

מתמטיקה למנהל עסקים



תוכן העניינים

1.	משוואות אלגבריות	1
2.	מבוא לאלגברה	14
3.	חוקי החזקות והשורשים	47
4.	חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים	59
5.	סדרות	67
6.	הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות	91
7.	גבול של פונקציה	110
8.	חישוב נגזרת של פונקציה	121
9.	בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון)	134
10.	חקירת פונקציה	147
11.	חקירת פונקציה ("שאלות מסביב")	164
12.	כלל לופיטל	168
13.	מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה	174
14.	משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי	177

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 1 - משוואות אלגבריות

תוכן העניינים

1. משוואות ממעלה ראשונה..... 1
2. משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון..... 3
3. מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה..... 4
4. משוואה ממעלה שנייה..... 7
5. מערכת משוואות ממעלה שנייה..... 9
6. משוואות דו-ריבועיות..... 10
7. משוואות עם פרמטרים..... 11
8. משוואות עם שורשים..... 12
9. משוואות עם ערך מוחלט..... 13

משוואה ממעלה ראשונה

סיכום כללי

משוואה ממעלה ראשונה היא מהצורה: $ax = b$ (כלומר, החזקה של הנעלם היא 1).

פתרון של משוואה ממעלה ראשונה הוא $x = \frac{b}{a}$ כאשר $a \neq 0$.

שלבי הפתרון הם:

1. ביצוע מכנה משותף (במידה וצריך).
2. פתיחת סוגריים אם ישנם.
3. העברת אגפים וכינוס אברים דומים (בידוד הנעלם באגף אחד והמספרים באגף שני).
4. בידוד הנעלם ומציאתו ע"י חילוק במקדם שלו.

שאלות

1 פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות ממעלה ראשונה):

א. $-7x + 5 + 2x = 4x - 13$ ב. $x - 2 + 5x = 4 - 3x - 5 + 7x + 7$

2 פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פתיחת סוגריים):

א. $3(x - 1) - 4 = 2$ ב. $6(4 - x) - (6 - x) = 3x$

3 פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה מספרי):

א. $\frac{x}{3} - \frac{x}{9} = -4$ ב. $\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}x = x - \frac{7}{15}$

ג. $\frac{2}{5}(x - 3) - \frac{3}{15}(4 - x) = x + 2$

4 פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם נעלם במכנה):

א. $\frac{3}{x} = \frac{1}{x + 2}$ ב. $\frac{x + 5}{3x^2} - \frac{1}{6x} = \frac{1}{x}$

ג. $\frac{1}{4x} + \frac{3}{x} = \frac{13}{2}$

(5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה משותף ע"י פירוק לגורמים):

ב. $\frac{7}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{2-2x} = 0$

א. $\frac{x^2+2}{3x^2+5x} = \frac{3x-1}{9x+15}$

ג. $\frac{3}{(2-x)^2} + \frac{5}{12-3x^2} = 0$

תשובות סופיות

(1) א. $x = 2$ ב. $x = 4$

(2) א. $x = 3$ ב. $x = 2\frac{1}{4}$

(3) א. $x = -18$ ב. $x = -1$ ג. $x = -10$

(4) א. $x = -3$ ב. $x = 2$ ג. $x = \frac{1}{2}$

(5) א. $x = -6$ ב. $x = -7$ ג. $x = -7$

משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון

סיכום כללי

משוואה ממעלה ראשונה

למשוואה ממעלה ראשונה מהצורה: $ax = b$ יתכן פתרון יחיד אם ורק אם $a \neq 0$

מכיוון שניתן לחלק ולכתוב: $x = \frac{b}{a}$.

כאשר $a = 0$ מתקבלת המשוואה $0 \cdot x = b$ ויתכנו שני מצבים:

1. אם $b = 0$ את המשוואה היא $0x = 0$ ויש אינסוף פתרונות המקיימים אותה.
2. אם $b \neq 0$ את המשוואה היא $0x = b \neq 0$ ואין אף ערך של x המקיים אותה.

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

$$3x + 6 - x = 4 + 2x + 2 \quad (2)$$

$$x + 4 = 6 + x \quad (1)$$

$$5x - 3 + x = 4x + 2x - 3 \quad (4)$$

$$6(x - 2) = 2x + 5 + 4x \quad (3)$$

תשובות סופיות

- (1) אף פתרון.
- (2) אינסוף פתרונות.
- (3) אין פתרון.
- (4) אינסוף פתרונות.

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה

סיכום כללי

הגדרה

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (ליניאריות) היא מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

כאשר a_1, b_1, c_1 ו- a_2, b_2, c_2 הם מקדמים מספריים.

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ \frac{x+3}{2} = y + 6 \end{cases}, \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} : \text{דוגמאות למערכות של משוואות}$$

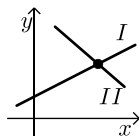
פתרון של מערכת משוואות

פתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור המקיים את כל המשוואות שבמערכת.

הצגה גרפית של מערכת משוואות

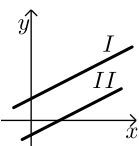
פתרון גרפי של מערכת משוואות הוא נקודת החיתוך של הישרים המייצגים כל משוואה.

יתכנו שלושה מצבים הדדיים בין שני ישרים:



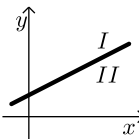
- הישרים נחתכים:

במקרה זה נקודת החיתוך תהיה פתרון המערכת.



- הישרים מקבילים:

במקרה זה לא יהיה פתרון למערכת.



- הישרים מתלכדים:

במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות למערכת המשוואות.

פתרון אלגברי של מערכת משוואות

- פתרון ע"י שיטת ההצבה :

נבודד את אחד הנעלמים ממשוואה אחת ונציב אותו במשוואה השנייה.
נבחר בשיטה זו במקרים בהם קל לבודד נעלם באחת המשוואות.

- פתרון ע"י השוואת מקדמים :

1. כופלים (או מחלקים) משוואה אחת (או שתיהן) במספר השונה מאפס כך שתתקבלנה משוואות שקולות בעלות מקדמים נגדיים או זהים עבור אחד המשתנים.
2. מחברים (או מחסרים) את המשוואות ומקבלים משוואה חדשה עם נעלם אחד.
3. מוצאים את ערך הנעלם מהמשוואה החדשה ומציבים אותו באחת המשוואות המקוריות למציאת ערך הנעלם השני.

הערה

נוח להשתמש בשיטת השוואת המקדמים ע"י כך שמעבירים את המערכת הנתונה למערכת שקולה שבה המשתנים באגף אחד והמספר החופשי באגף השני.

שאלות

- (1) פתור את המשוואות הבאות :

$$\begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} 5x + 2y = 14 \\ 5x + 3y = 23 \end{array} \right. & \text{ב.} \\ \left\{ \begin{array}{l} 4x = 3y - 29 \\ 5y = 9 - 13x \end{array} \right. & \text{ד.} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{l} x + 3y = 5 \\ x - 3y = 3 \end{array} \right. & \text{א.} \\ \left\{ \begin{array}{l} 5y = 2x \\ 4x = 5y + 8 \end{array} \right. & \text{ג.} \end{array}$$

- (2) פתור את המשוואה הבאה :
- $$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ 4x + 8y = 5 \end{array} \right.$$

- (3) פתור את המשוואות הבאות :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x-3}{8} - \frac{x+y}{16} = \frac{y-1}{4} \\ 3(2x-y) - 4x - 11 = 0 \end{array} \right. \text{ב.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3y - x + 2 = 4x + 2 - 3y \\ 2x - 3 - y = 5y - 4x + 3 \end{array} \right. \text{א.}$$

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = 2 \\ \frac{9}{x} - \frac{4}{y} = -7 \end{cases} \quad \text{פתור את המשוואה הבאה:}$$

$$(5) \quad \begin{cases} 5x - 4xy = 22 \\ 6x + xy = -20 \end{cases} \quad \text{פתור את המשוואה הבאה:}$$

תשובות סופיות

$$(1) \quad \begin{matrix} \text{א. } \left(4, \frac{1}{3}\right) & \text{ב. } \left(-\frac{4}{5}, 9\right) & \text{ג. } (4, 1.6) & \text{ד. } (-2, 7) \end{matrix}$$

$$(2) \quad \text{א. אין פתרון.}$$

$$(3) \quad \begin{matrix} \text{א. } (6, 5) & \text{ב. } (7, 1) \end{matrix}$$

$$(4) \quad (-3, 1)$$

$$(5) \quad (-2, 4)$$

משוואה ממעלה שנייה

סיכום כללי

משוואה מהצורה: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), נקראת משוואה ריבועית. פתרונות המשוואה יסומנו ב- x_1 ו- x_2 ויחושבו לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

למשוואה ריבועית יתכנו שלושה סוגים של פתרונות:

- משוואה עם שני פתרונות ממשיים שונים.**
אם מתקבל מספר חיובי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים.
דוגמא: $x^2 + 5x - 4 = 0$.
- משוואה עם פתרון ממשי אחד בלבד.**
אם מתקבל אפס בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד בלבד.
דוגמא: $x^2 + 4x + 4 = 0$.
- משוואה ללא פתרונות ממשיים כלל.**
אם מתקבל מספר שלילי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה לא יהיו פתרונות ממשיים כלל.
דוגמא: $x^2 + x + 4 = 0$.

שאלות

(1) פתור את המשוואות הבאות:

א. $x^2 + 3x - 10 = 0$

ב. $25x^2 - 20x + 4 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות:

א. $2(x-5)^2 - (2x-3)^2 = 10x + 21$

ב. $(2x-1)^2 + x(2x+3) = (x-1)(x-7)$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת b): $32x^2 - 18 = 0$.

(4) פתור את המשוואה הבאה (משוואה חסרת c): $5x^2 - x = 0$.

(5) פתור את המשוואות הבאות:

ב. $\frac{x^2 - 9}{x + 3} + x = x^2 - 18$

א. $\frac{4x+1}{3} - \frac{x+2}{2} = \frac{2}{x}$

ג. $\frac{3}{2x+2} - \frac{2x-5}{2(x-1)^2} - \frac{4}{1-x^2} = 0$

תשובות סופיות

(1) א. $x_1 = 2, x_2 = -5$ ב. $x = \frac{2}{5}$

(2) א. $x_1 = 1, x_2 = -10$ ב. $x_1 = 0.6, x_2 = -2$

(3) $x = \pm \frac{3}{4}$

(4) $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{5}$

(5) א. $x_1 = 2, x_2 = -1.2$ ב. $x = 5, x \neq -3$ ג. $x_1 = 0, x_2 = -5$

מערכת משוואות ממעלה שנייה

סיכום כללי

מערכת משוואות ריבועיות מיוחסת למערכת של שתי משוואות (לפחות), שאחת מהן מכילה את אחד מהנעלמים בריבוע. למערכת משוואות ריבועיות יכולים להתקבל עד 4 פתרונות שונים. יש לפתור את המערכת לפי הטכניקות הרגילות של בידוד והצבה או השוואת מקדמים.

שאלות

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 16 \\ 5x^2 - 3y^2 = 17 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{4}{y} - \frac{1}{x} = -19 \end{cases} \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$(2, 4), (4, 2) \quad (4)$$

$$(\pm 2, \pm 1) \quad (5)$$

$$\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right) \quad (6)$$

משוואות דו-ריבועיות:

סיכום כללי:

משוואה דו-ריבועית היא משוואה מהצורה: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ כאשר הנעלם הוא x .
פתרון המשוואה יבוצע ע"י מעבר לפרמטר: $x^2 = t \rightarrow at^2 + bt + c = 0$ ומציאתו.
לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה ולמצוא את ערכי x .

ניתן להביא משוואות לצורה זו ולהגדיר ביטוי המופיע בחזקות 2 ו-4 כגון: $(x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1) - 2 = 0$ באמצעות פרמטר: $t = x^2 - 1$
ובכך לפתור משוואה: $t^2 + 3t - 2 = 0$ ולהחזיר את ההצבה עבור מציאת x .
דרך הפתרון תקפה לכל משוואה בה הנעלם מופיע בחזקות כפולות כגון 3 ו-6, או 4 ו-8.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$5x^4 + 3x^2 - 8 = 0 \quad (1)$$

$$x^2(x^2 + 1) = 10(3x^2 - 10) \quad (2)$$

$$x^3 + 4 = \frac{32}{x^3} \quad (3)$$

$$x - 9\sqrt{x} + 14 = 0 \quad (4)$$

תשובות סופיות:

$$x = \pm 1 \quad (1)$$

$$x = \pm 2, \pm 5 \quad (2)$$

$$x = -2, \sqrt[3]{4} \quad (3)$$

$$x_1 = 4, x_2 = 49 \quad (4)$$

משוואות עם פרמטרים

סיכום כללי

משוואה עם פרמטר הינה משוואה שמכילה שני סוגי גדלים – משתנים ופרמטרים. את המשתנים מקובל לסמן באותיות x, y ו- z , ואת הפרמטרים בשאר האותיות. פתרון המשוואה יתקבל על ידי בידוד המשתנה, כך שיבוטא באמצעות הפרמטר/ים שבמשוואה, למשל פתרון המשוואה: $mx = 4$ (כאשר x הוא הנעלם ו- m הוא פרמטר)

הוא $x = \frac{4}{m}$, אשר מבוטא באמצעות הפרמטר m .

בכתיבת פתרון של משוואה עם פרמטרים יש לציין את תחום ההגדרה של הפרמטר עבורו הפתרון הוא בעל משמעות. בדוגמא הנ"ל, תחום ההגדרה הוא $m \neq 0$.

שאלות

(1) פתור את המשוואות הבאות:

$$\frac{m+1}{x-1} = \frac{m-1}{x+1} \quad \text{ב.}$$

$$\text{א. } 3x - b = (b+1)x - 6$$

(2) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} x + my = 1 \\ x + y = m \end{cases}$.

(3) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

$$\text{ב. } x^2 + m(x+10) = 2m^2 - 5x$$

$$\text{א. } x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$$

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } x = \frac{b-6}{2-b}, b \neq 2 \quad \text{ב. } x = -m$$

$$(2) \quad m \neq 1, (m+1, -1)$$

$$(3) \quad \text{א. } x = m+1, m-1 \quad \text{ב. } x = m-5, -2m$$

משוואות עם שורשים

סיכום כללי

פתרון משוואה מהצורה $\sqrt{x} = a$, יתקבל על ידי העלאה בריבוע של שני אגפי-
המשוואה, באופן הבא: $x = a^2 \rightarrow (\sqrt{x})^2 = (a)^2$.

הערות

- (1) יש לזכור בעת העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה יש לבדוק את כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבתם במשוואה המקורית.
- (2) למשוואה מהצורה $\sqrt{x} = a$, שבה $a < 0$, אין פתרון.
- (3) יש לסדר תחילה משוואות שבהן הביטוי עם שורש אינו מבודד.
- (4) במשוואות שבהן יותר מביטוי אחד עם שורש, יש לבודד תחילה את אחד הביטויים, להעלות בריבוע ולאחר מכן לחזור על התהליך ולבצע העלאה בריבוע פעם נוספת.

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| (1) $\sqrt{2x+5} = 7$ | (2) $\sqrt{x+2} = x$ |
| (3) $\sqrt{3x+1} + x = 13$ | (4) $\sqrt{2x+7} + 4 = x$ |
| (5) $\sqrt{x-1} + 3 = x$ | (6) $\sqrt{10x+6} + 9 = x$ |
| (7) $\sqrt{x+6} - 2 = 2x$ | |

תשובות סופיות

- | | |
|----------------|--------------|
| (1) $x = 22$ | (2) $x = 2$ |
| (3) $x = 8$ | (4) $x = 9$ |
| (5) $x = 5$ | (6) $x = 25$ |
| (7) $x = 0.25$ | |

משוואות עם ערך מוחלט

סיכום כללי

הגדרה

ערך מוחלט הינו המרחק של מספר מ-0 ומוגדר באופן הבא: $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$.

משוואה עם ערך מוחלט

משוואה עם ערך מוחלט היא מהצורה: $|x| = a$.
 כדי לפתור משוואה עם ערכים מוחלטים יש למצוא את נקודות האפס של כל ערך מוחלט (קרי: הנקודות בהן הביטוי שבתוך הערך המוחלט מתאפס), ולפצל את המשוואה הנתונה לתחומים עבור כל תחום.

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

$$|3x+14|=7 \quad (1)$$

$$|12-x|=3x \quad (2)$$

$$2x-|8-x|=10 \quad (3)$$

$$|x+2|+6=|2x-4| \quad (4)$$

תשובות סופיות

$$(1) \quad x = -\frac{7}{3}, -7 \quad (2) \quad x = 3 \quad (3) \quad x = 6 \quad (4) \quad x = 12, -1\frac{1}{3}$$

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 2 - מבוא לאלגברה

תוכן העניינים

14	1. מספרים מכוונים
17	2. חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים
19	3. סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים
20	4. שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים
24	5. כפל וחילוק שברים
25	6. חיבור וחסור שברים
27	7. בעיות יסודיות באחוזים
28	8. חזרה על תבניות מספר
29	9. כינוס איברים
30	10. פישוט ביטויים על ידי פתיחת סוגריים
32	11. פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר
34	12. פירוק לגורמים של ביטויים אלגבריים
36	13. פירוק הטרינום
38	14. שברים אלגבריים
41	15. כפל וחילוק של שברים אלגבריים
42	16. חיבור וחסור של שברים אלגבריים
45	17. שברים כפולים

מספרים מכוונים

סיכום כללי

מספרים מכוונים הם מספרים שיכולים לקבל סימן חיובי או שלילי, כגון:

- בקניון גדול ישנן קומות 1, 2, 3, 4, וכן חניונים הממוקמים בקומות 1-, 2-, ו-3-.
- גובה פני הים מוגדר להיות 0 מטרים. העיר חיפה נמצאת כ-103 מטרים מעל פני הים בעוד שים המלח נמצא בגובה 426- מטרים.

כללים

- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים זהים, מחברים את המספרים עצמם והסימן נשאר.
- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים מנוגדים, מחסירים את המספרים זה מזה (הקטן מהגדול) וסימן התוצאה כסימן המספר הגדול מביניהם.
- כפל וחילוק יתבצע בשני חלקים:
 - ביצוע הפעולה על המספרים עצמם.
 - קביעת הסימן של התוצאה באופן הבא:
 - כפל או חילוק של שני מספרים בעלי אותו סימן - התוצאה תהיה חיובית.
 - כפל או חילוק של שני מספרים שונים סימן - התוצאה תהיה שלילית.

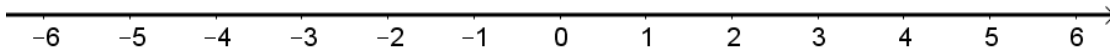
הערה

אם יש רצף של מכפלות (או חילוקים), סימן התוצאה תלוי במספר הפעמים שבהם מופיע סימן שלילי (-). אם הסימן מופיע מספר זוגי של פעמים התוצאה חיובית, ואם הוא מופיע מספר אי-זוגי של פעמים אזי התוצאה שלילית.

שאלות

(1) סמנו את המספרים הבאים על ציר המספרים בהתאמה:

$$-3\frac{1}{2}, 4, 1\frac{1}{3}, -5, -\frac{1}{2}, 2, 0, \frac{1}{2}, -2$$



(2) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

ב. $5-8-12+17$

א. $5+7-23+1$

(3) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

ב. $2 \cdot 3 \cdot 3$

א. $(-2) \cdot (-3) \cdot (-3)$

ד. $(-2) \cdot (-3) \cdot 3$

ג. $(-2) \cdot 3 \cdot (-3)$

ו. $(-2) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-2)$

ה. $2 \cdot 3 \cdot (-3)$

ח. $1 \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot 2$

ז. $(-1) \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot 2$

(4) מהו הסימן של תוצאת המכפלה בכל מקרה:

א. $(-2) \cdot (-4) \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot (-6) \cdot (-5)$

ב. $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot 6 \cdot (-5)$

ג. $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot (-6) \cdot (-5)$

ד. $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot 6 \cdot 5$

(5) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

ב. $\frac{42}{-6}$

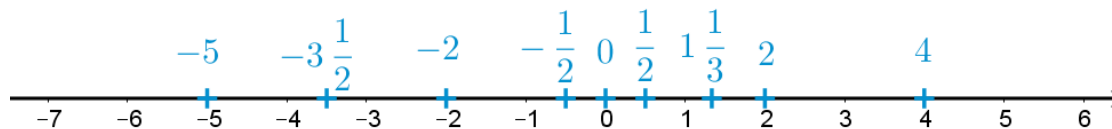
א. $\frac{-60}{12}$

ד. $\frac{-12}{-3}$

ג. $\frac{32}{-4}$

תשובות סופיות

(1) להלן מערכת הצירים:



(2) א. -10 ב. 2

(3) א. -18 ב. 18 ג. 18 ד. 18

ה. -18 ו. 36 ז. -16 ח. 16

(4) א. + ב. + ג. - ד. -

(5) א. -5 ב. -7 ג. -8 ד. 4

חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים

סיכום כללי

הגדרה:

פעולת החזקה היא צורה מקוצרת שמייצגת פעולת כפל של אותו מספר בעצמו מספר פעמים. סימון החזקה הוא באופן הבא:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

כאשר a נקרא הבסיס ו- n נקראת החזקה.

הערות

- כאשר הבסיס חיובי, התוצאה תמיד תהיה חיובית ללא קשר האם החזקה היא זוגית או אי-זוגית.
- כאשר הבסיס שלילי, התוצאה תהיה חיובית אם החזקה היא זוגית ושלילית אם החזקה היא אי-זוגית.

הגדרה

פעולת השורש היא הפוכה לפעולת החזקה והיא מאפשרת למצוא את בסיס החזקה. סימון השורש הוא באופן הבא:

$$\sqrt[n]{a}$$

כאשר a נקרא הבסיס ו- n נקרא סדר השורש.

הערות

- שורש למספר חיובי יכול להיות מסדר זוגי או אי-זוגי.
- שורש למספר שלילי יכול להיות מסדר אי-זוגי בלבד.

שאלות

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- | | |
|--------------|---------------|
| א. 3^2 | ב. 3^3 |
| ג. $(-3)^3$ | ד. $(-2)^3$ |
| ה. 4^3 | ו. 3^4 |
| ז. $(-5)^3$ | ח. 10^4 |
| ט. $-(-3)^4$ | י. -5^4 |
| יא. -4^3 | יב. $-(-2)^6$ |

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- | | |
|--------------------|----------------------|
| א. $\sqrt[3]{-27}$ | ב. $\sqrt[4]{625}$ |
| ג. $\sqrt[4]{-16}$ | ד. $\sqrt[5]{-32}$ |
| ה. $-\sqrt[4]{81}$ | ו. $-\sqrt[3]{1000}$ |

תשובות סופיות

- | | | | | | |
|-----------|----------|-------------|---------|---------|---------|
| (1) א. 9 | ב. 27 | ג. -27 | ד. -8 | ה. 64 | ו. 81 |
| ז. -125 | ח. 10000 | ט. -81 | י. -625 | יא. -64 | יב. -64 |
| (2) א. -3 | ב. 5 | ג. לא מוגדר | ד. -2 | ה. -3 | ו. -10 |

סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים

סיכום כללי

סדר פעולות חשבון

- פעולות כפל וחילוק קודמות לפעולות חיבור וחיסור.
- פעולות חזקה ושורש קודמות לפעולות כפל וחילוק.
- סוגריים קודמים לכל.

שאלות

חשב את ערכי הביטויים הבאים :

$$\sqrt{81} + 3 \cdot 2^3 - 40 : 8 \quad (1)$$

$$(-3)^2 : 9 - 2 \cdot (-4^2) \quad (2)$$

$$\sqrt{144} - 20 : 4 + 3 \cdot (-2)^2 \quad (3)$$

$$(-3)^4 : (-9) - 5 \cdot (-2)^3 \quad (4)$$

$$[6 \cdot (-1)^4 - 10 \cdot (-1)^3] \cdot (-1)^5 \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$28 \quad (1)$$

$$33 \quad (2)$$

$$19 \quad (3)$$

$$31 \quad (4)$$

$$-16 \quad (5)$$

שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים:

סיכום כללי:

הגדרה כללית:

השבר הוא חלק מתוך השלם. מקובל לסמן שבר באמצעות קו שבר המפריד בין המונה (החלק העליון) למכנה (החלק התחתון) באופן הבא:

$$\frac{\text{מונה}}{\text{מכנה}}$$

ישנם שלושה סוגים אפשריים של שברים:

- שבר פשוט – בו המונה קטן מהמכנה (ולכן תמיד יהיה קטן מ-1).
- שבר מדומה – בו המונה גדול מהמכנה (יהיה גדול בערכו מ-1).
- שבר מעורב – המכיל שילוב של מספר שלם ושבר כלשהו.

שבר עשרוני:

שבר שהמכנה שלו הוא מספר המהווה כפולות של 10 כגון: 10, 100, 1000 ... שבר עשרוני מיוצג ע"י נקודה עשרונית אשר מבדילה בין החלק שלם לחלק השברי באופן הבא:

$$\underbrace{XX}_{\text{שברים שלמים}}.\underbrace{YYY}_{\text{שברים שלמים}}$$

כדי להמיר שבר פשוט לשבר עשרוני המכנה צריך להיות בכפולות של 10.

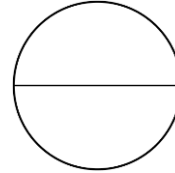
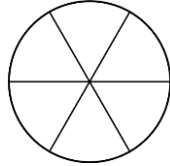
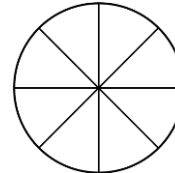
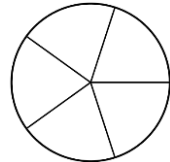
אחוזים - הגדרה:

השבר $\frac{1}{100}$ מוגדר להיות אחוז אחד ומסומן באופן הבא: 1%.

באופן זה השבר $\frac{45}{100}$ יכתב: 45%, והשבר $\frac{145}{100}$ יכתב: 145%.

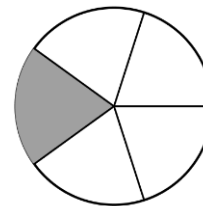
שאלות:

(1) צבע את החלקים המתאימים בכל עיגול:

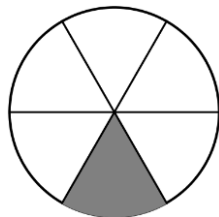
א. צבע $\frac{1}{2}$ מהעיגולב. צבע $\frac{1}{6}$ מהעיגולג. צבע $\frac{3}{8}$ מהעיגולד. צבע $\frac{2}{5}$ מהעיגול

(2) כתוב את השבר המתאים לחלקים הצבועים בכל אחד מהמקרים הבאים:

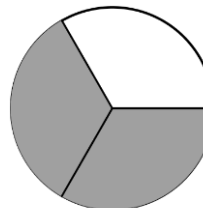
א. שבר:



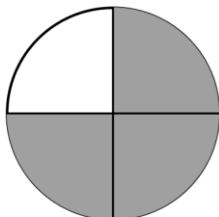
ב. שבר:



ג. שבר:



ד. שבר:



(3) הרחב את השברים הבאים:

א. השבר $\frac{1}{2}$ לפי בסיס 4, לפי בסיס 18, לפי בסיס 40.ב. השבר $\frac{3}{5}$ לפי בסיס 10, לפי בסיס 25, לפי בסיס 60.ג. השבר $\frac{5}{8}$ לפי בסיס 16, לפי בסיס 32, לפי בסיס 88.

(4) צמצם את השברים הבאים ככל הניתן :

א. $\frac{25}{30}$	ב. $\frac{10}{30}$	ג. $\frac{6}{24}$	ד. $\frac{4}{20}$
ה. $\frac{35}{56}$	ו. $\frac{24}{42}$	ז. $\frac{36}{48}$	ח. $\frac{33}{121}$

(5) המר את השברים המדומים הבאים לשברים מעורבים :

א. $-\frac{20}{3}$	ב. $\frac{19}{4}$	ג. $\frac{12}{5}$	ד. $\frac{22}{5}$
ה. $-\frac{34}{6}$	ו. $-\frac{50}{7}$	ז. $\frac{47}{8}$	ח. $\frac{60}{9}$

(6) המר את השברים המעורבים הבאים לשברים מדומים :

א. $1\frac{2}{3}$	ב. $3\frac{5}{6}$	ג. $4\frac{1}{2}$	ד. $6\frac{1}{4}$
ה. $11\frac{3}{4}$	ו. $-2\frac{5}{8}$	ז. $-6\frac{2}{7}$	ח. $12\frac{7}{9}$

תשובות סופיות:

(1) תשובה מודגמת בסרטון.

(2) א. $\frac{1}{5}$ ב. $\frac{1}{6}$ ג. $\frac{2}{3}$ ד. $\frac{3}{4}$

(3) א. $\frac{4}{8}, \frac{18}{36}, \frac{40}{80}$ ב. $\frac{30}{50}, \frac{75}{125}, \frac{180}{300}$ ג. $\frac{80}{128}, \frac{160}{256}, \frac{440}{700}$

(4) א. $\frac{5}{6}$ ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. $\frac{1}{5}$ ה. $\frac{5}{8}$ ו. $\frac{4}{7}$

ז. $\frac{3}{4}$ ח. $\frac{3}{11}$

(5) א. $-6\frac{2}{3}$ ב. $4\frac{3}{4}$ ג. $2\frac{2}{5}$ ד. $4\frac{2}{5}$ ה. $-5\frac{4}{6}$ ו. $-7\frac{1}{7}$

ז. $5\frac{7}{8}$ ח. $6\frac{2}{3}$

(6) א. $\frac{5}{3}$ ב. $\frac{23}{6}$ ג. $\frac{9}{2}$ ד. $\frac{25}{4}$ ה. $\frac{47}{4}$ ו. $-\frac{21}{8}$

ז. $-\frac{44}{7}$ ח. $\frac{115}{9}$

כפל וחילוק שברים

סיכום כללי

- כשכופלים שני שברים יש לכפול מונה במונה ומכנה במכנה.
 - במידה ומדובר במספר שלם הכופל שבר, יש לכפול אותו במונה.
 - במידה ומדובר בשברים מעורבים, יש להפוך אותם תחילה לשברים מדומים ורק אז לבצע את פעולת הכפל.
- כדי לחלק שברים, יש לכפול את השבר הראשון בהופכי של השבר השני.
 - הופכי של שבר מסוים מתקבל ע"י החלפת המונה במכנה.

שאלות

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4}$	ב. $\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6}$	ג. $\frac{2}{9} \cdot \frac{8}{10}$
ד. $3 \cdot \frac{4}{5}$	ה. $6 \cdot \frac{2}{3}$	ו. $\frac{12}{25} \cdot 5$

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{2}{5} : \frac{4}{9}$	ב. $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$	ג. $\frac{3}{25} : \frac{7}{10}$
--------------------------------	--------------------------------	----------------------------------

תשובות סופיות

א. $\frac{9}{20}$	ב. $\frac{5}{21}$	ג. $\frac{8}{45}$	ד. $2\frac{2}{5}$	ה. 4	ו. $2\frac{2}{5}$
ז. $3\frac{3}{5}$	ח. $15\frac{2}{5}$	ט. $8\frac{8}{35}$	י. $\frac{64}{125}$	יא. $\frac{4}{125}$	יב. $12\frac{4}{5}$
א. $\frac{9}{10}$	ב. $1\frac{1}{2}$	ג. $\frac{6}{35}$	ד. 36	ה. 15	ו. $\frac{5}{18}$
ז. $\frac{2}{25}$	ח. $\frac{2}{3}$	ט. 2			

חיבור וחיסור שברים

סיכום כללי

כפולה משותפת מינימלית

בהינתן זוג מספרים a ו- b , המספר הקטן ביותר אשר תוצאת חלוקתו במספרים הנ"ל מניבה מספר שלם נקרא הכפולה המינימלית שלהם.

הערות

- כפולה מינימלית יכולה להיות גם עבור יותר משני מספרים.
- הכפולה המינימלית תהיה המכנה המשותף בעת פעולות חיבור וחיסור של שברים.

