

מתמטיקה למנהל עסקים



תוכן העניינים

1	הפונקציה הממשית ומבוא לתורת הקבוצות
27	גבול של פונקציה
39	רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים
46	הגדרת הנגזרת - גזירות של פונקציה - נגזרות חד-צדדיות
54	חישוב נגזרת של פונקציה
67	משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי
77	כלל לופיטל
83	חקירת פונקציה
106	מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה
111	בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון)
124	מציאת מספר הפתרונות של משוואה (משפטי קושי ורול)
127	אינטגרלים מידיים ואינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"
133	אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים
135	אינטגרלים בשיטת ההצבה
137	אינטגרלים של פונקציות רציונליות
141	האינטגרל המסוים, סכומי רימן
146	שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)
157	פונקציות של שני משתנים
167	נגזרות חלקיות
173	פונקציות סתומות
174	קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים
176	קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')
179	קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה

תוכן העניינים

180	24. המרחב n^R
187	25. פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות
193	26. מטריצות
199	27. דטרמיננטות

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 1 - הפונקציה הממשית ומבוא לתורת הקבוצות

תוכן העניינים

1. פונקציה - הגדרה ותכונות בסיסיות (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית (ללא ספר)
3. הפונקציה הריבועית (ללא ספר)
4. הפונקציה המעריכית (ללא ספר)
5. הפונקציה הלוגריתמית (ללא ספר)
6. פונקציות מפורסמות נוספות (ללא ספר)
7. הזזות שיקופים מתיחות וכיווצים של פונקציה (ללא ספר)
8. תחום הגדרה של פונקציה 1
9. הרכבת פונקציות 3
10. הפונקציה ההפוכה 6
11. פונקציה זוגית ופונקציה אי זוגית 10
12. פונקציה מפוצלת 12
13. תרגילים משולבים 13
14. מבוא לתורת הקבוצות 17

תחום הגדרה של פונקציה

שאלות

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות :

$$(1) \quad y = x^3 - x^2 - 4x + 1$$

$$(2) \quad y = \frac{1}{x^2 - 4}$$

$$(3) \quad y = \frac{4x + 1}{x^2 + 1}$$

$$(4) \quad y = \frac{1}{x^3 - x}$$

$$(5) \quad y = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$$

$$(6) \quad y = \sqrt{x - 4}$$

$$(7) \quad y = \sqrt{x^2 + x - 2}$$

$$(8) \quad y = \sqrt[3]{x^2 + x - 1}$$

$$(9) \quad y = \frac{1}{\sqrt{1 - |x|}}$$

$$(10) \quad y = \ln(x^2 + x - 2)$$

$$(11) \quad y = \log x + \frac{1}{\log x}$$

$$(12) \quad y = e^{x^2 + x + 1}$$

$$y = \log_x (x + 4) \quad (13)$$

תשובות סופיות

- (1) כל x .
- (2) $x \neq \pm 2$
- (3) כל x .
- (4) $x \neq 0, 1, -1$
- (5) $x \neq 2, -1$
- (6) $x \geq 4$
- (7) $x \leq -2, x \geq 1$
- (8) כל x .
- (9) $-1 < x < 1$
- (10) $x < -2, x > 1$
- (11) $x > 0, x \neq 1$
- (12) כל x .
- (13) $x > 0, x \neq 1$

הרכבת פונקציות

שאלות

(1) נתונות הפונקציות $h(x) = \frac{4}{x}$, $g(x) = x^2$, $f(x) = x - 4$

חשבו את הפונקציות המורכבות הבאות:

א. $f(g(1))$ ב. $h(g(f(5)))$ ג. $f(g(x))$
 ד. $h(f(x))$ ה. $f(f(x))$ ו. $h(h(x))$

(2) נתון $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$

חשבו את $f(f(x))$ עבור $x=3$.

(3) נתון $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$, $g(x) = \frac{5-x}{x-7}$

חשבו את $f(g(x)) + g(f(x))$ עבור $x=8$.

(4) נתון $f(x) = x^2 - 7x$, $g(x) = \ln x$

חשבו את $f(g(x))$ עבור $x = e^2$.

(5) נתון $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = \ln x$

חשבו את $f(g(x))$ עבור $x=2$.

(6) נתון $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x+3 & x > 4 \\ 3x & x \leq 4 \end{cases}$

חשבו את $f(g(x))$, $g(f(x))$

נתונות הפונקציות

א. $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases}$ ב. $g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 1 \\ -x^2-2x-1 & x \geq 1 \end{cases}$

מצאו נוסחה עבור ההרכבה $z(x) = g(f(x))$.

8) נתונות הפונקציות

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases} \quad \text{ו-} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 1 \\ -x^2 - 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

א. מצאו נוסחה עבור ההרכבה $h(x) = f(g(x))$.

ב. נתון ש- $n \in \mathbb{Z}$ ו- $h(n) \notin \mathbb{Z}$.

מה ניתן להסיק בוודאות?

1. $n \leq -3$

2. $n \geq 1$

3. n אי-זוגי שלילי.

4. אף תשובה אינה נכונה.

9) נתון $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

מצאו את $f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\dots(f(x))))}_{n \text{ Times}}$.

תשובות סופיות

(1) א. -3 ב. 4 ג. $x^2 - 4$ ד. $\frac{4}{x-4}$ ה. $x-8$ ו. x

(2) 3

(3) 69/13

(4) -10

(5) 4

$$f(g(x)) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & x > 4 \\ \frac{1}{3x} & 0 < x \leq 4 \\ (3x)^2 & x \leq 0 \end{cases}, g(f(x)) = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 2 \\ 3x^2 & -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{x} + 3 & 0 < x < \frac{1}{4} \\ 3\frac{1}{x} & x \geq \frac{1}{4} \end{cases} \quad (6)$$

$$z(x) = \begin{cases} 4x^2 + 16x + 12 & x < -1.5 \\ -4x^2 - 20x - 25 & -1.5 \leq x \leq -1 \\ x - 3 & -1 < x < 0 \\ -x - 2 - 2\sqrt{x+1} & x \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$n \leq -3 \quad \text{ב.} \quad h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3} & x < -\sqrt{3} \\ 2x^2 - 4 & -\sqrt{3} \leq x < 1 \\ -2x^2 - 4x + 2 & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$f^n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}} \quad (9)$$

הפונקציה ההפוכה

שאלות

בשאלות 1-4 הוכיחו שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצאו את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{3} \quad (1)$$

$$(x \geq 0) \quad f(x) = x^2 - 4 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad (3)$$

בשאלות 5-7, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (7)$$

$$f(x) = x^2 - x \quad (6)$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad (5)$$

בשאלות 8-10, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע, אם כן, מצאו את הפונקציה ההפוכה ואת התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^3 \quad (10)$$

$$y = \frac{x^2+3}{2x-1} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (8)$$

$$(11) \text{ נתונה } f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x-1}}.$$

האם הפונקציה היא חח"ע?
מצאו את התמונה של הפונקציה.

(12) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו את תחום ההגדרה, הטווח והתמונה וקבעו האם היא פונקציה על:

$$f(x) = \frac{x-1}{3} ; f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x} ; f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = \frac{3x-2}{x-2} ; f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = x^2 - 4 ; f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ד.}$$

13 עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו תחום הגדרה, טווח ותמונה. בנוסף, קבעו האם הפונקציה הנתונה היא על.

א. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

ב. $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, 1] \quad g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

ג. $f: (1, \infty) \rightarrow (0, 1] \quad h(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

14 תהיינה שתי פונקציות $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$. תהי $h: A \rightarrow C$ ההרכבה, המוגדרת על ידי $h(x) = g(f(x))$. הוכיחו או הפריכו:

- א. אם f ו- g חח"ע אז h חח"ע.
- ב. אם f ו- g חח"ע אז h על.
- ג. אם f ו- g על אז h על.
- ד. אם f ו- g על אז h חח"ע.
- ה. אם f חח"ע ו- g על אז h חח"ע.
- ו. אם f חח"ע ו- g על אז h על.
- ז. אם f על ו- g חח"ע אז h חח"ע.
- ח. אם f על ו- g חח"ע אז h על.

15 תהיינה שתי פונקציות $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$. תהי $h: A \rightarrow C$ ההרכבה, המוגדרת על ידי $h(x) = g(f(x))$. נתון כי h על. הוכיחו או הפריכו:

- א. f חח"ע.
- ב. f על.
- ג. g חח"ע.
- ד. g על.

16) תהיינה שתי פונקציות $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$.

תהי $h: A \rightarrow C$ ההרכבה, המוגדרת על ידי $h(x) = g(f(x))$.

נתון כי h חח"ע.

הוכיחו או הפריכו:

א. g על.

ב. f על.

ג. g חח"ע.

ד. f חח"ע.

תשובות סופיות

- (1) $f^{-1}(x) = 3x + 1$, כל y .
- (2) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$, $y \neq 1$.
- (3) $f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{x-3}$, $y \neq 3$.
- (4) $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$, $y \geq -4$.
- (5) לא חח"ע. תמונה: $y \leq -2$ או $y \geq 2$.
- (6) לא חח"ע. תמונה: $y \geq -\frac{1}{4}$.
- (7) לא חח"ע. תמונה $0 \leq y \leq 1$.
- (8) כן חח"ע. תמונה: $y > 0$. פונקציה הפוכה: $x > 0$, $f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.
- (9) לא חח"ע. תמונה: $y \geq 2.3$ או $y \leq -1.3$.
- (10) כן חח"ע. תמונה: $y \neq 1$. פונקציה הפוכה: $f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2}$.
- (11) לא חח"ע. תמונה: $y \geq \frac{6}{\sqrt{3}}$.
- (12) א. תחום הגדרה, טווח ותמונה: $\mathbb{R}$; על.
 ב. תחום הגדרה $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, טווח $\mathbb{R}$, תמונה: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; לא על.
 ג. תחום הגדרה $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, טווח ותמונה: $\mathbb{R} \setminus \{3\}$; על.
 ד. תחום הגדרה $[0, \infty)$, טווח $\mathbb{R}$, תמונה: $[-4, \infty)$; לא על.
- (13) א. תחום הגדרה וטווח: $\mathbb{R}$, תמונה: $(0, 1]$; לא על.
 ב. תחום הגדרה $\mathbb{R}$, טווח ותמונה: $(0, 1]$; על.
 ג. תחום הגדרה $(1, \infty]$, טווח $(0, 1]$, תמונה: $(0, 0.5)$; לא על.
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.
- (16) שאלת הוכחה.

פונקציה זוגית ואי זוגית

שאלות

מצאו איזה מבין הפונקציות בשאלות 1-6 הן אי-זוגיות ואיזה זוגיות:

$$(1) \quad y = 4x^3 \quad (2) \quad y = x^4 + x^{10} \quad (3) \quad y = 1$$

$$(4) \quad y = \frac{1}{x} \quad (5) \quad y = 2^x \quad (6) \quad y = \ln x + x^2$$

(7) נתונה פונקציה אי-זוגית $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\text{ונסמן } k(x) = -f(x), \quad z(x) = f(x^2).$$

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות k, z , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(8) נתונה פונקציה אי-זוגית $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, פונקציה זוגית $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\text{ונסמן } z(x) = -f(x^3) \text{ ו- } k(x) = -f(x^3).$$

טענה א': $z(x)$ אי-זוגית.

טענה ב': $k(x)$ אי-זוגית.

איזו טענה נכונה?

(9) נתונה פונקציה אי-זוגית $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, פונקציה זוגית $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\text{ונסמן } k(x) = f(-x) + x^{11}g(|x|), \quad z(x) = -g(-4x) \cdot f(x^4).$$

בדקו, עבור כל אחת מהפונקציות k, z , האם היא זוגית או אי-זוגית.

(10) הוכיחו כי:

א. סכום פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית

ב. מכפלת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ג. מנת פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ד. הרכבה של פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית.

ה. הרכבה של פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה אי-זוגית.

תשובות סופיות

שאלות 1-6: זוגית: 2,3; אי-זוגית: 1,4; כללית: 5,6.

(7) k אי-זוגית, z זוגית.

(8) טענה ב'.

(9) k אי-זוגית, z זוגית.

(10) שאלת הוכחה.

פונקציה מפוצלת

שאלות

רשמו כל אחת מהפונקציות 1-4 כפונקציה מפוצלת ושרטטו את גרף הפונקציה:

$$y = 3|x+1| \quad (2)$$

$$y = |x-2| \quad (1)$$

$$y = \frac{|x|}{x} \quad (4)$$

$$y = x^2 + 2|x-1| \quad (3)$$

$$(5) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 4 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

א. חשבו $f(1)$, $f(4)$, $f(-4)$, $f(0)$, $f(7)$.

ב. שרטטו את גרף הפונקציה.

ג. בדקו האם הפונקציה זוגית, אי-זוגית או כללית.

תשובות סופיות

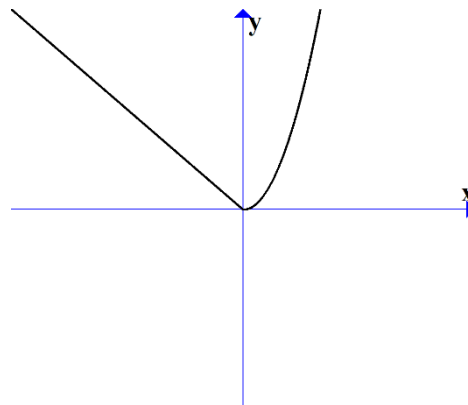
$$y = \begin{cases} 3x+3 & x \geq -1 \\ -3x-3 & x < -1 \end{cases} \quad (2)$$

$$y = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & x < 1 \end{cases} \quad (3)$$

(5) א. $f(1)=1$, $f(4)=16$, $f(-4)=4$, $f(0)=0$, $f(7)=\text{undefind}$
 ב. ג. כללית.



תרגילים משולבים

שאלות

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ x^3+1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

שרטטו את הפונקציה, וקבעו האם היא:

א. עולה.

ב. יורדת.

ג. אי-זוגית.

ד. זוגית.

ה. חסומה.

ו. לא חסומה.

ז. חח"ע.

ח. על $\mathbb{R}$.

הערה: ניתן להתבסס על הציור כנימוק.

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & x > 1 \\ x^5+1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

בכל אחד מהסעיפים הבאים יש טענה.

קבעו האם הטענה נכונה או לא נכונה.

א. הפונקציה מונוטונית עולה ממש.

ב. הפונקציה על $\mathbb{R}$.

ג. הפונקציה אי-זוגית.

ד. הפונקציה זוגית.

ה. הפונקציה חח"ע.

הערה: ניתן לשרטט ולהתבסס על הציור כנימוק.

(3) נתונה פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, זוגית ומונוטונית עולה ממש, ופונקציה $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, אי-זוגית ומונוטונית יורדת ממש.

$$\text{נסמן: } z(x) = -g(x^3) \text{ ו- } k(x) = -f(x^3).$$

טענה א': $k(x)$ מונוטונית עולה ממש.

טענה ב': $z(x)$ מונוטונית עולה ממש.

טענה ג': $h(x) = k(x)z(x)$ זוגית.

מי מבין הטענות נכונה?

(4) נתונות שתי פונקציות, $f, g: [0,1] \rightarrow [0,1]$.

נתון ש- f מונוטונית עולה ממש, ואילו g מונוטונית יורדת חלש,

אך אינה יורדת ממש.

$$\text{תהי } h(x) = f(g(x)).$$

איזו טענה נכונה?

א. h יורדת חלש.

ב. h עולה ממש.

ג. h עולה חלש, אך אינה עולה ממש.

ד. h אינה חסומה בהכרח.

$$(5) \text{ נתונות הפונקציות } f(x) = \begin{cases} x+4 & x \leq 0 \\ \sqrt{x} & x > 0 \end{cases} \text{ ו- } g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 0 \\ -x^2-2x-1 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{תהי } h(x) = f(g(x)).$$

א. מצאו את h בקטע $[-2,0)$.

ב. קבעו האם h חח"ע בקטע $[-2,0)$.

ג. קבעו האם h חסומה בקטע $[-2,0)$.

ד. קבעו האם $h: [-2,0) \rightarrow [0,4]$ היא על.

* בסעיפים ב-ד ניתן להסתמך על גרף הפונקציה.

(6) נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$: $f(x) = x^3$, $g(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$.

קבעו מי מבין הטענות הבאות נכונה.

$$\text{הפונקציה } h(x) = f(g(x)) \text{ היא:}$$

א. חסומה.

ב. אי-זוגית.

ג. חח"ע.

ד. מונוטונית.

7 נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$: $f(x) = x^3$, $g(x) = -\lfloor x \rfloor$.

א. בדקו את מונוטוניות $z(x) = f(g(x))$.

ב. בדקו את מונוטוניות $k(x) = g(f(x))$.

ג. בדקו האם $h(x) = \sqrt[3]{f(x)} - g(-x)$ חסומה.

תזכורת לסעיפים א+ב:

אם $a < b \Leftrightarrow f(a) \geq f(b)$ אז הפונקציה f יורדת חלש.

8 נתונות פונקציות המוגדרות על כל $\mathbb{R}$:
 $f(x) = (3\lfloor x \rfloor)^3 + 27\lfloor x \rfloor$
 $g(x) = f(x) + x^3 - 28$

הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה f עולה ממש וחח"ע.

ב. הפונקציה g עולה ממש וחח"ע.

9 מצאו את הפונקציה ההפוכה לפונקציה $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$,

קבעו את תחום הגדרתה והוכיחו שהפונקציה על $\mathbb{R}$.
 הערה: פונקציה זו נקראת סינוס היפרבולי.

10 חקרו את מונוטוניות הפונקציה $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$.

הערה: אין להשתמש בנגזרות.

11 נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את התמונה של הפונקציה.

ג. הוכיחו שהפונקציה חסומה.

ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

תשובות סופיות

- (1) א. כן. ב. לא. ג. לא. ד. לא. ה. לא. ו. כן.
ז. כן. ח. כן.
- (2) אף טענה אינה נכונה.
- (3) טענה ב' נכונה.
- (4) טענה א' נכונה.
- (5) א. $h(x) = x^2$ ב. הפונקציה חח"ע בקטע.
ג. הפונקציה חסומה בקטע. ד. הפונקציה לא על.
- (6) א. הפונקציה חסומה. ב. הפונקציה לא זוגית ולא אי זוגית.
ג. הפונקציה לא חח"ע. ד. הפונקציה לא מונוטונית.
- (7) א. הפונקציה $z(x)$ יורדת חלש. ב. הפונקציה $k(x)$ יורדת חלש.
ג. הפונקציה חסומה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) $f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$; תחום הגדרתה: כל x .
- (10) ראו באתר.
- (11) א. $-1 \leq x \leq 2$ ב. $0 \leq y \leq \frac{3}{2}$ ג. שאלת הוכחה.
- ד. $-1 \leq x < \frac{1}{2}$ עלייה, $\frac{1}{2} < x \leq 2$ ירידה.

מבוא לתורת הקבוצות

סיכום כללי

הגדרות יסודיות

- גרירה חד כיוונית $A \Rightarrow B$ פירושו: אם A מתקיים, אז גם B מתקיים.
- גרירה דו-כיוונית $A \Leftrightarrow B$ (אם ורק אם). פירושו: $A \Rightarrow B$ וגם $B \Rightarrow A$.
- הסימן 'או' $\vee$.
- הסימן 'וגם' $\wedge$.

קבוצה, איבר של קבוצה ושייכות לקבוצה

- קבוצה היא אוסף של עצמים.
- כל עצם בקבוצה נקרא איבר של הקבוצה.
- שייכות לקבוצה:
 - על מנת לציין שהאיבר a שייך לקבוצה A נרשום $a \in A$.
 - על מנת לציין שהאיבר a אינו שייך לקבוצה A נרשום $a \notin A$.

שוויון בין קבוצות

- שתי קבוצות הן שוות אם יש להן בדיוק את אותם איברים.
- פורמלית שוויון בין קבוצות מוגדר באופן הבא: $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

הקבוצה ריקה

קבוצה שאין בה כלל איברים נקראת הקבוצה הריקה ומסומנת ב- $\emptyset$, כלומר $\emptyset = \{ \}$.

קבוצה סופית ואינסופית

- קבוצה תקרא סופית אם מספר האיברים בה סופי.
- קבוצה תקרא אינסופית אם מספר האיברים בה אינסופי.

עוצמה של קבוצה

מספר האיברים של קבוצה A נקרא גם העוצמה של הקבוצה ומסומן $|A|$.

תת-קבוצה

אם קבוצה A מוכלת בקבוצה B , נסמן $A \subseteq B$.

תמיד מתקיים:

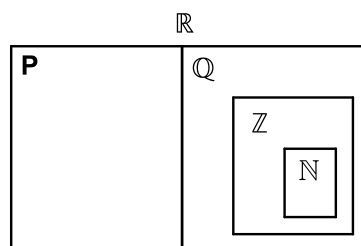
$$A \subseteq A$$

$$\emptyset \subseteq A$$

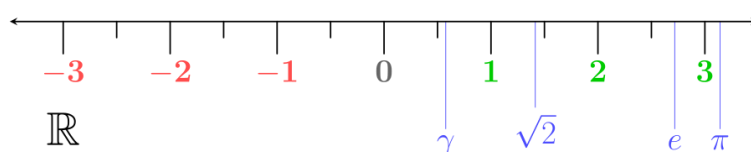
עבור שוויון קבוצות נדרוש $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ או $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$.

קבוצות מספרים מיוחדות

- קבוצת המספרים הטבעיים: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.
- קבוצת המספרים השלמים: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$.
- קבוצת המספרים הרציונאליים: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$.
- קבוצת המספרים האי-רציונאליים (אין סימון ספציפי לקבוצה זו, למעט $\mathbb{P}$).
- קבוצת המספרים הממשיים: $\mathbb{R}$ (כוללת את $\mathbb{Q}$ ואת $\mathbb{P}$).

**ציר המספרים**

את קבוצת כל המספרים הממשיים ניתן לתאר על ידי הישר הממשי שהוא הישר שנקודותיו הן המספרים הממשיים:



קטעים על ציר המספרים

סימון קטעים	סימון קבוצות	תיאור מילולי
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	הקטע הפתוח מ- a ל- b לא כולל נקודות הקצה
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	הקטע הסגור מ- a ל- b וכולל נקודות קצה
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	קטע חצי סגור וחצי פתוח, מכיל את a ולא את b
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	קטע חצי סגור וחצי פתוח, מכיל את b ולא את a
(a, ∞)	$\{x \mid a < x < \infty\}$	הקרן הפתוחה מ- a עד ∞ ללא a
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \leq x < \infty\}$	הקרן הסגורה מ- a עד ∞ כולל a
$(-\infty, b)$	$\{x \mid -\infty < x < b\}$	הקרן הפתוחה מ- $-\infty$ עד b ללא b
$(-\infty, b]$	$\{x \mid -\infty < x \leq b\}$	הקרן הסגורה מ- $-\infty$ עד b כולל b

קבוצת החזקה של קבוצה נתונה

קבוצת כל תתי-הקבוצות של A , נקראת קבוצת החזקה של A , ומסומנת $P(A)$.

איחוד וחיתוך קבוצות

- איחוד קבוצות A ו- B פירושו הגדרת קבוצה חדשה שמכילה את כל האיברים של הקבוצות עצמן ומסומנת $A \cup B$.
- חיתוך קבוצות A ו- B פירושו הגדרת קבוצה חדשה שמכילה את האיברים המשותפים של הקבוצות עצמן ומסומנת $A \cap B$.

תכונות החיתוך	תכונות האיחוד
$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup \emptyset = A$
	$A \subseteq A \cup B$

הדיסטריביוטיביות של החיתוך מעל האיחוד ושל האיחוד מעל החיתוך:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

הפרש קבוצות

ההפרש של שתי קבוצות A ו- B , המסומן $A - B$, הוא קבוצה שאיבריה הם כל איברי A שאינם איברי B , כלומר $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.

משלים של קבוצה

ההפרש $U - A$ מסומן ב- A^c או ב- A' ונקרא **המשלים** של A , כאשר U היא הקבוצה האוניברסלית.

כללי דה-מורגן

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \bullet$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad \bullet$$

דיאגרמת וון

תיאור גרפי של קבוצות והיחסים ביניהן.

שאלות

1) רשמו את הטענות הבאות במילים ובדקו האם הן נכונות:

א. $\forall x \forall y: (x+y)^2 > 0$

ב. $\forall x \exists y: (x+y)^2 > 0$

ג. $\forall x \forall y \exists z: xz = \frac{y}{4}$

ד. $\forall x > 0, \forall y > 0, \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

ה. $\forall n \exists k, n^3 - n = 6k$ (k ו- n טבעיים).

2) רשמו כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון אי-השוויון $x^2 > 4$, הוא $x > 2$ או $x < -2$.

ב. אי השוויון $x^2 + 4 > 0$, מתקיים לכל x .

ג. לכל מספר טבעי n , המספר $n^3 - n$ מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר x , $|x| < 1$ אם ורק אם $-1 < x < 1$.

3) רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים, ואת מספר איברי הקבוצה:

א. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}$

ב. $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16\}$

ג. $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16\}$

ד. $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+4)(x-1) < 0\}$

ה. $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 + x^2 - 2x = 0\}$

ו. $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}$

4) הגדירו את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן

בצורה: $A = \{x \mid x \text{ מקיים תכונה מסוימת}\}$.

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האי-זוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 1, 2, 3, 4.

5) ציינו אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו:

א. $A = \{11, 13, 17, 19\}$

ב. $B = \{x \mid 10 < x < 20, x \text{ מספר ראשוני}\}$

ג. $C = \{11, 11, 17, 13, 19\}$

ד. $D = \{x \mid x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$

ה. $E = \{x \mid x = 2m, m \text{ שלם זוגי}\}$

6) נתונה הקבוצה $A = \{1, 2, \{2\}, \{2, 5\}, 4, \{2, 4\}\}$.

מי מבין הטענות הבאות נכונה:

א. $5 \in A$ ב. $2 \in A$ ג. $\{2\} \in A$

ד. $\{2\} \subseteq A$ ה. $\{\{2\}\} \subseteq A$ ו. $\emptyset \in A$

ז. $\emptyset \subseteq A$ ח. $\{2, \{2\}\} \subseteq A$ ט. $\{2, 4\} \subseteq A$

י. $\{2, 4\} \in A$ יא. $\{\{2, 4\}\} \in A$ יב. $\{2, 5\} \subseteq A$

יג. $\{2, 5\} \in A$ יד. $\{1, 4\} \in A$

7) מצאו שתי קבוצות, A ו- B , המקיימות:

א. $A \in B$

ב. $A \subseteq B$

8) נתונות הקבוצות הבאות:

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{4, 6, 8, 10\}, C = \{3, 5, 7, 9\}, D = \{6, 7, 8\}, E = \{7, 8\}$$

קבעו איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה X :

א. $X \subseteq A$ וגם $X \not\subseteq D$

ב. $X \subseteq D$ וגם $X \not\subseteq C$

ג. $X \subseteq E$ וגם $X \not\subseteq A$

9) הוכיחו: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.

10 נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{4, 6, 8, 10\}, C = \{3, 5, 7, 9\}, D = \{6, 7, 8\}$$

רשמו את :

א. $A \cup B$ ב. $A \cap B$ ג. $(A \cup B) \cap C$

ד. $(B \cup C) \cap (B \cup D)$ ה. $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

11 נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = [1, 4), B = (-2, 1), C = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}, D = \{x \mid 2^x = 0\}$$

רשמו את :

א. $A \cup B$ ב. $A \cap B$ ג. $(A \cup B) \cap C$

ד. $(B \cup C) \cap (B \cup D)$ ה. $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

12 נתונות 3 קבוצות :

$$A = \{4, 5, 6, 7, 8\}, B = \{5, 6, 7, 8, 9\}, C = \{4, 5, 6, 10\}$$

א. חשבו את $(A - B) - C$

ב. חשבו את $A - (B - C)$

13 נתון : $U = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}, A = \{12, 15, 18\}, B = \{13, 15, 17\}$

הדגימו את כלל דה מורגן $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

14 הוכיחו את כלל דה מורגן הראשון $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

15 מצאו את הקבוצה המשלימה, ביחס ל- $\mathbb{R}$, של הקבוצות הבאות :

א. $A = [1, \infty)$

ב. $B = (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$

ג. $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 > 0\}$

ד. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 2 \vee x > 4\}$

16 הציגו באמצעות דיאגרמת וון את הקבוצות הבאות :

- א. $A \cap B$ ב. $A \cup B$
 ג. A^c ד. $A \cap B^c$
 ה. $A^c \cap B$ ו. $A \cup B^c$
 ז. $A^c \cup B$ ח. $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$
 ט. $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$

17 ענו על הסעיפים הבאים :

- א. הוכיחו כי $A \setminus B = A \cap B^c$.
 הראו זאת גם בעזרת דיאגרמת וון.
 ב. נסמן: $X = C \setminus (A \cap B)$, $Y = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.
 הוכיחו כי $X = Y$.
 ג. נסמן: $X = A \setminus (B \cup C)$, $Y = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
 הוכיחו כי $X = Y$.

18 תהיינה X, Y, Z קבוצות כלשהן.

- טענה א': $X \cap Y \cap Z = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus Z) \cup (Z \setminus X)$.
 טענה ב': $((X \cap Y) \cup Z)^c = (X^c \cup Y^c) \cap Z^c$.
 טענה ג': $X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \cup Z$.
 איזו טענה נכונה לכל בחירה של X, Y, Z ?

19 נתונה הקבוצה $A = \{\emptyset, 4, \{4\}\}$.

רשמו את $P(A)$.

20 הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית :

- א. לכל קבוצה A מתקיים $A \subseteq P(A)$.
 ב. לכל קבוצה A מתקיים $A \not\subseteq P(A)$.

21 הוכיחו כי: $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$.

