41)** א. $a=\frac{1}{3}$ ב. כן: $\left(11,\frac{48}{e^{2\frac{2}{3}}}\right)$ ג. עולה: $1<x<11$ יורדת: $x<1$ , $x>11$

ד. $(-1,0)$ , $(7,0)$ , $(0,-7e)$

**42)** א. $m=-6$ $f(x)=\frac{e^{2x}}{x^2-6}$ ב. $\min\left(3,\frac{e^6}{3}\right)$ $\max\left(-2,-\frac{1}{2e^4}\right)$ ג. $\left(0,-\frac{1}{6}\right)$

**43)** א. $x=0,-1.5$ . נקודת הקיצון היא: $\min\left(-1.5,-3\frac{3}{8}e^{-3}\right)$ ב. $y=0$

ד. 2 נקודות.

**44)** א. $a=7$ ב. $x=\ln 2$ ג. $b=10$ ד. לא.

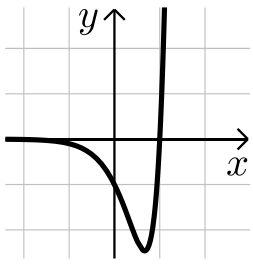
**45)** א. $a=2$ ב. עולה: $x>-\frac{1}{\ln 2}$ יורדת: $x<-\frac{1}{\ln 2}$ ג. $k=1$

ד. $(0,0)$

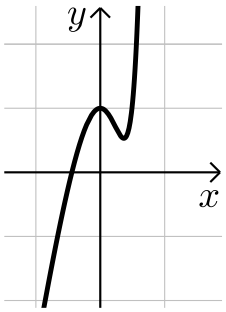
**46)** א. $y=-x\ln 81+7$ ג. $\min\left(\frac{1}{3},\sqrt[3]{243}\right)$

**סקיצות לשאלות החקירה:**

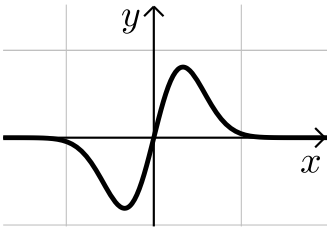
**29)**



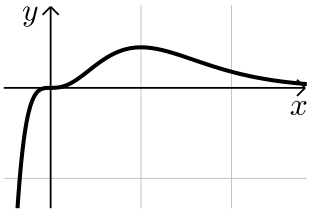

**30)**



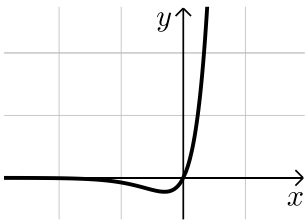

**31)**



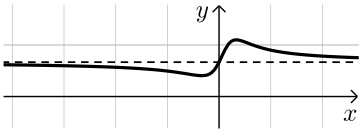

**32)**



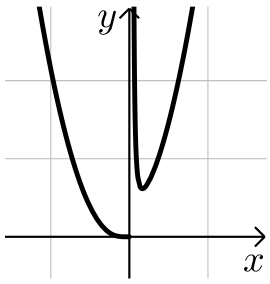

**33)**



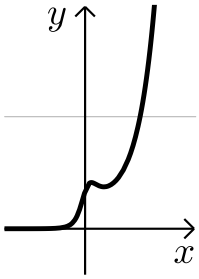

**34)**



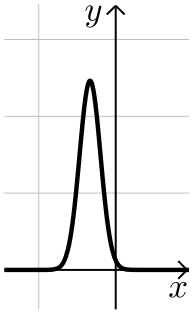
(35



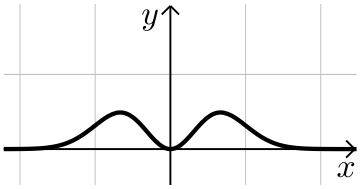

(36



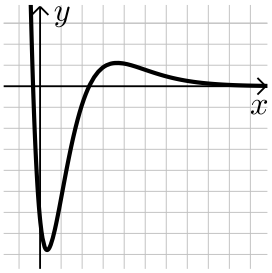

(37



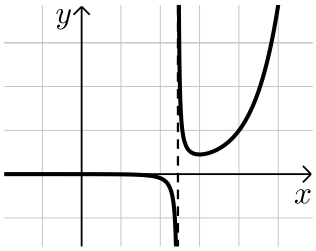

(40



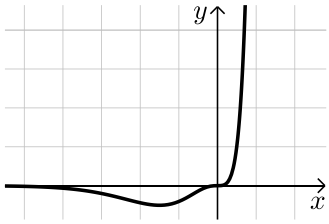

(41




(42




(43



# מתמטיקה לתלמידי גאוגרפיה ופיתוח סביבתי 2

## פרק 14 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות

### תוכן העניינים

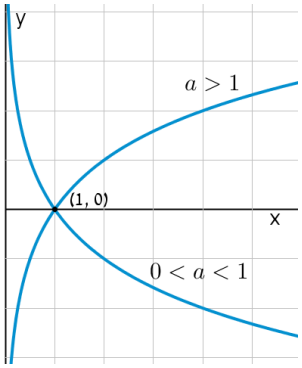
1. הנגזרת של פונקציה לוגריתמית ..... 226
2. שימושי הנגזרת ..... 231
3. חקירה של פונקציה לוגריתמית ..... 232

# הנגזרת של פונקציה לוגריתמית:

## סיכום כללי:

### הגדרות כלליות:

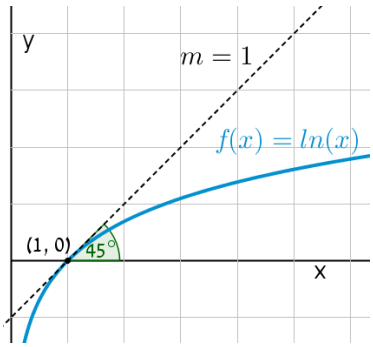
להלן תיאורים גרפיים של פונקציה לוגריתמית כללית מהצורה: $f(x)=\log_a x$ עבור $a>1$ ו- $0<a<1$:




### תכונות כלליות:

- לפונקציות תחום הגדרה $x>0$.
- הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- $x$ בנקודה $(1,0)$.
- עבור $a>1$ הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור $0<a<1$ הפונקציה יורדת בכל ת.ה.

עבור הפונקציות $f(x)=\ln x=\log_e x$ נקבל כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ הוא 1:




### תחום הגדרה של פונקציה לוגריתמית:

תחום ההגדרה של פונקציה לוגריתמית מהצורה: $y=\log\left(f(x)\right)$ הוא: $f(x)>0$.

**נגזרות של פונקציות לוגריתמיות:**

| הפונקציה | הנגזרת |
|---|---|
| $y=\log_a x$ | $y'=\frac{1}{x\ln a}$ |
| $y=\log_a f(x)$ | $y'=\frac{f'(x)}{f(x)\ln a}$ |
| $y=\ln x$ | $y'=\frac{1}{x}$ |
| $y=\ln f(x)$ | $y'=\frac{f'(x)}{f(x)}$ |

## שאלות:

**1)** גזור את הפונקציות הבאות (גזירה לוגריתמית יסודית עם ביטויים פנימיים שונים):

א. $f(x)=3\ln x+4\ln(x+2)-\ln(5x-1)$ ב. $f(x)=\ln(x^2-3x)$

ג. $f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$ ד. $f(x)=\ln(e^x+1)$

ה. $f(x)=\ln(\cos x)$ ו. $f(x)=\log_2 x+5\log_3(2x-1)$

**2)** גזור את הפונקציות הבאות (מכפלה ומנה של פונקציות):

א. $f(x)=x\ln x$ ב. $f(x)=(3x+1)^2\ln x$ ג. $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

ד. $f(x)=\frac{\ln x-2}{\ln x+2}$ ה. $f(x)=\sqrt{\ln x+x}$

**3)** גזור את הפונקציות הבאות (פונקציות מורכבות):

א. $f(x)=\ln^3 x$ ב. $f(x)=3\ln^2 x$

ג. $f(x)=x^2\ln^2 x$ ד. $f(x)=\frac{\ln^2 x+1}{(\ln x+1)^2}$

**4)** גזור את הפונקציות הבאות (שאלות שונות):

א. $f(x)=\ln(x+2)$

ב. $f(x)=\ln^2 x+2\ln x-3$

ג. $f(x)=x^2\ln x$

ד. $f(x)=x^3\ln x$

ה. $f(x)=\ln e^{2x}$

ו. $f(x)=e^x\ln x$

ז. $f(x)=e^{-x^2}\ln x$

ח. $f(x)=x^2(2\ln x-1)$

ט. $f(x)=\ln(x^2)$

י. $f(x)=\ln(x^4)$

יא. $f(x)=(\ln x)^4$

יב. $f(x)=x\ln x-\ln x^2$

יג. $f(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$

יד. $f(x)=\ln\sqrt{x}$

טו. $f(x)=\sqrt{\ln x}$

טז. $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

**5)** גזור את הפונקציות הבאות (שאלות אתגר):

א. $f(x)=\ln\dfrac{x+2}{x}$

ב. $f(x)=\ln\dfrac{x-1}{x+1}$

ג. $f(x)=\ln\dfrac{x-3}{x+3}$

ד. $f(x)=\ln\dfrac{(x-5)^3}{(x+1)^2}$

ה. $f(x)=\ln\sqrt{x^2-1}$

ו. $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$

ז. $f(x)=e^{\sqrt{\ln x}}$

ח. $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1}{2-x}}$

ט. $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

י. $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+5x}{1-5x}}$

יא. $f(x)=\dfrac{\ln\sqrt[3]{x}}{x}$

יב. $f(x)=\dfrac{(\ln x)^3}{x}$

יג. $f(x)=\dfrac{x}{\ln(x^2)}$

יד. $f(x)=\ln^2 x+\dfrac{1}{\ln^2 x}$

טו. $f(x)=\dfrac{x}{\ln^4 x}$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $f'(x)=\frac{3}{x}+\frac{4}{x+2}-\frac{5}{5x-1}$ ב. $f'(x)=\frac{2x-3}{x^2-3x}$ ג. $f'(x)=\frac{-2}{(x-1)(x+1)}$

ד. $f'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$ ה. $f'(x)=-\tan x$ ו. $f'(x)=\frac{1}{x\ln 2}+\frac{10}{(2x-1)\ln 3}$

**2)** א. $f'(x)=\ln x+1$ ב. $f'(x)=(3x+1)\left(6\ln x+\frac{3x+1}{x}\right)$ ג. $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

ד. $f'(x)=\frac{4}{x(\ln x+2)^2}$ ה. $f'(x)=\frac{1+x}{2x\sqrt{\ln x+x}}$.

**3)** א. $f'(x)=\frac{3\ln^2 x}{x}$ ב. $f'(x)=\frac{6\ln x}{x}$ ג. $f'(x)=2x\ln x(\ln x+1)$

ד. $f'(x)=\frac{2(\ln x-1)}{x(\ln x+1)^3}$.

**4)** א. $\frac{1}{x+2}$ ב. $\frac{2\ln x+2}{x}$ ג. $x(2\ln x+1)$

ד. $x^2(3\ln x+1)$ ה. 2 ו. $e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$

ז. $e^{-x^2}\left(\frac{1}{x}-2x\ln x\right)$ ח. $4x\ln x$ ט. $\frac{2}{x}$ י. $\frac{4}{x}$

יא. $\frac{4(\ln x)^3}{x}$ יב. $\ln x+1-\frac{2}{x}$ יג. $\frac{2\ln x-\ln^2 x}{x^2}$

יד. $\frac{1}{2x}$ טו. $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$ טז. $\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$

**5)** א. $-\frac{2}{x(x+2)}$ ב. $\frac{2}{x^2-1}$ ג. $\frac{6}{x^2-9}$

ד. $\frac{3}{x-5}-\frac{2}{x+1}$ ה. $\frac{x}{x^2-1}$ ו. $\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{x\sqrt{x^2+a^2}+x^2+a^2}$

ז. $\frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}$ ח. $\frac{1}{4-2x}$ ט. $\frac{1}{x^2-1}$

י. $\frac{5}{1-25x^2}$

יא. $\frac{1-3\ln\sqrt[3]{x}}{3x^2}$

יב. $\frac{3\ln^2 x-\ln^3 x}{x^2}$

יג. $\frac{\ln\left(x^2\right)-2}{\ln^2\left(x^2\right)}$

יד. $\frac{2\left(\ln^4 x-1\right)}{x\ln^3 x}$

טו. $\frac{\ln x-4}{\ln^5 x}$.

## שימושי הנגזרת:

### שאלות:

**6)** מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)=\ln x$ בנקודה $A(e,1)$.

**7)** שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)=\frac{\ln^2 x+a}{\ln x+b}$ בנקודה $\left(\frac{1}{e},-1\right)$ הוא $\frac{e}{3}$.
מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.

**8)** הגרפים של הפונקציות $f(x)=\ln x$ ו- $g(x)=1$ נחתכים בנקודה A ברביע הראשון.
בנקודה A העבירו משיק ל- $f(x)$.
מצא את משוואת המשיק והוכח שמשיק זה עובר דרך הראשית.

**9)** לפונקציה $g(x)=\frac{\ln x^2}{x}$ העבירו משיק בנקודה שבה $x=e^2$.
מצא את משוואת המשיק.

**10)** מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y=x\ln\left(x^2+1\right)$ בנקודה שבה $x=1$.

### תשובות סופיות:

**6)** $y=\frac{1}{e}x$.

**7)** $a=2\ ,\ b=-2$.

**8)** $y=\frac{1}{e}x$.

**9)** $y=-\frac{2}{e^4}x+\frac{6}{e^2}$.

**10)** $y=\ln 2\cdot x+x-1$.

# חקירה של פונקציה לוגריתמית:

## שאלות:

**11)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\ln x$

ב. $f(x)=\ln\left(x^2\right)$

ג. $f(x)=\log_3\left(x^2-8x-20\right)$

ד. $f(x)=\ln\left(e^x-4\right)$

ה. $f(x)=\dfrac{x-1}{\ln x-1}$

ו. $f(x)=\dfrac{1}{\ln^2 x-2\ln x-3}$

ז. $f(x)=\sqrt{\ln x-1}$

**12)** מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x)=2\ln x-x^2$.

**13)** מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x)=x^2\ln x$.

**14)** מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x)=\dfrac{\sqrt{2\ln x-1}}{x}$.

**15)** מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x)=\log_4^2 x-\log_2 x$.

**16)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{a\ln x+b}{x}$. הנקודה $\left(e^2,\dfrac{1}{e^2}\right)$ היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.

**17)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{a\ln^2 x+b\ln x}{\left(\ln x+1\right)^2}$. הנקודה $\left(\sqrt[3]{e},-\dfrac{1}{8}\right)$ היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.

**18)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\ln(x-3)$.

**19)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\dfrac{1}{\ln x-1}$.

**20)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{2\ln x-1}{\ln x+1}$.

**21)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{\ln x-2}{\ln^2 x-4}$.

**22)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

**23)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{x^2-1}{\ln^2 x+1}$.

**24)** מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x)=x\ln x+2$.

**25)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. מצא את נקודת הפיתול של הפונקציה.

**26)** חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים הבאים:

i. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
ii. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
iii. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
iv. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

א. $y=\frac{1}{2}x^2-4x+3\ln x$
ב. $y=x\ln x$
ג. $y=x\ln x-x$
ד. $y=\sqrt{x}\ln x$
ה. $y=x^2\ln x$
ו. $y=\ln\left(x^2+1\right)$

**27)** נתונה הפונקציה $f(x)=2x\ln^2 x$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**28)** נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{x}{\ln x-1}$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. מצא לאלו ערכי $k$ הישר $y=k$ חותך את הפונקציה בשתי נקודות.

**29)** נתונה הפונקציה $f(x)=\log_4^2 x-\log_2 x$ . חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

**30)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\ln x}$ .

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. הוכח כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.

מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=\ln x$ .

ג. מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

ד. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ . ידוע כי לנקודות A ו-B אותו שיעור $x$ , $(x_A=x_B)$ .
מצא את שיעור ה-$x$ של שתי הנקודות אם ידוע כי המשיקים לגרפים של הפונקציות בנקודות אלו מקבילים.

**31)** נתונה שתי הפונקציות הבאות: $g(x)=\frac{\ln x}{x}$ , $f(x)=\frac{x}{\ln x}$.

א. קבע אילו מהמשפטים הבאים נכונים ואלו שגויים.
נמק זאת ע"י חישוב מתאים ותקן במשפטים השגויים את הטעות.

i. לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.

ii. לשתי הפונקציות יש נקודת קיצון מאותו סוג ובעלות שיעור $x$ זהה.

iii. לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה זהים.

iv. לשתי הפונקציות יש אסימפטוטות אנכיות.

ב. בוחרים באקראי שתי נקודות, אחת על כל גרף, כך ששיעור ה-$x$ שלהן זהה.
הוכח כי מכפלת שיעורי ה-$y$ של כל זוג נקודות כאלו שווה ל-1.

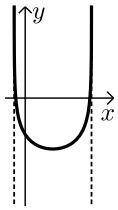
**32)** נתונה הפונקציה הבאה: $y=\ln\left(x^2-6x-7\right)$.

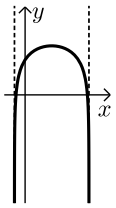
א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

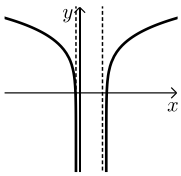
ב. מהן האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לציר ה-$y$?

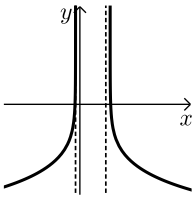
ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. לפניך 4 גרפים: I , II , III ו-IV.
איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.

I.



II.



III.



IV.


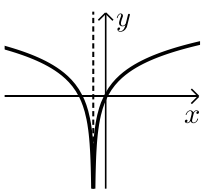

**33)** נתונה הפונקציה: $y=\ln\left(x^2+2x+1\right)$.

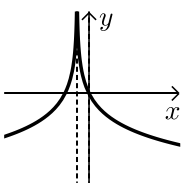
א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

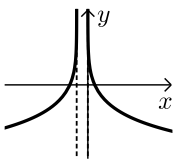
ב. מהי האסימפטוטה של הפונקציה המקבילה לציר ה-$y$?

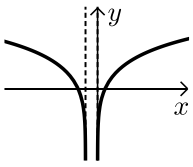
ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. לפניך 4 גרפים: I , II , III ו-IV.
איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.

I.



II.



III.



IV.



ה. העזר בגרף שבחרת וכתוב את תחומי השליליות של הפונקציה.

**34)** לפניך הפונקציה הבאה: $f(x)=\ln(1-\ln x)$.

א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. הוכח כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**35)** נתונה הפונקציה הבאה: $y=\ln\frac{2x+1}{x-1}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ד. הראה כי גרף הפונקציה יורד בכל תחום הגדרתו.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

**36)** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=x\left(\ln^3 x+2\ln^2 x\right)$.

א. הראה כי נגזרת הפונקציה היא: $f'(x)=\ln^3 x+5\ln^2 x+4\ln x$.

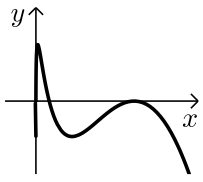
ב. מצא את התחום בו הפונקציה עולה.

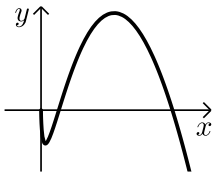
ג. ענה על השאלות הבאות:

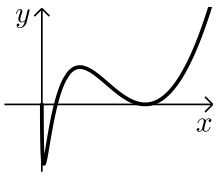
i. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.

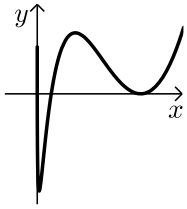
ii. מצא את התחום בו הפונקציה חיובית.

ד. לפניך 4 גרפים. קבע איזה מהם מתאר את הפונקציה $f(x)$ ונמק את בחירתך.

I.



II.



III.



IV.



**37)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\ln^3 x-3\ln x$.

א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הפונקציה: $g(x)=\ln x$.

**38)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. פתור את המשוואה הבאה: $\ln(x+e)-\ln\left(x\sqrt{e}\right)=\ln 2-0.5$.

נתונה הפונקציה: $f(x)=\ln(x+e)-\ln\left(x\sqrt{e}\right)$.

ב. הראה כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=e$.

**39)** נתונה הפונקציה הבאה: $y=\dfrac{x+a}{\ln(x+a)}$, $a$ פרמטר חיובי, $a\neq 1$.

א. הבע באמצעות $a$ את:

i. תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. הנקודה המקיימת $y'=0$.

iii. נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

iv. האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.

ב. ידוע כי גרף הפונקציה עולה רק בתחום: $x>e-2$. מצא את $a$.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום $x>-1$.

ד. נתון הישר: $y=k$. מצא בסקיצה את תחום הערכים של $k$ עבורו לישר ולגרף הפונקציה לא תהיה אף נקודה משותפת.

**40)** נתונה הפונקציה הבאה: $y=\ln x+\dfrac{1}{x}$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ii. יש לגרף הפונקציה אסימפטוטה מקבילה לציר $y$?
אם כן מצא אותה.

ב. מצא את נקודת הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגה.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של גרף הפונקציה.

## תשובות סופיות:

**11)** א. $x>0$ ב. $x\neq 0$ ג. $x>10$ או $x<-2$ ד. $x>\ln 4$
ה. $0<x\neq e$ ו. $x>0$ וגם $x\neq e^3,e^{-1}$ ז. $x\geq e$.

**12)** $\max(1,-1)$.

**13)** $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}},-\frac{1}{2e}\right)$.

**14)** $\min\left(\sqrt{e},0\right)$ קצה, $\max\left(e,\frac{1}{e}\right)$.

**15)** $\min(4,-1)$.

**16)** $a=1$ , $b=-1$.

**17)** $a=1$ , $b=-1$.

**18)** $x=3$.

**19)** נקודת אי הגדרה $(0,0)$ , $x=e$ , $y=0$.

**20)** נקודת אי הגדרה $(0,2)$ , $x=\frac{1}{e}$ , $y=2$.

**21)** נקודת אי הגדרה $\left(e^2,\frac{1}{4}\right)$ ; $(0,0)$ , $x=\frac{1}{e^2}$ , $y=0$.

**22)** $x=0$ , $y=0$.

**23)** נקודת אי הגדרה $(0,0)$.

**24)** נקודת אי הגדרה $(0,2)$.

**25)** $\left(\sqrt{e^3},\frac{3}{2\sqrt{e^3}}\right)$.

**26)** א. i. $x>0$ iii. $\min(3,\ln 27-7.5)$ , $\max(1,-3.5)$
iv. עולה: $0<x<1$ , $x>3$ יורדת: $1<x<3$.
ב. i. $x>0$ ii. $(1,0)$
iii. $\min\left(e^{-1},-e^{-1}\right)$ iv. עולה: $x>e^{-1}$ יורדת: $0<x<e^{-1}$.
ג. i. $x>0$ ii. $(e,0)$ iii. $\min(1,-1)$ iv. עולה: $x>1$ יורדת: $0<x<1$
ד. i. $x>0$ ii. $(1,0)$ iii. $\min\left(e^{-2},-\frac{2}{e}\right)$ iv. עולה: $x>e^{-2}$ יורדת: $0<x<e^{-2}$

ה. i. $x>0$ ii. $(1,0)$ iii. $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}},-\frac{1}{2e}\right)$ iv. עולה: $x>\frac{1}{\sqrt{e}}$ יורדת: $0<x<\frac{1}{\sqrt{e}}$

ו. i. כל $x$ ii. $(0,0)$ iii. $\min(0,0)$ iv. עולה: $x>0$ יורדת: $x<0$.

**27)** א. $x>0$ ב. $\min(1,0)$ , $\max\left(\frac{1}{e^2},\frac{8}{e^2}\right)$

ג. עלייה: $x>1$ או $0<x<\frac{1}{e^2}$, ירידה: $\frac{1}{e^2}<x<1$. ד. $(1,0)$.

**28)** א. $0<x\neq e$ ב. $\min\left(e^2,e^2\right)$ ג. עלייה: $x>e^2$, ירידה:

$0<x<e^2$ וגם $x\neq e$ ד. אין. ו. $k>e^2$.

**29)** א. $x>0$ ב. $\min(4,-1)$ ג. עלייה: $x>4$, ירידה: $0<x<4$

ד. $(16,0)$, $(1,0)$.

**30)** א. $x\geq 1$ ב. מתקבל: $f'(x)=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}>0$ ג. $(e,1)$, $(1,0)$.

ד. $x=\sqrt[4]{e}$.

**31)** א. i. לא נכון. תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא: $x\neq 1$, $x>0$ ותחום ההגדרה של $g(x)$ הוא: $x>0$.

ii. לא נכון. לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה $x=e$ אך עבור $f(x)$ מדובר במינימום ועבור $g(x)$ מדובר במקסימום.

iii. לא נכון. עבור $f(x)$: עולה: $x>e$ יורדת: $0<x<e$, $x\neq 1$.

ועבור $g(x)$: עולה: $0<x<e$ יורדת: $x>e$. iv. נכון.

ב. לגבי כל נקודה נאמר כי שיעור ה-$y$ שלה הוא: $y=\frac{x}{\ln x}$ ו- $y=\frac{\ln x}{x}$.

נכפול: $y=\frac{x}{\ln x}\cdot\frac{\ln x}{x}=1$.

**32)** א. $x<-1$, $x>7$ ב. $x=-1,7$ ג. עולה: $x>7$ יורדת: $x<-1$.

ד. III. <u>הסבר</u>: באיורים I ו-II גרף הפונקציה לא בתחום.
באיור IV תחומי העלייה והירידה הפוכים.

**33)** א. $x\neq -1$ ב. $x=-1$. ג. עולה: $x>-1$ יורדת: $x<-1$

ד. I. <u>הסבר</u>: באיור II תחומי העלייה והירידה הפוכים.
באיורים III ו-IV יש אסימפטוטה מיותרת. ה. $-2<x<0$, $x\neq -1$.

**34)** א. $0<x<e$. (שימו לב כי תנאי ת.ה. הם: $1-\ln x>0$ וגם $x>0$).

ב. $f'(x)=\frac{-\frac{1}{x}}{1-\ln x}=-\frac{1}{x(1-\ln x)}<0$ - ולכן הפונקציה יורדת בת.ה.

ג. $(1,0)$.

**35)** א. $x>1$ , $x<-\frac{1}{2}$ ב. $x=-\frac{1}{2},1$ ג. $(-2,0)$

ד. מתקבל: $y'=\frac{-3}{(2x+1)(x-1)}<0$.

**36)** ב. $x>1$ , $e^{-4}<x<e^{-1}$.

ג. i. 2 נקודות והן: $(1,0)$ , $(e^{-2},0)$. הנקודה שבה: $x=0$ לא קיימת עקב ת.ה.

ii. $x>e^{-2}$ , $x\neq 1$. ד. III – בראשית הצירים יש חור ולא אסימפטוטה.
שאר הנתונים כפי שהתקבלו בסעיפים הקודמים.

**37)** א. $x>0$ ב. $(1,0)$ , $(e^{\sqrt{3}},0)$ , $(e^{-\sqrt{3}},0)$. ג. $\min(e,-2)$ , $\max(e^{-1},2)$

ה. $(1,0)$ , $(e^{2},2)$ , $(e^{-2},-2)$.

**38)** א. $x=e$ ב. מתקבל: $y'=\frac{-e}{x(x+e)}<0$ ג. $y=-\frac{1}{2e}x+\ln 2$.

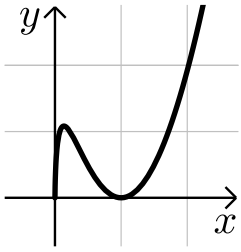
**39)** א. i. $x>-a$ , $x\neq 1-a$ ii. $(e-a,e)$ iii. $\left(0,\frac{a}{\ln a}\right)$

iv. $x=1-a$ ב. $a=2$ ד. $k<e$.

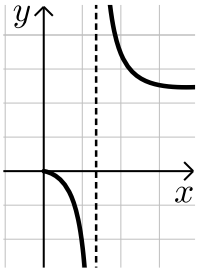
**40)** א. i. $x>0$ ii. $x=0$ ב. $\min(1,1)$ ג. עולה: $x>1$ , יורדת: $0<x<1$.