כללי החיבור והחיסור של שברים

- חיבור וחיסור של שברים בעלי אותו המכנה מתבצע על המספרים שבמונה בלבד כאשר המכנה נשאר כפי שהוא.
 דוגמא: $\frac{2}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2-3}{7} = \frac{-1}{7}$, $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$
- חיבור וחיסור של שברים בעלי מכנים שונים מתבצע ע"י פעולת מכנה משותף.
 דוגמא: $\frac{1}{4} - \frac{5}{6} = \frac{3}{12} - \frac{10}{12} = \frac{3-10}{12} = -\frac{7}{12}$, $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{6+5}{15} = \frac{11}{15}$
- חיבור של שבר עם מספר שלם יתבצע באופן ישיר.
 דוגמא: $3 + \frac{1}{4} = 3\frac{1}{4}$
 חיסור של שבר ממספר שלם יתבצע ע"י הוצאת שלמים מהשבר.
 דוגמא: $3 - \frac{1}{4} = 2\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = 2\frac{3}{4}$
 דרך נוספת היא ע"י העברת המספר השלם לשבר מדומה: $3 - \frac{1}{4} = \frac{12}{4} - \frac{1}{4} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$

- חיבור וחיסור של שברים מעורבים יתבצע ע"י העברתם לשברים מדומים תחילה.

$$\text{דוגמא: } 3\frac{2}{5} + 2\frac{1}{6} = \frac{17}{5} + \frac{13}{6} = \frac{17 \cdot 6}{30} + \frac{13 \cdot 5}{30} = \frac{102 + 65}{30} = \frac{167}{30} = 5\frac{17}{30}$$

ניתן גם לפצל ולבצע את פעולת החיבור (או החיסור) של המספרים השלמים תחילה, ולאחר מכן לבצע את הפעולה עבור השברים.

$$\text{דוגמא: } 2\frac{3}{4} - 5\frac{1}{3} = (2 - 5) + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) = -3 + \left(\frac{9}{12} - \frac{4}{12}\right) = -3 + \frac{5}{12} = -2\frac{7}{12}$$

שאלות

- (1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2} + \frac{4}{3}$	ב. $\frac{3}{5} + \frac{1}{10}$
ג. $\frac{4}{6} - \frac{1}{12}$	ד. $\frac{3}{6} - \frac{5}{8}$
ה. $\frac{5}{4} + \frac{7}{2} + \frac{2}{8}$	ו. $\frac{7}{3} + \frac{6}{5} + \frac{3}{10}$
ז. $\frac{4}{7} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$	ח. $\frac{1}{4} + \frac{2}{8} - \frac{3}{5}$

- (2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2\frac{1}{4} + \frac{5}{6}$	ב. $2\frac{1}{4} - \frac{5}{6}$
ג. $3\frac{2}{3} + 4\frac{1}{4}$	ד. $5\frac{7}{8} - 6\frac{1}{2}$

תשובות סופיות

א. $1\frac{5}{6}$	ב. $\frac{7}{10}$	ג. $\frac{7}{12}$	ד. $-\frac{1}{8}$	ה. 5	ו. $3\frac{5}{6}$
ז. $\frac{19}{21}$	ח. $-\frac{1}{10}$				
א. $3\frac{1}{12}$	ב. $1\frac{5}{12}$	ג. $7\frac{11}{12}$	ד. $-\frac{5}{8}$		

בעיות יסודיות באחוזים

סיכום כללי

נוסחה לביצוע חישובים עם אחוזים :

$$\text{תמורת האחוז} = \text{שלם} \cdot \frac{\text{אחוז}}{100}$$

למשל, בהינתן גודל שלם 120, אשר יש לחשב כמה הם 40 אחוזים ממנו, נקבל לפי הנוסחה: $48 = 120 \cdot \frac{40}{100}$, כלומר: **תמורת האחוז 40 מהגודל 120 היא 48.**

שאלות

- (1) בכיתה 30 תלמידים. 60% מתוכם בנות.
 - א. כמה בנות בכיתה?
 - ב. כמה בנים בכיתה?
- (2) מחיר בגד-ים הוא 300 ₪. בסוף העונה הוא נמכר ב-20% הנחה.
 - א. מהו מחירו בסוף העונה?
 - ב. מה גודל ההנחה?
- (3) מחיר ליטר דלק הוא 5 ₪ לליטר. בחנוכה מוזל מחירו ב-7%. בפסח מועלה מחירו ב-7%. מה מחירו בסוף השנה?

תשובות סופיות

- | | |
|-----------------|-------------|
| (1) א. 18 בנות. | ב. 12 בנים. |
| (2) א. 240 ₪ | ב. 60 ₪ |
| (3) 4.9755 ₪ | |

חזרה על תבניות מספר

סיכום כללי

משתנה הוא סמל המתאר כמות או גודל כלשהם אשר אינם ידועים ועשויים להשתנות.

תבנית מספר היא ביטוי אלגברי אשר מכיל משתנה (או משתנים).

ניתן להציב במשתנים ערכים מספריים שונים ולקבל תוצאות שונות עבור תבנית המספר עצמה.

במתמטיקה, תפקידה של תבנית המספר הוא להביע גודל מסוים אשר לערכו יש משמעויות שונות. דוגמא לכך היא: קנייה של x פריטים, אשר כל אחד עולה 3 שקלים, יניבו תבנית מספר של $3 \cdot x$ אשר מייצגת את הסכום הכולל של הפריטים.

שאלות

1) הצב את הערכים המספריים במקום הפרמטרים וחשב את ערך תבנית המספר:

א. $a^2 + 2ab + b^2$ עבור: $a = 3, b = -5$.

ב. $-x^3 - 2xy + y^4$ עבור: $x = -2, y = -1$.

ג. $\frac{4a^2 - 3b}{c}$ עבור: $a = -1, b = 2, c = -4$.

תשובות סופיות

1) א. 4 ג. 5 ה. $\frac{1}{2}$

כינוס איברים

סיכום כללי

תבניות אלגבריות יכולות להכיל איברים רבים ולכן נרצה לכנס אותם על מנת לפשט את התבנית. כדי לכנס איברים ניקח את כל קבוצת האיברים מאותו הסוג ונחבר את המקדמים שלהם. דוגמא: $3x + 6x - 5x = (3 + 6 - 5)x = 4x$.
 איברים שונים נבדלים זה מזה בערך התבנית האלגברית שלהם.
 כך: $3x$ שונה מ- $4y$ ושונה מ- $2xy$. באותו האופן, האיברים x ו- x^2 הם שונים.

שאלות

כנס איברים דומים:

$$-10xy + 15xy + xy - 2yx \quad (1)$$

$$8a^2 + 10a - 5a^2 - 11a + a^2 \quad (2)$$

$$3xy + y - 30y + 6yx - 7y \quad (3)$$

$$mn + n - 5m + 5nm - 14n + 3m \quad (4)$$

$$2 - x^3 - 3 - 4x^2 + 2x + x^3 + x^2 - 2 \quad (5)$$

$$2y^2 - 4x^3y^2 - 10y^2 - x^3y^2 \quad (6)$$

תשובות סופיות

$$4xy \quad (1)$$

$$4a^2 - a \quad (2)$$

$$9xy - 36y \quad (3)$$

$$-13n - 2m + 6mn \quad (4)$$

$$-3x^2 + 2x - 3 \quad (5)$$

$$-8y^2 - 5x^3y^2 \quad (6)$$

פישוט ביטויים על ידי פתיחת סוגריים

סיכום כללי

בעת ביצוע כפל בין שני איברים יש לכפול את המקדמים בנפרד ואת האותיות (משתנים) בנפרד.

כלל הפילוג:

$$a(b+c) = ab+ac \quad \bullet$$

$$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd \quad \bullet$$

שאלות

(1) פשט את הביטויים הבאים:

$$\text{א. } 8m^2 \cdot 4m^3 \quad \text{ב. } 3a^3 \cdot (-2a^2) \quad \text{ג. } -b \cdot 4b^2 \cdot \frac{b^2}{2}$$

$$\text{ד. } a \cdot 3b \quad \text{ה. } 4a^2 \cdot 7b^2 \quad \text{ו. } ab \cdot (-2a^2b)$$

(2) פשט את הביטויים הבאים ע"י פתיחת סוגריים:

$$\text{א. } 2(3x-4) \quad \text{ב. } 2(-3x^2+5x-1)$$

$$\text{ג. } (7x-2)4 \quad \text{ד. } (1-2x)(-2)$$

$$\text{ה. } 3t^2(4t-t^2+6) \quad \text{ו. } \frac{5}{2}(4d^4-3d)d$$

(3) פשט את הביטויים הבאים:

$$\text{א. } 5x+(3x-2)+(-4-2x) \quad \text{ב. } 7x+(-4x-5)+3x+(-1+7x)$$

$$\text{ג. } 8-(2x-5)-(4x+2) \quad \text{ד. } -6x-(-3x-1)-(-7-4x)+1$$

$$\text{ה. } (3-2x^2+4)2+3(x-x^2)-6(7-5x)+4x^2$$

(4) פשט את הביטויים הבאים :

א. $(x-1)(x+2)$

ב. $(x+3)(x-7)$

ג. $(3-x)(x+4)$

ד. $(3x+4)(5x+1)$

ה. $3(4x+1)(2x-3)$

ו. $-2(3x-1)(5-2x)$

תשובות סופיות

(1) א. $32m^5$ ב. $-6a^5$ ג. $-2b^5$ ד. $3ab$ ה. $28a^2b^2$

ו. $-2a^3b^2$

(2) א. $6x-8$ ב. $-6x^2+10x-2$ ג. $28x-8$ ד. $-2+4x$

ה. $12t^3-3t^4+18t^2$ ו. $10d^5-7.5d^2$

(3) א. $6x-6$ ב. $13x-6$ ג. $-6x+11$ ד. $x+9$ ה. $-3x^2+33x-28$

(4) א. x^2+x-2 ב. $x^2-4x-21$ ג. $-x^2-x+12$

ד. $15x^2+23x+4$ ה. $24x^2-30x-9$ ו. $12x^2-34x+10$

פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר

סיכום כללי

- נוסחת ריבוע של סכום/הפרש: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
- נוסחה להפרש ריבועים: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

שאלות

(1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+5)^2$	ב. $(x+2)^2$	ג. $(4x+5)^2$
ד. $(6x+2)^2$	ה. $(7x+y)^2$	ו. $(5x+2y)^2$
ז. $(x^2+7)^2$	ח. $(x^2+y^2)^2$	ט. $(x^3+2y^2x)^2$

(2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-6)^2$	ב. $(x-2)^2$	ג. $(5-x)^2$
ד. $(6x-1)^2$	ה. $\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2$	ו. $\left(\frac{1}{3}x-5\right)^2$
ז. $(3m-2n)^2$	ח. $\left(x^2-\frac{3}{5}y\right)^2$	ט. $(x^2y^2-7)^2$

(3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-5)(x+5)$	ב. $(3+x)(x-3)$
ג. $(3x-1)(3x+1)$	ד. $(5-7x)(7x+5)$
ה. $\left(\frac{1}{2}x+6\right)\left(\frac{1}{2}x-6\right)$	ו. $\left(5y-\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{1}{4}x+5y\right)$
ז. $(x^2+y)(x^2-y)$	ח. $(3a^2b^3-4)(3a^2b^3+4)$

(4) פשט את הביטויים הבאים :

א. $(x+1)(x+2)-3x$ ב. $(x-5)(5x-1)+2(4+x)$
 ג. $x(2x-1)(2x+1)-4x^2(x+1)$ ד. $-(y+3x)(y-3x)+(y-3x)^2$
 ה. $x(x+3)-(6+x)(6x+2)-(x+2)^2$
 ו. $-5(x+7)(x-7)+3(2x+5)(5-x)+(x+1)^2$

תשובות סופיות

(1) א. $x^2+10x+25$ ב. x^2+4x+4 ג. $16x^2+40x+25$
 ד. $36x^2+24x+4$ ה. $49x^2+14xy+y^2$ ו. $25x^2+20xy+4y^2$
 ז. $x^4+14x+49$ ח. $x^4+2x^2y^2+y^4$ ט. $x^6+4x^4y^2+4y^4x^2$
 (2) א. $x^2-12x+36$ ב. x^2-4x+4 ג. $25-10x+x^2$
 ד. $36x^2-12x+1$ ה. $9x^2-3x+\frac{1}{4}$ ו. $\frac{1}{9}x^2-3\frac{1}{3}x+25$
 ז. $9m^2-12mn+4n^2$ ח. $x^4-\frac{6}{5}x^2y+\frac{9}{25}y^2$ ט. $x^4y^4-14x^2y^2+49$
 (3) א. $9x^2-1$ ב. $25-49x^2$ ג. $\frac{1}{4}x^2-36$ ד. $25y^2-\frac{1}{16}x^2$
 (4) א. $-4x^2-x$ ב. $18x^2-6xy$ ג. $-6x^2-39x-16$
 ד. $-10x^2+17x+321$

פירוק לגורמים של ביטויים אלגבריים

סיכום כללי

פירוק לגורמים הוא פעולה הפוכה לפתיחת סוגריים – נרצה להוציא את הגורמים המשותפים לאיברים מחוץ לסוגריים.

- פירוק לגורמים ע"י הוצאת איבר אחד משותף:

○ הוצאת מספר משותף: $2x - 8 = 2(x - 4)$

○ הוצאת אות משותפת: $x^2 - 12x = x(x - 12)$

○ הוצאת מספר ואות יחד: $3x^2 - 21x = 3x(x - 7)$

- פירוק לגורמים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר:

○ נוסחת הבינום של ניוטון: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

○ נוסחה להפרש ריבועים: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

שאלות

- (1) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $2x^2 - 8x$ ב. $3t^2 + 12t$

ג. $5n^3 - 20n^2 + 50n$ ד. $8y^2 + 6y^3 - 2y^4$

ה. $4x^2y^2 + 16x^2y - 20xy^2$ ו. $27mn - 3n^2m + 9n^3m$

- (2) פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר:

א. $x^2 + 10x + 25$ ב. $x^2 + 12x + 36$

ג. $y^2 - 18y + 81$ ד. $y^2 - 22y + 121$

ה. $4x^2 + 4x + 1$ ו. $16y^2 - 8y + 1$

ז. $9x^2 - 24x + 16$ ח. $25x^2 + 70x + 49$

(3) פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר :

א. $r^2 - 25$	ב. $x^2 - 81$
ג. $25y^2 - 49$	ד. $121x^2 - 1$
ה. $x^2y^2 - 4$	ו. $9y^4 - 169x^4$

(4) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף ונוסחאות הכפל המקוצר :

א. $y - y^3$	ב. $x^3 - 10x^2 + 25x$
ג. $m^4 - 1$	ד. $196x^4 - 140x^3 + 25x^2$

תשובות סופיות

א. $2x(x-4)$	ב. $3t(t+4)$	ג. $5n(n^2 - 4n + 10)$	(1)
ד. $2y^2(4 + 3y - y^2)$	ה. $4xy(xy + 4x - 5y)$	ו. $3mn(9 - n - 3n^2)$	
א. $(x+5)^2$	ב. $(x+6)^2$	ג. $(y-9)^2$	ד. $(y-11)^2$
ה. $(2x+1)^2$	ו. $(4y-1)^2$	ז. $(3x-4)^2$	ח. $(5x+7)^2$
א. $(r+5)(r-5)$	ב. $(x+9)(x-9)$	ג. $(5y+7)(5y-7)$	(3)
ד. $(11x+1)(11x-1)$	ה. $(xy+2)(xy-2)$	ו. $(3y^2+13x^2)(3y^2-13x^2)$	
א. $y(1+y)(1-y)$	ב. $x(x-5)^2$	ג. $(m^2+1)(m+1)(m-1)$	(4)
ד. $x^2(14x-5)^2$			

פירוק הטרינום

סיכום כללי

טרינום משמעו תלת איבר מהצורה: $ax^2 + bx + c$, כאשר a, b ו- c מספרים כלשהם.

שיטת הטרינום מאפשרת לפרק את תלת האיבר ל-4 איברים ע"י פיצול האיבר bx לשני איברים, באופן כזה שמאפשר להוציא גורם משותף.

הכלל הוא למצוא שני מספרים, m_1 ו- m_2 , שמקיימים: $m_1 \cdot m_2 = ac$ ו- $m_1 + m_2 = b$.

לאחר מכן ניתן לפרק את הטרינום: $ax^2 + bx + c = ax^2 + m_1x + m_2x + c$.

השלב האחרון הוא הוצאת גורם משותף מכל זוג: $\underbrace{ax^2 + m_1x} + \underbrace{m_2x + c}$.

הערה

במקרה שנוסחת השורשים ידועה, ניתן להיעזר בה כדי למצוא את המספרים

$$m_1 \text{ ו- } m_2, \text{ באופן הבא: } m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ולאחר מכן ניתן לכתוב את הטרינום כמכפלה: $ax^2 + bx + c = a(x - m_1)(x - m_2)$.

אם קיים פתרון (שורש) אחד $m_1 = m_2 = \frac{-b}{2a}$, אז נכתוב: $ax^2 + bx + c = a(x - m_1)^2$.

ואם לא קיימים פתרונות, אז לא קיים פירוק כלל.

שאלות

1) פרק את הביטויים הבאים לפי פירוק טרינום:

א. $x^2 + 5x + 4$

ב. $x^2 - 33x + 62$

ג. $3x^2 - 11x + 6$

ד. $x^2 - 18x + 81$

(2) פרק את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחת השורשים.
הערה: במידה ולא למדת על נוסחת השורשים התעלם משאלה זו.

א. $6x^2 + 5x + 1$

ב. $4x^2 + 20x + 25$

ג. $3x^2 - x + 20$

תשובות סופיות

(1) א. $(x+1)(x+4)$ ב. $(x-2)(x-31)$ ג. $(3x-2)(x-3)$ ד. $(x-9)^2$

(2) א. $6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ ב. $(2x+5)^2$ ג. אין פירוק.

שברים אלגברים

סיכום כללי

הגדרה

שבר אלגברי מורכב משתי תבניות, אשר אחת מחלקת את השנייה.

$$\text{דוגמא לשברים אלגבריים: } \frac{x+1}{x+2}, \frac{3x}{x^2+1}, \frac{4}{x-x^3}$$

במקרה בו המכנה הוא מספר, לא מדובר בשבר אלגברי מכיוון שניתן לכתוב את

$$\text{הביטוי ללא צורך בחילוק בין ביטויים שונים כגון: } \frac{3x+5}{4} = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$

תחום הגדרה של שבר

היות ושבר אלגברי הוא תבנית אשר יכולה לקבל ערכים שונים בעת הצבות שונות, חשוב להגביל את המספרים שניתן להציב באופן כזה שלא תתקבל חלוקה באפס.

$$\text{דוגמא: השבר } \frac{1}{x+4} \text{ לא מוגדר כאשר } x = -4 \text{ מכיוון שמתקבל: } \frac{1}{0}$$

במקרים אלו נדרוש **תנאי** על המשתנה אשר יכתב באופן הבא: $x \neq -4$ ומשמעו היא ש- x יכול לקבל על ערך מספרי אפשרי למעט -4, מכיוון שבמקרה זה השבר לא מוגדר.

כלל צמצום שברים אלגברים

ניתן לצמצם שברים אלגברים ע"י הבאת המונה והמכנה למכפלה של ביטויים. במידה וקיימות פעולות החיבור והחיסור בין איברים שונים לא ניתן לבצע צמצום של איברים דומים בין המונה והמכנה. להלן מספר דוגמאות הנוגעות לצמצומים:

$$\bullet \text{ צמצום ע"י הוצאת גורם משותף: } \frac{2x+8}{x+4} = \frac{2(\cancel{x+4})}{\cancel{x+4}} = \frac{2 \cdot 1}{1} = 2$$

$$\bullet \text{ צמצום ע"י נוסחת כפל מקוצר: } \frac{3x-15}{x^2-10x+25} = \frac{3(\cancel{x-5})}{(\cancel{x-5})^2} = \frac{3 \cdot 1}{x-5} = \frac{3}{x-5}$$

• צמצום ע"י פירוק טרינום : $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 3x - 4} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-4)} = \frac{x-3}{x-4}$

שאלות

(1) צמצם את השברים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף וכתוב את תחום הגדרתם :

א. $\frac{3x+12}{x+4}$	ב. $\frac{m^2+4m}{4m+16}$
ג. $\frac{2a-12}{a^2-6a}$	ד. $\frac{x^2-5x}{15-3x}$
ה. $\frac{3-18y^2}{6y^2-1}$	ו. $\frac{4x^3-2x^2}{6x-3}$
ז. $\frac{3y}{y^3-3y^2}$	ח. $\frac{3z^3-12z^2+4z}{z^2+5z}$

(2) צמצם את השברים הבאים ע"י פירוק לגורמים וכתוב את תחום הגדרתם :

א. $\frac{x^2+10x+25}{2x+10}$	ב. $\frac{8n-n^2}{n^2-16n+64}$
ג. $\frac{z^3-4z^2}{2z^2-16z+32}$	ד. $\frac{4m^2+20m+25}{4m^2+10m}$
ה. $\frac{18y^2-24y+8}{2y-3y^2}$	ו. $\frac{a^3+4a^2b+4ab^2}{3ab+6b^2}$

(3) צמצם את השברים הבאים ע"י טרינום ריבועי וכתוב את תחום הגדרתם :

א. $\frac{x+2}{x^2-3x-10}$	ב. $\frac{m^2-12m+32}{m-4}$
ג. $\frac{4y-10}{2y^2+y-15}$	ד. $\frac{3z^2+26z+16}{3z+2}$
ה. $\frac{x^2+5x-36}{x^3+9x^2}$	ו. $\frac{9n^2-12n}{4+5n-6n^2}$

תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } x \neq -4, 3 \quad \text{ב. } \frac{m}{4}, m \neq -4 \quad \text{ג. } \frac{2}{a}, a \neq 0, 6$$

$$\text{ד. } -\frac{x}{3}, x \neq 5 \quad \text{ה. } -3, y \neq \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \text{ו. } \frac{2x^2}{3}, x \neq \frac{1}{2}$$

$$\text{ז. } \frac{3}{y(y-3)}, y \neq 0, 3 \quad \text{ח. } \frac{3z^2 - 12z + 4}{z+5}, z \neq 0, -5$$

$$(2) \quad \text{א. } \frac{x+5}{2}, x \neq -5 \quad \text{ב. } \frac{n}{8-n}, n \neq 8 \quad \text{ג. } \frac{z^2}{2(z-4)}, z \neq 4$$

$$\text{ד. } \frac{2m+5}{2m}, m \neq 0, -\frac{5}{2} \quad \text{ה. } \frac{2(2-3y)}{y}, y \neq 0, \frac{2}{3} \quad \text{ו. } \frac{a(a+2b)}{3b}, b \neq 0, a \neq -2b$$

$$(3) \quad \text{א. } \frac{1}{x-5}, x \neq 5, -2 \quad \text{ב. } m-8, m \neq 4 \quad \text{ג. } \frac{2}{y+3}, x \neq -3, \frac{5}{2}$$

$$\text{ד. } z+8, z \neq -\frac{2}{3} \quad \text{ה. } \frac{x-4}{x^2}, x \neq 0, -9 \quad \text{ו. } \frac{-3n}{2n+1}, n \neq -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}$$

כפל וחילוק של שברים אלגברים

סיכום כללי

כפל שברים יתבצע ע"י הכפלת כל מונה בנפרד והכפלת כל מכנה בנפרד.
 חילוק שברים יתבצע ע"י לקיחת ההופכי של שבר המחלק וביצוע פעולת כפל.

- דוגמא לכפל שברים: $\frac{x+1}{x^2} \cdot \frac{x}{3x+3} = \frac{x+1}{x^2} \cdot \frac{x}{3(x+1)} = \frac{\cancel{x}(x+1)}{3x^{\cancel{2}}(x+1)} = \frac{1}{3x}$
- דוגמא לחילוק שברים: $\frac{4x}{y} : \frac{12}{y^2+y} = \frac{4x}{y} \cdot \frac{y^2+y}{12} = \frac{\cancel{4}x}{\cancel{y}} \cdot \frac{\cancel{y}(y+1)}{\cancel{12}_3} = \frac{x(y+1)}{3}$

שאלות

(1) פשט את הביטויים הבאים:

- | | |
|---|---|
| א. $\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{8}$ | ב. $\frac{x}{3} \cdot \frac{9}{x^2}$ |
| ג. $7y \cdot \frac{5}{y^2}$ | ד. $6x^2 \cdot \frac{3}{40x}$ |
| ה. $\frac{w^2-9}{w} \cdot \frac{w^2}{2w+6}$ | ו. $\frac{y+4}{y^2+16} \cdot \frac{y^2-16}{2y+8}$ |

תשובות סופיות

- (1) א. $\frac{x^2}{24}$ ב. $\frac{3}{x}$ ג. $\frac{35}{y}$ ד. $\frac{9x}{20}$
- ה. $\frac{w(w-3)}{2}$ ו. $\frac{y^2-16}{2y^2+32}$

חיבור וחיסור של שברים אלגברים

סיכום כללי

ביצוע פעולת החיבור והחיסור תתבצע באופן זהה לשברים מספריים. נרצה להרחיב את השברים כך שהמכנה של שניהם יהיה זהה, ולאחר מכן נחבר את המונים.

כדי להרחיב את השברים נעזר בפעולת מציאת מכנה משותף. לשם כך נעזר בפירוקים השונים כדי להביא את הביטויים שבכל מכנה לצורתם המופשטת. להלן דוגמא לחיבור שברים בעלי אותו מכנה:

$$\frac{1}{x} + \frac{x+1}{x} = \frac{1+(x+1)}{x} = \frac{x+2}{x}$$

דוגמא לחיבור מספר לשבר אלגברי:

$$2 + \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+2)}{x+2} + \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+2)+3}{x+2} = \frac{2x+7}{x+2}$$

דוגמא לחיבור שברים עם מכנים שונים (ע"י פעולת מכנה משותף):

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{x}{x(x+1)} + \frac{x+1}{x(x+1)} = \frac{x+x+1}{x(x+1)} = \frac{2x+1}{x(x+1)}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י שימוש בפירוק לגורמים (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{1}{x^2-3x} + \frac{3}{x-3} = \frac{1}{x^2-3x} + \frac{3x}{x^2-3x} = \frac{1+3x}{x^2-3x}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{3}{x^2-6x+9} - \frac{2}{x^2-9} = \frac{3}{(x-3)^2} - \frac{2}{(x-3)(x+3)} = \frac{3(x+3)-2(x-3)}{(x-3)^2(x+3)} = \frac{x+15}{(x-3)^2(x+3)}$$

שאלות

(1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{a}{6} + \frac{a-5}{6}$

ג. $\frac{x-2}{x+1} + \frac{3+4x}{x+1}$

ב. $\frac{5}{x} + \frac{4x+3}{x}$

ד. $\frac{7z}{2z-3} - \frac{4z}{2z-3} - \frac{z+3}{2z-3}$

(2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{ab} - \frac{5}{bc}$

ג. $\frac{c}{ab} - \frac{ad}{bc} + \frac{2b}{cd}$

ה. $\frac{1}{(y+1)^2} + \frac{3}{y+1}$

ב. $\frac{1}{xy} + \frac{5}{yz} + \frac{4}{xz}$

ד. $-\frac{5}{x} + \frac{x+1}{xy^2}$

ו. $\frac{3}{z(z-3)} - \frac{2}{z(z-2)}$

(3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $2 + \frac{2}{x+1}$

ג. $\frac{a+1}{a^2} - \frac{3-a}{4a} - 3$

ב. $3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x}$

ד. $\frac{x}{9yz} + \frac{z}{3y^2x} + \frac{3-y}{12xz} - 3\frac{1}{2}$

(4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{a+1}{a+2} + \frac{3}{a}$

ב. $\frac{1}{z+3} + \frac{2}{3z} - \frac{3}{z}$

(5) פשט את הביטויים הבאים :

א. $\frac{y}{(y-2)^2} + \frac{3y}{4-y^2}$	ב. $\frac{3z}{z^2+4z+3} - \frac{z+0.5}{z^2+2z+1}$
ג. $\frac{x-1}{x^2+3x-40} + \frac{2}{-x^2+8x-15}$	ד. $\frac{2a+3}{2a^2+15a+7} + \frac{a+3}{a^2+14a+49}$
ה. $\frac{x}{x-3} + \frac{9-x}{x^2-8x+15}$	ו. $\frac{1}{a-b} + \frac{2}{a+2b} - \frac{3b}{a^2+ab-2b^2}$

תשובות סופיות

א. (1) $\frac{2a-5}{6}$	ב. $\frac{4x+8}{x}$	ג. $\frac{5x+1}{x+1}$	ד. 1
א. (2) $\frac{c-5a}{abc}$	ב. $\frac{z+5x+4y}{xyz}$	ג. $\frac{c^2d - a^2d^2 + 2ab^2}{abcd}$	
ד. $\frac{-5y^2+x+1}{xy^2}$	ה. $\frac{3y+4}{(y+1)^2}$	ו. $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$	
א. (3) $\frac{2x+4}{x+1}$	ב. $\frac{9x-2}{3x}$	ג. $\frac{-11a^2+a+4}{4a^2}$	
ד. $\frac{4x^2y+12z^2+9y^2-3y^3-126xy^2z}{36xy^2z}$			
א. (4) $\frac{a^2+4a+6}{a(a+2)}$	ב. $-\frac{4z+21}{3z(z+3)}$		
א. (5) $\frac{2y(4-y)}{(y-2)^2(y+2)}$	ב. $\frac{(4z+3)(z-1)}{2(z+1)^2(z+3)}$	ג. $\frac{x^2-6x-13}{(x+8)(x-5)(x-3)}$	
ד. $\frac{4(a^2+6a+6)}{(a+7)^2(2a+1)}$	ה. $\frac{x-3}{x-5}$	ו. $\frac{3}{a+2b}$	

שברים כפולים

סיכום כללי

שבר כפול מורכב באופן הבא: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ כאשר מתקיים: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.
 נובע מכאן כי ניתן לצמצם ביטויים בין שני המכנים או שני המונים בלבד.

