

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד



תוכן העניינים

| | |
|-----|---|
| 1 | מבוא לאלגברה |
| 47 | משוואות אלגבריות |
| 69 | אי שוויונים אלגבריים |
| 85 | גיאומטריה אנליטית - נקודה וישר |
| 110 | גיאומטריה אנליטית - המעגל |
| 129 | חקירת משוואה ממעלה ראשונה |
| 141 | חקירת משוואה ממעלה שנייה |
| 155 | נוסחאות וייטה |
| 157 | חוקי החזקות והשורשים |
| 167 | משוואות ואי-שוויונים מעריכיים |
| 177 | חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים |
| 193 | סדרות |
| 217 | סימן הסכימה (סיגמה) |
| 220 | אינדוקציה מתמטית |
| 234 | מבוא לתורת הקבוצות |
| 244 | מבוא לגאומטריה של המישור |
| 252 | גיאומטריה אוקלידית - משולשים |
| 273 | גיאומטריה אוקלידית - מרובעים |
| 297 | גיאומטריה אוקלידית - שטחים והיקפים |
| 311 | טריגונומטריה במשולש ישר זווית |
| 316 | זהויות טריגונומטריות |
| 335 | משוואות טריגונומטריות |
| 356 | טריגונומטריה במישור |

תוכן העניינים

| | | |
|------|--|-----------|
| 24. | מבוא לסטטיסטיקה | (ללא ספר) |
| 25. | מדדים מרכזיים - החציון | (ללא ספר) |
| 26. | מדדים מרכזיים - הממוצע | (ללא ספר) |
| 27. | מדדים מרכזיים - השכיח | (ללא ספר) |
| 389. | הסתברות קלאסית | |
| 29. | חשבון דיפרנציאלי - הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות ופונקציות נפוצות | (ללא ספר) |
| 413. | חשבון דיפרנציאלי - גבול של פונקציה | |
| 31. | חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים | (ללא ספר) |
| 32. | חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקציות | (ללא ספר) |
| 33. | חשבון דיפרנציאלי של פונקציות טריגונומטריות | (ללא ספר) |
| 34. | חשבון דיפרנציאלי - הזזות ומתיחות של פונקציות | (ללא ספר) |
| 425. | חשבון דיפרנציאלי - פונקצית הערך המוחלט | |
| 36. | חשבון דיפרנציאלי של פונקציות לוגריתמיות | (ללא ספר) |
| 37. | חשבון דיפרנציאלי של פונקציות מעריכיות | (ללא ספר) |
| 439. | חשבון אינטגרלי - האינטגרל הכללי | |
| 446. | חשבון אינטגרלי - האינטגרל המסוים וחישובי שטחים | |
| 474. | חשבון אינטגרלי - פונקציה מעריכית, לוגריתמית וחזקה | |
| 492. | חשבון אינטגרלי - חישובי נפחים של גופים ובעיות קיצון עם אינטגרלים | |

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 1 - מבוא לאלגברה

תוכן העניינים

| | |
|----|---|
| 1 | 1. מספרים מכוונים |
| 5 | 2. חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים |
| 7 | 3. סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים |
| 8 | 4. אחוזים |
| 14 | 5. כפל וחילוק שברים |
| 16 | 6. חיבור וחסור שברים |
| 20 | 7. בעיות יסודיות באחוזים |
| 22 | 8. חזרה על תבניות מספר |
| 24 | 9. כינוס איברים |
| 26 | 10. פישוט ביטויים על ידי פתיחת סוגריים |
| 29 | 11. פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר |
| 31 | 12. פירוק לגורמים של ביטויים אלגברים |
| 34 | 13. פירוק הטרינום |
| 36 | 14. שברים אלגברים |
| 40 | 15. כפל וחילוק של שברים אלגברים |
| 42 | 16. חיבור וחסור של שברים אלגברים |
| 46 | 17. שברים כפולים |

מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

מספרים מכוונים הם מספרים שיכולים לקבל סימן חיובי או שלילי, כגון:

- בקניון גדול ישנן קומות 1, 2, 3, 4, וכן חניונים הממוקמים בקומות 1-, 2-, ו-3-.
- גובה פני הים מוגדר להיות 0 מטרים. העיר חיפה נמצאת כ-103 מטרים מעל פני הים בעוד שים המלח נמצא בגובה 426- מטרים.

כללים:

- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים זהים, מחברים את המספרים עצמם והסימן נשאר.
- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים מנוגדים, מחסירים את המספרים זה מזה (הקטן מהגדול) וסימן התוצאה כסימן המספר הגדול מביניהם.
- כפל וחילוק יתבצע בשני חלקים:
 - ביצוע הפעולה על המספרים עצמם.
 - קביעת הסימן של התוצאה באופן הבא:
 - כפל או חילוק של שני מספרים בעלי אותו סימן - התוצאה תהיה חיובית.
 - כפל או חילוק של שני מספרים שונים סימן - התוצאה תהיה שלילית.

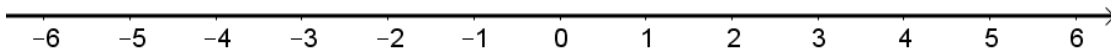
הערה:

אם יש רצף של מכפלות (או חילוקים), סימן התוצאה תלוי במספר הפעמים שבהם מופיע סימן שלילי (-). אם הסימן מופיע מספר זוגי של פעמים התוצאה חיובית, ואם הוא מופיע מספר אי-זוגי של פעמים אזי התוצאה שלילית.

שאלות:

1) סמנו את המספרים הבאים על ציר המספרים בהתאמה:

$$-3\frac{1}{2}, 4, 1\frac{1}{3}, -5, -\frac{1}{2}, 2, 0, \frac{1}{2}, -2$$



2) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

ב. $-3-2$

א. $3+2$

ד. $-3+2$

ג. $3-2$

ו. $7+10$

ה. $-1-4$

ח. $-7+3$

ז. $-6+5$

3) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

ב. $5-8-12+17$

א. $5+7-23+1$

ד. $-4-11+2+9$

ג. $3-14+2+6$

ו. $-7-13+5-3$

ה. $6-21+3-7$

4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

ב. $4 \cdot (-7)$

א. $4 \cdot 9$

ד. $(-5) \cdot (-3)$

ג. $(-6) \cdot (-5)$

ו. $(-8) \cdot 5$

ה. $(-2) \cdot 8$

ח. $2 \cdot 3 \cdot 3$

ז. $(-2) \cdot (-3) \cdot (-3)$

י. $(-2) \cdot (-3) \cdot 3$

ט. $(-2) \cdot 3 \cdot (-3)$

יב. $(-2) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-2)$

יא. $2 \cdot 3 \cdot (-3)$

יד. $1 \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot 2$

יג. $(-1) \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot 2$

5) מהו הסימן של תוצאת המכפלה בכל מקרה :

א. $(-2) \cdot (-4) \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot (-6) \cdot (-5)$

ב. $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot 6 \cdot (-5)$

ג. $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot (-6) \cdot (-5)$

ד. $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot 6 \cdot 5$

6) חשבו את ערכי הביטויים הבאים :

ב. $(-30) : 3$

א. $(-25) : (-5)$

ד. $(-32) : (-4)$

ג. $40 : (-10)$

ו. $4 : (-16)$

ה. $(-6) : 18$

7) חשבו את ערכי הביטויים הבאים :

ב. $\frac{42}{-6}$

א. $\frac{-60}{12}$

ד. $\frac{-12}{-3}$

ג. $\frac{32}{-4}$

8) מה התוצאה של כל אחת מהפעולות הבאות :

ב. $(-2) \cdot 0$

א. $0 : 5$

ד. $6 : 0$

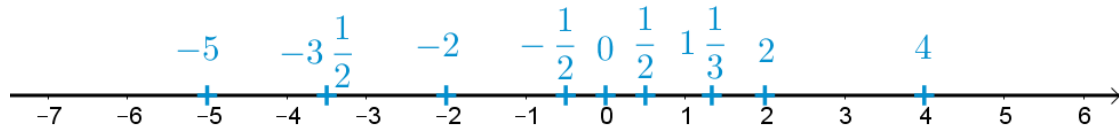
ג. $0 \cdot (-3) \cdot 4$

ו. $0 - 4$

ה. $0 + 4$

תשובות סופיות:

(1) להלן מערכת הצירים:



- (2) א. 5 ב. -5 ג. 1 ד. -1 ה. -5
- ו. 17 ז. -1 ח. -4
- (3) א. -10 ב. 2 ג. -3 ד. -4 ה. -19 ו. -18
- (4) א. 36 ב. -28 ג. 30 ד. 15 ה. -16
- ו. -40 ז. -18 ח. 18 ט. 18 י. 18
- יא. -18 יב. 36 יג. -16 יד. 16
- (5) א. + ב. + ג. - ד. -
- (6) א. 5 ב. -10 ג. -4 ד. 8 ה. $-\frac{1}{3}$ ו. $-\frac{1}{4}$
- (7) א. -5 ב. -7 ג. -8 ד. 4
- (8) א. 0 ב. 0 ג. 0 ד. לא מוגדר ה. 4 ו. -4

חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

הגדרה:

פעולת החזקה היא צורה מקוצרת שמייצגת פעולת כפל של אותו מספר בעצמו מספר פעמים. סימון החזקה הוא באופן הבא:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

כאשר a נקרא הבסיס ו- n נקראת החזקה.

הערות:

- כאשר הבסיס חיובי, התוצאה תמיד תהיה חיובית ללא קשר האם החזקה היא זוגית או אי-זוגית.
- כאשר הבסיס שלילי, התוצאה תהיה חיובית אם החזקה היא זוגית ושלילית אם החזקה היא אי-זוגית.

הגדרה:

פעולת השורש היא הפוכה לפעולת החזקה והיא מאפשרת למצוא את בסיס החזקה. סימון השורש הוא באופן הבא:

$$\sqrt[n]{a}$$

כאשר a נקרא הבסיס ו- n נקרא סדר השורש.

הערות:

- שורש למספר זוגי יכול להיות מסדר זוגי או אי-זוגי.
- שורש למספר שלילי יכול להיות מסדר אי-זוגי בלבד.

שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- | | |
|--------------|---------------|
| א. 3^2 | ב. 3^3 |
| ג. $(-3)^3$ | ד. $(-2)^3$ |
| ה. 4^3 | ו. 3^4 |
| ז. $(-5)^3$ | ח. 10^4 |
| ט. $-(-3)^4$ | י. -5^4 |
| יא. -4^3 | יב. $-(-2)^6$ |

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- | | |
|--------------------|----------------------|
| א. $\sqrt[3]{-27}$ | ב. $\sqrt[4]{625}$ |
| ג. $\sqrt[4]{-16}$ | ד. $\sqrt[5]{-32}$ |
| ה. $-\sqrt[4]{81}$ | ו. $-\sqrt[3]{1000}$ |

תשובות סופיות:

- | | | | | | |
|-----------|----------|--------------|---------|---------|---------|
| (1) א. 9 | ב. 27 | ג. -27 | ד. -8 | ה. 64 | ו. 81 |
| ז. -125 | ח. 10000 | ט. -81 | י. -625 | יא. -64 | יב. -64 |
| (2) א. -3 | ב. 5 | ג. לא מוגדר. | ד. -2 | ה. -3 | ו. -10 |

סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

סדר פעולות חשבון:

- פעולות כפל וחילוק קודמות לפעולות חיבור וחסור.
- פעולות חזקה ושורש קודמות לפעולות כפל וחילוק.
- סוגריים קודמים לכל.

שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

| | |
|---|---|
| א. $\sqrt{81} + 3 \cdot 2^3 - 40 : 8$ | ב. $(-3)^2 : 9 - 2 \cdot (-4^2)$ |
| ג. $\sqrt{144} - 20 : 4 + 3 \cdot (-2)^2$ | ד. $3 + 4 \cdot [-3 + 4 \cdot (-2)] + \sqrt{10 + 6}$ |
| ה. $(-3)^4 : (-9) - 5 \cdot (-2)^3$ | ו. $-\sqrt{9} + 5^2 : (-4 - 1) - 24 : 12 \cdot 3$ |
| ז. $-2^5 : (-8) + 4^2 - 3 \cdot 5$ | ח. $\sqrt[3]{-27} + 4 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3^3$ |
| ט. $[6 \cdot (-1)^4 - 10 \cdot (-1)^3] \cdot (-1)^5$ | י. $(8 - \sqrt[3]{64}) \cdot (2 \cdot (-4) - \sqrt{243})$ |
| יא. $\frac{3^2 \cdot (8 - 2 \cdot 3)^3}{(5^2 \cdot 3 - 72) \cdot (-4)} + 2 \cdot \{15 - 20 : (4 + 3 \cdot 2)\}$ | |

תשובות סופיות:

| | | | | | |
|----------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1) א. 28 | ב. 33 | ג. 19 | ד. -37 | ה. 31 | ו. -14 |
| ז. 5 | ח. -21 | ט. -16 | י. -44 | יא. 20 | |

אחוזים:

סיכום כללי:

הגדרה כללית - שבר:

השבר הוא חלק מתוך השלם. מקובל לסמן שבר באמצעות קו שבר המפריד בין המונה (החלק העליון) למכנה (החלק התחתון) באופן הבא:

$$\frac{\text{מונה}}{\text{מכנה}}$$

ישנם שלושה סוגים אפשריים של שברים:

- שבר פשוט – בו המונה קטן מהמכנה (ולכן תמיד יהיה קטן מ-1).
- שבר מדומה – בו המונה גדול מהמכנה (יהיה גדול בערכו מ-1).
- שבר מעורב – המכיל שילוב של מספר שלם ושבר כלשהו.

שבר עשרוני:

שבר שהמכנה שלו הוא מספר המהווה כפולות של 10 כגון: 10, 100, 1000 ... שבר עשרוני מיוצג ע"י נקודה עשרונית אשר מבדילה בין החלק שלם לחלק השברי באופן הבא:

$$\underbrace{XX}_{\text{שברים שלמים}} . \underbrace{YYY}$$

כדי להמיר שבר פשוט לשבר עשרוני המכנה צריך להיות בכפולות של 10.

הגדרה - אחוז:

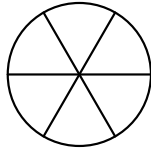
השבר $\frac{1}{100}$ מוגדר להיות אחוז אחד ומסומן באופן הבא: 1%.

באופן זה השבר $\frac{45}{100}$ יכתב: 45%, והשבר $\frac{145}{100}$ יכתב: 145%.

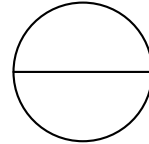
שאלות:

12) צבע את החלקים המתאימים בכל עיגול:

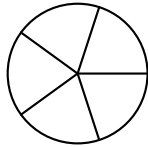
ב. צבע $\frac{1}{6}$ מהעיגול



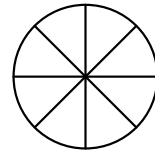
א. צבע $\frac{1}{2}$ מהעיגול



ד. צבע $\frac{2}{5}$ מהעיגול

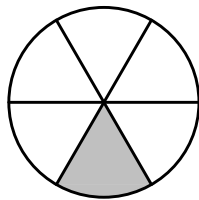


ג. צבע $\frac{3}{8}$ מהעיגול

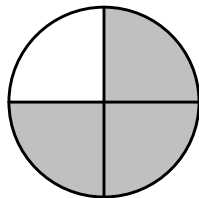


13) כתוב את השבר המתאים לחלקים הצבועים בכל אחד מהמקרים הבאים:

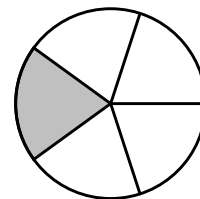
ב. שבר:



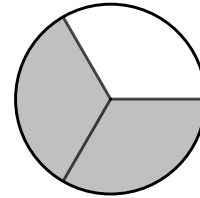
ד. שבר:



א. שבר:



ג. שבר:



14) הרחב את השברים הבאים :

א. השבר $\frac{1}{2}$ לפי מכנה 4, לפי מכנה 18, לפי מכנה 40.

ב. השבר $\frac{3}{5}$ לפי מכנה 10, לפי מכנה 25, לפי מכנה 60.

ג. השבר $\frac{5}{8}$ לפי מכנה 16, לפי מכנה 32, לפי מכנה 88.

15) צמצם את השברים הבאים ככל הניתן :

| | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|---------------------|
| א. $\frac{25}{30}$ | ב. $\frac{10}{30}$ | ג. $\frac{6}{24}$ | ד. $\frac{4}{20}$ |
| ה. $\frac{35}{56}$ | ו. $\frac{24}{42}$ | ז. $\frac{36}{48}$ | ח. $\frac{33}{121}$ |

16) המר את השברים המדומים הבאים לשברים מעורבים :

| | | | |
|--------------------|--------------------|-------------------|-------------------|
| א. $-\frac{20}{3}$ | ב. $\frac{19}{4}$ | ג. $\frac{12}{5}$ | ד. $\frac{22}{5}$ |
| ה. $-\frac{34}{6}$ | ו. $-\frac{50}{7}$ | ז. $\frac{47}{8}$ | ח. $\frac{60}{9}$ |

17) המר את השברים המעורבים הבאים לשברים מדומים :

| | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| א. $1\frac{2}{3}$ | ב. $3\frac{5}{6}$ | ג. $4\frac{1}{2}$ | ד. $6\frac{1}{4}$ |
| ה. $11\frac{3}{4}$ | ו. $-2\frac{5}{8}$ | ז. $-6\frac{2}{7}$ | ח. $12\frac{7}{9}$ |

18) קבע איזה שבר גדול יותר בכל אחד מהמקרים הבאים :

| | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| א. $\frac{4}{10}$ או $\frac{3}{10}$ | ב. $\frac{7}{6}$ או $\frac{7}{8}$ |
| ג. $\frac{5}{6}$ או $\frac{2}{3}$ | ד. $\frac{7}{12}$ או $\frac{5}{18}$ |

(19) המר את השברים העשרוניים הבאים לשברים פשוטים מצומצמים או מעורבים :

| | | | |
|----------|---------|----------|-----------|
| א. 0.7 | ב. 0.07 | ג. 0.007 | ד. 0.34 |
| ה. 0.304 | ו. 0.65 | ז. 1.2 | ח. 1.02 |
| ט. 1.42 | י. 3.5 | יא. 6.03 | יב. 5.125 |

(20) המר את השברים הבאים לשברים עשרוניים :

| | | | |
|---------------------|--------------------|---------------------|----------------------|
| א. $\frac{3}{10}$ | ב. $\frac{3}{100}$ | ג. $\frac{3}{1000}$ | ד. $\frac{23}{1000}$ |
| ה. $\frac{1}{2}$ | ו. $\frac{3}{4}$ | ז. $\frac{2}{5}$ | ח. $\frac{4}{25}$ |
| ט. $\frac{7}{50}$ | י. $\frac{3}{20}$ | יא. $\frac{7}{8}$ | יב. $\frac{9}{16}$ |
| יג. $9\frac{1}{10}$ | יד. $3\frac{1}{5}$ | טו. $4\frac{7}{8}$ | טז. $-4\frac{1}{16}$ |

(21) כתוב את השברים הבאים בצורתם העשרונית (היעזר במחשבון וכתוב עד 3 ספרות אחרי הנקודה העשרונית) :

| | | | |
|------------------|------------------|------------------|-------------------|
| א. $\frac{2}{3}$ | ב. $\frac{5}{6}$ | ג. $\frac{3}{7}$ | ד. $\frac{2}{11}$ |
|------------------|------------------|------------------|-------------------|

(22) המר מאחוזים לשברים פשוטים :

| | | | |
|---------|--------|---------|---------|
| א. 25% | ב. 32% | ג. 64% | ד. 80% |
| ה. 120% | ו. 5% | ז. 300% | ח. 150% |

(23) המר משברים פשוטים לאחוזים :

| | | | |
|--------------------|---------------------|------------------|-------------------|
| א. $\frac{3}{4}$ | ב. $\frac{1}{8}$ | ג. $\frac{4}{5}$ | ד. $\frac{7}{20}$ |
| ה. $\frac{11}{40}$ | ו. $\frac{70}{125}$ | ז. $\frac{5}{6}$ | ח. $\frac{4}{9}$ |

תשובות סופיות:

(12) תשובה מודגמת בסרטון.

- (13) א. $\frac{1}{5}$ ב. $\frac{1}{6}$ ג. $\frac{2}{3}$ ד. $\frac{3}{4}$
- (14) א. $\frac{4}{8}, \frac{18}{36}, \frac{40}{80}$ ב. $\frac{30}{50}, \frac{75}{125}, \frac{180}{300}$ ג. $\frac{80}{128}, \frac{160}{256}, \frac{440}{700}$
- (15) א. $\frac{5}{6}$ ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. $\frac{1}{5}$ ה. $\frac{5}{8}$ ו. $\frac{4}{7}$
- (16) א. $-6\frac{2}{3}$ ב. $4\frac{3}{4}$ ג. $2\frac{2}{5}$ ד. $4\frac{2}{5}$ ה. $-5\frac{4}{6}$ ו. $-7\frac{1}{7}$
- (17) א. $\frac{5}{3}$ ב. $\frac{23}{6}$ ג. $\frac{9}{2}$ ד. $\frac{25}{4}$ ה. $\frac{47}{4}$ ו. $-\frac{21}{8}$
- (18) א. $\frac{4}{10}$ ב. $\frac{7}{6}$ ג. $\frac{5}{6}$ ד. $\frac{7}{12}$
- (19) א. $\frac{7}{10}$ ב. $\frac{7}{100}$ ג. $\frac{7}{1000}$ ד. $\frac{17}{50}$ ה. $\frac{38}{125}$ ו. $\frac{13}{20}$
- (20) א. 0.3 ב. 0.03 ג. 0.003 ד. 0.023 ה. 0.5 ו. 0.75
- א. 0.4 ב. 0.16 ג. 0.14 ד. 0.15 ה. 0.875 ו. -4.0625
- א. 0.5625 ב. 9.1 ג. 3.2 ד. 4.875 ה. 0.18
- (21) א. $0.\bar{6}$ ב. $0.\bar{83}$ ג. 0.428 ד. $0.\bar{18}$
- (22) א. $\frac{1}{4}$ ב. $\frac{8}{25}$ ג. $\frac{16}{25}$ ד. $\frac{4}{5}$ ה. $1\frac{1}{5}$ ו. $\frac{1}{20}$
- א. 3 ב. $1\frac{1}{2}$

23 א. 75% ב. 12.5% ג. 80% ד. 35% ה. 27.5% ו. 56%

ז. 83.333% ח. 44.444%

כפל וחילוק שברים:

סיכום כללי:

- כשכופלים שני שברים יש לכפול מונה במונה ומכנה במכנה.
 - במידה ומדובר במספר שלם הכופל שבר, יש לכפול אותו במונה.
 - במידה ומדובר בשברים מעורבים, יש להפוך אותם תחילה לשברים מדומים ורק אז לבצע את פעולת הכפל.
- כדי לחלק שברים, יש לכפול את השבר הראשון בהופכי של השבר השני.
 - הופכי של שבר מסוים מתקבל ע"י החלפת המונה במכנה.

שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

| | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| $\frac{2}{9} \cdot \frac{8}{10}$ ג. | $\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6}$ ב. | $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4}$ א. |
| $\frac{12}{25} \cdot 5$ ו. | $6 \cdot \frac{2}{3}$ ה. | $3 \cdot \frac{4}{5}$ ד. |
| $3\frac{3}{7} \cdot 2\frac{2}{5}$ ט. | $3\frac{1}{2} \cdot 4\frac{2}{5}$ ח. | $1\frac{3}{5} \cdot 2\frac{1}{4}$ ז. |
| $\frac{4^3}{5}$ יב. | $\frac{4}{5^3}$ יא. | $\left(\frac{4}{5}\right)^3$ י. |

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

| | | |
|-----------------------------------|----------------------------------|--------------------------------|
| $\frac{3}{25} : \frac{7}{10}$ ג. | $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ ב. | $\frac{2}{5} : \frac{4}{9}$ א. |
| $\frac{5}{6} : 3$ ו. | $10 : \frac{2}{3}$ ה. | $8 : \frac{2}{9}$ ד. |
| $2\frac{2}{5} : 1\frac{3}{15}$ ט. | $3\frac{3}{4} : 5\frac{5}{8}$ ח. | $\frac{2}{5} : 5$ ז. |

תשובות סופיות:

- (1) א. $\frac{9}{20}$ ב. $\frac{5}{21}$ ג. $\frac{8}{45}$ ד. $2\frac{2}{5}$ ה. 4 ו. $2\frac{2}{5}$
- ז. $3\frac{3}{5}$ ח. $15\frac{2}{5}$ ט. $8\frac{8}{35}$ י. $\frac{64}{125}$ יא. $\frac{4}{125}$ יב. $12\frac{4}{5}$
- (2) א. $\frac{9}{10}$ ב. $1\frac{1}{2}$ ג. $\frac{6}{35}$ ד. 36 ה. 15 ו. $\frac{5}{18}$
- ז. $\frac{2}{25}$ ח. $\frac{2}{3}$ ט. 2

חיבור וחסור שברים:

סיכום כללי:

כפולה משותפת מינימלית:

בהינתן זוג מספרים a ו- b , המספר הקטן ביותר אשר תוצאת חלוקתו במספרים הנ"ל מניבה מספר שלם נקרא הכפולה המינימלית שלהם.

הערות:

- כפולה מינימלית יכולה להיות גם עבור יותר משני מספרים.
- הכפולה המינימלית תהיה המכנה המשותף בעת פעולות חיבור וחסור של שברים.

כללי החיבור והחסור של שברים:

- חיבור וחסור של שברים בעלי אותו המכנה מתבצע על המספרים שבמונה בלבד כאשר המכנה נשאר כפי שהוא.
 דוגמא: $\frac{2}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2-3}{7} = \frac{-1}{7}$, $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$
- חיבור וחסור של שברים בעלי מכנים שונים מתבצע ע"י פעולת מכנה משותף.
 דוגמא: $\frac{1}{4} - \frac{5}{6} = \frac{3}{12} - \frac{10}{12} = \frac{3-10}{12} = -\frac{7}{12}$, $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{6+5}{15} = \frac{11}{15}$
- חיבור של שבר עם מספר שלם יתבצע באופן ישיר.
 דוגמא: $3 + \frac{1}{4} = 3\frac{1}{4}$
 חיסור של שבר ממספר שלם יתבצע ע"י הוצאת שלמים מהשבר.
 דוגמא: $3 - \frac{1}{4} = 2\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = 2\frac{3}{4}$
 דרך נוספת היא ע"י העברת המספר השלם לשבר מדומה: $3 - \frac{1}{4} = \frac{12}{4} - \frac{1}{4} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$
- חיבור וחסור של שברים מעורבים יתבצע ע"י העברתם לשברים מדומים תחילה.
 דוגמא: $3\frac{2}{5} + 2\frac{1}{6} = \frac{17}{5} + \frac{13}{6} = \frac{17 \cdot 6}{30} + \frac{13 \cdot 5}{30} = \frac{102+65}{30} = \frac{167}{30} = 5\frac{17}{30}$
 ניתן גם לפצל ולבצע את פעולת החיבור (או החיסור) של המספרים השלמים תחילה,

ולאחר מכן לבצע את הפעולה עבור השברים.

$$\text{דוגמא: } 2\frac{3}{4} - 5\frac{1}{3} = (2-5) + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) = -3 + \left(\frac{9}{12} - \frac{4}{12}\right) = -3 + \frac{5}{12} = -2\frac{7}{12}$$

שאלות:

(1) מצא את הכפולה המשותפת המינימלית של המספרים הבאים:

- | | | | |
|-----------|----------|--------------|-------------|
| א. 2 ו-3 | ב. 2 ו-4 | ג. 3 ו-5 | ד. 6 ו-10 |
| ה. 4 ו-10 | ו. 4 ו-6 | ז. 3, 5 ו-10 | ח. 2, 3 ו-8 |

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- | | |
|--|---|
| א. $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}$ | ב. $\frac{5}{9} + \frac{2}{9}$ |
| ג. $\frac{4}{13} + \frac{9}{13}$ | ד. $\frac{7}{8} + \frac{7}{8}$ |
| ה. $\frac{7}{8} - \frac{3}{8}$ | ו. $\frac{8}{9} - \frac{7}{9}$ |
| ז. $\frac{2}{12} - \frac{5}{12}$ | ח. $\frac{2}{5} - \frac{6}{5}$ |
| ט. $\frac{2}{8} + \frac{5}{8} + \frac{6}{8}$ | י. $\frac{7}{15} + \frac{8}{15} - \frac{6}{15}$ |

(3) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- | | |
|--|---|
| א. $\frac{1}{2} + \frac{4}{3}$ | ב. $\frac{3}{5} + \frac{1}{10}$ |
| ג. $\frac{4}{6} - \frac{1}{12}$ | ד. $\frac{3}{6} - \frac{5}{8}$ |
| ה. $\frac{5}{4} + \frac{7}{2} + \frac{2}{8}$ | ו. $\frac{7}{3} + \frac{6}{5} + \frac{3}{10}$ |
| ז. $\frac{4}{7} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$ | ח. $\frac{1}{4} + \frac{2}{8} - \frac{3}{5}$ |

(4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

| | |
|----|---|
| א. | $2 + \frac{5}{6}$ |
| ב. | $2 - \frac{5}{6}$ |
| ג. | $2\frac{1}{4} + \frac{5}{6}$ |
| ד. | $2\frac{1}{4} - \frac{5}{6}$ |
| ה. | $3\frac{2}{3} + 4\frac{1}{4}$ |
| ו. | $5\frac{7}{8} - 6\frac{1}{2}$ |
| ז. | $2 + \frac{5}{6} - \frac{1}{9}$ |
| ח. | $\frac{3}{4} - 1\frac{1}{5} + \frac{8}{20}$ |

(5) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

| | |
|----|---|
| א. | $\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) + 2\frac{1}{3}$ |
| ב. | $\frac{3}{14} : \frac{2}{7} + \frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{4} - \frac{2}{5}$ |
| ג. | $\frac{5}{11} \cdot 2\frac{3}{4} - 6 : \frac{2}{5}$ |
| ד. | $2\frac{4}{5} : \frac{9}{10} \cdot \frac{6}{7} + \frac{1}{6}$ |
| ה. | $\frac{5}{6} : \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot 3\frac{1}{4}$ |

תשובות סופיות:

- (1) א. 6 ב. 4 ג. 15 ד. 30 ה. 20 ו. 12
 ז. 30 ח. 24
- (2) א. $\frac{4}{5}$ ב. $\frac{7}{9}$ ג. 1 ד. $1\frac{3}{4}$ ה. $\frac{1}{2}$ ו. $\frac{1}{9}$
 ז. $-\frac{1}{4}$ ח. $-\frac{4}{5}$ ט. $1\frac{5}{8}$ י. $\frac{3}{5}$
- (3) א. $1\frac{5}{6}$ ב. $\frac{7}{10}$ ג. $\frac{7}{12}$ ד. $-\frac{1}{8}$ ה. 5 ו. $3\frac{5}{6}$
 ז. $\frac{19}{21}$ ח. $-\frac{1}{10}$
- (4) א. $2\frac{5}{6}$ ב. $1\frac{1}{6}$ ג. $3\frac{1}{12}$ ד. $1\frac{5}{12}$ ה. $7\frac{11}{12}$ ו. $-\frac{5}{8}$
 ז. $2\frac{13}{18}$ ח. $-\frac{1}{20}$
- (5) א. $2\frac{11}{24}$ ב. $1\frac{1}{10}$ ג. $-13\frac{3}{4}$ ד. $2\frac{5}{6}$ ה. $3\frac{5}{18}$

בעיות יסודיות באחוזים:

סיכום כללי:

נוסחה לביצוע חישובים עם אחוזים:

$$\text{תמורת האחוז} = \text{שלם} \cdot \frac{\text{אחוז}}{100}$$

למשל, בהינתן גודל שלם 120, אשר יש לחשב כמה הם 40 אחוזים ממנו, נקבל לפי

$$\text{הנוסחה: } 48 = 120 \cdot \frac{40}{100}, \text{ כלומר: תמורת האחוז 40 מהגודל 120 היא 48.}$$

שאלות:

- (1) בכיתה 30 תלמידים. 60% מתוכם בנות.
 - א. כמה בנות בכיתה?
 - ב. כמה בנים בכיתה?
- (2) בכיתה 28 בנות המהוות 70% מכלל התלמידים בכיתה.
 - א. כמה תלמידים בכיתה?
 - ב. כמה בנים בכיתה?
- (3) מחיר בגדים הוא 300 ₪. בסוף העונה הוא נמכר ב-20% הנחה.
 - א. מהו מחירו בסוף העונה?
 - ב. מה גודל ההנחה?
- (4) מחיר ההשקה של בושם מסוים הוא 500 ₪. לאחר מכן מועלה מחירו ב-8%.
 - א. מה מחירו הסופי?
 - ב. מה גודל ההתייקרות?
- (5) מחיר ליטר דלק הוא 5 ₪ לליטר. בחנוכה מוזל מחירו ב-7%. בפסח מועלה מחירו ב-7%. מה מחירו בסוף השנה?

6) מוצר מסויים מתייקר בסוכות ב-12%. בפורים מוזל המוצר ב-12%. מחירו בסוף השנה הוא 394.24 ₪. מה מחירו בתחילת השנה?

7) ענה על השאלות הבאות:

- א. באולם קולנוע 200 צופים, מתוכם 176 בניס. מה אחוז הבנים בקהל?
 ב. בכיתה 30 תלמידים, מתוכם 18 בנות. מה אחוז הבנות בכיתה?
 ג. מחיר מוצר התייקר מ-80 ₪ ל-120 ₪. בכמה אחוזים התייקר המוצר?
 ד. מחיר מוצר הוזל מ-120 ₪ ל-80 ₪. בכמה אחוזים הוזל המוצר?
 ה. מחיר מוצר התייקר מ-150 ₪ ל-200 ₪. בכמה אחוזים התייקר המוצר?
 ו. מחיר מוצר מוזל הוזל מ-200 ₪ ל-150 ₪. בכמה אחוזים הוזל המוצר?

תשובות סופיות:

- 1) א. 18 בנות. ב. 12 בניס.
 2) א. 40 תלמידים. ב. 12 בניס.
 3) א. 240 ₪. ב. 60 ₪.
 4) א. 540 ₪. ב. 40 ₪.
 5) א. 4.9755 ₪.
 6) א. 400 ₪.
 7) א. 88%. ב. 60%. ג. 50%. ד. 33.33%. ה. 33.33%. ו. 25%.

חזרה על תבניות מספר:

סיכום כללי:

משתנה הוא סמל המתאר כמות או גודל כלשהם אשר אינם ידועים ועשויים להשתנות. תבנית מספר היא ביטוי אלגברי אשר מכיל משתנה (או משתנים). ניתן להציב במשתנים ערכים מספריים שונים ולקבל תוצאות שונות עבור תבנית המספר עצמה.

במתמטיקה, תפקידה של תבנית המספר הוא להביע גודל מסוים אשר לערכו יש משמעויות שונות. דוגמא לכך היא: קנייה של x פריטים, אשר כל אחד עולה 3 שקלים, יניבו תבנית מספר של $3 \cdot x$ אשר מייצגת את הסכום הכולל של הפריטים.

שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- x הנתון:

א. $2x+5$ כאשר $x=3$ ב. x^2+3x כאשר $x=2$

ג. $-x^2+2x+3$ כאשר $x=5$ ד. $-x^2-9x+5$ כאשר $x=5$

ה. x^3+1 כאשר $x=-2$ ו. $4-x^3$ כאשר $x=-1$

ז. $(x+1)(2-x)$ כאשר $x=4$ ח. $x^2(3x-4)$ כאשר $x=3$

(2) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- x הנתון:

א. $27x^5-2x^3+x$ כאשר $x=\frac{1}{3}$ ב. $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+6$ כאשר $x=-\frac{2}{3}$

(3) הצב את הערכים המספריים במקום הפרמטרים וחשב את ערך תבנית המספר:

א. $a^2+2ab+b^2$ עבור: $a=3, b=-5$

ב. $(x-3)^2+3x^2b$ עבור: $x=5, b=-1$

ג. $-x^3-2xy+y^4$ עבור: $x=-2, y=-1$

ד. $\frac{(a-2c)^4}{a}-a^2$ עבור: $a=2, c=-2$

ה. $\frac{4a^2-3b}{c}$ עבור: $a=-1, b=2, c=-4$

ו. $\sqrt{c-3a}$ עבור: $c=13, a=-1$ ועבור: $c=82, a=\frac{1}{3}$

ז. $\frac{p^3+2\sqrt{q+1}}{m}$ עבור: $p=-5, q=48, m=3$

תשובות סופיות:

- (1) א. 11 ב. 10 ג. -12 ד. -65 ה. -7 ו. 5
 ז. -10 ח. 45
- (2) א. $\frac{10}{27}$ ב. $5\frac{22}{27}$
- (3) א. 4 ב. -71 ג. 5 ד. 644 ה. $\frac{1}{2}$
 ו. הצבה ראשונה: 4, הצבה שניה: 9
 ז. -37

כינוס איברים:

סיכום כללי:

תבניות אלגבריות יכולות להכיל איברים רבים ולכן נרצה לכנס אותם על מנת לפשט את התבנית. כדי לכנס איברים ניקח את כל קבוצת האיברים מאותו הסוג ונחבר את המקדמים שלהם. דוגמא: $3x + 6x - 5x = (3 + 6 - 5)x = 4x$.
 איברים שונים נבדלים זה מזה בערך התבנית האלגברית שלהם.
 כך: $3x$ שונה מ- $4y$ ושונה מ- $2xy$. באותו האופן, האיברים x ו- x^2 הם שונים.

שאלות:

(1) כנס איברים דומים:

- | | |
|--|---|
| א. $5x + 7x - 4x$ | ב. $9x^2 - 2x^2 - 3x^2 - 2x^2$ |
| ג. $-10xy + 15xy + xy - 2yx$ | ד. $x^2y - 3yx^2 + x^2y$ |
| ה. $8a^2 + 10a - 5a^2 - 11a + a^2$ | ו. $2x^2 - 3m^2 - x^2 + 3m^2$ |
| ז. $3xy + y - 30y + 6yx - 7y$ | ח. $mn^2 + 4m^2n + 6n^2m - 10nm^2 + mn^2$ |
| ט. $-6 + x^3 + 4 - 3x^3 + 17x^3 - 17$ | י. $y^2 + x^2 - 5x^2 + 5y^2 + 4x^2 - 6y^2$ |
| יא. $7x^2 - 3x - 4x + 2$ | יב. $5xy + 2x - 3yx - x + 1$ |
| יג. $3 - x - x^2 + 4x + 5x^2 - 12$ | יד. $x + xy + y - 6yx - 6y - 6x$ |
| טו. $mn + n - 5m + 5nm - 14n + 3m$ | טז. $ab^2 + 6ba^2 - 6b + 16a^2b + 3b - 6b^2a$ |
| יז. $z^3 - 4z^2 + 7 - z^3 - 8 + 8z^2$ | יח. $4x^2z + 6xz^2 - 6 - xz^2 + 12 + 10zx^2$ |
| יט. $2 - x^3 - 3 - 4x^2 + 2x + x^3 + x^2 - 2$ | כ. $x^3 - 3x - 4x^2 + 2x + x^3 + x^2 - 2x^3$ |
| כא. $2a^2b + 3x^2y + 5a^2b + 10x^2y$ | כב. $12x^2y^3 + 13a^2 - 20x^2y^3 + 2a^2$ |
| כג. $2y^2 - 4x^3y^2 - 10y^2 - x^3y^2$ | כד. $-2x^3y + 5x^2 - 4yx^3 - 6x^2$ |
| כה. $2a^2b + 2b + 3a^2 + 5b$ | כו. $5a^2b - 8ab^2 + 20a^2b - 14ab^2$ |
| כז. $-12x^2 + 2y^2 + 3x^2y + 14xy^2 - 5xy^2 - 6y^2 + 2xy + 11x^2 + x^2y - 9xy$ | |
| כח. $21x^3y^3 + x^2y^2 - 3xy^3 + x^3y - 15x^2y^2 - 7x^3y + 12x^3y^3 - 4xy^3 + 4xy^3 - 6x^3y$ | |

תשובות סופיות:

- (1) א. $8x$ ב. $2x^2$ ג. $4xy$
- ד. $-x^2y$ ה. $4a^2 - a$ ו. x^2
- ז. $9xy - 36y$ ח. $8mn^2 - 6nm^2$ ט. $15x^3 - 19$
- י. $-13n - 2m + 6mn$ יא. $7x^2 - 7x + 2$ יב. $2xy + x + 1$
- יג. $4x^2 + 3x - 9$ יד. $-5x - 5y - 5xy$ יו. $-5ab^2 + 22a^2b - 3b$
- יח. $14x^2z + 5xz^2 + 6$ יז. $4z^2 - 1$ יט. $-3x^2 + 2x - 3$
- כא. $7a^2b + 13x^2y$ כב. $-8x^2y^3 + 15a^2$ כג. $-8y^2 - 5x^3y^2$
- כד. $-6x^3y - x^2$ כה. $2a^2b + 3a^2 + 7b$ כו. $25a^2b - 22ab^2$
- כז. $-x^2 - 4y^2 + 4x^2y + 9xy^2 - 7xy$
- כח. $33x^3y^3 - 14x^2y^2 - 3xy^3 - 12x^3y$

פישוט ביטויים ע"י פתיחת סוגריים:

סיכום כללי:

בעת ביצוע כפל בין שני איברים יש לכפול את המקדמים בנפרד ואת האותיות (משתנים) בנפרד.

כלל הפילוג:

$$\bullet a(b+c) = ab+ac$$

$$\bullet (a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

| | | |
|----------------------|-------------------------|--|
| א. $2x \cdot 3x$ | ב. $-4x \cdot (-7x)$ | ג. $-2x \cdot (-4x) \cdot (-3)$ |
| ד. $8m^2 \cdot 4m^3$ | ה. $3a^3 \cdot (-2a^2)$ | ו. $-b \cdot 4b^2 \cdot \frac{b^2}{2}$ |
| ז. $a \cdot 3b$ | ח. $4a^2 \cdot 7b^2$ | ט. $ab \cdot (-2a^2b)$ |

(2) פשט את הביטויים הבאים ע"י פתיחת סוגריים:

| | |
|---------------------|----------------------------|
| א. $2(3x-4)$ | ב. $2(-3x^2+5x-1)$ |
| ג. $(7x-2)4$ | ד. $(1-2x)(-2)$ |
| ה. $a(3a-1)$ | ו. $b(b^2-3b+4)$ |
| ז. $2x(5x+3)$ | ח. $5x(x^2+2x-3)$ |
| ט. $3t^2(4t-t^2+6)$ | י. $\frac{5}{2}(4d^4-3d)d$ |

3 פשט את הביטויים הבאים :

א. $5x + (3x - 2) + (-4 - 2x)$ ב. $7x + (-4x - 5) + 3x + (-1 + 7x)$

ג. $8 - (2x - 5) - (4x + 2)$ ד. $-6x - (-3x - 1) - (-7 - 4x) + 1$

ה. $(3 - 2x^2 + 4)2 + 3(x - x^2) - 6(7 - 5x) + 4x^2$

ו. $3y^2 - (y + 1 - 2y^2) + 6(5y - 6) - (-y - 4)3 + 5(y^2 + 1) - 7$

4 פשט את הביטויים הבאים :

א. $(x - 1)(x + 2)$ ב. $(x + 3)(x - 7)$

ג. $(3 - x)(x + 4)$ ד. $(3x + 4)(5x + 1)$

ה. $3(4x + 1)(2x - 3)$ ו. $-2(3x - 1)(5 - 2x)$

5 פשט את ערכי הביטויים הבאים :

א. $(x - 1)(x + 3) + 2(3 - x)$

ב. $(a + 4)(a - 2) - (a + 5)(a - 3)$

ג. $(2m - 3)(4m + 3) + 5(2m^2 - 6)$

ד. $-x^2y^2(x^3y + x^2) + 2xy(2x^3y - x^4y^2)$

תשובות סופיות:

- (1) א. $6x^2$ ב. $28x^2$ ג. $-24x^2$ ד. $32m^5$ ה. $-6a^5$ ו. $-2b^5$
 ז. $3ab$ ח. $28a^2b^2$ ט. $-2a^3b^2$
- (2) א. $6x-8$ ב. $-6x^2+10x-2$ ג. $28x-8$ ד. $-2+4x$
 ה. $3a^2-a$ ו. b^3-3b^2+4b ז. $10x^2+6x$ ח. $5x^3+10x^2-15x$
 ט. $12t^3-3t^4+18t^2$ י. $10d^5-7.5d^2$
- (3) א. $6x-6$ ב. $13x-6$ ג. $-6x+11$ ד. $x+9$ ה. $-3x^2+33x-28$
 ו. $10y^2+32y-27$
- (4) א. x^2+x-2 ב. $x^2-4x-21$ ג. $-x^2-x+12$
- ד. $15x^2+23x+4$ ה. $24x^2-30x-9$ ו. $12x^2-34x+10$
- (5) א. x^2+3 ב. 7 ג. $18m^2-6m-39$ ד. $-3x^5y^3+3x^4y^2$

פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר:

סיכום כללי:

- נוסחת ריבוע של סכום/הפרש: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
- נוסחה להפרש ריבועים: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

| | | |
|----------------|------------------|--------------------|
| א. $(x+5)^2$ | ב. $(x+2)^2$ | ג. $(4x+5)^2$ |
| ד. $(6x+2)^2$ | ה. $(7x+y)^2$ | ו. $(5x+2y)^2$ |
| ז. $(x^2+7)^2$ | ח. $(x^2+y^2)^2$ | ט. $(x^3+2y^2x)^2$ |

(2) פשט את הביטויים הבאים:

| | | |
|----------------|--------------------------------------|------------------------------------|
| א. $(x-6)^2$ | ב. $(x-2)^2$ | ג. $(5-x)^2$ |
| ד. $(6x-1)^2$ | ה. $\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2$ | ו. $\left(\frac{1}{3}x-5\right)^2$ |
| ז. $(3m-2n)^2$ | ח. $\left(x^2-\frac{3}{5}y\right)^2$ | ט. $(x^2y^2-7)^2$ |

(3) פשט את הביטויים הבאים:

| | |
|---|---|
| א. $(x-5)(x+5)$ | ב. $(3+x)(x-3)$ |
| ג. $(3x-1)(3x+1)$ | ד. $(5-7x)(7x+5)$ |
| ה. $\left(\frac{1}{2}x+6\right)\left(\frac{1}{2}x-6\right)$ | ו. $\left(5y-\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{1}{4}x+5y\right)$ |
| ז. $(x^2+y)(x^2-y)$ | ח. $(3a^2b^3-4)(3a^2b^3+4)$ |

4 פשט את הביטויים הבאים :

א. $(x+1)(x+2)-3x$ ב. $(x-5)(5x-1)+2(4+x)$
 ג. $x(2x-1)(2x+1)-4x^2(x+1)$ ד. $-(y+3x)(y-3x)+(y-3x)^2$
 ה. $x(x+3)-(6+x)(6x+2)-(x+2)^2$
 ו. $-5(x+7)(x-7)+3(2x+5)(5-x)+(x+1)^2$

תשובות סופיות:

1 א. $x^2+10x+25$ ב. x^2+4x+4 ג. $16x^2+40x+25$
 ד. $36x^2+24x+4$ ה. $49x^2+14xy+y^2$ ו. $25x^2+20xy+4y^2$
 ז. $x^4+14x+49$ ח. $x^4+2x^2y^2+y^4$ ט. $x^6+4x^4y^2+4y^4x^2$
 2 א. $x^2-12x+36$ ב. x^2-4x+4 ג. $25-10x+x^2$
 ד. $36x^2-12x+1$ ה. $9x^2-3x+\frac{1}{4}$ ו. $\frac{1}{9}x^2-3\frac{1}{3}x+25$
 ז. $9m^2-12mn+4n^2$ ח. $x^4-\frac{6}{5}x^2y+\frac{9}{25}y^2$ ט. $x^4y^4-14x^2y^2+49$
 3 א. x^2-25 ב. x^2-9 ג. $9x^2-1$ ד. $25-49x^2$
 ה. $\frac{1}{4}x^2-36$ ו. $25y^2-\frac{1}{16}x^2$ ז. x^4-y^2 ח. $9a^4b^6-16$
 4 א. x^2+2 ב. $5x^2-24x+13$ ג. $-4x^2-x$
 ד. $18x^2-6xy$ ה. $-6x^2-39x-16$ ו. $-10x^2+17x+321$

פירוק לגורמים של ביטויים אלגבריים:

סיכום כללי:

פירוק לגורמים הוא פעולה הפוכה לפתיחת סוגריים – נרצה להוציא את הגורמים המשותפים לאיברים מחוץ לסוגריים.

- פירוק לגורמים ע"י הוצאת איבר אחד משותף:

○ הוצאת מספר משותף: $2x - 8 = 2(x - 4)$

○ הוצאת אות משותפת: $x^2 - 12x = x(x - 12)$

○ הוצאת מספר ואות יחד: $3x^2 - 21x = 3x(x - 7)$

- פירוק לגורמים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר:

○ נוסחת הבינום של ניוטון: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

○ נוסחה להפרש ריבועים: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

שאלות:

- (1) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $3x - 12$ ב. $6y - 4$

ג. $20 - 8a$ ד. $4a^3 + 8b$

ה. $75m^2 + 25m + 15$ ו. $40a^2 - 8b^2 + 64c^2$

- (2) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $y^2 + 5y$ ב. $3x - 11x^3$

ג. $6y^2 + 5y^3 + 4y$ ד. $\frac{1}{2}a^7 - \frac{1}{4}a^5 + a^3$

3 פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף :

| | |
|--------------------------------|---------------------------|
| א. $2x^2 - 8x$ | ב. $3t^2 + 12t$ |
| ג. $5n^3 - 20n^2 + 50n$ | ד. $8y^2 + 6y^3 - 2y^4$ |
| ה. $4x^2y^2 + 16x^2y - 20xy^2$ | ו. $27mn - 3n^2m + 9n^3m$ |

4 פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר :

| | |
|----------------------|-----------------------|
| א. $x^2 + 10x + 25$ | ב. $x^2 + 12x + 36$ |
| ג. $y^2 - 18y + 81$ | ד. $y^2 - 22y + 121$ |
| ה. $4x^2 + 4x + 1$ | ו. $16y^2 - 8y + 1$ |
| ז. $9x^2 - 24x + 16$ | ח. $25x^2 + 70x + 49$ |

5 פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר :

| | |
|-----------------|--------------------|
| א. $r^2 - 25$ | ב. $x^2 - 81$ |
| ג. $25y^2 - 49$ | ד. $121x^2 - 1$ |
| ה. $x^2y^2 - 4$ | ו. $9y^4 - 169x^4$ |

6 פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף ונוסחאות הכפל המקוצר :

| | |
|--------------|------------------------------|
| א. $y - y^3$ | ב. $x^3 - 10x^2 + 25x$ |
| ג. $m^4 - 1$ | ד. $196x^4 - 140x^3 + 25x^2$ |

תשובות סופיות:

- (1) א. $3(x-4)$ ב. $2(3y-2)$ ג. $4(5-2a)$
- ד. $4(a^3+2b)$ ה. $5(15m^2+5m+3)$ ו. $8(5a^2-b^2+8c^2)$
- (2) א. $y(y+5)$ ב. $x(3-11x^2)$ ג. $y(6y+5y^2+4)$
- ד. $a^3\left(\frac{1}{2}a^4-\frac{1}{4}a^2+1\right)$
- (3) א. $2x(x-4)$ ב. $3t(t+4)$ ג. $5n(n^2-4n+10)$
- ד. $2y^2(4+3y-y^2)$ ה. $4xy(xy+4x-5y)$ ו. $3mn(9-n-3n^2)$
- (4) א. $(x+5)^2$ ב. $(x+6)^2$ ג. $(y-9)^2$ ד. $(y-11)^2$
- ה. $(2x+1)^2$ ו. $(4y-1)^2$ ז. $(3x-4)^2$ ח. $(5x+7)^2$
- (5) א. $(r+5)(r-5)$ ב. $(x+9)(x-9)$ ג. $(5y+7)(5y-7)$
- ד. $(11x+1)(11x-1)$ ה. $(xy+2)(xy-2)$ ו. $(3y^2+13x^2)(3y^2-13x^2)$
- (6) א. $y(1+y)(1-y)$ ב. $x(x-5)^2$ ג. $(m^2+1)(m+1)(m-1)$
- ד. $x^2(14x-5)^2$

פירוק הטרינום:

סיכום כללי:

טרינום משמעו תלת איבר מהצורה: $ax^2 + bx + c$ כאשר a, b ו- c הם מספרים כלשהם.

שיטת הטרינום מאפשרת לפרק את תלת האיבר ל-4 איברים ע"י פיצול האיבר bx לשני איברים באופן כזה שמאפשר להוציא גורם משותף.

הכלל הוא למצוא שני מספרים, m_1 ו- m_2 , שמקיימים: $m_1 \cdot m_2 = ac$ ו- $m_1 + m_2 = b$.
לאחר מכן ניתן לפרק את הטרינום: $ax^2 + bx + c = ax^2 + m_1x + m_2x + c$.
השלב האחרון הוא הוצאת גורם משותף מכל זוג: $ax^2 + \underbrace{m_1x + m_2x} + c$.

הערה:

במקרה שנוסחת השורשים ידועה, ניתן להיעזר בה כדי למצוא את המספרים m_1 ו- m_2 באופן

הבא: $m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ולאחר מכן ניתן לכתוב את הטרינום

כמכפלה: $ax^2 + bx + c = a(x - m_1)(x - m_2)$. אם קיים פתרון (שורש) אחד $m_1 = m_2 = \frac{-b}{2a}$

אז נכתוב: $ax^2 + bx + c = a(x - m_1)^2$ ואם לא קיימים פתרונות אז לא קיים פירוק כלל.

שאלות:

1) פרק את הביטויים הבאים לפי פירוק טרינום:

| | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| א. $x^2 + 5x + 4$ | ב. $x^2 - 8x + 15$ | ג. $x^2 - 33x + 62$ |
| ד. $2x^2 + 7x - 15$ | ה. $3x^2 - 11x + 6$ | ו. $6x^2 + 5x + 1$ |
| ז. $2x^2 + x - 6$ | ח. $x^2 - 18x + 81$ | ט. $x^2 + 2x + 8$ |

2) פרק את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחת השורשים.
הערה: במידה ולא למדת על נוסחת השורשים התעלם משאלה זו.

| | |
|----------------------|--------------------|
| א. $6x^2 + 5x + 1$ | ב. $x^2 + 5x + 4$ |
| ג. $4x^2 + 20x + 25$ | ד. $3x^2 - x + 20$ |

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } (x+1)(x+4) \quad \text{ב. } (x-3)(x-5) \quad \text{ג. } (x-2)(x-31)$$

$$\text{ד. } (2x-3)(x+5) \quad \text{ה. } (3x-2)(x-3) \quad \text{ו. } (3x+1)(2x+1)$$

$$\text{ז. } (x+2)(2x-3) \quad \text{ח. } (x-9)^2 \quad \text{ט. אין פירוק.}$$

$$(2) \quad \text{א. } 6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) \quad \text{ב. } (x+1)(x+4) \quad \text{ג. } (2x+5)^2 \quad \text{ד. אין פירוק.}$$

שברים אלגברים:

סיכום כללי:

הגדרה:

שבר אלגברי מורכב משתי תבניות, אשר אחת מחלקת את השנייה.

$$\text{דוגמא לשברים אלגבריים: } \frac{x+1}{x+2}, \frac{3x}{x^2+1}, \frac{4}{x-x^3}$$

במקרה בו המכנה הוא מספר, לא מדובר בשבר אלגברי מכיוון שניתן לכתוב את

$$\text{הביטוי ללא צורך בחילוק בין ביטויים שונים כגון: } \frac{3x+5}{4} = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$

תחום הגדרה של שבר:

היות ושבר אלגברי הוא תבנית אשר יכולה לקבל ערכים שונים בעת הצבות שונות, חשוב להגביל את המספרים שניתן להציב באופן כזה שלא תתקבל חלוקה באפס.

$$\text{דוגמא: השבר } \frac{1}{x+4} \text{ לא מוגדר כאשר } x = -4 \text{ מכיוון שמתקבל: } \frac{1}{0}$$

במקרים אלו נדרוש **תנאי** על המשתנה אשר יכתב באופן הבא: $x \neq -4$ ומשמעו היא ש- x יכול לקבל על ערך מספרי אפשרי למעט -4, מכיוון שבמקרה זה השבר לא מוגדר.

כלל צמצום שברים אלגברים:

ניתן לצמצם שברים אלגברים ע"י הבאת המונה והמכנה למכפלה של ביטויים. במידה וקיימות פעולות החיבור והחיסור בין איברים שונים לא ניתן לבצע צמצום של איברים דומים בין המונה והמכנה. להלן מספר דוגמאות הנוגעות לצמצומים:

$$\bullet \text{ צמצום ע"י הוצאת גורם משותף: } \frac{2x+8}{x+4} = \frac{2(x+4)}{x+4} = \frac{2 \cdot 1}{1} = 2$$

$$\bullet \text{ צמצום ע"י נוסחת כפל מקוצר: } \frac{3x-15}{x^2-10x+25} = \frac{3(x-5)}{(x-5)^2} = \frac{3 \cdot 1}{x-5} = \frac{3}{x-5}$$

$$\bullet \text{ צמצום ע"י פירוק טרינום: } \frac{x^2-2x-3}{x^2-3x-4} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-4)} = \frac{x-3}{x-4}$$

שאלות:

(1) מצא את תחום ההגדרה של השברים האלגבריים הבאים:

| | |
|-----------------------------------|--------------------------|
| $\frac{5}{x-6}$.ב. | $\frac{x+4}{x+3}$.א. |
| $\frac{x^2+1}{x^2-4x}$.ד. | $\frac{x+7}{2x-8}$.ג. |
| $\frac{x^2}{x^2-4}$.ו. | $\frac{3}{x^2+2x+1}$.ה. |
| $\frac{8x-2}{3x^3-15x^2+12x}$.ח. | $\frac{6}{y^4-y^2}$.ז. |

(2) צמצם את השברים הבאים (במידה ולא ניתן צמצם הסבר מדוע):

| | |
|------------------------------|-------------------------|
| $\frac{a-x}{a}$.ב. | $\frac{ax}{a}$.א. |
| $\frac{x+1}{y+1}$.ד. | $\frac{a-ax}{a}$.ג. |
| $\frac{6x}{6y}$.ו. | $\frac{x}{x+y}$.ה. |
| $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$.ח. | $\frac{x^2y}{xy^2}$.ז. |
| $\frac{3x^2}{x^2+3}$.י. | $\frac{4x^2y}{xy}$.ט. |

(3) צמצם את השברים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף וכתוב את תחום הגדרתם:

| | |
|------------------------------------|------------------------------|
| $\frac{m^2+4m}{4m+16}$.ב. | $\frac{3x+12}{x+4}$.א. |
| $\frac{x^2-5x}{15-3x}$.ד. | $\frac{2a-12}{a^2-6a}$.ג. |
| $\frac{4x^3-2x^2}{6x-3}$.ו. | $\frac{3-18y^2}{6y^2-1}$.ה. |
| $\frac{3z^3-12z^2+4z}{z^2+5z}$.ח. | $\frac{3y}{y^3-3y^2}$.ז. |

4) צמצם את השברים הבאים ע"י פירוק לגורמים וכתוב את תחום הגדרתם:

| | |
|--|--|
| $\frac{8n - n^2}{n^2 - 16n + 64} \quad \text{ב.}$ | $\frac{x^2 + 10x + 25}{2x + 10} \quad \text{א.}$ |
| $\frac{4m^2 + 20m + 25}{4m^2 + 10m} \quad \text{ד.}$ | $\frac{z^3 - 4z^2}{2z^2 - 16z + 32} \quad \text{ג.}$ |
| $\frac{a^3 + 4a^2b + 4ab^2}{3ab + 6b^2} \quad \text{ו.}$ | $\frac{18y^2 - 24y + 8}{2y - 3y^2} \quad \text{ה.}$ |

5) צמצם את השברים הבאים ע"י טרינום ריבועי וכתוב את תחום הגדרתם:

| | |
|--|---|
| $\frac{m^2 - 12m + 32}{m - 4} \quad \text{ב.}$ | $\frac{x + 2}{x^2 - 3x - 10} \quad \text{א.}$ |
| $\frac{3z^2 + 26z + 16}{3z + 2} \quad \text{ד.}$ | $\frac{4y - 10}{2y^2 + y - 15} \quad \text{ג.}$ |
| $\frac{9n^2 - 12n}{4 + 5n - 6n^2} \quad \text{ו.}$ | $\frac{x^2 + 5x - 36}{x^3 + 9x^2} \quad \text{ה.}$ |
| $\frac{x^2 - 14x + 49}{x^2 + x - 56} \quad \text{ח.}$ | $\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 5x + 6} \quad \text{ז.}$ |
| $\frac{m^3n - m^2n^2 - m^2 + mn}{2m^2n^3 + mn^2 - 3n} \quad \text{י.}$ | $\frac{3a^2b - 10ab^2 + 3b^3}{-3a^3b + 11a^2b^2 - 6ab^3} \quad \text{ט.}$ |

תשובות סופיות:

- (1) א. $x \neq -3$ ב. $x \neq 6$ ג. $x \neq 4$ ד. $x \neq 0, x \neq 4$
 ה. $x \neq -1$ ו. $x \neq -2, x \neq 2$ ז. $y \neq 0, y \neq -1, y \neq 1$
 ח. $x \neq 0, x \neq 1, x \neq 4$
- (2) א. x ב. לא ניתן לצמצם. ג. $1-x$
 ד. לא ניתן לצמצם. ה. לא ניתן לצמצם. ו. $\frac{x}{y}$ ז. $\frac{x}{y}$
 ח. לא ניתן לצמצם. ט. $4x$ י. לא ניתן לצמצם.
- (3) א. $x \neq -4, 3$ ב. $\frac{m}{4}, m \neq -4$ ג. $\frac{2}{a}, a \neq 0, 6$
 ד. $-\frac{x}{3}, x \neq 5$ ה. $-3, y \neq \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$ ו. $\frac{2x^2}{3}, x \neq \frac{1}{2}$
 ז. $\frac{3}{y(y-3)}, y \neq 0, 3$ ח. $\frac{3z^2-12z+4}{z+5}, z \neq 0, -5$
- (4) א. $\frac{x+5}{2}, x \neq -5$ ב. $\frac{n}{8-n}, n \neq 8$ ג. $\frac{z^2}{2(z-4)}, z \neq 4$
 ד. $\frac{2m+5}{2m}, m \neq 0, -\frac{5}{2}$ ה. $\frac{2(2-3y)}{y}, y \neq 0, \frac{2}{3}$ ו. $\frac{a(a+2b)}{3b}, b \neq 0, a \neq -2b$
- (5) א. $\frac{1}{x-5}, x \neq 5, -2$ ב. $m-8, m \neq 4$ ג. $\frac{2}{y+3}, x \neq -3, \frac{5}{2}$
 ד. $z+8, z \neq -\frac{2}{3}$ ה. $\frac{x-4}{x^2}, x \neq 0, -9$ ו. $\frac{-3n}{2n+1}, n \neq -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}$
 ז. $\frac{x+2}{x+3}, x \neq -2, -3$ ח. $\frac{x-7}{x+8}, x \neq 7, -8$
 ט. $\frac{3a-b}{a(2b-3a)}, a \neq 0, b \neq 0, a \neq 3b, 2b \neq 3a$ י. $\frac{m(m-n)}{n(2mn+3)}, mn \neq 1, -\frac{3}{2}, n \neq 0$

כפל וחילוק של שברים אלגבריים:

סיכום כללי:

כפל שברים יתבצע ע"י הכפלת כל מונה בנפרד והכפלת כל מכנה בנפרד.
חילוק שברים יתבצע ע"י לקיחת ההופכי של שבר המחלק וביצוע פעולת כפל.

$$\bullet \text{ דוגמא לכפל שברים: } \frac{x+1}{x^2} \cdot \frac{x}{3x+3} = \frac{x+1}{x^2} \cdot \frac{x}{3(x+1)} = \frac{\cancel{x}(x+1)}{3x^{\cancel{2}}(x+1)} = \frac{1}{3x}$$

$$\bullet \text{ דוגמא לחילוק שברים: } \frac{4x}{y} : \frac{12}{y^2+y} = \frac{4x}{y} \cdot \frac{y^2+y}{12} = \frac{\cancel{4}x}{\cancel{y}} \cdot \frac{\cancel{y}(y+1)}{\cancel{12}_3} = \frac{x(y+1)}{3}$$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

| | |
|---|---|
| א. $\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{8}$ | ב. $\frac{x}{3} \cdot \frac{9}{x^2}$ |
| ג. $7y \cdot \frac{5}{y^2}$ | ד. $6x^2 \cdot \frac{3}{40x}$ |
| ה. $(x^2+3x) \cdot \frac{2}{3x+9}$ | ו. $(a^2-25) \cdot \frac{20}{5a+25}$ |
| ז. $\frac{w^2-9}{w} \cdot \frac{w^2}{2w+6}$ | ח. $\frac{y+4}{y^2+16} \cdot \frac{y^2-16}{2y+8}$ |
| ט. $\frac{z^2+30z+225}{6z+90} \cdot \frac{12}{2z-10}$ | י. $\frac{5n^2}{n^2-121} \cdot \frac{2n^2+44n+242}{n+2} \cdot \frac{n^2+4n+4}{n}$ |

(2) פשט את הביטויים הבאים:

| | |
|---|--|
| א. $\frac{x}{8} : \frac{x}{6}$ | ב. $\frac{y}{25} : \frac{5}{y}$ |
| ג. $a^2 : \frac{1}{6a}$ | ד. $\frac{5}{6a} : a^2$ |
| ה. $(d^2-3d) : \frac{5d-15}{5d}$ | ו. $\frac{t}{t+4} : \frac{3t}{t+4}$ |
| ז. $\frac{y^2+8y+16}{8y^2} : \frac{y^2-16}{7y^2}$ | ח. $\frac{a^2-64}{a^2-36} : \frac{a+8}{a+6}$ |

תשובות סופיות:

(1) א. $\frac{x^2}{24}$ ב. $\frac{3}{x}$ ג. $\frac{35}{y}$ ד. $\frac{9x}{20}$ ה. $\frac{2x}{3}$

ו. $4(a-5)$ ז. $\frac{w(w-3)}{2}$ ח. $\frac{y^2-16}{2y^2+32}$ ט. $\frac{z+15}{z-5}$ י. $\frac{10n(n+11)(n+2)}{n-11}$

(2) א. $\frac{3}{4}$ ב. $\frac{y^2}{125}$ ג. $6a^3$ ד. $\frac{5}{6a^3}$ ה. d^2 ו. $\frac{1}{3}$

ז. $\frac{7(y+4)}{8(y-4)}$ ח. $\frac{a-8}{a-6}$

חיבור וחסור של שברים אלגברים:

סיכום כללי:

ביצוע פעולת החיבור והחסור תתבצע באופן זהה לשברים מספריים. נרצה להרחיב את השברים כך שהמכנה של שניהם יהיה זהה, ולאחר מכן נחבר את המונים. כדי להרחיב את השברים נעזר בפעולת מציאת מכנה משותף. לשם כך נעזר בפירוקים השונים כדי להביא את הביטויים שבכל מכנה לצורתם המופשטת. דוגמא לחיבור שברים בעלי אותו מכנה:

$$\frac{1}{x} + \frac{x+1}{x} = \frac{1+(x+1)}{x} = \frac{x+2}{x}$$

דוגמא לחיבור מספר לשבר אלגברי:

$$2 + \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+2)}{x+2} + \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+2)+3}{x+2} = \frac{2x+7}{x+2}$$

דוגמא לחיבור שברים עם מכנים שונים (ע"י פעולת מכנה משותף):

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{x}{x(x+1)} + \frac{x+1}{x(x+1)} = \frac{x+x+1}{x(x+1)} = \frac{2x+1}{x(x+1)}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י שימוש בפירוק לגורמים (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{1}{x^2-3x} + \frac{3}{x-3} = \frac{1}{x^2-3x} + \frac{3x}{x^2-3x} = \frac{1+3x}{x^2-3x}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{3}{x^2-6x+9} - \frac{2}{x^2-9} = \frac{3}{(x-3)^2} - \frac{2}{(x-3)(x+3)} = \frac{3(x+3)-2(x-3)}{(x-3)^2(x+3)} = \frac{x+15}{(x-3)^2(x+3)}$$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{a}{6} + \frac{a-5}{6}$

ג. $\frac{x-2}{x+1} + \frac{3+4x}{x+1}$

ב. $\frac{5}{x} + \frac{4x+3}{x}$
ד. $\frac{7z}{2z-3} - \frac{4z}{2z-3} - \frac{z+3}{2z-3}$

(2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{ab} - \frac{5}{bc}$

ג. $\frac{c}{ab} - \frac{ad}{bc} + \frac{2b}{cd}$

ה. $\frac{1}{(y+1)^2} + \frac{3}{y+1}$

ב. $\frac{1}{xy} + \frac{5}{yz} + \frac{4}{xz}$

ד. $-\frac{5}{x} + \frac{x+1}{xy^2}$

ו. $\frac{3}{z(z-3)} - \frac{2}{z(z-2)}$

(3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $1 - \frac{2}{x}$

ג. $2 + \frac{2}{x+1}$

ה. $\frac{a+1}{a^2} - \frac{3-a}{4a} - 3$

ב. $1 + \frac{3}{y^2}$

ד. $3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x}$

ו. $\frac{x}{9yz} + \frac{z}{3y^2x} + \frac{3-y}{12xz} - 3\frac{1}{2}$

(4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{x+1} + \frac{1}{x}$

ג. $\frac{a+1}{a+2} + \frac{3}{a}$

ב. $\frac{4}{y+2} - \frac{3}{y}$

ד. $\frac{1}{z+3} + \frac{2}{3z} - \frac{3}{z}$

5 פשט את הביטויים הבאים :

א. $\frac{24}{a^2-9} + \frac{4}{a+3}$

ג. $\frac{y}{(y-2)^2} + \frac{3y}{4-y^2}$

ה. $\frac{x-1}{x^2+3x-40} + \frac{2}{-x^2+8x-15}$

ז. $\frac{x}{x-3} + \frac{9-x}{x^2-8x+15}$

ב. $\frac{3}{x^2-16} + \frac{2}{(x+4)^2}$

ד. $\frac{3z}{z^2+4z+3} - \frac{z+0.5}{z^2+2z+1}$

ו. $\frac{2a+3}{2a^2+15a+7} + \frac{a+3}{a^2+14a+49}$

ח. $\frac{1}{a-b} + \frac{2}{a+2b} - \frac{3b}{a^2+ab-2b^2}$

6 פשט את הביטויים הבאים :

א. $\frac{4}{x} \cdot \frac{x^2}{8} + \frac{9}{x+1} \cdot \frac{x+1}{18}$

ג. $\frac{7}{y^2} : \frac{6}{y^3} - \frac{y-4}{63} \cdot \frac{3y-4}{y^2-8y+16}$

ה. $\left(\frac{2x+1}{20x^2-28x-3} - \frac{3x+1}{30x^2-17x-2} \right) : \frac{18x+3}{6x^2-13x+6}$

ב. $\left(\frac{2}{x} + 1 \right) \cdot \frac{x^2}{7x+14}$

ד. $\left(3x - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} \right) : \frac{6x^3+2x-4}{x^2}$

תשובות סופיות:

$$1. \text{ד.} \quad \frac{5x+1}{x+1} \text{ג.} \quad \frac{4x+8}{x} \text{ב.} \quad \frac{2a-5}{6} \text{א.} \quad (1)$$

$$\frac{c^2d - a^2d^2 + 2ab^2}{abcd} \text{ג.} \quad \frac{z+5x+4y}{xyz} \text{ב.} \quad \frac{c-5a}{abc} \text{א.} \quad (2)$$

$$\frac{1}{(z-2)(z-3)} \text{ו.} \quad \frac{3y+4}{(y+1)^2} \text{ה.} \quad \frac{-5y^2+x+1}{xy^2} \text{ד.}$$

$$\frac{2x+4}{x+1} \text{ג.} \quad \frac{y^2+3}{y^2} \text{ב.} \quad \frac{x-2}{x} \text{א.} \quad (3)$$

$$\frac{4x^2y+12z^2+9y^2-3y^3-126xy^2z}{36xy^2z} \text{ו.} \quad \frac{-11a^2+a+4}{4a^2} \text{ה.} \quad \frac{9x-2}{3x} \text{ד.}$$

$$-\frac{4z+21}{3z(z+3)} \text{ד.} \quad \frac{a^2+4a+6}{a(a+2)} \text{ג.} \quad \frac{y-6}{y(y+2)} \text{ב.} \quad \frac{4x+1}{x(x+1)} \text{א.} \quad (4)$$

$$\frac{2y(4-y)}{(y-2)^2(y+2)} \text{ג.} \quad \frac{5x+4}{(x-4)(x+4)^2} \text{ב.} \quad \frac{4}{a-3} \text{א.} \quad (5)$$

$$\frac{4(a^2+6a+6)}{(a+7)^2(2a+1)} \text{ו.} \quad \frac{x^2-6x-13}{(x+8)(x-5)(x-3)} \text{ה.} \quad \frac{(4z+3)(z-1)}{2(z+1)^2(z+3)} \text{ד.}$$

$$\frac{3}{a+2b} \text{ח.} \quad \frac{x-3}{x-5} \text{ז.}$$

$$\frac{1}{2} \text{ד.} \quad \frac{147y^2-594y+8}{126(y-4)} \text{ג.} \quad \frac{x}{7} \text{ב.} \quad \frac{x+1}{2} \text{א.} \quad (6)$$

$$\frac{1}{3(10x+1)} \text{ה.}$$

שברים כפולים:

סיכום כללי:

שבר כפול מורכב באופן הבא: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ כאשר מתקיים: $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

נובע מכאן כי ניתן לצמצם ביטויים בין שני המכנים או שני המונים בלבד.

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

| | | |
|--------------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|
| $\frac{5}{30t^2}$.ג | $\frac{y+1}{2y+2}$.ב | $\frac{4x}{12}$.א |
| $\frac{4x}{x+1}$.ו | $\frac{3y^3 - y^2}{25}$.ה | $\frac{t^2 - 81}{9t^2}$.ד |
| $\frac{1}{x} - 4 + \frac{x}{x+1}$.ט | $\frac{t^2 - t - 20}{16t + 8}$.ח | $\frac{8c^2}{3c^3 - 9c^2 - 12c}$.ז |
| $\frac{1-3x(x+1)}{5x+5}$ | $\frac{25-t^2}{2t+1}$ | $\frac{40}{15c+15}$ |

תשובות סופיות:

| | | | | |
|-----------------------------|--------------------------|---------------------|-----------------------|------------------------|
| $\frac{(3y-1)(3-y)}{25}$.ה | $\frac{t-9}{54t^2}$.ד | $\frac{1}{6t^3}$.ג | 2.5 .ב | $\frac{x^2}{3}$.א (1) |
| $\frac{5}{x}$.ט | $\frac{t+4}{-8(t+5)}$.ח | $\frac{c}{c-4}$.ז | $\frac{x(x+1)}{2}$.ו | |

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 2 - משוואות אלגבריות

תוכן העניינים

| | |
|----|---|
| 47 | 1. משוואות ממעלה ראשונה |
| 49 | 2. מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה |
| 52 | 3. משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון |
| 53 | 4. משוואה ממעלה שנייה |
| 55 | 5. משוואות דו-ריבועיות |
| 57 | 6. משוואות עם פרמטרים |
| 59 | 7. משוואות עם שורשים |
| 61 | 8. משוואות עם ערך מוחלט |
| 62 | 9. מערכת משוואות ממעלה שנייה |
| 64 | 10. משוואות מתקדמות מסכמות |
| 67 | 11. פישוט ביטויים ומשוואות ממעלה שלישית |

משוואה ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה היא מהצורה: $ax = b$ (כלומר, החזקה של הנעלם היא 1).

פתרון של משוואה ממעלה ראשונה הוא $x = \frac{b}{a}$ כאשר $a \neq 0$.

שלבי הפתרון הם:

1. ביצוע מכנה משותף (במידה וצריך).
2. פתיחת סוגריים אם ישנם.
3. העברת אגפים וכינוס אברים דומים (בידוד הנעלם באגף אחד והמספרים באגף שני).
4. בידוד הנעלם ומציאתו ע"י חילוק במקדם שלו.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות ממעלה ראשונה):

ב. $7 - 2x = 7$

א. $6x + 2 = 8$

ד. $2x + 6 = 8 + x$

ג. $2x + x = 24$

ו. $6x - 3 + 5 - 7x = x - 5x - 7$

ה. $-7x + 5 + 2x = 4x - 13$

ח. $x - 2 + 5x = 4 - 3x - 5 + 7x + 7$

ז. $2 - 5x + 7 = -3x + 8$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פתיחת סוגריים):

ב. $7x - 4(3 - 4x) = -x$

א. $3(x - 1) - 4 = 2$

ד. $5x - (3x - 7)4 = 21$

ג. $6(4 - x) - (6 - x) = 3x$

ו. $(7 - x)(1 - x) - (x - 3)^2 = 0$

ה. $x(x - 5) = x^2 - 7x + 8$

3 פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה מספרי):

$$\begin{array}{ll}
 \text{א. } \frac{x}{3} - \frac{x}{9} = -4 & \text{ב. } \frac{4x}{15} - \frac{3x}{10} = 1 \\
 \text{ג. } \frac{2}{3}x + \frac{4}{5}x = x - \frac{7}{15} & \text{ד. } \frac{5x+1}{6} - \frac{6x-1}{5} = \frac{3x+1}{4} - 1 \\
 \text{ה. } \frac{2}{5}(x-3) - \frac{3}{15}(4-x) = x+2 & \text{ו. } 5\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{7}\right) - x = 1
 \end{array}$$

4 פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם נעלם במכנה):

$$\begin{array}{ll}
 \text{א. } \frac{1}{4} - \frac{2}{x} = 0 & \text{ב. } \frac{1}{2} - \frac{x}{x-1} = 0 \\
 \text{ג. } \frac{3}{x} = \frac{1}{x+2} & \text{ד. } \frac{5}{2x-1} = \frac{4}{3x+2} \\
 \text{ה. } \frac{x+5}{3x^2} - \frac{1}{6x} = \frac{1}{x} & \text{ו. } \frac{1}{4x} + \frac{3}{x} = \frac{13}{2}
 \end{array}$$

5 פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה משותף ע"י פירוק לגורמים):

$$\begin{array}{ll}
 \text{א. } \frac{x^2+2}{3x^2+5x} = \frac{3x-1}{9x+15} & \text{ב. } \frac{7}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{2-2x} = 0 \\
 \text{ג. } \frac{3}{(2-x)^2} + \frac{5}{12-3x^2} = 0 & \text{ד. } \frac{4x^2-24x+36}{x-3} = 12
 \end{array}$$

תשובות סופיות:

- (1) א. $x=1$ ב. $x=0$ ג. $x=8$ ד. $x=2$ ה. $x=2$ ו. $x=-3$
- ז. $x=\frac{1}{2}$ ח. $x=4$
- (2) א. $x=3$ ב. $x=\frac{1}{2}$ ג. $x=2\frac{1}{4}$ ד. $x=1$ ה. $x=4$ ו. $x=-1$
- (3) א. $x=-18$ ב. $x=-30$ ג. $x=-1$ ד. $x=1$ ה. $x=-10$ ו. $x=-21$
- (4) א. $x=8$ ב. $x=-1$ ג. $x=-3$ ד. $x=-2$ ה. $x=2$ ו. $x=\frac{1}{2}$
- (5) א. $x=-6$ ב. $x=-7$ ג. $x=-7$ ד. $x=6, x \neq 3$

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

הגדרה:

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (ליניאריות) היא מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

כאשר a_1, b_1, c_1 ו- a_2, b_2, c_2 הם מקדמים מספריים.

$$\cdot \begin{cases} y = 3x - 1 \\ \frac{x + 3}{2} = y + 6 \end{cases}, \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} : \text{דוגמאות למערכות של משוואות}$$

פתרון של מערכת משוואות:

פתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור המקיים את כל המשוואות שבמערכת.

הצגה גרפית של מערכת משוואות:

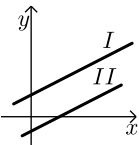
פתרון גרפי של מערכת משוואות הוא נקודת החיתוך של הישרים המייצגים כל משוואה.

יתכנו שלושה מצבים הדדיים בין שני ישרים:



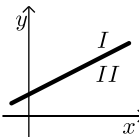
- הישרים נחתכים:

במקרה זה נקודת החיתוך תהיה פתרון המערכת.



- הישרים מקבילים:

במקרה זה לא יהיה פתרון למערכת.



- הישרים מתלכדים:

במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות למערכת המשוואות.

פתרון אלגברי של מערכת משוואות:

- פתרון ע"י שיטת ההצבה :
נבודד את אחד הנעלמים ממשוואה אחת ונציב אותו במשוואה השנייה.
נבחר בשיטה זו במקרים בהם קל לבודד נעלם באחת המשוואות.
 - פתרון ע"י השוואת מקדמים :
1. כופלים (או מחלקים) משוואה אחת (או שתיהן) במספר השונה מאפס כך שתתקבלנה משוואות שקולות בעלות מקדמים נגדיים או זהים עבור אחד המשתנים.
 2. מחברים (או מחסרים) את המשוואות ומקבלים משוואה חדשה עם נעלם אחד.
 3. מוצאים את ערך הנעלם מהמשוואה החדשה ומציבים אותו באחת המשוואות המקוריות למציאת ערך הנעלם השני.

הערה:

נוח להשתמש בשיטת השוואת המקדמים ע"י כך שמעבירים את המערכת הנתונה למערכת שקולה שבה המשתנים באגף אחד והמספר החופשי באגף השני.

שאלות:

1) פתור את המשוואות הבאות :

| | | |
|---|---|--|
| $\begin{cases} -3x + 2y = -16 \\ x = 5y + 14 \end{cases} \quad \text{ג.}$ | $\begin{cases} y = x - 3 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \quad \text{ב.}$ | $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ y = 5 \end{cases} \quad \text{א.}$ |
| $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 7y = 11 \end{cases} \quad \text{ו.}$ | $\begin{cases} -5x + 7y = -26 \\ x + 3y = -8 \end{cases} \quad \text{ה.}$ | $\begin{cases} 5x - 2y = -2 \\ x + 4y = 4 \end{cases} \quad \text{ד.}$ |

2) פתור את המשוואות הבאות :

| | |
|--|--|
| $\begin{cases} 5x + 2y = 14 \\ 5x + 3y = 23 \end{cases} \quad \text{ב.}$ | $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x - 3y = 3 \end{cases} \quad \text{א.}$ |
| $\begin{cases} 4x = 3y - 29 \\ 5y = 9 - 13x \end{cases} \quad \text{ד.}$ | $\begin{cases} 5y = 2x \\ 4x = 5y + 8 \end{cases} \quad \text{ג.}$ |

3) פתור את המשוואות הבאות :

| | |
|--|---|
| $\begin{cases} 2(x - y) + 4y = 1 + x \\ 2 - 7y + x = 3(x - y) \end{cases} \quad \text{ב.}$ | $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 4x + 8y = 5 \end{cases} \quad \text{א.}$ |
|--|---|

4 פתור את המשוואות הבאות :

$$\begin{cases} \frac{x-3}{8} - \frac{x+y}{16} = \frac{y-1}{4} & \text{ב.} \\ 3(2x-y) - 4x - 11 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y - x + 2 = 4x + 2 - 3y & \text{א.} \\ 2x - 3 - y = 5y - 4x + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3x-1}{4} - \frac{2}{5}(x-y) = \frac{3}{10}(x+3) & \text{ג.} \\ \frac{x+1}{4} - \frac{y}{2} = 1 \end{cases}$$

5 פתור את המשוואות הבאות :

$$\begin{cases} 4x - \frac{7}{y} = -3 & \text{ג.} \\ 5x + \frac{2}{y} = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = 2 & \text{ב.} \\ \frac{9}{x} - \frac{4}{y} = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 4 & \text{א.} \\ \frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4 \end{cases}$$

6 פתור את המשוואות הבאות :

$$\begin{cases} xy = 20 & \text{ב.} \\ y(3x-4) = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(y+2) + y = xy - 5 & \text{א.} \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 4xy = 22 & \text{ג.} \\ 6x + xy = -20 \end{cases}$$

תשובות סופיות :

1 א. (2,5) ב. (-7,-10) ג. (4,-2) ד. (0,1) ה. (1,-3) ו. (-2,3)

2 א. $(4, \frac{1}{3})$ ב. $(-\frac{4}{5}, 9)$ ג. (4,1.6) ד. (-2,7)

3 א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות.