**סקיצות לשאלות:**

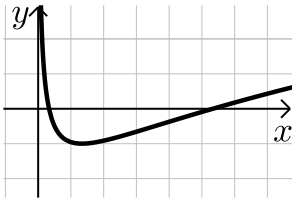
**(27**



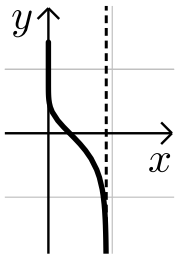

**(28**



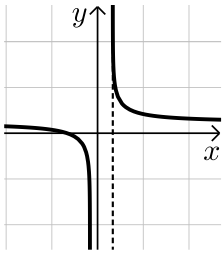

**(29**



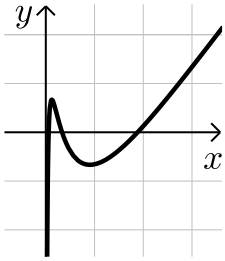

**(34**



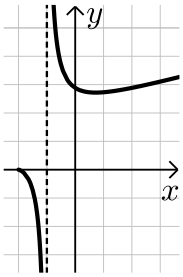

**(35**




**(37**




**(39**



# מתמטיקה לתלמידי גאוגרפיה ופיתוח סביבתי 2

## פרק 15 - חשבון דיפרנציאלי - כלל לופיטל

### תוכן העניינים

1. גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף ..... 242
2. גבול מהצורה אפס כפול אינסוף ..... 245

# גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף

## שאלות

**גבולות מהצורה** $\frac{0}{0}$ **ו-** $\frac{\infty}{\infty}$

חשבו את הגבולות הבאים (ביטויים רציונאליים):

**1)** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9}$ **2)** $\lim\limits_{x\to -5}\frac{2x^2-50}{2x^2+3x-35}$ **3)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-x}{x-1}$

חשבו את הגבולות הבאים (ביטויים אי- רציונאליים):

**4)** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$ **5)** $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4}$ **6)** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{\sqrt{x-2}-1}$

**7)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x^2-1}-\sqrt{x}}{x-1}$ **8)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{3}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות חזקות):

**9)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ **10)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}\ (a,b>0)$

**11)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$ **12)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x-x^2-2x-2}{2x^3}$

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות לוגריתמיות):

**13)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{x^2-2x+1}$ **14)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}{\frac{1}{x^2}}$ **15)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln^2(x+1)+x}{x}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את הגבולות הבאים (פונקציות טריגונומטריות):

**16** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

**17** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(ax^2\right)}{bx^2}$

**18** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(ax\right)}{\sin\left(bx\right)}$

**19** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

**20** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

חשבו את הגבולות הבאים (שאלות משולבות):

**21** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x}$

**22** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\left(1-\cos x\right)}{x^4}$

**23** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x\left(1+x\right)}{x^3}$

**24** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-\sin\left(x^2\right)}{x^4}$

**25** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\cos x^2\right)}{x^4}$

**26** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan\left(x^2+3x\right)}{\arcsin\left(x^2-4x\right)}$

**27** $\lim\limits_{x\to\infty}\tanh x$

**28** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sinh x}$

**29** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cosh x-2}{1-\cos 2x}$

**30** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{2x^2+x+3}$

**31** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x}$

**32** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x+x+1}{e^x}$

**33** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\ln x\right)^2+2\ln x-3}{x}$

**34** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\left(\sin x\right)}{\ln\left(\tan x\right)}$

**35** $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $\frac{5}{6}$
2) $\frac{20}{17}$
3) $n-1$
4) $4$
5) $\frac{1}{6}$
6) $\frac{3}{2}$
7) $\frac{5}{6}$
8) $-\frac{3}{2}$
9) $1$
10) $\ln\frac{a}{b}$
11) $\frac{1}{2}$
12) $\frac{1}{6}$
13) $-\frac{1}{2}$
14) $2$
15) $1$
16) $1$
17) $\frac{a}{b}$
18) $\frac{a}{b}$
19) $\frac{1}{6}$
20) $\frac{1}{2}$
21) $\frac{1}{2}$
22) $\frac{1}{8}$
23) $\frac{1}{3}$
24) $-\frac{1}{3}$
25) $-\frac{1}{2}$
26) $-\frac{3}{4}$
27) $1$
28) $1$
29) $\frac{2}{3}$
30) $\frac{1}{2}$
31) $\frac{1}{2}$
32) $\infty$
33) $0$
34) $\infty$
35) $0$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# גבול מהצורה אפס כפול אינסוף

**גבולות מהצורה** $0\cdot\infty$

חשבו את הגבולות הבאים:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot e^{x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{2}e^{-x}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln x$

4) $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\tan x\cdot\ln x$

5) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cot x$

6) $\lim\limits_{x\to 0^{+}}x\cdot\ln x$

7) $\lim\limits_{x\to 3^{+}}(x^{2}-9)\cdot\ln(x-3)$

8) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right)$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\left[\sqrt{1+\frac{5}{x}}-1\right]$

## תשובות סופיות

1) $\infty$ 2) 0 3) 0 4) 0 5) 0

6) 0 7) 0 8) 6 9) $\frac{5}{2}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מתמטיקה לתלמידי גאוגרפיה ופיתוח סביבתי 2

## פרק 16 - חשבון דיפרנציאלי - נגזרת של פונקציה סתומה וגזירה לוגריתמית

תוכן העניינים

1. גזירה סתומה ..... 246
2. גזירה לוגריתמית ..... 248

# גזירה סתומה

## שאלות

**1)** גזרו את הפונקציה הסתומה $x^2+y^5-1=1$.

**2)** גזרו את הפונקציה הסתומה $4\ln x+10\ln y=y^2$.

**3)** גזרו את הפונקציה הסתומה $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{xy}$.

**4)** נתונה הפונקציה הסתומה הבאה $e^{y^2-4x}+x^2y^3=\sin(y-2x)+4y+1$.
חשבו את $y'$ בנקודה $(1,2)$.

**5)** נתונה הפונקציה הסתומה הבאה $\sqrt{4x+y^3}+\cos^2(xy)=\ln(x^2y+1)+\ln e^3$.
חשבו את $y'$ בנקודה בה $y=0$.

**6)** גזרו את הפונקציה הסתומה $x^y-xy=10$.

**7)** גזרו את הפונקציה הסתומה $x^y-y^x=1$.

**8)** נתונה פונקציה סתומה $xy-y^3+x^2-x=0$.
מצאו את ערך $y''$ בנקודה בה $y=1$.

**9)** נתון עקום שמשוואתו $yx^2+e^y=x$.

א. הראו שעבור $x=1$ קיים ערך $y$ אחד ויחיד ומצאו אותו.

ב. חשבו את $y''$ בנקודה בה $x=1$.

**10)** נתון כי המשוואה $h(y)-x+1=2x^3+4e^y+2y$,
מגדירה את $y=y(x)$ כפונקציה סתומה של $x$.
נתון כי $h(y)$ גזירה ברציפות ויורדת.
הוכיחו כי $y(x)$ יורדת חזק.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $y'=\frac{-2x}{5y^4-1}$ $\quad 5y^4-1\neq 0,$

2) $y'=\frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y}-2y}$ $\quad \frac{10}{y}-2y\neq 0,$

3) $y'=\frac{\sqrt{y}-1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{2\sqrt{y}}{1-\sqrt{x}}$ $\quad \sqrt{x}\neq 0,\quad \sqrt{x}\neq 1,$

4) $y'_{(1,2)}=-\frac{14}{11}$

5) $y'_{(1,0)}=1$

6) $y'=\frac{y-x^y\cdot\frac{y}{x}}{x^y\cdot\ln x-x}$ $\quad x^y\cdot\ln x-x\neq 0,$

7) $y'=\frac{-x^y\cdot\frac{y}{x}+y^x\cdot\ln y}{x^y\ln x-y^x\cdot\frac{x}{y}}$ $\quad x^y\ln x-y^x\cdot\frac{x}{y}\neq 0,$

8) $-1$

9) ב. $y''_{(1,0)}=-\frac{9}{8}$

10) שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# גזירה לוגריתמית

## שאלות

גזרו את הפונקציות הבאות:

**1)** $y=\sqrt[4]{\frac{10x-1}{x+1}}\cdot\sqrt[10]{(2x+1)^7}$

**2)** $y=\left(\sqrt[4]{10x+1}\right)^{2x}$

**3)** $y=\frac{(x+2)^{3x+4}\cdot(5x+6)}{(7x+8)\cdot(9x+10)}$

## תשובות סופיות

**1)** $y'=y\left[\frac{1}{4}\frac{1}{10x-1}\cdot 10+\frac{7}{10}\frac{1}{2x+1}\cdot 2-\frac{1}{4}\frac{1}{x+1}\right]$

**2)** $y'=\left((10x+1)^{\frac{1}{4}}\right)^{2^x}\cdot\frac{1}{4}\left[2^x\cdot\ln 2\cdot\ln(10x+1)+\frac{1}{10x+1}\cdot 10\cdot 2^x\right]$

**3)** $y'=y\left[3\cdot\ln(x+2)+\frac{1}{x+2}(3x+4)+\frac{1}{5x+6}\cdot 5-\frac{1}{7x+8}\cdot 7-\frac{1}{9x+10}\cdot 9\right]$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מתמטיקה לתלמידי גאוגרפיה ופיתוח סביבתי 2

## פרק 17 - חשבון דיפרנציאלי - בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון)

### תוכן העניינים

1. הסבר כללי על בעיות קיצון ..... 249
2. בעיות קיצון יסודיות עם מספרים ..... 250
3. בעיות קיצון בהנדסת המישור ..... 251
4. בעיות קיצון בהנדסת המרחב ..... 255
5. בעיות קיצון עם תשובה נתונה ..... 257

## שלבי עבודה

- נגדיר את אחד הגדלים בשאלה כ- $x$.
- נבטא את שאר הגדלים בשאלה באמצעות $x$.
- נבנה פונקציה שמבטאת את מה שרצינו שיהיה מינימלי/מקסימלי.
- נגזור את הפונקציה, נשווה לאפס ונחלץ ערך/ערכי ה- $x$.
- נוודא שערך ה- $x$ מסעיף 4 הוא אכן מינימום/מקסימום באמצעות "$y$" (או טבלה).
- ננסח את התשובה לשאלה המקורית.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# בעיות קיצון יסודיות עם מספרים

## שאלות

**1)** נתונים שלושה מספרים שסכומם 24. המספר הראשון שווה למספר השני. מצאו מהם המספרים, אם ידוע שמכפלתם מקסימלית.

**2)** מצאו את המספר החיובי, שאם נוסיף לו את המספר ההופכי לו, הסכום המתקבל יהיה מינימלי.

**3)** נתונים שלושה מספרים שסכומם הוא 36. ידוע שמספר אחד זהה לשני.

א. מה צריכים להיות שלושת המספרים כדי שמכפלתם תהיה מקסימלית?

ב. כיצד תשתנה התוצאה, אם מספר אחד יהיה גדול פי 2 מהשני במקום שווה לו?

ג. באיזה מקרה תהיה מכפלה גדולה יותר?

**4)** $x$ ו- $y$ הם שני מספרים המקיימים: $x+6y=60$.

א. הביעו את $y$ באמצעות $x$.

ב. מה צריכים להיות המספרים $x$ ו- $y$, כדי שמכפלת ריבועיהם תהיה מקסימלית?

ג. מהי המכפלה הנ"ל?

## תשובות סופיות

**1)** $8,8,8$

**2)** $1$

**3)** א. $12,12,12$ ב. $8,12,16$ ג. מקרה א'.

**4)** א. $y=10-\frac{x}{6}$ ב. $x=30\ ,\ y=5$ ג. $M=22500$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# בעיות קיצון בהנדסת המישור

## שאלות

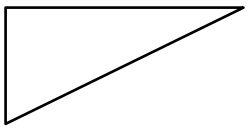
**1)** מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם 24 ס"מ, מצאו את אורך בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

**2)** ענו על הסעיפים הבאים:

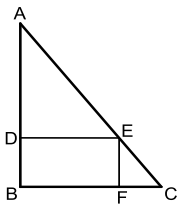
א. מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם $a$, מצאו את בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

ב. הוכיחו: מבין כל המשולשים שווי השוקיים בעלי אותו היקף, המשולש בעל השטח הגדול ביותר הוא משולש שווה צלעות.

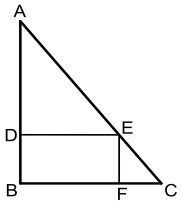
**3)** במשולש ישר זווית סכום אורכי הניצבים הוא 12 ס"מ.
מה צריך להיות אורך כל ניצב,
כדי ששטח המשולש יהיה מקסימלי?



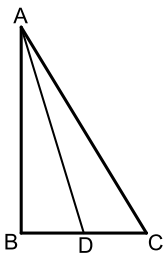
**4)** במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle B=90°$)
הנקודה E נמצאת על היתר AC,
כך שהמרובע EDBF הוא מלבן.
נתון: $AB=20$ ס"מ, $BC=16$ ס"מ.
מצאו את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.




**5)** במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle B=90°$),
הנקודה E נמצאת על היתר AC,
כך שהמרובע EDBF הוא מלבן.
נתון: $AB=a$, $BC=b$.
מצאו את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.



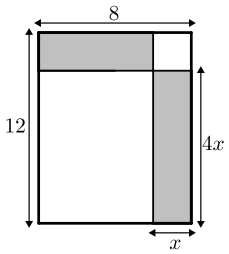

**6)** במשולש ישר הזווית ABC ($\sphericalangle B=90°$),
AD הוא תיכון לניצב BC.
ידוע כי סכום אורכי הניצבים הוא 20 ס"מ.
מצאו מה צריכים להיות אורכי הניצבים,
עבורם אורך התיכון AD יהיה מינימלי.



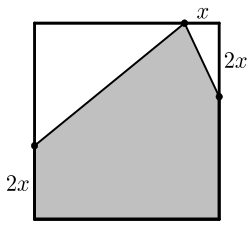


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

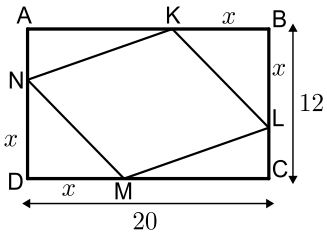
**7)** נתון מלבן שאורכי צלעותיו הם 8 ס"מ ו-12 ס"מ,
כמתואר באיור.
מקצים קטעים באורכים של $x$ ו-$4x$
על צלעות המלבן, כך שנוצרים המלבנים המקווקווים.
מצאו את $x$, עבורו סכום שטחי המלבנים הוא מינימלי.




**8)** נתון ריבוע בעל אורך צלע של 16 ס"מ.
מקצים קטע שאורכו $x$ על הצלע העליונה,
ושני קטעים שאורכם $2x$ על הצלעות הצדדיות,
כמתואר באיור, כך שנוצר המחומש המקווקו.
מצאו מה צריך להיות ערכו של $x$,
עבורו שטח המחומש יהיה מקסימלי.




**9)** הנקודות K, L, M ו-N מקצות קטעים שווים במלבן ABCD, כך ש:
$BK = BL = DM = DN = x$.
צלעותיו של המלבן הן 20 ס"מ ו-12 ס"מ.

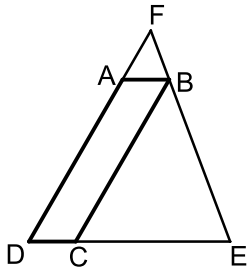



א. הביעו באמצעות $x$ את סכום שטחי
המשולשים $\Delta AKN + \Delta KBL + \Delta CLM + \Delta DNM$.

ב. מצאו מה צריך להיות $x$,
כדי ששטח המרובע LKNM יהיה מקסימלי.

ג. מהו השטח של המרובע LKNM, במקרה זה?

**10)** המרובע ABCD הוא מקבילית.
מהקודקוד B מעבירים את הצלע EF,
הנפגשת עם המשכי הצלעות DC ו-AD.
ידוע כי מידות המקבילית הן:
$AB = 2$ ס"מ, $AD = 8$ ס"מ.
נסמן את אורך הצלע DE ב-$x$.



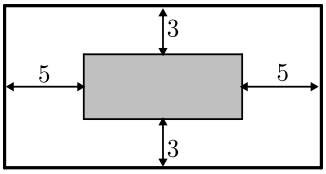

א. הביעו באמצעות $x$ את אורך הצלע DF.

ב. מצאו את $x$, עבורו סכום הצלעות DE ו-DF הוא מינימלי.

ג. מה הוא הסכום המינימלי?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** חיים הוא אחד מעובדי חברת 'דפוס יהלום בע"מ'.
תפקידו של חיים הוא להדביק גלויות על משטחי קרטון בעלי שטח מינימלי,
כך שיישארו רווחים של 3 ס"מ מקצות הקרטון העליון והתחתון,
ו-5 ס"מ מצדי הקרטון (ראה איור).

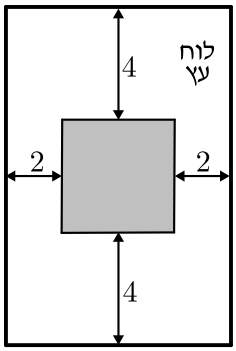



יום אחד קיבל חיים שיחת טלפון מלקוח אנונימי,
ששאל אותו את השאלה הבאה:
"יש לי מגוון גדול של גלויות במידות שונות,
אשר שטחן זהה והוא 60 סמ"ר.
מה הן המידות של גלויה, אשר שטח משטח הקרטון שלה יהיה מינימלי?".

א. עזרו לחיים לענות ללקוח על שאלתו והראו דרך חישוב.

ב. מה יהיו מידות הקרטון עבור הגלויה המסוימת?

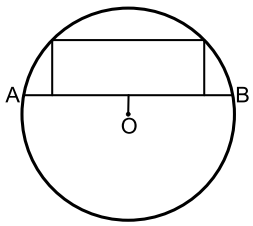
**12)** אלינה קיבלה משימה בשיעור מלאכה:
יש להכין מסגרת לתמונה מלוח עץ,
ששטחו הכולל הוא 242 סמ"ר,
כך שעובי המסגרת בצדדים יהיה 2 ס"מ,
ובקצוות העליון והתחתון – 4 ס"מ (ראה איור).
כדי לבחור את מידות לוח העץ,
אלינה צריכה לדעת את השטח המקסימלי
שעליה לנסר עבור המקום לתמונה (השטח המסומן).




א. מה יהיו מידות לוח העץ שאלינה צריכה להזמין עבור המשימה?

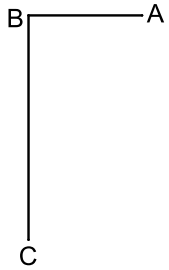
ב. מה יהיה השטח המקסימלי לתמונה עבור המידות שאלינה בחרה?

**13)** במעגל שמרכזו O ורדיוסו $10\sqrt{5}$ ס"מ העבירו
מיתר AB שמרחקו ממרכז המעגל הוא 4 ס"מ.
במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט.
מצאו את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.




**14)** במעגל שמרכזו O ורדיוסו R העבירו מיתר AB
שמרחקו ממרכז המעגל הוא $a$.
במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט.
מצאו את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.

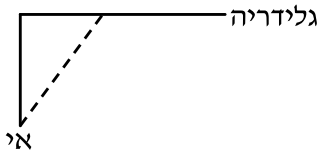
**15)** שני רוכבים יוצאים בו זמנית לדרכם:
האחד מעיר A מערבה לעיר B, והשני מעיר B דרומה לעיר C.
המרחק בין הערים A ו-B הוא 20 ק"מ.
מהירות הרוכב שיצא מ-A היא 4 קמ"ש
ומהירות הרוכב השני 2 קמ"ש.
כעבור כמה זמן מיציאת הרוכבים יהיה המרחק ביניהם מינימלי?
מצאו גם את המרחק המינימלי.





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**16)** אדם נמצא על אי במרחק 0.5 ק״מ מהחוף.
על החוף, במרחק של 3 ק״מ מהנקודה
הקרובה ביותר לאי, נמצאת גלידריה.
האדם שוחה במהירות של 8 קמ״ש
ורץ על החוף במהירות של 10 קמ״ש.
לאיזה מרחק מהגלידריה עליו לשחות,
כדי להגיע לגלידריה בזמן הקצר ביותר?




**17)** אדם מתכנן לבנות מרפסת בביתו
ורוצה להציב מעקה סביב המרפסת.
שטח המרפסת המתוכנן הוא 24 מ״ר.
מחיר מעקה בחזית המרפסת (BC)
הוא 120 ₪ למטר,
ומחיר מעקה בצדי המרפסת הוא 40 ₪ למטר.
מה צריכים להיות ממדי המרפסת, כדי שמחיר המעקה יהיה מינימלי?




## תשובות סופיות

**1)** $4\sqrt{3}$ ס״מ.

**2)** א. 2.5 ס״מ.

**3)** א. 6 ס״מ ו- 6 ס״מ ב. 18 סמ״ר. ג. $6\sqrt{2}\approx 8.48$ ס״מ.

**4)** $S=$ 80 סמ״ר.

**5)** $\frac{ab}{4}$ יחידות שטח.

**6)** 4 ס״מ, 16 ס״מ.

**7)** $x=2.75$

**8)** $x=6$

**9)** א. $2x^2-32x+240$ ב. $x=8$ ג. $S=$ 128 סמ״ר.

**10)** א. $\mathrm{DF}=\frac{8x}{x-2}$ ב. $x=6$ , $L=\frac{x^2+6x}{x-2}$ ג. $L=18$

**11)** א. 6 ס״מ על 10 ס״מ. ב. 12 ס״מ על 20 ס״מ.

**12)** א. 11 ס״מ על 22 ס״מ. ב. $S=98$

**13)** 92 ס״מ.

**14)** $2\sqrt{5}R-2a$ יחידות אורך.

**15)** 4 שעות, המרחק: $\sqrt{80}$ ק״מ.

**16)** $2\frac{1}{3}$ ק״מ.

**17)** $4\cdot 6$

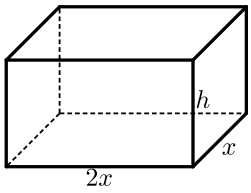

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# בעיות קיצון בהנדסת המרחב

## שאלות

**1)** נתונה תיבה שבסיסה ריבוע ושטח הפנים שלה הוא 96 סמ"ר.
מצאו את מידות התיבה שנפחה מקסימלי.

**2)** נתונה תיבה שבסיסה הוא מלבן,
שבו צלע אחת גדולה פי 2 מהצלע הסמוכה לה,
כמתואר באיור.
ידוע כי גובה התיבה $h$ וצלע המלבן הקטנה $x$ מקיימים: $x+h=9$.
מצאו מה צריכים להיות מידות בסיס התיבה
כדי שנפחה יהיה מקסימלי.

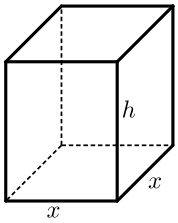



**3)** נתונה תיבה שגובהה הוא $h$ ובסיסה הוא ריבוע
שאורך צלעו היא $x$.
נתון כי צלע הריבוע וגובה התיבה מקיימים
$4x+h=63$.

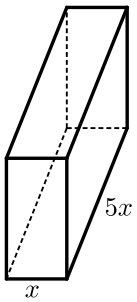
א. הביעו את $h$ באמצעות $x$.

ב. הביעו את שטח הפנים של התיבה
באמצעות $x$.

ג. מה צריך להיות ערכו של $x$, כדי ששטח
הפנים יהיה מקסימלי?




**4)** ליוסי משטח פח אשר הוא רוצה לבנות תיבה
ממנו שנפחה הכולל הוא 225 סמ"ק.
יוסי רוצה שאורך הבסיס יהיה גדול פי 5
מרוחבו, כמתואר באיור הסמוך.
כמות הפח שיש בידי יוסי מוגבלת, ולכן הוא
רוצה לדעת מה היא הכמות המינימלית של פח
שעליו להשתמש, כדי להשיג את מבוקשו.
מצאו את כמות הפח המינימלית.

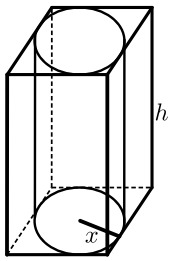



**5)** לבניית תיבה שנפחה 144 סמ"ק ואורך בסיסה גדול פי 2 מרוחב בסיסה,
דרושים שני חומרים, ולהם שני מחירים שונים:
החומר לבסיס התחתון יקר פי 3 מהחומר לפאות הצדדיות והבסיס העליון.
מהן מידות התיבה הזולה ביותר שניתן לבנות?

**6)** מכל הגלילים הישרים, שהיקף פרישת המעטפת שלהם הוא $k$,
מצאו את נפחו של הגליל בעל הנפח המקסימלי.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**7)** באיור שלפניך מתוארים תיבה שבסיסה ריבוע, וגליל החסום בתוך התיבה. רדיוס הגליל יסומן ב- $x$ וגובהו ב- $h$.
ידוע כי הסכום של $x$ ו- $h$ הוא 12 ס"מ.




א. הביעו באמצעות $x$ את אורך מקצוע הבסיס של התיבה.

ב. הביעו באמצעות $x$

1. את נפח הגליל.

2. את נפח התיבה.

ג. מצאו את $x$, עבורו הנפח הכלוא בין התיבה לגליל יהיה מקסימלי.

**8)** נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה.
אורך מקצוע צדדי בפירמידה הוא $k$ ושטח המעטפת שלה הוא $S$.
הוכיחו כי $S < 2k^2$.

## תשובות סופיות

**1)** $4\cdot4\cdot4$ ס"מ.

**2)** בסיס: 6 ס"מ, 12 ס"מ. גובה: 3 ס"מ.

**3)** א. $h=63-4x$ ב. $p=-14x^2+252x$ ג. $x=9$

**4)** 3 ס"מ, 15 ס"מ ו-5 ס"מ.

**5)** $3\cdot6\cdot8$ ס"מ.

**6)** $\frac{k^3}{216\pi}$ יחידות נפח $=V$.

**7)** א. $2x$ ב. 1. $V=12\pi x^2-\pi x^3$ 2. $V=48x^2-4x^3$ ג. $x=8$

**8)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# בעיות קיצון עם תשובה נתונה

## בעיות קיצון בהנדסת המרחב

**1)** נתונים שני מספרים חיוביים, $p$ ו- $q$, שסכומם $a$.

הראו, שכאשר מתקיים $\frac{p}{q}=\frac{n}{m}$, ערך הביטוי $p^n q^m$ מקסימלי (כאשר $n$ ו- $m$ טבעיים).

**2)** הוכיחו שמכל החרוטים הישרים שנפחם $\pi k$ סמ"ק, החרוט בעל שטח המעטפת המינימלי הוא זה שגובהו $\sqrt[3]{6k}$ ס"מ.
(שטח מעטפת של חרוט הוא $\pi Rl$, כאשר $l$ הוא הקו היוצר של החרוט)

## בעיית קיצון עם תנועה

**3)** מהירותו של רכב היא $v$ קמ"ש ועליו לנסוע דרך של $S$ ק"מ.

לרכב יש הוצאות נסיעה של $\frac{v}{400}$ ₪ לכל ק"מ נסיעה ו- $\frac{v^2}{200}+48$ ₪ לכל שעת נסיעה.
הראו שכדי שהוצאותיו יהיו מינימליות, על הרכב לנסוע במהירות של 80 קמ"ש.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מתמטיקה לתלמידי גאוגרפיה ופיתוח סביבתי 2

## פרק 18 - טורי טיילור - מקלורן

### תוכן העניינים


1. טור טיילור וטור מקלורן ..... 258
2. טור טיילור סביב $X=X0$ ..... 260
3. חישוב סכום של טור ..... 261
4. חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן ..... 262
5. חישובים מקורבים עם השארית של לייבניץ ..... 263
6. חישובים מקורבים עם השארית של לגראנז' ..... 265
7. חישוב מקורב של אינטגרל מסוים ..... 271
8. נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות ..... 272

# טור טיילור וטור מקלורן

## שאלות

בשאלות **1-24** מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x=0$ (טור מקלורן):

**1)** $f(x)=\sin 2x$ **2)** $f(x)=x^2e^{-4x}$ **3)** $f(x)=\sinh x$

**4)** $f(x)=\sin^2 x$ **5)** $f(x)=\cos^2 x$ **6)** $f(x)=2^x$

**7)** $f(x)=x\cos(4x^2)$ **8)** $f(x)=\ln(2-3x+x^2)$ **9)** $f(x)=\arcsin x$

**10)** $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ **11)** $f(x)=\dfrac{3}{1-x^4}$ **12)** $f(x)=\dfrac{1}{1+9x^2}$

**13)** $f(x)=\dfrac{1}{x-5}$ **14)** $f(x)=\dfrac{x}{4x+1}$ **15)** $f(x)=\dfrac{x}{9+x^2}$

**16)** $f(x)=\dfrac{3}{x^2+x-2}$ **17)** $f(x)=\dfrac{7x-1}{3x^2+2x-1}$ **18)** $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$

**19)** $f(x)=\ln(1+x)$ **20)** $f(x)=\ln(1-x)$ **21)** $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

**22)** $f(x)=\ln(5-x)$ **23)** $f(x)=\dfrac{x^2}{(1-2x)^2}$ **24)** $f(x)=\arctan\left(\dfrac{x}{3}\right)$

הערות: לפתרון שאלות **15** ו-**16**, יש להכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.
לפתרון סעיפים **18**, **19**, **23** ו-**24** יש להכיר את הנושא גזירה ואינטגרציה של טורי מקלורן.
אפשר להיעזר בפיתוחים הידועים לטור מקלורן המופיעים בנספח.