שאלות

פשט את הביטויים הבאים:

- | | |
|---|---|
| $\frac{\frac{y+1}{2y+2}}{5} \quad (2)$ | $\frac{\frac{4x}{12}}{x} \quad (1)$ |
| $\frac{\frac{t^2-81}{9t^2}}{6t+54} \quad (4)$ | $\frac{\frac{5}{t}}{30t^2} \quad (3)$ |
| $\frac{\frac{4x}{x+1}}{8} \quad (6)$ | $\frac{\frac{3y^3-y^2}{25}}{y^2} \quad (5)$ |
| $\frac{\frac{t^2-t-20}{16t+8}}{25-t^2} \quad (8)$ | $\frac{\frac{8c^2}{3c^3-9c^2-12c}}{40} \quad (7)$ |
| $\frac{2t+1}{x^2+2x+1}$ | $\frac{15c+15}{15c+15}$ |

תשובות סופיות

$$\frac{x^2}{3} \quad (1)$$

$$2.5 \quad (2)$$

$$\frac{1}{6t^3} \quad (3)$$

$$\frac{t-9}{54t^2} \quad (4)$$

$$\frac{(3y-1)(3-y)}{25} \quad (5)$$

$$\frac{x(x+1)}{2} \quad (6)$$

$$\frac{c}{c-4} \quad (7)$$

$$\frac{t+4}{-8(t+5)} \quad (8)$$

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 3 - חוקי החזקות והשורשים

תוכן העניינים

47	1. חוקי החזקות
51	2. חוקי השורשים
54	3. משוואות מעריכיות
55	4. משוואות עם חיבור וחסור איברים
57	5. משוואות עם קבוע אוילר
58	6. אי שוויונים מעריכיים

חוקי החזקות

סיכום כללי

סיכום חוקי החזקות

$$a^0 = 1 \quad 1.$$

$$a^1 = a \quad 2.$$

$$a^n \cdot a^m = a^{m+n} \quad 3.$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad 4.$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \quad 5.$$

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m \quad 6.$$

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \quad 7.$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad 8.$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m \quad 9.$$

שאלות

(1) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^n a^m = a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

$$a^2 a^6 \quad \text{א.}$$

$$t^3 t^5 t^7 \quad \text{ב.}$$

$$b^2 b^5 b^{12} b^3 \quad \text{ג.}$$

$$\frac{k^8}{k^3} \quad \text{ד.}$$

$$\frac{n^{14}}{n^9} \quad \text{ה.}$$

$$\frac{c^6}{c^2} \quad \text{ו.}$$

$$\frac{a^3 a^{19}}{a^{15}} \quad \text{ז.}$$

$$\frac{x^{30}}{x^9 x^{18}} \quad \text{ח.}$$

$$\frac{y^3 y^{15}}{y^4 y^{14}} \quad \text{ט.}$$

$$3^2 3^3 3^4 \quad \text{י.}$$

$$\frac{2^{16} 2^2}{2^{10}} \quad \text{יא.}$$

$$\frac{5^{20} 5^3 5^{16}}{5^4 5^{22} 5^8} \quad \text{יב.}$$

(2) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^n a^m = a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

$$\frac{3^4 2^7}{2^6 3^2} \quad \text{א.}$$

$$\frac{a^{10} b^{13} a^3}{b^4 b^6 b^2 a^{12}} \quad \text{ב.}$$

$$\frac{x^8 y^5 y^9 x^2}{y^4 x^4} \quad \text{ג.}$$

(3) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

$$\frac{2^3 \cdot 2^7}{2^4 \cdot 2^5} \quad \text{א.}$$

$$\frac{9^3 \cdot 27^2}{3^9 \cdot 81} \quad \text{ב.}$$

$$\frac{10^9 \cdot 25^5 \cdot 8^{-1}}{40^3 \cdot 125^5} \quad \text{ג.}$$

$$2^3 + 2^5 \quad \text{ד.}$$

(4) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוק: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

א. $(a^2)^4$	ב. $(c^3)^{10}$	ג. $(x^3 x^{10})^2$
ד. $\frac{(b^2)^3}{b^2 b^3}$	ה. $\frac{n^7 n^8}{(n^3)^4}$	ו. $\frac{d^{20} (d^4)^2}{d^{12} (d^3)^2}$
ז. $\frac{2^5 (2^4)^2 2^3}{(2^3 2^2)^3}$	ח. $\frac{3^6 (3^3 3^2)^6}{3^{28} (3^2)^3}$	ט. $\frac{(8^3)^8 8^{11}}{(8^2 8)^3 8^8}$

(5) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{2^4 \cdot 16^5}{8 \cdot 512}$	ב. $\frac{(4^2)^3 16}{64 \cdot 2^3}$	ג. $\frac{((3^4)^4)^5}{81^3 27^4 3^5}$
---	--------------------------------------	--

(6) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{(2a^2b)^3 \cdot (ab^{-3})^2}{4ab^{-2} \cdot \left(\frac{a^2}{b}\right)^4}$	ב. $\frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}}$
ג. $\frac{4^{b+3}}{4^{b+1} + 4^{b+2}}$	ד. $\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^{n+3} + x^{n+5}}{x^{n+2}}$

(7) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $(ab)^n = a^n b^n$ ו- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

א. $(a^2 b)^3$	ב. $(m^4 n^3)^5$	ג. $(x^{12} y^3)^3$
ד. $\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^4$	ה. $\left(\frac{i^4}{k^3}\right)^7$	ו. $\left(\frac{a^{14} b^4}{a^6 ab^3}\right)^3$
ז. $\left(\frac{x^3 y^5 y^2 x^6}{y^4 x^7}\right)^6$	ח. $\left(\frac{t^7 r^{20} t^3}{r^2 r^{12} t^8}\right)^2$	ט. $\left(\frac{(b^{12} c)^2 c^{14}}{c(c^3 b^5)^4 b^3}\right)^2$

(8) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה שלילית:

א. $\frac{1}{4^6}$	ב. $\frac{1}{5^3}$	ג. $\frac{1}{2^{10}}$
ד. $\frac{1}{8}$	ה. $\frac{1}{81}$	ו. $\frac{1}{125}$

(9) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה חיובית וחשב את ערכם:

א. $\frac{1}{4^{-3}}$	ב. $\frac{1}{3^{-2}}$	ג. $\frac{1}{5^{-3}}$
-----------------------	-----------------------	-----------------------

(10) חשב את הביטויים הבאים:

א. $\frac{2^{-5} \cdot 5^3 \cdot 2^{14}}{5^2 \cdot 5^{-10} \cdot 5^8 \cdot 2^6}$	ב. $\frac{3^{-6} \cdot 7^7 \cdot 7^{-4}}{3^{-4} \cdot 3^{-3} \cdot 7^3}$
--	--

(11) פשט את הביטויים הבאים לצורה ללא חזקות שליליות.

א. $\left(\frac{5^{-4}}{3^2}\right)^{-6}$	ב. $\frac{(4^4)^{-4} 3^{-11}}{(3^{-2} 4^3)^{-6}}$	ג. $\frac{2^{-3} 5^4}{5^4 \cdot 125 \cdot (5^2 2)^{-3} \cdot 2^{-4}}$
---	---	---

(12) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{a^{n+2} \cdot a^{2-3n}}{(a^3)^{n+1}}$	ב. $\frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}}$	ג. $\frac{(m^{n+2})^3 \cdot m^{-4n-2}}{\frac{1}{m^{6n+2}} \cdot (m^3)^{n-2}}$
---	---	---

תשובות סופיות

- (1) א. a^8 ב. t^{15} ג. b^{22} ד. k^5 ה. n^5 ו. c^4
- ז. a^7 ח. x^3 ט. 1 י. 3^9 יא. 2^8 יב. 5^5
- (2) א. 18 ב. ab ג. $x^6 y^{10}$
- (3) א. 2 ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{5}{8}$ ד. 40
- (4) א. a^8 ב. c^{30} ג. x^{26} ד. b ה. n^3 ו. d^{10}
- ז. 2 ח. 9 ט. 8^{18}
- (5) א. 2^{12} ב. 2^7 ג. 3^{51}
- (6) א. $\frac{2b^3}{a}$ ב. k ג. $3\frac{1}{5}$ ד. $\frac{1}{x} + x$
- (7) א. $a^6 b^3$ ב. $m^{20} n^{15}$ ג. $x^{36} y^9$ ד. $\frac{a^{12}}{b^8}$ ה. $\frac{i^{28}}{k^{21}}$ ו. $a^{21} b^3$
- ז. $x^{12} y^{18}$ ח. $t^4 r^{12}$ ט. $b^2 c^6$
- (8) א. 4^{-6} ב. 5^{-3} ג. 2^{-10} ד. 2^{-3} ה. 3^{-4} ו. 5^{-3}
- (9) א. 64 ב. 9 ג. 125
- (10) א. 1000 ב. 3
- (11) א. $5^{24} \cdot 3^{12}$ ב. $\frac{4^2}{3^{23}}$ ג. $5^3 \cdot 2^4$
- (12) א. a^{1-5n} ב. k ג. m^{2n+12}

חוקי השורשים

סיכום כללי

סיכום חוקי השורשים

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} & 2. \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} & 3. \quad \sqrt[n]{a^n} = a \\
 4. \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} & 5. \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} & 6. \quad \sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot n]{a}
 \end{array}$$

שאלות

(1) הבא את הביטויים הבאים לצורה: $\sqrt[n]{a^m}$.

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } 3^{\frac{1}{4}} & \text{ב. } 2^{\frac{3}{5}} & \text{ג. } 6^{\frac{5}{6}} \\
 \text{ד. } -12^{\frac{2}{7}} & \text{ה. } -(-4)^{\frac{1}{3}} & \text{ו. } -(-3)^{\frac{3}{4}} \\
 \text{ז. } 5^{-\frac{1}{4}} & \text{ח. } 27^{-\frac{1}{3}} & \text{ט. } 64^{-\frac{5}{6}}
 \end{array}$$

(2) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } \sqrt{49} & \text{ב. } -\sqrt{25} & \text{ג. } \sqrt[3]{8} \\
 \text{ד. } -\sqrt[3]{128} & \text{ה. } \sqrt[3]{(-2)^6} & \text{ו. } (\sqrt[5]{1024})^2 \\
 \text{ז. } (\sqrt[5]{-243})^3 & \text{ח. } \sqrt[4]{-16} & \text{ט. } \sqrt[4]{-25^2} \\
 \text{י. } \sqrt[4]{(-25)^2} & &
 \end{array}$$

(3) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

- | | | |
|---|---|---|
| א. $8^{\frac{2}{3}}$ | ב. $32^{-\frac{3}{5}}$ | ג. $128^{-\frac{2}{7}}$ |
| ד. $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$ | ה. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2.5}$ | ו. $\left(\frac{64}{343}\right)^{-\frac{2}{3}}$ |
| ז. $81^{\frac{3}{4}} \cdot 64^{-\frac{1}{3}}$ | ח. $343^{-\frac{2}{3}} \cdot 100^{\frac{1}{2}}$ | ט. $16^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{-\frac{1}{3}} \cdot 4^{-\frac{1}{2}}$ |

(4) פשט את הביטויים הבאים:

- | | | |
|---|--|--|
| א. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ | ב. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$ | ג. $\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$ |
| ד. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ | ה. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$ | ו. $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$ |
| ז. $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$ | ח. $\frac{\sqrt[3]{500} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[4]{25^2} \cdot \sqrt[3]{4}}$ | ט. $\frac{\sqrt[3]{8^2} \sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{400} \sqrt{2}}$ |

(5) הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים:

- | | | |
|-------------------|----------------|--------------------------|
| א. $3\sqrt{2}$ | ב. $5\sqrt{3}$ | ג. $\frac{\sqrt{36}}{2}$ |
| ד. $2\sqrt[3]{3}$ | ה. $x\sqrt{x}$ | |

(6) הכנס את כל המקדמים בביטויים הבאים לתוך השורש:

- | | | |
|--------------------------|-----------------------------|---------------------------------|
| א. $2\sqrt{5}$ | ב. $4\sqrt[3]{2}$ | ג. $2\sqrt[5]{3}$ |
| ד. $\frac{\sqrt{24}}{2}$ | ה. $\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$ | ו. $\frac{3\sqrt[4]{5000}}{10}$ |
| ז. $-5\sqrt[3]{2}$ | ח. $-5\sqrt[4]{2}$ | ט. $-5\sqrt[5]{-2}$ |

(7) הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר:

- | | | |
|-------------------|-----------------|----------------|
| א. $\sqrt{12}$ | ב. $\sqrt{48}$ | ג. $\sqrt{63}$ |
| ד. $\sqrt[3]{54}$ | ה. $\sqrt{x^5}$ | |

(8) חלץ מן הביטויים הבאים את המקדם הגבוה ביותר ככל הניתן :

א. $\sqrt{40}$	ב. $\sqrt{50}$	ג. $\sqrt{320}$
ד. $\sqrt[3]{108}$	ה. $\sqrt[3]{56}$	ו. $\sqrt[5]{160}$
ז. $\sqrt[4]{162}$	ח. $\sqrt[6]{972}$	ט. $\sqrt[6]{192}$

תשובות סופיות

(1) א. $\sqrt[4]{3}$	ב. $\sqrt[5]{2^3}$	ג. $\sqrt[6]{6^5}$	ד. $-\sqrt[7]{12^2}$	ה. $-\sqrt[3]{-4}$	ו. ϕ
ז. $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$	ח. $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$ או $\frac{1}{3}$	ט. $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}}$ או $\frac{1}{2^5}$			
(2) א. 7	ב. -5	ג. 2	ד. -2	ה. 4	ו. 16
ז. -27	ח. ϕ	ט. ϕ	י. 5		
(3) א. 4	ב. $\frac{1}{8}$	ג. $\frac{1}{4}$	ד. 125	ה. $\frac{32}{243}$	ו. $\frac{49}{16}$
ז. $\frac{27}{4}$	ח. $\frac{10}{49}$	ט. $\frac{1}{2}$			
(4) א. 4	ב. 9	ג. 20	ד. 6	ה. 3	ו. 2
ז. $\sqrt{2}$	ח. $\sqrt{5}$	ט. $\sqrt{2}$			
(5) א. $\sqrt{18}$	ב. $\sqrt{75}$	ג. $\sqrt{9}$	ד. $\sqrt[3]{24}$	ה. $\sqrt{x^3}$	
(6) א. $\sqrt{20}$	ב. $\sqrt[3]{128}$	ג. $\sqrt[5]{96}$	ד. $\sqrt{6}$	ה. $\sqrt[3]{3}$	
ו. $\sqrt[4]{40 \frac{1}{2}}$	ז. $\sqrt[3]{-250}$	ח. $-\sqrt[4]{1250}$	ט. $\sqrt[5]{5^5 \cdot 2}$		
(7) א. $2\sqrt{3}$	ב. $4\sqrt{3}$	ג. $3\sqrt{7}$	ד. $3\sqrt[3]{2}$	ה. $x^2\sqrt{x}$	
(8) א. $2\sqrt{10}$	ב. $5\sqrt{2}$	ג. $8\sqrt{5}$	ד. $3\sqrt[3]{4}$	ה. $2\sqrt[3]{7}$	ו. $2\sqrt[5]{5}$
ז. $3\sqrt[4]{2}$	ח. $3\sqrt[5]{4}$	ט. $2\sqrt[6]{3}$			

משוואות מעריכיות יסודיות

סיכום כללי

- פתרון כללי של משוואת מעריכית מהצורה: $a^x = a^y$ הוא: $x = y$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = 1$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = 1 = a^0$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = b^x$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = b^x = 1$ ללא תלות בבסיסים.

שאלות

(1) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי החזקות היסודיים):

א. $5^x \cdot 25^{x+2} = 125$

ב. $(2^x \cdot 32)^3 = 8$

ג. $(5^{x^2})^5 \cdot \frac{1}{5^5} = 625^{x-1}$

(2) פתור את המשוואה הבאה (הבסיס הוא שבר): $27 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{5x+2} = 8$

(3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי השורשים):

א. $\sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3}$

ב. $(9\sqrt{27})^{3x} \cdot 3^{2-x} = \frac{1}{9}$

ג. $\sqrt[3]{16} \cdot \left(\frac{1}{2^x}\right)^3 = \frac{1}{16}$

תשובות סופיות

(1) א. $x = -\frac{1}{3}$ ב. $x = -4$ ג. $x = 1, -\frac{1}{5}$

(2) $x = \frac{1}{5}$

(3) א. $x = -\frac{1}{2}$ ב. $x = -8$ ג. $x = 2, -\frac{2}{3}$

משוואות עם חיבור וחסור איברים

סיכום כללי

במשוואות הכוללות חיבור וחסור של איברים, נאתר את הבסיס עם המעריך הקטן ביותר ונסמן אותו ב- t , למשל במשוואה: $4^x - 3 \cdot 2^x = 4$ נסמן: $2^x = t$.
 נבטא את כל איברים המשוואה באמצעות t ונפתור אותה עבורו.
 לאחר מכן נחזיר את ההצבה למציאת ערכי ה- x המתאימים.

שאלות

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם חיבור וחסור ממעלה ראשונה):

א. $2^x + 6 \cdot 2^x = 56$ ב. $5 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 162$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם חיבור וחסור ממעלה ראשונה):

א. $81^{x+1} + 18 \cdot 3^{4x-3} = 735$ ב. $5^{3x+2} + 4 \cdot 125^x = 29$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחסור ממעלה שנייה):

א. $9^x - 36 \cdot 3^x + 243 = 0$ ב. $16^{x+1} - 65 \cdot 4^x + 4 = 0$

(4) פתור את המשוואה הבאה (משוואות כלליות): $\frac{20}{9^x + 1} = 3 - \frac{8}{9^x - 1}$

(5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות מסכמות):

א. $\frac{1}{25^{1-x}} - 6 \cdot 5^{x-1.5} + 1 = 0$ ב. $3^x - \sqrt{16 \cdot 3^{x+1}} = -9$

תשובות סופיות

(1) א. $x = 3$ ב. $x = 4$

(2) א. $x = \frac{1}{2}$ ב. $x = 0$

(3) א. $x = 2, 3$ ב. $x = 1, -2$

(4) $x = 1, -\frac{1}{2}$

(5) א. $x = \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$ ב. $x = 1, 3$

משוואות עם קבוע אוילר

סיכום כללי

קבוע אוילר מסומן באות e וערכו שווה (בערך) ל-2.71828. למספר זה משמעויות רבות במתמטיקה ובמדעים ועל כן הוחלט לסמן אותו באות משלו ולשלב אותו במשוואות מתמטיות. דרך הפתרון של משוואה שבה הבסיס הוא e זהה לחלוטין לזו של משוואה מעריכית רגילה, כפי שנלמד בפרק זה.

שאלות

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם קבוע אוילר):

א. $e^{3x} = e^{2x-1}$

ב. $e^{x-5} = (e^{1-x})^3$

(2) פתור את המשוואה הבאה (עם חיבור וחסור): $e^{2x} + e^x - 2 = 0$.

(3) פתור את המשוואה הבאה (המשתנה גם בבסיס): $xe^x = \sqrt[4]{e} \cdot x$.

תשובות סופיות

(1) א. $x = -1$ ב. $x = 2$

(2) $x = 0$

(3) $x = 0, \frac{1}{4}$

אי שוויונים מעריכיים:

סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $a^x > a^y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x} \quad (1)$$

$$e^{\sqrt{x}+1} > e^{2x} \quad (2)$$

$$25^x + 5 < 6 \cdot 5^x \quad (3)$$

הערה

השאלות הבאות דורשות הכרות עם מושג הלוגריתם הטבעי ($\ln$) וכן חוקי הלוגריתמים אשר ילמדו בהמשך.

$$e^{2x} - 5e^x + 4 > 0 \quad (4)$$

תשובות סופיות

$$x < \frac{2}{3} \quad (1)$$

$$0 \leq x < 1 \quad (2)$$

$$0 < x < 1 \quad (3)$$

$$x < 0 \text{ או } x > \ln 4 \quad (4)$$

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 4 - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים

תוכן העניינים

59	1. הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות
61	2. חוקי הלוגריתמים
63	3. הלוגריתם הטבעי
65	4. משוואות עם בסיסים שונים
66	5. אי-שוויונים לוגריתמים

הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות

סיכום כללי

הגדרה

הלוגריתם מוגדר באופן הבא: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, כאשר: $a > 0, a \neq 1, b > 0$.

הסבר

לוגריתם על בסיס a של b מוגדר בתור החזקה שיש להעלות את a , על מנת שיהיה שווה ל- b . ערך חזקה זו הוא x .
 ערך לוגריתם יכול להיות חיובי, שלילי או אפס.
 נחשב ערכי לוגריתמים ונפתור משוואות לוגריתמיות על ידי מעבר לפי ההגדרה למשוואה מעריכית מתאימה.

כללים יסודיים בלוגריתמים

מהגדרת הלוגריתם נובע כי: $\log_a a = 1$ וכן: $\log_a 1 = 0$, לכל $a > 0, a \neq 1$.

שאלות

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמים הבאים:

- | | | |
|---------------------------------|--------------------------|------------------|
| א. $\log_2 32$ | ב. $\log 1000$ | ג. $\log_{25} 5$ |
| ד. $\log_8 4$ | ה. $\log_4 \frac{1}{16}$ | ו. $\log_a a^4$ |
| ז. $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$ | | |

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (יסודי - שימוש בהגדרת הלוג):

- | | |
|----------------------------------|--------------------------|
| א. $\log_{36} 6 = x$ | ב. $\log_2 x = 16$ |
| ג. $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$ | ד. $\log_x 64 = 3$ |
| ה. $\log_x 25 = 2$ | ו. $\log_x (3x + 4) = 2$ |

(3) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (כללי - שימוש בהגדרת הלוג):

ב. $\log_8(x^4 - 73) = 1$

א. $\log_6(4x - 2) = 1$

ג. $\log_3 \frac{x+3}{3-3x} = -2$

(4) פתור את המשוואה הלוגריתמית הבאה: $\log_4(\log_3 x) = 1$.
(שימוש בהגדרת הלוג מספר פעמים)

(5) פתור את המשוואה הלוגריתמית הבאה: $\log_2(3^x + 37) = 6$.
(מתקבלת משוואה מעריכית)

(6) פתור את המשוואה הלוגריתמית הבאה (הצבה): $(\log_2 x)^4 = 10000$.

תשובות סופיות

(1) א. 5 ב. 3 ג. $\frac{1}{2}$ ד. $\frac{2}{3}$ ה. -2

ו. 4 ז. -1.5

(2) א. $x = \frac{1}{2}$ ב. $x = 65,536$ ג. $x = 27$ ד. $x = 4$

ה. $x = 5$ ו. $x = 4$

(3) א. $x = 2$ ב. $x = \pm 3$ ג. $x = -2$

(4) $x = 81$

(5) $x = 3$

(6) $x = 1024, \frac{1}{1024}$

חוקי הלוגריתמים:

סיכום כללי:

- להלן 3 חוקי הלוגריתמים עבור בסיס $a > 0 \neq 1$ וארגומנטים x ו- y חיוביים:
- מכפלה לסכום: $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.
 - מנה להפרש: $\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$.
 - מקדם למעריך: $\log_a b^n = n \log_a b$ (כאשר $b > 0$ ו- n מספר ממשי כלשהו).

שאלות:

שאלות חישוב כלליות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } \log_3 12 + \log_3 2.25 & \text{ב. } \log_{\frac{1}{5}} 40 + \log_{\frac{1}{5}} 12.5 + \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{4} \\ \text{ג. } \log_2 200 - \log_2 100 & \end{array}$$

(2) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } \frac{\log_5 16}{\log_5 8} & \text{ב. } \frac{\log_9 62.5 + \log_9 2}{\log_9 0.2} \end{array}$$

משוואות לוגריתמיות:

(3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש ישיר בחוקי הלוגריתמים):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } \log_2 x + \log_2 (x-6) = 4 & \text{ב. } \log_3 x + \log_3 (x+2) = 1 \end{array}$$

(4) פתור את המשוואות הבאות (פתרון בשיטת לוג שווה לוג):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } \log_5 (4x-3) = \log_5 7 & \text{ב. } 2\log_2 (2x-2) - \log_2 (16-x) = \log_2 (x-1) + 1 \end{array}$$

(5) פתור את המשוואות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א. $\log_3(3 \cdot 5^x + 39) = 3 + \log_3(5^x - 3)$

תשובות סופיות:

(1) א. 3 ב. -3 ג. 1

(2) א. $\frac{4}{3}$ ב. -3

(3) א. $x = 8$ ב. $x = 3, \frac{1}{27}$

(4) א. $x = 2.5$ ב. $x = 6$

(5) $x = 1$

הלוגריתם הטבעי

סיכום כללי

לוגריתם על בסיס e (קבוע אוילר) מסומן: $\log_e \Rightarrow \ln$ ונקרא הלוגריתם הטבעי.

למשל: $\ln 3 = \log_e 3$ או $\ln \frac{1}{4} = \log_e \frac{1}{4}$. לוג זה נקרא בשם לן.

מהגדרת הלוגריתם מתקיים: $\ln a = b \rightarrow e^b = a$, כאשר $a > 0$ ו- b מספרים.

שאלות

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הטבעיים הבאים:

$$\text{א. } \ln e^2 \quad \text{ב. } \ln \frac{1}{e^4} \quad \text{ג. } \ln \frac{1}{e\sqrt{e}}$$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג):

$$\text{א. } \ln x = 2 \quad \text{ב. } \ln x = -\frac{1}{2}$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (הצבה וחוקי הלוגריתמים):

$$\begin{aligned} \text{א. } \ln\left(e^{2x} - \frac{1}{2}\right) + \ln 2 &= x \\ \text{ב. } 3\ln^2 x + \ln x &= 2 \\ \text{ג. } \ln(e^2 x^3) \cdot \ln \frac{1}{x} &= \ln(ex^2) \end{aligned}$$

(4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הוצאת לוג משני אגפי המשוואה)

$$\text{א. } x^{\ln x} = e^6 x \quad \text{ב. } \left(\frac{1}{x}\right)^{2-3\ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x}$$

(5) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

$$\text{א. } e^{\ln 3} \quad \text{ב. } e^{2\ln 3}$$

תשובות סופיות

(1) א. 2 ב. -4 ג. -1.5

(2) א. $x = e^2$ ב. $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$

(3) א. $x = 0$ ב. $x = \sqrt[3]{e^2}, \frac{1}{e}$ ג. $x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \frac{1}{e}$

(4) א. $x = e^3, \frac{1}{e^2}$ ב. $x = \sqrt{e}, e$

(5) א. 3 ב. 9

משוואות עם בסיסים שונים:

סיכום כללי:

לעיתים תתקבל משוואה מעריכית שבה לא ניתן למצוא חזקה שלמה, כגון: $3^x = 4$. במקרים אלו נעזר בהגדרת הלוג כדי לבטא את ערך המעריך: $x = \log_3 4$. את ערך הביטוי $\log_3 4$ ניתן לחשב ע"י מחשבון או ע"י מעבר לבסיס 10: $\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3}$.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (בסיסים שונים):

א. $3^x = 6$ ב. $2^x - 9 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם בסיס ולוגריתם טבעי): $e^{3x} = 3$

תשובות סופיות:

(1) א. $x = \log_3 6 = 1.63$ ב. $x = \log_2 9 = 3.17$

(2) $x = \frac{1}{3} \ln 3 = 0.36$

אי-שוויונים לוגריתמים

סיכום כללי

פתרון אי-השוויון $\log_a x > \log_a y$ הוא $x > y$, עבור $a > 1$, ו- $x < y$ עבור $0 < a < 1$.

שאלות

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$\log_2 x < \log_2 (5x - 20) \quad (1) \qquad \ln x \geq \ln(x^2 - 12) \quad (2)$$

$$\ln x < 3 \quad (3) \qquad \ln^2 x - 6 \ln x < 7 \quad (4)$$

$$\frac{6}{\ln^2 x} \geq 2 - \frac{1}{\ln x} \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$x > 5 \quad (1) \qquad 2\sqrt{3} < x \leq 4 \quad (2)$$

$$0 < x < e^3 \quad (3) \qquad \frac{1}{e} < x < e^7 \quad (4)$$

$$x \neq 1 \text{ וגם } \frac{1}{\sqrt{e^3}} \leq x \leq e^2 \quad (5)$$

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 5 - סדרות

תוכן העניינים

1. הקדמה כללית	(ללא ספר)
2. סדרה חשבונית	67
3. סדרה הנדסית	74
4. סדרות מעורבות	79
5. סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת	81
6. סדרת נסיגה	87

סדרה חשבונית:

סיכום כללי:

- נוסחת האיבר הכללי:

נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית המתחילה באיבר a_1 והפרשה הוא d נתונה ע"י: $a_n = a_1 + d(n-1)$, כאשר: n הוא מיקום האיבר שערכו a_n בסדרה.

- כלל נסיגה של סדרה חשבונית:

כלל נסיגה של סדרה חשבונית a_n שהפרשה הוא d ואיברה הראשון הוא a_1 נתון ע"י: $a_{n+1} - a_n = d$.

- נוסחת הסכום של סדרה חשבונית:

סכום n האיברים הראשונים של סדרה חשבונית a_n שהפרשה הוא d ואיברה הראשון הוא a_1 נתון ע"י:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$S_n = \frac{n(2a_1 + d(n-1))}{2} \quad \text{בהצבת נוסחת האיבר הכללי מקבלים:}$$

שאלות:

- (1) נתונה הסדרה החשבונית: $17, 11, 5, -1, -7, \dots$. מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 43 איברים.
- (2) בסדרה חשבונית האיבר השישי הוא 15 והאיבר העשירי הוא 31. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהו הפרש הסדרה.
- (3) מצא כמה איברים יש בסדרה החשבונית: $2, 4.5, 7, 9.5, 12, 14.5, \dots, 49.5$.

- (4) בסדרה חשבונית סכום האיברים השני, החמישי והשמיני הוא 87 וההפרש בין האיבר השנים-עשר לאיבר השישי הוא 24. מצא כמה איברים בסדרה אם ידוע שהאיבר האחרון בה הוא 201.
- (5) תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 3 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 46 קפיצות?
- (6) כמה מספרים תלת ספרתיים שמתחלקים ב-6 יש בין 201 ל-550?
- (7) כמה איברים חיוביים ישנם בסדרה החשבונית: $91, 88, 85, 82, \dots$.
- (8) מצא את ערכו של x אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית: $x-3, 3x-4, x^2-1$.
- (9) נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא:
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 3 \\ a_1 = 5 \end{cases}$$
 הוכח שהסדרה חשבונית ומצא מהו האיבר התשעה-עשר שלה.
- (10) בסדרה חשבונית $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ידוע כי סכום ארבעת האיברים הראשונים וסכום האיברים ה-6 עד ה-9 הם מספרים נגדיים. א. הוכח: $a_5 = 0$. ב. נתון: $a_3 - a_{11} = 24$. מצא את a_1 ואת d . ג. מגדירים סדרה חשבונית חדשה b_n המקיימת: $b_n = 2a_n - 3$. מצא את ערך האיבר השלישי הראשון בסדרה ואת מיקומו הסידורי.
- (11) מצא את סכום ארבעה-עשר האיברים הראשונים בסדרה החשבונית: $-3, 2, 7, 12, \dots$.

- (12) נתונה הסדרה החשבונית : $5, -1, -7, -13, \dots$. כמה איברים יש לחבר בסדרה (החל מהראשון) כדי להגיע לסכום של 987?
- (13) תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגה של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 11 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 2 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 416 קפיצות?
- (14) נתונה הסדרה החשבונית : $63, -67, -71, \dots$. כמה איברים לכל הפחות יש לחבר בסדרה כדי שהסכום המתקבל יהיה חיובי?
- (15) נתונה הסדרה החשבונית : $4, 13, 22, 31, \dots$. בסדרה יש 36 איברים. חשב את סכום ארבעה-עשר האיברים האחרונים בסדרה.
- (16) נתונה הסדרה החשבונית : $4, 9, 14, 19, \dots, 599$. מחקו כל איבר שלישי בסדרה. מצא את סכום האיברים שנותרו.
- (17) סכום n האיברים האחרונים בסדרה חשבונית בת $3n$ איברים גדול ב-1024 מסכום n האיברים הראשונים שבה.
א. בטא את n באמצעות הפרש הסדרה, d .
ב. נתון כי הפרש הסדרה הוא 8. כמה איברים בסדרה?
- (18) נתונה סדרה שבה $S_n = 2n^2 + 4n$.
א. מצא את ערכם של שלושת האיברים הראשונים בסדרה.
ב. הוכח כי הסדרה חשבונית ומצא את הפרשה.
- (19) בסדרה חשבונית ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות ה-5, ה-7, וה-16 הוא אפס. כמו כן ידוע כי סכום שלושת האיברים הראשונים הוא 132.
א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת הפרש הסדרה.
ב. מצא את האיבר השלילי הראשון בסדרה.
ג. מצא כמה איברים יש לחבר (החל מהאיבר הראשון) כדי לקבל סכום 210.

$$(20) \quad \begin{cases} 150, 144, 138, \dots \\ 90, 93, 96, \dots \end{cases} \quad \text{נתונים שני טורים חשבוניים:}$$

לשני הטורים אותו מספר איברים. ידוע כי סכום האיברים האחרונים של שני הטורים (האיבר האחרון מהטור הראשון והאיבר אחרון מהטור השני) הוא אפס.

א. מצא את מספר האיברים שבכל טור.

ב. מחברים את n האיברים הראשונים מהטור הראשון יחד עם n האיברים הראשונים מהטור השני. ידוע כי חיבור הסכומים הוא 3480. מצא את n אם ידוע שהוא קטן מ-20.

(21) נתונות שתי סדרות החשבוניות הבאות: a_n שהפרשה הוא d_1 ו- b_n שהפרשה

$$\text{הוא } d_2. \text{ ידוע כי: } d_1 = -2d_2.$$

סכום 50 האיברים הראשונים של שתי הסדרות שווה והאיבר העומד במקום ה-20 בסדרה a_n גדול ב-1 מהאיבר העומד במקום ה-37 בסדרה b_n .

א. מצא את הפרש הסדרה $a_n - d_1$.

ב. ידוע כי האיבר a_{10} קטן ב-1 מ-5 פעמים האיבר b_{50} .

מצא את a_1 ואת b_1 .

(22) נתונה הסדרה החשבונית: $-21, -17, -13, \dots$

בסדרה יש 18 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

(23) בסדרה חשבונית שהפרשה d ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות

האי-זוגיים הוא 552 וסכום האיברים במקומות הזוגיים הוא 612.

הוכח כי $nd = 60$.

(24) בסדרה חשבונית עולה, שכל איבריה חיוביים ובה מספר אי-זוגי של איברים,

גדול סכום כל איברי הסדרה פי $1\frac{14}{15}$ מסכום איברי הסדרה הנמצאים

במקומות האי-זוגיים. כמה איברים יש בסדרה?

(25) לפניך שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית: $x-5$, $x-16$, $2x+23$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את x .

ii. מצא את הפרש הסדרה.

ב. ידוע כי: $a_{12} = 0$. מצא את a_1 .

ג. האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n = 308$.

מצא את סכום כל האיברים החיוביים העומדים במקומות האי-זוגיים.

(26) בסדרה חשבונית שבה מספר זוגי של איברים נתון כי סכום ריבועי האיברים

העומדים במקומות ה-4 וה-5 שווה לריבוע האיבר העומד במקום ה-6.

האיבר הראשון אינו אפס.

א. הוכח את הטענות הבאות:

i. $a_1 = -4d$.

ii. $S_9 = 0$.

ב. האיבר העומד במקום ה-6 גדול ב-2 מהאיבר העומד במקום ה-5.

מצא את a_1 ואת d .

ג. מצא את מספר איברי הסדרה אם ידוע כי סכום האיברים העומדים

במקומות הזוגיים הוא 504.