4 א. (6,5) ב. (7,1) ג. (7,2)

5 א. (1,1) ב. (-3,1) ג. (1,1)

6 א. (-1,-3) ב. (2,10) ג. (-2,4)

משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה:

למשוואה ממעלה ראשונה מהצורה: $ax = b$ יתכן פתרון יחיד אם ורק אם $a \neq 0$
 מכיוון שניתן לחלק ולכתוב: $x = \frac{b}{a}$.

כאשר $a = 0$ מתקבלת המשוואה $0 \cdot x = b$ ויתכנו שני מצבים:

1. אם $b = 0$ את המשוואה היא $0x = 0$ ויש אינסוף פתרונות המקיימים אותה.
2. אם $b \neq 0$ את המשוואה היא $0x = b \neq 0$ ואין אף ערך של x המקיים אותה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$x + 4 = 6 + x \quad (1) \qquad 3x + 6 - x = 4 + 2x + 2 \quad (2)$$

$$6(x - 2) = 2x + 5 + 4x \quad (3) \qquad 5x - 3 + x = 4x + 2x - 3 \quad (4)$$

$$(5) \quad \text{נתונה המשוואה: } 3 - 2(x + 2) = 5x + \square$$

- א. איזה מספר יש להציב ב- \square על מנת שפתרון המשוואה יהיה 1?
- ב. איזה מספר יש להציב ב- \square על מנת שפתרון המשוואה יהיה 0?
- ג. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- \square על מנת שלמשוואה יהיו אינסוף פתרונות.
- ד. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- \square על מנת שלמשוואה לא יהיה פתרון.

תשובות סופיות:

- (1) אף פתרון.
- (2) אינסוף פתרונות.
- (3) אין פתרון.
- (4) אינסוף פתרונות.
- (5) א. -8 ב. -1 ג. $-7x - 1$
 ד. $-7x + k$ כאשר k הוא מספר כלשהו השונה מ-1.

משוואה ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

משוואה מהצורה: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), נקראת משוואה ריבועית. פתרונות המשוואה יסומנו ב- x_1 ו- x_2 ויחושבו לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

למשוואה ריבועית יתכנו שלושה סוגים של פתרונות:

- משוואה עם שני פתרונות ממשיים שונים.**
 אם מתקבל מספר חיובי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים.
 דוגמא: $x^2 + 5x - 4 = 0$.
- משוואה עם פתרון ממשי אחד בלבד.**
 אם מתקבל אפס בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד בלבד.
 דוגמא: $x^2 + 4x + 4 = 0$.
- משוואה ללא פתרונות ממשיים כלל.**
 אם מתקבל מספר שלילי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה לא יהיו פתרונות ממשיים כלל.
 דוגמא: $x^2 + x + 4 = 0$.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

ב. $-x^2 + 10x - 16 = 0$

ד. $2x^2 - 6x + 5 = 0$

א. $x^2 + 3x - 10 = 0$

ג. $25x^2 - 20x + 4 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות:

ב. $-x(x-5) = (1-3x)(1-x) + 4$

ד. $(2x-1)^2 + x(2x+3) = (x-1)(x-7)$

א. $4x^2 - 5x + 7 = 4 - x^2 + 13$

ג. $2(x-5)^2 - (2x-3)^2 = 10x + 21$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת b):

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & x^2 - 36 = 0 \\ \text{ב.} & 32x^2 - 18 = 0 \\ \text{ג.} & 4x - x(x+2) = 3(x-1) - x - 6 \\ \text{ד.} & (2x-1)^2 + (2x+1)^2 = 10 \end{array}$$

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת c):

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & -7x^2 - 14x = 0 \\ \text{ב.} & 5x^2 - x = 0 \\ \text{ג.} & 6x(x-2) - 1 = 4x - 3(x+1) + 2 \\ \text{ד.} & (5x-2)^2 = (x-2)(x+3) + 10 \end{array}$$

(5) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \frac{4x+1}{3} - \frac{x+2}{2} = \frac{2}{x} \\ \text{ב.} & \frac{x^2-9}{x+3} + x = x^2 - 18 \\ \text{ג.} & \frac{3}{2x+2} - \frac{2x-5}{2(x-1)^2} - \frac{4}{1-x^2} = 0 \\ \text{ד.} & \frac{x}{2x^2-72} + \frac{2}{x^2+12x+36} = \frac{8x-15}{24-4x} + 2 \end{array}$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{ll} \text{(1)} & \text{א. } x_1 = 2, x_2 = -5 \quad \text{ב. } x_1 = 2, x_2 = 8 \\ & \text{ג. } x = \frac{2}{5} \quad \text{ד. אין פתרון.} \\ \text{(2)} & \text{א. } x_1 = 2, x_2 = -1 \quad \text{ב. } x_1 = 1, x_2 = 1\frac{1}{4} \\ & \text{ג. } x_1 = 1, x_2 = -10 \quad \text{ד. } x_1 = 0.6, x_2 = -2 \\ \text{(3)} & \text{א. } x = \pm 6 \quad \text{ב. } x = \pm \frac{3}{4} \\ & \text{ג. } x = \pm 3 \quad \text{ד. } x = \pm 1 \\ \text{(4)} & \text{א. } x_1 = 0, x_2 = -2 \quad \text{ב. } x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{5} \\ & \text{ג. } x_1 = 0, x_2 = 2\frac{1}{6} \quad \text{ד. } x_1 = 0, x_2 = \frac{7}{8} \\ \text{(5)} & \text{א. } x_1 = 2, x_2 = -1.2 \quad \text{ב. } x = 5, x \neq -3 \\ & \text{ג. } x_1 = 0, x_2 = -5 \quad \text{ד. } x_1 = -7.6, x_2 = -4\frac{2}{7} \end{array}$$

משוואות דו-ריבועיות:

סיכום כללי:

משוואה דו-ריבועית היא משוואה מהצורה: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ כאשר הנעלם הוא x .
 פתרון המשוואה יבוצע ע"י מעבר לפרמטר: $x^2 = t \rightarrow at^2 + bt + c = 0$ ומציאתו.
 לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה ולמצוא את ערכי x .

ניתן להביא משוואות לצורה זו ולהגדיר ביטוי המופיע בחזקות 2 ו-4 כגון:
 $t = x^2 - 1$: באמצעות פרמטר: $(x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1) - 2 = 0$
 ובכך לפתור משוואה: $t^2 + 3t - 2 = 0$ ולהחזיר את ההצבה עבור מציאת x .
 דרך הפתרון תקפה לכל משוואה בה הנעלם מופיע בחזקות כפולות כגון 3 ו-6, או 4 ו-8.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \quad (2) \qquad 5x^4 + 3x^2 - 8 = 0 \quad (1)$$

$$x^2(x^2 + 1) = 10(3x^2 - 10) \quad (4) \qquad 13x^2(3x^2 - 1) - 2 = 3(x^2 - 1)(x^2 + 1) \quad (3)$$

$$x^3 + 4 = \frac{32}{x^3} \quad (6) \qquad x^6 + x^3 = 56 \quad (5)$$

$$x^8 - 4x^4 - 50 = 31x^4 - 84 \quad (8) \qquad x - 9\sqrt{x} + 14 = 0 \quad (7)$$

$$(2x^2 - x)^2 - 4(2x^2 - x) + 3 = 0 \quad (10) \qquad 125x^6 - 1 = 124(x^6 + x^3 + 1) \quad (9)$$

$$\frac{21}{x^2 - 4x + 10} = 6 + x^2 - 4x \quad (12) \qquad (x^2 + 2x)^2 + 7x^2 + 14x = -6 \quad (11)$$

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{7}{6} - \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2} \quad (14) \qquad \frac{12}{x^2 + 2x - 8} = 1 + \frac{7.5}{x^2 + 2x - 3} \quad (13)$$

$$\frac{x^2 - 1}{4x^2 - 28} + 2 = \frac{9}{x^4 - 8x^2 + 7} + \frac{x^2}{2x^2 - 2} \quad (16) \qquad \frac{3}{3x^2 - 15} + \frac{1}{x^2 + 5} = \frac{10}{x^4 - 25} \quad (15)$$

$$\frac{3x^4}{(x+2)^2} + \frac{3x^2}{x+2} = 6 \quad (18) \qquad \left(2x + \frac{3}{x}\right)^2 + 35 = 12\left(2x + \frac{3}{x}\right) \quad (17)$$

$$(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 5x - 8) = -24 \quad (20) \qquad (2x - x^2 + 3)(2x - x^2 - 2) = 0 \quad (19)$$

תשובות סופיות:

$$x = \pm 1 \quad (1)$$

$$x = \pm 1, \pm \sqrt{2} \quad (2)$$

$$x = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3} \quad (3)$$

$$x = \pm 2, \pm 5 \quad (4)$$

$$x_1 = \sqrt[3]{7}, x_2 = -2 \quad (5)$$

$$x = -2, \sqrt[3]{4} \quad (6)$$

$$x_1 = 4, x_2 = 49 \quad (7)$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{34}, x_{3,4} = \pm 1 \quad (8)$$

$$x = 5, -1 \quad (9)$$

$$x_1 = 1.5, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = -\frac{1}{2} \quad (10)$$

$$x = -1 \quad (11)$$

$$x_{1,2} = 1, 3 \quad (12)$$

$$x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 3.06, x_4 = -5.06 \quad (13)$$

$$x_1 = 0, x_2 = -2 \quad (14)$$

(15) אין פתרונות.

$$x = \pm \sqrt{\frac{3}{7}} \quad (16)$$

$$x = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 3 \quad (17)$$

$$x = -1, 2 \quad (18)$$

$$x = 3, -1 \quad (19)$$

$$x = \pm 1, 4, 6 \quad (20)$$

משוואות עם פרמטרים:

סיכום כללי:

משוואה עם פרמטר הינה משוואה שמכילה שני סוגים של גדלים – משתנים ופרמטרים. את המשתנים מקובל לסמן באותיות x , y , z ואת הפרמטרים מסמנים בשאר האותיות. פתרון המשוואה יתקבל ע"י בידוד המשתנה כך שיבוטא באמצעות הפרמטרים שבמשוואה.

למשל פתרון המשוואה: $mx=4$ (כאשר x הוא הנעלם ו- m הוא פרמטר) הוא $x = \frac{4}{m}$

אשר מבוטא באמצעות הפרמטר m .

בכתיבת פתרון של משוואה עם פרמטרים יש לציין את תחום ההגדרה של הפרמטר עבורו הפתרון הוא בעל משמעות. בדוגמא הנ"ל תחום ההגדרה הוא $m \neq 0$.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

$$\text{א. } 3x - b = (b + 1)x - 6 \quad \text{ב. } \frac{1}{3}(a - 3x) = \frac{1}{a}(ax - 3)$$

$$\text{ג. } (x - 2a)(x - 2b) = x^2 - 2(a^2 + b^2) \quad \text{ד. } \frac{m+1}{x-1} = \frac{m-1}{x+1}$$

$$\text{ה. } \frac{x}{a^2 - a} - \frac{1}{2a} = \frac{ax + x}{2a^3 - 4a^2 + 2a} - \frac{2}{a^3 - 2a^2 + a}$$

(2) פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\text{א. } \begin{cases} x + my = 1 \\ x + y = m \end{cases} \quad \text{ב. } \begin{cases} ax + y = 2 \\ x + ay = 4 \end{cases}$$

$$\text{ג. } \begin{cases} \frac{x}{m} + y = m \\ x - m^2 y = 1 \end{cases} \quad \text{ד. } \begin{cases} (m-1)x - (2m+3)y = 5 \\ (m+2)x - (2m-1)y = 10m \end{cases}$$

$$\text{ה. } \begin{cases} (2a+b)x - (2a-b)y = 8ab \\ (2a-b)x + (2a+b)y = 8a^2 - 2b^2 \end{cases}$$

(3) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

$$\text{א. } x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \quad \text{ב. } x^2 - 2x + 4a = a^2 + 3$$

$$\text{ג. } x^2 + m(x+10) = 2m^2 - 5x \quad \text{ד. } \frac{1}{a-x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+x} = 0$$

$$\text{ה. } (m^2 + 1)x^2 - m^2x - 1 = 0 \quad \text{ו. } \frac{a}{x} + \frac{1}{b} = \frac{x}{a} + b$$

$$\text{ז. } x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$$

תשובות סופיות:

$$\text{(1) א. } x = \frac{b-6}{2-b}, b \neq 2 \quad \text{ב. } x = \frac{a^2+9}{6a}, a \neq 0 \quad \text{ג. } x = a+b \quad \text{ד. } x = -m \quad \text{ה. } x = a+1$$

$$\text{(2) א. } m \neq 1, (m+1, -1) \quad \text{ב. } a \neq \pm 1, \left(\frac{2a-4}{a^2-1}, \frac{4a-2}{a^2-1} \right)$$

$$\text{ג. } m \neq 0-1, \left(m^2 - m + 1, \frac{m-1}{m} \right) \quad \text{ד. } m \neq 1, -2, (2m+1, m-2)$$

$$\text{ה. } b \neq \pm 2a, (2a+b, 2a-b)$$

$$\text{(3) א. } x = m+1, m-1 \quad \text{ב. } x = a-1, 3-a \quad \text{ג. } x = m-5, -2m$$

$$\text{ד. } a \neq 0, x \neq \pm a, x = \pm a\sqrt{3} \quad \text{ה. } x = 1, -\frac{1}{m^2+1}$$

$$\text{ו. } a, b \neq 0, x = \frac{a}{b}, -ab \quad \text{ז. } a \neq \pm b, x = \frac{a+b}{a-b}, \frac{a-b}{a+b}$$

משוואות עם שורשים:

סיכום כללי:

פתרון משוואה מהצורה: $\sqrt{x} = a$ יתקבל ע"י העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה באופן הבא: $x = a^2 \rightarrow (\sqrt{x})^2 = (a)^2$.

הערות:

- (1) יש לזכור בעת העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה יש לבדוק את כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבתם במשוואה המקורית.
- (2) למשוואה מהצורה $\sqrt{x} = a$ שבה $a < 0$ אין פתרון.
- (3) יש לסדר תחילה משוואות שבהן הביטוי עם שורש אינו מבודד.
- (4) במשוואות שבהן יותר מביטוי אחד עם שורש יש לבודד תחילה את אחד הביטויים, להעלות בריבוע ולאחר מכן לחזור על התהליך ולבצע העלאה בריבוע פעם נוספת.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- | | |
|--|---|
| $\sqrt{x+2} = x$ (2) | $\sqrt{2x+5} = 7$ (1) |
| $\sqrt{2x+7} + 4 = x$ (4) | $\sqrt{3x+1} + x = 13$ (3) |
| $\sqrt{10x+6} + 9 = x$ (6) | $\sqrt{x-1} + 3 = x$ (5) |
| $\sqrt{24-x} + 3 = 2x$ (8) | $\sqrt{x+6} - 2 = 2x$ (7) |
| $2x = 16 - 3\sqrt{x-1}$ (10) | $\sqrt{x+16} + 4 = 2x$ (9) |
| $\sqrt{x^2 - 5x + 12} = 2\sqrt{6-x}$ (12) | $\sqrt{3x+5} = \sqrt{x+17}$ (11) |
| $\sqrt{2x-1} + 3 = \sqrt{7x+1}$ (14) | $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2x-5} = \sqrt{11-x^2}$ (13) |
| $\sqrt{2x-3} + \sqrt{3-x} = 2$ (16) | $\sqrt{9x-8} - 3\sqrt{x+4} = -2$ (15) |
| $\sqrt{2x-2} + \sqrt{5x-4} = \sqrt{3x-2}$ (18) | $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4x+1}$ (17) |
| | $3\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} = 2\sqrt{x+2}$ (19) |

תשובות סופיות:

- | | |
|---------------------------|---------------|
| $x = 2$ (2 | $x = 22$ (1 |
| $x = 9$ (4 | $x = 8$ (3 |
| $x = 25$ (6 | $x = 5$ (5 |
| $x = 3.75$ (8 | $x = 0.25$ (7 |
| $x = 5$ (10 | $x = 4.25$ (9 |
| $x = 4, -3$ (12 | $x = 6$ (11 |
| $x = 5$ (14 | $x = 3$ (13 |
| $x = 2, 2\frac{8}{9}$ (16 | $x = 12$ (15 |
| $x = 1$ (18 | $x = 6$ (17 |
| | $x = 2$ (19 |

משוואות עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

הגדרה:

ערך מוחלט הינו המרחק של מספר מ-0 ומוגדר באופן הבא: $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$.

משוואה עם ערך מוחלט:

משוואה עם ערך מוחלט היא מהצורה: $|x| = a$.

כדי לפתור משוואה עם ערכים מוחלטים יש למצוא את נקודות האפס של כל ערך מוחלט (קרי: הנקודות בהן הביטוי שבתוך הערך המוחלט מתאפס) ולפצל את המשוואה הנתונה לתחומים עבור כל תחום.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$|3x+14|=7 \quad (1) \qquad |3x-24|=x \quad (2)$$

$$|12-x|=3x \quad (3) \qquad 2x-|8-x|=10 \quad (4)$$

$$|4x-5|=|2x+13| \quad (5) \qquad |14-3x|=2|x+5| \quad (6)$$

$$|x|+7=|2x| \quad (7) \qquad |x+2|+6=|2x-4| \quad (8)$$

$$|x+2|+|2x-6|=|4x+8| \quad (9) \qquad |10-3x|-|x+4|=|2x-6| \quad (10)$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{llll} x = -\frac{7}{3}, -7 & (1) & x = 6, 12 & (2) \\ x = 9, -1\frac{1}{3} & (5) & x = 24, \frac{4}{5} & (6) \\ x = 0, -12 & (9) & x = 0 & (10) \\ x = 6 & (4) & x = 3 & (3) \\ x = 12, -1\frac{1}{3} & (8) & x = \pm 7 & (7) \end{array}$$

מערכת משוואות ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

מערכת משוואות ריבועיות מיוחסת למערכת של שתי משוואות (לפחות) שאחת מהן מכילה את אחד מהנעלמים בריבוע. למערכת משוואות ריבועיות יכולים להתקבל עד 4 פתרונות שונים. יש לפתור את המערכת לפי הטכניקות הרגילות של בידוד והצבה או השוואת מקדמים.

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 36 \\ x^2 + 3y = 10 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 17 \\ xy = -10 \end{cases} \quad (4) \qquad \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 16 \\ 5x^2 - 3y^2 = 17 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 8y^2 = 8 \\ 3xy - 2y^2 = 4 \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} x^2 - xy - 20y^2 = 0 \\ x + 6y = 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} 16x^2 - y^2 = 391 \\ 4x - y = 23 \end{cases} \quad (8) \qquad \begin{cases} x^2 - y^2 = 33 \\ x + y = 11 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{4}{y} - \frac{1}{x} = -19 \end{cases} \quad (10) \qquad \begin{cases} 4xy + x = -15 \\ \frac{3}{y} - 2x = 16 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} xy = 24 \\ (y-x)^2 - 7(y-x) + 10 = 0 \end{cases} \quad (12) \qquad \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 21 \\ \frac{8}{x} - \frac{1}{y} = 13 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{10}{3} \\ x^2 + y^2 = 9xy + 25 \end{cases} \quad (14) \qquad \begin{cases} x^2y - xy^2 = 84 \\ x^2 - 2xy + y^2 + 5x - 5y = 24 \end{cases} \quad (13)$$

תשובות סופיות:

- | | |
|---|--|
| $(\pm 4, -2)$ (2) | $(2, 4), (4, 2)$ (1) |
| $(5, -2), (-5, 2)$ (4) | $(\pm 2, \pm 1)$ (3) |
| $\left(3, \frac{1}{2}\right), \left(-3, -\frac{1}{2}\right), (2, 1), (-2, -1)$ (6) | $\left(-2, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{11}, \frac{1}{11}\right)$ (5) |
| $(5, -3)$ (8) | $(7, 4)$ (7) |
| $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right)$ (10) | $\left(-5, \frac{1}{2}\right), \left(-24, -\frac{3}{32}\right)$ (9) |
| $(4, 6), (-6, -4), (3, 8), (-8, -3)$ (12) | $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ (11) |
| $(-1.65, 6.35), (-6.35, 1.65), (7, 4), (-4, -7)$ (13) | |
| $(5, 45), (-5, -45), (45, 5), (-45, -5)$ (14) | |

משוואות מסכמות מתקדמות:

סיכום כללי:

תזכורת מהירה:

- משוואה דו-ריבועית יכולה להופיע בכל תצורה (עם שורשים, עם ערכים מוחלטים וכו'). העיקרון הוא זיהוי תבנית של הנעלם אשר חוזרת על עצמה לאורך המשוואה. סימון התבנית במשתנה זמני ופתרון עבור משתנה זה תוביל למשוואה מוגדרת ופתירה. לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה לתבנית של המשתנה המקורי ולמצוא את ערכיו.
- דרך הפתרון של משוואה עם שורשים היא ע"י בידוד השורש והעלאה בריבוע. במידה ויש יותר משורש אחד המופיעים בחיבור/חיסור יש לבצע את הפעולה פעמיים. חשוב לוודא נכונות של כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבה במשוואה המקורית לפני ההעלאות בריבוע.
- דרך הפתרון של משוואה עם ערכים מוחלטים היא ע"י פיצול המשוואה לתחומים לפי סימני הערך המוחלט. זאת יש לבצע ע"י איפוס הביטוי שבכל ערך מוחלט ומציאת ערכי הנעלם המקיימים זאת, חלוקת המשוואה לתחומים מתאימים ופתרונה בכל תחום. יש לזכור לבדוק האם הפתרון המתקבל נמצא בתחום הפתרון – במידה וכן הוא פתרון של המשוואה, אחרת הוא נפסל.
- משוואה עם פרמטר/ים נפתרת בצורה רגילה (התייחסות לפרמטר/ים כאל קבועים מספריים) כאשר יש לציין את תחומי ההגדרה שלהם. יש לבדוק פתרונות שמתקבלים המבוטאים באמצעות הפרמטר/ים במידה וקיימת הגבלת תחום הגדרה במשוואה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 x^2 + 5x - \sqrt{x^2 + 5x} - 30 = 0 & \text{(2)} & x + \sqrt{x+6} - 6 = 0 & \text{(1)} \\
 2x^2 + 6x - \sqrt{x^2 + 3x + 5} = 5 & \text{(4)} & 4x^2 + 16x - 4\sqrt{x^2 + 4x} - 3 = 0 & \text{(3)} \\
 x^2 - \sqrt{6x^2 - 15} = 1 & \text{(6)} & x^2 - \sqrt{16x^2 + 48} + 7 = 0 & \text{(5)} \\
 \frac{\sqrt{x^2 + 4x - 12}}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+5} = \frac{7}{\sqrt{x-1}} & \text{(8)} & \frac{x^2}{\sqrt{3x-2}} - \sqrt{3x-2} = 1-x & \text{(7)} \\
 \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3} & \text{(9)} & & \\
 \sqrt{x + \sqrt{14x - 49}} + \sqrt{x - \sqrt{14x - 49}} = \sqrt{14} & \text{(10)} & & \\
 \sqrt{x+6+6\sqrt{x-3}} - \sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}} = 2 & \text{(11)} & & \\
 \frac{4}{x + \sqrt{x^2 + x}} - \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + x}} = \frac{3}{x} & \text{(12)} & &
 \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות עבור $a > 0$:

$$x^2 + ax - 2a\sqrt{3x^2 + 3ax - 9a^2} = 0 \quad \text{(14)} \qquad x^2 + ax - 2a\sqrt{x^2 + ax - a^2} = 0 \quad \text{(13)}$$

פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 |4 - |5 - x|| = |x + 3| & \text{(16)} & |3 - |2 - x| + |x|| = 1 & \text{(15)} \\
 \sqrt{25 + |16x^2 - 25|} = 4 + 4|x+1| & \text{(18)} & \left| \frac{x + |3 - x|}{x + 2} \right| = 18 & \text{(17)} \\
 & & \frac{x^3 - 5x}{\sqrt{2x^2 - 4x - 1} - |x| + 2} = 0 & \text{(19)}
 \end{array}$$

$$\frac{|x+2|}{|x|+2} = |2-x|+2 : \text{הראה כי אין פתרון למשוואה הבאה:} \quad \text{(20)}$$

תשובות סופיות:

(1) $x = 3$

(2) $x_1 = 4, x_2 = -9$

(3) $x_1 = 0.5, x_2 = -4.5$

(4) $x_1 = 1, x_2 = -4$

(5) $x_{1,2} = \pm 1$

(6) $x_{1,2} = \pm 2$

(7) $x = 1$

(8) $x = 3$

(9) $x = 2$

(10) $3.5 \leq x \leq 7$

(11) $x = 4$

(12) $x = 1, x = \frac{9}{16}$

(13) $x_1 = -2a, x_2 = a$

(14) $x_1 = -2a, x_2 = 3a$

(15) $x \leq 0$

(16) $x = -1$

(17) $x = -\frac{39}{18}, -\frac{33}{18}$

(18) $x \leq \frac{5}{4}, x = -\frac{1}{4}$

(19) $x = -\sqrt{5}$

(20) שאלת הוכחה.

ביטויים ומשוואות ממעלה שלישית:

סיכום כללי:

נוסחאות הכפל המקוצר ממעלה שלישית:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

שאלות:

פישוט ביטויים:

פשט את הביטויים הבאים:

$$(2y+5)^3 \quad (2)$$

$$(x-3)^3 \quad (1)$$

$$8y^3 + 343 \quad (4)$$

$$8x^3 - 1 \quad (3)$$

$$x^3y^6z^9 - 1 \quad (6)$$

$$a^6 - 27 \quad (5)$$

$$64mn^4 - 8m^4n^7 \quad (8)$$

$$11 + 88x^{12} \quad (7)$$

$$\frac{x^3 + 64}{x^2 + 4x} \quad (10)$$

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8} \quad (9)$$

משוואות בנעלם אחד עם נוסחאות הכפל המקוצר:

פתור את המשוואות הבאות:

$$125x^3 = 1 - 15x + 75x^2 \quad (12)$$

$$x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0 \quad (11)$$

$$x^3 - 7x - 6 = 0 \quad (14)$$

$$x^3 + x - 30 = 0 \quad (13)$$

משוואות בנעלם אחד עם פירוקים שונים:

פתור את המשוואות הבאות:

$$2x^3 + 5x^2 - 2x - 5 = 0 \quad (16)$$

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0 \quad (15)$$

מערכת משוואות:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 243 \\ x + y = 9 \end{cases} \quad (17) \text{ פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 91 \\ x^2y - xy^2 = 30 \end{cases} \quad (18) \text{ פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

תשובות סופיות:

$$8y^3 + 60y^2 + 150y + 125 \quad (10)$$

$$(2y + 7)(4y^2 - 17y + 49) \quad (11)$$

$$(xy^2z^3 - 1)(x^2y^4z^6 + xy^2z^3 + 1) \quad (12)$$

$$8mn^4(2 - mn)(4 + 2mn + m^2n^2) \quad (13)$$

$$\frac{x^2 - 4x + 16}{x} \quad (14)$$

$$x = \frac{1}{2} \quad (15)$$

$$x_{1,2,3} = -2, -1, 3 \quad (16)$$

$$x_{1,2,3} = -2.5, -1, 1 \quad (17)$$

$$(-5, -6), (6, 5) \quad (18)$$

$$x^3 - 9x + 27x - 27 \quad (1)$$

$$(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) \quad (2)$$

$$(a^2 - 3)(a^4 + 3a^2 + 9) \quad (3)$$

$$8(1 + 2x^4)(1 - 2x^4 + 4x^8) \quad (4)$$

$$\frac{1}{x + 2} \quad (5)$$

$$x = 4 \quad (6)$$

$$x = 3 \quad (7)$$

$$x_{1,2,3} = \frac{1}{2}, 1, 2 \quad (8)$$

$$(3, 6), (6, 3) \quad (9)$$

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 3 - אי שוויונים אלגבריים

תוכן העניינים

- 69 1. אי שוויונים ממעלה ראשונה
- 71 2. אי שוויונים ממעלה שנייה
- 72 3. אי שוויונים ממעלה שלישית
- 73 4. אי שוויונים עם מנה
- 75 5. אי שוויונים כפולים מערכות וגם ואו
- 76 6. שאלות מסכמות
- 78 7. מציאת תחום הגדרה
- 80 8. אי שוויונים עם ערך מוחלט
- 83 9. אי שוויונים עם שורשים

אי-שוויונים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

פעולות המותרות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

פעולות אסורות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$6x > 2(3x-1) \quad (2) \qquad 45x - 26 > 109 \quad (1)$$

$$(x-2)^2 + 4 < (x+2)^2 + 20 \quad (4) \qquad 2(x-5) \geq \frac{1}{2}(4x+6) \quad (3)$$

$$4(6x-8) < 8(3x-4) \quad (6) \qquad \frac{8x-4}{2} < \frac{9(x+1)}{3} \quad (5)$$

$$\frac{7-x}{10} - \frac{3x-1}{5} + \frac{x+4}{3} < 7 \quad (8) \qquad \frac{x-6}{3} - \frac{x-4}{4} \geq 12-x \quad (7)$$

תשובות סופיות:

$$x > 3 \quad (1)$$

$$x \text{ כל} \quad (2)$$

$$x \text{ אף} \quad (3)$$

$$x > -2 \quad (4)$$

$$x < 5 \quad (5)$$

$$x \text{ אף} \quad (6)$$

$$x \geq 12 \quad (7)$$

$$x > -13 \quad (8)$$

אי-שוויונים ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

אי שוויון ריבועי הוא מהצורה: $ax^2 + bx + c \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$ כאשר $a \neq 0$.

כדי לפתור אי שוויון ריבועי יש למצוא את נקודות האפס של הביטוי הריבועי ולאחר מכן למצוא את תחום ההצבה עבורו הביטוי מקיים את אי השוויון עצמו.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- | | |
|-------------------------------|--|
| $x^2 - 12x > -32$ (2) | $x^2 < 144$ (1) |
| $(x+2)(x+4) < 35$ (4) | $(x+2)(x+5) < 0$ (3) |
| $(x-3)(x-7) \geq 8x - 56$ (6) | $-x^2 + 13x + 30 < 0$ (5) |
| $(5x+6)^2 \leq 4(x-3)^2$ (8) | $(x-5)^2 + x(x+2) < 89$ (7) |
| $x^2 - 10x + 25 > 0$ (10) | $-3x^2 + 12x > 0$ (9) |
| $2x^2 + 2x + 24 \geq 0$ (12) | $(x-3)^2 > (x-1)(x+6) - x^2 - 3x$ (11) |

תשובות סופיות:

- | | |
|---------------------------|----------------------|
| $x < 4, x > 8$ (2) | $-12 < x < 12$ (1) |
| $-9 < x < 3$ (4) | $-5 < x < -2$ (3) |
| $x \leq 7, x \geq 11$ (6) | $x < -2, x > 15$ (5) |
| $-4 \leq x \leq 0$ (8) | $-4 < x < 8$ (7) |
| $x > 5, x < 5$ (10) | $0 < x < 4$ (9) |
| x כל (12) | $x < 3, x > 5$ (11) |

אי-שוויונים ממעלה שלישית:

סיכום כללי:

אי שוויונים ממעלה גבוהה מיוחסים לכאלה שניתן לכתוב אותם בצורה של פולינומים, כגון: $x^3 - 4x^2 + 4x + 1 > 0$, $x^4 + 2x^2 + 1 < 0$ וכיו'. בפועל נפתור אותם ע"י פירוק לגורמים ומציאת נקודות האפס של כל גורם. לאחר מכן נבדוק את כל אחד מתחומי המספרים המתקבלים עבור הנעלם ונראה באלו מהם מתקבל פסוק אמת.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- | | |
|--------------------------------------|------------------------------------|
| $x(x^2 + x + 1) > 0$ (2) | $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$ (1) |
| $x^3 - 25x \geq 0$ (4) | $(-2x^2 - 3x + 2)(x+1) \leq 0$ (3) |
| $(x^2 + 8x + 20)(3x - 5) \leq 0$ (6) | $(x^2 + 3x + 5)(x - 2) > 0$ (5) |
| $x^3 - 6x^2 + 9x \leq 0$ (8) | $(x^2 - x - 6)(x - 1) < 0$ (7) |
| $(x-2)(x-4)(x-1) < 0$ (10) | $(x^2 + 6)(x+3) > 0$ (9) |

תשובות סופיות:

- | | |
|----------------------------------|---|
| $x > 0$ (2) | $1 < x < 2, x > 3$ (1) |
| $-5 \leq x \leq 0, x \geq 5$ (4) | $-2 \leq x \leq -1, x \geq \frac{1}{2}$ (3) |
| $x \leq 1\frac{2}{3}$ (6) | $x > 2$ (5) |
| $x \leq 0, x = 3$ (8) | $x < -2, 1 < x < 3$ (7) |
| $x < 1, 2 < x < 4$ (10) | $x > -3$ (9) |

אי-שוויונים עם מנה:

סיכום כללי:

אי שוויון מהצורה: $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ או $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ נקרא אי-שוויון עם מנה, בו $f(x)$

ו- $g(x)$ הם פולינומים כלשהם.

למשל: $\frac{2x+4}{x^2-3x+4} < 0$ בו: $f(x) = 2x+4$ ו- $g(x) = x^2-3x+4$.

כדי לפתור אי שוויון עם מנה נמצא את נקודות האפס של $f(x)$ ושל $g(x)$ ונציב מספרים בתחומים המתקבלים. אלו שיתנו פסוק אמת יהוו את פתרון אי השוויון.

הערות:

- ניתן לבצע כפל של המכנה בריבוע בכדי להעביר את אי השוויון לצורה של מכפלות.
- ניתן להעביר אי שוויון המכיל מספר מנות ומספרים שלמים לצורה הנ"ל ע"י פעולות אלגבריות מתאימות תחילה.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

| | |
|-----------------------------------|---|
| $\frac{x-1}{3x+2} \geq -3$ (2) | $\frac{x-1}{x^2-9} > 0$ (1) |
| $\frac{x-3}{2x^2-10x+12} > 0$ (4) | $\frac{1}{x^2-16} > 0$ (3) |
| $\frac{1}{-3(x-1)} < 0$ (6) | $\frac{2x-1}{x-5} \leq 0$ (5) |
| $\frac{1}{x^2-5x+6} < 0$ (8) | $\frac{x-1}{x+2} \leq 1$ (7) |
| $\frac{1}{x^2-8x+12} \geq 0$ (10) | $\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7} \geq 0$ (9) |

תשובות סופיות:

$$x < -\frac{2}{3}, x \geq -\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 < x < 3, x > 3 \quad (4)$$

$$x > 1 \quad (6)$$

$$2 < x < 3 \quad (8)$$

$$x < 2, x > 6 \quad (10)$$

$$-3 < x < 1, x > 3 \quad (1)$$

$$x < -4, x > 4 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \leq x < 5 \quad (5)$$

$$x > -2 \quad (7)$$

$$1 \leq x \leq 6 \quad (9)$$

אי-שוויונים כפולים - מערכת וגם:

סיכום כללי:

אי-שוויון כפול הוא צורה מקוצרת להציג שני אי-שוויונים אשר יש לפתור יחד (קרי: כמערכת יוגם!). למשל במקום לכתוב: $a < b$ וגם $b < c$, ניתן לכתוב: $a < b < c$. מכאן כי כדי לפתור אי שוויון כפול יש לפצל אותו תחילה לשני אי-שוויונים ולפתור כל אחד בנפרד. לאחר מכן יש לקחת את חיתוך הפתרונות.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$0 < \frac{1}{x+4} < 2 \quad (2)$$

$$3 < x+1 < 5 \quad (1)$$

$$0 < \frac{8-3x}{5-2x} < 4 \quad (4)$$

$$-1 < \frac{x-1}{x+1} < 1 \quad (3)$$

$$6 < \frac{2x+10}{3} \leq \frac{7x-20}{5} \quad (6)$$

$$6x-38 \leq x-3 \leq 5x+7 \quad (5)$$

$$\frac{4x+5}{15} > \frac{3x-8}{5} + \frac{9-x}{3} > 11 \quad (8)$$

$$-1 \leq \frac{2x-6}{4} < \frac{x+2}{3} \quad (7)$$

תשובות סופיות:

$$x > -3\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 < x < 4 \quad (1)$$

$$x < 2\frac{2}{5}, x > 2\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$x > 0 \quad (3)$$

$$x \geq 10 \quad (6)$$

$$-2.5 \leq x \leq 7 \quad (5)$$

$$\emptyset \quad (8)$$

$$1 \leq x < 13 \quad (7)$$

שאלות מסכמות – אי-שוויונים:

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$x \leq -\frac{3}{4} \cap \{-2 < x \leq 5 \cup 0 < x < 8\} \quad (1)$$

$$\frac{(x-3)(x+4)}{2-x} \leq 0 \quad (3) \quad x(x+5) - 3x + 15 \leq 2x - 1 - x(4-x) \quad (2)$$

$$\frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)} \geq 0 \quad (5) \quad \frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)} < 0 \quad (4)$$

$$\frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2} > 0 \quad (7) \quad x(x+3)(2x-5) < 0 \quad (6)$$

$$\frac{x-3}{x^2+2} > 0 \quad (9) \quad \frac{5-2x}{(x-8)^2} \leq 0 \quad (8)$$

$$\frac{x^2-6x+9}{x^3-x} > 0 \quad (11) \quad \frac{x^2-4x}{x^2+2x-3} > 0 \quad (10)$$

$$\frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2} \quad (13) \quad \frac{x-7}{x^2+x+3} > 0 \quad (12)$$

$$6 < 5x - x^2 \cap x^2 > 3x + 10 \quad (15) \quad \frac{2x^2}{x^2-6x+8} \geq \frac{x}{x-4} - \frac{x}{x-2} \quad (14)$$

$$1 < \frac{x-1}{x-4} \leq 2 \quad (17) \quad \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x} > 0 \cup \frac{1}{x-3} < \frac{1}{1-x} \quad (16)$$

(18) לאלו ערכי x נמצאת הפונקציה $f(x) = \frac{x}{x-3}$ מעל הפונקציה $g(x) = \frac{x+1}{x+3}$?

תשובות סופיות:

- | | |
|---|--------------------------------------|
| $x \leq -4$ (2) | $-2 < x \leq -\frac{3}{4}$ (1) |
| $x < -7, -\frac{1}{3} < x < 2, x > 5$ (4) | $-4 \leq x < 2, 3 \leq x$ (3) |
| $x < -3, 0 < x < 2.5$ (6) | $-1 < x \leq 1.5, 4 < x \leq 12$ (5) |
| $2.5 \leq x < 8, x > 8$ (8) | $x < -1, 2 < x < 6, x > 6$ (7) |
| $x < -3, 0 < x < 1, x > 4$ (10) | $x > 3$ (9) |
| $x > 7$ (12) | $-1 < x < 0, 1 < x < 3, x > 3$ (11) |
| $x \leq 0, 1 \leq x < 2, x > 4$ (14) | $x < -2, 2 < x < 4$ (13) |
| $x \neq 1$ (16) | $x \neq 1$ (15) |
| $-3 < x < -\frac{3}{5}, x > 3$ (18) | $x \geq 7$ (17) |

תחום הגדרה:

שאלות:

1 מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

| | |
|------------------------------------|---|
| א. $f(x) = \sqrt{3x-4}$ | ב. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x - 6}$ |
| ג. $f(x) = \sqrt{12x - x^2 - x^3}$ | ד. $f(x) = \sqrt{\frac{x+5}{x^2-4}}$ |
| ה. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}-x}$ | ו. $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2-2x-1}}{2x-3}$ |

2 מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

| | |
|--|---|
| א. $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+2}-3}$ | ב. $f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$ |
| ג. $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}}$ | ד. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$ |

3 תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x) = \sqrt{ax - x^2 - 4}$ הוא $1 \leq x \leq 4$. מצא את ערכו של הפרמטר a .

4 תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x) = \sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$ הוא $x \leq -2, x > 2$. מצא את ערכו של הפרמטר a .

5 נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+6}-a}$, a פרמטר חיובי.

א. הבע באמצעות a את תחום הגדרתה.

ב. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = \sqrt{\frac{2x}{x+5}}$.

ידוע כי תחום ההגדרה של שתי הפונקציות מכסה את כל ציר המספרים. מצא את תחום הערכים האפשרי של הפרמטר a .

תשובות סופיות:

- (1) א. $x \geq 1\frac{1}{3}$ ב. $x \leq -1, x \geq 6$ ג. $x \leq -4, 0 \leq x \leq 3$
- ד. $-5 \leq x < -2, x > 2$ ה. $-2 \leq x < 2, x > 2$ ו. $x \leq -\frac{1}{3}, 1 \leq x < \frac{3}{2}, x > \frac{3}{2}$
- (2) א. $x \geq 7$ ב. $-6 \leq x \neq -2$ ג. $x \leq -1\frac{1}{2}, x \geq 1$
- ד. $x \leq -3, -2 \leq x \neq 1$
- (3) $a = 5$
- (4) $a = 2$
- (5) א. $x \geq a^2 - 6$ ב. $0 < a \leq 1$

אי שוויונים עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

כללים לפתרון אי שוויון עם ערך מוחלט יחיד:

| | | |
|---------------------|--------------|-------|
| $ x > a$ | $ x < a$ | מקרה |
| $x < -a \cap x > a$ | $-a < x < a$ | פתרון |

כללים לפתרון אי שוויון עם מספר ערכים מוחלטים:

- נמצא את הנקודות המאפסות כל ביטוי עם ערך מוחלט.
- מחלקים את אי השוויון לתחומים לפי נקודות האפס.
- פותרים את אי השוויון לכל תחום בנפרד.
- כותבים פתרון כללי (מערכת או) לכל התחומים יחדיו.

שאלות:

(1) פתור את אי-השוויונים הבאים:

- א. $|x+2| < 3$ ב. $|2x+1| > 7$
- ג. $|6-2x| < x$ ד. $|2x+1|-3x > 4$

(2) פתור את אי-השוויונים הבאים:

- א. $1 < |4-3x| < 7$ ב. $|2x+3| < 8 < |5-x|$

(3) פתור את אי-השוויונים הבאים:

- א. $|x^2 + 6x - 4| < 12$ ב. $|x^2 + x - 10| > 3x - 2$
- ג. $|x^2 - 3x| < 4$ ד. $|6x^2 - 7x - 4| > 1$
- ה. $x^2 - 6|x| + 5 \leq 0$ ו. $x^2 - 6|x+1| - 1 > 0$

(4) פתור את אי-השוויונים הבאים:

| | |
|--|----------------------------|
| א. $ x-3 + 2x+2 >7$ | ב. $ x+8 <11- 1-3x $ |
| ג. $ 3-2x -11>4- 6+x $ | ד. $ 2x-6 + x+5 >14- 1-x $ |
| ה. $ 5+4x - 3-x +\left 4-\frac{1}{2}x\right \leq 22$ | ו. $ x+3 + x^2-5x+4 <19$ |

(5) פתור את אי-השוויונים הבאים:

| | |
|--|---|
| א. $\left \frac{3x-1}{x-2}\right \geq 3$ | ב. $1\leq\left \frac{x+2}{x-2}\right \leq 2$ |
| ג. $\frac{ x-6 +8x}{x-12}\leq 12$ | ד. $\left \frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}\right >5$ |

(6) פתור את אי-השוויונים הבאים (ערך מוחלט ושורשים):

| | |
|-----------------------------------|---------------------------------------|
| א. $\sqrt{x^2- x-12 }<x$ | ב. $2-\sqrt{1-x}\leq x+2 -3$ |
| ג. $\sqrt{ 2x+1 -x-1}\leq 4- 3x $ | ד. $\frac{ x+2 - x }{\sqrt{4-x^3}}>0$ |

תשובות סופיות:

- (1) א. $-5 < x < 1$
 ג. $2 < x < 6$
- (2) א. $-1 < x < 1$ או $1\frac{2}{3} < x < 3\frac{2}{3}$
 ב. $-5\frac{1}{2} < x < -3$
- (3) א. $-8 < x < -4$ או $-2 < x < 2$
 ג. $-1 < x < 4$
- ה. $-5 \leq x \leq -1$ או $1 \leq x \leq 5$
- (4) א. $x < -2$ או $2 < x$
 ג. $x < -6$ או $4 < x$
- ה. $-7\frac{3}{7} \leq x \leq 4$
- (5) א. $\frac{7}{6} \leq x < 2$, $x > 2$
 ג. $x < 12$, $x \geq 46$
- (6) א. $x = -1$, $x \geq 3$, $x \neq 12$
 ג. $0 \leq x \leq 1$, $-1 \leq x \leq -\frac{2}{3}$
- ב. $x < -4$ או $3 < x$
 ד. $x < -1$
- ב. $x < -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3} < x < \frac{3}{2}$, $x > \frac{5}{3}$
 ג. $x < 2$ או $4 < x$
- ו. $x < -5$, $x > 7$
 ז. $-1 < x < 1$
- ב. $x < -1$ או $4 < x$
 ד. $-2 < x < 6$
- ו. $-2 < x < 6$
- ב. $0 \leq x \leq \frac{2}{3}$, $x \geq 6$
- ד. $\frac{1}{2} < x < 1$, $1 < x < 2$, $2 < x \leq 4$
- ב. $x \leq \frac{-15 + \sqrt{33}}{2}$
 ד. $-1 < x < \sqrt[3]{4}$

אי שוויונים עם שורשים:

סיכום כללי:

מקרים בפתרון אי-שוויונות עם שורשים:

| מקרה | אי השוויון | פתרון |
|------------|-------------------|------------------------|
| $a \geq 0$ | $\sqrt{f(x)} < a$ | $0 \leq f(x) < a^2$ |
| $a < 0$ | $\sqrt{f(x)} < a$ | אין פתרון |
| | $\sqrt{f(x)} > a$ | כל x בת.ה. של $f(x)$ |

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$\sqrt{2x-5} \geq 1 \quad (2)$$

$$\sqrt{x+3} < 7 \quad (1)$$

$$\sqrt{x^2+x-6} < x-3 \quad (4)$$

$$\sqrt{2x^2+5x-6} > 2-x \quad (3)$$

$$\sqrt{x^2+5x+6} - \sqrt{x^2-x+1} < 1 \quad (6)$$

$$\sqrt{x^2+3x+2} - 1 < \sqrt{x^2-x+1} \quad (5)$$

$$\frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2 \quad (8)$$

$$\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} > \frac{3}{2} \quad (7)$$

$$\sqrt{2-\sqrt{3+x}} < \sqrt{4+x} \quad (10)$$

$$\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{4}} < \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \quad (9)$$

$$\sqrt{1+\frac{9}{x}} + 5\sqrt{\frac{x}{x+9}} \geq 4 \quad (12)$$

$$\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5} \quad (11)$$

תשובות סופיות:

$$. -3 \leq x < 46 \quad (1)$$

$$. x \geq 3 \quad (2)$$

$$. x < -10, x > 1 \quad (3)$$

$$. \emptyset \quad (4)$$

$$. x \leq -2, -1 \leq x < \frac{-1 + \sqrt{13}}{6} \quad (5)$$

$$. x \leq -3, -2 \leq x < \frac{-13 + \sqrt{73}}{16} \quad (6)$$

$$. \frac{12}{25} < x \leq \frac{1}{2} \quad (7)$$

$$. x < 2\sqrt{5} - 4 \quad (8)$$

$$. 1 < x \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (9)$$

$$. -2.618 < x \leq 1 \text{ שזה: } -\frac{3 + \sqrt{5}}{2} < x \leq 1 \quad (10)$$

$$. 2.5 \leq x < 3 \quad (11)$$

$$. x < -9, x > 0 \quad (12)$$

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 4 - גיאומטריה אנליטית - נקודה וישר

תוכן העניינים

| | |
|-----------|---------------------------------------|
| 85 | 1. מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית |
| 89 | 2. משוואת הישר |
| 94 | 3. מצבים הדדיים בין ישרים |
| 96 | 4. מציאת משוואות ישר |
| 97 | 5. שאלות יסודיות שונות עם משוואת הישר |
| (ללא ספר) | 6. נושאים מתקדמים עם משוואת הישר |
| 103 | 7. חלוקת קטע ביחס נתון |
| 104 | 8. מרחק נקודה מישר |
| 106 | 9. מיקום נקודה ביחס לישר |
| 108 | 10. מרחק בין ישרים מקבילים |

מושגי יסוד בגיאומטריה אנליטית:

סיכום כללי:

נוסחאות כלליות:

- המרחק בין הנקודות $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ יחושב לפי: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
- אמצע הקטע M שקצותיו הם: $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ הוא: $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

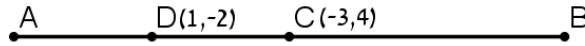
שאלות:

שאלות העוסקות באמצע קטע:

- 1) מצא את אמצעי הקטעים שקדקודיהם נתונים ע"י הנקודות A ו-B:
- א. $A(1, 4)$, $B(5, -8)$ ב. $A(-3, 0)$, $B(3, -2)$
- ג. $A(4, 5)$, $B(-4, -5)$ ד. $A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, $B\left(7\frac{1}{2}, -2\right)$
- ה. $A(6, -1)$, $B(-3, -1)$ ו. $A(4, 7)$, $B(4, -12)$
- 2) נתון קטע AB שאמצעו בנקודה M.
- מצא את שיעורי נקודת הקצה B אם נתונים שיעורי הנקודות של A ושל M:
- א. $A(4, -2)$, $M(2, 1)$ ב. $A(-6, -8)$, $M(0, 0)$
- ג. $A(13, -11)$, $M(4, -7)$ ד. $A\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$, $M\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$
- 3) נתון משולש שווה שוקיים ABC שבו A הוא קדקוד הראש.
- ידוע כי שיעורי הקדקודים B ו-C הם $B(2, -4)$, $C(6, 1)$.
- מעבירים תיכון AD לבסיס BC. מצא את שיעורי הנקודה D.
- 4) באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC.
- ידוע כי: $A(-2, 1)$, $B(6, 5)$. מצא את שיעורי הנקודה D.



- (5) באיור שלפניך C היא נקודת האמצע של AB, ו-D היא נקודת האמצע של AC. ידוע כי: $D(1, -2)$, $C(-3, 4)$. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.



- (6) הנקודות $A(2, -7)$, $B(-10, 4)$ ו- $C(6, 11)$ הן שלושה קדקודים של מקבילית ABCD. מצא את שיעורי הקדקוד הרביעי, D.

שאלות העוסקות במרחק בין שתי נקודות:

- (7) מצא את המרחק בין זוגות הנקודות הבאות:
- א. $A(4, 7)$, $B(-3, 7)$ ב. $A(6, 2)$, $B(1, 2)$
- ג. $A(-3, 10)$, $B(0, 6)$ ד. $A(6, -9)$, $B(1, 3)$
- ה. $A(4, 7)$, $B(13, -1)$ ו. $A(6, 6)$, $B(-9, -9)$
- (8) חשב את היקף המשולש ABC שקודקודיו הם: $A(3, -2)$, $B(4, 9)$, $C(0, 14)$.

- (9) נתונות נקודות $A(14, 4)$, $B(6, y)$ שמרחקן הוא 10 יחידות אורך. מצא את y .

- (10) נתונות נקודות $A(x, -12)$, $B(15, -2)$ שמרחקן הוא 26 יחידות אורך. מצא את x .

- (11) נתונה נקודה B ברביע השלישי, ששיעור ה- y שלה גדול פי 3 משיעור ה- x שלה ומרחקה מהנקודה $A(-4, 1)$ הוא 5. מצא את שיעורי הנקודה B.

- (12) במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$) ידוע כי אורכי השוקיים הוא $\sqrt{45}$ יחידות אורך. שיעורי הקדקוד A הם $(0, 4)$ ושיעורי ה- y של הקדקודים B ו-C הוא -2. מצא את קדקודי המשולש B ו-C (הנח B ברביע הרביעי).

- (13) אורך האלכסון AC במלבן ABCD הוא $d_{AC} = \sqrt{50}$ וידוע כי: $A(-3, -2)$, $B(-4, 1)$. מצא את היקף המלבן.

שאלות העוסקות בשיפוע בין שתי נקודות:**14** מצא את השיפוע בין זוגות הנקודות הבאים:

- א. $A(5,2)$, $B(4,1)$ ב. $A(3,-2)$, $B(-3,1)$
ג. $A(7,8)$, $B(6,15)$ ד. $A(0,5)$, $B(7,0)$
ה. $A(6,9)$, $B(6,-7)$ ו. $A(4,-1)$, $B(18,-1)$

15 מצא את שיפועי הישרים שצלעות המשולש שקודקודיוהם: $A(6,5)$, $B(2,13)$, $C(4,-7)$ מונחים עליהם.

תשובות סופיות:

- (1) א. $(3, -2)$ ב. $(0, -1)$ ג. $(0, 0)$
- ד. $\left(4, -\frac{5}{8}\right)$ ה. $(1.5, -1)$ ו. $(4, -2.5)$
- (2) א. $B(0, 4)$ ב. $B(6, 8)$ ג. $B(-5, -3)$ ד. $B\left(1, \frac{2}{3}\right)$
- (3) $D(4, -1.5)$
- (4) $D(0, 2)$
- (5) $A(5, -8)$, $B(-11, 16)$
- (6) $D(18, 0)$
- (7) א. $d_{AB} = 7$ ב. $d_{AB} = 5$ ג. $d_{AB} = 5$ ד. $d_{AB} = 13$
- ה. $d_{AB} = \sqrt{145}$ ו. $d_{AB} = 15\sqrt{2}$
- (8) $P_{ABC} \approx 33.862$ יחידות אורך
- (9) $y = -2$ או $y = 10$
- (10) $x = 39$ או $x = -9$
- (11) $B(-1, -3)$
- (12) $B(3, -2)$, $C(-3, -2)$
- (13) $P_{ABCD} = 6\sqrt{10} \approx 18.97$ יחידות אורך
- (14) א. $m_{AB} = 1$ ב. $m_{AB} = -\frac{1}{2}$ ג. $m_{AB} = -7$ ד. $m_{AB} = -\frac{5}{7}$
- ה. שיפוע לא מוגדר. ו. $m_{AB} = 0$
- (15) $m_{AB} = -2$, $m_{BC} = -10$, $m_{AC} = 6$

משוואת הישר:

סיכום כללי:

נוסחאות כלליות:

- שיפוע ישר בין שתי נקודות $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ הוא: $m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

שיפועים של ישרים:

- שיפועי ישרים מאונכים מקיימים: $m_1 \cdot m_2 = -1$.
- הקשר בין שיפוע ישר לזווית שהוא יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x : $m = \tan \alpha$.

משוואת הישר:

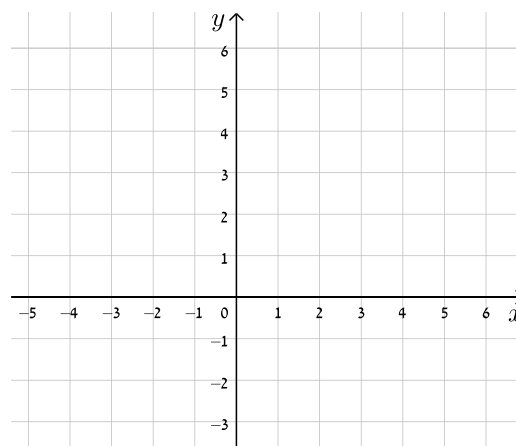
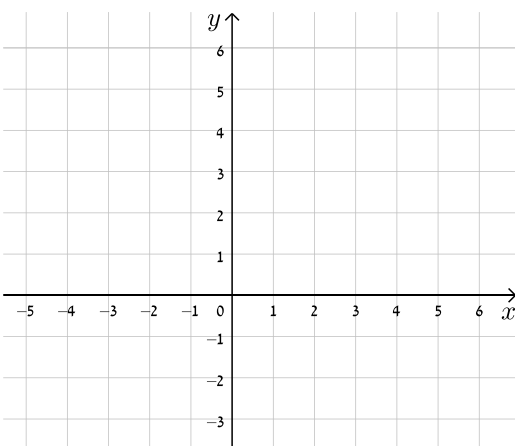
- משוואת ישר מפורשת היא מהצורה: $y = mx + n$.
- כאשר: m הוא שיפוע הישר ו- n הוא ערך ה- y של נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y .
- נוסחה למציאת משוואת ישר: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

שאלות:

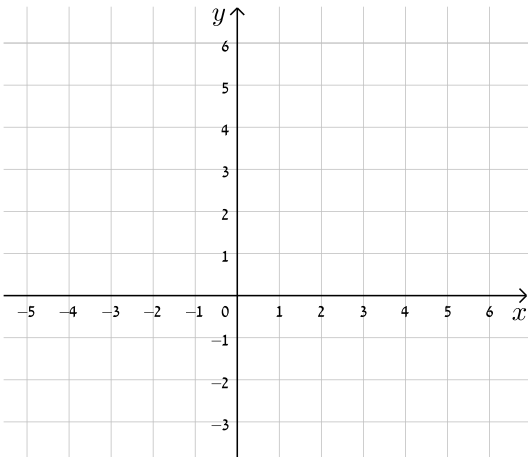
16) עבור כל אחד ממשוואות הישרים הבאות, מצא את נקודות החיתוך עם הצירים וסרטט את הישרים במערכת הצירים שלפניך.

ב. $y = -x + 5$

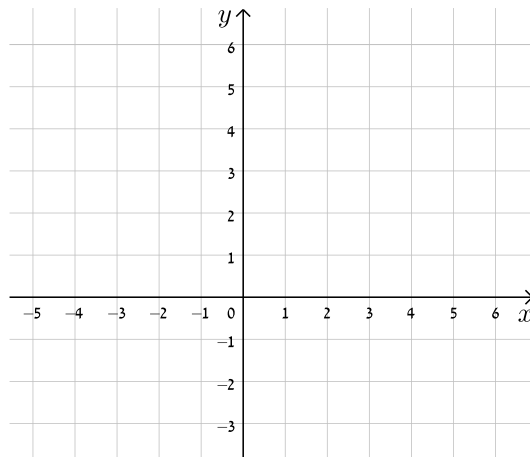
א. $y = x + 4$



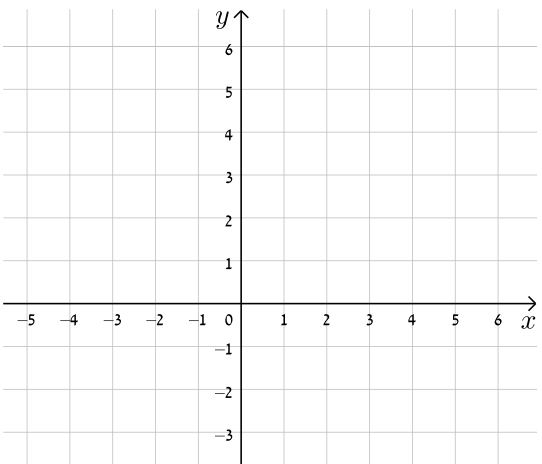
$$y = -3x + 5 \quad \text{ד.}$$



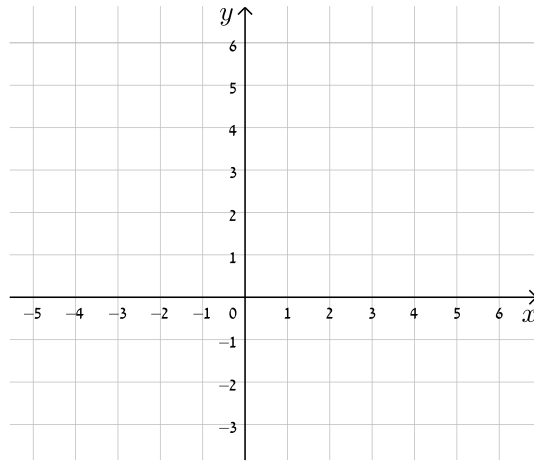
$$y = 2x - 3 \quad \text{ג.}$$



$$y = 8 - 4x \quad \text{ו.}$$

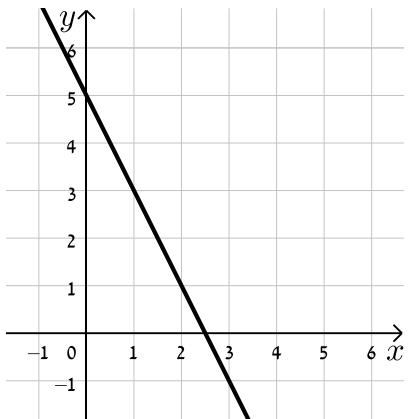


$$y = 3x - 1 \quad \text{ה.}$$

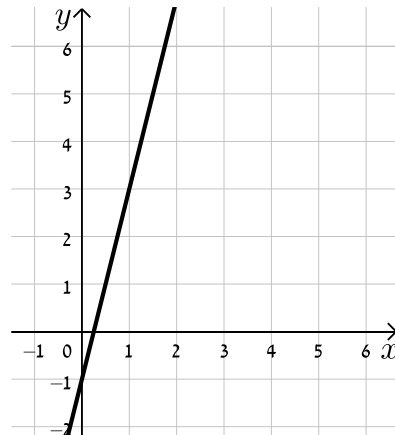


17) כתוב את משוואת הישר המתאימה לכל אחד מהישרים הבאים:

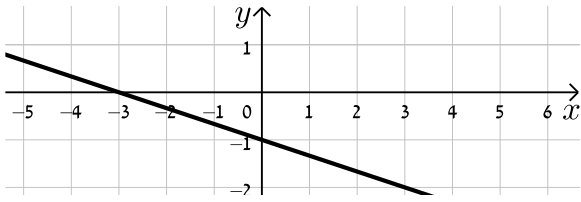
ב.



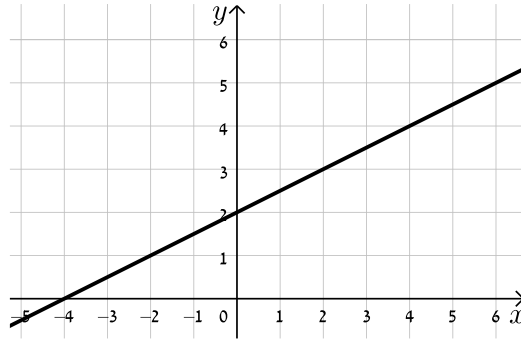
א.



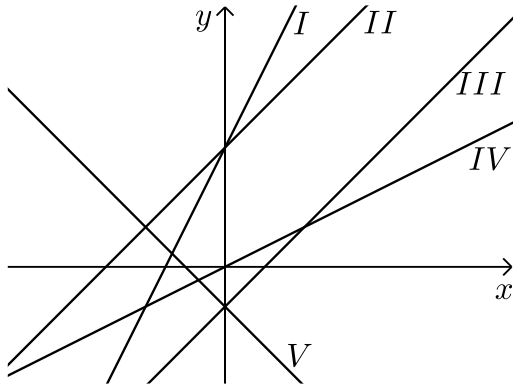
ד.



ג.



18) התאם בין משוואות הישרים הבאים לישרים בשרטוט:



א. $y = x + 3$

ב. $y = -x - 1$

ג. $y = 2x + 3$

ד. $y = x - 1$

ה. $y = \frac{1}{2}x$

19) נתונה משוואה הישר הבאה: $y = 2x + 3$. קבע אלו מבין הנקודות הבאות נמצאות

עליו: $A(-1, 1)$, $B(3, 3)$, $C(0, 4)$, $D(6, 15)$.

20) נתונה משוואת הישר הבאה: $y = mx - 2.5$. ידוע כי הנקודה $A(4, 2)$ נמצאת על

הישר. מצא את m וקבע האם גם הנקודה $B(7, -2)$ נמצאת עליו.

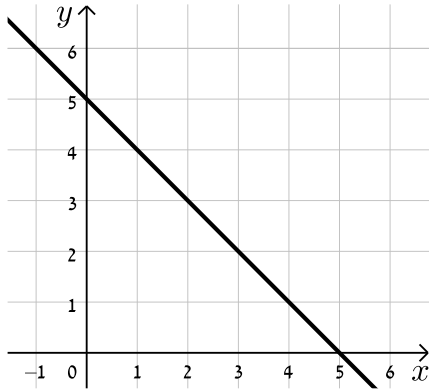
21) הנקודות $A(5, -3)$, $B(4, 1)$ נמצאות על ישר שמשוואתו היא: $y = mx + n$.

מצא את m ואת n .

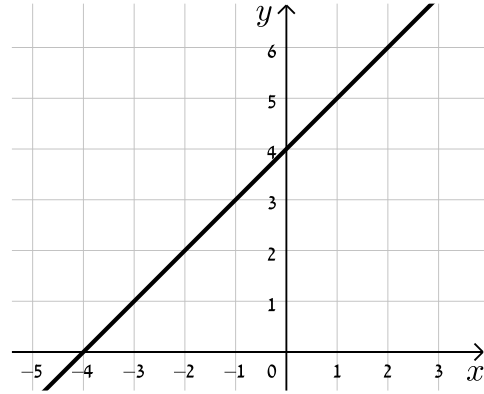
תשובות סופיות:

16) להלן הגרפים של משוואות הישרים:

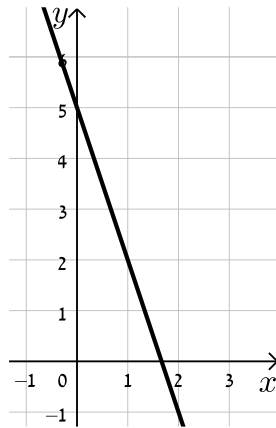
ב.



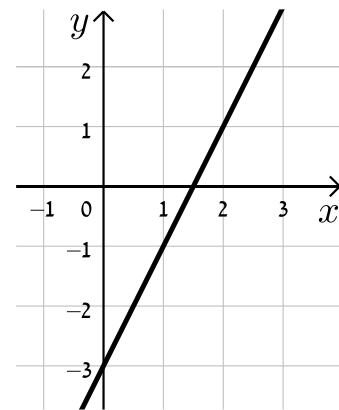
א.



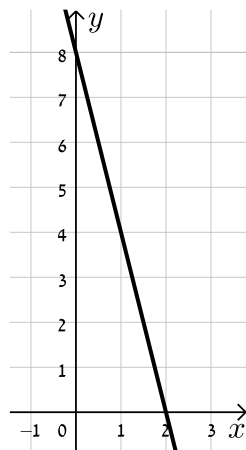
ד.



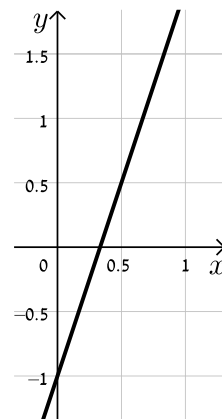
ג.



ו.



ה.



- (17) א. $y = 4x - 1$ ב. $y = -2x + 5$ ג. $y = \frac{1}{2}x + 2$ ד. $y = -\frac{1}{3}x - 1$
- (18) א. II. ב. V. ג. I. ד. III. ה. IV.
- (19) נמצאות: A, D. לא נמצאות: B, C.
- (20) $m = \frac{9}{8}$, B לא נמצאת.
- (21) $m = -4$, $n = 17$.

מצבים הדדיים בין ישרים:

סיכום כללי:

מצב הדדי בין שני ישרים:

- ישרים מקבילים מקיימים: $m_1 = m_2, n_1 \neq n_2$.
- ישרים חותכים מקיימים: $m_1 \neq m_2$.
- ישרים מתלכדים מקיימים: $m_1 = m_2, n_1 = n_2$.

שאלות:

22) מצא את נקודות החיתוך שבין זוגות הישרים הבאים:

$$\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = x + 6 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} y = x - 12 \\ y = 4x + 6 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = -2x - 1 \end{cases} \quad \text{א.}$$

23) קבע את המצב ההדדי בין זוגות הישרים הבאים:

$$\begin{cases} y = x - 7 \\ y = x + 6 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} y = x + 8 \\ y = x + 8 \end{cases} \quad \text{ד.}$$

$$\begin{cases} y = 6x - 15 \\ y = 3x + 41 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

24) קבע אלו מבין זוגות הישרים הבאים הם מאונכים זה לזה:

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{1}{2}x + 4 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 3x - 1 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} y = x - 6 \\ y = -x + 6 \end{cases} \quad \text{ד.}$$

$$\begin{cases} y = -4x - 5 \\ y = \frac{1}{4}x + 5 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

- (25)** משוואת הצלע AB של המלבן ABCD היא $y = 6x - 2$.
- א. מה הם שיפועי הצלעות האחרות של המלבן?
 ב. כיצד תשתנה תשובתך לסעיף הקודם אם משוואת הישר הנ"ל הייתה שייכת לצלע BC במקום AB?
- (26)** במשולש ABC נתונים שיעורי הקודקודים: $A(5, -1)$, $B(3, 7)$, $C(-5, 5)$.
 הוכח שהמשולש ישר זווית ושווה שוקיים.

תשובות סופיות:

- (22)** א. $(-1, 1)$ ב. $(-6, -18)$ ג. $(10, 16)$
- (23)** א. נחתכים. ב. מקבילים. ג. נחתכים. ד. מתלכדים.
- (24)** מאונכים: ג', ד'. לא מאונכים: א', ב'.
- (25)** א. $m_{AB} = m_{CD} = 6$, $m_{BC} = m_{AD} = -\frac{1}{6}$
- ב. הכל הפוך: $m_{BC} = m_{AD} = 6$, $m_{AB} = m_{CD} = -\frac{1}{6}$
- (26)** שאלת הוכחה.

מציאת משוואות ישר:

שאלות:

27 מצא את משוואות הישרים הבאים:

- א. ישר העובר דרך הנקודה $A(1,3)$ ושיפועו $m=2$.
- ב. ישר העובר דרך הנקודה $A(0,-4)$ ושיפועו $m=\frac{1}{3}$.
- ג. ישר העובר דרך הנקודה $A(5,9)$ ושיפועו $m=0$.
- ד. ישר העובר דרך הנקודות $A(5,-12)$ ו- $B(6,-6)$.
- ה. ישר העובר דרך הנקודה $A(-6,4)$ ומקביל לישר: $y=2x-3$.
- ו. ישר העובר דרך הנקודה $A(3,-5)$ ומקביל לציר ה- y .
- ז. ישר העובר דרך הנקודה $A(-7,-3)$ ומאונך לישר: $y=x+3$.
- ח. ישר העובר דרך נקודת החיתוך של הישרים: $y=11x-4$ ו- $y=3x-12$ ומקביל לישר: $y=7x+5$.

תשובות סופיות:

- 27 א. $y=2x+1$ ב. $y=\frac{1}{3}x-4$ ג. $y=9$ ד. $y=6x-42$
- ה. $y=2x+16$ ו. $x=3$ ז. $y=-x-10$ ח. $y=7x-8$

שאלות יסודיות שונות עם משוואת הישר:

שאלות:

(28) במשולש ABC מעבירים את התיכון AD לצלע BC.

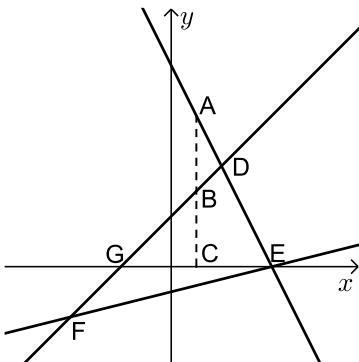
ידוע כי: $A(3, -2)$, $B(2, 4)$, $D(-2, 2)$.

- כתוב את משוואת הישר של התיכון AD.
- מצא את שיעורי הקדקוד C.
- כתוב את משוואת הישר של הצלע AC.

(29) נתון מעוין ABCD שבו נתונים הקודקודים A(-9,1) ו-B(5,-7).

משוואת הישר עליו מונח האלכסון AC היא $x + 3y + 6 = 0$.

- מצא את משוואת הישר עליו מונח האלכסון BD.
- מצא את משוואת הישר עליו מונחת הצלע BC.



(30) שלוש המשוואות הבאות מייצגות את הישרים המופיעים

בשרטוט: $x - y + 2 = 0$, $x - 4y - 4 = 0$, $2x + y - 8 = 0$.

הקטע AC מקביל לציר ה-y.

- חשב את שטח המשולש DEF.
- נתון: $d_{BC} = 3$. חשב את אורך הקטע AB.

(31) BD הוא התיכון לצלע AC במשולש ABC שבו נתון הקודקוד A(-6,1).

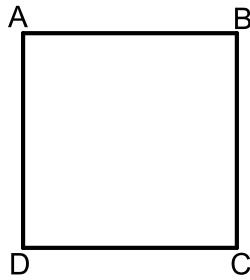
משוואת התיכון BD היא $x - y = 1$ ומשוואת הצלע BC היא $3x + 5y = 67$.

מצא את שיעורי הקדקוד C.

(32) נתון טרפז ABCD ($AB \parallel CD$) ובו משוואת השוק BC היא: $x = 2$.

משוואת הבסיס CD היא $2x + 3y = 7$ וידוע כי $A(-4, 1)$.

- מצא את משוואת הבסיס AB.
- מצא את שיעורי הקדקודים B ו-C.
- מעבירים את האלכסון AC. הראה כי המשולש ABC הוא ישר זווית ומצא את שטחו.



33 במרובע ABCD ידוע כי שיפוע הצלע BC הוא 3

ושיעורי הנקודה A הם: (1,4).

א. איזה מרובע הוא המרובע ABCD?
הראה חישוב מתאים.

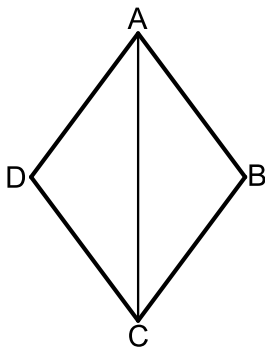
ב. נתון גם: $D(4,13)$, $m_{CD} = -\frac{1}{3}$ ו- $\sqrt{90}$ ס"מ $BC =$.

איזה מרובע הוא המרובע ABCD כעת?
הראה חישוב מתאים.

ג. נתון גם: $B(-8,7)$.

איזה מרובע הוא המרובע ABCD כעת?
הראה חישוב מתאים.

ד. חשב את שטח המרובע ABCD.



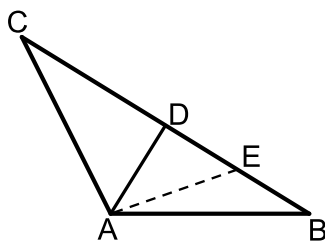
34 המרובע ABCD הוא מעוין.

ידוע כי שיעורי אחת הנקודות במעוין הם: (0,6).

כמו כן, ידוע גם כי משוואת האלכסון AC היא: $y = -1.5x + 6$ ואחת ממשוואות הצלעות היא: $5y + x = 4$.

א. מצא את משוואת האלכסון השני.

ב. מצא את שאר קדקודי המעוין.



35 המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים ($AB = AC$).

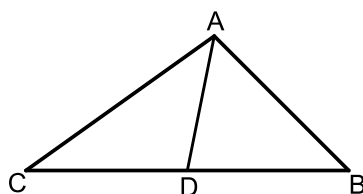
ב- $\triangle ABC$ מעבירים את הגובה AD לבסיס BC

ומסמנים נקודה E כך שמתקיים: $DE = BE$.

קדקוד הראש A נמצא בראשית הצירים ונתון כי: $D(5,7)$, $E(8.5,2.5)$.

א. מצא את שיעורי שאר קודקודי המשולש.

ב. כתוב את משוואת השוק AC.



36 נתון משולש ABC. הנקודה D נמצאת על הצלע BC

של המשולש ABC כך שהקטע AD מחלק אותו

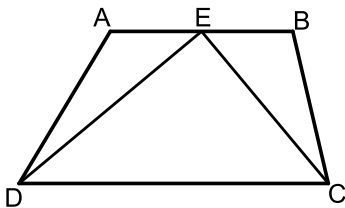
לשני משולשים שווי שטח ABD ו-ACD.

הצלע BC מונחת על הישר: $y = 4$ וידוע כי

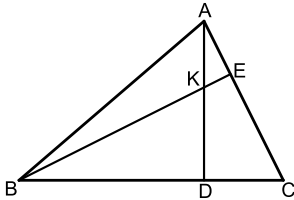
שיעור ה-x של הנקודה C הוא: $x_C = -1$.

כמו כן נתון: $A(7,8)$, $m_{AB} = -2$.

- א. מצא את משוואת הצלע AB.
 ב. ענה על הסעיפים הבאים:
 i. איזה קטע הוא AD בתוך המשולש ABC?
 ii. מצא את שיעורי הנקודות B ו-D.
 ג. ענה על הסעיפים הבאים:
 i. חשב את אורך הצלע BC ואת אורך הקטע AD.
 ii. איזה משולש הוא המשולש ABC?

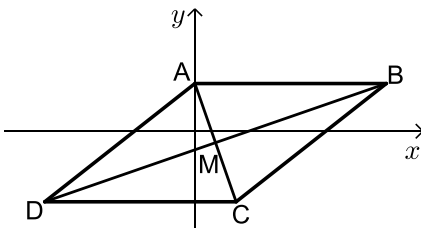


- 37** המרובע ABCD הוא טרפז. הנקודה E היא אמצע הבסיס AB וידוע כי היא נמצאת על ציר ה-x. שיעורי הנקודה B הם (3, 2) והצלע AD מונחת על הישר: $x = -5$. אורך הקטע DE הוא $\sqrt{80}$. כך ש- $\angle DEC = 90^\circ$.
 א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-D.
 ב. מצא את משוואת הקטע CE ואת משוואת הבסיס CD.
 ג. מצא את שיעורי הנקודה C.
 ד. חשב את שטח המשולש DEC.

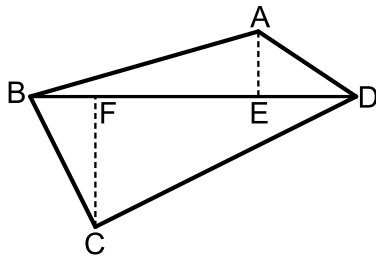


- 38** AD ו-BE הם בהתאמה גבהים לצלעות BC ו-AC במשולש ABC. ידוע כי שיעורי נקודת פגישת הגבהים K הם: (1, 3). שיעורי הנקודות D ו-E הם: $D(-2, 4)$, $E(3, 5)$.
 א. מצא את משוואת הגובה AD ואת משוואת הצלע AC.
 ב. מצא את שיעורי הקדקוד A.
 ג. מצא את משוואת הגובה BE ואת משוואת הצלע BC.
 ד. מצא את שיעורי הקדקוד B.

- 39** נתון מעוין ABCD. ידוע כי הצלע CD מונחת על $y = -7$. אלכסוני המעוין AC ו-BD נפגשים בנקודה: $M(-0.5, -3)$. שיפוע האלכסון AC הוא -4.
 א. מצא את משוואת האלכסון AC.
 ב. מצא את שיעורי הנקודה C.
 ג. חשב את שטח המשולש BMC.



40 נתון מרובע ABCD שקודקודיו הם: $A(3,13)$, $B(-2,4)$, $C(9,3)$, $D(8,14)$.



מורידים גבהים AE ו-CF לאלכסון BD.

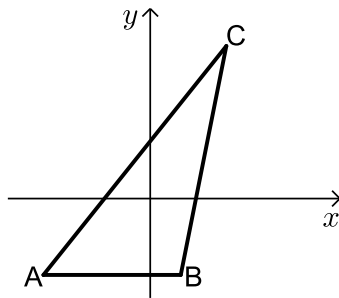
- מצא את משוואת האלכסון BD ואת אורכו.
- מצא את שיעורי הנקודות E ו-F.
- מצא את אורכי הגבהים AE ו-CF.
- חשב את שטח המרובע ABCD.

41 על הישר $y = -5$ מסמנים את

הנקודות: $A(-7,-5)$, $B(2,-5)$.

הנקודה C נמצאת על הישר: $y = x - 5$.

נסמן את שיעור ה-x של הנקודה C ב-t.



א. הבע באמצעות t את שיעור ה-y של הנקודה C.

ב. ידוע כי אורך הצלע AC הוא 17 ס"מ.

הבע באמצעות t את המרחקים של C מ-A ומ-B.

ג. מצא את t ואת אורך הצלע BC.

ד. מסמנים נקודה D על המשך הצלע AB.

ידוע כי D נמצאת ברביע השלישי.

מצא את שיעורי הנקודה D המקיימת ששטח

המשולש DAC יהיה גדול ב-16 יחידות משטח המשולש ABC.

42 המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = BC$)

ובו נתון: $A(-4,12)$, $B(x,6)$ ו- $C(4,8)$.

א. מצא את x.

ב. הוכח כי המשולש הוא ישר זווית.

ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא את משוואת הצלע AC.

ii. מסמנים את נקודת החיתוך של הצלע AC עם ציר ה-y ב-D.

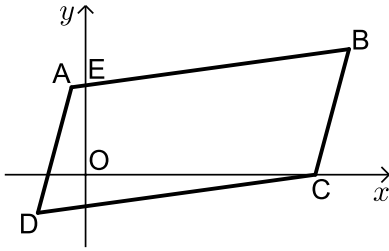
מצא את שיעורי הנקודה D.

ד. ענה על הסעיפים הבאים:

i. מצא נקודה E ברביע הראשון ($x_E < 5$) כך שהמשולש DCE יהיה גם

שווה שוקיים וישר זווית ($\sphericalangle C = 90^\circ$).

ii. חשב את יחס השטחים בין המשולשים: $\frac{S_{DCE}}{S_{ABC}}$.



43 באיור שלפניך נתונה מקבילית ABCD.

ידועים קודקודי המקבילית הבאים: $A(-1, y)$

ו- $B(x, 4)$. x ו- y נעלמים).

שיפוע הצלע CD הוא 0.2 ואורכה הוא: $d_{CD} = \sqrt{104}$.

א. מצא את x ו- y אם ידוע כי B ברביע הראשון.

ב. נתון גם כי הקדקוד C נמצא על ציר ה- x בחלקו החיובי

וכי: $d_{BC} = \sqrt{17}$. מצא את שיעורי הקדקוד C (מצא שתי אפשרויות).

ג. סמן את נקודת החיתוך של הצלע AB עם ציר ה- y ב-E.

שטח המרובע EOCB הוא 25.9 יח"ש. מצא את האפשרות הנכונה עבור

הנקודה C מבין אלו שמצאת בסעיף הקודם.

תשובות סופיות:

$$(28) \quad \text{א. } y = -\frac{4}{5}x + \frac{2}{5} \quad \text{ב. } C(-6, 0) \quad \text{ג. } y = -\frac{2}{9}x - \frac{4}{3}$$

$$(29) \quad \text{א. } l_{BD}: y = 3x - 22 \quad \text{ב. } l_{BC}: y = -\frac{1}{8}x - 6\frac{3}{8}$$

$$(30) \quad \text{א. } 18 \text{ יח"ש} = S_{EDF} \quad \text{ב. } 3 \text{ יחידות אורך} = AB$$

$$(31) \quad C(14, 5)$$

$$(32) \quad \text{א. } y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3} \quad \text{ב. } B(2, -3), C(2, 1) \quad \text{ג. } 12 \text{ יחידות שטח} = S_{ABC}$$

(33) א. מרובע כללי כלשהו. לא ניתן להצביע על אף תכונה.

ב. מלבן. ניתן להראות כי יש למרובע שני זוגות צלעות נגדיות מקבילות ושוות וזווית ישרה.