בשאלות **25-27** מצאו את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס,
בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות (נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים):

**25)** $f(x)=e^{-x^2}\cos x$ **26)** $f(x)=\tan x$ **27)** $f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

**2** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n x^{n+2}}{n!}$ $(-\infty<x<\infty)$

**3** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

**4** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

**5** $\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

**6** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n x^n}{n!}$ $(-\infty<x<\infty)$

**7** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{2n}x^{4n+1}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

**8** $\ln 2-\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1\le x<1)$

**9** $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(-1<x<1)$

**10** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ $(|x|<1)$

**11** $\sum_{n=0}^{\infty}3x^{4n}$ $(|x|<1)$

**12** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 9^n x^{2n}$ $(|x|<\frac{1}{3})$

**13** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{5^{n+1}}x^n$ $(|x|<5)$

**14** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{n+1}$ $(|x|<\frac{1}{4})$

**15** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$ $(|x|<3)$

**16** $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}-1\right)x^n$ $(|x|<1)$

**17** $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2(-1)^n-3^n\right)x^n$ $(|x|<\frac{1}{3})$

**18** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n\cdot x^{n-1}$ $(|x|<1)$

**19** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ $(-1<x\le 1)$

**20** $\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1\le x<1)$

**21** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x|<1)$

**22** $\ln 5-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)}$ $(-5\le x<5)$

**23** $\sum_{n=0}^{\infty}2^n(n+1)x^{n+2}$ $(|x|<\frac{1}{2})$

**24** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}$ $(|x|\le 3)$

**25** $1-\frac{3}{2}x^2+\frac{25}{24}x^4-\frac{331}{720}x^6+..$

**26** $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\ldots$

**27** $x-x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5+..$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# טור טיילור סביב $x=x_0$

## שאלות

מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x=x_0$ של הפונקציות הבאות:

**1)** $f(x)=\ln x$ $\quad (x_0=1)$

**2)** $f(x)=\frac{1}{x}$ $\quad (x_0=2)$

**3)** $f(x)=\sin x$ $\quad \left(x_0=\frac{\pi}{2}\right)$

## תשובות סופיות

**1)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^{n+1}}{n+1}$
$(0<x\le 2)$

**2)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-2)^n}{2^{n+1}}$
$(0<x<4)$

**3)** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-\frac{\pi}{2})^{2n}}{2n!}$
$(-\infty<x<\infty)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב סכום של טור

## שאלות

חשבו את סכום הטורים הבאים:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{n!}$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n!}$

4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$

5) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$

6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$

8) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$

9) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)}$

## תשובות סופיות

1) $e$

2) $e^{-2}$

3) $\sqrt{e}$

4) $2e$

5) $\pi/4$

6) $\sin 1$

7) $\cos 1$

8) $\ln 2$

9) $\ln\frac{3}{2}$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב גבולות בעזרת טורי מקלורן

## שאלות

בשאלות **1-3** חשבו את ערך הגבול:

**1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$ **2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^3}$ **3)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$

**4)** נתון כי $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{x^2}-1}{x^n}=k$ כאשר $k$ קבוע שונה מאפס.
מצאו את $n$ ואת $k$.

**5)** חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\ln(1-\ln x)\right]^{x-1}$.

**6)** חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sinh x^4 - x^4}{(x-\sin x)^4}$.

**7)** חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x^2)^3-(\sin x^3)^2}{\ln(1+x^{10})}$.

## תשובות סופיות

**1)** $\dfrac{1}{120}$

**2)** $\dfrac{1}{3}$

**3)** $\dfrac{1}{3}$

**4)** $k=1, n=3$

**5)** $1$

**6)** $216$

**7)** $-\dfrac{1}{2}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישובים מקורבים עם השארית של לייבניץ

## שאלות

בשאלות **1-3** חשבו בשגיאה הקטנה מ-0.001:

**1)** $\frac{1}{e}$ **2)** $\sin 3^\circ$ **3)** $\arctan 0.25$

בשאלות **4-6** חשבו בעזרת $n$ איברים ראשונים (שונים מאפס), בפיתוח לטור מקלורן, והעריכו את השגיאה בחישוב:

**4)** $(n=3)\frac{1}{\sqrt{e}}$ **5)** $(n=1)\cos 4^\circ$ **6)** $(n=4)\ln 1.5$

**7)** מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sin x \cong x-\frac{x^3}{3!}$ עבור $|x| \le \frac{\pi}{6}$?

**8)** מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\ln(1+x) \cong x$ עבור $|x| < 0.01$?

**9)** מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\cos x \cong 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$ עבור $|x| \le 0.2$?

**10)** עבור אילו ערכי $x$, $\sin x \cong x-\frac{x^3}{3!}$ בשגיאה הקטנה מ-0.001?

**11)** עבור אילו ערכי $x$, $\arctan x \cong x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}$ בשגיאה הקטנה מ-0.01?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $\frac{53}{144}$

2) $\frac{\pi}{60}$

3) $\frac{47}{192}$

4) $\frac{5}{8}$, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{48}$.

5) 1, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{\pi\cdot\pi}{4050}$.

6) $\frac{77}{192}$, בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{160}$.

7) $\frac{(\pi/6)^5}{5!}$

8) $\frac{(0.01)^2}{2}$

9) $\frac{(0.2)^6}{6!}$

10) $|x|<\sqrt[5]{3/25}$

11) $|x|<\sqrt[9]{9/100}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישובים מקורבים עם השארית של לגראנז'

**1)** א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt{x+4}$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.
חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt{5}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $x>0$ מתקיים:
$$2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2<\sqrt{x+4}<2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2+\frac{1}{512}x^3$$
ג. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sqrt{x+4}\cong 2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2$, עבור $|x|<0.1$?

**2)** א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{64+x}$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.
חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[3]{66}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $x>0$ מתקיים:
$$4+\frac{1}{48}x-\frac{1}{9216}x^2<\sqrt[3]{64+x}<4+\frac{1}{48}x-\frac{1}{9216}x^2+\frac{5}{5308416}x^3$$

**3)** א. רשמו את נוסחת טיילור מסדר ראשון לפונקציה $f(x)=\tan x$ סביב $x_0=0$, כולל שארית לגראנז'.
חשבו בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\tan 0.1$ והעריכו את השגיאה בקירוב.
ב. הוכיחו שלכל $0<x<1$ מתקיים:
$$x<\tan x<x+4\sqrt{3}x^2$$

**4)** רשמו את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x)=\sqrt[4]{x}$ סביב $x_0=16$, כולל שארית לגראנז'.
חשבו, בעזרת הנוסחה שהתקבלה, את $\sqrt[4]{15}$ והעריכו את השגיאה בקירוב.

**5)** חשבו את $\sqrt[3]{29}$ ברמת דיוק של $10^{-3}$.

**6)** חשבו את $\sin 36^\circ$ בשגיאה הקטנה מ- $\frac{1}{1000000}$, בשתי דרכים:
א. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x=0$.
ב. על ידי שימוש בטור טיילור מתאים סביב $x=\frac{\pi}{4}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מי מהטורים טוב יותר על מנת לחשב את $\sin 36^\circ$ ? נמקו.

**7)** נתונה $f(x)=\sqrt{1+x}$ .

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב $0$ עד סדר **1** עבור $0\le x\le 1$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. הוכיחו שלכל $x\ge 0$ מתקיים $\sqrt{1+x}\le 1+\frac{1}{2}x$ .

**8)** נתונה $f(x)=\frac{1}{1+x}$ .

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב $0$ עד סדר **3**, עבור $0.1\le x\le 0.9$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת $\frac{1}{1+x}\cong 1-x+x^2-x^3$, עבור $0.1\le x\le 0.9$ .

ג. הוכיחו כי עבור $-1<x$ מתקיים $\frac{1}{1+x}\ge 1-x+x^2-x^3$ .

**9)** נתונה $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$ .

א. קרבו את $f(x)$ על ידי פולינום טיילור סביב $0$ עד סדר **2**, עבור $|x|\le 0.5$, והעריכו את השגיאה בקירוב.

ב. מצאו את הערכת השגיאה (השגיאה המקסימלית) בנוסחה המקורבת $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}\cong 1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2$, עבור $|x|\le 0.5$ .

ג. פתרו את אי השוויון $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}<1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2$, עבור $-1<x$ .

**10)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x)=e^x$ , כולל נוסחת השארית של לגראנז'.

ב. חשבו את $\sqrt{e}$ ברמת דיוק של $10^{-4}$.

ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת:

$e^x\cong 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$, עבור $0\le x\le 1$ .

ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(-1,1)$, שעבורו $\left|e^x-p(x)\right|<10^{-5}$ .


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את נוסחת מקלורן עבור $f(x)=\ln(1+x)$, כולל נוסחת השארית של לגראנז'.

ב. חשבו את $\ln 1.5$ ברמת דיוק של $10^{-4}$.

ג. מצאו את הערכת השגיאה של הנוסחה המקורבת:

$$\ln(1+x)\cong x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$ עבור $0\le x\le 1$.

ד. מצאו פולינום $p(x)$ בקטע $(0,1)$, שעבורו $\left|\ln(1+x)-p(x)\right|<10^{-2}$.

ה. הוכיחו כי לכל $x>0$ מתקיים אי השוויון $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

**12)** תהי $f$ פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[0,1]$,
וניח ש- $f(0)=f(1)=0$ ו- $\left|f''(x)\right|\le M$ לכל $0<x<1$.

הוכיחו כי $\left|f'(x)\right|\le\frac{M}{2}$ לכל $0\le x\le 1$.

**13)** תהי $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f(-1)=f(1)=0$.
כמו כן, נתון כי קיים $M$, כך ש- $|f''(x)|\le M$ בקטע.

הוכיחו שלכל $-1\le x\le 1$ מתקיים $\left|f(x)\right|\le\frac{M}{2}$.

**14)** תהי $f$ פונקציה גזירה ב- $(0,\infty)$, וניח כי $\left|f'(x)\right|\le M$ לכל $0<x$.

הוכיחו כי $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0$.

**15)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f''(x)\ge 0$ לכל $x\in[a,b]$,
וניח כי $x_0\in[a,b]$.

א. הוכיחו שלכל $x\in[a,b]$ מתקיים $f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

ב. הוכיחו כי $\cos y-\cos x\ge(x-y)\sin x$ לכל $x,y\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$.

**16)** תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים וניח כי קיימים:

$$M_0=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|,\ M_1=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|,\ M_2=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f''(x)|$$

הוכיחו כי $\left(M_1\right)^2\le 2M_0M_2$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**17)** נניח ש- $f$ גזירה פעמיים ב- $(0,\infty)$ ו- $f''$ חסומה ב- $(0,\infty)$ ו- $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.
הוכח כי $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$.

**18)** הוכיחו כי $e$ הוא מספר אי-רציונלי.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. נוסחה: $\sqrt[3]{64+x}=4+\frac{1}{48}x-\frac{1}{9216}x^2+\frac{5}{81\cdot\sqrt[3]{(64+c)^8}}x^3$,

חישוב: $\sqrt[3]{66}=4+\frac{1}{24}-\frac{1}{2304}=\frac{9311}{2304}$, שגיאה בקירוב: $\frac{5}{663552}$.

ב. שאלת הוכחה. ג. $\frac{1}{480000}$

**2)** א. נוסחה: $\tan x=x+\frac{\sin c}{\cos^3 c}x^2$, חישוב: $\tan 0.1=\frac{1}{10}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{970}$.

ב. שאלת הוכחה.

**3)** א. נוסחה: $\sqrt{x+4}=2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2-\frac{1}{16\sqrt{(c+4)^8}}x^3$,

חישוב: $\sqrt{5}=2+\frac{1}{4}-\frac{1}{64}=\frac{143}{64}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{512}$.

ב. שאלת הוכחה.

**4)** נוסחה: $\sqrt[4]{x}=2+\frac{1}{32}(x-16)-\frac{3}{4096}(x-16)^2+\frac{7}{128\cdot\sqrt[4]{c^{11}}}(x-16)^3$,

חישוב: $\sqrt[4]{15}=2-\frac{1}{32}-\frac{3}{4096}=\frac{8061}{4096}$, שגיאה בקירוב: $\frac{1}{3130}$.

**5)** $\sqrt[3]{29}=3\frac{158}{2187}$

**6)** א. $\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{5}-\frac{\frac{\pi}{5}^3}{3!}+\frac{\frac{\pi}{5}^5}{5!}-\frac{\frac{\pi}{5}^7}{7!}$ ב. $\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4})-\frac{\sqrt{2}}{4}(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4})^2-\frac{\sqrt{2}}{12}(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4})^3$

**7)** א. ב. $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x$, בשגיאה הקטנה מ-0.25.

**8)** א. $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3$ בשגיאה הקטנה מ-$\frac{6561}{10000}$.

ב. שגיאה הקטנה מ-$\frac{6561}{10000}$. ג. שאלת הוכחה.

**9)** א. $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}=1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2$ בשגיאה הקטנה מ-$\frac{7}{27}$.

ב. השגיאה המקסימלית היא $\frac{7}{27}$. ג. ראו בסרטון.

**10)** א. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^c}{(n+1)!}x^n$ ב. $\sqrt{e}=1.6487$

ג. $\frac{3}{(n+1)!}$ ד. $p(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^8}{8!}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** א. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}}x^{n+1}$

ב. $\ln(1.5)=0.5-\frac{0.5^2}{2}+\frac{0.5^3}{3}-\frac{0.5^4}{4}+\frac{0.5^5}{5}-\frac{0.5^6}{6}+\frac{0.5^7}{7}-\frac{0.5^8}{8}+\frac{0.5^9}{9}$

ג. $\frac{1}{n+1}$ ד. $p(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{x^{101}}{101}-\frac{x^{102}}{102}$ ה. שאלת הוכחה.

**12)** שאלת הוכחה.

**13)** שאלת הוכחה.

**14)** שאלת הוכחה.

**15)** שאלת הוכחה.

**16)** שאלת הוכחה.

**17)** שאלת הוכחה.

**18)** שאלת הוכחה.

**<u>הערה לגבי קירובים</u>**

כאשר נדרש לספק קירוב שהוא **מדויק ל- $n$ ספרות אחרי הנקודה**,

אז עלינו לדרוש שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.5\times10^{-n}$.

למשל, דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה משמעותו,

שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.5\times10^{-3}=0.0005$.

בספר לא השתמשנו בניסוח זה, אך במקומות מסוימים נעשה בו שימוש.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב מקורב של אינטגרל מסוים

## שאלות

חשבו בקירוב את האינטגרלים הבאים בשגיאה הקטנה מ- $\varepsilon$ :

**1)** $\int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx \qquad (\varepsilon = 0.0001)$

**2)** $\int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \qquad (\varepsilon = 0.001)$

**3)** $\int_0^{0.5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx \qquad (\varepsilon = 0.0001)$

## תשובות סופיות

**1)** $\frac{449}{2250}$

**2)** $\frac{39}{400}$

**3)** $\frac{143}{576}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

| טור מקלורן | תחום התכנסות |
|---|---|
| $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$ | $-\infty<x<\infty$ |
| $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$ | $-\infty<x<\infty$ |
| $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$ | $-\infty<x<\infty$ |
| $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$ | $-1<x\le 1$ |
| $\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$ | $-1\le x\le 1$ |
| $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x^1+x^2+x^3+\ldots$ | $-1<x<1$ |
| $(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n$<br>$=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots$ | $-1\le x\le 1\ (m>0)$<br>$-1<x\le 1\ (-1<m<0)$<br>$-1<x<1\ (m\le -1)$<br>$m\ne 0,1,2,3,\ldots$ |


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מתמטיקה לתלמידי גאוגרפיה ופיתוח סביבתי 2

## פרק 19 - חשבון אינטגרלי - האינטגרל הכללי

### תוכן העניינים

1. חישובי אינטגרלים ..... 273
2. מציאת פונקציה קדומה ..... 278

# חישובי אינטגרלים:

## סיכום כללי:

### הגדרה וכללי האינטגרציה:

- כלל האינטגרציה של פונקציה פולינומית: $\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \ , \ (n \neq -1)}$.
- עבור מקדם קבוע $a$ נקבל: $\boxed{\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c \ , \ (n \neq -1)}$.
- כללי האינטגרציה של פונקציות טריגונומטריות:

$$\boxed{\int \sin x dx = -\cos x + c} \ , \ \boxed{\int \cos x dx = \sin x + c} \ , \ \boxed{\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c} \ , \ \boxed{\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c}$$

## שאלות:

**1)** מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int x^3 dx$

ב. $\int 12x^5 dx$

ג. $\int x^4 dx$

ד. $\int 2x^3 dx$

ה. $\int \frac{2}{3} x^5 dx$

ו. $\int 7 dx$

ז. $\int \left( \frac{5}{6} x^4 + 16x^3 - \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{1}{3} \right) dx$

ח. $\int \left( \frac{4x^3}{5} - ax^2 - \frac{2ax}{b} + b \right) dx$

**2)** מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int x^{-3} dx$

ב. $\int \frac{1}{x^3} dx$

ג. $\int \left( \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \frac{a}{x^3} + \frac{x}{a} \right) dx$

ד. $\int \frac{2x^3 + x - 2}{x^3} dx$

**3)** מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int x^{\frac{1}{2}}dx$

ב. $\int \sqrt{x}dx$

ג. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

ד. $\int\left(\frac{4}{\sqrt{x}}+3\sqrt{x}\right)dx$

**4)** מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int(5x-1)^3\,dx$

ב. $\int 3(2-7x)^4\,dx$

ג. $\int \frac{18}{(6x+5)^2}dx$

ד. $\int \frac{1}{\sqrt{6x-3}}dx$

ה. $\int \sqrt{ax+b}dx$

**5)** מצא את תוצאת החילוק:

א. $\frac{x^2-5x-14}{x+2}=$

ב. $\frac{x^3+x^2+3x-5}{x-1}=$

ג. $\frac{x^4+x^3-x^2+14x-3}{x+3}=$

ד. $\frac{x^3-4x^2+9}{x-3}=$

ה. $\frac{x^3+5x^2-4x-20}{x+5}=$

**6)** מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \frac{x^2-5x-14}{x+2}dx$

ב. $\int \frac{x^3+x^2+3x-5}{x-1}dx$

ג. $\int \frac{x^4+x^3-x^2+14x-3}{x+3}dx$

ד. $\int \frac{x^3-4x^2+9}{x-3}dx$

ה. $\int \frac{x^3+5x^2-4x-20}{x+5}dx$

ו. $\int \frac{2x^5+x^4-4x^2+1}{2x+1}dx$

**7)** מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int -\frac{2x}{(x^2-1)^2}dx$

ב. $\int \frac{x^2}{(x^3+6)^2}dx$

ג. $\int \frac{x-2}{(x^2-4x+1)^2}dx$

ד. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx$

ה. $\int \frac{6x-3}{\sqrt{x-x^2}}dx$

ו. $\int 8x(x^2+1)^3\,dx$

ז. $\int(2-x^2)(6x-x^3)^2dx$

**8)** חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\left(\sin x-3\cos x+\frac{4}{\cos^2 x}+5\right)dx$

ב. $\int\left(\cos 3x-2\sin 4x+\frac{4}{\cos^2 3x}\right)dx$

ג. $\int\left(\sin(\pi-x)+\frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)dx$

**9)** חשב את האינטגרלים הבאים (שימוש בזהויות):

א. $\int(2\sin x\cos x)dx$

ב. $\int(\sin 3x\cos 3x)dx$

ג. $\int(\sin^4 x-\cos^4 x)dx$

ד. $\int(\sin^2 x)dx$

**10)** חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\left(\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\right)dx$

ב. $\int\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx$

ג. $\int(\cos x\sin^2 x)dx$

**11)** חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\left(\sin 2x-4\cos\frac{x}{3}\right)dx$

ב. $\int\frac{1}{\cos^2 4x}dx$

ג. $\int\frac{1}{\sin^2 10x}dx$

ד. $\int(\cos^2 x-\sin^2 x)dx$

ה. $\int(\cos^4 x-\sin^4 x)dx$

ו. $\int(\cos x+\sin x)^2 dx$

ז. $\int(\sin x\cos x\cos(2x))dx$

ח. $\int\tan^2 xdx$

ט. $\int\frac{1}{(\sin x\cos x)^2}dx$

י. $\int\cos^2 xdx$

יא. $\int\sin^2 4xdx$

**12)** חשב את ערכי האינטגרלים הבאים (שאלות אתגר):

א. $\int\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)dx$

ב. $\int\cos^4 xdx$

ג. $\int\sin^4 4xdx$

ד. $\int\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}dx$

ה. $\int\frac{\sin^3 x}{1-\cos x}dx$

## תשובות סופיות:

**1)** א. $\frac{x^4}{4}+c$ ב. $2x^6+c$ ג. $\frac{x^5}{5}+c$ ד. $\frac{x^4}{2}+c$ ה. $\frac{x^6}{9}+c$ ו. $7x+c$

ז. $\frac{x^5}{6}+4x^4-\frac{x^3}{6}+2x^2-\frac{1}{3}x+c$ ח. $\frac{x^4}{5}-\frac{ax^3}{3}-\frac{ax^2}{b}+bx+c$.

**2)** א. $-\frac{x^{-2}}{2}+c$ ב. $-\frac{1}{2x^2}+c$ ג. $-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}+\frac{a}{2x^2}+\frac{x^2}{2a}+c$ ד. $2x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+c$.

**3)** א. $\frac{x^{1.5}}{1.5}+c$ ב. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+c$ ג. $2\sqrt{x}+c$ ד. $8\sqrt{x}+2\sqrt{x^3}+c$.

**4)** א. $\frac{(5x-1)^4}{20}+c$ ב. $-\frac{3(2-7x)^5}{35}+c$ ג. $-\frac{3}{6x+5}+c$

ד. $\frac{\sqrt{6x-3}}{3}+c$ ה. $\frac{2\sqrt{(ax+b)^3}}{3a}+c$.

**5)** א. $x-7$ ב. $x^2+2x+5$ ג. $x^3-2x^2+5x-1$

ד. $x^2-x-3$ ה. $x^2-4$

**6)** א. $\frac{x^2}{2}-7x+c$ ב. $\frac{x^3}{3}+x^2+5x+c$ ג. $\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-x+c$

ד. $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-3x+c$ ה. $\frac{x^3}{3}-4x+c$ ו. $\frac{x^5}{5}-x^2+x+c$.

**7)** א. $\frac{1}{x^2-1}+c$ ב. $-\frac{1}{3\left(x^3+6\right)}+c$ ג. $-\frac{1}{2\left(x^2-4x+1\right)}+c$

ד. $\sqrt{x^2+2}+c$ ה. $-6\sqrt{x-x^2}+c$ ו. $\left(x^2+1\right)^4+c$

ז. $\frac{\left(6x-x^3\right)^3}{9}+c$.

**8)** א. $-\cos x-3\sin x+4\tan x+5x+c$ ב. $\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\cos 4x}{2}+\frac{4\tan 3x}{3}+c$

ג. $\cos\left(\pi-x\right)+\tan x+x+c$.

**9)** א. $-\frac{1}{2}\cos 2x+c$ ב. $-\frac{\cos 6x}{12}+c$ ג. $-\frac{\sin 2x}{2}+c$

ד. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+c$.

**10)** א. $2\sqrt{\sin x}+c$ ב. $\frac{1}{\cos x}+c$ ג. $\frac{1}{3}\sin^3 x+c$.

**11)** א. $-\frac{1}{2}\cos 2x-12\sin\frac{x}{3}+c$ ב. $\frac{1}{4}\tan 4x+c$ ג. $-\frac{1}{10}\cot 10x+c$

ד. $\frac{1}{2}\sin 2x+c$ ה. $\frac{1}{2}\sin 2x+c$ ו. $x-\frac{1}{2}\cos 2x+c$

ז. $-\frac{1}{16}\cos 4x+c$ ח. $\tan x-x+c$ ט. $\tan x-\cot x+c$

י. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+c$ יא. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{16}\sin 8x+c$

**12)** א. $\frac{3}{4}x+\frac{1}{16}\sin 4x+c$ ב. $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$

ג. $\frac{3}{8}x-\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{128}\sin 16x+c$ ד. $-\cot x-x+c$

ה. $-\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x+c$

# מציאת פונקציה קדומה:

## שאלות:

**1)** נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=3x^2-7$.
מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(2,-1)$.

**2)** נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=2x-6$.
ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.
מצא את הפונקציה.

**3)** הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=x^2-8x+2$. נתון: $f(-2)=1$.
א. מצא את $f(x)$.
ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$.

**4)** נתונה הנגזרת של פונקציה $f(x)$: $f'(x)=9x^2-4$.
ערך הפונקציה בנקודה $x=1$ הוא 3.
א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=1$.
ב. מצא את $f(x)$.
ג. מצא את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.

**5)** הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=2x-3$.
לפונקציה משיק ששיפועו הוא 3-.
א. מצא את שיעור ה- $x$ של נקודת ההשקה.
ב. מצא את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא 7.

**6)** הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=-6x-5$.
המשיק לפונקציה בנקודה A יוצר זווית של $45^\circ$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- $x$.
א. מצא את שיעור ה- $x$ של הנקודה A.
ב. מצא את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא 6-.
ג. מצא את משוואת המשיק.

**7)** הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=3x-4$.
הישר $y=2x+5$ משיק לגרף הפונקציה. מצא את $f(x)$.

## תשובות סופיות:

**1)** $f(x)=x^3-7x+5$.

**2)** $f(x)=x^2-6x+14$.

**3)** א. $f(x)=\frac{x^3}{3}-4x^2+2x+23\frac{2}{3}$ ב. $y=-5x+27$.

**4)** א. $y=5x-2$ ב. $f(x)=3x^3-4x+4$ ג. $(0,-2)$ , $(0.4,0)$.

**5)** א. $x=0$ ב. $f(x)=x^2-3x+7$.

**6)** א. $x=-1$ ב. $f(x)=-3x^2-5x-8$ ג. $y=x-5$.

**7)** $f(x)=\frac{3x^2}{2}-4x+11$.

# מתמטיקה לתלמידי גאוגרפיה ופיתוח סביבתי 2

## פרק 20 - חשבון אינטגרלי - האינטגרל המסוים וחישובי שטחים

### תוכן העניינים

1. האינטגרל המסוים ..... 280
2. חישובי שטחים יסודיים ..... 282
3. חישובי שטחים יסודיים עם פרמטרים ..... 288
4. חישובי שטחים כאשר נתונה נגזרת הפונקציה ..... 290
5. חישובי שטחים עם פונקציה רציונאלית ..... 293
6. חישובי שטחים עם פונקצית שורש ..... 295
7. חישובי שטחים עם פונקציות טריגונומטריות ..... 299
8. חישובי שטחים בין גרף הנגזרת והצירים ..... 302

# האינטגרל המסוים:

## סיכום כללי:

תהא פונקציה $f(x)$ שנגזרתה היא $f'(x)$ ($f(x)$ מוגדרת בתחום $a \le x \le b$).

הקשר שבין האינטגרל המסוים לפונקציה קדומה הוא: $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$.

**הערה:**

יש להשתמש בכל כללי האינטגרציה המיידיים של הפונקציות השונות אשר נלמדו.

## שאלות:

**1)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\int_2^5 (x^2+5x)dx$

ב. $\int_{-4}^{-1} x^2(x-3)dx$

ג. $\int_{-3}^{3} (x^3+4x)dx$

ד. $\int_{-1}^{1} 3(2x-1)^5 dx$

ה. $\int_1^2 \frac{2}{(x-3)^2}dx$

ו. $\int_1^4 \frac{x-1}{x^3}dx$

ז. $\int_{-3}^{0} \frac{2x^2+7x-4}{x+4}dx$

ח. $\int_3^4 \frac{3x^2-7x+2}{x-2}dx$

ט. $\int_1^2 \sqrt{3x-1}dx$

י. $\int_{-5}^{0} \frac{3}{\sqrt{4-x}}dx$

**2)** חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\int_0^{\pi} (\cos x)dx$

ב. $\int_0^{\pi} (\sin 2x+1)dx$

ג. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x - 3\cos 2x)dx$

ד. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{3}{\cos^2 x}+2\right)dx$

**3)** לפניך האינטגרל הבא: $\int_{1}^{a}(4x-7)dx$.

מצא עבור אלו ערכים של $a$ ערך האינטגרל יהיה שווה ל-1-.

**4)** לפניך האינטגרל הבא: $\int_{a}^{2}(x-3x^2)dx$.

א. כתוב ביטוי לערך האינטגרל כתלות ב-$a$.

ב. מצא עבור אלו ערכים של $a$ ערך האינטגרל יהיה שווה ל-$\frac{a-12}{2}$.