(27) בסדרה חשבונית שבה $2n$ איברים ידוע כי סכום כל האיברים גדול ב-66

מפעמיים סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

א. הוכח כי $nd = 66$.

ב. ידוע כי הפרש הסדרה הוא 3. הבע באמצעות a_1 את סכום n האיברים

הראשונים.

ג. סכום n האיברים הראשונים הוא 187. מצא את האיבר החיובי הקטן

ביותר בסדרה ואת מיקומו הסידורי בסדרה.

(28) אדם המעוניין לקנות רכב קיבל שתי הצעות מחיר.

ההצעה הראשונה :

לשלם בתשלום הראשון 1000 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום

הגדול ב-500 ₪ מהתשלום הקודם.

ההצעה השנייה :

לשלם בתשלום הראשון 7200 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום

הקטן ב-450 ₪ מהתשלום הקודם.

ידוע כי מספר התשלומים בהצעה השנייה קטן ב-4 ממספר התשלומים

שבהצעה הראשונה.

א. כמה תשלומים יצטרך לשלם לפי כל הצעה.

ב. מה מחיר הרכב?

תשובות סופיות:

- (1) $a_{43} = -235$
- (2) $d = 4, a_1 = -5$
- (3) 20 איברים.
- (4) 48 איברים.
- (5) 15 קפיצות.
- (6) 58 מספרים.
- (7) 31 איברים חיוביים.
- (8) $x = 4, x = 1$
- (9) $a_{19} = 59$
- (10) א. הוכחה.
- (11) $S_{14} = 413$
- (12) 21 איברים.
- (13) 16 דקות.
- (14) 37 איברים.
- (15) 3647
- (16) 23920
- (17) א. $n = \sqrt{\frac{512}{d}}$ ב. 24 איברים.
- (18) א. $a_1 = 6, a_2 = 10, a_3 = 14$ ב. $d = 4$
- (19) א. $a_1 = 50, d = -6$ ב. $a_{10} = -4$ ג. $n = 6$
- (20) א. $n = 81$ ב. $n = 16$
- (21) א. $d_1 = 4$ ב. $a_1 = -52, b_1 = 95$
- (22) אי-זוגיים: $S = 99$ זוגיים: $S = 135$
- (23) שאלת הוכחה.
- (24) 29 איברים.
- (25) א. i. $x = -50$ ii. $d = 11$ ב. $a_1 = -121$ ג. $S = 2156$
- (26) א. הוכחה. ב. $a_1 = -8, d = 2$ ג. $n = 36$
- (27) א. הוכחה. ב. $S = 22a_1 + 693$ ג. $a_9 = 1$
- (28) א. 12 לפי ההצעה הראשונה ו-8 לפי ההצעה השנייה. ב. 45000 נח.

סדרה הנדסית:

סיכום כללי:

- **נוסחת האיבר הכללי:**

נוסחת האיבר הכללי של סדרה הנדסית המתחילה באיבר a_1 ומנתה היא q נתונה ע"י הנוסחה: $a_n = a_1 q^{n-1}$, כאשר: n הוא מיקום האיבר שערכו a_n בסדרה.

- **כלל נסיגה של סדרה הנדסית:**

כלל נסיגה של סדרה הנדסית a_n שמנתה היא q ואיברה הראשון הוא a_1 נתון ע"י הקשר הבא: $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

- **נוסחת הסכום של סדרה הנדסית:**

סכום n האיברים הראשונים של סדרה הנדסית a_n שמנתה היא q ואיברה

$$\text{הראשון הוא } a_1 \text{ נתון ע"י: } S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

שאלות:

$$(1) \quad \text{נתונה הסדרה ההנדסית: } \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, \dots$$

מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 9 איברים.

$$(2) \quad \text{מצא כמה איברים יש בסדרה ההנדסית: } \frac{9}{64}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{64}{81}$$

(3) בסדרה הנדסית האיבר השישי הוא 8 והאיבר העשירי הוא 128. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

(4) בסדרה הנדסית ההפרש בין האיבר השביעי לאיבר החמישי הוא 432 וההפרש בין האיבר החמישי לשלישי הוא 48. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

- (5) בסדרה הנדסית עולה ההפרש בין האיבר השמיני לאיבר הרביעי הוא 3120 וסכום האיברים השני והרביעי הוא 5.2. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.
- (6) תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 3 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 324 קפיצות?
- (7) מצא את ערכו של x אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה הנדסית: $x-6, x+4, 4x+1$. מצא גם את מנת הסדרה.
- (8) נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא:
$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n \\ a_1 = 3 \end{cases}$$
 הוכח שהסדרה הנדסית ומצא מהו האיבר השמיני בה.
- (9) מצא את סכום תשעת האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית: 5, 10, 20, 40, ...
- (10) תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 2 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 5 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 1562 קפיצות?
- (11) סכום n האיברים האחרונים בסדרה הנדסית בת $3n$ איברים שמנתה 2, גדול פי 256 מסכום n האיברים הראשונים בה. כמה איברים בסדרה?
- (12) בסדרה הנדסית עולה שבה n איברים, סכום $n-3$ האיברים האחרונים גדול פי 8 מסכום $n-3$ האיברים הראשונים בה. מצא את מנת הסדרה.
- (13) סכום כל האיברים בסדרה הנדסית הוא 252. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-120 מהאיבר השני בה. מצא כמה איברים יש בסדרה אם ידוע שמנתה 2.

(14) המספרים: $2x-3$, $x-9$, $x-13$ הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית עולה שכל איבריה חיוביים.

א. מצא את x .

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. כתוב את נוסחת האיבר הכללי בסדרה זו.

ii. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 18750.

ג. ידוע כי האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n = 5^{11}$.

מצא את סכום 7 האיברים האחרונים בסדרה.

(15) נתונה הסדרה ההנדסית הבאה: $a_1, 4, 12, 36, \dots, a_{n+1}$. מוסיפים לכל איבר בסדרה זו שישית מהאיבר הבא אחריו ויוצרים סדרה חדשה b_n באופן הבא:

$$b_1 = a_1 + \frac{a_2}{6}, \quad b_2 = a_2 + \frac{a_3}{6}, \quad b_3 = a_3 + \frac{a_4}{6}, \quad \dots, \quad b_n = a_n + \frac{a_{n+1}}{6}$$

א. הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.

ב. הראה כי היחס בין סכום n האיברים הראשונים של הסדרה a_n

ובין סכום n האיברים הראשונים של הסדרה b_n הוא $\frac{2}{3}$.

ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה b_n שסכומם מהווה $\frac{2}{9}$ מ- a_8 .

(16) נתונה הסדרה ההנדסית: $7, 14, 28, \dots$.

בסדרה יש 8 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

(17) בסדרה הנדסית ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות הזוגיים גדול פי 4 מסכום האיברים במקומות האי-זוגיים. חשב את מנת הסדרה.

(18) נתונה סדרה הנדסית שמנתה q ובה מספר זוגי של איברים. בטא באמצעות q את היחס בין סכום איברי הסדרה כולה לסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים שבה.

(19) בסדרה הנדסית שבה $2n+1$ איברים, סכום n האיברים הראשונים קטן פי 9 מסכום n האיברים הבאים אחריהם. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-30 מהאיבר הראשון שבה. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

(20) ענה על הסעיפים הבאים :

- א. הראה כי בסדרה הנדסית שבה $2n$ איברים היחס בין סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים לבין סכום כל איברי הסדרה תלוי במנת בסדרה.
- בסדרה הנדסית שבה מספר זוגי של איברים ידוע כי סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים קטן פי 4 מסכום כל איברי הסדרה. האיבר הראשון בסדרה זו קטן ב-2 ממנת הסדרה.
- ב. כתוב נוסחה לאיבר כללי של סדרה זו.
- ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 324.

(21) בסדרה הנדסית שבה 12 איברים סכום כל איברי הסדרה גדול פי 3 מסכום האיברים כאשר מחליפים את סימני כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

א. מצא את מנת הסדרה.

- ב. ידוע כי ההפרש בין האיבר החמישי לאיבר הרביעי בסדרה הוא 8.
- מצא את האיבר הראשון בסדרה.
- ג. חשב את סכום כל האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה.

(22) באחת ממדינות המזרח היה מלך שאהב משחקי חשיבה. לכבוד יום הולדתו הכין לו השר הבכיר שבממלכתו משחק מיוחד המכיל 25 משבצות ו-2 חיילי משחק. המלך, מרוב התלהבות ושמחה לא ידע כיצד לגמול לשר החכם ושאל אותו מה ירצה בתמורה. השר סרב לקבל דבר על מתנתו עד שלבסוף החליט המלך לתת לשר מחצית מכל אוצרות הממלכה המונים כ-40 מיליון אבנים יקרות. לאחר ששמע על כך השר, הוא החליט לאתגר את המלך והעלה את ההצעה הבאה :

תן לי אבן יקרה אחת והכפל אותה בכל משבצת שבמשבצות המשחק באופן הבא : כנגד המשבצת הראשונה - אבן אחת, כנגד השנייה - שתי אבנים, כנגד השלישית - ארבע אבנים וכן הלאה...

המלך הסכים להצעה.

- א. כמה אבנים המלך ייתן לשר כנגד המשבצת האחרונה במשחק?
- ב. העזר בכמות האבנים שברשותו של השר וקבע האם הצעתו שוות-ערך יותר מהחלטת המלך לתת לו מחצית מאוצרות הממלכה.
- ג. סמוך לפני שנתן המלך את האבנים לשר, הציעה בתו של המלך הצעה נוספת והיא : תן עבור כל משבצת זוגית 2^n אבנים, כאשר n הוא מספר המשבצת. האם כדאי למלך לקבל את הצעת בתו או להישאר עם ההצעה המקורית של השר?

תשובות סופיות:

(1) $a_9 = 729$

(2) $n = 7$

(3) $a_1 = \pm \frac{1}{4}, q = \pm 2$

(4) $a_1 = \frac{2}{3}, q = \pm 3$

(5) $a_1 = \frac{1}{25}, q = 5$

(6) 5 דקות.

(7) $x = -\frac{2}{3} \rightarrow q = -\frac{1}{2}, x = 11 \rightarrow q = 3$

(8) $a_8 = 384$

(9) $S_9 = 2555$

(10) 5 דקות.

(11) $n = 4$, יש 12 איברים בסדרה.

(12) $q = 2$

(13) $n = 6$

(14) א. $x = 14$ ב. i. $a_n = 5^{n-1}$ ב. ii. a_6, a_7 ג. $S_7^* = 61,034,375$

(15) א. $q = 3$ ג. b_5, b_6

(16) אי-זוגיים: $S = 595$, זוגיים: $S = 1190$

(17) $q = 4$

(18) $\frac{q+1}{q}$

(19) $a_1 = \frac{3}{8}$

(20) א. $\frac{S_{n(o)}}{S_{2n}} = \frac{1}{q+1}$ ב. $a_n = 3^{n-1}$ ג. a_5, a_6

(21) א. $q = 2$ ב. $a_1 = 1$ ג. $S_{6(p)} = 2730$

(22) א. $a_{25} = 16,777,216$

ב. לפי הצעת השר יהיו לו 33,554,431 אבנים ולפי הצעת המלך יהיו

לו 20,000,000 אבנים. ג. $2^{24}, 4, 16, 64, \dots$, $S_n = 22,369,620$

סדרות מעורבות:

שאלות:

- (1) נתונים שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית שמנתה 3. אם נכפול את המספר הראשון ב-3, נוסיף למספר השני 4 ונחסיר מהמספר השלישי 4 תתקבל סדרה חשבונית. מצא את המספרים.
- (2) נתונות שתי סדרות שמתחילות במספר 2 ובשתייהן 3 איברים. סדרה אחת היא חשבונית והשנייה הנדסית. האיבר השלישי בשתי הסדרות זהה והאיבר השני בסדרה ההנדסית קטן ב-4 מהאיבר השני בסדרה החשבונית. מצא את מנת הסדרה ההנדסית.
- (3) נתונים ארבעה מספרים בעלי התכונות הבאות:
הראשון, השני והרביעי מהווים שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית שמנתה 2.
הראשון, השלישי והרביעי מהווים שלושה איברים עוקבים בסדרה חשבונית
וסכומם $22\frac{1}{2}$. מצא את ארבעת המספרים.
- (4) ההפרש של סדרה חשבונית שווה למנה של סדרה הנדסית עולה.
האיבר הראשון בסדרה ההנדסית הוא 6 וידוע כי סכום 2 האיברים הראשונים בסדרה החשבונית שווה לסכום שני האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית.
האיבר השלישי בסדרה ההנדסית גדול פי 2 מהאיבר השלישי בסדרה החשבונית.
א. מצא את שלושת האיברים של הסדרה החשבונית.
ב. מצא כמה איברים יש לחבר בסדרה החשבונית החל מהאיבר הראשון כדי לקבל את הסכום 60.
ג. מצא את מיקומו הסידורי של איבר בסדרה ההנדסית הגדול פי 12 מהאיבר האחרון שחובר בסכום הסדרה החשבונית שחישבת בסעיף הקודם.
- (5) נתונות שתי הסדרות הבאות: סדרה חשבונית: $a_1, a_2, a_3, \dots$ וסדרה הנדסית: $b_1, b_2, b_3, \dots$. ידוע כי האיבר הראשון בשתי הסדרות שווה. האיבר השלישי בסדרה ההנדסית גדול פי 4 מהאיבר הראשון בסדרה החשבונית.
א. מצא את מנת הסדרה ההנדסית אם ידוע כי היא אינה עולה.
ב. נתון גם כי האיבר החמישי בסדרה ההנדסית שווה לאיבר הרביעי בסדרה החשבונית. הוכח כי הפרש הסדרה החשבונית גדול פי 5 מהאיבר הראשון.
ג. בכל סדרה יש 10 איברים. הסכום של כל האיברים של שתי הסדרות יחד הוא 212. מצא את האיבר הראשון של שתי הסדרות.

תשובות סופיות:

- (1) המספרים הם: 2, 6, 18.
- (2) $q = -1$ או $q = 3$.
- (3) המספרים הם: 3, 6, 7.5, 12.
- (4) א. 8, 10, 12 ב. 5 ג. 6.
- (5) א. $q = -2$ ג. $a_1 = 2$.

סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

סיכום כללי:

• הגדרה:

סדרה הנדסית a_n המקיימת: $|q| < 1$, $(q \neq 0)$ נקראת סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת.

• נוסחת הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת a_n ניתן לחישוב ע"י שימוש בכלל: $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ והצבתו בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית.

$$S = \frac{a_1}{1-q} \quad \text{מתקבל הכלל הבא:}$$

• סכום סופי של איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

○ כאשר מתבקשים לחשב סכום של n איברים ראשונים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה: $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

○ כאשר מתבקשים לחשב סכום של n איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת המתחילים באיבר a_k יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה

$$S_n = \frac{a_k(q^n - 1)}{q - 1} \quad \text{באופן הבא:}$$

שאלות:

(1) מצא את סכום כל איברי הסדרה ההנדסית הבאה: $12, 4, 1\frac{1}{3}, \dots$

(2) סכום כל איברי סדרה הנדסית אינסופית שמנתה $\frac{1}{4}$ הוא 32. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

(3) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 62.5. ידוע כי האיבר השני בסדרה הוא 10. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה (שתי אפשרויות).

(4) האיבר הראשון בסדרה הנדסית אינסופית יורדת הוא 14. סכום האיברים במקומות הזוגיים הוא $9\frac{1}{3}$. מצא את סכום האיברים במקומות האי-זוגיים.

*הערה: שתי השאלות הבאות מסכמות את סוגי הסכומים וייצוג סדרות שונות באמצעות סדרה נתונה כפי שמקובל בנושא זה ואינן מייצגות אורך של שאלת בגרות.

(5) נתונה סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת a_n שמנתה q , $(q \neq 0, |q| < 1)$, מגדירים שלוש סדרות חדשות: b_n , c_n ו- d_n באופן הבא:

הסדרה:	b_n	c_n	d_n
הכלל:	$b_1 = a_1$	$c_1 = a_2^2 - a_1^2$	$d_1 = S_a + a_1$
	$b_2 = a_1 + a_2$	$c_2 = a_3^2 - a_2^2$	$d_2 = S_a + a_2$
	$b_3 = a_1 + a_2 + a_3$	$c_3 = a_4^2 - a_3^2$	$d_3 = S_a + a_3$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$b_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = S_{a(n)}$	$c_n = a_{n+1}^2 - a_n^2$	$d_n = S_a + a_n$

הסכום S_a הוא סכום הסדרה a_n , והסכום $S_{a(n)}$ הוא סכום n האיברים הראשונים של הסדרה a_n .

- א. קבע אלו מבין הסדרות b_n , c_n ו- d_n הן הנדסיות והבע את מנתן ע"י q .
- ב. הבע באמצעות a_1 בלבד את סכום הסדרה ההנדסית שמצאת בסעיף הקודם.
- ג. מסמנים את סכום ריבועי האיברים של הסדרה ההנדסית שמצאת בסעיף א' ב- $S_{(s)}$. הוכח כי לא קיים ערך של q עבורו סכום ריבועי האיברים $S_{(s)}$, שווה לסכום הסדרה הנ"ל בריבוע.

(6) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת: a_n שמנתה q .

מגדירים סדרה חדשה b_n באופן הבא:

$$b_1 = S_1^* = \frac{a_1}{1-q}, b_2 = S_2^* = \frac{a_2}{1-q}, b_3 = S_3^* = \frac{a_3}{1-q}, \dots, b_n = S_n^* = \frac{a_n}{1-q}, \dots$$

כאשר: S_n^* מייצג את סכום הסדרה a_n החל מהאיבר a_n (ועד אינסוף).

- א. הוכח כי הסדרה b_n היא גם הנדסית אינסופית יורדת וכתוב את נוסחת האיבר הכללי שלה באמצעות a_1 ו- q .
- ב. ידוע כי סכום הסדרה b_n הוא 126 וכי סכום 8 האיברים הראשונים בסדרה a_n גדול פי 6560 מהאיבר התשיעי בסדרה b_n . מצא את a_1 ו- q .
- ג. היעזר בסעיף הקודם והוכח כי מתקיים: $b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots = 42$.
- ד. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה b_n .
- ה. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה b_n .
- ו. מחליפים את סימני האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה b_n כך שנוצרת הסדרה: b_n^* . חשב את סכום הסדרה b_n^* .
- ז. מחליפים את סימני האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה b_n כך שנוצרת הסדרה: b_n^{**} . חשב את סכום הסדרה b_n^{**} .
- ח. מעלים בריבוע את כל איברי הסדרה b_n . מסמנים את הסכום המתקבל ב- $S_{(s)}$ (מלשון: square). כמו כן, מסמנים את סכום הסדרה המקורית b_n ב- S_b . הראה כי: $S_b^2 \neq S_{(s)}$.
- ט. הוכח כי היחס בין סכום איברי הסדרה a_n וסכום איברי הסדרה b_n הוא $\frac{2}{3}$.

- (7) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 24. מאיברי הסדרה הנתונה יצרו את סדרה חדשה באופן הבא: $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, a_4 + a_5, \dots$.
- הוכח שהסדרה החדשה היא הנדסית אינסופית יורדת.
 - ידוע שסכום כל איברי הסדרה החדשה הוא 32.
 - מצא את האיבר הראשון והמנה של הסדרה המקורית.
- (8) בסדרה הנדסית אינסופית יורדת a_n ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים גדול פי $1\frac{2}{3}$ מסכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.
- מצא את מנת הסדרה.
 - מחברים כל שני איברים סמוכים בסדרה הנתונה ויוצרים סדרה חדשה b_n .
 - הוכח כי הסדרה b_n גם היא הנדסית יורדת ומצא את מנתה.
 - הראה כי סכום הסדרה b_n שווה לסכום הסדרה a_n .
 - סכום שתי הסדרות יחד הוא 1000. מצא את האיבר הראשון בסדרה a_n .
- (9) נתונה סדרה הנדסית אינסופית $a_1, a_2, a_3, \dots$ שמנתה היא q , $(0 < q < 1)$.
- נגדיר את הסכומים הבאים: $T = a_1 + a_2 + a_5 + a_6 + a_9 + a_{10} + \dots$, $V = a_3 + a_7 + a_{11} + \dots$. נתון כי: $T = 6V$.
 - מצא את מנת הסדרה q .
 - פי כמה קטן V מסכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה?
 - מצא את האיבר הראשון אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים הוא $1365\frac{1}{3}$.
- (10) נתונה הסדרה ההנדסית הבאה: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$ שמנתה היא q .
- בונים סדרה חדשה מריבועי כל האיברים הסדרה באופן הבא: $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots, a_{2n}^2$.
 - הוכח כי היחס בין סכום n האיברים הראשונים בסדרת הריבועים ובין סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה הנתונה תלוי רק באיבר הראשון של הסדרה.
 - בסדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 640 ידוע כי סכום 10 האיברים הראשונים כאשר מעלים אותם בריבוע גדול פי 320 מסכום 10 האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.
 - מצא את מנת הסדרה.
 - מחברים את כל איברי הסדרה החל מאיבר a_n כלשהו.
 - ידוע כי סכום זה קטן פי 16 מסכום הסדרה המקורי. מצא את האיבר a_n .

- 11** נתונה סדרה הנדסית אינסופית $a_1, a_2, a_3, \dots$ שמנתה היא q , $(q \neq 0, |q| < 1)$.
 נגדיר את הסכומים הבאים: $T = a_1 + a_3 + a_6 + a_8 + a_{11} + a_{13} + \dots$, $V = a_2 + a_7 + a_{12} + \dots$.
 נתון כי: $V = 0.3T$.
 א. מצא את מנת הסדרה q .
 מחליפים את הסימנים של כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים ומתקבלת סדרה חדשה שסכומה הוא 12.
 ב. מצא את האיבר הראשון בסדרה המקורית.
 ג. מעלים את כל איברי הסדרה בריבוע. חשב את סכום הסדרה כעת.

תשובות סופיות:

$$S = 18 \quad (1)$$

$$a_1 = 24 \quad (2)$$

$$q = \frac{4}{5}, a_1 = 12 \frac{1}{2} \text{ או } q = \frac{1}{5}, a_1 = 50 \quad (3)$$

$$S = 18 \frac{2}{3} \quad (4)$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{\frac{a_{n+1}(q^{n+1}-1)}{q-1}}{\frac{a_n(q^n-1)}{q-1}} = \frac{a_{n+1}(q^{n+1}-1)}{a_n(q^n-1)} = q \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q^n-1} : b_n \text{ הסדרה } (5)$$

היות והיא תלויה ב- n היא אינה הנדסית.

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2}{a_{n+1}^2 - a_n^2} = \frac{a_n^2 q^4 - a_n^2 q^2}{a_n^2 q^2 - a_n^2} = \frac{a_n^2 q^2 (q^2 - 1)}{a_n^2 (q^2 - 1)} = q^2 : c_n \text{ הסדרה } c_n \text{ הנדסית}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{S + a_{n+1}}{S + a_n} = \frac{\frac{a_1}{1-q} + a_{n+1}}{\frac{a_1}{1-q} + a_n} = \frac{a_1 + (1-q)a_{n+1}}{a_1 + (1-q)a_n} = \frac{a_1(1 + (1-q)q^n)}{a_1(1 + (1-q)q^{n-1})} = \frac{q^n - q^{n+1} + 1}{q^{n-1} - q^n + 1} : d_n \text{ הסדרה}$$

$$S_{(c_n)} = \frac{c_1}{1-q_c} = \frac{a_2^2 - a_1^2}{1-q^2} = \frac{a_1^2(q^2-1)}{1-q^2} = -a_1^2. \text{ ב. } \text{היות והיא תלויה ב-} n \text{ היא אינה הנדסית.}$$

ג. מההשוואה: $S_{(s)} = S^2$ מקבלים כי פתרון המשוואה הוא: $q = 0, \pm 1$.

כולם נפסלים מכיוון שמנת הסדרה הנתונה a_n היא שבר.

עבור $|q| > 1$ הסדרות אינן מתכנסות ולכן לא קיים ערך של q עבורו השוויון יתקיים. מש"ל.

$$b_n = \frac{a_1}{1-q} q^{n-1} \quad \text{א.} \quad a_1 = 56, q = \frac{1}{3} \quad \text{ב.} \quad \text{ג. הוכחה.} \quad \text{ד. } 31.5 \quad (6)$$

$$\text{ה. } 94.5 \quad \text{ו. } -63 \quad \text{ז. } 63 \quad \text{ח. } 7938$$

$$S^2 : \text{משמעו: } (b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots)^2$$

$$S_{(s)} : \text{משמעו: } b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 + \dots \text{ ברור כי הביטויים אינם שווים.}$$

$$q = \frac{1}{3}, a_1 = 16 \quad \text{ב.} \quad \text{א. הוכחה.} \quad (7)$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{2n+1} + a_{2n+2}}{a_{2n-1} + a_{2n}} = q^2 \quad \text{ב.} \quad q = 0.6 \quad \text{א.} \quad a_1 = 200 \quad \text{ז.} \quad (8)$$

$$q = \frac{1}{2} \quad \text{א.} \quad \text{ב. פי 5} \quad \text{ג. } a_1 = 1024 \quad (9)$$

$$a_5 = 20 \quad \text{ג.} \quad q = 0.5 \quad \text{ב.} \quad \text{א. הוכחה.} \quad (10)$$

$$S = 288 \quad \text{ג.} \quad a_1 = -16 \quad \text{ב.} \quad q = \frac{1}{3} \quad \text{א.} \quad (11)$$

סדרת נסיגה:

שאלות:

$$(1) \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2n - 11 \\ a_1 = -6 \end{cases} \quad \text{נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא:}$$

- א. מצא את האיבר השלישי בסדרה.
 ב. נתון כי האיבר השלושה-עשר בסדרה הוא 18. מצא את a_{14} ו- a_{12} .
 ג. נתון כי האיבר השלושים ואחת בסדרה הוא k .
 הבע באמצעות k את a_{32} ו- a_{30} .
 ד. מצא את מיקומם של שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 133.
 ה. הסבר מדוע אין שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 62.

$$(2) \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2n \\ a_1 = 0 \end{cases} \quad \text{נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא:}$$

נתון כי $a_k = 72$. הבע באמצעות k את a_{k+2} .

$$(3) \quad \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + n^2 - 31 \\ a_7 = t \end{cases} \quad \text{נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא:}$$

מצא את ערכו של t שבעבורו האיברים a_7, a_8, a_9 הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית.

$$(4) \quad \begin{aligned} &\text{סדרה שהאיבר הכללי בה הוא } a_n \text{ מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: } a_{n+1} = a_n + 6n - 2 \\ &\text{מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא } b_n \text{ באופן הבא: } b_n = a_{n+1} - a_n \\ &\text{א. הוכח שהסדרה } b_n \text{ היא סדרה חשבונית ומצא את הפרשה.} \\ &\text{ב. חשב את } b_1. \end{aligned}$$

$$(5) \quad \begin{aligned} &\text{סדרה שהאיבר הכללי בה הוא } a_n \text{ מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: } a_{n+1} = 3a_n + 4 \\ &\text{מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא } b_n \text{ באופן הבא: } b_n = a_n + 2 \\ &\text{א. הוכח שהסדרה } b_n \text{ היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.} \\ &\text{ב. נתון: } b_5 = 162. \text{ חשב את } a_1. \end{aligned}$$

- (6) סדרה מוגדרת ע"י הכלל: $a_1 = 3, a_{n+1} = 3a_n + 10n - 5$.
 מגדירים סדרה חדשה המקיימת לכל n טבעי: $b_n = a_n + 5n$.
 א. הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית.
 ב. חשב את האיבר b_5 .
 ג. חשב את הסכום: $b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{12}$.
- (7) סדרה מוגדרת לכל n טבעי ע"י הנוסחה: $a_1 = k, a_{n+1} = 8n - a_n + 3$.
 א. הבע באמצעות k את ארבעת האיברים הראשונים בסדרה.
 ב. הוכח כי סדרת האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים וסדרת האיברים העומדים במקומות הזוגיים הן חשבוניות ומצא את הפרשן.
 ג. חשב את סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה.
- (8) סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה הבא: $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{3a_n}{2a_n + 3}$.
 מגדירים סדרה חדשה לפי: $b_n = \frac{4 - 7a_n}{a_n}$.
 א. הוכח כי הסדרה b_n היא חשבונית ומצא את הפרשה.
 ב. חשב את הסכום הבא: $b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{22}$.
- (9) סדרה מקיימת את כלל הנסיגה: $a_1 = 1, a_{n+1} = 3n - a_n - 7$.
 א. חשב את 5 האיברים הראשונים וקבע האם הסדרה היא חשבונית.
 ב. הוכח כי לכל n טבעי מתקיים: $a_{n+2} = a_n + 3$.
 ג. כתוב נוסחה לסכום n האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.
 ד. חשב את הסכום הבא: $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{17}$.

10 סדרה מוגדרת לפי כלל הנסיגה הבא : $a_{n+1} = a_n + 2 \cdot 3^n + 2$.

א. ענה על הסעיפים הבאים :

i. הבע את a_{n+2} באמצעות a_n .

ii. מצא את מיקומו הסידורי של איבר הגדול ב-652 מהאיבר העומד שני מקומות לפניו.

ב. הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של אחת מהסדרות המיוצגות

ע"י כלל הנסיגה הנ"ל היא : $S_n = 1.5 \cdot 3^n + n^2 + n - 1.5$.

חשב את הסכום הבא : $a_6 + a_7 + a_8 + \dots + a_{11}$.

ג. מהו האיבר הראשון של הסדרה המיוצגת ע"י כלל הנסיגה ונוסחת הסכום הנ"ל?

11 סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה : $a_1 = 6, a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 5}$.

מגדירים סדרה חדשה b_n המקיימת לכל n טבעי : $b_n = \frac{a_n + 3}{a_n}$.

א. הוכח כי הסדרה b_n היא הנדסית ומצא את מנתה.

ב. כתוב נוסחה ל- b_n באמצעות n בלבד.

ג. חשב את הסכום הבא : $b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots - b_{10}$.

תשובות סופיות:

$$\text{א. } a_3 = -22 \quad \text{ב. } a_{12} = 5, a_{14} = 33 \quad \text{ג. } a_{30} = k - 49, a_{32} = k + 51 \quad (1)$$

$$\text{ד. } a_{62}, a_{63}$$

$$a_{k+2} = 74 + 4k \quad (2)$$

$$t = -33 \quad (3)$$

$$\text{א. } d = 6 \quad \text{ב. } b_1 = 4 \quad (4)$$

$$\text{א. } q = 3 \quad \text{ב. } a_1 = 0 \quad (5)$$

$$\text{א. } b_{n+1} = 3b_n \quad \text{ב. } b_5 = 648 \quad \text{ג. } S = 1594320 \quad (6)$$

$$\text{א. } a_1 = k, a_2 = 11 - k, a_3 = k + 8, a_4 = 19 - k \quad \text{ב. } 8 \quad (7)$$

$$\text{ג. } 830$$

$$\text{א. } S_{11(p)} = 267 \frac{2}{3} \quad \text{ב. } (8)$$

$$\text{א. } a_1 = 1, a_2 = -5, a_3 = 4, a_4 = -2, a_5 = 7 \quad \text{ג. } S_{n(o)} = 1.5n^2 - 0.5n \quad (9)$$

$$\text{ד. } S_{9(o)} = 117$$

$$\text{ii. } a_4$$

$$\text{א. } a_{n+2} = a_n + 8 \cdot 3^n + 4 \quad \text{i. } (10)$$

$$\text{ג. } a_1 = 5$$

$$\text{ב. } S_{6-11} = 265458$$

$$\text{ג. } S_{10}^* = -4086.74$$

$$\text{ב. } b_n = 1.5 \cdot 2.5^{n-1}$$

$$\text{א. } q = 2.5 \quad (11)$$

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 6 - הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות

תוכן העניינים

1. פונקציה - הגדרה ותכונות בסיסיות (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית 91
3. הפונקציה הריבועית 101
4. הפונקציה המעריכית (ללא ספר)
5. הפונקציה הלוגריתמית (ללא ספר)
6. פונקציות מפורסמות נוספות (ללא ספר)
7. הזזות שיקופים מתיחות וכיווצים של פונקציה (ללא ספר)
8. הפונקציות הטריגונומטריות (ללא ספר)
9. הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות (ללא ספר)

הפונקציה הליניארית

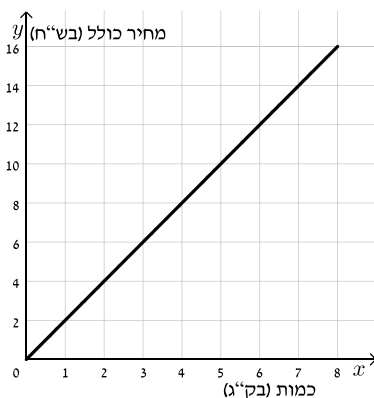
סיכום כללי

ניתן להציג תהליכים שונים באמצעות יחס ישר בין שני משתנים.