ג. ריבוע. ניתן להראות כי קיימות זוג צלעות סמוכות שוות. ד. $90 \text{ יח"ש} = S$.

$$(34) \quad \text{א. } y = \frac{2}{3}x + 1\frac{2}{3} \quad \text{ב. } (-1, 1), (4, 0), (5, 5)$$

$$(35) \quad \text{א. } B(12, -2), C(-2, 16) \quad \text{ב. } y = -8x$$

$$(36) \quad \text{א. } y = -2x + 22 \quad \text{ב. i. תיכון - קטע במשולש שחוצה אותו לשני משולשים שווי}$$

$$\text{שטח הוא תיכון. ב. ii. } B(9, 4), D(4, 4)$$

ג. ii. $AD = 5, BC = 10$. ג. ii. משולש ישר זווית - אם במשולש יש תיכון לצלע ששווה

למחציתה אז המשולש הוא ישר זווית.

$$(37) \quad \text{א. } D(-5, -8), A(-5, -2), E(-1, 0) \quad \text{ב. } CE: y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, CD: y = \frac{1}{2}x - 5\frac{1}{2}$$

$$\text{ג. } C(5, -3) \quad \text{ד. } 30 \text{ יח"ש} = S_{DEC}$$

$$(38) \quad \text{א. } AC: y = -x + 8, AD: y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3} \quad \text{ב. } A(7, 1)$$

$$\text{ג. } BC: y = 3x + 10, BE: y = x + 2 \quad \text{ד. } B(-4, -2)$$

$$(39) \quad \text{א. } y = -4x - 5 \quad \text{ב. } C(0.5, -7) \quad \text{ג. } 34 \text{ סמ"ר} = S_{BMC} = S_{DMC}$$

$$(40) \quad \text{א. } d_{BD} = \sqrt{200}, y = x + 6 \quad \text{ב. } E(5, 11), F(3, 9)$$

$$\text{ג. } d_{CF} = \sqrt{72}, d_{AE} = \sqrt{8} \quad \text{ד. } S_{ABCD} = 80$$

$$(41) \quad \text{א. } C(t, t-5) \quad \text{ב. i. } AC = \sqrt{2t^2 + 14t + 49}, BC = \sqrt{2t^2 - 4t + 4}$$

$$\text{ii. } 10 \text{ ס"מ} = BC, t = 8 \quad \text{ג. } D(-20, -5)$$

$$(42) \quad \text{א. } x = -2 \quad \text{ג. i. } y = -0.5x + 10 \quad \text{ii. } D(0, 10) \quad \text{ד. i. } E(2, 4)$$

$$\text{ii. } \frac{S_{DCE}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2}$$

$$(43) \quad \text{א. } x = 9, y = 2 \quad \text{ב. } C(8, 0), C(10, 0) \quad \text{ג. } C(8, 0)$$

חלוקת קטע ביחס נתון:

סיכום כללי:

- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ ביחס של $k:l$ הם: $x_p = \frac{k \cdot x_1 + l \cdot x_2}{k+l}, y_p = \frac{k \cdot y_1 + l \cdot y_2}{k+l}$ (בהצלבה).

שאלות:

(1) הנקודה P נמצאת על הקטע AB. נתון: $A(2, -5), B(-12, 16)$.

$$\frac{AP}{PB} = \frac{2}{5} \text{ . מצא את ערכי הנקודה P, אם נתון כי}$$

(2) קודקודי משולש ABC הם: $A(-1, 3), B(6, 0), C(4, -12)$.

מצא את שיעורי מרכז הכובד של המשולש.
(מרכז כובד של משולש הוא מפגש תיכוני המשולש).

(3) מצא את שיעורי מרכז הכובד של משולש ABC

שקודקודיו הם: $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$.

(4) קודקודי המשולש ABC הם: $A(5, 1), B(7, -3), C(-1, 4)$.

מצא את אורכו של חוצה הזווית היוצא מקודקוד A.

תשובות סופיות:

$$M(3, -3) \quad (2) \qquad P(-2, 1) \quad (1)$$

$$1.697 \text{ יחידות אורך.} \quad (4) \qquad \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right) \quad (3)$$

מרחק נקודה מישר:

סיכום כללי:

הצגה כללית של ישר ומרחקים:

- הצגה כללית של ישר (צורה סתומה): $Ax + By + C = 0$.
- מרחק הנקודה $A(x_1, y_1)$ מהישר $Ax + By + C = 0$ הוא: $d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$.

כאשר $B > 0$:

- אם הנקודה מעל הישר מורידים את הערך המוחלט.
- אם הנקודה מתחת לישר מורידים את הערך המוחלט ומוסיפים מינוס לאחד האגפים.

שאלות:

(5) ענה על הסעיפים הבאים:

- מצא את מרחק הנקודה $(-2, 4)$ מהישר $4x + 3y + 11 = 0$.
- מצא את מרחק הנקודה $(4, 3)$ מהישר $y = 3x - 1$.
- מצא את מרחק הנקודה $(3, -11)$ מהישר $x - 5 = 0$.

(6) מצא את המרחק בין הנקודה הנתונה לישר הנתון:

- $3x - 4y + 6 = 0$, $A(-5, -1)$ ב. $12x + 5y - 17 = 0$, $A(-3, 8)$
- $2y + 7 = 0$, $A(11, -2)$ ד. $3x - 14 = 0$, $A\left(6, -\frac{1}{2}\right)$

(7) מצא את שיעורי הנקודות על הישר $x + y - 7 = 0$ שמרחקן

מהישר $2x - y + 5 = 0$ הוא: $\sqrt{20}$.

(8) מצא את שטחה של מקבילית ששיעורי קודקודיה

הם: $A(7, -1)$, $B(-5, 4)$, $C(-1, 7)$, $D(11, 2)$.

- (9) מצא את שטחו של המשולש $\triangle ABC$ שבו שיעורי קדקוד A הם $A(5, -3)$ ושניים מתיכוני המשולש מונחים על הישרים $x - 4 = 0$ ו- $2x - y - 1 = 0$.
- (10) מצא את שטחו של משולש שקודקודיו הם: $A(2, 2)$, $B(-1, 1)$, $C(-5, -2)$.
- (11) מצא את שיעורי הנקודות על הישר $3x - 2y + 6 = 0$, שמרחקן מהישר: $2x - y - 14 = 0$ הוא $3\sqrt{5}$.
- (12) מצא את שיעורי הנקודות על הישר $4x + 3y - 20 = 0$, שמרחקן מהישר: $3x + 2y + 13 = 0$ הוא $2\sqrt{13}$.

תשובות סופיות:

- (5) א. 3 ב. $\frac{8}{\sqrt{10}}$ ג. 2
- (6) א. 1 ב. 1 ג. $1\frac{1}{2}$ ד. $\frac{1}{3}$
- (7) $(4, 3)$, $\left(-2\frac{2}{3}, 9\frac{2}{3}\right)$
- (8) $S_{ABCD} = 56$ יח"ש
- (9) $S_{ABC} = 18$ יח"ש
- (10) $S_{ABC} = 2.5$ יח"ש
- (11) $(4, 9)$, $(64, 99)$
- (12) $(-1, 8)$, $(-157, 216)$

מיקום נקודה ביחס לישר:

שאלות:

- 13** מצא את שיעורי הנקודה על הישר $3x - 2y + 6 = 0$, שמרחקה מהישר: $2x - y - 14 = 0$ הוא $3\sqrt{5}$ והיא נמצאת מתחתיו.
- 14** מצא את שיעורי הנקודה על הישר $4x + 3y - 20 = 0$, שמרחקה מהישר: $3x + 2y + 13 = 0$ הוא $2\sqrt{13}$ והיא נמצאת מעליו.
- 15** נתון משולש ABC שבו נתונים הקודקודים: $A(1,1)$, $B(13,6)$. הקדקוד C נמצא על הישר $2x - y - 19 = 0$ ונמצא מתחת לצלע AB. מצא את שיעורי הקדקוד C אם ידוע ששטח המשולש הוא 13.
- 16** נתון משולש שצלעותיו מונחות על הישרים:
 $I: x + 2y + 1 = 0$, $II: x - 2y - 11 = 0$, $III: 2x - y + 6 = 0$
 מצא שיעורי נקודה הנמצאת בתוך המשולש, שמרחקה מישר I שווה למרחקה מישר III ושמרחקה מישר II הוא מחצית מהמרחק משני ישרים אלה.
- 17** מצא את שיעורי מרכז המעגל, החסום במשולש, שצלעותיו מונחות על הישרים: $I: 4x - 3y + 2 = 0$, $II: 3x - 4y - 51 = 0$, $III: 3x + 4y - 11 = 0$.
- 18** מצא משוואת ישר ששיפועו 3 אם ידוע שהנקודה $G(7, -3)$ נמצאת מתחתיו ובמרחק $2\sqrt{10}$ ממנו.
- 19** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(-2, 6)$ ומרחקו מהנקודה $B(2, 9)$ הוא $\sqrt{5}$.
- 20** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(9, 10)$ ומרחקו מהנקודה $B(8, -3)$ הוא $5\sqrt{5}$.
- 21** מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(3, 6)$ ומרחקו מהנקודה $B(-9, 2)$ הוא 4.

(22) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(1,2)$ ומרחקו מהנקודה $B(-3,10)$ הוא 4.

(23) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(10,8)$ ומרחקו מהנקודה $B(7,-1)$ הוא 3.

(24) מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(-6,1)$ ומרחקו מהנקודה $B(2,7)$ הוא 10.

תשובות סופיות:

$$(-1,8) \quad \mathbf{(14)}$$

$$(-1,-4) \quad \mathbf{(16)}$$

$$y = 3x - 4 \quad \mathbf{(18)}$$

$$y = -\frac{22}{31}x + 16\frac{12}{31}, \quad y = \frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2} \quad \mathbf{(20)}$$

$$x = 1 \text{ או } y = -\frac{3}{4}x + 2\frac{3}{4} \quad \mathbf{(22)}$$

$$y = -\frac{4}{3}x - 7 \quad \mathbf{(24)}$$

$$(64,99) \quad \mathbf{(13)}$$

$$C(11,3) \quad \mathbf{(15)}$$

$$(2,-5) \quad \mathbf{(17)}$$

$$y = 2x + 10, \quad y = \frac{2}{11}x + 6\frac{4}{11} \quad \mathbf{(19)}$$

$$y = \frac{3}{4}x + 3\frac{3}{4}, \quad y = 6 \quad \mathbf{(21)}$$

$$x = 10 \text{ או } y = 1\frac{1}{3}x - 5\frac{1}{3} \quad \mathbf{(23)}$$

מרחק בין ישרים מקבילים:

סיכום כללי:

- מרחק בין שני ישרים מקבילים: $Ax + By + C_1 = 0$ ו- $Ax + By + C_2 = 0$ כאשר: $B > 0$

$$\text{הוא: } d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ ומתקיים בהעדר הערך המוחלט:}$$

- אם: $C_1 > C_2$, $(d > 0)$ אז הישר $Ax + By + C_1 = 0$ מתחת ל- $Ax + By + C_2 = 0$.
- אם: $C_1 < C_2$, $(d < 0)$ אז הישר $Ax + By + C_1 = 0$ מעל ל- $Ax + By + C_2 = 0$.

שאלות:

(25) מצא משוואת ישר, המקביל לישר $3x - 4y + 8 = 0$ ונמצא במרחק 4 ממנו.

(26) מצא את המרחק בין הישרים המקבילים: $5x + 12y - 14 = 0$, $5x + 12y + 25 = 0$.

(27) נתונים הישרים: $y = 6x + 5$, $12x - 2y - 15 = 0$.
הראה שהישרים מקבילים ומצא את המרחק ביניהם.

(28) נתון המלבן ABCD. משוואותיהן של שתיים מצלעות המלבן הן $AB: 3x + y = 0$ ו- $CD: 3x + y - 6 = 0$. הקדקוד B נמצא בראשית הצירים. נתון כי הצלע BC ארוכה פי 4 מהצלע BC. מצא את שטח המלבן ואת מפגש אלכסוני המלבן, אם ידוע שהוא ברביע הרביעי.

(29) צלע של ריבוע מונחת על הישר $3x - 2y + 5 = 0$. אלכסוני הריבוע נפגשים בנקודה $B(1, -1)$. מצא את משוואות הישרים עליהם מונחות הצלעות האחרות של הריבוע.

(30) נתון ישר שעובר בראשית הצירים ושיפועו חיובי. מצא את משוואת הישר אם נתון שהוא נמצא מעל הנקודות $P(4, 1)$ ו- $Q(7, 2)$ וסכום המרחקים ממנו לנקודות אלה הוא $3\sqrt{10}$.

(31) במשולש BKP נתון כי הצלע BK מונחת על הישר $x - y + 3 = 0$ והצלע BP מונחת על הישר $x + 2y + 3 = 0$. אורך הגובה לצלע BP הוא $3\sqrt{5}$ ואורך הגובה לצלע KP הוא 5. מצא את שיעורי קדקוד P אם ידוע שראשית הצירים נמצאת בתוך המשולש.

תשובות סופיות:

$$3 \quad (26) \quad 3x - 4y + 28 = 0, 3x - 4y - 12 = 0 \quad (25)$$

$$(2.1, -3.3), S = \text{יח"ש} \quad 14.4 \quad (28) \quad \frac{25}{\sqrt{148}} \quad (27)$$

$$3x - 2y - 15 = 0, y = -\frac{2}{3}x - 3\frac{2}{3}, y = -\frac{2}{3}x + 3 \quad (29)$$

$$P\left(2, -2\frac{1}{2}\right) \quad (31) \quad y = 3x \quad (30)$$

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 5 - גיאומטריה אנליטית - המעגל

תוכן העניינים

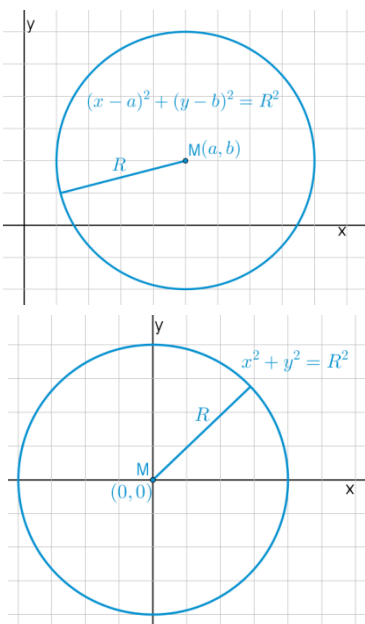
| | |
|-----------|--------------------------------------|
| 110 | 1. הכרות עם משוואת המעגל |
| 114 | 2. מעגל המשיק לצירים |
| 116 | 3. משיק למעגל |
| 117 | 4. שאלות יסודיות שונות |
| (ללא ספר) | 5. נושאים מתקדמים במעגל |
| 124 | 6. כתיבת משוואת מעגל עם השלמה לריבוע |
| 125 | 7. משוואות המשיקים למעגל |
| 127 | 8. מיתר המחבר שתי נקודות השקה |
| 128 | 9. שאלות מסכמות שונות |

הכרות עם משוואת המעגל:

סיכום כללי:

הגדרה:

המקום הגאומטרי של כל הנקודות, הנמצאות במרחק קבוע מנקודה קבועה במישור נקרא מעגל.



משוואת מעגל:

משוואת מעגל שמרכזו בנקודה $M(a, b)$ ורדיוסו R היא: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

משוואת מעגל קנוני:

משוואת מעגל קנוני (שמרכזו בראשית הצירים $M(0, 0)$) ורדיוסו R היא: $x^2 + y^2 = R^2$.

שאלות:

1) מצא את מרכזם ורדיוסם של המעגלים הבאים:

א. $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 49$

ב. $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 10$

ג. $(x-m)^2 + (y+n)^2 = m^2 + n^2$

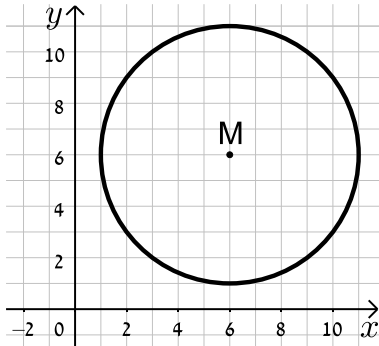
2) כתוב את משוואות המעגלים שמרכזם M ורדיוסם R :

א. $M(4, -2), R=3$ ב. $M(-3, 5), R=10$

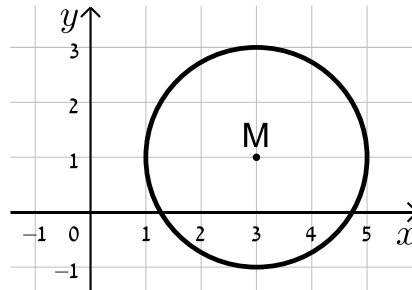
ג. $M(5, 5), R=\sqrt{40}$ ד. $M(10, -12), R=\sqrt{30}$

3) כתוב את משוואות המעגלים הבאים בכל מקרה:

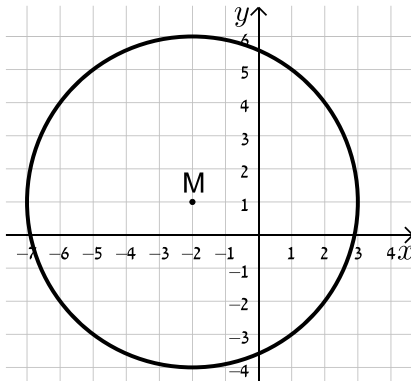
ב.



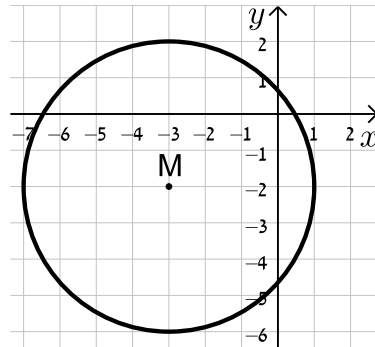
א.



ד.



ג.



4) מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה $A(-4, 5)$ ומרכזו בנקודה $O(2, -1)$.

5) מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה $M(-5, 6)$ והוא חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 9$.

6) מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה $M(0, -7)$ והוא חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y = 3$.

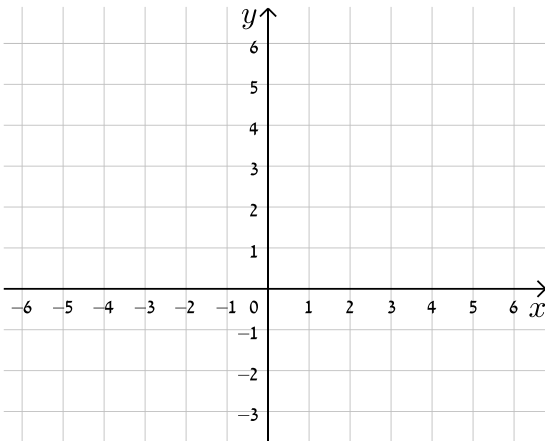
7) מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה $A(11, 2)$, רדיוסו 13 ומרכזו נמצא על הישר $y = 2x - 1$.

8) מצא את משוואתו של מעגל שהנקודות $A(-2, 3)$ ו- $B(4, -3)$ הן קצות הקוטר שלו.

9 מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו נמצא על הישר $x=4$, רדיוסו 10 והוא חותך מציר ה- x מיתר שאורכו 12.

10 מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו $M(4,-3)$ אם ידוע כי הישר $y = -3x + 7$ חותך אותו בשתי נקודות A ו-B כך שאורכו של המיתר AB הוא 4 יחידות אורך.

11 מצא את משוואתו של מעגל החוסם משולש שקודקודיו הם $A(22,-24)$, $B(-10,40)$, $C(-30,28)$.



12 נתונים שני מעגלים בעלי אותו המרכז $M(3,-1)$, האחד הוא בעל רדיוס R והשני בעל רדיוס של $2R$.
 א. כתוב את המשוואות של שני המעגלים (בטא באמצעות R).
 ב. מה תהיינה המשוואות עבור $R = 2$?
 ג. צייר את שני המעגלים במערכת הצירים שלפניך.

13 שני מעגלים שמרכזיהם $M_1(6,2)$ ו- $M_2(-3,-4)$ חותכים זה את זה בנקודה $(-2,3)$. מצא את משוואות המעגלים.

14 נתונה משוואת המעגל הבאה: $x^2 + y^2 - 10x - 10y + a = 0$ כאשר a פרמטר.
 א. מצא ביטוי של רדיוס המעגל באמצעות a .
 ב. איזה מהערכים הבאים יכול להיות הגיוני עבור a ?
 נמק ומצא את תחום ההגדרה של a .
 i. $a = 5$
 ii. $a = 55$

תשובות סופיות:

$$\text{ב. } M(-0.5, 0), R = \sqrt{10} \quad \text{א. } M(3, -5), R = 7 \quad (1)$$

$$\text{ג. } M(m, -n), R = \sqrt{m^2 + n^2}$$

$$\text{ב. } (x+3)^2 + (y-5)^2 = 100 \quad \text{א. } (x-4)^2 + (y+2)^2 = 9 \quad (2)$$

$$\text{ד. } (x-10)^2 + (y+12)^2 = 30 \quad \text{ג. } (x-5)^2 + (y-5)^2 = 40$$

$$\text{ב. } (x-6)^2 + (y-6)^2 = 25 \quad \text{א. } (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4 \quad (3)$$

$$\text{ד. } (x+2)^2 + (y-1)^2 = 25 \quad \text{ג. } (x+3)^2 + (y+2)^2 = 16$$

$$\text{א. } M(3, -3), (x-2)^2 + (y+1)^2 = 72 \quad (4)$$

$$\text{ב. } (x+5)^2 + (y-6)^2 = 232 \quad (5)$$

$$\text{ג. } x^2 + (y+7)^2 = 100 \quad (6)$$

$$\text{א. } (x-7.8)^2 + (y+14.6)^2 = 169 \quad \text{או } (x+1)^2 + (y+3)^2 = 169 \quad (7)$$

$$\text{ב. } (x-1)^2 + y^2 = 18 \quad (8)$$

$$\text{א. } (x-4)^2 + (y+8)^2 = 100 \quad \text{או } (x-4)^2 + (y-8)^2 = 100 \quad (9)$$

$$\text{ב. } (x-4)^2 + (y+3)^2 = 4\frac{2}{5} \quad (10)$$

$$\text{ג. } (x+2)^2 + (y-4)^2 = 1360 \quad (11)$$

$$\text{א. } (x-3)^2 + (y+1)^2 = R^2, (x-3)^2 + (y+1)^2 = 4R^2 \quad (12)$$

$$\text{ב. } (x-3)^2 + (y+1)^2 = 4, (x-3)^2 + (y+1)^2 = 16$$

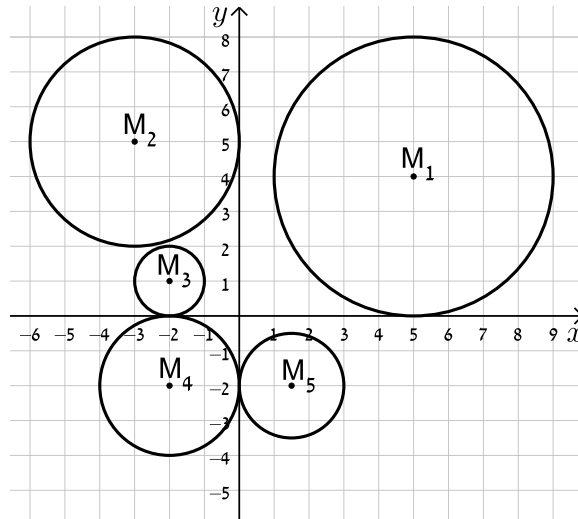
$$\text{א. } (x+3)^2 + (y+4)^2 = 50, (x-6)^2 + (y-2)^2 = 65 \quad (13)$$

$$\text{ב. } a = 5, \text{ ת.ה. } : a < 50 \quad \text{א. } R = \sqrt{50-a} \quad (14)$$

מעגל המשיק לצירים:

שאלות:

15) כתוב את משוואות המעגלים הבאים:



16) מצא את משוואתו של מעגל המשיק לשני הצירים ורדיוסו 4.

17) מצא את משוואת המעגל שמשיק לציר ה- x ומרכזו בנקודה $M(16,8)$.

18) מצא את משוואת המעגל שמרכזו נמצא על הישר $2x + 3y + 6 = 0$ והוא משיק לשני הצירים.

19) מצא את משוואתו של מעגל המשיק לציר ה- y וליר $y = 6$ ומרכזו על הישר $y = 3x - 2$ ברביע הראשון.

תשובות סופיות:

$$M_1 : (x-5)^2 + (y-4)^2 = 16, M_2 : (x+3)^2 + (y-5)^2 = 9 \quad \mathbf{(15)}$$

$$, M_3 : (x+2)^2 + (y-1)^2 = 1, M_4 : (x+2)^2 + (y+2)^2 = 4$$

$$. M_5 : (x-1.5)^2 + (y+2)^2 = 2\frac{1}{4}$$

$$. (x \pm 4)^2 + (y \pm 4)^2 = 16 \quad \mathbf{(16)}$$

$$. (x-16)^2 + (y-8)^2 = 64 \quad \mathbf{(17)}$$

$$. \left(x+1\frac{1}{5}\right)^2 + \left(y+1\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{36}{25}, (x-6)^2 + (y+6)^2 = 36 \quad \mathbf{(18)}$$

$$. (x-2)^2 + (y-4)^2 = 4 \quad \mathbf{(19)}$$

משיק למעגל:

סיכום כללי:

משוואת המשיק למעגל $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעליו היא: $(x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) = R^2$.

שאלות:

(20) מצא את משוואות המשיקים למעגל $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$ בנקודות על המעגל שבהן $y = 5$.

(21) נתונה משוואת המעגל: $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 20$ ומשוואת הישר $y = 2x + m$ כאשר m פרמטר. מצא עבור אלו ערכים של m הישר ישיק למעגל ולאילו ערכים הישר יחתוך את המעגל.

תשובות סופיות:

(20) $4x - 3y + 35 = 0$ ו- $4x + 3y = 27$.

(21) משיק: $m = 11, -9$, חותך: $-9 < m < 11$.

שאלות יסודיות שונות:

שאלות:

(22) נתון מעגל שמשוואתו $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$.

- א. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.
 ב. העבירו קוטר במעגל, המאונך לציר ה- x .
 מצא את שטח המרובע הנוצר על ידי נקודות החיתוך שמצאת בסעיף א'
 ונקודת החיתוך של הקוטר עם המעגל הנמצאת ברביע הראשון.

- (23) נתון ישר שמשוואתו $y = 2x - 10$. הישר חותך את ציר ה- x בנקודה A ואת ציר ה- y בנקודה B. בנקודה A מעבירים משיק למעגל שהקטע AB הוא קוטרו. המשיק חותך את ציר ה- y בנקודה C. מצא את אורך הקטע BC.

- (24) נתון המעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 = 81$. מסמנים ב-A את נקודת החיתוך החיובית של המעגל עם ציר ה- x . הנקודה A היא מרכזו של מעגל נוסף בעל רדיוס של 12. מסמנים את נקודות החיתוך של שני המעגלים ב-B ו-C. מצא את שטח המשולש שנוצר בין הנקודות B, C ו-O (ראשית הצירים).

- (25) נתון ישר שמשוואתו $y = x$. הישר חותך מעגל קנוני שמשוואתו $x^2 + y^2 = 32$ בשתי נקודות, A ו-B, כאשר A ברביע הראשון. בנקודה A עובר מעגל נוסף, המשיק למעגל הקנוני ובעל אותו רדיוס. מצא את משוואת המעגל הנוסף ואת משוואת המשיק המשותף לשני המעגלים העובר בנקודה A.

- (26) הישרים: $9y + 11x = 94$ ו- $y = -3x + 14$ נחתכים בנקודה B.

דרך נקודה זו עובר מעגל שמרכזו הוא: $M(-9, 1)$.

ידוע כי מעגל זה חותך את הישרים (חוץ מהנקודה B)

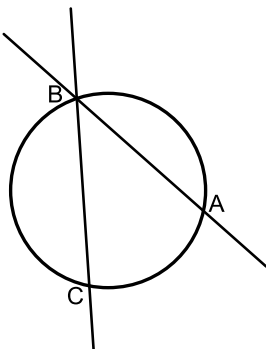
בשתי נקודות A ו-C (ראה איור).

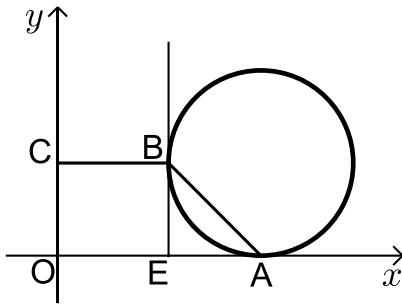
א. מצא את שיעורי הנקודה B.

ב. מצא את משוואת המעגל.

ג. מצא את שיעורי הנקודה A – נקודת החיתוך של הישר

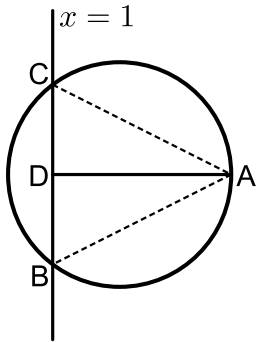
שמשוואתו: $y = -3x + 14$ עם המעגל.





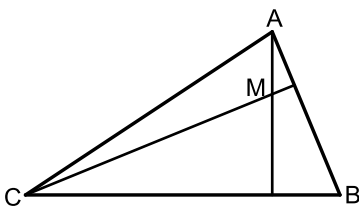
- (27)** נתון מעגל המשיק לציר ה- x בנקודה A .
 מהנקודה E שעל ציר ה- x מעלים אנך המשיק
 למעגל בנקודה B (ראה איור).
 הקטע BC מקביל לציר ה- x ו- O היא נקודת
 ראשית הצירים. יוצרים טרפז ישר זווית $ABCO$
 ששטחו הוא 170 סמ"ר.
 ידוע כי: $C(0,10)$ ו- $AE = 10$ ס"מ.

- א. ענה על הסעיפים הבאים:
 i. מצא את שיעורי הנקודה B .
 ii. מצא את שיעורי הנקודה A .
 ב. כתוב את משוואת המעגל.



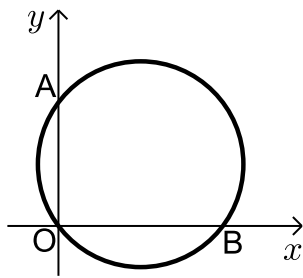
- (28)** הנקודה $A(17,4)$ נמצאת על המעגל
 שמשוואתו: $(x-7)^2 + (y-4)^2 = R^2$.
 הישר $x=1$ חותך את המעגל בשתי נקודות B ו- C כך
 ש- B נמצאת ברביע הרביעי. מעבירים את הקטע AD
 המאונך לישר BC וידוע כי הנקודה D היא אמצע BC .

- א. מצא את רדיוס המעגל.
 ב. מצא את שיעורי הנקודות B ו- C .
 ג. ענה על הסעיפים הבאים:
 i. חשב את מרחק הנקודה A מהישר $x=1$.
 ii. חשב את שטח המשולש ABC .



- (29)** נתון משולש ABC . משוואות הצלעות AB ו- BC
 במשולש ABC הן בהתאמה: $2y - x = 56$
 ו- $8y + x = 104$.
 מעבירים גבהים לצלעות AB ו- BC אשר
 נחתכים בנקודה $M(0, -2)$ שבתוך המשולש.

- א. מצא את משוואות הגבהים.
 ב. מצא את שיעורי הנקודה B .
 ג. מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה M
 ורדיוסו הוא הקטע BM .



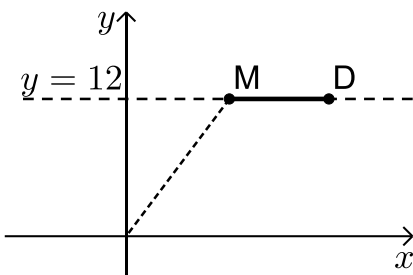
30 באיור שלפניך מתואר המעגל: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$.

המעגל חותך את הצירים בנקודות A, B ו-O.

- מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.
- מצא נקודה C הנמצאת על היקף המעגל ברביע הראשון כך שהמרובע ABCO יהיה מלבן.
- חשב את היקף המלבן.

31 המעגל: $(x+a)^2 + (y-1)^2 = a+4$, $a > 0$, חותך את ציר ה-x בנקודה שבה: $x=1$.

- מצא את a.
- מצא את נקודות החיתוך של המעגל הנתון עם המעגל $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$.
- כתוב את משוואת הישר העובר דרך נקודות החיתוך של שני המעגלים.
- חשב את שטח המשולש שיוצר הישר שמצאת בסעיף הקודם עם הצירים.



32 הנקודות M ו-D נמצאות על הישר $y=12$ ידוע כי שיעור

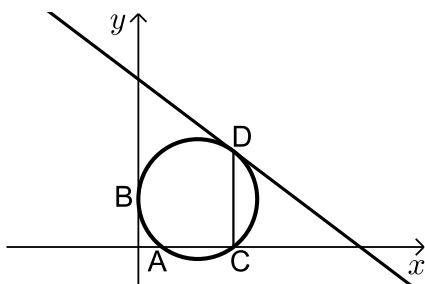
ה-x של הנקודה M הוא 9 וכי המרחק של הנקודה M מראשית הצירים גדול ב-6 מהמרחק בין הנקודות M ו-D (ראה איור).
בוניס מעגל שמרכזו נמצא בנקודה M ורדיוסו הוא האורך DM.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

- מצא את מרחק הנקודה M מראשית הצירים.
 - מצא את שיעור ה-x של הנקודה D.
- כתוב את משוואת המעגל.
 - האם המעגל הזה חותך את הצירים? הראה חישוב מתאים לטענתך.

33 מעגל שמרכזו בנקודה M(15,12) משיק לציר ה-y

בנקודה B וחותך את ציר ה-x בשתי נקודות A ו-C כמתואר באיור.



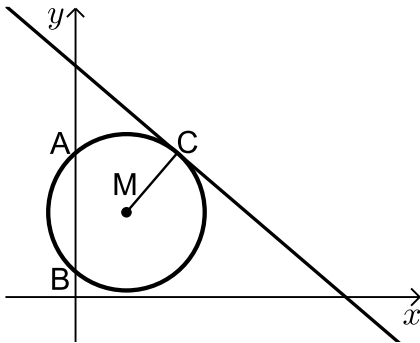
א. כתוב את משוואת המעגל.

מהנקודה C מעלים אנך לציר ה-x שחותך את המעגל בנקודה נוספת D.

דרך הנקודה D עובר משיק למעגל.

ב. מצא את שיעורי הנקודות C ו-D.

ג. מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה D.



34) באיור שלפניך נתון מעגל שמרכזו בנקודה M.

המעגל חותך את ציר ה- y בנקודות A ו-B.

מעבירים משיק למעגל: $6x + 7y = 191$

דרך הנקודה: $C(12, 17)$.

א. כתוב את משוואת הרדיוס MC.

ב. ידוע כי הנקודה M נמצאת על הישר $y = 10$.

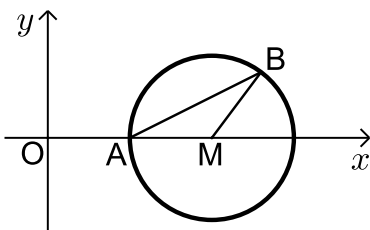
i. מצא את שיעורי הנקודה M.

ii. מצא את אורך רדיוס המעגל.

iii. כתוב את משוואת המעגל.

ג. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- y .

ד. חשב את שטח המשולש AMB.



35) באיור שלפניך נתון מעגל שמרכזו בנקודה M הנמצאת על

ציר ה- x . המעגל חותך את ציר ה- x בנקודה A.

מסמנים את ראשית הצירים ב-O.

ידוע כי A היא אמצע הקטע MO ושיעוריה הם: $A(5, 0)$.

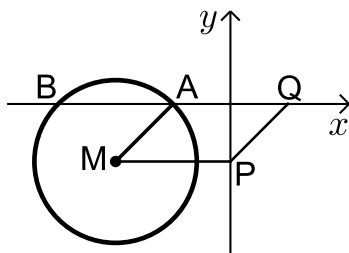
א. מצא את משוואת המעגל.

ב. כתוב את משוואת הישר שעובר דרך הנקודה A ושיפועו הוא 0.5.

ג. מצא את נקודת החיתוך הנוספת של הישר שמצאת עם המעגל.

ד. סמן את הנקודה שמצאת בסעיף הקודם ב-B וחשב

את שטח המשולש AMB.



36) באיור שלפניך נתון מעגל שמשוואתו

$$\text{היא: } (x+4)^2 + (y+2)^2 = 8$$

מסמנים את נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- x

ב-A ו-B (ראה איור).

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

מעבירים אנך לציר ה- y מנקודת מרכז המעגל M

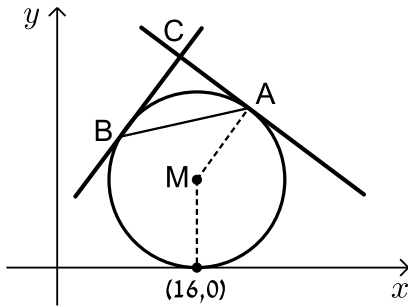
ומסמנים את חיתוכם ב-P.

ב. מצא נקודה Q כך שהמרובע AMPQ יהיה מקבילית. נמק.

ג. כתוב את משוואת הישר PQ.

ד. הוכח כי הישר שמצאת בסעיף הקודם משיק למעגל

בנקודה $(-2, -4)$.



37 נתון מעגל שרדיוסו R ($R < 16$) ומשיק לציר ה- x

בנקודה שבה: $x = 16$.

א. הבע באמצעות R את משוואת המעגל וציין האם הוא חותך את ציר ה- y או לא. נמק.

מהנקודה $A(22,18)$ שעל המעגל מעבירים משיק.

ב. מצא את R וכתוב את משוואת המעגל.

ג. כתוב את משוואת המשיק למעגל בנקודה A .

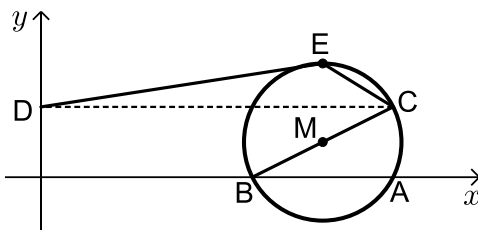
ד. מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה B שבה $x_B < x_M$

אם ידוע כי הוא המאונך למשיק הקודם.

ה. המשיקים נחתכים בנקודה C .

i. מצא את שיעורי הנקודה C .

ii. מצא את שטח המשולש ABC .



38 באיור שלפניך נתון מעגל

שמשוואתו: $(x+a)^2 + (y-1)^2 = 5$, פרמטר a .

ידוע כי המעגל חותך את ציר ה- x בנקודה $A(10,0)$.

א. מצא את a אם ידוע כי $a > -10$.

ב. מצא את הנקודה B - נקודת החיתוך השנייה של המעגל עם ציר ה- x .

ג. כתוב את משוואת הקוטר העובר דרך הנקודה B ומרכז המעגל M .

ד. מצא את נקודת החיתוך השנייה של הקוטר עם המעגל.

ה. מעבירים אנך מנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם לציר ה- y בנקודה D .

הנקודה E היא הנקודה בעלת שיעור ה- y הגדול ביותר על המעגל.

מחברים את הנקודות D ו- E כך שנוצר המחומש $DECBO$. חשב את שטחו.

39 באיור שלפניך נתון מעגל שמשוואתו: $(x-5)^2 + (y-3)^2 = R^2$, רדיוס המעגל.

ידוע כי המעגל עובר בראשית הצירים.

א. מצא את רדיוס המעגל

וכתוב את משוואת המעגל.

ב. מצא את הנקודות A ו- B - החיתוך של

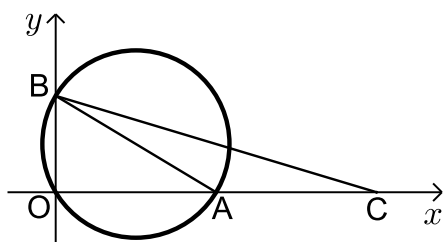
המעגל עם הצירים (ראה איור).

ג. מסמנים נקודה C על ציר ה- x

כך ש- A היא אמצע הקטע CO .

i. מצא את שיעורי הנקודה C .

ii. חשב את שטח המשולש ABC .



תשובות סופיות:

(22) א. $(0, -8)$, $(0, 0)$, $(6, 0)$ ב. 27 יח"ש.

(23) 12.5 יחידות אורך.

(24) $S_{ABOC} = \sqrt{80}$ יח"ש

(25) $y = -x + 8$, $(x - 8)^2 + (y - 8)^2 = 32$

(26) א. $(2, 8)$ ב. $(x + 9)^2 + (y - 1)^2 = 170$ ג. $(4, 2)$

(27) א. i. $B(12, 10)$ ii. $A(22, 0)$ ב. $(x - 22)^2 + (y - 10)^2 = 100$

(28) א. $R = 10$ ב. $B(1, -4)$, $C(1, 12)$ ג. i. $d = 16$

ii. $S = 128$

(29) א. $y = 8x - 2$, $y = -2x - 2$ ב. $(-24, 16)$ ג. $x^2 + (y + 2)^2 = 900$

(30) א. $O(0, 0)$, $A(0, 6)$, $B(8, 0)$ ב. $C(8, 6)$ ג. 28 יח"ש $P =$

(31) א. $a = 1$ ב. $(0, -1)$, $(-2, 3)$ ג. $y = -2x - 1$

ד. $S = \frac{1}{4}$

(32) א. i. $d = 15$ ii. $x = 18$ ב. $(x - 9)^2 + (y - 12)^2 = 81$

ג. המעגל אינו חותך את ציר ה- x - כאשר מציבים ב- y אפס מתקבלת משוואה ריבועיתללא פתרון. המעגל חותך את ציר ה- x בנקודה אחת- $(12, 0)$.

(33) א. $(x - 15)^2 + (y - 12)^2 = 225$ ב. $C(24, 0)$, $D(24, 24)$ ג. $y = -\frac{3}{4}x + 42$

(34) א. $y = \frac{7}{6}x + 3$ ב. i. $M(6, 10)$ ii. $\sqrt{85}$

iii. $(x - 6)^2 + (y - 10)^2 = 85$ ג. $A(0, 17)$, $B(0, 3)$ ד. 42 יח"ש

(35) א. $(x - 10)^2 + y^2 = 25$ ב. $y = 0.5x - 2.5$ ג. $B(13, 4)$

ד. 10 יח"ש $S_{AMB} =$

(36) א. $A(-2,0)$, $B(-6,0)$ ב. $Q(2,0)$ ג. $y = x - 2$.

(37) א. $(x-16)^2 + (y-R)^2 = R^2$, המעגל אינו חותך את ציר ה- y .

ב. $(x-16)^2 + (y-10)^2 = 100$, $R = 10$ ג. $y = -\frac{3}{4}x + 34\frac{1}{2}$.

ד. $y = \frac{4}{3}x + 5\frac{1}{3}$ ה. i. $C(14,24)$ ii. 50 יח"ש.

(38) א. $a = -8$ ב. $B(6,0)$ ג. $y = 0.5x - 3$.

ד. $(10,2)$ ה. $S_{\text{DECB0}} = 11 + 5\sqrt{5}$ יח"ש.

(39) א. $\sqrt{34}$ יחידות אורך, $R = \sqrt{34}$, $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 34$ ב. $A(10,0)$, $B(0,6)$.

ג. i. $C(20,0)$ ii. 30 יח"ש S_{ABC} .

כתיבת משוואת מעגל עם השלמה לריבוע:

שאלות:

1 מצא את מרכזם ורדיוסם של המעגלים הבאים:

א. $x^2 + 10x + y^2 + 6y - 2 = 0$ ב. $x^2 - 2x + y^2 + 20y + 1 = 0$

ג. $x^2 - 8x + y^2 - 14y = 0$ ד. $x^2 + y^2 + 2y = 0$

ה. $x^2 + x + y^2 - 3\frac{3}{4} = 0$ ו. $x^2 - 2mx + y^2 + 6my + m^2 = 0$

2 משוואתו של מעגל היא $x^2 + y^2 - 6mx - 2(m+2)y + 4m + 4 = 0$

מצא את ערכו של m אם ידוע שמרכז המעגל נמצא על הישר $y = 2x + 7$.

3 משוואתו של מעגל היא $x^2 + y^2 - 8x + 12y - 48 = 0$.

מצא את אורכו של המיתר שחותך הישר $y = 2x - 4$ מהמעגל בלי למצוא את נקודות הקצה של המיתר.

תשובות סופיות:

1 א. $M(-5, -3), R = 6$ ב. $M(1, -10), R = 10$

ג. $M(4, 7), R = \sqrt{65}$ ד. $M(0, -1), R = 1$

ה. $M\left(-\frac{1}{2}, 0\right), R = 2$ ו. $M(m, -3m), R = 3m$

2 $m = -1$

3 $2\sqrt{80}$

משוואות המשיקים למעגל:

שאלות:

- (4) מצא משוואת מעגל העובר בנקודה $(1, 8)$ המשיק לשני הצירים.
- (5) מצא את אורך המשיק למעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 - 4x + 14y + 37 = 0$ היוצא מהנקודה $A(10, -3)$.
- (6) מצא את משוואת המשיק ואת משוואת הנורמל למעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$ בנקודה $A(5, -4)$.
- (7) מצא את נקודת החיתוך של המשיקים למעגל שמשוואתו $x^2 + (y-1)^2 = 5$ בנקודות שבהן $x = -1$.
- (8) נתון מעגל שמרכזו בנקודה $(-2, 6)$ והוא עובר בראשית הצירים. המעגל חותך את הצירים בשתי נקודות נוספות, A ו-B.
 א. הוכח כי המשיקים למעגל בנקודות A ו-B מקבילים זה לזה.
 ב. הוכח את סעיף א' בלי למצוא את משוואות המשיקים או את שיפועיהם.
- (9) נתון המעגל $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 20$ והישר $y = 2x + m$.
 לאלו ערכים של הפרמטר m הישר משיק למעגל ולאלו ערכים של m הישר חותך את המעגל?

תשובות סופיות:

$$(4) \quad (x-13)^2 + (y-13)^2 = 169 \text{ או } (x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$$

$$(5) \quad .8$$

$$(6) \quad \text{משיק: } y = 3x - 19, \text{ נורמל: } x + 3y + 7 = 0$$

$$(7) \quad .(-5,1)$$

$$(8) \quad \text{שאלת הוכחה.}$$

$$(9) \quad \text{משיק: } m = -9, 11, \text{ חותך: } -9 < m < 11$$

מיתר המחבר שתי נקודות השקה:

סיכום כללי:

משוואת המיתר, המחבר את שתי נקודות ההשקה של שני המשיקים

למעגל $(x-a)^2 = (y-b)^2 = R^2$ היוצאים מהנקודה $A(x_1, y_1)$ שמחוץ

למעגל היא: $(x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) = R^2$.

שאלות:

10) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את משוואת המיתר במעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$,

המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים מהנקודה $A(-3, 8)$

ב. מצא את משוואת המיתר במעגל שמשוואתו $x^2 + (y-1)^2 = 5$, המחבר

את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים מהנקודה $A(-5, 1)$.

11) נתון מעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 + 16x + 48 = 0$ ונקודה P, שנמצאת על החלק

החיובי של ציר ה-y. הישר המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים

היוצאים למעגל מנקודה P חותך את ציר ה-y בנקודה Q. נתון: $PQ = 14$.

מצא את שיעורי הנקודה Q.

תשובות סופיות:

10) א. $x - 4y + 11 = 0$. ב. $x = -1$.

11) $Q(0, -8)$ או $Q(0, -6)$.

שאלות מסכמות שונות:

שאלות:

12 נתון מעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 + 16x - 12y + 64 = 0$. המעגל משיק מבחוץ למעגל קנוני. מצא את משוואת המעגל הקנוני, את נקודת ההשקה בין המעגלים ואת משוואת המשיק המשותף העובר בנקודה זו.

13 המעגלים $x^2 + y^2 + 22x - 6y = m$ ו- $x^2 + y^2 = 26$ נחתכים בזווית ישרה. מצא את ערכו של m .

14 בטרפז שווה שוקיים ABCD נתון כי הבסיס הגדול, DC, מונח על הישר: $3x - y - 9 = 0$ והשוק AD מונחת על הישר $x + y - 3 = 0$. שיעורי הקודקוד B הם $(3, -8)$. מצא את משוואת המעגל החוסם את הטרפז ABCD.

15 מצא את משוואתו של מעגל החוסם ריבוע, שאחד מקדקודיו נמצא בראשית הצירים ומשוואת אחד מאלכסונו היא $3x - y + 10 = 0$.

תשובות סופיות:

12 $x^2 + y^2 = 16$, $A(-3.2, 2.4)$, $4x - 3y + 20 = 0$

13 $m = -26$

14 $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 20$

15 $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 10$

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 6 - חקירת משוואה ממעלה ראשונה

תוכן העניינים

1. פתרון משוואות ממעלה ראשונה עם פרמטר 129
2. חקירת משוואות ממעלה ראשונה 130
3. חקירה של מערכת שתי משוואות ממעלה ראשונה 133
4. חקירת משוואות ממעלה ראשונה עם שורשים 138
5. חקירת משוואות ממעלה ראשונה עם ערך מוחלט 139

פתרון משוואות ממעלה ראשונה עם פרמטר:

סיכום כללי:

שלבי עבודה:

- נפתור את המשוואה.
- נאתר את ערכי הפרמטר המאפשרים את המכנה בכל שלבי הפתרון.
- נבדוק לכל ערך כזה בנפרד כמה פתרונות יש למשוואה על ידי הצבתו במשוואה המקורית.

שאלות:

(1) פתרו את המשוואה: $kx + 6k = 2x + 3k^2$.

(2) פתרו את המשוואה: $a^2(x-1) = 3ax + 4(x-a)$.

(3) פתרו את מערכת המשוואות:
$$\begin{cases} 2kx + 5y = 2k^2 \\ 2x - y = -10 \end{cases}$$

(4) פתרו את מערכת המשוואות הבאה:
$$\begin{cases} bx - (1-2b)y = 1 \\ (2b+1)x + 3(by-1) = 0 \end{cases}$$

תשובות סופיות:

(1) $x = 3k \quad (k \neq 2)$

(2) $x = \frac{a}{a+1}$

(3) $(k-5, 2k)$

(4) $\left(\frac{2-b}{b(b+1)}, \frac{1}{b+1} \right), \quad b \neq 0, \pm 1$

חקירה של משוואה ממעלה ראשונה:

שאלות:

(1) נתונה המשוואה הבאה: $m^2(2x-1) = 9(x-1) - x(6+5m)$.

מצאו לאילו ערכי m יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ומצאו אותו).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

(2) נתונה המשוואה: $k^2(5-2x) = 3(15-2kx)$.

א. מצאו לאילו ערכי k למשוואה:

i. פתרון יחיד.

ii. אף פתרון.

iii. אינסוף פתרונות.

ב. מצאו לאילו ערכי k פתרון המשוואה:

i. חיובי.

ii. מקיים את אי-השוויון: $2x-3 > x$.

(3) נתונה המשוואה: $\frac{mx}{m-2} = \frac{2m}{m-5} - \frac{6x}{m^2-7m+10}$.

מצאו לאילו ערכי m למשוואה:

א. פתרון יחיד.

ב. אף פתרון.

ג. אינסוף פתרונות.

(4) לפניכם המשוואה: $m \cdot \frac{x-1}{x} - \frac{m+6}{m} = \frac{-3}{x}$.

א. פתרו את המשוואה בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

ב. מצאו עבור אלו ערכי m יש למשוואה:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ג. האם עבור ערכי ה- m הנותנים אינסוף פתרונות, כל x יהיה פתרון של המשוואה?

ד. עבור אלו ערכי m יהיה פתרון המשוואה גדול מ-2?

(5) נתונה המשוואה: $x(m^2 - 9) = 2(m(3x+1) + 1 - x)$.

- א. פתרו את המשוואה בהנחה שיש לה פתרון יחיד.
 ב. חקרו את המשוואה ומצא עבור אלו ערכי m יש למשוואה:
 i. פתרון יחיד.
 ii. אינסוף פתרונות.
 iii. אף פתרון.
 ג. עבור איזה ערך של m פתרון המשוואה יהיה: $x = 2$?

(6) נתונה המשוואה: $\frac{5}{k-4} - \frac{kx}{3k+15} = \frac{k^2+29}{k^2+k-20}$.

- א. פתרו את המשוואה בהנחה שיש לה פתרון יחיד.
 ב. האם קיים ערך של k עבורו יש למשוואה אינסוף פתרונות?
 ג. עבור איזה ערך של k פתרון המשוואה הוא: -4 ?

(7) לפניכם המשוואה הבאה: $\frac{m^2x}{m-5} + \frac{2mx - m^2 + 1}{m-5} = 1$.

- מצאו עבור אלו ערכי m יש למשוואה:
 א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות m).
 ב. אינסוף פתרונות.
 ג. אף פתרון.

(8) לפניכם המשוואה הבאה: $\frac{(m^2+1)x-4}{x-2} = m+1$.

- מצאו עבור אלו ערכי m יש למשוואה:
 א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות m).
 ב. אינסוף פתרונות.
 ג. אף פתרון.

(9) לפניכם המשוואה הבאה: $\frac{5m-2}{mx-1} = -3$.

- מצאו עבור אלו ערכי m יש למשוואה:
 א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות m).
 ב. אינסוף פתרונות.
 ג. אף פתרון.

(10) לפניכם המשוואה הבאה: $\frac{x+1}{x-m+1} = \frac{x}{x+m+2}$

מצאו עבור אלו ערכי m יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות m).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

תשובות סופיות:

(1) א. $\frac{1}{2}, m \neq -3, \frac{m-3}{2m-1}$ ב. $m = -3$ ג. $m = \frac{1}{2}$

(2) א. $k \neq 0, 3$ ב. $k = 0$ ג. $k = 3$

א. $k > 0$ או $k < -3$ וגם $k \neq 3$ ב. $0 < k < 15$ וגם $k \neq 3$ ג. אף m

(3) א. $m \neq 2, 3, 5$ ב. $m = 2, 3, 5$ ג. אף m

(4) א. $x = \frac{1}{m+2}, m \neq 3$ ב. פתרון יחיד: $m \neq 0, -2, 3$, אף פתרון:

א. $m = 0, -2$, אינסוף פתרונות: $m = 3$ ג. לא, רק: $x \neq 0$

ד. $-2 < m < -1.5$

(5) א. $x = \frac{1}{m-7}, m \neq 7, -1$ ב. פתרון יחיד: $m \neq 7, -1$, אף פתרון: $m = 7$

אינסוף פתרונות: $m = -1$

(6) א. $x = \frac{3}{k} - 3, k \neq 0, 4, -5$ ב. אף k ג. $k = -3$

(7) א. $m \neq 0, -2, 5$ ב. אף m ג. $m = 0, -2, 5$

(8) א. $m \neq 0, \pm 1$ ב. $m = 1$ ג. $m = 0, -1$

(9) א. $m \neq 0, \frac{2}{5}$ ב. אף m ג. $m = \frac{2}{5}, 0$

(10) א. $m \neq 0, -1, -2, -\frac{1}{2}$ ב. אף m ג. $m = 0, -1, -2, -\frac{1}{2}$

חקירה של מערכת שתי משוואות ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

שלבי עבודה:

- נפתור את מערכת המשוואות.
- נאתר את ערכי הפרמטר המאפסים את המכנה בכל שלבי הפתרון.
- נבדוק לכל ערך כזה בנפרד כמה פתרונות יש למערכת על ידי הצבתו.

המשמעות הגרפית של חקירת מערכת משוואות ממעלה ראשונה:

בהינתן מערכת שתי משוואות מהצורה: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ נאמר כי:

אם: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ אז הישרים נחתכים (כלומר למערכת פתרון יחיד).

אם: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ אז הישרים מקבילים (כלומר למערכת אף פתרון).

אם: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ אז הישרים מתלכדים (כלומר למערכת אינסוף פתרונות).

שאלות:

$$(1) \quad \begin{cases} x + 3ay = a \\ ax + 3y = 4a - 3 \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת המשוואות:}$$

א. מצאו לאלו ערכי a למערכת המשוואות:

- פתרון יחיד.
- אף פתרון.
- אינסוף פתרונות.

ב. מצאו לאלו ערכי a נקודת החיתוך בין הישרים (המיוצגים על ידי המשוואות) נמצאת ברביע השלישי.

$$(2) \quad \begin{cases} (m+4)x + 5y = m+8 \\ x + my = m+2 \end{cases} \quad \text{נתונות מערכת המשוואות הבאה:}$$

א. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

ב. מצאו עבור אלו ערכי m יש למערכת:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ג. פתרון המערכת מייצג נקודה במערכת צירים.

הוכיחו כי נקודה זו נמצאת על הישר: $y(m-1) = 2(m-1)x + 4 - m$.

ד. עבור אלו ערכי m פתרון המערכת:

i. יהיה ברביע השני.

ii. יהיה מתחת לציר ה- x .

iii. יהיה מימין לציר ה- y .

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{x^2}{4} - 2x + 3y = \left(k - \frac{x}{2}\right)^2 + 4 \\ x - 10 = k(1 - y) \end{cases} \quad \text{לפניכם מערכת המשוואות הבאה:}$$

א. מצאו לאלו ערכי k יש למערכת המשוואות:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ב. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

$$(4) \quad \begin{cases} k(x-1) = 1 - 2y \\ \frac{2x+3}{k} = 3 - y \end{cases} \quad \text{לפניכם מערכת המשוואות הבאה:}$$

א. מצאו לאלו ערכי k יש למערכת המשוואות:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ב. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

$$(5) \quad \begin{cases} k^2(1-x) = k + 9x + 12y \\ x = 1 - \frac{2(y+1)}{k} \end{cases} \quad \text{לפניכם מערכת המשוואות הבאה:}$$

א. מצאו לאלו ערכי k יש למערכת המשוואות:

i. פתרון יחיד.

ii. אינסוף פתרונות.

iii. אף פתרון.

ב. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

$$(6) \quad \begin{cases} (2-k)x - y = k \\ 3x + ky = -1 \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת המשוואות הבאה:}$$

א. מצאו את הערך של k עבורו $(2,7)$ הוא פתרון של מערכת המשוואות.

ב. האם יש למשוואה פתרונות נוספים עבור הערך של k שמצאת בסעיף הקודם?

ג. האם קיים ערך של k עבורו למערכת המשוואות לא יהיו פתרונות כלל?

אם כן מצאו אותו.

$$(7) \quad \begin{cases} ax + b^2y = a^2 \\ 3x + by = 9b \end{cases} \quad \text{לפניכם מערכת המשוואות הבאה:}$$

א. פתרו את מערכת המשוואות בהנחה שיש לה פתרון יחיד.

ב. הראו שכאשר $a = 3b$ יש למערכת אינסוף פתרונות.

ג. עבור אלו ערכי a ו- b הפתרון היחיד של המערכת יהיה $(4,3)$?

$$(8) \quad \begin{cases} amx + y = m^2 \\ bx + my = -9m \end{cases} \quad \text{לפניך מערכת המשוואות הבאה:}$$

א. מצאו ערכי הפרמטרים a ו- b אם ידוע כי כאשר $m = 4$ פתרון המשוואה הוא $(4,0)$.

ב. הוכיחו את הטענות הבאות:

i. לכל ערך של m יש למערכת פתרון ממשי.

ii. פתרון המערכת תמיד יהיה $(m,0)$.

ג. העזרו בסעיף הקודם וקבע איזו משוואה מבין שלושת המשוואות

הבאות לא תכיל את הפתרון היחיד הנ"ל:

i. $7y + 2m = 2x$

ii. $my = 2x - m$

iii. $m(y - mx) = 2x - m(m^2 + 2)$

$$(9) \quad \begin{cases} x + (k-9)y = 8 \\ x - \frac{14y}{k} = 1 \end{cases} \quad \text{לפניך הישרים הבאים:}$$

- א. עבור אלו ערכי k הישרים הללו מקבילים?
 ב. הביעו באמצעות k את נקודת החיתוך של הישרים.
 ג. עבור איזה ערך של k נקודת החיתוך של הישרים תהיה על הישר: $y = x - 8$?

$$(10) \quad \text{לפניכם שני הישרים:} \quad \begin{cases} (k^2 + 6)x + ay = 15 \\ kx + ay = 3 \end{cases} \quad , a, k \text{ פרמטרים, } a \neq 0$$

- א. הוכיחו כי לכל ערך של k הישרים הללו נחתכים.
 ב. מצאו את a אם ידוע כי כאשר $k = 6$ נקודת החיתוך היא $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$.
 ג. עבור איזה ערך של k נקודת החיתוך תהיה $(2, 1)$?
 ד. הראו כי נקודת החיתוך של הישרים נמצאת

$$\text{על גרף הפונקציה: } \frac{4y}{x} = k^2 - 5k + 6$$

תשובות סופיות:

(1) א. i. $a \neq \pm 1$ ii. $a = -1$ iii. $a = 1$ ג. $-1 < a < 0$

(2) א. $m \neq 1, -5, \left(\frac{m-2}{m-1}, \frac{m}{m-1}\right)$

ב. פתרון יחיד: $m \neq 1, -5$, אינסוף פתרונות: $m = -5$, אף פתרון: $m = 1$.
ג. הוכחה.

ד. i. $1 < m < 2$ ii. $0 < m < 1$ iii. $m \neq -5, m < 1, m > 2$

(3) א. i. $k \neq 3, -1$ ii. $k = 3$ iii. $k = -1$ ג. $\left(\frac{k^2+3k+10}{k+1}, \frac{8}{k+1}\right)$

(4) א. i. $k \neq 0, \pm 2$ ii. $k = 2$ iii. $k = 0, -2$ ג. $\left(\frac{k-3}{k+2}, \frac{3k+1}{k+2}\right)$

(5) א. i. $k \neq 0, 3$ ii. $k = 3$ iii. $k = 0$ ג. $\left(\frac{k-4}{k-3}, \frac{6-k}{2k-6}\right)$

(6) א. $k = -1$ ב. כן. ג. $k = 3$

(7) א. $\left(a+3b, -\frac{3a}{b}\right)$ ג. $a = -2, b = 2$

(8) א. $a = 1, b = -9$ ג. ii.

(9) א. $k = 2, 7$ ג. $k = 8$ ב. $\left(\frac{k^2-9k+112}{k^2-9k+14}, \frac{7k}{k^2-9k+14}\right)$

(10) א. הוכחה. ב. $a = 1$ ג. $k = 1$

חקירת משוואות ממעלה ראשונה עם שורשים:

שאלות:

(1) לפניכם המשוואה: $(m-1)x = \sqrt{m-1}$.

מצאו עבור אלו ערכי m יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות m).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

(2) לפניכם המשוואה: $\frac{x-m}{\sqrt{3x-2}} + \sqrt{3x-2} = \frac{mx}{\sqrt{3x-2}}$.

מצאו עבור אלו ערכי m יש למשוואה:

א. פתרון יחיד (ובטאו אותו באמצעות m).

ב. אינסוף פתרונות.

ג. אף פתרון.

תשובות סופיות:

(1) א. פתרון יחיד: $m > 1$ והוא: $x = \frac{1}{\sqrt{m-1}}$. ב. $m = 1$. ג. $m < 1$.

(2) א. פתרון יחיד: $\frac{6}{5} < m < 4$ והוא: $x = \frac{m+2}{4-m}$. ב. אינסוף: \emptyset . ג. אף פתרון: $m \geq 4$, $m \leq \frac{6}{5}$.

חקירה של משוואות ממעלה ראשונה עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

$$\cdot |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \text{ : הגדרת ערך מוחלט}$$

- משוואה מהצורה: $|A| = |B|$ תפוצל לשתי משוואות: $A = B$ או $A = -B$. יש לחקור כל מקרה בנפרד ולאחד פתרונות.
- עבור משוואות המכילות ביטויים עם ערכים מוחלטים יש להפריד עבור כל מקרה לפי הגדרת הערך המוחלט. לבסוף יש לאחד פתרונות.
- למשוואה מהצורה: $|x| = k$ (כאשר x הוא המשתנה ו- k הוא פרמטר) יתכנו:
 - שני פתרונות אם $k > 0$.
 - פתרון אחד (והוא $x = 0$) אם $k = 0$.
 - אף פתרון אם $k < 0$.

שאלות:

$$(1) \text{ חקור את המשוואה הבאה: } |x - 2m| = |x + 1|$$

$$(2) \text{ חקור את המשוואה הבאה: } |mx - 3x| = |x - m|$$

$$(3) \text{ חקור את המשוואה הבאה: } \frac{mx^2}{|x| - 1} - m|x| = 2m + 1$$

$$(4) \text{ נתונה מערכת המשוואות הבאה: } \begin{cases} y + |x - 2| = 3 \\ |x + y| = m \end{cases}$$

מצא עבור אלו ערכי m יש למערכת:

- א. פתרון אחד בלבד.
- ב. שני פתרונות שונים.
- ג. אינסוף פתרונות.

תשובות סופיות:

(1) פתרון יחיד: $m \neq -\frac{1}{2}$. אף פתרון: \emptyset . אינסוף: $m = -\frac{1}{2}$.

(2) פתרון יחיד: $m = 0$ והוא $x = 0$. אף פתרון: \emptyset .

שני פתרונות: $m \neq 0$ והם: $x_{1,2} = -\frac{2m}{3}, \frac{12m}{5}$.

(3) עבור: $m = -\frac{1}{2}$ יש פתרון יחיד: $x = 0$.

עבור: $m > 0, -\frac{1}{2} < m < 0, m < -1$ יש שני פתרונות.

עבור: $m = 0, -1 < m < -0.5$ אין פתרון כלל.

(4) א. $m = 0, m > 5$. ב. $0 < m < 5$. ג. $m = 5$.

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 7 - חקירת משוואה ממעלה שנייה

תוכן העניינים

- 141 1. פתרון משוואות ממעלה שנייה עם פרמטר
- 142 2. חקירה של משוואה ממעלה שנייה
- 151 3. חקירות עם קדקוד פרבולה

פתרון משוואות ממעלה שנייה עם פרמטר:

סיכום כללי:

משוואות מהצורה: $ax^2 + bx + c = 0$ המכילות פרמטר כלשהו, m , המגולם בתוך הביטויים של המקדמים a , b ו- c נקראות משוואות עם פרמטר. פתרון של משוואה עם פרמטר יתבצע באופן רגיל, אך יכול להכיל את הפרמטר.

שאלות:

(1) פתור את המשוואה: $x^2 + mx - 12m^2 = 0$.

(2) פתור את המשוואה: $2x^2 + 5m^2 = (11m + 1)x - 5m$.

תשובות סופיות:

(1) $x_1 = 3m$, $x_2 = -4m$

(2) $x_1 = 5m$, $x_2 = \frac{m+1}{2}$

חקירה של משוואה ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

המשוואה הריבועית:

תהא המשוואה הריבועית: $ax^2 + bx + c = 0$ כאשר $a \neq 0$.
 נגדיר: $\Delta = b^2 - 4ac$ ונאמר כי:

- למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים אם: $\Delta > 0$.
- למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד אם: $\Delta = 0$.
- למשוואה לא יהיו שני פתרונות ממשיים כלל אם: $\Delta < 0$.

אם $a = 0$ תתקבל משוואה ליניארית מהצורה: $bx + c = 0$.

- למשוואה זו יהיה פתרון ממשי אחד אם $b \neq 0$.
- למשוואה לא יהיו פתרונות כלל אם: $b = 0$ ו- $c \neq 0$.

אם $b = 0$ וגם $c = 0$ למשוואה יהיו אינסוף פתרונות ממשיים.

הפונקציה הריבועית:

תהא הפונקציה הריבועית: $y = ax^2 + bx + c$ כאשר $a \neq 0$.
 נגדיר: $\Delta = b^2 - 4ac$ ונאמר כי לפונקציה נקודות חיתוך עם ציר ה- x באופן הבא:

- אם $a > 0$ תתקבל פרבולה ישרה (מחייכת):
 - עבור $\Delta > 0$ הפרבולה תחתוך את ציר ה- x בשתי נקודות שונות.
 - עבור $\Delta = 0$ הפרבולה תשיק לציר ה- x (חיתוך בנקודה אחת).
 - עבור $\Delta < 0$ הפרבולה תהיה מרחפת (ללא חיתוך עם ציר ה- x כלל).
- אם $a < 0$ תתקבל פרבולה הפוכה (עצובה):
 - עבור $\Delta > 0$ הפרבולה תחתוך את ציר ה- x בשתי נקודות שונות.
 - עבור $\Delta = 0$ הפרבולה תשיק לציר ה- x (חיתוך בנקודה אחת).
 - עבור $\Delta < 0$ הפרבולה תהיה מרחפת (ללא חיתוך עם ציר ה- x כלל).

- אם $a=0$ תתקבל פונקציה ליניארית: $y = bx + c$ ולה:

○ עבור $b > 0$ יתקבל ישר עולה החותך את ציר ה- x ב- $\left(-\frac{c}{b}, 0\right)$.

○ עבור $b < 0$ יתקבל יורד עולה החותך את ציר ה- x ב- $\left(-\frac{c}{b}, 0\right)$.

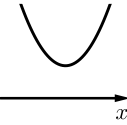
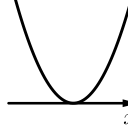
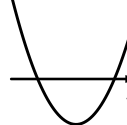
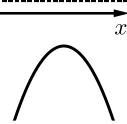
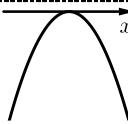
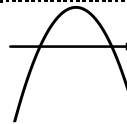
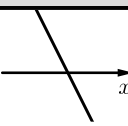
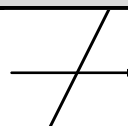
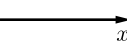
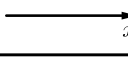
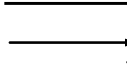
- אם $b=0$ יתקבל ישר $y=c$ וכעת:

○ אם $c > 0$ הישר כולו מעל לציר ה- x ומקביל לו.

○ אם $c < 0$ הישר כולו מתחת לציר ה- x ומקביל לו.

○ אם $c=0$ הישר מתלכד עם ציר ה- x .

ניתן לסכם את כל המקרים באופן הבא:

| $\Delta < 0$ | $\Delta = 0$ | $\Delta > 0$ | תנאים | פירוט מילולי | |
|---|---|---|---|---|---|
|  |  |  | $a > 0$ | תיאור גרפי של $y = ax^2 + bx + c$ עבור $a \neq 0$ | |
|  |  |  | $a < 0$ | | |
| | | $b < 0$ | $b > 0$ | | |
| | |  |  | $a = 0$ $b \neq 0$ | תיאור גרפי של כאשר $y = bx + c$ $a = 0$ ו- $b \neq 0$ |
| $c = 0$ | $c < 0$ | $c > 0$ | | | |
|  |  |  | $a = 0$ $b = 0$ | תיאור גרפי של $y = c$ כאשר $a = 0$ ו- $b = 0$ | |

שאלות:

(1) נתונה המשוואה: $(3-m)x^2 + 4mx - 2m = 0$, $(m \neq 3)$.

מצא לאלו ערכי m למשוואה:

א. שני פתרונות ממשיים שונים.

ב. פתרון ממשי אחד.

ג. אין פתרונות ממשיים כלל.

(2) נתונה הפונקציה: $y = 2mx^2 + mx - 1$.

מצא לאלו ערכי m הפונקציה אינה חותכת את ציר ה- x .

(3) נתונה הפונקציה: $y = (m^2 - 9)x^2 + (m + 3)x + 4$, $(m \neq \pm 3)$.

מצא לאלו ערכי m הפונקציה נמצאת מעל ציר ה- x לכל ערך של x .

(4) נתון אי השוויון: $mx^2 > (m + 4)(x - 1) - x^2$.

מצא לאלו ערכי m אי השוויון מתקיים לכל ערך של x .

(5) נתונה המשוואה הבאה: $-m(x-1)^2 + 2(m+16) = x(6-x(2m-3)) + 1$.

א. מצא עבור אלו ערכי m יש למשוואה:

i. שני פתרונות ממשיים שונים.

ii. פתרון ממשי אחד.

iii. אף פתרון ממשי.

ב. מצא את הפתרון היחיד עבור ערכי ה- m המתאימים במידה והוא קיים.

(6) נתונה המשוואה הבאה: $m^2x(9x+1)+1=0$.

א. מצא עבור אלו ערכי m יש למשוואה:

i. שני פתרונות ממשיים שונים.

ii. פתרון ממשי אחד.

iii. אף פתרון ממשי.

ב. מצא את הפתרון היחיד עבור ערכי ה- m המתאימים במידה והוא קיים.

(7) נתונה המשוואה: $mx^2 - (9m+4)x + 20m + 16 = 0$.

- א. הראה שעבור כל ערך של m יש למשוואה לפחות פתרון ממשי אחד.
 ב. פתור את משוואה והראה כי אחד השורשים הוא מספר קבוע שאינו תלוי ב- m .

(8) לפניך הפונקציה הבאה: $f(x) = (m^2 - m - 2)x^2 + 2(m - 2)x + 4$.
 ענה על השאלות הבאות:

- א. עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בשתי נקודות שונות?
 ב. עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודת אחת בלבד?
 ג. עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה לא חותך את ציר ה- x כלל?
 ד. עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה חיובי לכל ערך של x ?
 ה. עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה שלילי לכל ערך של x ?

(9) נתונה הפונקציה: $f(x) = kx^2 - 5kx + 6k + 1$.

- א. עבור אלו ערכי k גרף הפונקציה יהיה כולו מעל לציר ה- x ?
 ב. עבור איזה ערך של k יתקבל גרף פרבולה הנוגעת בציר ה- x ?

(10) עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה: $f(x) = (k^2 - 5k - 6)x^2 + (2 - 3k)x + 2$
 הוא אי-שלילי לכל ערך של x ?

(11) נתונות הפונקציות: $f(x) = x^2 + 4x + 2m + 2$ ו- $g(x) = (1 - m)x^2 - 3mx - 1.5$.

- א. מצא עבור אלו ערכי m נחתכים הגרפים של הפונקציות:
 i. בשתי נקודות שונות.
 ii. בנקודה אחת בלבד.
 iii. באף נקודה.
 ב. מצא לאלו ערכי m יהיה גרף הפונקציה $f(x)$ כולו מתחת לגרף הפונקציה $g(x)$.

12 נתונה הפונקציה: $f(x) = 2kx^2 + 6kx + 8k + 2$.

א. עבור איזה ערך של k גרף הפונקציה יהיה ישר העובר ברביעים הראשון והשני בלבד?

מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = kx^2 - 6x - 10$.

ב. האם קיימים ערכי k עבורם גרף הפונקציה $f(x)$ הוא מעל גרף

הפונקציה $g(x)$ לכל x ? הראה חישוב מתאים.

ג. הוכח כי קיים ערך של k עבורו גרפים של שתי הפונקציות משיקים זה לזה ומצא אותו.

13 נתונה הפונקציה הריבועית: $f(x) = 2x^2 - (5m+7)x + 3m^2 + 8m + 5$.

א. הראה כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x לפחות פעם אחת לכל ערך של m .

ב. מצא את שורשי הפונקציה.

ג. עבור אלו ערכי m סכום השורשים גדול מ-3.5.

ד. מהם שורשי הפונקציה כאשר: $m = 0$?

14 נתונה המשוואה הבאה: $(k+1)x^2 + (k^2 - 4k - 5)x - 54 = 0$.

א. ענה על שני החלקים הבאים:

i. עבור אלו ערכי k יהיו פתרונות המשוואה שני מספרים נגדיים?

ii. מהם פתרונות המשוואה עבור ערכי ה- k שמצאת?

ב. הראה כי לא קיים ערך של k עבורו פתרונות המשוואה:

$$(k-4)x^2 + (6k - k^2 - 8)x + 5k - 10 = 0$$

הם מספרים נגדיים.

15 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = mx^2 + (m-2)x + m^2 + 3m - 10$.

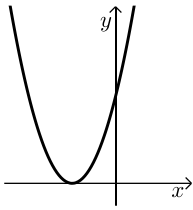
א. מצא עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.

ב. מצא את נקודות החיתוך שבין הגרפים המתקבלים עבור כל ערכי ה- m שמצאת בסעיף א'.

16 מצא עבור אלו ערכי m למשוואה: $(4-m)x^2 + (m+2)x + m^2 - 12m - 28 = 0$

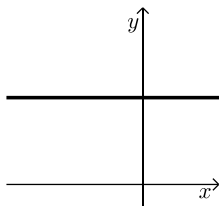
יהיו שני פתרונות ממשיים שונים שאחד מהם הוא אפס.

17 נתונה משפחת הפרבולות הבאה: $f(x) = 2x^2 + (m+1)x + m^2 + 2m - 2.5$.



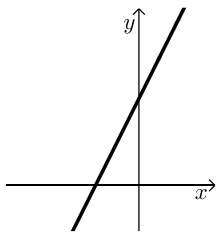
- א. מצא ערך של m עבורו גרף הפרבולה השייכת למשפחת הפונקציות הנ"ל היא מהצורה:
 ב. עבור ערך ה- m שמצאת בסעיף הקודם מצא את התחום של k עבורו יהיה לגרף הפרבולה ולישר $y = kx - 4$ שתי נקודות חיתוך.

18 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = (m^2 - 5m + 4)x^2 + (2m - 2)x + 1$.



- א. עבור אלו ערכים של m הפונקציה תחתוך את ציר ה- x בשתי נקודות שונות?
 ב. מצא ערך של m עבורו גרף הפונקציה השייך למשפחת הפונקציות הנ"ל יהיה מהצורה שבצד, וכתוב את משוואת הישר המתקבלת במקרה זה.
 ג. הגרף שאת משוואתו מצאת בסעיף הקודם חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בשתי נקודות שונות. הראה כי אחת מהן אינה תלויה ב- m .
 ד. עבור אלו ערכי m נקודת החיתוך שתלויה ב- m תהיה מימין לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם?

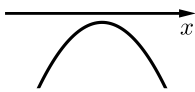
19 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4x(mx+2)+4-m}{4}$, m פרמטר חיובי.



- א. הראה כי לכל הגרפים המייצגים את משפחת הפונקציות הנ"ל יש נקודת חיתוך עם ציר ה- x שאינה תלויה ב- m ומצא את נקודה זו.
 ב. עבור איזה ערך של m גרף הפונקציה יהיה מיוצג ע"י ישר מהצורה:
 ג. הראה כי קיים תחום של x אשר לא תלוי ב- m ובו גרף הפונקציה נמצא תמיד מתחת לישר שמצאת בסעיף הקודם ומצא את תחום זה.

20 נתונה הפונקציה: $f(x) = 3m^2x^2 + 4mx + 2$.

- א. הוכח כי הפונקציה נמצאת תמיד מעל לציר ה- x עבור כל ערך של m .
 ב. מגדירים פונקציה חדשה באופן הבא: $y = \frac{mx^2 + 2x(m+2) + m}{3m^2x^2 + 4mx + 2}$. מצא עבור אלו ערכי m הפונקציה y היא שלילית.



21 נתונה הפונקציה: $f(x) = mx^2 + (2m+1)x - \frac{1}{4}$.

א. עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה השייך למשפחת הפונקציות הנ"ל יהיה מהצורה:

ב. מגדירים פונקציה חדשה באופן הבא: $y = \frac{(m^2 - 9)x^2 + (m + 3)x - 1}{mx^2 + (2m + 1)x - \frac{1}{4}}$.

הראה כי הפונקציה y חיובית בתחום שמצאת בסעיף הקודם.

ג. דרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה y עם ציר ה- y מעבירים ישר המקביל לציר ה- x .

i. כתוב את משוואת ישר זה.

ii. מצא עבור אלו ערכים של m גרף הפונקציה חותך את הישר

בנקודה שבה: $x = -9$.

תשובות סופיות:

- (1) א. $m > 0$ או $m < -3$ וגם $m \neq 3$ ב. $m = 0, -3$ ג. $-3 < m < 0$.
- (2) $-8 < m \leq 0$
- (3) $m < -3$ או $m > 3\frac{2}{5}$
- (4) $m > 0$
- (5) א. i. $m > 3$ ii. אף m iii. $m < 3$
- ב. לא קיים מקרה בו יש למשוואה פתרון יחיד.
- (6) א. i. $m < -6, m > 6$ ii. $m = \pm 6$ iii. $m \neq 0, -6 < m < 6$
- ב. בשני המקרים יתקבל: $x = -\frac{1}{18}$
- (7) א. מתקבל: $\Delta = (m+4)^2$ שתמיד אי-שלילי ובמקרה הלא-ריבועי מתקבלת משוואה עם פתרון אחד.
- ב. $m_{1,2} = 4, \frac{5m+4}{m}$
- (8) א. $m \neq -1, -2 < m < 2$ ב. $m = -1, -2$ ג. $m < -2, m \geq 2$
- ד. $m = 2, -2 < m < -1$ ה. אף m
- (9) א. $0 \leq k < 4$ ב. $k = 4$
- (10) $-26 \leq k \leq -2$
- (11) א. i. $m < -8, m > -2, m \neq 0$ ii. $m = 0, -2, -8$ iii. $-8 < m < -2$
- ב. $-8 < m < -2$
- (12) א. $k = 0$ ב. לא. אין פתרון לאי-שוויון: $f(x) > g(x)$
- ג. עבור אי-השוויון של סעיף ב' מתקבל: $\Delta = 4(k+3)^2$ ולכן כאשר $k = -3$ הגרפים נוגעים זה בזה בנקודה אחת.
- (13) א. הוכחה. ב. $x_{1,2} = m+1, 1.5m+2.5$
- ג. $m > 0$ ד. $x_{1,2} = 1, 2.5$
- (14) א. i. $k = 5$ ii. $x = \pm 3$ ב. הוכחה.
- (15) א. $m = 2, -5$ ב. $(0,0), (-1,2)$
- (16) $m = 14$
- (17) א. $m = 1$. כאשר: $m = -3$ נקבל גרף: $y = 2x^2 - 2x + 0.5$ המשיק לציר x מימין לראשית ולכן נפסל. ב. $k < -4, k > 8$
- (18) א. $m > 1, m \neq 4$ ב. $f(x) = 1, m = 1$ ג. הנקודה היא: $(0,1)$
- ד. $m \neq 1, m < 4$
- (19) א. הנקודה היא: $(-0.5, 0)$ ב. $m = 0$ ג. $-0.5 < x < 0.5$

(20) א. מתקבל: $\Delta = -8m^2$ ולכן לגרף הפרבולה אין חיתוכים כלל ומכיוון ש-A אי-שלילי הרי שמדובר בפרבולה מרחפת חיובית. במקרה הישר מתקבל ישר המקביל לציר ה- x שגם כן כולו חיובי.
 ב. מאחר והמכנה תמיד חיובי (ממקודם) יש לדרוש תנאים שיקיימו מונה שלילי ($\Delta < 0, a < 0$ - עבור המונה) נקבל: $m < -1$.

(21) א. $-1 < m < -\frac{1}{4}$ ב. הוכחה. ג. i. $y = 4$

ii. $m = 5, -1\frac{7}{9}$

חקירות עם קדקוד פרבולה:

סיכום כללי:

תהא הפונקציה הריבועית: $y = ax^2 + bx + c$ כאשר $a \neq 0$. נגדיר: $\Delta = b^2 - 4ac$.
התיאור הגרפי של הפונקציה הריבועית הוא פרבולה.

עבור $a \neq 0$ נקבל כי קדקוד הפרבולה הוא: $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

• שאלות העוסקות בקדקוד חיובי/שלילי נדרוש: $-\frac{\Delta}{4a} > 0$ או $-\frac{\Delta}{4a} < 0$ בהתאמה.

• שאלות העוסקות בקדקוד הנמצא מימין/משמאל לציר ה- y נדרוש $-\frac{b}{2a} > 0$

או $-\frac{b}{2a} < 0$ בהתאמה.

• שאלות העוסקות בקדקוד שנמצא מעל/מתחת לישר $y = n$ או מימין/משמאל

לישר $x = k$ נדרוש $-\frac{\Delta}{4a} > n$ ו- $-\frac{b}{2a} > k$ בהתאמה.

• שאלות העוסקות בקדקוד שבאחד הרביעים נדרוש $-\frac{b}{2a} > 0$ ו- $-\frac{\Delta}{4a} > 0$

לפי הרביע המבוקש.

שאלות:

(1) נתונה הפונקציה: $f(x) = (m+3)x^2 + (3m+14)x + 2m+7$.

א. עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה הוא פרבולה החותכת את ציר ה- x בשתי נקודות?

ב. הבע באמצעות m את שיעורי קדקוד הפרבולה של גרף הפונקציה הנתונה.

ג. עבור אלו ערכי m קדקוד הפרבולה יהיה וודאי מתחת לישר: $y = -4$?

ד. עבור אלו ערכי m מתקיימים התנאים של סעיף א' ו-ג' יחד?

(2) נתונה הפרבולה הבאה: $f(x) = x^2 - 3(m-2)x + 2m^2 - 8m + 7$.