**5)** לפניך האינטגרל הבא: $\int_{a}^{a+4}\left(\frac{1}{\sqrt{x-a}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx$.

א. כתוב את ערך האינטגרל כתלות ב-$a$.

ב. מצא את ערכו של $a$ עבורו ערך האינטגרל יהיה שווה ל-2.

**6)** לפניך האינטגרל הבא: $\int_{0}^{a}(\sin x+2\cos 2x)dx$, $0<a<3$.

מצא עבור אלו ערכים של $a$ ערך האינטגרל יהיה שווה ל-1.

## תשובות סופיות:

**1)** א. 91.5 ב. -126.75 ג. 0 ד. -182 ה. 1

ו. $\frac{9}{32}$ ז. -12 ח. 9.5 ט. 1.856 י. 6.

**2)** א. 0 ב. $\pi$ ג. 0 ד. $3\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi\approx 7.29$.

**3)** $a=2\ ,\ 1.5$.

**4)** א. $a^3-\frac{1}{2}a^2-6$ ב. $a=0\ ,\ 1\ ,\ -\frac{1}{2}$.

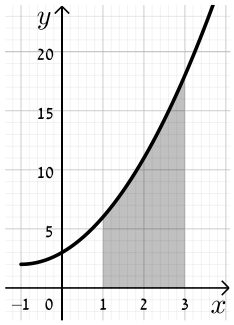
**5)** א. $4+2\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a+5}\right)$ ב. $a=1\frac{1}{4}$.

**6)** $a=\frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{5\pi}{6}$.

# חישובי שטחים יסודיים:

## שאלות:

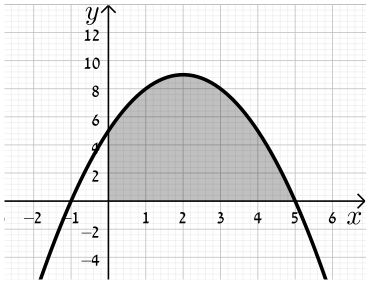
**1)** חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)=x^2+2x+3$ ,
ציר ה-$x$ והישרים $x=1$ ו-$x=3$.



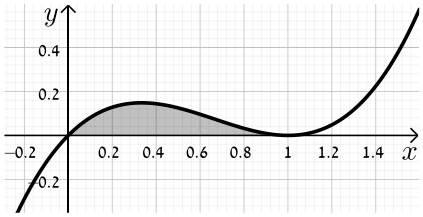

**2)** נתונה הפונקציה $y=-x^2+4x+5$.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ב. מצא את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה-$x$ וציר ה-$y$.

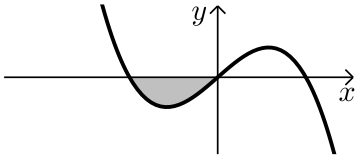



**3)** מצא את השטח המוגבל תחת הפונקציה $f(x)=x^3-2x^2+x$ וציר ה-$x$ כמתואר באיור.

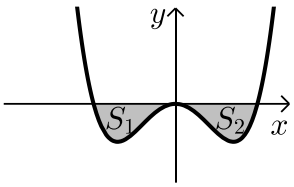



### שאלות עם שטח מתחת לציר ה-$x$ :

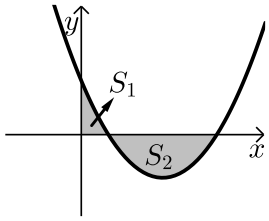
**4)** נתונה הפונקציה $f(x)=x\left(4-x^2\right)$.
חשב את השטח המוגבל שמתחת הפונקציה וציר ה-$x$ שברביע השלישי.




**5)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{2}x^4-2x^2$.
חשב את השטח המוגבל שבין הפונקציה לציר ה-$x$.

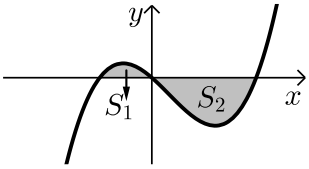


**6)** חשב את האינטגרל המסוים של
הפונקציה $y=x^2-6x+5$ בין 0 ל-5.
האם התוצאה מייצגת את סכום השטחים: $S_1+S_2$?
אם כן, הסבר. אם לא, נמק וחשב את סכום זה.



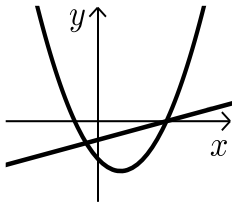

**7)** נתונה הפונקציה $y=x^3-x^2-2x$.
יוצרים את השטחים $S_1$ ו-$S_2$ בין גרף הפונקציה וציר ה-$x$ כמתואר באיור.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.
ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה-$x$.

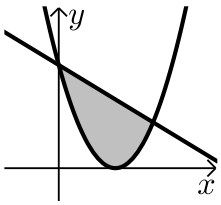



**שאלות עם שטחים בין שתי פונקציות:**

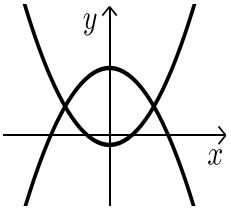
**8)** נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=x^2-4x-12$ ו- $g(x)=x-6$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות הנ"ל.




**9)** נתונות הפונקציות: $y=(x-3)^2$, $y=-x+9$.
חשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות.

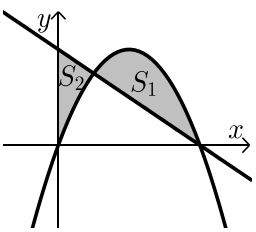



**10)** נתונות הפונקציות: $g(x)=7-x^2$, $f(x)=x^2-1$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של
הפונקציות הנ"ל.

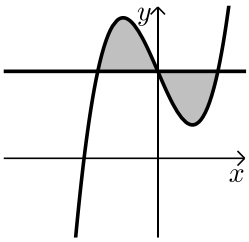



**11)** נתונות הפונקציות הבאות: $f(x)=-x^2+4x$ ו- $g(x)=-x+4$.
מסמנים את השטח הכלוא בין שני הגרפים ב-$S_1$
ואת השטח הכלוא בין הגרפים וציר ה-$y$ ב-$S_2$
כמתואר באיור.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות.
ב. חשב את היחס שבין השטחים: $\frac{S_1}{S_2}$.



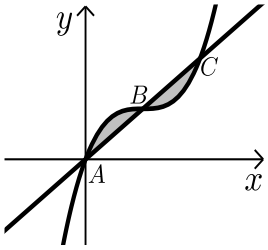
**12)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-4x+5$ : והישר $y=5$ .




א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה והישר.

ב. חשב את השטח המוגבל ביניהן.

**13)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-3x^2+3x$ : .

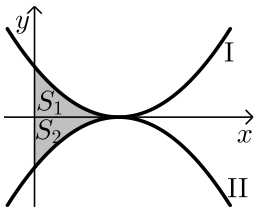



הישר AC חותך את גרף הפונקציה בנקודות

הבאות: $A(0,0)$ , $B(1,1)$ , $C(2,2)$ .

חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה לישר AC.

**14)** נתונות הפונקציות $f(x)=(x-2)^2$ ו- $g(x)=-(x-2)^2$ כמתואר באיור.



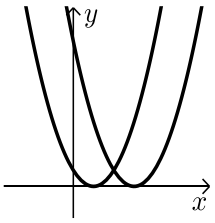

א. התאם בין הפונקציות לגרפים I ו-II.

ב. מסמנים את השטחים שבין כל פונקציה והצירים ב- $S_1$ ו- $S_2$ כמתואר באיור.

הראה כי השטחים $S_1$ ו- $S_2$ שווים זה לזה.

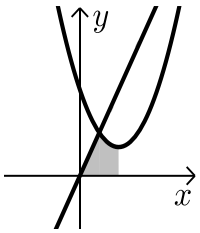
**שאלות עם שטחים מורכבים:**

**15)** נתונות הפונקציות: $f(x)=x^2-2x+1$ , $g(x)=x^2-6x+9$ .




חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- $x$ .

**16)** נתונות הפונקציות: $y=x^2-4x+6$ , $y=3x$ .

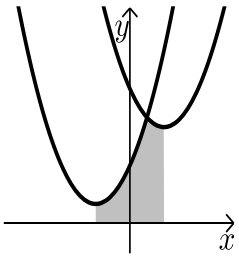



א. מצא את קדקוד הפרבולה.

ב. מצא נקודת חיתוך של הפרבולה עם הישר שמשמאל לקדקוד הפרבולה.

ג. חשב את השטח המסומן שבשרטוט.

**17)** נתונות הפונקציות: $y=x^2+4x+6$ , $y=x^2-4x+14$ .

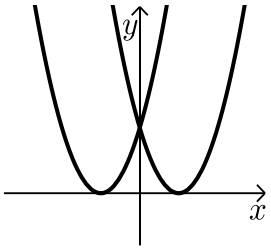



א. מצא את שיעורי ה- $x$ של קודקודי הפרבולות.

ב. חשב את נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות.

ג. חשב את השטח המסומן בשרטוט.

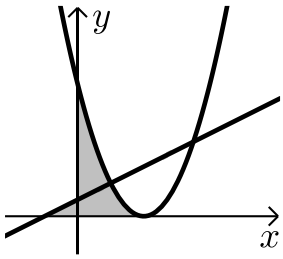
**18)** נתונות הפונקציות: $g(x)=(x+3)^2$ , $f(x)=(x-3)^2$ .
חשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות וציר ה-$x$ .



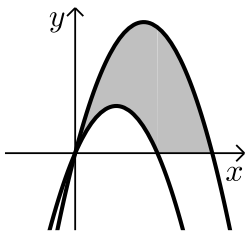

**19)** נתונות שתי הפונקציות: $y=(x-2)^2$ , $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ .

א. מצא את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות לציר ה-$x$ .

ב. מצא את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות לציר ה-$y$ .




**20)** נתונות הפרבולות הבאות: $f(x)=-x^2+5x$ ו- $g(x)=-x^2+3x$ .
חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של הפרבולות וציר ה-$x$ .

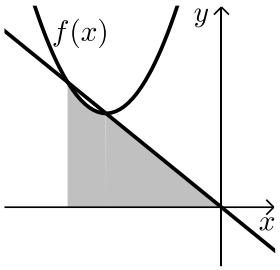



**21)** נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2+6x+12$ .
ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-4$ כמתואר באיור.

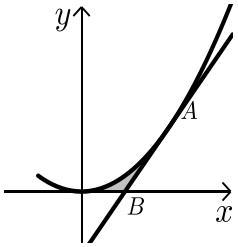
א. מצא את משוואת הישר.

ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.

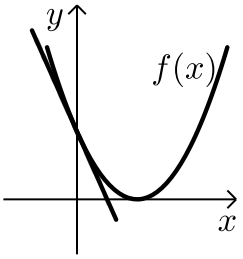
ג. מצא את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה-$x$ והישר $x=-4$ .




**22)** נתונה הפונקציה: $y=2x^2$ .
מעבירים משיק לגרף הפונקציה מהנקודה: $A(1,2)$ .
המשיק חותך את ציר ה-$x$ בנקודה B.
חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה, המשיק וציר ה-$x$ .

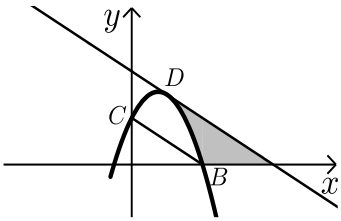


**23)** נתונה הפונקציה: $f(x)=(x-2)^2$.
מנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-$y$ מעבירים משיק.




א. מצא את משוואת המשיק.
ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה-$x$
ג. חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה-$x$.

**24)** משוואת הפרבולה היא: $f(x)=-2x^2+3x+2$.
הנקודות $C(0,2)$ , $B(2,0)$ הן נקודות חיתוך של הפרבולה עם הצירים.
המשיק לפרבולה בנקודה D מקביל לישר BC.




א. מצא את משוואת המשיק.
ב. מצא את השטח המוגבל בין הפרבולה, המשיק וציר ה-$x$.
ג. מצא את השטח המוגבל בין הפרבולה, המשיק וציר ה-$y$.

## תשובות סופיות:

**1)** $22\frac{2}{3}$ יח"ש.

**2)** א. $(5,0)$ , $(-1,0)$ ב. $33\frac{1}{3}$ יח"ש.

**3)** $\frac{1}{12}$ יח"ש.

**4)** 4 יח"ש.

**5)** $4\frac{4}{15}$ יח"ש.

**6)** לא. השטח הוא: 13 יח"ש.

**7)** א. $(-1,0)$ , $(0,0)$ , $(2,0)$ ב. $3\frac{1}{12}$ יח"ש.

**8)** $57\frac{1}{6}$ יח"ש.

**9)** $20\frac{5}{6}$ יח"ש.

**10)** $21\frac{1}{3}$ יח"ש.

**11)** א. $(1,3)$ , $(4,0)$ ב. $2\frac{5}{11}$.

**12)** א. $(-2,5)$ , $(0,5)$ , $(2,5)$ ב. 8 יח"ש.

**13)** 0.5 יח"ש.

**14)** א. $f(x)=\text{I}$ , $g(x)=\text{II}$ ב. הוכחה.

**15)** $\frac{2}{3}$ יח"ש.

**16)** א. $(2,2)$ ב. $(1,3)$ ג. $3\frac{5}{6}$ יח"ש.

**17)** א. $x=-2$ , $x=2$ ב. $(1,11)$ ג. $25\frac{1}{3}$ יח"ש.

**18)** 18 יח"ש.

**19)** א. $\frac{4}{3}$ יח"ש ב. $1\frac{7}{12}$ יח"ש.

**20)** $16\frac{1}{3}$ יח"ש.

**21)** א. $y=-x$ ב. $(-3,3)$ ג. $7\frac{5}{6}$ יח"ש.

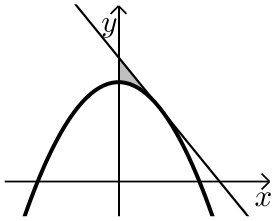
**22)** $\frac{1}{6}$ יח"ש.

**23)** א. $y=-4x+4$ ב. $(1,0)$ ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.

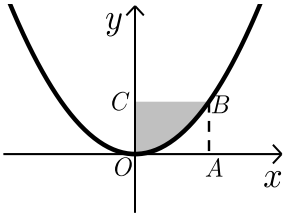
**24)** א. $y=-x+4$ ב. $2\frac{2}{3}$ יח"ש. ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.

## חישובי שטחים יסודיים עם פרמטרים:

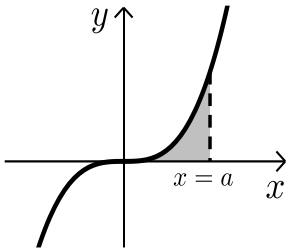
### שאלות:



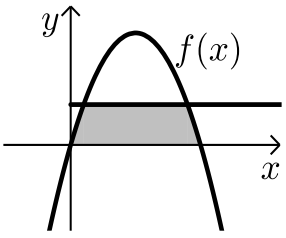

**25)** נתונה הפרבולה: $y=ax^2+8$.
שיפוע המשיק לגרף הפרבולה בנקודה שבה $x=2$ הוא 2-.
א. חשב את $a$.
ב. חשב את השטח המוגבל על ידי המשיק, הפרבולה וציר $y$.




**26)** הפונקציה המתוארת בשרטוט היא: $y=ax^2$, ($a$ פרמטר).
המרובע ABCO הוא ריבוע.
הקדקוד B נמצא על גרף הפונקציה.
ידוע כי אורך צלע הריבוע היא 2 יחידות.
מצא את ערך הפרמטר $a$ ואת השטח המסומן בסרטוט.




**27)** נתונה הפונקציה $y=x^3$.
מעבירים אנך לציר ה-$x$: $x=a$ ($a$ פרמטר חיובי)
כך שנוצר שטח הכלוא בין האנך, גרף הפונקציה וציר ה-$x$.
א. הבע באמצעות $a$ את השטח המקווקו בציור.
ב. חשב את $a$ אם ידוע כי שטח זה שווה ל-$a^2$.




**28)** נתונה הפונקציה: $f(x)=kx-x^2$.
הישר $y=9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.
ידוע כי שיעור ה-$x$ של אחת מנקודות החיתוך הוא $x=9$.
א. מצא את ערך הפרמטר $k$.
ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.
ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה-$x$ (השטח המסומן).

## תשובות סופיות:

**25)** א. $a=-\frac{1}{2}$ ב. $\frac{4}{3}$ יח"ש.

**26)** $a=\frac{1}{2}$ , $2\frac{2}{3}$ יח"ש.

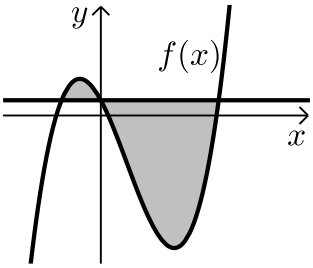
**27)** א. $\frac{a^4}{4}$ ב. $a=2$ .

**28)** א. $k=10$ ב. $(1,9)$ ג. $81\frac{1}{3}$ יח"ש.

## חישובי שטחים כאשר נתונה נגזרת הפונקציה:

### שאלות:

**29)** נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=3x^2-8x-12$.



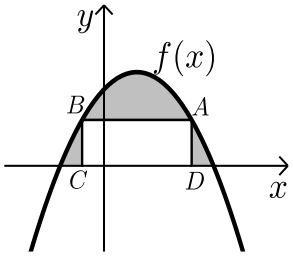

הישר $y=5$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ על ציר ה- $y$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את השטח המוגבל בין הישר והפונקציה.

**30)** הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ המתוארת באיור שלפניך היא: $f'(x)=3-2x$.

ישר AB שמשוואתו: $y=6$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו-B.




מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה-$x$ כך שנוצר מלבן ABCD.

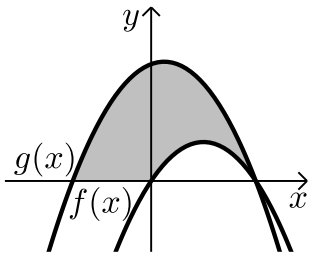
ידוע ששיעור ה-$x$ של הנקודה A הוא 4.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה-$x$.

**31)** באיור שלפניך מתוארות הפונקציות שנגזרותיהן: $g'(x)=-2x+1$, $f'(x)=4-2x$.

ידוע ששתי הפונקציות חותכות את ציר ה-$x$ כאשר: $x=4$.



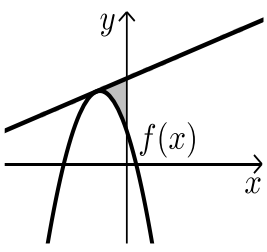

א. מצא את הפונקציות.

ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות וציר ה-$x$ (המסומן).

**32)** נתונה פונקציה $f(x)$.

משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x=-2$ היא: $y=x+13$.

הנגזרת של הפונקציה היא: $f'(x)=-4x-7$.




א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה-$y$.

**33)** נתונה פונקציה $f(x)$ שנגזרתה היא: $f'(x)=3x^2-6x-9$.
ישר ששיפועו 15 משיק לפונקציה ברביע הרביעי בנקודה שבה: $y=-20$.

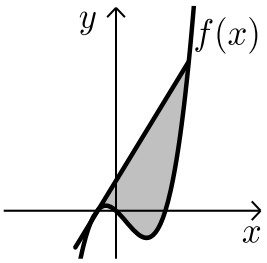
א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש עוד משיקים לגרף הפונקציה בעלי שיפוע 15?
אם כן- מצא אותם.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הראה כי הנקודה שבה $x=7$ משותפת למשיק שמצאת בסעיף הקודם ולפונקציה $f(x)$.

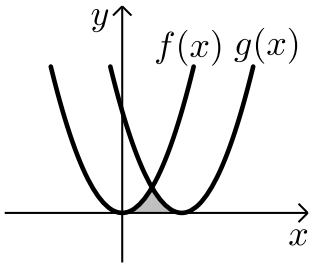
ii. מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והמשיק שמצאת בסעיף הקודם (ראה איור).




**34)** באיור שלפניך חותך גרף הפונקציה: $f(x)=x^2$
את גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x=2$.
הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ היא: $g'(x)=2x-8$.

א. מצא את הפונקציה $g(x)$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה-$x$ (המסומן).

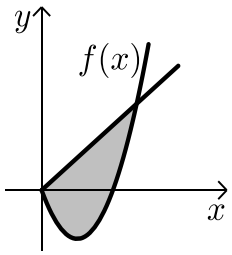



**35)** באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y=2x$.
נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=2x-6$
וידוע כי הישר חותך את הפונקציה בנקודה שבה ערך ה-$y$ הוא 16.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן מצא אותן.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.



## תשובות סופיות:

**29)** א. $f(x)=x^3-4x^2-12x+5$ ב. $189\frac{1}{3}$ יח"ש.

**30)** א. $f(x)=-x^2+3x+10$ ב. $27\frac{1}{6}$ יח"ש.

**31)** א. $f(x)=4x-x^2\ ,\ g(x)=-x^2+x+12$ ב. 46.5 יח"ש.

**32)** א. $f(x)=-2x^2-7x+5$ ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.

**33)** א. $f(x)=x^3-3x^2-9x$ ב. $y=15x+28$

ג. i. $(7,133)$ ii. 546.75 יח"ש.

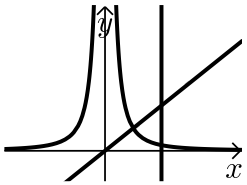
**34)** א. $g(x)=(x-4)^2$ ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.

**35)** א. $f(x)=x^2-6x$ ב. $(0,0)$ ג. $85\frac{1}{3}$ יח"ש.

# חישובי שטחים עם פונקציה רציונאלית:

## שאלות:

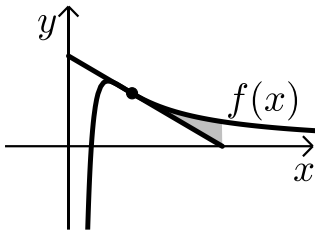
**1)** נתונות שתי פונקציות: $g(x)=x$ , $f(x)=\frac{1}{x^2}$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,
הישר $x=2$ וציר ה-$x$.



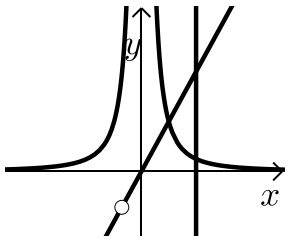

**2)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}$
מצא את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה
והמשיק שמצאת בסעיף א'.
חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,
המשיק ואנך לציר ה-$x$ היוצא מנקודת החיתוך
של המשיק עם ציר ה-$x$.



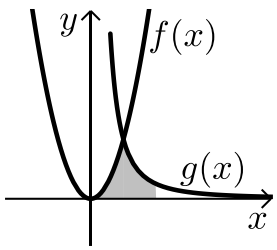

**3)** נתונות שתי פונקציות: $g(x)=\frac{x^2+2x}{x+2}$ , $f(x)=\frac{1}{x^2}$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,
הישר $x=2$ וציר ה-$x$.



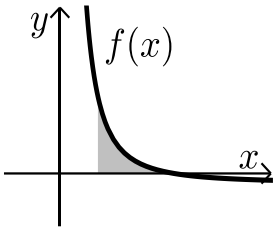

**4)** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=2x^2$ ו- $g(x)=\frac{a}{x^2}$
($a$ קבוע) בתחום: $x>0$.
ידוע כי הגרפים נחתכים ברביע הראשון בנקודה
הנמצאת על הישר: $y=4x$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים ואת $a$.

ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה-$x$
והישר: $x=4$.



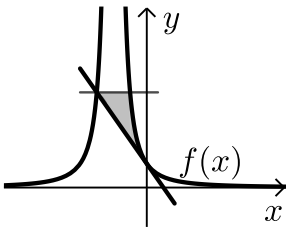
**5)** גרף הפונקציה: $f(x)=\frac{a-x^2}{x^2}$ ($a$ קבוע) חותך את ציר ה-$x$ בנקודה $(6,0)$.




א. מצא את $a$ וכתוב את הפונקציה.

ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה-$x$ והישר: $x=2$.

**6)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{A}{(2x+A)^2}$ ($A$ פרמטר חיובי).




ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-$y$ הוא: $-\frac{1}{9}$.

א. מצא את ערך הפרמטר $A$.

ב. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך עם ציר ה-$y$.

ג. הראה כי המשיק חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=-4.5$.

ד. העבר ישר אופקי מנקודת החיתוך של המשיק וגרף הפונקציה מהסעיף הקודם. מצא את נקודת החיתוך הנוספת של ישר זה עם גרף הפונקציה.

ה. חשב את השטח כלוא בין המשיק, הישר וגרף הפונקציה (היעזר באיור).

## תשובות סופיות:

**1)** 1 יח"ש.

**2)** א. $y=-x+2$ ב. $\frac{1}{8}$ יח"ש.

**3)** 1 יח"ש.

**4)** א. $a=32$ , $(2,8)$ ב. $13\frac{1}{3}$ יח"ש.

**5)** א. $a=36$ , $f(x)=\frac{36-x^2}{x^2}$ ב. 8 יח"ש.

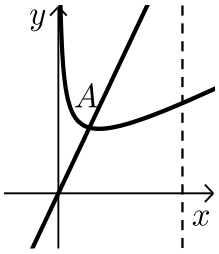
**6)** א. $A=6$ ב. $y=-\frac{1}{9}x+\frac{1}{6}$ ג. הוכחה.

ד. $\left(-1.5,\frac{2}{3}\right)$ ה. $\frac{5}{8}$ יח"ש.

## חישובי שטחים עם פונקצית שורש:

### שאלות:

**1)** באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}+x$.

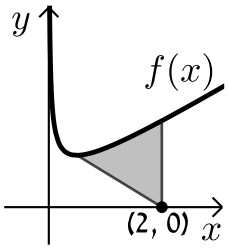



מעבירים ישר: $y=4x$ החותך את גרף הפונקציה בנקודה A המסומנת באיור.

א. מצא את שיעורי הנקודה A.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, הישר $y=4x$, ציר ה-$x$ ואנך לציר ה-$x$: $x=4$.

**2)** באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x}}+x$.

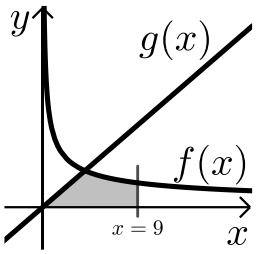



א. מצא את נקודת המינימום שלה.

ב. מנקודת המינימום של הפונקציה מעבירים ישר לנקודה $(2,0)$ שעל ציר ה-$x$.

מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר ואנך לציר ה-$x$ היוצא מהנקודה $(2,0)$ עד לנקודת החיתוך עם גרף הפונקציה.

**3)** באיור הבא מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=\frac{16}{\sqrt{x}}$ ו-$g(x)=2x$.



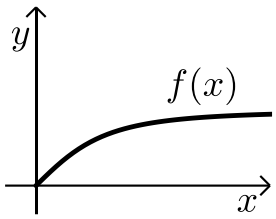

א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה-$x$ והישר $x=9$.

**4)** נתונה הפונקציה: $f(x)=(x-6)\sqrt{x}$.

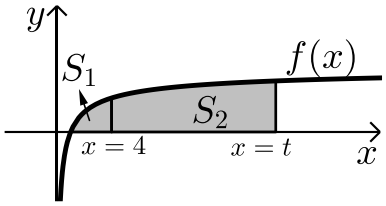
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודת המינימום שלה וציר ה-$y$.

**5)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ברביע הראשון.




לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,
המשיק והישר $x=\sqrt{3}$.

**6)** באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x}}$.




מעבירים שני אנכים לציר ה-$x$ והם: $x=4$
ו-$x=t$ $(t>4)$. נסמן:
$S_1$ - השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה-$x$.
$S_2$ - השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה-$x$ והאנכים.
ידוע כי: $8S_1=S_2$. מצא את $t$.

**7)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

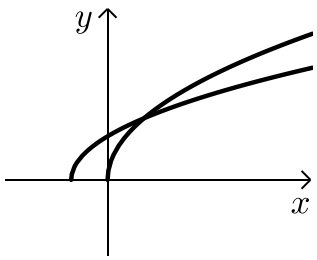
ii. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.

iii. הראה כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. מעבירים משיק לגרף הפונקציה ששיפועו הוא: $m=\frac{17}{16}$. מצא את נקודת ההשקה.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה-$x$ ואנך לציר ה-$x$ מנקודת ההשקה שמצאת בסעיף הקודם.

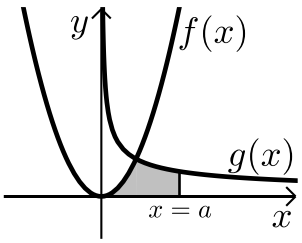
**8)** נתונות שתי פונקציות: $f(x)=\sqrt{x+b}$ , $g(x)=\sqrt{2x}$ $(b>0)$




גודל השטח הכלוא בין הפונקציות וציר ה-$x$ הוא $2\frac{2}{3}$ יח"ש.
מצא את ערכו של הפרמטר $b$.