יחס זה מוצג בתור קו ישר מהצורה: $\frac{y}{x} = m$ או $y = mx$.

הפונקציה מהצורה: $y = mx$ מתאר יחס ישר בין x ל- y .

שאלות



- 1) המחיר של 1 ק"ג עגבניות הוא 2 ₪.
הקו הישר שבסרטוט מתאר את מחיר העגבניות הכולל כפונקציה של משקל העגבניות.
א. מה המחיר של 3 ק"ג עגבניות?
ב. מהי כמות העגבניות שניתן לקנות ב-12 ₪?
ג. מהו היחס בין כמות העגבניות (בק"ג) שניתן לרכוש לבין מחירם?
ד. כתוב ביטוי אלגברי שייצג את המחיר הכולל של העגבניות כתלות במשקלם.

שיפוע ישר – סיכום

ישר שמשוואתו היא $y = mx$ הוא בעל שיפוע m כאשר:

- אם $m > 0$ הישר עולה.
- אם $m < 0$ הישר יורד.
- אם $m = 0$ הישר קבוע (אינו עולה ואינו יורד).

חישוב שיפוע בשיטת המדרגות

בכל התקדמות של יחידה אחת לאורך ציר x נבדוק כמה יחידות עלינו או ירדנו לאורך ציר y . שיפוע הישר יתאים להתקדמות בציר ה- y .

שיפוע בין שתי נקודות

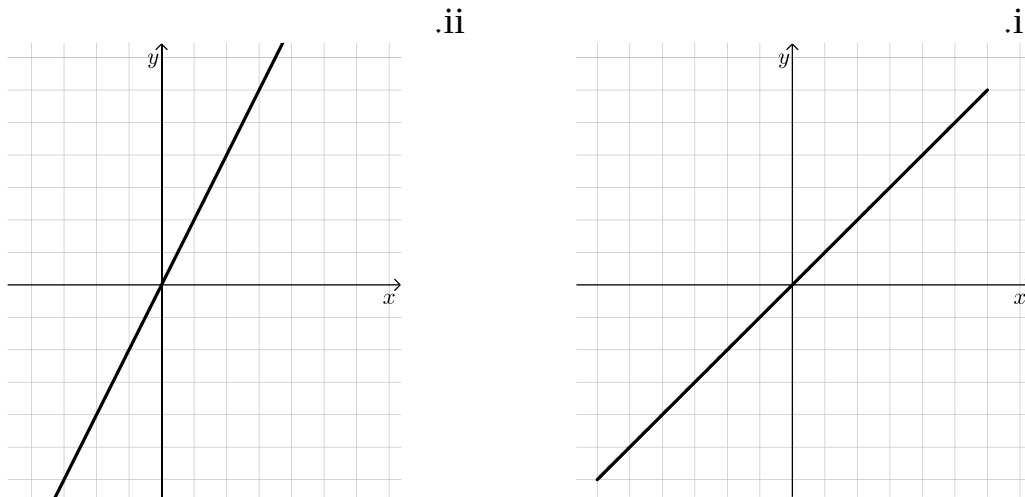
ניתן לחשב שיפוע בין שתי נקודות כלליות הנמצאות על ישר.

נניח ישר העובר דרך שתי נקודות $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$.

שיפוע הישר יחושב: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (כאשר $\Delta x \neq 0$).

חשוב להקפיד על חיסור של אותן הנקודות במונה ובמכנה.

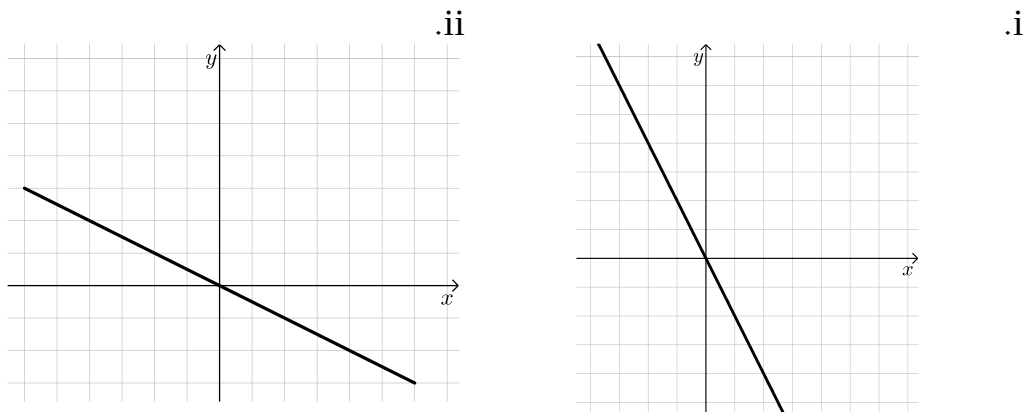
2) לפניך הגרפים של הישרים הבאים:



א. מצא את השיפוע של כל אחד מהם.

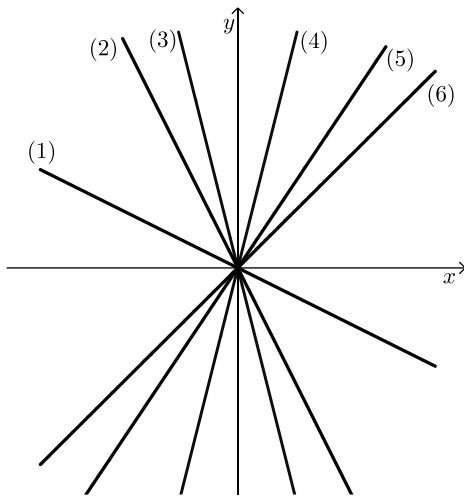
ב. רשום פונקציה מהצורה: $y = mx$ לכל אחד מהישרים.

3) לפניך הגרפים של הישרים הבאים:



א. מצא את השיפוע של כל אחד מהם.

ב. רשום פונקציה מהצורה: $y = mx$ לכל אחד מהישרים.



(4) לפניך 6 ישרים במערכת צירים אחת ו-6 שיפועים:

$$-\frac{2}{3}, 2, -2, 1.2, -4, 4.$$

התאם כל שיפוע לכל ישר.

הקו הישר הכללי – סיכום

- משוואת הקו הישר הכללי היא מהצורה: $y = mx + b$ כאשר m הוא שיפוע הישר ו- b הוא האיבר החופשי כמשוואה.
- האיבר החופשי מייצג את נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y אשר תמיד תהיה $(0, b)$.
- ישרים המקבילים זה לזה על בעלי אותו השיפוע (אותו m) ואיברים חופשיים שונים (b שונה), למשל: $y = 4x + 1$, $y = 4x - 5$.
- ישרים המקבילים לצירים הם מהצורות הבאות:
 - ישר המקביל לציר ה- x : $y = n$.
 - ישר המקביל לציר ה- y : $x = k$.

(5) כתוב מהו m ומהו b במשוואות הישרים הבאות:

א. $y = 3x - 2$

ב. $y = x + 6$

ג. $y = \frac{x}{3} + \frac{2}{5}$

ד. $y = \frac{x-3}{2}$

ה. $y = 3 + 2(x-1)$

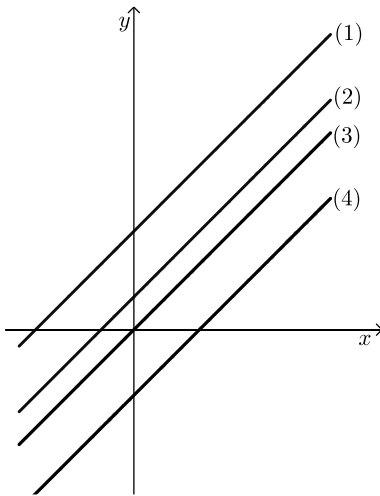
ו. $3y - 2x + 1 = 0$

(6) כתוב את משוואות הישרים הבאות:

א. ישר בעל שיפוע $m = 3$ אשר חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -1$.

ב. ישר בעל שיפוע -5 שפוגש את ציר ה- y כאשר $y = 6$.

ג. ישר קבוע שחותך את ציר ה- y ב-4.



7) התאם בין הגרפים למשוואות הישרים:

א. $y = x + 3$

ב. $y = x + 1$

ג. $y = x$

ד. $y = x - 2$

מציאת משוואת ישר – סיכום

שיפוע ישר לפי שתי נקודות

שיפוע ישר העובר דרך שתי נקודות $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ יחושב: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (כאשר $\Delta x \neq 0$).

משוואת ישר

ניתן למצוא משוואת ישר מהצורה $y = mx + b$ כאשר נתונות שתי נקודות הנמצאות עליו לפי השלבים הבאים:

- מציאת הפרמטר m (שיפוע הישר) לפי: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

- מציאת הפרמטר b (האיבר החופשי) ע"י הצבת m ואחת מן הנקודות הנתונות במשוואת הישר.

לחילופין ניתן לבצע את שתי הפעולות יחד לפי הנוסחה: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

חישוב שיפוע בין שתי נקודות

8) חשב את השיפוע של ישר העובר דרך הזוגות הבאים:

א. $(0, 4)$, $(8, 0)$ ב. $(0, 0)$, $(3, -4)$

ג. $(1, 8)$, $(7, -9)$ ד. $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$, $\left(1\frac{1}{3}, 5\right)$

מציאת משוואת ישר באמצעות נקודה ושיפוע

(9) מצא את משוואת הישרים הבאות :

- א. שיפועו 3 והוא עובר דרך הנקודה $(2, 8)$.
- ב. שיפועו -0.5 והוא עובר דרך הנקודה $(0, -7)$.
- ג. שיפועו 0 והוא עובר דרך הנקודה $(-1, -3)$.
- ד. שיפועו $-\frac{5}{8}$ והוא עובר דרך הנקודה $(-8, 2)$.
- ה. שיפועו 1 והוא עובר דרך ראשית הצירים.

(10) מצא משוואת ישר המקביל לישר $y = 3x - 1$ וחותך את ציר ה- y בנקודה $(0, 4)$.

(11) מצא משוואת ישר המקביל לישר $y = -4x + 9$ ועובר דרך הנקודה $(-5, 7)$.

(12) מצא משוואת ישר המקביל לישר $5y - 4x + 9 = 0$ ועובר דרך ראשית הצירים.

מציאת משוואת ישר באמצעות שתי נקודות

(13) מצא את משוואות הישרים העוברים דרך הנקודות הבאות :

- א. $(1, 8)$, $(3, 6)$
- ב. $(-4, -6)$, $(0, 6)$

(14) ענה על הסעיפים הבאים :

- א. מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודות $(2, -6)$ ו- $(5, 3)$.
- ב. מצא את משוואת הישר המקביל לישר שמצאת בסעיף הקודם ועובר דרך הנקודה $(-1, 10)$.

חיוביות ושליליות של קו ישר – סיכום

חיתוך של פונקציה קווית עם הצירים

- כדי למצוא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה הקווית $y = mx + b$ עם ציר ה- y יש להציב $x = 0$ במשוואתה. מתקבל: $y = b$, כלומר: $(0, b)$ היא נקודת החיתוך של הפונקציה הקווית עם ציר ה- y .
- כדי למצוא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה הקווית עם ציר ה- x יש להציב $y = 0$. זו היא נקודת האפס של הפונקציה.

חיתוך בין פונקציות קוויות

כדי למצוא את נקודת החיתוך בין שתי פונקציות קוויות $f(x)$ ו- $g(x)$ יש להשוות את משוואותיהם: $f(x) = g(x)$ ולהציב את ערך ה- x המתקבל כפתרון באחת המשוואות כדי לקבל את ערך ה- y של נקודת החיתוך.

תחומי חיוביות ושליליות של פונקציה

- תחום החיוביות של פונקציה הוא אוסף כל ערכי ה- x המקיימים: $f(x) > 0$.
 - תחום השליליות של פונקציה הוא אוסף כל ערכי ה- x המקיימים: $f(x) < 0$.
- ניתן למצוא תחומי חיוביות ושליליות ע"י ידיעת נקודת האפס של הפונקציה תחילה.

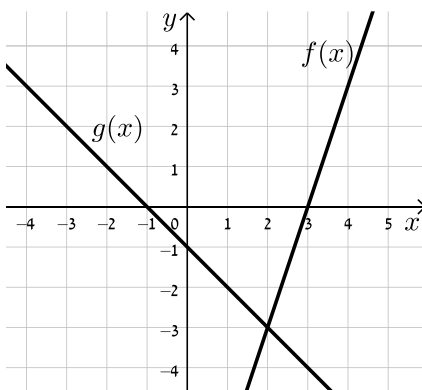
15 מצא את נקודות החיתוך של כל ישר עם הצירים:

א. $y = 2x + 5$

ב. $y = 3x - 1$

16 נתונה הפונקציה: $f(x) = 3x - 4$.

- א. מצא את הנקודה שבה: $f(x) = 0$.
- ב. מצא את התחום שבו $f(x) > 0$ ואת התחום שבו $f(x) < 0$.
- ג. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y .
- ד. סרטט את הפונקציה במערכת צירים והראה את התחומים שמצאת.



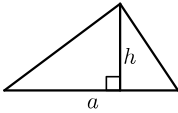
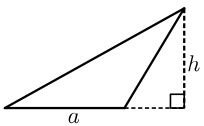
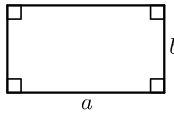
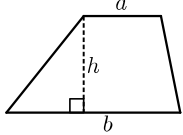
17 לפניך שני גרפים של פונקציות קוויות.

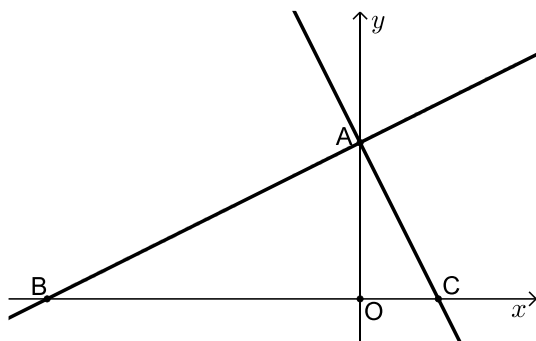
(הרווח בין השנתות מתאר יחידה אחת).

- א. מהן נקודות האפס של כל פונקציה?
- ב. מהם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$?
- ג. מהם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$?
- ד. מהי נקודת החיתוך של הפונקציות?
- ה. מהו התחום בו $f(x) > g(x)$ ומהו התחום בו $f(x) < g(x)$.

חישובי שטחים עם הפונקציה הקווית – סיכום

שטחים של משולשים ומרובעים

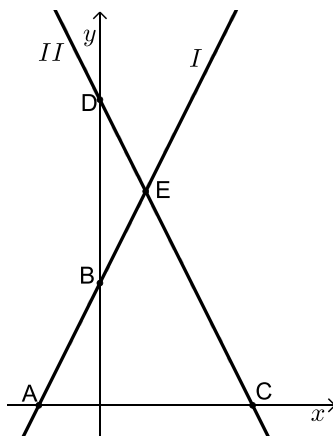
שם הצורה	איור	אופן החישוב
משולש		$S = \frac{a \cdot h}{2}$
משולש קהה זווית		$S = \frac{a \cdot h}{2}$
מלבן		$S = a \cdot b$
טרפז		$S = \frac{(a+b)h}{2}$



18 בסרטוט שלפניך מתוארים הגרפים

של הפונקציות: $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$ ו- $g(x) = -2x + 4$.

- מצא את שיעורי נקודת המפגש של שתי הפונקציות (הנקודה A).
- מצא את נקודות החיתוך של כל פונקציה עם ציר ה- x (הנקודות B ו-C).
- מצא את אורך הקטע BC ואת אורך הקטע AO.
- חשב את $S_{\triangle ABC}$.



19 נתונים הישרים: $y = 2x + 4$ ו- $y = -2x + 10$

המתוארים באיור הבא:

- התאם לכל משוואה את הישר המתאים ונמק.
- מצא את שיעורי הנקודות A, B, C, D, E.
- מצא את שטחי המשולשים ACE ו-BDE.

20 בסרטוט שלפניך מתוארים הישרים AE ו-DE.

משוואת הישר DE היא $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

נתון כי: 3 יחידות אורך $EF =$

(מקביל לציר ה- y) וכן: $A(0,5)$.

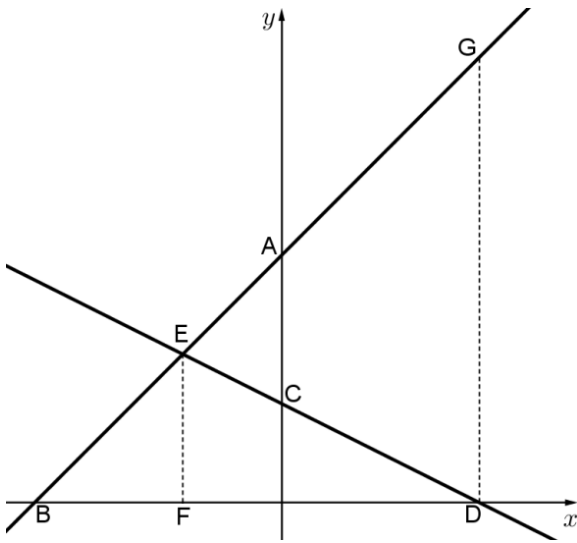
א. חשב את שיעורי הנקודה E.

ב. מצא את משוואת הישר AE.

ג. חשב את שיעורי הנקודות B ו-D.

ד. נתון כי DG מקביל לציר ה- y .

חשב את שטח הטרפז EFDG.



תשובות סופיות

- (1) א. 6 טו ב. 6 ק"ג ג. 2:1 ד. $y = 2x$
- (2) א. i. $m = 1$ ב. $y = x$ א. ii. $m = 2$ ב. $y = 2x$
- (3) א. i. $m = -2$ ב. $y = -2x$ א. ii. $m = -\frac{1}{2}$ ב. $y = -\frac{1}{2}x$
- (4) $m_{(1)} = -\frac{2}{3}$, $m_{(2)} = -2$, $m_{(3)} = -4$, $m_{(4)} = 4$, $m_{(5)} = 2$, $m_{(6)} = 1.2$
- (5) א. $m = 3, b = -2$ ב. $m = 1, b = 6$ ג. $m = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{5}$
- ד. $m = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$ ה. $m = 2, b = 1$ ו. $m = \frac{2}{3}, b = -\frac{1}{3}$
- (6) א. $y = 3x - 1$ ב. $y = -5x + 6$ ג. $y = 4$
- (7) א. (1) ב. (2) ג. (3) ד. (4)
- (8) א. -0.5 ב. $-\frac{4}{3}$ ג. $-\frac{5}{6}$ ד. 4.5
- (9) א. $y = 3x + 2$ ב. $y = -\frac{1}{2}x - 7$ ג. $y = -3$ ד. $y = -\frac{5}{8}x - 3$
- ה. $y = x$
- (10) $y = 3x + 4$
- (11) $y = -4x - 13$
- (12) $y = \frac{4}{5}x$
- (13) א. $y = -x + 9$ ב. $y = 3x + 6$
- (14) א. $y = 3x - 12$ ב. $y = 3x + 13$
- (15) א. $(0, 5)$, $(-2.5, 0)$ ב. $(0, -1)$, $(\frac{1}{3}, 0)$
- (16) א. $(\frac{4}{3}, 0)$ ב. $f(x) > 0: x > \frac{4}{3}$, $f(x) < 0: x < \frac{4}{3}$
- ג. $(0, -4)$ ד. לאיור מלא עיין בסרטון.
- (17) א. $f(x): (3, 0)$; $g(x): (-1, 0)$ ב. חיובית: $x > 3$, שלילית: $x < 3$ ג. חיובית: $x < -1$, שלילית: $x > -1$ ד. $(2, -3)$ ה. $f(x) > g(x)$ עבור: $x > 2$, ו- $f(x) < g(x)$ עבור: $x < 2$
- (18) א. $(0, 4)$ ב. $B(-8, 0)$, $C(2, 0)$ ג. $AO = 4$, $BC = 10$ ה. 20 יח"ש.



(19) א. $I: y = 2x + 4$, $II: y = -2x + 10$

ב. $A(-2, 0)$, $B(0, 4)$, $C(5, 0)$, $D(0, 10)$, $E(1.5, 7)$

ג. $S_{ACE} = 24.5$ יח"ש , $S_{BDE} = 4.5$ יח"ש

(20) א. $E(-2, 3)$ **ב.** $y = x + 5$ **ג.** $B(-5, 0)$, $D(4, 0)$

ד. 36 יחידות שטח.

הפונקציה הריבועית

סיכום כללי

ניתן להציג את משוואת הפונקציה הריבועית במספר צורות:

הצגה סטנדרטית: $y = ax^2 + bx + c$ (כאשר: a, b, c הם פרמטרים ו- $a \neq 0$).

הצגה קודקודית: $y = a(x - p)^2 + k$ (כאשר: a, p, k הם פרמטרים ו- $a \neq 0$).

הצגה כמכפלה: $y = a(x - m)(x - n)$ (כאשר: a, m, n הם פרמטרים ו- $a \neq 0$).

הערה

הצגה כמכפלה אפשרית רק כאשר יש לפחות נקודת אפס אחת לגרף הפרבולה.

שאלות

(1) כתוב פונקציה ריבועית המתאימה לערכי המקדמים הבאים:

ב. $a = -1, b = 2, c = 5$

א. $a = 1, b = 0, c = -4$

ד. $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}, c = 0$

ג. $a = b = 3, c = -5$

ו. $a = 7, b = \frac{1}{4}, c = -1$

ה. $a = -\frac{1}{5}, b = 0, c = \frac{1}{20}$

(2) נתונה הפונקציה: $y = 2x^2 + bx - 3$.

ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(1, -1)$.

א. מצא את ערך המקדם b .

ב. מצא את ציר הסימטריה של הפרבולה ואת שיעורי נקודת הקדקוד שלה.

ג. תאר אלו פעולות הזזה/מתיחה נעשו על גרף הפונקציה $y = x^2$ לקבלת גרף הפונקציה הנתונה.

סרטוט של גרף הפונקציה הריבועית הכללית – סיכום

בפונקציה הריבועית הנתונה בהצגה הסטנדרטית: $y = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$:

- הפרמטר a קובע האם הפרבולה היא ישרה או הפוכה וכן את מידת המתיחה שלה.
- הפרמטר c קובע את שיעור ה- y של נקודת החיתוך של גרף הפרבולה עם ציר ה- y .
- נוסחה למציאת ציר הסימטריה: $x = -\frac{b}{2a}$.
- שיעורי נקודת הקדקוד עבור פונקציה הנתונה בהצגה סטנדרטית הם: $\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$.

(3) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

- חשב את שיעורי נקודת הקדקוד של הפרבולה המתאימה.
 - רשום את משוואת ציר הסימטריה של הפרבולה המתאימה.
 - סרטט סרטוט סכמתי (מקורב) של הפרבולה המתאימה.
- א. $y = -2x^2 + 10$ ב. $y = -x^2 + 3x$
- ג. $y = 3x^2 - 6x + 7$ ד. $y = -8x^2 - 4x + 1$
- ה. $y = 4x^2 + 20x + 25$

מציאת נקודות האפס של פונקציה ריבועית עם a כללי – סיכום

פונקציות ריבועיות חלקיות

- פונקציה חסרת b היא מהצורה: $y = ax^2 + c$, $(a \neq 0)$.
- אם a ו- c אם שוני סימן אז לפונקציה שתי נקודות אפס ששיעוריהן: $\left(\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}, 0\right)$.
- פונקציה חסרת c היא מהצורה: $y = ax^2 + bx$, $(a \neq 0)$.
- לפונקציה שתי נקודות אפס ששיעוריהן: $(0, 0)$, $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.

שיטות לפתרון משוואה ריבועית

- פירוק טרינום (במידה וישנם שני שורשים או שורש כפול).
- השלמה לריבוע.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{נוסחת השורשים:}$$

שאלות עם פונקציות

(4) מצא את נקודות החיתוך עם ציר ה- x של הפונקציות הריבועיות הבאות:

א. $y = x^2 + 4x - 5$ ב. $y = x^2 + 6x + 10$

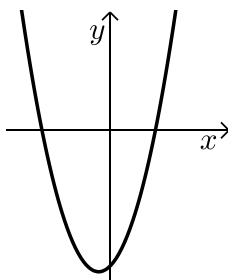
(5) בכל אחד מהמקרים שלפניך נתון ציר הסימטריה של פרבולה ושיעורי אחת מנקודות האפס שלה. מצא את שיעורי נקודת האפס הנוספת.

א. $(5, 0)$; $x = 4$ ב. $(7, 0)$; $x = -1$

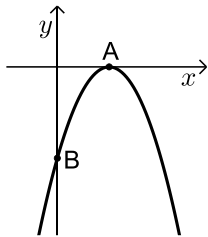
(6) נתונה הפונקציה: $y = x^2 - 2x - 15$.

- מהם שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפרבולה עם ציר ה- y ?
- רשום פונקציה ריבועית נוספת בעלת אותה נקודת חיתוך עם ציר ה- y .
- מהם שיעורי נקודות האפס של הפרבולה?
- כמה נקודות חיתוך יש לפרבולה עם הישרים הבאים:
 - $y = -15$
 - $y = 15$
 - $y = -25$
- רשום פונקציה ריבועית נוספת שיש לה את אותן נקודות האפס כמו לפונקציה הנתונה.

(7) לפניך הפרבולה: $y = x^2 + x - 6$.

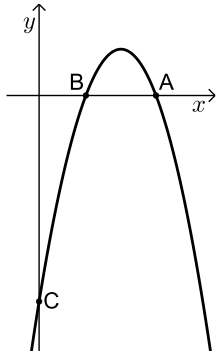


- חשב את נקודות החיתוך של הפרבולה עם הצירים.
- חשב את המרחק של נקודת החיתוך של הפרבולה עם ציר ה- y מראשית הצירים.
- חשב את המרחק שבין שתי נקודות החיתוך עם ציר ה- x .



8) לפיגר סרטוט של גרף הפונקציה: $y = -x^2 + 4x - 4$.

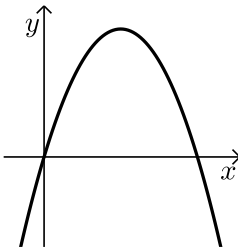
- א. מצא את נקודות החיתוך של הגרף עם הצירים.
- ב. מצא את מרחק הנקודה A (ראה ציור) מראשית הצירים.
- ג. מצא את מרחק הנקודה B מראשית הצירים.



9) לפיגר סרטוט של גרף הפונקציה: $y = -x^2 + 7x - 10$.

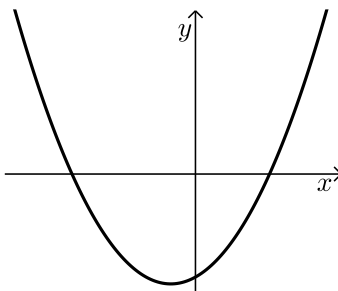
- א. חשב את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- ב. חשב את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- ג. מהו המרחק בין הנקודה C לראשית הצירים?
- ד. מצא את המרחק בין נקודה A לנקודה B (ראה סרטוט).
- ה. מצא את המרחק בין נקודה A לראשית הצירים.

10) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפרבולה שמשוואתה: $y = -x^2 + 4x$.



11) נתונה הפרבולה: $y = -2x^2 + 12x$.

- א. מצא את שיעורי קדקוד הפרבולה.
- ב. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפרבולה.



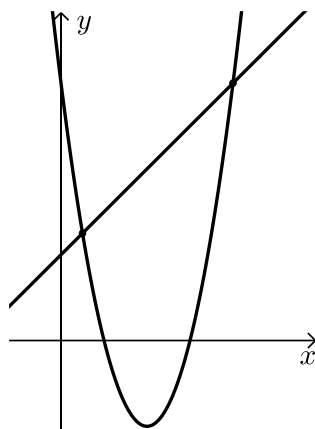
12) נתונה הפרבולה: $y = x^2 + 2x - 15$.

- א. לאלו ערכים של x הפונקציה חיובית?
- ב. לאלו ערכים של x הפונקציה שלילית?

חיתוך בין ישר ופרבולה – סיכום

כדי למצוא חיתוך בין ישר $y = mx + b$ ופרבולה $f(x) = ax^2 + bx + c$ אנו נשווה בין משוואותיהם ונפתור עבור x . לאחר מכן נמצא את שיעורי ה- y ע"י הצבה באחת המשוואות (של הישר או הפרבולה). יתכנו 3 מקרים:

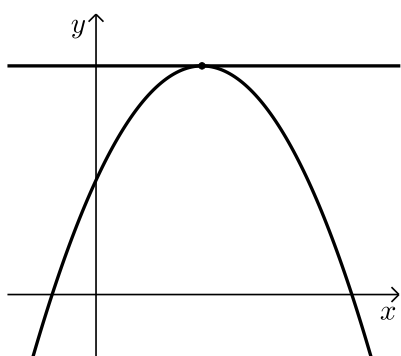
- הישר חותך את הפרבולה בשתי נקודות שונות.
- הישר חותך (משיק) לגרף הפרבולה בנקודה אחת בלבד.
- הישר והפרבולה לא חותכים זה את זה כלל.



13 לפניך הגרפים של שתי הפונקציות:

$$f(x) = x^2 - 8x + 12 \quad \text{ו-} \quad g(x) = x + 4$$

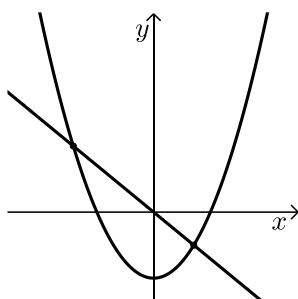
מצא את נקודות החיתוך שבין שני הגרפים.



14 מצא את שיעורי הנקודה המשותפת

$$\text{לגרף הפרבולה } f(x) = -x^2 + 10x + 25$$

$$\text{ו-} y = 50.$$



15 נתונים פרבולה $y = x^2 - 8$ וישר $y = -2x$.

א. מצא את נקודות החיתוך בין גרף הפרבולה והישר.

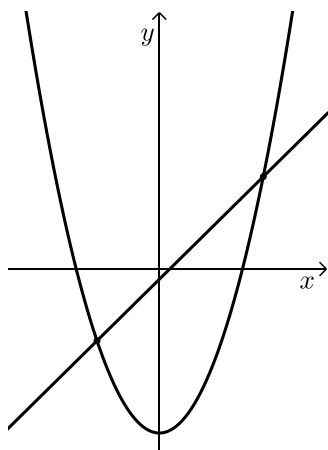
ב. מצא נקודת החיתוך של הפרבולה עם ציר ה- y .

ואת נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y .

ג. מצא את המרחק שבין נקודת החיתוך של גרף הפרבולה עם ציר ה- y לבין נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y .

ד. מצא את קדקוד הפרבולה.

ה. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפרבולה.



16 נתונים פרבולה וישר שהמשוואות שלהם: $y = x^2 - 16$ ו- $y = 2x - 1$.

א. מצא את נקודות החיתוך שבין הישר והפרבולה.

ב. תן דוגמא ל- x עבורו הישר נמצא מעל לפרבולה.

ג. תן דוגמא ל- x עבורו הפרבולה נמצאת מעל לישר.

ד. תן דוגמא לנקודה על הפרבולה שערך ה- y שלה חיובי.

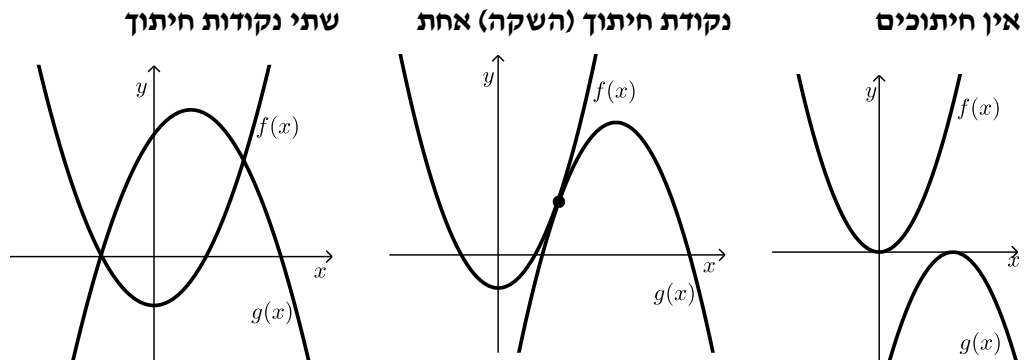
ה. תן דוגמא לנקודה על הפרבולה שערך ה- y שלה שלילי.