תשובות סופיות

- (1) א. לכל x ולכל y מתקיים $(x+y)^2 > 0$. הטענה אינה נכונה.
 ב. לכל x קיים y , כך ש- $(x+y)^2 > 0$. הטענה אינה נכונה.
 ג. לכל x ולכל y קיים z כך ש- $xz = \frac{y}{4}$. הטענה אינה נכונה.
 ד. לכל x חיובי ולכל y חיובי מתקיים $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$. הטענה נכונה.
 ה. לכל n טבעי המספר $n^3 - n$ מתחלק ב-6. הטענה נכונה.
- (2) א. $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2 \vee x < -2$ ב. $\forall x: x^2 + 4 > 0$
 ג. $\forall n \exists k: n^3 - n = 6k$ ד. $\forall x: |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$
- (3) א. $A = (-4, 4)$, בקבוצה אינסוף איברים.
 ב. $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, בקבוצה 7 איברים.
 ג. $C = \{1, 2, 3\}$, בקבוצה 3 איברים.
 ד. $D = \{-3, -2, -1, 0\}$, בקבוצה 4 איברים.
 ה. $E = \{0, 1\}$, בקבוצה 2 איברים.
 ו. $F = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, בקבוצה 9 איברים.
- (4) א. $A = \{x \mid x = 2n - 1, n \in \mathbb{N}\}$ ב. $B = \{11, 13, 17, 19\}$
 ג. $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4^2, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ ד. $D = \{1, 4, 9, 16\}$
- (5) הקבוצות A, B ו- C שוות זו לזו, והקבוצות D ו- E שוות זו לזו.
- (6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.
 ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.
 יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.
- (7) $A = \{1, 2\}$, $B = \{\{1, 2\}, 1, 2\}$
- (8) א. A, C ב. E, D ג. לא קיימת קבוצה כזאת.
- (9) שאלת הוכחה.

$$A \cap B = \{4, 6, 8\} \quad \text{ב.} \quad A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \quad \text{א. (10)}$$

$$(B \cup C) \cap (B \cup D) = \{4, 6, 7, 8, 10\} \quad \text{ד.} \quad (A \cup B) \cap C = \{3, 5, 7, 9\} \quad \text{ג.}$$

$$(B \cap C) \cup (B \cap D) = \{6, 8\} \quad \text{ה.}$$

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{ב.} \quad A \cup B = (-2, 4) \quad \text{א. (11)}$$

$$(B \cup C) \cap (B \cup D) = (-2, 1) \quad \text{ד.} \quad (A \cup B) \cap C = (0, 4) \quad \text{ג.}$$

$$(B \cap C) \cup (B \cap D) = [0, 1) \quad \text{ה.}$$

$$\{4, 5, 6\} \quad \text{ב.} \quad \emptyset \quad \text{א. (12)}$$

(13) ללא פתרון.

(14) שאלת הוכחה.

$$C^c = [1, 4] \quad \text{ג.} \quad B^c = [1, 4] \quad \text{ב.} \quad A^c = (-\infty, 1) \quad \text{א. (15)}$$

$$D^c = (-\infty, 1] \cup [3, 4] \quad \text{ד.}$$

(16) ראו סרטון.

(17) שאלת הוכחה.

(18) טענה ב.

$$P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{4\}, \{\{4\}\}, \{\emptyset, 4\}, \{4, \{4\}\}, \{\emptyset, \{4\}\}, \{\emptyset, 4, \{4\}\}\} \quad \text{(19)}$$

(20) שאלת הוכחה.

(21) שאלת הוכחה.

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 2 - גבול של פונקציה

תוכן העניינים

1. הסבר כללי	(ללא ספר)
2. הצבה	27
3. צמצום	28
4. הכפלה בצמוד	29
5. פונקציה שואפת לאינסוף	30
6. איקס שואף לאינסוף	31
7. הגבול של אוילר	33
8. כלל הסנדויץ'	34
9. גבול של פונקציה מפוצלת	36

הצבה

שאלה

חשבו את הגבולות הבאים :

א. $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1$

ב. $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2}$

ג. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3}$

ד. $\lim_{x \rightarrow 100} 20$

תשובה

א. 21 ב. $\frac{11}{12}$ ג. 2 ד. 20

צמצום

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (4) \qquad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x - 1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} \quad (6) \qquad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \quad (8) \qquad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[5]{x} + 1}{x + 1} \quad (10) \qquad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad (9)$$

תשובות סופיות

-3 (5)	$n-1$ (4)	6 (3)	$\frac{10}{8.5}$ (2)	$\frac{5}{6}$ (1)
$\frac{1}{5}$ (10)	$\frac{8}{17}$ (9)	27 (8)	3 (7)	32 (6)

הכפלה בצמוד

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x+6}}{2x-6} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}} + x - 1}{\sqrt[3]{x}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{3x+1}}{1 - \sqrt{2x-1}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x} \quad (8)$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{6} \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} \quad (9)$$

$$4 \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (6)$$

$$-\frac{1}{12} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (7)$$

$$\frac{3}{8} \quad (4)$$

$$-\frac{8}{3} \quad (8)$$

פונקציה שואפת לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3) \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \cot x \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[4]{x-1}}{\sqrt{x-1}} \quad (13)$$

תשובות סופיות

ϕ (4)	$-\infty$ (3)	ϕ (2)	ϕ (1)
ϕ (8)	∞ (7)	∞ (6)	$-\infty$ (5)
$-\infty$ (12)	ϕ (11)	1 (10)	0 (9)
			$-\infty$ (13)

X שואף לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x + e^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{\frac{x+1}{2}}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \left(\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \right) \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx} - x) \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^5}{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^4} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-4)^{10} (3x^2-1)^4}{x^2 (2x-5)^{10} (x^3+1)^2} \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(5 \cdot 2^{x+2} + 6 \cdot e^{x+1}) - x] \quad (29)$$

תשובות סופיות

$-\infty$ (4	4 (3	$-\frac{\pi}{2}$ (2	0 (1
-1 (8	1 (7	-5 (6	0 (5
$\frac{1}{4}$ (12	$\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (11	1.5 (10	-3 (9
2 (16	$\frac{1}{9}$ (15	4 (14	0 (13
	0 (19	$e^{\frac{1}{3}}$ (18	$\ln 3$ (17
(20) אם $b \neq 0$: $\lim = \sqrt[5]{\frac{a}{b}}$. אם $b = 0, a > 0$: ∞ . אם $b = 0, a < 0$: $-\infty$.			
$-\frac{1}{2}$ (24	$\frac{1}{2}$ (23	$\frac{k}{2}$ (22	2.5 (21
$\frac{5}{4}$ (28	$\frac{3^4}{2^{10}}$ (27	$\frac{a-b}{2}$ (26	$\frac{1}{2}$ (25
			$\ln(6e)$ (29

הגבול של אוילר

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול של אוילר : $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$) :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + x + 2}\right)^{10x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 4}\right)^{4x^2} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{x}\right)^x \quad (9)$$

תשובות סופיות

$$e^3 \quad (5)$$

$$e^{-1} \quad (4)$$

$$e^2 \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$e^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$e \quad (9)$$

$$e^{30} \quad (8)$$

$$e^{-12} \quad (7)$$

$$e \quad (6)$$

כלל הסנדוויץ'

שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-10:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(2x+1)}{x} \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + \sin 2x}{x^2 + \cos 3x} \quad (4) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \cos(\ln x^2) \quad (6) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2^x + 3^x + 4^x} \quad (8) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \arctan(2x-3)}{4x + \arctan(x - \ln x)} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} [x] \quad (10) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [x] \quad (9)$$

$$(11) \text{ נתונה פונקציה } z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ המקיימת } \lim_{x \rightarrow 2} z(x) = 4,$$

ונתונה פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, המקיימת $4z(x) \leq f(x) \leq (z(x))^2$ לכל x .

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 2} \tan(z(x)), \quad \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(z(x))}{x}$$

$$(12) \text{ חשבו את הגבול } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$$

(13) ענו על הסעיפים הבאים:

$$\text{א. הוכח: } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$$

$$\text{ב. האם נכונה גם הטענה: } \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm 1$$

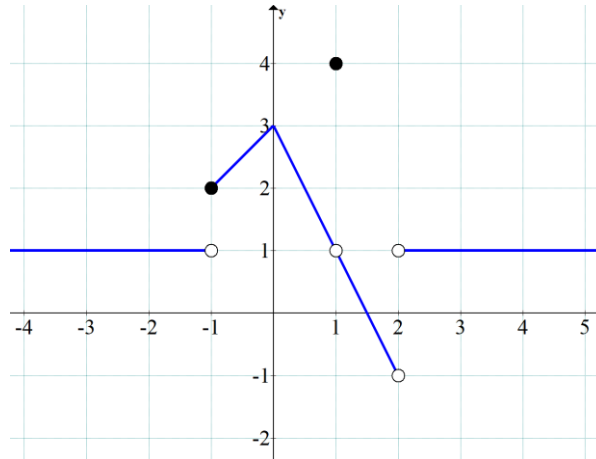
תשובות סופיות

- (1) 0 (2) 0 (3) $\frac{3}{4}$ (4) 3 (5) 0
- (6) 0 (7) $\frac{3}{4}$ (8) 4 (9) 1 (10) 0
- (11) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 16$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(z(x))}{x} = 0$
- (12) 0 $\lim_{x \rightarrow 2} \tan(z(x)) = \tan 4$ $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2) = 2$
- (13) א. שאלת הוכחה. ב. לא.

גבול של פונקציה מפוצלת

שאלות

1) להלן גרף של פונקציה:



חשבו את הגבולות הבאים או הוכיחו שהם לא קיימים:

א. $1. \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ $2. \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ $3. \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

ב. $1. \lim_{x \rightarrow 1} (3f - f^2)$ $2. \lim_{x \rightarrow -1} (3f - f^2)$

ג. $1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{4-f}$ $2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-f}$

2) נגדיר פונקציה $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0.5 & x = 0 \\ 1 - x^2 & 0 < x < 2 \\ 1.5x - 6 & x \geq 2 \end{cases}$$

א. שרטטו את הפונקציה.

ב. חשבו, אם ניתן, את $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול $\lim_{x \rightarrow 2} [4(f(x))^2 + 10f(x)]$.

$$(3) \quad \text{נגדיר פונקציה } f(x) : \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0.5 & x = 0 \\ \cos x & 0 < x < \pi \\ -0.5 & x \geq \pi \end{cases}$$

א. שרטטו את הפונקציה.

ב. חשבו, אם ניתן, את $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$.

ג. חשבו, אם ניתן, את הגבול $\lim_{x \rightarrow \pi} [2(f(x))^2 + 3f(x)]$.

חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ של הפונקציות הבאות:

$$(4) \quad (a=0), f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases}$$

$$(5) \quad (a=1), f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & x > 1 \\ \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} & x < 1 \end{cases}$$

$$(6) \quad (a=0), f(x) = \frac{|x|}{x}$$

$$(7) \quad (a=\infty), f(x) = \frac{|x|}{x}$$

$$(8) \quad (a=-\infty), f(x) = \frac{|x|}{x}$$

$$(9) \quad \text{א. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|1-x|}{x^2 + x - 2}$$

$$\text{ב. } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{|1-x|}{x^2 + x - 2}$$

תשובות סופיות

1. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$, 2. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \cancel{\exists}$, 3. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \cancel{\exists}$. א. (1)

1. $\lim_{x \rightarrow 1} (3f - f^2) = 2$, 2. $\lim_{x \rightarrow -1} (3f - f^2) = 2$. ב. (2)

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{4 - f(x)} = \frac{1}{3}$, 2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 - f(x)} = \cancel{\exists}$. ג. (3)

6. ג. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3$. ב. א. ראו בסרטון. (2)

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, $\cancel{\exists} \lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$. ב. א. ראו בסרטון. (3)

4. (4)

ϕ . (5)

ϕ . (6)

1. (7)

-1. (8)

$\frac{1}{6}$. ב. א. אין גבול. (9)

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 3 - רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים

תוכן העניינים

1. רציפות של פונקציה..... 39

רציפות של פונקציה

שאלות

בשאלות 1-6: בדקו את רציפות הפונקציות ב"נקודת התפר" ¹ שלהן, ובשאלות 1 ו-2, שרטטו גם את גרף הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ 5-x & x > 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x < 2 \\ x-3 & x \geq 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq 1 \\ |x-2| & 1 < x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ x-2 & x > 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ 1+e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4+e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (5)$$

7) עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 3-6: רשמו עבור כל נקודת אי רציפות מאיזה סוג היא. בנוסף, הדגימו פונקציה בעלת נקודת אי רציפות מסוג שני.

בשאלות 8-11: מה צריך להיות הערך הקבוע של k , על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות לכל x ?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases} \quad (9)$$

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 + x - 2 & x \leq 2 \\ 5kx - 6 & x > 2 \end{cases} \quad (8)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - k & x \leq 0 \\ x^{2x} & x > 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x-2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases} \quad (10)$$

הערה: שאלה 11 ניתן לפתור רק בעזרת 'כלל לופיטל'.

¹ נקודת תפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.

בשאלות 12-15: מה צריכים להיות הערכים של הקבועים a ו- b , על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות בתחום הגדרתן?

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{2x} & 0 < x < \pi \\ a \cos x & x \geq \pi \end{cases} \quad (12)$$

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt[3]{x} + x^2 & x < -1 \\ bx^2 + x - 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 4 \frac{\sqrt{x-1+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x > 1 \end{cases} \quad (13)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{1-x}} & x > 1 \\ (x-1)\ln(x+1) + b & 0 \leq x \leq 1 \\ a \frac{2^x - 2}{2^{\frac{1}{x}} + 4} & x < 0 \end{cases} \quad (14)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} & x < 1 \\ ax^2 + b & 1 \leq x \leq 2 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x > 2 \end{cases} \quad (15)$$

הערה: שאלות 14-15 ניתן לפתור רק בעזרת 'כלל לופיטל'.

(16) הוכיחו או הפריכו:

- א. סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- ב. הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- ג. מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
- ד. מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.

(17) ידוע ש- f רציפה ו- g לא רציפה. האם $f+g$ רציפה? הוכיחו זאת.

$$(18) \text{ תהי } f(x) = \begin{cases} |x|-1 & |x+1| \geq 4 \\ 2 & |x+1| < 4 \end{cases}$$

א. שרטטו את גרף הפונקציה.

ב. מצאו את נקודות האי רציפות של הפונקציה ואת סוגן (במידה ויש).

ג. תהי $g(x) = x + \frac{1}{x}$, ותהי $f(x)$ מוגדרת וחיובית לכל x .

האם ההרכבה $g(f(x))$ בהכרח רציפה לכל x ?

(19) תהי f פונקציה חסומה בקטע $(0,1)$.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < 1 \\ x^2 & 1 \leq x < 2 \end{cases} \text{ על ידי } g \text{ תהי הפונקציה המוגדרת בקטע } (0,2)$$

א. האם ניתן שהנקודה $x_0 = 1$ היא נקודת אי-רציפות סליקה של g ? נמקו.

ב. האם g חסומה בקטע $(0,2)$? נמקו.

(20) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ פונקציה שמקיימת $f(x+y) = f(x)f(y)$ לכל $x, y \in \mathbb{R}$.

נניח ש- f רציפה ב- $x=0$.

הוכיחו ש- f רציפה לכל x .

(21) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ פונקציה שמקיימת $f(x+y) = [f(x)f(y)]^2$ לכל $x, y \in \mathbb{R}$.

נניח ש- f רציפה ב- $x=0$.

הוכיחו ש- f רציפה לכל x .

$$(22) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = x - \frac{1}{2} \lfloor 2x \rfloor$$

הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה f חסומה לכל x .

ב. הפונקציה f רציפה לכל x .

ג. הפונקציה f מונוטונית לכל x .

ד. הפונקציה f זוגית או אי-זוגית לכל x .

(23) ענו על הסעיפים הבאים :

א. פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)| \leq x$ לכל x .

הוכיחו שהפונקציה רציפה ב- $x = 0$.

ב. פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)| \leq \sin x$ לכל x .

הוכיחו שהפונקציה רציפה באינסוף נקודות שונות.

(24) הפונקציה $f(x)$ רציפה לכל x .

ידוע כי עבור $x \neq \pm 1$, $f(x)$ נתונה על ידי הנוסחה $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{1-|x|}$.

מצאו את הנוסחה של $f(x)$ לכל x .

(25) הפונקציות $f(x)$ ו- $3g(x) + 2f(x)$ רציפות לכל x .

הוכיחו שהפונקציה $|f(x) - g(x)|$ רציפה לכל x .

(26) תהי $f(x)$ מוגדרת לכל x ומקיימת $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)(1-f(x))] = 0$.

א. הוכיחו או הפריכו : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ או $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

ב. האם תשתנה תשובתך לסעיף א' אם נחליף את המילה 'מוגדרת' במילה 'רציפה'?

(27) תהי f מוגדרת לכל x .

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות :

א. אם $f(\sin x)$ רציפה לכל x , אז f רציפה לכל x .

ב. אם $\sin(f(x))$ רציפה לכל x , אז f רציפה לכל x .

ג. אם לכל x_0 מתקיים $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 4$, אזי $f(x) = 4$ לכל x .

כיצד תשתנה תשובתך, אם ידוע בנוסף כי f רציפה לכל x ?

(28) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו כי לכל $x, y \in \mathbb{R}$:

$$1. \min\{x, y\} = \frac{1}{2}[(x+y) - |x-y|]$$

$$2. \max\{x, y\} = \frac{1}{2}[(x+y) + |x-y|]$$

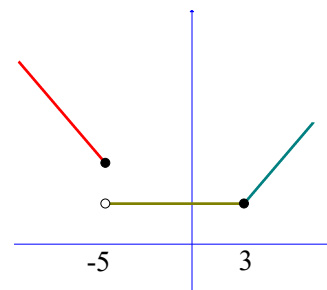
ב. הוכיחו כי אם f, g רציפות ב- $\mathbb{R}$ אז גם הפונקציות הבאות רציפות ב- $\mathbb{R}$:

$$1. z_1(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

$$2. z_2(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

תשובות סופיות

- (1) רציפה.
- (2) רציפה.
- (3) רציפה בנקודה $x=1$, לא רציפה בנקודה $x=2$.
- (4) רציפה בנקודות $x=0,1$, לא רציפה בנקודה $x=2$.
- (5) לא רציפה.
- (6) לא רציפה.
- (7) 5. סליקה. 6. סליקה. 4. סוג ראשון. 3. סליקה.
- (8) $k=1$
- (9) $k=4$
- (10) $k=\frac{2}{3}$
- (11) $k=-1$
- (12) $a=0, b=\frac{1}{2}$
- (13) $a=2, b=1$ או $a=1, b=2$
- (14) $a=-2e^{-1}, b=e^{-1}$
- (15) $a=\frac{e}{3}, b=-\frac{e}{3}$
- (16) שאלת הוכחה.
- (17) שאלת הוכחה.
- (18) א.



- ב. הפונקציה רציפה לכל $x \neq -5$. ב-5 יש אי רציפות מסוג ראשון. ג. לא.
- (19) א. לא. ב. כן.
- (20) שאלת הוכחה.

(21) שאלת הוכחה.

(22) א. טענה נכונה. ב. טענה לא נכונה. ג. טענה לא נכונה. ד. טענה לא נכונה.

(23) שאלת הוכחה.

$$f(x) = \begin{cases} -\pi & x = -1 \\ \frac{\sin(\pi x)}{1-|x|} & x \neq \pm 1 \\ \pi & x = 1 \end{cases} \quad (24)$$

(25) שאלת הוכחה.

(26) שאלת הוכחה.

(27) שאלת הוכחה.

(28) שאלת הוכחה.

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 4 - הגדרת הנגזרת - גזירות של פונקציה - נגזרות חד-צדדיות

תוכן העניינים

1. הגדרת הנגזרת וגזירות של פונקציה.....46

הגדרת הנגזרת, גזירות של פונקציה

שימו לב

בפרק זה יש לדעת גזירת פונקציות לפי נוסחאות גזירה, כפי שנלמד בבית הספר. למי שלא למדו זאת כדאי לעבור קודם לפרק הבא, ללמוד את הנושא, ורק אחר כך לחזור לכאן.

שאלות*

בשאלות 1-6 חשבו את הנגזרת של הפונקציה הנתונה על פי ההגדרה:

$$(1) \quad f(x) = x^2 + 4x + 1 \quad (2) \quad f(x) = \frac{1}{x+1} \quad (3) \quad f(x) = \sin 4x$$

$$(4) \quad f(x) = e^x \quad (5) \quad f(x) = \ln x \quad (6) \quad f(x) = \sqrt{x+10}$$

$$(7) \quad \text{חשבו את } f'(0), \text{ אם נתון כי } f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-44).$$

$$(8) \quad \text{חשבו את } f'(0), \text{ אם נתון כי } f(x) = 2x(|x|+1)\sqrt{1+x+x^2}.$$

$$(9) \quad \text{חשבו את } f'(0), \text{ אם נתון כי } f(x) = x \cdot z(x) \text{ כאשר } z(0) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} z(x) = 4.$$

$$(10) \quad \text{נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} & x > 0 \\ -(x+1)^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

א. מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה רציפה.

ב. בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x=1$.
האם קיים משיק בנקודה זו?

$$(11) \quad \text{נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (n \text{ טבעי}).$$

א. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה בנקודה $x=0$?

ב. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה ברציפות בנקודה $x=0$?

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

$$(12) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} x^n \arctan \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (n \text{ טבעי}).$$

א. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה בנקודה $x = 0$?

ב. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה ברציפות בנקודה $x = 0$?

(13) חשבו את הגבולות הבאים:

$$\text{א. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(4+x) - \ln 4}{x} \quad \text{ב. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1+x} - e}{x}$$

(14) נתון כי f גזירה בנקודה x_0 . הוכח כי:

$$\text{א. } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\text{ב. } 2x_0 f(x_0) - x_0^2 f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 f(x_0) - x_0^2 f(x)}{x - x_0}$$

(15) נתון כי f גזירה וזוגית. הוכיחו כי f' אי זוגית.

(16) נתונה פונקציה המוגדרת ב- $[a, b]$ ומקיימת לכל x, y ב- $[a, b]$:

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$$

הוכיחו כי f גזירה ב- $[a, b]$ וחשבו את נגזרתה.

$$(17) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ x^3 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

חשבו את $f'(x)$ על פי ההגדרה.

$$(18) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

חשבו את $f'(x)$ על פי ההגדרה.

$$(19) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = |\sin^5 x|$$

א. חשבו את $f'(x)$.

ב. מצאו את כל הנקודות עבורן $f'(x) = 0$.

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

(20) הוכיחו או הפריכו :

- א. אם h גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0 , אז $f = g + h$ אינה גזירה ב- x_0 .
- ב. אם h אינה גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0 , אז $f = g + h$ אינה גזירה ב- x_0 .
- ג. אם h אינה גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0 , אז $f = g \cdot h$ אינה גזירה ב- x_0 .
- ד. אם h גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0 , אז $f = g \cdot h$ אינה גזירה ב- x_0 .

(21) הוכיחו או הפריכו :

- א. אם f גזירה, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] = f'(x)$.
- ב. אם הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right]$ קיים וסופי, אז f גזירה.

(22) הוכיחו או הפריכו :

- א. אם f גזירה ב- (a, b) ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$, אז $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \infty$.
- ב. אם f גזירה ב- (a, b) ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \infty$, אז $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$.

(23) נתון כי $f(x)$ רציפה ב- $x = 4$, ומקיימת $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - \pi - 10(x - 4)}{x - 4} = 0$

הוכיחו ש- f גזירה ב- $x = 4$, וחשבו את $f'(4)$.

(24) תהי f פונקציה רציפה בסביבת הנקודה $x = 0$ המקיימת $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$

א. הוכיחו כי $f(0) = 0$.

ב. הוכיחו כי f גזירה ב- $x = 0$ ו- $f'(0) = 0$.

(25) תהי f פונקציה גזירה על כל הישר, ונתון כי $f(0) = 0$ ו- $f'(0) = k$.

הוכיחו כי $\lim_{x \rightarrow \infty} x f\left(\frac{1}{x}\right) = k$

(26) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה בנקודה x_0 .

א. אם $f(x_0) \neq 0$, הוכיחו שגם $|f|$ גזירה ב- x_0 .

ב. אם $f(x_0) = 0$, הראו שייתכן כי $|f|$ גזירה ב- x_0 וייתכן שלא.

(27) תהינה $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות גזירות בנקודה x_0 .

נגדיר $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

הראו שאם $f(x_0) \neq g(x_0)$, אז h גזירה ב- x_0 .

(28) תהי f פונקציה זוגית ב- $\mathbb{R}$.

הוכיחו כי אם f גזירה ב-0, אז $f'(0) = 0$.

הערה: פתרו בשתי דרכים שונות.

(29) נתונה פונקציה $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $f(xy) = f(x) + f(y)$,

לכל $x, y \in (0, \infty)$.

נתון כי f גזירה בנקודה $x=1$.

א. הוכיחו כי $f(1) = 0$ ו- $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$.

ב. הראו כי f גזירה, ושלכל $x > 0$, $f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$.

(30) נתון כי f פונקציה גזירה המקיימת $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$.

הוכיחו ש- f פונקציה ליניארית.

(31) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו את הטענה הבאה:

אם f גזירה ב- x_0 , אז $f'(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + a_n) - f(x_0)}{a_n}$

לכל סדרה $a_n \rightarrow 0$.

ב. תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה בנקודה $x_0 = 1$, ו- $f(1) = 1$.

הראו שאם $k \in \mathbb{N}$, אז

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(1 + \frac{1}{n}\right) + f\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(1 + \frac{k}{n}\right) - k \right] = \frac{k(k+1)}{2} f'(1)$$

ג. חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{10}{n}} - 10 \right]$.

32) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו שפונקציית דיריכלה $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ לא גזירה בכל מקום.

ב. הוכיחו שהפונקציה $f(x) = (x-1)^2 D(x)$ גזירה רק בנקודה $x=1$.

33) פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)| \leq x^2$ לכל x .

הוכיחו שהפונקציה גזירה ב- $x=0$.

34) פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)| \leq \sin^2 x$ לכל x .

הוכיחו שהפונקציה גזירה באינסוף נקודות שונות.

35) תהי f פונקציה גזירה ב- x_0 .

א. הוכיחו כי $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$.

ב. תנו דוגמה של פונקציה רציפה f , באופן שהגבול בסעיף א' קיים, אך $f'(x_0)$ אינו קיים.

ג. הביעו באמצעות $f'(x_0)$ את הגבול $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0-2h) - f(x_0+3h)}{h}$.

36) תהי f פונקציה גזירה פעמיים ב- x_0 .

א. הוכיחו כי $f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$.

ב. תנו דוגמה של פונקציה f , באופן שהגבול בסעיף א' קיים, אך $f''(x_0)$ אינו קיים.

הערה: פתרו את סעיף א' רק אחרי למידת הנושא 'כלל לופיטל'.

37) נתון כי $f(x)$ רציפה בנקודה $x=a$, ונגדיר פונקציה חדשה $z(x) = (x-a)f(x)$. הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה $z(x)$ גזירה בנקודה $x=a$.

ב. $z'(x)$ רציפה ב- $x=a$.

38) נניח ש- f גזירה ב- c ו- $f(c) = 0$. הוכיחו:

א. אם $f'(c) = 0$ אז $|f(x)|$ גזירה ב- c .

ב. אם $|f(x)|$ גזירה ב- c אז $f'(c) = 0$.

(39) יהיו f, g פונקציות גזירות ב- c ונניח כי $f(c) = g(c)$.

א. הוכיחו כי $|f(x) - g(x)|$ גזירה ב- c אם ורק אם $f'(c) = g'(c)$.

ב. הוכיחו כי $z_1(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ גזירה ב- c אם ורק אם $f'(c) = g'(c)$.

ג. הוכיחו כי $z_2(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ גזירה ב- c אם ורק אם $f'(c) = g'(c)$.

(40) נניח ש- $|f(x)|$ גזירה ב- c ו- f רציפה ב- c .

הוכיחו כי f גזירה ב- c .

תשובות סופיות

- (1) $f'(x) = 2x + 4$ (2) $f(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$ (3) $f'(x) = 4 \cos 4x$
- (4) $f'(x) = e^x$ (5) $f(x) = \frac{1}{x}$ (6) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+10}}$
- (7) $44!$ (8) 2 (9) 4
- (10) א. רציפה לכל x . ב. לא גזירה בנקודה $x=1$. קיים משיק אנכי בנקודה.
- (11) א. $n > 1$. ב. $n > 2$
- (12) א. $n > 1$. ב. $n > 1$
- (13) א. $\frac{1}{4}$. ב. e
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.
- (16) שאלת הוכחה. $f' = 0$
- (17) הפונקציה גזירה רק ב- $x=0$, ומתקיים: $f'(0) = 0$.
- (18) הפונקציה גזירה רק ב- $x=1$, ומתקיים: $f'(1) = 0$.
- (19) א. $f'(x) = \begin{cases} 5 \sin^4 x \cos x & 2n\pi < x < (2n+1)\pi \\ 0 & x = n\pi \\ -5 \sin^4 x \cos x & (2n+1)\pi < x < (2n+2)\pi \end{cases}$ ב. $x = \frac{\pi}{2}n$
- (20) שאלת הוכחה.
- (21) שאלת הוכחה.
- (22) שאלת הוכחה.
- (23) שאלת הוכחה.
- (24) שאלת הוכחה.
- (25) שאלת הוכחה.
- (26) שאלת הוכחה.
- (27) שאלת הוכחה.
- (28) שאלת הוכחה.
- (29) שאלת הוכחה.
- (30) שאלת הוכחה.
- (31) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. 55
- (32) שאלת הוכחה.

(33) שאלת הוכחה.

(34) שאלת הוכחה.

(35) א. שאלת הוכחה. ב. $f(x) = |x|$ ג. $-5f'(x_0)$ (36) א. שאלת הוכחה. ב. $f(x) = \text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

(37) שאלת הוכחה.

(38) שאלת הוכחה.

(39) שאלת הוכחה.

(40) שאלת הוכחה.