**9)** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=x^2$

ו-$g(x)=\frac{32}{\sqrt{x}}$ ברביע הראשון.




מעבירים ישר $x=a$ החותך את גרף הפונקציה $g(x)$

ויוצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים, ציר ה-$x$ והישר.

ידוע כי שטח זה שווה ל-$S=85\frac{1}{3}$.

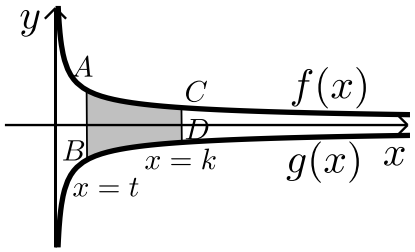
מצא את $a$.

**10)** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$ ו-$g(x)=-\frac{3}{\sqrt{x}}$.

מעבירים שני ישרים: $x=k$ ו-$x=t$ אשר חותכים את הגרפים

של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.

ידוע כי: 2CD=AB.




א. הראה כי: $k=4t$.

ב. השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות

והישרים: $x=k$ ו-$x=t$ הוא: $S=12$.

מצא את $t$.

**11)** ענה על הסעיפים הבאים:

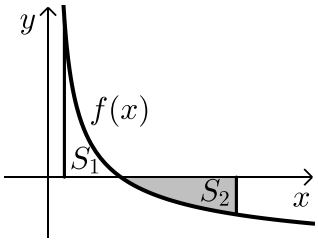
א. מצא עבור איזה ערך של $a$, $(a>1)$ יתקיים: $\int_1^a\left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}}-1\right)dx=0$.

ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=\frac{3}{\sqrt{2x-1}}-1$.

מעבירים שני אנכים לציר ה-$x$ והם: $x=1$ ו-$x=13$

כך שנוצרים השטחים $S_1$ ו-$S_2$.

מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$



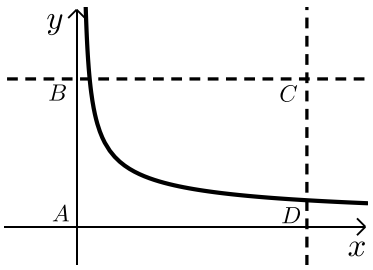

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,

ציר ה-$x$ והאנך $x=1$, $(S_1)$.

ii. היעזר בתוצאה שקיבלת ובסעיף א' וקבע לכמה שווה השטח $S_2$.

נמק את טענתך.




**12)** באיור שלפניך מתוארת הפונקציה: $f(x)=\frac{9}{\sqrt{2x-1}}$

מעבירים את הישרים המקבילים לצירים: $x=13$ ו- $y=3$ כך שנוצר המלבן ABCD כמתואר באיור.

הישר $y=3$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה M.

א. מצא את שיעורי הנקודה M.

ב. מסמנים את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והישרים ב- $S_1$ ואת שטח המלבן ב- $S_2$.

הראה כי: $\frac{S_1}{S_2}=\frac{2}{13}$.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $A(1,4)$ ב. 15.5 יח"ש.

**2)** א. $\min(0.5,1.5)$ ב. 1.75 יח"ש.

**3)** א. $(4,8)$ ב. 48 יח"ש.

**4)** 2.26 יח"ש.

**5)** 0.5 יח"ש

**6)** $t=16$.

**7)** א. i. $x>0$ ii. $(4,0)$ iii. $f'(x)=1+\frac{4}{x\sqrt{x}}>0$

ב. $(16,14)$ ג. 88 יח"ש.

**8)** $b=2$.

**9)** $a=9$.

**10)** א. הוכחה ב. $t=1$.

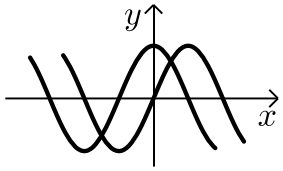
**11)** א. $a=13$ ב. $(5,0)$ ג. i. $S_1=2$ ii. $S_2=|-S_1|=2$.

**12)** א. $M(5,3)$.

# חישובי שטחים עם פונקציות טריגונומטריות:

## שאלות:

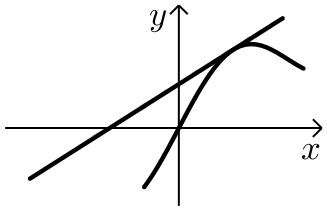
**1)** נתונות הפונקציות: $f(x)=\sin x$ , $g(x)=\cos x$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות לציר ה-$y$ ברביע הראשון.



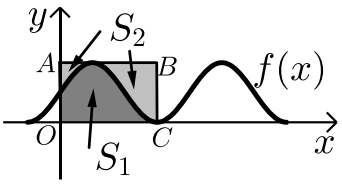

**2)** נתונה הפונקציה: $f(x)=x+2\sin x$.
בתחום שבין ראשית הצירים לנקודת המקסימום הראשונה מימינה העבירו לפונקציה משיק ששיפועו 1.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה-$x$ ברביעים הראשון והשני.




**3)** באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=\frac{\sin 2x+1}{2}$
בתחום: $-0.25\pi \le x \le 1.75\pi$ מעבירים משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה ומעלים אנך לציר ה-$x$ מנקודת החיתוך הראשונה של גרף הפונקציה עם ציר ה-$x$ בתחום הנתון המסומנת ב-C כך שנוצר המלבן ABCO.
השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים יסומן ב-$S_1$ (ראה סימון בציור).
השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה-$y$ יסומן ב-$S_2$.



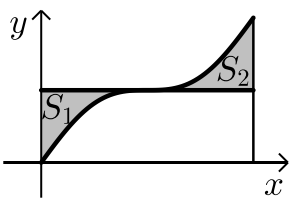

א. מצא את משוואת הצלע AB של המלבן.

ב. חשב את היחס: $\frac{S_1}{S_2}$.

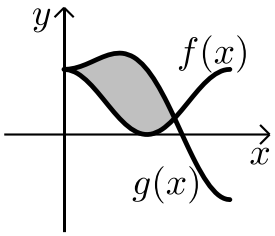
**4)** באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $y=\sin x+x$ בתחום: $0 \le x \le 2\pi$.

א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות בתחום הנתון?

ב. מורידים אנך מגרף הפונקציה לציר ה-$x$ בנקודה שבה: $x=2\pi$.
מעבירים ישר המקביל לציר ה-$x$ מהנקודה שמאפסת את הנגזרת.
הראה כי השטחים $S_1$ ו-$S_2$ המסומנים בסרטוט שווים.



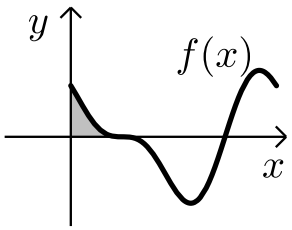
**5)** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה
$f(x)=\cos^2 x$ ו- $g(x)=\sin^2 x+\cos x$ הבאות:
בתחום: $0\le x\le \pi$.




א. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים.
השתמש בזהות: $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

**6)** הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=-\cos 2x-\sin x$.



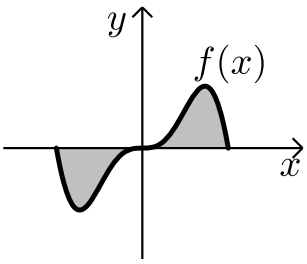

א. מצא את שיעורי ה-$x$ של הנקודות
המקיימות: $f'(x)=0$ בתחום: $0<x<2\pi$.
ידוע כי הנקודה המקיימת $f'(x)=0$ אשר אינה
קיצון נמצאת על ציר ה-$x$.

ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ג. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה בתחום הנתון.
חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.

**7)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הפונקציה: $y=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x$
הוכח כי הנגזרת של הפונקציה היא: $y'=x^2\sin x$




באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2\sin x$
בתחום: $-\pi\le x\le \pi$.

ב. הראה כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה
וציר ה-$x$ בתחום הנתון.

**8)** נתונה הפונקציה: $f(x)=a\cos x+b\sin x$, $a,b$ פרמטרים.
הפונקציה חותכת את ציר ה-$x$ בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{4}$ והיא חיובית בתחום $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.
גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה בתחום $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ הוא $2\sqrt{2}-2$.
מצא את ערכי הפרמטרים $a$ ו- $b$.

## תשובות סופיות:

1) 0.41 יח"ש.

2) א. $y=x+2$ ב. $\pi$ יח"ש.

3) א. $y=1$ ב. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi+2}{3\pi-2}=1.538$.

4) א. אין נקודת קיצון, הנקודה $(\pi,\pi)$ היא נקודת פיתול.

ב. $S=0.5\pi^2-2=2.934$.

5) א. $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{1}{4}\right)$ , $(0,1)$ ב. $S=1.5\frac{\sqrt{3}}{2}=1.299$.

6) א. $x=\frac{\pi}{2}$ , $\frac{7\pi}{6}$ , $\frac{11\pi}{6}$ ב. $f(x)=-\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x$ ג. $\frac{1}{2}$ יח"ש.

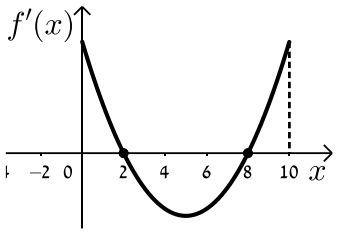
7) א. הוכחה ב. הוכחה ג. $S=2\left(\pi^2-4\right)\approx 11.74$.

8) $a=2$ , $b=-2$.

## חישובי שטחים בין גרף הנגזרת והצירים:

### שאלות:

**1)** הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0 \le x \le 10$.



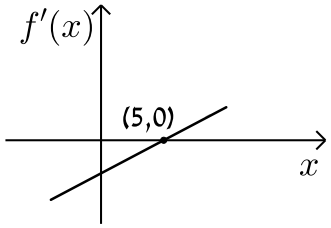

בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.

א. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$

אם: $f(2)=6$ , $f(0)=-4$ , $f(5)=0$ וכן: $f(10)>0$.

ב. חשב את השטח המוגבל ע"י **<u>גרף הנגזרת</u>** **<u>והצירים</u>** ברביע הראשון עד לנקודה שבה $x=2$.

**2)** לפניך הגרף של הפונקציה $f'(x)$.




הגרף המתואר חותך את ציר ה-$x$ בנקודה אחת בלבד והיא $(5,0)$.

א. מצא את התחומים שבהם $f'(x)$ היא חיובית ואת התחומים שבהם היא שלילית.

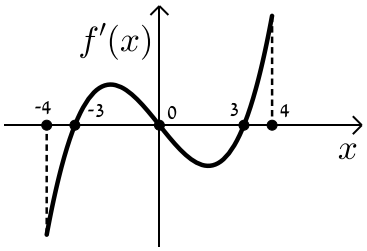
ב. קבע מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ג. כתוב את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ אם ידוע כי שיעור ה-$y$ שלה הוא 2-.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה-$y$ כאשר $y=8$.

ה. חשב את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים.

**3)** בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$.




א. רשום את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

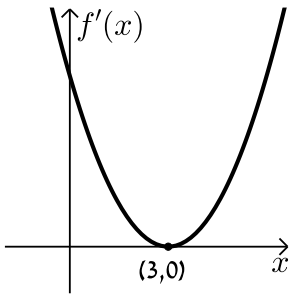
ב. מצא את שיעורי ה-$x$ של נקודות הקיצון של $f(x)$ וקבע את סוגן.

ג. נתון כי הפונקציה $f(x)$ עוברת בראשית הצירים וגם מקיימת: $f(-3)=f(3)=m$.

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנ"ל (הבע באמצעות $m$).

ד. השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ וציר ה-$x$ ברביעים השני והרביעי הוא 16 יח"ש. מצא את $m$.

**4)** הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$ מתוארת באיור הבא.

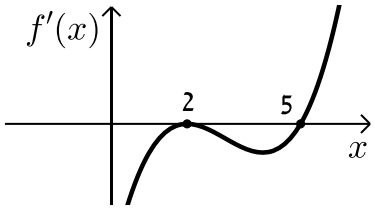



א. האם ל-$f(x)$ יש נקודות קיצון? נמק.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$
אם ידוע כי $f(3)=4$ וכי היא חותכת את ציר
ה-$y$ בנקודה שבה $y=-5$.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$
והצירים ברביע הראשון.

**5)** באיור שלפניך מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$.




ידוע כי הנקודות $A(5,-4.75)$ , $B(2,2)$
ו-$C(0,14)$ נמצאות על $f(x)$.

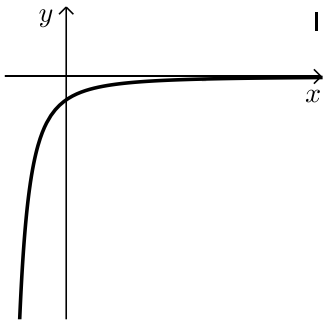
א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$.

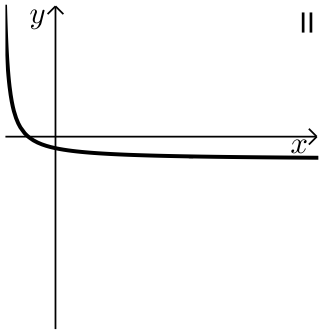
ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. חשב את השטח מוגבל בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים בתחום $0\le x\le 5$.

**6)** באיורים שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$f'(x)$:

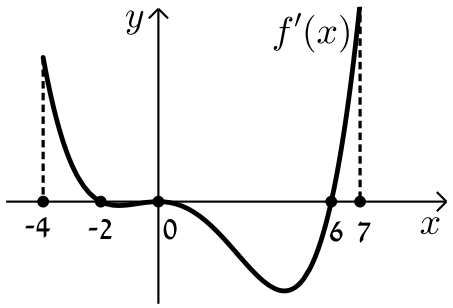



א. זהה איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמק.

ב. נתון כי $f(10)=-3$ וכי $f(x)$ חותכת את ציר ה-$y$ בנקודה שבה $y=-2$.
מהו השטח המוגבל בין גרף הנגזרת $f'(x)$, הצירים והישר $x=10$?

**7)** נתון גרף הנגזרת $f'(x)$ הבא:

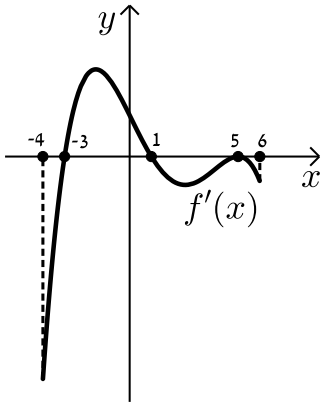



א. סרטט את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \le x \le 7$ לפי הנתונים: $f(0) = -2$ , $f(-2) = 7.6$ ו- $f(6) = -606.8$.

ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה-$x$ בריבוע השלישי.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה-$x$ בריבוע הרביעי.

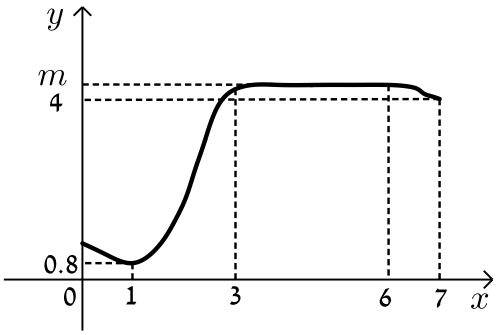
**8)** נתון גרף הנגזרת $f'(x)$ הבא:




א. סרטט את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \le x \le 6$ עבור הנתונים: $f(5) = -83\frac{1}{3}$ , $f(1) = 36\frac{2}{15}$ , $f(-3) = -356\frac{2}{5}$.

ב. חשב את כלל השטח הכלוא בין גרף הנגזרת וציר ה-$x$ בתחום: $-3 \le x \le 5$.

**9)** בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $0<x<7$ :




הסתמך על הגרף של $f(x)$ ועל הערכים הרשומים על הציר ים
וענה על השאלות הבאות :

א. מצא עבור אילו ערכים של $x$ השונים מ-6 מתקיים :

i. $f'(x)>0$

ii. $f'(x)=0$

iii. $f'(x)<0$

ב. נתון כי : $\int_3^6 m\,dx=15$ , כאשר $m$ הוא פרמטר המסומן על ציר ה- $y$ .

מצא את $f(5)$ .

ג. סרטט סקיצה של גרף פונקצית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $0<x<3$ .

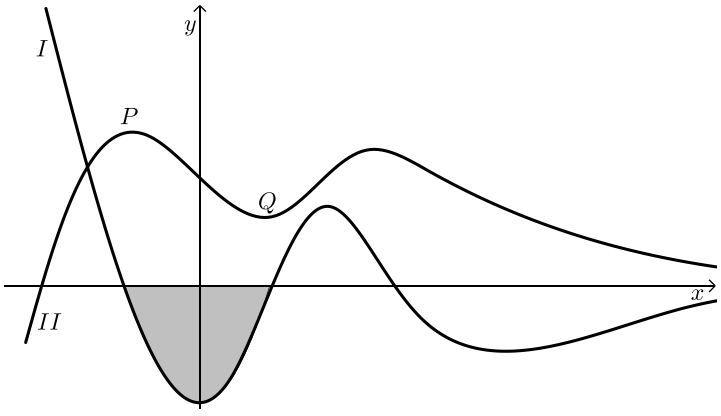
ד. מצא את השטח המוגבל בין הגרף של פונקצית הנגזרת $f'(x)$
וציר ה- $x$ בתחום $1<x<3$ .

**10)** בסרטוט נתונים הגרפים של פונקציה ושל נגזרתה.

א. קבע איזה מהגרפים, I או II, שייך לפונקציה ואיזה שייך לנגזרת. נמק.

ב. כמה נקודות פיתול יש לפונקציה? נמק וסמן אותן על הסרטוט.

ג. נתון : $P(-2,4)$ , $Q(2,1)$ . מצא את גודלו של השטח הכלוא בין גרף I
לציר ה- $x$ (השטח המסומן בסרטוט).



## תשובות סופיות:

**הערה: סרטוטי הסקיצות מופיעות במרוכז בעמוד הבא.**

**1)** ב. 10 יח"ש.

**2)** א. חיובית: $x>5$, שלילית: $x<5$.
ב. עולה: $x>5$, יורדת: $x<5$
ג. $\min(5,-2)$
ד. הוכחה.
ה. 10 יח"ש.

**3)** א. עולה: $3<x\le 4$, $-3<x<0$, יורדת: $0<x<3$, $-4\le x<-3$
ב. $x_{\min}=3$, $x_{\max}=0$, $x_{\min}=-3$.
ג. הוכחה.
ד. $m=-8$

**4)** א. לא. הנקודה $(3,0)$ היא פיתול מכיוון שהפונקציה עולה לפניה ואחריה.
ב. הוכחה.
ג. 9 יח"ש.

**5)** א. $\min(5,-4.75)$.
ב. עולה: $x>5$, יורדת: $x<5$.
ג. הוכחה.
ד. 18.75 יח"ש.

**6)** א. $f'(x)$: I, $f(x)$: II
ב. 1 יח"ש.

**7)** א. הוכחה.
ב. 9.6 יח"ש.
ג. 604.8 יח"ש.

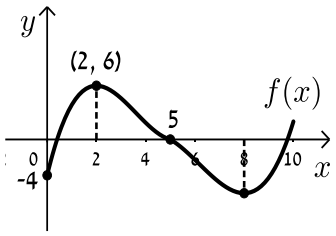
**8)** א. הוכחה.
ב. 512 יח"ש.

**9)** א. i. $f'(x)>0: 1<x<3$
ii. $f'(x)=0: x=1, 3\le x<6$
iii. $f'(x)<0: 6<x<7, 0<x<1$

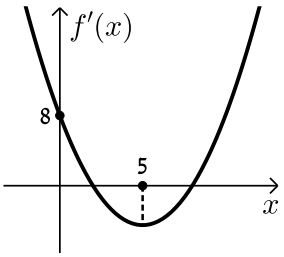
**10)** א. גרף I - $f'(x)$ וגרף II - $f(x)$.
ב. 3 נקודות פיתול.
ג. 3 יח"ש.
ד. 4.2 יח"ש.

## סרטוטי גרפים לפי מספרי שאלות:

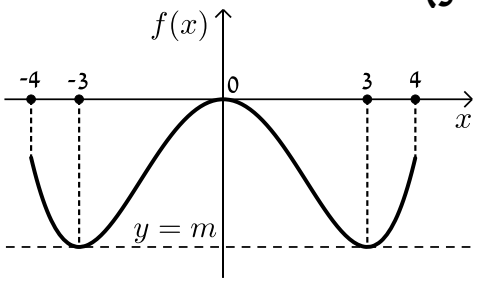
**(1**



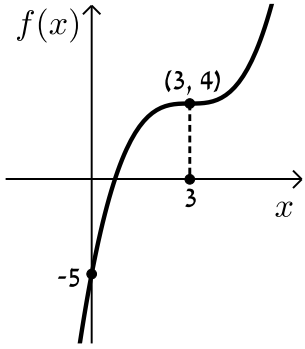

**(2**



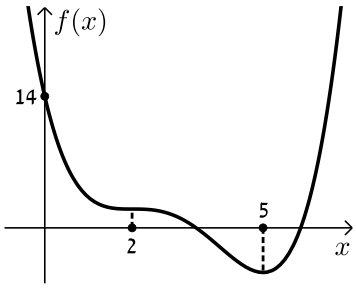

**(3**



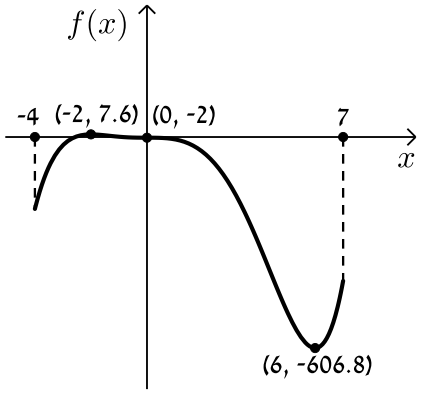

**(4**



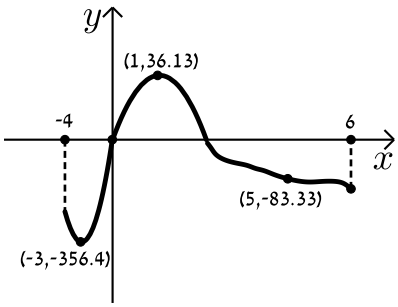

**(5**



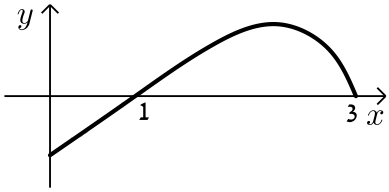

**(7**




**(8**




**(9**



# מתמטיקה לתלמידי גאוגרפיה ופיתוח סביבתי 2

## פרק 21 - חשבון אינטגרלי - פונקציה מעריכית, לוגריתמית וחזקה

תוכן העניינים

1. פונקציה מעריכית ..... 308
2. פונקציה לוגריתמית ..... 314
3. פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי ..... 320

# פונקציה מעריכית:

## סיכום כללי:

### אינטגרלים מיידים של פונקציות מעריכיות:

| אינטגרלים של פונקציות מורכבות | אינטגרלים יסודיים |
|---|---|
| $\int a^{mx+n}dx=\frac{a^{mx+n}}{m\cdot\ln a}+c$ | $\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+c$ |
| $\int e^{mx+n}dx=\frac{e^{mx+n}}{m}+c$ | $\int e^{x}dx=e^{x}+c$ |

## שאלות:

### אינטגרל כללי:

**1)** חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\left(5e^{x}-e^{3x}+e^{-x}+1\right)dx$

ב. $\int\left(3^{x}+5^{2x}\right)dx$

ג. $\int\left(6\sqrt{e^{4x-1}}\right)dx$

ד. $\int\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}dx$

**2)** חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\frac{e^{2x}-1}{e^{x}-1}dx$

ב. $\int\frac{3e^{3x}-5e^{2x}+4e^{x}-2}{e^{x}-1}dx$

**3)** חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\left(e^{4x}+e^{-x}\right)dx$

ב. $\int\left(e^{x+1}\right)^{2}dx$

ג. $\int\frac{2^{x}+4^{2x}+10^{3x}}{5^{x}}dx$

ד. $\int\left(4\sqrt{e^{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}}\right)dx$

**4)** חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int\left(\frac{e^x}{\sqrt{e^x+3}}\right)dx$ ב. $\int\left(\frac{3-e^x}{\left(e^x-3x\right)^2}\right)dx$ ג. $\int\left(xe^{x^2}\right)dx$

**אינטגרל מסוים:**

**5)** נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=2e^x-\frac{1}{e^x}$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $\left(\ln 2,3\frac{1}{4}\right)$.

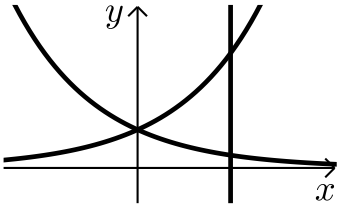
**6)** נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=e^{2x}+e^x-2$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שערך הפונקציה בנקודת המינימום שלה הוא $\frac{1}{2}$.

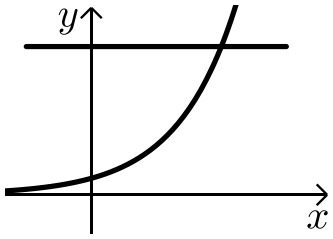
**7)** נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=6x^2e^{x^3}-\frac{1}{x^2}$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $\left(-1,\frac{2}{e}\right)$.

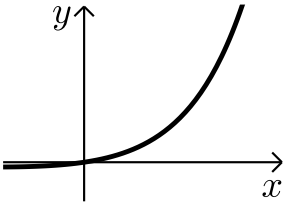
**חישובי שטחים:**



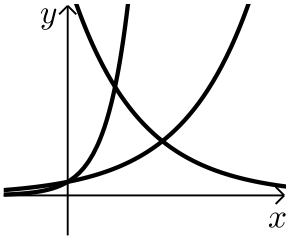

**8)** נתונות הפונקציות: $f(x)=e^x$, $g(x)=e^{-x}$.
מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות לישר $x=\ln 3$.




**9)** נתונה הפונקציה: $f(x)=3^x$.
מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישר $y=9$ וציר ה- $y$.

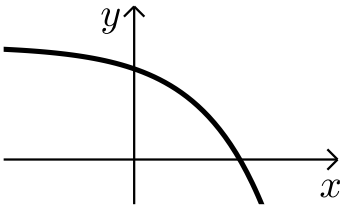



**10)** נתונה הפונקציה: $f(x)=e^{2x}-e^{x}$.
לפונקציה העבירו משיק בראשית הצירים.
מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,
המשיק והישר $x=2$.




**11)** נתונות הפונקציות:
$f(x)=e^{x}$ , $g(x)=e^{3x}$ , $h(x)=16e^{-x}$.
חשב את גודל השטח הכלוא שבין שלוש הפונקציות.

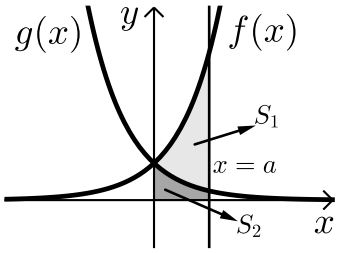
**12)** נתונה הפונקציה: $f(x)=5-e^{x}$.
העבירו לפונקציה משיק ששיפועו $-e$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין
הפונקציה, המשיק וציר ה-$x$.
ניתן להשאיר $e$ ו-$\ln$ בתשובה.




**13)** נתונה הפונקציה: $f(x)=e^{bx}$ , $(0<b)$.
גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר
בראשית הצירים וציר ה-$y$ הוא $\frac{e-2}{4}$.
מצא את ערכו של הפרמטר $b$.

**14)** נתונות הפונקציות: $g(x)=e^{-x}$ , $f(x)=e^{\frac{1}{2}x}$.
מנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ בריבוע הראשון הורידו אנך לשני
הצירים. המשך האנך לציר ה-$y$ חותך את הפונקציה $f(x)$ ומנקודת החיתוך
יורד אנך נוסף לציר ה-$x$ כך שנוצר מלבן.
הוכח כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא $\frac{3}{e}$.

**15)** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=e^{2x}$ ו- $g(x)=e^{-2x}$.



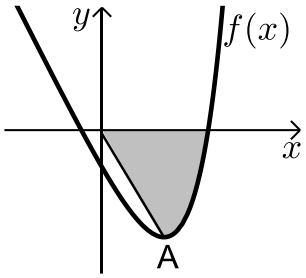

מעבירים אנך לציר ה-$x$ את הישר $x=a$ , $a>0$ כמתואר באיור.

אנך זה יוצר את השטחים $S_1$ ו- $S_2$.