ו. מצא את נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- x .

ז. מצא את תחום השליליות של הישר.

חיתוך בין שתי פרבולות – סיכום

הגרפים של שתי פרבולות $f(x)$ ו- $g(x)$ יכולים להיות באחד משלושה מצבים:



כדי למצוא את נקודות החיתוך עצמן נשווה בין משוואותיהם: $f(x) = g(x)$. לפי מספר הפתרונות של המשוואה המתקבלת נוכל להסיק באיזה מקרה מדובר.

17 מצא את נקודות החיתוך בין זוגות הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^2 + 4x + 5$ ו- $g(x) = -2x^2 + x + 11$.

ב. $f(x) = x^2 - 3x + 6$ ו- $g(x) = -x^2 + 5x - 2$.

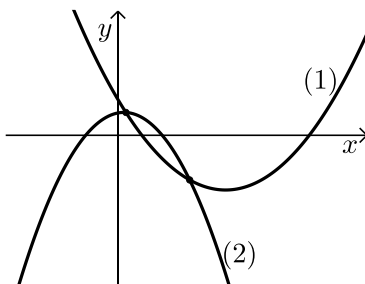
18 לפניך סרטוט של שתי פונקציות ריבועיות:

$f(x) = x^2 - 9x + 8$ ו- $g(x) = -2x^2 + x + 5$.

א. התאם לכל גרף (1) ו-(2) את הפונקציה המתאימה לו.

ב. מה הם תחומי החיוביות והשליליות של גרף (1)?

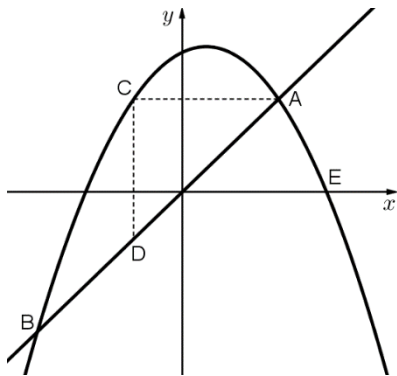
ג. מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.



שאלות מסכמות שונות

הערה כללית

בנושא זה ישנן שאלות מסכמות העוסקות בכל הנושאים שנלמדו בפרקים על הישר, הפרבולה וחישובי שטחים של צורות הנדסיות. שאלות אלו ברמה הגבוהה משאלות בגרות ומטרתן היא תרגול העשרה של כל החומר הנלמד בפונקציות וגרפים.

**19) בסרטוט שלפניך מתוארים**

הישר: $y = 2x$ והפרבולה: $y = -x^2 + x + 6$.

א. חשב את שיעורי נקודות החיתוך

של הישר והפרבולה, A ו-B.

ב. הישר AC מקביל לציר ה- x

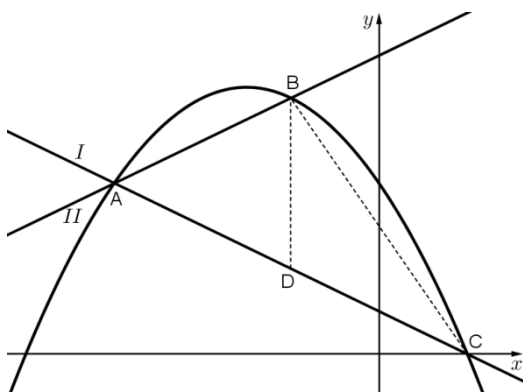
והישר CD מקביל לציר ה- y .

חשב את שטח המשולש ACD.

ג. מצא את משוואת הישר המקביל

לישר הנתון ועובר דרך הנקודה E, נקודת החיתוך של גרף הפרבולה עם

ציר ה- x הנמצאת מימין לראשית הצירים.

**20) בסרטוט שלפניך מתוארים הגרפים**

של שני ישרים I ו-II.

ושל הפרבולה $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x + 8$.

שני הישרים והפרבולה נחתכים בנקודה A.

משוואת הישר II היא: $y = x + 14$.

ד. חשב את שיעורי הנקודה A.

ה. חשב את שיעורי הנקודה C,

נקודת החיתוך של גרף הפרבולה עם

ציר ה- x הנמצאת מימין לראשית הצירים.

ו. מצא את משוואת הישר I.

ז. חשב את שיעורי הנקודה B.

ח. הקטע BD מקביל לציר ה- y וחותך את ישר I בנקודה D.

חשב את שטח המשולש BCD.

21) נתונות שתי הפרבולות: $y = x^2 - x + 6$ ו- $y = ax^2 - 6x - 8$, $a \neq 0$ פרמטר.

ט. לשתי הפרבולות נקודת חיתוך משותפת: $(-2, 12)$.

מצא את ערך הפרמטר a .

י. מצא את נקודת החיתוך שנייה של שתי הפרבולות.

יא. סרטט סקיצה של גרף הפרבולה: $y = x^2 - x + 6$.

(היעזר בנקודות החיתוך עם הצירים ובקדקוד הפרבולה).

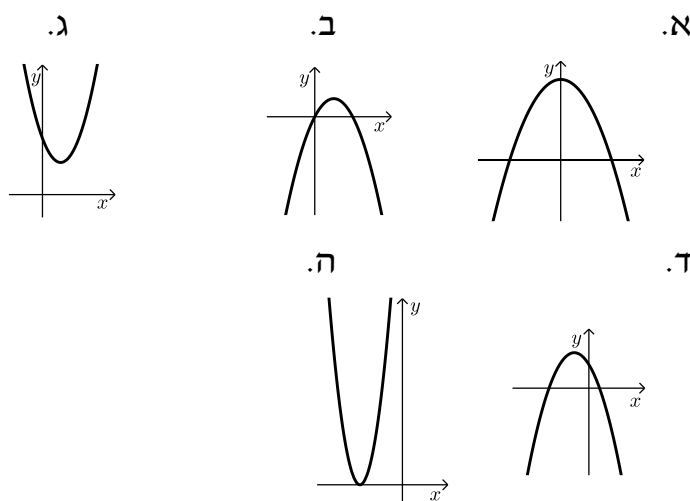
תשובות סופיות

- (1) א. $y = x^2 - 4$ ב. $y = -x^2 + 2x + 5$
 ג. $y = 3x^2 + 3x - 5$ ד. $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x$
 ה. $y = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{20}$ ו. $y = 7x^2 + \frac{1}{4}x - 1$
 (2) א. $b = 0$ ב. $x = 0$, $(0, -3)$ ג. כיווץ פי 2 והזזה 3 יחידות למטה.

- (3) א. $(0, 10)$, $x = 0$ ב. $\left(1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}\right)$, $x = 1\frac{1}{2}$ ג. $(1, 4)$, $x = 1$

ד. $x = -\frac{1}{4}$, $\left(-\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}\right)$ ה. $x = -2.5$, $(-2.5, 0)$

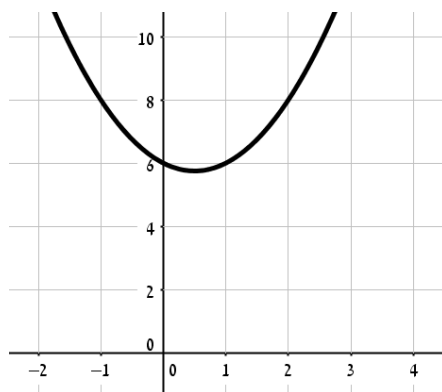
איורים לסעיפים:



- (4) א. $(-5, 0)$, $(1, 0)$ ב. אין חיתוכים.
 (5) א. $(3, 0)$ ב. $(-9, 0)$ ג. $(8, 0)$ ד. $\left(-15\frac{1}{2}, 0\right)$
 (6) א. $(0, -15)$ ב. $y = x^2 - 15$ ג. $(-3, 0)$, $(5, 0)$
 ד. i. שתיים. ii. שתיים. iii. אפס. ה. $y = 2x^2 - 4x - 30$
 (7) א. $(-3, 0)$, $(2, 0)$ ב. 6 יחידות. ג. 5 יחידות.
 (8) א. $(0, -4)$, $(2, 0)$ ב. 2 יחידות. ג. 4 יחידות.
 (9) א. $(2, 0)$, $(5, 0)$ ב. $(0, -10)$ ג. 10 יחידות. ד. 3 יחידות.
 ה. 5 יחידות.
 (10) עולה: $x < 2$, יורדת: $x > 2$.

- 11 א. $(3,18)$ ב. עולה: $x < 3$, יורדת: $x > 3$.
- 12 א. $x < -5$, $x > 3$ ב. $-5 < x < 3$.
- 13 $(1,5)$, $(8,12)$
- 14 $(5,50)$.
- 15 א. $(-4,8)$, $(2,-4)$ ב. $(0,-8)$, $(0,0)$ ג. 8 יחידות.
- ד. $(0,-8)$ ה. עולה: $x > 0$, יורדת: $x < 0$.
- 16 א. $(-3,-7)$, $(5,9)$ ב. כל x הגדול מ-5 או קטן מ-3.
- ג. כל x שבין 3 ל-5. ד. כל נקודה שערך ה- x שלה גדול מ-4 או קטן מ-4.
- ה. כל נקודה שערך ה- x שלה בין 4 ל-4. ו. $(0.5,0)$ ז. $x < 0.5$.
- 17 א. $(-2,1)$, $(1,10)$ ב. $(2,4)$.
- 18 א. $(2) \rightarrow g(x)$, $(1) \rightarrow f(x)$.
- ב. חיובית: $x < 1$, $x > 8$, שלילית: $1 < x < 8$ ג. $\left(\frac{1}{3}, 5\frac{1}{9}\right)$, $(3,-10)$.
- 19 א. $A(2,4)$, $B(-3,-6)$ ב. 4.5 יחידות שטח. ג. $y = 2x - 6$.
- 20 א. $A(-6,8)$ ב. $C(2,0)$ ג. $y = -x + 2$.
- ד. $B(-2,12)$ ה. 16 יחידות שטח.
- 21 א. $a = 2$ ב. $(7,48)$.

ג. להלן סקיצה:



מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 7 - גבול של פונקציה

תוכן העניינים

1. הסבר כללי	(ללא ספר)
2. הצבה	110
3. צמצום	111
4. הכפלה בצמוד	112
5. פונקציה שואפת לאינסוף	113
6. x שואף לאינסוף	114
7. הגבול של אוילר	116
8. כלל הסנדוויץ'	117
9. גבול של פונקציה מפוצלת	118
10. גבול לפי הגדרה	119

הצבה

שאלה

חשבו את הגבולות הבאים :

א. $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1$

ב. $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2}$

ג. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3}$

ד. $\lim_{x \rightarrow 100} 20$

תשובה

א. 21

ב. $\frac{11}{12}$

ג. 2

ד. 20

צמצום

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x - 1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad (9)$$

תשובות סופיות

(5) -3	(4) $n-1$	(3) 6	(2) $\frac{10}{8.5}$	(1) $\frac{5}{6}$
	(9) $\frac{8}{17}$	(8) 27	(7) 3	(6) 32

הכפלה בצמוד

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x+6}}{2x-6} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{3x+1}}{1 - \sqrt{2x-1}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x} \quad (8)$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{6} \quad (5)$$

$$4 \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (6)$$

$$-\frac{1}{12} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (7)$$

$$\frac{3}{8} \quad (4)$$

$$-\frac{8}{3} \quad (8)$$

פונקציה שואפת לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3 \right) \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (11)$$

תשובות סופיות

$$\phi \quad (4)$$

$$-\infty \quad (3)$$

$$\phi \quad (2)$$

$$\phi \quad (1)$$

$$\phi \quad (8)$$

$$\infty \quad (7)$$

$$\infty \quad (6)$$

$$-\infty \quad (5)$$

$$\phi \quad (11)$$

$$1 \quad (10)$$

$$0 \quad (9)$$

x שואף לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

- | | |
|---|---|
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (2)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (4)$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (3)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (6)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (5)$ |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (8)$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (10)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (9)$ |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{x+\frac{1}{2}}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (11)$ |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (13)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (16)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (15)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad (18)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (17)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx} - x) \quad (20)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad (19)$ |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad (22)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad (21)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad (24)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad (23)$ |

תשובות סופיות

- (1) 0 (2) 4 (3) $-\infty$ (4) 0
- (5) -5 (6) 1 (7) -1 (8) -3
- (9) 1.5 (10) $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (11) $\frac{1}{4}$ (12) 0
- (13) 4 (14) $\frac{1}{9}$ (15) 2 (16) $\ln 3$
- (17) $e^{\frac{1}{3}}$ (18) 0
- (19) אם $b \neq 0$: $\lim = \sqrt[5]{\frac{a}{b}}$ אם $b=0, a>0$: ∞ אם $b=0, a<0$: $-\infty$.
- (20) 2.5 (21) $\frac{k}{2}$ (22) $\frac{1}{2}$ (23) $-\frac{1}{2}$
- (24) $\frac{1}{2}$

הגבול של אוילר

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

(היעזרו בגבול של אוילר : $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x^2+x+4}\right)^{4x^2} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+4x+1}{x^2+x+2}\right)^{10x} \quad (7)$$

תשובות סופיות

e^{-1} (4)	e^2 (3)	1 (2)	$e^{\frac{1}{2}}$ (1)
	e^{30} (7)	e^{-12} (6)	e^3 (5)

כלל הסנדוויץ'

שאלות

בשאלות 1-3 חשבו את הגבול:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2^x + 3^x + 4^x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [x] \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} [x] \quad (3)$$

$$(4) \quad \text{נתונה פונקציה } z: R \rightarrow R, \text{ המקיימת } \lim_{x \rightarrow 2} z(x) = 4,$$

ונתונה פונקציה $f: R \rightarrow R$, המקיימת $4z(x) \leq f(x) \leq (z(x))^2$, לכל x .

חשבו את הגבולות $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2)$

תשובות סופיות

(3) 0

(2) 1

(1) 4

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 16 \quad (4)$$

גבול של פונקציה מפוצלת

שאלות

חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ של הפונקציות הבאות:

$$(a=1), f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & x > 1 \\ \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} & x < 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$(a=0), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (2)$$

$$(a=\infty), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (3)$$

$$(a=-\infty), f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|1-x|}{x^2 + x - 2} \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|1-x|}{x^2 + x - 2} \quad \text{ב.}$$

תשובות סופיות

- (1) $\emptyset$ (2) $\emptyset$ (3) 1 (4) -1
- (5) א. אין גבול. ב. $\frac{1}{6}$

גבול לפי הגדרה

שאלות

בשאלות 1-5, על פי הגדרת הגבול, הוכיחו:

$$\lim_{x \rightarrow 24} \sqrt{x+1} = 5 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x = 20 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 7x + 14 = 28 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x}{x^2 - 2} = 1 \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4} \quad (4)$$

$$(6) \quad \text{חשבו על פי הגדרת הגבול: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-1}$$

הוכיחו על פי הגדרת הגבול, את המקרים 7-10:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+7}{x+2} = 1 \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+x}{x^2+1} = 1 \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-1}{x^2+x+1} = 3 \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-4x}{2x+1} = -2 \quad (9)$$

$$(11) \quad \text{נתונה פונקציה } f(x) \text{ המקיימת: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -5$$

הוכיחו כי קיים $M > 0$ ממשי כלשהו כך שעבור כל $x > M$, מתקיים $f(x) < -4$.

$$(12) \quad \text{נתונה פונקציה } f(x) \text{ המקיימת: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$$

הוכיחו כי קיים $M > 0$ ממשי כלשהו כך שעבור כל $x > M$, מתקיים $f^2(x) > 16$.

$$(13) \quad \text{נניח } f \text{ פונקציה ממשית וחיובית בתחום } [a, \infty) \text{ המקיימת } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\text{הוכיחו שמתקיים } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{f(x)} = 0$$

$$(14) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 3x + 2} = 1 : \text{נתון הגבול הבא:}$$

מצאו ערך של $M > 0$ עבורו לכל $x > M$ הביטוי שבגבול קרוב לערך הגבול

עד כדי 0.1. במילים אחרות, מצאו M , כך ש- $|f(x) - L| < 0.1$: $\forall x > M$.

$$(15) \quad \text{מגדירים את הפונקציה הבאה: } f(x) = \begin{cases} 2 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \in \mathbb{R} / \mathbb{Z} \end{cases}$$

האם הגבולות קיימים? הוכיחו זאת בהסתמך על הגדרת הגבול.

$$\text{א. } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{ב. } \lim_{x \rightarrow 2.5} f(x) \quad \text{ג. } \lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$$

$$(16) \quad \text{בהינתן הגבול } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+4}{x+11} = \frac{1}{2}, \text{ מצאו } \delta > 0 \text{ כך שלכל } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{המקיים } |x-1| < \delta, \text{ מתקיים אי-השוויון } \left| \frac{2x+4}{x+11} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{100}$$

(17) הוכיחו או הפריכו:

$$\text{א. אם: } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0, \text{ אז } \lim_{x \rightarrow \infty} (f^2(x) - g^2(x)) = 0$$

$$\text{ב. אם: } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = 0, \text{ אז } \lim_{x \rightarrow x_0} (f^2(x) - g^2(x)) = 0$$

$$\text{ג. אם: } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = L, \text{ אז: הגבול } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ קיים ושווה ל-} L \text{ או } -L.$$

$$\text{ד. אם הגבולות: } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) \text{ ו-} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ קיימים,}$$

$$\text{אז גם הגבול } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ קיים.}$$

תשובות סופיות

$$(6) \quad \pm \infty$$

תשובות לשאר השאלות נמצאות באתר GOOL.co.il

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 8 - חישוב נגזרת של פונקציה

תוכן העניינים

1. כללי הגזירה	(ללא ספר)
2. תרגול בכללי הגזירה	121
3. גזירה סתומה	124
4. כלל השרשרת	126
5. גזירה לוגריתמית	129
6. נגזרת הפונקציה ההפוכה	130
7. תרגילים נוספים לפי סוגים	131

תרגול בכללי הגזירה

שאלות

גזרו פעמיים את הפונקציות הבאות (בשאלות 22-24 מצאו רק את הנגזרת הראשונה):

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (15) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$y = x^{\sqrt{x}} \quad (21) \quad y = \sqrt[3]{x} \quad (20) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) \quad (19)$$

$$y = (x+1)^{(x+1)} \quad (24) \quad y = (x^2 + 1)^x \quad (23) \quad y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}} \quad (22)$$

תשובות סופיות

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{x^3} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x+10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4} \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2+24)}{(x^2-4)^3} \quad (4)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4} \quad (5)$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad (6)$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \quad (7)$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad (8)$$

$$f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x} \quad (9)$$

$$f'(x) = x(2 \ln x + 1), \quad f''(x) = 2 \ln x + 3 \quad (10)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}, \quad f''(x) = \frac{1}{(4-2x)^2} \quad (11)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} (\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} \quad (12)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left[\frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\} \quad (13)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1+2x}{x^4}\right) \quad (14)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x+2}{x^4}\right) \quad (15)$$

$$f'(x) = e^{-2x^2} (1 - 4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3 - 4x^2) \quad (16)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \quad (17)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2 - 1}{(x^2-1)^{5/3}} \quad (18)$$

$$f'(x) = \frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}} \quad (19)$$

$$y' = x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x) \quad (20)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot x^{\sqrt{x}} \left(\frac{\ln x}{2} + 1\right) \quad (21)$$

$$y' = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{x}}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \sqrt{x} \right) \quad (22)$$

$$y' = (x^2 + 1)^x \left(1 \cdot \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \cdot x \right) \quad (23)$$

$$y' = (x+1)^{(x+1)} [\ln(x+1) + 1] \quad (24)$$

גזירה סתומה

שאלות

- 1 גזרו את הפונקציה הסתומה $x^2 + y^5 - 1 = 1$.
- 2 גזרו את הפונקציה הסתומה $4 \ln x + 10 \ln y = y^2$.
- 3 גזרו את הפונקציה הסתומה $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy}$.
- 4 מצאו את משוואת המשיק למעגל $x^2 + y^2 = 25$, בנקודה $(3, 4)$.
- 5 מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $xy^2 + y - x = xy$, דרך הנקודה $(1, 1)$.
- 6 מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $x^2 y + e^{y^2 - 4x} = \ln x + 1$, דרך הנקודה $(1, 2)$ – הנמצאת על גרף הפונקציה.
- 7 מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $\sqrt{xy + y} + x^2 y = xy^2$, דרך הנקודה $(1, 2)$ – הנמצאת על גרף הפונקציה.
- 8 מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $e^{xy^2} + y = y^2 - 1$, דרך הנקודה $(0, 2)$ – הנמצאת על גרף הפונקציה.
- 9 נתונה הפונקציה הסתומה $x + y \cdot e^y = xy^2 + x^2$.
א. מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, בהן $y = 0$.
ב. מצאו את משוואת הישרים המשיקים של גרף הפונקציה, בנקודות שנמצאו בסעיף א.
- 10 גזרו את הפונקציה הסתומה: $x^y - xy = 10$.
- 11 גזרו את הפונקציה הסתומה: $x^y - y^x = 1$.
- 12 נתונה פונקציה סתומה $xy - y^3 + x^2 - x = 0$. מצאו את ערך y^n בנקודה בה $y = 1$.

(13) נתון כי המשוואה $h(y) - x + 1 = 2x^3 + 4e^y + 2y$,

מגדירה את $y = y(x)$ כפונקציה סתומה של x .

נתון כי $h(y)$ גזירה ברציפות ויורדת.

הוכיחו כי $y(x)$ יורדת חזק.

תשובות סופיות

$$5y^4 - 1 \neq 0, \quad y' = \frac{-2x}{5y^4 - 1} \quad (1)$$

$$\frac{10}{y} - 2y \neq 0, \quad y' = \frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y} - 2y} \quad (2)$$

$$\sqrt{x} \neq 0, \quad \sqrt{x} \neq 1, \quad y' = \frac{\sqrt{y}-1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{y}}{1-\sqrt{x}} \quad (3)$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5} \quad (6)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5} \quad (7)$$

$$y = \frac{4}{3}x + 2 \quad (8)$$

$$(0,0), (1,0) \text{ א.} \quad (9)$$

ב. בראשית הצירים: $y = -x$, המשוואה השנייה: $y = x - 1$.

$$x^y \cdot \ln x - x \neq 0, \quad y' = \frac{y - x^y \cdot \frac{y}{x}}{x^y \cdot \ln x - x} \quad (10)$$

$$x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y} \neq 0, \quad y' = \frac{-x^y \cdot \frac{y}{x} + y^x \cdot \ln y}{x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y}} \quad (11)$$

$$-1 \quad (12)$$

(13) הוכחה.

כלל השרשרת

שאלות

- (1) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(4) = 10$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = f(x^2)$.
חשבו את $g'(2)$.

- (2) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(2) = 4$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.
א. חשבו את $g'(0.5)$.

ב. נתון בנוסף כי f עולה. הוכיחו כי g יורדת.

- (3) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(1) = e$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = x^2 + f(\ln x)$.
א. חשבו את $g'(e)$.

ב. הוכיחו שהפונקציה g עולה בנקודה $x = e$.

ג. חשבו את הגבול $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(e+h) - g(e)}{h}$.

- (4) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(1) = e$, $f(1) = -2$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = f^2(\ln x)$.
א. חשבו את $g'(e)$.

ב. האם g עולה או יורדת, בנקודה $x = e$?

ג. נתון כי f שלילית ועולה. מה ניתן לומר על g ?

(5) נתונה פונקציה, $f(x)$, יורדת וחיובית.

$$g(x) = \sqrt{f(x^2 + 4)}$$

מי מהבאים נכון?

א. g עולה לכל x .

ב. g יורדת לכל x .

ג. g עולה לכל $x > 0$.

ד. g יורדת לכל $x > 0$.

$$(6) \quad g(x) = \frac{f^2(\sqrt{x}) - 1}{f(\sqrt{x})}$$

ידוע כי $f(10) = f'(10) = 4$. חשבו $g'(100)$.

$$(7) \quad g(x) = \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) + 4}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

ידוע כי $f(1) = 1$, $f'(1) = 4$.

חשבו $g'(1)$.

$$(8) \quad g(x) = \frac{f^2(\ln x)}{f(\ln x) + 1}$$

ידוע כי $f(0) = 2$, $f'(0) = 1$.

חשבו $g'(1)$.

$$(9) \quad g(x) = \frac{f^{10}(4x) + 1}{f\left(\frac{4}{x}\right) + 1}$$

ידוע כי $f(4) = 1$, $f'(4) = 2$.

חשבו $g'(1)$.

$$(10) \quad g(x) = \frac{\sqrt[4]{f^7(x^2)}}{f(x^4)}$$

ידוע כי $f(1) = 1$, $f'(1) = 4$.

חשבו $g'(1)$.

תשובות סופיות

- | | | |
|--------------------------|---------------------|--------|
| | | 40 (1) |
| ב. שאלת הוכחה. | א. -16 (1) | |
| ג. $2e+1$ ב. שאלת הוכחה. | א. $2e+1$ (2) | |
| ג. $g'(x) < 0$ ב. יורדת. | א. -4 (3) | |
| | ד (4) | |
| | $\frac{17}{80}$ (5) | |
| | 36 (6) | |
| | $\frac{8}{9}$ (7) | |
| | 44 (8) | |
| | -2 (9) | |

גזירה לוגריתמית

שאלות

גזרו את הפונקציות הבאות :

$$y = \sqrt[4]{\frac{10x-1}{x+1}} \cdot \sqrt[10]{(2x+1)^7} \quad (1)$$

$$y = \left(\sqrt[4]{10x+1} \right)^{2x} \quad (1)$$

$$y = \frac{(x+2)^{3x+4} \cdot (5x+6)}{(7x+8) \cdot (9x+10)} \quad (2)$$

תשובות סופיות

$$y' = y \left[\frac{1}{4} \frac{1}{10x-1} \cdot 10 + \frac{7}{10} \frac{1}{2x+1} \cdot 2 - \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} \right] \quad (1)$$

$$y' = \left((10x+1)^{\frac{1}{4}} \right)^{2x} \cdot \frac{1}{4} \left[2^x \cdot \ln 2 \cdot \ln(10x+1) + \frac{1}{10x+1} \cdot 10 \cdot 2^x \right] \quad (2)$$

$$y' = y \left[3 \cdot \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} (3x+4) + \frac{1}{5x+6} \cdot 5 - \frac{1}{7x+8} \cdot 7 - \frac{1}{9x+10} \cdot 9 \right] \quad (3)$$

נגזרת הפונקציה ההפוכה

שאלה

הוכיחו, בעזרת כלל הנגזרת של הפונקציה ההפוכה, את הנוסחה הבאה :

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (1)$$

לתשובה מלאה בסרטון וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il

תרגילים נוספים לפי סוגים

שאלות

הנגזרת של פונקציית חזקה

(1) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^3$	ב. $f(x) = x^7$	ג. $f(x) = x^2$
ד. $f(x) = x^1$	ה. $f(x) = x^{-3}$	ו. $f(x) = x^{-1}$
ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$	ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$	ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$

הנגזרת של קבוע כפול פונקציה

(2) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 2x^3$	ב. $f(x) = 3x^7$	ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$
ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$	ה. $f(x) = 8x^1$	ו. $f(x) = 3x^{-2}$
ז. $f(x) = \frac{4}{x}$	ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$	ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$

הנגזרת של קבוע

(3) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 12$	ב. $f(x) = \frac{7}{8}$
----------------	-------------------------

הנגזרת של סכום והפרש

(4) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$	ב. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$
---------------------------------	---

הנגזרת של פונקציה חזקה מורכבת

(5) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = (5x - 2)^3$ ב. $f(x) = (x^3 + 6)^5$ ג. $f(x) = 3(x - x^2)^2$

ד. $f(x) = \frac{(5-x)^3}{4}$ ה. $f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3}$

הנגזרת של אחד חלקי איקס

(6) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{3}{x}$ ב. $f(x) = \frac{2}{x}$ ג. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ד. $f(x) = \frac{3}{x^3}$

ה. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x}$ ו. $f(x) = \frac{2}{3-x}$ ז. $f(x) = \frac{6}{x+5}$

הנגזרת של מכפלה

(7) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = (5x+1)(x-3)$

ב. $f(x) = (5x+1)^3(x-3)$

ג. $f(x) = x^3(6-x)^4$

הנגזרת של מנה

(8) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{3x-1}{1+2x}$ ב. $f(x) = \frac{x^2+1}{5x-12}$ ג. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3}$

ד. $f(x) = \frac{x^2+8}{x-1}$ ה. $f(x) = \frac{1}{x}$ ו. $f(x) = \frac{3}{x^3}$

הנגזרת של שורש

(9) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{x}$ ב. $f(x) = 4\sqrt{x+1}$ ג. $f(x) = \sqrt{x^3-1}$

ד. $f(x) = (3x+1)\sqrt{x}$ ה. $f(x) = x^2\sqrt{x+3}$ ו. $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$

תשובות סופיות

(1)

$$\begin{array}{lll} \text{א. } f'(x) = 3x^2 & \text{ב. } f'(x) = 7x^6 & \text{ג. } f'(x) = 2x \\ \text{ד. } f'(x) = 1 & \text{ה. } f'(x) = 3x^{-4} & \text{ו. } f'(x) = -\frac{1}{x^2} \\ \text{ז. } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{ח. } f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & \text{ט. } f'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{4}} \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{lll} \text{א. } f'(x) = 6x^2 & \text{ב. } f'(x) = 21x^6 & \text{ג. } f'(x) = 2x^3 \\ \text{ד. } f'(x) = \frac{6x^5}{7} & \text{ה. } f'(x) = 8 & \text{ו. } f'(x) = -\frac{6}{x^3} \\ \text{ז. } f'(x) = -\frac{4}{x^2} & \text{ח. } f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} & \text{ט. } f'(x) = \frac{2}{9\sqrt[3]{x}} \end{array}$$

0. ב.

0. א. (3)

$$\text{א. } f'(x) = 3x^2 + 4x - 3 \quad \text{ב. } f'(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}$$

$$\text{א. } f'(x) = 15(5x - x)^2 \quad \text{ב. } f'(x) = 15x^2(x^3 + 6)^4$$

$$\text{א. } f'(x) = 6(x - x^2)(1 - 2x) \quad \text{ב. } f'(x) = -\frac{3}{4}(5 - x)^2 \quad \text{ג. } f'(x) = \frac{8(x+1)^3}{3}$$

$$\text{א. } f'(x) = -\frac{3}{x^2} \quad \text{ב. } f'(x) = \frac{2}{x^2} \quad \text{ג. } f'(x) = -\frac{2}{x^3} \quad \text{ד. } f'(x) = -\frac{9}{x^4}$$

$$\text{א. } f'(x) = -\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2} \quad \text{ב. } f'(x) = \frac{2}{(3-x)^2} \quad \text{ג. } f'(x) = -\frac{6}{(x+3)^2}$$

$$\text{א. } f'(x) = 10x - 14 \quad \text{ב. } f'(x) = (5x+1)^2(20x-44)$$

$$\text{ג. } f'(x) = x^2(6-x)^3(18-7x)$$

$$\text{א. } f'(x) = \frac{5}{(1+2x)^2} \quad \text{ב. } f'(x) = \frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2} \quad \text{ג. } f'(x) = \frac{8x}{(x^2+3)^2}$$

$$\text{א. } f'(x) = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2} \quad \text{ב. } f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{ג. } f'(x) = -\frac{9}{x^4}$$

$$\text{א. } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ב. } f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}} \quad \text{ג. } f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$$

$$\text{א. } f'(x) = \frac{9x+1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ב. } f'(x) = \frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}} \quad \text{ג. } f'(x) = \frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$$

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 9 - בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון)

תוכן העניינים

1. הסבר כללי על בעיות קיצון (ללא ספר)
2. בעיות קיצון כלכליות מסוג ראשון 134
3. בעיות קיצון כלכליות מסוג שני 140
4. בעיות קיצון יסודיות עם מספרים 142
5. בעיות קיצון בפונקציות וגרפים 143
6. בעיות קיצון בהנדסת המישור 145

שלבי עבודה

- נגדיר את אחד הגדלים בשאלה כ- x .
- נבטא את שאר הגדלים בשאלה באמצעות x .
- נבנה פונקציה שמבטאת את מה שרצינו שיהיה מינימלי/מקסימלי.
- נגזור את הפונקציה, נשווה לאפס ונחלץ ערך/ערכי ה- x .
- נוודא שערך ה- x מסעיף 4 הוא אכן מינימום/מקסימום באמצעות " y (או טבלה).
- ננסח את התשובה לשאלה המקורית.