לפתרונות מלאים בווידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 5 - חישוב נגזרת של פונקציה

תוכן העניינים

1. כללי הגזירה	(ללא ספר)
2. תרגול בכללי הגזירה	54
3. גזירה סתומה	57
4. כלל השרשרת	59
5. גזירה לוגריתמית	62
6. נגזרת הפונקציה ההפוכה	63
7. תרגילים נוספים לפי סוגים	64

תרגול בכללי הגזירה

שאלות

גזרו פעמיים את הפונקציות הבאות (בשאלות 22-24 מצאו רק את הנגזרת הראשונה):

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (15) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$y = x^{\sqrt{x}} \quad (21) \quad y = \sqrt[3]{x} \quad (20) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) \quad (19)$$

$$y = (x+1)^{(x+1)} \quad (24) \quad y = (x^2 + 1)^x \quad (23) \quad y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}} \quad (22)$$

תשובות סופיות

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{x^3} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x+10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4} \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2+24)}{(x^2-4)^3} \quad (4)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4} \quad (5)$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad (6)$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \quad (7)$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad (8)$$

$$f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x} \quad (9)$$

$$f'(x) = x(2 \ln x + 1), \quad f''(x) = 2 \ln x + 3 \quad (10)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}, \quad f''(x) = \frac{1}{(4-2x)^2} \quad (11)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} (\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} \quad (12)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left[\frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\} \quad (13)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1+2x}{x^4}\right) \quad (14)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x+2}{x^4}\right) \quad (15)$$

$$f'(x) = e^{-2x^2} (1 - 4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3 - 4x^2) \quad (16)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \quad (17)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2 - 1}{(x^2-1)^{5/3}} \quad (18)$$

$$f'(x) = \frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}} \quad (19)$$

$$y' = x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x) \quad (20)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot x^{\sqrt{x}} \left(\frac{\ln x}{2} + 1\right) \quad (21)$$

$$y' = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{x}}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \sqrt{x} \right) \quad (22)$$

$$y' = (x^2 + 1)^x \left(1 \cdot \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \cdot x \right) \quad (23)$$

$$y' = (x+1)^{(x+1)} [\ln(x+1) + 1] \quad (24)$$

גזירה סתומה

שאלות

- 1 גזרו את הפונקציה הסתומה $x^2 + y^5 - 1 = 1$.
- 2 גזרו את הפונקציה הסתומה $4 \ln x + 10 \ln y = y^2$.
- 3 גזרו את הפונקציה הסתומה $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy}$.
- 4 מצאו את משוואת המשיק למעגל $x^2 + y^2 = 25$, בנקודה $(3, 4)$.
- 5 מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $xy^2 + y - x = xy$, דרך הנקודה $(1, 1)$.
- 6 מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $x^2 y + e^{y^2 - 4x} = \ln x + 1$, דרך הנקודה $(1, 2)$ – הנמצאת על גרף הפונקציה.
- 7 מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $\sqrt{xy + y} + x^2 y = xy^2$, דרך הנקודה $(1, 2)$ – הנמצאת על גרף הפונקציה.
- 8 מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $e^{xy^2} + y = y^2 - 1$, דרך הנקודה $(0, 2)$ – הנמצאת על גרף הפונקציה.
- 9 נתונה הפונקציה הסתומה $x + y \cdot e^y = xy^2 + x^2$.
א. מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, בהן $y = 0$.
ב. מצאו את משוואת הישרים המשיקים של גרף הפונקציה, בנקודות שנמצאו בסעיף א.
- 10 גזרו את הפונקציה הסתומה: $x^y - xy = 10$.
- 11 גזרו את הפונקציה הסתומה: $x^y - y^x = 1$.
- 12 נתונה פונקציה סתומה $xy - y^3 + x^2 - x = 0$. מצאו את ערך y^n בנקודה בה $y = 1$.

(13) נתון כי המשוואה $h(y) - x + 1 = 2x^3 + 4e^y + 2y$,

מגדירה את $y = y(x)$ כפונקציה סתומה של x .

נתון כי $h(y)$ גזירה ברציפות ויורדת.

הוכיחו כי $y(x)$ יורדת חזק.

תשובות סופיות

$$5y^4 - 1 \neq 0, \quad y' = \frac{-2x}{5y^4 - 1} \quad (1)$$

$$\frac{10}{y} - 2y \neq 0, \quad y' = \frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y} - 2y} \quad (2)$$

$$\sqrt{x} \neq 0, \quad \sqrt{x} \neq 1, \quad y' = \frac{\sqrt{y} - 1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{y}}{1 - \sqrt{x}} \quad (3)$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5} \quad (6)$$

$$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5} \quad (7)$$

$$y = \frac{4}{3}x + 2 \quad (8)$$

$$(0,0), (1,0) \text{ א.} \quad (9)$$

ב. בראשית הצירים: $y = -x$, המשוואה השנייה: $y = x - 1$.

$$x^y \cdot \ln x - x \neq 0, \quad y' = \frac{y - x^y \cdot \frac{y}{x}}{x^y \cdot \ln x - x} \quad (10)$$

$$x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y} \neq 0, \quad y' = \frac{-x^y \cdot \frac{y}{x} + y^x \cdot \ln y}{x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y}} \quad (11)$$

$$-1 \quad (12)$$

(13) הוכחה.

כלל השרשרת

שאלות

- 1 נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(4) = 10$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = f(x^2)$.
חשבו את $g'(2)$.

- 2 נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(2) = 4$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.
א. חשבו את $g'(0.5)$.

ב. נתון בנוסף כי f עולה. הוכיחו כי g יורדת.

- 3 נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(1) = e$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = x^2 + f(\ln x)$.
א. חשבו את $g'(e)$.

ב. הוכיחו שהפונקציה g עולה בנקודה $x = e$.

ג. חשבו את הגבול $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(e+h) - g(e)}{h}$.

- 4 נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(1) = e$, $f(1) = -2$.
נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = f^2(\ln x)$.
א. חשבו את $g'(e)$.

ב. האם g עולה או יורדת, בנקודה $x = e$?

ג. נתון כי f שלילית ועולה. מה ניתן לומר על g ?

(5) נתונה פונקציה, $f(x)$, יורדת וחיובית.

$$g(x) = \sqrt{f(x^2 + 4)}$$

מי מהבאים נכון?

א. g עולה לכל x .

ב. g יורדת לכל x .

ג. g עולה לכל $x > 0$.

ד. g יורדת לכל $x > 0$.

$$(6) \quad g(x) = \frac{f^2(\sqrt{x}) - 1}{f(\sqrt{x})}$$

ידוע כי $f(10) = f'(10) = 4$. חשבו $g'(100)$.

$$(7) \quad g(x) = \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) + 4}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

ידוע כי $f(1) = 1$, $f'(1) = 4$.

חשבו $g'(1)$.

$$(8) \quad g(x) = \frac{f^2(\ln x)}{f(\ln x) + 1}$$

ידוע כי $f(0) = 2$, $f'(0) = 1$.

חשבו $g'(1)$.

$$(9) \quad g(x) = \frac{f^{10}(4x) + 1}{f\left(\frac{4}{x}\right) + 1}$$

ידוע כי $f(4) = 1$, $f'(4) = 2$.

חשבו $g'(1)$.

$$(10) \quad g(x) = \frac{\sqrt[4]{f^7(x^2)}}{f(x^4)}$$

ידוע כי $f(1) = 1$, $f'(1) = 4$.

חשבו $g'(1)$.

תשובות סופיות

- | | | |
|----------------|-----------------|--------|
| | | 40 (1) |
| ב. שאלת הוכחה. | א. -16 | (1) |
| ג. $2e+1$ | א. $2e+1$ | (2) |
| ב. שאלת הוכחה. | א. -4 | (3) |
| ג. $g'(x) < 0$ | ב. יורדת. | |
| | ד | (4) |
| | $\frac{17}{80}$ | (5) |
| | 36 | (6) |
| | $\frac{8}{9}$ | (7) |
| | 44 | (8) |
| | -2 | (9) |

גזירה לוגריתמית

שאלות

גזרו את הפונקציות הבאות :

$$y = \sqrt[4]{\frac{10x-1}{x+1}} \cdot \sqrt[10]{(2x+1)^7} \quad (1)$$

$$y = \left(\sqrt[4]{10x+1} \right)^{2x} \quad (1)$$

$$y = \frac{(x+2)^{3x+4} \cdot (5x+6)}{(7x+8) \cdot (9x+10)} \quad (2)$$

תשובות סופיות

$$y' = y \left[\frac{1}{4} \frac{1}{10x-1} \cdot 10 + \frac{7}{10} \frac{1}{2x+1} \cdot 2 - \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} \right] \quad (1)$$

$$y' = \left((10x+1)^{\frac{1}{4}} \right)^{2x} \cdot \frac{1}{4} \left[2^x \cdot \ln 2 \cdot \ln(10x+1) + \frac{1}{10x+1} \cdot 10 \cdot 2^x \right] \quad (2)$$

$$y' = y \left[3 \cdot \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} (3x+4) + \frac{1}{5x+6} \cdot 5 - \frac{1}{7x+8} \cdot 7 - \frac{1}{9x+10} \cdot 9 \right] \quad (3)$$

נגזרת הפונקציה ההפוכה

שאלה

הוכיחו, בעזרת כלל הנגזרת של הפונקציה ההפוכה, את הנוסחה הבאה :

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (1)$$

לתשובה מלאה בסרטון וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il

תרגילים נוספים לפי סוגים

שאלות

הנגזרת של פונקציית חזקה

1) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^3$	ב. $f(x) = x^7$	ג. $f(x) = x^2$
ד. $f(x) = x^1$	ה. $f(x) = x^{-3}$	ו. $f(x) = x^{-1}$
ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$	ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$	ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$

הנגזרת של קבוע כפול פונקציה

2) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 2x^3$	ב. $f(x) = 3x^7$	ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$
ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$	ה. $f(x) = 8x^1$	ו. $f(x) = 3x^{-2}$
ז. $f(x) = \frac{4}{x}$	ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$	ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$

הנגזרת של קבוע

3) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 12$	ב. $f(x) = \frac{7}{8}$
----------------	-------------------------

הנגזרת של סכום והפרש

4) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$	ב. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$
---------------------------------	---

הנגזרת של פונקציה חזקה מורכבת

(5) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = (5x-2)^3$ ב. $f(x) = (x^3+6)^5$ ג. $f(x) = 3(x-x^2)^2$

ד. $f(x) = \frac{(5-x)^3}{4}$ ה. $f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3}$

הנגזרת של אחד חלקי איקס

(6) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{3}{x}$ ב. $f(x) = \frac{2}{x}$ ג. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ד. $f(x) = \frac{3}{x^3}$

ה. $f(x) = \frac{1}{x^2-3x}$ ו. $f(x) = \frac{2}{3-x}$ ז. $f(x) = \frac{6}{x+5}$

הנגזרת של מכפלה

(7) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = (5x+1)(x-3)$

ב. $f(x) = (5x+1)^3(x-3)$

ג. $f(x) = x^3(6-x)^4$

הנגזרת של מנה

(8) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{3x-1}{1+2x}$ ב. $f(x) = \frac{x^2+1}{5x-12}$ ג. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3}$

ד. $f(x) = \frac{x^2+8}{x-1}$ ה. $f(x) = \frac{1}{x}$ ו. $f(x) = \frac{3}{x^3}$

הנגזרת של שורש

(9) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{x}$ ב. $f(x) = 4\sqrt{x+1}$ ג. $f(x) = \sqrt{x^3-1}$

ד. $f(x) = (3x+1)\sqrt{x}$ ה. $f(x) = x^2\sqrt{x+3}$ ו. $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$

תשובות סופיות

(1)

$$\begin{array}{lll} \text{א. } f'(x) = 3x^2 & \text{ב. } f'(x) = 7x^6 & \text{ג. } f'(x) = 2x \\ \text{ד. } f'(x) = 1 & \text{ה. } f'(x) = 3x^{-4} & \text{ו. } f'(x) = -\frac{1}{x^2} \\ \text{ז. } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{ח. } f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & \text{ט. } f'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{4}} \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{lll} \text{א. } f'(x) = 6x^2 & \text{ב. } f'(x) = 21x^6 & \text{ג. } f'(x) = 2x^3 \\ \text{ד. } f'(x) = \frac{6x^5}{7} & \text{ה. } f'(x) = 8 & \text{ו. } f'(x) = -\frac{6}{x^3} \\ \text{ז. } f'(x) = -\frac{4}{x^2} & \text{ח. } f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} & \text{ט. } f'(x) = \frac{2}{9\sqrt[3]{x}} \end{array}$$

0. ב.

0. א. (3)

$$\text{א. } f'(x) = 3x^2 + 4x - 3 \quad \text{ב. } f'(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}$$

$$\text{א. } f'(x) = 15(5x - x)^2 \quad \text{ב. } f'(x) = 15x^2(x^3 + 6)^4$$

$$\text{א. } f'(x) = 6(x - x^2)(1 - 2x) \quad \text{ב. } f'(x) = -\frac{3}{4}(5 - x)^2 \quad \text{ג. } f'(x) = \frac{8(x+1)^3}{3}$$

$$\text{א. } f'(x) = -\frac{3}{x^2} \quad \text{ב. } f'(x) = \frac{2}{x^2} \quad \text{ג. } f'(x) = -\frac{2}{x^3} \quad \text{ד. } f'(x) = -\frac{9}{x^4}$$

$$\text{א. } f'(x) = -\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2} \quad \text{ב. } f'(x) = \frac{2}{(3-x)^2} \quad \text{ג. } f'(x) = -\frac{6}{(x+3)^2}$$

$$\text{א. } f'(x) = 10x - 14 \quad \text{ב. } f'(x) = (5x+1)^2(20x-44)$$

$$\text{ג. } f'(x) = x^2(6-x)^3(18-7x)$$

$$\text{א. } f'(x) = \frac{5}{(1+2x)^2} \quad \text{ב. } f'(x) = \frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2} \quad \text{ג. } f'(x) = \frac{8x}{(x^2+3)^2}$$

$$\text{א. } f'(x) = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2} \quad \text{ב. } f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{ג. } f'(x) = -\frac{9}{x^4}$$

$$\text{א. } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ב. } f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}} \quad \text{ג. } f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$$

$$\text{א. } f'(x) = \frac{9x+1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ב. } f'(x) = \frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}} \quad \text{ג. } f'(x) = \frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$$

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 6 - משיק, נורמל, נוסחת הקירוב הליניארי

תוכן העניינים

67	1. המשיק
69	2. בעיות משיקים
71	3. בעיות משיקים עם נוסחת המשיק
75	4. הנורמל
76	5. נוסחת הקירוב הליניארי - דיפרנציאל שלם

המשק

שאלות

- (1) מצאו את שיפוע הפונקציה
 - א. $f(x) = 2x^3 - 7x$, בנקודה $(2, 2)$.
 - ב. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$, בנקודה $x = -2$.
- (2) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{ax}$, כאשר $a > 0$.
 המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{1}{2}$, הוא בעל שיפוע 1.
 מצאו את הקבוע a .
- (3) הישר $2y - 3x = 3$ משיק לגרף הפונקציה $h(x) = 3\sqrt{x}$.
 מצאו את נקודת ההשקה.
- (4) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = a \cdot 3^{2x-1} + 3^{x-b}$, בנקודה $(1, 15)$, הוא $21 \ln 3$.
 מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b .
- (5) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{\ln^2 x + a}{\ln x + b}$, בנקודה $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$, הוא $\frac{e}{3}$.
 מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b .
- (6) לאילו ערכי k ישיק הישר $y = -5x + 6$, לגרף הפונקציה
 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + k$?
 לכל ערך k כזה מצאו את נקודת ההשקה.
- (7) נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - 4x + 5$.
 - א. שרטטו את גרף הפונקציה ואת המשיקים לגרף בנקודות $x = 1$ ו- $x = 3$.
 - ב. חשבו את הזווית שיוצר כל אחד מהמשיקים בסעיף א',
 עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

(8) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 2}$.

מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, שהמשיק דרכן יוצר זווית של 45° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

(9) נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$.

מצאו את שיעורי ה- x של הנקודות, שהמשיק דרכן לגרף הפונקציה יוצר זווית של 135° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

(10) פונקציה $f(x)$ גזירה ברציפות ב-0 ומקיימת $f(0) = 0$.

ידוע שבראשית הצירים הזווית בין המשיק לגרף הפונקציה לבין הכיוון החיובי של ציר ה- x היא 30° .

חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

(11) מצאו את הזווית שיוצר המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

עם הכיוון החיובי של ציר ה- x , בנקודות $x=1$ ו- $x=0$.

תשובות סופיות

(1) א. 17 ב. 4

(2) $a = 2$

(3) $(1, 3)$

(4) $a = 2, b = -1$

(5) $a = 2, b = -2$

(6) לערך $k = 6$, בנקודה $x = 1$; לערך $k = \frac{158}{27}$, בנקודה $x = \frac{1}{3}$.

(7) א. ראו באתר. ב. $\alpha = 63.43^\circ, \beta = 116.56^\circ$

(8) $x = 5, x = -1$

(9) $x = 1, x = \frac{1}{3}$

(10) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(11) $\alpha = 33.69^\circ, \beta = 90^\circ$

בעיות משיקים

שאלות

(1) הישר $y = 4x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$. מצאו את b ואת נקודת ההשקה.

(2) הישר $y = 3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} + b$. מצאו את b ואת נקודת ההשקה.

(3) הישר $y = ax + \frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x) = \frac{2}{x+c}$ בנקודה $x = 0$. מצאו את a ו- c .

(4) הישר $y = x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^x$. מצאו את b ואת נקודת ההשקה.

(5) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודה $x = e$.

בשאלות 6-7 מצאו את נקודת ההשקה, ואת משוואת המשיק לגרף העקומה, העובר דרך הנקודה הנתונה:

(6) $(2, -3), y = x^2 - 2x + 1$

(7) $(-3, 1), y = \sqrt{x}$

(8) מצאו את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות $y = x^2$ ו- $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$.

(9) הפונקציות $y = \frac{1}{x}$ ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$ משיקות זו לזו. מצאו את k ואת נקודת ההשקה.

10 נתון כי f גזירה לכל x .

א. הוכיחו כי הפונקציה $z(x) = x^2 f(3x-2)$ גזירה לכל x .

ב. הישר $2y = 10x + 11$ משיק לגרף הפונקציה $z(x)$ בנקודה $x = -1$.

מצאו את השיפוע של $f(x)$ בנקודה $x = -5$.

תשובות סופיות

1 נקודת ההשקה היא $(-1, 5)$ ומשוואת המשיק היא $y = 4x + 9$.

2 נקודת ההשקה היא $(4, 12)$ ו- $b = 4$.

3 נקודת ההשקה היא $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ומשוואת המשיק היא $y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$.

4 נקודת ההשקה היא $(0, 1)$ ומשוואת המשיק היא $y = x + 1$.

5 משוואת המשיק היא $y = \frac{1}{e}x$.

6 $y = 6x - 15, (4, 9)$; $y = -2x + 1, (0, 1)$

7 המשיק $(9, 3)$, $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$.

8 $y = 2x - 1, y = -2x - 1$

9 $k = 1.5$, נקודת ההשקה $(1, 1)$.

10 א. שאלת הוכחה. השיפוע הוא 2.

בעיות משיקים עם נוסחת המשיק

שאלות

(1) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = 2(4x+3)^3$, בנקודה $x = -1$.

(2) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^4 - 2x$, ששיפועו 2.

(3) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 + 1$, בנקודה $x = 0$.

(4) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2 - 2}$, בנקודה $x_1 = 1$.

(5) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{2}{ax+3}$, בנקודה $y = 2$, הוא -4 .
מצאו את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

(6) מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = \frac{1}{3x^3}$, היוצרים זווית של 135° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

(7) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}-1}$, ששיפועו -2.

(8) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$, בנקודה $x_1 = 2$.

(9) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{a}{\sqrt{bx-1}}$, בנקודה $(1,6)$, הוא -6 .
מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b , ואת משוואת המשיק.

(10) נתונה הפונקציה $y = e^{2x} + 3ex$, והעבירו לה משיק בנקודה $x = 2$.
מצאו את משוואת המשיק.

11 מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = e^{2x} + xe^{-x}$, בנקודה $x = 0$.

12 מצאו את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = (e+1)e^x - e^{2x}$, בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y = e$.

13 לפונקציה $g(x) = \frac{\ln x^2}{x}$ העבירו משיק בנקודה שבה $x = e^2$. מצאו את משוואת המשיק.

14 מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y = x \cdot \ln(x^2 + 1)$, בנקודה $x = 1$.

15 הגרפים של $f(x) = \ln x$ ו- $g(x) = 1 - x$ נחתכים בנקודה A, ברביע הראשון. בנקודה A העבירו משיק. מצאו את משוואת המשיק והוכיחו שהמשיק עובר דרך ראשית הצירים.

16 מצאו את משוואת המשיק למעגל $x^2 + y^2 = 25$, בנקודה $(3, 4)$.

17 מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $xy^2 + y - x = xy$, דרך הנקודה $(1, 1)$.

18 מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $x^2y + e^{y^2-4x} = \ln x + 1$, דרך הנקודה $(1, 2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

19 מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $\sqrt{xy+y} + x^2y = xy^2$, דרך הנקודה $(1, 2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

20 מצאו את משוואת הישר, המשיק לגרף הפונקציה הסתומה $e^{xy^2} + y = y^2 - 1$, דרך הנקודה $(0, 2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

(21) נתונה הפונקציה הסתומה $x + y \cdot e^y = xy^2 + x^2$.

א. מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה, בהן $y = 0$.

ב. מצאו את משוואת הישרים המשיקים של גרף הפונקציה, בנקודות שנמצאו בסעיף א.

תשובות סופיות

(1) $y = 24x + 22$

(2) $y = 2x - 3$

(3) $y = 1$

(4) $y = -12x + 9$

(5) $a = 2, y = -4x - 2$

(6) $y = -x + 1\frac{1}{3}, y = -x - 1\frac{1}{3}$

(7) $y = -2x + 8$

(8) $y = \frac{11}{16}x - \frac{30}{16}$

(9) $a = 6, b = 2, y = -6x + 12$

(10) $y = (2e^4 + 3e)x - 3e^4$

(11) $y = 3x + 1$

(12) $y = (-e^2 + e)x + e^2, y = (e - 1)x + e$

(13) $y = -\frac{2}{e^4}x + \frac{6}{e^2}$

(14) $y = (\ln 2 + 1)x - 1$

(15) $y = \frac{1}{e}x$

(16) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$

(17) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

(18) $y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5}$

(19) $y = \frac{1}{5}x + 1\frac{5}{6}$

(20) $y = \frac{4}{3}x + 2$

(21) א. $(0,0), (1,0)$ ב. בראשית הצירים: $y = -x$, המשוואה השנייה: $y = x - 1$.

הנורמל

שאלות

- (1) מצאו את משוואת הישר, הנורמל לגרף הפונקציה $f(x) = \sqrt{2x-2}$, בנקודה $(3, 2)$.
- (2) מצאו את משוואת הנורמל לגרף הפונקציה $f(x) = x^4$, המאונך לישר העובר דרך הנקודות $(5, 0)$ ו- $(2, 4)$.
- (3) משוואת נורמל לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$, בנקודה מסוימת, היא $4y + x = 6$. מצאו את הנקודה.

תשובות סופיות

- (1) $y = -2x + 8$
- (2) $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$
- (3) $(2, 1)$

נוסחת הקירוב הלינארי – דיפרנציאל שלם

שאלות

(1) חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים הבאים:
 $\sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{27}$

(2) חשבו בקירוב, בעזרת נוסחת הקירוב הלינארית, את הגדלים הבאים:
 $\ln 2, \sqrt[3]{9}$

תשובות סופיות

$$\sqrt{5} \approx 2.25, \sqrt{8} \approx 2\frac{5}{6}, \sqrt{27} = 5\frac{1}{5} \quad (1)$$

$$\ln 2 \approx 1, \sqrt[3]{9} \approx 2\frac{1}{12} \quad (2)$$

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 7 - כלל לופיטל

תוכן העניינים

1. גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף 77
2. גבול מהצורה אפס כפול אינסוף 79
3. גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף 80
4. גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף 81
5. מקרים בהם כלל לופיטל נכשל 82

גבול מהצורה אפס חלקי אפס ואינסוף חלקי אינסוף

שאלות

$$\frac{\infty}{\infty} \text{ ו- } \frac{0}{0} \text{ גבולות מהצורה}$$

חשבו את הגבולות בשאלות 1-3 (ביטויים רציונאליים):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 4-8 (ביטויים אי-רציונאליים):

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{\sqrt{x - 2} - 1} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 5}}{x - 4} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - 1} - \sqrt{x}}{x - 1} \quad (7)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 9-12 (פונקציות חזקה):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0) \quad (10) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{2x^3} \quad (12) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \quad (11)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 13-15 (פונקציות לוגריתמיות):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(x + 1) + x}{x} \quad (15) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)}{\frac{1}{x^2}} \quad (14) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^2 - 2x + 1} \quad (13)$$

חשבו את הגבולות הבאים (שאלות משולבות):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 3} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x} \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + x + 1}{e^x} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \quad (20)$$

תשובות סופיות

$\frac{1}{6}$ (5)	4 (4)	$n-1$ (3)	$\frac{20}{17}$ (2)	$\frac{5}{6}$ (1)
$\ln \frac{a}{b}$ (10)	1 (9)	$-\frac{3}{2}$ (8)	$\frac{5}{6}$ (7)	$\frac{3}{2}$ (6)
1 (15)	2 (14)	$-\frac{1}{2}$ (13)	$\frac{1}{6}$ (12)	$\frac{1}{2}$ (11)
0 (20)	0 (19)	∞ (18)	$\frac{1}{2}$ (17)	$\frac{1}{2}$ (16)

גבול מהצורה אפס כפול אינסוף

גבולות מהצורה $\infty \cdot 0$

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot e^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left(\frac{x+3}{x-3} \right) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) \cdot \ln(x - 3) \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{5}{x}} - 1 \right] \quad (7)$$

תשובות סופיות

0 (4)

0 (3)

0 (2)

∞ (1)

$\frac{5}{2}$ (7)

6 (6)

0 (5)

גבול מהצורה אינסוף פחות אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה $\infty - \infty$

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5} \right) \quad (4)$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

גבול מהצורה אחד בחזקת אינסוף

שאלות

גבולות מהצורה: $1^{\pm\infty}$, $0^{\pm\infty}$, ∞^0

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax)^x, \quad (a > 0) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x-4)^{x-2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2} \quad (4)$$

תשובות סופיות

$$e \quad (1)$$

$$1 \quad (2)$$

$$1 \quad (3)$$

$$1 \quad (4)$$

מקרים בהם כלל לופיטל נכשל

שאלות

הגבולות הבאים הם מהצורה $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

הראו זאת והסבירו מדוע, למרות כך, כלל לופיטל אינו ישים, ולבסוף, חשבו את הגבול.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (2)$$

תשובות סופיות

$$1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 8 - חקירת פונקציה

תוכן העניינים

83	1. מושגי יסוד
84	2. חקירת פולינום
85	3. חקירת פונקציה רציונלית
89	4. חקירת פונקציה מעריכית
92	5. חקירת פונקציה לוגריתמית
96	6. חקירת פונקציה עם שורשים
97	7. חקירת פונקציה לא גזירה - שורש וערך מוחלט
100	8. חקירת פונקציה – שאלות כלליות
105	9. הוכחת אי שוויונות בעזרת חקירת פונקציה

הערות

1. בשאלות החקירה בפרק זה יש לחקור לפי השלבים הבאים :
 - תחום הגדרה ורציפות.
 - נקודות חיתוך עם הצירים.
 - זוגיות ואי-זוגיות.
 - אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות.
 - תחומי עלייה וירידה.
 - נקודות קיצון.
 - תחומי קמירות וקעירות.
 - נקודות פיתול.
 - שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
2. יש האומרים על פונקציה קמורה שהיא קעורה כלפי מעלה ועל פונקציה קעורה שהיא קעורה כלפי מטה. אלה מינוחים שמקובלים בדרך כלל בתיכון.
3. ברוב המוסדות האקדמיים לומדים למצוא אסימפטוטה משופעת, שכוללת בתוכה גם את האפשרות לאסימפטוטה אופקית. יחד עם זאת, בחלק מהמוסדות לומדים רק אסימפטוטה אופקית, ולכן בכל חקירה אני מוצא גם אסימפטוטה משופעת וגם אופקית. צפו בפתרון רק בחלק ברלוונטי עבורכם.
4. בחלק מהחקירות אציין בשאלה שאין צורך לעבור על כל שלבי החקירה. שימו לב לזה.
5. אני ממליץ על תוכנה חינוכית בשם Graph, שניתן להוריד [מכאן](#). בעזרתה תוכלו לשרטט כל פונקציה בקלות ולבדוק את תשובותיכם.

חקירת פולינום

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 \quad (2)$$

$$f(x) = x(x-9)^2 \quad (1)$$

תשובות סופיות

(1) תחום הגדרה: כל x . נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 ו- 9 .

נקודות קיצון: מינימום: $(9, 0)$, מקסימום: $(3, 108)$.

תחום עלייה: $x > 9$ or $x < 3$, ירידה: $3 < x < 9$.

תחום קמירות: $x > 6$, קעירות: $x < 6$.

נקודת פיתול: $(6, 54)$.

(2) תחום הגדרה: כל x . נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 ו- 2 .

נקודות קיצון: מינימום: $\left(1.5, \frac{-27}{16}\right)$.

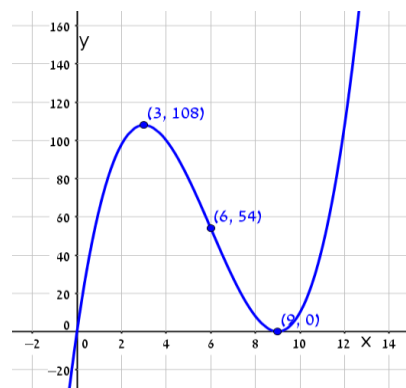
תחום עלייה: $x > 1.5$, ירידה: $x < 1.5$.

תחום קמירות: $x < 0$ or $x > 1$, קעירות: $0 < x < 1$.

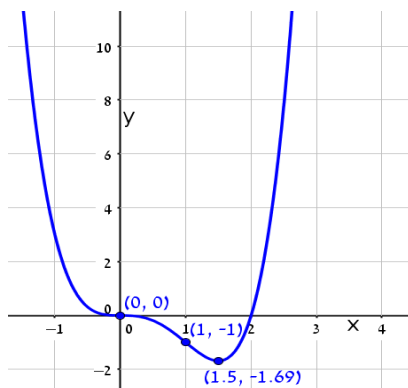
נקודות פיתול: $(0, 0)$, $(1, -1)$.

גרפים

(1)



(2)



חקירת פונקציה רציונלית

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה :

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)} \quad (6)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^3 \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1} \quad (8)$$

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad (7)$$

הערות

1. בשאלה 6 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואה ממעלה שלישית.
2. בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול, רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.
3. בשאלה 8 מצאתי רק אסימפטוטה אופקית ולא משופעת. מומלץ למצוא גם אסימפטוטה משופעת. פונקציה כמעט זהה יש בסרטון ההסבר על אסימפטוטה משופעת. בכל אופן מקבלים שם אסימפטוטה משופעת $y = x - 1$.

תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 0$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=0$, משופעת ואופקית: הישר $y=0$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(2, 0.25)$. נקודת פיתול: $\left(3, \frac{2}{9}\right)$.
תחום עלייה: $0 < x < 2$, ירידה: $x > 2$ or $x < 0$.
תחום קמירות: $x > 3$, קעירות: $0 < x < 3$ or $x < 0$.
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq -1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0, עם ציר ה- x : 0.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=-1$, משופעת ואופקית: הישר $y=2$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מינימום: $(0, 0)$. נקודת פיתול: $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{9}\right)$.
תחום עלייה: $x < -1$ or $x > 0$, ירידה: $-1 < x < 0$.
תחום קמירות: $-1 < x < \frac{1}{2}$ or $x < -1$, קעירות: $x > \frac{1}{2}$.
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq \pm 2$. זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0, עם ציר ה- x : 0.
אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2$, $x=-2$, משופעת: הישר $y=x$ ב- $\pm\infty$,
אופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $(-\sqrt{12}, -\sqrt{27})$, מקסימום: $(\sqrt{12}, \sqrt{27})$.
תחום עלייה: $x < -\sqrt{12}$ or $x > \sqrt{12}$, ירידה: $-\sqrt{12} < x < \sqrt{12}$, $x \neq \pm 2$.
נקודת פיתול: $(0, 0)$.
תחום קמירות: $-2 < x < 0$ or $x > 2$, קעירות: $0 < x < 2$ or $x < -2$.
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq -1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0, עם ציר ה- x : 0.
אסימפטוטה אנכית: הישר $x=-1$, משופעת: הישר $y=x-2$ ב- $\pm\infty$,
אופקית: אין, כי הפונקציה רציונלית, שבה מעלת המונה גדולה ממעלת המכנה.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(-3, -\frac{27}{4}\right)$.
תחום עלייה: $x < -3$ or $x > -1$, ירידה: $-3 < x < -1$.
נקודת פיתול: $(0, 0)$.
תחום קמירות: $x > 0$, קעירות: $-1 < x < 0$ or $x < -1$.

(5) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 1$. זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית (כללית).

נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1 , עם ציר ה- x : -1 .

אסימפטוטה אנכית: הישר $x=1$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.

נקודות קיצון: אין; הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

נקודות פיתול: $(-1, 0)$, $\left(-3, \frac{1}{8}\right)$.

תחום קמירות: $-3 < x < -1$ & $x > 1$, קעירות: $-1 < x < 1$ or $x < -3$.

(6) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 2$, $x \neq 5$. זוגיות: כללית.

נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $y = -\frac{1}{10}$, עם ציר ה- x : ± 1 .

אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2$, $x=5$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.

נקודות קיצון: מקסימום: $(2.78, -3.88)$, מינימום: $(0.36, -0.11)$.

תחום עלייה: $0.36 < x < 2$ or $2 < x < 2.78$,

ירידה: $x < 0.36$ or $2.78 < x < 5$ or $x > 5$. נקודת פיתול: $(-1, 0)$.

תחום קמירות: $-1 < x < 2$ or $x > 5$, קעירות: $2 < x < 5$ or $x < -1$.

(7) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq \pm 2$. זוגיות: כללית.

נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $y = -\frac{3}{4}$, עם ציר ה- x : $x=1$, $x=3$.

אסימפטוטה אנכית: הישרים $x=2$, $x=-2$, משופעת ואופקית: הישר $y=1$ ב- $\pm\infty$.

נקודות קיצון: אין; כי למשוואה הריבועית שקיבלנו אין פתרון.

תחום עלייה: הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

נקודת פיתול: $(0.85, -0.09)$.

תחום קמירות: $0.85 < x < 2$ or $x < -2$, קעירות: $-2 < x < 0.85$ or $x > 2$.

(8) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 1$, $x \neq -1$.

נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 .

אסימפטוטה אופקית: אין, אנכית: הישר $x=-1$.

נקודות קיצון: מקסימום: $(-2, -4)$, מינימום: $(0, 0)$.

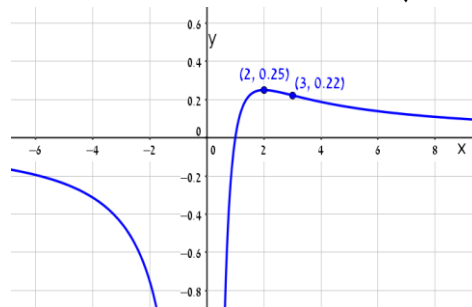
תחום עלייה: $x < -2$ or $0 < x < 1$ or $x > 1$, ירידה: $-1 < x < 0$ or $-2 < x < -1$.

נקודת פיתול: אין.

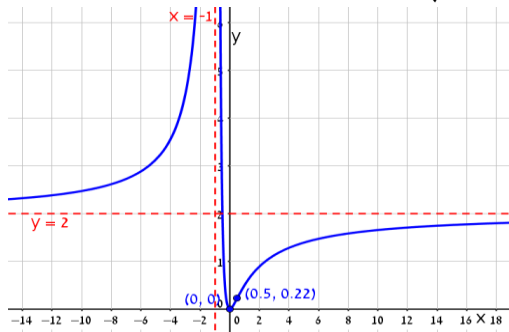
תחום קמירות: $-1 < x < 1$ or $x > 1$, קעירות: $x < -1$.

גרפים

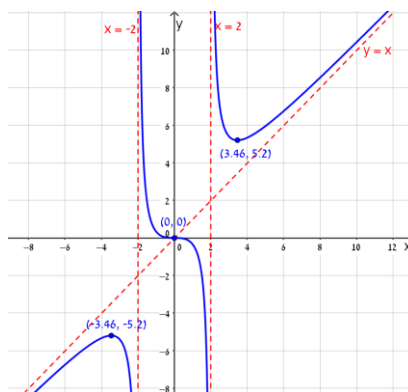
(1)



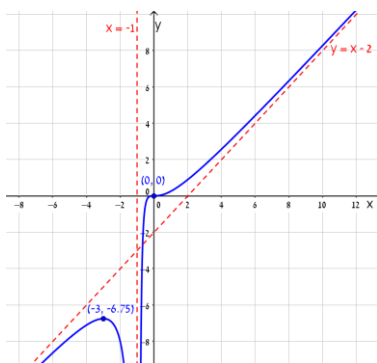
(2)



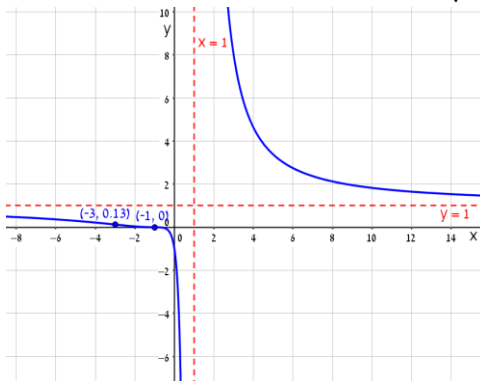
(3)



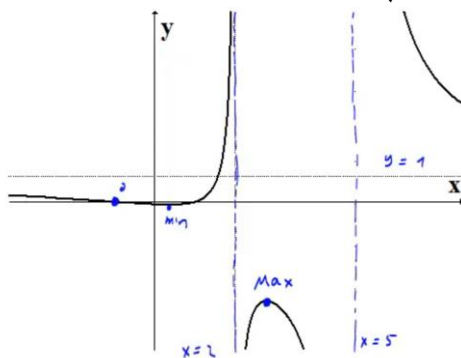
(4)



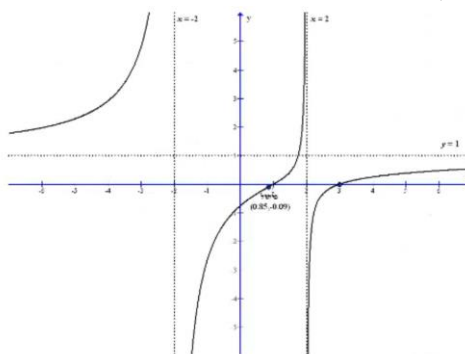
(5)



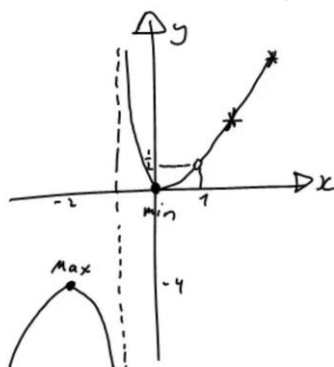
(6)



(7)



(8)



חקירת פונקציה מעריכית

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה :

$$f(x) = x - e^x \quad (1)$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (2)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (3)$$

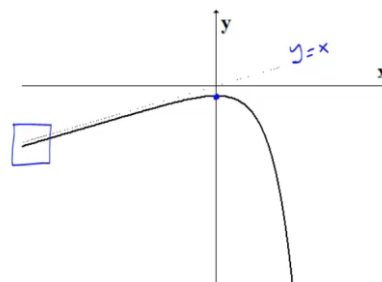
$$f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (4)$$

תשובות סופיות

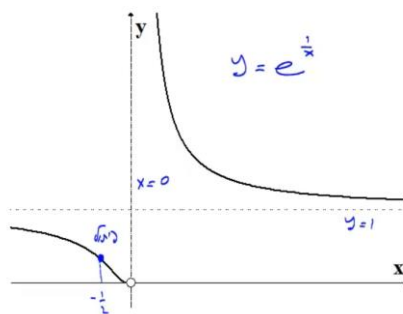
- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1 , עם ציר ה- x : אין (ראו בהרחבה בסרטון).
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: הישר $y = x$ ב- $-\infty$ בלבד.
נקודות קיצון: מקסימום: $(0, -1)$. תחום עלייה: $x < 0$, ירידה: $x > 0$.
נקודת פיתול: אין. תחום קמירות: קעורה לכל x .
(2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : אין.
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x = 0$, משופעת ואופקית: הישר $y = 1$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: אין.
תחום עלייה וירידה: הפונקציה יורדת בתחום הגדרתה.
נקודת פיתול: $(-0.5, e^{-2})$.
תחום קמירות: $x > 0$ or $-0.5 < x < 0$, תחום קעירות: $x < -0.5$.
(3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 0$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : -2 .
אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): $x = 0$, משופעת: הישר $y = x + 3$ ב- $\pm\infty$.
אופקית: אין. נקודות קיצון: מקסימום: $(-1, e^{-1})$, מינימום: $(2, 4e^{\frac{1}{2}})$.
תחום עלייה: $x > 2$ or $x < -1$, ירידה: $-1 < x < 0$ or $0 < x < 2$.
נקודת פיתול: $(-0.4, 1.6e^{-2.5})$.
תחום קמירות: $x > 0$ or $-0.4 < x < 0$, תחום קעירות: $x < -0.4$.
(4) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: אי-זוגית (סימטרית ביחס לראשית).
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 .
אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת (אופקית): הישר $y = 0$ ב- $\pm\infty$.
נקודות קיצון: מקסימום: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$, מינימום: $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}})$.
תחום עלייה: $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, ירידה: $x > \frac{1}{2}$ or $x < -\frac{1}{2}$.
נקודות פיתול: $(0, 0)$, $(-\sqrt{\frac{3}{4}}, -\sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5})$, $(\sqrt{\frac{3}{4}}, \sqrt{\frac{3}{4}}e^{-1.5})$.
תחום קמירות: $x > \sqrt{\frac{3}{4}}$ or $-\sqrt{\frac{3}{4}} < x < 0$, תחום קעירות:
 $x < -\sqrt{\frac{3}{4}}$ or $0 < x < \sqrt{\frac{3}{4}}$.

גרפים

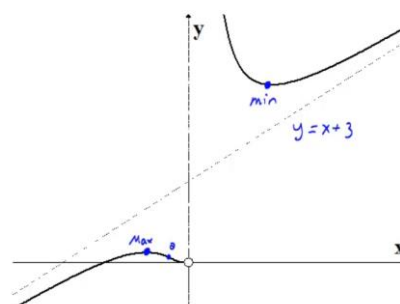
(1)



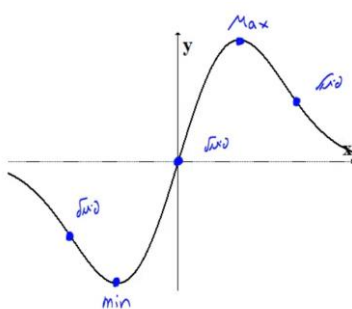
(2)



(3)



(4)



חקירת פונקציה לוגריתמית

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (3)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (4)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (5)$$

$$f(x) = 4 \ln^2 x - 4 \ln x - 3 \quad (6)$$

$$f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (7)$$

הערה

בשאלה 7 יש למצוא נקודת פיתול רק אם למדת לפתור משוואות בדרך נומרית. למשל, בשיטת ניוטון-רפסון.

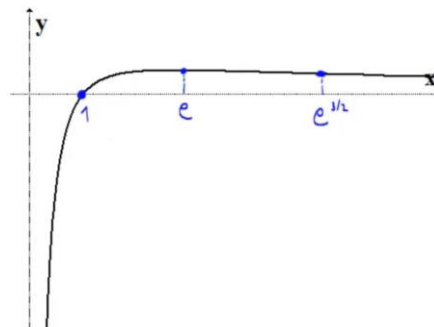
תשובות סופיות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית: הישר $x = 0$, משופעת ואופקית: הישר $y = 0$ ב- ∞ .
 נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e, \frac{1}{e}\right)$.
 תחום עלייה: $0 < x < e$, ירידה: $x > e$.
 נקודת פיתול: $\left(e^{1.5}, \frac{1.5}{e^{1.5}}\right)$.
 תחום קמירות: $x > e^{1.5}$, קעירות: $0 < x < e^{1.5}$.
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית (חד-צדדית): הישר $x = 0$,
 משופעת ואופקית: הישר $y = 0$ ב- ∞ .
 נקודות קיצון: מקסימום: $\left(e^2, \frac{2}{e}\right)$.
 תחום עלייה: $0 < x < e^2$, ירידה: $x > e^2$.
 נקודת פיתול: $\left(e^{\frac{8}{3}}, \frac{\frac{8}{3}}{\sqrt[8]{e^3}}\right)$. תחום קמירות: $0 < x < e^{\frac{8}{3}}$, קעירות: $x > e^{\frac{8}{3}}$.
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x < 2$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $y = -\frac{1}{2} \ln 2$, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית: הישר $x = 2$, משופעת: אין.
 נקודות קיצון: אין.
 תחום עלייה: עולה בכל תחום הגדרתה.
 נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.
- (4) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : 1.
 אסימפטוטה אנכית: אין, משופעת: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $(e^{-1}, -e^{-1})$.
 תחום עלייה: $x > e^{-1}$, ירידה: $0 < x < e^{-1}$.
 נקודת פיתול: אין. קמורה בכל תחום הגדרתה.

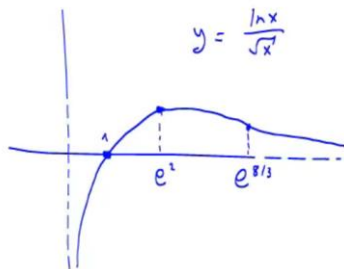
- (5) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : $x = e^1$, $x = e^{-3}$.
 אסימפטוטה אנכית: $x = 0$, משופעת ואופקית: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $(e^{-1}, -4)$.
 תחום עלייה: $x > e^{-1}$, ירידה: $0 < x < e^{-1}$.
 נקודת פיתול: $(1, -3)$. תחום קמירות: $x > 1$, קעירות: $0 < x < 1$.
- (6) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : $x = e^{1.5}$, $x = e^{-0.5}$.
 אסימפטוטה אנכית: $x = 0$, משופעת ואופקית: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $(e^{\frac{1}{2}}, -4)$.
 תחום עלייה: $x > e^{\frac{1}{2}}$, ירידה: $0 < x < e^{\frac{1}{2}}$.
 נקודת פיתול: $(e^{1.5}, 0)$. תחום קמירות: $0 < x < 1.5$, קעירות: $x > 1.5$.
- (7) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x > 0$, $x \neq 1$. זוגיות: כללית.
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : אין, עם ציר ה- x : אין.
 אסימפטוטה אנכית: $x = 1$, משופעת ואופקית: אין.
 נקודות קיצון: מינימום: $(e^{-1}, 2)$, $(e, 2)$.
 תחום עלייה: $x > e$ or $e^{-1} < x < 1$, ירידה: $1 < x < e$ or $x < e^{-1}$.
 נקודת פיתול: $(5.15, 3.06)$.
 תחום קמירות: $1 < x < 5.15$ or $0 < x < 1$, קעירות: $x > 5.15$.

גרפים

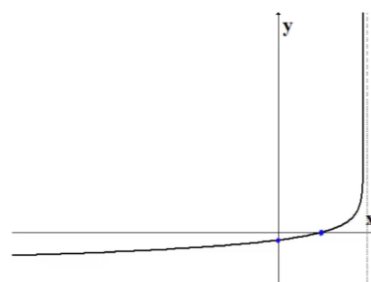
(1)



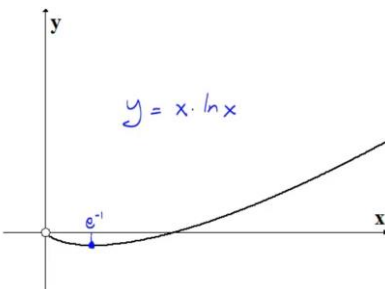
(2)



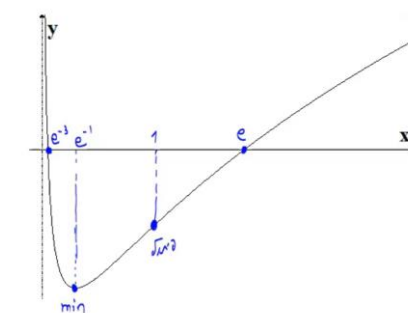
(3)



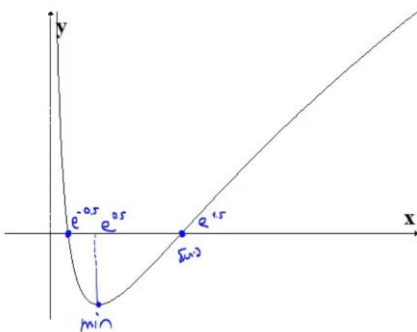
(4)



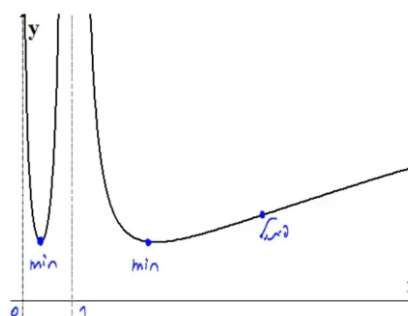
(5)



(6)



(7)



חקירת פונקציה עם שורשים

שאלה

(1) חקור את הפונקציה הבאה חקירה מלאה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

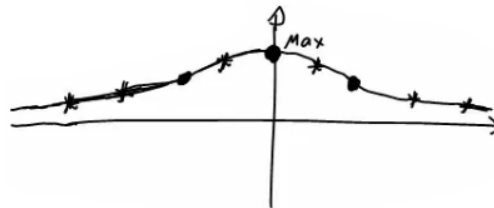
תשובה

- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x .
 נקודות חיתוך עם ציר ה- y : $y = 1$, עם ציר ה- x : אין.
 אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: $y = 0$.
 נקודות קיצון: מקסימום: $(0,1)$. תחום עלייה: $x < 0$, ירידה: $x > 0$.

נקודות פיתול: $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right), \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$.

תחום קמירות: $x < -\sqrt{\frac{1}{2}}$ or $x < \sqrt{\frac{1}{2}}$, קעירות: $-\sqrt{\frac{1}{2}} < x < \sqrt{\frac{1}{2}}$.

גרף:



חקירת פונקציה לא גזירה – שורש וערך מוחלט

שאלות

חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x) = x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{x^2} - 1\right)^2 \quad (2)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (3)$$

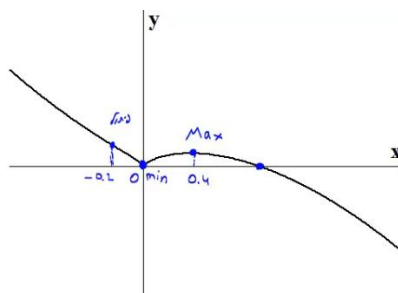
$$f(x) = \frac{|x-3|}{x-2} \quad (4)$$

תשובות סופיות

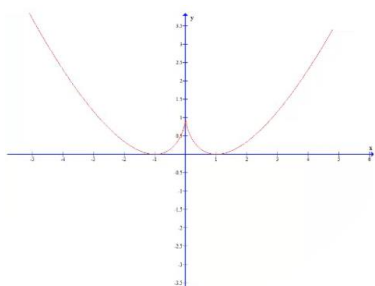
- (1) תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 0 , עם ציר ה- x : 0 או 1 .
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $\left(\frac{2}{5}, 0.326\right)$, מינימום: $(0, 0)$.
תחום עלייה: $0 < x < \frac{2}{5}$, ירידה: $x < 0$ or $x > \frac{2}{5}$.
נקודות פיתול: $(-0.2, 0.41)$.
תחום קמירות: $x < -0.2$, קעירות: $-0.2 < x < 0$ or $x > 0$.
- (2) תחום הגדרה ורציפות: לכל x .
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : 1 , עם ציר ה- x : -1 או 1 .
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מקסימום: $(0, 1)$, מינימום: $(-1, 0)$.
תחום עלייה: $-1 < x < 0$ or $x > 1$, ירידה: $x < -1$ or $0 < x < 1$.
נקודות פיתול: אין.
תחום קמירות: קמורה לכל x .
תחום הגדרה ורציפות: לכל x . זוגיות: זוגית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1 , עם ציר ה- x : ± 1 .
אסימפטוטה אנכית: אין, אופקית: אין.
נקודות קיצון: מינימום: $(0, -1)$.
תחום עלייה: $0 < x < 1$ or $x > 1$, ירידה: $x < -1$ or $-1 < x < 0$.
נקודות פיתול: $(1, 0)$, $(-1, 0)$.
תחום קמירות: $-1 < x < 1$, קעירות: $x > 1$ or $x < -1$.
- (3) תחום הגדרה ורציפות: לכל $x \neq 2$. זוגיות: כללית.
נקודות חיתוך עם ציר ה- y : -1.5 , עם ציר ה- x : 3 .
אסימפטוטה אנכית: הישר $x = 2$,
משופעת ואופקית: הישר $y = 1$ ב- ∞ , ו- $y = -1$ ב- $-\infty$.
נקודות קיצון: מינימום: $(3, 0)$.
תחום עלייה: $x > 3$, ירידה: $2 < x < 3$ or $x < 2$.
נקודות פיתול: $(3, 0)$.
תחום קמירות: $2 < x < 3$, קעירות: $x > 3$ or $x < 2$.

גרפים

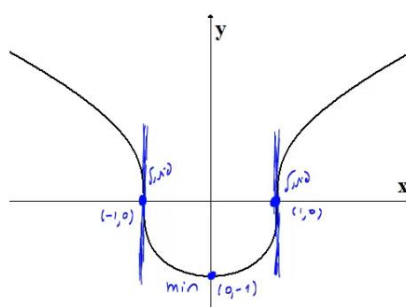
(1)



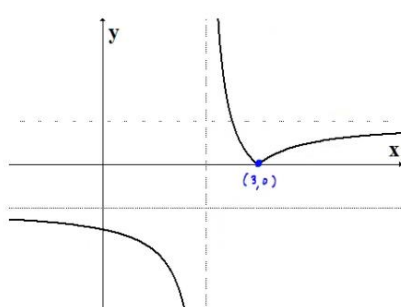
(2)



(3)



(4)



חקירת פונקציה – שאלות כלליות

שאלות

(1) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$, וידוע שהנקודה $x = 1$ נקודת קיצון. מצאו את הקבוע a .

(2) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$, וידוע שהנקודה $(1, 2)$ נקודת קיצון. מצאו את הקבועים a, b .

(3) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$, וידוע שהנקודה $x = 1$ נקודת פיתול. מצאו את הקבוע a .

(4) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$, וידוע שהנקודה $(1, 2)$ נקודת פיתול. מצאו את הקבועים a, b .

(5) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = 3$ הוא 33. מצאו את a .

(6) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(3, 9)$ הוא 12. מצאו את a, b .

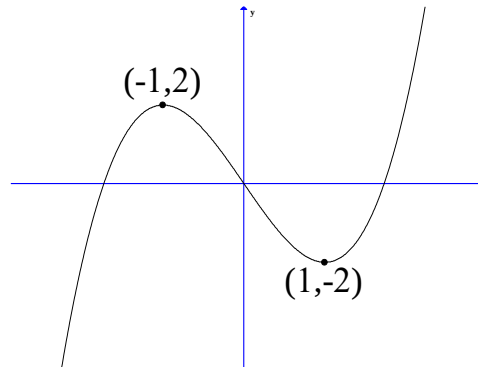
(7) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^3 + x^2}{2x^3 + x + 6}$. ידוע שהישר $y = 4$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה. מצאו את a .

(8) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 4}{x}$. ידוע שהישר $y = 0.5x + 1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה. מצאו את a ואת b .

(9) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + ax + 6}$.

ידוע שהישר $x=1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.
מצאו את a .

שאלות 10-17 מתייחסות לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x$:



(10) מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 5$?

(11) מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 2$?

(12) מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 0.5$?

(13) עבור איזה ערך של k , למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק פתרון אחד?

(14) עבור איזה ערך של k , למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שני פתרונות?

(15) עבור איזה ערך של k , למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שלושה פתרונות?

(16) האם קיים ערך של k , עבורו למשוואה $f(x) = k$ אין פתרון?

(17) מצאו את התחומים בהם הפונקציה חח"ע.

(18) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f'(2) = 4$.

נגדיר פונקציה חדשה $z(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

א. חשבו $z'(0.5)$.

ב. נתון בנוסף כי f עולה. הוכיחו כי z יורדת.

(19) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(1) = 2$, $f'(1) = e$.

$$z(x) = f^2(\ln x) + \frac{1}{x}$$

- א. האם z עולה או יורדת בנקודה $x = e$?
 ב. נתון בנוסף כי f שלילית ועולה.
 מה ניתן לומר על תחומי העלייה והירידה של z ?

(20) נתונה פונקציה $f(x)$ חיובית ויורדת.

$$z(x) = \sqrt{f(x^2) + 4}$$

מי מהבאים בהכרח נכון?

- א. z עולה לכל x .
 ב. z יורדת לכל x .
 ג. z עולה לכל $x > 0$.
 ד. z יורדת לכל $x > 0$.

(21) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(1) = e$.

$$g(x) = x^2 + f(\ln x)$$

- א. חשבו את $g'(e)$.
 ב. הוכיחו שהפונקציה g עולה בנקודה $x = e$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(e+h) - g(e)}{h}$$

(22) הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

- ידוע שנקודת החיתוך היחידה של $f(x)$ עם ציר ה- x היא ב- $x = 0$.
 נגדיר $g(x) = (f(x))^2$. איזו מבין הטענות הבאות **בהכרח לא נכונה**:
 א. אם f עולה בכל תחום הגדרתה אז ל- g יש נקודת מינימום.
 ב. אם f יורדת בכל תחום הגדרתה אז ל- g יש נקודת מינימום.
 ג. אם f עולה בכל תחום הגדרתה אז ל- g אין נקודת קיצון.

(23) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת וגזירה פעמיים לכל x ומקיימת $f''(x) = a \cdot f(x)$, כאשר $a < 0$.

איזו מבין הטענות הבאות בהכרח לא נכונה:

- א. בתחום בו $f(x)$ שלילית, $f(x)$ קמורה (קעורה כלפי מעלה).
- ב. אם $f(x)$ חיובית בתחום מסוים אז $f'(x)$ יורדת באותו התחום.
- ג. אם בתחום מסוים $f(x)$ עולה וחותכת את ציר x בנקודה $(n, 0)$, אז שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = n$ הוא המקסימלי באותו התחום.
- ד. אם לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אז $f(x)$ שלילית בכל תחום הגדרתה.

תשובות סופיות

(1) $a = -\frac{2}{3}$

(2) $a = -4, b = 6$

(3) $a = -\frac{1}{3}$

(4) $a = -1, b = 3$

(5) $a = 1$

(6) $a = \frac{2}{3}, b = -1$

(7) $a = 8$

(8) $a = \frac{1}{2}, b = 1$

(9) $a = -7$

(10) 1

(11) 2

(12) 3

(13) $k < -2, k > 2$

(14) $k = \pm 2$

(15) $-2 < k < 2$

(16) לא

(17) $x < -1, -1 < x < 1, x > 1$

(18) א. $z'(0.5) = -16$ ב. שאלת הוכחה.

(19) א. עולה. ב. יורדת.

(20) ד

(21) א. $2e+1$ ב. שאלת הוכחה. ג. $2e+1$

(22) ג

(23) ד

הוכחת אי שוויונות בעזרת חקירת פונקציה

שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים לגבי התחום הרשום לידם:

$$(1) \quad (-\infty < x < \infty), \quad 8x^3 \leq 3x^4 + 6x^2$$

$$(2) \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{3}\right), \quad x < 2 \sin x$$

$$(3) \quad (x > 0), \quad \sqrt{x+1} < 1 + \frac{x}{2}$$

$$(4) \quad (x \geq 0), \quad \ln(x+1) \leq x$$

$$(5) \quad \text{נתון כי } f \text{ רציפה לכל } x \geq 0, \quad f'(x) > 0 \text{ לכל } x > 0, \text{ וכן } f(0) = 0.$$

$$\text{הוכיחו כי לכל } x > 0 \text{ מתקיים } f(x) - \frac{1}{2}(f(x))^2 < \ln(1 + f(x)).$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 9 - מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה

תוכן העניינים

1. מציאת מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה 106
2. שאלות המשלבות קיצון מוחלט עם קיצון מקומי 109
3. הוכחת אי שוויונים 110

מינימום ומקסימום מוחלטים לפונקציה

שאלות

בשאלות 1-7 מצאו את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציות, בתחומים הרשומים לידן (אם יש כאלה):

$$(-1 \leq x \leq 3) \quad f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x \quad (1)$$

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5} \quad (2)$$

$$(-1 \leq x \leq 20) \quad f(x) = x^{\frac{2}{3}}(20 - x) \quad (3)$$

$$\left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right] \quad f(x) = \begin{cases} 4x - 2 & x < 1 \\ (x - 2)(x - 3) & x \geq 1 \end{cases} \quad (4)$$

$$(-5 \leq x \leq 1) \quad f(x) = 1 + |9 - x^2| \quad (5)$$

$$(-5 < x < -1) \quad f(x) = \frac{x^2}{x + 1} \quad (6)$$

$$(-\infty < x < \infty) \quad f(x) = x^3 - 9x + 1 \quad (7)$$

$$(8) \quad \text{נתונה הפונקציה } f(x) = x^x \text{ בתחום } x > 0.$$

א. מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של הפונקציה בתחום הנתון.

ב. דני טוען שהפונקציה הפיכה בקטע $(0, 0.5)$. הוכיחו שדני טועה.