ידוע כי השטח $S_1$ גדול פי 3 מהשטח $S_2$.

מצא את $a$.

**16)** נתונה הפונקציה: $f(x)=e^{2x-1}-2ex-2$.




הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה.

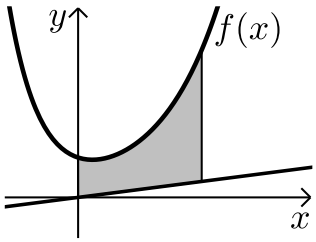
א. מצא את שיעורי הנקודה A.

מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים.

ב. כתוב את משוואת הישר המחבר את הנקודה A עם הראשית.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה-$x$, אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה-$x$ בנקודה שבה $x=1.7$.

**17)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{e^x+e^{ax}}{4}$.




ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה: $\left(1,\frac{e^3+1}{4e^2}\right)$.

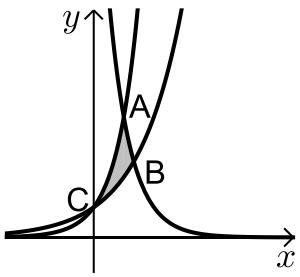
א. מצא את $a$ וכתוב את הפונקציה.

ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והישר: $y=0.1x$.

חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר $y$ והאנך: $x=2$.

**18)** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של שלוש פונקציות:

I. $f(x)=2^x$ II. $g(x)=4^x$ III. $h(x)=2^{4-2x}$




א. קבע איזה גרף מתאר כל פונקציה.

ב. מצא את שיעורי הנקודות A , B ו-C (נקודות החיתוך שבין הגרפים).

ג. חשב את השטח המסומן באיור.

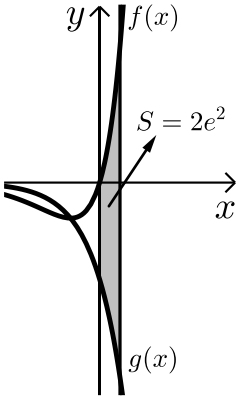
**19)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. גזור את הפונקציה הבאה: $y=e^x(x-1)$.

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $g(x)=-e^x$ , $f(x)=xe^x$.

מעבירים ישר $x=a$ , $(a>0)$ החותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח המתואר הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- $y$ והישר.

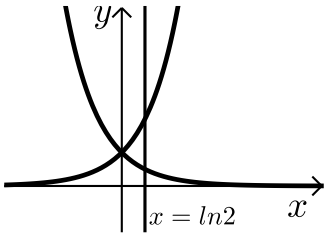
ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$. מצא את $a$.




**חישובי נפחים:**

**20)** נתונות הפונקציות: $g(x)=e^{-x}$ , $f(x)=e^x$.

השטח הכלוא בין הפונקציות והישר: $x=\ln 2$
מסתובב סביב ציר ה- $x$.
חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.



## תשובות סופיות:

**1)** א. $5e^x-\frac{e^{3x}}{3}-e^{-x}+x+c$ ב. $\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{5^{2x}}{2\ln 5}+c$

ג. $3e^{2x-\frac{1}{2}}+c$ ד. $\frac{1}{2}e^{2x}+2x-\frac{1}{2}e^{-2x}+c$

**2)** א. $e^x+x+c$ ב. $\frac{3e^{2x}}{2}-2e^x+2x+c$

**3)** א. $\frac{1}{4}e^{4x}-e^{-x}+c$ ב. $\frac{1}{2}e^{2x+2}+c$

ג. $\frac{0.4^x}{\ln 0.4}+\frac{3.2^x}{\ln 3.2}+\frac{200^x}{\ln 200}+c$ ד. $8\sqrt{e^x}-\frac{3}{4}e^{\frac{-4x}{3}}+c$

**4)** א. $2\sqrt{e^x+3}+c$ ב. $\frac{1}{e^x-3x}+c$ ג. $\frac{1}{2}e^{x^2}+c$

**5)** $f(x)=2e^x+e^{-x}-1.25$

**6)** $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+e^x-2x-1$

**7)** $f(x)=2e^{x^3}+\frac{1}{x}+1$

**8)** $S=$ יח"ש $1\frac{1}{3}$

**9)** $S=$ יח"ש $10.72$

**10)** $S=$ יח"ש $18.41$

**11)** $S=$ יח"ש $3\frac{1}{3}$

**12)** $S=$ יח"ש $0.192$

**13)** $b=2$

**15)** $a=\ln 2$

**16)** א. $A(1,-e-2)$ ב. $y=-(e+2)x$ ג. $S=$ יח"ש $4.744$

**17)** א. $a=-2$ , $f(x)=\frac{e^x+e^{-2x}}{4}$ ב. $1.52$

**18)** ב. $C(0,1)$ , $A(1,4)$ , $B\left(1\frac{1}{3},2.52\right)$ ג. $S=$ יח"ש $1.03$

**19)** א. $y'=xe^x$ ב. $a=2$

**20)** $1\frac{1}{8}\pi$ יח"נ.

# פונקציה לוגריתמית:

## סיכום כללי:

### אינטגרלים מיידים של פונקציות לוגריתמיות:

| אינטגרל של פונקציה מורכבת | אינטגרל יסודי |
|---|---|
| $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + c$ | $\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + c$ |

## שאלות:

### אינטגרל כללי:

**1)** חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{4}{3x-1}\right)dx$ ב. $\int \frac{x^2+3x-4}{x}dx$ ג. $\int \frac{x+3}{x^2-9}dx$

**2)** חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \frac{x^2+3x+5}{x+1}dx$ ב. $\int \frac{x^3-x^2+5x-6}{x-2}dx$ ג. $\int \frac{x^4+3}{x+1}dx$

**3)** חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \frac{2x}{x^2-3}dx$ ב. $\int \frac{x-1}{x^2-2x}dx$ ג. $\int \frac{e^x}{e^x+5}dx$

ד. $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$ ה. $\int \frac{\cos x}{\sin x}dx$

### אינטגרל מסוים:

**4)** נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 2x - \frac{1}{x-4}$.

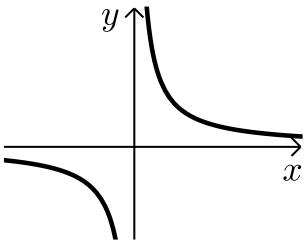
מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(5,28)$.

**5)** נתונה נגזרת שנייה של פונקציה: $f''(x)=6x-\frac{1}{x^2}$. מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(1,-2)$ וששיפועה בנקודה זו הוא 3.

**חישובי שטחים:**

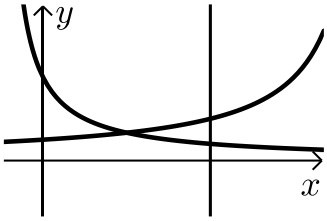
**6)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{x}$.

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x=-1$ ו-$x=-4$ וציר ה-$x$.
ניתן להשאיר ln בתשובה.



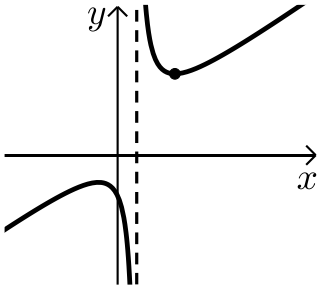

**7)** נתונות הפונקציות: $f(x)=\frac{4}{8-x}$ , $f(x)=\frac{2}{x+1}$.

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות, הישר $x=4$ והצירים.




**8)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$.

חשב את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=2$ ואנך לציר ה-$x$ העובר בנקודת המינימום של הפונקציה.
אפשר להשאיר ביטוי עם ln בתשובה.



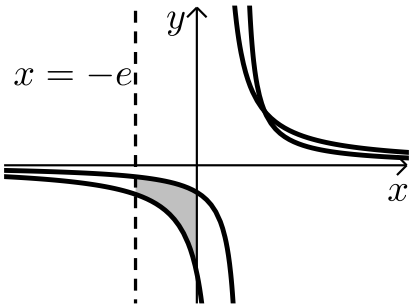

**9)** באיור שלפניך נתונות הפונקציות: $f(x)=\frac{a}{x-1}$

ו-$g(x)=\frac{a-1}{x-2}$ בתחום: $x<0$.

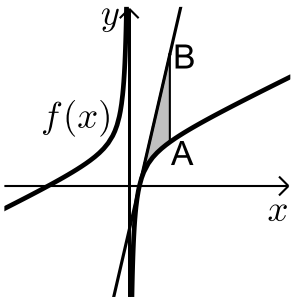
ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x=3$.

א. מצא את $a$ וכתוב את שתי הפונקציות.

ב. חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה-$y$ והישר $x=-e$



**10)** נתונה הפונקציה: $f(x)=7+ax+\frac{b}{x}$.



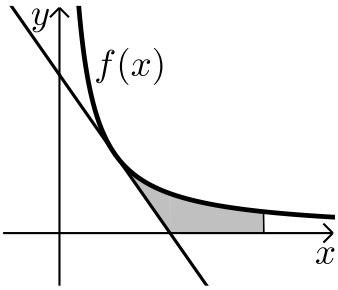

ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-$x$ היא: $y=18x-9$.

א. מצא את $a$ ו-$b$ וכתוב את הפונקציה.
מעבירים ישר המקביל לציר ה-$y$ שחותך את גרף הפונקציה בנקודה A ואת משוואת המשיק בנקודה B.
אורך הקטע AB הוא 18.

ב. מצא את משוואת הישר הנ"ל אם ידוע כי הנקודה A נמצאת מימין לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.

**11)** הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$.

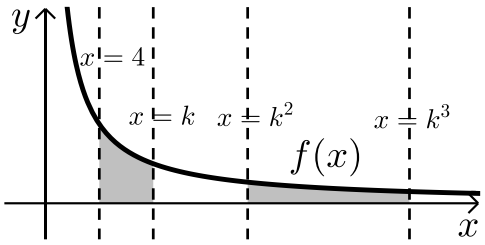



משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=2$ היא: $y=4-x$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק בתחום: $x>0$.
חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה-$x$ והישר $x=e^2$.

**12)** באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{2}{x}$



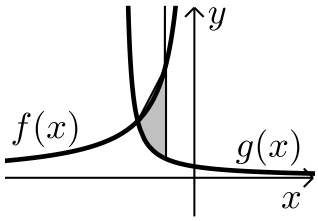

בתחום: $x>0$. מעבירים את הישרים:
$x=4$ , $x=k$ , $x=k^2$ , $x=k^3$
כמתואר $x>4$.

א. הבע באמצעות $k$ את השטחים: $S_1$ ו-$S_2$.

ב. הראה כי ההפרש: $S_2-S_1$ אינו תלוי ב-$k$ וחשב את ערכו.

ג. נתון כי השטח $S_2$ גדול פי 3 מהשטח $S_1$. מצא את $k$.

**13)** נתונות הפונקציות: $f(x)=-\frac{4}{x}$ ו- $g(x)=\frac{k}{2x+5}$.



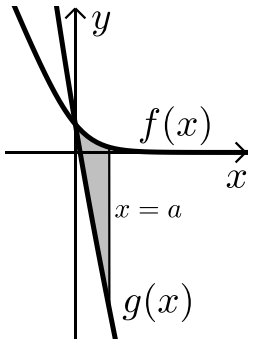

גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה- $y$ בנקודה שבה $y=0.4$.

א. מצא את הפונקציה $g(x)$.

ב. מצא את נקודת החיתוך של שני הגרפים.

ג. חשב את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר $x=-1$.

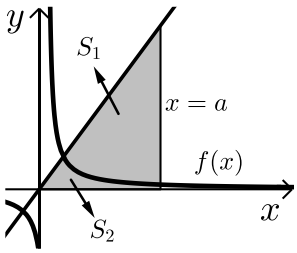
**14)** באיור מתוארים הגרפים של הפונקציות:
$f(x)=\ln\left(e^{-x}+1\right)$ ו- $g(x)=\ln\left(e^{-2x}+e^{-3x}\right)$
בתחום: $(x\geq 0)$.




א. הראה כי הגרפים נחתכים על ציר ה- $y$.

ב. מעבירים ישר $x=a$ , $(a>1)$ המאונך לציר ה- $x$ אשר חותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח $S$ (ראה איור).
מצא את ערכו של $a$ עבורו מתקיים: $S=4$.

**15)** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה: $f(x)=\frac{2}{3x-1}$ והישר: $y=x$.




א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציות הנמצאת ברביע הראשון.

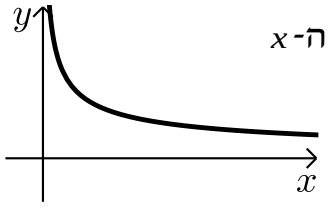
מעבירים אנך לציר ה- $x$ - $x=a$ הנמצא מימין לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.
האנך החותך את הגרפים ויוצר את השטחים $S_1$ ו- $S_2$ המתוארים האיור.

ב. מצא את הערך של $a$ עבורו השטח $S_2$ יהיה שווה ל- $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\ln 7$.

ג. עבור ערך ה- $a$ שמצאת בסעיף הקודם חשב את יחס השטחים: $\frac{S_1}{S_2}$.

**חישובי נפחים:**

**16)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$.




השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x=1$ ו-$x=3$ וציר ה-$x$ מסתובב סביב ציר ה-$x$.
מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר באופן זה.
אפשר להשאיר ln בתשובה.

**17)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}$.

השטח הכלוא בין הפונקציה, הצירים והישר $x=\ln\sqrt{3}$
מסתובב סביב ציר ה-$x$. חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

**18)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}$.

השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x=a$ ו-$x=a+3$ , $(a>0)$
וציר ה-$x$ מסתובב סביב ציר ה-$x$.
חשב את נפח גוף הסיבוב המינימלי שנוצר באופן הזה.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $3\ln|x|+2\ln|x+1|-\frac{4\ln|3x-1|}{3}+c$ ב. $\frac{x^2}{2}+3x-4\ln|x|+c$ ג. $\ln|x-3|+c$

**2)** א. $\frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x+1|+c$ ב. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+7x+8\ln|x-2|+c$

ג. $\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+4\ln|x+1|+c$

**3)** א. $\ln|x^2-3|+c$ ב. $\frac{1}{2}\ln|x^2-2x|+c$ ג. $\ln|e^x+5|+c$

ד. $\ln|e^x+e^{-x}|+c$ ה. $\ln|\sin x|+c$

**4)** $f(x)=x^2-\ln|x-4|+3$

**5)** $f(x)=x^3+\ln|x|-x-2$

**6)** $S=$ יח"ש $\ln 4$

**7)** $S=$ יח"ש $2.17$

**8)** $S=$ יח"ש $4\ln 2-2$

**9)** א. $a=2$ , $g(x)=\frac{1}{x-2}$ , $f(x)=\frac{2}{x-1}$ ב. $S=$ יח"ש $1.76$

**10)** א. $b=-4$ , $a=2$ , $f(x)=7+2x-\frac{4}{x}$ ב. $x=2$

ג. $S=6+\ln 256\approx$ יח"ש $11.54$

**11)** א. $f(x)=\frac{4}{x}$ ב. $S=$ יח"ש $6-4\ln 2$

**12)** א. $S_2=2\ln k$ , $S_1=2\ln k-\ln 16$ ב. $S_2-S_1=\ln 16$ ג. $k=8$

**13)** א. $g(x)=\frac{2}{2x+5}$ ב. $(-2,2)$ ג. $S=$ יח"ש $\ln 5\frac{1}{3}\approx 1.674$

**14)** ב. $a=2$

**15)** א. $(1,1)$ ב. $a=5$ ג. $\frac{S_1}{S_2}=5.955$

**16)** $V=$ יח"נ $\pi\ln 3$

**17)** $V=$ יח"נ $\frac{\pi}{2}\ln 2$

**18)** $V=$ יח"נ $\pi\left(19\frac{1}{2}+4\ln 4\right)$

# פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי:

## סיכום כללי:

### אינטגרלים מיידים של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי:

| אינטגרל של פונקציה מורכבת | אינטגרל יסודי |
|---|---|
| $\int \sqrt[n]{(ax+b)^m}\,dx=\int (ax+b)^{\frac{m}{n}}\,dx=\frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a\cdot\left(\frac{m}{n}+1\right)}+c$ | $\int \sqrt[n]{x^m}\,dx=\int x^{\frac{m}{n}}\,dx=\frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1}+c$ |

תנאי לקיום האינטגרציה: $\frac{m}{n}\neq -1$ .

## שאלות:

### אינטגרל של פונקצית חזקה:

**1)** חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \sqrt[3]{x}\,dx$ ב. $\int \left(4x-2\sqrt[4]{x}\right)dx$ ג. $\int \left(x\cdot\sqrt[5]{x}\right)dx$

ד. $\int \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ ה. $\int \frac{x+4}{\sqrt[4]{x}}\,dx$ ו. $\int \frac{x^3-3x+5}{\sqrt{x}}\,dx$

ז. $\int \sqrt[3]{2x-3}\,dx$ ח. $\int \sqrt[4]{5-x}\,dx$ ט. $\int \frac{3}{\sqrt[8]{7x+12}}\,dx$

י. $\int \frac{7}{\sqrt[5]{14-2x}}\,dx$

**2)** חשב את ערכי האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^8 \left(x+\sqrt[5]{4x}\right)dx$ ב. $\int_3^{16} \left(\sqrt[4]{5x+1}\right)dx$ ג. $\int_{-10}^{5} \frac{2}{\sqrt[4]{6-x}}\,dx$

**אינטגרל מסוים:**

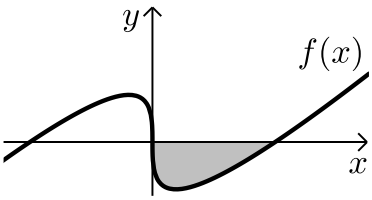
**3)** נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=2x-\sqrt[3]{4x}$.
ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(2,3)$.
מצא את הפונקציה.

**4)** נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=\sqrt[3]{5x+7}$.
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה-$x$ בנקודה שבה $x=4$.
מצא את הפונקציה.

**5)** נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=\frac{10}{\sqrt[5]{x+1}}+(x-1)^2$.
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה-$y$ בנקודה שבה $y=-6$.
מצא את הפונקציה.

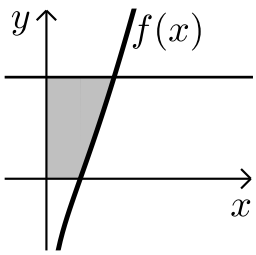
**חישובי שטחים:**

**6)** באיור שלפניך מופיע גרף הפונקציה: $f(x)=x-4\sqrt[3]{x}$.



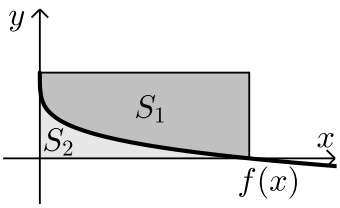

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.
ב. חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.

**7)** באיור שלפניך מצויר גרף הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$.




א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
ב. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.
ג. מעבירים אנך לציר ה-$y$ מהנקודה $(4,6)$.
חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והצירים.

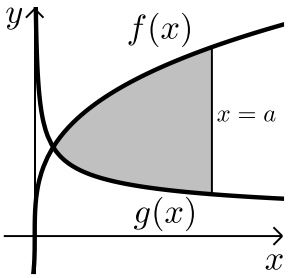
**8)** באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=2-\sqrt[4]{x}$.




מעבירים אנכים לצירים מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים כך שנוצר מלבן.
מסמנים את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים: ב-$S_1$ ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב-$S_2$.

מצא את היחס: $\frac{S_1}{S_2}$.

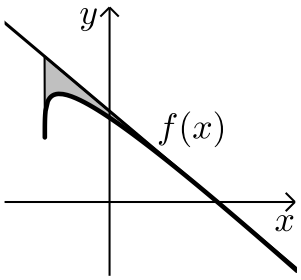
**9)** באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות הבאות: $f(x)=4\sqrt[3]{x}$ , $g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.




א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים בתחום: $x>0$.

ב. מעבירים אנך לציר ה-$x$ , $x=a$ , ($a$ פרמטר).
ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים מנקודת החיתוך שלהם ועד לאנך הוא: $42\frac{3}{16}$ סמ"ר.
מצא את $a$.

**10)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt[4]{5x+6}-ax$ , ($a$ פרמטר).
ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה-$x$ בנקודה שבה $x=2$.




א. מצא את הפרמטר $a$ וכתוב את הפונקציה.

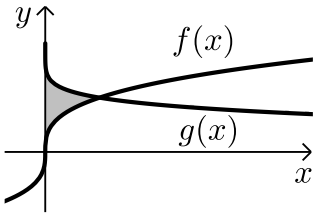
ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. מצא את נקודת קיצון הקצה של הפונקציה.

ד. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה-$x$.

ה. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק שמצאת בסעיף הקודם. מורידים אנך מהמשיק אל נקודת קיצון הקצה של הפונקציה שמצאת בסעיף ג'.
חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק.

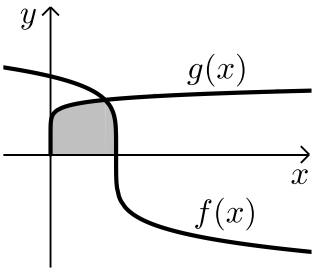
**11)** באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=\sqrt[3]{x}$ , $g(x)=2-\sqrt[6]{x}$ .




א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- $y$ .

**12)** הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$ .

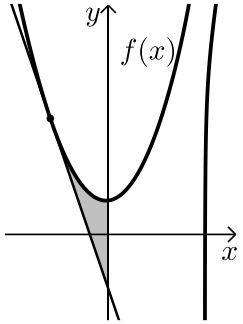



ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$ בנקודה שבה: $x=1.2$ .

א. מצא את הפונקציה $f(x)$ .

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$ ,
גרף הפונקציה: $g(x)=\sqrt[10]{x}$ וציר ה- $x$ .

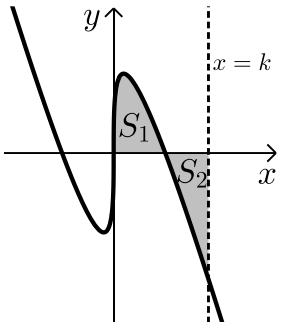
**13)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{3}{\sqrt[3]{5-x}}+\frac{1}{2}x^2$ .




א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה
בנקודה שבה $x=-3$ .

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$ ,
המשיק וציר ה- $y$ .

**14)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt[3]{x}-4x$ .




א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

ג. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה ברביע
הראשון. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה
וציר ה- $x$ יסומן ב- $S_1$ .
מעבירים ישר $x=k$ אשר יוצר את השטח $S_2$ כמתואר.
מצא את $k$ אם ידוע כי: $S_1=S_2$ .

## תשובות סופיות:

**1)** א. $0.75\sqrt[3]{x^4}+c$ ב. $2x^2-1.6\sqrt[4]{x^5}+c$ ג. $\frac{5}{11}\sqrt[5]{x^{11}}+c$

ד. $4.5\sqrt[3]{x^2}+c$ ה. $\frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7}+\frac{16}{3}\sqrt[4]{x^3}+c$ ו. $\frac{2}{7}\sqrt{x^7}-2\sqrt{x^3}+10\sqrt{x}+c$

ז. $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(2x-3)^4}+c$ ח. $-0.8\sqrt[4]{(5-x)^5}+c$ ט. $\frac{24}{49}\sqrt[8]{(7x+12)^7}+c$

י. $-\frac{35}{8}\sqrt[5]{(14-2x)^4}+c$

**2)** א. $45\frac{1}{3}$ ב. $33.76$ ג. $18\frac{2}{3}$

**3)** $f(x)=x^2-\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x)^4}+2$

**4)** $f(x)=\frac{3}{20}\sqrt[3]{(5x+7)^4}-12.15$

**5)** $f(x)=12.5\sqrt[5]{(x+1)^4}+\frac{1}{3}(x-1)^3-18\frac{1}{6}$

**6)** א. $(0,0)\ ;\ (8,0)$ ב. יח"ש $S=16$

**7)** א. $x>0$ ב. $(2,0)$ ג. יח"ש $S=18.149$

**8)** $\frac{S_1}{S_2}=4$

**9)** א. $\left(\frac{1}{8},2\right)$ ב. $a=8$

**10)** א. $a=1$ , $f(x)=\sqrt[4]{5x+6}-x$ ב. $x\geq -1.2$ ג. $(-1.2,1.2)$

ד. $y=-\frac{27}{32}x+\frac{27}{16}$ ה. יח"ש $S=0.48$

**11)** א. $(1,1)$ ב. יח"ש $S=\frac{11}{28}$

**12)** א. $f(x)=(6-5x)^{\frac{1}{5}}$ ב. יח"ש $S=1\frac{5}{66}$

**13)** א. $y=-2\frac{15}{16}x-\frac{45}{16}$ ב. $S=4.56$ יח"ש

**14)** א. כל $x$ ב. $\left(-\frac{1}{8},0\right)$ , $\left(\frac{1}{8},0\right)$ , $(0,0)$ ג. $k=\left(\frac{3}{8}\right)^{1.5}=0.2296..$

# מתמטיקה לתלמידי גאוגרפיה ופיתוח סביבתי 2

## פרק 22 - חשבון אינטגרלי - אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת הנגזרת כבר בפנים ..... 326

# אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

## שאלות

**הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.**

חשבו את האינטגרלים הבאים:

**1)** $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$ **2)** $\int \cot x dx$ **3)** $\int \frac{x^2}{x^3+1}dx$

**4)** $\int \tan x dx$ **5)** $\int \frac{1}{x\ln x}dx$ **6)** $\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1}dx$

**7)** $\int e^{x^2}2xdx$ **8)** $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx$ **9)** $\int e^{-2x^2}xdx$

**10)** $\int \cos\left(2x^2+1\right)\cdot 4xdx$ **11)** $\int \cos\left(\sin x\right)\cdot\cos x dx$ **12)** $\int \frac{\cos\left(\ln x\right)}{x}dx$

**13)** $\int \cos\left(10x^4+1\right)x^3dx$ **14)** $\int \sin\left(x^2+1\right)xdx$ **15)** $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

**16)** $\int \frac{\ln x}{x}dx$ **17)** $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$ **18)** $\int \frac{\left(\tan x\right)}{\cos^2 x}dx$

**19)** $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ **20)** $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2\sin x}}dx$ **21)** $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$

**22)** $\int x^2\sqrt{x^3+4}dx$ **23)** $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$ **24)** $\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $\ln\left|x^2+1\right|+c$

**2)** $\ln\left|\sin x\right|+c$

**3)** $\frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right|+c$

**4)** $-\ln\left|\cos x\right|+c$

**5)** $\ln\left|\ln\left|x\right|\right|+c$

**6)** $e^2\ln\left|e^x+1\right|+c$

**7)** $e^{x^2}+c$

**8)** $e^{\tan x}+c$

**9)** $-\frac{e^{-2x^2}}{4}+c$

**10)** $\sin\left(2x^2+1\right)+c$

**11)** $\sin\left(\sin x\right)+c$

**12)** $\sin\left(\ln x\right)+c$

**13)** $\frac{1}{40}\sin\left(10x^4+1\right)+c$

**14)** $-\frac{1}{2}\cos\left(x^2+1\right)+c$

**15)** $-2\cos\left(\sqrt{x}\right)+c$

**16)** $\frac{1}{2}\left(\ln x\right)^2+c$

**17)** $\frac{1}{2}\left(\arctan x\right)^2+c$

**18)** $\frac{1}{2}\left(\tan x\right)^2+c$

**19)** $2\sqrt{x^2+1}+c$

**20)** $\sqrt{2\sin x}+c$

**21)** $\frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+c$

**22)** $\frac{2}{9}\left(x^3+4\right)^{\frac{3}{2}}+c$

**23)** $\frac{2}{3}\left(\ln x\right)^{\frac{3}{2}}+c$

**24)** $\frac{2}{3}\left(\arctan x\right)^{\frac{3}{2}}+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מתמטיקה לתלמידי גאוגרפיה ופיתוח סביבתי 2

## פרק 23 - חשבון אינטגרלי - אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

### תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים..... 328

# אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

## שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-23**:

**1)** $\int xe^x dx$

**2)** $\int x^4 \ln x dx$

**3)** $\int x\sin x dx$

**4)** $\int \left(x^2+2x+3\right)\ln x dx$

**5)** $\int x^2 \sin 4x dx$

**6)** $\int x^2 e^{-4x} dx$

**7)** $\int \ln x dx$

**8)** $\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$

**9)** $\int \arctan x dx$

**10)** $\int \arcsin x dx$

**11)** $\int x\cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx$

**12)** $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

**13)** $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

**14)** $\int x\arctan x dx$

**15)** $\int x^2 \ln\left(x^2+1\right) dx$

**16)** $\int \ln^2 x dx$

**17)** $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$

**18)** $\int e^x \cos x dx$

**19)** $\int e^{2x} \sin 4x dx$

**20)** $\int \sqrt{1-x^2} dx$

**21)** $\int \frac{xe^x}{\left(x+1\right)^2} dx$

**22)** $\int x\tan^2 x dx$

**23)** $\int \left(x+1\right)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx$

**24)** מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int x^n e^x dx$ באשר $n$ טבעי.

**25)** חשבו את $\int x^4 e^x dx$.

**26)** מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \cos^n x dx$ באשר $n$ טבעי.

**27)** חשבו את $\int \cos^4 x dx$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**28)** מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \sin^n xdx$ באשר $n$ טבעי.