בעיות קיצון כלכליות מסוג ראשון

שאלות

1) כאשר חברת 'יוטבתה' מוכרת x ליטר שוקו ליום, היא יכולה לקבל מחיר של $p(x) = -\frac{1}{4}x + 10$ שקל לליטר.

- מהו מחיר ליטר אחד, אם הכמות שנמכרת ביום היא 4 ליטר?
- מהו מחיר ליטר אחד, אם הכמות שנמכרת ביום היא 12 ליטר?
- מהי הכמות הנמכרת ביום, אם המחיר הוא 6 ₪ לליטר?
- שרטטו את הגרף של פונקציית הביקוש, ומצאו את תחום ההגדרה שלה.
- פונקציית הביקוש הנתונה מתארת את מחיר המוצר, כפונקציה של הכמות הנמכרת ממנו. שנו את נוסחת הפונקציה, כך שהיא תתאר את הכמות הנמכרת מהמוצר, כפונקציה של מחירו.

2) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -0.6x + 120$.

- מצאו את פונקציית הפדיון ואת התחום שלה.
- אם $x = 20$, מהו מחיר המוצר ומהו הפדיון?
- אם המחיר הוא 12 ₪, מהו הפדיון?

3) פונקציית הפדיון של מוצר מסוים היא $R(x) = -0.08x^2 + 40x$.

- מהו התחום של פונקציית הפדיון?
- שרטטו את הגרף של פונקציית הפדיון.
- מצאו את פונקציית הביקוש ושרטטו את הגרף שלה.

4) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -0.4x + 100$.

- מצאו את תחום הפונקציה.
- מצאו את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון הממוצע.
- מצאו את פונקציית הפדיון השולי.
- לאיזה ערך של x יתקבל פדיון מקסימלי, ומהו?

5) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -6x^2 + 240x + 1800$.

- מצאו את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון השולי.
- אם $x = 40$, האם כדאי להגדיל את הייצור?
- מתי יהיה הפדיון מקסימלי, ומהו?

6 פונקציית הביקוש של מוצר מסוים נתונה ע"י $Q(x) = 10x - \frac{x^2}{5}$.

- א. מצאו את המחיר, הנותן את הפדיון המקסימלי.
- ב. מהו הביקוש במקרה זה?
- ג. מהו הביקוש השולי בנקודת המחיר שמצאנו? מה משמעותו?

7 פונקציית ההוצאות של יצרן, המייצר x קפה ביום, היא $C(x) = 5x + 150$.

- א. שרטטו גרף של פונקציית ההוצאות. מהן ההוצאות הקבועות?
- ב. מצאו כמה ק"ג קפה מייצר היצרן, אם ההוצאות הן 1,000 ₪.
- ג. מהן ההוצאות, אם מייצרים 20 ק"ג קפה ביום?
- ד. מצאו את פונקציית ההוצאה השולית.

8 פונקציית העלות, של יצרן כובעים, היא $TC(x) = 0.04x^2 + 10x + 400$ שקל ליום.

- א. חשבו את העלות הממוצעת ליום, אם הוא מייצר 40 כובעים.
- ב. כמה כובעים עליו לייצר, כדי שהעלות הממוצעת תהיה מינימלית?
- ג. חשבו את העלות השולית ליום, עבור $x = 100$. איזו מסקנה ניתן להסיק?

9 פונקציית העלות של מוצר מסוים היא $C(x) = 0.004x^2 + 10x + 200$.

- א. חשבו את העלות, כאשר $x = 100$ וכאשר $x = 101$.
- ב. חשבו את העלות השולית, כאשר $x = 100$.
- ג. חשבו כמה תעלה יחידת מוצר נוספת, כאשר הייצור יעבור מ- $x = 100$ ל- $x = 101$, והשוו עם התוצאה של סעיף ב. מהי המסקנה?
- ד. מצאו האם קצב השינוי של העלות גדל או קטן.

10 ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = 100 - 0.06Q$,

ופונקציית עלות כוללת $TC(Q) = 200 + 4Q$.

- מהי הכמות, Q , שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
- מהו המקסימום במקרה זה?

11 ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = 20$,

ופונקציית עלות $TC(Q) = 300 + 2Q^2$.

- מהי הכמות שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
- מהו המקסימום במקרה זה?

12 ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = -0.15Q + 50$,
 ופונקציית עלות שולית $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$.
 מהי הכמות שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?

13 ליצרן פונקציית ביקוש $Q = \frac{5000 - 50P}{3}$,
 ופונקציית עלות $TC(Q) = 200 + 4Q$.
 מהי הכמות, Q , שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
 מהו המקסימום במקרה זה?

14 ליצרן פונקציית עלות שולית $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$.
 מצאו את פונקציית העלות, אם ידוע שכאשר הכמות המיוצרת היא $Q = 10$,
 אז העלות הכוללת היא 225 ₪.

15 ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהרווח המקסימלי מתקבל כאשר הפדיון השולי שווה להוצאה השולית. הסבר את המשמעות הגרפית.

ב. הוכיחו שאם מחיר המוצר קבוע, אז הרווח המקסימלי מתקבל כאשר ההוצאה שולית שווה למחיר המוצר.

16 $C(x)$ – פונקציית הוצאות, $C'(x)$ – הוצאות שוליות, $\frac{C(x)}{x}$ – הוצאות ממוצעות.

א. האם ייתכן שהוצאה שולית קבועה, למרות שהוצאה ממוצעת משתנה?

ב. האם ייתכן להפך?

ג. הוכיחו כי ההוצאה הממוצעת היא פונקציה עולה אם ורק אם ההוצאה השולית גדולה מן ההוצאה הממוצעת.

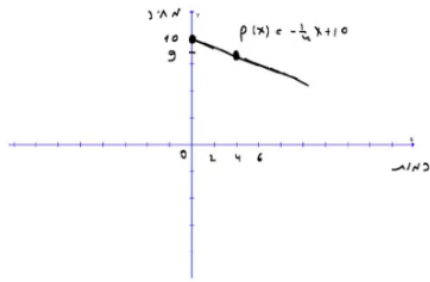
17 מפעל המייצר מוצר מסוים משתמש בשני גורמי הייצור.
 נסמן את מחירי גורמי הייצור, ליחידה, ב- p_1 וב- p_2 , בהתאמה.
 אם נשתמש ב- x יחידות מג"י אחד וב- y יחידות מג"י 2,
 המפעל מייצר $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ יחידות. תקציב המפעל A ₪.

א. הוכיחו כי באילוץ התקציב, הייצור מקסימלי

$$\text{כאשר מתקיימת הנוסחה } \frac{x}{y} = \frac{p_2^2}{p_1^2}.$$

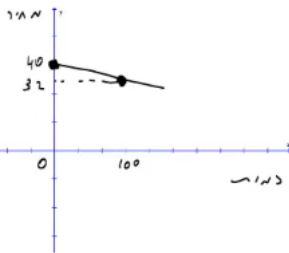
ב. חשבו x ו- y , עבורם הייצור מקסימלי, אם נתון:
 $p_1 = 100$ ₪, $p_2 = 372,000$ ₪, $A = 3,000$.

תשובות סופיות

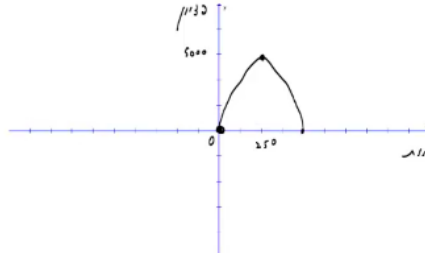


(1) א. 9 ב. 7 ג. 16 ה. $x(p) = 40 - 4p$ ד.

(2) א. $R(x) = -0.6x^2 + 120x$, בתחום: $x \geq 0$ ב. 2,160 ג. 2,160



(3) א. $x \geq 0$ ב. ג.



(4) א. $x \geq 0$ ב. פונקציית הפדיון: $R(x) = -0.04x^2 + 100x$

הפדיון הממוצע: $AR(x) = -0.4x + 100$, $x > 0$ ג. $R'(x) = -0.08x + 100$

ד. 1,250; הפדיון המקסימלי: 62,500.

(5) א. פונקציית הפדיון: $R(x) = -6x^3 + 240x^2 + 1800x$

הפדיון השולי: $R'(x) = -18x^2 + 480x + 1800$ ב. לא.

ג. 30; הפדיון המקסימלי: 108,000.

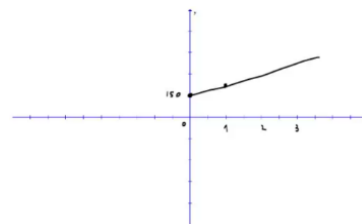
(6) א. $33\frac{1}{3}$ ב. $Q\left(33\frac{1}{3}\right) = 10 \cdot 33\frac{1}{3} - \frac{33\frac{1}{3}^2}{5}$

ג. $-3\frac{1}{3}$; העלאת המחיר ביחידה אחת – תקטין את הביקוש ב-3.33 יח', בערך.

(7) א. ההוצאות הקבועות הן הוצאות המפעל,

גם כאשר הוא אינו מייצר. ב. 170

ג. 250 ד. $MC(x) = 5$



(8) א. 21.6 ב. 100 ג. 18 ש; אם המפעל יעלה את הייצור ביחידה

אחת, מ-100 ל-101, העלות הכוללת שלו תגדל ב-18 ש בערך.

(9) א. $C(100) = 1240$, $C(101) = 1250.804$ ב. 10.8

ג. בערך הסכום שיעלה למפעל לייצר יחידה נוספת. ד. גדל.

(10) הכמות: 800, המקסימום: 38,200.

(11) הכמות: 5, המקסימום: -250.

(12) 25**(13)** הכמות : 800 , המקסימום : 38,200 .

(14) $TC(Q) = 0.02Q^3 + 20Q + 5$

(15) שאלת הוכחה.**(16)** א. כן. ב. לא. ג. שאלת הוכחה.**(17)** א. שאלת הוכחה. ב. $x = 4, y = 3600$

בעיות קיצון כלכליות מסוג שני

שאלות

- 1) יצרן מכונות כביסה מוכר 500 מכונות בשבוע, במחיר של \$225 למכונה. עלות הייצור למכונת כביסה אחת היא \$125. סקר שוק מראה, שעל כל הוזלה של \$5 במחיר – מספר המכונות הנמכרות בשבוע עולה ב-50.
 - א. מהו המחיר שהיצרן צריך לקבוע למכשיר, על מנת להגיע לרווח מקסימלי?
 - ב. מהן ההוצאות במצב זה? האם בהכרח אלו ההוצאות המינימליות? נמקו.
- 2) מחיר חבילת זמן אוויר בחברת סלולר הוא 100 ₪ ל-200 דקות. בסקר שוק שערכה החברה התגלה, כי על כל הוזלה של 2 ₪ בתשלום, לקוחות מנצלים 10 דקות זמן אוויר נוספות.

לאור תוצאות הסקר, איזו חבילה (כלומר, **מה המחיר שיש לקבוע ולכמה דקות**) כדאי לחברה להציע ללקוחותיה, כדי להגיע להכנסה מקסימלית?
- 3) אמן מייצר תכשיטים, בעלות של 30 ₪ עבור כל תכשיט. הוא מצליח למכור 100 תכשיטים, כאשר מחירם 40 ₪ לתכשיט. על כל עלייה של 2 ₪ במחיר, הוא מוכר 4 תכשיטים פחות.
 - א. מצאו כמה תכשיטים האמן צריך לייצר, כדי שהרווח שלו יהיה מקסימלי.
 - ב. באיזה מחיר ימכור האמן כל תכשיט במצב זה?
 - ג. מהי עלות הייצור של האמן (עבור כל התכשיטים) במצב זה?
- 4) חברת 'טיול נעים' משכירה אוטובוס ל-30 תיירים, שכל אחד מהם משלם 100 דולר. על כל תייר נוסף שמצטרף, החברה מסכימה להוריד את התשלום לכל אחד מהתיירים, בשני דולר.

מה צריך להיות מספר התיירים, כדי שלחברה יהיה הרווח הגדול ביותר?
- 5) מחיר שליחת SMS ברשת 'סלקום' הוא 50 אג', ומספר ה-SMSים החודשי הממוצע הוא 200. על כל 5 אג' ש'סלקום' מעלה – יורד מספר ה-SMSים החודשי הממוצע בעשר. מצאו מה צריך להיות מחיר שליחת SMS, כדי שהכנסתה של 'סלקום' תהיה מקסימלית.
- 6) קולנוע 'חן' מוכר כל שבוע 60 כרטיסים לסרטי תלת-מימד במחיר של 45 ₪ לכרטיס. כל הורדה של מחיר הכרטיס בחצי שקל גורמת למכירת שני כרטיסים נוספים בשבוע.

מה צריך להיות מחיר הכרטיס, כדי שהכנסתו של בית הקולנוע תהיה בגדולה ביותר? מצאו גם מהי ההכנסה המקסימלית.

- (7) הייצור של בובת 'בוב ספוג' עולה לחברת 'ניקולדיאון' 25 ₪. אם החברה מוכרת את הבובה ב-45 ₪, היא מצליחה למכור 200 בובות ליום. על כל חצי שקל שהחברה מורידה ממחיר הבובה, היא מצליחה למכור 10 בובות נוספות ליום. מהו הרווח היומי המקסימלי של החברה?
- (8) חברת 'אופיס דיפו' רוכשת מספר מסוים של מוצרים ב-800 ₪. 5 מהמוצרים היא מוכרת ברווח של 20% לכל מוצר, ואת שאר המוצרים היא מוכרת ברווח של 2 ₪ לכל מוצר. הוכיחו שהרווח של החברה, בעסקה כזו, הוא לפחות 70 ₪.
- (9) חברת BMX מוכרת 300 זוגות אופניים בחיר של 500 ₪ לזוג אופניים. לכל x זוגות אופניים נוספים שהיא מוכרת, היא מורידה – את מחירם בלבד – ב- $2x$ ₪ לזוג אופניים, ואילו את מחירם של 300 הזוגות הראשונים היא מורידה רק ב- x ₪ לזוג אופניים. מה מספר זוגות האופניים שעל החברה למכור, על מנת שהכנסתה תהיה מקסימלית?

תשובות סופיות

- (1) א. 200 ב. \$93,750 ; לא, כי תמיד ניתן לייצר פחות וכך להקטין הוצאות.
- (2) 70 ₪ ל-350 דקות.
- (3) א. 60 ב. 60 ג. 1,800 ₪
- (4) 40
- (5) 75 אג'.
(6) מחיר הכרטיס : 30 ₪, ההכנסה המקסימלית : 3,600 ₪.
- (7) 4,500 ₪.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) 350

בעיות קיצון יסודיות עם מספרים

שאלות

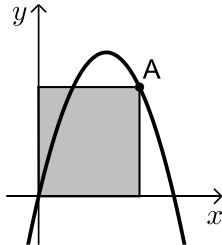
- (1) נתונים שלושה מספרים שסכומם 24. המספר הראשון שווה למספר השני. מצאו מהם המספרים, אם ידוע שמכפלתם מקסימלית.
- (2) מצאו את המספר החיובי, שאם נוסיף לו את המספר ההופכי לו, הסכום המתקבל יהיה מינימלי.
- (3) נתונים שלושה מספרים שסכומם הוא 36. ידוע שמספר אחד זהה לשני.
 - א. מה צריכים להיות שלושת המספרים כדי שמכפלתם תהיה מקסימלית?
 - ב. כיצד תשתנה התוצאה אם מספר אחד יהיה גדול פי 2 מהשני במקום שווה לו?
 - ג. באיזה מקרה תהיה מכפלה גדולה יותר?
- (4) x ו- y הם שני מספרים המקיימים $x + 6y = 60$.
 - א. הביעו את y באמצעות x .
 - ב. מה צריכים להיות המספרים x ו- y , כדי שמכפלת ריבועיהם תהיה מקסימלית?
 - ג. מהי המכפלה הנ"ל?

תשובות סופיות

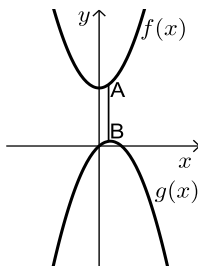
- (1) 8,8,8
- (2) 1
- (3) א. 12, 12, 12 ב. 8, 12, 16 ג. מקרה א'.
- (4) א. $y = 10 - \frac{x}{6}$ ב. $x = 30, y = 5$ ג. $M = 22500$

בעיות קיצון בפונקציות וגרפים

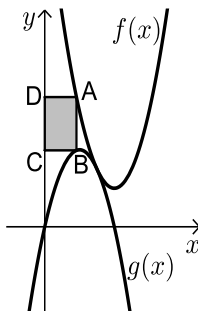
שאלות



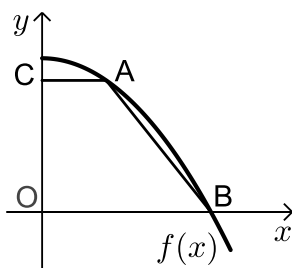
- (1) נתונה הפונקציה $f(x) = 6x - x^2$. מנקודה A שעל הפונקציה ברביע הראשון הורידו אנכים לצירי השיעורים כך שנוצר מלבן כמתואר בשרטוט. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



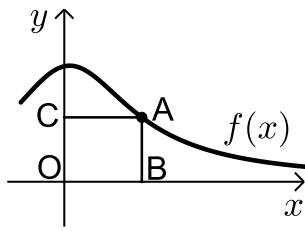
- (2) נתונות הפונקציות: $f(x) = x^2 + 12$ ו- $g(x) = 2x - x^2$. כמתואר: הנקודות A ו-B נמצאות בהתאמה על הגרפים של הפונקציות: $f(x)$ ו- $g(x)$, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.



- (3) באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = x^2 - 8x + 18$ ו- $g(x) = -x^2 + 4x$. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . מעבירים אנכים מהנקודות A ו-B לציר ה- y כך שנוצר מלבן (המסומן). נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .
א. הביעו באמצעות t את שטח המלבן המסומן.
ב. מצאו את ערכו של t עבורו שטח המלבן הוא מקסימלי.
ג. מה יהיה שטח המלבן במקרה זה?



- (4) נתונה הפונקציה $f(x) = 36 - x^2$. על גרף הפונקציה ברביע הראשון מסמנים נקודה A. מהנקודה A מעבירים ישר, המקביל לציר ה- x , שחותך את ציר ה- y בנקודה C. הנקודה B היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x ו-O ראשית הצירים.
א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי ששטח הטרפז ABOC יהיה מקסימלי?
ב. מה יהיה שטח הטרפז במקרה זה?

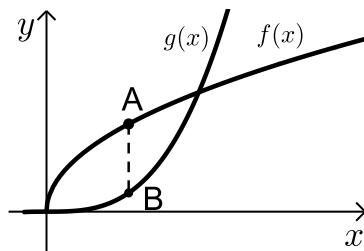


(5) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x+12}{x^2+3}$, בתחום $x \geq 0$.

נקצה נקודה A על גרף הפונקציה וממנה נוריד אנכים לצירים, כך שנוצר המלבן ABCO, כמתואר באיור.

א. מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, עבורם שטח המלבן יהיה מקסימלי.

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, עבורם שטח המלבן יהיה מינימלי בתחום הנ"ל.



(6) נתונות הפונקציות $f(x) = 2\sqrt{x}$ ו- $g(x) = \frac{1}{3}x^3$.

את הנקודה A שעל $f(x)$ חיברו עם הנקודה B, שנמצאת מתחתיה על $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה-y.

מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?

תשובות סופיות

(1) $A(4,8)$

(2) $A(0.5, 12.25)$

(3) א. $S = 2t^3 - 12t^2 + 18t$ ב. $t = 1$ ג. $S = 8$

(4) א. $A(2, 32)$ ב. $S = 128$

(5) א. $A(2, 2)$ ב. $A(0, 4)$

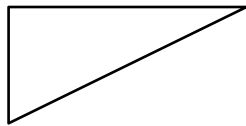
(6) $A(1, 2)$

בעיות קיצון בהנדסת המישור

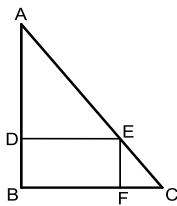
שאלות



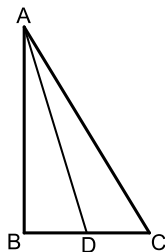
- (1) אדם מתכנן לבנות מרפסת בביתו ורוצה להציב מעקה סביב המרפסת. שטח המרפסת המתוכנן הוא 24 מ"ר. מחיר מעקה בחזית המרפסת (BC) הוא 120 ₪ למטר, ומחיר מעקה בצדי המרפסת הוא 40 ₪ למטר. מה צריכים להיות ממדי המרפסת, כדי שמחיר המעקה יהיה מינימלי?



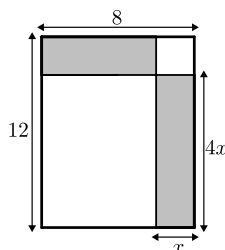
- (2) במשולש ישר זווית סכום אורכי הניצבים הוא 12 ס"מ. מה צריך להיות אורך כל ניצב, כדי ששטח המשולש יהיה מקסימלי?



- (3) במשולש ישר זווית ABC ($\angle B = 90^\circ$) הנקודה E נמצאת על היתר AC, כך שהמרובע EDBF הוא מלבן. נתון: $AB = 20$ ס"מ, $BC = 16$ ס"מ. מצאו את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.



- (4) במשולש ישר הזווית ABC ($\angle B = 90^\circ$), AD הוא תיכון לניצב BC. ידוע כי סכום אורכי הניצבים הוא 20 ס"מ. מצאו מה צריכים להיות אורכי הניצבים, עבורם אורך התיכון AD יהיה מינימלי.



- (5) נתון מלבן שאורכי צלעותיו הם 8 ס"מ ו-12 ס"מ, כמתואר באיור. מקצים קטעים באורכים של x ו- $4x$ על צלעות המלבן, כך שנוצרים המלבנים המקווקווים. מצאו את x עבורו סכום שטחי המלבנים הוא מינימלי.

תשובות סופיות

- (1) $4 \cdot 6$
- (2) א. 6 ס"מ ו-6 ס"מ ב. 18 סמ"ר ג. $8.48 \approx 6\sqrt{2}$ ס"מ.
- (3) 80 סמ"ר $S =$
- (4) 4 ס"מ, 16 ס"מ.
- (5) $x = 2.75$

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 10 - חקירת פונקציה

תוכן העניינים

1. מושגי יסוד	(ללא ספר)
2. חקירת פולינום	147
3. חקירת פונקציה רציונלית	149
4. חקירת פונקציה מעריכית	153
5. חקירת פונקציה לוגריתמית	156
6. חקירת פונקציה עם שורשים	160
7. חקירת פונקציה לא גזירה - שורש וערך מוחלט	161

שלבי עבודה והערות

1. בשאלות החקירה בפרק זה יש לחקור לפי השלבים הבאים :
 - תחום הגדרה ורציפות.
 - נקודות חיתוך עם הצירים.
 - זוגיות ואי-זוגיות.
 - אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות.
 - תחומי עלייה וירידה.
 - נקודות קיצון.
 - תחומי קמירות וקעירות.
 - נקודות פיתול.
 - שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
2. יש האומרים על פונקציה קמורה שהיא קעורה כלפי מעלה ועל פונקציה קעורה שהיא קמורה כלפי מטה. אלה מינוחים שמקובלים בדרך כלל בתיכון.
3. ברוב המוסדות האקדמיים לומדים למצוא אסימפטוטה משופעת, שכוללת בתוכה גם את האפשרות לאסימפטוטה אופקית. יחד עם זאת, בחלק מהמוסדות לומדים רק אסימפטוטה אופקית ולכן בכל חקירה אני מוצא גם אסימפטוטה משופעת וגם אופקית. צפו בפתרון רק בחלק הרלוונטי עבורכם.
4. בחלק מהחקירות אציין בשאלה שאין צורך לעבור על כל שלבי החקירה. שימו לב לזה.
5. אני ממליץ על תוכנה חינמית בשם Graph, שניתן להוריד [מכאן](#). בעזרתה תוכלו לשרטט כל פונקציה בקלות ולבדוק את תשובותיכם.

חקירת פולינום

שאלות

חקרו את הפונקציות הבאות חקירה מלאה :

$$f(x) = x^4 - 2x^3 \quad (2)$$

$$f(x) = x(x-9)^2 \quad (1)$$

תשובות סופיות

(1) תחום הגדרה: כל x . נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 ו- 9 .

נקודות קיצון: מינימום: $(9, 0)$, מקסימום: $(3, 108)$.

תחום עלייה: $x < 3$ or $x > 9$, ירידה: $3 < x < 9$.

תחום קמירות: $x > 6$, קעירות: $x < 6$.

נקודת פיתול: $(6, 54)$.

(2) תחום הגדרה: כל x . נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 ו- 2 .

נקודות קיצון: מינימום: $\left(1.5, \frac{-27}{16}\right)$.

תחום עלייה: $x > 1.5$, ירידה: $x < 1.5$.

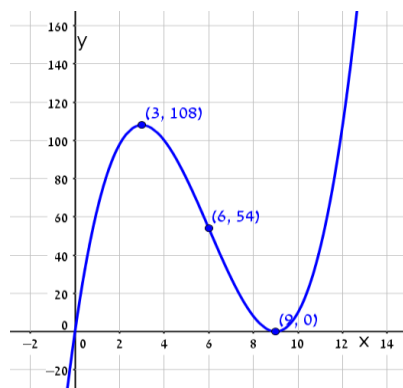
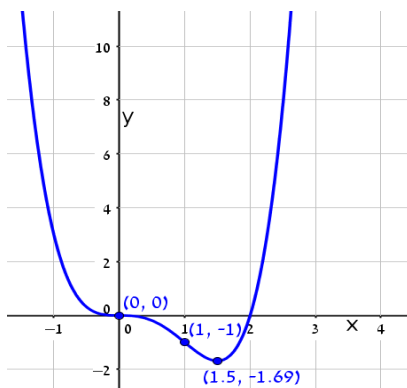
תחום קמירות: $x > 1$ or $x < 0$, קעירות: $0 < x < 1$.

נקודות פיתול: $(0, 0)$, $(1, -1)$.

גרפים

(1)

(2)



חקירת פונקציה רציונלית

שאלות

חקרו את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)} \quad (6)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1} \quad (8)$$

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad (7)$$

הערות

1. בשאלה 6 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואה ממעלה שלישית.
2. בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.
3. בשאלה 8 מצאתי רק אסימפטוטה אופקית ולא משופעת. מומלץ למצוא גם אסימפטוטה משופעת. פונקציה כמעט זהה יש בסרטון ההסבר על אסימפטוטה משופעת. בכל אופן, קיבלנו שם אסימפטוטה משופעת $y = x - 1$.

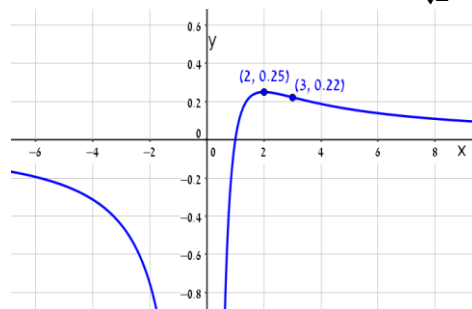
תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 0$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(2, 0.25)$. נקודת פיתול: $\left(3, \frac{2}{9}\right)$.
תחום עלייה: $0 < x < 2$, ירידה: $x > 2$ or $x < 0$.
תחום קמירות: $x > 3$, קעירות: $0 < x < 3$ or $x < 0$.
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq -1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0, עם ציר ה- x : 0.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=-1$, משופעת ואופקית: הישר $y=2$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מינימום: $(0, 0)$. נקודת פיתול: $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{9}\right)$.
תחום עלייה: $x < -1$ or $x > 0$, ירידה: $-1 < x < 0$.
תחום קמירות: $-1 < x < \frac{1}{2}$ or $x < -1$, קעירות: $x > \frac{1}{2}$.
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq \pm 2$. זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0, עם ציר ה- x : 0.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2$, $x=-2$, משופעת: הישר $y=x$ ב- $\pm\infty$,
אופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $(-\sqrt{12}, -\sqrt{27})$, מקסימום: $(\sqrt{12}, \sqrt{27})$.
תחום עלייה: $x < -\sqrt{12}$ or $x > \sqrt{12}$, ירידה: $-\sqrt{12} < x < \sqrt{12}$, $x \neq \pm 2$.
נקודת פיתול: $(0, 0)$.
תחום קמירות: $-2 < x < 0$ or $x > 2$, קעירות: $0 < x < 2$ or $x < -2$.
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq -1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0, עם ציר ה- x : 0.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=-1$, משופעת: הישר $y=x-2$ ב- $\pm\infty$,
אופקית: אין, כי הפונקציה רציונלית, שבה מעלת המונה גדולה ממעלת המכנה.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(-3, -\frac{27}{4}\right)$.
תחום עלייה: $x < -3$ or $x > -1$, ירידה: $-3 < x < -1$.
נקודת פיתול: $(0, 0)$.
תחום קמירות: $x > 0$, קעירות: $-1 < x < 0$ or $x < -1$.

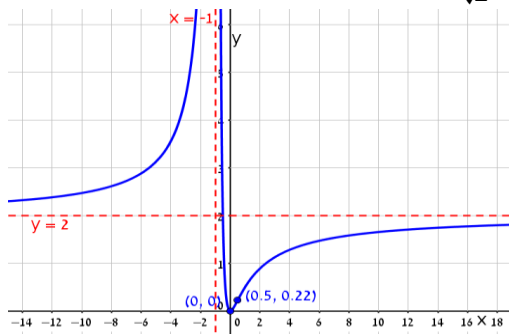
- (5) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1 , עם ציר ה- x : -1 .
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=1$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין; הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
נקודות פיתול: $(-1, 0)$, $\left(-3, \frac{1}{8}\right)$.
תחום קמירות: $-3 < x < -1$ & $x > 1$, קעירות: $-1 < x < 1$ or $x < -3$.
(6) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 2$, $x \neq 5$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $y = -\frac{1}{10}$, עם ציר ה- x : ± 1 .
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2$, $x=5$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(2.78, -3.88)$, מינימום: $(0.36, -0.11)$.
תחום עלייה: $0.36 < x < 2$ or $2 < x < 2.78$,
ירידה: $x < 0.36$ or $2.78 < x < 5$ or $x > 5$. נקודת פיתול: $(-1, 0)$.
תחום קמירות: $-1 < x < 2$ or $x > 5$, קעירות: $2 < x < 5$ or $x < -1$.
(7) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq \pm 2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $y = -\frac{3}{4}$, עם ציר ה- x : $x=1$, $x=3$.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2$, $x=-2$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין; כי למשוואה הריבועית שקיבלנו אין פתרון.
תחום עלייה: הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
נקודת פיתול: $(0.85, -0.09)$.
תחום קמירות: $0.85 < x < 2$ or $x < -2$, קעירות: $-2 < x < 0.85$ or $x > 2$.
(8) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 1$, $x \neq -1$.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 .
אסימפטוטה אופקית: אין, אנכית: הישר $x=-1$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(-2, -4)$, מינימום: $(0, 0)$.
תחום עלייה: $0 < x < 1$ or $x > 1$, ירידה: $-2 < x < -1$ or $-1 < x < 0$.
נקודת פיתול: אין.
תחום קמירות: $-1 < x < 1$ or $x > 1$, קעירות: $x < -1$.