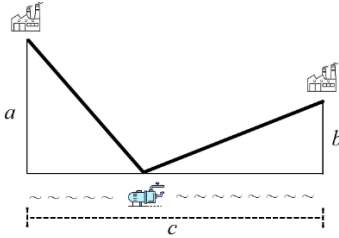
$$(9) \quad \text{מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של הפונקציה } f(x) = x^2 + |\ln x|.$$

$$(10) \quad \text{מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של } f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x \text{ ב-} \mathbb{R}. \text{ הערה: אין להשתמש בנגזרות בתרגיל זה.}$$

(11) מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$

ב- $\mathbb{R}$ וב- $[1, 3]$.

הערה: אין להשתמש בנגזרות בתרגיל זה.



(12) לחברת מי עדן יש שני מפעלים.

האחד מרוחק a ק"מ מהמעין.

השני מרוחק b ק"מ מהמעין.

המרחק האופקי בין המפעלים הוא c ק"מ.

החברה מעוניינת להקים תחנת שאיבה במעין

בין שני המפעלים. התחנה מחוברת למפעלים.

מהו האורך המינימלי של צינורות שאיבה שהחברה תצטרך?

הראו שהאורך המינימלי מתקבל כאשר הזווית בין כל צינור למעין שווה.

(13) גליל חסום בכדור.

הוכיחו, מבין כל הגלילים האפשריים הגדול ביותר בנפחו הוא זה שגובהו פי

$\sqrt{2}$ מרדיוס הבסיס שלו.

תשובות סופיות

- (1) $(-1, -7)$ מינימום מוחלט, $(3, 9)$ מקסימום מוחלט.
- (2) $(-1, 0)$ מינימום מוחלט, $(5, 0)$ מינימום מוחלט, $(2, 3)$ מקסימום מוחלט.
- (3) $(0, 0)$ מינימום מוחלט, $(20, 0)$ מינימום מוחלט, $(8, 48)$ מקסימום מוחלט.
- (4) $(2.5, -0.25)$ מינימום מוחלט, $(1, 2)$ מקסימום מוחלט.
- (5) $(-3, 1)$ מינימום מוחלט, $(-5, 17)$ מקסימום מוחלט.
- (6) $(-2, -4)$ מקסימום מוחלט. אין מינימום מוחלט.
- (7) אין מקסימום ואין מינימום מוחלטים.
- (8) א. אין מקסימום מוחלט. מינימום מוחלט הוא $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$. ב. שאלת הוכחה.
- (9) אין מקסימום מוחלט. מינימום מוחלט $0.5(1 + \ln 2)$.
- (10) מקסימום מוחלט 1, מינימום מוחלט $\frac{1}{2}$.
- (11) ב- $\mathbb{R}$: $(3, 0)$, $(1, 0)$ מינימום מוחלט, מקסימום מוחלט לא קיים.
- ב- $[1, 3]$: $(3, 0)$, $(1, 0)$ מינימום מוחלט, $(2, 1)$ מקסימום מוחלט.
- (12) האורך המינימלי של צינורות שאיבה שהחברה תצטרך הוא $\sqrt{(a+b)^2 + c^2}$.
- (13) שאלת הוכחה.

שאלות המשלבות קיצון מוחלט עם קיצון מקומי

שאלות

- (1) תהי f פונקציה רציפה ב- $[a, b]$ וגזירה ב- (a, b) .
נניח שקיימת נקודה $c \in (a, b)$ כך ש- $(f(c) - f(a))(f(b) - f(c)) < 0$.
הוכיחו כי קיימת נקודה $d \in (a, b)$ כך ש- $f'(d) = 0$.
- (2) פונקציה $f(x)$ גזירה פעמיים בקטע $[a, b]$.
וידוע כי $f(x)$ מקיימת $f(x) - f'(x) = f''(x)$ לכל x , וכן $f(a) = f(b) = 0$.
הוכיחו כי $f(x) = 0$ לכל x בקטע.
- (3) הפונקציה f גזירה פעמיים ומקיימת $f''(x) + f'(x)g(x) - f(x) = 0$ עבור פונקציה g מסוימת.
הוכיחו: אם הפונקציה f מקבלת את הערך 0 בשתי נקודות, אז היא שווה אפס בכל הקטע בין הנקודות.
- (4) תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה פעמיים בקטע (a, b) , כך ש-
 $f''(x) < 0$ בקטע זה.
נתון כי $f(a) = f(b) = 0$.
א. הוכיחו כי $f(x) > 0$ בקטע (a, b) .
ב. האם סעיף א' נשאר נכון אם מורידים את דרישת הרציפות? הוכיחו או הפריכו.

תשובות סופיות

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) שאלת הוכחה.
- (3) שאלת הוכחה.
- (4) שאלת הוכחה.

הוכחת אי שוויונים

שאלות

בשאלות 1-3 הוכיחו את אי-השוויונים שמימין, לגבי התחום שבסוגריים משמאל:

$$(1) \quad x^3 e^{-x} \leq \frac{27}{e^3} \quad (\text{לכל } x)$$

$$(2) \quad x e^{-\sqrt{x}} \leq 1, \quad (x \geq 0)$$

$$(3) \quad 0 \leq x^2 e^{x-1} \leq 1, \quad (x \leq 1)$$

(4) יהיו a ו- b מספרים חיוביים. הוכיחו שאי-השוויונים הבאים לא יכולים להתקיים בעת ובעונה אחת:

$$(1) \quad a(1-b) > \frac{1}{4}, \quad (2) \quad b(1-a) > \frac{1}{4}$$

הערת סימון: $[a, b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b$; $(a, b) \Leftrightarrow a < x < b$; $[a, b) \Leftrightarrow a \leq x < b$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 10 - בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון)

תוכן העניינים

1. הסבר כללי על בעיות קיצון (ללא ספר)
2. בעיות קיצון כלכליות מסוג ראשון 111
3. בעיות קיצון כלכליות מסוג שני 117
4. בעיות קיצון יסודיות עם מספרים 119
5. בעיות קיצון בפונקציות וגרפים 120
6. בעיות קיצון בהנדסת המישור 122

שלבי עבודה

- נגדיר את אחד הגדלים בשאלה כ- x .
- נבטא את שאר הגדלים בשאלה באמצעות x .
- נבנה פונקציה שמבטאת את מה שרצינו שיהיה מינימלי/מקסימלי.
- נגזור את הפונקציה, נשווה לאפס ונחלץ ערך/ערכי ה- x .
- נוודא שערך ה- x מסעיף 4 הוא אכן מינימום/מקסימום באמצעות " y (או טבלה).
- ננסח את התשובה לשאלה המקורית.

בעיות קיצון כלכליות מסוג ראשון

שאלות

- 1) כאשר חברת 'יוטבתה' מוכרת x ליטר שוקו ליום, היא יכולה לקבל מחיר של $p(x) = -\frac{1}{4}x + 10$ שקל לליטר.
- מהו מחיר ליטר אחד, אם הכמות שנמכרת ביום היא 4 ליטר?
 - מהו מחיר ליטר אחד, אם הכמות שנמכרת ביום היא 12 ליטר?
 - מהי הכמות הנמכרת ביום, אם המחיר הוא 6 ₪ לליטר?
 - שרטטו את הגרף של פונקציית הביקוש, ומצאו את תחום ההגדרה שלה.
 - פונקציית הביקוש הנתונה מתארת את מחיר המוצר, כפונקציה של הכמות הנמכרת ממנו. שנו את נוסחת הפונקציה, כך שהיא תתאר את הכמות הנמכרת מהמוצר, כפונקציה של מחירו.
- 2) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -0.6x + 120$.
- מצאו את פונקציית הפדיון ואת התחום שלה.
 - אם $x = 20$, מהו מחיר המוצר ומהו הפדיון?
 - אם המחיר הוא 12 ₪, מהו הפדיון?
- 3) פונקציית הפדיון של מוצר מסוים היא $R(x) = -0.08x^2 + 40x$.
- מהו התחום של פונקציית הפדיון?
 - שרטטו את הגרף של פונקציית הפדיון.
 - מצאו את פונקציית הביקוש ושרטטו את הגרף שלה.
- 4) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -0.4x + 100$.
- מצאו את תחום הפונקציה.
 - מצאו את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון הממוצע.
 - מצאו את פונקציית הפדיון השולי.
 - לאיזה ערך של x יתקבל פדיון מקסימלי, ומהו?
- 5) פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -6x^2 + 240x + 1800$.
- מצאו את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון השולי.
 - אם $x = 40$, האם כדאי להגדיל את הייצור?
 - מתי יהיה הפדיון מקסימלי, ומהו?

6 פונקציית הביקוש של מוצר מסוים נתונה ע"י $Q(x) = 10x - \frac{x^2}{5}$.

- מצאו את המחיר, הנותן את הפדיון המקסימלי.
- מהו הביקוש במקרה זה?
- מהו הביקוש השולי בנקודת המחיר שמצאנו? מה משמעותו?

7 פונקציית ההוצאות של יצרן, המייצר x קפה ביום, היא $C(x) = 5x + 150$.

- שרטטו גרף של פונקציית ההוצאות. מהן ההוצאות הקבועות?
- מצאו כמה ק"ג קפה מייצר היצרן, אם ההוצאות הן 1,000 ₪.
- מהן ההוצאות, אם מייצרים 20 ק"ג קפה ביום?
- מצאו את פונקציית ההוצאה השולית.

8 פונקציית העלות, של יצרן כובעים, היא $TC(x) = 0.04x^2 + 10x + 400$ שקל ליום.

- חשבו את העלות הממוצעת ליום, אם הוא מייצר 40 כובעים.
- כמה כובעים עליו לייצר, כדי שהעלות הממוצעת תהיה מינימלית?
- חשבו את העלות השולית ליום, עבור $x = 100$. איזו מסקנה ניתן להסיק?

9 פונקציית העלות של מוצר מסוים היא $C(x) = 0.004x^2 + 10x + 200$.

- חשבו את העלות, כאשר $x = 100$ וכאשר $x = 101$.
- חשבו את העלות השולית, כאשר $x = 100$.
- חשבו כמה תעלה יחידת מוצר נוספת, כאשר הייצור יעבור מ- $x = 100$ ל- $x = 101$, והשוו עם התוצאה של סעיף ב. מהי המסקנה?
- מצאו האם קצב השינוי של העלות גדל או קטן.

10 ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = 100 - 0.06Q$,

ופונקציית עלות כוללת $TC(Q) = 200 + 4Q$.

- מהי הכמות, Q , שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו? מהו המקסימום במקרה זה?

11 ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = 20$,

ופונקציית עלות $TC(Q) = 300 + 2Q^2$.

- מהי הכמות שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו? מהו המקסימום במקרה זה?

12 ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = -0.15Q + 50$,
 ופונקציית עלות שולית $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$.
 מהי הכמות שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?

13 ליצרן פונקציית ביקוש $Q = \frac{5000 - 50P}{3}$,
 ופונקציית עלות $TC(Q) = 200 + 4Q$.
 מהי הכמות, Q , שעל היצרן לייצר, על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
 מהו המקסימום במקרה זה?

14 ליצרן פונקציית עלות שולית $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$.
 מצאו את פונקציית העלות, אם ידוע שכאשר הכמות המיוצרת היא $Q = 10$,
 אז העלות הכוללת היא 225 ₪.

15 ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהרווח המקסימלי מתקבל כאשר הפדיון השולי שווה להוצאה השולית. הסבר את המשמעות הגרפית.

ב. הוכיחו שאם מחיר המוצר קבוע, אז הרווח המקסימלי מתקבל כאשר ההוצאה שולית שווה למחיר המוצר.

16 $C(x)$ – פונקציית הוצאות, $C'(x)$ – הוצאות שוליות, $\frac{C(x)}{x}$ – הוצאות ממוצעות.

א. האם ייתכן שהוצאה שולית קבועה, למרות שהוצאה ממוצעת משתנה?

ב. האם ייתכן להפך?

ג. הוכיחו כי ההוצאה הממוצעת היא פונקציה עולה אם ורק אם ההוצאה השולית גדולה מן ההוצאה הממוצעת.

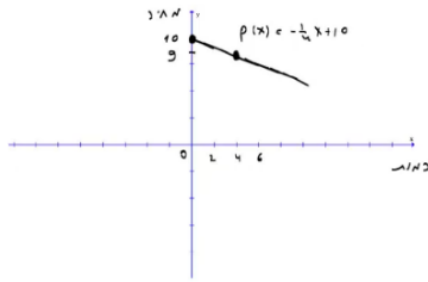
17 מפעל המייצר מוצר מסוים משתמש בשני גורמי הייצור.
 נסמן את מחירי גורמי הייצור, ליחידה, ב- p_1 וב- p_2 , בהתאמה.
 אם נשתמש ב- x יחידות מג"י אחד וב- y יחידות מג"י 2,
 המפעל מייצר $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ יחידות. תקציב המפעל A ₪.

א. הוכיחו כי באילוץ התקציב, הייצור מקסימלי

$$\text{כאשר מתקיימת הנוסחה } \frac{x}{y} = \frac{p_2^2}{p_1^2}.$$

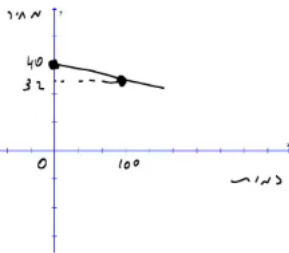
ב. חשבו x ו- y , עבורם הייצור מקסימלי, אם נתון:
 $p_1 = 100$ ₪, $p_2 = 372,000$ ₪, $A = 3,000$.

תשובות סופיות

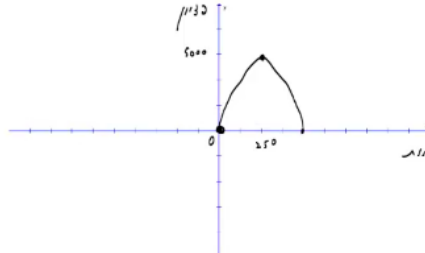


(1) א. 9 ב. 7 ג. 16 ה. $x(p) = 40 - 4p$ ד.

(2) א. $R(x) = -0.6x^2 + 120x$, בתחום: $x \geq 0$ ב. 2,160 ג. 2,160



(3) א. $x \geq 0$ ב. ג.



(4) א. $x \geq 0$ ב. פונקציית הפדיון: $R(x) = -0.04x^2 + 100x$

הפדיון הממוצע: $AR(x) = -0.4x + 100$, $x > 0$ ג. $R'(x) = -0.08x + 100$

ד. 1,250; הפדיון המקסימלי: 62,500.

(5) א. פונקציית הפדיון: $R(x) = -6x^3 + 240x^2 + 1800x$

הפדיון השולי: $R'(x) = -18x^2 + 480x + 1800$ ב. לא.

ג. 30; הפדיון המקסימלי: 108,000.

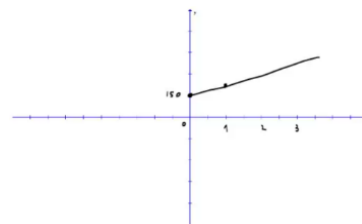
(6) א. $33\frac{1}{3}$ ב. $Q\left(33\frac{1}{3}\right) = 10 \cdot 33\frac{1}{3} - \frac{33\frac{1}{3}^2}{5}$

ג. $-3\frac{1}{3}$; העלאת המחיר ביחידה אחת – תקטין את הביקוש ב-3.33 יח', בערך.

ההוצאות הקבועות הן הוצאות המפעל,

גם כאשר הוא אינו מייצר. ב. 170

ג. 250 ד. $MC(x) = 5$



(7) א.

(8) א. 21.6 ב. 100 ג. 18 ש; אם המפעל יעלה את הייצור ביחידה אחת, מ-100 ל-101, העלות הכוללת שלו תגדל ב-18 ש בערך.

(9) א. $C(100) = 1240$, $C(101) = 1250.804$ ב. 10.8

ג. בערך הסכום שיעלה למפעל לייצר יחידה נוספת. ד. גדל.

(10) הכמות: 800, המקסימום: 38,200.

(11) הכמות: 5, המקסימום: -250.

(12) 25**(13)** הכמות : 800, המקסימום : 38,200.

(14) $TC(Q) = 0.02Q^3 + 20Q + 5$

(15) שאלת הוכחה.**(16)** א. כן. ב. לא. ג. שאלת הוכחה.**(17)** א. שאלת הוכחה. ב. $x = 4, y = 3600$.

בעיות קיצון כלכליות מסוג שני

שאלות

- 1) יצרן מכונות כביסה מוכר 500 מכונות בשבוע, במחיר של \$225 למכונה. עלות הייצור למכונת כביסה אחת היא \$125. סקר שוק מראה, שעל כל הוזלה של \$5 במחיר – מספר המכונות הנמכרות בשבוע עולה ב-50.
 - א. מהו המחיר שהיצרן צריך לקבוע למכשיר, על מנת להגיע לרווח מקסימלי?
 - ב. מהן ההוצאות במצב זה? האם בהכרח אלו ההוצאות המינימליות? נמקו.
- 2) מחיר חבילת זמן אוויר בחברת סלולר הוא 100 ₪ ל-200 דקות. בסקר שוק שערכה החברה התגלה, כי על כל הוזלה של 2 ₪ בתשלום, לקוחות מנצלים 10 דקות זמן אוויר נוספות.

לאור תוצאות הסקר, איזו חבילה (כלומר, **מה המחיר שיש לקבוע ולכמה דקות**) כדאי לחברה להציע ללקוחותיה, כדי להגיע להכנסה מקסימלית?
- 3) אמן מייצר תכשיטים, בעלות של 30 ₪ עבור כל תכשיט. הוא מצליח למכור 100 תכשיטים, כאשר מחירם 40 ₪ לתכשיט. על כל עלייה של 2 ₪ במחיר, הוא מוכר 4 תכשיטים פחות.
 - א. מצאו כמה תכשיטים האמן צריך לייצר, כדי שהרווח שלו יהיה מקסימלי.
 - ב. באיזה מחיר ימכור האמן כל תכשיט במצב זה?
 - ג. מהי עלות הייצור של האמן (עבור כל התכשיטים) במצב זה?
- 4) חברת 'טיול נעים' משכירה אוטובוס ל-30 תיירים, שכל אחד מהם משלם 100 דולר. על כל תייר נוסף שמצטרף, החברה מסכימה להוריד את התשלום לכל אחד מהתיירים, בשני דולר.

מה צריך להיות מספר התיירים, כדי שלחברה יהיה הרווח הגדול ביותר?
- 5) מחיר שליחת SMS ברשת 'סלקום' הוא 50 אג', ומספר ה-SMSים החודשי הממוצע הוא 200. על כל 5 אג' ש'סלקום' מעלה – יורד מספר ה-SMSים החודשי הממוצע בעשר. מצאו מה צריך להיות מחיר שליחת SMS, כדי שהכנסתה של 'סלקום' תהיה מקסימלית.
- 6) קולנוע 'חן' מוכר כל שבוע 60 כרטיסים לסרטי תלת-מימד במחיר של 45 ₪ לכרטיס. כל הורדה של מחיר הכרטיס בחצי שקל גורמת למכירת שני כרטיסים נוספים בשבוע.

מה צריך להיות מחיר הכרטיס, כדי שהכנסתו של בית הקולנוע תהיה בגדולה ביותר? מצאו גם מהי ההכנסה המקסימלית.

- (7) הייצור של בובת 'בוב ספוג' עולה לחברת 'ניקולדיאון' 25 ₪. אם החברה מוכרת את הבובה ב-45 ₪, היא מצליחה למכור 200 בובות ליום. על כל חצי שקל שהחברה מורידה ממחיר הבובה, היא מצליחה למכור 10 בובות נוספות ליום. מהו הרווח היומי המקסימלי של החברה?
- (8) חברת 'אופיס דיפו' רוכשת מספר מסוים של מוצרים ב-800 ₪. 5 מהמוצרים היא מוכרת ברווח של 20% לכל מוצר, ואת שאר המוצרים היא מוכרת ברווח של 2 ₪ לכל מוצר. הוכיחו שהרווח של החברה, בעסקה כזו, הוא לפחות 70 ₪.
- (9) חברת BMX מוכרת 300 זוגות אופניים בחיר של 500 ₪ לזוג אופניים. לכל x זוגות אופניים נוספים שהיא מוכרת, היא מורידה – את מחירם בלבד – ב- $2x$ ₪ לזוג אופניים, ואילו את מחירם של 300 הזוגות הראשונים היא מורידה רק ב- x ₪ לזוג אופניים. מה מספר זוגות האופניים שעל החברה למכור, על מנת שהכנסתה תהיה מקסימלית?

תשובות סופיות

- (1) א. 200 ב. \$93,750 ; לא, כי תמיד ניתן לייצר פחות וכך להקטין הוצאות.
- (2) 70 ₪ ל-350 דקות.
- (3) א. 60 ב. 60 ג. 1,800 ₪
- (4) 40
- (5) 75 אג'.
- (6) מחיר הכרטיס : 30 ₪, ההכנסה המקסימלית : 3,600 ₪.
- (7) 4,500 ₪.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) 350

בעיות קיצון יסודיות עם מספרים

שאלות

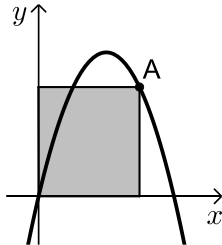
- (1) נתונים שלושה מספרים שסכומם 24. המספר הראשון שווה למספר השני. מצאו מהם המספרים, אם ידוע שמכפלתם מקסימלית.
- (2) מצאו את המספר החיובי, שאם נוסיף לו את המספר ההופכי לו, הסכום המתקבל יהיה מינימלי.
- (3) נתונים שלושה מספרים שסכומם הוא 36. ידוע שמספר אחד זהה לשני.
 - א. מה צריכים להיות שלושת המספרים כדי שמכפלתם תהיה מקסימלית?
 - ב. כיצד תשתנה התוצאה אם מספר אחד יהיה גדול פי 2 מהשני במקום שווה לו?
 - ג. באיזה מקרה תהיה מכפלה גדולה יותר?
- (4) x ו- y הם שני מספרים המקיימים $x + 6y = 60$.
 - א. הביעו את y באמצעות x .
 - ב. מה צריכים להיות המספרים x ו- y , כדי שמכפלת ריבועיהם תהיה מקסימלית?
 - ג. מהי המכפלה הנ"ל?

תשובות סופיות

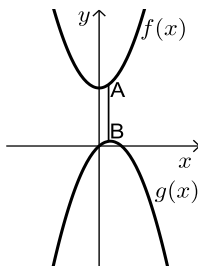
- (1) 8,8,8
- (2) 1
- (3) א. 12, 12, 12 ב. 8, 12, 16 ג. מקרה א'.
- (4) א. $y = 10 - \frac{x}{6}$ ב. $x = 30, y = 5$ ג. $M = 22500$

בעיות קיצון בפונקציות וגרפים

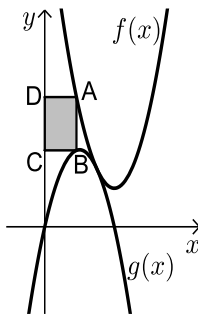
שאלות



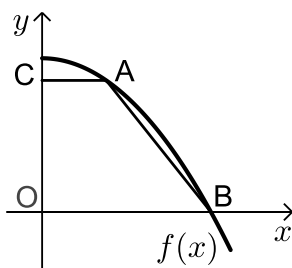
- (1) נתונה הפונקציה $f(x) = 6x - x^2$. מנקודה A שעל הפונקציה ברביע הראשון הורידו אנכים לצירי השיעורים כך שנוצר מלבן כמתואר בשרטוט. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



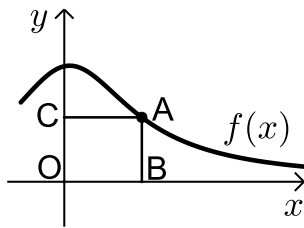
- (2) נתונות הפונקציות: $f(x) = x^2 + 12$ ו- $g(x) = 2x - x^2$. כמתואר: הנקודות A ו-B נמצאות בהתאמה על הגרפים של הפונקציות: $f(x)$ ו- $g(x)$, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.



- (3) באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = x^2 - 8x + 18$ ו- $g(x) = -x^2 + 4x$. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . מעבירים אנכים מהנקודות A ו-B לציר ה- y כך שנוצר מלבן (המסומן). נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .
א. הביעו באמצעות t את שטח המלבן המסומן.
ב. מצאו את ערכו של t עבורו שטח המלבן הוא מקסימלי.
ג. מה יהיה שטח המלבן במקרה זה?



- (4) נתונה הפונקציה $f(x) = 36 - x^2$. על גרף הפונקציה ברביע הראשון מסמנים נקודה A. מהנקודה A מעבירים ישר, המקביל לציר ה- x , שחותך את ציר ה- y בנקודה C. הנקודה B היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x ו-O ראשית הצירים.
א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי ששטח הטרפז ABOC יהיה מקסימלי?
ב. מה יהיה שטח הטרפז במקרה זה?

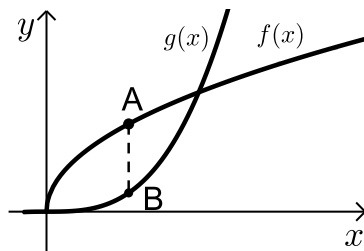


(5) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x+12}{x^2+3}$, בתחום $x \geq 0$.

נקצה נקודה A על גרף הפונקציה וממנה נוריד אנכים לצירים, כך שנוצר המלבן ABCO, כמתואר באיור.

א. מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, עבורם שטח המלבן יהיה מקסימלי.

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, עבורם שטח המלבן יהיה מינימלי בתחום הנ"ל.



(6) נתונות הפונקציות $f(x) = 2\sqrt{x}$ ו- $g(x) = \frac{1}{3}x^3$.

את הנקודה A שעל $f(x)$ חיברו עם הנקודה B, שנמצאת מתחתיה על $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה-y.

מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?

תשובות סופיות

(1) $A(4,8)$

(2) $A(0.5, 12.25)$

(3) א. $S = 2t^3 - 12t^2 + 18t$ ב. $t = 1$ ג. $S = 8$

(4) א. $A(2, 32)$ ב. $S = 128$

(5) א. $A(2, 2)$ ב. $A(0, 4)$

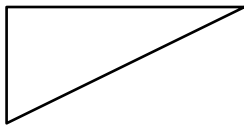
(6) $A(1, 2)$

בעיות קיצון בהנדסת המישור

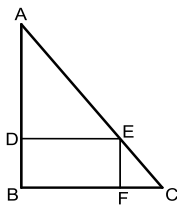
שאלות



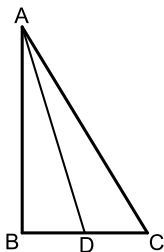
- 1) אדם מתכנן לבנות מרפסת בביתו ורוצה להציב מעקה סביב המרפסת. שטח המרפסת המתוכנן הוא 24 מ"ר. מחיר מעקה בחזית המרפסת (BC) הוא 120 ₪ למטר, ומחיר מעקה בצדי המרפסת הוא 40 ₪ למטר. מה צריכים להיות ממדי המרפסת, כדי שמחיר המעקה יהיה מינימלי?



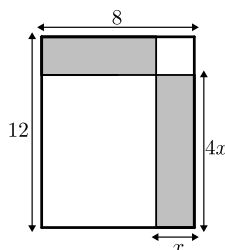
- 2) במשולש ישר זווית סכום אורכי הניצבים הוא 12 ס"מ. מה צריך להיות אורך כל ניצב, כדי ששטח המשולש יהיה מקסימלי?



- 3) במשולש ישר זווית ABC ($\angle B = 90^\circ$) הנקודה E נמצאת על היתר AC, כך שהמרובע EDBF הוא מלבן. נתון: $AB = 20$ ס"מ, $BC = 16$ ס"מ. מצאו את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.



- 4) במשולש ישר הזווית ABC ($\angle B = 90^\circ$), AD הוא תיכון לניצב BC. ידוע כי סכום אורכי הניצבים הוא 20 ס"מ. מצאו מה צריכים להיות אורכי הניצבים, עבורם אורך התיכון AD יהיה מינימלי.



- 5) נתון מלבן שאורכי צלעותיו הם 8 ס"מ ו-12 ס"מ, כמתואר באיור. מקצים קטעים באורכים של x ו- $4x$ על צלעות המלבן, כך שנוצרים המלבנים המקווקווים. מצאו את x עבורו סכום שטחי המלבנים הוא מינימלי.

תשובות סופיות

- (1) $4 \cdot 6$
- (2) א. 6 ס"מ ו-6 ס"מ ב. 18 סמ"ר ג. $8.48 \approx 6\sqrt{2}$ ס"מ.
- (3) 80 סמ"ר $S =$
- (4) 4 ס"מ, 16 ס"מ.
- (5) $x = 2.75$

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 11 - מציאת מספר הפתרונות של משוואה (משפטי קושי ורול)

תוכן העניינים

1. מציאת מספר הפתרונות של משוואה 124
2. משפט רול 126

מציאת מספר הפתרונות של משוואה

שאלות

הוכיחו שלמשוואות בשאלות 1-3 יש בדיוק פתרון אחד :

$$x^3 + 4x - 1 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 = -\ln x \quad (2)$$

$$-4x^3 + 21x^2 - 48x + 28 = 0 \quad (3)$$

(4) נתונה המשוואה $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ונתון כי $b^2 < 3ac$. מהו מספר הפתרונות של המשוואה? הוכיחו זאת.

עבור כל אחת מהמשוואות 5-6, מצאו את מספר הפתרונות ופתרו אותה :

$$e^{x-1} = x \quad (5)$$

$$\ln(x+5) - 4 = x \quad (6)$$

הוכיחו שלמשוואות בשאלות 7-9 יש בדיוק שני פתרונות :

$$1 + 4x^4 = 8x^3 \quad (9) \quad 4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0 \quad (8) \quad e^x - 5x = 0 \quad (7)$$

בכל אחת מהמשוואות 10-12, מצאו קשר בין הפרמטרים, על מנת שלמשוואות יהיה בדיוק פתרון אחד (הניחו שכל הפרמטרים שונים מאפס) :

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (10)$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (11)$$

$$(n > 4, \text{ odd}) \quad ax^n + bx^{n-2} + cx^{n-4} - d = 0 \quad (12)$$

תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) פתרון יחיד.

(5) $x=1$ (6) $x=-4$

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) $b^2 - 4ac = 0$ (11) $4b^2 - 12ac < 0$ (12) $b^2(n-2)^2 - 4anc(n-4) < 0$

משפט רול

(1) בדקו האם הפונקציה $f(x)$ בקטע הנתון מקיימת את תנאי משפט רול,

ומצאו את כל ערכי c המקיימים את מסקנת משפט רול:

א. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ $[0, 2]$

ב. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$ $[-1, 1]$

(2) נתון ש- $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$.