- א. הוכח את הטענות הבאות:
- גרף הפרבולה חותך את ציר ה- x בשתי נקודות עבור כל ערך של m .
 - קדקודי כל הפרבולות המיוצגות ע"י תבנית הפונקציה הנתונה נמצאים מתחת לציר ה- x .
- ב. עבור איזה ערך של m גרף הפרבולה יחתוך את ציר ה- x בשתי נקודות הנמצאות באותו מרחק מראשית הצירים?
- ג. עבור ערך ה- m שמצאת בסעיף הקודם מצא את נקודות החיתוך על ציר ה- x .
- ד. הראה כי קדקוד הפרבולה המתקבלת בעת הצבת ערך ה- m הנ"ל נמצא על ציר ה- y .

(3) נתונה הפונקציה: $f(x) = (m^2 - 2m - 3)x^2 + 8x + 0.5$.

- א. עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה הוא פרבולה?
- ב. עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה הוא פרבולה החותכת את ציר ה- x בשתי נקודות?
- ג. הבע באמצעות m את שיעורי קדקוד הפרבולה.
- ד. הוכח כי קדקודי כל הפרבולות נמצאים על הישר: $2y = 8x + 1$ עבור כל ערך של m עבורו מתקבלת פרבולה.

(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = (k^2 - 2k + 15)x^2 + kx + 12$.

- א. הוכח כי עבור כל ערך של k גרף הפונקציה לא נוגע בציר ה- x כלל.
- ב. הוכח כי קדקוד הפרבולה המיוצגת ע"י התבנית הנ"ל תמיד מעל לציר ה- x .
- ג. עבור איזה ערך של k קדקוד הפרבולה יהיה על ציר ה- y ?
- ד. מצא את שיעורי קדקוד הפרבולה במקרה זה.

(5) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = (k^2 - 9)x^2 + (k + 3)x - 1$.

- א. עבור אלו ערכי k גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה- x ?
- ב. הבע באמצעות k את שיעורי קדקוד הפרבולה המיוצגת ע"י התבנית של $f(x)$.
- ג. מצא עבור אלו ערכי k קדקוד הפרבולה יהיה ברביע הראשון.
- ד. האם קיים ערך של k עבורו קדקוד הפרבולה נמצא על ציר ה- y ? נמק את תשובתך.

6 נתונה הפונקציה: $f(x) = (m^2 - 4)x^2 + 5mx + 6$.

- א. הראה כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x לפחות פעם אחת עבור כל ערך של m .
 ב. עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה הוא פרבולת מינימום?
 ג. הראה כי קדקוד הפרבולה המתקבל עבור ערכי ה- m שמצאת בסעיף הקודם נמצא תמיד מתחת לציר ה- x .

7 נתונה הפונקציה: $f(x) = (m^2 - 8m + 12)x^2 + (m - 2)x + 2$.

- א. עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה יהיה כולו מעל לציר ה- x ?
 ב. עבור אלו ערכי m גרף הפונקציה הוא פרבולה מרחפת חיובית שקדקודה משמאל לישר: $x = -\frac{1}{2}$.
 ג. האם ייתכן כי גרף הפונקציה יכול להיות פרבולת מקסימום שקדקודה הוא משמאל לישר: $x = -\frac{1}{2}$? נמק והראה חישוב מתאים.

8 נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = (m^2 - 4)x^2 + 2x + 1$, $g(x) = (m + 2)x^2 + (5 - m)x + 3$.

- א. ענה על השאלות הבאות:
 i. מצא ערך של m עבורו הגרפים משיקים זה לזה.
 ii. מצא ערך של m עבורו הגרפים חותכים זה את זה בנקודה אחת בלבד.
 iii. הסבר מדוע בכל מקרה התקבל ערך m שונה.
 ב. עבור אלו ערכי m הגרפים של הפונקציות הם פרבולות מינימום המקיימות שקדקוד הפרבולה המיוצגת ע"י הפונקציה $f(x)$ נמצא מימין לקדקוד הפרבולה המיוצגת ע"י $g(x)$?

9 נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = (m^2 - 9)x^2 + 7x + 5$, $g(x) = (m - 3)x^2 + (4m - 3)x + 1$.

- א. עבור אלו ערכי m הגרפים נחתכים בשתי נקודות שונות?
 ב. ענה על השאלות הבאות:
 i. עבור איזה ערך של m הגרפים הם פרבולות נוגעות זו בזו?
 ii. עבור איזה ערך של m הגרפים חותכים זה את זה בנקודה אחת בלבד.
 iii. הסבר את ההבדל בין הערכים של m שהתקבלו בחלק i ובחלק ii.
 ג. מצא את נקודת החיתוך של שני הגרפים.
 ד. עבור אלו ערכי m הסכום של שיעורי ה- x של נקודות קדקודי הפרבולות של שתי הפונקציות יהיה קטן מ-1?

תשובות סופיות:

(1) א. $m < -28$, $m > -4$, $m \neq -3$. ב. $\left(\frac{-3m-14}{2m+6}, \frac{-m^2-32m-112}{4m+12} \right)$

ג. $m > -3$. ד. $m > -3$.

(2) א. i. מתקבל: $\Delta = m^2 - 4m + 8$ שחיובי תמיד.

ii שיעור ה- y של הקדקוד הוא: $-\frac{\Delta}{4}$ אשר שלילי תמיד. ב. $m = 2$

ג. $(\pm 1, 0)$. ד. הקדקוד: $(0, -1)$.

(3) א. $m \neq 3, -1$. ב. $-5 < m < 7$. ג. $\left(\frac{-4}{m^2-2m-3}, \frac{m^2-2m-35}{2(m^2-2m-3)} \right)$

ד. יש להציב את הקדקוד בישר ולקבל שוויון אמת.

(4) א. המקדם a תמיד חיובי ומתקבל: $\Delta = -47k^2 + 96k - 720$ שתמיד שלילי.

מכאן שמדובר בפרבולה מרחפת עבור כל k . ג. $k = 0$. ד. $(0, 12)$.

(5) א. $-3 \leq k < 1.8$. ב. $\left(\frac{1}{2(3-k)}, \frac{9-5k}{4(k-3)} \right)$. ג. $1.8 < k < 3$.

ד. לא. מכיוון שלא קיים ערך של k עבורו שיעור ה- x של קדקוד הפרבולה יהיה אפס.

(6) א. מתקבל: $\Delta = m^2 + 96$ המעיד כי תמיד יש לפונקציה שני חיתוכים וכאשר $m = \pm 2$

מתקבלים שני ישרים החותכים את ציר ה- x . ב. $m < -2$, $m > 2$.

(7) א. $m \leq 2$, $m > 6\frac{4}{7}$. ב. $6\frac{4}{7} < m < 7$. ג. לא.

(8) א. i. $m = -1\frac{4}{9}$. ii. $m = -2$. iii. במקרה i מדובר בפרבולות אשר

יכולות להשיק ובמקרה ii מדובר בשני ישרים אשר רק נחתכים. ב. $3 < m < 4$.

(9) א. $m \neq 3, -2$, $m < 3\frac{1}{16}$. ב. i. $m = 3\frac{1}{16}$. ii. $m = 3, -2$.

iii. במקרה i מדובר במשוואה ריבועית ובנקודת השקה, ובמקרה ii מדובר במשוואה ליניארית ובנקודת חיתוך.

ג. עבור $m = -2$ מתקבלת: $\left(-\frac{2}{9}, 3\frac{16}{81} \right)$, עבור: $m = 3$ מתקבלת: $(2, 19)$.

ד. $m < -3$, $-2.72 < m < 1.22$, $m > 3$.

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 8 - נוסחאות וייטה

תוכן העניינים

1. הגדרת נוסחאות וייטה וחישובים יסודיים 155
2. חקירת משוואות עם נוסחאות וייטה (ללא ספר)

הגדרת נוסחאות וייטה וחישובים יסודיים:

סיכום כללי:

הגדרה:

נתונה הפונקציה הריבועית: $y = ax^2 + bx + c$, כאשר: $a \neq 0, \Delta > 0$.

אם x_1 ו- x_2 הם שורשי המשוואה: $ax^2 + bx + c = 0$ אז מתקיים: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.

לקשרים אלו קוראים בשם **נוסחאות וייטה** והם תקפים רק במשוואה ריבועית שבה $\Delta > 0$.

שאלות:

1) לפניך משוואות ריבועיות. מבלי לפתור, מצא את הסכום ואת מכפלת השורשים שלהם:

א. $x^2 + 5x - 8 = 0$.

ב. $3x^2 - 7x + 4 = 0$.

ג. $x^2 + 9x - 14 = 0$.

ד. $13x - 6x^2 + 7 = 0$.

2) נתונה משוואה ריבועית: $ax^2 + 3x + 5 = 0$. מצא את a אם ידוע כי למשוואה שני שורשים ממשיים שונים אשר סכומם הוא 3.

3) נתונה משוואה ריבועית: $\alpha x^2 + (\beta - \alpha)x - 16 = 0$, (α, β) פרמטרים). מצא את ערכי הפרמטרים α ו- β אם ידוע כי למשוואה שני שורשים ממשיים שונים אשר סכומם הוא -2 ומכפלתם היא -16.

4) כתוב משוואה ריבועית אשר לה שני שורשים ממשיים שונים, x_1 ו- x_2 .

שמקיימים: $x_1 + x_2 = 5$ ו- $x_1 \cdot x_2 = -2$.

כמה משוואות כאלה תיתכנה? נמק.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x_1 + x_2 = -5, x_1 x_2 = -8 \quad \text{ב. } x_1 + x_2 = 2\frac{1}{3}, x_1 x_2 = 1\frac{1}{3}$$

$$\text{ג. } x_1 + x_2 = -9, x_1 x_2 = -14 \quad \text{ד. } x_1 + x_2 = \frac{6}{13}, x_1 x_2 = \frac{7}{13}$$

$$(2) \quad a = -1$$

$$(3) \quad \alpha = 1, \beta = 3$$

$$(4) \quad \text{אם } a = 1 \text{ אז: } x^2 - 5x - 2 = 0$$

$$\text{יש אינסוף משוואות מהצורה: } ax^2 - 5ax - 2a = 0$$

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 9 - חוקי החזקות והשורשים

תוכן העניינים

| | | |
|-----|-------|--------------------------|
| 157 | | 1. חוקי החזקות |
| 162 | | 2. חוקי השורשים |
| 166 | | 3. כתיבה מדעית של מספרים |

חוקי החזקות:

סיכום כללי:

סיכום חוקי החזקות:

$$\begin{array}{lll}
 a^n \cdot a^m = a^{m+n} & .3 & a^1 = a & .2 & a^0 = 1 & .1 \\
 a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m & .6 & (a^n)^m = a^{n \cdot m} & .5 & \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} & .4 \\
 \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m & .9 & a^{-m} = \frac{1}{a^m} & .8 & \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m & .7
 \end{array}$$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^n a^m = a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$$\begin{array}{lll}
 a^2 a^6 & .א & t^3 t^5 t^7 & .ב & b^2 b^5 b^{12} b^3 & .ג \\
 \frac{k^8}{k^3} & .ד & \frac{n^{14}}{n^9} & .ה & \frac{c^6}{c^2} & .ו \\
 \frac{a^3 a^{19}}{a^{15}} & .ז & \frac{x^{30}}{x^9 x^{18}} & .ח & \frac{y^3 y^{15}}{y^4 y^{14}} & .ט \\
 3^2 3^3 3^4 & .י & \frac{2^{16} 2^2}{2^{10}} & .יא & \frac{5^{20} 5^3 5^{16}}{5^4 5^{22} 5^8} & .יב
 \end{array}$$

(2) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^n a^m = a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$$\begin{array}{lll}
 \frac{3^4 2^7}{2^6 3^2} & .א & \frac{a^{10} b^{13} a^3}{b^4 b^6 b^2 a^{12}} & .ב & \frac{x^8 y^5 y^9 x^2}{y^4 x^4} & .ג
 \end{array}$$

(3) לפניך הביטוי הבא: $\frac{3^6 2^{17} 3^3 2^4}{3^4 2^3 2^2}$

מצא n כך שיתקיים שוויון בין הביטוי $243 \cdot 2^n$ לבין הביטוי הנתון.

(4) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

| | | |
|---|---|--|
| $\frac{9^3 \cdot 27^2}{3^9 \cdot 81}$.ב. | $\frac{2^3 \cdot 2^7}{2^4 \cdot 2^5}$.א. | |
| $2^3 + 2^5$.ד. | $\frac{10^9 \cdot 25^5 \cdot 8^{-1}}{40^3 \cdot 125^5}$.ג. | |

(5) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוק: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

| | | |
|--|--|--|
| $(x^3 x^{10})^2$.ג. | $(c^3)^{10}$.ב. | $(a^2)^4$.א. |
| $\frac{d^{20} (d^4)^2}{d^{12} (d^3)^2}$.ו. | $\frac{n^7 n^8}{(n^3)^4}$.ה. | $\frac{(b^2)^3}{b^2 b^3}$.ד. |
| $\frac{(8^3)^8 8^{11}}{(8^2 8)^3 8^8}$.ט. | $\frac{3^6 (3^3 3^2)^6}{3^{28} (3^2)^3}$.ח. | $\frac{2^5 (2^4)^2 2^3}{(2^3 2^2)^3}$.ז. |
| $\frac{(3^2)^7 5^{10} (5^3)^2}{3^9 5^{16}}$.יב. | $\frac{(3^2)^6 5^{31} 3^7}{(5^2)^{10} 5^{11} 3^{18}}$.יא. | $\frac{(2^4)^5 (3^6)^7 2^{20}}{3^{35} 2^{40}}$.י. |

(6) לפניך הביטויים הבאים: $\left((3^2)^3 \right)^4$ ו- $\left((3^6)^n \right)^2$.

מצא n כך שיתקיים שוויון בין שני הביטויים.

(7) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים:

| | | |
|---|---|-------------------------------|
| $\frac{7^{12} 2^2 2^6}{2^5 7^{10} 7}$.ג. | $\frac{5^{20} 3^{14} 3^8}{3^{20} 5^{12} 5^8}$.ב. | $\frac{2^3 3^5}{2^2 3^4}$.א. |
|---|---|-------------------------------|

(8) פשט את הביטויים הבאים:

| | | |
|--|---------------------------------------|--|
| $125 \cdot 25 \cdot 5^5$.ג. | $64^2 2^3 8^2$.ב. | $3^2 9 \cdot 81^2$.א. |
| $\frac{\left((3^4)^4 \right)^5}{81^3 27^4 3^5}$.ו. | $\frac{(4^2)^3 16}{64 \cdot 2^3}$.ה. | $\frac{2^4 \cdot 16^5}{8 \cdot 512}$.ד. |

9 פשט את הביטויים הבאים :

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \frac{(2a^2b)^3 \cdot (ab^{-3})^2}{4ab^{-2} \cdot \left(\frac{a^2}{b}\right)^4} \\ \text{ב.} & \frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}} \\ \text{ג.} & \frac{4^{b+3}}{4^{b+1} + 4^{b+2}} \\ \text{ד.} & \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^{n+3} + x^{n+5}}{x^{n+2}} \end{array}$$

10 פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $(ab)^n = a^n b^n$ ו- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & (a^2b)^3 & \text{ב.} & (m^4n^3)^5 & \text{ג.} & (x^{12}y^3)^3 \\ \text{ד.} & \left(\frac{a^3}{b^2}\right)^4 & \text{ה.} & \left(\frac{i^4}{k^3}\right)^7 & \text{ו.} & \left(\frac{a^{14}b^4}{a^6ab^3}\right)^3 \\ \text{ז.} & \left(\frac{x^3y^5y^2x^6}{y^4x^7}\right)^6 & \text{ח.} & \left(\frac{t^7r^{20}t^3}{r^2r^{12}t^8}\right)^2 & \text{ט.} & \left(\frac{(b^{12}c)^2c^{14}}{c(c^3b^5)^4b^3}\right)^2 \end{array}$$

11 חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים :

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \left(\frac{3^9 2^6 2^2}{3^6 2^5 3^2}\right)^2 & \text{ב.} & \left(\frac{(5^4)^2 3^6}{3^5 5^7}\right)^2 & \text{ג.} & \left(\frac{7^3 \cdot 16 \cdot 128 \cdot 49}{(2^2 7)^5}\right)^3 \end{array}$$

12 בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה שלילית :

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{1}{4^6} & \text{ב.} & \frac{1}{5^3} & \text{ג.} & \frac{1}{2^{10}} \\ \text{ד.} & \frac{1}{8} & \text{ה.} & \frac{1}{81} & \text{ו.} & \frac{1}{125} \end{array}$$

13 בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה חיובית וחשב את ערכם :

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{1}{4^{-3}} & \text{ב.} & \frac{1}{3^{-2}} & \text{ג.} & \frac{1}{5^{-3}} \end{array}$$

14) חשב את הביטויים הבאים :

ג. $5^6 \cdot 5^{-3} \cdot 5^{-2}$

ב. $2^{-8} \cdot 512 \cdot 2^2$

א. $3^2 \cdot 3^{-5} \cdot 3^7$

ו. $\frac{3^{-6} \cdot 7^7 \cdot 7^{-4}}{3^{-4} \cdot 3^{-3} \cdot 7^3}$

ה. $\frac{2^{-5} \cdot 5^3 \cdot 2^{14}}{5^2 \cdot 5^{-10} \cdot 5^8 \cdot 2^6}$

ד. $2^{14} \cdot 3^{-6} \cdot 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 2^{-30}$

15) פשט את הביטויים הבאים לצורה ללא חזקות שליליות.

ג. $\frac{2^{-3} 5^4}{5^4 \cdot 125 \cdot (5^2 2)^{-3} \cdot 2^{-4}}$

ב. $\frac{(4^4)^{-4} 3^{-11}}{(3^{-2} 4^3)^{-6}}$

א. $\left(\frac{5^{-4}}{3^2}\right)^{-6}$

16) פשט את הביטויים הבאים :

ג. $\frac{(m^{n+2})^3 \cdot m^{-4n-2}}{\frac{1}{m^{6n+2}} \cdot (m^3)^{n-2}}$

ב. $\frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}}$

א. $\frac{a^{n+2} \cdot a^{2-3n}}{(a^3)^{n+1}}$

תשובות סופיות:

- (1) א. a^8 ב. t^{15} ג. b^{22} ד. k^5 ה. n^5 ו. c^4
 ז. a^7 ח. x^3 ט. 1 י. 3^9 יא. 2^8 יב. 5^5
- (2) א. 18 ב. ab ג. x^6y^{10}
- (3) $n=16$
- (4) א. 2 ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{5}{8}$ ד. 40
- (5) א. a^8 ב. c^{30} ג. x^{26} ד. b ה. n^3 ו. d^{10}
 ז. 2 ח. 9 ט. 8^{18} י. 3^7 יא. 3 יב. 3^5
- (6) $n=2$
- (7) א. 6 ב. 9 ג. 56
- (8) א. 3^{12} ב. 2^{21} ג. 5^{10} ד. 2^{12} ה. 2^7 ו. 3^{51}
- (9) א. $\frac{2b^3}{a}$ ב. k ג. $3\frac{1}{5}$ ד. $\frac{1}{x} + x$
- (10) א. a^6b^3 ב. $m^{20}n^{15}$ ג. $x^{36}y^9$ ד. $\frac{a^{12}}{b^8}$ ה. $\frac{i^{28}}{k^{21}}$ ו. $a^{21}b^3$
- ז. $x^{12}y^{18}$ ח. t^4r^{12} ט. b^2c^6 ג. 8
- (11) א. 576 ב. 225 ג. 8
- (12) א. 4^{-6} ב. 5^{-3} ג. 2^{-10} ד. 2^{-3} ה. 3^{-4} ו. 5^{-3}
- (13) א. 64 ב. 9 ג. 125
- (14) א. 81 ב. 8 ג. 5 ד. $\frac{1}{9}$ ה. 1000 ו. 3
- (15) א. $5^{24} \cdot 3^{12}$ ב. $\frac{4^2}{3^{23}}$ ג. $5^3 \cdot 2^4$
- (16) א. a^{1-5n} ב. k ג. m^{2n+12}

חוקי השורשים:

סיכום כללי:

סיכום חוקי השורשים:

$$\begin{array}{lll}
 \sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} & .3 & \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} & .2 & \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} & .1 \\
 \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} & .6 & \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}} & .5 & \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} & .4
 \end{array}$$

שאלות:

17) הבא את הביטויים הבאים לצורה: $\sqrt[n]{a^m}$.

| | | |
|------------------------|--------------------------|--------------------------|
| א. $3^{\frac{1}{4}}$ | ב. $2^{\frac{3}{5}}$ | ג. $6^{\frac{5}{6}}$ |
| ד. $-12^{\frac{2}{7}}$ | ה. $-(-4)^{\frac{1}{3}}$ | ו. $-(-3)^{\frac{3}{4}}$ |
| ז. $5^{-\frac{1}{4}}$ | ח. $27^{\frac{1}{3}}$ | ט. $64^{-\frac{5}{6}}$ |

18) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

| | | |
|-------------------------|-----------------------|-------------------------|
| א. $\sqrt{49}$ | ב. $-\sqrt{25}$ | ג. $\sqrt[3]{8}$ |
| ד. $-\sqrt[3]{128}$ | ה. $\sqrt[3]{(-2)^6}$ | ו. $(\sqrt[5]{1024})^2$ |
| ז. $(\sqrt[5]{-243})^3$ | ח. $\sqrt[4]{-16}$ | ט. $\sqrt[4]{-25^2}$ |
| י. $\sqrt[4]{(-25)^2}$ | | |

19) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים :

| | | |
|--|--|---|
| א. $8^{\frac{2}{3}}$ | ב. $32^{\frac{3}{5}}$ | ג. $128^{\frac{2}{7}}$ |
| ד. $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$ | ה. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2.5}$ | ו. $\left(\frac{64}{343}\right)^{\frac{2}{3}}$ |
| ז. $81^{\frac{3}{4}} \cdot 64^{\frac{1}{3}}$ | ח. $343^{\frac{2}{3}} \cdot 100^{\frac{1}{2}}$ | ט. $16^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{2}}$ |

20) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא : $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[3]{128}}$

21) פשט את הביטויים הבאים :

| | | |
|---|--|--|
| א. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ | ב. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$ | ג. $\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$ |
| ד. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ | ה. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$ | ו. $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$ |
| ז. $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$ | ח. $\frac{\sqrt[3]{500} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[4]{25^2} \cdot \sqrt[3]{4}}$ | ט. $\frac{\sqrt[3]{8^2} \sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{400} \sqrt{2}}$ |

22) הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים :

| | | |
|-------------------|----------------|--------------------------|
| א. $3\sqrt{2}$ | ב. $5\sqrt{3}$ | ג. $\frac{\sqrt{36}}{2}$ |
| ד. $2\sqrt[3]{3}$ | ה. $x\sqrt{x}$ | |

23) הכנס את כל המקדמים בביטויים הבאים לתוך השורש :

| | | |
|--------------------------|-----------------------------|---------------------------------|
| א. $2\sqrt{5}$ | ב. $4\sqrt[3]{2}$ | ג. $2\sqrt[5]{3}$ |
| ד. $\frac{\sqrt{24}}{2}$ | ה. $\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$ | ו. $\frac{3\sqrt[4]{5000}}{10}$ |
| ז. $-5\sqrt[3]{2}$ | ח. $-5\sqrt[4]{2}$ | ט. $-5\sqrt[5]{-2}$ |

24) הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר:

- א. $\sqrt{12}$ ב. $\sqrt{48}$ ג. $\sqrt{63}$
- ד. $\sqrt[3]{54}$ ה. $\sqrt{x^5}$

25) חלץ מן הביטויים הבאים את המקדם הגבוה ביותר ככל הניתן:

- א. $\sqrt{40}$ ב. $\sqrt{50}$ ג. $\sqrt{320}$
- ד. $\sqrt[3]{108}$ ה. $\sqrt[3]{56}$ ו. $\sqrt[3]{160}$
- ז. $\sqrt[4]{162}$ ח. $\sqrt[5]{972}$ ט. $\sqrt[9]{192}$

26) פשט את הביטויים הבאים:

- א. $\sqrt{18} - \sqrt{8}$ ב. $\sqrt{7} + \sqrt{63}$ ג. $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128}$
- ד. $\sqrt[4]{405} - \sqrt[4]{80}$ ה. $\frac{20}{\sqrt{5}}$ ו. $\frac{\sqrt{8}}{2}$
- ז. $\frac{16}{\sqrt{2}}$ ח. $\frac{6}{\sqrt{3} + \sqrt{12}}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[5]{160} - \sqrt[5]{5}}$

27) פשט את הביטויים הבאים:

- א. $3^{\frac{1}{4}} \cdot 9^{-2.5} \cdot 27^{\frac{3}{2}}$ ב. $2^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{\frac{1}{2}} \cdot 64^{-3}$ ג. $125^{\frac{1}{6}} \cdot 5^2 \cdot 5^{-\frac{2}{3}}$
- ד. $\frac{27^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}$ ה. $\frac{49^{\frac{2}{5}} \cdot 7^{-\frac{6}{5}}}{343^{\frac{1}{5}}}$ ו. $\frac{512^{\frac{1}{4}} \cdot 64^{\frac{3}{4}}}{128^{\frac{1}{8}} \cdot 2^{-2}}$

תשובות סופיות:

- (17) א. $\sqrt[4]{3}$ ב. $\sqrt[5]{2^3}$ ג. $\sqrt[6]{6^5}$ ד. $-\sqrt[7]{12^2}$ ה. $-\sqrt[3]{-4}$ ו. ϕ
- ז. $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ ח. $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$ או $\frac{1}{3}$ ט. $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}}$ או $\frac{1}{2^5}$
- (18) א. 7 ב. -5 ג. 2 ד. -2 ה. 4 ו. 16
- ז. -27 ח. ϕ ט. ϕ י. 5
- (19) א. 4 ב. $\frac{1}{8}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. 125 ה. $\frac{32}{243}$ ו. $\frac{49}{16}$
- ז. $\frac{27}{4}$ ח. $\frac{10}{49}$ ט. $\frac{1}{2}$
- (20) $\sqrt{2}$
- (21) א. 4 ב. 9 ג. 20 ד. 6 ה. 3 ו. 2
- ז. $\sqrt{2}$ ח. $\sqrt{5}$ ט. $\sqrt{2}$
- (22) א. $\sqrt{18}$ ב. $\sqrt{75}$ ג. $\sqrt{9}$ ד. $\sqrt[3]{24}$ ה. $\sqrt{x^3}$
- (23) א. $\sqrt{20}$ ב. $\sqrt[3]{128}$ ג. $\sqrt[5]{96}$ ד. $\sqrt{6}$ ה. $\sqrt[3]{3}$
- ו. $\sqrt[4]{40 \cdot \frac{1}{2}}$ ז. $\sqrt[3]{-250}$ ח. $-\sqrt[4]{1250}$ ט. $\sqrt[5]{5^5 \cdot 2}$
- (24) א. $2\sqrt{3}$ ב. $4\sqrt{3}$ ג. $3\sqrt{7}$ ד. $3\sqrt[3]{2}$ ה. $x^2\sqrt{x}$
- (25) א. $2\sqrt{10}$ ב. $5\sqrt{2}$ ג. $8\sqrt{5}$ ד. $3\sqrt[3]{4}$ ה. $2\sqrt[3]{7}$ ו. $2\sqrt[5]{5}$
- ז. $3\sqrt[4]{2}$ ח. $3\sqrt[5]{4}$ ט. $2\sqrt[6]{3}$
- (26) א. $\sqrt{2}$ ב. $4\sqrt{7}$ ג. $6\sqrt[3]{2}$ ד. $\sqrt[4]{5}$ ה. $4\sqrt{5}$ ו. $\sqrt{2}$
- ז. $8\sqrt{2}$ ח. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ או $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[3]{5}}$ או $2\sqrt[5]{5^4}$
- (27) א. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ ב. $\frac{1}{\sqrt[4]{2^{61}}}$ ג. $\sqrt[6]{5^{11}}$ ד. 27 ה. $\frac{1}{7}$ ו. $\sqrt[8]{2^5}$

כתיבה מדעית של מספרים:

שאלות:

28) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

| | |
|--------------------|------------------|
| א. 15,000,000 | ב. 1,500,000 |
| ג. 150,000,000,000 | ד. 23,400,000 |
| ה. 0.0003 | ו. 0.00000042 |
| ז. 0.000000042 | ח. 0.00000000042 |

29) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

| | |
|--------------------|----------------------|
| א. $(3,000,000)^2$ | ב. $(2,000,000)^2$ |
| ג. $(5,000)^3$ | ד. $(50,000)^3$ |
| ה. $(0.0002)^4$ | ו. $(0.00004)^3$ |
| ז. $(0.000005)^3$ | ח. $(0.000000007)^3$ |

תשובות סופיות:

| | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 28) א. $1.5 \cdot 10^7$ | ב. $1.5 \cdot 10^6$ | ג. $1.5 \cdot 10^{11}$ | ד. $2.34 \cdot 10^7$ | ה. $3 \cdot 10^{-4}$ |
| ו. $4.2 \cdot 10^{-7}$ | ז. $4.2 \cdot 10^{-8}$ | ח. $4.2 \cdot 10^{-10}$ | | |
| 29) א. $9 \cdot 10^{12}$ | ב. $4 \cdot 10^{12}$ | ג. $1.25 \cdot 10^{11}$ | ד. $1.25 \cdot 10^{14}$ | ה. $1.6 \cdot 10^{-15}$ |
| ו. $6.4 \cdot 10^{-14}$ | ז. $1.25 \cdot 10^{-16}$ | ח. $3.43 \cdot 10^{-25}$ | | |

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 10 - משוואות ואי-שוויונים מעריכיים

תוכן העניינים

| | |
|-----|---------------------------------------|
| 167 | 1. משוואות מעריכיות יסודיות |
| 169 | 2. משוואות עם חיבור וחסור איברים |
| 171 | 3. משוואות עם קבוע אוילר |
| 172 | 4. משוואות בהן המשתנה גם בבסיס |
| 173 | 5. משוואות מסכמות שונות |
| 174 | 6. מערכת משוואות מעריכיות |
| 175 | 7. אי שוויונים מעריכיים |
| 176 | 8. אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך |

משוואות מעריכיות יסודיות:

סיכום כללי:

- פתרון כללי של משוואת מעריכית מהצורה: $a^x = a^y$ הוא: $x = y$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = 1$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^0 = 1 = a^0$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = b^x$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = b^x = 1$ ללא תלות בבסיסים.

שאלות:

1 פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי החזקות היסודיים):

א. $2^x = 16$ ב. $5^x \cdot 25^{x+2} = 125$

ג. $10^{x-2} = 10000^{x+1}$ ד. $9^x \cdot 3^{x^2} = 81^{3x-4}$

ה. $(2^x \cdot 32)^3 = 8$ ו. $(5^{x^2})^5 \cdot \frac{1}{5^5} = 625^{x-1}$

ז. $\frac{7^x}{343^3} = 1$ ח. $(25 \cdot 0.2^{2x})^2 = \left(\frac{1}{125}\right)^{1-x}$

2 פתור את המשוואות הבאות (הבסיס הוא שבר):

א. $27 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{5x+2} = 8$ ב. $\left(\frac{3}{4}\right)^{2-x} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{9}{16}\right)^{7+x}$

ג. $25 \left(\frac{7}{5}\right)^{x^2-2x} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{4-x} = 49$

3 פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי השורשים):

א. $\sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3}$ ב. $\sqrt{3^{x+7}} = 81$

ג. $(9\sqrt{27})^{3x} \cdot 3^{2-x} = \frac{1}{9}$ ד. $\sqrt[3]{16} \cdot \left(\frac{1}{2^x}\right)^3 = \frac{1}{16}$

ה. $2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^x}} = 8(\sqrt{8})^{-\sqrt{x}}$ ו. $5^x \cdot \frac{1}{25^5} = 125^{\sqrt{x}}$

4) פתור את המשוואות הבאות (מכפלת בסיסים שונים):

| | |
|---|---|
| א. $2^x = 7^x$ | ב. $3^x \cdot \frac{625}{\sqrt{25^x}} = 81$ |
| ג. $2^{3x} \cdot 5^{3x} = 1000000$ | ד. $2^{x+1} \cdot 3^{x-2} \cdot 7^x = 392$ |
| ה. $243 \cdot 2^{x-1} \cdot 18^{x-9} = \frac{1}{3^{x-2}}$ | ו. $108 \cdot \frac{1}{2^{1-2x}} = 72^x \cdot \sqrt{0.5}$ |
| ז. $2^{2x+2} \cdot 5^{x+1} = (2\sqrt{5})^{4-x}$ | |

תשובות סופיות:

| | | | | |
|--------------------------|-----------------------|------------------------|--------------------------|---------------|
| א. $x = 4$ | ב. $x = -\frac{1}{3}$ | ג. $x = -2$ | ד. $x = 2, 8$ | ה. $x = -4$ |
| א. $x = 1, -\frac{1}{5}$ | ב. $x = 9$ | ה. $x = 1$ | | |
| א. $x = -1$ | ב. $x = -2$ | ג. $x = 3, -2$ | | |
| א. $x = -\frac{1}{2}$ | ב. $x = 1$ | ג. $x = -\frac{8}{19}$ | ד. $x = 2, -\frac{2}{3}$ | ה. $x = 4, 9$ |
| א. $x = 0$ | ב. $x = 4$ | ג. $x = 2$ | ד. $x = 2$ | ה. $x = 5$ |
| א. $x = 1.5$ | ב. $x = \frac{2}{3}$ | | | ג. $x = 25$ |

משוואות עם חיבור וחסור איברים:

סיכום כללי:

במשוואות הכוללות חיבור וחסור של איברים, נאתר את הבסיס עם המעריך הקטן ביותר ונסמן אותו ב- t , למשל במשוואה: $4^x - 3 \cdot 2^x = 4$ נסמן: $2^x = t$.
 נבטא את כל איברים המשוואה באמצעות t ונפתור אותה עבורו.
 לאחר מכן נחזיר את ההצבה למציאת ערכי ה- x המתאימים.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם חיבור וחסור ממעלה ראשונה):

$$\text{ב. } 8^x + 3 \cdot 8^x = 256$$

$$\text{א. } 2^x + 6 \cdot 2^x = 56$$

$$\text{ד. } 2 \cdot 6^x + 6^{x+2} - 6^{x-1} = 227$$

$$\text{ג. } 5 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 162$$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם חיבור וחסור ממעלה ראשונה):

$$\text{ב. } 5^{3x+2} + 4 \cdot 125^x = 29$$

$$\text{א. } 81^{x+1} + 18 \cdot 3^{4x-3} = 735$$

$$\text{ד. } \sqrt{10000^{x+1}} - \sqrt[4]{10^{8x+1}} = \sqrt[4]{1000} \cdot (\sqrt[4]{10^7} - 1)$$

$$\text{ג. } (2^{3x+1})^2 - 64^{x-\frac{1}{3}} = 15$$

$$\text{ו. } 5^{-x} + 25^{\frac{1-x}{2}} - 5^{-x-1} = 145$$

$$\text{ה. } 6^{-x} - 5 \cdot 36^{-\left(\frac{x+1}{2}\right)} = 186$$

$$\text{ח. } 4^{x+2} - 6 \cdot 4^x = 7 \cdot 12^{x+1} + 6 \cdot 12^x$$

$$\text{ז. } 2 \cdot 10^{x+1} + 10^{x+2} = 3 \cdot 5^{x+1}$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחסור ממעלה שנייה):

$$\text{ב. } 16^{x+1} - 65 \cdot 4^x + 4 = 0$$

$$\text{א. } 9^x - 36 \cdot 3^x + 243 = 0$$

$$\text{ד. } 4^{-x} - 3 \cdot 4^x + 2 = 0$$

$$\text{ג. } 6^x - 4 \cdot 6^{-x} + 3 = 0$$

$$\text{ו. } \left(2^{\frac{1}{3}x+2}\right)^2 - 5 \cdot 2^{\frac{1}{3}x+1} + 1 = 0$$

$$\text{ה. } \left(\frac{4}{9}\right)^x - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1} = -\frac{2}{3}$$

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות):

$$\text{ב. } \frac{7^x}{7^x - 4} + \frac{8}{7^x + 5} = 3$$

$$\text{א. } \frac{20}{9^x + 1} = 3 - \frac{8}{9^x - 1}$$

5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות מסכמות):

| | |
|---|---|
| א. $\frac{1}{25^{1-x}} - 6 \cdot 5^{x-1.5} + 1 = 0$ | ב. $3^x - \sqrt{16 \cdot 3^{x+1}} = -9$ |
| ג. $36^x - 6^{x+1} \cdot 3^x + 8 \cdot 9^x = 0$ | ד. $4 \cdot 9^x - 10 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0$ |
| ה. $25 \cdot 5^{2x} + 16 \cdot 15^x = 9^{x+1}$ | ו. $9^x + 4^x - 6^x = \frac{7}{6^{1-x}}$ |
| ז. $\frac{8^{2x} - 8}{7} = 4^x - 2$ | ח. $2^{3x} - 2^{2x+2} - 2^x + 4 = 0$ |

תשובות סופיות:

| | | | |
|----------------------------------|--------------|-----------------------|--------------------|
| א. $x=3$ | ב. $x=2$ | ג. $x=4$ | ד. $x=1$ |
| א. $x=\frac{1}{2}$ | ב. $x=0$ | ג. $x=\frac{1}{3}$ | ד. $x=\frac{1}{4}$ |
| ה. $x=-3$ | ו. $x=-2$ | ז. $x=-3$ | ח. $x=-2$ |
| א. $x=2,3$ | ב. $x=1,-2$ | ג. $x=0$ | ד. $x=0$ |
| ה. $x=0,1$ | ו. $x=-6,-9$ | | |
| א. $x=1, -\frac{1}{2}$ | ב. $x=1$ | | |
| א. $x=\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$ | ב. $x=1,3$ | ג. $x=1,2$ | ד. $x=1,0$ |
| ה. $x=-2$ | ו. $x=1,-1$ | ז. $x=0, \frac{1}{2}$ | ח. $x=0,2$ |

משוואות עם קבוע אוילר:

סיכום כללי:

קבוע אוילר מסומן באות e וערכו שווה (בערך) ל-2.71828. למספר זה משמעויות רבות במתמטיקה ובמדעים ועל כן הוחלט לסמן אותו באות משלו ולשלב אותו במשוואות מתמטיות ועוד. דרך הפתרון של משוואה שבה הבסיס הוא e זהה לחלוטין לשל משוואה מעריכית רגילה כפי שנלמד בפרק זה.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם קבוע אוילר):

$$\text{א. } e^{3x} = e^{2x-1} \quad \text{ב. } e^{5x-1} = e \cdot e^{6x+1}$$

$$\text{ג. } e^{x-5} = (e^{1-x})^3 \quad \text{ד. } e^x \cdot \sqrt{e^{3x-1}} = \left(\frac{1}{e^x}\right)^{1-3x}$$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחיסור):

$$\text{א. } e^2 \cdot e^x - e^{x+1} = e - 1 \quad \text{ב. } \sqrt[3]{e^{x+1}} \cdot e^2 = e^x \sqrt{e}$$

$$\text{ג. } e^{2x} + e^x - 2 = 0 \quad \text{ד. } e^{1+x} + e^{1-x} = e^2 + 1$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (המשתנה גם בבסיס):

$$\text{א. } xe^x = \sqrt[4]{e} \cdot x \quad \text{ב. } e^{3x} = x \cdot e^{3x}$$

$$\text{ג. } xe^{x^2} = \frac{x}{\sqrt{e^x}} \quad \text{ד. } \sqrt[3]{e^{3x-1}} \cdot x = xe^x$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x = -1 \quad \text{ב. } x = -3 \quad \text{ג. } x = 2 \quad \text{ד. } x = 1, \frac{1}{6}$$

$$(2) \quad \text{א. } x = -1 \quad \text{ב. } x = \frac{11}{4} \quad \text{ג. } x = 0 \quad \text{ד. } x = 1, -1$$

$$(3) \quad \text{א. } x = 0, \frac{1}{4} \quad \text{ב. } x = 1 \quad \text{ג. } x = 0, -\frac{1}{2} \quad \text{ד. } x = 0$$

משוואות בהן המשתנה גם בבסיס:

סיכום כללי:

במשוואות עם משתנה בבסיס יש לדרוש תנאי עבורו הבסיס חיובי. יש לקחת את חיתוך תחומי ההגדרה (במידה וקיימים ביטויים עם שורשים או שברים) יחד עם תוצאת השוואת המעריכים.

הערה:

יש לבדוק את ערכי ה- x עבורם הבסיס שווה ל-1 ולראות האם מתקבל פסוק אמת או פסוק שקר. בהתאם יש להוסיף או להוריד אותו מתחום המספרים המהווים את פתרון המשוואה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$(\sqrt{3-x})^{\sqrt{x}} = (\sqrt[3]{3-x})^x \cdot \sqrt{\sqrt[3]{3-x}} \quad (1)$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2+x} = 1 \quad (2)$$

$$\frac{|x-3|^{x^2-2}}{|x-3|^{x-1}} = |x-3|^{-1} \quad (3)$$

תשובות סופיות:

$$x = \frac{1}{4}, 1, 2 \quad (1)$$

(2) אין פתרון.

$$x = 0, 1, 2, 4 \quad (3)$$

משוואות מסכמות שונות:

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$.5(2^x - 2) + 2 = 4^x - 2^x \quad (1)$$

$$\cdot \frac{6}{4^{x-1} - 1} + \frac{2^{x+1}}{2^x + 2} = \frac{2^x + 4}{2^x - 2} \quad (2)$$

$$\cdot \frac{4^x}{4^x - 10} - \frac{4}{2^{2x-1} - 3} = \frac{32}{16^x - 4^{x+2} + 60} \quad (3)$$

$$\cdot 3^{2x^2+2} - 3^{x^2+3} + 9 = 3^{x^2+1} \quad (4)$$

$$\cdot \sqrt{x}{10} = 4 \cdot \sqrt[2]{x}{10} + 60 \quad (5)$$

$$\cdot \sqrt[x-1]{8 \cdot 2^{x+1}} = (\sqrt{x}{2})^2 \cdot \sqrt[x-1]{x}{32} \quad (6)$$

$$\cdot 10 \cdot 4^{x+2} - 16 \cdot 10^x - 90 \cdot 6^x + 36 \cdot 15^x = 0 \quad (7)$$

תשובות סופיות:

$$\cdot x = 1, 2 \quad (1)$$

$$\cdot x = 3 \quad (2)$$

$$\cdot x = 1.5 \quad (3)$$

$$\cdot x = 1, -1 \quad (4)$$

$$\cdot x = \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$\cdot x = -3 \quad (6)$$

$$\cdot x = 1, -2 \quad (7)$$

מערכת משוואות מעריכיות:

שאלות:

$$(1) \quad \begin{cases} y = 3^x \\ y = 18 - 3^x \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 5^{2x} - 5^y = 5^x - 25 \\ y - x = 2 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{1}{3^y - 4} + \frac{3}{3^x - 2} - \frac{1}{3^x + 2} = 3 \\ 4^y = \sqrt{256^x} \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(4) \quad \begin{cases} 5^x + 2^y = 13 \\ 2 \cdot 5^x - 2^y = 2 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(5) \quad \begin{cases} 2 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^y = 42 \\ 3^{x+1} - 2^{y+1} = 73 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(6) \quad \begin{cases} 5^{2x+1} + 8 \cdot 10^x - 2^{2y+4} = 0 \\ (\sqrt{3})^y = 27^{\frac{x-1}{6}} \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(7) \quad \begin{cases} 6 \cdot 4^x - 7 \cdot 6^{y-1} + 2 \cdot 3^{x+y} = 6^y \\ \sqrt[4]{5^x} \cdot \sqrt{(5\sqrt{5})^y} = \sqrt[4]{125} \cdot 5^x \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

תשובות סופיות:

| | | | |
|---------------------------|--------------------|--------------------------|------------------|
| (1,3) (4) | (1,2) (3) | (0,2) , (2,4) (2) | (2,9) (1) |
| (1,2) , (-1,0) (7) | (-1,-2) (6) | (3,2) (5) | |

אי שוויונים מעריכיים:

סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $a^x > a^y$ הוא: $x > y$ עבור $a > 1$ ו- $x < y$ עבור $0 < a < 1$.

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$\sqrt{2^x} \leq 4^{x^2-1\frac{1}{4}} \quad (2)$$

$$3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x} \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{5x} \geq \left(\frac{1}{7}\right)^{1-3x} \quad (4)$$

$$e^{\sqrt{x+1}} > e^{2x} \quad (3)$$

$$e^{2x} - 2e^x + 1 \leq 0 \quad (6)$$

$$25^x + 5 < 6 \cdot 5^x \quad (5)$$

הערה:

השאלות הבאות דורשות הכרות עם מושג הלוגריתם הטבעי (\ln) וכן חוקי הלוגריתמים אשר ילמדו בהמשך.

$$e^{2x} - 5e^x + 4 > 0 \quad (8)$$

$$e^x > 3 \quad (7)$$

תשובות סופיות:

$$x \leq -1 \text{ או } x \geq 1\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$x < \frac{2}{3} \quad (1)$$

$$x \leq \frac{1}{8} \quad (4)$$

$$0 \leq x < 1 \quad (3)$$

$$x = 0 \quad (6)$$

$$0 < x < 1 \quad (5)$$

$$x < 0 \text{ או } x > \ln 4 \quad (8)$$

$$x > \ln 3 \quad (7)$$

אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך:

סיכום כללי:

דרך הפתרון של אי שוויון עם משתנה בבסיס ובמעריך:

- יש לדרוש בסיס חיובי ולחבר אי-שוויון בהתאם.
- יש לפתור את אי השוויון לפי השוואת מעריכים.
- יש למצוא את חיתוך הפתרונות.

נתון: $f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)}$ נדרוש: $f(x) > 0$.

דרך הפתרון: אם $f(x) > 1$ אז $g(x) > h(x)$.

אם $0 < f(x) < 1$ אז $g(x) < h(x)$.

לבסוף נמצא את חיתוך התחומים.

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$(x-2)^{2x-5} < (x-2)^{x+1} \quad (2) \qquad x^{2x-1} > x^{x+2} \quad (1)$$

$$x^{2x^2+2} < x^{5x} \quad (4) \qquad x^{2x-6} < 1 \quad (3)$$

$$(x+1)^{|x|} < x^2 + 2x + 1 \quad (6) \qquad (x^2 - 6x + 13)^{x^2 - 2x} \geq (x^2 - 6x + 13)^3 \quad (5)$$

תשובות סופיות:

$$.0 < x < 1, x > 3 \quad (1)$$

$$.3 < x < 6 \quad (2)$$

$$.1 < x < 3 \quad (3)$$

$$.0 < x < 0.5, 1 < x < 2 \quad (4)$$

$$.x \leq -1, x \geq 3 \quad (5)$$

$$.0 < x < 2 \quad (6)$$

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 11 - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים

תוכן העניינים

| | |
|-----|---------------------------------------|
| 177 | 1. הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות |
| 180 | 2. חוקי הלוגריתמים |
| 184 | 3. חישובים עם חזקה לוגריתמית |
| 185 | 4. מעבר בין בסיסים |
| 187 | 5. הלוגריתם הטבעי |
| 189 | 6. משוואות עם בסיסים שונים |
| 190 | 7. מערכת משוואות לוגריתמיות |
| 191 | 8. מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות |
| 192 | 9. אי-שוויונים לוגריתמים |

הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות:

סיכום כללי:

הגדרה:

הלוגריתם מוגדר באופן הבא: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ כאשר: $a, b > 0, a \neq 1$.

הסבר:

לוגריתם על בסיס a של b מוגדר בתור החזקה שיש להעלות את a על מנת שיהיה שווה ל- b .
 ערך חזקה זו הוא x . ערך לוגריתם יכול להיות חיובי, שלילי או אפס. נחשב ערכי לוגריתמים
 ונפתור משוואות לוגריתמיות ע"י מעבר לפי ההגדרה למשוואה מעריכית מתאימה.

כללים יסודיים בלוגריתמים:

מהגדרת הלוגריתם נובע כי: $\log_a a = 1$ וכן: $\log_a 1 = 0$ לכל $a > 0, a \neq 1$.

שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמים הבאים:

א. $\log_2 32$ ב. $\log 1000$ ג. $\log_{25} 5$

ד. $\log_8 4$ ה. $\log_4 \frac{1}{16}$ ו. $\log_a a^4$

ז. $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (יסודי - שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\log_{36} 6 = x$ ב. $\log_2 x = 16$

ג. $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$ ד. $\log_x 64 = 3$

ה. $\log_x 25 = 2$ ו. $\log_x (3x+4) = 2$

3) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (כללי - שימוש בהגדרת הלוג):

$$\log_4(4-x) = \frac{1}{2} \quad \text{ב.} \qquad \log_6(4x-2) = 1 \quad \text{א.}$$

$$\log_3 \frac{x+3}{3-3x} = -2 \quad \text{ד.} \qquad \log_8(x^4 - 73) = 1 \quad \text{ג.}$$

$$\log_{\sqrt{x+1}}(2x^2 - 5) = 2 \quad \text{ו.} \qquad \log_x(2x^2 + x - 12) = 2 \quad \text{ה.}$$

4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג מספר פעמים):

$$3\log_{27}(\log_2(x+3)) = 1 \quad \text{ב.} \qquad \log_4(\log_3 x) = 1 \quad \text{א.}$$

$$\log_6\left(3 + \log_2\left(6 + \log_4(x^2 + 15)\right)\right) = 1 \quad \text{ד.} \qquad \log_{\frac{1}{16}}\left(\log_3(5x^2 + 1)\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{ג.}$$

5) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

$$\log_3(3 \cdot 2^x - 303) = 4 \quad \text{ב.} \qquad \log_2(3^x + 37) = 6 \quad \text{א.}$$

$$3\log_2\left(3 \cdot 4^{1+\frac{1}{3}x} - 11 \cdot 2^{\frac{x}{3}} + 3\right) = 12 + 2x \quad \text{ד.} \qquad \log_5(126 \cdot 5^x - 25) = 2x + 1 \quad \text{ג.}$$

6) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הצבה):

$$2(\log_3 x)^2 + \log_3 x = 10 \quad \text{ב.} \qquad (\log_2 x)^4 = 10000 \quad \text{א.}$$

$$\sqrt{\log_{\frac{1}{81}} x} + \sqrt{\log_{\frac{1}{81}} x + 2} = 2 \quad \text{ד.} \qquad \frac{3 \cdot \log_{14} x + 1}{(\log_{14} x)^2} = 4 \quad \text{ג.}$$

תשובות סופיות:

- (1) א. 5 ב. 3 ג. $\frac{1}{2}$ ד. $\frac{2}{3}$ ה. -2
- ו. -1.5 ז. 4
- (2) א. $x = \frac{1}{2}$ ב. $x = 65,536$ ג. $x = 27$ ד. $x = 4$
- ה. $x = 5$ ו. $x = 4$
- (3) א. $x = 2$ ב. $x = 2$ ג. $x = \pm 3$ ד. $x = -2$ ה. $x = 3$ ו. $x = 2$
- (4) א. $x = 81$ ב. $x = 5$ ג. $x = \pm 4$ ד. $x = \pm 1$
- (5) א. $x = 3$ ב. $x = 7$ ג. $x = -1, 2$ ד. $x = -6$
- (6) א. $x = 1024, \frac{1}{1024}$ ב. $x = 9, \frac{1}{9\sqrt{3}}$
- ג. $x = 14, \frac{1}{\sqrt[4]{14}}$ ד. $x = \frac{1}{3}$

חוקי הלוגריתמים:

סיכום כללי:

- להלן 3 חוקי הלוגריתמים עבור בסיס $a > 0 \neq 1$ וארגומנטים x ו- y חיוביים:
- מכפלה לסכום: $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.
 - מנה להפרש: $\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$.
 - מקדם למעריך: $\log_a b^n = n \log_a b$ (כאשר $b > 0$ ו- n מספר ממשי כלשהו).

שאלות:

שאלות חישוב כלליות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

- | | |
|--|---|
| א. $\log_3 12 + \log_3 2.25$ | ב. $\log_{\frac{1}{5}} 40 + \log_{\frac{1}{5}} 12.5 + \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{4}$ |
| ג. $\log_2 200 - \log_2 100$ | ד. $\log_3 60 - \log_3 540$ |
| ה. $\log_4 8 + \log_4 12 - \log_4 6$ | ו. $\log_7 1.5 - \log_7 147 + \log_7 2$ |
| ז. $3 \log_5 2 - \log_5 1.6$ | ח. $\log_{\sqrt{4}} 6.4 + 2 \log_{\sqrt{4}} \sqrt{10}$ |
| ט. $\frac{1}{2} \left(\log_7 \frac{7}{2} + \log_7 2 \right) + \log_7 14 - \frac{1}{3} \log_7 8$ | י. $\frac{1}{4} \log 81 - \log 1.5 - \frac{1}{2} \log 40$ |

(2) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

- | | |
|---|--|
| א. $\frac{\log_5 16}{\log_5 8}$ | ב. $\frac{\log_9 62.5 + \log_9 2}{\log_9 0.2}$ |
| ג. $\frac{\log_3 5 - \log_3 2 + \log_3 50}{\log_3 225 - 2}$ | ד. $\frac{2 - 2 \log_3 4 + \log_3 8 \frac{8}{9}}{4 - \log_3 0.01 - 2 \log_3 18}$ |

משוואות לוגריתמיות:

(3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש ישיר בחוקי הלוגריתמים):

א. $\log_2 x + \log_2 (x-6) = 4$ ב. $\log_3 x + \log_3 (x+2) = 1$

ג. $\log_2 (x+30) - \log_2 x = 4$ ד. $\log_5 (x+146) - \log_5 (x+2) = 2$

ה. $2\log_3 (2x-1) - \log_3 (22x+9) = -1$

ו. $2\log_5 (x-2) = \log_5 (4x-15) + \log_5 x$

(4) פתור את המשוואות הבאות (פתרון בשיטת לוג שווה לוג):

א. $\log_5 (4x-3) = \log_5 7$

ב. $2\log_2 (2x-2) - \log_2 (16-x) = \log_2 (x-1) + 1$

(5) פתור את המשוואות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א. $\log_3 (3 \cdot 5^x + 39) = 3 + \log_3 (5^x - 3)$

ב. $\log_2 (3 - 4^{x+1}) - \log_2 11 = x$

(6) פתור את המשוואות הבאות (שימוש הפוך בחוקי הלוגריתמים):

א. $\log_4 x \cdot \log_4 (16x) = 8$

ב. $\log_2 \left(\frac{x}{4}\right) \cdot \log_2 (1024x) = -11$

ג. $\log_2 x^2 \log_2 \left(\frac{x}{16}\right) = -\log_2 (64x)$

ד. $(\log_4 4x)^2 = \log_4 4x^2 + 1$

ה. $\log_3 (9x^2) \cdot \log_3 (9x^3) = \log_3 \left(\frac{81}{x}\right) + 2$

ו. $\frac{\log_2 \left(\frac{x^3}{32}\right)}{(\log_2 x)^2} + \frac{\log_2 (2x)}{\log_2 x} = 1\frac{7}{9}$

שאלות הבעה:

(7) נתון: $\log_3 2 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_3 16$ ב. $\log_3 6$

ג. $\log_3 24$ ד. $\log_3 1.5$

(8) נתון: $\log_2 5 = b$, $\log_2 3 = a$. הבע באמצעות a ו- b את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_2 45$ ב. $\log_2 60$ ג. $\log_2 \sqrt{7.5}$

(9) נתון: $\log_{18} 2 + \log_{18} 3 = a$.

הבע באמצעות a את $\log_{18} 27$ ואת $\log_{18} 16$.

שאלות נוספות:

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

(10) $\log 4 \log 40 + \log 5 \log 16 = \log 64$

(11) $2 \log^2 2 + \log 25 \cdot \log 20 = 2$

(12) $\log_{12} 16 \cdot \log_{12} 4 + \log_{12} 9 \cdot \log_{12} 48 = 2$

(13) $\log_5 10 \cdot \log_5 75 - \log_5 3 \cdot \log_5 2 - \log_5 3 - \log_5 4 = 2$

תשובות סופיות:

- (1) א. 3 ב. -3 ג. 1 ד. -2 ה. 2 ו. -0.5
- (2) א. $\frac{4}{3}$ ב. -3 ג. 1.5 ד. 0.5
- (3) א. $x=8$ ב. $x=3, \frac{1}{27}$ ג. $x=2$ ד. $x=4$ ה. $x=3$ ו. $x=4$
- (4) א. $x=2.5$ ב. $x=6$
- (5) א. $x=1$ ב. $x=-2$
- (6) א. $x=16, \frac{1}{256}$ ב. $x=2, \frac{1}{512}$ ג. $x=4, 2\sqrt{2}$ ד. $x=4, \frac{1}{4}$ ה. $x=\frac{1}{9}, \sqrt[9]{3}$ ו. $x=8, \sqrt[7]{2^{15}}$
- (7) א. $4a$ ב. $a+1$ ג. $3a+1$ ד. $1-a$
- (8) א. $2a+b$ ב. $2+a+b$ ג. $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}$
- (9) $4(2a-1), 3(1-a)$
- (10) הוכחה.
- (11) הוכחה.
- (12) הוכחה.
- (13) הוכחה.

חישובים עם חזקה לוגריתמית:

סיכום כללי:

מהגדרת הלוגריתם ניתן לנסח את הקשר הבא: $a^{\log_a x} = x$ כאשר $a > 0 \neq 1$.

שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א. $6^{\log_6 8}$ ב. $4^{\log_2 5}$

(2) נתונה התבנית: $3 \cdot 4^x$. חשב את ערכה עבור:

א. $x = \log_4 7$ ב. $x = \log_4 \sqrt{3}$

ג. $x = 2 \log_4 0.1$ ד. $x = \sqrt{\log_2 5}$

(3) נתונה התבנית: $\frac{1}{6} \cdot 9^x - 2 \cdot 3^x + 1$. חשב את ערכה עבור:

א. $x = -1$ ב. $x = \log_3 5$

ג. $x = \log_3 \sqrt{6}$

(4) חשב:

א. $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_{\sqrt{56}} 81}$ ב. $\sqrt[3]{2^{3 - \log_{\sqrt{8}} 5}}$

תשובות סופיות:

(1) א. 8 ב. 25

(2) א. 21 ב. $3\sqrt{3}$ ג. 0.03 ד. 15

(3) א. $\frac{19}{54}$ ב. $-4\frac{5}{6}$ ג. $2 - 2\sqrt{6}$

(4) א. $\frac{1}{81}$ ב. $\frac{2}{\sqrt[2]{25}}$

מעבר בין בסיסים:

סיכום כללי:

מעבר מבסיס a לבסיס m (כאשר: $a > 0 \neq 1$ ו- $m > 0 \neq 1$, וכן: $b > 0$)

$$\log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a}$$

יתבצע באופן הבא:

שאלות:

שאלות חישוב כלליות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

ב. $\log_{0.1} 3 \cdot \log_9 1000$

א. $\log_4 7 \cdot \log_7 4$

ד. $\log_4 169 \cdot \log_{25} 64 \cdot \log_{13} 625$

ג. $\log_{\sqrt{3}} 5 \cdot \log_{\sqrt{125}} 9$

(2) הוכח את השוויונים הבאים:

א. $\log_2 25 \cdot \log_5 3 \cdot \log_9 2 = 1$

ב. $\log_{16} 9 \cdot \log_5 4 \cdot \log_3 5 = 1$

משוואות לוגריתמיות:

(3) פתור את המשוואות הבאות:

ב. $\log_3 x \cdot \log_{27} x = 3$

א. $\log_2 x + \log_{32} x = 6$

ד. $\log_x 5 - 6 \log_{125} x = 1$

ג. $\log_2 4x \cdot \log_8 \frac{x}{16} = -\frac{5}{3}$

שאלות הבעה:

(4) נתון: $\log_4 6 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

ג. $\log_{216} 96$

ב. $\log_{32} 36$

א. $\log_2 3$

(5) נתון: $\log_2 3 = a$, $\log_3 5 = b$. הבע באמצעות a ו- b את ערכי הביטויים הבאים:

ג. $\log_5 22.5$

ב. $\log_2 \sqrt{30}$

א. $\log_3 50$

6 נתון $\log_3 7 = a$, $\log 9 = 2b$. הבע באמצעות a ו- b את:

א. $\log 21$.

ב. $\log_3 \left(\frac{10}{7} \right)$.

ג. $\log_7 10$.

ד. $\log_{30} 63$.

שאלות נוספות:

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

7 $\log_6 9 \cdot \log_{15} 30 + \log_6 5 \cdot \log_{15} 4 = 2$

8 $\log \sqrt{3} \cdot \log_6 50 + \log \sqrt{2} \cdot \log_6 300 = 1$

תשובות סופיות:

1 א. 1 ב. -1.5 ג. $2\frac{2}{3}$ ד. 12

2 א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

3 א. $x = 32$ ב. $x = 27, \frac{1}{27}$ ג. $x = 8, \frac{1}{2}$ ד. $x = \frac{1}{5}, \sqrt{5}$

4 א. $2a - 1$ ב. $0.8a$ ג. $\frac{a+2}{3a}$

5 א. $2b + \frac{1}{a}$ ב. $\frac{a}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{1}{2}$ ג. $\frac{2}{b} + 1 - \frac{1}{ab}$

6 א. $b + ab$ ב. $\frac{1}{b} - a$ ג. $\frac{1}{ab}$ ד. $\frac{ab+2b}{b+1}$

7 הוכחה.

8 הוכחה.

הלוגריתם הטבעי:

סיכום כללי:

לוגריתם על בסיס e (קבוע אוילר) מסומן: $\log_e \Rightarrow \ln$ והוא נקרא הלוגריתם הטבעי. למשל: $\ln 3 = \log_e 3$ או $\ln \frac{1}{4} = \log_e \frac{1}{4}$. לוג זה נקרא בשם לן. מהגדרת הלוגריתם מתקיים: $\ln a = b \rightarrow e^b = a$ כאשר $a > 0$ ו- b מספרים כלשהם.

שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הטבעיים הבאים:

$$\text{א. } \ln e^2 \quad \text{ב. } \ln \frac{1}{e^4} \quad \text{ג. } \ln \frac{1}{e\sqrt{e}}$$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג):

$$\text{א. } \ln x = 2 \quad \text{ב. } \ln x = -\frac{1}{2}$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (הצבה וחוקי הלוגריתמים):

$$\begin{aligned} \text{א. } \ln\left(e^{2x} - \frac{1}{2}\right) + \ln 2 = x \\ \text{ב. } 3 \ln^2 x + \ln x = 2 \\ \text{ג. } \ln(e^2 x^3) \cdot \ln \frac{1}{x} = \ln(ex^2) \end{aligned}$$

(4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הוצאת לוג משני אגפי המשוואה)

$$\text{א. } x^{\ln x} = e^6 x \quad \text{ב. } \left(\frac{1}{x}\right)^{2-3 \ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x}$$

(5) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

$$\text{א. } e^{\ln 3} \quad \text{ב. } e^{2 \ln 3}$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } 2 \quad \text{ב. } -4 \quad \text{ג. } -1.5$$

$$(2) \quad \text{א. } x = e^2 \quad \text{ב. } x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$(3) \quad \text{א. } x = 0 \quad \text{ב. } x = \sqrt[3]{e^2}, \frac{1}{e} \quad \text{ג. } x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \frac{1}{e}$$

$$(4) \quad \text{א. } x = e^3, \frac{1}{e^2} \quad \text{ב. } x = \sqrt{e}, e$$

$$(5) \quad \text{א. } 3 \quad \text{ב. } 9$$

משוואות עם בסיסים שונים:

סיכום כללי:

לעיתים תתקבל משוואה מעריכית שבה לא ניתן למצוא חזקה שלמה, כגון: $3^x = 4$. במקרים אלו נעזר בהגדרת הלוג כדי לבטא את ערך המעריך: $x = \log_3 4$. את ערך הביטוי $\log_3 4$ ניתן לחשב ע"י מחשבון או ע"י מעבר לבסיס 10: $\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3}$.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (בסיסים שונים):

א. $3^x = 6$ ב. $2^x - 9 = 0$

ג. $49^x - 8 \cdot 7^x + 15 = 0$ ד. $2 \cdot 3^{\frac{2x}{3}} + 5 \cdot 3^{\frac{x}{3}} + 2 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם בסיס ולוגריתם טבעי):

א. $e^{3x} = 3$ ב. $4 + 3e^x = 9$

ג. $3e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$ ד. $e(e^x + 1) = 2\sqrt{e^{x+2}} + 9e$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם פתרונות לא שלמים):

א. $\log_2(7 - 5^x) = \log_2 \frac{10}{5^x}$ ב. $\log_2(4e^{2x} + 6) - 1 = \log_2(7e^x)$

תשובות סופיות:

(1) א. $x = \log_3 6 = 1.63$ ב. $x = \log_2 9 = 3.17$

ג. $x = \log_7 3 = 0.564$, $x = \log_7 5 = 0.827$ ד. אין פתרון.

(2) א. $x = \frac{1}{3} \ln 3 = 0.36$ ב. $x = \ln \frac{5}{3} = 0.51$ ג. $x = 0$, $x = -\ln 3 = -1.09$

ד. $x = \ln 16 = 2.7725$

(3) א. $x = 1$, $x = \log_5 2 = 0.43$ ב. $x_1 = \ln \frac{1}{2} = -0.693$, $x = \ln 3 = 1.098$

מערכת משוואות לוגריתמיות:

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \log_6^2 x - \log_6(2y-2) = 2 \\ \frac{1}{2}x = y-1 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} y = \log_2 x \\ y = 6 - \log_2 x \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \log_3(x+y) = \log_3(4x+y) - 2 \\ \log_5(5x+3y) = 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \log_2(\log_3(x-y)) = 1 \\ \log_5(x+y-11) = \log_{25} x + \frac{1}{2}\log_5(y+2) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \log_2 x^2 + \log_3 \frac{1}{y} = 9 \\ \log_2 \sqrt{x} + \log_{\sqrt[3]{3}} y = -1 \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 6\log_4 y = 11 \\ 10\log_5 x - 2\log_4 y = 17 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} xy = 27 \\ x^{\log_3 y} = 9 \end{cases} \quad (8) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 2^{\log_2 y} = 6 \\ x^y = 5^8 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} 2^{\frac{\log_1(2x-y)}{2}} = 7^{\log_7 \frac{2x+y}{15}} \\ \log_3 x + \log_3 y = \frac{1}{\log_{28} 3} \end{cases} \quad (9)$$

תשובות סופיות:

$$(8, -5) \quad (3) \qquad (36, 19), \left(\frac{1}{6}, 1\frac{1}{12}\right) \quad (2) \qquad (8, 3) \quad (1)$$

$$\left(16, \frac{1}{3}\right) \quad (6) \qquad (25, 8) \quad (5) \qquad (16, 7) \quad (4)$$

$$(4, 7) \quad (9) \qquad (3, 9), (9, 3) \quad (8) \qquad (25, 4), (625, 2) \quad (7)$$

מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות:

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 25^y = (5\sqrt{5})^{x+1} \\ \log_5 \sqrt{x} + \log_5 \sqrt{y} = \log_5 3 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} y = \log_2(4^x - 2) \\ y = 2x - 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x \cdot \log_2 3 = \frac{y}{\log_9 2} \\ \log_3(9^x + 27) = 2y + \log_3 12 \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} 3y + 5 \log_6 x = 1 \\ 216 \cdot x^{2-y} = 6^{1-4y} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x = \log_4(5 - 9^y) \\ \log_2(2^x + 3) = \log_4(29 - (3^y - 3)^2) \end{cases} \quad (6) \quad \begin{cases} (2^x - 1)^2 - 4y + 3 = 0 \\ x = \log_2(y + 1) \end{cases} \quad (5)$$

תשובות סופיות:

$$(36, -3), \left(6, -1\frac{1}{3}\right) \quad (3) \quad (3, 3) \quad (2) \quad (1, 1) \quad (1)$$

$$(1, 0) \quad (6) \quad (1, 1), (2, 3) \quad (5) \quad \left(1, \frac{1}{2}\right), (2, 1) \quad (4)$$

אי-שוויונים לוגריתמים:

סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $\log_a x > \log_a y$ הוא: עבור $x > y$: עבור $a > 1$ ו- עבור $x < y$: עבור $0 < a < 1$.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

| | |
|---|----------------------------------|
| $\log_6(x^2 - 5x) < 1$ (2) | $\log_2 x < \log_2(5x - 20)$ (1) |
| $\log_{\frac{1}{2}}(1 - 3x) \geq \log_{\frac{1}{2}}(7 - x)$ (4) | $\log_3 x > \log_9(15 - 2x)$ (3) |
| $\ln x < 3$ (6) | $\ln x \geq \ln(x^2 - 12)$ (5) |
| $\frac{6}{\ln^2 x} \geq 2 - \frac{1}{\ln x}$ (8) | $\ln^2 x - 6 \ln x < 7$ (7) |

תשובות סופיות:

| | |
|---|-----------------------------|
| $-1 < x < 0, 5 < x < 6$ (2) | $x > 5$ (1) |
| $-3 \leq x \leq \frac{1}{3}$ (4) | $3 < x < 7\frac{1}{2}$ (3) |
| $0 < x < e^3$ (6) | $2\sqrt{3} < x \leq 4$ (5) |
| וגם $x \neq 1$ $\frac{1}{\sqrt{e^3}} \leq x \leq e^2$ (8) | $\frac{1}{e} < x < e^7$ (7) |

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 12 - סדרות

תוכן העניינים

| | |
|-----|--------------------------------|
| 193 | 1. הקדמה כללית |
| 200 | 2. סדרה חשבונית |
| 205 | 3. סדרה הנדסית |
| 207 | 4. סדרות מעורבות |
| 213 | 5. סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת |
| | 6. סדרת נסיגה |

סדרה חשבונית:

סיכום כללי:

- נוסחת האיבר הכללי:

נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית המתחילה באיבר a_1 והפרשה הוא d נתונה ע"י: $a_n = a_1 + d(n-1)$, כאשר: n הוא מיקום האיבר שערכו a_n בסדרה.

- כלל נסיגה של סדרה חשבונית:

כלל נסיגה של סדרה חשבונית a_n שהפרשה הוא d ואיברה הראשון הוא a_1 נתון ע"י: $a_{n+1} - a_n = d$.

- נוסחת הסכום של סדרה חשבונית:

סכום n האיברים הראשונים של סדרה חשבונית a_n שהפרשה הוא d ואיברה

הראשון הוא a_1 נתון ע"י: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$.

בהצבת נוסחת האיבר הכללי מקבלים: $S_n = \frac{n(2a_1 + d(n-1))}{2}$.

שאלות:

- (1) נתונה הסדרה החשבונית: $17, 11, 5, -1, -7, \dots$. מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 43 איברים.
- (2) בסדרה חשבונית האיבר השישי הוא 15 והאיבר העשירי הוא 31. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהו הפרש הסדרה.
- (3) מצא כמה איברים יש בסדרה החשבונית: $2, 4.5, 7, 9.5, 12, 14.5, \dots, 49.5$.

- (4) בסדרה חשבונית סכום האיברים השני, החמישי והשמיני הוא 87 וההפרש בין האיבר השנים-עשר לאיבר השישי הוא 24. מצא כמה איברים בסדרה אם ידוע שהאיבר האחרון בה הוא 201.
- (5) תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 3 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 46 קפיצות?
- (6) כמה מספרים תלת ספרתיים שמתחלקים ב-6 יש בין 201 ל-550?
- (7) כמה איברים חיוביים ישנם בסדרה החשבונית: $91, 88, 85, 82, \dots$.
- (8) מצא את ערכו של x אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית: $x-3, 3x-4, x^2-1$.
- (9) נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא:
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 3 \\ a_1 = 5 \end{cases}$$
 הוכח שהסדרה חשבונית ומצא מהו האיבר התשעה-עשר שלה.
- (10) בסדרה חשבונית $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ידוע כי סכום ארבעת האיברים הראשונים וסכום האיברים ה-6 עד ה-9 הם מספרים נגדיים.
- א. הוכח: $a_5 = 0$.
- ב. נתון: $a_3 - a_{11} = 24$. מצא את a_1 ואת d .
- ג. מגדירים סדרה חשבונית חדשה b_n המקיימת: $b_n = 2a_n - 3$. מצא את ערך האיבר השלילי הראשון בסדרה ואת מיקומו הסידורי.
- (11) מצא את סכום ארבעה-עשר האיברים הראשונים בסדרה החשבונית: $-3, 2, 7, 12, \dots$.

- (12) נתונה הסדרה החשבונית : $5, -1, -7, -13, \dots$.
 כמה איברים יש לחבר בסדרה (החל מהראשון) כדי להגיע לסכום של 987?
- (13) תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגה של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 11 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 2 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 416 קפיצות?
- (14) נתונה הסדרה החשבונית : $63, -67, -71, \dots$.
 כמה איברים לכל הפחות יש לחבר בסדרה כדי שהסכום המתקבל יהיה חיובי?
- (15) נתונה הסדרה החשבונית : $4, 13, 22, 31, \dots$.
 בסדרה יש 36 איברים. חשב את סכום ארבעה-עשר האיברים האחרונים בסדרה.
- (16) נתונה הסדרה החשבונית : $4, 9, 14, 19, \dots, 599$.
 מחקו כל איבר שלישי בסדרה. מצא את סכום האיברים שנותרו.
- (17) סכום n האיברים האחרונים בסדרה חשבונית בת $3n$ איברים גדול ב-1024 מסכום n האיברים הראשונים שבה.
 א. בטא את n באמצעות הפרש הסדרה, d .
 ב. נתון כי הפרש הסדרה הוא 8. כמה איברים בסדרה?
- (18) נתונה סדרה שבה $S_n = 2n^2 + 4n$.
 א. מצא את ערכם של שלושת האיברים הראשונים בסדרה.
 ב. הוכח כי הסדרה חשבונית ומצא את הפרשה.
- (19) בסדרה חשבונית ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות ה-5, ה-7, וה-16 הוא אפס. כמו כן ידוע כי סכום שלושת האיברים הראשונים הוא 132.
 א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת הפרש הסדרה.
 ב. מצא את האיבר השלילי הראשון בסדרה.
 ג. מצא כמה איברים יש לחבר (החל מהאיבר הראשון) כדי לקבל סכום 210.

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} 150, 144, 138, \dots \\ 90, 93, 96, \dots \end{array} \right. : \text{נתונים שני טורים חשבוניים}$$

לשני הטורים אותו מספר איברים. ידוע כי סכום האיברים האחרונים של שני הטורים (האיבר האחרון מהטור הראשון והאיבר אחרון מהטור השני) הוא אפס.

א. מצא את מספר האיברים שבכל טור.

ב. מחברים את n האיברים הראשונים מהטור הראשון יחד עם n האיברים הראשונים מהטור השני. ידוע כי חיבור הסכומים הוא 3480. מצא את n אם ידוע שהוא קטן מ-20.

(21) נתונות שתי סדרות החשבוניות הבאות: a_n שהפרשה הוא d_1 ו- b_n שהפרשה

$$\text{הוא } d_2. \text{ ידוע כי: } d_1 = -2d_2.$$

סכום 50 האיברים הראשונים של שתי הסדרות שווה והאיבר העומד במקום ה-20 בסדרה a_n גדול ב-1 מהאיבר העומד במקום ה-37 בסדרה b_n .

א. מצא את הפרש הסדרה $a_n - d_1$.

ב. ידוע כי האיבר a_{10} קטן ב-1 מ-5 פעמים האיבר b_{50} .

מצא את a_1 ואת b_1 .

(22) נתונה הסדרה החשבונית: $\dots, -13, -17, -21, \dots$

בסדרה יש 18 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

(23) בסדרה חשבונית שהפרשה d ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות

האי-זוגיים הוא 552 וסכום האיברים במקומות הזוגיים הוא 612.

$$\text{הוכח כי } nd = 60.$$

(24) בסדרה חשבונית עולה, שכל איבריה חיוביים ובה מספר אי-זוגי של איברים,

גדול סכום כל איברי הסדרה פי $1\frac{14}{15}$ מסכום איברי הסדרה הנמצאים

במקומות האי-זוגיים. כמה איברים יש בסדרה?

- (25)** לפניך שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית: $x-5$, $x-16$, $2x+23$.
- א. ענה על הסעיפים הבאים:
- מצא את x .
 - מצא את הפרש הסדרה.
- ב. ידוע כי: $a_{12} = 0$. מצא את a_1 .
- ג. האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n = 308$.
- מצא את סכום כל האיברים החיוביים העומדים במקומות האי-זוגיים.

- (26)** בסדרה חשבונית שבה מספר זוגי של איברים נתון כי סכום ריבועי האיברים העומדים במקומות ה-4 וה-5 שווה לריבוע האיבר העומד במקום ה-6. האיבר הראשון אינו אפס.
- א. הוכח את הטענות הבאות:
- $a_1 = -4d$
 - $S_9 = 0$
- ב. האיבר העומד במקום ה-6 גדול ב-2 מהאיבר העומד במקום ה-5. מצא את a_1 ואת d .
- ג. מצא את מספר איברי הסדרה אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים הוא 504.

- (27)** בסדרה חשבונית שבה $2n$ איברים ידוע כי סכום כל האיברים גדול ב-66 מפעמיים סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.
- א. הוכח כי $nd = 66$.
- ב. ידוע כי הפרש הסדרה הוא 3. הבע באמצעות a_1 את סכום n האיברים הראשונים.
- ג. סכום n האיברים הראשונים הוא 187. מצא את האיבר החיובי הקטן ביותר בסדרה ואת מיקומו הסידורי בסדרה.

- (28)** אדם המעוניין לקנות רכב קיבל שתי הצעות מחיר.
- ההצעה הראשונה :
- לשלם בתשלום הראשון 1000 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הגדול ב-500 ₪ מהתשלום הקודם.
- ההצעה השנייה :
- לשלם בתשלום הראשון 7200 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הקטן ב-450 ₪ מהתשלום הקודם.
- ידוע כי מספר התשלומים בהצעה השנייה קטן ב-4 ממספר התשלומים שבהצעה הראשונה.
- א. כמה תשלומים יצטרך לשלם לפי כל הצעה.
- ב. מה מחיר הרכב?

תשובות סופיות:

- (1) $a_{43} = -235$
- (2) $d = 4, a_1 = -5$
- (3) 20 איברים.
- (4) 48 איברים.
- (5) 15 קפיצות.
- (6) 58 מספרים.
- (7) 31 איברים חיוביים.
- (8) $x = 4, x = 1$
- (9) $a_{19} = 59$
- (10) א. הוכחה.
- (11) $S_{14} = 413$
- (12) 21 איברים.
- (13) 16 דקות.
- (14) 37 איברים.
- (15) 3647
- (16) 23920
- (17) א. $n = \sqrt{\frac{512}{d}}$
- (18) א. $a_1 = 6, a_2 = 10, a_3 = 14$ ב. $d = 4$
- (19) א. $a_1 = 50, d = -6$ ב. $a_{10} = -4$ ג. $n = 6$
- (20) א. $n = 81$ ב. $n = 16$
- (21) א. $d_1 = 4$ ב. $a_1 = -52, b_1 = 95$
- (22) אי-זוגיים: $S = 99$ זוגיים: $S = 135$
- (23) שאלת הוכחה.
- (24) 29 איברים.
- (25) א. i. $x = -50$ ii. $d = 11$ ב. $a_1 = -121$ ג. $S = 2156$
- (26) א. הוכחה. ב. $a_1 = -8, d = 2$ ג. $n = 36$
- (27) א. הוכחה. ב. $S = 22a_1 + 693$ ג. $a_9 = 1$
- (28) א. 12 לפי ההצעה הראשונה ו-8 לפי ההצעה השנייה. ב. 45000 שח.

סדרה הנדסית:

סיכום כללי:

- נוסחת האיבר הכללי:

נוסחת האיבר הכללי של סדרה הנדסית המתחילה באיבר a_1 ומנתה היא q נתונה ע"י הנוסחה: $a_n = a_1 q^{n-1}$, כאשר: n הוא מיקום האיבר שערכו a_n בסדרה.

- כלל נסיגה של סדרה הנדסית:

כלל נסיגה של סדרה הנדסית a_n שמנתה היא q ואיברה הראשון הוא a_1 נתון ע"י הקשר הבא: $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

- נוסחת הסכום של סדרה הנדסית:

סכום n האיברים הראשונים של סדרה הנדסית a_n שמנתה היא q ואיברה

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

הראשון הוא a_1 נתון ע"י:

שאלות:

(1) נתונה הסדרה ההנדסית: $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, \dots$

מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 9 איברים.

(2) מצא כמה איברים יש בסדרה ההנדסית: $\frac{9}{64}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{64}{81}$

(3) בסדרה הנדסית האיבר השישי הוא 8 והאיבר העשירי הוא 128. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

(4) בסדרה הנדסית ההפרש בין האיבר השביעי לאיבר החמישי הוא 432 וההפרש בין האיבר החמישי לשלישי הוא 48. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

- (5) בסדרה הנדסית עולה ההפרש בין האיבר השמיני לאיבר הרביעי הוא 3120 וסכום האיברים השני והרביעי הוא 5.2. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.
- (6) תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 3 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 324 קפיצות?
- (7) מצא את ערכו של x אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה הנדסית: $x-6, x+4, 4x+1$. מצא גם את מנת הסדרה.
- (8) נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא:
$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n \\ a_1 = 3 \end{cases}$$
 הוכח שהסדרה הנדסית ומצא מהו האיבר השמיני בה.
- (9) מצא את סכום תשעת האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית: $5, 10, 20, 40, \dots$.
- (10) תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 2 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 5 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 1562 קפיצות?
- (11) סכום n האיברים האחרונים בסדרה הנדסית בת $3n$ איברים שמנתה 2, גדול פי 256 מסכום n האיברים הראשונים בה. כמה איברים בסדרה?
- (12) בסדרה הנדסית עולה שבה n איברים, סכום $n-3$ האיברים האחרונים גדול פי 8 מסכום $n-3$ האיברים הראשונים בה. מצא את מנת הסדרה.
- (13) סכום כל האיברים בסדרה הנדסית הוא 252. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-120 מהאיבר השני בה. מצא כמה איברים יש בסדרה אם ידוע שמנתה 2.

14 המספרים: $2x-3$, $x-9$, $x-13$ הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית עולה שכל איבריה חיוביים.

- א. מצא את x .
 ב. ענה על הסעיפים הבאים:
 i. כתוב את נוסחת האיבר הכללי בסדרה זו.
 ii. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 18750.
 ג. ידוע כי האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n = 5^{11}$.
 מצא את סכום 7 האיברים האחרונים בסדרה.

15 נתונה הסדרה ההנדסית הבאה: $a_1, 4, 12, 36, \dots, a_{n+1}$. מוסיפים לכל איבר בסדרה זו שישית מהאיבר הבא אחריו ויוצרים סדרה חדשה b_n באופן הבא:

$$b_1 = a_1 + \frac{a_2}{6}, \quad b_2 = a_2 + \frac{a_3}{6}, \quad b_3 = a_3 + \frac{a_4}{6}, \quad \dots, \quad b_n = a_n + \frac{a_{n+1}}{6}$$

- א. הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.
 ב. הראה כי היחס בין סכום n האיברים הראשונים של הסדרה a_n ובין סכום n האיברים הראשונים של הסדרה b_n הוא $\frac{2}{3}$.
 ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה b_n שסכומם מהווה $\frac{2}{9}$ מ- a_8 .

16 נתונה הסדרה ההנדסית: $7, 14, 28, \dots$. בסדרה יש 8 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

17 בסדרה הנדסית ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות הזוגיים גדול פי 4 מסכום האיברים במקומות האי-זוגיים. חשב את מנת הסדרה.

18 נתונה סדרה הנדסית שמנתה q ובה מספר זוגי של איברים. בטא באמצעות q את היחס בין סכום איברי הסדרה כולה לסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים שבה.