**29)** חשבו את $\int \sin^4 xdx$.

**30)** מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n} dx$ באשר $n$ טבעי.

**31)** חשבו את $\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^4} dx$.

**32)** חשבו את האינטגרלים $\int e^{ax} \sin bxdx$, $\int e^{ax} \cos bxdx$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1** $xe^x - e^x + c$

**2** $\frac{x^5}{5}\left(\ln x - \frac{1}{5}\right) + c$

**3** $x\cos x + \sin x + c$

**4** $\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right)\ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c$

**5** $-\frac{x^2}{4}\cos 4x + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}\sin x + \frac{1}{16}\cos 4x\right) + c$

**6** $-\frac{x^2}{4}e^{-4x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}xe^{-4x} - \frac{1}{16}e^{-4x}\right) + c$

**7** $x\ln x - x + c$

**8** $-\frac{1}{3}\left(x\ln x - x\right) + c$

**9** $x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left|1 + x^2\right| + c$

**10** $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$

**11** $\frac{1}{5}\left(\frac{x^2}{2}\ln\left(x-2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + 2x + 4x\ln\left|x-2\right|\right)\right) + c$

**12** $x\tan x + \ln\left|\cos x\right| + c$

**13** $-\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + c$

**14** $\arctan x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \arctan x\right) + c$

**15** $\frac{x^3}{3}\ln\left(x^2+1\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3} - x + \arctan x\right) + c$

**16** $x\left(\ln x\right)^2 - 2\left(x\ln x - x\right) + c$

**17** $-\frac{1}{x}\ln x - \frac{2}{x}\left(\ln x - 1\right) + c$

**18** $-e^x\cos x + \frac{e^x\left(\sin x + \cos x\right)}{2} + c$

**19** $\frac{e^{2x}\left(-\cos 4x + \frac{1}{2}\sin 4x\right)}{5} + c$

**20** $\frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**(21** $\frac{e^x}{x+1}+c$

**(22** $x\left(\tan x-x\right)+\ln\left|\cos x\right|+\frac{x^2}{2}+c$

**(23** $\frac{2}{9}\left(x+1\right)\left(x+2\right)^{\frac{9}{2}}-\frac{4}{99}\left(x+2\right)^{\frac{11}{2}}+c$

**(24** $x^n e^x-n\int x^{n-1}e^x dx$

**(25** $e^x\left(x^4-4x^3+12x^2-24x+24\right)+c$

**(26** $\frac{1}{n}\left\{\left(\cos x\right)^{n-1}\sin x+(n-1)\int\left(\cos x\right)^{n-2}dx\right\}$

**(27** $\frac{1}{4}\left(\cos^3 x\sin x+3\cdot 5\left(\cos x\sin x+x\right)\right)+c$

**(28** $\frac{1}{n}\left(-\left(\sin x\right)^{n-1}\cos x+\left(n-1\right)\int\left(\sin x\right)^{n-2}dx\right)$

**(29** $\frac{1}{4}\left(-\sin^3 x\cos x+3\cdot 5\left(x-\sin x\cos x\right)\right)+c$

**(30** $\frac{1}{2n}\left(\frac{x}{\left(1+x^2\right)^n}+\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n}\left(2n-1\right)\right)$

**(31** $\frac{1}{6}\left\{\frac{x}{\left(1+x^2\right)^3}+\frac{1}{4}\left\{\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}+\frac{1}{2}\left\{\frac{x}{1+x^2}+\arctan x\right\}\right\}\right\}$

**(32** $\int e^{ax}\cos bxdx=e^{ax}\frac{b\sin bx+a\cos bx}{a^2+b^2},\quad\int e^{ax}\sin bxdx=e^{ax}\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מתמטיקה לתלמידי גאוגרפיה ופיתוח סביבתי 2

## פרק 24 - חשבון אינטגרלי - אינטגרלים בשיטת ההצבה

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת ההצבה ..... 332

# אינטגרלים בשיטת ההצבה

## שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$

2) $\int \sqrt{x^3+4}\cdot x^5 dx$

3) $\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$

4) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$

5) $\int \frac{1}{x\ln^4 x}dx$

6) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$

7) $\int e^{x^2}x^3 dx$

8) $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$

9) $\int \frac{1}{\sqrt{x\left(1+x\right)}}dx$

10) $\int 2x^3\cos\left(x^2+1\right)dx$

11) $\int x^3\left(3x^2-1\right)^{14}dx$

12) $\int \frac{\cos^2\left(\ln x\right)}{x}dx$

13) $\int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx$

14) $\int \ln^3 x dx$

15) $\int \frac{x^3 dx}{x^8+2}$

16) $\int \frac{\ln^4 x}{x}dx$

17) $\int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2}dx$

18) $\int \frac{dx}{x\cdot\ln x\cdot\ln\left(\ln x\right)}$

19) $\int \arctan\sqrt{x}dx$

20) $\int \frac{x^7}{\left(1-x^4\right)^2}dx$

21) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

22) $\int \cos\left(\ln x\right)dx$

23) $\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$

24) $\int x^5\sqrt[3]{x^3+1}dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $-\frac{1}{x^2+1}+c$

**2)** $\frac{2}{3}\left(\frac{\left(\sqrt{x^3+4}\right)^5}{5}-\frac{4}{3}\left(\sqrt{x^3+4}\right)^3\right)+c$

**3)** $2\left(\frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3}-\sqrt{x^2+1}\right)+c$

**4)** $\arctan\left(e^x\right)+c$

**5)** $-\frac{1}{3(\ln x)^3}+c$

**6)** $\arcsin\left(\ln x\right)+c$

**7)** $\frac{1}{2}\left(x^2e^{x^2}-e^{x^2}\right)+c$

**8)** $3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x}^2-2\sqrt[3]{x}+2\right)+c$

**9)** $\ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|+c$

**10)** $x^2\sin\left(x^2+1\right)+\cos\left(x^2+1\right)+c$

**11)** $\frac{1}{18}\left(\frac{\left(3x^2-1\right)^{16}}{16}+\frac{\left(3x^2-1\right)^{15}}{15}\right)+c$

**12)** $\frac{1}{2}\left(\ln x+\frac{1}{2}\sin\left(2\ln x\right)\right)+c$

**13)** $\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|+c$

**14)** $x\left(\ln^3 x-3\ln^2 x+6\ln x-6\right)+c$

**15)** $\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right)+c$

**16)** $\frac{(\ln x)^5}{5}+c$

**17)** $\frac{(\arctan x)^3}{3}+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**18** $\ln\left|\ln\left(\ln x\right)\right|+c$

**19** $x\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}+c$

**20** $-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{1-x^4}-\ln\left|1-x^4\right|\right)+c$

**21** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}\right|+c$

**22** $\frac{x}{2}\left(\cos\left(\ln x\right)+\sin\left(\ln x\right)\right)+c$

**23** $6\left(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x}\right)+c$

**24** $\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^7}{7}-\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^4}{4}+c$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מתמטיקה לתלמידי גאוגרפיה ופיתוח סביבתי 2

## פרק 25 - חשבון אינטגרלי - שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)

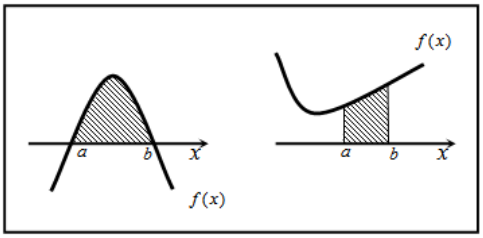
תוכן העניינים

1. חישוב שטחים ..... 335
2. חישוב שטחים ביחס לציר ה-y ..... 355
3. אורך קשת ..... 356

# חישוב שטחים

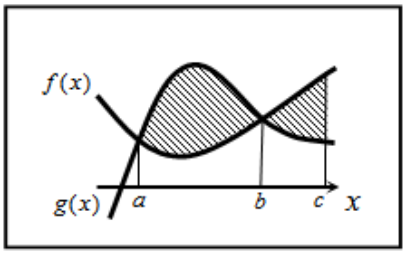
## חישוב שטחים באמצעות אינטגרל (מקרים פרטיים)

1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- $x$ :



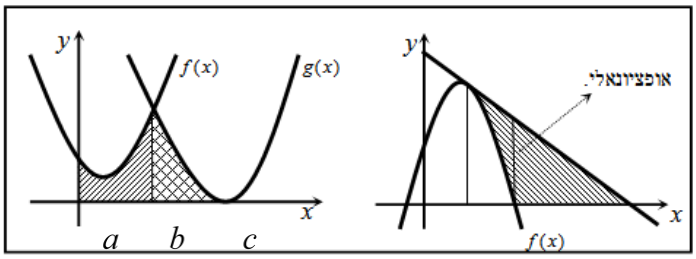

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

2. שטח הכלוא בין שני גרפים, כך שגרף אחד כולו מעל השני :




$$S_1=\int_a^b\left(g(x)-f(x)\right)dx$$
$$S_2=\int_b^c\left(f(x)-g(x)\right)dx$$
$$S=S_1+S_2$$

3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- $x$ :

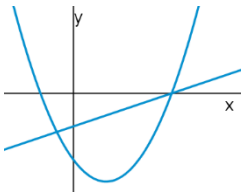



$$S=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c g(x)\,dx$$

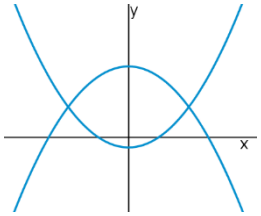

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## שאלות

**1)** נתונות הפונקציות $f(x)=x^2-4x-12$ ו- $g(x)=x-6$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של $f$ ו- $g$.



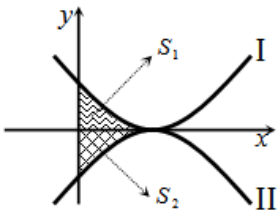

**2)** נתונות הפונקציות $g(x)=7-x^2$ , $f(x)=x^2-1$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של $f$ ו- $g$.



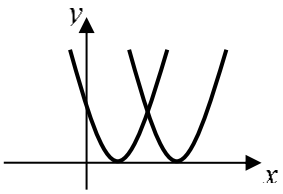

**3)** נתונות הפונקציות $f(x)=(x-2)^2$ ו- $g(x)=-(x-2)^2$,
כמתואר באיור.

א. התאימו בין הפונקציות לגרפים I ו-II.

ב. נסמן את השטחים שבין כל פונקציה והצירים
ב- $S_1$ ו- $S_2$, כמתואר באיור.
הראו כי השטחים $S_1$ ו- $S_2$ שווים זה לזה.




**4)** נתונות הפונקציות $f(x)=x^2-2x+1$ , $g(x)=x^2-6x+9$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- $x$.

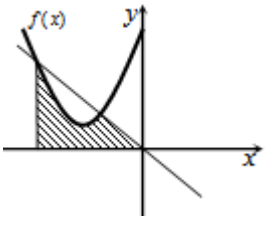



**5)** נתונה הפונקציה $f(x)=x^2+6x+12$.
ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה
בנקודה שבה $x=-4$, כמתואר באיור.

א. מצאו את משוואת הישר.

ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.

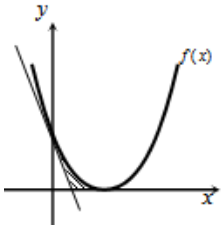
ג. מצאו את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה- $x$ והישר $x=-4$.





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**6)** נתונה הפונקציה $f(x)=(x-2)^2$ .



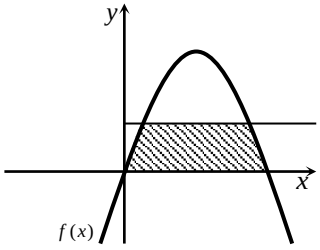

בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ נעביר משיק.

א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. מצאו את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$ .

ג. חשבו את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- $x$ (השטח המסומן).

**7)** נתונה הפונקציה $f(x)=kx-x^2$ .




הישר $y=9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.

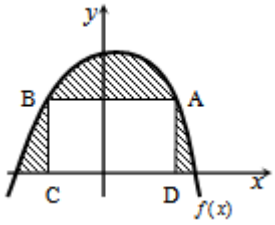
ידוע כי שיעור ה- $x$ של אחת מנקודות אלה הוא $x=9$ .

א. מצאו את ערך הפרמטר $k$ .

ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- $x$ (השטח המסומן).

**8)** הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ , המתוארת באיור שלהלן,




היא $f'(x)=3-2x$ . ישר AB, שמשוואתו $y=6$

חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו-B.

מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- $x$ ,

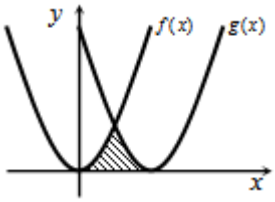
כך שנוצר מלבן ABCD.

ידוע ששיעור ה- $x$ של הנקודה A הוא $x=4$ .

א. מצאו את הפונקציה $f(x)$ .

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- $x$ (השטח המסומן).

**9)** באיור שלהלן חותך גרף הפונקציה $f(x)=x^2$




את גרף הפונקציה $g(x)$ , בנקודה שבה $x=2$ .

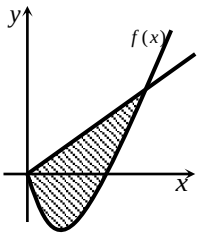
הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ היא $g'(x)=2x-8$ .

א. מצאו את הפונקציה $g(x)$ .

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- $x$ (השטח המסומן).


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y=2x$.



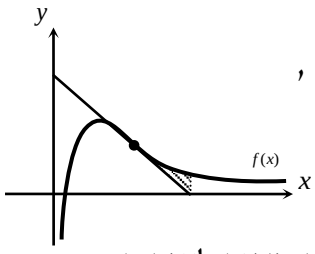

נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=2x-6$,
וידוע כי הישר חותך את הפונקציה
בנקודה שבה ערך ה- $y$ הוא $y=16$.

א. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן, מצאו אותן.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.

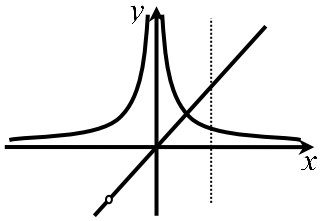
**11)** ענו על הסעיפים הבאים:




א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}$,
מצאו את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.

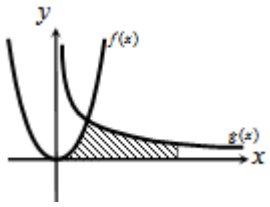
ב. באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציה
והמשיק שמצאת בסעיף א'.
חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק, ואנך לציר ה- $x$,
היוצא מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$.

**12)** נתונות שתי פונקציות $g(x)=\frac{x^2+2x}{x+2}$, $f(x)=\frac{1}{x^2}$.




חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,
הישר $x=2$ וציר ה- $x$.

**13)** באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות

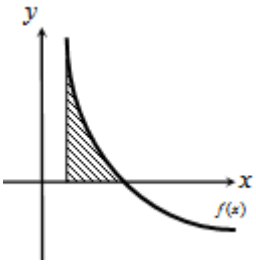



$f(x)=2x^2$ ו- $g(x)=\frac{a}{x^2}$ ($a$ קבוע), בתחום $x>0$.
ידוע כי הגרפים נחתכים ברביע הראשון,
בנקודה הנמצאת על הישר $y=4x$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים ואת $a$.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- $x$ והישר $x=4$.

**14)** גרף הפונקציה $f(x)=\frac{a-x^2}{x^2}$ ($a$ קבוע)



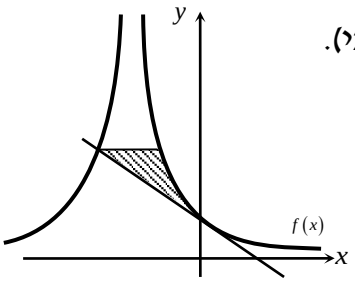

חותך את ציר ה- $x$ בנקודה $(6,0)$.

א. מצאו את $a$ וכתבו את הפונקציה.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,
ציר ה- $x$ והישר $x=2$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**15)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{A}{(2x+A)^2}$ ($A$ פרמטר חיובי).




ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-$y$, הוא $-\frac{1}{9}$.

א. מצאו את ערך הפרמטר $A$.

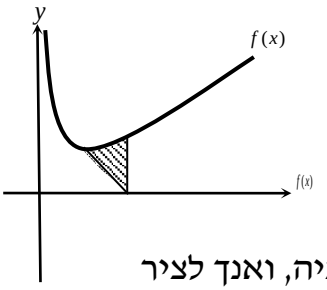
ב. כתבו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך עם ציר ה-$y$.

ג. הראו כי המשיק חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-4.5$.

ד. העבירו ישר אופקי מנקודת החיתוך של המשיק וגרף הפונקציה מהסעיף הקודם, ומצאו את נקודת החיתוך הנוספת של ישר זה עם גרף הפונקציה.

ה. חשבו את השטח כלוא בין המשיק, הישר וגרף הפונקציה (היעזרו באיור).

**16)** באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x}}+x$.

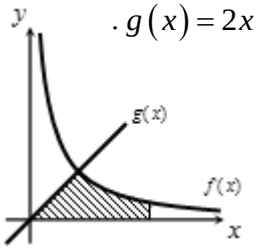



א. מצאו את נקודת המינימום שלה.

ב. מנקודת המינימום של הפונקציה נעביר ישר לנקודה $(2,0)$, שעל ציר ה-$x$.

מצאו את השטח הכלוא בין ישר זה, גרף הפונקציה, ואנך לציר ה-$x$, היוצא מהנקודה $(2,0)$ עד לנקודת החיתוך עם גרף הפונקציה.

**17)** באיור הבא מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)=\frac{16}{\sqrt{x}}$ ו-$g(x)=2x$.



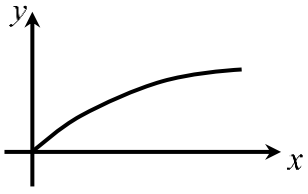

א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה-$x$ והישר $x=9$.

**18)** נתונה הפונקציה $f(x)=(x-6)\sqrt{x}$.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודת המינימום שלה וציר ה-$y$.

**19)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ברביע הראשון.




לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק והישר $x=\sqrt{3}$.

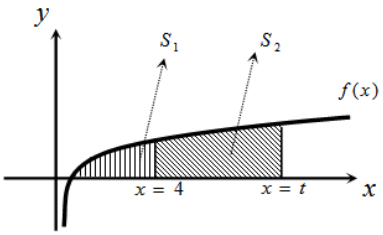

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**20)** באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x}}$.

נעביר שני אנכים לציר ה-$x$, $x=4$ ו- $x=t$ (כאשר $t>4$).

נסמן את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה-$x$ ב-$S_1$,

ואת השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה-$x$ והאנכים ב-$S_2$.




ידוע כי $8S_1=S_2$.

מצאו את $t$.

**21)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$.

א. ענו על הסעיפים הבאים:

1. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
2. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.
3. הראו כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. נעביר משיק לגרף הפונקציה ששיפועו הוא $m=\frac{17}{16}$.

מצאו את נקודת ההשקה.

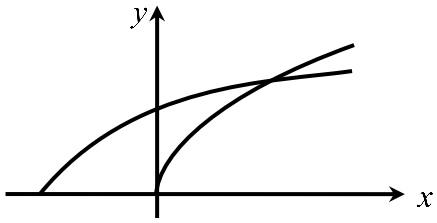
ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה-$x$ ואנך לציר ה-$x$ מנקודת ההשקה שמצאת בסעיף הקודם.

**22)** נתונות שתי פונקציות $g(x)=\sqrt{2x}$, $f(x)=\sqrt{x+b}$, כאשר $(b>0)$.

גודל השטח הכלוא בין הפונקציות

וציר ה-$x$ הוא $2\frac{2}{3}$ יחידות שטח.

מצאו את ערכו של הפרמטר $b$.




**23)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)=x^2$ ו-$g(x)=\frac{32}{\sqrt{x}}$,

ברביע הראשון.

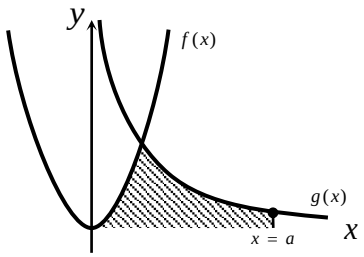
נעביר ישר $x=a$, החותך את גרף הפונקציה $g(x)$

ויוצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים,

ציר ה-$x$ והישר (השטח המסומן).

ידוע כי שטח זה שווה ל-$S=85\frac{1}{3}$.

מצאו את $a$.

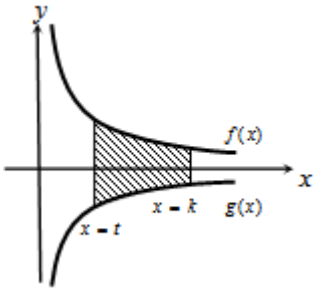




לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**24)** באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x)=-\frac{3}{\sqrt{x}}$.

נעביר שני ישרים $x=k$ ו- $x=t$, אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.




ידוע כי $AB=2CD$.

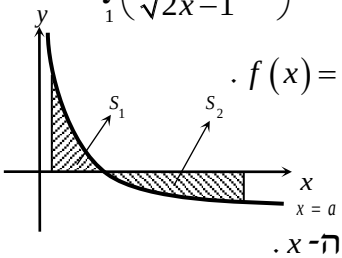
א. הראו כי $k=4t$.

ב. השטח הכלוא בין הפונקציות לבין הישרים $x=k$ ו- $x=t$, הוא $S=12$. מצאו את $t$.

**25)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו עבור איזה ערך של $a$, $(a>1)$, יתקיים $\int_1^a\left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}}-1\right)dx=0$.

ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\frac{3}{\sqrt{2x-1}}-1$.




נעביר שני אנכים לציר ה-$x$, $x=1$ ו-$x=13$, כך שנוצרים השטחים $S_1$ ו- $S_2$.

מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.

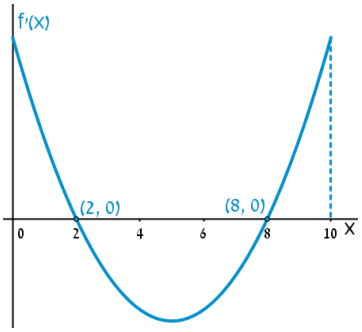
ג. ענו על תתי-הסעיפים הבאים:

1. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה-$x$ והאנך $x=1$, כלומר את $S_1$.

2. היעזרו בתוצאה שהתקבלה ובסעיף א' וקבעו לכמה שווה השטח $S_2$. נמקו.

**26)** הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0\le x\le 10$.

בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.

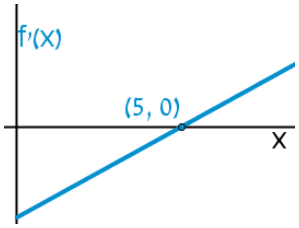



א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם $f(2)=6$, $f(0)=-4$, $f(5)=0$, וכן $f(10)>0$.

ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י **גרף הנגזרת** והצירים ברביע הראשון, עד לנקודה שבה $x=2$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**27)** להלן גרף הפונקציה $f'(x)$, אשר חותך את ציר ה-$x$ בנקודה אחת בלבד, $(5,0)$.




א. מצאו את התחומים שבהם $f'(x)$ חיובית, ואת התחומים שבהם היא שלילית.

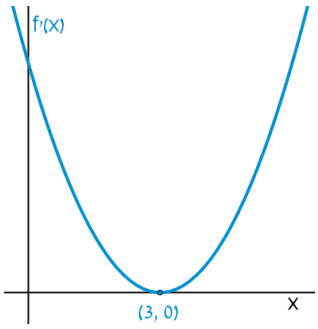
ב. קבעו מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ג. כתבו את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי שיעור ה-$y$ שלה הוא $y=-2$.

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה-$y$ כאשר $y=8$.

ה. חשבו את השטח הכלוא בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$ והצירים.

**28)** באיור שלהלן מתוארת הנגזרת $f'(x)$.

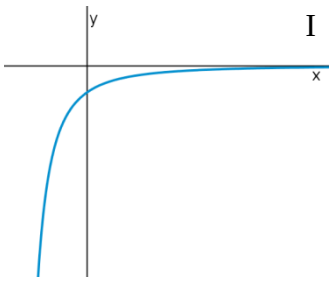


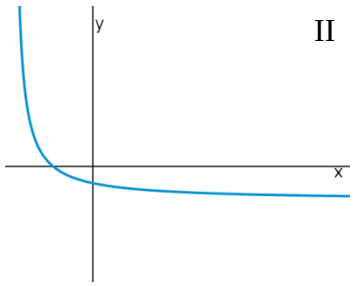

א. האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון? נמקו.

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי $f(3)=4$, וכי היא חותכת את ציר ה-$y$ בנקודה שבה $y=-5$.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$ והצירים ברביע הראשון.

**29)** באיורים שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$f'(x)$:



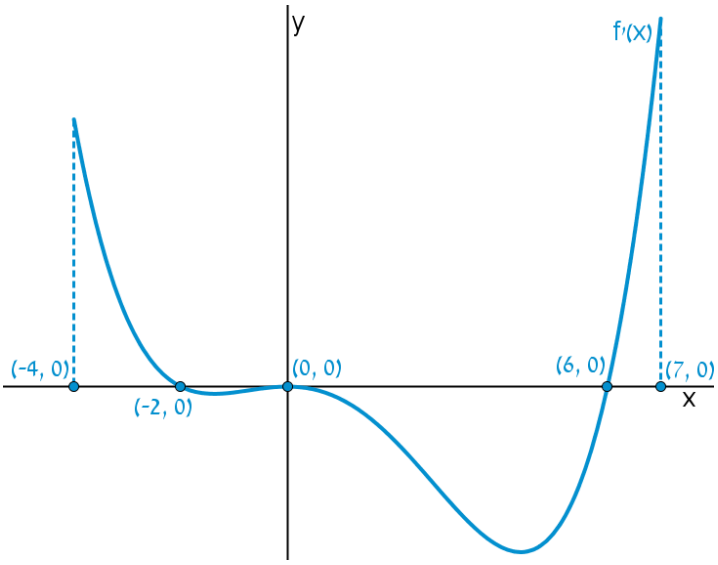




א. זהו איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמקו.

ב. נתון $f(10)=-3$, וכי $f(x)$ חותכת את ציר ה-$y$ בנקודה שבה $y=-2$. מהו השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** $f'(x)$, הצירים והישר $x=10$?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**30)** נתון גרף הנגזרת $f'(x)$ :




א. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \le x \le 7$ ,

לפי הנתונים $f(0) = -2$ , $f(-2) = 7.6$ ו- $f(6) = -606.8$ .

ב. חשבו את השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** וציר ה- $x$ בריבוע השלישי.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין **גרף הנגזרת** וציר ה- $x$ בריבוע הרביעי.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## פונקציות מעריכיות

### אינטגרלים מיידים של פונקציות מעריכיות

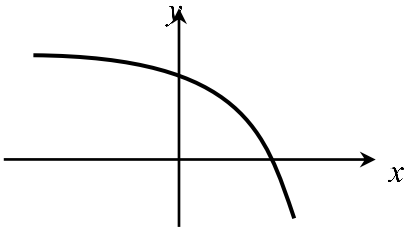
| אינטגרלים של פונקציות מורכבות | אינטגרלים יסודיים |
|---|---|
| $\int a^{mx+n}dx=\frac{a^{mx+n}}{m\cdot\ln a}+c$ | $\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+c$ |
| $\int e^{mx+n}dx=\frac{e^{mx+n}}{m}+c$ | $\int e^{x}dx=e^{x}+c$ |

**31)** נתונה הפונקציה $f(x)=5-e^{x}$.

העבירו לפונקציה משיק ששיפועו $-e$.

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה-$x$.

ניתן להשאיר $e$ ו-$\ln$ בתשובה.




**32)** נתונה הפונקציה $f(x)=e^{bx}$, כאשר $b>0$.

גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר בראשית הצירים וציר ה-$y$ הוא $\frac{e-2}{4}$.

מצאו את ערכו של הפרמטר $b$.

**33)** נתונות הפונקציות $g(x)=e^{-x}$ ו-$f(x)=e^{\frac{1}{2}x}$.

מנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ ברביע הראשון הורידו אנך לשני הצירים. המשך האנך לציר ה-$y$ חותך את הפונקציה $f(x)$, ומנקודת החיתוך יורד אנך נוסף לציר ה-$x$, כך שנוצר מלבן.