גרפים

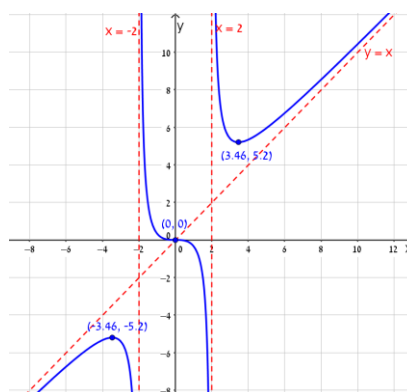
(1



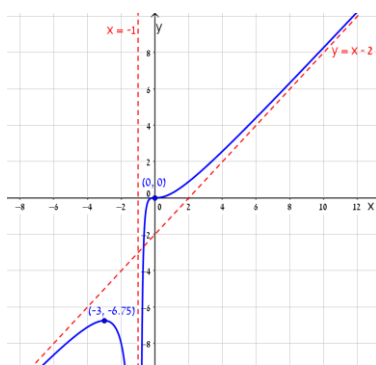
(2



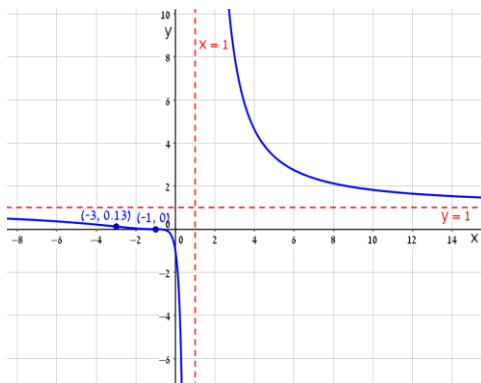
(3



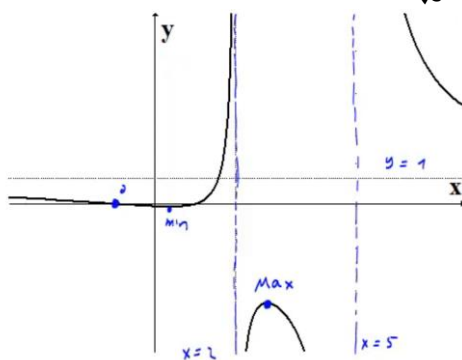
(4



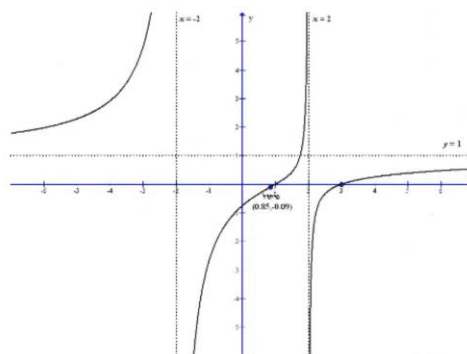
(5



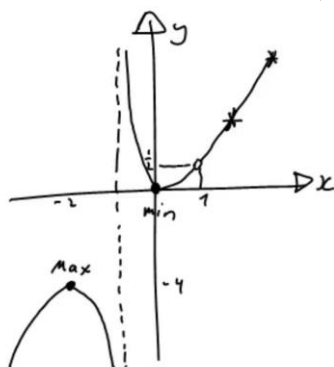
(6



(7



(8



חקירת פונקציה מעריכית

שאלות

חקרו את הפונקציות הבאות חקירה מלאה :

$$f(x) = x - e^x \quad (1)$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (2)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (3)$$

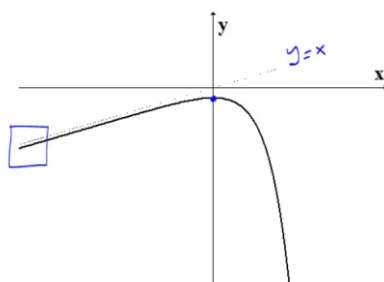
$$f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (4)$$

תשובות סופיות

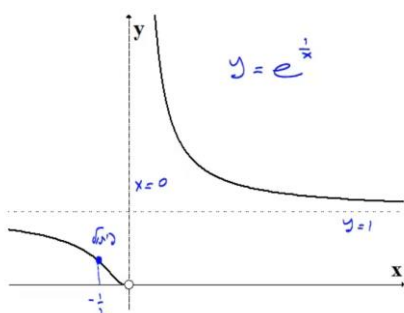
- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1 , עם ציר ה- x : אין (ראו בהרחבה בסרטון).
 אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: הישר $y = x$ ב- $-\infty$ בלבד.
 נקודות קיצון: מקסימום: $(0, -1)$. תחום עלייה: $x < 0$, ירידה: $x > 0$.
 נקודת פיתול: אין. תחום קמירות: קעורה לכל x .
 (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : אין.
 אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x = 0$, משופעת ואופקית: הישר $y = 1$ ב- $\pm\infty$.
 נקודות קיצון: אין.
 תחום עלייה וירידה: הפונקציה יורדת בתחום הגדרתה.
 נקודת פיתול: $(-0.5, e^{-2})$.
 תחום קמירות: $x > 0$ or $-0.5 < x < 0$, תחום קעירות: $x < -0.5$.
 (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : -2 .
 אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x = 0$, משופעת: הישר $y = x + 3$ ב- $\pm\infty$.
 אופקית: אין. נקודות קיצון: מקסימום: $(-1, e^{-1})$, מינימום: $(2, 4e^{\frac{1}{2}})$.
 תחום עלייה: $x > 2$ or $x < -1$, ירידה: $-1 < x < 0$ or $0 < x < 2$.
 נקודת פיתול: $(-0.4, 1.6e^{-2.5})$.
 תחום קמירות: $x > 0$ or $-0.4 < x < 0$, תחום קעירות: $x < -0.4$.
 (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 .
 אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת (אופקית): הישר $y = 0$ ב- $\pm\infty$.
 נקודות קיצון: מקסימום: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$, מינימום: $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$.
 תחום עלייה: $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, ירידה: $x > \frac{1}{2}$ or $x < -\frac{1}{2}$.
 נקודות פיתול: $(0, 0)$, $(-\sqrt{\frac{3}{4}}, -\sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5})$, $(\sqrt{\frac{3}{4}}, \sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5})$.
 תחום קמירות: $x > \sqrt{\frac{3}{4}}$ or $-\sqrt{\frac{3}{4}} < x < 0$, תחום קעירות: $0 < x < \sqrt{\frac{3}{4}}$ or $x < -\sqrt{\frac{3}{4}}$.

גרפים

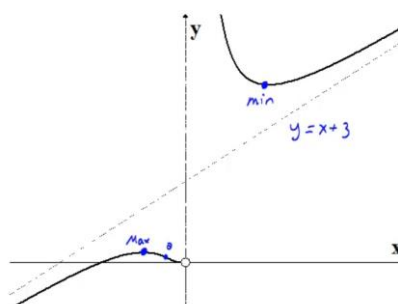
(1)



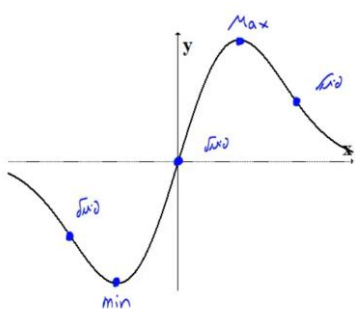
(2)



(3)



(4)



חקירת פונקציה לוגריתמית

שאלות

חקרו את הפונקציות הבאות חקירה מלאה :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (3)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (4)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (5)$$

$$f(x) = 4 \ln^2 x - 4 \ln x - 3 \quad (6)$$

$$f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (7)$$

הערה

בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.

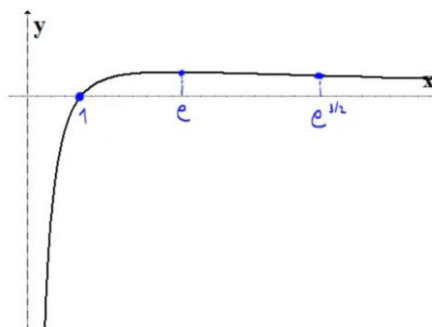
תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית: הישר $x = 0$, משופעת ואופקית: הישר $y = 0$ ב- ∞ .
 נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e, \frac{1}{e}\right)$.
 תחום עלייה: $0 < x < e$, ירידה: $x > e$.
 נקודת פיתול: $\left(e^{1.5}, \frac{1.5}{e^{1.5}}\right)$.
 תחום קמירות: $x > e^{1.5}$, קעירות: $0 < x < e^{1.5}$.
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): הישר $x = 0$,
 משופעת ואופקית: הישר $y = 0$ ב- ∞ .
 נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e^2, \frac{2}{e}\right)$.
 תחום עלייה: $0 < x < e^2$, ירידה: $x > e^2$.
 נקודת פיתול: $\left(e^{\frac{8}{3}}, \frac{\frac{3}{\sqrt{e^{\frac{8}{3}}}}}{\sqrt{e^{\frac{8}{3}}}}\right)$. תחום קמירות: $0 < x < e^{\frac{8}{3}}$, קעירות: $x > e^{\frac{8}{3}}$.
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x < 2$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $y = -\frac{1}{2} \ln 2$, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית: הישר $x = 2$, משופעת: אין.
 נקודות קיצון: אין.
 תחום עלייה: עולה בכל תחום הגדרתה.
 נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $(e^{-1}, -e^{-1})$.
 תחום עלייה: $x > e^{-1}$, ירידה: $0 < x < e^{-1}$.
 נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.

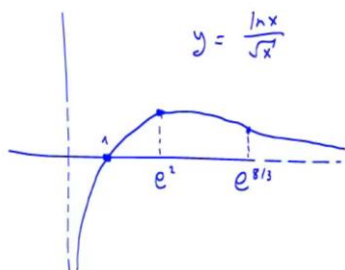
- (5) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : $x = e^1$, $x = e^{-3}$.
 אסימפטוטה אנכית: $x = 0$, משופעת ואופקית: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $(e^{-1}, -4)$.
 תחום עלייה: $x > e^{-1}$, ירידה: $0 < x < e^{-1}$.
 נקודת פיתול: $(1, -3)$. תחום קמירות: $x > 1$, קעירות: $0 < x < 1$.
- (6) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : $x = e^{1.5}$, $x = e^{-0.5}$.
 אסימפטוטה אנכית: $x = 0$, משופעת ואופקית: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $\left(e^{\frac{1}{2}}, -4\right)$.
 תחום עלייה: $x > e^{\frac{1}{2}}$, ירידה: $0 < x < e^{\frac{1}{2}}$.
 נקודת פיתול: $(e^{1.5}, 0)$. תחום קמירות: $0 < x < 1.5$, קעירות: $x > 1.5$.
- (7) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$, $x \neq 1$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : אין.
 אסימפטוטה אנכית: $x = 1$, משופעת ואופקית: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $(e^{-1}, 2)$, $(e, 2)$.
 תחום עלייה: $e^{-1} < x < 1$ or $x > e$, ירידה: $1 < x < e$ or $x < e^{-1}$.
 נקודת פיתול: $(5.15, 3.06)$.
 תחום קמירות: $0 < x < 1$ or $1 < x < 5.15$, קעירות: $x > 5.15$.

גרפים

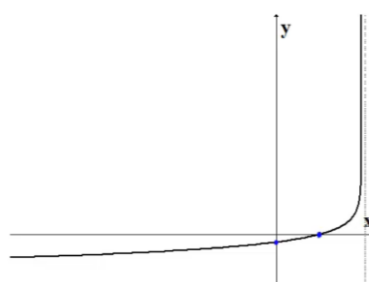
(1)



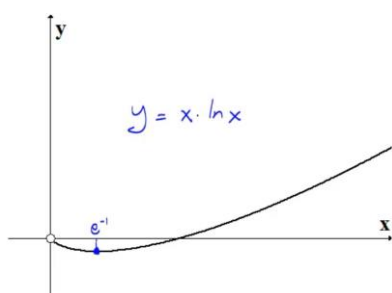
(2)



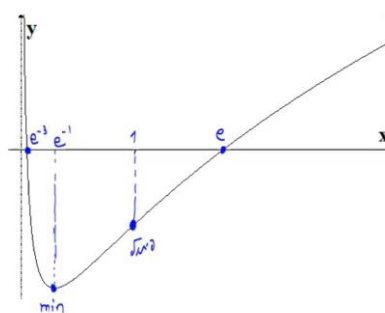
(3)



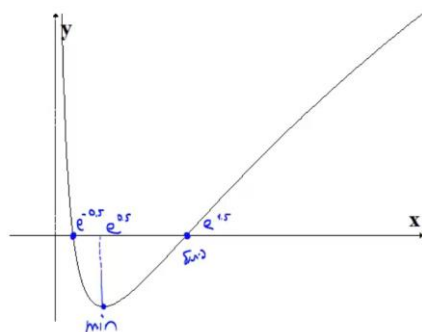
(4)



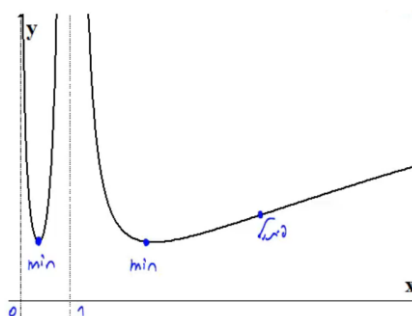
(5)



(6)



(7)



חקירת פונקציה עם שורשים

שאלה

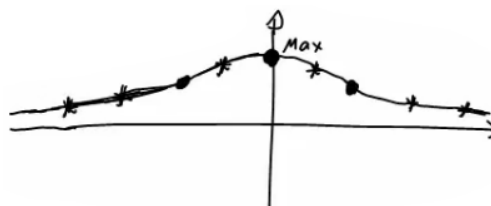
1) חקרו את הפונקציה הבאה חקירה מלאה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

תשובה

1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x .
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $y = 1$, עם ציר ה- x : אין.
 אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: $y = 0$.
 נקודות קיצון: מקסימום: $(0, 1)$. תחום עלייה: $x < 0$, ירידה: $x > 0$.

נקודות פיתול: $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right), \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$.

תחום קמירות: $x < -\sqrt{\frac{1}{2}}$ or $x < \sqrt{\frac{1}{2}}$, קעירות: $-\sqrt{\frac{1}{2}} < x < \sqrt{\frac{1}{2}}$.
 גרף:



חקירת פונקציה לא גזירה – שורש וערך מוחלט

שאלות

חקרו את הפונקציות הבאות חקירה מלאה :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x) = x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{x^2} - 1\right)^2 \quad (2)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1 \quad (3)$$

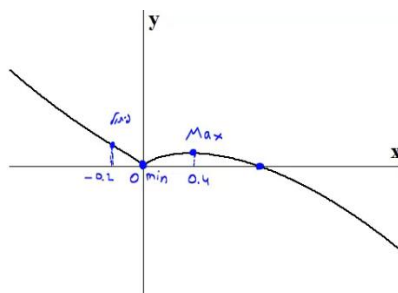
$$f(x) = \frac{|x-3|}{x-2} \quad (4)$$

תשובות סופיות

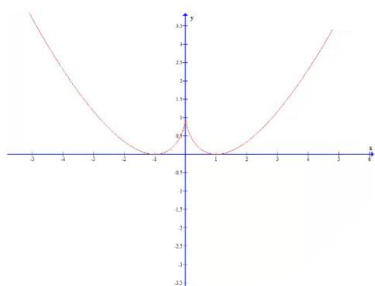
- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 או 1 .
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(\frac{2}{5}, 0.326\right)$, מינימום: $(0, 0)$.
תחום עלייה: $0 < x < \frac{2}{5}$, ירידה: $x < 0$ or $x > \frac{2}{5}$.
נקודות פיתול: $(-0.2, 0.41)$.
תחום קמירות: $x < -0.2$, קעירות: $-0.2 < x < 0$ or $x > 0$.
(2) תחום הגדרה ורציפות: לכל x .
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 1 , עם ציר ה- x : -1 או 1 .
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $(0, 1)$, מינימום: $(-1, 0)$, $(1, 0)$.
תחום עלייה: $-1 < x < 0$ or $x > 1$, ירידה: $0 < x < 1$ or $x < -1$.
נקודות פיתול: אין.
תחום קמירות: קמורה לכל x .
(3) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: זוגית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1 , עם ציר ה- x : ± 1 .
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $(0, -1)$.
תחום עלייה: $0 < x < 1$ or $x > 1$, ירידה: $-1 < x < 0$ or $x < -1$.
נקודות פיתול: $(-1, 0)$, $(1, 0)$.
תחום קמירות: $-1 < x < 1$, קעירות: $x > 1$ or $x < -1$.
(4) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1.5 , עם ציר ה- x : 3 .
אסימפטוטה אנכית: הישר $x = 2$,
משופעת ואופקית: הישר $y = 1$ ב- ∞ , ו- $y = -1$ ב- $-\infty$.
נקודות קיצון: מינימום: $(3, 0)$.
תחום עלייה: $x > 3$, ירידה: $2 < x < 3$ or $x < 2$.
נקודות פיתול: $(3, 0)$.
תחום קמירות: $2 < x < 3$, קעירות: $x > 3$ or $x < 2$.

גרפים

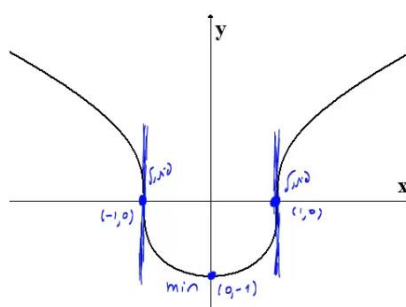
(1)



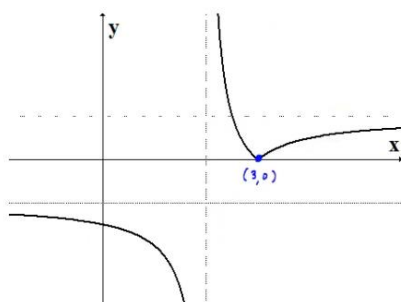
(2)



(3)



(4)



מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 11 - חקירת פונקציה ("שאלות מסביב")

תוכן העניינים

1. חקירת פונקציה - שאלות מסביב 164
2. הוכחת אי שוויונים 167

חקירת פונקציה – "שאלות מסביב"

שאלות

(1) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$. ידוע שהנקודה $x=1$ נקודת קיצון. מצאו את הקבוע a .

(2) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. ידוע שהנקודה $(1,2)$ נקודת קיצון. מצאו את הקבועים a, b .

(3) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$. ידוע שהנקודה $x=1$ נקודת פיתול. מצאו את הקבוע a .

(4) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. ידוע שהנקודה $(1,2)$ נקודת פיתול. מצאו את הקבועים a, b .

(5) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=3$ הוא 33. מצאו את a .

(6) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(3,9)$ הוא 12. מצאו את a, b .

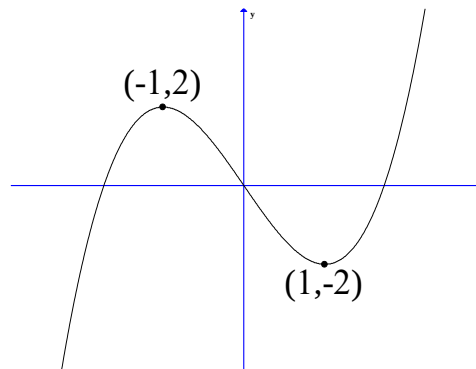
(7) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^3 + x^2}{2x^3 + x + 6}$. ידוע שהישר $y=4$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה. מצאו את a .

(8) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 4}{x}$. ידוע שהישר $y = 0.5x + 1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה. מצאו את a ואת b .

(9) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + ax + 6}$.

ידוע שהישר $x=1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.
מצאו את a .

שאלות 10-17 מתייחסות לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x$:



(10) מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 5$?

(11) מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 2$?

(12) מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 0.5$?

(13) עבור איזה ערך של k , למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק פתרון אחד?

(14) עבור איזה ערך של k , למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שני פתרונות?

(15) עבור איזה ערך של k , למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שלושה פתרונות?

(16) האם קיים ערך של k , עבורו למשוואה $f(x) = k$ אין פתרון?

(17) מצאו את התחומים בהם הפונקציה היא חז"ע.

תשובות סופיות

$$a = -\frac{2}{3} \quad (1)$$

$$a = -4, b = 6 \quad (2)$$

$$a = -\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$a = -1, b = 3 \quad (4)$$

$$a = 1 \quad (5)$$

$$a = \frac{2}{3}, b = -1 \quad (6)$$

$$a = 8 \quad (7)$$

$$a = \frac{1}{2}, b = 1 \quad (8)$$

$$a = -7 \quad (9)$$

$$1 \quad (10)$$

$$2 \quad (11)$$

$$3 \quad (12)$$

$$k < -2, k > 2 \quad (13)$$

$$k = \pm 2 \quad (14)$$

$$-2 < k < 2 \quad (15)$$

$$\text{לא} \quad (16)$$

$$x < -1, -1 < x < 1, x > 1 \quad (17)$$

הוכחת אי שוויונים

שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים, לגבי התחום הרשום לידם:

$$(1) \quad (-\infty < x < \infty), \quad 8x^3 \leq 3x^4 + 6x^2$$

$$(2) \quad (x > 0), \quad \sqrt{x+1} < 1 + \frac{x}{2}$$

$$(3) \quad (x \geq 0), \quad \ln(x+1) \leq x$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 12 - כלל לופיטל

תוכן העניינים

1. גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף..... 168
2. גבול מהצורה אפס כפול אינסוף..... 170
3. גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף..... 171
4. גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף..... 172
5. מקרים בהם כלל לופיטל נכשל..... 173

גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף

שאלות

$$\frac{\infty}{\infty} \text{ ו- } \frac{0}{0} \text{ גבולות מהצורה}$$

חשבו את הגבולות בשאלות 1-3 (ביטויים רציונאליים):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 4-8 (ביטויים אי-רציונאליים):

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{\sqrt{x - 2} - 1} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 5}}{x - 4} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - 1} - \sqrt{x}}{x - 1} \quad (7)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 9-12 (פונקציות חזקה):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0) \quad (10) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{2x^3} \quad (12) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \quad (11)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 13-15 (פונקציות לוגריתמיות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(x + 1) + x}{x} \quad (15) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)}{\frac{1}{x^2}} \quad (14) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^2 - 2x + 1} \quad (13)$$

חשבו את הגבולות הבאים (שאלות משולבות):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 3} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x} \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + x + 1}{e^x} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \quad (20)$$

תשובות סופיות

$\frac{1}{6}$ (5)	4 (4)	$n-1$ (3)	$\frac{20}{17}$ (2)	$\frac{5}{6}$ (1)
$\ln \frac{a}{b}$ (10)	1 (9)	$-\frac{3}{2}$ (8)	$\frac{5}{6}$ (7)	$\frac{3}{2}$ (6)
1 (15)	2 (14)	$-\frac{1}{2}$ (13)	$\frac{1}{6}$ (12)	$\frac{1}{2}$ (11)
0 (20)	0 (19)	∞ (18)	$\frac{1}{2}$ (17)	$\frac{1}{2}$ (16)

גבול מהצורה אפס כפול אינסוף

גבולות מהצורה $\infty \cdot 0$

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot e^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left(\frac{x+3}{x-3} \right) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) \cdot \ln(x - 3) \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{5}{x}} - 1 \right] \quad (7)$$

תשובות סופיות

0 (4)

0 (3)

0 (2)

∞ (1)

$\frac{5}{2}$ (7)

6 (6)

0 (5)

גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה $\infty - \infty$

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5} \right) \quad (4)$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה: $1^{\pm\infty}$, $0^{\pm\infty}$, ∞^0

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax)^x, \quad (a > 0) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x-4)^{x-2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2} \quad (4)$$

תשובות סופיות

$$e \quad (1)$$

$$1 \quad (2)$$

$$1 \quad (3)$$

$$1 \quad (4)$$

מקרים בהם כלל לופיטל נכשל

שאלות

הגבולות הבאים הם מהצורה $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

הראו זאת והסבירו מדוע, למרות כך, כלל לופיטל אינו ישים, ולבסוף, חשבו את הגבול.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (2)$$

תשובות סופיות

$$1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 13 - מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה

תוכן העניינים

1. מציאת מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה 174
2. הוכחת אי שוויונים 176

מציאת מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה

שאלות

מצאו את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציות הבאות, בתחומים הרשומים לידן (אם יש כאלה):

$$(-1 \leq x \leq 3) \quad f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x \quad (1)$$

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5} \quad (2)$$

$$(-1 \leq x \leq 20) \quad f(x) = x^{2/3} (20 - x) \quad (3)$$

$$\left[\frac{1}{2}; \frac{7}{2} \right] \quad f(x) = \begin{cases} 4x - 2 & x < 1 \\ (x - 2)(x - 3) & x \geq 1 \end{cases} \quad (4)$$

$$(-5 \leq x \leq 1) \quad f(x) = 1 + |9 - x^2| \quad (5)$$

$$(-5 < x < -1) \quad f(x) = \frac{x^2}{x+1} \quad (6)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad f(x) = x^3 - 9x + 1 \quad (7)$$

תשובות סופיות

- 1) $(-1, -7)$ מינימום מוחלט, $(3, 9)$ מקסימום מוחלט.
- 2) $(-1, 0)$ מינימום מוחלט, $(5, 0)$ מינימום מוחלט, $(2, 3)$ מקסימום מוחלט.
- 3) $(0, 0)$ מינימום מוחלט, $(20, 0)$ מינימום מוחלט, $(8, 48)$ מקסימום מוחלט.
- 4) $(2.5, -0.25)$ מינימום מוחלט, $(1, 2)$ מקסימום מוחלט.
- 5) $(-3, 1)$ מינימום מוחלט, $(-5, 17)$ מקסימום מוחלט.
- 6) $(-2, -4)$ מקסימום מוחלט. אין מינימום מוחלט.
- 7) אין מקסימום ואין מינימום מוחלטים.

הוכחת אי שוויונים

שאלות

הוכיחו את אי השוויונים שמימין, לגבי התחום בסוגריים משמאל:

$$(1) \quad x^3 e^{-x} \leq \frac{27}{e^3} \quad (x \text{ לכל})$$

$$(2) \quad x e^{-\sqrt{x}} \leq 1 \quad (x \geq 0)$$

$$(3) \quad 0 \leq x^2 e^{x-1} \leq 1 \quad (x \leq 1)$$

הערת סימון: $[a, b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b$; $(a, b) \Leftrightarrow a < x < b$; $[a, b) \Leftrightarrow a \leq x < b$; $(a, b] \Leftrightarrow a < x \leq b$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 14 - משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי

תוכן העניינים

177	1. המשיק
179	2. בעיות משיקים
181	3. בעיות משיקים עם נוסחת המשיק
184	4. הנורמל
185	5. נוסחת הקירוב הליניארי - דיפרנציאל שלם

המשיק

שאלות

- (1) מצאו את שיפוע הפונקציה
 - א. $f(x) = 2x^3 - 7x$, בנקודה $(2, 2)$.
 - ב. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$, בנקודה $x = -2$.
- (2) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{ax}$, כאשר $a > 0$.

המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{1}{2}$, הוא בעל שיפוע 1.

מצאו את הקבוע a .
- (3) הישר $2y - 3x = 3$ משיק לגרף הפונקציה $h(x) = 3\sqrt{x}$.

מצאו את נקודת ההשקה.
- (4) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = a \cdot 3^{2x-1} + 3^{x-b}$, בנקודה $(1, 15)$, הוא $21\ln 3$.

מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b .
- (5) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{\ln^2 x + a}{\ln x + b}$, בנקודה $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$, הוא $\frac{e}{3}$.

מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b .
- (6) לאילו ערכי k ישיק הישר $y = -5x + 6$, לגרף הפונקציה

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + k$$

לכל ערך k כזה מצאו את נקודת ההשקה.

תשובות סופיות

(1) א. 17 ב. 4

(2) $a = 2$

(3) $(1, 3)$

(4) $a = 2, b = -1$

(5) $a = 2, b = -2$

(6) לערך $k = 6$, בנקודה $x = 1$; לערך $k = \frac{158}{27}$, בנקודה $x = \frac{1}{3}$.

בעיות משיקים

שאלות

(1) הישר $y = 4x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$. מצאו את b ואת נקודת ההשקה.

(2) הישר $y = 3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} + b$. מצאו את b ואת נקודת ההשקה.

(3) הישר $y = ax + \frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x) = \frac{2}{x+c}$ בנקודה $x = 0$. מצאו את a ו- c .

(4) הישר $y = x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^x$. מצאו את b ואת נקודת ההשקה.

(5) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודה $x = e$.

בשאלות 6-7 מצאו את נקודת ההשקה, ואת משוואת המשיק לגרף העקומה, העובר דרך הנקודה הנתונה:

(6) $(2, -3), y = x^2 - 2x + 1$

(7) $(-3, 1), y = \sqrt{x}$

(8) מצאו את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות $y = x^2$ ו- $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$.

(9) הפונקציות $y = \frac{1}{x}$ ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$ משיקות זו לזו. מצאו את k ואת נקודת ההשקה.

תשובות סופיות

- (1) נקודת ההשקה היא $(-1, 5)$ ומשוואת המשיק היא $y = 4x + 9$.
- (2) נקודת ההשקה היא $(4, 12)$ ו- $b = 4$.
- (3) נקודת ההשקה היא $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ומשוואת המשיק היא $y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$.
- (4) נקודת ההשקה היא $(0, 1)$ ומשוואת המשיק היא $y = x + 1$.
- (5) משוואת המשיק היא $y = \frac{1}{e}x$.
- (6) $y = 6x - 15, (4, 9)$; $y = -2x + 1, (0, 1)$
- (7) המשיק $(9, 3)$, $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$.
- (8) $y = 2x - 1, y = -2x - 1$
- (9) נקודת ההשקה $k = 1.5$, $(1, 1)$.

בעיות משיקים עם נוסחת המשיק

שאלות

- (1) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = 2(4x+3)^3$, בנקודה $x = -1$.
- (2) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^4 - 2x$, ששיפועו 2.
- (3) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 + 1$, בנקודה $x = 0$.
- (4) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2 - 2}$, בנקודה $x_1 = 1$.
- (5) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{2}{ax+3}$, בנקודה $y = 2$, הוא -4 .
מצאו את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.
- (6) מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = \frac{1}{3x^3}$, היוצרים זווית של 135° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .
- (7) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}-1}$, ששיפועו -2.
- (8) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$, בנקודה $x = 2$.
- (9) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{a}{\sqrt{bx}-1}$, בנקודה $(1,6)$, הוא -6 .
מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b .
- (10) נתונה הפונקציה $y = e^{2x} + 3ex$, והעבירו לה משיק בנקודה $x = 2$.
מצאו את משוואת המשיק.

(11) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = e^{2x} + xe^{-x}$, בנקודה $x = 0$.

(12) מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = (e+1)e^x - e^{2x}$, בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y = e$.

(13) לפונקציה $g(x) = \frac{\ln x^2}{x}$ העבירו משיק בנקודה שבה $x = e^2$. מצאו את משוואת המשיק.

(14) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y = x \cdot \ln(x^2 + 1)$, בנקודה $x = 1$.

(15) הגרפים של $f(x) = \ln x$ ו- $g(x) = 1 - x$ נחתכים בנקודה A, ברביע הראשון. בנקודה A העבירו משיק. מצאו את משוואת המשיק והוכיחו שהמשיק עובר דרך ראשית הצירים.

(16) מצאו את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $xy^2 + y - x = xy$, דרך הנקודה $(1,1)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

(17) מצאו את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $x^2y + e^{y^2-4x} = \ln x + 1$, דרך הנקודה $(1,2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

(18) מצאו את משוואת המשיק למעגל $x^2 + y^2 = 25$ בנקודה $(3,4)$.

תשובות סופיות

$$y = 24x + 22 \quad (1)$$

$$y = 2x - 3 \quad (2)$$

$$y = 1 \quad (3)$$

$$y = -12x + 9 \quad (4)$$

$$a = 2, \quad y = -4x - 2 \quad (5)$$

$$y = -x + 1\frac{1}{3}, \quad y = -x - 1\frac{1}{3} \quad (6)$$

$$y = -2x + 8 \quad (7)$$

$$y = \frac{11}{16}x - \frac{30}{16} \quad (8)$$

$$a = 6, \quad b = 2, \quad y = -6x + 12 \quad (9)$$

$$y = (2e^4 + 3e)x - 3e^4 \quad (10)$$

$$y = 3x + 1 \quad (11)$$

$$y = (-e^2 + e)x + e^2, \quad y = (e - 1)x + e \quad (12)$$

$$y = -\frac{2}{e^4}x + \frac{6}{e^2} \quad (13)$$

$$y = (\ln 2 + 1)x - 1 \quad (14)$$

$$y = \frac{1}{e}x \quad (15)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad (16)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5} \quad (17)$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \quad (18)$$

הנורמל

שאלות

- (1) מצאו את משוואת הישר, הנורמל לגרף הפונקציה $f(x) = \sqrt{2x-2}$, בנקודה $(3, 2)$.
- (2) מצאו את משוואת הנורמל לגרף הפונקציה $f(x) = x^4$, המאונך לישר העובר דרך הנקודות $(5, 0)$ ו- $(2, 4)$.
- (3) משוואת נורמל לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$, בנקודה מסוימת, היא $4y + x = 6$. מצאו את הנקודה.

תשובות סופיות

- (1) $y = -2x + 8$
- (2) $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$
- (3) $(2, 1)$

נוסחת הקירוב הלינארי – דיפרנציאל שלם

שאלות

(1) חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{27}$.

(2) חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים $\ln 2$, $\sqrt[3]{9}$.

תשובות סופיות

$$\sqrt{5} \approx 2.25, \sqrt{8} \approx 2\frac{5}{6}, \sqrt{27} = 5\frac{1}{5} \quad (1)$$

$$\ln 2 \approx 1, \sqrt[3]{9} \approx 2\frac{1}{12} \quad (2)$$