19 בסדרה הנדסית שבה $2n+1$ איברים, סכום n האיברים הראשונים קטן פי 9 מסכום n האיברים הבאים אחריהם. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-30 מהאיבר הראשון שבה. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

20) ענה על הסעיפים הבאים :

- א. הראה כי בסדרה הנדסית שבה $2n$ איברים היחס בין סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים לבין סכום כל איברי הסדרה תלוי במנת בסדרה.
- בסדרה הנדסית שבה מספר זוגי של איברים ידוע כי סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים קטן פי 4 מסכום כל איברי הסדרה. האיבר הראשון בסדרה זו קטן ב-2 ממנת הסדרה.
- ב. כתוב נוסחה לאיבר כללי של סדרה זו.
- ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 324.

- 21) בסדרה הנדסית שבה 12 איברים סכום כל איברי הסדרה גדול פי 3 מסכום האיברים כאשר מחליפים את סימני כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.
- א. מצא את מנת הסדרה.
- ב. ידוע כי ההפרש בין האיבר החמישי לאיבר הרביעי בסדרה הוא 8. מצא את האיבר הראשון בסדרה.
- ג. חשב את סכום כל האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה.

- 22) באחת ממדינות המזרח היה מלך שאהב משחקי חשיבה. לכבוד יום הולדתו הכין לו השר הבכיר שבממלכתו משחק מיוחד המכיל 25 משבצות ו-2 חיילי משחק. המלך, מרוב התלהבות ושמחה לא ידע כיצד לגמול לשר החכם ושאל אותו מה ירצה בתמורה. השר סרב לקבל דבר על מתנתו עד שלבסוף החליט המלך לתת לשר מחצית מכל אוצרות הממלכה המונים כ-40 מיליון אבנים יקרות. לאחר ששמע על כך השר, הוא החליט לאתגר את המלך והעלה את ההצעה הבאה :
- תן לי אבן יקרה אחת והכפל אותה בכל משבצת שבמשבצות המשחק באופן הבא : כנגד המשבצת הראשונה - אבן אחת, כנגד השנייה - שתי אבנים, כנגד השלישית - ארבע אבנים וכן הלאה...
- המלך הסכים להצעה.
- א. כמה אבנים המלך ייתן לשר כנגד המשבצת האחרונה במשחק?
- ב. העזר בכמות האבנים שברשותו של השר וקבע האם הצעתו שוות-ערך יותר מהחלטת המלך לתת לו מחצית מאוצרות הממלכה.
- ג. סמוך לפני שנתן המלך את האבנים לשר, הציעה בתו של המלך הצעה נוספת והיא : תן עבור כל משבצת זוגית 2^n אבנים, כאשר n הוא מספר המשבצת. האם כדאי למלך לקבל את הצעת בתו או להישאר עם ההצעה המקורית של השר?

תשובות סופיות:

(1) $a_9 = 729$

(2) $n = 7$

(3) $a_1 = \pm \frac{1}{4}, q = \pm 2$

(4) $a_1 = \frac{2}{3}, q = \pm 3$

(5) $a_1 = \frac{1}{25}, q = 5$

(6) 5 דקות.

(7) $x = -\frac{2}{3} \rightarrow q = -\frac{1}{2}, x = 11 \rightarrow q = 3$

(8) $a_8 = 384$

(9) $S_9 = 2555$

(10) 5 דקות.

(11) יש 12 איברים בסדרה. $n = 4$

(12) $q = 2$

(13) $n = 6$

(14) א. $x = 14$ ב. i. $a_n = 5^{n-1}$ ב. ii. a_6, a_7 ג. $S_7^* = 61,034,375$

(15) א. $q = 3$ ג. b_5, b_6

(16) אי-זוגיים: $S = 595$, זוגיים: $S = 1190$

(17) $q = 4$

(18) $\frac{q+1}{q}$

(19) $a_1 = \frac{3}{8}$

(20) א. $\frac{S_{n(o)}}{S_{2n}} = \frac{1}{q+1}$ ב. $a_n = 3^{n-1}$ ג. a_5, a_6

(21) א. $q = 2$ ב. $a_1 = 1$ ג. $S_{6(p)} = 2730$

(22) א. $a_{25} = 16,777,216$

ב. לפי הצעת השר יהיו לו 33,554,431 אבנים ולפי הצעת המלך יהיו

ג. $2^{24}, 4, 16, 64, \dots$ לו 20,000,000 אבנים. $S_n = 22,369,620$

סדרות מעורבות:

שאלות:

- (1) נתונים שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית שמנתה 3. אם נכפול את המספר הראשון ב-3, נוסיף למספר השני 4 ונחסיר מהמספר השלישי 4 תתקבל סדרה חשבונית. מצא את המספרים.
- (2) נתונות שתי סדרות שמתחילות במספר 2 ובשתיהן 3 איברים. סדרה אחת היא חשבונית והשנייה הנדסית. האיבר השלישי בשתי הסדרות זהה והאיבר השני בסדרה ההנדסית קטן ב-4 מהאיבר השני בסדרה החשבונית. מצא את מנת הסדרה ההנדסית.
- (3) נתונים ארבעה מספרים בעלי התכונות הבאות:
 הראשון, השני והרביעי מהווים שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית שמנתה 2.
 הראשון, השלישי והרביעי מהווים שלושה איברים עוקבים בסדרה חשבונית וסכומם $22\frac{1}{2}$. מצא את ארבעת המספרים.
- (4) ההפרש של סדרה חשבונית שווה למנה של סדרה הנדסית עולה. האיבר הראשון בסדרה ההנדסית הוא 6 וידוע כי סכום 2 האיברים הראשונים בסדרה החשבונית שווה לסכום שני האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית. האיבר השלישי בסדרה ההנדסית גדול פי 2 מהאיבר השלישי בסדרה החשבונית.
 א. מצא את שלושת האיברים של הסדרה החשבונית.
 ב. מצא כמה איברים יש לחבר בסדרה החשבונית החל מהאיבר הראשון כדי לקבל את הסכום 60.
 ג. מצא את מיקומו הסידורי של איבר בסדרה ההנדסית הגדול פי 12 מהאיבר האחרון שחובר בסכום הסדרה החשבונית שחישבת בסעיף הקודם.
- (5) נתונות שתי הסדרות הבאות: סדרה חשבונית: a_1, a_2, a_3, \dots וסדרה הנדסית: b_1, b_2, b_3, \dots . ידוע כי האיבר הראשון בשתי הסדרות שווה. האיבר השלישי בסדרה ההנדסית גדול פי 4 מהאיבר הראשון בסדרה החשבונית.
 א. מצא את מנת הסדרה ההנדסית אם ידוע כי היא אינה עולה.
 ב. נתון גם כי האיבר החמישי בסדרה ההנדסית שווה לאיבר הרביעי בסדרה החשבונית. הוכח כי הפרש הסדרה החשבונית גדול פי 5 מהאיבר הראשון.
 ג. בכל סדרה יש 10 איברים. הסכום של כל האיברים של שתי הסדרות יחד הוא 212. מצא את האיבר הראשון של שתי הסדרות.

תשובות סופיות:

- (1) המספרים הם: 2, 6, 18.
- (2) $q = 3$ או $q = -1$.
- (3) המספרים הם: 3, 6, 7.5, 12.
- (4) א. 8, 10, 12 ב. 5 ג. 6.
- (5) א. $q = -2$ ג. $a_1 = 2$.

סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

סיכום כללי:

• הגדרה:

סדרה הנדסית a_n המקיימת: $|q| < 1$, $(q \neq 0)$ נקראת סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת.

• נוסחת הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת a_n ניתן לחישוב ע"י שימוש בכלל: $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ והצבתו בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית.

$$. S = \frac{a_1}{1-q} \quad \text{מתקבל הכלל הבא:}$$

• סכום סופי של איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

○ כאשר מתבקשים לחשב סכום של n איברים ראשונים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה: $. S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$

○ כאשר מתבקשים לחשב סכום של n איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת המתחילים באיבר a_k יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה

$$. S_n = \frac{a_k(q^n - 1)}{q - 1} \quad \text{באופן הבא:}$$

שאלות:

(1) מצא את סכום כל איברי הסדרה ההנדסית הבאה: $12, 4, 1\frac{1}{3}, \dots$

(2) סכום כל איברי סדרה הנדסית אינסופית שמנתה $\frac{1}{4}$ הוא 32. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

(3) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 62.5. ידוע כי האיבר השני בסדרה הוא 10. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה (שתי אפשרויות).

(4) האיבר הראשון בסדרה הנדסית אינסופית יורדת הוא 14. סכום האיברים במקומות הזוגיים הוא $9\frac{1}{3}$. מצא את סכום האיברים במקומות האי-זוגיים.

***הערה:** שתי השאלות הבאות מסכמות את סוגי הסכומים וייצוג סדרות שונות באמצעות סדרה נתונה כפי שמקובל בנושא זה ואינן מייצגות אורך של שאלת בגרות.

(5) נתונה סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת a_n שמנתה q , $(q \neq 0, |q| < 1)$, מגדירים שלוש סדרות חדשות: b_n, c_n ו- d_n באופן הבא:

| d_n | c_n | b_n | הסדרה: |
|-------------------|---------------------------|--|--------------|
| $d_1 = S_a + a_1$ | $c_1 = a_2^2 - a_1^2$ | $b_1 = a_1$ | הכלל: |
| $d_2 = S_a + a_2$ | $c_2 = a_3^2 - a_2^2$ | $b_2 = a_1 + a_2$ | |
| $d_3 = S_a + a_3$ | $c_3 = a_4^2 - a_3^2$ | $b_3 = a_1 + a_2 + a_3$ | |
| \vdots | \vdots | \vdots | |
| $d_n = S_a + a_n$ | $c_n = a_{n+1}^2 - a_n^2$ | $b_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = S_{a(n)}$ | |

הסכום S_a הוא סכום הסדרה a_n , והסכום $S_{a(n)}$ הוא סכום n האיברים הראשונים של הסדרה a_n .

- א. קבע אלו מבין הסדרות b_n , c_n ו- d_n הן הנדסיות והבע את מנתן ע"י q .
- ב. הבע באמצעות a_1 בלבד את סכום הסדרה ההנדסית שמצאת בסעיף הקודם.
- ג. מסמנים את סכום ריבועי האיברים של הסדרה ההנדסית שמצאת בסעיף א' ב- $S_{(s)}$. הוכח כי לא קיים ערך של q עבורו סכום ריבועי האיברים $S_{(s)}$, שווה לסכום הסדרה הנ"ל בריבוע.

6 נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת: a_n שמנתה q . מגדירים סדרה חדשה b_n באופן הבא:

$$b_1 = S_1^* = \frac{a_1}{1-q}, b_2 = S_2^* = \frac{a_2}{1-q}, b_3 = S_3^* = \frac{a_3}{1-q}, \dots, b_n = S_n^* = \frac{a_n}{1-q}, \dots$$

כאשר: S_n^* מייצג את סכום הסדרה a_n החל מהאיבר a_n (ועד אינסוף).

- א. הוכח כי הסדרה b_n היא גם הנדסית אינסופית יורדת וכתוב את נוסחת האיבר הכללי שלה באמצעות a_1 ו- q .
- ב. ידוע כי סכום הסדרה b_n הוא 126 וכי סכום 8 האיברים הראשונים בסדרה a_n גדול פי 6560 מהאיבר התשיעי בסדרה b_n . מצא את a_1 ו- q .
- ג. היעזר בסעיף הקודם והוכח כי מתקיים: $b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots = 42$.
- ד. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה b_n .
- ה. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה b_n .
- ו. מחליפים את סימני האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה b_n כך שנוצרת הסדרה: b_n^* . חשב את סכום הסדרה b_n^* .
- ז. מחליפים את סימני האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה b_n כך שנוצרת הסדרה: b_n^{**} . חשב את סכום הסדרה b_n^{**} .
- ח. מעלים בריבוע את כל איברי הסדרה b_n . מסמנים את הסכום המתקבל ב- $S_{(s)}$ (מלשון: square). כמו כן, מסמנים את סכום הסדרה המקורית ב- S_b . הראה כי: $S_b^2 \neq S_{(s)}$.
- ט. הוכח כי היחס בין סכום איברי הסדרה a_n וסכום איברי הסדרה b_n הוא $\frac{2}{3}$.

- (7) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 24. מאיברי הסדרה הנתונה יצרו את סדרה חדשה באופן הבא: $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, a_4 + a_5, \dots$.
- א. הוכח שהסדרה החדשה היא הנדסית אינסופית יורדת.
 ב. ידוע שסכום כל איברי הסדרה החדשה הוא 32.
 מצא את האיבר הראשון והמנה של הסדרה המקורית.
- (8) בסדרה הנדסית אינסופית יורדת a_n ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים גדול פי $1\frac{2}{3}$ מסכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.
- א. מצא את מנת הסדרה.
 מחברים כל שני איברים סמוכים בסדרה הנתונה ויוצרים סדרה חדשה b_n .
- ב. הוכח כי הסדרה b_n גם היא הנדסית יורדת ומצא את מנתה.
 ג. הראה כי סכום הסדרה b_n שווה לסכום הסדרה a_n .
 ד. סכום שתי הסדרות יחד הוא 1000. מצא את האיבר הראשון בסדרה a_n .
- (9) נתונה סדרה הנדסית אינסופית a_1, a_2, a_3, \dots שמנתה היא q , $(0 < q < 1)$. נגדיר את הסכומים הבאים: $T = a_1 + a_2 + a_5 + a_6 + a_9 + a_{10} + \dots$, $V = a_3 + a_7 + a_{11} + \dots$. נתון כי: $T = 6V$.
- א. מצא את מנת הסדרה q .
 ב. פי כמה קטן V מסכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה?
 ג. מצא את האיבר הראשון אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים הוא $1365\frac{1}{3}$.
- (10) נתונה הסדרה ההנדסית הבאה: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$ שמנתה היא q . בונים סדרה חדשה מריבועי כל האיברים הסדרה באופן הבא: $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots, a_{2n}^2$.
- א. הוכח כי היחס בין סכום n האיברים הראשונים בסדרת הריבועים ובין סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה הנתונה תלוי רק באיבר הראשון של הסדרה.
 בסדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 640 ידוע כי סכום 10 האיברים הראשונים כאשר מעלים אותם בריבוע גדול פי 320 מסכום 10 האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.
 ב. מצא את מנת הסדרה.
 ג. מחברים את כל איברי הסדרה החל מאיבר a_n כלשהו.
 ידוע כי סכום זה קטן פי 16 מסכום הסדרה המקורי. מצא את האיבר a_n .

- 11** נתונה סדרה הנדסית אינסופית a_1, a_2, a_3, \dots שמנתה היא q , $(q \neq 0, |q| < 1)$.
- נגדיר את הסכומים הבאים: $T = a_1 + a_3 + a_6 + a_8 + a_{11} + a_{13} + \dots$, $V = a_2 + a_7 + a_{12} + \dots$.
- נתון כי: $V = 0.3T$.
- א. מצא את מנת הסדרה q .
 מחליפים את הסימנים של כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים ומתקבלת סדרה חדשה שסכומה הוא 12.
- ב. מצא את האיבר הראשון בסדרה המקורית.
- ג. מעלים את כל איברי הסדרה בריבוע. חשב את סכום הסדרה כעת.

תשובות סופיות:

$$. S = 18 \quad (1)$$

$$. a_1 = 24 \quad (2)$$

$$. q = \frac{4}{5}, a_1 = 12 \frac{1}{2} \text{ או } q = \frac{1}{5}, a_1 = 50 \quad (3)$$

$$. S = 18 \frac{2}{3} \quad (4)$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{a_{n+1}(q^{n+1}-1)}{q-1} = \frac{a_{n+1}(q^{n+1}-1)}{a_n(q^n-1)} = q \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q^n-1} : b_n \text{ הסדרה } (5)$$

היות והיא תלויה ב- n היא אינה הנדסית.

$$. \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2}{a_{n+1}^2 - a_n^2} = \frac{a_n^2 q^4 - a_n^2 q^2}{a_n^2 q^2 - a_n^2} = \frac{a_n^2 q^2 (q^2 - 1)}{a_n^2 (q^2 - 1)} = q^2 : c_n \text{ הסדרה הנדסית: } (6)$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{S + a_{n+1}}{S + a_n} = \frac{\frac{a_1}{1-q} + a_{n+1}}{\frac{a_1}{1-q} + a_n} = \frac{a_1 + (1-q)a_{n+1}}{a_1 + (1-q)a_n} = \frac{a_1(1 + (1-q)q^n)}{a_1(1 + (1-q)q^{n-1})} = \frac{q^n - q^{n+1} + 1}{q^{n-1} - q^n + 1} : d_n \text{ הסדרה}$$

$$. S_{(c_n)} = \frac{c_1}{1-q_c} = \frac{a_2^2 - a_1^2}{1-q^2} = \frac{a_1^2(q^2-1)}{1-q^2} = -a_1^2 \quad \text{ב. היות והיא תלויה ב-} n \text{ היא אינה הנדסית.}$$

ג. מההשוואה: $S_{(s)} = S^2$ מקבלים כי פתרון המשוואה הוא: $q = 0, \pm 1$.

כולם נפסלים מכיוון שמנת הסדרה הנתונה a_n היא שבר.

עבור $|q| > 1$ הסדרות אינן מתכנסות ולכן לא קיים ערך של q עבורו

השוויון יתקיים. מש"ל.

$$31.5 \quad \text{ד. הוכחה.} \quad \text{ג. הוכחה.} \quad \text{ב. } a_1 = 56, q = \frac{1}{3} \quad \text{א. } b_n = \frac{a_1}{1-q} q^{n-1} \quad (6)$$

$$7938 \quad \text{ה. } 94.5 \quad \text{ו. } -63 \quad \text{ז. } 63 \quad \text{ח. } 7938$$

$$. (b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots)^2 : \text{משמעו: } S^2$$

הסכום: $S_{(s)}$ משמעו: $b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 + \dots$. ברור כי הביטויים אינם שווים.

$$. q = \frac{1}{3}, a_1 = 16 \quad \text{ב. הוכחה.} \quad (7)$$

$$a_1 = 200 \quad \text{ד. } \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{2n+1} + a_{2n+2}}{a_{2n-1} + a_{2n}} = q^2 \quad \text{ב. } q = 0.6 \quad \text{א. } (8)$$

$$a_1 = 1024 \quad \text{ג. } 5 \text{ פי } 5 \quad \text{ב. } q = \frac{1}{2} \quad \text{א. } (9)$$

$$. a_5 = 20 \quad \text{ג. } q = 0.5 \quad \text{ב. הוכחה.} \quad (10)$$

$$. S = 288 \quad \text{ג. } a_1 = -16 \quad \text{ב. } q = \frac{1}{3} \quad \text{א. } (11)$$

סדרת נסיגה:

שאלות:

$$(1) \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2n - 11 \\ a_1 = -6 \end{cases} \quad \text{נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא:}$$

- א. מצא את האיבר השלישי בסדרה.
 ב. נתון כי האיבר השלושה-עשר בסדרה הוא 18. מצא את a_{12} ו- a_{14} .
 ג. נתון כי האיבר השלושים ואחת בסדרה הוא k .
 הבע באמצעות k את a_{30} ו- a_{32} .
 ד. מצא את מיקומם של שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 133.
 ה. הסבר מדוע אין שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 62.

$$(2) \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2n \\ a_1 = 0 \end{cases} \quad \text{נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא:}$$

נתון כי $a_k = 72$. הבע באמצעות k את a_{k+2} .

$$(3) \quad \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + n^2 - 31 \\ a_7 = t \end{cases} \quad \text{נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא:}$$

מצא את ערכו של t שבעבורו האיברים a_7, a_8, a_9 הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית.

$$(4) \quad \text{סדרה שהאיבר הכללי בה הוא } a_n \text{ מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: } a_{n+1} = a_n + 6n - 2$$

מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא b_n באופן הבא: $b_n = a_{n+1} - a_n$.

א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה חשבונית ומצא את הפרשה.

ב. חשב את b_1 .

$$(5) \quad \text{סדרה שהאיבר הכללי בה הוא } a_n \text{ מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: } a_{n+1} = 3a_n + 4$$

מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא b_n באופן הבא: $b_n = a_n + 2$.

א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.

ב. נתון: $b_5 = 162$. חשב את a_1 .

- (6) סדרה מוגדרת ע"י הכלל: $a_1 = 3, a_{n+1} = 3a_n + 10n - 5$.
 מגדירים סדרה חדשה המקיימת לכל n טבעי: $b_n = a_n + 5n$.
- הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית.
 - חשב את האיבר b_5 .
 - חשב את הסכום: $b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{12}$.
- (7) סדרה מוגדרת לכל n טבעי ע"י הנוסחה: $a_1 = k, a_{n+1} = 8n - a_n + 3$.
- הבע באמצעות k את ארבעת האיברים הראשונים בסדרה.
 - הוכח כי סדרת האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים וסדרת האיברים העומדים במקומות הזוגיים הן חשבוניות ומצא את הפרשן.
 - חשב את סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה.
- (8) סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה הבא: $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{3a_n}{2a_n + 3}$.
- מגדירים סדרה חדשה לפי: $b_n = \frac{4 - 7a_n}{a_n}$.
- הוכח כי הסדרה b_n היא חשבונית ומצא את הפרשה.
 - חשב את הסכום הבא: $b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{22}$.
- (9) סדרה מקיימת את כלל הנסיגה: $a_1 = 1, a_{n+1} = 3n - a_n - 7$.
- חשב את 5 האיברים הראשונים וקבע האם הסדרה היא חשבונית.
 - הוכח כי לכל n טבעי מתקיים: $a_{n+2} = a_n + 3$.
 - כתוב נוסחה לסכום n האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.
 - חשב את הסכום הבא: $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{17}$.

10 סדרה מוגדרת לפי כלל הנסיגה הבא : $a_{n+1} = a_n + 2 \cdot 3^n + 2$.

א. ענה על הסעיפים הבאים :

i. הבע את a_{n+2} באמצעות a_n .

ii. מצא את מיקומו הסידורי של איבר הגדול ב-652 מהאיבר העומד שני מקומות לפניו.

ב. הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של אחת מהסדרות המיוצגות

ע"י כלל הנסיגה הנ"ל היא : $S_n = 1.5 \cdot 3^n + n^2 + n - 1.5$.

חשב את הסכום הבא : $a_6 + a_7 + a_8 + \dots + a_{11}$.

ג. מהו האיבר הראשון של הסדרה המיוצגת ע"י כלל הנסיגה ונוסחת הסכום הנ"ל?

11 סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה : $a_1 = 6, a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 5}$.

מגדירים סדרה חדשה b_n המקיימת לכל n טבעי : $b_n = \frac{a_n + 3}{a_n}$.

א. הוכח כי הסדרה b_n היא הנדסית ומצא את מנתה.

ב. כתוב נוסחה ל- b_n באמצעות n בלבד.

ג. חשב את הסכום הבא : $b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots - b_{10}$.

תשובות סופיות:

$$a_{30} = k - 49, a_{32} = k + 51 \quad \text{ג.} \quad a_{12} = 5, a_{14} = 33 \quad \text{ב.} \quad a_3 = -22 \quad \text{א. (1)}$$

$$a_{62}, a_{63} \quad \text{ד.}$$

$$a_{k+2} = 74 + 4k \quad \text{(2)}$$

$$t = -33 \quad \text{(3)}$$

$$b_1 = 4 \quad \text{ב.} \quad d = 6 \quad \text{א. (4)}$$

$$a_1 = 0 \quad \text{ב.} \quad q = 3 \quad \text{א. (5)}$$

$$S = 1594320 \quad \text{ג.} \quad b_5 = 648 \quad \text{ב.} \quad b_{n+1} = 3b_n \quad \text{א. (6)}$$

$$8 \quad \text{ב.} \quad a_4 = 19 - k, a_3 = k + 8, a_2 = 11 - k, a_1 = k \quad \text{א. (7)}$$

$$830 \quad \text{ג.}$$

$$S_{11(p)} = 267 \frac{2}{3} \quad \text{ב. (8)}$$

$$S_{n(o)} = 1.5n^2 - 0.5n \quad \text{ג.} \quad a_1 = 1, a_2 = -5, a_3 = 4, a_4 = -2, a_5 = 7 \quad \text{א. (9)}$$

$$S_{9(o)} = 117 \quad \text{ד.}$$

$$a_4 \quad \text{ii.}$$

$$a_{n+2} = a_n + 8 \cdot 3^n + 4 \quad \text{i. א. (10)}$$

$$a_1 = 5 \quad \text{ג.}$$

$$S_{6-11} = 265458 \quad \text{ב.}$$

$$S_{10}^* = -4086.74 \quad \text{ג.}$$

$$b_n = 1.5 \cdot 2.5^{n-1} \quad \text{ב.}$$

$$q = 2.5 \quad \text{א. (11)}$$

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 13 - סימן הסכימה (סיגמה)

תוכן העניינים

1. כללי 217

סימן הסכימה (סיגמה):

שאלות:

1) כתוב בפירוט את הסכומים הבאים:

| | | |
|-------------------------------|------------------------------|-----------------------------------|
| א. $\sum_{n=0}^{10} 4^n$ | ב. $\sum_{k=1}^4 2k$ | ג. $\sum_{n=4}^{10} na_n$ |
| ד. $\sum_{i=7}^{11} 4i^2 a_i$ | ה. $\sum_{t=1}^8 tx^t$ | ו. $\sum_{k=4}^{10} na_k$ |
| ז. $\sum_{k=1}^{10} 4n$ | ח. $\sum_{k=-1}^3 (k^2 + 1)$ | ט. $\sum_{l=1}^3 (l^2 - x_l - 4)$ |

2) כתוב את הסכומים הבאים בעזרת סימן הסכימה:

| |
|--|
| א. $1+2+4+8+16+32+64+128$ |
| ב. $2+4+6+8+10+12+14+16+18+20$ |
| ג. $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$ |
| ד. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 7 \cdot 8$ |
| ה. $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + 44 \cdot 45$ |
| ו. $3 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 12 \cdot 5 + 15 \cdot 6 + 18 \cdot 7 + 21 \cdot 8$ |
| ז. $5^2 + 7^2 + \dots + 27^2$ |
| ח. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{10 \cdot 11}$ |
| ט. $\frac{2}{3} + \frac{6}{9} + \frac{10}{27} + \frac{14}{81} + \frac{18}{243}$ |
| י. $4 + \frac{8}{5} + \frac{12}{25} + \frac{16}{125} + \frac{20}{625}$ |

3) חשב את הסכומים הבאים:

| | | |
|---|----------------------------------|--------------------------------------|
| א. $\sum_{k=1}^{10} 4k$ | ב. $\sum_{k=1}^{10} (2k + 4k^2)$ | ג. $\sum_{k=10}^{24} k(k-1)$ |
| ד. $\sum_{k=10}^{24} \frac{k^3 - k}{k+1}$ | ה. $\sum_{k=4}^{10} (k-2)(k+2)$ | ו. $\sum_{k=1}^{10} (2k^2 + 1)(k-2)$ |

* תוכל להיעזר בנוסחאות הבאות: $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

(4) חשב את הסכומים הבאים:

$$\text{א. } \sum_{k=1}^{20} \frac{5 \cdot 4^k + 8^k}{2^k} \quad \text{ב. } \sum_{k=1}^{11} \frac{2 \cdot 4^{k+2} + 10^k}{0.4^k} \quad \text{ג. } \sum_{k=10}^{20} 2^{2k+10}$$

$$* \text{ תוכל להיעזר בנוסחה הבאה: } \sum_{k=1}^n a^k = \frac{a(a^n - 1)}{a - 1} \quad (a \neq 1)$$

(5) חשב את הסכומים הבאים:

$$\text{א. } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 20^2 \quad \text{ב. } 4^2 + 5^2 + 6^2 + \dots + 24^2$$

$$\text{ג. } 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 22^2 \quad \text{ד. } 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 17^2$$

(6) הוכח כי:

$$\text{א. } \sum_{k=1}^n \frac{2^{2k+4}}{k+2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{2k+6}}{k+3}$$

$$\text{ב. } \sum_{k=4}^{n-3} \frac{4k+17+2^{2k}}{k+1} = \sum_{k=8}^{n+1} \frac{4k+1+2^{2k-8}}{k-3}$$

(7) חשב את הסכומים הבאים ללא פיצול הסכום:

$$\text{א. } \sum_4^{11} k^2 \quad \text{ב. } \sum_{10}^{20} 4^{2k}$$

תשובות סופיות:

1. א. $4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 + 4^6 + 4^7 + 4^8 + 4^9 + 4^{10}$

ב. $2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$

ג. $4a_4 + 4a_5 + 4a_6 + 4a_7 + 4a_8 + 4a_9 + 4a_{10}$

ד. $4 \cdot 7^2 a_7 + 4 \cdot 8^2 a_8 + 4 \cdot 9^2 a_9 + 4 \cdot 10^2 a_{10} + 4 \cdot 11^2 a_{11} + 4 \cdot 7^2 a_7$

ה. $1x^1 + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6 + 7x^7 + 8x^8$

ו. $na_5 + na_6 + na_7 + na_8 + na_9 + na_{10} + na_{11}$

ז. $4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n + 4n$

ח. $((-1)^2 + 1) + (0^2 + 1) + (1^2 + 1) + (2^2 + 1) + (3^2 + 1)$

ט. $(1^2 - x_2 - 4) + (2^2 - x_4 - 4) + (3^2 - x_6 - 4)$

2. א. $\sum_{k=0}^7 2^k$ ב. $\sum_{k=1}^{10} 2k$ ג. $\sum_{k=0}^9 (2k+1)$ ד. $\sum_{k=1}^7 k(k+1)$

ה. $\sum_{k=1}^{22} (2k-1)2k$ ו. $\sum_{k=1}^7 3k(k+1)$ ז. $\sum_{n=3}^{14} (2n-1)^2$

ח. $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n(n+1)}$ ט. $\sum_{k=1}^5 \frac{4k-2}{3^k}$ י. $\sum_{k=1}^4 \frac{4k}{5^{k-1}}$

3. א. 220 ב. 1650 ג. 255 ד. 9160 ה. 28 ו. 4545

4. א. $5 \cdot (2^{21} - 2) + \frac{4}{3}(4^{20} - 1)$ ב. $32 \cdot \frac{10(10^{11} - 1)}{10 - 1} + \frac{25(25^{11} - 1)}{25 - 1}$

ג. $2^{10} \left[\frac{4(4^{20} - 1)}{4 - 1} - \frac{4(4^9 - 1)}{4 - 1} \right]$

5. א. 2870 ב. 2856 ג. 2024 ד. 969

6. הוכחה.

7. א. $\frac{8(8+1)(2 \cdot 8+1)}{6} + 6 \cdot \frac{8(8+1)}{2} + 9 \cdot 8$ ב. $4^{18} \cdot \frac{16(16^{11} - 1)}{16 - 1}$

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 14 - אינדוקציה מתמטית

תוכן העניינים

- 220 1. שאלות העוסקות בתכונות התחלקות
- 223 2. סדרות
- 225 3. עצרת
- 226 4. שאלות שבהן האיבר הכללי מורכב ממספר מחוברים
- 227 5. שאלות העוסקות באינדוקציות עם איברים משתנים
- 228 6. שאלות העוסקות בהוכחת באי-שוויונים באינדוקציה
- 230 7. שאלות כוללות ומסכמות
- 232 8. מושג הסכימה וקתיבה מקוצרת של אינדוקציות

שאלות העוסקות בתכונות התחלקות:

סיכום כללי:

מבנה כללי של רישום הוכחה באינדוקציה:

בדיקה:

בדיקה נכונות האינדוקציה עבור $n=1$ (ולעיתים כדאי לבדוק גם עבור $n=2,3$).

הנחת האינדוקציה:

נניח כי עבור $n=k$ (טבעי כלשהו) כי טענת האינדוקציה נכונה.

הוכחת האינדוקציה:

נוכיח כי עבור $n=k+1$ טענת האינדוקציה מתקיימת.

סיכום:

לסיכום, הראנו כי הטענה נכונה עבור $n=1$ והראנו כי נכונות הטענה עבור $n=k$ גוררת את נכונותה עבור $n=k+1$, לפיכך, על פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

שאלות:

- (1) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $8^n - 3^n$ מתחלק ב-5 ללא שארית לכל n טבעי.
- (2) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $11^n - 4^n$ מתחלק ב-7 ללא שארית לכל n טבעי.
- (3) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $8 \cdot 7^n + 4^{n+2}$ מתחלק ב-24 ללא שארית לכל n טבעי.
- (4) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $5 \cdot 3^{2n} - 5^{n+1}$ מתחלק ב-20 ללא שארית לכל n טבעי.
- (5) a_n הוא האיבר במקום ה- n בסדרה החשבונית: $1, 3, 5, 7, \dots$ הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $2^{a_n} + 4$ מתחלק ב-12 ללא שארית לכל n טבעי הגדול מ-1.
- (6) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $n^2 + n$ מתחלק ב-2 ללא שארית לכל n טבעי.
- (7) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $n^3 + 5n$ מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.
- (8) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $3^n - 2n - 1$ מתחלק ב-4 ללא שארית לכל n טבעי.
- (9) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $9(9^n - 1) - 40n$ מתחלק ב-32 ללא שארית לכל n טבעי.
- (10) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^n + 5^n - 2^n(2^n + 1)$ מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.

(11) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^n + 2^{2n}$ מתחלק ב-11 ללא שארית לכל n טבעי אי זוגי.

(12) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $a^n - b^n$ מתחלק ב- $(a+b)$ ללא שארית לכל n טבעי זוגי.

(13) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $7^{n+2} + 1$ מותיר שארית 2 בחלוקתו ב-3 לכל n טבעי.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

סדרות:

סיכום כללי:

תזכורת:

- סדרה היא אוסף מספרים: a_1, a_2, \dots, a_n , כאשר n הוא מיקום האיבר בסדרה ו- a_n הוא ערך האיבר העומד במקום ה- n בסדרה.

○ סדרה כללית – סדרה שבה כל איבר מוגדר לפי מקומו בסדרה.

○ סכום n האיברים הראשונים בסדרה יסומן ב- S_n

והוא מקיים: $S_n = a_1 + \dots + a_n$.

- סדרה חשבונית – סדרת מספרים שבה ההפרש בין כל שני איברים סמוכים הוא גודל קבוע. נוסחת האיבר הכללי היא: $a_n = a_1 + d(n-1)$ כאשר d הפרש הסדרה.

○ סכום n האיברים הראשונים הוא: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n}{2}[2a_1 + d(n-1)]$.

- סדרה הנדסית – סדרת מספרים שבה המנה בין כל שני איברים סמוכים היא גודל קבוע. נוסחת האיבר הכללי היא: $a_n = a_1 q^{n-1}$ כאשר q היא מנת הסדרה.

○ סכום n האיברים הראשונים הוא: $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

שאלות:

14) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי

$$1+2+3+4+\dots+n = \frac{n}{2}(n+1) \quad \text{מתקיים:}$$

15) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי

$$4+7+10+13+\dots+(3n+1) = \frac{n}{2}(3n+5) \quad \text{מתקיים:}$$

16) נתונה סדרה שבה: $a_n = n(n+2)$

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $S_n = \frac{n}{6}(n+1)(2n+7)$

17) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$$

18) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{6}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{6}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{6}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}$$

19) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 9 + \dots + n \cdot 3^{n-1} = \frac{1}{4} [3^n (2n-1) + 1]$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

עצרת:

סיכום כללי:

תזכורת – מושג העצרת:

עצרת מוגדרת להיות מכפלת האיברים עד לערך הנקוב: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.
 מגדירים: $0! = 1$ ותמיד מתקיימים השוויונות: $n! = n \cdot (n-1)!$, $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$.

שאלות:

(20) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

(21) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1 \cdot 2!}{2} + \frac{2 \cdot 3!}{4} + \frac{3 \cdot 4!}{8} + \dots + \frac{n(n+1)!}{2^n} = \frac{(n+2)!}{2^n} - 2$$

(22) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$p! + \frac{(p+1)!}{1!} + \frac{(p+2)!}{2!} + \dots + \frac{(p+n-1)!}{(n-1)!} = \frac{(p+n)!}{(n-1)!(p+1)}$$

(23) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) \dots \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{n!}$$

(24) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{5}{1 \cdot 4} - \frac{11}{4 \cdot 7} + \frac{17}{7 \cdot 10} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} (6n-1)}{(3n-2)(3n+1)} = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות שבהן האיבר הכללי מורכב ממספר מחוברים:

שאלות:

(25) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1+2+3+4+\dots+2n=n(2n+1)$$

(26) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\dots+(2n)^2=\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$$

(27) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\dots+3n\cdot 2^{3n-1}=(3n-1)2^{3n}+1$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות העוסקות באינדוקציות עם איברים משתנים:

שאלות:

(28) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + \dots + (3n) = 2n(2n+1)$$

(29) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$(n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{n}{6}(2n+1)(7n+1)$$

(30) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) \left(1 - \frac{1}{n+3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$$

(31) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$(n+1)(n+2) \cdot \dots \cdot (2n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$$

(32) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות העוסקות בהוכחת באי-שוויונים באינדוקציה:

שאלות:

(33) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי הגדול מ-1 מתקיים:

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{n}{n+1}$$

(34) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

(35) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי הגדול מ-2 מתקיים:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}$$

(36) נתונה סדרה שבה: $a_n = n^n$. נגדיר: $T_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n$.

הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים: $T_n \leq n^{\frac{n}{2}(n+1)}$.

(37) נתון אי-השוויון: $2^n > n^2$. מצא את ה- n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה- n שמצאת.

(38) נתון אי-השוויון: $4^n > 5n^2 + 1$. מצא את ה- n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה- n שמצאת.

(39) נתון אי-השוויון: $n^3 - n < 5^{n-1}$. מצא את ה- n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה- n שמצאת.

(40) נתון אי-השוויון: $3^n + 4^n + 5^n < 6^n$. מצא את ה- n המינימלי שממנו מתקיים אי-השוויון לכל המספרים הטבעיים הגדולים ממנו והוכח באינדוקציה כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי החל מה- n שמצאת.

(41) נתון אי-השוויון : $n^n \geq n!$. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי.

(42) נתון אי-השוויון : $a^n + b^n < (a+b)^n$, $(a, b > 0)$. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי הגדול מ-1.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

שאלות כוללות ומסכמות:

שאלות:

$$(43) \text{ נתון השוויון: } 4+7+10+13+\dots = \frac{n}{2}(3n+5)$$

- א. מצא את האיבר במקום ה- n .
 ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.
 ג. חשב את הסכום: $37+40+43+\dots+85$.

$$(44) \text{ נתון השוויון: } \frac{2}{3} + \frac{6}{9} + \frac{10}{27} + \dots = 2 - \frac{2n+2}{3^n}$$

- (45) נתון השוויון: $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots = \frac{n}{4n+1}$
 א. מצא את האיבר במקום ה- n .
 ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

$$\text{ג. חשב את הסכום: } \frac{1}{25 \cdot 29} + \frac{1}{29 \cdot 33} + \frac{1}{33 \cdot 37} + \dots + \frac{1}{89 \cdot 93}$$

$$(46) \text{ נתון השוויון: } (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{n}{6}(2n+1)(7n+1)$$

- א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.
 ב. חשב באמצעות סעיף א' את הסכום: $26^2 + 27^2 + 28^2 + \dots + 48^2$.

$$(47) \text{ נתון השוויון: } 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$$

- א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.
 ב. הבע באמצעות n את הסכום: $4^2 + 6^2 + 8^2 + \dots + (4n)^2$.

(48) נתונים השוויונים הבאים:

$$\text{א. } 3n + (3n+1) + (3n+2) + \dots + 4n = \frac{7}{3}(n^2 + 3n - 1)$$

$$\text{ב. } 3n + (3n+1) + (3n+2) + \dots + 4n = n^2 + 11n - 5$$

$$\text{ג. } 3n + (3n+1) + (3n+2) + \dots + 4n = \frac{7n}{2}(n+1)$$

קבע איזה מהשוויונים נכון לכל n טבעי, והוכח אותו באינדוקציה.

$$(49) \text{ נתון השוויון: } n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + \dots + (3n) = an(2n+b)$$

- א. נתון כי השוויון נכון עבור $n=1$ ו- $n=2$. מצא את ערכי a ו- b .
 ב. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי השוויון מתקיים לכל n טבעי.

$$(50) \text{ נתון אי-השוויון: } \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}$$

- א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי הגדול מ-2.
 ב. הוכח באמצעות סעיף א' כי מתקיים: $\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{18} > \frac{1}{2}$

$$(51) \text{ נתון אי-השוויון: } n^2 < 2^n$$

- א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי אי-השוויון מתקיים לכל n טבעי הגדול מ-4.
 ב. הוכח באמצעות סעיף א' כי מתקיים: $5^2 \cdot 6^2 \cdot 7^2 \cdot 8^2 \cdot \dots \cdot 20^2 < 2^{200}$

$$(52) \text{ הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הסכום: } 9 + 27 + 81 + \dots + 3^{3n+1}$$

מתחלק ב-117 ללא שארית לכל n טבעי.

(53) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $n^3 + 5n$ מתחלק ב-6 ללא שארית לכל n טבעי.
 ב. נתון כי $a+b$ מתחלק ב-6 ללא שארית.
 הוכח כי $a^3 + b^3$ מתחלק ב-6 ללא שארית.

(54) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. הוכח את הטענה: אם ל- n טבעי מסוים $3^n + 5^n$ מתחלק ב-16 ללא שארית אז גם $3^{n+2} + 5^{n+2}$ מתחלק ב-16 ללא שארית.
 ב. האם מהטענה בסעיף א' נובע כי $3^n + 5^n$ מתחלק ב-16 ללא שארית עבור כל n טבעי אי-זוגי?
 ג. הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הביטוי $3^n + 5^n$ מתחלק ב-8 ללא שארית לכל n טבעי אי-זוגי.

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

מושג הסכימה וכתובה מקוצרת של אינדוקציות:

סיכום כללי:

סימון הסכימה (קרי: סיגמה) מוגדר באופן הבא: $\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

מקור הסימון נובע מהמילה Sum ומשמעו הוא סכימה של איברים המתחילים

בערך המצוין בתחתית הסימון $\left(\sum_{k=1}^n\right)$ עד לערך המצוין בחלקו העליון $\left(\sum_{k=1}^n\right)$.

דוגמאות:

$$\bullet \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$\bullet \sum_{k=3}^{12} k^2 = 3^2 + 4^2 + \dots + 12^2$$

$$\bullet \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{4n+1}$$

שאלות:

$$(1) \text{ הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

$$(2) \text{ הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$(3) \text{ הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{n}{4n+1}$$

$$(4) \text{ הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n 2^k = 2(2^n - 1)$$

$$(5) \quad \text{הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n \frac{3}{4^{k-1}} = 4 - \frac{1}{4^{n-1}}$$

$$(6) \quad \text{הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^{3n} k = 1 \frac{1}{2} n(3n+1)$$

$$(7) \quad \text{הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^{3n} (4k-1) = 3n(6n+1)$$

$$(8) \quad \text{הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n (n+k) = \frac{n}{2}(3n+1)$$

$$(9) \quad \text{הוכח באינדוקציה כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים: } \sum_{k=1}^n 3^{n+k} = \frac{3^{n+1}(3^n-1)}{2}$$

תשובות סופיות:

שאלות הוכחה.

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 15 - מבוא לתורת הקבוצות

תוכן העניינים

234 1. כללי

כללי:

סיכום כללי:

הגדרות יסודיות:

- גרירה חד כיוונית \Rightarrow : $A \Rightarrow B$ פירושו: אם A מתקיים אז גם B מתקיים.
- גרירה דו-כיוונית \Leftrightarrow (אם ורק אם): $A \Leftrightarrow B$ פירושו: $A \Rightarrow B$ וגם $B \Rightarrow A$.
- הסימן 'או': \vee .
- הסימן 'וגם': \wedge .

קבוצה, איבר של קבוצה ושייכות לקבוצה:

- קבוצה היא אוסף של עצמים.
- כל עצם בקבוצה נקרא איבר של הקבוצה.
- שייכות לקבוצה:
 - על מנת לציין שהאיבר a שייך לקבוצה A נרשום $a \in A$.
 - על מנת לציין שהאיבר a אינו שייך לקבוצה A נרשום $a \notin A$.

שוויון בין קבוצות:

- שתי קבוצות הן שוות אם יש להן בדיוק את אותם איברים.
- פורמלית שוויון בין קבוצות מוגדר באופן הבא: $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

הקבוצה ריקה:

קבוצה שאין בה כלל איברים נקראת הקבוצה הריקה ומסומנת ב- \emptyset , כלומר $\emptyset = \{ \}$.

קבוצה סופית ואינסופית:

- קבוצה תקרא סופית אם מספר האיברים בה סופי.
- קבוצה תקרא אינסופית אם מספר האיברים בה אינסופי.

עוצמה של קבוצה:

מספר האיברים של קבוצה A נקרא גם העוצמה של הקבוצה ומסומן $|A|$.

תת-קבוצה:

אם קבוצה A מוכלת בקבוצה B , נסמן זאת: $A \subseteq B$.

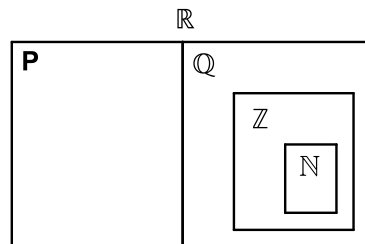
תמיד מתקיים:

- $A \subseteq A$
- $\emptyset \subseteq A$

עבור שוויון קבוצות נדרוש: $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$ או $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

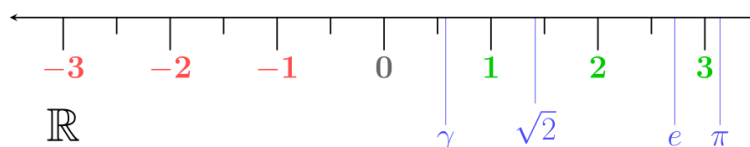
קבוצות מספרים מיוחדות:

- קבוצת המספרים הטבעיים: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- קבוצת המספרים השלמים: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$
- קבוצת המספרים הרציונאליים: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$
- קבוצת המספרים האי-רציונאליים (אין סימון ספציפי לקבוצה זו, למעט P).
- קבוצת המספרים הממשיים: \mathbb{R} (כוללת את \mathbb{Q} ואת P).



ציר המספרים:

את קבוצת כל המספרים הממשיים ניתן לתאר על ידי הישר הממשי שהוא הישר שנקודותיו הן המספרים הממשיים:



קטעים על ציר המספרים:

| סימון קטעים | סימון קבוצות | תיאור מילולי |
|----------------|---------------------------------|--|
| (a, b) | $\{x \mid a < x < b\}$ | הקטע הפתוח מ- a ל- b לא כולל נקודות הקצה |
| $[a, b]$ | $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ | הקטע הסגור מ- a ל- b וכולל נקודות קצה |
| $[a, b)$ | $\{x \mid a \leq x < b\}$ | קטע חצי סגור וחצי פתוח, מכיל את a ולא את b |
| $(a, b]$ | $\{x \mid a < x \leq b\}$ | קטע חצי סגור וחצי פתוח, מכיל את b ולא את a |
| (a, ∞) | $\{x \mid a < x < \infty\}$ | הקרן הפתוחה מ- a עד ∞ ללא a |
| $[a, \infty)$ | $\{x \mid a \leq x < \infty\}$ | הקרן הסגורה מ- a עד ∞ כולל a |
| $(-\infty, b)$ | $\{x \mid -\infty < x < b\}$ | הקרן הפתוחה מ- $-\infty$ עד b ללא b |
| $(-\infty, b]$ | $\{x \mid -\infty < x \leq b\}$ | הקרן הסגורה מ- $-\infty$ עד b כולל b |

קבוצת החזקה של קבוצה נתונה:

קבוצת כל התת-קבוצות של קבוצה נתונה נקראת קבוצת החזקה של A ומסומנת $P(A)$.

איחוד וחיתוך קבוצות:

- איחוד קבוצות A ו- B פירושו הגדרת קבוצה חדשה שמכילה את כל האיברים של הקבוצות עצמן ומסומנת: $A \cup B$.
- חיתוך קבוצות A ו- B פירושו הגדרת קבוצה חדשה שמכילה את האיברים המשותפים של הקבוצות עצמן ומסומנת: $A \cap B$.

| | תכונות החיתוך | תכונות האיחוד |
|------------|---|---|
| | $A \cap B = B \cap A$ | $A \cup B = B \cup A$ |
| | $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ | $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ |
| $A \cup B$ | $A \cap A = A$ | $A \cup A = A$ |
| | $A \cap \phi = \phi$ | $A \cup \phi = A$ |
| | | $A \subseteq A \cup B$ |

הדיסטריביוטיביות של החיתוך מעל האיחוד ושל האיחוד מעל החיתוך:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

הפרש קבוצות:

ההפרש של שתי קבוצות A ו- B המסומן $A - B$ הוא קבוצה שאיבריה הם

כל איברי A שאינם איברי B , כלומר: $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.

משלים של קבוצה:

ההפרש $U - A$ מסומן ב- A^c או ב- A' ונקרא **המשלים** של A כאשר U היא הקבוצה האוניברסלית.

כללי דה-מורגן:

$$\bullet (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$\bullet (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

דיאגרמת וון:

תיאור גרפי של קבוצות ויחסים ביניהם.

שאלות:

1) רשום את הטענות הבאות במילים ובדוק האם הן נכונות:

א. $\forall x \forall y : (x + y)^2 > 0$

ב. $\forall x \exists y : (x + y)^2 > 0$

ג. $\forall x \forall y \exists z : xz = \frac{y}{4}$

ד. $\forall x > 0, \forall y > 0, \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

ה. $\forall n \exists k, n^3 - n = 6k$ (k ו- n טבעיים).

הערה: בסעיף זה הטבעיים כוללים את 0.

2) רשום כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון אי-השוויון $x^2 > 4$, הוא $x > 2$ או $x < -2$.

ב. אי השוויון $x^2 + 4 > 0$, מתקיים לכל x .

ג. לכל מספר טבעי n , המספר $n^3 - n$ מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר x , $|x| < 1$ אם ורק אם $-1 < x < 1$.

3) רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים,

ואת מספר איברי הקבוצה:

א. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}$

ב. $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16\}$

ג. $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16\}$

ד. $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+4)(x-1) < 0\}$

ה. $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 + x^2 - 2x = 0\}$

ו. $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 4\}$

4) הגדר את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן בצורה:

$A = \{x \mid x \text{ מקיים תכונה מסוימת}\}$

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האי-זוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 1, 2, 3, 4.

(5) ציין אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו:

א. $A = \{11, 13, 17, 19\}$

ב. $B = \{x \mid 10 < x < 20, x \text{ מספר ראשוני}\}$

ג. $C = \{11, 11, 17, 13, 19\}$

ד. $D = \{x \mid x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$

ה. $E = \{x \mid x = 2m, m \text{ שלם זוגי}\}$

(6) נתונה הקבוצה הבאה: $A = \{1, 2, \{2\}, \{2, 5\}, 4, \{2, 4\}\}$

מי מבין הטענות הבאות נכונה:

ג. $\{2\} \in A$

ב. $2 \in A$

א. $5 \in A$

ו. $\emptyset \in A$

ה. $\{\{2\}\} \subseteq A$

ד. $\{2\} \subseteq A$

ט. $\{2, 4\} \subseteq A$

ח. $\{2, \{2\}\} \subseteq A$

ז. $\emptyset \subseteq A$

יב. $\{2, 5\} \subseteq A$

יא. $\{\{2, 4\}\} \in A$

י. $\{2, 4\} \in A$

יד. $\{1, 4\} \in A$

יג. $\{2, 5\} \in A$

(7) מצא שתי קבוצות, A ו- B , המקיימות:

א. $A \in B$

ב. $A \subseteq B$

(8) נתונות הקבוצות הבאות:

$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{4, 6, 8, 10\}$, $C = \{3, 5, 7, 9\}$, $D = \{6, 7, 8\}$, $E = \{7, 8\}$

קבע איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה X :

א. $X \subseteq A$ וגם $X \not\subseteq D$

ב. $X \subseteq D$ וגם $X \not\subseteq C$

ג. $X \subseteq E$ וגם $X \not\subseteq A$

(9) הוכח: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

10 נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{4, 6, 8, 10\}, C = \{3, 5, 7, 9\}, D = \{6, 7, 8\}$$

רשום את :

א. $A \cup B$ ב. $A \cap B$ ג. $(A \cup B) \cap C$

ד. $(B \cup C) \cap (B \cup D)$ ה. $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

11 נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = [1, 4), B = (-2, 1), C = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}, D = \{x \mid 2^x = 0\}$$

רשום את :

א. $A \cup B$ ב. $A \cap B$ ג. $(A \cup B) \cap C$

ד. $(B \cup C) \cap (B \cup D)$ ה. $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

12 נתונות 3 קבוצות : $A = \{4, 5, 6, 7, 8\}, B = \{5, 6, 7, 8, 9\}, C = \{4, 5, 6, 10\}$

א. חשב את $(A - B) - C$.

ב. חשב את $A - (B - C)$.

13 נתון : $U = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}, A = \{12, 15, 18\}, B = \{13, 15, 17\}$

הדגם את כלל דה מורגן $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

14 הוכח את כלל דה מורגן הראשון $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

15 מצא את הקבוצה המשלימה, ביחס ל- \mathbb{R} , של הקבוצות הבאות :

א. $A = [1, \infty)$

ב. $B = (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$

ג. $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 > 0\}$

ד. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| < 2 \vee x > 4\}$

(16) הצג באמצעות דיאגרמת וון את הקבוצות הבאות:

א. $A \cap B$ ב. $A \cup B$

ג. A^c ד. $A \cap B^c$

ה. $A^c \cap B$ ו. $A \cup B^c$

ז. $A^c \cup B$ ח. $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$

ט. $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$

(17) נתונה הקבוצה: $A = \{\phi, 4, \{4\}\}$

רשמו את $P(A)$.

(18) הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

א. לכל קבוצה A מתקיים $A \subseteq P(A)$.

ב. לכל קבוצה A מתקיים $A \notin P(A)$.

(19) הוכיחו כי: $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$.

תשובות סופיות:

- (1) א. לכל x ולכל y מתקיים $(x+y)^2 > 0$. הטענה אינה נכונה.
 ב. לכל x קיים y , כך ש- $(x+y)^2 > 0$. הטענה אינה נכונה.
 ג. לכל x ולכל y קיים z כך ש- $xz = \frac{y}{4}$. הטענה אינה נכונה.
 ד. לכל x חיובי ולכל y חיובי מתקיים $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$. הטענה נכונה.
 ה. לכל n טבעי המספר $n^3 - n$ מתחלק ב-6. הטענה נכונה.
- (2) א. $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2 \vee x < -2$ ב. $\forall x: x^2 + 4 > 0$
 ג. $\forall n \exists k: n^3 - n = 6k$ ד. $\forall x: |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$
- (3) א. $A = (-4, 4)$, בקבוצה אינסוף איברים.
 ב. $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, בקבוצה 7 איברים.
 ג. $C = \{1, 2, 3\}$, בקבוצה 3 איברים.
 ד. $D = \{-3, -2, -1, 0\}$, בקבוצה 4 איברים.
 ה. $E = \{0, 1\}$, בקבוצה 2 איברים.
 ו. $F = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, בקבוצה 9 איברים.
- (4) א. $A = \{x \mid x = 2n - 1, n \in \mathbb{N}\}$ ב. $B = \{11, 13, 17, 19\}$
 ג. $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4^2, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ ד. $D = \{1, 4, 9, 16\}$
- (5) הקבוצות A, B ו- C שוות זו לזו, והקבוצות D ו- E שוות זו לזו.
- (6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.
 ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.
 יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.
- (7) $A = \{1, 2\}$, $B = \{\{1, 2\}, 1, 2\}$
- (8) א. A, C ב. E, D ג. לא קיימת קבוצה כזאת.
- (9) הוכחה.

$$A \cap B = \{4, 6, 8\} \quad \text{ב.}$$

$$(B \cup C) \cap (B \cup D) = \{4, 6, 7, 8, 10\} \quad \text{ד.}$$

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{ב.}$$

$$(B \cup C) \cap (B \cup D) = (-2, 1) \quad \text{ד.}$$

$$A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \quad \text{א. (10)}$$

$$(A \cup B) \cap C = \{3, 5, 7, 9\} \quad \text{ג.}$$

$$(B \cap C) \cup (B \cap D) = \{6, 8\} \quad \text{ה.}$$

$$A \cup B = (-2, 4) \quad \text{א. (11)}$$

$$(A \cup B) \cap C = (0, 4) \quad \text{ג.}$$

$$(B \cap C) \cup (B \cap D) = [0, 1) \quad \text{ה.}$$

$$\phi \quad \text{א. (12)} \quad \text{ב. } \{4, 5, 6\}$$

(13) ללא פתרון.

(14) הוכחה.

$$A^c = (-\infty, 1) \quad \text{א. (15)} \quad B^c = [1, 4] \quad \text{ב.} \quad C^c = [1, 4] \quad \text{ג.} \quad D^c = (-\infty, 1] \cup [3, 4] \quad \text{ד.}$$

(16) ראו סרטון.

$$P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{4\}, \{\{4\}\}, \{\emptyset, 4\}, \{4, \{4\}\}, \{\emptyset, \{4\}\}, \{\emptyset, 4, \{4\}\}\} \quad \text{(17)}$$

(18) הוכחה.

(19) הוכחה.

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

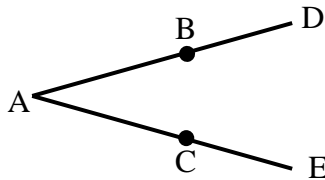
פרק 16 - מבוא לגאומטריה של המישור

תוכן העניינים

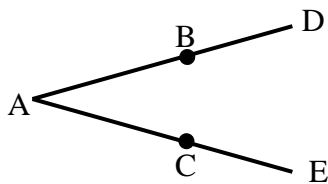
1. הגדרות כלליות (ללא ספר)
- 244 2. חיבור וחסור קטעים
- 245 3. חישובי זוויות וחיבור וחסור זוויות
- 247 4. זוויות קדקודיות וזוויות צמודות
- 249 5. זוויות בין ישרים מקבילים

חיבור וחיסור קטעים:

שאלות:

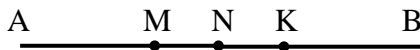


- (1) באיור שלפניך נתון: $AB = AC$, $BD = CE$.
 הוכח: $AD = AE$.



- (2) באיור שלפניך נתון: $AD = AE$, $AB = AC$.
 הוכח: $BD = CE$.

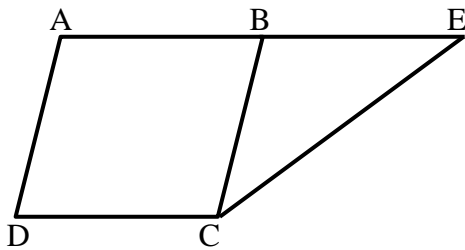
- (3) הנקודות A, M, N, K, B נמצאות על ישר אחד.



- נתון כי: $AM = KB$, $MN = NK$.
 הוכח: $AN = BN$.

- (4) בסרטוט שלפניך נתון כי: $BC = AB$, $BE + BC = 2AB$.

הוכח: $AB = BE$.

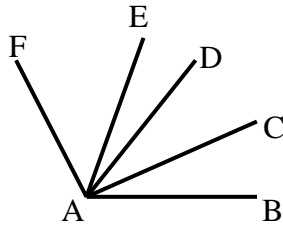


תשובות סופיות:

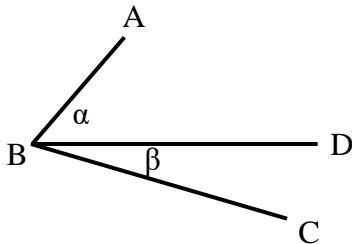
- (1) שאלת הוכחה.
 (2) שאלת הוכחה.
 (3) שאלת הוכחה.
 (4) שאלת הוכחה.

חישובי זוויות וחיבור וחסור זוויות:

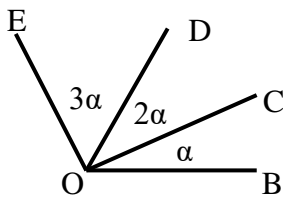
שאלות:



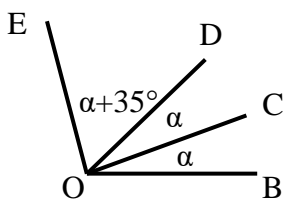
- (5) נתון: $\angle CAB = \angle DAC$, $\angle FAE = 2 \cdot \angle EAD$,
 וכן: $\angle EAB = 80^\circ$, $\angle FAD = 60^\circ$.
 חשב את הזוויות הבאות:
 $\angle FAB$, $\angle EAC$, $\angle CAB$



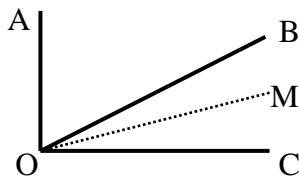
- (6) באיור שלפניך נתון: $\angle ABC = 69^\circ$.
 נתון כי: $\alpha = 2\beta$ (זוויות סמוכות).
 מצא את α ואת β .



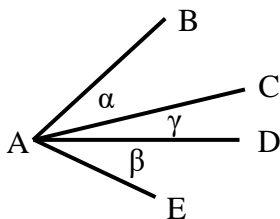
- (7) באיור שלפניך מספר קרניים היוצאים מהנקודה O.
 הנתונים הם: $\angle EOB = 138^\circ$.
 חשב את הזוויות הבאות:
 $\angle EOD$, $\angle DOC$, $\angle COB$



- (8) באיור שלפניך נתון: $\angle EOB = 110^\circ$.
 שאר הנתונים מופיעים בתרשים.
 חשב את הזוויות הבאות:
 $\angle EOC$, $\angle DOC$



- (9) נתון האיור הבא ובו: $\angle AOC = 90^\circ$.
 OM חוצה את זווית BOC.
 מתקיים: $\angle AOB = 3\angle MOC$.
 חשב את: $\angle AOM$, $\angle BOM$



- (10) בסרטוט שלפניך נתון: $\alpha = \beta$.
 הוכח כי: $\angle BAD = \angle EAC$.

תשובות סופיות:

$$\angle FAB = 120^\circ, \angle EAC = 50^\circ, \angle CAB = 30^\circ \quad (5)$$

$$\alpha = 46^\circ, \beta = 23^\circ \quad (6)$$

$$\angle BOC = 23^\circ, \angle COD = 46^\circ, \angle DOE = 69^\circ \quad (7)$$

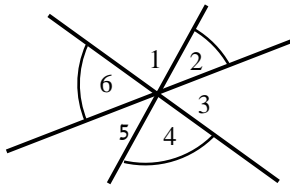
$$\angle EOC = 85^\circ, \angle DOC = 25^\circ \quad (8)$$

$$\angle AOM = 72^\circ, \angle BOM = 18^\circ \quad (9)$$

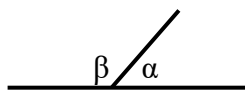
$$(10) \text{ שאלת הוכחה.}$$

זוויות קדקודיות וזוויות צמודות:

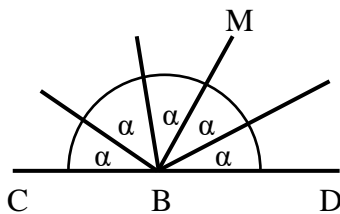
שאלות:



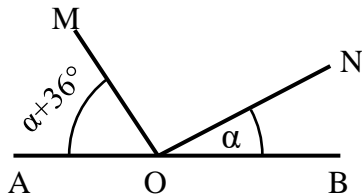
- 11) חשב את סכום הזוויות הבאות (נמק):
 $\sphericalangle 2 + \sphericalangle 4 + \sphericalangle 6$



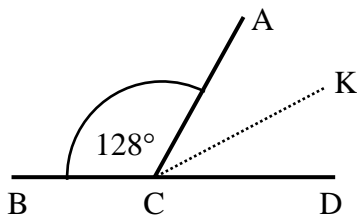
- 12) באיור שלפניך הזוויות α ו- β הן זוויות צמודות.
 ידוע כי: $\alpha = 63^\circ$.
 מצא את זווית β .



- 13) באיור שלפניך הזווית CBD היא שטוחה.
 כל הזוויות שוות ל- α .
 א. חשב את α .
 ב. חשב את זווית CBM.



- 14) בסרטוט שלפניך ידוע:
 הזווית AOB היא שטוחה.
 נתון: $\alpha = 27^\circ$.
 הוכח כי: $MO \perp NO$.



- 15) הזוויות $\sphericalangle ACD$ ו- $\sphericalangle ACB$ הן צמודות.
 ידוע כי CK חוצה זווית ACD.
 כמו כן: $\sphericalangle ACB = 128^\circ$.
 חשב את זווית BCK.

תשובות סופיות:

(11) 180° .

(12) $\beta = 117^\circ$.

(13) א. $\alpha = 36^\circ$. ב. $\sphericalangle CBM = 108^\circ$.

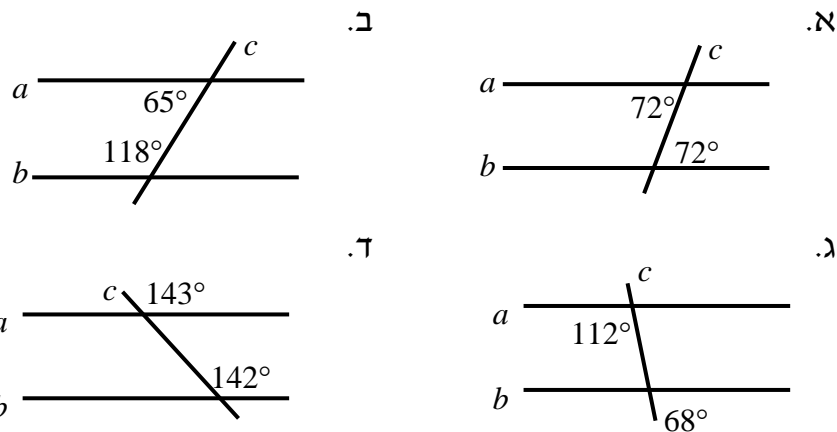
(14) שאלת הוכחה.

(15) $\sphericalangle BCK = 154^\circ$.

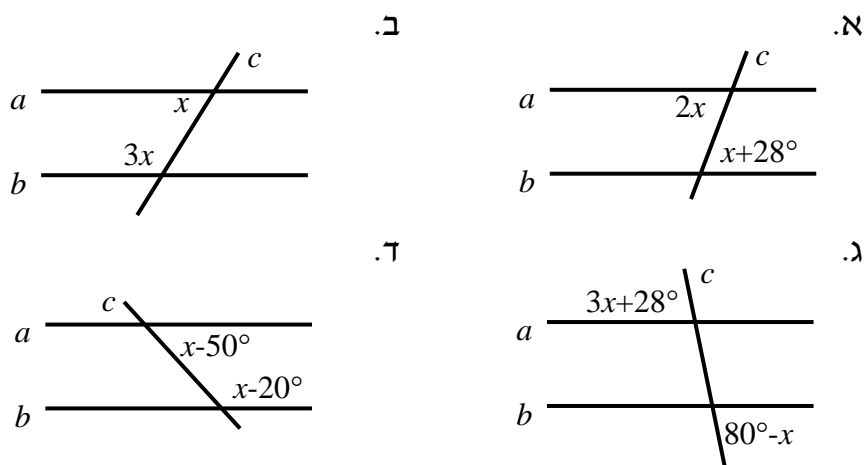
זוויות בין ישרים מקבילים:

שאלות:

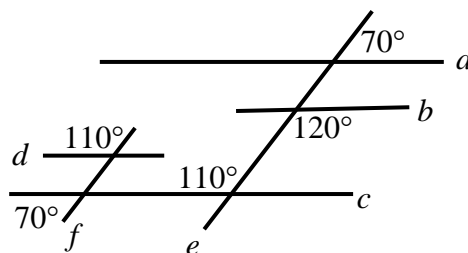
16) קבע בכל מקרה האם הישרים a ו- b מקבילים או שלא. נמק.

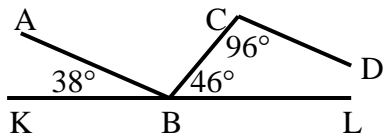


17) הישרים a ו- b מקבילים. מצא את x בכל אחד מהמקרים הבאים:

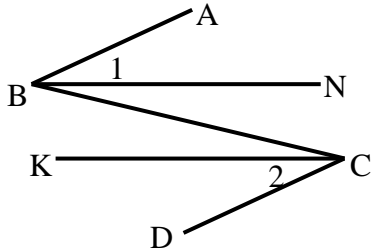


18) מצא את זוגות הישרים המקבילים בסרטוט הבא. נמק.

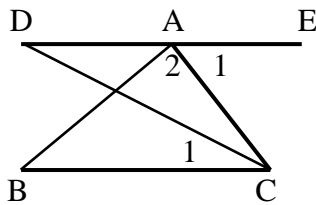




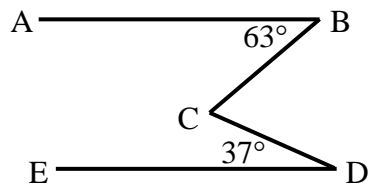
19 בסרטוט שלפניך נתון כי KL הוא קו ישר.
שאר הזוויות מופיעות בתרשים.
הוכח כי: $AB \parallel CD$.



20 באיור שלפניך נתון כי:
 $\angle B_1 = \angle C_2$, $\angle ABC = \angle BCD$
הוכח כי: $BN \parallel CK$.



21 באיור שלפניך מופיע קטע ישר DE.
מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB ו-AC.
מחברים את BC וידוע כי $BC \parallel DE$.
מעבירים את CD – חוצה זווית C.
נתון: $\angle A_1 = 68^\circ$, $\angle A_2 = 85^\circ$.
א. חשב את הזווית $\angle C_1$.
ב. חשב את הזווית $\angle B$.



22 בסרטוט שלפניך נתון:
 $\angle D = 37^\circ$, $\angle B = 63^\circ$, $AB \parallel DE$.
חשב את גודל הזווית BCD.

תשובות סופיות:

16) א. כן ב. לא ג. כן ד. לא.

17) א. 28° ב. 45° ג. 13° ד. 125° .

18) $a \parallel c \parallel d, e \parallel f$.

19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

21) א. 34° ב. 27° .

22) $\sphericalangle BCD = 100^\circ$.

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 17 - גיאומטריה אוקלידית - משולשים

תוכן העניינים

| | |
|-----|----------------------------------|
| 252 | 1. הגדרות כלליות |
| 254 | 2. זוויות במשולשים |
| 257 | 3. משולש שווה שוקיים ושווה צלעות |
| 259 | 4. חפיפת משולשים |
| 265 | 5. זווית חיצונית במשולש |
| 266 | 6. משולש ישר זווית |
| 269 | 7. קטע אמצעים במשולש |
| 271 | 8. מפגש תיכונים במשולש |

הגדרות כלליות:

סוגי משולשים:

ניתן למיין את המשולשים לפי זוויות או לפי צלעות.
 לפי זוויות:

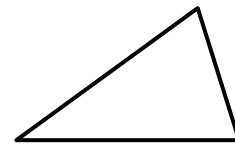
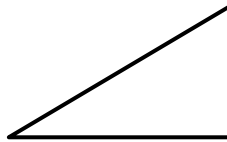
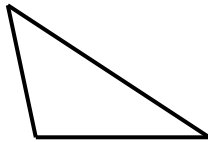
1. משולש חד זווית – משולש שכל זוויותיו חדות.
2. משולש ישר זווית – משולש בעל זווית ישרה.
3. משולש קהה זווית – משולש בעל זווית קהה.

לפי צלעות:

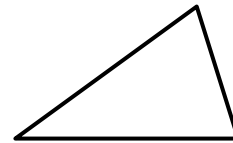
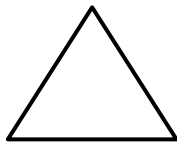
4. משולש שונה צלעות – משולש שבו כל הצלעות שונות באורכן.
5. משולש שווה שוקיים – משולש שבו שתי צלעות שוות.
6. משולש שווה צלעות – משולש שבו כל הצלעות שוות באורכן.

איורים לכל מקרה לפי המספרים:

1. משולש חד זווית: 2. משולש ישר זווית: 3. משולש קהה זווית:



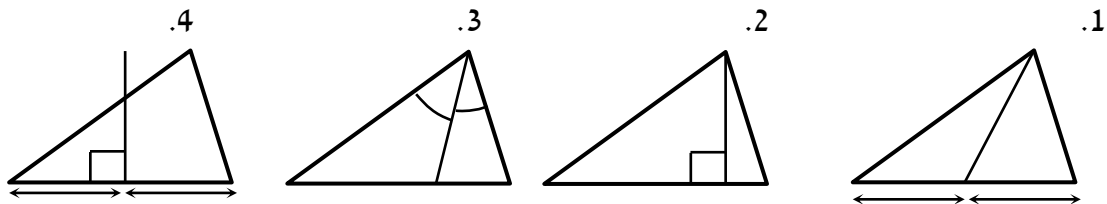
4. משולש שונה צלעות: 5. משולש שווה שוקיים: 6. משולש שווה צלעות:



קטעים מיוחדים במשולשים:

1. תיכון – קטע היוצא מקדקוד לצלע שממולו וחוצה אותה.
2. גובה – קטע היוצא מקדקוד לצלע שממולו ומאונך לה.
3. חוצה זווית – קטע היוצא מקדקוד וחוצה את הזווית שממנה הוא יוצא.
4. אנך אמצעי – קטע היוצא מאמצע צלע ומאונך לה.

איורים לכל מקרה לפי המספרים:



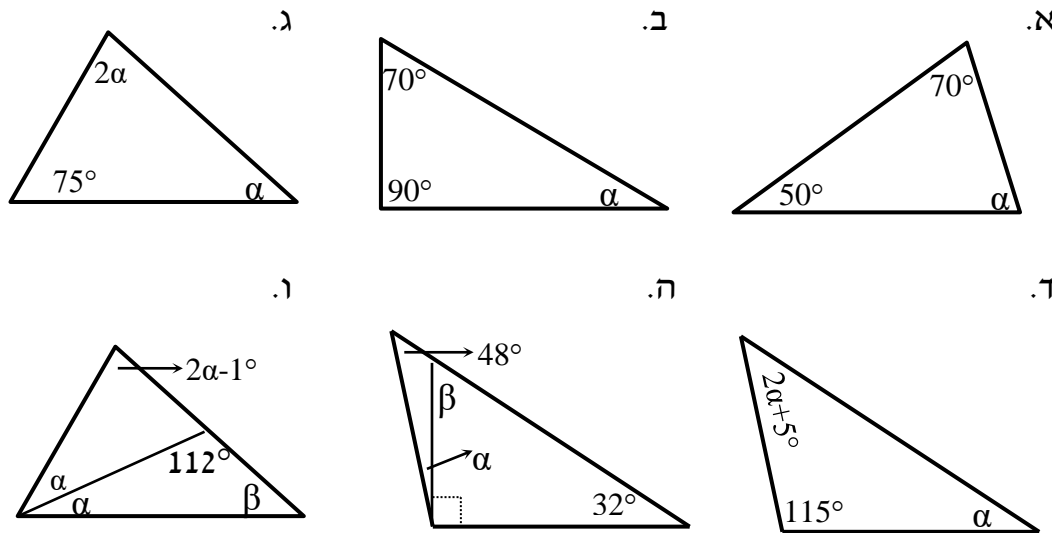
משפטים כלליים במשולשים:

- סכום הזוויות במשולש הוא 180° .
- סכום שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.
- במשולש מול הזווית הגדולה נמצאת הצלע הגדולה ולהפך.
- במשולש מול הזווית הקטנה נמצאת הצלע הקטנה ולהפך.
- במשולש מול זוויות שוות נמצאות צלעות שוות ולהפך.

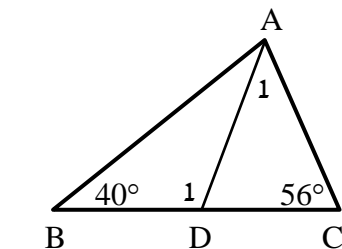
זוויות במשולשים:

שאלות:

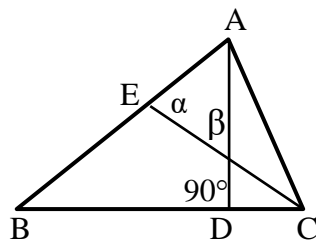
(1) חשב את הזוויות בכל אחד מהמשולשים שלפניך:



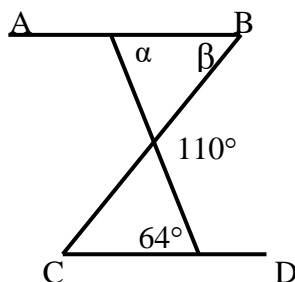
(2) במשולש שלפניך נתון AD חוצה זווית A.
נתון: $\angle B = 40^\circ$, $\angle C = 56^\circ$.
חשב את הזוויות $\angle A_1$, $\angle D_1$.



(3) נתון משולש ABC ובו AD גובה לצלע BC.
 $\angle D = 90^\circ$ הקטע CE חוצה זווית C.
כמו כן: $\alpha = 75^\circ$, $\beta = 63^\circ$.
חשב את זוויות המשולש ABC.

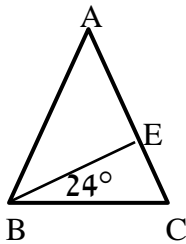
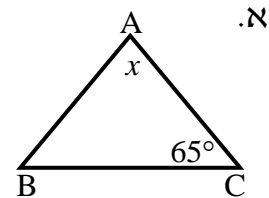
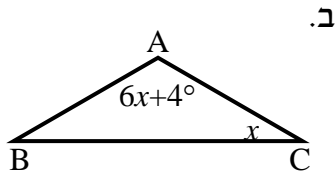


(4) בסרטוט שלפניך נתון: $AB \parallel CD$.
מצא את הזוויות α ו- β .



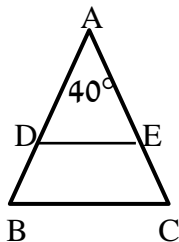
(5) שלוש זוויות המשולש מתייחסות זו לזו כמו: 1:2:6.
חשב את זוויות המשולש.

- 6 בסרטטים שלפניך נתונים משולשים שווי שוקיים ($AB = AC$) שאחת מזוויותיהם נתונה. מצא את הגודל x בכל סרטוט.

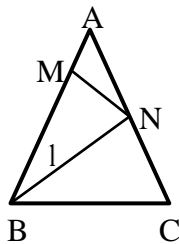


- 7 הגובה לשוק המשולש שווה השוקיים ABC , ($AB = AC$), יוצר זווית בת 24° עם הבסיס BC . מצא את זוויות המשולש ABC .

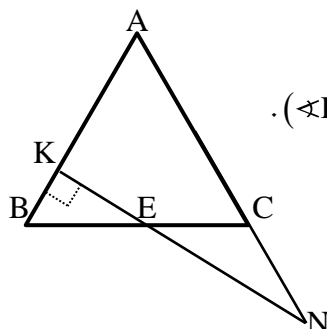
- 8 חשב את זוויות המשולשים בכל אחד מהמקרים הבאים:
- א. במשולש שווה שוקיים, זווית הבסיס גדולה פי ארבעה מזווית הראש. מצא את זוויות המשולש.
- ב. במשולש שווה שוקיים, זווית הבסיס גדולה ב- 12° מזווית הראש. מצא את זוויות המשולש.



- 9 באיור שלפניך נתון: $AD = AE$, $AB = AC$, $\angle A = 40^\circ$.
- א. חשב את הזוויות: $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, $\angle E$.
- ב. הוכח: $DE \parallel BC$.



- 10 באיור שלפניך נתון: $AB = AC$. מעבירים את הקטעים BN ו- MN כך שמתקיים: $BM = BN = BC$. נתון בנוסף: $\angle A = 32^\circ$. חשב את זוויות: $\angle B_1$, $\angle ANM$.



- 11 משולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$). בנקודה K כלשהי על AB מעלים אנך ל- AB ($\angle K = 90^\circ$). אנך זה חותך את BC בנקודה E ואת המשך AC בנקודה N . מתקיים: $CE = CN$. חשב את זוויות המשולש ABC .

תשובות סופיות:

- (1) א. $\alpha = 60^\circ$ ב. $\alpha = 20^\circ$ ג. $\alpha = 35^\circ$ ד. $\alpha = 20^\circ$
 ה. $\alpha = 10^\circ, \beta = 58^\circ$ ו. $\alpha = 37\frac{2}{3}^\circ, \beta = 30\frac{1}{3}^\circ$
- (2) $\sphericalangle A_1 = 42^\circ, \sphericalangle D_1 = 98^\circ$
- (3) $\sphericalangle A = 78^\circ, \sphericalangle B = 48^\circ, \sphericalangle C = 54^\circ$
- (4) $\alpha = 64^\circ, \beta = 46^\circ$
- (5) $20^\circ, 40^\circ, 120^\circ$
- (6) א. $x = 50^\circ$ ב. $x = 22^\circ$
- (7) $\sphericalangle A = 48^\circ, \sphericalangle B = \sphericalangle C = 66^\circ$
- (8) א. $20^\circ, 80^\circ, 80^\circ$ ב. $52^\circ, 64^\circ, 64^\circ$
- (9) א. $\sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = \sphericalangle E = 70^\circ$ ב. שאלת הוכחה
- (10) א. $\sphericalangle B_1 = 42^\circ, \sphericalangle ANM = 37^\circ$
- (11) $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 60^\circ$

משולש שווה שוקיים ושווה צלעות:

סיכום כללי:

משפטים במשולש שווה שוקיים:

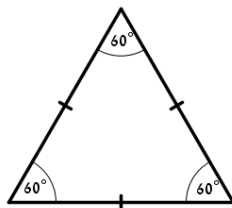
- במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות זו לזו. (משפט הפוך) משולש שבו שתי זוויות שוות הוא משולש שווה שוקיים.
- במשולש שווה שוקיים חוצה זווית הראש, הגובה לבסיס והתיכון לבסיס מתלכדים. (משפט הפוך) משולש שבו חוצה זווית הוא גם גובה או חוצה זווית הוא גם תיכון או גובה הוא גם תיכון הוא משולש שווה שוקיים.

משפטים במשולש שווה צלעות:

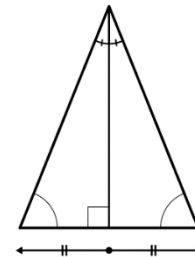
- במשולש שווה צלעות כל הזוויות שוות 60° . (משפט הפוך) משולש שבו כל הזוויות שוות הוא משולש שווה צלעות.

איורים:

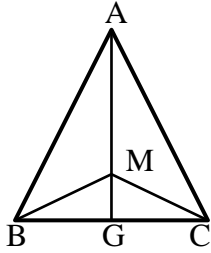
משפט במשולש שווה צלעות



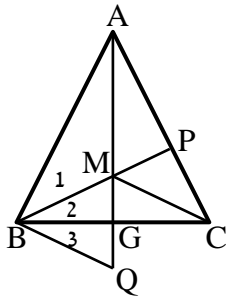
משפט במשולש שווה שוקיים



שאלות:



- 12** המשולש ABC שבציור הוא שווה שוקיים ($AB=AC$).
 AG חוצה את זווית $\sphericalangle A$.
 M היא נקודה כלשהי על AG.
 הוכח כי: $BM = CM$.



- 13** המשולש ABC שבציור הוא שווה שוקיים ($AB=AC$).
 AG ו-BP חוצים את הזוויות $\sphericalangle A$ ו- $\sphericalangle ABC$ בהתאמה.
 הנקודה Q נמצאת על המשך AG.
 נתון: $GM = GQ$.
 הוכח: $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle B_3$.

תשובות סופיות:

- 12** שאלת הוכחה.
13 שאלת הוכחה.

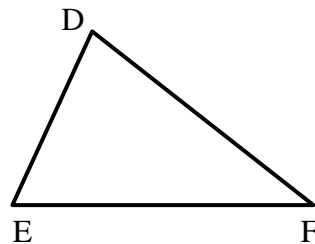
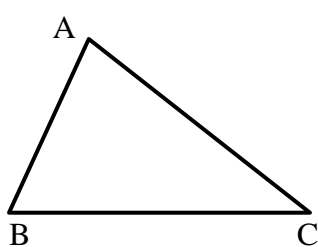
חפיפת משולשים:

סיכום כללי:

הגדרה:

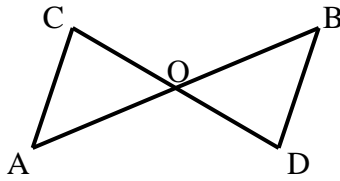
משולשים חופפים הם משולשים ששווים זה לזה בכל צלעותיהם ובכל זוויותיהם בהתאמה.