הראו ש- $f(1) = f(5)$, אך אין נקודה c , כך ש- $f'(c) = 0$.
האם הדבר סותר את משפט רול? נמקו.

(3) הוכיחו שלמשוואה $x^2 + x^3 + 5x = 1$ יש לפחות פתרון אחד, ולכל היותר פתרון אחד.

(4) נתון כי f גזירה פעמיים.

נתון כי f פונקציה זוגית שיש לה מינימום מקומי בנקודה $x_0 = 2$.
הוכיחו כי יש שתי נקודות בהן הנגזרת השנייה מתאפסת.

תשובות סופיות

(1) א. כן, $1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. ב. כן, $2 - \sqrt{3}$.

(2) לא, מכיוון שהפונקציה לא רציפה בנקודה $x = 3$.

(3) שאלת הוכחה.

(4) שאלת הוכחה.

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 12 - אינטגרלים מידיים ואינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

תוכן העניינים

1. אינטגרלים מידיים 127
2. אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים" 130
3. מציאת פונקציה קדומה 131

אינטגרלים מידיים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 12-1 :

(פתירה על ידי הכלל : $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$)

$$\int \frac{1}{x^2} dx \quad (3) \qquad \int x^4 dx \quad (2) \qquad \int 4dx \quad (1)$$

$$\int 4x^{10} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5) \qquad \int \sqrt{x} dx \quad (4)$$

$$\int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9) \qquad \int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x} \right) dx \quad (8) \qquad \int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12) \qquad \int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx \quad (11) \qquad \int (x^2+1)(x+2) dx \quad (10)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 20-13 :

(פתירה על ידי הכלל : $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a \cdot (n+1)} + c$)

$$\int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15) \qquad \int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14) \qquad \int (4x+1)^{10} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18) \qquad \int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17) \qquad \int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad (20) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} \quad (19)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 21-26 :

$$\left(\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c : \text{פתירה על ידי הכלל} \right)$$

$$\int \left(1 + \frac{1}{x} \right)^2 dx \quad (23)$$

$$\int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{1}{4x} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26)$$

$$\int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25)$$

$$\int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 27-29 :

$$\left(\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c : \text{פתירה על ידי הכלל} \right)$$

$$\int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx \quad (29)$$

$$\int (e^{x+1})^2 dx \quad (28)$$

$$\int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27)$$

$$\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx : \text{חשבו את האינטגרל} \quad (30)$$

$$\left(\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \ln a} + c : \text{פתירה על ידי הכלל} \right)$$

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx : \text{חשבו את האינטגרל} \quad (31)$$

תשובות סופיות

- $$\begin{aligned} & 4x + c \quad (1) & \frac{x^5}{5} + c \quad (2) & -\frac{1}{x} + c \quad (3) \\ & \frac{x^{1.5}}{1.5} + c \quad (4) & -\frac{2}{\sqrt{x}} + c \quad (5) & \frac{4x^{11}}{11} + c \quad (6) \\ & \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c \quad (7) & -\frac{1}{x^3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2} + c \quad (8) & \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c \quad (9) \\ & \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c \quad (10) & -\frac{1}{x} + 2x + \frac{x^3}{3} + c \quad (11) & \frac{x^{1.5}}{1.5} + \frac{x^{0.5}}{0.5} + c \quad (12) \\ & \frac{(4x+11)^{11}}{44} + c \quad (13) & \frac{(x-1)^{21}}{21} + c \quad (14) & -\frac{1}{(x-2)^4} + c \quad (15) \\ & \frac{3}{16} \sqrt[3]{(4x-10)^4} + c \quad (16) & 10\sqrt{2x+4} + c \quad (17) \\ & -\frac{1}{2(x-2)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + c \quad (18) & -\frac{2}{3} \left((x-1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}} \right) + c \quad (19) \\ & \frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} - x + c \quad (20) & \frac{\ln|x|}{4} + c \quad (21) & \ln|x| + x + \frac{x^2}{2} + c \quad (22) \\ & x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c \quad (23) & \frac{\ln|4x-1|}{4} + c \quad (24) & x + \ln|x+2| + c \quad (25) \\ & 4(x - 1.75\ln|x+2|) + c \quad (26) & \frac{e^{4x}}{4} - e^{-x} + c \quad (27) & \frac{e^{2x+2}}{2} + c \quad (28) \\ & 8e^{\frac{x}{2}} - \frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4} + c \quad (29) & \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} + \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)} + \frac{(200)^x}{\ln(200)} + c \quad (30) \\ & -\left(x - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right) + c \quad (31) \end{aligned}$$

אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

שאלות

הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$\int \frac{1}{x \ln x} dx$ (3)	$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx$ (2)	$\int \frac{2x}{x^2+1} dx$ (1)
$\int e^{-2x^2} x dx$ (6)	$\int e^{x^2} 2x dx$ (5)	$\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1} dx$ (4)
$\int 2x\sqrt{x^2+1} dx$ (9)	$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ (8)	$\int \frac{\ln x}{x} dx$ (7)
	$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$ (11)	$\int x^2 \sqrt{x^3+4} dx$ (10)

תשובות סופיות

$\ln \ln x + c$ (3)	$\frac{1}{3} \ln x^3+1 + c$ (2)	$\ln x^2+1 + c$ (1)
$-\frac{e^{-2x^2}}{4} + c$ (6)	$e^{x^2} + c$ (5)	$e^2 \ln e^x+1 + c$ (4)
$\frac{2}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} + c$ (9)	$2\sqrt{x^2+1} + c$ (8)	$\frac{1}{2} (\ln x)^2 + c$ (7)
	$\frac{2}{3} (\ln x)^{\frac{3}{2}} + c$ (11)	$\frac{2}{9} (x^3+4)^{\frac{3}{2}} + c$ (10)

מציאת פונקציה קדומה

שאלות

- (1) נתונה הנגזרת $f'(x) = 2x - \sqrt[3]{4x}$.
 ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(2, 3)$.
 מצאו את הפונקציה.
- (2) נתונה הנגזרת $f'(x) = \sqrt[3]{5x+7}$.
 ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 4$.
 מצאו את הפונקציה.
- (3) נתונה הנגזרת $f'(x) = \frac{10}{\sqrt[5]{x+1}} + (x-1)^2$.
 ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -6$.
 מצאו את הפונקציה.
- (4) נתונה הנגזרת $f'(x) = 2x - 6$.
 ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.
 מצאו את הפונקציה.
- (5) נתונה הנגזרת $f'(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} + 2$.
 שיפוע המשיק לפונקציה, בנקודה שבה $y = 5\frac{2}{3}$, הוא 3.
 מצאו את הפונקציה.
- (6) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה $f''(x) = 6x + 6$.
 שיפוע הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא -12,
 וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1.
 מצאו את הפונקציה.
- (7) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה $f''(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$.
 המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא הישר $y = -4$.
 מצאו את הפונקציה.

(8) נתונה פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $f(0) = 0$ וכן לכל x_0 ממשי:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = |x_0|$$

- א. מצאו את תחומי הרציפות של הפונקציה.
- ב. חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ או קבעו שהוא אינו קיים.
- ג. מצאו כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- ד. מצאו את כל נקודות הפיתול של הפונקציה.
- ה. תהי $G(x)$ פונקציה קדומה של $|x|$. חשבו את הנגזרת $(G(x) - f(x))'$.

תשובות סופיות

$$f(x) = x^2 - \frac{3}{16} \sqrt[3]{(4x)^4} + 2 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{3}{20} \sqrt[3]{(5x+7)^4} - 12 \frac{3}{20} \quad (2)$$

$$f(x) = 12 \frac{1}{2} \sqrt[5]{(x+1)^4} + \frac{1}{3} (x-1)^3 - 18 \frac{1}{6} \quad (3)$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 14 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{(x+2)^3} - \frac{2}{3} \sqrt{(x-1)^3} + 2x - 3 \quad (5)$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10 \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{4}{x} + 3x + 2 \quad (7)$$

(8) א. רציפה לכל x . ב. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. ג. נקודת חיתוך אחת $(0,0)$.

ד. נקודת פיתול אחת $(0,0)$. ה. 0.

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 13 - אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים.....133

אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-12 :

$$\int x^4 \ln x dx \quad (2) \qquad \int x e^x dx \quad (1)$$

$$\int x^2 e^{-4x} dx \quad (4) \qquad \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (3)$$

$$\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (6) \qquad \int \ln x dx \quad (5)$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (8) \qquad \int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (7)$$

$$\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (10) \qquad \int \ln^2 x dx \quad (9)$$

$$\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx \quad (12) \qquad \int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx \quad (11)$$

(13) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int x^n e^x dx$, באשר n טבעי.

(14) חשבו את $\int x^4 e^x dx$.

תשובות סופיות

$$xe^x - e^x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^5}{5} \left(\ln x - \frac{1}{5} \right) + c \quad (2)$$

$$\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c \quad (3)$$

$$-\frac{x^2}{4} e^{-4x} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} x e^{-4x} - \frac{1}{16} e^{-4x} \right) + c \quad (4)$$

$$x \ln x - x + c \quad (5)$$

$$-\frac{1}{3} (x \ln x - x) + c \quad (6)$$

$$\frac{1}{5} \left(\frac{x^2}{2} \ln(x-2) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 4x \ln|x-2| \right) \right) + c \quad (7)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + c \quad (8)$$

$$x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + c \quad (9)$$

$$-\frac{1}{x} \ln x - \frac{2}{x} (\ln x - 1) + c \quad (10)$$

$$\frac{e^x}{x+1} + c \quad (11)$$

$$\frac{2}{9} (x+1)(x+2)^{\frac{9}{2}} - \frac{4}{99} (x+2)^{\frac{11}{2}} + c \quad (12)$$

$$x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \quad (13)$$

$$e^x (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + c \quad (14)$$

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 14 - אינטגרלים בשיטת ההצבה

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת ההצבה 135

אינטגרלים בשיטת ההצבה

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3) \quad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (2) \quad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

$$\int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (6) \quad \int e^{x^2} x^3 dx \quad (5) \quad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (4)$$

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad (9) \quad \int x^3 (3x^2-1)^{14} dx \quad (8) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (12) \quad \int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (11) \quad \int \ln^3 x dx \quad (10)$$

$$\int x^5 \sqrt[3]{x^3+1} dx \quad (15) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} \quad (14) \quad \int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad (13)$$

תשובות סופיות

$$-\frac{1}{x^2+1} + c \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \left(\frac{(\sqrt{x^3+4})^5}{5} - \frac{4}{3} (\sqrt{x^3+4})^3 \right) + c \quad (2)$$

$$2 \left(\frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3} - \sqrt{x^2+1} \right) + c \quad (3)$$

$$-\frac{1}{3(\ln x)^3} + c \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} (x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) + c \quad (5)$$

$$3e^{\sqrt[3]{x}} (\sqrt[3]{x}^2 - 2\sqrt[3]{x} + 2) + c \quad (6)$$

$$\ln \left| \left(x + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}} \right| + c \quad (7)$$

$$\frac{1}{18} \left(\frac{(3x^2-1)^{16}}{16} + \frac{(3x^2-1)^{15}}{15} \right) + c \quad (8)$$

$$\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right| + c \quad (9)$$

$$x(\ln^3 x - 3\ln^2 x + 6\ln x - 6) + c \quad (10)$$

$$\frac{(\ln x)^5}{5} + c \quad (11)$$

$$\ln |\ln(\ln x)| + c \quad (12)$$

$$-\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{1-x^4} - \ln |1-x^4| \right) + c \quad (13)$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1} \right| + c \quad (14)$$

$$\frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^7}{7} - \frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^4}{4} + c \quad (15)$$

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 15 - אינטגרלים של פונקציות רציונליות

תוכן העניינים

- 1. אינטגרלים של פונקציה רציונלית..... 137
- 2. חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית..... 139
- 3. אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית..... 140

אינטגרלים של פונקציה רציונלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4} \quad (3)$$

$$\int \frac{x}{x^2+5x+6} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x} dx \quad (11)$$

$$\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{2-x}{x^2+5x} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36} dx \quad (8)$$

$$\int \frac{5-x}{x^3+x^2} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)} \quad (12)$$

תשובות סופיות

$$\ln|x-4| - \frac{5}{x-4} + c \quad (1)$$

$$-\frac{1}{3(x-6)^6} - \frac{1}{(x-1)^7} + c \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c \quad (3)$$

$$\frac{2}{5} \ln|x| - \frac{7}{5}|x+5| + c \quad (4)$$

$$3 \ln|x+3| - 2 \ln|x+2| + c \quad (5)$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2}|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + c \quad (6)$$

$$\ln|x+1| + 2 \ln|x+2| + 3 \ln|x-3| + c \quad (7)$$

$$\ln|x+3| + \ln|x-3| - \ln|x+2| - \ln|x-2| + c \quad (8)$$

$$\ln|x-2| - \frac{4}{x-2} - \ln|x+2| + c \quad (9)$$

$$6 \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{5}{x} + c \quad (10)$$

$$4 \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + \frac{3}{x+3} + c \quad (11)$$

$$2 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + c \quad (12)$$

חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{3x^3 - 5x^2 + 4x - 2}{x - 1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 8x}{x + 4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{12x^3 - 11x^2 + 6x - 1}{4x - 1} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + x}{(x - 1)^2} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{x^4 - 4x^2 + x + 1}{x^2 - 4} dx \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$x^3 - x^2 + 2x + c \quad (1)$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - x^2 + c \quad (2)$$

$$x^3 - x^2 + x + c \quad (3)$$

$$\frac{x^3}{3} + \ln|x - 1| - \frac{1}{x - 1} + c \quad (4)$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{3}{4} \ln|x - 2| + \frac{1}{4} \ln|x + 2| + c \quad (5)$$

אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} - x} \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} \quad (2)$$

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt[4]{x-1}} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{1}{1 + e^x} dx \quad (4)$$

$$\int \sqrt{1 + e^x} dx \quad (5)$$

תשובות סופיות

$$-1.5 \ln |1 - \sqrt[3]{x}| + c \quad (1)$$

$$6 \left(\frac{(1 + \sqrt[6]{x})^3}{3} - \frac{3(1 + \sqrt[6]{x})}{2} + 3(1 + \sqrt[6]{x}) - \ln |1 + \sqrt[6]{x}| \right) + c \quad (2)$$

$$4 \left(\frac{(1 + \sqrt[4]{x-1})^2}{3} - \frac{3(1 + \sqrt[4]{x-1})^2}{2} + 3(1 + \sqrt[4]{x-1}) - \ln |1 + \sqrt[4]{x-1}| \right) + c \quad (3)$$

$$-\ln |1 + e^x| + x + c \quad (4)$$

$$2\sqrt{1 + e^x} + \ln \left| \frac{\sqrt{1 + e^x} - 1}{\sqrt{1 + e^x} + 1} \right| + c \quad (5)$$

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 16 - האינטגרל המסוים, סכומי רימן

תוכן העניינים

141	1. האינטגרל המסוים
143	2. אי שוויונים עם אינטגרלים
144	3. סכומי רימן

האינטגרל המסוים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-6 :

$$\int_1^4 (x^2 - 4x + 1) dx \quad (1)$$

$$\int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5} dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 x e^{-x} dx \quad (3)$$

$$\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (4)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{כאשר } \int_0^4 f(x) dx \quad (5)$$

$$\int_{-1}^4 \sqrt{4+|x-1|} dx \quad (6)$$

(7) נתונה פונקציה רציפה f . הוכיחו :

$$\text{א. אם } f \text{ זוגית, אזי } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$\text{ב. אם } f \text{ אי-זוגית, אזי } \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

תשובות סופיות

(1) -6

(2) $\ln\left(\frac{15}{8}\right)$

(3) $-2e^{-1} + 1$

(4) $\frac{1}{5}$

(5) $\frac{17}{12}$

(6) $\frac{2}{3}(-16 + 6^{1.5} + 7^{1.5})$

(7) שאלת הוכחה.

אי שוויונים עם אינטגרלים

הוכיחו את אי-השוויונים הבאים:

$$\frac{2}{41} \leq \int_{-1}^3 \frac{dx}{1+x^4} \leq 4 \quad (1)$$

$$6 \leq \int_{-4}^2 \sqrt{1+x^2} dx \leq 6\sqrt{17} \quad (2)$$

$$2 \leq \int_0^2 e^{x^2} dx \leq 2e^4 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}e^{-10} \leq \int_0^{10} \frac{e^{-x}}{x+10} dx \leq 1 \quad (4)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 4}} \leq \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{\ln 3}} \quad (5)$$

$$\frac{2}{9} \leq \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3} \leq \frac{2}{7} \quad (6)$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

סכומי רימן

חשבו את הגבולות בשאלות 1-5:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + \dots + n^4}{n^5} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right\} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right\} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right\} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \dots + \sqrt{2n}}{n^{3/2}} \right\} \quad (5)$$

חשבו את האינטגרלים הבאים על פי ההגדרה (של רימן).

תוכל להיעזר בזהויות הבאות:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n &= 0.5n(n+1) \\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \end{aligned}$$

$$\int_0^1 x^3 dx \quad (8)$$

$$\int_0^1 x^2 dx \quad (7)$$

$$\int_0^1 x dx \quad (6)$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{5} \quad (1)$$

$$\ln 2 \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{4} \quad (3)$$

$$\ln(1+\sqrt{2}) \quad (4)$$

$$\frac{2^{1.5}}{1.5} - \frac{2}{3} \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} \quad (6)$$

$$\frac{1}{3} \quad (7)$$

$$\frac{1}{4} \quad (8)$$

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 17 - שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)

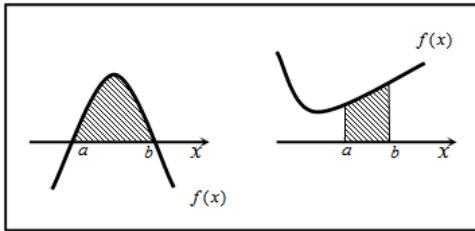
תוכן העניינים

146	1. חישוב שטחים
155	2. חישוב שטחים ביחס לציר ה-y
156	3. אורך קשת

חישוב שטחים

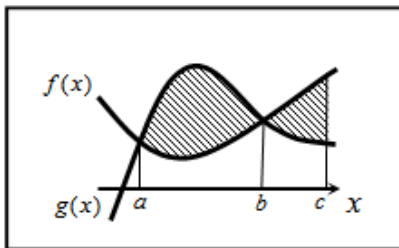
חישוב שטחים באמצעות האינטגרל (מקרים פרטיים)

1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- x :



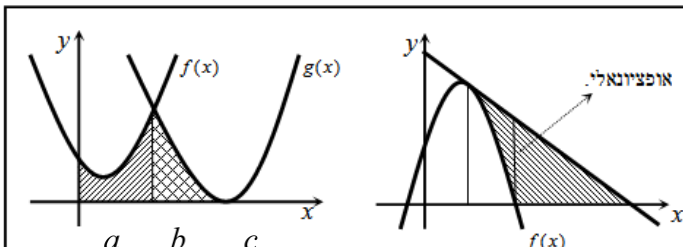
$$S = \int_a^b f(x) dx$$

2. שטח הכלוא בין שני גרפים, כך שגרף אחד כולו מעל השני :



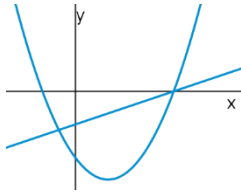
$$\begin{aligned} S_1 &= \int_a^b (g(x) - f(x)) dx \\ S_2 &= \int_b^c (f(x) - g(x)) dx \\ S &= S_1 + S_2 \end{aligned}$$

3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- x :

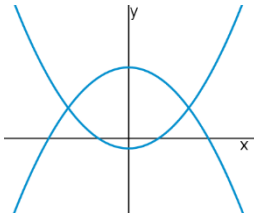


$$S = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c g(x) dx$$

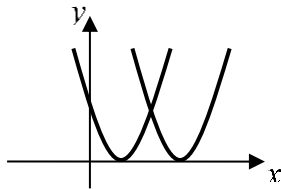
שאלות



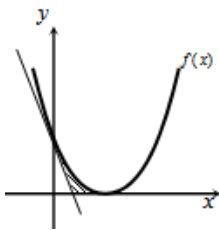
- (1) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 4x - 12$ ו- $g(x) = x - 6$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות.



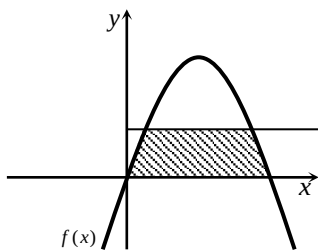
- (2) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 7 - x^2$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות.



- (3) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 6x + 9$.
חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- x .

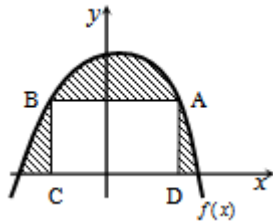


- (4) נתונה הפונקציה $f(x) = (x-2)^2$.
מנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y מעבירים משיק.
א. מצאו את משוואת המשיק.
ב. מצאו את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .
ג. חשבו את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- x (השטח המסומן).



- (5) נתונה הפונקציה $f(x) = kx - x^2$.
הישר $y = 9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.
ידוע כי שיעור ה- x של אחת מנקודות החיתוך הוא $x = 9$.
א. מצאו את ערך הפרמטר k .
ב. מצאו את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.
ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x (השטח המסומן).

6 הנגזרת של הפונקציה $f(x)$, המתוארת באיור שלהלן,



היא $f'(x) = 3 - 2x$. ישר AB, שמשוואתו $y = 6$,

חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו-B.

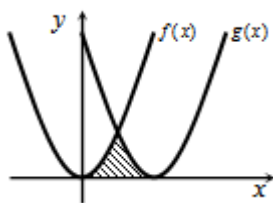
מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- x ,

כך שנוצר מלבן ABCD.

ידוע ששיעור ה- x של הנקודה A הוא 4.

א. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- x .



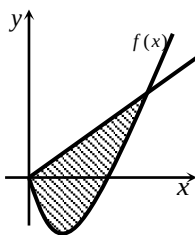
7 באיור שלהלן חותך גרף הפונקציה $f(x) = x^2$,

את גרף הפונקציה $g(x)$, בנקודה שבה $x = 2$.

הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ היא $g'(x) = 2x - 8$.

א. מצאו את הפונקציה $g(x)$.

ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- x (המסומן).



8 באיור שלהלן מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y = 2x$.

נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = 2x - 6$,

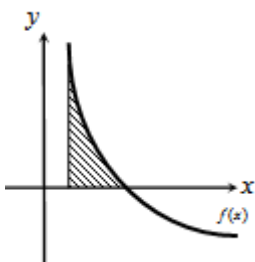
וידוע כי הישר חותך את הפונקציה

בנקודה שבה ערך ה- y הוא 16.

א. מצאו את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן מצאו אותן.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.



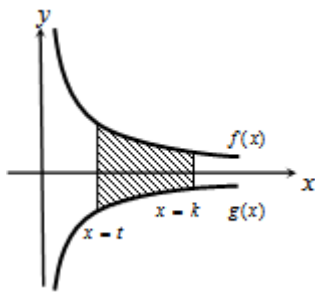
9 גרף הפונקציה $f(x) = \frac{a-x^2}{x^2}$ (a קבוע)

חותך את ציר ה- x בנקודה $(6, 0)$.

א. מצאו את a וכתוב את הפונקציה.

ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,

ציר ה- x והישר $x = 2$.



10 באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} \quad \text{ו-} \quad g(x) = -\frac{3}{\sqrt{x}}$$

העבירו שני ישרים $x=k$ ו- $x=t$, אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.

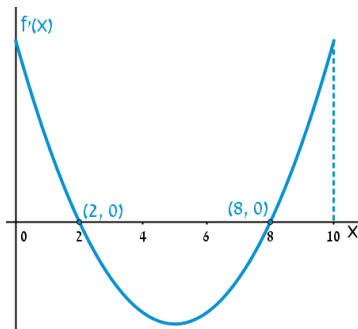
ידוע כי $AB = 2CD$.

א. הראו כי $k = 4t$.

ב. השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות והישרים $x=k$ ו- $x=t$,

הוא $S = 12$.

מצאו את t .



11 הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 10$.

בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.

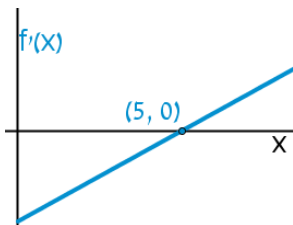
א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,

$$\text{אם } f(5) = 0, f(0) = -4, f(2) = 6$$

וכן $f(10) > 0$.

ב. חשבו את השטח המוגבל ע"י גרף הנגזרת והצירים

ברביע הראשון, עד לנקודה שבה $x = 2$.



12 להלן גרף הפונקציה $f'(x)$.

הגרף המתואר חותך את ציר ה- x

בנקודה אחת בלבד והיא $(5, 0)$.

א. מצאו את התחומים שבהם $f'(x)$ חיובית

ואת התחומים שבהם היא שלילית.

ב. קבעו מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

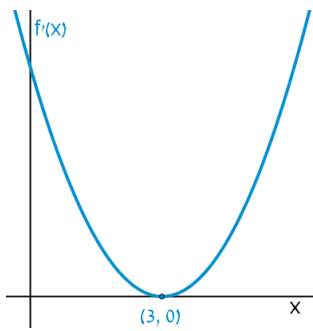
ג. כתבו את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי שיעור ה- y

שלה הוא -2 .

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי גרף הפונקציה

חותך את ציר ה- y כאשר $y = 8$.

ה. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים.



13 הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$ מתוארת באיור.

א. האם ל- $f(x)$ יש נקודות קיצון? נמקו.

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,

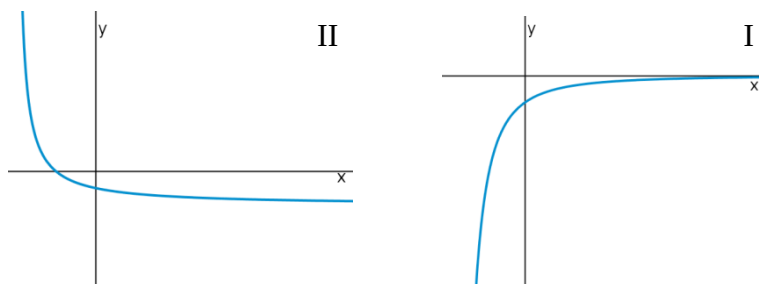
אם ידוע כי $f(3) = 4$ וכי היא חותכת את

ציר ה- y בנקודה שבה $y = -5$.

ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$

והצירים ברביע הראשון.

14 באיורים שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$:

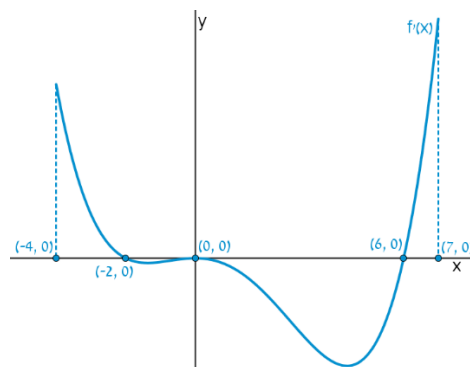


א. זהו איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמקו.

ב. נתון כי $f(10) = -3$ וכי $f(x)$ חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -2$.

מהו השטח המוגבל בין גרף הנגזרת $f'(x)$, הצירים והישר $x = 10$?

15 נתון גרף הנגזרת $f'(x)$:



א. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$, בתחום $-4 \leq x \leq 7$,

לפי הנתונים $f(0) = -2$, $f(-2) = 7.6$ ו- $f(6) = -606.8$.

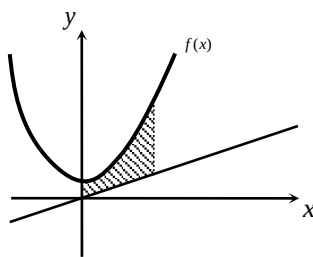
ב. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- x ברביע השלישי.

ג. חשבו את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- x ברביע הרביעי.

פונקציות מעריכיות

אינטגרלים מיידיים של פונקציות מעריכיות

אינטגרלים יסודיים	אינטגרלים של פונקציות מורכבות
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$



16 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^x + e^{ax}}{4}$.

ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה: $\left(1, \frac{e^3+1}{4e^2}\right)$.

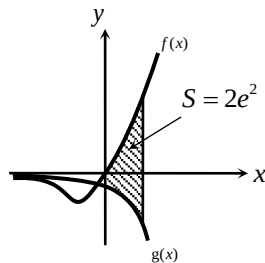
א. מצאו את a וכתוב את הפונקציה.

ב. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)$,

והישר $y = 0.1x$.

חשבו את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר ה- y

והאנך $x = 2$.



17 ענו על הסעיפים הבאים:

א. גזרו את הפונקציה $y = e^x(x-1)$.

ב. באיור שלהלן מתוארים הגרפים של

הפונקציות $f(x) = xe^x$, $g(x) = -e^x$.

העבירו ישר $x = a$, $(a > 0)$ החותך את

הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את

השטח המתואר הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- y והישר.

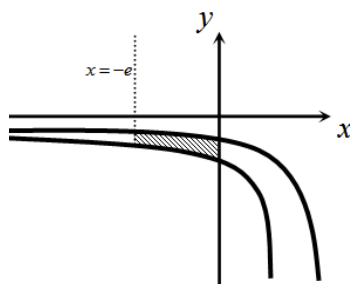
ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$.

מצאו את a .

פונקציות לוגריתמיות

אינטגרלים מיידיים של פונקציות לוגריתמיות

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + c$

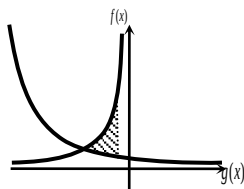


18) באיור שלהלן נתונות הפונקציות $f(x) = \frac{a}{x-1}$

ו- $g(x) = \frac{a-1}{x-2}$, בתחום $x < 0$.

ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x = 3$.

- מצאו את a וכתבו את שתי הפונקציות.
- חשבו את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- y והישר $x = -e$.



19) נתונות הפונקציות $f(x) = -\frac{4}{x}$ ו- $g(x) = \frac{k}{2x+5}$.

גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה- y בנקודה $y = 0.4$.

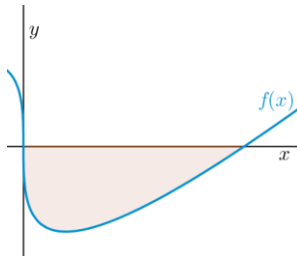
- מצאו את הפונקציה $g(x)$.
- מצאו את נקודת החיתוך של שני הגרפים.
- חשבו את השטח המוגבל על ידי שני הגרפים והישר $x = -1$.

פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

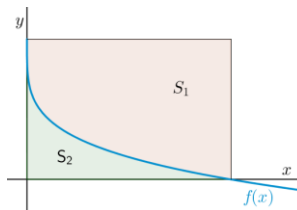
אינטגרלים מיידיים של פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \sqrt[n]{x^m} dx = \int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + c$	$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx = \int (ax+b)^{\frac{m}{n}} dx = \frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a \cdot \left(\frac{m}{n}+1\right)} + c$

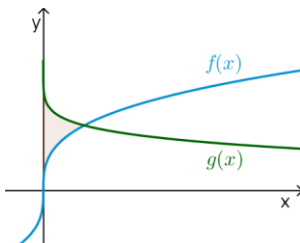
תנאי לקיום האינטגרציה: $\frac{m}{n} \neq -1$.



- (20)** באיור שלהלן מופיע גרף הפונקציה $f(x) = x - 4\sqrt[3]{x}$.
- מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 - חשבו את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.



- (21)** באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x) = 2 - \sqrt[4]{x}$.
- העבירו אנכים לצירים מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים כך שנוצר מלבן.
 - מסמנים את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים ב- S_1 ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב- S_2 .
- מצאו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.



- (22)** באיור שלהלן נתונים הגרפים של הפונקציות $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ו- $g(x) = 2 - \sqrt[6]{x}$.
- מצאו את נקודת החיתוך של הגרפים.
 - חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- y .

תשובות סופיות

- (1) $57\frac{1}{6}$ יח"ש. (2) $21\frac{1}{3}$ יח"ש. (3) $\frac{2}{3}$ יח"ש.
- (4) א. $y = -4x + 4$ ב. $(1, 0)$ ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.
- (5) א. $k = 10$ ב. $(1, 9)$ ג. $81\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (6) א. $f(x) = -x^2 + 3x + 10$ ב. $27\frac{1}{6}$ יח"ש.
- (7) א. $g(x) = (x - 4)^2$ ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (8) א. $f(x) = x^2 - 6x$ ב. $(0, 0)$ ג. $85\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (9) א. $a = 36$, $f(x) = \frac{36 - x^2}{x^2}$ ב. 8 יח"ש.
- (10) א. הוכחה ב. $t = 1$
- (11) א. 10 יח"ש.
- (12) א. חיובית: $x > 5$, שלילית: $x < 5$. ב. עולה: $x > 5$, יורדת: $x < 5$. ג. $\min(5, -2)$ ד. הוכחה ה. 10 יח"ש.
- (13) א. לא. הנקודה $(3, 0)$ היא פיתול מכיוון שהפונקציה עולה לפניה ואחריה. ב. הוכחה ג. 9 יח"ש.
- (14) א. $f(x): \mathbb{R}, f'(x): \mathbb{I}$ ב. 1 יח"ש.
- (15) א. הוכחה ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.
- (16) א. $a = -2$, $f(x) = \frac{e^x + e^{-2x}}{4}$ ב. 1.52
- (17) א. $y' = xe^x$ ב. $a = 2$
- (18) א. $a = 2$, $g(x) = \frac{1}{x-2}$, $f(x) = \frac{2}{x-1}$ ב. $S = 1.76$ יח"ש.
- (19) א. $g(x) = \frac{2}{2x+5}$ ב. $(-2, 2)$ ג. $S = \ln 5 \approx 1.674$ יח"ש.
- (20) א. $(0, 0), (8, 0)$ ב. $S = 16$ יח"ש.
- (21) $\frac{S_1}{S_2} = 4$
- (22) א. $(1, 1)$ ב. $S = \frac{11}{28}$ יח"ש.

חישוב שטחים ביחס לציר ה-y

שאלות

(1) חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $y^2 = -x$ והישר $y = x + 6$.

(2) חשבו את השטח הכלוא בין הפרבולה $x = y^2 + 2$ והישר $y = x - 8$.

תשובות סופיות

(1) $20\frac{5}{6}$

(2) $20\frac{5}{6}$

אורך קשת

שאלות

חשבו את אורך העקום הנתון:

$$(1 \leq x \leq 2), y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2} \quad (1)$$

$$(1 \leq x \leq 8), y = x^{2/3} \quad (2)$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = \frac{x^5}{15} + \frac{1}{4x^3} \quad (3)$$

$$(0 \leq x \leq 3), y = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} \quad (4)$$

$$(0 \leq x \leq 3), y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x) \quad (5)$$

$$(1 \leq x \leq 8), x^{2/3} + y^{2/3} = 4 \quad (6)$$

$$(0 \leq y \leq 4), x = 3y^{3/2} - 1 \quad (7)$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = \ln x \quad (8)$$

תשובות סופיות

$$\frac{33}{16} \quad (1)$$

$$\frac{1}{9} \left\{ \frac{40^{1.5}}{3} - \frac{13^{1.5}}{3} \right\} \quad (2)$$

$$\frac{1097}{480} \quad (3)$$

$$21 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \left\{ 2\sqrt{3} + \frac{2}{3}3^{1.5} \right\} \quad (5)$$

$$9 \quad (6)$$

$$\frac{8}{243} \{82^{1.5} - 1\} \quad (7)$$

$$\left\{ \sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \right| \right\} - \left\{ \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right| \right\} \quad (8)$$

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 18 - פונקציות של שני משתנים

תוכן העניינים

157	1. מבוא לפונקציה של שני משתנים
159	2. קווי גובה לפונקציה של שני משתנים
161	3. משטחים מפורסמים
163	4. נספח - משטחים ממעלה שנייה

מבוא לפונקציה של שני משתנים

שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות :

א. מצאו את תחום ההגדרה D של הפונקציה.

ב. שרטטו סקיצה של הקבוצה D .

$$f(x, y) = \sqrt{5 - x^2 - y^2} + \ln(4y - x^2) \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \sqrt{-x^2 + y^2 + 1} + \frac{x+y}{x-y} \quad (3)$$

$$g(x, y) = \sqrt{x+4y} + \sqrt{x-4y} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x+4y}} + \frac{1}{\sqrt{x-4y}} \quad (5)$$

$$h(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y+4}} \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy} \sqrt{\ln \frac{4}{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4} \quad (7)$$

$$z(x, y) = \frac{4}{\sqrt{1 - |x| - |y|}} \quad (8)$$

$$z(x, y) = \ln \left(\frac{x-4y}{x+4y} \right) \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln [x \ln(y - 4x)] \quad (10)$$

$$u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x+4}} + \frac{1}{\sqrt{y-1}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \quad (11)$$

(ענו על סעיף א בלבד)

תשובות סופיות

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x^2 \leq y \leq \sqrt{5-x^2} \right\} \quad (1)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4, x > 0 \right\} \quad (2)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 - y^2 \leq 1, y \neq x \right\} \quad (3)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x \leq y \leq \frac{1}{4}x \right\} \quad (4)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (5)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid -4 \leq y \leq x^2 - 4, x \geq 0 \right\} \quad (6)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 4 \right\} \quad (7)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid |x| + |y| < 1 \right\} \quad (8)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{4}x < y < -\frac{1}{4}x \text{ or } -\frac{1}{4}x < y < \frac{1}{4}x \right\} \quad (9)$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid [x < 0 \text{ and } 4x < y < 4x+1] \text{ or } [x > 0 \text{ and } y > 4x+1] \right\} \quad (10)$$

$$D = \left\{ (x, y, z) \mid x > -4, y > 1, z > 0 \right\} \quad (11)$$

קווי גובה לפונקציה של שני משתנים

שאלות

בשאלות 1-6, מצאו תחום הגדרה, ושרטטו אותו ואת מפת קווי הגובה/רמה.

$$f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 7-10 שרטטו מפת קווי גובה :

$$f(x, y) = (x-1)^2 + (y+3)^2 \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x-y} \quad (8)$$

$$f(x, y) = 2 \ln x + \ln y \quad (9)$$

$$f(x, y) = \min\{3x, y\} \quad (10)$$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 11-13, שרטטו את קו הגובה k :

$$(k = 0, 4) \quad f(x, y) = (x - y)^2 \quad (11)$$

$$(k = 0, 2) \quad f(x, y) = \min\{y - x^2, x + y\} \quad (12)$$

$$(k = 1) \quad f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 3x - y - 3 & x^2 \geq y \\ -x^2 + 3x + y - 3 & x^2 < y \end{cases} \quad (13)$$

$$(14) \text{ נתונה הפונקציה } f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y & x \leq 1 \\ 2x + y & x > 1 \end{cases}$$

א. שרטטו את קו הגובה $f(x, y) = 0$.

ב. לאילו ערכי C קו הגובה $f(x, y) = C$ הוא קו רציף?
ציירו את קו הגובה במקרה זה.

הערות

* בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.
** קווי גובה = קווי רמה = עקומות אדישות = עקומות שוות ערך.

תשובות סופיות

(1) $x \neq 0$, המישור ללא ציר ה- y .

(2) $x > 0, y > 0$, הרביע הראשון ללא הצירים.

(3) כל המישור.

(4) $x^2 + y^2 \leq 1$, עיגול היחידה.

(5) $y < x^2$

(6) $y \geq 0$, חצי המישור העליון.

לפתרונות מלאים ושרטוטים של שאר השאלות, היכנסו לאתר GooL.co.il

משטחים מפורסמים

שאלות

זהו ושרטטו את המשטחים בשאלות 1-3 :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1 \quad (1)$$

$$z = 5x^2 + 1.25y^2 \quad (2)$$

$$20x^2 + 45y^2 = 180 + 36z^2 \quad (3)$$

זהו ושרטטו את המשטחים הבאים :

$$z = 4x^2 + y^2 + 1 \quad \text{א.}$$

$$z = 3 - x^2 - y^2 \quad \text{ב.}$$

זהו כל אחד מהמשטחים הבאים :

$$25x^2 + 100y^2 + 4z^2 = 100 \quad \text{א.}$$

$$25x^2 + 4y^2 - 50x - 16y - 100z + 41 = 0 \quad \text{ב.}$$

$$x^2 + 4y^2 - 4z^2 + 80z - 404 = 0 \quad \text{ג.}$$

6 מצאו את החיתוך בין המשטח $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ לבין המשטח $z = 12$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

7 ענו על הסעיפים הבאים :

$$\text{א. זהו את המשטח } 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 16x - 4y + 40z + 206 = 0$$

ב. מצאו את נקודות החיתוך של המשטח הנ"ל עם הישר

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+14}{2}$$

8 מצאו את החיתוך בין שני המשטחים $x^2 + y^2 + (z-10)^2 = 24$,

$$\text{ו- } x^2 + y^2 + z^2 = 64$$

הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

9) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. זהו את המשטח $36z^2 + 4x^2 - 9y^2 = 36$ ושרטטו אותו.
 ב. רשמו הצגה פרמטרית של שני ישרים שאינם נמצאים באותו מישור, ושנמצאים כולם על המשטח מסעיף א'.

• להלן נספח עם סיכום של כל המשטחים הנפוצים.

תשובות סופיות

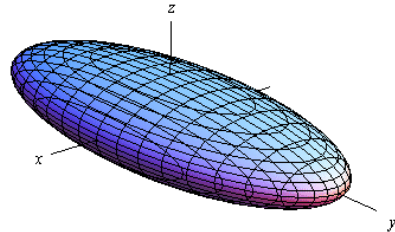
- 1) אליפסואיד.
- 2) פרבולואיד אליפטי הנפתח כלפי מעלה.
- 3) היפרבולואיד חד יריעתי.
- 4) א. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,1)$ ונפתח כלפי מעלה.
 ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,3)$ ונפתח כלפי מטה.
- 5) א. אליפסואיד.
 ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(1,2,0)$ ונפתח כלפי מעלה.
 ג. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו בנקודה $(0,0,10)$.
- 6) החיתוך הוא מעגל $x^2 + y^2 = 25$ שמרכזו בנקודה $(0,0,12)$.
- 7) א. ספירה שמרכזה $(4,1,-10)$ ורדיוסה $\sqrt{14}$.
 נקודות החיתוך הן $A(7,0,-12)$, $B(\frac{59}{5}, -\frac{2}{9}, -\frac{112}{9})$.
- 8) החיתוך הוא המעגל $x^2 + y^2 = 15$ שמרכזו בנקודה $(0,0,7)$.
- 9) א. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו על ציר ה- y .
 ב. $\ell_1 : (x, y, z) = (3t, 2t, 1)$ $\ell_2 : (x, y, z) = (3, 2t, t)$

נספח – משטחים ממעלה שנייה

אליפסואיד

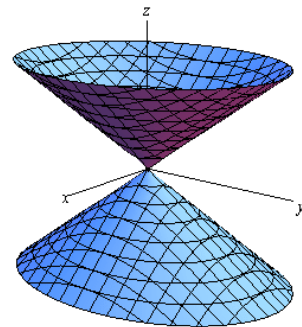
$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות;
כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a = b = c$,
נקבל **כדור** עם רדיוס a והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

חרוט אליפטי

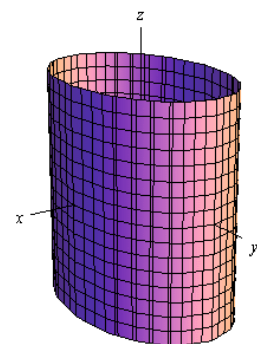
$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית);
החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות.
החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים הנחתכים
בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו
הם היפרבולות.
* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע
לבד באחד האגפים.

גליל אליפטי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים
במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור xz ו-
 yz הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים
מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא
 $x^2 + y^2 = r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים.
* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע

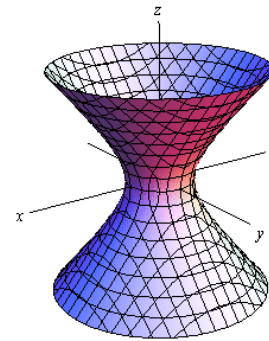


היפרבולואיד חד-יריעתי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

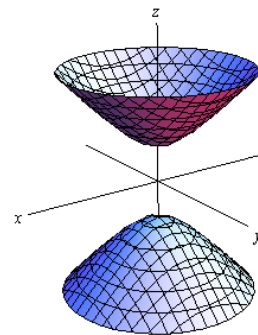
* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים

**היפרבולואיד דו-יריעתי**

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

תיאור: למשטח זה אין חתך במישור xy ; החתכים במישורים מקבילים למישור xy , החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים

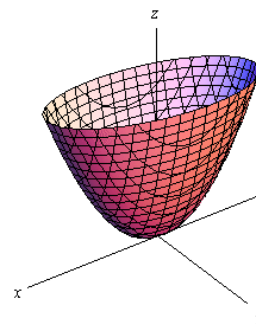
**פרבולואיד אליפטי**

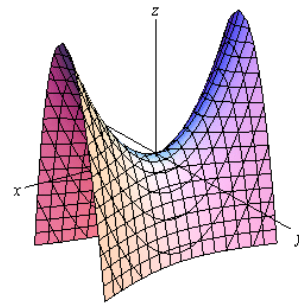
$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$



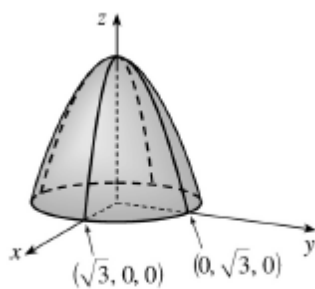
פרבולואיד היפרבולי

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \quad \text{משוואה:}$$

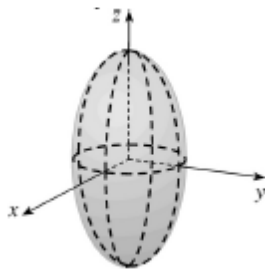
תיאור: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר x -ה- y ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר x -ה- y . החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

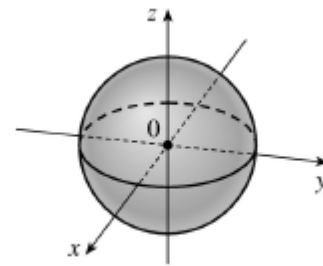
* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$

דוגמאות שונות

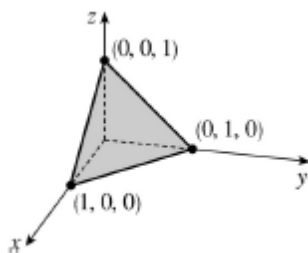
$$z = 3 - x^2 - y^2$$



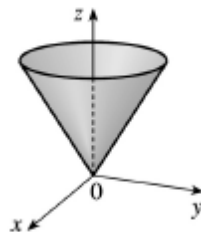
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$



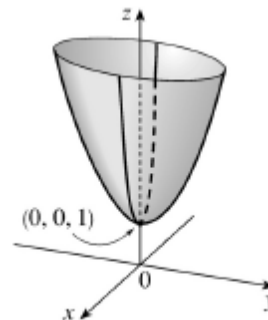
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



$$x + y + z = 1$$



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$z = 4x^2 + y^2 + 1$$

נוסחאות – גבולות

	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow \infty$
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty} = 0$	$\frac{1}{0^+} = \infty, \frac{1}{0^-} = -\infty$	$\frac{1}{\infty} = 0$
$y = e^x$	$e^{-\infty} = 0$	$e^0 = 1$	$e^\infty = \infty$
$y = \ln x$	---	$\ln(0^+) = -\infty$	$\ln(\infty) = \infty$
$y = a^x, a > 1$	$a^{-\infty} = 0$	$a^0 = 1$	$a^\infty = \infty$
$y = a^x, 0 < a < 1$	$a^{-\infty} = \infty$	$a^0 = 1$	$a^\infty = 0$
$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	e	(from right) 1	e
$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	---	e	1
$y = \sqrt{x}$	---	$\sqrt{0^+} = 0$	$\sqrt{\infty} = \infty$
$y = \sqrt[3]{x}$	$-\infty$	$\sqrt[3]{0} = 0$	$\sqrt[3]{\infty} = \infty$

Defined Limits:

$$\infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty(-\infty) = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad \infty \pm a = \infty, \quad \infty \cdot (\pm a) = \pm\infty, \quad \infty / (\pm a) = \pm\infty$$

Undefined Limits:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 19 - נגזרות חלקיות

תוכן העניינים

1. נגזרות חלקיות מסדר ראשון 167
2. נגזרות חלקיות מסדר שני 169

נגזרות חלקיות מסדר ראשון

שאלות

בשאלות 1-6 חשבו את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה הנתונה:

$$f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1) \quad f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4) \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3) \quad (רק f_x)$$

$$f(x, y, z) = xy^2z^3 \quad (6) \quad f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

$$z(x, y) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \quad \text{נתון:} \quad (7)$$

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} \quad \text{הוכיחו כי}$$

$$f(x, y, z) = e^x \left(y^2 - \frac{1}{z} \right) \quad \text{נתון:} \quad (8)$$

$$\text{חשבו: } \frac{\partial f}{\partial x} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial y} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial z} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right)$$

הערת סימון

$$f = f(x, y) \Rightarrow f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 ; \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$$

תשובות סופיות

$$f_y = -6x^2y + 3 \quad f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2 \quad (1)$$

$$f_y = \frac{x^5}{y} \quad f_x = 5x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f_x = 2x \frac{y^4(\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2 \quad f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3 \quad (4)$$

$$f_y = \frac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{(x + y^2)^2} \quad f_x = \frac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{(x + y^2)^2} \quad (5)$$

$$f_z = 3xy^2z^2 \quad f_y = 2xyz^3 \quad f_x = y^2z^3 \quad (6)$$

(7) שאלת הוכחה.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right) = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right) = -2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \left(0, -1, \frac{1}{2} \right) = 4 \quad (8)$$

הערת סימון

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 & f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\ f = f(x, y) &\Rightarrow f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} & f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\ f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} & f_{yx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21} \end{aligned}$$

נגזרות חלקיות מסדר שני

שאלות

בשאלות 1-13 חשבו את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני של הפונקציה הנתונה :

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3(1-y)(x+y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = xy(x-y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = (x-9)(2y-6)(4x-3y+12) \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy}(x+y) \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x+y}(x^2 + y^2) \quad (8)$$

$$f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)} \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2) \quad (10)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \quad (11)$$

$$f(x, y) = \ln(\sqrt[3]{x^2 + y^2}) \quad (12)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (13)$$

14) חשבו $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x,y) = \ln(xy - x^2 - y^2)$.

15) חשבו $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$.

16) חשבו $f'_{xy}(1,1)$, עבור $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

17) נתון: $f(x,y) = \frac{x^2}{\ln y + x}$.

חשבו: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,e)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,e)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,e)$.

הערת סימון

$$\begin{array}{lcl}
 f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 & & f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\
 f = f(x,y) \Rightarrow f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} & & f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\
 f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} & & f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21}
 \end{array}$$

תשובות סופיות

$$f_y = -2x^2y + 10 \quad f_{xx} = 8 - 2y^2 \quad f_x = 8x - 2xy^2 + 4 \quad (1)$$

$$f_{yx} = -4xy \quad f_{xy} = -4xy \quad f_{yy} = -2x^2$$

$$f_y = \frac{x^4}{y} \quad f_{xx} = 12x^2 \ln y \quad f_x = 4x^3 \ln y \quad (2)$$

$$f_{yx} = \frac{4x^3}{y} \quad f_{xy} = \frac{4x^3}{y} \quad f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2}$$

$$f_y = 3y^2 - 6x \quad f_{xx} = 6x \quad f_x = 3x^2 - 6y \quad (3)$$

$$f_{yx} = -6 \quad f_{xy} = 6 \quad f_{yy} = 6y$$

$$f_y = 3y^2 + 3 - 3x - 6y \quad f_{xx} = 6x \quad f_x = 3x^2 + 3 - 3y \quad (4)$$

$$f_{xy} = -3 \quad f_{yy} = 6y - 6$$

$$f_y = x^2 - 2xy \quad f_{xx} = 2y \quad f_x = 2xy - y^2 \quad (5)$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 2x - 2y \quad f_{yy} = -2x$$

$$f_x = 2[8xy - 3y^2 \cdot 1 - 24x - 0 + 57y \cdot 1 + 72 + 0 + 0] \quad (6)$$

$$f_y = 2[4x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2y - 0 - 54y + 57x \cdot 1 + 0 + 27 + 0]$$

$$, f_{yy} = 2[0 - 6x \cdot 1 - 54 + 0 + 0] \quad f_{xx} = 2[8y - 0 - 24]$$

$$f_{xy} = 2[8x \cdot 1 - 6y - 0 + 57 + 0]$$

$$f_y = e^{xy}(x^2 + xy + 1) \quad f_x = e^{xy}(xy + y^2 + 1) \quad (7)$$

$$f_{xx} = e^{xy} \cdot y(xy + y^2 + 1) + (y + 0 + 0) \cdot e^{xy}$$

$$f_{yy} = e^{xy} \cdot x(x^2 + xy + 1) + (0 + x) \cdot e^{xy}$$

$$f_{xy} = e^{xy} \cdot x(xy + y^2 + 1) + (x + 2y) \cdot e^{xy}$$

$$f_y = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2y) \quad f_x = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) \quad (8)$$

$$f_{xx} = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) + (2x + 2)e^{x+y}$$

$$f_{yy} = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2y) + (2y + 2)e^{x+y}$$

$$f_{xy} = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) + 2y \cdot e^{x+y}$$

$$f_y = e^{-x^2-y^2}(4y - 2x^2y - 4y^3) \quad f_x = e^{-x^2-y^2}(2x - 2x^3 - 4xy^2) \quad (9)$$

$$f_{xx} = e^{-x^2-y^2}(-2x)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (2 - 6x^2 - 4y^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{yy} = e^{-x^2-y^2}(-2y)(4y - 2x^2y - 4y^3) + (4 - 2x^2 - 12y^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{xy} = e^{-x^2-y^2}(-2y)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (-4x \cdot 2y)e^{-x^2-y^2}$$

$$f_y = \frac{2y}{1+x^2+y^2} \qquad f_x = \frac{2x}{1+x^2+y^2} \quad (10)$$

$$f_{yy} = \frac{2 \cdot (1+x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2} \qquad f_{xy} = \frac{2y \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \qquad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \qquad f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad (11)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \qquad f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3} \qquad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3} \qquad f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3} \quad (12)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3} \qquad f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$f_y = xz \qquad f_{xz} = y \qquad f_{xy} = z \qquad f_{xx} = 0 \qquad f_x = yz \quad (13)$$

$$f_{zx} = y \qquad f_z = xy \qquad f_{yz} = x \qquad f_{yy} = 0 \qquad f_{yx} = z$$

$$f_{zz} = 0 \qquad f_{zy} = x$$

$$-2 \quad (14)$$

$$-1 \quad (15)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (16)$$

$$\frac{4}{e^2} \left(1 + \frac{1}{e} \right) \quad (17)$$

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 20 - פונקציות סתומות

תוכן העניינים

1. פונקציות סתומות 173

פונקציות סתומות

שאלות

- (1) מצאו את y' , כאשר $x^2 + y^5 = xy + 1$.
חשבו את $y'(0)$.
- (2) מצאו את $y'(1)$, כאשר $e^{xy} + x^2y^2 = 5x - 4$.
- (3) מצאו את $y'(e)$, $y''(e)$, כאשר $2\ln x + \ln y = 1$.
- (4) נתון $z^3 - 2xz + y = 0$ ($z = z(x, y) \geq 0$).
מצאו $z_{xx}(1, 1)$.
- (5) נתונה משוואה $z^3 - 3xyz = 4$ ונקודה $(2, 1, -2)$.
מצאו:
- א. $z_{xx}(2, 1)$
ב. $z_{xy}(2, 1)$
ג. $z_{yy}(2, 1)$

תשובות סופיות

- (1) $y'(0) = \frac{1}{5}$
- (2) $y'(1) = 5$
- (3) $y'(e) = -\frac{2}{e^2}$, $y''(e) = \frac{6}{e^3}$
- (4) $z_x(1, 1) = -16$
- (5) $z_{xx}(2, 1) = z_{xy}(2, 1) = 1$, $z_{yy}(2, 1) = 4$

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 21 - קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

תוכן העניינים

1. קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים.....174

קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-7,

מצאו נקודות קריטיות וסווגו אותן למקסימום, מינימום או אוכף:

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y - x^2 - y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

$$z = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (8)$$

מצאו את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

(9) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשבו את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(10) יצרן מוכר מחשבוני, בארץ ובסין.

עלות הייצור של מחשבון בארץ היא \$6 ועלות ייצור מחשבון בסין היא \$8.

מנהל השיווק אומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ, ואת הביקוש Q_2

למחשבון בסין, על ידי: $Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$, $Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$.

כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבוני, P_1 ו- P_2 ,

על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

(11) נתונה הפונקציה $f(x, y) = x^2 + y^2 + axy$.

א. הוכיחו שהנקודה $(0, 0)$ היא נקודה קריטית.

ב. בעזרת מבחן הנגזרת השנייה, קבעו עבור אילו ערכים של a , הנקודה מסעיף א' היא מקסימום, מינימום, אוכלף, או שלא ניתן לדעת.

תשובות סופיות

- (1) $(-0.5, 1)$ אוכלף; $(1.5, -3)$ מינימום.
- (2) $(1, 2)$ מינימום; $(-1, -2)$ מקסימום; $(-1, 2)$, $(1, -2)$ אוכלף.
- (3) $(0, 0)$ אוכלף; $(1, 1)$ מינימום.
- (4) $(-1, -1)$, $(-1, 1)$ מינימום; $(1, 0)$ מקסימום; $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, 0)$ אוכלף.
- (5) $(0, 2)$ מקסימום.
- (6) $(4, 4)$ מקסימום.
- (7) $(-0.5, 4)$ מקסימום.
- (8) $z = 4$, $z = 3$
- (9) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.
- (10) $P_1 = 10\$$, $P_2 = 12\$$ רווח מקסימלי 288\$.
- (11) א. שאלת הוכחה. ב. עבור $a = -2$, $a = 2$, לא ניתן לדעת; $a < -2$, $a > 2$ אוכלף; $-2 < a < 2$ מינימום.

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 22 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז') 176

קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

שאלות

מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציות בשאלות 1-4, בכפוף לאילוץ הנתון:

$$(1) \quad f(x, y) = x^2 + y^2; \quad 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2$$

$$(2) \quad f(x, y) = x^2 - y^2; \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$(3) \quad f(x, y) = 4x + 6y; \quad x^2 + y^2 = 13$$

$$(4) \quad f(x, y) = x^2 y; \quad x^2 + 2y^2 = 6$$

$$(5) \quad \max \{xy\} \quad \text{s.t.} \quad x + 3y = 12$$

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

$$(6) \quad \max \{2x + y\} \quad \text{s.t.} \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9, \quad x, y \geq 0$$

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

$$(7) \quad \text{מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר } x + 3y = 12,$$

מצאו את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

$$(8) \quad \text{מבין כל הנקודות שעל העקומה } 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2, \text{ מצאו את הנקודות}$$

שמרחקיהן מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחקן

מראשית הצירים הוא מקסימלי.

$$(9) \quad \text{מוישליה קונה בשוק } x \text{ ק"ג מלפפונים ו- } y \text{ ק"ג עגבניות.}$$

התועלת מצריכת הסל, (x, y) , נתונה על ידי $u(x, y) = \ln x + \ln y$.

מחיר ק"ג מלפפונים הוא 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.

מוישליה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$,

והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית.

נסחו ופתרו את בעיית מוישליה.

- 10** דני קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות.
 התועלת מצריכת הסל (x, y) נתונה על ידי $u(x, y) = xy$.
 מחיר ק"ג מלפפונים הוא 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.
 לדני תקציב של 12 ש"ח.
 נסחו ופתרו את בעיית דני.
- 11** עקומת התמורה בין מנגו, (x) , ואננס, (y) , היא $x^2 + y^2 = 13$.
 לדני תועלת $f(x, y) = 4x + 6y$.
 דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) (x, y) על עקומת התמורה,
 המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס.
 נסחו ופתרו את הבעיה.
- 12** ליצרון פונקציית ייצור $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$.
 המחירים ליחידת K ו- L הם $P_K = 2$, $P_L = 1$.
 היצרון נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף (K^*, L^*) ,
 המביא למינימום את העלות.
 נסחו את בעיית היצרון (אל תפתרו).