הוכיחו כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא $\frac{3}{e}$.

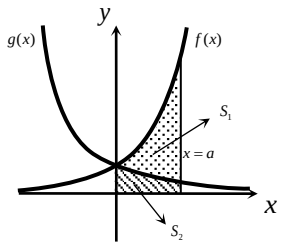
**34)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)=e^{2x}$ ו-$g(x)=e^{-2x}$.

נעביר אנך לציר ה-$x$ את הישר $x=a$, כאשר $a>0$, כמתואר באיור.

אנך זה יוצר את השטחים $S_1$ ו-$S_2$.

ידוע כי השטח $S_1$ גדול פי 3 מהשטח $S_2$.

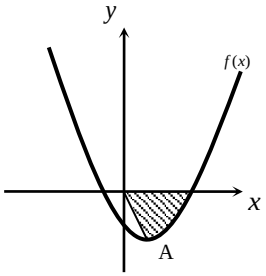
מצאו את $a$.





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**35)** נתונה הפונקציה $f(x)=e^{2x-1}-2ex-2$ .




הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה.

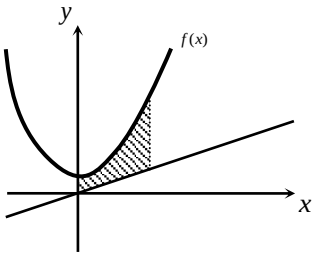
א. מצאו את שיעורי הנקודה A.

מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים.

ב. כתבו את משוואת הישר המחבר את הנקודה A עם הראשית.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- $x$ , אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$ בנקודה שבה $x=1.7$ .

**36)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{e^x+e^{ax}}{4}$ .




ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה $\left(1,\frac{e^3+1}{4e^2}\right)$ .

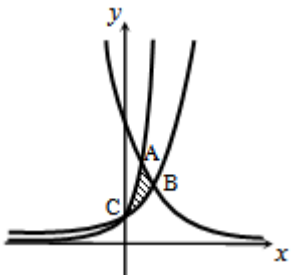
א. מצאו את $a$ וכתבו את הפונקציה.

ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ , והישר $y=0.1x$ .

חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר ה- $y$ והאנך $x=2$ .

**37)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של שלוש פונקציות:

1. $f(x)=2^x$ 2. $g(x)=4^x$ 3. $h(x)=2^{4-2x}$

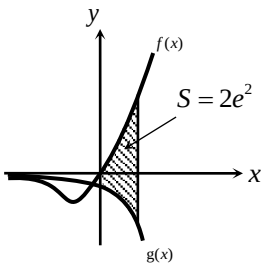



א. קבעו איזה גרף מתאר כל פונקציה.

ב. מצאו את שיעורי הנקודות A, B ו-C (נקודות החיתוך בין הגרפים).

ג. חשבו את השטח המסומן באיור.

**38)** ענו על הסעיפים הבאים:




א. גזרו את הפונקציה $y=e^x(x-1)$ .

ב. באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $g(x)=-e^x$ ו- $f(x)=xe^x$ .

נעביר ישר $x=a$ , כאשר $a>0$ , החותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- $y$ והישר (מקווקו).

ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$ .

מצאו את $a$ .

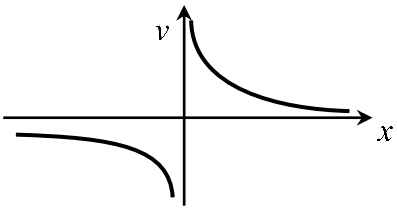

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## פונקציות לוגריתמיות

### אינטגרלים מיידים של פונקציות לוגריתמיות

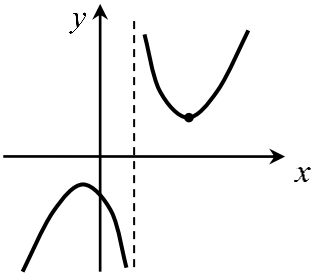
| אינטגרל של פונקציה מורכבת | אינטגרל יסודי |
|---|---|
| $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + c$ | $\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + c$ |

**39)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$.



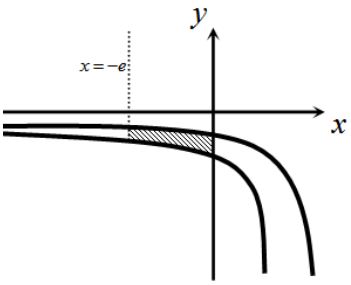

חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x=-1$ ו-$x=-4$ וציר ה-$x$.
ניתן להשאיר $\ln$ בתשובה.

**40)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$.




חשבו את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x=2$, ואנך לציר ה-$x$ העובר בנקודת המינימום שלה.
אפשר להשאיר ביטוי עם $\ln$ בתשובה.

**41)** באיור שלהלן נתונות הפונקציות $f(x)=\frac{a}{x-1}$



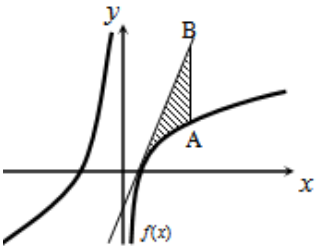

ו-$g(x)=\frac{a-1}{x-2}$, בתחום $x<0$.
ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x=3$.

א. מצאו את $a$ וכתבו את שתי הפונקציות.

ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה-$y$ והישר $x=-e$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**42)** נתונה הפונקציה $f(x)=7+ax+\frac{b}{x}$.




ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-$x$ היא $y=18x-9$.

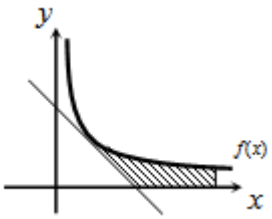
א. מצאו את $a$ ו-$b$ וכתבו את הפונקציה.

נעביר ישר המקביל לציר ה-$y$, שחותך את גרף הפונקציה בנקודה A, ואת משוואת המשיק בנקודה B. אורך הקטע AB הוא 18.

ב. מצאו את משוואת הישר הנ"ל, אם ידוע כי הנקודה A נמצאת מימין לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.

**43)** נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$.

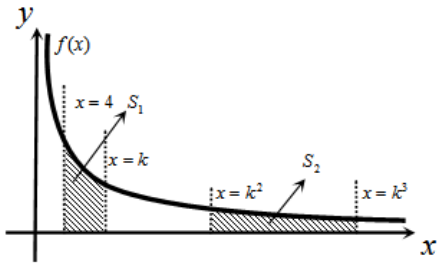



משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=2$ היא $y=4-x$.

א. מצאו את $f(x)$.

ב. באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ ומשיק, בתחום $x>0$.
חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה-$x$ והישר $x=e^2$.

**44)** באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x}$, בתחום $x>0$.



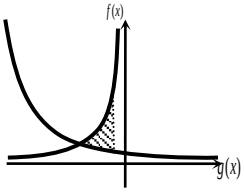

נעביר את הישרים $x=k$ , $x=k^2$ , $x=k^3$ ו-$x=4$, כמתואר באיור $(x>4)$.

א. הביעו באמצעות $k$ את השטחים $S_1$ ו-$S_2$.

ב. הראו כי ההפרש $S_2-S_1$ אינו תלוי ב-$k$, וחשבו את ערכו.

ג. נתון כי השטח $S_2$ גדול פי 3 מהשטח $S_1$.
מצאו את $k$.

**45)** נתונות הפונקציות $f(x)=-\frac{4}{x}$ ו-$g(x)=\frac{k}{2x+5}$.




גרף $g(x)$ חותך את ציר ה-$y$ בנקודה שבה $y=0.4$.

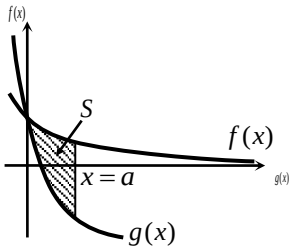
א. מצאו את הפונקציה $g(x)$.

ב. מצאו את נקודת החיתוך של שני הגרפים.

ג. חשבו את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר $x=-1$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**46)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)=\ln\left(e^{-x}+1\right)$ ו- $g(x)=\ln\left(e^{-2x}+e^{-3x}\right)$, בתחום $x\geq 0$.

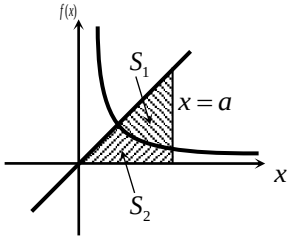



א. הראו כי הגרפים נחתכים על ציר ה- $y$.

ב. נעביר ישר $x=a$ $(a>1)$, המאונך לציר ה- $x$, חותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח $S$ (ראה איור).
מצאו את ערכו של $a$, עבורו מתקיים $S=4$.

**47)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציה $f(x)=\dfrac{2}{3x-1}$ והישר $y=x$.

א. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר, ברביע הראשון.




נעביר אנך לציר ה- $x$, $x=a$, הנמצאו מימין לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.
האנך חותך את הגרפים ויוצר את השטחים $S_1$ ו- $S_2$, המתוארים באיור.

ב. מצאו את הערך של $a$, עבורו השטח $S_2$ יהיה שווה ל- $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}\ln 7$.

ג. עבור ערך ה- $a$ שנמצא בסעיף הקודם, חשבו את יחס השטחים $\dfrac{S_1}{S_2}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

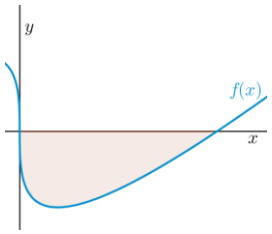
## פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

### אינטגרלים מיידים של פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

| אינטגרל של פונקציה מורכבת | אינטגרל יסודי |
|---|---|
| $\int \sqrt[n]{(ax+b)^m}\,dx=\int (ax+b)^{\frac{m}{n}}\,dx=\frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a\cdot\left(\frac{m}{n}+1\right)}+c$ | $\int \sqrt[n]{x^m}\,dx=\int x^{\frac{m}{n}}\,dx=\frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1}+c$ |

תנאי לקיום האינטגרציה $\frac{m}{n}\neq -1$.

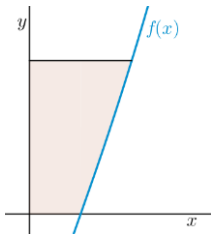
**48)** באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה $f(x)=x-4\sqrt[3]{x}$.




א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ב. חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.

**49)** באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$.



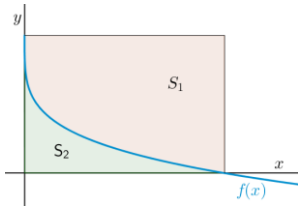

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ג. נעביר אנך לציר ה-$y$ מהנקודה $(4,6)$.

חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והצירים, ברביע הראשון.

**50)** באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=2-\sqrt[4]{x}$.




נעביר אנכים לצירים מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים, כך שנוצר מלבן,

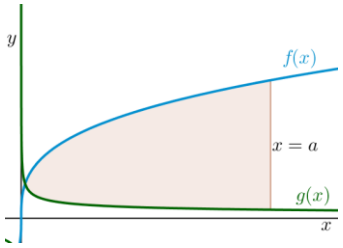
ונסמן את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים ב-$S_1$,

ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב-$S_2$.

מצאו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

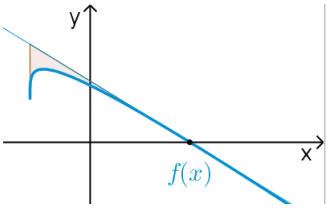
**51)** באיור שלהלן מתוארים גרפים של הפונקציות $f(x)=4\sqrt[3]{x}$ ו- $g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.




א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים בתחום $x>0$.

ב. נעביר אנך לציר ה- $x$, $x=a$ ($a$ פרמטר). ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים, מנקודת החיתוך שלהם ועד לאנך, הוא $42\frac{3}{16}$ יח"ש. מצאו את $a$.

**52)** נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt[4]{5x+6}-ax$, $a$ פרמטר.




ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$ בנקודה שבה $x=2$.

א. מצאו את הפרמטר $a$ וכתבו את הפונקציה.

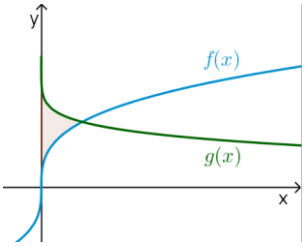
ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. מצאו את נקודת קיצון בקצה של הפונקציה.

ד. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה, העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$.

ה. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק שמצאנו בסעיף הקודם. נוריד אנך מהמשיק אל נקודת הקיצון בקצה של הפונקציה שמצאנו בסעיף ג'.
חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק.

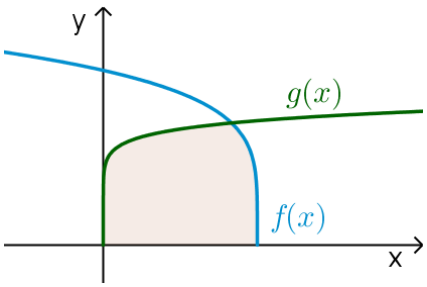
**53)** באיור שלהלן נתונים גרפים של הפונקציות $g(x)=2-\sqrt[6]{x}$ ו- $f(x)=\sqrt[3]{x}$.




א. מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- $y$.

**54)** הנגזרת של $f(x)$ היא $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$.



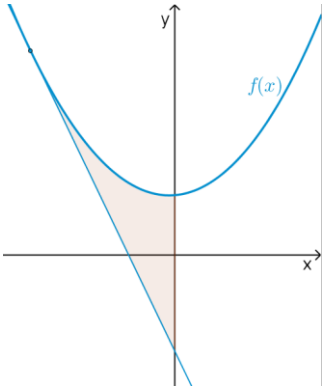

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$ בנקודה שבה $x=1.2$.

א. מצאו את $f(x)$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, גרף הפונקציה $g(x)=\sqrt[10]{x}$ וציר ה- $x$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

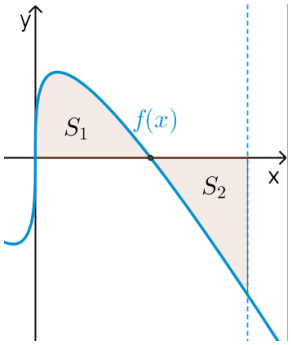
**55)** נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{3}{\sqrt[3]{5-x}}+\frac{1}{2}x^2$.




א. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-3$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, המשיק וציר ה-$y$.

**56)** נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{x}-4x$.




א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-$x$.

ג. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה ברביע הראשון. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה-$x$ יסומן ב-$S_1$.
נעביר ישר $x=k$, אשר יוצר את השטח $S_2$, כמתואר באיור.
מצאו את $k$, אם ידוע כי $S_1=S_2$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $57\frac{1}{6}$ יח"ש.

**2)** $21\frac{1}{3}$ יח"ש.

**3)** א. $f(x)=\text{I}$ , $g(x)=\text{II}$ ב. שאלת הוכחה.

**4)** $\frac{2}{3}$ יח"ש.

**5)** א. $y=-x$ ב. $(-3,3)$ ג. $7\frac{5}{6}$ יח"ש.

**6)** א. $y=-4x+4$ ב. $(1,0)$ ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.

**7)** א. $k=10$ ב. $(1,9)$ ג. $81\frac{1}{3}$ יח"ש.

**8)** א. $f(x)=-x^2+3x+10$ ב. $27\frac{1}{6}$ יח"ש.

**9)** א. $g(x)=(x-4)^2$ ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.

**10)** א. $f(x)=x^2-6x$ ב. $(0,0)$ ג. $85\frac{1}{3}$ יח"ש.

**11)** א. $y=-x+2$ ב. $\frac{1}{8}$ יח"ש.

**12)** 1 יח"ש.

**13)** א. $a=32$ , $(2,8)$ ב. $13\frac{1}{3}$ יח"ש.

**14)** א. $a=36$ , $f(x)=\frac{36-x^2}{x^2}$ ב. 8 יח"ש.

**15)** א. $A=6$ ב. $y=-\frac{1}{9}x+\frac{1}{6}$ ג. הוכחה. ד. $\left(-1.5,\frac{2}{3}\right)$ ה. $\frac{5}{8}$ יח"ש.

**16)** א. $\min(0.5,1.5)$ ב. 1.75 יח"ש.

**17)** א. $(4,8)$ ב. 48 יח"ש.

**18)** 2.26 יח"ש.

**19)** 0.5 יח"ש.

**20)** $t=16$

**21)** א. i. $x>0$ ii. $(4,0)$ iii. $f'(x)=1+\frac{4}{x\sqrt{x}}>0$ ב. $(16,14)$ ג. 88 יח"ש.

**22)** $b=2$

**23)** $a=9$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**24)** א. שאלת הוכחה. ב. $t=1$

**25)** א. $a=13$ ב. $(5,0)$ ג. i. $S_1=2$ ii. $S_2=\left|-S_1\right|=2$.

**26)** ב. 10 יח"ש.

**27)** א. חיובית: $x>5$, שלילית: $x<5$. ב. עולה: $x>5$, יורדת: $x<5$.
ג. $\min(5,-2)$ ד. שאלת הוכחה. ה. 10 יח"ש.

**28)** א. לא. הנקודה $(3,0)$ היא פיתול, מכיוון שהפונקציה עולה לפניה ואחריה.
ב. שאלת הוכחה. ג. 9 יח"ש.

**29)** א. $f(x):\text{II}$, $f'(x):\text{I}$ ב. 1 יח"ש.

**30)** א. שאלת הוכחה. ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.

**31)** $S=0.192$ יח"ש.

**32)** $b=2$

**33)** שאלת הוכחה.

**34)** $a=\ln 2$

**35)** א. $A(1,-e-2)$ ב. $y=-(e+2)x$ ג. $S=4.744$ יח"ש.

**36)** א. $a=-2$, $f(x)=\frac{e^x+e^{-2x}}{4}$ ב. 1.52

**37)** ב. $C(0,1)$, $A(1,4)$, $B\left(1\frac{1}{3},2.52\right)$ ג. $S=1.03$ יח"ש.

**38)** א. $y'=xe^x$ ב. $a=2$

**39)** $S=\ln 4$ יח"ש.

**40)** $S=4\ln 2-2$ יח"ש.

**41)** א. $a=2$, $g(x)=\frac{1}{x-2}$, $f(x)=\frac{2}{x-1}$ ב. $S=1.76$ יח"ש.

**42)** א. $b=-4$, $a=2$, $f(x)=7+2x-\frac{4}{x}$ ב. $x=2$
ג. $S=6+\ln 256\approx 11.54$ יח"ש.

**43)** א. $f(x)=\frac{4}{x}$ ב. $S=6-4\ln 2$ יח"ש.

**44)** א. $S_2=2\ln k$, $S_1=2\ln k-\ln 16$ ב. $S_2-S_1=\ln 16$ ג. $k=8$

**45)** א. $g(x)=\frac{2}{2x+5}$ ב. $(-2,2)$ ג. $S=\ln 5\frac{1}{3}\approx 1.674$ יח"ש.

**46)** ב. $a=2$

**47)** א. $(1,1)$ ב. $a=5$ ג. $\frac{S_1}{S_2}=5.955$

**48)** א. $(8,0)$, $(0,0)$ ב. $S=16$ יח"ש.

**49)** א. $x>0$ ב. $(2,0)$ ג. $S=18.149$ יח"ש.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**50)** $\frac{S_1}{S_2}=4$

**51)** א. $\left(\frac{1}{8},2\right)$ ב. $a=8$

**52)** א. $a=1$ , $f\left(x\right)=\sqrt[4]{5x+6}-x$ ב. $x\geq -1.2$ ג. $\left(-1.2,1.2\right)$

ד. $y=-\frac{27}{32}x+\frac{27}{16}$ ה. $S=4.56$ יח"ש.

**53)** א. $\left(1,1\right)$ ב. $S=\frac{11}{28}$ יח"ש.

**54)** א. $f\left(x\right)=\left(6-5x\right)^{\frac{1}{5}}$ ב. $S=1\frac{5}{66}$ יח"ש.

**55)** א. $y=-2\frac{15}{16}x-\frac{45}{16}$ ב. $S=4.56$ יח"ש.

**56)** א. כל $x$. ב. $\left(-\frac{1}{8},0\right)$ , $\left(\frac{1}{8},0\right)$ , $\left(0,0\right)$ ג. $k=\left(\frac{3}{8}\right)^{1.5}=0.2296..$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב שטחים ביחס לציר ה-$y$

## שאלות

**1)** חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $y^2=-x$ והישר $y=x+6$.

**2)** חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $x=y^2+2$ והישר $y=x-8$.

## תשובות סופיות

**1)** $20\frac{5}{6}$

**2)** $20\frac{5}{6}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אורך קשת

## שאלות

חשבו את אורך העקום הנתון:

1) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\frac{x^4}{8}+\frac{1}{4x^2}$

2) $(1\le x\le 8)\ ,\ y=x^{2/3}$

3) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\frac{x^5}{15}+\frac{1}{4x^3}$

4) $(0\le x\le 3)\ ,\ y=\frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}$

5) $(0\le x\le 3)\ ,\ y=\frac{1}{3}\sqrt{x}\left(3-x\right)$

6) $(1\le x\le 8)\ ,\ x^{2/3}+y^{2/3}=4$

7) $(0\le y\le 4)\ ,\ x=3y^{3/2}-1$

8) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=\ln x$

9) $(1\le x\le 2)\ ,\ y=x^2$

## תשובות סופיות

1) $\frac{33}{16}$

2) $\frac{1}{9}\left\{\frac{40^{1.5}}{3}-\frac{13^{1.5}}{3}\right\}$

3) $\frac{1097}{480}$

4) $21$

5) $\frac{1}{2}\left\{2\sqrt{3}+\frac{2}{3}3^{1.5}\right\}$

6) $9$

7) $\frac{8}{243}\left\{82^{1.5}-1\right\}$

8) $\left\{\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right|\right\}-\left\{\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|\right\}$

9) $\sqrt{17}-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{17}+4\right)-\frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{5}+2\right)\quad\left(\text{Decimal: }3.16784\right)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מתמטיקה לתלמידי גאוגרפיה ופיתוח סביבתי 2

## פרק 26 - חשבון אינטגרלי - שימושי האינטגרל המסויים (נפח-שטח מעטפת)

תוכן העניינים

1. חישוב נפח גוף-סיבוב ..... 357
2. חישוב שטח מעטפת גוף-סיבוב ..... 360
3. חישוב נפח גוף כללי ..... 361

# חישוב נפח גוף-סיבוב

## שאלות

**1)** השטח הכלוא בין גרף הפונקציות $y=x^2$ ו- $y=2x$ מסתובב סביב ציר ה- $x$.
חשבו את נפח הגוף המתקבל בשתי דרכים:

א. שיטת הדיסקות (cavalieri).

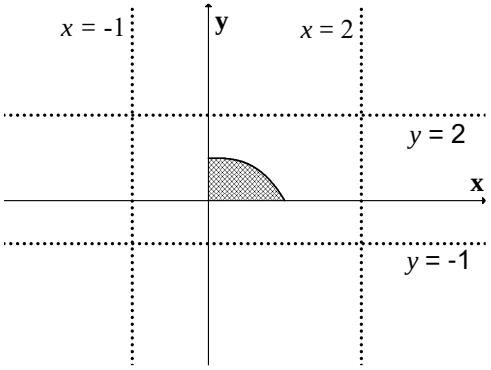
ב. שיטת הקליפות הגליליות.

**2)** השטח הכלוא בין גרף הפונקציות $y=x^2$ ו- $y=2x$ מסתובב סביב ציר ה- $y$.
חשבו את נפח הגוף המתקבל בשתי דרכים:

א. שיטת הדיסקות (cavalieri).

ב. שיטת הקליפות הגליליות.

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)=1-x^3$ והצירים, מסתובב סביב ציר כלשהו.
מצאו את נפח הגוף המתקבל בכל מקרה בשאלות **3-8**:




**3)** ציר ה- $x$.

**4)** הישר $y=-1$.

**5)** הישר $y=2$.

**6)** ציר ה- $y$.

**7)** הישר $x=-1$.

**8)** הישר $x=2$.

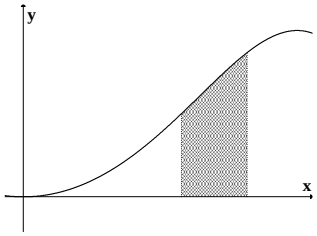
**9)** נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב נפח גליל.

**10)** נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב נפח חרוט.

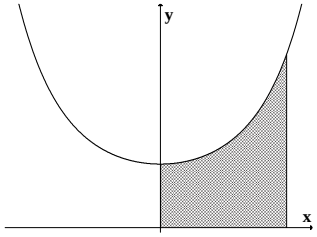
**11)** נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב נפח כדור.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

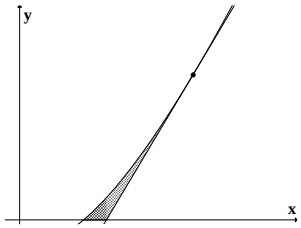
**12)** השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $y=\sin\left(x^2\right)$
והישרים $y=0,\ x=\sqrt{\frac{\pi}{3}},\ x=\sqrt{\frac{\pi}{6}}$,
מסתובב סביב ציר ה- $y$.
מהו נפח הגוף המתקבל?




**13)** השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $y=e^{x^2}$
והישרים $y=0,\ x=0,\ x=1$,
מסתובב סביב ציר ה- $y$.
מהו נפח הגוף המתקבל?




**14)** השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f\left(x\right)=x\ln x$,
המשיק לגרף בנקודה $\left(e,e\right)$ וציר ה- $x$,
מסתובב סביב ציר ה- $x$.
מהו נפח הגוף המתקבל?




**15)** השטח הכלוא בין הגרפים של $f(x)=x^2,\ f(x)=2x+8$, $x=0$
מסתובב סביב הישר $x=4$.
מצאו את נפח גוף הסיבוב שמתקבל.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) א. $\frac{64}{15}\pi$ ב. $\frac{64}{15}\pi$

2) א. $\frac{8}{3}\pi$ ב. $\frac{8}{3}\pi$

3) $\frac{9\pi}{14}$

4) $\frac{15\pi}{7}$

5) $\frac{33\pi}{14}$

6) $\frac{3\pi}{5}$

7) $2.1\pi$

8) $\frac{12\pi}{5}$

9) $V=\pi R^2\cdot H$

10) $V=\frac{\pi R^2\cdot H}{3}$

11) $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

12) $\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$

13) $\pi\left(e-1\right)$

14) $\frac{e^3-4}{54}\pi$

15) $128\pi$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב שטח מעטפת של גוף-סיבוב

## שאלות

**1)** הפונקציה $y=\sqrt{4-x^2}$ , עבור $-1\le x\le 1$ , מסתובבת סביב ציר ה- $x$ .
מהו שטח המעטפת של הגוף שנוצר?

**2)** נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב שטח מעטפת של חרוט.

**3)** נסחו והוכיחו את הנוסחה לחישוב שטח מעטפת של כדור.

**4)** הפונקציה $x=\sqrt{9-y^2}$ , עבור $-2\le y\le 2$ , מסתובבת סביב ציר ה- $y$ .
מהו שטח המעטפת של הגוף שנוצר?

## תשובות סופיות

**1)** $8\pi$

**2)** $S=\pi R\sqrt{H^2+R^2}$

**3)** $S=4\pi R^2$

**4)** $24\pi$

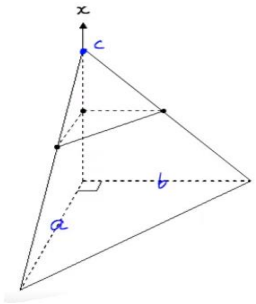

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חישוב נפח גוף כללי

## שאלות

**1)** מצאו נוסחה לחישוב נפח פירמידה ישרה, אשר גובהה $h$ ובסיסה הוא ריבוע שאורך צלעו $a$.

**2)** חשבו את נפחה של פירמידה,
שבסיסה הוא משולש ישר זווית (ראו איור).




## תשובות סופיות

**1)** $V=\frac{a^2h}{3}$

**2)** $\frac{abc}{6}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מתמטיקה לתלמידי גאוגרפיה ופיתוח סביבתי 2

## פרק 27 - שיטת ניוטון רפסון

### תוכן העניינים

1. שיטת ניוטון-רפסון לפתרון מקורב של משוואות ..... 362

# שיטת ניוטון-רפסון לפתרון מקורב של משוואות

## שאלות

פתרו את המשוואות הבאות (שאלה **2** בשיטת ניוטון-רפסון):

**1)** $1+4x^4=8x^3$

**2)** $-4x^3+21x^2-48x+28=0$

## תשובות סופיות

**1)** פתרון מדויק $x=-1$.

**2)** פתרונות מקורבים: $x=1.9672$, $x=0.5576$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©