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF \Leftrightarrow \begin{cases} AB = DE, AC = DF, BC = EF \\ \sphericalangle A = \sphericalangle D, \sphericalangle B = \sphericalangle E, \sphericalangle C = \sphericalangle F \end{cases} \text{ סימון מתמטי:}$$

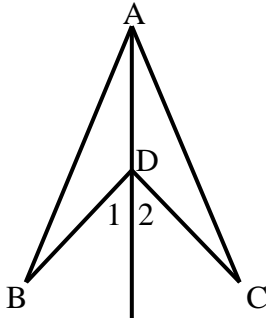


משפטי החפיפה:

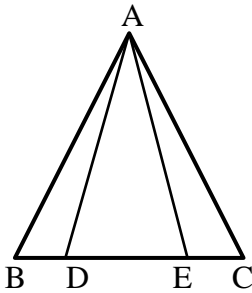
- משפט חפיפה צלע-זווית-צלע (צ.ז.צ.):
אם בין שני משולשים שוות שתי צלעות והזווית שביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.
- משפט חפיפה זווית-צלע-זווית (ז.צ.ז.):
אם בין שני משולשים שוות שתי זוויות והצלע שביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.
- משפט חפיפה צלע-צלע-צלע (צ.צ.צ.):
אם בין שני משולשים שוות שלוש צלעות בהתאמה אז המשולשים חופפים.
- משפט חפיפה צלע-צלע-והזווית הגדולה (צ.צ.ז):
אם בין שני משולשים שוות שתי צלעות והזווית שמול הצלע הגדולה מביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.

שאלות:**שאלות העוסקות במשפט חפיפה צלע-זווית-צלע:**

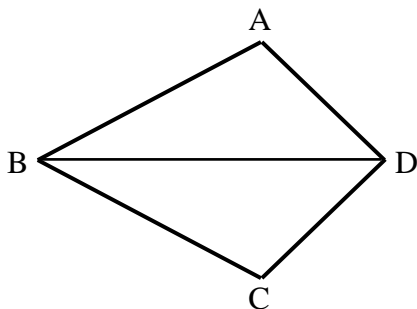
- 14) באיור שלפניך הקטעים AB ו-CD חוצים זה את זה בנקודה O.
 הוכח: $\triangle ACO \cong \triangle BDO$.



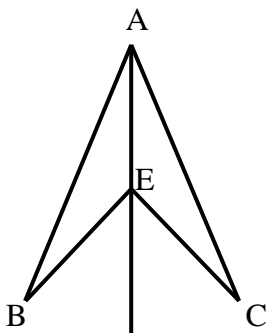
- 15) באיור שלפניך נתון: $BD = CD$.
 כמו כן: $\angle D_1 = \angle D_2$.
 הוכח: $\triangle ABD \cong \triangle ACD$.



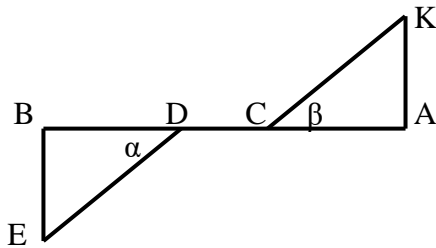
- 16) בסרטוט שלפניך נתון:
 $AB = AC$, $\angle B = \angle C$, $BE = CD$.
 הוכח: $\triangle ABD \cong \triangle ACE$.

שאלות העוסקות במשפט חפיפה זווית-צלע-זווית:

- 17) במרובע ABCD נתון כי BD חוצה את זוויות B ו-D.
 הוכח: $\triangle ABD \cong \triangle CBD$.



- 18) בסרטוט שלפניך נתון:
 AE חוצה את הזוויות BAC ו-BEC.
 הוכח: $\triangle ABE \cong \triangle ACE$.



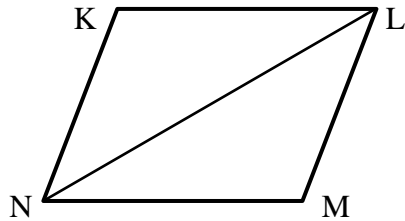
19) בציור שלפניך נתון:

$$AC = BD, \alpha = \beta$$

$$AB \perp BE, AB \perp AK$$

הוכח: $\triangle AKC \cong \triangle BED$

שאלות העוסקות במשפט חפיפה צלע-צלע-צלע:

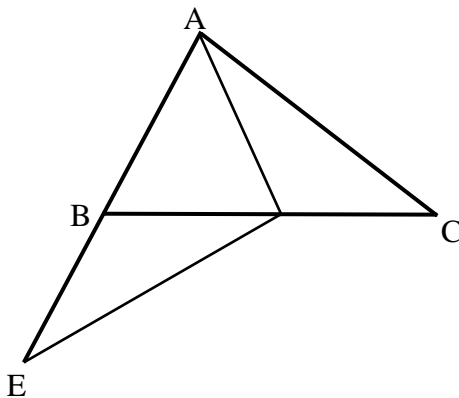


20) באיור שלפניך נתון:

$$KL = MN, KN = LM$$

הוכח: $\triangle KLN \cong \triangle MLN$

שאלות העוסקות במשפט חפיפה צלע-צלע-זווית שמול הצלע הגדולה:

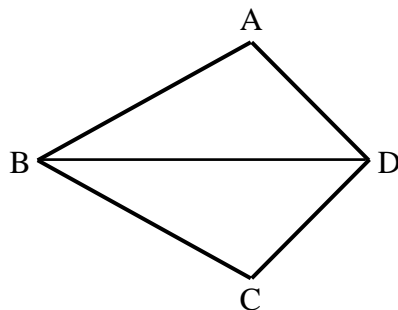


21) בציור שלפניך נתון:

$$AC = DE, AB = BE = AD$$

הוכח כי הנקודה D היא אמצע BC.

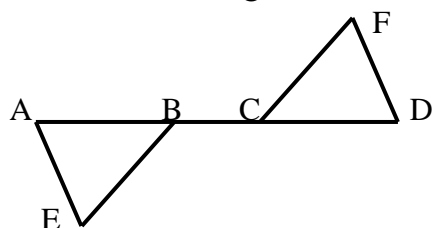
שאלות העוסקות בשלושת משפטי החפיפה יחדיו:



22) במרובע ABCD נתון:

$$AB = BC, AD = CD$$

הוכח: $\angle A = \angle C$

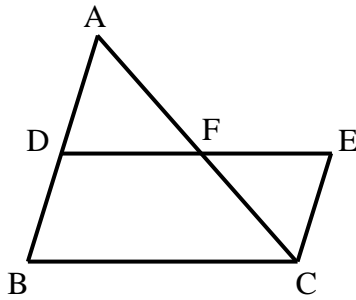


23) הקטע AD הוא קו ישר.

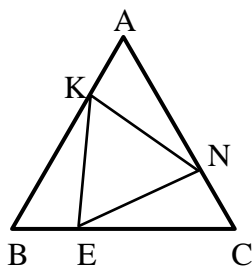
$$AE = DF, AC = BD$$

$$\angle A = \angle D$$

הוכח כי הקטעים BE ו-FC שווים.

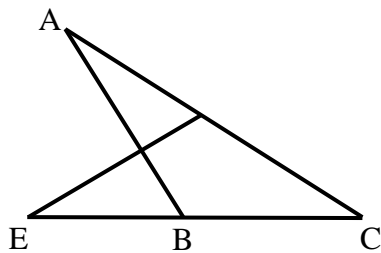


- (24)** באיור שלפניך נתון:
 הנקודה F היא אמצע הקטע AC.
 מתקיים: $\angle BAC = \angle ACE$.
 הקטעים BD ו-CE שווים.
 הוכח את הטענות הבאות:
 א. F היא אמצע הקטע DE.
 ב. D היא אמצע הקטע AB.

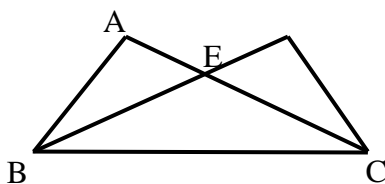


- (25)** המשולש ABC הוא שווה צלעות.
 נתון: $AK = BE = CN$.
 הוכח כי $\triangle KEN$ הוא גם משולש שווה צלעות.

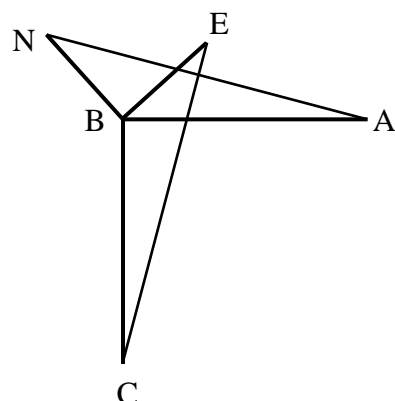
שאלות העוסקות במשולשים המכסים חלקית זה את זה:



- (26)** בציור שלפניך נתון: $AC = CE$, $DC = BC$.
 הוכח:
 א. $\triangle CDE \cong \triangle CBA$.
 ב. $\angle ADE = \angle ABE$.



- (27)** באיור שלפניך נתון:
 $\angle DBC = \angle ACB$, $\angle ABC = \angle DCB$.
 הוכח: $AB = CD$.



- (28)** בציור שלפניך נתון:
 $AB = BC$, $BE = BN$
 $AB \perp BC$, $BE \perp BN$
 הוכח: $AN = CE$.

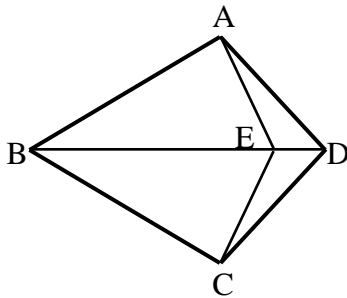
שאלות העוסקות בשתי חפיפות:

29 בסרטוט שלפניך נתון כי BD הוא קו ישר.

מתקיים: $AD = CD$, $AB = BC$.

הנקודה E נמצאת על BD .

הוכח כי: $AE = CE$.



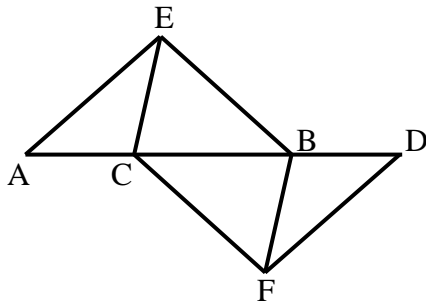
30 בציור שלפניך נתון כי AD הוא קו ישר. מתקיים:

$\angle AEC = \angle DFB$, $\angle A = \angle D$

וכן $AE = DF$. הוכח:

א. $CE = BF$

ב. $BE = CF$

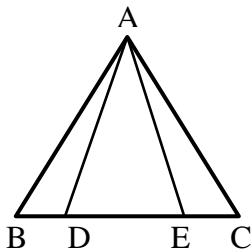


שאלות העוסקות בחפיפות עם משולש שווה שוקיים:

31 נתון משולש שווה שוקיים $\triangle ABC$, $(AB = AC)$.

מתקיים: $BD = CE$.

הוכח: $AD = AE$.



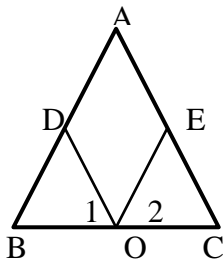
32 בסרטוט שלפניך נתון משולש

שווה שוקיים $\triangle ABC$, $(AB = AC)$.

הנקודה O היא אמצע BC .

מתקיים: $\angle O_1 = \angle O_2$.

הוכח: $AD = AE$.

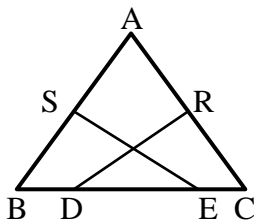


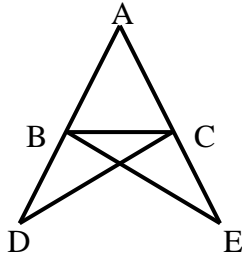
33 במשולש שווה שוקיים $\triangle ABC$, $(AB = AC)$

הנקודות S ו- R הן אמצעי השוקיים.

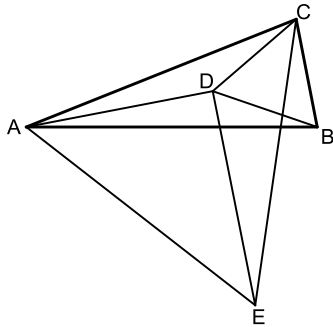
ידוע כי $BD = CE$.

הוכח כי: $SE = RD$.





34 נתון משולש ABC . הקטעים AD ו- AE ישרים ונתון בנוסף כי: $DC = BE$, $BD = CE$. הוכח: $AB = AC$.



35 המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$). על השוק AC ועל הבסיס BC בונים משולשים שווי צלעות ACE ו- BCD . מחברים את הנקודה D עם הקדקודים A ו- E .
 א. הוכח: $\triangle ABD \cong \triangle ACD$.
 ב. ידוע גם כי: $DE \parallel BC$.
 הוכח: $\angle ADE = 90^\circ$.

תשובות סופיות:

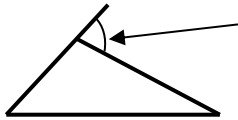
- 14 שאלת הוכחה.
- 15 שאלת הוכחה.
- 16 שאלת הוכחה.
- 17 שאלת הוכחה.
- 18 שאלת הוכחה.
- 19 שאלת הוכחה.
- 20 שאלת הוכחה.
- 21 שאלת הוכחה.
- 22 שאלת הוכחה.
- 23 שאלת הוכחה.
- 24 שאלת הוכחה.
- 25 שאלת הוכחה.
- 26 שאלת הוכחה.
- 27 שאלת הוכחה.
- 28 שאלת הוכחה.
- 29 שאלת הוכחה.
- 30 שאלת הוכחה.
- 31 שאלת הוכחה.
- 32 שאלת הוכחה.
- 33 שאלת הוכחה.
- 34 שאלת הוכחה.
- 35 שאלת הוכחה.

זווית חיצונית במשולש:

סיכום כללי:

הגדרה:

זווית חיצונית למשולש היא זווית הכלואה בין צלע במשולש להמשך צלע הסמוכה לה.



משפט:

זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.

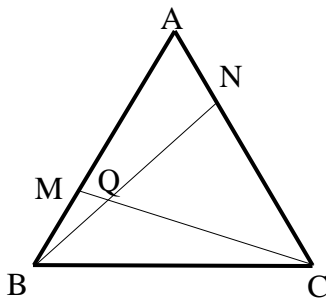
שאלות:

36 הוכח את המשפט: "זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.

37 המשולש ABC שבציור הוא משולש שווה צלעות.

נתון: $AN = BM$.

הוכח: $\angle NQC = 60^\circ$.



תשובות סופיות:

36 שאלת הוכחה.

37 שאלת הוכחה.

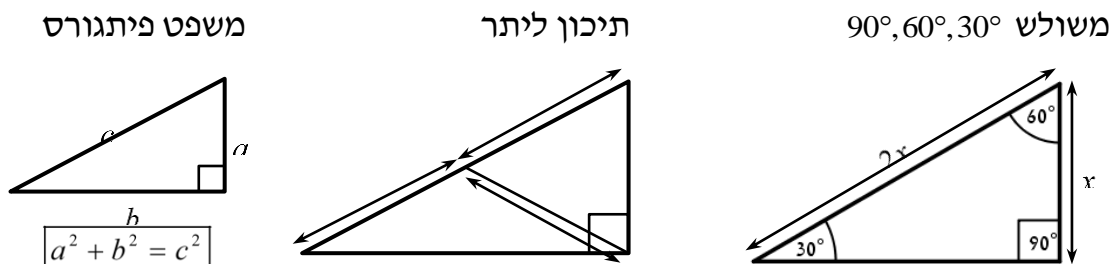
משולש ישר זווית:

סיכום כללי:

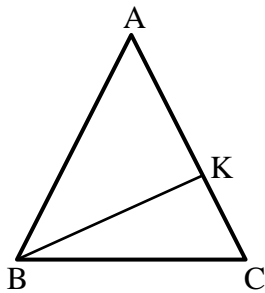
משפטים במשולש ישר זווית:

- סכום הזוויות החדות במשולש ישר זווית הוא 90° .
- במשולש שזוויותיו 90° , 60° , 30° , הניצב שמול הזווית של ה- 30° שווה למחצית היתר. (משפט הפוך ל-2) אם במשולש ישר זווית אחד הניצבים שווה למחצית היתר, אז הזווית שמול ניצב זה היא בת 30° .
- במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר. (משפט הפוך ל-4) אם במשולש תיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה, אז המשולש ישר זווית (כאשר הזווית ממנה יוצא התיכון היא הזווית הישרה).
- משפט פיתגורס: במשולש ישר זווית סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר. כלומר: $(\text{יתר})^2 = (\text{ניצב})^2 + (\text{ניצב})^2$.
- (משפט הפוך למשפט פיתגורס) אם במשולש סכום ריבועי שתי צלעות שווה לריבוע הצלע השלישית, אז המשולש ישר זווית.

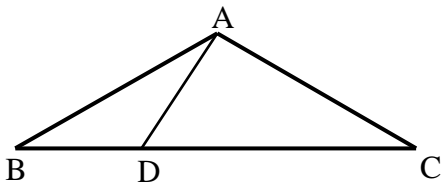
איורים:



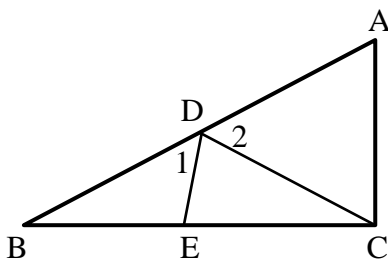
שאלות:



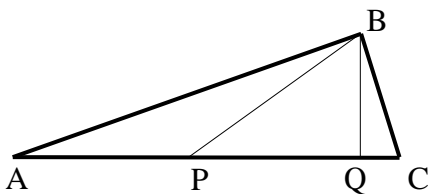
- 38** באיור שלפניך נתון משולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$).
 זווית הבסיס: $\angle C = 75^\circ$
 וכן: 16 ס"מ $AC =$. מעבירים גובה BK לשוק AC .
 מצא את אורך הגובה BK .



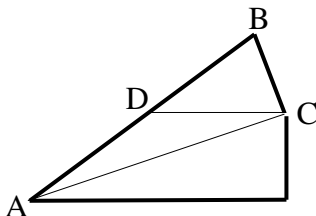
- 39** המשולש ABC שבציור הוא משולש שווה שוקיים ($AB = AC$).
 נתון: $\angle ABD = 30^\circ$, $\angle DAC = 90^\circ$,
 18 ס"מ $BC =$.
 חשב את אורכו של הקטע BD .



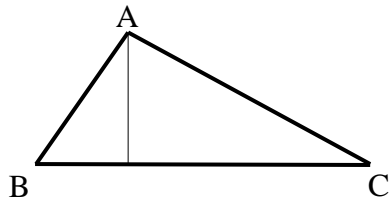
- 40** המשולש $\triangle ABC$ הוא ישר זווית ($\angle C = 90^\circ$).
 מעבירים תיכון CD ליתר AB במשולש.
 הנקודה E נמצאת על BC כך ש- $CD = CE$.
 ידוע כי: $\angle CED = 80^\circ$.
 מצא את הזוויות: $\angle D_1$, $\angle D_2$.



- 41** המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$).
 BQ הוא הגובה ליתר AC ו- BP הוא התיכון ליתר AC .
 נתון: $BQ = \frac{1}{2} BP$.
 חשב את גודלה של הזווית C .



- 42** המשולש BCD שבציור הוא משולש שווה שוקיים ($BD = DC$).
 AC חוצה את הזווית $\angle BAE$.
 נתון: $DC \parallel AE$.
 חשב את גודלה של הזווית $\angle ACB$.



- (43)** AD הוא גובה במשולש ABC.
 נתון: $AB = 15$ ס"מ, $AC = 20$ ס"מ,
 $BC = 25$ ס"מ.
- א. מצא את אורכו של AD
 ואת שטח המשולש ABC.
- ב. האם המשולש ABC ישר זווית? נמק.

תשובות סופיות:

- (38)** 8 ס"מ.
- (39)** 6 ס"מ.
- (40)** $\angle D_1 = 60^\circ$, $\angle D_2 = 40^\circ$
- (41)** 75°
- (42)** 90°
- (43)** א. $AD = 12$ ס"מ, $S_{ABC} = 150$ סמ"ר.
 ב. כן.

קטע אמצעים במשולש:

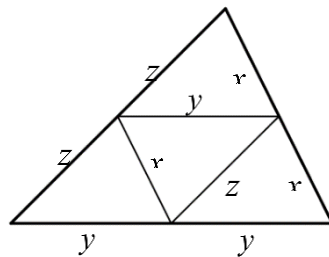
סיכום כללי:

הגדרה:

קטע המחבר אמצעי שתי צלעות במשולש נקרא קטע אמצעים במשולש.

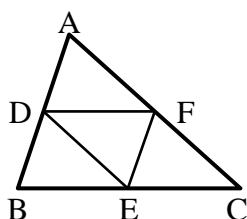
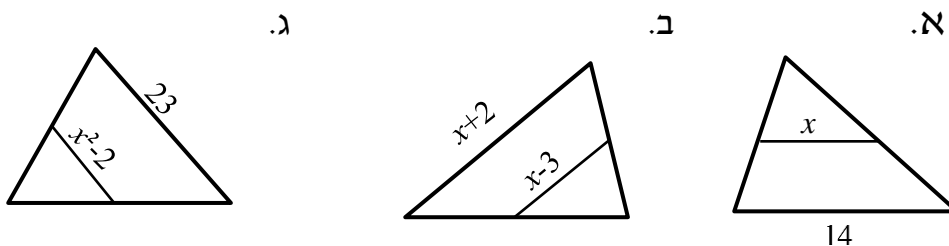
- קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
- (משפט הפוך 1): קטע היוצא מאמצע צלע במשולש ומקביל לצלע השלישית חוצה את הצלע השנייה (כלומר הוא קטע אמצעים במשולש).
- (משפט הפוך 2): קטע המחבר שתי צלעות במשולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים במשולש.

איור – קטע אמצעים במשולש:

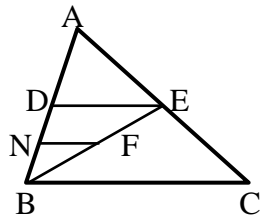


שאלות:

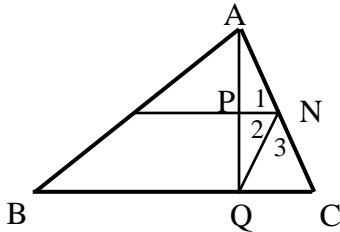
44) לפיך משולשים עם קטע אמצעים בתוכם. מצא את x בכל אחד מהמקרים:



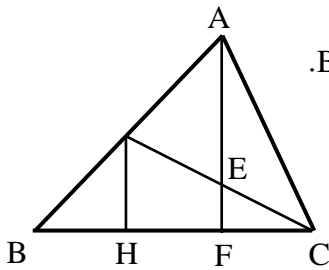
45) הנקודות D, E ו-F הם נקודות האמצע במשולש $\triangle ABC$. נתון: $DE = 9$ ס"מ, $EF = 12$ ס"מ, $DF = 10$ ס"מ. חשב את היקף המשולש $\triangle ABC$.



- 46) הקטע DE הוא קטע אמצעים במשולש ΔABC .
 הקטע FN הוא קטע אמצעים במשולש ΔBDE .
 נתון: 3 ס"מ = NF. מצא את אורך הצלע BC.



- 47) הקטע MN הוא קטע אמצעים במשולש ΔABC .
 AQ הוא גובה לצלע BC.
 הוכח: $\sphericalangle N_1 = \sphericalangle N_2$.



- 48) AF הוא גובה לצלע BC ו-GC הוא תיכון לצלע AB במשולש ΔABC .
 הקטע GH מאונך לצלע BC.
 א. הוכח: $HF = BH$.
 ב. נתון בנוסף כי הגובה AF חוצה את התיכון GC ושגודלו של AF הוא 12 ס"מ.
 חשב את אורך הקטע EF.

תשובות סופיות:

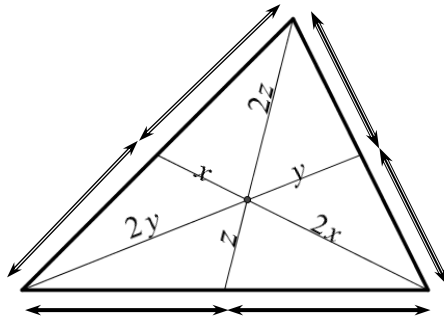
- 44) א. $x = 7$ ב. $x = 8$ ג. $x = \sqrt{13.5}$
 45) 62 ס"מ.
 46) 12 ס"מ.
 47) שאלת הוכחה.
 48) א. שאלת הוכחה. ב. 3 ס"מ.

מפגש תיכונים במשולש:

סיכום כללי:

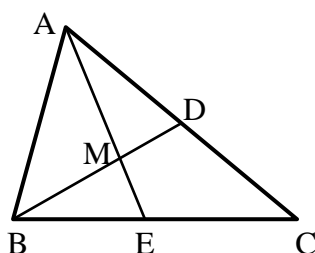
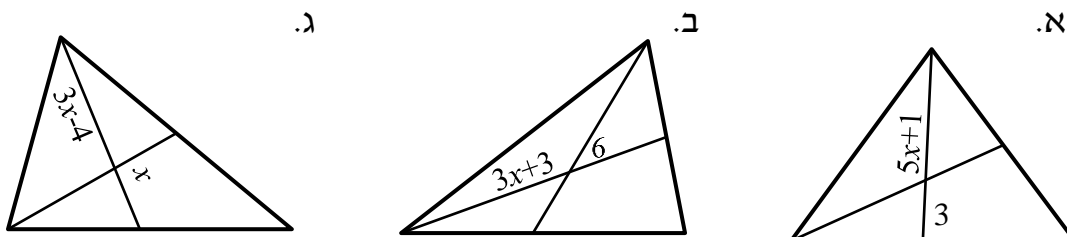
- שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת המחלקת כל תיכון ביחס של 2:1 כך שהחלק הקצר קרוב לצלע.
- אם נקודה מחלקת תיכון (אחד) במשולש ביחס של 2:1 כך שהחלק הקצר קרוב לצלע, נקודה זו היא מפגש התיכונים במשולש.
- נקודת מפגש התיכונים במשולש נקראת גם מרכז הכובד של המשולש.

איור – מפגש תיכונים במשולש:

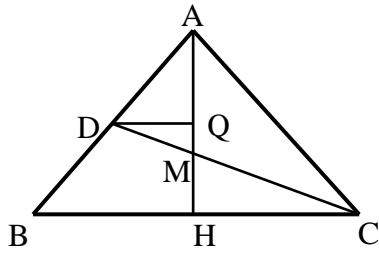


שאלות:

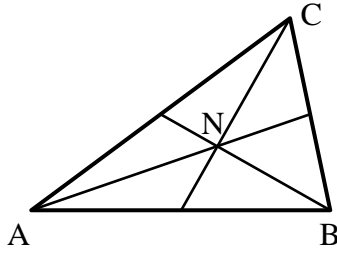
49) הקטעים שבמשולשים הם תיכונים. מצא את x בכל אחד מהמקרים הבאים:



50) הקטעים AE ו-BD הם תיכונים במשולש $\triangle ABC$ אשר נחתכים בנקודה M. נתון: $AD = AM$ וכן: $AC = 30$ ס"מ. חשב את AE.



- (51)** המשולש $\triangle ABC$ שבעיור הוא מש"ש
 ($AB = AC$) שבו AH הוא הגובה לבסיס BC .
 CD , התיכון לשוק AB ,
 יוצר זווית של 30° עם הבסיס BC .
 נתון: $BC = 12\sqrt{3}$ ס"מ, $DQ \parallel BC$.
 חשב את אורך הקטע MQ .



- (52)** במשולש $\triangle ABC$ נחתכים התיכונים בנקודה N .
 נתון: $\angle CNB = 90^\circ$.
 הוכח: $BC = AN$.

תשובות סופיות:

- (49)** א. $x = 1$ ב. $x = 3$ ג. $x = 4$
(50) 22.5 ס"מ.
(51) 3 ס"מ.
(52) שאלת הוכחה.

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 18 - גיאומטריה אוקלידית - מרובעים

תוכן העניינים

| | |
|-----|-------------------------|
| 273 | 1. מרובע כללי |
| 275 | 2. המקבילית |
| 280 | 3. המלבן |
| 283 | 4. המעוין |
| 286 | 5. הריבוע |
| 288 | 6. הטרפז |
| 294 | 7. הדלתון |
| 296 | 8. סיכום משפחת המרובעים |

מרובע כללי:

סיכום כללי:

הגדרה: מרובע הוא מצולע בעל 4 צלעות.

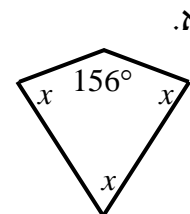
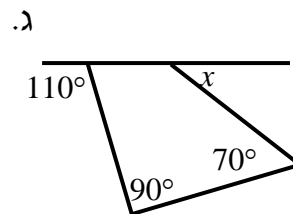
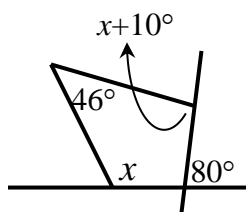
משפט: סכום זוויות במרובע הוא 360° .

שאלות:

1) בסרטוטים שלפניך מופיעים מרובעים שונים.

חלק מהזוויות מסומנות ב- x .

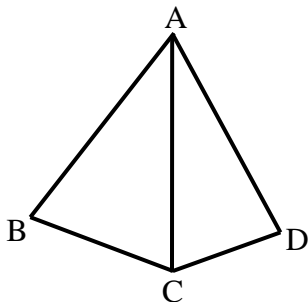
מצא את x ואת הזוויות של כל מרובע.



2) מצא את זוויות המרובע בכל אחד מהמקרים הבאים:

כל זווית במרובע (פרט לראשונה) גדולה ב- 10° מהזווית הקודמת לה.

זוויות המרובע מתייחסות זו לזו כמו: 1: 2: 3: 4.



3) המשולשים ABC ו-ACD שבציור הם משולשים

שווי שוקיים ($AB = AC = AD$).

נתון: $\angle BAD = 80^\circ$.

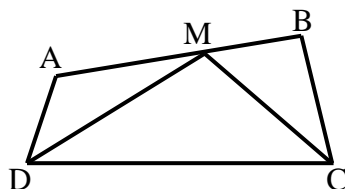
חשב את גודלה של הזווית BCD.

4) בסרטוט שלפניך נתון מרובע ABCD.

CM חוצה את זווית C ו-DM חוצה את זווית D.

ידוע כי: $CM = DM$, $\angle A = 130^\circ$, $\angle DMC = 110^\circ$.

מצא את שאר זוויות המרובע ABCD.



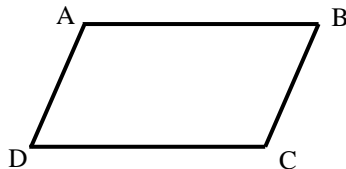
תשובות סופיות:

- (1) א. $x = 68^\circ$ ב. $x = 50^\circ$ ג. $x = 102^\circ$
- (2) א. $75^\circ, 85^\circ, 95^\circ, 105^\circ$ ב. $36^\circ, 72^\circ, 108^\circ, 144^\circ$
- (3) 140°
- (4) $\sphericalangle B = 90^\circ, \sphericalangle C = \sphericalangle D = 70^\circ$

המקבילית:

סיכום כללי:

הגדרה: מקבילית היא מרובע שבו שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות.



- במקבילית כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו.
- במקבילית כל שתי זוויות נגדיות שוות.
- במקבילית סכום כל שתי זוויות סמוכות הוא 180° .
- במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.
- היקף מקבילית = סכום הצלעות, שטח מקבילית = צלע · גובה לצלע.

כדי להוכיח כי מרובע הוא מקבילית נשתמש באחת הדרכים הבאות:

- מרובע שבו כל זוג צלעות נגדיות מקבילות הוא מקבילית.
- מרובע שבו כל זוג צלעות נגדיות שוות הוא מקבילית.
- מרובע שבו זוג צלעות שוות ומקבילות הוא מקבילית.
- מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית.
- מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית.

שאלות:

5 נתונה מקבילית ABCD.

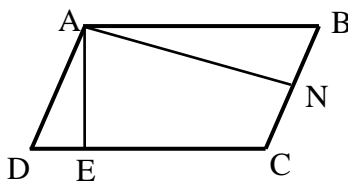
בכל אחד מהסעיפים הבאים הזוויות מיוצגות ע"י תבניות מספר שונות. מצא את זוויות המקבילית בכל מקרה.

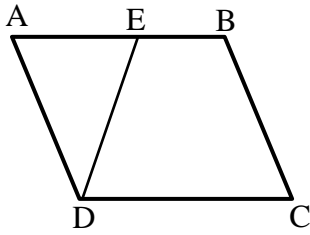


- א. $\angle A = x$, $\angle B = x - 70^\circ$
- ב. $\angle B = 3x - 130^\circ$, $\angle D = x + 10^\circ$
- ג. $\angle A = x + 20^\circ$, $\angle C = 100^\circ - x$

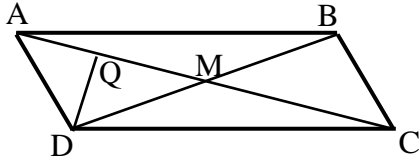
6 המרובע ABCD הוא מקבילית

- ובו: $AE \perp CD$, $AN \perp BC$.
- הוכח כי: $\angle DAE = \angle BAN$.

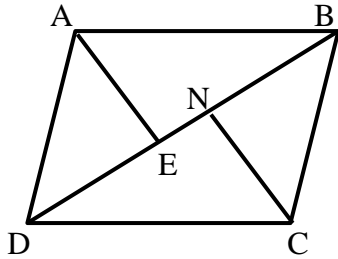




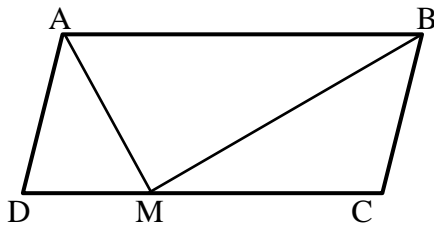
- 7) במקבילית ABCD הנקודה E נמצאת על הצלע AB כך שמתקיים: $DE = BC$. הוכח כי: $\angle EAD = \angle EDC$.



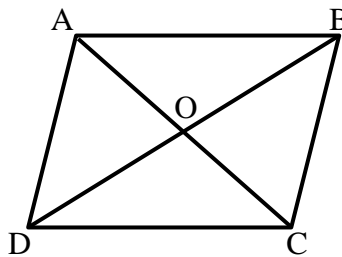
- 8) נתונה מקבילית ABCD שאלכסוניה נפגשים בנקודה M. נתון: $AC = 20$ ס"מ, $BC = \frac{1}{2}BD$ ו- $DQ \perp AC$. חשב את אורך הקטע AQ.



- 9) הוכח כי במקבילית הקדקודים הנגדיים נמצאים במרחקים שווים מאלכסון המקבילית שאינו עובר דרכם, כלומר הוכח: $AE = CN$.

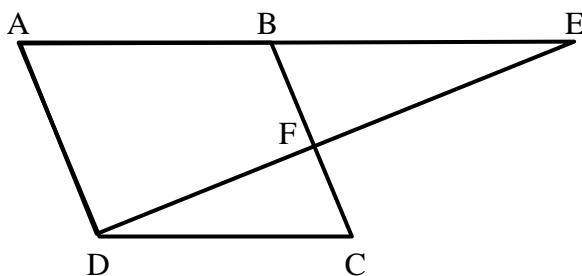


- 10) במקבילית ABCD הקטעים AM ו-BM הם חוצי הזוויות של A ו-B בהתאמה אשר נפגשים בנקודה M שעל הצלע DC. א. הוכח כי: $AB = 2BC$. ב. הוכח כי המשולש AMB הוא ישר זווית.



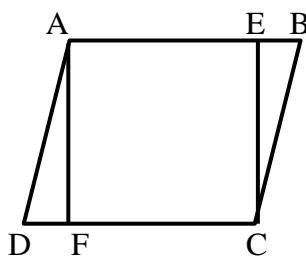
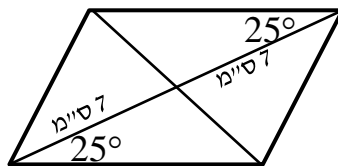
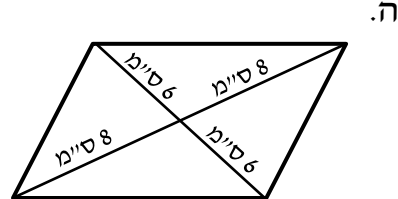
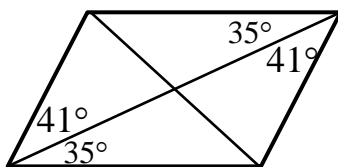
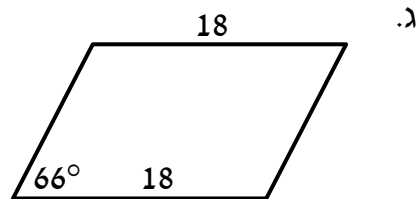
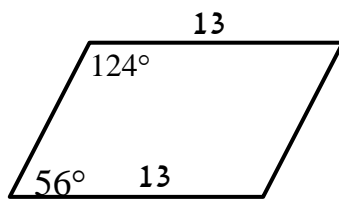
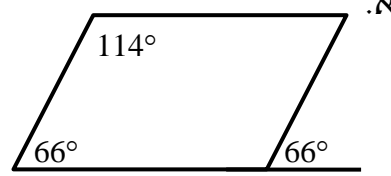
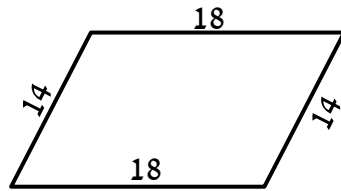
- 11) המרובע ABCD הוא מקבילית. O – פגישת האלכסונים. נתון: $AO = x + 1$, $BO = x + 8$, $DO = 3x - 10$. מצא את אורכי האלכסונים AC ו-BD.

- 12) נתונה מקבילית ABCD ובה: $\angle ADC = 120^\circ$, $\angle BEF = \frac{1}{2} \angle EAD$.

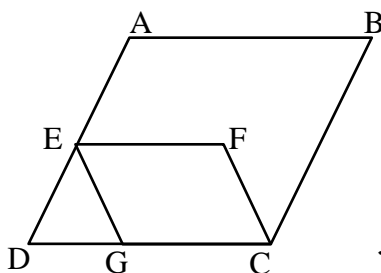


הוכח כי: $BC \perp ED$.

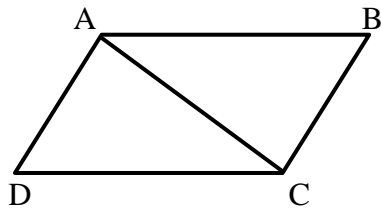
13) בסרטטים שלפניך מופיעים מרובעים שונים. קבע אלו מהם הם מקביליות וציין מדוע.



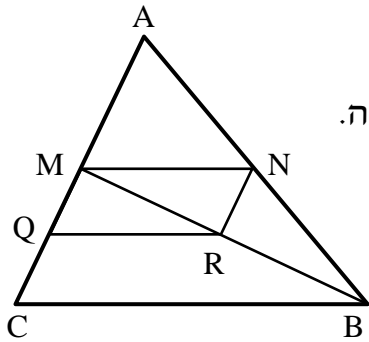
14) במקבילית ABCD הנקודות E ו-F נמצאות על הצלעות AB ו-CD בהתאמה. נתון: $\angle DAF = \angle BCE$. הוכח כי המרובע AECF הוא מקבילית.



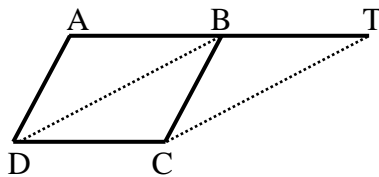
15) במקבילית ABCD הנקודות E ו-G נמצאות על הצלעות AD ו-DC בהתאמה כך שהמשולש DEG הוא שווה צלעות. הנקודה F נמצאת בתוך המקבילית כך שהקטע EF מקביל לצלע AB. א. הוכח: $\angle DAB = \angle EGC$. ב. נתון: $\angle GCF = \angle ABC$. הוכח כי EFCG מקבילית.



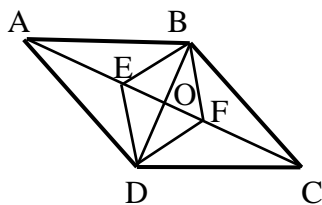
- 16) במרובע ABCD נתון כי הצלעות AB ו-DC שוות.
כמו כן: $AD \perp AC$, $BC \perp AC$.
הוכח כי המרובע ABCD הוא מקבילית.



- 17) נתון משולש ABC ובו הקטע MN הוא קטע אמצעים.
הנקודות Q ו-R הן אמצעי הקטעים MC ו-BM בהתאמה.
א. הוכח כי המרובע MNRQ הוא מקבילית.
ב. ידוע כי הקטע AN שווה לקטע QR.
איזה סוג משולש הוא AMB? נמק.



- 18) את הצלע AB במקבילית ABCD האריכו
כאורכה עד לנקודה T.
הוכח: BTCD מקבילית.
הערה: בסרטון השאלה מוצגת ללא הסרטוט הנתון.



- 19) הנקודה O היא מפגש אלכסוני המקבילית ABCD. E ו-F הן נקודות על האלכסון AC.
נתון: $AE = FC$.
הוכח כי EBFD הוא מקבילית.

תשובות סופיות:

- א. $125^\circ, 55^\circ$ (5)
 ב. $100^\circ, 80^\circ$ (6) שאלת הוכחה.
 ג. $120^\circ, 60^\circ$ (7) שאלת הוכחה.
 (8) 5 ס"מ. שאלת הוכחה.
 (9) שאלת הוכחה.
 (10) שאלת הוכחה.
 (11) $BD = 34$ ס"מ, $AC = 20$ ס"מ. שאלת הוכחה.
 (12) שאלת הוכחה.
 (13) מקביליות: א', ב', ד', ה', ו', ח' אינן מקביליות: ג', ז'.
 (14) שאלת הוכחה.
 (15) שאלת הוכחה.
 (16) שאלת הוכחה.
 (17) שאלת הוכחה.
 (18) שאלת הוכחה.
 (19) שאלת הוכחה.

המלבן:

סיכום כללי:

הגדרה: מלבן הוא מרובע שכל זוויותיו ישרות.
(מסקנה: מלבן הוא סוג של מקבילית).

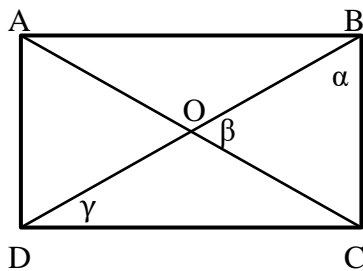
תכונות המלבן (בנוסף לתכונות המקבילית):

- ארבע זוויות המלבן שוות והן זוויות ישרות.
- האלכסונים במלבן שווים זה לזה
- היקף מלבן סכום הצלעות, שטח מלבן צלע גובה לצלע.

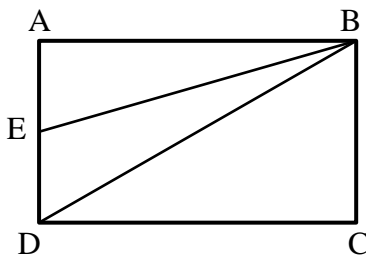
כדי להוכיח כי מרובע הוא מלבן נשתמש באחת הדרכים הבאות:

- מרובע שבו שלוש זוויות ישרות הוא מלבן.
- מקבילית שבה זווית ישרה היא מלבן.
- מקבילית שבה האלכסונים שווים היא מלבן.

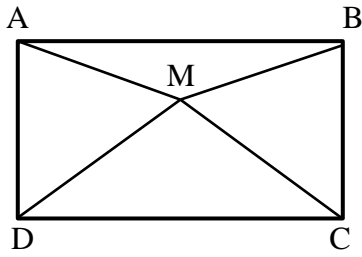
שאלות:



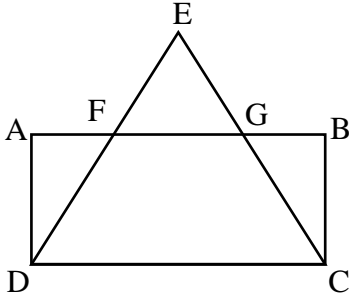
- 20** המרובע ABCD הוא מלבן.
מעבירים את האלכסונים AC ו-BD.
חשב את הזוויות α ו- β במקרים הבאים:
- א. β קטנה ב- 15° מ- α .
 - ב. $\alpha = 2\gamma$.
 - ג. $\gamma = 28^\circ$.



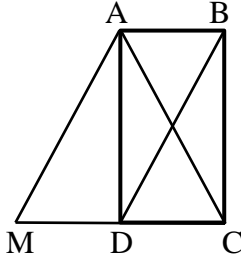
- 21** במלבן ABCD הנקודה E נמצאת על הצלע AD.
נתון: $\angle AEB = 70^\circ$, $BD = 2BC$.
חשב את גודלה של הזווית EBD.



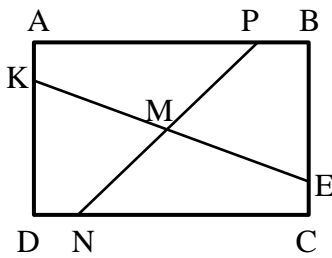
(22) נתון מלבן ABCD שבו $DM = MC$.
הוכח: $\angle MAB = \angle MBA$.



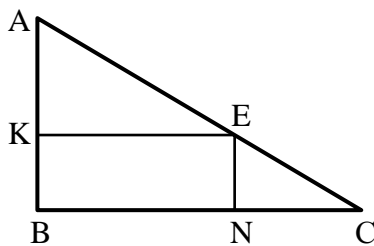
(23) המרובע ABCD הוא מלבן.
המשכי הקטעים DF ו-CG נפגשים בנקודה E.
נתון: $EF = EG$.
הוכח: $FD = GC$.



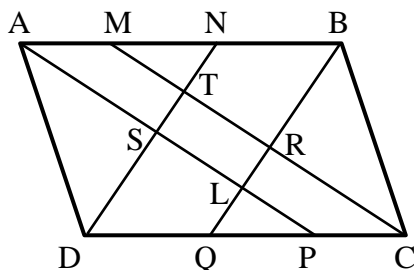
(24) המרובע ABCD הוא מלבן.
המרובע ABDM הוא מקבילית.
הוכח כי המשולש ACM הוא שווה שוקיים.



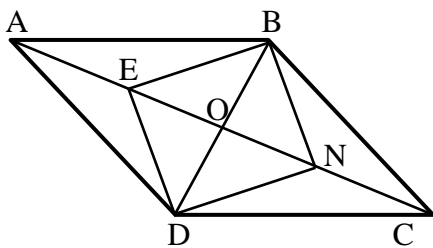
(25) מרובע ABCD הוא מלבן.
נתון: $AP = CN$, $AK = CE$.
הוכח: $KM = EM$, $PM = NM$.



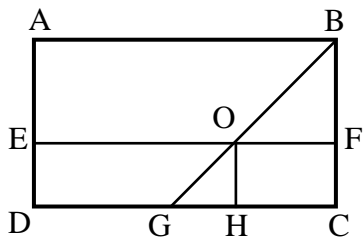
(26) $\triangle ABC$ הוא משולש ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$).
המרובע KENB חסום במשולש זה.
נתון כי: $\angle AEK = \angle C$, $\angle NEC = \angle A$.
הוכח כי המרובע KENB הוא מלבן.



(27) נתונה מקבילית ABCD ובה DN ו- CM , BQ , AP .
הם חוצי הזוויות $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ו- $\angle D$ בהתאמה.
הוכח: $TRLS$ מלבן.



- (28)** מרובע ABCD הוא מקבילית.
 מעבירים את האלכסונים AC ו-BD
 אשר נחתכים בנקודה O.
 נתון: $2BD = AC$.
 E – אמצע AO. N – אמצע CO.
 הוכח כי המרובע BNDE הוא מלבן.



- (29)** במלבן ABCD נתון:
 $OH \perp DC$, $\angle ABO = \angle BOF$
 הוכח: EOHD הוא מלבן.

תשובות סופיות:

ב. $\alpha = \beta = 60^\circ$, $\gamma = 30^\circ$

(20) א. $\alpha = 55^\circ$, $\beta = 70^\circ$, $\gamma = 35^\circ$

ג. $\alpha = 62^\circ$, $\beta = 56^\circ$

(21) 10°

(22) שאלת הוכחה.

(23) שאלת הוכחה.

(24) שאלת הוכחה.

(25) שאלת הוכחה.

(26) שאלת הוכחה.

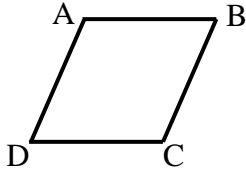
(27) שאלת הוכחה.

(28) שאלת הוכחה.

(29) שאלת הוכחה.

המעוין:

סיכום כללי:



הגדרה: מעוין הוא מרובע שכל צלעותיו שוות.
 (מסקנה: מעוין הוא סוג של מקבילית).

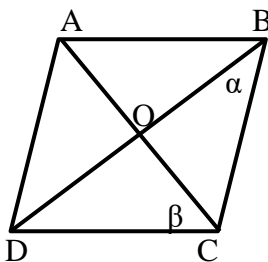
תכונות המעוין (בנוסף לתכונות המקבילית):

- במעוין כל הצלעות שוות.
- במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה.
- במעוין האלכסונים הם חוצי זוויות.
- היקף מעוין = צלע $\cdot 4$, שטח מעוין = צלע \cdot גובה לצלע = $(\text{אלכסון} \cdot \text{אלכסון})/2$.

כדי להוכיח כי מרובע הוא מעוין נשתמש באחת הדרכים הבאות:

- מרובע שבו כל הצלעות שוות הוא מעוין.
- מקבילית שבה שתי צלעות סמוכות שוות היא מעוין.
- מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין.
- מקבילית שבה אלכסון חוצה זווית היא מעוין (מספיק אחד).

שאלות:



30) המרובע ABCD הוא מעוין.

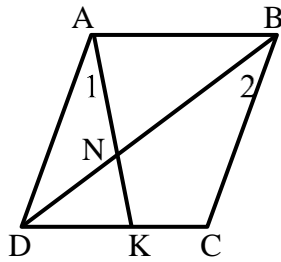
חשב בכל אחד מהמקרים הבאים את α ו- β .

א. $\angle A = 138^\circ$.

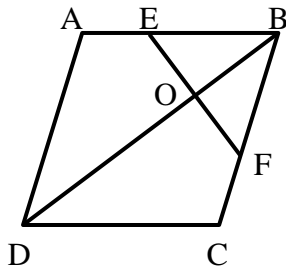
ב. $\beta = 3.5\alpha$.

ג. $\beta = \alpha + 20^\circ$.

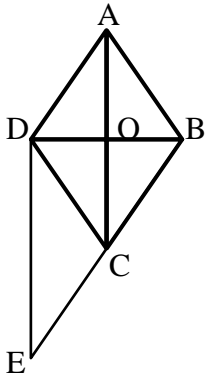
ד. $\angle B = \beta$.



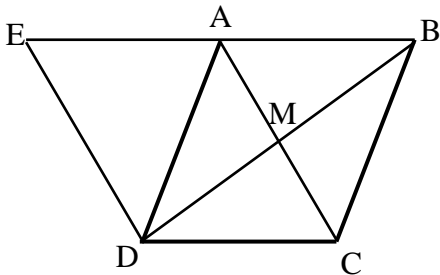
- 31** המרובע ABCD הוא מעוין.
מעבירים את האלכסון BD ואת הקטע AK
אשר נחתכים בנקודה N.
ידוע כי: $\angle A_1 = \angle B_2$.
א. הוכח כי המשולש ADN הוא שווה שוקיים.
ב. הוכח כי: $\angle AND = \angle C$.



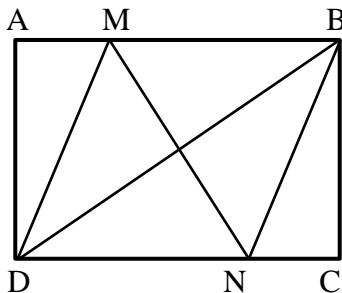
- 32** מעוין ABCD הנקודות E ו-F
נמצאות על הצלעות AB ו-BC בהתאמה.
נתון: $\angle DCB = 120^\circ$, $EF \perp BD$.
הוכח כי משולש EBF הוא שווה צלעות.



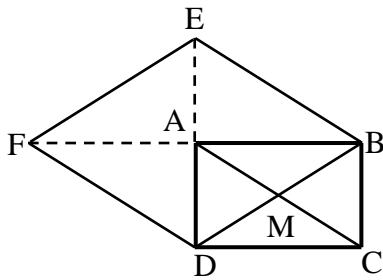
- 33** נתון מעוין ABCD.
הנקודה E נמצאת על המשך הצלע BC.
נתון: $\angle CDE = \angle BCA$.
הוכח כי המשולש BDE הוא ישר זווית.



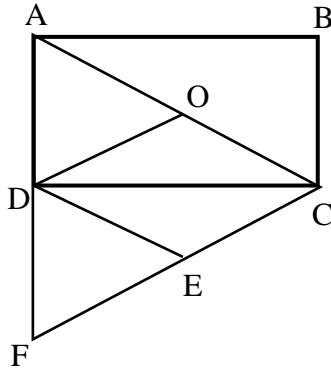
- 34** נתון מעוין ABCD שאלכסונו נפגשים בנקודה M.
האריכו את הצלע AB עד לנקודה E
כך שמתקיים: $DE \perp BD$.
הוכח: $AD = AE$.



- 35** במלבן ABCD מעבירים את האלכסון BD.
הנקודות M ו-N נמצאות על הצלעות AB
ו-DC בהתאמה.
נתון: $AM = CN$ ו- $DM = DN$.
הוכח כי הקטע MN חוצה את
הזוויות BMD ו-BND.



36 נתון מלבן ABCD שאלכסונו נפגשים בנקודה M. האריכו את הצלע AB כאורכה עד לנקודה F ואת הצלע AD כאורכה עד לנקודה E כמתואר בשרטוט. הוכח: המרובע EBDF הוא מעוין.



37 ABCD הוא מלבן שאלכסונו נחתכים בנקודה O. הנקודה F נמצאת על המשך הצלע AD כך שמתקיים: $AD = DF$. נתון: $FE = CE$. הוכח כי DOCE הוא מעוין.

תשובות סופיות:

ב. $\alpha = 20^\circ, \beta = 70^\circ$

ד. $\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ$

30 א. $\alpha = 21^\circ, \beta = 69^\circ$

ג. $\alpha = 35^\circ, \beta = 55^\circ$

31 שאלת הוכחה.

32 שאלת הוכחה.

33 שאלת הוכחה.

34 שאלת הוכחה.

35 שאלת הוכחה.

36 שאלת הוכחה.

37 שאלת הוכחה.

הריבוע:

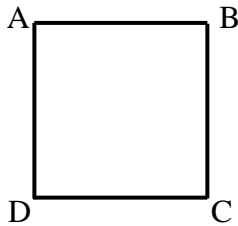
סיכום כללי:

הגדרה: ריבוע הוא מרובע שכל צלעותיו שוות וכל זוויותיו שוות.

(מסקנה: ריבוע הוא סוג של מקבילית, סוג של מלבן וסוג של מעוין).

מכאן, שבנוסף לתכונות שבהגדרת הריבוע מתקיים כי אלכסונו הריבוע חוצים זה את זה, שווים זה לזה, מאונכים זה לזה וחוצים את זוויות הריבוע.

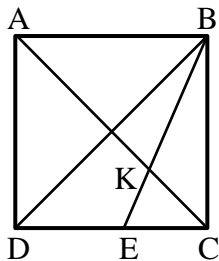
היקף ריבוע = צלע $\cdot 4$, שטח ריבוע = $(צלע)^2 = (אלכסון)^2 / 2$



כדי להוכיח כי מרובע הוא ריבוע נשתמש באחת הדרכים הבאות:

- מלבן שבו האלכסונים מאונכים הוא ריבוע.
- מלבן שבו אלכסון חוצה זווית הוא ריבוע.
- מלבן שבו שתי צלעות סמוכות שוות הוא ריבוע.
- מעוין שבו האלכסונים שווים הוא ריבוע.
- מעוין שבו זווית ישרה הוא ריבוע.

שאלות:

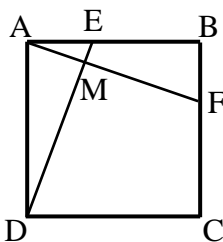


38 המרובע ABCD הוא ריבוע.

מעבירים את האלכסונים AC ו-BD.

BE חוצה זווית DBC וחותך את AC בנקודה K.

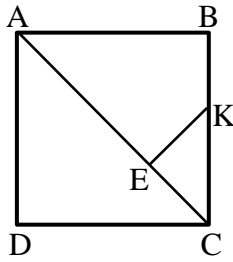
הוכח: $CE = CK$.



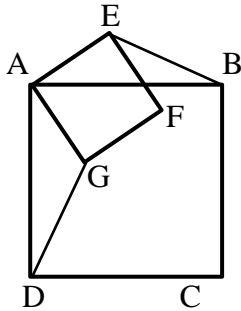
39 בריבוע ABCD מעבירים את הקטעים AF ו-DE.

נתון כי $AE = BF$.

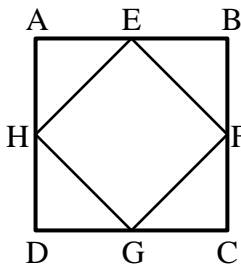
הוכח: $DE \perp AF$.



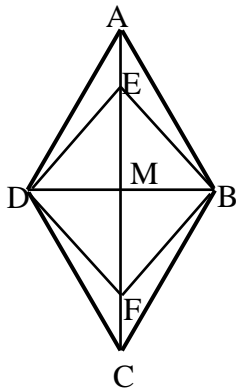
- 40** המרובע ABCD הוא ריבוע.
 מעבירים את האלכסון AC.
 מהנקודה E שעל האלכסון מעבירים את הקטע KE אשר מאונך לאלכסון.
 נתון: $AE = AB$.
 הוכח כי: $CE = KE = BK$.



- 41** המרובעים ABCD ו-AEFG הם ריבועים.
 הוכח: $BE = DG$.



- 42** הנקודות E, F, G, H הן אמצעי צלעות הריבוע ABCD.
 הוכח כי EFGH הוא ריבוע.



- 43** נתון מעוין ABCD שאלכסונו נפגשים בנקודה M.
 נתון: $\angle EBA = 15^\circ$, $MB = \frac{1}{2} AB$, $AE = FC$.
 הוכח: המרובע EBFM הוא ריבוע.

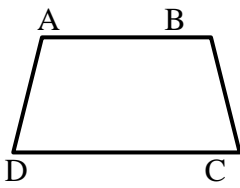
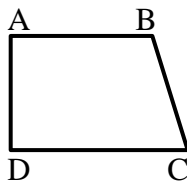
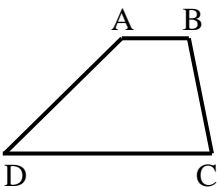
תשובות סופיות:

- 38** שאלת הוכחה.
39 שאלת הוכחה.
40 שאלת הוכחה.
41 שאלת הוכחה.
42 שאלת הוכחה.
43 שאלת הוכחה.

הטרפז:

סיכום כללי:

הגדרה: טרפז הוא מרובע שבו זוג אחד בלבד של צלעות נגדיות מקבילות.
 היקף טרפז = סכום הצלעות, שטח טרפז = $\frac{(\text{גובה} \cdot \text{סכום הבסיסים})}{2}$.

| טרפז שווה שוקיים | טרפז ישר זווית | טרפז כללי | סוג הטרפז |
|---|---|--|------------|
|  |  |  | איור מתאים |

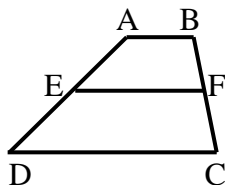
משפטים הנוגעים לטרפז שווה שוקיים:

- בטרפז שווה שוקיים הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו.
- (משפט הפוך) טרפז שבו הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו הוא טרפז שווה שוקיים.
- בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.
- (משפט הפוך) טרפז שבו האלכסונים שווים זה לזה הוא טרפז שווה שוקיים.

קטע אמצעים בטרפז:

הגדרה: קטע אמצעים בטרפז הוא קטע המחבר את אמצעי השוקיים בטרפז.

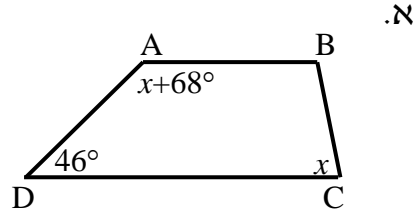
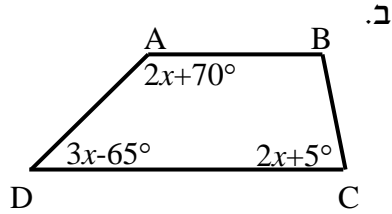
- קטע אמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.



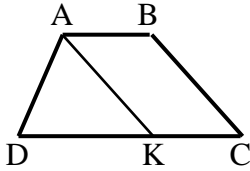
- (משפט הפוך) קטע היוצא מאמצע שוק אחת בטרפז ומקביל לבסיסים, חוצה את השוק השנייה (כלומר הוא קטע אמצעים בטרפז).

שאלות:

44 בסרטוטים שלפניך נתונים טרפזים כלליים $(AB \parallel CD)$. מצא את x ואת זוויות הטרפז בכל מקרה.

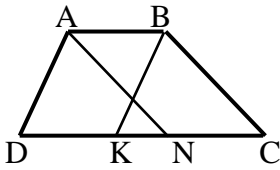


45 המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.



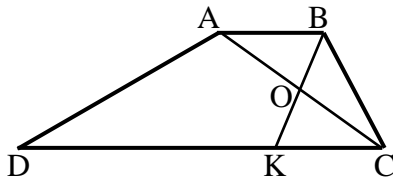
מעבירים את הקטע AK.
נתון: $AK = DK$, $AK \parallel BC$,
 $AB = 6$ ס"מ, $DC = 14$ ס"מ.
חשב את אורך השוק BC.

46 המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.



נתון כי: $AN \parallel BC$, $AD \parallel BK$.
הוכח כי: $DK = CN$.

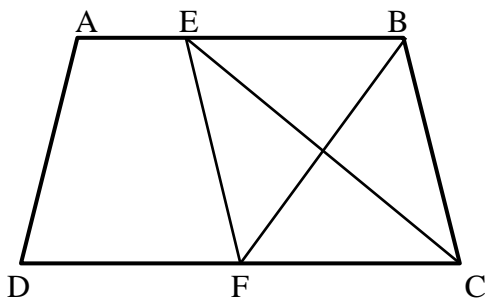
47 המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.



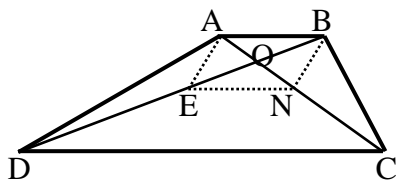
מעבירים את האלכסון AC ואת הקטע BK אשר חוצים זה את זה בנקודה O.
ידוע כי: $\angle C = 60^\circ$, $\angle D = 30^\circ$.

א. חשב את אורך DC, הבסיס הגדול,
אם ידוע כי: $AB = 7$ ס"מ, $BC = 9$ ס"מ.
ב. הוכח כי אם $AB = BC$ אז: $DC = 3AB$.

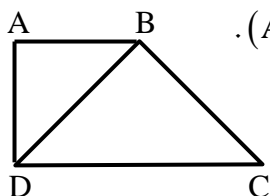
48 נתון טרפז ABCD $(AB \parallel CD)$ ובו



הקטעים CE ו-BF חוצים את זוויות הקדקודים C ו-B בהתאמה. הוכח:
א. $BF \perp CE$.
ב. המשולש EBC הוא שווה שוקיים.
ג. המרובע EBCF הוא מעויך.

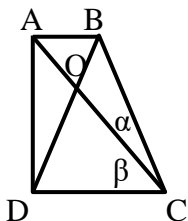


- (49) מרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel CD$).
 O - היא נקודת פגישת האלכסונים.
 נתון: $BO = EO$, $AO = NO$.
 הוכח כי המרובע ENCD הוא טרפז.

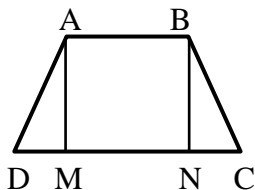


- (50) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית ($AB \parallel CD$, $\angle D = 90^\circ$).

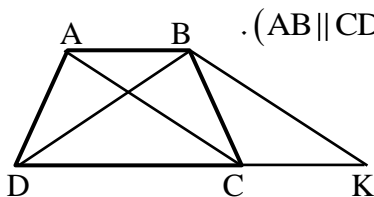
האלכסון BD חוצה את זווית D
 ונתון בנוסף כי: $BD = BC$ וכי: $AD = 15$ ס"מ.
 חשב את אורכי בסיסי הטרפז.



- (51) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית
 ($AB \parallel CD$, $AD \perp DC$).
 נתון כי: $\beta = 2\alpha$, $\angle DOC = 80^\circ$ ו- $BD = BC$.
 חשב את זוויות הטרפז.



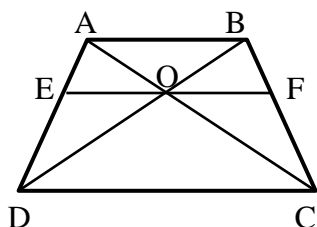
- (52) מרובע ABCD הוא טרפז שווה
 שוקיים ($AB \parallel CD$, $AD = BC$).
 נתון כי: $AM \perp DC$, $BN \perp DC$.
 הוכח כי: $DM = CN$.



- (53) מרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים ($AB \parallel CD$, $AD = BC$).

דרך הנקודה B מעבירים מקביל ל-AC הפוגש
 את המשך הבסיס DC בנקודה K.
 הוכח כי משולש BDK הוא שווה שוקיים.

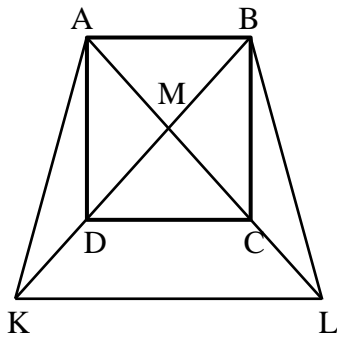
- (54) מרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים ($AB \parallel CD$, $AD = BC$).



O היא פגישת האלכסונים.
 נתון כי: $EF \parallel DC$ כאשר EF עובר דרך O.
 הוכח:

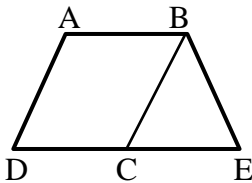
- א. $\angle BOF = \angle COF$.
 ב. $EO = FO$.

55 נתון ריבוע ABCD.



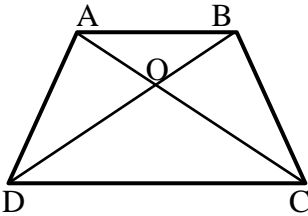
- הנקודה M היא מפגש האלכסונים AC ו-BD. ממשיכים את האלכסונים ויוצרים את הטרפז השווה שוקיים ABLK. ידוע גם כי DC הוא קטע אמצעים משולש KML. א. קבע אלו מהטענות הבאות ניתן להוכיח:
- המשולש KML הוא ישר זווית ושווה שוקיים.
 - הקטעים BK ו-BL מאונכים זה לזה.
 - המרובע DCLK הוא טרפז שווה שוקיים.
 - הקטעים DK ו-AD שווים זה לזה.
- ב. הוכח כי: $3DK = AL$.
- ג. נתון כי $AD = 8\sqrt{2}$ ס"מ. חשב את היקף הטרפז ABLK.

56 המרובע ABCD הוא מקבילית.



- הקטע DE הוא קו ישר ונתון כי: $\angle A + \angle E = 180^\circ$. הוכח כי המרובע ABED הוא טרפז שווה שוקיים.

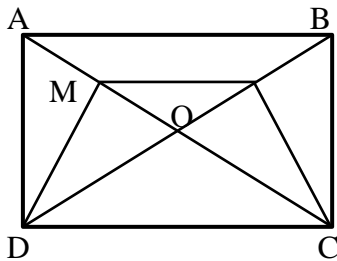
57 במרובע ABCD הנקודה O היא פגישת האלכסונים.



נתון כי: $CO = DO$, $AO = BO$.

הוכח כי מרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים.

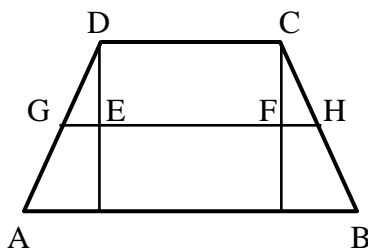
58 נתון מלבן ABCD שאלכסונו נפגשים בנקודה O.



נתון: $MN \parallel DC$.

הוכח: טרפז DMNC שווה שוקיים.

59 בטרפז ABCD ($AB \parallel CD$) הורדו מקצות

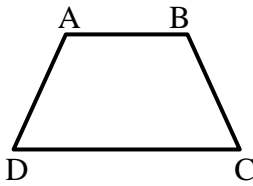


הבסיס הקטן אנכים לבסיס הגדול.

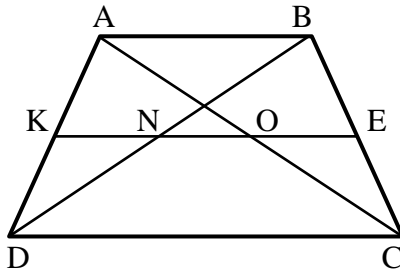
קטע האמצעים GH חותך גבהים אלה בנקודות E ו-F.

נתון: $GE = 3$ ס"מ, $EF = 12$ ס"מ, $FH = 2$ ס"מ.

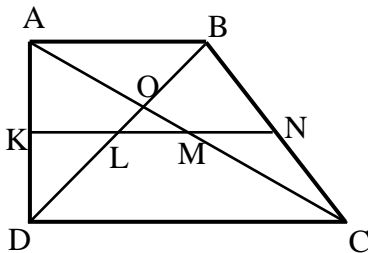
חשב את בסיסי הטרפז.



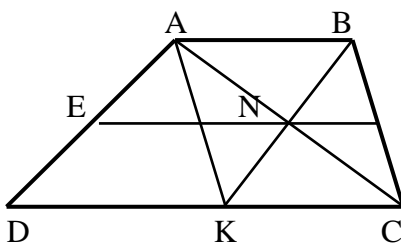
60 סכום כל אורכי הצלעות של טרפז שווה שוקיים הוא 54 ס"מ.
אורך קטע האמצעים הוא 13 ס"מ.
מצא את אורך שוק הטרפז.



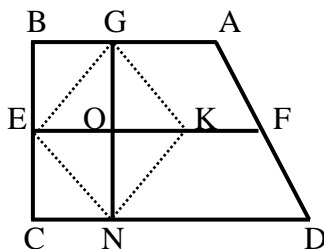
61 המרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel CD$).
KE הוא קטע אמצעים בטרפז, החותך את אלכסוני הטרפז בנקודות N ו-O.
א. הוכח כי: $KN = EO$.
ב. בטרפז הנ"ל נתון:
 $AB = 14$ ס"מ, $DC = 26$ ס"מ.
חשב את אורכי הקטעים KN, NO ו-EO.
ג. בטרפז הנ"ל נתון: $KE = 13$ ס"מ,
 $NO = 3$ ס"מ. חשב את בסיסי הטרפז.



62 KN הוא קטע אמצעים בטרפז ישר זווית ABCD שאלכסוניו ($AB \parallel CD, AD \perp AB$) נפגשים בנקודה O.
נתון: $AD = 12$ ס"מ, $DC = 2AB$, $\angle ADB = 45^\circ$.
חשב את אורך הקטע LM והוכח כי: $KL = LM = MN$.



63 מרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel CD$).
EF הוא קטע אמצעים. AC ו-BK נפגשים בנקודה N הנמצאת על EF.
א. הוכח כי מרובע ABCK הוא מקבילית.
ב. נתון: $EF = 13$ ס"מ, $EN = 9$ ס"מ.
חשב את בסיסי הטרפז AB ו-DC ואת הקטע DK.



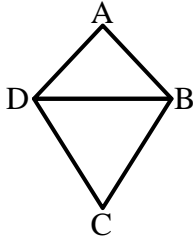
64 המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית ($AB \parallel CD, \angle B = 90^\circ$).
EF קטע אמצעים בטרפז.
G ו-N הן נקודות על AB ו-DC בהתאמה המקיימות: $GN \perp DC$.
בנוסף נתון: $\angle D < 90^\circ, KO = EO$.
הוכח כי מרובע GENK הוא מעוין.

תשובות סופיות:

- (44) א. $x = 66^\circ$; $46^\circ, 134^\circ, 66^\circ, 114^\circ$ ב. $x = 35^\circ$; $40^\circ, 140^\circ, 75^\circ, 105^\circ$
- (45) 8 ס"מ.
- (46) שאלת הוכחה.
- (47) א. 25 ס"מ.
- (48) שאלת הוכחה.
- (49) שאלת הוכחה.
- (50) א. 15 ס"מ, 30 ס"מ. ב. שאלת הוכחה.
- (51) $90^\circ, 90^\circ, 60^\circ, 120^\circ$
- (52) שאלת הוכחה.
- (53) שאלת הוכחה.
- (54) שאלת הוכחה.
- (55) א. ניתן להוכיח את טענות: i, iii. ב. שאלת הוכחה.
- ג. $P_{ABLK} = 16\sqrt{5} + 24\sqrt{2} \approx 69.71$ ס"מ
- (56) שאלת הוכחה.
- (57) שאלת הוכחה.
- (58) שאלת הוכחה.
- (59) 22 ס"מ ו-12 ס"מ.
- (60) 14 ס"מ.
- (61) א. שאלת הוכחה. ב. 7 ס"מ = EO = KN, 6 ס"מ = NO
- ג. 10 ס"מ = AB, 16 ס"מ = DC.
- (62) 6 ס"מ.
- (63) 8 ס"מ = AB, 18 ס"מ = DC, 10 ס"מ = DK.
- (64) שאלת הוכחה.

הדלתון:

סיכום כללי:



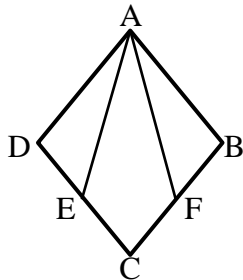
הגדרה:

דלתון הוא מרובע שבו שני זוגות של צלעות סמוכות שוות. (מסקנה: דלתון הוא מרובע שניתן לפרק לשני משולשים שווים שוקיים בעלי בסיס משותף).

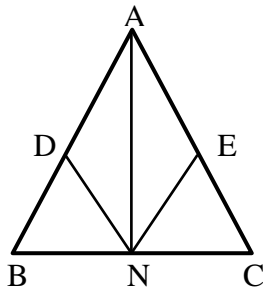
תכונות האלכסונים בדלתון:

- האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש, חוצה את האלכסון המשני ומאונך לו.
- האלכסון הראשי אינו בהכרח גדול מהאלכסון המשני.
- היקף דלתון = סכום הצלעות, שטח דלתון = $(\text{אלכסון} \cdot \text{אלכסון})/2$.

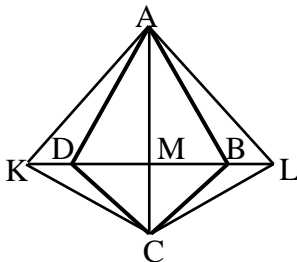
שאלות:



65 נתון מעוין ABCD. הנקודות E ו-F נמצאות על הצלעות DC ב-BC בהתאמה כך שהמרובע AFCE הוא דלתון. הוכח: $\angle DAE = \angle FAB$.



66 במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$) מקצים נקודות D ו-E על השוקיים. נתון כי: $AD = AE$. הנקודה N היא אמצע BC. הוכח כי ADNE הוא דלתון.



67 בדלתון ABCD האריכו את האלכסון המשני משני צדיו כמתואר בשרטוט כך שמתקיים: $KD = BL$. הוכח: המרובע ALCK הוא דלתון.

תשובות סופיות:

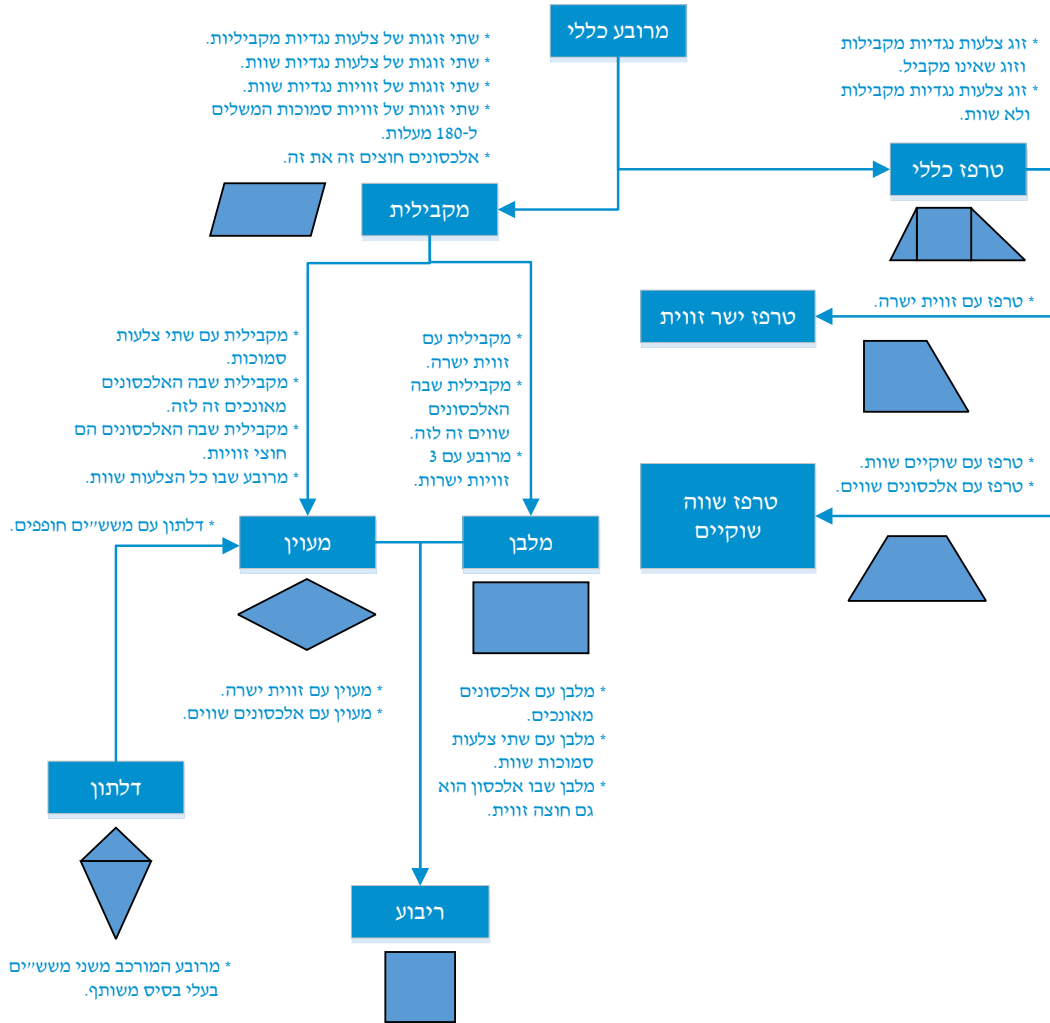
65) שאלת הוכחה.

66) שאלת הוכחה.

67) שאלת הוכחה.

סיכום משפחת המרובעים:

להלן דיאגרמה מסכמת של כל משפחת המרובעים ותכונותיהם:



מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 19 - גיאומטריה אוקלידית - שטחים והיקפים

תוכן העניינים

| | |
|-----|-----------------------------|
| 297 | 1. שטחים והיקפים של משולשים |
| 299 | 2. שטחים והיקפים של מרובעים |
| 300 | 3. שאלות עם מקבילית |
| 303 | 4. שאלות עם מלבן |
| 304 | 5. שאלות עם מעוין |
| 306 | 6. שאלות עם ריבוע |
| 308 | 7. שאלות עם טרפז |

שטחים והיקפים של משולשים:

סיכום כללי:

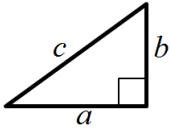
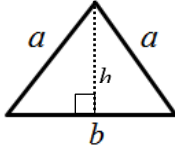
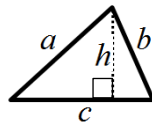
שטח – הגדרה:

גודל של תחום מישורי בהשוואה ליחידת מידה קבועה.
שטח נמדד ביחידות מידה של אורך בריבוע כגון:
מטר ריבועי (m^2), ס"מ ריבועי (סמ"ר cm^2).

היקף – הגדרה:

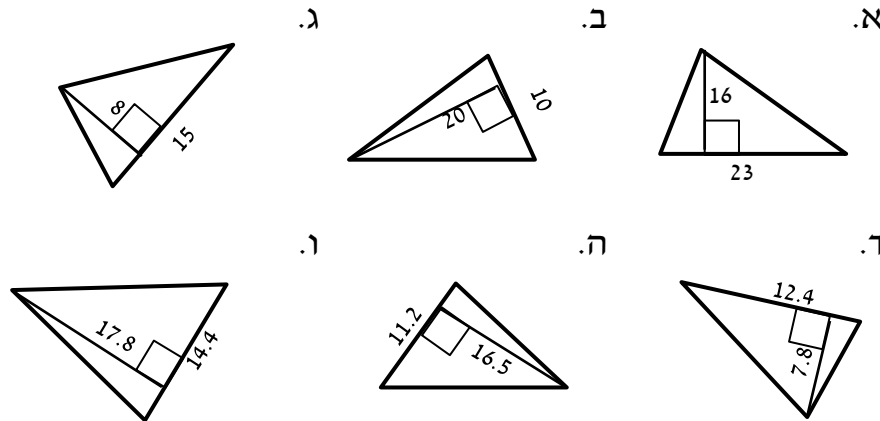
היקף מצולע הוא סכום כל צלעותיו.

משולשים:

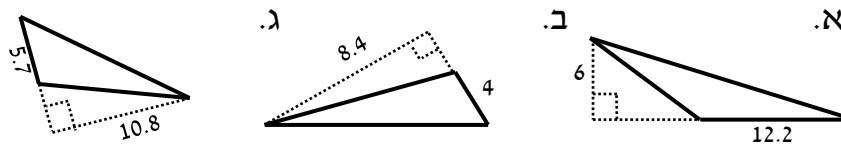
| משולש ישר זווית | משולש שווה שוקיים | משולש כללי | סוג |
|---|---|--|------|
|  |  |  | איור |
| $S = \frac{a \cdot b}{2}$ | $S = \frac{b \cdot h}{2}$ | $S = \frac{c \cdot h}{2}$ | שטח |
| $P = a + b + c$ | $P = 2a + b$ | $P = a + b + c$ | היקף |

שאלות:

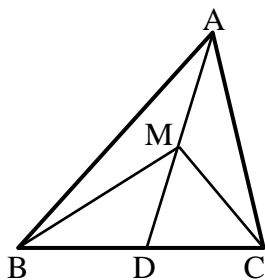
(1) מצא את שטחם של המשולשים הבאים (כל המידות נתונות בס"מ):



(2) מצא את שטחם של המשולשים קהי-הזווית הבאים (כל המידות בס"מ):



(3) הוכח כי אם במשולש ABC, הקטע AD המחבר את הקדקוד A עם הצלע BC יוצר שני משולשים שווים בשטחם אז הוא תיכון ל-BC.



(4) במשולש ABC הקטע AD הוא תיכון לצלע BC. M היא אמצע AD. הוכח כי:

א. הקטעים AD, MC ו-BM מחלקים את המשולש ABC ל-4 משולשים שווים שטח.