תשובות סופיות

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm \sqrt{1/7}, \pm \sqrt{1/7}) \quad (1)$$

$$\max(0, \pm 1) \quad \min(\pm 1, 0) \quad (2)$$

$$\max(2, 3) \quad \min(-2, -3) \quad (3)$$

$$\max(\pm 2, 1) \quad \min(\pm 2, -1) \quad (4)$$

$$\max(6, 2) \quad (5)$$

$$\max(9, 36) \quad (6)$$

$$(6, 2) \quad (7)$$

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm \sqrt{1/7}, \pm \sqrt{1/7}) \quad (8)$$

$$\min(\sqrt{32}, \sqrt{8}) \quad (9)$$

$$\max(6, 2) \quad (10)$$

$$\max(2, 3) \quad (11)$$

$$\min\{2K + L\}; \quad \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100 \quad (12)$$

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 23 - קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה

תוכן העניינים

1. קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה 179

קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה

שאלות

- (1) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של הפונקציה $f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור בצורת משולש שקודקודיו הם $(0, 5), (3, 0), (0, 0)$.
- (2) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של הפונקציה $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - 2x + 6y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור בצורת ריבוע שקודקודיו הם $(2, 0), (2, 2), (0, 2), (0, 0)$.
- (3) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של הפונקציה $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ בתחום R , כאשר R הוא העיגול $x^2 + y^2 \leq 4$.
- (4) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של הפונקציה $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור $R = \{(x, y) \mid x + y \geq -3, x \leq 0, y \leq 0\}$.
- (5) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של הפונקציה $f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, 3x \geq -y\}$.

תשובות סופיות

- | | |
|--------------------------------------|----------------------------------|
| (1) מקסימום מוחלט 7. | מינימום מוחלט -11. |
| (2) מקסימום מוחלט 3. | מינימום מוחלט -1. |
| (3) מקסימום מוחלט $\frac{33}{4}$. | מינימום מוחלט $-\frac{1}{4}$. |
| (4) מקסימום מוחלט 6. | מינימום מוחלט -1. |
| (5) מקסימום מוחלט $1 + 6\sqrt{10}$. | מינימום מוחלט $1 - 6\sqrt{10}$. |

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 24 - המרחב R^n

תוכן העניינים

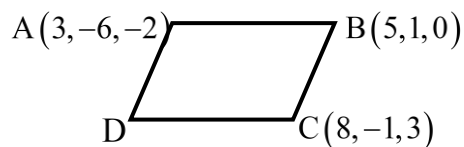
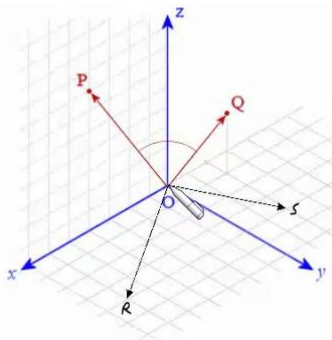
1. וקטורים.....180
2. צירופים ליניאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית.....185

וקטורים

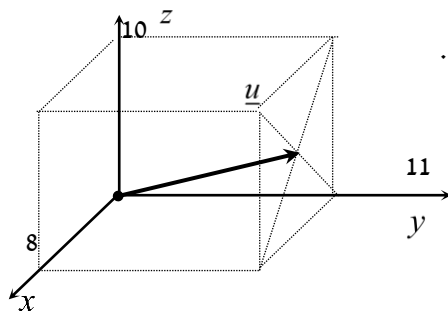
הערת סימון: אנו נסמן את הווקטור u כך: $\underline{u}$. סימונים מקובלים נוספים הם: $\vec{u}, \vec{u}$.
את גודל הווקטור $\underline{u}$ נסמן כך $|\underline{u}|$. סימון מקובל נוסף הוא $\|\underline{u}\|$.
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

שאלות

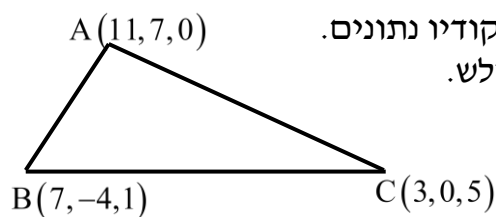
- (1) רשמו את נוסחת כל אחד מהווקטורים $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{S}$ שבאיור. הניחו שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



- (2) בשרטוט הבא נתונה מקבילית, ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים. מצאו את שיעורי הקדקוד D. רמז: היעזרו בנוסחת אמצע קטע.



- (3) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים. מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט.



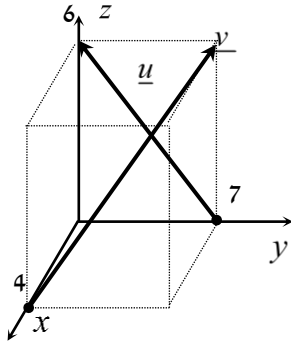
- (4) בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים. מצאו את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

(5) ענו על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצאו את הווקטור $\overrightarrow{EF}$, אם נתונות הנקודות $E(2, 0, -3)$ ו- $F(7, -1, -3)$.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה N , אם נתונה הנקודה $M(0, -4, 1)$

והווקטור $\overrightarrow{MN} = (-1, -1, 9)$.



(6) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים שלפניך.

מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$.

(7) מצאו את x , y ו- z , אם נתון ש- $\underline{u} = \underline{v}$, כאשר $\underline{u} = (4, -1, 2)$,

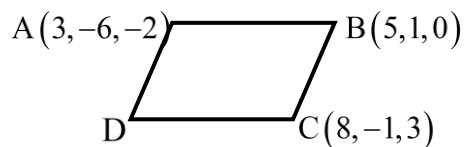
$\underline{v} = (z - 2, y + 1, x - 3)$.

(8) נתונות הנקודות הבאות:

$A(1, 0, 2)$, $B(3, 7, -4)$, $C(6, 9, 0)$, $D(7, 4, 10)$, $E(9, 11, 4)$

א. הראו כי: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$.

ב. האם ניתן לומר כי גם $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$? נמקו.



(9) בשרטוט נתונה מקבילית,

ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.

מצאו את שיעורי הקדקוד D .

* אין להיעזר בפתרון בנוסחת אמצע קטע.

בשאלות 10-16 נתונים הווקטורים $\underline{w} = (2, 6, -5)$, $\underline{v} = (4, -2, -6)$, $\underline{u} = (-3, 1, 4)$.
 * בשאלות 13, 14, 16 הסבירו את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

(10) חשבו:

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u} - 2\underline{v}$

(11) חשבו:

א. $0.25\underline{v} - 0.5\underline{u}$ ב. $\underline{v} - 0.5\underline{u} + 2\underline{w}$

(12) $2\underline{v} - \underline{u} + 4\underline{w}$

(13) $\underline{u} / |\underline{u}|$

(14) $d(\underline{u}, \underline{v})$

(15) $\underline{v} \cdot \underline{u} + 2\underline{w} \cdot \underline{v}$

(16) $\text{proj}(\underline{u}, \underline{v})$

בשאלות 17-19 נתונות הנקודות $A(1, -3, 0)$, $B(4, 2, -1)$, $C(3, -1, 2)$,
 ויש למצוא את הווקטורים:

(17) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$

(18) $2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AB}$

(19) $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$

(20) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:
 $A(-4, 2, 1)$, $B(0, 2, -1)$, $C(-3, -5, 0)$, $D(-7, -5, 2)$.
 הוכיחו כי המרובע הוא מקבילית.

(21) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD :

$$A(1, 2, 0), B(-2, 5, 3), C(-1, 8, 4), D(4, 3, -1)$$

א. הוכיחו כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

(22) חשבו את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$, כאשר :

א. $\underline{u} = (-2, 2, 5), \underline{v} = (4, 0, 1)$

ב. $\underline{u} = (6, -3, 1), \underline{v} = (2, 5, 3)$

ג. $\underline{u} = (-2, 1, 3), \underline{v} = (4, -2, -6)$

תשובות סופיות

$$\vec{P} = (4, 0, 7), \quad \vec{Q} = (-2, 1, 3), \quad \vec{R} = (6, 4, 0), \quad \vec{S} = (-2, 4, 0) \quad (1)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (2)$$

$$\underline{u} = (4, 11, 5) \quad (3)$$

$$M = (7, 1, 2) \quad (4)$$

$$N = (-1, -5, 10) \quad \text{ב.} \quad \overrightarrow{EF} = (5, -1, 0) \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\underline{u} = (0, -7, 6), \quad \underline{v} = (-4, 7, 6) \quad (6)$$

$$z = 6, \quad y = -2, \quad x = 5 \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$\text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. לא.} \quad (8)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (9)$$

$$(-17, 7, 24) \quad \text{ג.} \quad (-2, 1, 3) \quad \text{ב.} \quad (-6, 2, 8) \quad \text{א.} \quad (10)$$

$$(9.5, 9.5, -18) \quad \text{ב.} \quad (2.5, -1, -3.5) \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$(19, 19, -36) \quad (12)$$

$$\left(\frac{-3}{\sqrt{20}}, \frac{1}{\sqrt{20}}, \frac{4}{\sqrt{20}} \right) \quad (13)$$

$$\sqrt{158} \quad (14)$$

$$14 \quad (15)$$

$$\underline{u}^* \quad (16)$$

$$(5, 7, 1) \quad (17)$$

$$(-8, -16, 8) \quad (18)$$

$$(8, 12, 0) \quad (19)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (20)$$

$$\text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. כן.} \quad (21)$$

$$\alpha = 97.277^\circ \quad \text{א.} \quad \alpha = 90^\circ \quad \text{ב.} \quad \alpha = 180^\circ \quad \text{ג.} \quad (22)$$

צירופים לינאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית

בשאלות 1-7 נתונים הווקטורים הבאים:

$$u_1 = (4, 1, 1, 5), \quad u_2 = (0, 11, -5, 3), \quad u_3 = (2, -5, 3, 1), \quad u_4 = (1, 3, -1, 2)$$

- 1) א. האם u_1 הוא צירוף לינארי של u_4 ?
 ב. האם u_1 שייך ל- $Sp\{u_4\}$?
 ג. האם הקבוצה $\{u_1, u_4\}$ תלויה ליניארית?
- 2) א. האם u_3 הוא צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?
 ב. האם u_3 שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?
 ג. האם הקבוצה $\{u_1, u_2, u_3\}$ תלויה ליניארית?
 במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.
- 3) א. האם u_4 הוא צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?
 ב. האם u_4 שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?
 ג. האם הקבוצה $\{u_1, u_2, u_4\}$ תלויה ליניארית?
 במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.
- 4) נתון $v = (4, 12, k, -2k)$.
 א. מה צריך להיות ערכו של k , על מנת שהווקטור v יהיה צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?
 ב. מה צריך להיות ערכו של k , על מנת שהווקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?
 ג. מה צריך להיות ערכו של k , על מנת שהקבוצה $\{u_1, u_2, v\}$ תהיה תלויה ליניארית?
- 5) נתון $v = (a, b, c, d)$.
 א. מה התנאים על a, b, c, d , על מנת שהווקטור v יהיה צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?
 ב. מה התנאים על a, b, c, d , על מנת שהווקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?
 ג. מה התנאים על a, b, c, d , על מנת שהקבוצה $\{u_1, u_2, v\}$ תהיה תלויה ליניארית?

- (6) הביעו את הווקטור $(10, 8, 0, 14)$ כצירוף לינארי של u_1, u_2 ו- u_3 .
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?
- (7) הביעו את הווקטור $(7, 10, -2, 11)$ כצירוף לינארי של u_1, u_2, u_3 ו- u_4 .
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?
- (8) עבור איזה ערכים של a, b, c , הווקטורים הבאים תלויים ליניארית:
 $\{(c, 2, 4), (2, 4, a, 2), (c, b, 6), (b, 2, a)\}$

תשובות סופיות

- (1) א. לא. ב. לא. ג. לא.
- (2) א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_1 = 2u_3 + u_2, u_2 = u_1 - 2u_3$.
- (3) א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_1 = 4u_4 - u_2, u_2 = 4u_4 - u_1$.
- (4) א-ג. $k = -4$.
- (5) $a = 5t + 3s, b = 4t - 13s, c = 7s, d = 7t$.
- (6) אינסוף.
- (7) אינסוף.
- (8) לכל ערך של a, b, c .

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 25 - פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות

תוכן העניינים

1. פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות 187
2. מערכות עם פרמטר 190

פתרון וחקירת מערכות של משוואות ליניאריות

שאלות

(1) מצאו אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות:

$$\begin{array}{llll} 2x + y = 4 & x - y = 0 & x - 4y = -7 & x + 10y = 11 \\ x + y = 3 & 2x + y = 3 & x - y = -1 & 2x - 2y = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ד.} \\ \text{ג.} \\ \text{ב.} \\ \text{א.} \end{array}$$

(2) רשמו את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{llll} x = 3 & 2x + y + z = 3 & x - 4y + z = -7 & x + 10y = 11 \\ 2x + y = 4 & x - z = 0 & x - y = -1 & 2x - 2y = 0 \\ z + t = 8 & & x + y + z = 5 & x + y = 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ד.} \\ \text{ג.} \\ \text{ב.} \\ \text{א.} \end{array}$$

בשאלות 3-5 בצעו על כל מטריצה את הפעולות הרשומות מתחתיה, בזו אחר זו, ומצאו את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

$$\begin{array}{lll} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} & (5) & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} & (4) & \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} & (3) \\ R_1 \rightarrow R_1 + 3R_3, R_2 \rightarrow R_2 + 3R_3 & & R_2 \rightarrow 4R_2, R_2 \rightarrow R_2 + R_1 & & R_1 \leftrightarrow R_2, R_1 \rightarrow 2R_1 \\ R_1 \rightarrow 5R_1 - 8R_2 & & R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2 & & R_3 \rightarrow R_3 + R_1, R_1 \leftrightarrow R_3 \end{array}$$

(6) מצאו איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל, כדי לקבל את המטריצה מימין:

$$\begin{array}{ll} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{א.} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} & \text{ב.} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} & \text{ג.} \end{array}$$

בשאלות 7-10 הביאו את המטריצות הבאות לצורה מדורגת
(בשאלות 7, 9 ו-10 גם לצורה מדורגת קנונית):

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (8) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (10) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix} \quad (9)$$

בשאלות 11-22 פתרו את מערכות המשוואות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דירוג):

$$\begin{aligned} 4x+8y &= 20 & (12) & \qquad 2x+3y = 8 & (11) \\ 3x+6y &= 15 & & \qquad 5x-4y = -3 & \\ \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 5 & & \qquad 8x - 4y = 10 & (13) \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 5 & (14) & \qquad -6x + 3y = 1 & \\ 10x_1 - 6x_2 - 2x_3 &= 32 & & & \\ \\ x+2y+3z &= 3 & & \qquad x+2y+3z = -11 & \\ 4x+6y+16z &= 8 & (16) & \qquad 2x+3y-z = -5 & (15) \\ 3x+2y+17z &= 1 & & \qquad 3x+y-z = 2 & \\ \\ 4x-7y &= 0 & & \qquad x+3y = 2 & \\ 8x-14y &= 2 & (18) & \qquad 2x+y = -1 & (17) \\ -16x+28y &= 4 & & \qquad x-y = -2 & \\ \\ x+2y-3z+2t &= 2 & & \qquad 3x-2y = 1 & \\ 2x+5y-8z+6t &= 5 & (20) & \qquad -9x+6y = -3 & (19) \\ 6x+8y-10z+4t &= 8 & & \qquad 6x-4y = 2 & \\ \\ x+2y+2z &= 2 & & \qquad x_1+5x_2+4x_3-13x_4 = 3 & \\ 3x-2y-z &= 5 & (22) & \qquad 3x_1-x_2+2x_3+5x_4 = 2 & (21) \\ 2x-5y+3z &= -4 & & \qquad 2x_1+2x_2+3x_3-4x_4 = 0 & \\ 2x+8y+12z &= 0 & & & \end{aligned}$$

תשובות סופיות

(1) א ו-ג שקולות, ו-ב ו-ד שקולות.

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ א.} \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ ב.} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ג.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \text{ ד.}$$

$$(3) \quad \begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 & 10 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} \quad (4) \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad (5) \quad \begin{pmatrix} 8 & -32 & 37 & -4 \\ -1 & 9 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(6) \quad \text{א. } R_1 \rightarrow 2R_1 + R_2 \quad \text{ב. } R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1 \quad \text{ג. } R_2 \rightarrow 2R_2 + 4R_1$$

$$(7) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ו.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(8) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ז.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$(10) \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(11) \quad (x, y) = (1, 2) \quad (12) \quad (x, y) = (5 - 2t, t) \quad (13) \quad \emptyset$$

$$(14) \quad \emptyset \quad (15) \quad (x_1, x_2, x_3) = (1, -3, -2)$$

$$(16) \quad (x, y, z) = (-1 - 7t, 2 + 2t, t) \quad (17) \quad (x, y) = (-1, 1)$$

$$(18) \quad \emptyset \quad (19) \quad (x, y) = \left(\frac{1+2t}{3}, t \right)$$

$$(20) \quad (x, y, z, t) = (-a + 2b, 1 + 2a - 2b, a, b) \quad (21) \quad \emptyset$$

$$(22) \quad (x, y, z) = (2, 1, -1)$$

מערכות עם פרמטר

שאלות

בשאלות 1-6 מצאו לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות:
 1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$x - y + z = 1$$

$$5x - 7y + (k^2 + 3)z = k^2 + 1 \quad (1)$$

$$3x - y + (k + 3)z = 3$$

$$x + ky + z = 1$$

$$x + y + kz = 1 \quad (2)$$

$$kx + y + z = 1$$

$$x + 2ky + z = 0$$

$$3x + y + kz = 2 \quad (3)$$

$$x + 9ky + 5z = -2$$

$$2x - y + z = 0$$

$$x + 2y - z = 0 \quad (4)$$

$$5x + (1 - k)y + k^2z = 1$$

$$kx - y = 1$$

$$(k - 2)x + ky = -2 \quad (5)$$

$$(k^2 - 1)z = 9$$

$$x + ky + 3z = 2$$

$$kx - y + z = 4 \quad (6)$$

$$3x + y + (2 + k)z = 0$$

בשאלות 7-8 מצאו לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות:
 1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$2x + ky = 3$$

$$(k+3)x + 2y = k^2 + 5 \quad (7)$$

$$6x + 3ky = 7k^2 + 2$$

$$2x - 3y + z = 1$$

$$4x + (k^2 - 5k)y + 2z = k \quad (8)$$

$$(9) \quad \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 7y + (k^2 + 1)z = k^2 - 1 \\ 4x - 6y + (k + 2)z = 4 \end{cases} \quad \text{נתונה המערכת:}$$

- א. רשמו את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות.
 ב. רשמו את הצורה המדורגת של המטריצה מסעיף א.
 ג. מצאו לאילו ערכי k יש למערכת:
 1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.
 ד. רשמו את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.
 ה. מצאו לאילו ערכי k יש למערכת פתרון שבו $z = 0$.
 ו. מצאו לאילו ערכי k יש למערכת פתרון יחיד שבו $z = 0$.
 ז. מצאו עבור איזה ערך של k פתרון של המשוואה השלישית הוא $(1, 2, 3)$.
 האם ייתכן שהפתרון הנ"ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבירו.
 ח. מצאו לאיזה ערך של k , $(1, 0, 0)$ הוא הפתרון היחיד של המערכת.

תשובות סופיות

$$(1) \quad 1. \ k \neq -2, \ k \neq 1 \quad 2. \ k = 1 \quad 3. \ k = -2$$

$$(2) \quad 1. \ k \neq -2, \ k \neq 1 \quad 2. \ k = -2 \quad 3. \ k = 1$$

$$(3) \quad 1. \ k \neq \frac{4}{7}, \ k \neq -1 \quad 2. \ k = \frac{4}{7} \quad 3. \ k = -1$$

$$(4) \quad 1. \ k \neq -0.4, \ k \neq 1 \quad 2. \ k = -0.4 \quad 3. \ k = 1$$

$$(5) \quad 1. \ k \neq -2, \ k \neq \pm 1 \quad 2. \ k = -2, \ k = \pm 1$$

$$(6) \quad 1. \ k \neq 2, \ k \neq -3, \ k \neq -1 \quad 3. \ k = 2, \ k = -3, \ k = -1$$

$$(7) \quad 1. \ k = -1 \quad 2. \ k \neq \pm 1 \quad 3. \ k = 1$$

$$(8) \quad 2. \ k = 3 \quad 3. \ k \neq 3$$

$$(9) \quad \text{א.} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & k^2 + 4 & k^2 - 4 \\ 0 & 0 & -k^2 + k + 2 & 4 - k^2 \end{pmatrix} \quad \text{ב.} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & k^2 + 1 & k^2 - 1 \\ 4 & -6 & k + 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{ג.} \quad 1. \ k \neq -1, \ k \neq 2 \quad 2. \ k = -1 \quad 3. \ k = 2 \quad \text{ד.} \quad (x, y, z) = (1 + 0.2t, 0.8t, t)$$

$$\text{ה.} \quad k = \pm 2 \quad \text{ו.} \quad k = -2 \quad \text{ז.} \quad k = 2, \text{ לא.} \quad \text{ח.} \quad k = -2$$

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 26 - מטריצות

תוכן העניינים

193	1. מטריצות
195	2. מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות
196	3. המטריצה ההופכית

מטריצות

שאלות

- 1) נתונות המטריצות הבאות: $A_{4 \times 6}$, $B_{4 \times 6}$, $C_{6 \times 2}$, $D_{4 \times 2}$, $E_{6 \times 4}$.
קבעו אילו מבין המטריצות הבאות מוגדרות.
במידה והמטריצה מוגדרת, רשמו את סדר המטריצה:

א. $A+B$ ב. AB ג. $AC-D$ ד. $AE-B$
ה. $B+AB$ ו. $E(B+A)$ ז. $(E+A^T)D$ ח. $E^T B$
ט. $E(AC)$ י. $E(B-A)$

2) מצאו את x, y, z , אם ידוע כי $\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$

בשאלות 3-8 נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשבו (במידה וניתן):

3) א. $E+D$ ב. $E-D+I_3$

ג. $5C$ ד. $2D+4EI_3$

4) $2tr(D^2 - 2E)$

5) א. $4C^T + A$ ב. $\frac{1}{2}A^T + \frac{1}{4}C$

6) $I_2 BC$

7) $tr(C^T C)$

8) $DABC$

תשובות סופיות

- (1) א. 4×6 ב. לא. ג. 4×2 ד. לא. ה. לא.
ו. 6×6 ז. 6×2 ח. לא. ט. 6×2 י. 6×6

(2) $(x, y, z) = (2, 1, -1)$

(3) א. $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}$ ד. $\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

(4) 230

(5) א. $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}$

(7) 63

(8) $\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}$

מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות

שאלות

מטריצה ריבועית A תיקרא סימטרית אם $A^T = A$, ואנטי-סימטרית אם $A^T = -A$.

- (1) ידוע ש- A מטריצה ריבועית.
מי מבין הבאים נכון (אחד או יותר):
1. AA^T סימטרית. 2. $A + A^T$ סימטרית. 3. $A - A^T$ אנטי-סימטרית.
- (2) ידוע ש- A ו- B אנטי-סימטריות מאותו סדר.
מי מבין הבאים נכון:
1. $BABABA$ אנטי-סימטרית. 2. $A^2 - B^2$ סימטרית. 3. $A^2 + B$ סימטרית.
- (3) ידוע ש- A ו- B סימטריות מאותו סדר ונתון כי $AB = -BA$.
מי מבין הבאים נכון:
1. AB^3 אנטי-סימטרית. 2. AB^2 סימטרית. 3. $(A - B)^2$ סימטרית.
- (4) ידוע ש- A סימטרית ו- B אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי $AB = BA$.
הוכיחו: 1. AB אנטי-סימטרית. 2. $AB + B$ אנטי-סימטרית.
- (5) נתון: A, B, AB סימטריות מאותו סדר.
הוכיחו כי $A^4 B^4 = B^4 A^4$.

תשובות סופיות

- (1) 1,2,3
- (2) 2
- (3) 1,2,3
- (4) שאלת הוכחה.
- (5) שאלת הוכחה.

המטריצה ההופכית

שאלות

בשאלות 1-6 מצאו את ההפוכה של כל מטריצה.
בדקו את התשובה על ידי כפל מטריצות מתאים.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (6) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(7) \text{ עבור אילו ערכים של הקבוע } k \text{ המטריצה } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 \\ 3 & -1 & k+3 \end{pmatrix} \text{ הפיכה?}$$

הניחו שהמטריצות בשאלות 8-10 הן הפיכות מסדר n , וחלצו את המטריצה X :

$$(8) \quad AXC = D \quad \text{א.} \quad A^{-1}XC = A^{-1}DC \quad \text{ב.} \quad P^{-1}X^T P = A \quad \text{ג.}$$

$$(9) \quad C^{-1}(A+X)D^{-2} = I \quad \text{א.} \quad (A-AX)^{-1} = X^{-1}C \quad \text{ב.}$$

$$(10) \quad ABC^T X^{-1} BA^T C = AB^T$$

$$(11) \text{ נתון } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$\text{חשבו את המטריצה } X, \text{ אם ידוע כי } B^2 X (2B)^{-1} = B + I.$$

$$(12) \text{ נתון } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \text{ חשבו את המטריצה } Y, \text{ אם ידוע כי } BYB^T = B^{-1} + B.$$

$$(13) \text{ נתון } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\text{חשבו את המטריצה } B, \text{ אם נתון בנוסף כי: } 5A^T B (I + 2A)^{-2} = (7A)^{-2}.$$

14) בסעיפים הבאים מצאו מטריצות A , $\underline{x}$ ו- $\underline{b}$, המבטאות את מערכת המשוואות הנתונה ע"י המשוואה היחידה $A\underline{x} = \underline{b}$:

$$2x + y - z = 3$$

$$x + 2y - 4z = 5 \quad \text{א.}$$

$$6x + 4y + z = 2$$

$$2x - 3y + z + t = 1$$

$$4x + y + 2z = 4$$

$$y + z + t = 1 \quad \text{ב.}$$

$$x - 4z - 2y = 10$$

$$2x - y + z = 3$$

15) פתרו את המערכת הבאה בעזרת המטריצה ההפוכה: $3x - 2y + 2z = 5$.

$$5x - 3y + 4z = 11$$

$$x + 4y + 2z + 4t = 1$$

$$x + 2y - z = 0$$

16) פתרו את המערכת הבאה בעזרת המטריצה ההפוכה:

$$y + z + t = 1$$

$$x + 3y - z - 2t = 0$$

תשובות סופיות

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$k \neq 1, k \neq -2 \quad (7)$$

$$(P^{-1})^T A^T P^T \quad \text{ג.} \quad D \quad \text{ב.} \quad A^{-1}DC^{-1} \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$(A+C^{-1})^{-1} A \quad \text{ב.} \quad CD^2 - A \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$BA^T C(B^{-1})^T BC^T \quad (10)$$

$$X = 4 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$B = \frac{1}{245} \begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{א.} \quad (14)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{ב.}$$

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) \quad (15)$$

$$(x, y, z, t) = (-13, 4, -5, 2) \quad (16)$$

מתמטיקה למנהל עסקים

פרק 27 - דטרמיננטות

תוכן העניינים

- 1. חישוב דטרמיננטות 199
- 2. כלל קרמר ופתרון מערכת משוואות 202
- 3. מטריצה צמודה ומטריצה הפוכה 203

חישוב דטרמיננטות

שאלות

בשאלות 1-5 חשבו את הדטרמיננטה על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

$$\begin{array}{lll} \text{1 א.} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} & \text{ב.} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} & \text{ג.} \begin{vmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \text{2 א.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} & \text{ב.} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \text{ג.} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \text{3 א.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} & \text{ב.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{vmatrix} & \text{ג.} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

4 חשבו את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי דירוג:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} & \text{ב.} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} & \text{ג.} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \end{array}$$

בשאלות 5-6 חשבו את הדטרמיננטה על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

$$\begin{array}{ll} \text{5} \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{vmatrix} & \text{6} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{vmatrix} \end{array}$$

בשאלות 7-8 הראו, ללא חישוב, שהדטרמיננטה של המטריצות שווה אפס:

$$\begin{array}{lll} \text{7 א.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} & \text{ב.} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} & \text{ג.} \begin{vmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{vmatrix} \\ \text{8 א.} \begin{vmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \text{ב.} \begin{vmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{vmatrix} \end{array}$$

בשאלות 9-11 נתון כי $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$.

חשבו :

$$\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix} \quad (10) \qquad \begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (11)$$

$$(12) \text{ הוכיחו כי: } \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

בשאלות 13-14 נתון כי A ו- B מטריצות מסדר 3, $|B|=2$, $|A|=4$.
חשבו :

$$(13) \text{ א. } |ABA^{-1}B^T| \quad \text{ב. } |4A^2B^3|$$

$$(14) \text{ א. } |-A^{-2}B^TA^3| \quad \text{ב. } |-2A^2A^T \text{adj}B|$$

(15) נתון כי A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 4, $2AB+3I=0$, $|A|=2$.
חשבו את $|B|$.

(16) נתון כי A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 3, $B^2-2A^{-1}=0$, $A+3B=0$.
חשבו את $|A|$, $|B|$.

(17) נתון כי A מטריצה מסדר n , $|A|=128$, $2AB=B^TA^2$, ו- B הפיכה.
מצאו את n .

תשובות סופיות

- (1) א. $ad - bc$ ב. 29 ג. -1
- (2) א. -1 ב. -3 ג. -14
- (3) א. 24 ב. 234 ג. -300
- (4) א. 0 ב. 0 ג. 3
- (5) 120
- (6) 114
- (7) פתרונות באתר www.GooL.co.il
- (8) פתרונות באתר.
- (9) -8
- (10) 16
- (11) -36
- (12) הוכחה.
- (13) א. 4 ב. 2^{13}
- (14) א. -8 ב. -2^{11}
- (15) $\frac{81}{32}$
- (16) $|A|=18, |B|=-2/3$
- (17) 7

כלל קרמר ופתרון מערכת משוואות

שאלות

בשאלות 1-3 פתרו את מערכות המשוואות בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 3x + 4y &= 11 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x + z &= 3 \\ 4x + y + 8z &= 21 \\ 2x + 3z &= 8 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} x + 2z + 5t &= 8 \\ -2x - 6y &= -8 \\ 5x + 3y - 7z + 4t &= 5 \\ 2x + 5y + 44z &= 51 \end{aligned} \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$\begin{aligned} (1) \quad x &= 1, y = 2 \\ (2) \quad x &= 1, y = 1, z = 2 \\ (3) \quad x &= y = z = t = 1 \end{aligned}$$

מטריצה צמודה קלאסית ומטריצה הפוכה

שאלות

בשאלות 1-3 חשבו את הצמודה הקלאסית $adj(A)$, ובעזרתה את A^{-1} :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$adj(A) = A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$adj(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$