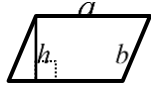
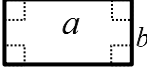
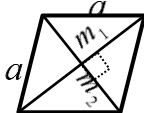

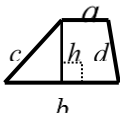
ב. $S_{MBC} = \frac{1}{2} S_{ABC}$.

תשובות סופיות:

- (1) א. 184 סמ"ר ב. 100 סמ"ר ג. 60 סמ"ר ד. 48.36 סמ"ר
- ה. 92.4 סמ"ר ו. 128.16 סמ"ר
- (2) א. 36.6 סמ"ר ב. 16.8 סמ"ר ג. 30.78 סמ"ר
- (3) שאלת הוכחה.
- (4) שאלת הוכחה.

שטחים והיקפים של מרובעים:

סיכום כללי:

| סוג | מקבילית | מלבן | מעוין | ריבוע | טרפז |
|------|---|---|---|---|---|
| איור |  |  |  |  |  |
| שטח | $S = a \cdot h$ | $S = a \cdot b$ | $S = a \cdot h$ $S = \frac{m_1 \cdot m_2}{2}$ | $S = a^2$ | $S = \frac{(a+b)h}{2}$ |
| היקף | $P = 2(a+b)$ | $P = 2(a+b)$ | $P = 4a$ | $P = 4a$ | $P = a+b+c+d$ |

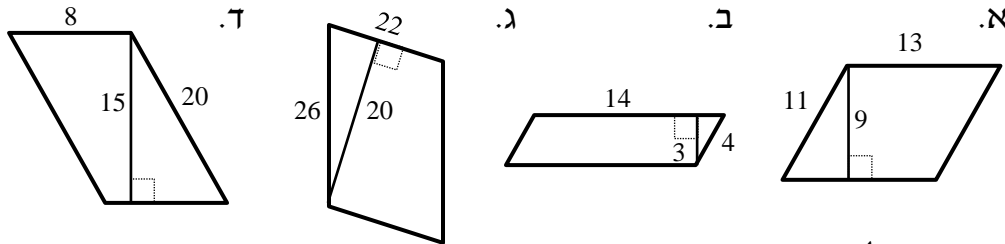
הערות כלליות:

- שטח מקבילית ניתן לחישוב ע"י מכפלת כל צלע בגובה המתאים לה. כך ניתן לקבל את הנוסחה: $S = a \cdot h_a = b \cdot h_b$ כאשר h_a ו- h_b הם הגבהים לצלעות a ו- b בהתאמה.
- ניתן לחשב שטח מעוין ע"י מחצית ממכפלת אלכסונים או ע"י מכפלת צלע בגובה שלה (שכן היא סוג של מקבילית).
- עבור טרפז ישר זווית, שבו $h=c$ נקבל: $S = \frac{(a+b)c}{2}$.
- ניתן לחשב שטח של טרפז ע"י הורדת גבהים, חלוקתו למלבן ושני משולשים, חישוב שטחם בנפרד ואיחודם.

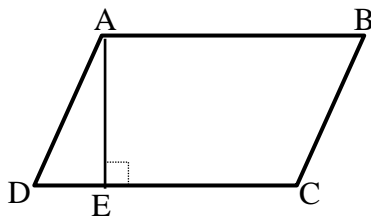
שאלות עם מקבילית:

שאלות:

(5) חשב את השטחים וההיקפים של המקבילות הבאות (כל המידות בס"מ):



(6) נתונה מקבילית ABCD.



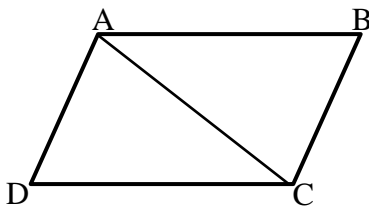
מעבירים גובה AE לצלע CD שאורכו הוא 6 ס"מ. ידוע כי שטח המקבילית הוא 60 סמ"ר.

א. מצא את אורך הצלע AB.

ב. ידוע כי היקף המקבילית הוא 36 ס"מ.

מצא את אורך הצלע BC.

(7) נתונה מקבילית ABCD.

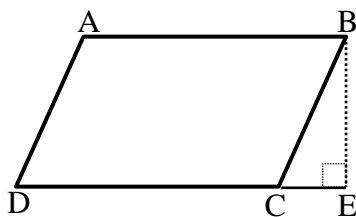


מעבירים את האלכסון AC שאורכו 25 ס"מ.

ידוע כי היקף המשולש ACD הוא 66 ס"מ.

חשב את היקף המקבילית.

(8) נתונה מקבילית ABCD.



מורידים גובה מהקדקוד B לצלע CD כך שנוצר המשולש BCE.

שטח המשולש BCE הוא 24 סמ"ר

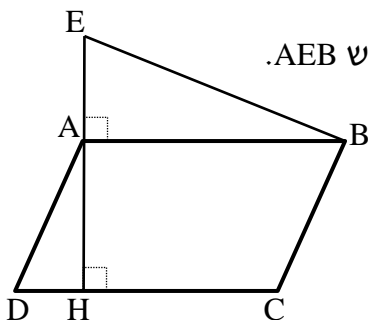
ושטח המקבילית ABCD הוא 112 סמ"ר.

נתון: $CE = 6$ ס"מ.

א. מצא את אורך הגובה BE.

ב. מצא את אורך הצלע AB של המקבילית.

(9) נתונה מקבילית ABCD.



מעלים אנך מהקדקוד A עד לנקודה E ויוצרים משולש AEB.

מורידים גובה AH לצלע CD שאורכו 12 ס"מ.

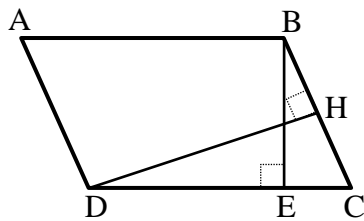
נתון: $AE = 8$ ס"מ, $AD = 13$ ס"מ.

שטח כל הצורה AEBCD הוא 256 סמ"ר.

א. מצא את אורך הצלע AB.

ב. חשב את היקף המקבילית ABCD.

10 במקבילית ABCD מעבירים את הגבהים BE ו-DH לצלעות CD ו-BC בהתאמה.



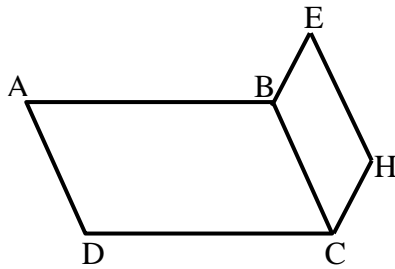
נתון: $BE = 12$ ס"מ, $BC = 14.4$ ס"מ, $DH = 15$ ס"מ.

א. חשב את שטח המקבילית ABCD.

ב. חשב את אורך הצלע AB.

ג. חשב את היקף המקבילית.

11 נתונה המקבילית ABCD.



על הצלע BC בונים מקבילית נוספת BCHE שהיקפה הוא 44 ס"מ.

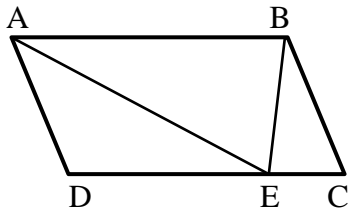
ידוע כי היקף הצורה ABEHCD הוא 94 ס"מ.

נתון: $BC = 15$ ס"מ.

א. חשב את אורך הצלע AB.

ב. חשב את היקף המקבילית ABCD.

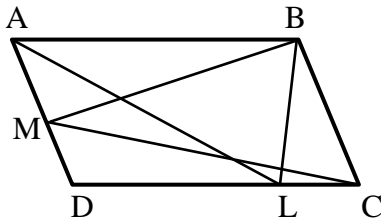
12 המרובע ABCD הוא מקבילית.



הנקודה E נמצאת על DC.

הוכח כי: $S_{AEB} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

13 המרובע ABCD הוא מקבילית.



הנקודות M ו-L נמצאות על הצלעות

AD ו-DC בהתאמה.

הוכח כי: $S_{BMC} = S_{ALB}$.

תשובות סופיות:

- (5) א. 48 ס"מ P , 117 סמ"ר S ב. 36 ס"מ P , 42 סמ"ר S
- ג. 96 ס"מ P , 440 סמ"ר S ד. 56 ס"מ P , 120 סמ"ר S
- (6) א. 10 ס"מ AB ב. 8 ס"מ BC
- (7) 82 ס"מ P
- (8) א. 8 ס"מ BE ב. 14 ס"מ AB
- (9) א. 16 ס"מ AB ב. 58 ס"מ P
- (10) א. 216 סמ"ר S ב. 18 ס"מ AB ג. 64.8 ס"מ P
- (11) א. 25 ס"מ AB ב. 80 ס"מ P
- (12) שאלת הוכחה.
- (13) שאלת הוכחה.

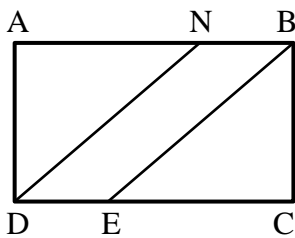
שאלות עם מלבן:

שאלות:

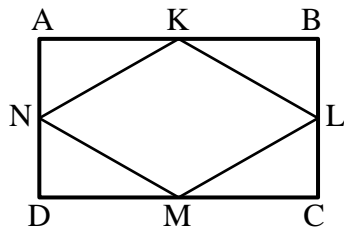
14) במלבן ABCD אורכי הצלעות הם: $AB = 12$ ס"מ, $BC = 8$ ס"מ. מצאו את ההיקף של המלבן.

15) במלבן ABCD אורך הצלע AB הוא 10 ס"מ. היקף המלבן הוא 32 ס"מ. מצאו את שטח המלבן.

16) במלבן ABCD נתון: $DC = 11$ ס"מ, $AD = 9$ ס"מ. מצאו את האורך של האלכסון AC.



17) המרובע ABCD הוא מלבן. הישרים DN ו-BE מקבילים. נתון: $AB = 32$ ס"מ, $DN = 30$ ס"מ ו- $BN = 8$ ס"מ. הוכח כי מרובע NBED הוא מקבילית וחשב את שטחה.



18) הנקודות K, L, M ו-N הן אמצעי הצלעות AB, BC, CD, AD בהתאמה במלבן ABCD. נתון כי היקף המלבן הוא 120 ס"מ וכי שטחו הוא 836 סמ"ר. חשב את שטחו של המרובע KLMN.

תשובות סופיות:

14) 40 ס"מ.

15) 60 סמ"ר.

16) 14.21 ס"מ $\approx \sqrt{202}$.

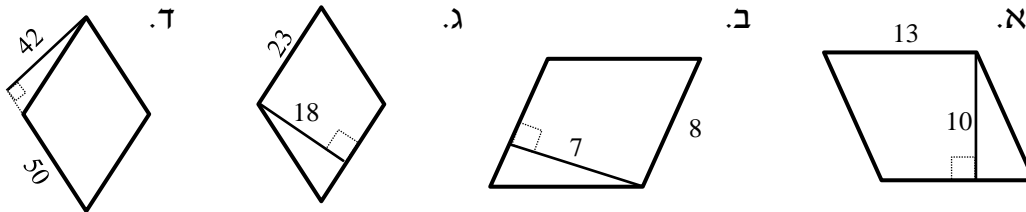
17) 144 סמ"ר.

18) 418 סמ"ר.

שאלות עם מעוין:

שאלות:

19) חשב את השטחים וההיקפים של המעוינים הבאים (כל המידות בס"מ):



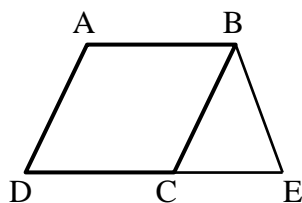
20) במעוין ABCD האלכסונים נפגשים בנקודה O. נתון: $AO = 3$ ס"מ, $BO = 4$ ס"מ. מצא את אורך צלע המעוין.

21) במעוין ABCD האלכסונים נפגשים בנקודה O. נתון: $AB = 12$ ס"מ, $BO = 8$ ס"מ. מצא את AO.

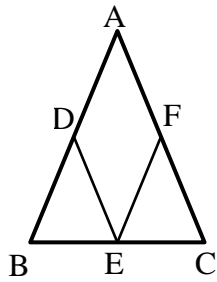
22) במעוין ABCD האלכסון AC שווה באורכו לצלע המעוין. נתון: $AB = 20$ ס"מ.

- א. חשב את אורך האלכסון BD.
ב. חשב את שטח המעוין.

23) נתון מעוין ABCD. אורך האלכסון הקצר הוא 7 ס"מ ושטח המעוין הוא 35 סמ"ר. חשב את היקף המעוין.

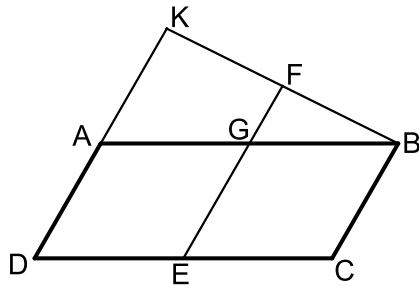


24) נתון מעוין ABCD בעל אורך צלע של 8 ס"מ. מעבירים את הקטע BE השווה באורכו לצלע המעוין כך שנוצר המשולש BCE. ידוע כי: $CE = 6$ ס"מ.
א. איזה סוג משולש הוא המשולש BCE? נמק.
ב. חשב את היקף הצורה ABCE.



- (25)** נתון משולש שווה שוקיים ABC , $(AB = AC)$. מסמנים את אמצעי צלעות המשולש ב-D, E ו-F ומעבירים את הקטעים DE ו-EF כך שהמרובע ADEF הוא מעוין. נתון: $BC = 12$ ס"מ, וכי היקף המשולש ABC הוא 48 ס"מ.
א. מצא את אורך צלע המעוין ADEF.
ב. חשב את היקף המעוין ADEF.

- (26)** המרובע ABCD הוא מקבילית שבה אורך הצלע AB גדולה פי 2 מהצלע AD. ממשיכים את הצלע AD עד לנקודה K ומחברים אותה לקדקוד B. מעבירים את הקטע FE כך ש-F היא אמצע הקטע BK. EF חותך את הצלע AB בנקודה G ומקביל לצלע AD.



- א. הוכח כי המרובע AGED הוא מעוין.
ב. שטח המעוין AGED הוא 20 סמ"ר.
חשב את שטח המרובע DCBK אם ידוע כי A היא אמצע הקטע DK.

תשובות סופיות:

- (19)** א. 52 ס"מ $P =$, 130 סמ"ר $S =$
ב. 32 ס"מ $P =$, 56 סמ"ר $S =$
ג. 92 ס"מ $P =$, 414 סמ"ר $S =$
(20) 5 ס"מ.
(21) 8.94 ס"מ $\approx \sqrt{80}$.
(22) א. $BD = 20\sqrt{3}$ ס"מ.
(23) 24.413 ס"מ.
(24) א. משולש שווה שוקיים, מכיוון ש- $BE=BC$. ב. 38 ס"מ $P =$.
(25) א. 9 ס"מ. ב. 36 ס"מ $P =$.
(26) א. 60 סמ"ר. ב. 60 סמ"ר.

שאלות עם ריבוע:

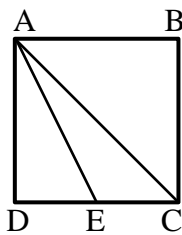
שאלות:

27) נתון ריבוע ABCD בעל אורך צלע של 6 ס"מ.

- חשב את שטח הריבוע.
- חשב את היקף הריבוע.
- חשב את אורך האלכסון בריבוע.

28) שטחו של ריבוע ABCD הוא 49 סמ"ר.

- מהו אורך צלע הריבוע?
- מהו אורך האלכסון בריבוע?
- מהו היקף הריבוע?



29) בריבוע ABCD מעבירים את הקטע AE כך ש-E היא אמצע

- הצלע DC ואת האלכסון AC. שטח הריבוע הוא 40 סמ"ר.
- מצא את אורך צלע הריבוע.
- מצא את אורך אלכסון הריבוע.
- מצא את אורך הקטע AE.

30) חשב את צלע הריבוע השווה בשטחו לשטח משולש שצלעו 25 ס"מ והגובה לצלע זו הוא 18 ס"מ.

31) נתונים מלבן וריבוע השווים בשטחם. אורכי צלעות המלבן הם 25 ס"מ ו-9 ס"מ. חשב את היקף הריבוע.

32) נתונים מלבן וריבוע השווים בהיקפם. שטח הריבוע הוא 36 ס"מ ואורך המלבן גדול ב-8 ס"מ מרוחבו. חשב את שטח המלבן.

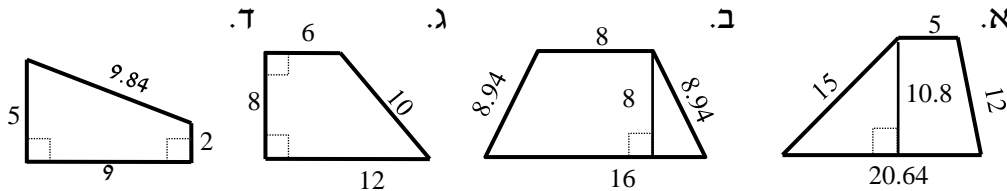
תשובות סופיות:

- | | | |
|--------------|-------------|------------------|
| ג. 8.48 ס"מ. | ב. 24 ס"מ | (27) א. 36 סמ"ר |
| ג. 28 ס"מ. | ב. 9.89 ס"מ | (28) א. 7 ס"מ |
| ג. 7.07 ס"מ. | ב. 8.94 ס"מ | (29) א. 6.32 ס"מ |
| | | (30) 15 ס"מ. |
| | | (31) 60 ס"מ. |
| | | (32) 20 סמ"ר. |

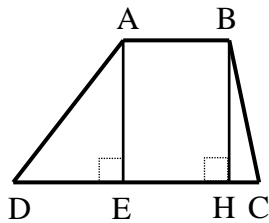
שאלות עם טרפז:

שאלות:

33) חשב את השטחים וההיקפים של הטרפזים הבאים (כל המידות בס"מ):

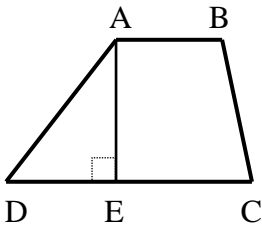


34) נתון טרפז ABCD, $(AB \parallel CD)$.



מורידים את הגבהים AE ו-BH שאורכם 8 ס"מ.
ידוע כי: $DE = 6$ ס"מ, $HC = 2$ ס"מ.
שטח הטרפז הוא 88 סמ"ר.
מצא את אורך בסיס הטרפז AB.

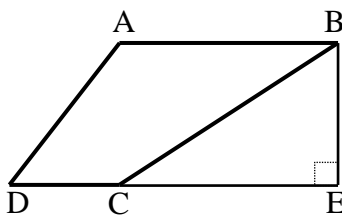
35) נתון טרפז ABCD, $(AB \parallel CD)$.



מורידים גובה AE מהקדקוד A.
היקף הטרפז הוא 68 ס"מ ונתון כי:
 $AD = 18$ ס"מ, $BC = 16$ ס"מ, $AB = 12$ ס"מ.
א. מצא את אורך הבסיס DC.

ב. מצא את הגובה AE אם ידוע כי שטח הטרפז הוא 255 סמ"ר.

36) נתון טרפז ABCD, $(AB \parallel CD)$.

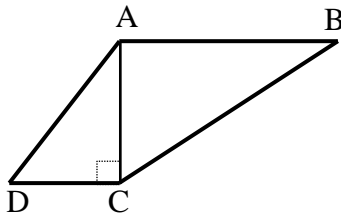


מהקדקוד B מורידים גובה חיצוני לטרפז BE
כאשר E נמצאת על המשך הבסיס DC.
ידוע כי: $AB = 20$ ס"מ, $DC = 8$ ס"מ.
וכי שטח הטרפז הוא 196 סמ"ר.

א. מצא את הגובה BE.

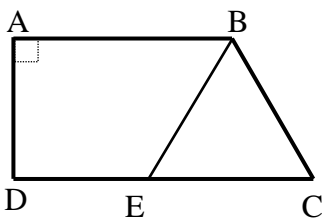
ב. נתון כי: $\angle D = 60^\circ$, $\angle BCD = 130^\circ$.

חשב את זווית A ואת זוויות המשולש BCE.



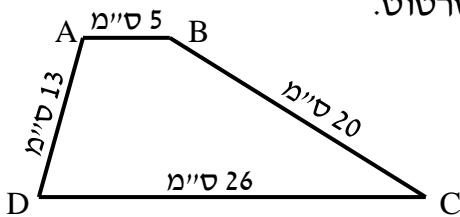
37 נתון טרפז $ABCD$, $(AB \parallel CD)$.

- האלכסון AC הוא גובה בטרפז ואורכו 12 ס"מ.
ידוע כי: $AD = AB = 13$ ס"מ, $BC = 17.7$ ס"מ.
היקף הטרפז הוא 48.7 ס"מ ו- $\angle B = 42.71^\circ$.
א. מצא את אורך הבסיס DC .
ב. חשב את שטח הטרפז.
ג. חשב את זווית C .

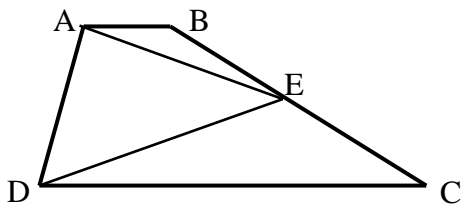


38 הטרפז $ABCD$, $(AB \parallel CD)$ הוא ישר זווית ($\angle A = 90^\circ$).

- מהנקודה E שעל הבסיס DC מעבירים את הקטע BE
כך שהמשולש BCE הוא שווה צלעות עם $BC = 14$ ס"מ.
היקף הטרפז $ABCD$ הוא 67 ס"מ ו- AD הוא 10 ס"מ.
א. מהו היקף הטרפז $ABED$?
ב. חשב את שטח הטרפז $ABED$.



39 נתון טרפז $ABCD$ שאורכי צלעותיו נתונים בסרטוט.
חשב את שטח הטרפז (פתור כתרגיל חישוב).



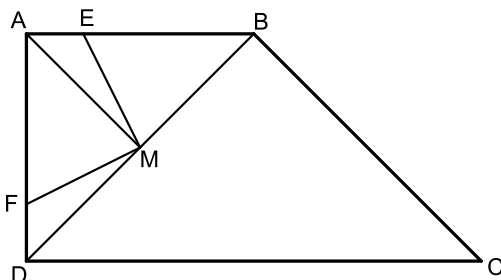
40 המרובע $ABCD$ הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.

הנקודה E היא אמצע השוק BC .

$$\text{הוכח כי: } S_{ADE} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

41 המרובע $ABCD$ הוא טרפז ישר זווית ($\angle A = 90^\circ$).

- הנקודה M נמצאת על אמצע האלכסון BD של הטרפז וממנה מעבירים את הקטעים ME ו- MF השווים זה לזה ומחברים אותה עם הקדקוד A .
נתון כי: $ME \perp MF$ וכי: $\angle DFM > 90^\circ$.



א. הוכח: $\triangle AMF \cong \triangle BME$.

ב. נתון כי: $BC = \sqrt{32}$, $AE = FD = 1$.

כמו כן: $AM \parallel BC$.

i. מצא את אורך הקטע BE .

ii. חשב את שטח הטרפז $ABCD$.

תשובות סופיות:

- (33) א. $S = 52.64$ ס"מ, $P = 138.456$ סמ"ר. ב. $S = 41.88$ ס"מ, $P = 96$ סמ"ר.
- ג. $S = 36$ ס"מ, $P = 72$ סמ"ר. ד. $S = 25.48$ ס"מ, $P = 31.5$ סמ"ר.
- (34) $AB = 7$ ס"מ
- (35) א. $DC = 22$ ס"מ. ב. $AE = 15$ ס"מ
- (36) א. $BE = 14$ ס"מ. ב. $\angle A = 120^\circ$, $\angle CBE = 40^\circ$, $\angle BCE = 50^\circ$, $\angle E = 90^\circ$.
- (37) א. $DC = 5$ ס"מ. ב. $S = 108$ סמ"ר. ג. $\angle C = 137.29^\circ$.
- (38) א. $P = 53$ ס"מ. ב. $S = 145$ סמ"ר.
- (39) 186 סמ"ר.
- (40) שאלת הוכחה.
- (41) א. 3 ס"מ. ב. ii. 24 סמ"ר.

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 20 - טריגונומטריה במשולש ישר זווית

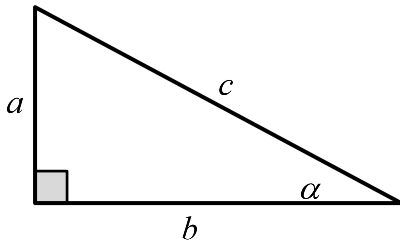
תוכן העניינים

1. משולש ישר זווית..... 311

משולש ישר זווית:

סיכום כללי:

הגדרות הפונקציות הטריגונומטריות:



$$\sin \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{a}{c}$$

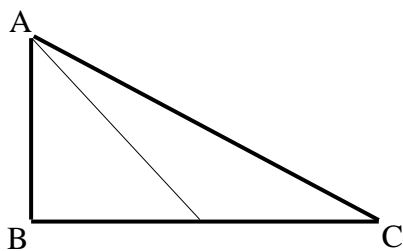
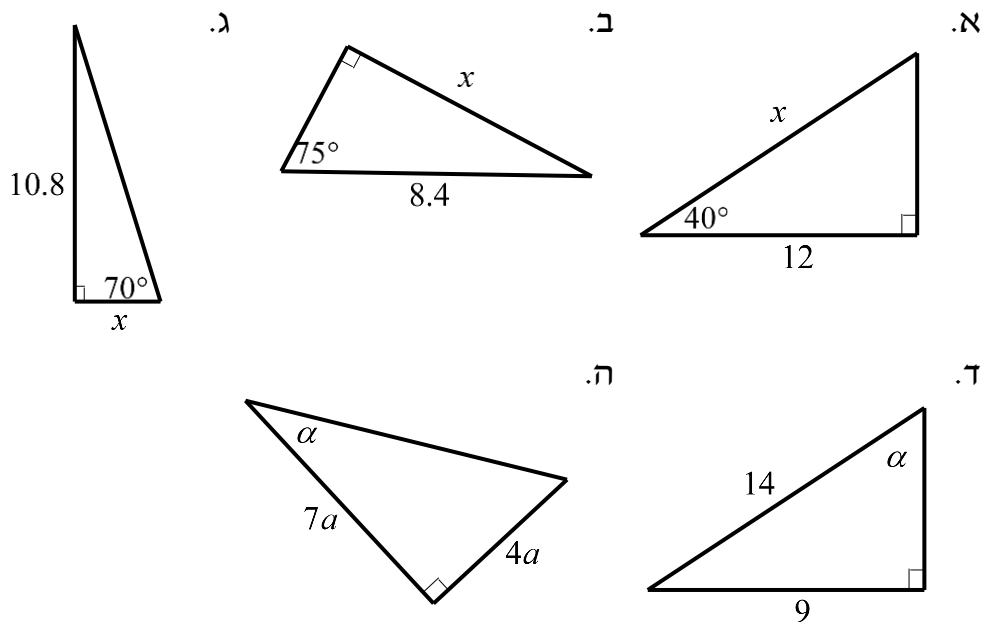
$$\cos \alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{הניצב שליד הזווית}} = \frac{a}{b}$$

$$a^2 + b^2 = c^2: \text{משפט פיתגורס}$$

שאלות:

1) מצא את ערכו של α/x במשולשים ישרי הזווית הבאים:



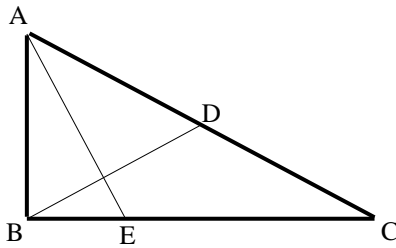
2) המשולש ABC שבציור הוא משולש

ישר זווית ($\sphericalangle B = 90^\circ$).

AD הוא התיכון לניצב BC.

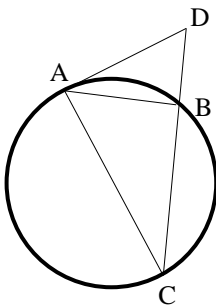
נתון: $\sphericalangle C = 28^\circ$, $AB = 6$ ס"מ.

מצא את AD ואת $\sphericalangle BAD$.



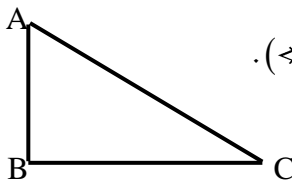
- (3) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$). BD הוא התיכון ליתר ו-AE הוא חוצה הזווית $\angle A$. נתון: $BC = 8$ ס"מ, $BD = 5.6$ ס"מ. מצא את BE ואת $\angle BAE$.

- (4) מצא את זוויותיו של מעוין שאורכי אלכסונו 24 ס"מ ו-18 ס"מ.

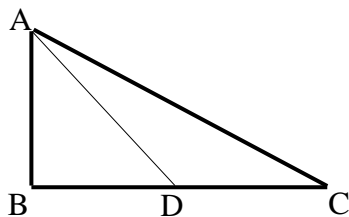


- (5) המשולש ABC חסום במעגל כך שהצלע AC היא קוטר המעגל. המשיק למעגל בנקודה A והמשך הצלע CB נפגשים בנקודה D. נתון: $\angle DAB = 32^\circ$, $BD = 4$ ס"מ. מצא את אורכו של רדיוס המעגל.

- (6) במשולש שווה שוקיים שבו השוק ארוכה ב-4 ס"מ מהבסיס נתון כי זווית הראש היא 34.92° . מצא את שטח המשולש.

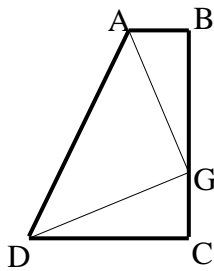


- (7) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$). נתון: $AB = a$, $\angle A = \alpha$. הבע באמצעות α ו- a את היקף המשולש.

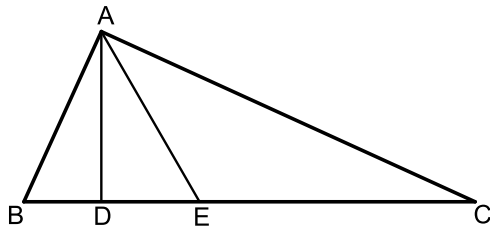


- (8) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$). AD הוא התיכון לניצב BC. נתון: $AB = b$, $\angle C = \alpha$. הבע באמצעות α ו- b את אורכי הקטעים AD ו-BD.

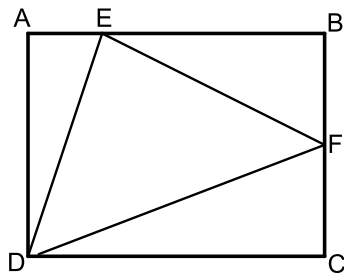
- (9) במשולש ישר זווית אחת הזוויות החדות היא α ואורך חוצה הזווית זו הוא k . הבע באמצעות α ו- k את שטח המשולש ואת אורך היתר.



- 10** טרפז ABCD הוא טרפז ישר זווית ($\angle B = \angle C = 90^\circ$). הנקודה G נמצאת על השוק BC כך ש- $AG \perp DG$. נתון: $\angle BAG = \beta$, $AG = DG = m$. הבע באמצעות β ו- m את שטח הטרפז.



- 11** המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle A = 90^\circ$). הקטעים AD ו- AE הם בהתאמה גובה ליתר וחוצה זווית. מסמנים: $\angle DAE = \alpha$, $DE = k$.
א. הבע באמצעות k ו- α את שטח המשולש ABC.
ב. חשב את שטח המשולש ABC אם ידוע כי: $\alpha = 30^\circ$ ו- $k = 2$.

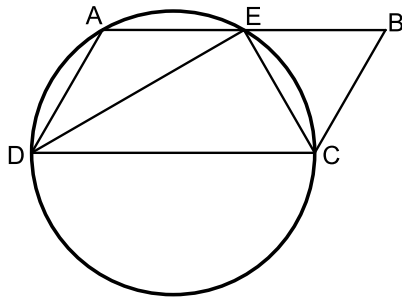


- 12** במלבן ABCD מסמנים את הנקודות E ו- F הנמצאות על הצלעות AB ו- BC בהתאמה כך ש- $3AE = BE$. מקיימת: $3AE = BE$ ו- F היא אמצע הצלע BC. אורך הצלע AD שווה לאורך הקטע BE. מעבירים את הקטעים EF, DF ו- DE כך שנוצר במשולש DEF.
א. סמן ב- t את אורך הקטע AE והבע באמצעות t את אורכי צלעות המשולש DEF.
ב. חשב את זוויות המשולש EDF.

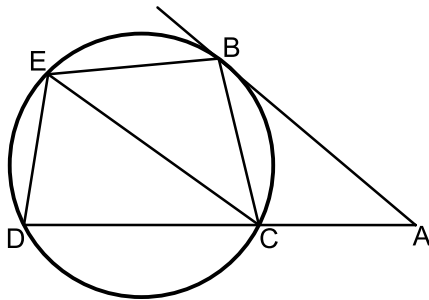
- 13** משולש שווה שוקיים שאורך שוקו k וזווית הבסיס שלו היא β חוסם מעגל. הבע באמצעות β ו- k את רדיוס המעגל.

- 14** בטרפז ישר זווית חסום מעגל. אורך השוק הארוכה בטרפז היא b והזווית שהיא יוצרת עם הבסיס הגדול היא α . הבע באמצעות α ו- b את אורכו של הבסיס הגדול בטרפז ואת שטחו.

הערה: השאלות הבאות משלבות ידע בגיאומטריה ובטריגונומטריה יחד:



- 15) דרך הקודקודים A, C ו- D של המקבילית $ABCD$ מעבירים מעגל. היקף המעגל חוצה את הצלע AB בנקודה E , $(AE = BE)$. נתון כי DC הוא קוטר במעגל וכי המיתר DE חוצה את זווית D .
- הוכח כי המיתר CE חוצה את זוויות C .
 - רדיוס המעגל יסומן ב- R .
 - הבע באמצעות R את היקף המקבילית.
 - מצא את רדיוס המעגל אם ידוע כי שטח המקבילית הוא $16\sqrt{3}$ סמ"ר.



- 16) מהנקודה A שמחוץ למעגל מעבירים משיק AB וישר חותך ACD . מעבירים את המיתרים BC ו- BE אשר זהים באורכם. כמו כן מעבירים את המיתר DE . אורך המיתר CE שונה מאורך המשיק AB .
- הוכח כי המרובע $ABEC$ הוא טרפז.
 - הוכח כי: $\angle BEC = 2 \cdot \angle EDC$.
 - נתונים: $\angle A = 40^\circ$, $AC = 6$ ס"מ, $AB = 9$ ס"מ, $CE = 8$ ס"מ. חשב את שטח המרובע $ABEC$.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x = 15.665 \quad \text{ב. } x = 8.114 \quad \text{ג. } x = 3.931 \quad \text{ד. } \alpha = 40.005^\circ \quad \text{ה. } \alpha = 29.745^\circ$$

$$(2) \quad AD = 8.236 \text{ ס"מ}, \quad \sphericalangle BAD = 43.24^\circ$$

$$(3) \quad BE = 3.294 \text{ ס"מ}, \quad \sphericalangle BAE = 22.792^\circ$$

$$(4) \quad 73.74^\circ, 73.74^\circ, 106.26^\circ, 106.26^\circ$$

$$(5) \quad R = 6.04 \text{ ס"מ}$$

$$(6) \quad S = 28.618 \text{ סמ"ר}$$

$$(7) \quad P = a \left(1 + \tan \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right)$$

$$(8) \quad AD = \sqrt{b^2 + \frac{b^2}{4 \tan^2 \alpha}}, \quad BD = \frac{b}{2 \tan \alpha}$$

$$(9) \quad AC = \frac{k \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}, \quad S = \frac{k^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \tan \alpha}{2}$$

$$(10) \quad \frac{(m \sin \beta + m \cos \beta)^2}{2}$$

$$(11) \quad \text{א. } S = \frac{k^2}{\cos 2\alpha \tan^2 \alpha} \quad \text{ב. } 24 \text{ סמ"ר}$$

$$(12) \quad \text{א. } DE = t\sqrt{10}, \quad EF = t\sqrt{11.25}, \quad DF = t\sqrt{18.25} \quad \text{ב. } 81.86^\circ, 51^\circ, 47.14^\circ$$

$$(13) \quad R = k \cos \beta \tan \frac{\beta}{2}$$

$$(14) \quad \frac{\frac{1}{2} b \sin \alpha + \frac{\frac{1}{2} b \sin \alpha}{\tan \frac{\alpha}{2}}}{}, \quad S = \frac{1}{2} b^2 \sin \alpha (1 + \sin \alpha)$$

$$(15) \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. } 6R \quad \text{ג. } 4 \text{ ס"מ}$$

$$(16) \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. שאלת הוכחה.} \quad \text{ג. } 32.78 \text{ סמ"ר}$$

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 21 - זהויות טריגונומטריות

תוכן העניינים

| | | |
|-----|-------|--|
| 316 | | 1. זהויות יסוד |
| 320 | | 2. ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות |
| 322 | | 3. מעגל היחידה |
| 325 | | 4. סכום והפרש זוויות |
| 329 | | 5. זווית כפולה |
| 332 | | 6. סכום והפרש פונקציות |

זהויות יסוד:

סיכום כללי:

| | | |
|--|---|------------------------------|
| $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$ | $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ | קשרים בין פונקציות |
| $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ | $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$ | זוויות משלימות ל- 90° |
| $\tan \alpha = \cot(90^\circ - \alpha)$ | $\cot \alpha = \tan(90^\circ - \alpha)$ | |
| $\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ | $\cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ | קשרים בין פונקציות |

שאלות:

הוכחת זהויות יסודיות:

הוכח את הזהויות הבאות תוך שימוש בזהויות היסוד:

$$\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1 \quad (2)$$

$$\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos^2 \alpha \quad (4)$$

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2 \quad (6)$$

$$\sin^2(\alpha + 45^\circ) + \sin^2(45^\circ - \alpha) = 1 \quad (8)$$

$$\frac{\sin \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^3 \alpha} = \tan^3 \alpha \quad (10)$$

$$\cos^2 \alpha (1 + \tan^2 \alpha) = 1 \quad (12)$$

$$\frac{\sin^3 \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha) - \cos^3 \alpha} = \tan \alpha \quad (14)$$

$$\frac{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha \quad (16)$$

$$\tan \alpha \cdot \cos \alpha = \sin \alpha \quad (1)$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \tan \alpha \quad (3)$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} = 2 \quad (5)$$

$$\frac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\cos \alpha} = \tan \alpha \quad (7)$$

$$\sqrt{1 + \tan^2 \alpha} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \tan \alpha \quad (9)$$

$$\frac{\sin(90^\circ - \alpha) - \cos^3 \alpha}{\sin^3 \alpha} = \cot \alpha \quad (11)$$

$$\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \cot \alpha \quad (13)$$

$$\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha \sin^2 \alpha \quad (15)$$

הוכחות מתקדמות:

$$(17) \quad \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} + \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = 2 + 4 \cot^2 \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(18) \quad \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} + \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{2}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(19) \quad (\cot \alpha - \tan \alpha)(\cot \alpha + \tan \alpha) = (1 + \cot^2 \alpha)(1 + \tan^2 \alpha) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(20) \quad \frac{\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \cot^4 \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(21) \quad 1 - \sin^2 \alpha (1 + \cos^2 \alpha) = \cos^4 \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(22) \quad \left(\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} + \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \right)^2 = 4 + 4 \cot^2 \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(23) \quad \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(24) \quad \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\cot \alpha + \cot \beta} = \tan \alpha \tan \beta \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

הבעת ביטויים וחישובים באמצעות זהויות יסוד:

$$(25) \quad \text{נתון כי: } \sin \alpha + \cos \alpha = k$$

הבע באמצעות k את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$

ב. $\sin \alpha - \cos \alpha$

ג. $\tan \alpha + \cot \alpha$

ד. $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$

$$(26) \quad \text{נתון כי: } \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

מבלי למצוא את α חשב את: $\tan^2 \alpha - 2 \cot^2 \alpha$

(27) נתון כי: $\tan \alpha = \sqrt{7}$.

מבלי למצוא את α חשב את: $\frac{\sqrt{7} \sin \alpha + 6 \cos \alpha}{\sqrt{28} \sin \alpha - \cos \alpha}$.

(28) חשב את ערך המכפלה הבאה: $\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \cdot \dots \cdot \tan 88^\circ \cdot \tan 89^\circ$.

תשובות סופיות:

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) שאלת הוכחה.
- (3) שאלת הוכחה.
- (4) שאלת הוכחה.
- (5) שאלת הוכחה.
- (6) שאלת הוכחה.
- (7) שאלת הוכחה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) שאלת הוכחה.
- (12) שאלת הוכחה.
- (13) שאלת הוכחה.
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.
- (16) שאלת הוכחה.
- (17) שאלת הוכחה.
- (18) שאלת הוכחה.
- (19) שאלת הוכחה.
- (20) שאלת הוכחה.
- (21) שאלת הוכחה.
- (22) שאלת הוכחה.
- (23) שאלת הוכחה.
- (24) שאלת הוכחה.

$$(25) \text{ א. } \frac{k^2 - 1}{2} \quad \text{ב. } \pm\sqrt{2 - k^2} \quad \text{ג. } \frac{2}{k^2 - 1} \quad \text{ד. } \frac{k}{2}(3 - k^2)$$

$$(26) -7.75$$

$$(27) 1$$

$$(28) 1$$

ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות:

סיכום כללי:

| $\alpha = 90^\circ$ | $\alpha = 60^\circ$ | $\alpha = 45^\circ$ | $\alpha = 30^\circ$ | $\alpha = 0^\circ$ | |
|---------------------|----------------------|----------------------|----------------------|--------------------|---------------|
| 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $\sin \alpha$ |
| 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\cos \alpha$ |
| ϕ | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | $\tan \alpha$ |
| 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | ϕ | $\cot \alpha$ |

הערות:

- ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות של 0° ו- 90° תלמדנה בהמשך אך ניתנו כעת כדי להשלים את תמונת ערכי הזוויות.
- ניתן לזכור את הטבלה ע"י כתיבה של שורת הסינוס לפי: $\frac{\sqrt{4}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{0}}{2}$ אשר נותנים את הערכים של השורה הראשונה לאחר פישוט קל. עבור שורת ה- $\cos \alpha$ יש להפוך את הערכים ולבסוף יש לחלק כל זוג ביטויים כדי לכתוב את ערכי $\tan \alpha$ ולסובב עבור ערכי $\cot \alpha$.

שאלות:

חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בערכי הפונקציות הטריגונומטריות של זוויות מיוחדות:

$$1) \sin 30^\circ + \cos 30^\circ$$

$$2) \frac{\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ}{\sin 60^\circ}$$

$$3) \tan 45^\circ + \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ}$$

$$\cdot \frac{1 + \cos 60^\circ}{2 \sin 60^\circ} \quad (4)$$

$$\cdot \cos^2 45^\circ + \sin^2 30^\circ \quad (5)$$

$$\cdot \frac{\tan^2 60^\circ \cdot \cos^2 30^\circ}{\cos^2 60^\circ} \quad (6)$$

$$\cdot \frac{\tan 30^\circ \cdot \cot 60^\circ - \cot 45^\circ \cdot \tan 45^\circ}{4 \left(\sin^2 60^\circ - \frac{1}{4} \right)} \quad (7)$$

$$\cdot \frac{27 \cot^4 60^\circ}{\sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot \tan 60^\circ} \quad (8)$$

תשובות סופיות:

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 \quad (3)$$

$$\frac{3}{2\sqrt{3}} \quad (4)$$

$$\frac{3}{4} \quad (5)$$

$$9 \quad (6)$$

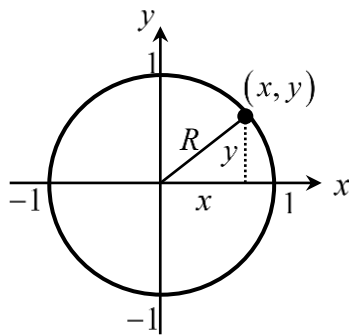
$$-\frac{1}{3} \quad (7)$$

$$2\sqrt{6} \quad (8)$$

מעגל היחידה – הגדרה וזהויות:

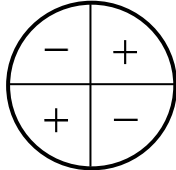
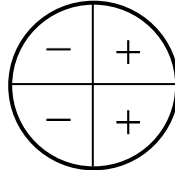
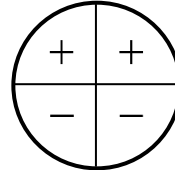
סיכום כללי:

הגדרת מעגל היחידה:



- מעגל קנוני שרדיוסו 1 מוגדר להיות המעגל הטריגונומטרי.
- הנקודות $(0, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ מתאימות לזוויות של 270° , 180° , 90° , 0° .

הזהויות של המעגל הטריגונומטרי:

| טנגנס | קוסינוס | סינוס | רביע |
|---|---|---|--------|
| $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$ | $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ | $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ | II |
| $\tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$ | $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$ | $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$ | III |
| $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ | $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ | $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ | VI |
|  |  |  | סימנים |

זהויות עבור זווית הגדולות מ-360 מעלות:

ניתן להוסיף או להוריד 'סיבובים' שלמים לזווית לפי:

$$\boxed{\sin(\alpha + 360^\circ k) = \sin \alpha} \quad \boxed{\tan(\alpha + 180^\circ k) = \tan \alpha}$$

$$\boxed{\cos(\alpha + 360^\circ k) = \cos \alpha} \quad \boxed{\cot(\alpha + 180^\circ k) = \cot \alpha}$$

כאשר k הוא מספר שלם מציין את מספר הסיבובים.

שאלות:

(1) העבר את הביטויים הבאים לביטויים עם זווית ברביע הראשון. אין צורך לחשב את ערך הביטוי:

| | |
|---------------------|---------------------|
| א. $\sin 120^\circ$ | ב. $\cos 150^\circ$ |
| ג. $\tan 160^\circ$ | ד. $\cot 130^\circ$ |
| ה. $\sin 215^\circ$ | ו. $\cos 245^\circ$ |
| ז. $\tan 230^\circ$ | ח. $\cot 200^\circ$ |
| ט. $\sin 300^\circ$ | י. $\cos 310^\circ$ |

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים ע"י שימוש בזהויות המעגל הטריגונומטרי:

| | | |
|---------------------|----------------------|------------------------|
| א. $\sin 150^\circ$ | ב. $\cos 210^\circ$ | ג. $\tan 120^\circ$ |
| ד. $\sin 330^\circ$ | ה. $\tan 225^\circ$ | ו. $\sin 315^\circ$ |
| ז. $\cos 120^\circ$ | ח. $\tan(-30^\circ)$ | ט. $\cos(-45^\circ)$ |
| י. $\sin 510^\circ$ | יא. $\cos 930^\circ$ | יב. $\tan(-225^\circ)$ |

(3) חשב את ערכי הביטויים הבאים ללא שימוש במחשבון:

א. $(\sin 240^\circ \cdot \tan 150^\circ + \cos(-60^\circ))^2$

ב. $8\sin^2 150^\circ \cdot \tan 135^\circ - 2 \cdot \sin 135^\circ \cdot \cos(-135^\circ)$

ג. $\frac{\cot 225^\circ}{\sin(-225^\circ) - \cos 135^\circ} + \tan^2 210^\circ$

(4) הוכח כי אם α, β ו- γ הן זוויות במשולש, אז מתקיים:

א. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \gamma$

ב. $\sin\left(\frac{\gamma + \beta}{2}\right) = \cos \frac{\alpha}{2}$

תשובות סופיות:

(1) א. $\sin 60^\circ$ ב. $-\cos 30^\circ$ ג. $-\tan 20^\circ$ ד. $-\cot 50^\circ$

ה. $-\sin 35^\circ$ ו. $-\cos 65^\circ$ ז. $\tan 50^\circ$ ח. $\cot 20^\circ$

ט. $-\sin 60^\circ$ י. $\cos 50^\circ$

(2) א. $\frac{1}{2}$ ב. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ג. $-\sqrt{3}$ ד. $-\frac{1}{2}$

ה. 1 ו. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ז. $-\frac{1}{2}$ ח. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

ט. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ י. $\frac{1}{2}$ יא. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ יב. -1

(3) א. 1 ב. -1 ג. $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}$

(4) שאלת הוכחה.

סכום והפרש זוויות:

סיכום כללי:

סכום והפרש עבור $\sin(\alpha \pm \beta)$ ו- $\cos(\alpha \pm \beta)$ יחושב לפי:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

סכום והפרש עבור $\tan(\alpha \pm \beta)$ ו- $\cot(\alpha \pm \beta)$

$$\begin{aligned} \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \\ \cot(\alpha \pm \beta) &= \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha} \end{aligned}$$

הערה:

בסרטון התיאוריה אין התייחסות מיוחדת לזהויות עבור $\tan(\alpha \pm \beta)$ ו- $\cot(\alpha \pm \beta)$.

שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בזהויות של סכום והפרש זוויות וללא שימוש במחשבון:

- | | | |
|-----------------------|---------------------|-----------------------|
| א. $\sin 75^\circ$ | ב. $\sin 15^\circ$ | ג. $\sin 105^\circ$ |
| ד. $\sin(-15^\circ)$ | ה. $\cos 75^\circ$ | ו. $\cos 15^\circ$ |
| ז. $\cos(-105^\circ)$ | ח. $\cos 165^\circ$ | ט. $\cos(-195^\circ)$ |

2) חשב ללא שימוש במחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

- א. $\sin 65^\circ \cos 25^\circ + \sin 25^\circ \cos 65^\circ$
 ב. $5 \cos 50^\circ \cos 20^\circ + 5 \sin 50^\circ \sin 20^\circ$

(3) הוכח את הזהויות הבאות :

א. $\sin(60^\circ + \alpha) + \sin(60^\circ - \alpha) = \sqrt{3} \cos \alpha$

ב. $\cos(45^\circ - \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha) = \sqrt{2} \sin \alpha$

ג. $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$

ד. $\tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$

(4) נתון: $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \beta = \frac{8}{17}$ ו- α, β זוויות חדות.

מבלי למצוא את הערכים של α ו- β חשב :

א. $\sin(\alpha + \beta)$

ב. $\cos(\alpha + \beta)$

ג. $\tan(\alpha + \beta)$

(5) הוכח את הזהות: $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \beta \cos \alpha$

(6) הוכח את הזהות: $(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha) = \sin 3\alpha + \cos \alpha$

(7) הוכח את הזהות: $\tan 7\alpha - \tan 5\alpha - \tan 2\alpha = \tan 7\alpha \tan 5\alpha \tan 2\alpha$

(8) הוכח את הזהות: $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

(9) הוכח את הזהות: $\cot \alpha - \cot \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$

(10) הוכח את הזהות הבאה :

$\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \sin(\alpha + \beta + \gamma)$

(11) הוכח כי מתקיים: $\sin 65^\circ \cos 25^\circ + \sin 25^\circ \cos 65^\circ = 1$.

(12) הוכח כי מתקיים: $\tan 18^\circ \tan 27^\circ + \tan 18^\circ + \tan 27^\circ = 1$.

(13) נתון כי: $\sin 76^\circ = m$. הבע את $\sin 31^\circ$ באמצעות m .

(14) הזוויות α ו- β הן זוויות חדות.

נתון כי: $\tan \beta = \frac{(2k-1)\sqrt{3}}{3}$ ו- $\tan \alpha = \frac{(2-k)\sqrt{3}}{3k}$.

הראה כי מתקיים: $\alpha + \beta = 60^\circ$.

(15) היעזר בנוסחה: $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$ ומצא את $\tan x$ ו- $\tan y$.

אם ידוע כי: $\tan(x+y) = -3$ ו- $\tan(x-y) = \frac{1}{3}$. הבחן בין שני מקרים.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \begin{array}{llll} \text{א. } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \text{ב. } \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} & \text{ג. } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \text{ד. } \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \text{ו. } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \text{ז. } \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} & \text{ח. } -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \text{ט. } -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \text{י. } \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} & \text{יא. } \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} & \text{יב. } \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} & \text{יג. } \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } 1 & \text{ב. } \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

(3) שאלת הוכחה.

$$(4) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } \frac{84}{85} & \text{ב. } -\frac{13}{85} \\ \text{ג. } -6\frac{6}{13} & \end{array}$$

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

$$(14) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} (m - \sqrt{1-m^2})$$

(15) שאלת הוכחה.

$$(16) \quad 1 \text{ ו-} 2 \text{ או } -\frac{1}{2} \text{ ו-} -1$$

זווית כפולה:

סיכום כללי:

נפתח זווית כפולה לפי הצורות הבאות:

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

שאלות:

(1) הוכח את הזהויות הבאות:

- | | |
|---|---|
| <p>א. $4 \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha = \sin 4\alpha$</p> <p>ב. $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$</p> <p>ג. $(\sin 3\alpha - \cos 3\alpha)^2 = 1 - \sin 6\alpha$</p> <p>ד. $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$</p> <p>ה. $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \cot 2\alpha$</p> <p>ו. $\frac{\cos 2\alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos 2\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{1}{2} \cot 2\alpha$</p> <p>ז. $\cos^2 2\alpha = 4 \sin^4 \alpha - 4 \sin^2 \alpha + 1$</p> <p>ח. $\cos 4\alpha = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1$</p> | <p>א. $4 \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha = \sin 4\alpha$</p> <p>ב. $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$</p> <p>ג. $(\sin 3\alpha - \cos 3\alpha)^2 = 1 - \sin 6\alpha$</p> <p>ד. $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$</p> <p>ה. $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \cot 2\alpha$</p> <p>ו. $\frac{\cos 2\alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos 2\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{1}{2} \cot 2\alpha$</p> <p>ז. $\cos^2 2\alpha = 4 \sin^4 \alpha - 4 \sin^2 \alpha + 1$</p> <p>ח. $\cos 4\alpha = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1$</p> |
|---|---|

(2) הוכח את הזהות: $\sin^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$ ע"י כתיבה של $\sin 3\alpha$

לפי: $\sin(\alpha + 2\alpha)$ ושימוש בזהויות שנלמדו.

(3) הוכח את הזהות: $\cos^3 \alpha = \frac{3 \cos \alpha + \cos 3\alpha}{4}$ ע"י כתיבה של $\cos 3\alpha$

לפי: $\cos(\alpha + 2\alpha)$ ושימוש בזהויות שנלמדו.

(4) נתונה זווית חדה α המקיימת: $\sin \alpha = \frac{40}{41}$. מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א. $\cos \alpha$

ב. $\tan \alpha$

ג. $\sin 2\alpha$

ד. $\cos 2\alpha$

ה. $\tan 2\alpha$

(5) נתונה זווית חדה α המקיימת: $\tan \alpha = \frac{5}{12}$. מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א. $\sin \alpha$.

ב. $\cos \alpha$.

ג. $\sin 2\alpha$.

ד. $\cos 2\alpha$.

(6) נתונה זווית α ברביע הראשון וזווית β ברביע השני המקיימות: $\sin \alpha = \frac{5}{13}$

ו- $\cos \beta = -0.8$. מבלי למצוא את α ו- β חשב את הביטויים הבאים:

א. $\sin(\alpha + \beta)$.

ב. $\cos(\alpha + \beta)$.

ג. $\sin(2\alpha + \beta)$.

(7) נתון כי $\sin \alpha + \cos \alpha = 1.2$ עבור $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. חשב את $\sin 2\alpha$.

(8) פשט את הביטוי הבא: $\sqrt{\frac{1 + \cos 8\alpha}{2}}$

(9) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sin 16^\circ \cos 16^\circ}{3 - 6 \sin^2 29^\circ}$

(10) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sin^2 78^\circ - \cos^2 78^\circ}{\sin 66^\circ}$

(11) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא: $\frac{5 \tan 15^\circ (1 - 2 \cos^2 15^\circ)}{1 - \tan^2 15^\circ}$

תשובות סופיות:

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

$$(4) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } \frac{9}{41} & \text{ב. } 4\frac{4}{9} \\ \text{ג. } \frac{720}{1681} & \text{ד. } -\frac{1519}{1681} \end{array}$$

$$\text{ה. } -\frac{720}{1519}$$

$$(5) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } \frac{5}{13} & \text{ב. } \frac{12}{13} \\ \text{ג. } \frac{120}{169} & \text{ד. } \frac{119}{169} \end{array}$$

$$(6) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } \frac{16}{65} & \text{ב. } -\frac{63}{65} \\ \text{ג. } -\frac{123}{845} & \end{array}$$

(7) .0.44

(8) $\cos 4\alpha$.

(9) $\frac{1}{6}$.

(10) .1

(11) .-1.25

סכום והפרש פונקציות טריגונומטריות:

סיכום כללי:

להלן נוסחאות הסכום וההפרש של פונקציות טריגונומטריות:

| |
|---|
| $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ |
| $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ |
| $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ |
| $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ |

הערה:

בסרטון התיאוריה אין התייחסות לזהויות הסכום וההפרש של טנגנס ושל קוטנגנס עקב חוסר השימוש בהן בפתרון שאלות.

שאלות:

- (1) הוכח את הזהות הבאה : $\sin 5\alpha + \sin 3\alpha = 2 \sin 4\alpha \cos \alpha$
- (2) הוכח את הזהות הבאה : $\sin 7\alpha - \sin 2\alpha = 2 \sin 2.5\alpha \cos 4.5\alpha$
- (3) הוכח את הזהות הבאה : $\cos \alpha + \cos 5\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 3\alpha$
- (4) הוכח את הזהות הבאה : $\cos 5\alpha - \cos 2\alpha = -2 \sin 3.5\alpha \cos 1.5\alpha$
- (5) הוכח את הזהות הבאה : $\sin 3\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha$
- (6) הוכח את הזהות הבאה : $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$
- (7) הוכח את הזהות הבאה : $\sin(2\alpha + \beta) - 2 \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha = \sin \beta$
- (8) הוכח את הזהות הבאה : $\frac{\sin 5\alpha - \sin \alpha}{\sin 4\alpha - \sin 2\alpha} = 2 \cos \alpha$

$$(9) \quad \frac{\sin 7\alpha - \sin 3\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 6\alpha} = 2 \sin \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה :}$$

$$(10) \quad \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \tan 2\alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה :}$$

$$(11) \quad \tan \alpha + \tan 3\alpha = \frac{2 \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha} \quad \text{הוכח את הזהות הבאה :}$$

$$(12) \quad \text{פשט את הביטוי : } \frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1} \quad \text{ומצא את ערכו מבלי להיעזר}$$

$$\text{במחשבון אם ידוע כי } \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{6}$$

$$(13) \quad \text{נתון כי } \alpha \text{ ו- } \beta \text{ הן זוויות חדות המקיימות : } \sin \alpha = \frac{2mn}{m^2 + n^2} \text{ ו- } \sin \beta = \frac{n^2 - m^2}{m^2 + n^2}$$

$$\text{הראה כי : } \alpha + \beta = 90^\circ$$

$$(14) \quad \text{היעזר במעבר מכפל לסכום או הפרש}$$

$$\text{והוכח כי : } \cos 6\alpha \cos 2\alpha - \cos 5\alpha \cos \alpha = -\sin 7\alpha \sin \alpha$$

$$(15) \quad \text{היעזר במעבר מכפל לסכום או הפרש}$$

$$\text{והוכח כי : } \sin 4\alpha \sin 2\alpha - \sin 5\alpha \sin \alpha + \cos 3\alpha \cos \alpha = \cos 2\alpha$$

$$(16) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא : } \sin 52.5^\circ \cdot \sin 7.5^\circ$$

$$(17) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא : } \frac{\sin 35^\circ \sin 55^\circ}{\cos 40^\circ \cos 20^\circ - 0.25}$$

$$(18) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא : } \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$$

$$(19) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא : } \sin 5^\circ \cdot \sin 25^\circ \cdot \sin 35^\circ \cdot \sin 55^\circ \cdot \sin 65^\circ \cdot \sin 85^\circ$$

תשובות סופיות:

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) שאלת הוכחה.

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12) $-\frac{7}{9}$.

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$.

(17) .1

(18) $\frac{1}{8}$.(19) $\frac{1}{64}$.

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 22 - משוואות טריגונומטריות

תוכן העניינים

1. משוואות טריגונומטריות כלליות 335
2. משוואות הנפתרות עי טכניקה אלגברית 338
3. משוואות הנפתרות על ידי זהויות יסוד 340
4. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של מעגל היחידה 342
5. משוואות הנפתרות על ידי חלוקה בקוסינוס 343
6. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש זוויות 344
7. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של זווית כפולה 345
8. משוואות מהצורה $a \sin(x) + b \cos(x) = c$ 346
9. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש פונקציות 347
10. משוואות עם תחום נתון 349
11. משוואות עם זוויות ברדיאנים 350
12. אי שוויונים טריגונומטריים 354

משוואות טריגונומטריות כלליות:

סיכום כללי:

פתרון כללי של משוואות טריגונומטריות (במעלות):

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריגונומטריות היסודיות כאשר x הוא משתנה ו- α היא זווית נתונה/ידועה:

| המשוואה | הפתרון |
|------------------------|---|
| $\sin x = \sin \alpha$ | $x_1 = \alpha + 360^\circ k$, $x_2 = 180^\circ - \alpha + 360^\circ k$ |
| $\cos x = \cos \alpha$ | $x_{1,2} = \pm \alpha + 360^\circ k$ |
| $\tan x = \tan \alpha$ | $x = \alpha + 180^\circ k$ |
| $\cot x = \cot \alpha$ | $x = \alpha + 180^\circ k$ |

כאשר k מספר שלם.

שאלות:

(1) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הסינוס):

$$\text{א. } \sin x = \frac{1}{2} \quad \text{ב. } \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ג. } \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ד. } \sin x = -\frac{1}{2}$$

(2) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הקוסינוס):

$$\text{א. } \cos x = \frac{1}{2} \quad \text{ב. } \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(3) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הטנגנס):

$$\text{א. } \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ב. } \tan x = -1$$

(4) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (זווית כללית):

א. $\sin x = 0.7$ ב. $\cos x = -0.6$ ג. $\tan x = 5$

(5) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות לא מסודרות):

א. $\sin 3x = \frac{1}{2}$ ב. $2 \cos 2x = -\sqrt{3}$

ג. $\tan 5x = -1$ ד. $3 \sin 2x = 2$

ה. $3 \cos 3x = 1$ ו. $2 \tan 4x = 1$

(6) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (ארגומנט מורכב):

א. $\sin(2x + 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ב. $\cos(75^\circ - 3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ג. $\tan(50^\circ - x) = 1.3$

(7) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציות עם ארגומנטים שונים):

א. $\sin x = \sin 3x$ ב. $\sin 2x = \sin(x + 30^\circ)$

ג. $\sin x = \sin(120^\circ - x)$ ד. $\cos x = \cos 3x$

ה. $\cos x = \cos(40^\circ - x)$ ו. $\tan x = \tan 3x$

ז. $\tan 2x = \tan(60^\circ - x)$

(8) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות מיוחדות):

א. $\sin x = 0$ ב. $\sin x = 1$

ג. $\sin x = -1$ ד. $\cos x = 0$

ה. $\cos x = 1$ ו. $\cos x = -1$

ז. $\tan x = 0$ ח. $\tan x = 1$

תשובות סופיות:

- (1) א. $x_1 = 30^\circ + 360^\circ k$, $x_2 = 150^\circ + 360^\circ k$ ב. $x_1 = 45^\circ + 360^\circ k$, $x_2 = 135^\circ + 360^\circ k$
- ג. $x_1 = -60^\circ + 360^\circ k$, $x_2 = 240^\circ + 360^\circ k$ ד. $x_1 = -30^\circ + 360^\circ k$, $x_2 = 210^\circ + 360^\circ k$
- (2) א. $x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k$ ב. $x_{1,2} = \pm 150^\circ + 360^\circ k$
- (3) א. $x = 30^\circ + 180^\circ k$ ב. $x = 135^\circ + 180^\circ k$
- (4) א. $x_1 = 44.427^\circ + 360^\circ k$, $x_2 = 135.573^\circ + 360^\circ k$ ב. $x_{1,2} = 126.87^\circ + 360^\circ k$
- ג. $x = 78.69^\circ + 180^\circ k$
- (5) א. $x_1 = 10^\circ + 120^\circ k$, $x_2 = 50^\circ + 120^\circ k$ ב. $x_1 = 75^\circ + 180^\circ k$, $x_2 = -75^\circ + 180^\circ k$
- ג. $x = -9^\circ + 36^\circ k$ ד. $x_1 = 20.9^\circ + 180^\circ k$, $x_2 = 69.09^\circ + 180^\circ k$
- ה. $x_{1,2} = \pm 23.5^\circ + 120^\circ k$ ו. $x = 6.64^\circ + 45^\circ k$
- (6) א. $x_1 = 105^\circ + 180^\circ k$, $x_2 = -45^\circ + 180^\circ k$ ב. $x_1 = 10^\circ + 120^\circ k$, $x_2 = 40^\circ + 120^\circ k$
- ג. $x = -2.431^\circ + 180^\circ k$ ד. $x_1 = 180^\circ k$, $x_2 = 45^\circ + 90^\circ k$
- (7) א. $x = 60^\circ + 180^\circ k$ ב. $x = 90^\circ k$ ג. $x = 20^\circ + 180^\circ k$
- ד. $x = 20^\circ + 60^\circ k$ ה. $x = 180^\circ k$ ו. $x = 20^\circ + 180^\circ k$
- (8) א. $x = 180^\circ k$ ב. $x = 90^\circ + 360^\circ k$ ג. $x = 180^\circ + 360^\circ k$
- ד. $x = 90^\circ + 180^\circ k$ ה. $x = 360^\circ k$ ו. $x = 180^\circ + 360^\circ k$
- ז. $x = 180^\circ k$ ח. $x = 45^\circ + 180^\circ k$

משוואות הנפתרות ע"י טכניקה אלגברית:

סיכום כללי:

נעזר בטכניקה אלגברית בכדי להביא משוואה מורכבת לצורה של משוואה יסודית.

טכניקות שכיחות:

- הוצאת שורש ריבועי.
- פירוק לגורמים (ע"י הוצאת גורם משותף, ע"י נוסחאות הכפל המקוצר וע"י פירוק טרינום).
- פתרון משוואה ריבועית.

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (טכניקה אלגברית):

$$\sin^2 x = \frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\cos^2 x = \frac{3}{4} \quad (1)$$

$$\sin x \cos 3x = 0 \quad (4)$$

$$\tan^2 2x = 3 \quad (3)$$

$$2 \cos^2 x + \sqrt{3} \cos x = 0 \quad (6)$$

$$\sin 2x - 2 \sin^2 2x = 0 \quad (5)$$

$$3 \sin^2 x - \sin x = 2 \quad (8)$$

$$2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \quad (7)$$

$$\cos^2 x + 2 \cos x = 3 \quad (10)$$

$$6 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \quad (9)$$

$$\tan^2 x = 4 \tan x - 1 \quad (12)$$

$$\tan^2 x - 3 \tan x - 4 = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\sin x}{\cos x - 1} = 0 \quad (14)$$

$$\cos x - \frac{2}{\cos x} + 1 = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\cos 2x}{\tan x + 1} = 0 \quad (15)$$

תשובות סופיות:

$$\cdot x_{1,2} = \pm 30^\circ + 360^\circ k, x_{3,4} = \pm 150^\circ + 360^\circ k \quad (1)$$

$$\cdot x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, x_3 = 330^\circ + 360^\circ k, x_4 = 210^\circ + 360^\circ k \quad (2)$$

$$\cdot x_1 = 30^\circ + 90^\circ k, x_2 = -30^\circ + 90^\circ k \quad (3)$$

$$\cdot x_1 = 180^\circ k, x_2 = 30^\circ + 60^\circ k \quad (4)$$

$$\cdot x_1 = 90^\circ k, x_2 = 15^\circ + 180^\circ k, x_3 = 75^\circ + 180^\circ k \quad (5)$$

$$\cdot x_1 = 90^\circ + 180^\circ k, x_{2,3} = \pm 150^\circ + 360^\circ k \quad (6)$$

$$\cdot x_1 = 90^\circ + 360^\circ k, x_2 = 210^\circ + 360^\circ k, x_3 = -30^\circ + 360^\circ k \quad (7)$$

$$\cdot x_1 = 90^\circ + 360^\circ k, x_2 = -41.8^\circ + 360^\circ k, x_3 = 221.8^\circ + 360^\circ k \quad (8)$$

$$\cdot x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, x_3 = -19.4^\circ + 360^\circ k, x_4 = 199.4^\circ + 360^\circ k \quad (9)$$

$$\cdot x = 360^\circ k \quad (10)$$

$$\cdot x_1 = -45^\circ + 180^\circ k, x_2 = 75.964^\circ + 180^\circ k \quad (11)$$

$$\cdot x_1 = 75^\circ + 180^\circ k, x_2 = 15^\circ + 180^\circ k \quad (12)$$

$$\cdot x = 360^\circ k \quad (13)$$

$$\cdot x = 180^\circ + 360^\circ k \quad (14)$$

$$\cdot x = 45^\circ + 90^\circ k, x \neq -45^\circ + 180^\circ k \quad (15)$$

משוואות הנפתרות ע"י זהויות יסוד:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות היסוד הטריגונומטריות:

| | | |
|--|---|------------------------------|
| $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$ | $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ | קשרים בין פונקציות |
| $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ | $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$ | זוויות משלימות ל- 90° |
| $\tan \alpha = \cot(90^\circ - \alpha)$ | $\cot \alpha = \tan(90^\circ - \alpha)$ | |
| $\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ | $\cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ | קשרים בין פונקציות |

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\sin x = \cos(x + 45^\circ) \quad (2)$$

$$\sin x = \cos x \quad (1)$$

$$2 \cos^2 x = 3 \sin x \quad (4)$$

$$\cos x = \frac{2}{3} \sin^2 x \quad (3)$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \sin x \quad (6)$$

$$\sin^2 x - \cos x = \frac{1}{4} \quad (5)$$

$$\sin x - \tan x = 0 \quad (8)$$

$$\sin^2 x + 2 \cos^2 x = 1.5 \quad (7)$$

תשובות סופיות:

$$\cdot x = 45^\circ + 180^\circ k \quad \mathbf{(1)}$$

$$\cdot x = 22.5^\circ + 180^\circ k \quad \mathbf{(2)}$$

$$\cdot x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k \quad \mathbf{(3)}$$

$$\cdot x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k \quad \mathbf{(4)}$$

$$\cdot x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k \quad \mathbf{(5)}$$

$$x_1 = 30^\circ + 120^\circ k, x_2 = -90^\circ + 360^\circ k \quad \mathbf{(6)}$$

$$\cdot x_{1,2} = \pm 45^\circ + 360^\circ k, x_{3,4} = \pm 135^\circ + 360^\circ k \quad \mathbf{(7)}$$

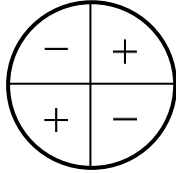
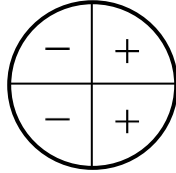
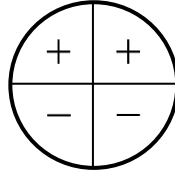
$$\cdot x = 180^\circ k \quad \mathbf{(8)}$$

משוואות הנפתרות ע"י זהויות של מעגל היחידה:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של מעגל היחידה:

| טנגנס | קוסינוס | סינוס | רביע |
|---|---|---|----------------|
| $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$ $\tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$ $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ | $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$ $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ | $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$ | I II III |
|  |  |  | סימנים |

זהויות עבור זויות הגדולות מ-360 מעלות:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin(\alpha + 360^\circ k) = \sin \alpha \\ \cos(\alpha + 360^\circ k) = \cos \alpha \end{array}} \quad , \quad \boxed{\begin{array}{l} \tan(\alpha + 180^\circ k) = \tan \alpha \\ \cot(\alpha + 180^\circ k) = \cot \alpha \end{array}}$$

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \cos 2x = -\cos 3x & (2) \\ \sin 3x = -\cos(180^\circ - x) & (4) \end{array} \quad \begin{array}{ll} \sin x = -\sin 3x & (1) \\ \sin(x + 30^\circ) = -\cos x & (3) \end{array}$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 180^\circ + 360^\circ k, x_2 = 36^\circ + 72^\circ k & (2) \\ x_1 = 22.5^\circ + 90^\circ k, x_2 = 45^\circ + 180^\circ k & (4) \end{array} \quad \begin{array}{ll} x_1 = 90^\circ k, x_2 = -90^\circ + 180^\circ k & (1) \\ x = 120^\circ + 180^\circ k & (3) \end{array}$$

משוואות הנפתרות על ידי חלוקה בקוסינוס:

סיכום כללי:

טכניקה יעילה כדי להעביר משוואה מהצורה: $\sin x = a \cos x$ לפונקציה טריגונומטרית אחת היא ע"י חלוקה ב- $\cos x$ (בתנאי ש- $\cos x \neq 0$). כך מתקבלת המשוואה:

$$\sin x = a \cos x \quad / : \cos x \neq 0$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = a \frac{\cos x}{\cos x}$$

$$\tan x = a$$

$$x = \tan^{-1}(a) + 180^\circ k$$

הערה:

יש לבדוק האם ערכי x שמקיימים $\cos x = 0$ מהווים פתרון למשוואה. אם כן אז יש להוסיף אותם לפתרון הסופי.

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$3 \sin x = \cos x \quad (2)$$

$$\sin x = 2 \cos x \quad (1)$$

$$2 \sin x = -5 \cos x \quad (4)$$

$$4 \sin x = 7 \cos x \quad (3)$$

$$3 \sin^2 x = \cos^2 x \quad (6)$$

$$\sin^2 x = 8 \cos^2 x \quad (5)$$

תשובות סופיות:

$$. x = 63.43^\circ + 180^\circ k \quad (1)$$

$$. x = 18.43^\circ + 180^\circ k \quad (2)$$

$$. x = 60.25^\circ + 180^\circ k \quad (3)$$

$$. x = -68.19^\circ + 180^\circ k \quad (4)$$

$$. x_1 = 70.52^\circ + 180^\circ k, x_2 = -70.52^\circ + 180^\circ k \quad (5)$$

$$. x_1 = 30^\circ + 180^\circ k, x_2 = -30^\circ + 180^\circ k \quad (6)$$

משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש זוויות:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של סכום והפרש זוויות:

| | |
|---|--------------------------------|
| $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$ | סכום והפרש עבור סינוס וקוסינוס |
| $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$ $\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$ | סכום והפרש עבור טנגנס וקוטנגנס |

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\sin(x + 45^\circ) \sin(x - 45^\circ) = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$3 \cos^2 x - \sin^2 x = \sin 3x \quad (4)$$

$$2 \sin x = \sin(60^\circ - x) \quad (1)$$

$$\frac{\cos 3x}{\sin x} - \frac{\sin 3x}{\cos x} = 2 \quad (3)$$

תשובות סופיות:

$$. x = 19.11^\circ + 180^\circ k \quad (1)$$

$$. x = 90^\circ + 180^\circ k \quad (2)$$

$$. x = 15^\circ + 60^\circ k \quad (3)$$

$$. x_{1,2} = \pm 60^\circ + 180^\circ k, x_3 = 90^\circ + 360^\circ k \quad (4)$$

משוואות הנפתרות ע"י זהויות של זווית כפולה:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של זווית כפולה:

| | |
|--|---------------------|
| $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ | סינוס זווית כפולה |
| $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ | קוסינוס זווית כפולה |

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \sqrt{2} \sin x + \sin 2x = 0 & \text{(2)} & \sin x - \sin 2x = 0 & \text{(1)} \\ 2 \cos 2x + \sin 4x = 0 & \text{(4)} & 4 \cos x = \sin 2x & \text{(3)} \\ \cos 2x = 2 \sin x & \text{(6)} & 3 \cos x - \cos 2x = 0 & \text{(5)} \\ 2 \sin^2 x = \cos 2x + 2 & \text{(8)} & \sin x + \cos 2x = 1 & \text{(7)} \end{array}$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 180^\circ k, x_{2,3} = \pm 135^\circ + 360^\circ k & \text{(2)} & x_1 = 360^\circ k, x_2 = 60^\circ + 120^\circ k & \text{(1)} \\ x_1 = 45^\circ + 90^\circ k, x_2 = 135^\circ + 180^\circ k & \text{(4)} & x = 90^\circ + 180^\circ k & \text{(3)} \\ x_1 = 21.1^\circ + 360^\circ k, x_2 = 158.9^\circ + 360^\circ k & \text{(6)} & x_{1,2} = \pm 106.307^\circ + 360^\circ k & \text{(5)} \\ . x_1 = 180^\circ k, x_2 = 30^\circ + 360^\circ k, x_3 = 150^\circ + 360^\circ k & \text{(7)} & & \\ . x_1 = -60 + 360^\circ k, x_2 = 60^\circ + 360^\circ k, x_3 = 120^\circ + 360^\circ k, x_4 = 240^\circ + 360^\circ k & \text{(8)} & & \end{array}$$

משוואות מהצורה: $a \sin(x) + b \cos(x) = c$

סיכום כללי:

ניתן להביא משוואה מהצורה: $a \sin x + b \cos x = c$ לצורה: $\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}$.

מציאת זווית α המקיימת: $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ תאפשר לכתוב: $\sin x + \tan \alpha \cdot \cos x = \frac{c}{a}$.

שימוש בזהות: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ובזהות: $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$ יובילו:

$$\sin x + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos x = \frac{c}{a} \quad / \cdot \cos \alpha$$

$$\sin x \cos \alpha + \sin \alpha \cos x = \frac{c}{a} \cos \alpha$$

$$\sin(x + \alpha) = \frac{c}{a} \cos \alpha$$

אם נסמן: $\frac{c}{a} \cos \alpha = k$ נקבל את המשוואה: $\sin(x + \alpha) = k$ כאשר α ו- k ידועים. מכאן הפתרון הוא ישיר לפי משוואת סינוס.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$5 \cos x - 6 \sin x = 1 \quad (2)$$

$$10 \sin x + 3 \cos x = 5 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \sin x + \sqrt{3} \cos^2 \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2} \quad (4)$$

$$\sqrt{3} \sin 2x + 3 \cos 2x = \sqrt{12} \quad (3)$$

$$\cos x + \cos(60^\circ + x) = \sqrt{2} + \cos(60^\circ - x) \quad (5)$$

תשובות סופיות:

$$x_1 = 11.91^\circ + 360^\circ k, x_2 = 134.69^\circ + 360^\circ k \quad (1)$$

$$x = 15^\circ + 180^\circ k \quad (3) \quad x_1 = 227.156^\circ + 360^\circ k, x_2 = 32.44^\circ + 360^\circ k \quad (2)$$

$$x_1 = -60^\circ + 720^\circ k, x_2 = 180^\circ + 360^\circ k \quad (4)$$

$$x_1 = -105^\circ + 360^\circ k, x_2 = 15^\circ + 360^\circ k \quad (5)$$

משוואות הנפתרות ע"י זהויות של סכום והפרש פונקציות:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של סכום והפרש פונקציות:

| | |
|--|-------------------------------------|
| $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ | סכום והפרש פונקציות עבור סינוס |
| $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ | סכום והפרש פונקציות עבור קוסינוס |

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\sin x + \sin 3x = \sin 2x \quad (1)$$

$$\cos 2x - \cos 6x = \sin 2x \quad (2)$$

$$\sin x + \sin 3x = 4 \sin^3 x \quad (3)$$

$$\sin 6x - \sin 4x = 1 - \cos 2x \quad (4)$$

$$(\sin 5x + \sin 7x)^2 = (\cos 5x + \cos 7x)^2 \quad (5)$$

$$2 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos 3x + \cos 5x = 1 \quad (6)$$

$$1 + \sin x + \sin 7x = \cos 8x \quad (7)$$

$$2 \sin 3x (\cos 2x + \cos x) = \sin x + \sin 2x \quad (8)$$

$$\sin(x + 60^\circ) - \sin x = \sin(2x + 60^\circ) - \sin 2x \quad (9)$$

$$\cos^2 3x - \cos^2 x = \sin x \cos x \quad (10)$$

$$\sin 8x \sin 2x + \cos 10x = 0 \quad (11)$$

$$\cos x + 3 \sin x = 1 + 2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} \quad (12)$$

$$4 \sin 2x \sin 5x \sin 7x - \sin 4x = 0 \quad (13)$$

$$4 \cos x \cos 2x \cos 3x = 1 \quad (14)$$

תשובות סופיות:

$$x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k, x_3 = 90^\circ k \quad (1)$$

$$x_1 = 45^\circ + 90^\circ k, x_2 = 180^\circ k \quad (2)$$

$$x_1 = 37.5^\circ + 90^\circ k, x_2 = 7.5^\circ + 90^\circ k, x_3 = 90^\circ k \quad (3)$$

$$x_1 = 15^\circ + 60^\circ k, x_2 = 180^\circ k, x_3 = -22.5^\circ + 90^\circ k \quad (4)$$

$$x_1 = 36^\circ k, x_2 = \left(\frac{180}{7}\right)^\circ + \left(\frac{180}{7}\right)^\circ k \quad (5)$$

$$x_{1,2} = \pm 30^\circ + 90^\circ k, x_3 = 90^\circ + 180^\circ k \quad (6)$$

$$x_1 = -\left(12\frac{6}{7}\right)^\circ k + \left(51\frac{3}{7}\right)^\circ k, x_2 = 45^\circ k \quad (7)$$

$$x_1 = 40^\circ k, x_2 = 180^\circ + 360^\circ k \quad (8)$$

$$x_1 = -20^\circ + 120^\circ k, x_2 = 360^\circ k \quad (9)$$

$$x_1 = 52.5^\circ + 90^\circ k, x_2 = -7.5^\circ + 90^\circ k, x_3 = 90^\circ k \quad (10)$$

$$x_1 = 45^\circ + 90^\circ k, x_2 = 11.25^\circ + 22.5^\circ k \quad (11)$$

$$x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k \quad (12)$$

$$x_1 = 7.5^\circ + 15^\circ k, x_2 = 90^\circ k \quad (13)$$

$$x_1 = 60^\circ + 180^\circ k, x_2 = 22.5^\circ + 45^\circ k \quad (14)$$

משוואות עם תחום נתון:

סיכום כללי:

כדי למצוא את הפתרונות של משוואה טריגונומטרית בתחום נתון, נמצא תחילה את הפתרון הכללי שלה ולאחר מכן נציב ערכים ב- k ונבחר את הערכים שנמצאים בתחום הנתון.

שאלות:

מצא את כל הפתרונות של המשוואות הבאות בתחום הנתון לידן:

$$[0^\circ:180^\circ], 8 \sin x - 4 = 0 \quad (1)$$

$$[-90^\circ:90^\circ], \sin 2x = \sin(x + 60^\circ) \quad (2)$$

$$[-90^\circ:90^\circ], 3 \cos(2x + 30^\circ) + 1 = 0 \quad (3)$$

$$[0^\circ:360^\circ], \cos(50^\circ - x) = -\cos x \quad (4)$$

$$[-30^\circ:30^\circ], 2 \sin 3x - 5 \cos 3x = 0 \quad (5)$$

$$[0^\circ:180^\circ], 2 \cos^2 3x = \sin 6x + 1 \quad (6)$$

$$[-180^\circ:180^\circ], \cos 4x + 1 = 3 \sin 2x \quad (7)$$

$$[-180^\circ:180^\circ], \cos 2x + \cos^2 x + \sin x = 0 \quad (8)$$

תשובות סופיות:

$$x = 30^\circ, 150^\circ \quad (1)$$

$$x = -80^\circ, 40^\circ, 60^\circ \quad (2)$$

$$x = 39.736^\circ, -69.736^\circ \quad (3)$$

$$x = 115^\circ, 295^\circ \quad (4)$$

$$x = 22.733^\circ \quad (5)$$

$$x = 7.5^\circ, 37.5^\circ, 67.5^\circ, 97.5^\circ, 127.5^\circ, 157.5^\circ \quad (6)$$

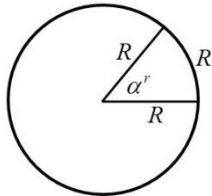
$$x = -165^\circ, -105^\circ, 15^\circ, 75^\circ \quad (7)$$

$$x = -138.19^\circ, -41.81^\circ, 90^\circ \quad (8)$$

משוואות עם זוויות ברדיאנים:

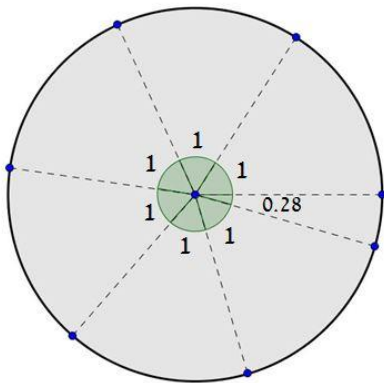
סיכום כללי:

הגדרת הרדיאן:



זווית של רדיאן אחד מוגדרת להיות הזווית המרכזית המתאימה לקשת שאורכה שווה לרדיוס המעגל.

עבור מעגל שרדיוסו R , תימצאנה 2π רדיאנים על היקפו, שכן היקף מעגל הוא $P = 2\pi \cdot R$.



באיור שלפניך ניתן לראות חלוקה של מעגל ל- $2\pi = 6.28$ קשתות אשר שוות לרדיוס המעגל. הזווית של כל קשת כזאת שווה לרדיאן אחד, כאשר הזווית האחרונה שווה ל-0.28 מרדיאן. מקבלים 2π רדיאנים.

קשר בין רדיאנים למעלות:

- נוסחת מעבר מזווית α° (במעלות) לזווית α^r (ברדיאנים): $\alpha^r = \frac{\pi}{180} \alpha^\circ$
- נוסחת מעבר מזווית α^r (ברדיאנים) לזווית α° (במעלות): $\alpha^\circ = \frac{180}{\pi} \alpha^r$

פתרונות משוואות טריגונומטריות ברדיאנים:

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריונומטריות היסודיות כאשר x הוא משתנה ו- α היא זווית ידועה הנתונה ברדיאנים:

| המשוואה | הפתרון |
|------------------------|---|
| $\sin x = \sin \alpha$ | $x_1 = \alpha + 2\pi k$, $x_2 = \pi - \alpha + 2\pi k$ |
| $\cos x = \cos \alpha$ | $x_{1,2} = \pm \alpha + 2\pi k$ |
| $\tan x = \tan \alpha$ | $x = \alpha + \pi k$ |
| $\cot x = \cot \alpha$ | $x = \alpha + \pi k$ |

כאשר k מספר שלם.

שאלות:

(1) המר את הזוויות הבאות ממעלות לרדיאנים:

| | | | |
|----------------|----------------|-----------------|------------------|
| א. 30° | ב. 90° | ג. 75° | ד. 120° |
| ה. 210° | ו. 315° | ז. 18° | ח. 285° |
| ט. -15° | י. -80° | יא. 510° | יב. -390° |

(2) המר את הזוויות הבאות מרדיאנים למעלות:

| | | | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| א. π | ב. 2π | ג. 4π | ד. 1.5π |
| ה. $\frac{1}{2}\pi$ | ו. $\frac{\pi}{4}$ | ז. $\frac{\pi}{6}$ | ח. $\frac{1}{18}\pi$ |
| ט. $\frac{13}{18}\pi$ | י. $\frac{19}{12}\pi$ | יא. $1\frac{1}{6}\pi$ | יב. $2\frac{1}{4}\pi$ |

(3) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (משוואות יסודיות שונות):

| | |
|---|---|
| א. $\left[0:\frac{1}{3}\pi\right], 2\sin 3x=1$ | ב. $[0:\pi], \sqrt{3}+2\cos x=0$ |
| ג. $[0:2\pi], 3-3\tan\frac{x}{2}=0$ | ד. $[0:\pi], \sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| ה. $\left[0:\frac{1}{2}\pi\right], 4\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2=0$ | ו. $\left[-\frac{5\pi}{18}:\frac{5\pi}{18}\right], \sin x=\sin\left(\frac{2}{3}\pi-2x\right)$ |
| ז. $\left[0:\frac{\pi}{3}\right], 5-5\tan(4x-0.1\pi)=0$ | ח. $\left[-\frac{\pi}{4}:\frac{\pi}{4}\right], \sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=0.7$ |

(4) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (טכניקה אלגברית):

| | |
|--|---|
| א. $\left[0:\frac{\pi}{2}\right], \sin^2 x=\frac{3}{4}$ | ב. $\left[-\frac{\pi}{8}:\frac{\pi}{8}\right], 16\cos^2 2x-1=0$ |
| ג. $[0:\pi], 2\tan^2 x-18=0$ | ד. $\left[-\frac{\pi}{3}:\frac{\pi}{3}\right], 3\sin x\cos x+3\cos x=0$ |
| ה. $\left[-\frac{\pi}{2}:\frac{\pi}{2}\right], \sin^2 x-5\sin x\cos x=0$ | ו. $[-\pi:\pi], 2\sin^2 x-5\sin x+2=0$ |
| ז. $[-\pi:0], 4\cos^2 x-\sqrt{2}\cos x-1=0$ | ח. $[0:2\pi], \tan^2 x-7\tan x+10=0$ |

(5) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות יסוד):

א. $0 \leq x \leq \pi$, $\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

ב. $0 \leq x \leq \pi$, $\tan x = 4 \sin x$

ג. $0 \leq x \leq 2\pi$, $2 \sin^2 x = 3 \cos x$

(6) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות ממעגל היחידה):

א. $[-\pi : \pi]$, $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin x$

ב. $[0 : \pi]$, $\sin\left(2x + \frac{2}{9}\pi\right) = -\cos 2x$

ג. $[0 : \pi]$, $\sin 4x = -\cos(\pi - x)$

ד. $\left[-\frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2}\right]$, $\tan x = -\tan 2x$

(7) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (זהויות של זווית כפולה):

א. $-\pi \leq x \leq \pi$, $\sin 2x + \cos^2 x = 0$

ב. $[-\pi : \pi]$, $\cos 4x + 1 = 3 \sin 2x$

ג. $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $2 \sin^2 x = \cos 2x + 2$

ד. $0 \leq x \leq \pi$, $\cos 4x + \sin^2 x = 1$

תשובות סופיות:

- (1) א. $\frac{\pi}{6}$ ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. $\frac{5\pi}{12}$ ד. $\frac{2\pi}{3}$ ה. $\frac{7\pi}{6}$
 ו. $\frac{7\pi}{4}$ ז. $\frac{\pi}{10}$ ח. $\frac{19\pi}{12}$ ט. $-\frac{\pi}{12}$ י. $-\frac{4\pi}{9}$
 יא. $\frac{17\pi}{6}$ יב. $-\frac{13\pi}{6}$
- (2) א. 180° ב. 360° ג. 720° ד. 270° ה. 90°
 ו. 45° ז. 30° ח. 10° ט. 130° י. 285°
 יא. 210° יב. 405°
- (3) א. $\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}$ ב. $x = \frac{5\pi}{6}$ ג. $x = \frac{\pi}{2}$ ד. $x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$
 ה. $x = 0$ ו. $x = \frac{2\pi}{9}$ ז. $x = 0.0875\pi$ ח. $x = 0.224\pi$
- (4) א. $x = \frac{\pi}{3}$ ב. ϕ ג. $x = 0.398\pi, 0.602\pi$ ד. ϕ
 ה. $x = 0, 0.437\pi$ ו. $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$
- ז. $x = -\frac{\pi}{4}, -0.615\pi$ ח. $x = 0.352\pi, 0.437\pi, 1.352\pi, 1.437\pi$
- (5) א. $x = \frac{\pi}{8}$ ב. $x = 0, 0.42\pi, \pi$ ג. $x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$
- (6) א. $x = \frac{\pi}{12}, -\frac{11\pi}{12}$ ב. $x = \frac{23\pi}{72}, \frac{59\pi}{72}$
- ג. $x = \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{9\pi}{10}$ ד. $x = \pm \frac{\pi}{3}, 0$
- (7) א. $x = \pm \frac{\pi}{2}, -0.148\pi, 0.852\pi$ ב. $x = -\frac{7\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}$
 ג. $x = \pm \frac{\pi}{3}$ ד. $x = 0, 0.38\pi, 0.61\pi, \pi$

אי שוויונים טריגונומטריים:

סיכום כללי:

- כדי לפתור אי-שוויון טריגונומטרי בתחום מסוים נבצע את השלבים הבאים:
1. נהפוך את סימן אי השוויון לסימן שוויון ונפתור את המשוואה המתקבלת.
 2. נסדר את כל הפתרונות על ציר מספרים ונבחר ערך בכל תחום.
 3. נציב את הערכים באי השוויון המקורי ונאמר כי:
 - אם מתקבל פסוק אמת אז תחום זה מהווה פתרון של אי השוויון.
 - אם מתקבל פסוק שקר אז תחום זה אינו פתרון של אי השוויון.
 4. נרכז את כל התחומים ונכתוב את הפתרון המלא.

הערה:

במידה והמשוואה אינה מוגדרת עבור ערך מסוים הערך הזה מוכנס גם לציר המספרים.

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

$$[0, 1.5\pi] \quad 2 \cos x - \sqrt{3} \geq 0 \quad \text{(2)} \qquad [0, 180^\circ] \quad \sin x < \frac{1}{2} \quad \text{(1)}$$

$$[0, \pi] \quad \sin x + \sin 2x + \sin 3x < 0 \quad \text{(4)} \qquad (-90^\circ, 90^\circ) \quad 2 \cos^2 x + \sin x \geq 1 \quad \text{(3)}$$

$$(0 < x < \pi) \quad \sin x + \sqrt{3} \cos x \geq 1 \quad \text{(6)} \qquad [0^\circ, 180^\circ] \quad 1 < 2 \sin(x + 10^\circ) < \sqrt{3} \quad \text{(5)}$$

$$(-\pi < x < \pi) \quad |\tan(x)| > \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{(8)} \qquad [0, 2\pi] \quad \tan x + \cot x > 0 \quad \text{(7)}$$

תשובות סופיות:

$$. 0^\circ \leq x < 30^\circ, 150^\circ \leq x \leq 180^\circ \quad (1)$$

$$. 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \quad (2)$$

$$. -30^\circ \leq x < 90^\circ \quad (3)$$

$$. \frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3} \quad (4)$$

$$. 20^\circ < x < 50^\circ, 110^\circ < x < 140^\circ \quad (5)$$

$$. 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \quad (6)$$

$$. 0 < x < \frac{\pi}{2}, \pi < x < \frac{3}{2}\pi \quad (7)$$

$$. -\frac{5\pi}{6} < x < -\frac{\pi}{6}, x \neq -\frac{\pi}{2} : \text{או} \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}, x \neq \frac{\pi}{2} \quad (8)$$

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 23 - טריגונומטריה במישור

תוכן העניינים

1. שאלות יסודיות עם משפט הסינוסים והקוסינוסים 356
2. שאלות העוסקות בנוסחת שטח משולש 364
3. שאלות המשלבות ידע בגיאומטריה 373
4. שאלות מסכמות 377

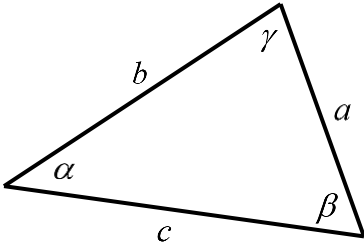
שאלות יסודיות עם משפט הסינוסים והקוסינוסים:

סיכום כללי:

משפט הסינוסים:

במשולש, צלע חלקי סינוס הזווית שמולה הוא גודל קבוע והוא שווה לפעמיים רדיוס המעגל החוסם.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$



משפט הקוסינוסים:

במשולש, ריבוע צלע אחת שווה לסכום ריבועי שתי הצלעות האחרות פחות מכפלתן

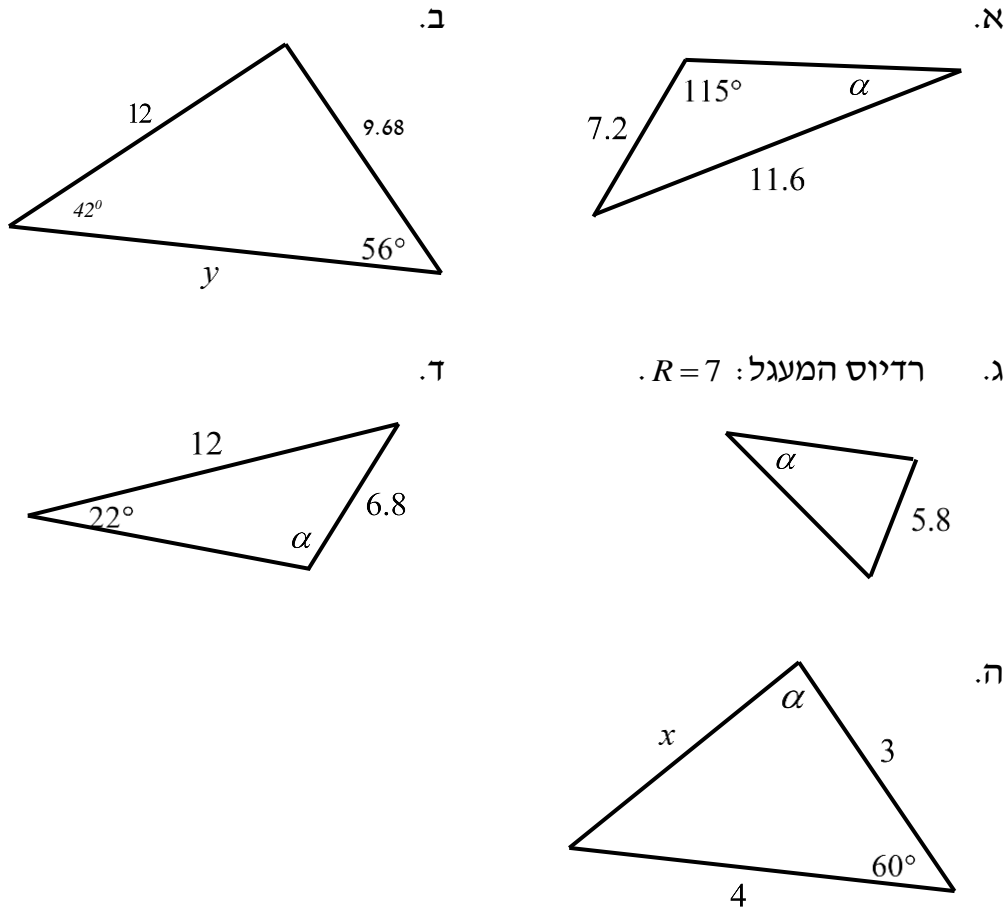
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad \text{או} \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

מתי נשתמש בכל משפט:

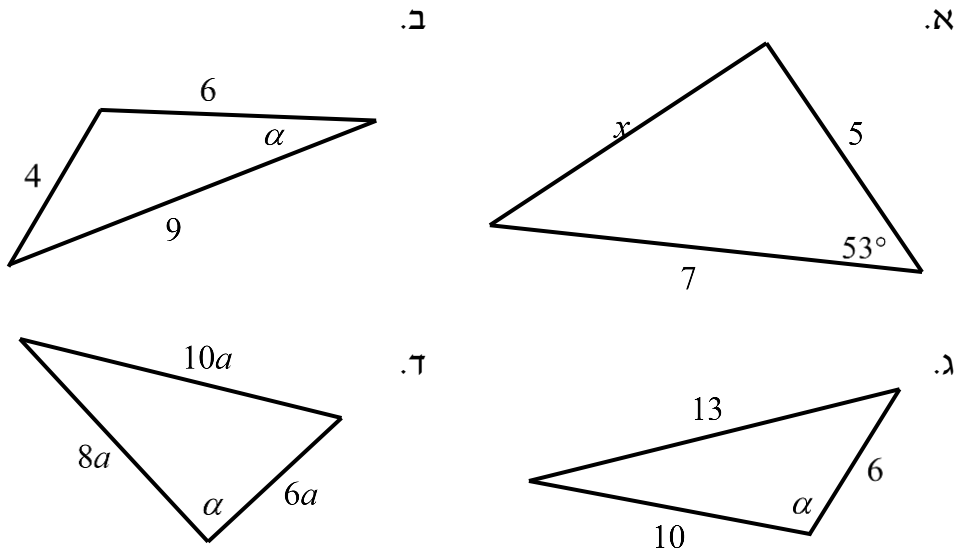
- נשתמש במשפט הסינוסים כאשר:
 - א. נתונות שתי זוויות וצלע.
 - ב. נתונות שתי צלעות והזווית מול אחת מהן.
 - ג. נתון רדיוס המעגל החוסם וצלע/זווית נוספת.
- נשתמש במשפט הקוסינוסים כאשר:
 - א. נתונות שתי צלעות והזווית ביניהן.
 - ב. נתונות שלוש צלעות.
- כאשר ישנם יותר נתונים מאשר בסעיפים שלהלן ייתכן שנוכל להשתמש בשני המשפטים. בבחירת המשפט שבו נשתמש כדאי לזכור שבמשפט הסינוסים ייתכנו שתי תשובות לזווית, גם אם בפועל רק אחת נכונה, ובמשפט הקוסינוסים תתקבל בוודאות הזווית הנכונה.

שאלות:

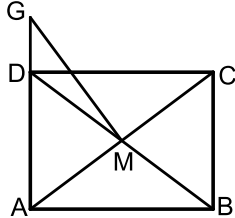
1 מצא את ערכו של $a/x/y$ במשולשים הבאים (R הוא רדיוס המעגל החוסם, נתוני הצלעות בס"מ):



2 מצא את ערכו של α/x במשולשים הבאים:

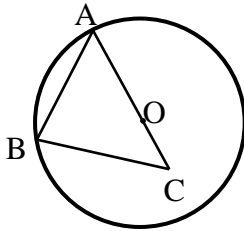


- (3) נתון משולש שווה שוקיים ABC ($AB=AC$) שאורך השוק שלו הוא 22 ס"מ וגודלה של זווית הבסיס בו הוא 70° . CD הוא חוצה זווית הבסיס C . מצא את אורכו של הקטע AD .



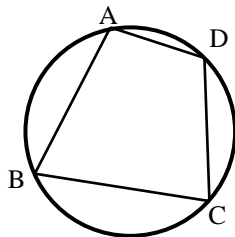
- (4) אלכסוני המלבן $ABCD$ נפגשים בנקודה M . הנקודה G נמצאת על המשך הצלע AD . נתון: $AD = 3$ ס"מ, $AB = 4$ ס"מ, $DG = 1.2$ ס"מ. מצא את גודלו של הקטע GM .

- (5) מרובע שאורכי אלכסוניו 8 ס"מ ו-11 ס"מ חסום במעגל שאורך רדיוסו הוא 6 ס"מ. חשב את זוויות המרובע.

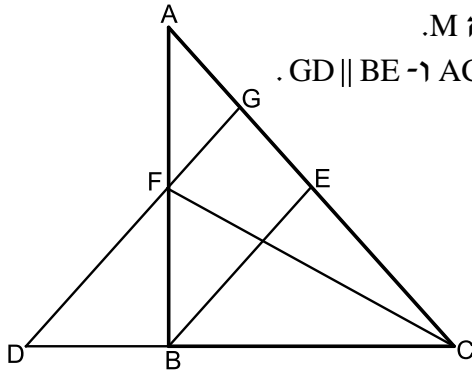


- (6) הצלע AB במשולש ABC היא מיתר במעגל שמרכזו O . הצלע AC עוברת במרכז המעגל כמתואר בשרטוט. נתון: $BC = 9$ ס"מ, $OC = 3$ ס"מ, $\angle BAC = 38^\circ$. מצא את אורכם של רדיוס המעגל ושל הצלע AB .

- (7) אחד האלכסונים במקבילית יוצר זווית של 30° עם צלע אחת של המקבילית וזווית של 61.05° עם הצלע הסמוכה לה. אחת מצלעות המקבילית גדולה ב-3 ס"מ מהצלע הסמוכה לה. חשב את היקף המקבילית.



- (8) המרובע $ABCD$ חסום במעגל. נתון: $AB = 6$ ס"מ, $BC = 9$ ס"מ, $CD = 10$ ס"מ ו- $AD = 4$ ס"מ. מצא את אורכם של האלכסון AC ושל רדיוס המעגל.

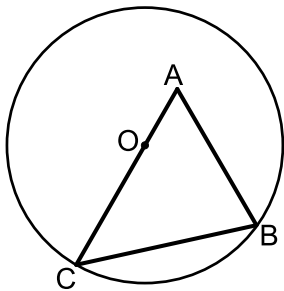


9) BE ו-CF הם תיכונים במשולש ABC הנפגשים בנקודה M. מהנקודה F מעבירים קטע GD כך שמתקיים: $AC = DC$ ו- $GD \parallel BE$.

א. הוכח: $\frac{AG}{BD} = \frac{3}{4}$.

ב. נתון כי: $ME = 4$ ס"מ. חשב את אורך הקטע DG.

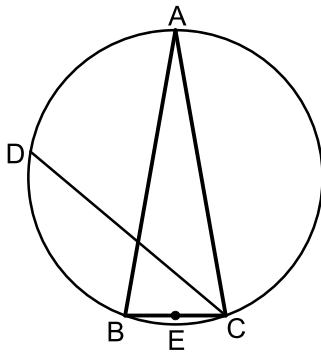
ג. נתון כי: $\angle ACD = 48.189^\circ$. הוכח כי המשולש DGC הוא שווה-שוקיים.



10) נתון משולש ABC. הקודקודים B ו-C של המשולש ABC נמצאים על מעגל שמרכזו O. מרכז המעגל O מונח על הצלע AC. אורך הצלע AB הוא 12 ס"מ ואורך הקטע AO הוא 4.5 ס"מ. זווית BAC היא 60° .

א. חשב את רדיוס המעגל.

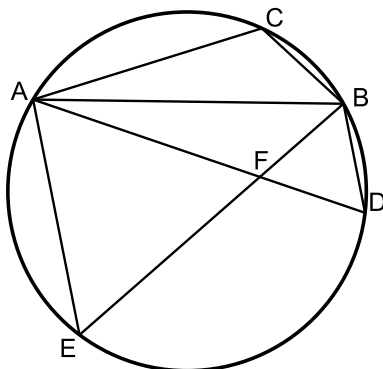
ב. מעבירים את הקוטר BD ואת הקטע AD כך שנוצר המשולש ADB. חשב את זווית ADB.



11) המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$) החסום במעגל שרדיוסו R. הנקודה E היא אמצע הבסיס BC והנקודה D היא אמצע הקשת \widehat{AB} . ידוע כי זווית הבסיס של המשולש היא 80° .

א. הבע באמצעות R את הקטעים CD ו-DE.

ב. r הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש CED. הבע באמצעות R את r.

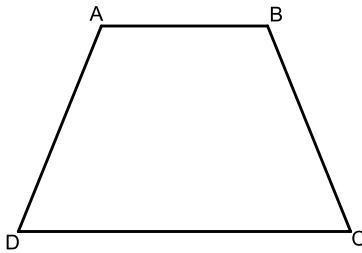


12) AB, AC ו-AD הם מיתרים במעגל המקיימים: $\widehat{BC} = \widehat{BD}$. מהנקודה E שעל המעגל מעבירים את המיתרים AE ו-BE. המיתרים BE ו-AD נחתכים בנקודה F. נתון כי: $AC = AF = EF$.

א. הוכח: $\triangle ABF \cong \triangle ABC$.

ב. נתון גם: $\angle CAB = 3 \cdot \angle DAE$. הוכח כי המשולש AFE הוא שווה צלעות.

13) המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים ($AB \parallel CD, AD = BC$).

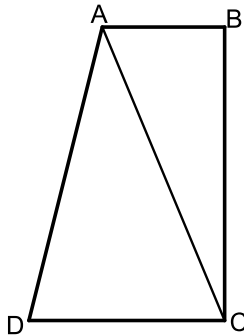


מידות הטרפז הן:

$AB = 6$ ס"מ, $BC = 8$ ס"מ, $CD = 12$ ס"מ.

- מצא את זווית C (עגל למספר שלם).
- מצא את אורך אלכסון הטרפז.
- חשב את רדיוס המעגל החוסם את הטרפז.

14) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית ($AB \parallel CD, \angle B = 90^\circ$).

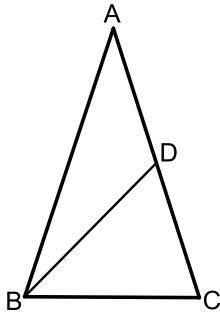


מסמנים את הבסיס: $AB = t$ וידוע כי: $AD = 3t, DC = 1.6t$.
היקף הטרפז הוא: 40 ס"מ.

- הבע באמצעות t את אורך האלכסון AC.
- ידוע גם כי: $\angle D = 60^\circ$.
- i. חשב את אורך הקטע AC.
- ii. חשב את שטח הטרפז.

15) המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$) בעל זווית

ראש 36° החסום במעגל שקוטרו 16 ס"מ. מעבירים תיכון לשוק BD.



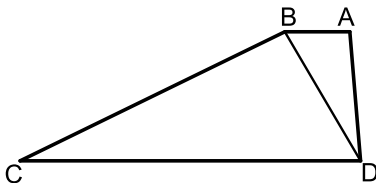
- מצא את אורך הבסיס BC במשולש.
- חשב את אורך התיכון BD.
- מסמנים:

r_1 - רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD.
 r_2 - רדיוס המעגל החוסם את המשולש BCD.

$$\frac{r_1}{r_2} = 2 \cos 36^\circ$$

הוכח את היחס הבא:

16) המרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel CD$).



מעבירים את האלכסון BD המקיים: $\angle BCD = \angle ADB$.
נתון כי: $AB = 5$ ס"מ, $AD = 10$ ס"מ, $CD = 20$ ס"מ.
כמו כן ידוע כי השוק BC גדולה פי 2 מהאלכסון BD.

- הראה כי השוק BC שווה לבסיס CD.
- חשב את זווית C.
- ממשיכים את שוקי הטרפז AD ו-BC עד לנקודה E שמחוץ לטרפז.
חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש CDE.

17) באיור שלפניך נתון המרובע ABCD.

ידוע כי: $\angle D = 90^\circ$.

נסמן את הצלעות באופן הבא: $AB = 6x$, $BC = 5x$, $CD = 8x$, $AD = 3x$.

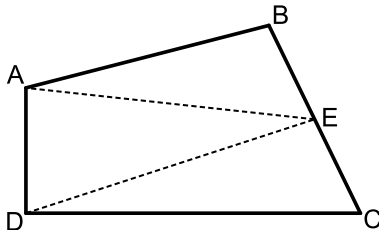
א. חשב את זווית BCD.

ב. E היא נקודה הנמצאת על אמצע הצלע BC.

מעבירים את הקטעים AE ו-DE כך

ש-DE מקביל ל-AB.

חשב את היחס הבא: $\frac{S_{ABE}}{S_{BCD}}$.



18) מהנקודה O מעבירים את הקטעים OA, OB, OC ו-OD.

ידוע כי זווית AOB שווה לזווית COD והיא מסומנת ב- α .

המשולש COD הוא ישר זווית $\angle CDO = 90^\circ$.

נתונים האורכים: $BO = 9$, $DO = 10$.

מסמנים: $BC = 1.4m$, $CD = 1.5m$.

א. הבע באמצעות m את $\sin \alpha$.

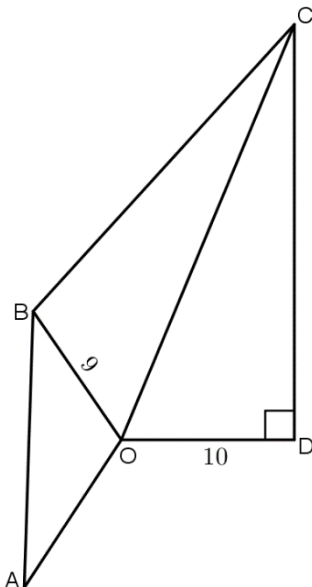
(העזר במשולש COD ובטא תחילה את CO).

ב. נתון גם כי: $AB = m$.

מצא את m אם ידוע כי רדיוס המעגל החוסם

את המשולש AOB הוא $8\frac{2}{3}$.

ג. חשב את זווית BOC.



19) במשולש ABC הזווית A היא בת 60° .

מעבירים את הקטע AD כך שנוצרת זווית: $\angle ADB = 60^\circ$.

ידוע כי $AB = \sqrt{28}$ וכי הצלע AD במשולש ABD

גדולה פי 1.5 מהצלע BD.

א. מצא את אורך הצלע BD.

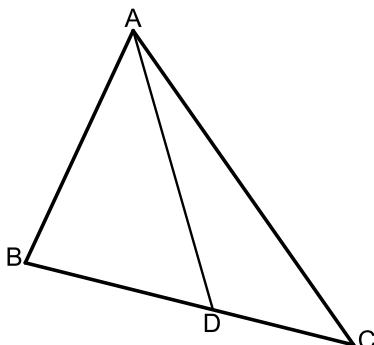
ב. היקף המשולש ABC הוא: $P = 5\sqrt{7} + 7$.

i. סמן: $DC = t$ והבע באמצעות t

את אורך הצלע AC.

ii. מצא את t.

ג. חשב את שטח המשולש ABC.



(20) מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB ו-AC.

הנקודה D היא אמצע AC וממנה מעבירים את DE המקביל ל-AB.

הנקודות C, E ו-F נמצאות על אותו הישר.

ידוע כי המשולשים ABD, DEF ו-DCE הם

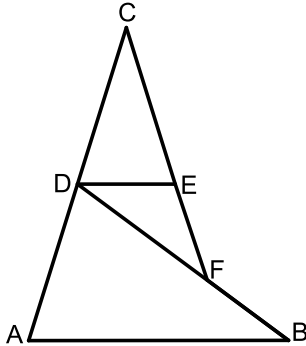
שווי שוקיים ($AB = BD, DC = CE, EF = DE$).

נתון כי: $AD = 8$.

א. חשב את אורך הקטע BF.

ב. מחברים את הנקודות B ו-C.

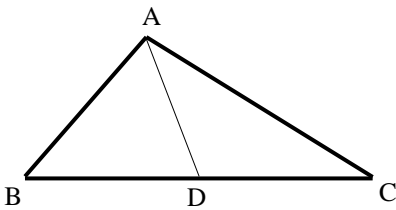
חשב את אורך הצלע BC.



(21) בשרטוט נתון: $AB = 6$ ס"מ, $AC = 8$ ס"מ,

$AD = 5$ ס"מ. הנקודה D היא אמצע הצלע BC.

חשב את אורך הקטע BC.



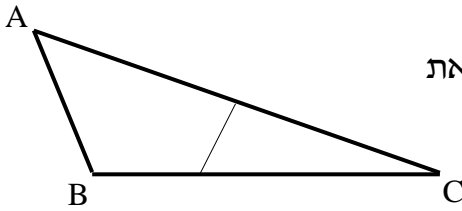
(22) הצלע AC במשולש ABC גדולה פי 4 מהצלע AB.

הנקודה E היא אמצע הצלע AC והנקודה D נמצאת

על הצלע BC כך שמתקיים $DC = 2BD$.

נתון: $BC = b, AB = a$.

הבע באמצעות a ו-b את אורך הקטע DE.

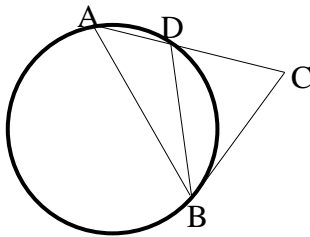


(23) המשולש ABD חסום במעגל שרדיוסו R.

המשך הצלע AD והמשיק למעגל בנקודה B

נפגשים בנקודה C. נתון: $\angle C = \alpha, \angle ADB = \beta$.

הבע באמצעות R, α ו- β את אורך הקטע BC.

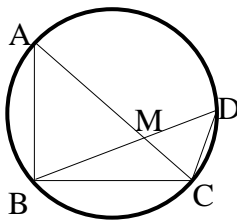


(24) AC ו-BD הם מיתרים במעגל שרדיוסו R,

שנפגשים בנקודה M. זווית $\angle B$ היא זווית ישרה.

נתון: $DC = q, DM = p, AB = k$.

הבע באמצעות R, k, p ו-q את אורך הקטע MC.



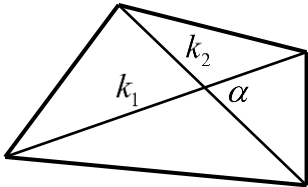
תשובות סופיות:

- א. $\alpha = 34.231^\circ$ ב. 14.33 ס"מ = y ג. $\alpha = 155.526^\circ$ או $\alpha = 24.474^\circ$ (1)
- ד. $\alpha = 41.382^\circ$ או $\alpha = 138.618^\circ$ ה. 3.606 ס"מ = x , $\alpha = 73.898^\circ$
- א. 5.646 ס"מ = x ב. $\alpha = 20.742^\circ$ ג. $\alpha = 105.962^\circ$ ד. $\alpha = 90^\circ$ (2)
- AD = 13.064 ס"מ (3)
- GM = 3.360 ס"מ (4)
- 66.444° , 113.556° , 41.810° , 138.190° (5)
- $R = 9.242$ ס"מ, $AB = 14.56$ ס"מ (6)
- $P = 22$ ס"מ (7)
- $R = 5.395$ ס"מ, $AC = 10.790$ ס"מ (8)
- $DG = 18$ (9)
- $R = 10.5$ ס"מ ב. 24.32° (10)
- א. $DE = 1.48R$, $CD = R\sqrt{3}$ ב. $r = 1.15R$ (11)
- א. 68° ב. 11.66 ס"מ ג. $R = 6.29$ ס"מ (13)
- א. $AC = \sqrt{32.36t^2 - 448t + 1600}$ ב. i. 13 ס"מ ii. 78 סמ"ר (14)
- א. 9.4 ס"מ ב. i. 10 ס"מ (15)
- א. $\sphericalangle C = 28.9^\circ$ ב. $R = 13.77$ ג. (16)
- א. 64.04° ב. $\frac{S_{ABE}}{S_{ECD}} = 0.817$ (17)
- א. $\sin \alpha = \frac{1.5m}{\sqrt{100 + 2.25m^2}}$ ב. $m = 16$ ג. 56.94° (18)
- א. 4 ב. i. $1.5\sqrt{28} + 3 - t$ ii. 3 ג. $S = 18.18$ (19)
- א. 4.94 ס"מ ב. 17.19 ס"מ (20)
- BC = 10 ס"מ (21)
- $DE = \sqrt{\frac{1}{9}b^2 - a^2}$ (22)
- $MC = \sqrt{p^2 + q^2 - \frac{pqk}{R}}$ (24)
- $BC = \frac{2R \sin \beta \sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha}$ (23)

שאלות העוסקות בנוסחת שטח משולש:

סיכום כללי:

שטחים של משולשים ומרובעים:

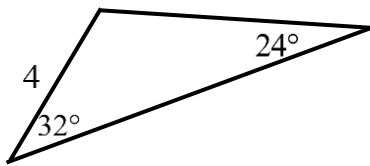


- שטח משולש ניתן לחישוב ע"י: $S = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$
- שטח מרובע ניתן לחישוב ע"י אלכסונו: $S = \frac{k_1 k_2 \sin \alpha}{2}$

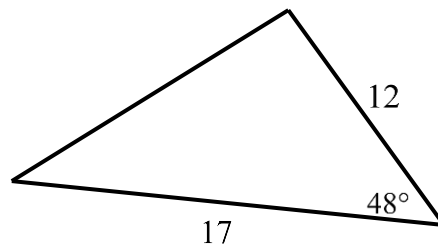
שאלות:

25) חשב את שטחי המשולשים הבאים:

ב.



א.



26) חשב את שטחו של טרפז שווה שוקיים שאורך האלכסון שלו 8 ס"מ והוא יוצר זווית של 15° עם הבסיסים.

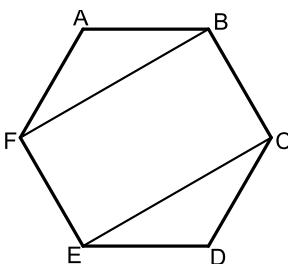
27) אורכו של מלבן הוא m ורוחבו n . הזווית שבין אלכסונו המלבן היא θ .

$$\text{הוכח כי מתקיים: } \sin \theta = \frac{2mn}{m^2 + n^2}$$

28) במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle B = 90^\circ$), BD חוצה את הזווית $\sphericalangle B$.

נתון: $\sphericalangle A = \alpha$, $AB = m$.

הבע באמצעות α ו- m את שטח המשולש BCD .



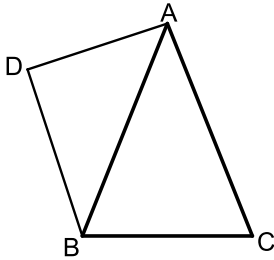
29) באיור שלפניך נתון משושה משוכלל ששטחו הכולל הוא S .

א. הבע באמצעות S את אורך צלע המשושה.

ב. מעבירים אלכסונים במשושה כך שנוצר המלבן $BFEC$.

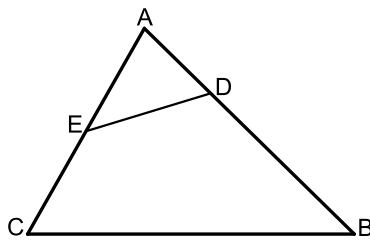
הבע באמצעות S את שטח המלבן.

30 המשולש ABC הוא שווה שוקיים בעל זווית ראש α , $(AB = AC)$. אורך הבסיס BC הוא k .



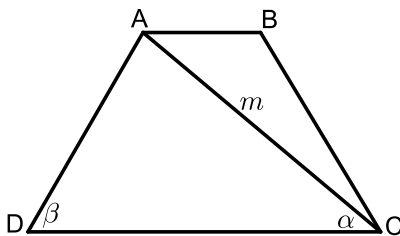
- על השוק AB בונים משולש ישר זווית ABD ובו $\angle D = 90^\circ$.
- הבע באמצעות k ו- α את אורך שוק המשולש ABC.
 - הניצב AD במשולש ABD שווה ל- $0.85k$.
 - וכי: $\angle ABD = 40^\circ$. מצא את זוויות המשולש ABC.
 - חשב את שטח המרובע ACBD אם ידוע כי $k = 6$.

31 במשולש ABC אורך הצלע AC הוא 8 ס"מ ואורך הצלע AB הוא 10 ס"מ.



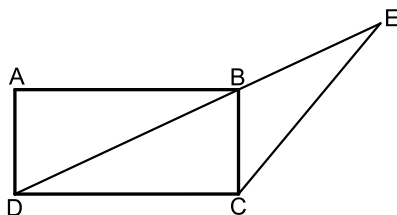
- הנקודה E היא אמצע הצלע AC והנקודה D מקיימת: $AD = 3$ ס"מ.
- ידוע כי: $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{5}$.
- מצא את אורך הקטע DE.
 - חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ADE.
 - חשב את שטח המרובע BCED.

32 המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$. הקטע AC הוא אלכסון בטרפז.

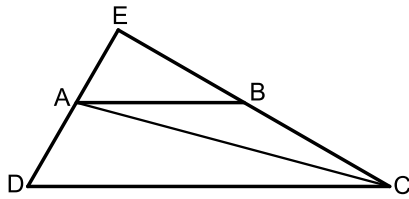


- מסמנים: $AC = m$, $\angle ACD = \alpha$, $\angle ADC = \beta$.
- הבע באמצעות α , β ו- m את אורך הבסיס הגדול DC.
 - נתון כי האלכסון AC מקיים: $\frac{S_{ADC}}{S_{ABC}} = 3$.
 - הבע באמצעות α , β ו- m את הבסיס AB.
 - חשב את שטח הטרפז אם ידוע כי: $\beta = 60^\circ$, $\alpha = 40^\circ$ ו- $m = 8$.

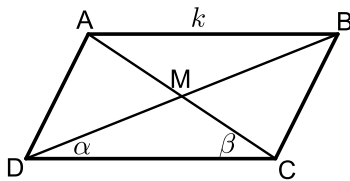
33 המרובע ABCD הוא מלבן. מעבירים את האלכסון BD וממשיכים אותו עד לנקודה E שמחוץ למלבן.



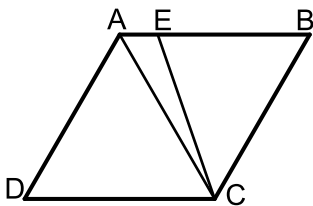
- אותו עדין נקודה E עם הקודקוד C. ידוע כי אורך הצלע AD של המלבן הוא 6 ס"מ וכי אורך הקטע BE הוא 9 ס"מ. הזווית CBE היא 115° .
- מצא את אורך הקטע CE.
 - מצא את אורך האלכסון BD.
 - חשב את שטח המשולש DCE.



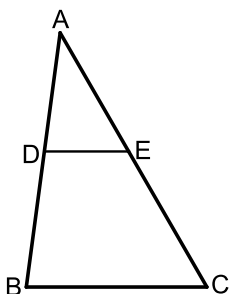
- (34)** המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.
 ממשיכים את השוקיים AD ו-BC עד לפגישתם
 בנקודה E. ידוע כי: $DE \perp CE$.
 מעבירים את האלכסון AC אשר חוצה את זווית C.
 מסמנים את הבסיס הגדול DC ב- k ואת: $\angle ACD = \alpha$.
 א. הבע באמצעות k ו- α את הבסיס הקטן AB.
 ב. הבע באמצעות k ו- α את שטח המשולש ABC.
 ג. חשב את שטח המשולש ABC כאשר: $\alpha = 15^\circ$, $12 \text{ ס"מ} = k$.



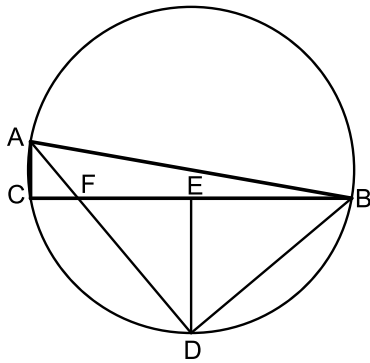
- (35)** נתונה מקבילית ABCD ובה מעבירים
 את האלכסונים AC ו-BD אשר נחתכים
 בנקודה M כמתואר באיור.
 מסמנים: $AB = k$, $\angle BDC = \alpha$, $\angle ACD = \beta$.
 א. הוכח כי אלכסוני המקבילית מקיימים:
 $\frac{AC}{BD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$.
 ב. ענה על השאלות הבאות:
 i. הבע באמצעות α , β ו- k את שטח המשולש DMC.
 ii. הבע באמצעות α , β ו- k את שטח המקבילית ABCD.
 ג. נתון כי: $\frac{AC}{BD} = 2$. הראה כי שטח המקבילית הוא:
 $\frac{4k^2 \sin^2 \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.



- (36)** המרובע ABCD הוא מעוין ובו $\angle D = 60^\circ$.
 מעבירים את האלכסון AC ואת הקטע CE
 כך שהנקודה E נמצאת על הצלע AB ומחלקת
 אותה ביחס: $\frac{BE}{AE} = 4$.
 א. חשב את זווית AEC.
 ב. נתון כי שטח המשולש AEC הוא 8.66 סמ"ר. חשב את שטח המעוין.



- (37)** הקטע DE מקביל לצלע BC במשולש ABC כמתואר באיור.
 נתון כי: $BC = 15$, $CE = 13$, $BD = \sqrt{129}$.
 ידוע כי זווית AED היא 60° .
 א. חשב את אורך הקטע DE אם ידוע
 ב. כי הוא קטן מ-10 ס"מ.
 ג. חשב את שטח המשולש ADE.



(38) המשולש ABC חסום במעגל כך ש-AB הוא קוטר.

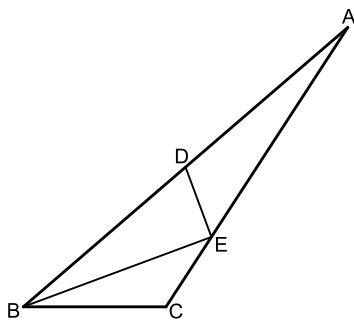
הנקודה D היא אמצע הקשת BC וממנה מעבירים את המיתרים AD ו-BD ומעלים גובה DE לצלע BC.

מסמנים: $DE = k$ ונתון כי: $\angle ABC = 10^\circ$.

א. הבע באמצעות k את רדיוס המעגל.

ב. הבע באמצעות k את שטח המשולש ABF.

ג. מצא את k אם ידוע כי שטח המשולש ABF הוא 15.363 סמ"ר.



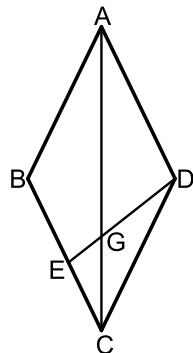
(39) במשולש ABC הקטע BE חוצה את זווית B.

הנקודה D היא אמצע הצלע AB ומקיימת: $DE = CE$.

ידוע כי: $BC = 6$, $BE = 8$, $BD = 9$.

א. מצא את זווית B.

ב. חשב את שטח המשולש ADE.



(40) נתון המעוין ABCD. אורך האלכסון הגדול במעוין AC גדול פי 1.8 מצלע המעוין.

א. חשב את זוויות המעוין.

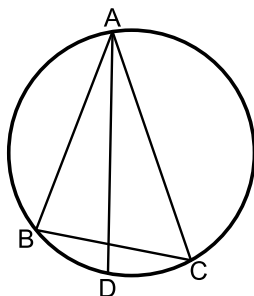
ב. מהקודקוד D מעבירים את הקטע DE שאורכו הוא m .

הקטע DE חותך את האלכסון AC בנקודה G.

הזווית EDC תסומן ב- α .

i. הבע באמצעות m ו- α את אורך הקטע CE.

ii. הבע באמצעות m ו- α את שטח המשולש EGC.



(41) המשולש ABC חסום במעגל כמתואר באיור.

מעבירים את המיתר AD החוצה את זווית BAC.

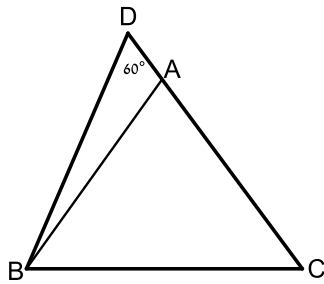
ידוע כי: $\angle ACB = 60^\circ$, $\angle BAC = 40^\circ$.

מסמנים: $AD = k$.

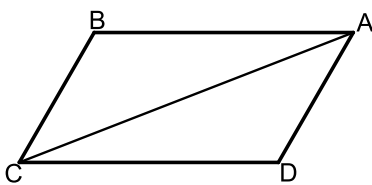
א. הבע באמצעות k את אורך המיתר BD.

ב. ידוע כי שטח המשולש ABD הוא 7.368 סמ"ר.

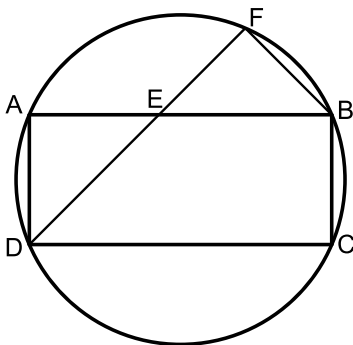
מצא את k (עגל למספר שלם).



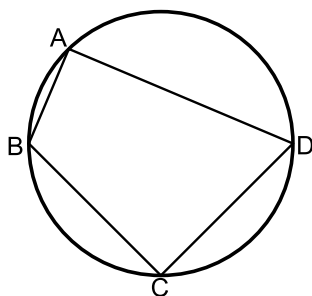
- (42)** המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$). ממשיכים את הצלע AC עד לנקודה D כך שאורך שוק המשולש גדולה פי 3.8 מהקטע AD. ידוע כי: $\angle D = 60^\circ$. אורך הקטע BD הוא 21 ס"מ.
א. מצא את אורך הקטע AD.
ב. חשב את שטח המשולש ABC.



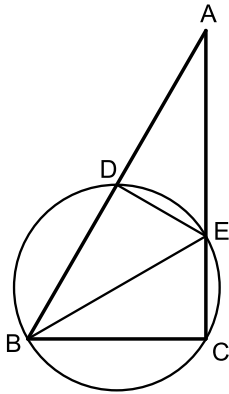
- (43)** במקבילית ABCD אורך האלכסון AC הוא $\sqrt{79}$ ס"מ. היקף המקבילית הוא 20 ס"מ וידוע כי: $\angle B = 120^\circ$.
א. מצא את אורכי צלעות המקבילית.
ב. חשב את שטח המקבילית.
ג. מסמנים נקודה E על האלכסון AC כך שהמרובע CBED הוא בר חסימה. חשב את רדיוס המעגל החוסם את המרובע CBED.



- (44)** המרובע ABCD הוא מלבן החסום במעגל. מהקודקוד D מעבירים את המיתר DF החותך את הצלע AB בנקודה E. ידוע כי: $\widehat{AF} = \widehat{CF}$. הצלע AD של המלבן תסומן ב- a .
א. הוכח כי המשולש DAE שווה שוקיים.
ב. נתון גם כי: $BC = BF$.
i. הבע באמצעות a את רדיוס המעגל.
ii. חשב את הזוויות המרכזיות של הקשתות: \widehat{AB} , \widehat{BC} . (אין צורך לסרטט אותן).



- (45)** המרובע ABCD חסום במעגל כמתואר באיור. ידוע כי: $AB = b$, $BC = a$, $CD = a$, $AD = 3b$.
א. הבע באמצעות a ו- b את $\cos \angle BCD$.
ב. הוכח כי אם BD קוטר אז מתקיים: $a = b\sqrt{5}$.
ג. נתון כי רדיוס המעגל הוא 3 ס"מ. הסתמך על סעיף ב' וחשב את שטח המרובע ABCD.

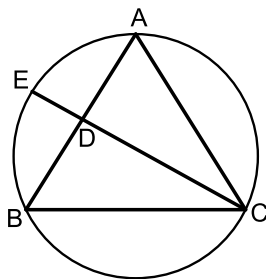


- (46)** המשולש ABC הוא ישר זווית $\sphericalangle C = 90^\circ$ ובו: $\sphericalangle B = 2\alpha$.
 מעבירים מעגל שרדיוסו R דרך הקודקודים B ו-C אשר חותך את צלעות המשולש בנקודות D ו-E.
 המיתר BE חוצה את זווית B.
 א. הבע באמצעות R ו- α את שטח המשולש ABE.
 ב. ידוע כי המשולש ABE הוא שווה שוקיים וכי אורך המיתר CE הוא 6 ס"מ.
 חשב את שטח המשולש ABE.

- (47)** במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$) שאורך השוק בו הוא k וזווית הבסיס שלו היא β , BE חוצה את זווית B ו-CD הוא הגובה לשוק AB.

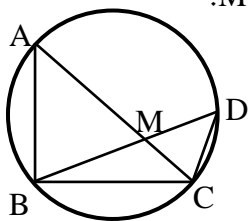
הוכח כי שטח המשולש ADE הוא:

$$S_{ADE} = -\frac{k^2 \sin \frac{\beta}{2} \sin 4\beta}{4 \sin \frac{3\beta}{2}}$$



- (48)** נתון משולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$) החסום במעגל. מהקודקוד C מעבירים את המיתר CE החותך את השוק AB בנקודה D. ידוע כי E היא אמצע הקשת \widehat{AB} והיחס בין הקטעים BD ו-CD הוא 4:7.
 מסמנים: $\sphericalangle ACD = \alpha$.

- א. מצא את זוויות המשולש ABC (עגל למספרים שלמים).
 ב. חשב את אורך המיתר BE אם ידוע כי רדיוס המעגל החוסם שווה ל-8 ס"מ.



- (49)** AC ו-BD הם מיתרים במעגל שרדיוסו R, שנפגשים בנקודה M. זווית B היא זווית ישרה.
 נתון: $\sphericalangle MCB = \beta$, $\sphericalangle MBC = \alpha$.

א. הבע באמצעות R, α ו- β את שטח המשולש BDC.

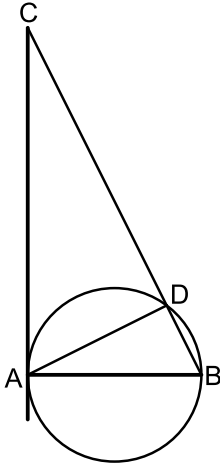
ב. נתון: $\beta = 2\alpha$, $S_{BDC} = \frac{1}{2}R^2$.

חשב את α .

50 בטרפז שווה שוקיים, שאורך השוק שבו הוא b והזווית שליד הבסיס הגדול היא γ נתון שהאלכסונים מאונכים זה לזה.

א. הבע באמצעות γ ו- b את אורכי בסיסי הטרפז.

ב. חשב את γ אם ידוע שהבסיס הגדול ארוך פי $\sqrt{3}$ מהבסיס הקטן.



51 המיתר AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R ו-AD הוא מיתר.

ממשיכים את המיתר BD ומעבירים משיק מהנקודה A.

המשיק והמשך המיתר נגשים בנקודה C.

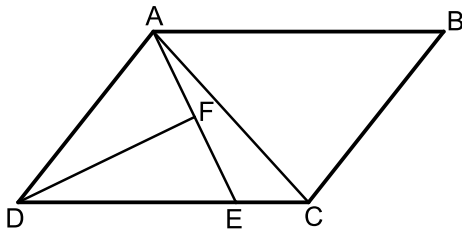
מסמנים: $\angle BAD = \alpha$.

א. הבע באמצעות α ו- R את שטח המשולש ABD.

ב. הבע באמצעות α ו- R את שטח המשולש ACD.

ג. מצא את α אם ידוע כי שטח המשולש ABD

קטן פי 4 משטח המשולש ACD.



52 המרובע ABCD הוא מקבילית.

הקטע AE מקצה על הצלע DC קטעים

המקיימים: $3CE = DE$.

מעבירים תיכון DF לצלע AE במשולש ADE.

ידוע כי: $\angle ADF = \angle CDF = \alpha$.

מסמנים: $CE = k$.

א. הבע באמצעות k ו- α את אורך הקטע AE.

ב. מעבירים את האלכסון AC.

הבע באמצעות k ו- α את היקף המשולש ACE.

ג. היקף המשולש ACE הוא $4.5k$. מצא את α .

תשובות סופיות:

$$(25) \quad S = 75.801 \text{ סמ"ר} \quad \text{א.} \quad S = 8.641 \text{ סמ"ר} \quad \text{ב.}$$

$$(26) \quad S = 16 \text{ סמ"ר}$$

$$S_{ABCD} = \frac{m^2 \tan^2 \alpha \sin 45^\circ \cos \alpha}{2 \sin(\alpha + 45^\circ)} \quad (27)$$

$$(28) \quad \text{א.} \quad \sqrt{\frac{2S}{\sqrt{27}}} \approx 0.62S \quad \text{ב.} \quad \frac{2}{3}S$$

$$(29) \quad \text{א.} \quad \frac{k}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \quad \text{ב.} \quad 44.4^\circ, 67.78^\circ, 67.78^\circ \quad \text{ג.} \quad S = 37.18$$

$$(30) \quad \text{א.} \quad DE = \sqrt{1.6} = 1.26 \quad \text{ב.} \quad R = 2 \quad \text{ג.} \quad S = 21.48$$

$$(31) \quad \text{א.} \quad DC = \frac{m \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} \quad \text{ב.} \quad AB = \frac{m \sin(\alpha + \beta)}{3 \sin \beta} \quad \text{ג.} \quad S_{ABCD} = 31.2$$

$$(32) \quad \text{א.} \quad 12.75 \text{ ס"מ} \quad \text{ב.} \quad 14.19 \text{ ס"מ} \quad \text{ג.} \quad 63.05 \text{ ס"מ}$$

$$(33) \quad \text{א.} \quad \frac{k \tan \alpha}{\tan 2\alpha} \quad \text{ב.} \quad \frac{k^2 \tan \alpha \sin 2\alpha}{2 \tan^2 2\alpha} \quad \text{ג.} \quad S = 7.754 \text{ ס"מ}$$

$$(34) \quad \text{א.} \quad \frac{k^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)} \quad \text{ב.} \quad \frac{2k^2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad \text{ii.}$$

$$(35) \quad \text{א.} \quad 109.1^\circ \quad \text{ב.} \quad S = 86.6$$

$$(36) \quad \text{א.} \quad 7 \text{ ס"מ} \quad \text{ב.} \quad 34.48 \text{ סמ"ר}$$

$$(37) \quad \text{א.} \quad R = \frac{k}{2 \sin^2 40} = 1.21k \quad \text{ב.} \quad S = \frac{k^2 \sin 10}{2 \sin 50 \sin^3 40} \quad \text{ג.} \quad k = 6$$

$$(38) \quad \text{א.} \quad 40.72^\circ \quad \text{ב.} \quad S = 12.52$$

$$(39) \quad \text{א.} \quad 128.32^\circ; 51.68^\circ \quad \text{ב.} \quad 1.27m \sin \alpha \quad \text{ג.} \quad \frac{0.35m^2 \sin^2 \alpha \sin(128.32 - \alpha)}{\sin(25.84 + \alpha)}$$

$$(40) \quad \text{א.} \quad BD = \frac{k \sin 20}{\sin 100} \quad \text{ב.} \quad k = 7$$

$$(41) \quad \text{א.} \quad 5 \text{ ס"מ} \quad \text{ב.} \quad S = 172.77$$

$$(42) \quad \text{א.} \quad BC = 3 \text{ ס"מ} \quad \text{ב.} \quad AB = 7 \text{ ס"מ} \quad \text{ג.} \quad S = 18.18 \text{ סמ"ר} \quad \text{ד.} \quad R = \sqrt{\frac{37}{3}}$$

ב.ii. $45^\circ, 135^\circ$

(43) ב.i. $R = a\sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 1.3a$

ג. $S = 14.4$ סמ"ר

(44) א. $\cos \sphericalangle BCD = \frac{a^2 - 5b^2}{a^2 + 3b^2}$

ב. $S = 36\sqrt{3}$ סמ"ר

(45) א. $S = R^2 \tan 2\alpha$

ב. $BE = 7.75$

(48) א. $58^\circ, 58^\circ, 64^\circ$

ב. $\alpha = 22.5^\circ$

(49) א. $S = 2R^2 \sin \alpha \cos \beta \sin(90^\circ - \alpha + \beta)$

ב. $\gamma = 75^\circ$

(50) א. $\frac{b \sin(135^\circ - \gamma)}{\sin 45^\circ}, \frac{b \sin(\gamma - 45^\circ)}{\sin 45^\circ}$

ג. $\alpha = 26.56^\circ$

ב. $S = \frac{2R^2 \cos^3 \alpha}{\sin \alpha}$

(51) א. $S = R^2 \sin 2\alpha$

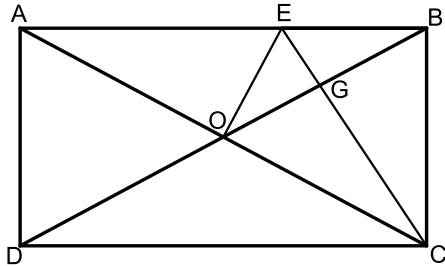
ב. $P_{ACE} = k + 6k \sin \alpha + k\sqrt{25 - 24 \cos 2\alpha}$

(52) א. $AE = 6k \sin \alpha$

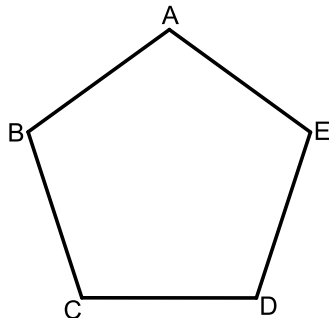
ג. $\alpha = 14.47^\circ$

שאלות המשלבות ידע בגיאומטריה:

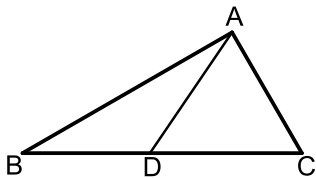
שאלות:



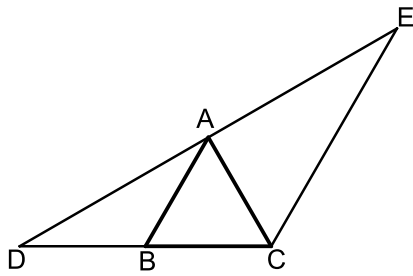
- 53) המרובע ABCD הוא מלבן.
 מעבירים את האלכסונים AC ו-BD.
 הנקודה E נמצאת על הצלע AB של המלבן ומחלקת אותה כך ש- $2BE = AE$.
 ידוע כי הקטע OE מאונך לאלכסון AC ושווה ל-BE.
 הקטע CE חותך את האלכסון BD בנקודה G.
 א. הוכח כי הקטע CE מאונך לאלכסון BD.
 ב. הוכח כי מתקיים: $4GE = AE$.
 ג. נתון כי שטח המשולש BEG הוא 5 סמ"ר.
 חשב את שטח המלבן ABCD.



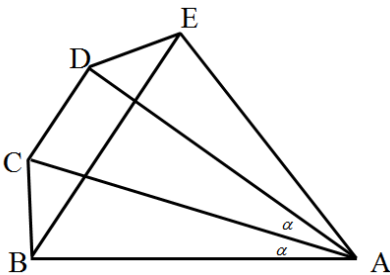
- 54) באיור שלפניך נתון מחומש משוכלל ACBDE (כל זוויותיו הן 108°) בעל אורך צלע α .
 א. הבע באמצעות α את אלכסון המחומש AD.
 ב. הבע באמצעות α את רדיוס המעגל החוסם את המחומש.
 ג. הבע באמצעות α את שטח המחומש.
 ד. אורך רדיוס המעגל החוסם את המחומש הוא 6 ס"מ.
 חשב את שטח המחומש.



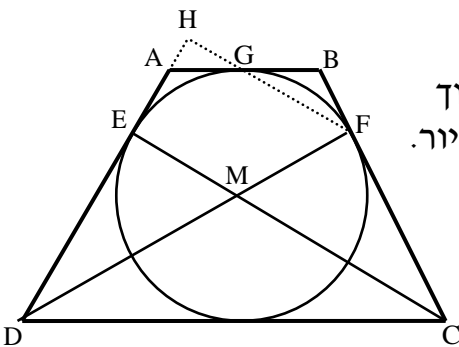
- 55) במשולש ABC הזווית C היא 60° .
 מעבירים את הקטע AD כך שנוצרים המשולשים ABD ו-ACD.
 ידוע כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACD הוא: $R_1 = \sqrt{3}$ ס"מ.
 כמו כן רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא: $R_2 = 3$ ס"מ.
 א. הוכח כי המשולש ABC הוא ישר זווית.
 ב. היקף המשולש ABC הוא: $12 + 4\sqrt{3}$ ס"מ = P.
 חשב את שטח המשולש.



- 56** המשולש ABC הוא שווה צלעות. הקטע DE עובר דרך הקודקוד A כך שנוצרים שני משולשים ABD ו-ACE. ידוע כי AC חוצה את זווית DCE במשולש DCE. א. הוכח: $AB \parallel CE$. ב. הוכח: $BC \cdot DE = DC \cdot AE$. ג. נתון: $DC = 8$ ס"מ וכי: $AC \perp DE$.
i. חשב את שטח המשולש DCE.
ii. חשב את שטח המשולש ABD.

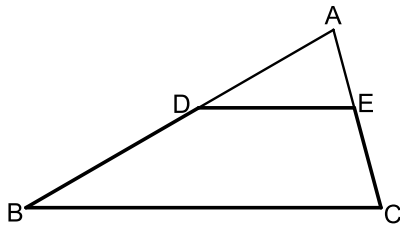


- 57** מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB, AC, AD ו-AE כך שמתקיים: $\angle BAC = \angle CAD = \alpha$ ו- $AB = AE$. מעבירים את האלכסון BE במחומש ABCDE מתקיים: $BE \parallel CD$. ידוע כי המרובע BCDE הוא בר חסימה. א. הוכח כי המרובע BCDE הוא טרפז שווה שוקיים. ב. נתון כי המשולש ACD הוא ש"ש ($AC = AD$). הוכח כי: $\triangle ABD \cong \triangle ACE$. ג. ידוע כי: $\angle ADC = 3\alpha + 2.5$ ו- $\angle ADE = 3\alpha - 10$. הוכח כי משולש ADE הוא ישר זווית. ד. נסמן: $AB = m$.
i. הבע באמצעות m את צלעות הטרפז BCDE.
ii. הבע באמצעות m את שטח המחומש ABCDE.
iii. מצא את m אם ידוע כי שטח המחומש ABCDE הוא 46.284 סמ"ר. (עגל למספר שלם).



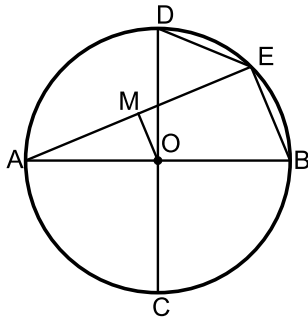
- 58** הטרפז ABCD הוא שווה שוקיים. חוסמים מעגל בתוך הטרפז אשר משיק לו בנקודות E, F ו-G כמתואר באיור. הקטעים DF ו-CE חוצים את זוויות הטרפז ונחתכים בנקודה M. א. הוכח כי הנקודה M היא מרכז המעגל החסום. ב. חשב את זוויות הטרפז. ג. ממשיכים את GF ואת AD כך שהם נפגשים בנקודה H.

חשב את היחס $\frac{EM}{FH}$.

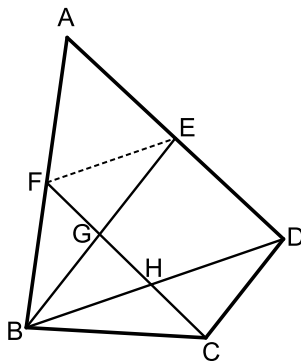


- (59)** המרובע BDEC הוא טרפז $BC \parallel DE$. המשכי השוקיים BD ו-CE נפגשים בנקודה A כך שהמשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = BC$). נתון: $AB = 18$ ס"מ, $\angle ADE = 30^\circ$.
- סמן את אורך הבסיס DE ב- x . ואת שטח הטרפז BDEC ב- S . הבע את S באמצעות x .
 - על הקטע AD בונים ריבוע. ידוע כי שטחו קטן ב-1 סמ"ר משטח הטרפז BDEC.

חשב את היחס: $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}$.



- (60)** במעגל שמרכזו O מעבירים את הקטרים AB ו-CD המאונכים זה לזה. E היא נקודה על היקף המעגל המקיימת: $BE + DE = 15$ ס"מ. מעבירים את המיתר AE. הקטע OM מאונך למיתר AE ושווה למיתר DE.
- הוכח כי המרובע OMEB הוא טרפז ישר זווית.
 - מצא את אורך המיתר BE.
 - נתון כי שטח הטרפז הוא 90 סמ"ר. מצא את רדיוס המעגל.
 - חשב את זווית B.



- (61)** BD הוא אלכסון במרובע הבר-חסימה ABCD. הנקודות E ו-F הן בהתאמה אמצעי הצלעות AD ו-AB במרובע. מעבירים את הקטעים BE ו-CF כך ש- $BE \parallel CD$. נתון כי הזוויות $\angle A$ ו- $\angle BFE$ משלימות ל- 180° .
- הוכח: $\triangle ABCD \sim \triangle BFE$.
 - נתון כי: $BE = 7.5$ וכי: $GE - HD = 17 \frac{1}{15}$. חשב את אורך הקטע FE.
 - נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש BED הוא: $R = 4.001$ ס"מ. מצא את זווית $\angle EBD$.

תשובות סופיות:

(53) ג. 120 סמ"ר

(54) א. 1.618α

(55) ב. $S = 8\sqrt{3}$

(56) ג. i. $S_{CDE} = 16\sqrt{3}$

ג. ii. $S_{ABD} = 4\sqrt{3}$

(57) ד. i. $BC = 0.4663m$, $DE = 0.4663m$, $CD = 0.4776m$, $BE = 1.2175m$

(62) ד. ii. $0.7232m^2$

ד. iii. $m = 8$ ס"מ

ג. $\frac{2}{3}$

(58) ב. 60° , 120°

ב. $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{16}{81}$

(59) א. $S = 81 - 0.25x^2$

ד. $\sphericalangle B = 67.38^\circ$ ג. $R = 13$

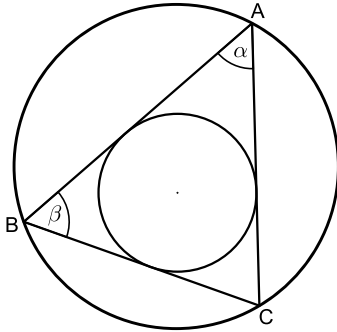
(60) ב. $BE = 10$

ג. 16.73°

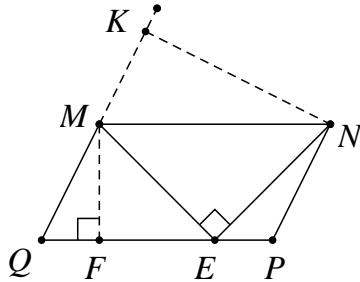
(61) ב. $FE = 4$

שאלות מסכמות:

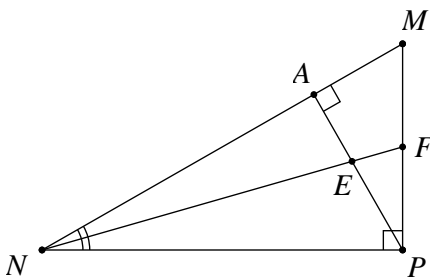
שאלות:



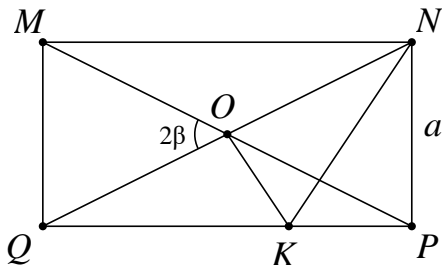
- (1) המשולש ABC חסום מעגל שרדיוסו R . נתון כי $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.
 א. הבע את רדיוס המעגל החסום במשולש בעזרת R , α , β .
 ב. נתון כי: $\alpha = \beta = 60^\circ$. חשב את רדיוס המעגל החסום במשולש בעזרת R .



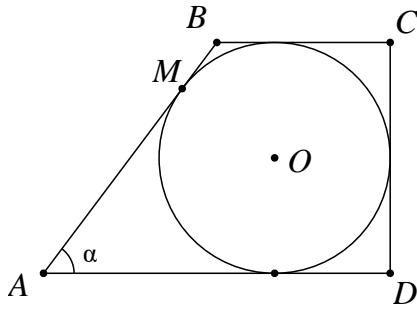
- (2) במקבילית MNQP נקודה E נמצאת על הצלע PQ כך ש- $\angle MEN = 90^\circ$ (ראה ציור). נתון: 12 ס"מ MQ , $\angle MNE = 40^\circ$, $\angle MQP = 70^\circ$. מצא את הגובה MF, ואת הגובה NK.



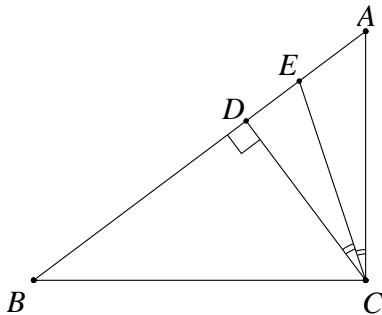
- (3) במשולש ישר-זווית MNP, ($\angle P = 90^\circ$) PA הוא גובה ליתר ו-NF חוצה את הזווית $\angle MNP$.
 PA ו-NF נחתכים בנקודה E (ראה ציור). נתון: 24 ס"מ NP , $\angle MNP = 40^\circ$.
 א. מצא את אורך הקטע NA.
 ב. מצא את אורך הקטע EF.



- (4) אלכסוני המלבן MNPQ נחתכים בנקודה O. מנקודה O מעלים אנך ל-QN החותך את QP בנקודה K (ראה ציור). נתון: $NP = a$, $\angle MOQ = 2\beta$.
 א. הבע את אורך הקטע OK באמצעות β ו- a .
 ב. הבע את היקף המשולש NOK באמצעות β ו- a .



- (5) בטרפז ישר-זווית ABCD חסום מעגל שמרכזו O. הנקודה M היא נקודת ההשקה של המעגל עם השוק AB. נתון: $AM = 12$ ס"מ, $\angle BAD = \alpha$.
- א. הבע את רדיוס המעגל בעזרת α .
- ב. הבע את היקף הטרפז בעזרת α .

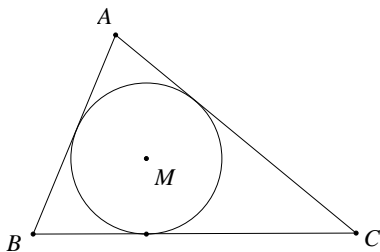


- (6) במשולש ישר-זווית ABC (ראה ציור) נתון: $BC = 8$ ס"מ, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = \beta$. CD הוא הגובה ליתר. CE הוא חוצה-הזווית $\angle ACD$. הבע את אורך הקטע AE באמצעות β .

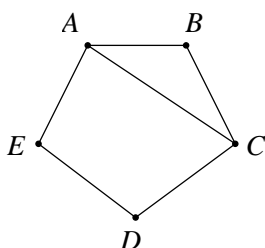
- (7) נתון מעגל שרדיוסו R. מצולע משוכלל בעל 9 צלעות חוסם את המעגל הזה. מצולע משוכלל אחר בעל 9 צלעות חסום בתוך מעגל זה. חשב את היחס בין שטח המצולע החוסם את המעגל לשטח המצולע החסום במעגל זה.

- (8) $\triangle ABC$ הוא משולש שווה-שוקיים ($AB = AC$) שאורך בסיסו 12 ס"מ. AD הוא הגובה לבסיס BC ו-CE הוא הגובה לשוק AB. שני הגבהים נחתכים בנקודה O. נתון: $\angle ABC = \alpha$ ($\alpha > 45^\circ$).

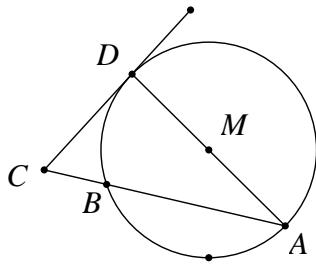
- א. הבע את היחס $AO : DO$ באמצעות α .
- ב. הראה כי בעבור $\alpha = 60^\circ$ הביטוי שמצאת בסעיף א' מתאים לתכונות הגאומטריות של משולש שווה-צלעות.



- (9) במשולש ABC חסום מעגל שמרכזו M ורדיוסו r (ראה ציור). נתון: $\angle B = 62^\circ$, $\angle C = 46^\circ$.
- א. הבע באמצעות r את אורך הצלע BC.
- ב. נתון: $BC = 16$ ס"מ. מצא את r.



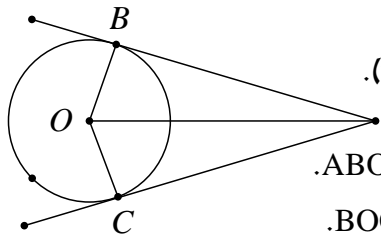
- (10) במחומש משוכלל ABCDE (ראה ציור) אורך האלכסון AC הוא 15 ס"מ. חשב את שטח המחומש.



11 מנקודה C הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו M ורדיוסו R מעבירים משיק CD וחותך CBA למעגל (ראה ציור).

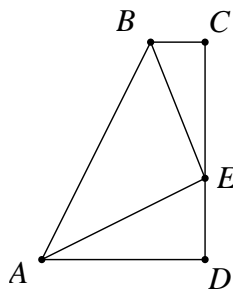
נתון: $CD = \frac{3}{5}R$.

- א. מצא את זוויות המשולש CAD.
- ב. הבע באמצעות R את שטח המשולש BCD.



12 מנקודה A, הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו O, יוצאים שני משיקים למעגל, AB ו-AC (ראה ציור). נתון: $\angle BAC = 2\alpha$, $AO = 10$ ס"מ.

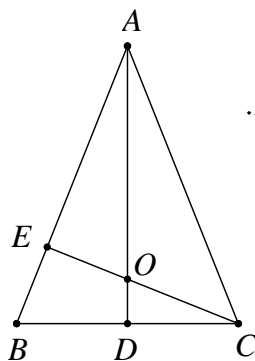
- א. הבע באמצעות α את S_1 , שטח המרובע ABOC.
- ב. הבע באמצעות α את S_2 , שטח המשולש BOC.
- ג. הראה שאם $\alpha = 30^\circ$, אזי: $S_1 = 4 \cdot S_2$.



13 ABCD הוא טרפז ישר-זווית ($\angle C = \angle D = 90^\circ$). נקודה E נמצאת על הצלע DC (ראה ציור). נתון: $\angle AEB = 90^\circ$, $AE = BE = k$, ו- $\angle CBE = \beta$. הבע באמצעות k ו- β את שטח הטרפז.

14 ענה על השאלות הבאות:

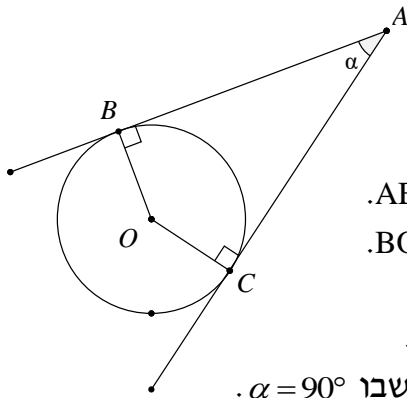
- א. במעושר משוכלל, ששטחו 100 סמ"ר, חוסמים מעגל. מצא את רדיוס המעגל החסום במעושר.
- ב. מעושר משוכלל חסום במעגל, שאת רדיוסו מצאת בסעיף א'. מצא את שטח המעושר המשוכלל הזה.



15 ABC הוא משולש שווה-שוקיים ($AB = AC$) שבו זווית הראש היא זווית חדה. נתון כי זווית הבסיס היא β ואורך הבסיס BC הוא 2α . AD הוא הגובה לבסיס BC ו-CE הוא הגובה לשוק AB. הגבהים AD ו-CE נפגשים בנקודה O (ראה ציור).

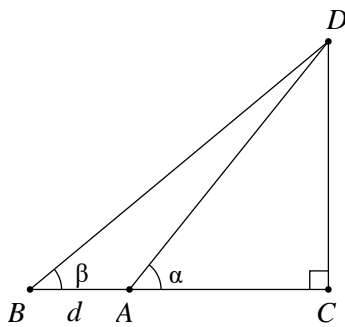
- א. הבע באמצעות α ו- β את אורכי הקטעים CO ו-CE.
- ב. הבע באמצעות β את היחס $\frac{CO}{CE}$.

ג. חשב את היחס שמצאת בסעיף ב' כאשר $\beta = 60^\circ$, והסבר מהי המשמעות הגאומטרית של התוצאה שקיבלת.

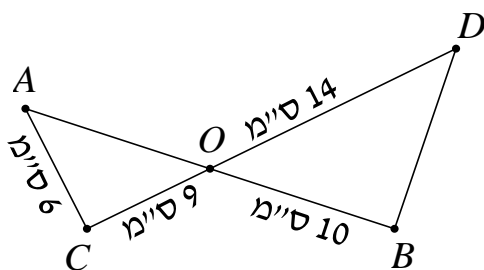


16 מנקודה A יוצאים שני משיקים למעגל שמרכזו O, שאורכם m (כלומר: $AB = AC = m$). נקודות ההשקה הן B ו-C, והזווית שבין המשיקים היא $\angle BAC = \alpha$ (ראה ציור).

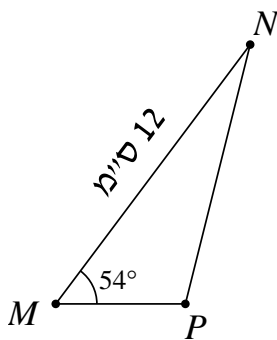
- הבע באמצעות m ו- α את שטח המשולש ABC.
- הבע באמצעות m ו- α את שטח המשולש BOC.
- הבע באמצעות α את היחס שבין שטחו של המשולש BOC לבין שטחו של המשולש ABC.
- בדוק את תשובתך לסעיף ג' למקרה המיוחד שבו $\alpha = 90^\circ$.



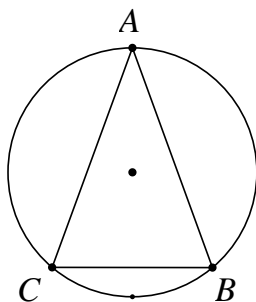
17 במשולש ישר-זווית DAC נתון $\angle DAC = \alpha$. מאריכים את הניצב AC כך ש- $AB = d$. נתון כי: $\angle DBA = \beta$ (ראה ציור). סמן: $AC = x$. הבע את x באמצעות d , α ו- β .



18 הקטעים AB ו-CD נחתכים בנקודה O. נתון כי: $\angle OAC = 60^\circ$, $AC = 6$ ס"מ, $CO = 9$ ס"מ, $OB = 10$ ס"מ, $OD = 14$ ס"מ. חשב את $\angle ODB$.

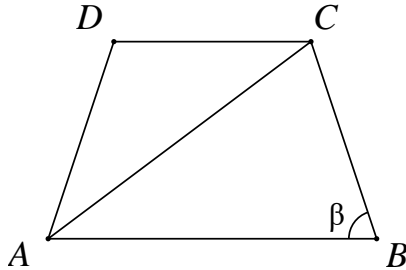


19 במשולש MNP גודל הזווית M הוא 54° . נתון כי אורך הצלע MN הוא 12 ס"מ (ראה ציור), והצלע NP ארוכה ב-7 ס"מ מהצלע MP. א. חשב את אורך הצלע NP. ב. PA הוא תיכון לצלע MN. חשב את שטח המשולש PAN.

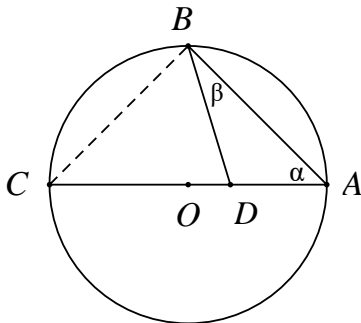


20 המשולש השווה-שוקיים ABC ($AB = AC$) חסום במעגל (ראה ציור). נתון: $\angle ABC = \beta$. כמו כן ידוע שאורך רדיוס המעגל הוא 20 ס"מ. א. הבע בעזרת β את שטח המשולש ABC. ב. חשב את שטח המשולש ABC בעבור $\beta = 45^\circ$.

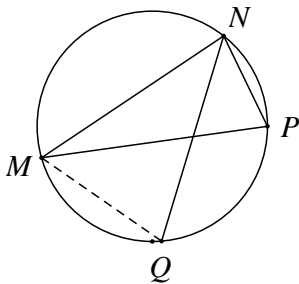
21 במשולש ABC הזווית $\sphericalangle C$ היא בת 60° , אורך הצלע AB הוא $\sqrt{13}$ ס"מ, והיקף המשולש הוא $7 + \sqrt{13}$ ס"מ. חשב את שטח המשולש.



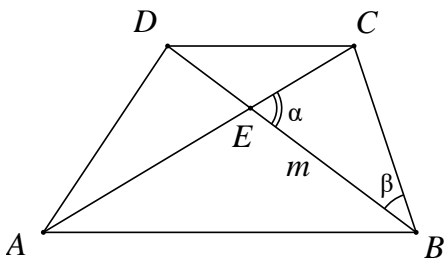
22 בטרפז שווה-שוקיים ABCD ($AD = BC$) אורך הבסיס הגדול AB שווה לאורך האלכסון. זווית הבסיס היא β ($\beta > 60^\circ$), (ראה ציור). הבע באמצעות β את היחס שבין שטח המשולש ACD לשטח המשולש ABC.



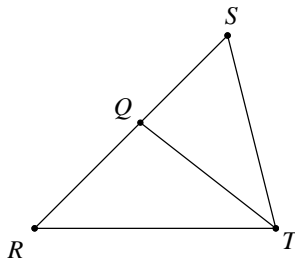
23 הקודקודים A ו-B של המשולש ABD נמצאים על היקף מעגל שאורך רדיוסו 12 ס"מ ומרכזו O. הקודקוד D של המשולש ABD נמצא על הרדיוס OA. א. הבע בעזרת α ו- β את שטח המשולש ABD. ב. הבע בעזרת α ו- β את היחס שבין שטח המשולש ABC לשטח המשולש ABD.



24 משולש MNP חסום במעגל. המיתר NQ חוצה את הזווית $\sphericalangle MNP$. נתון: $\sphericalangle MPN = 70^\circ$, $\sphericalangle MNP = 80^\circ$, $NP = 12$ ס"מ. חשב את אורך המיתר MQ.



25 נתון טרפז ABCD ($AB \parallel CD$). הנקודה E היא נקודת המפגש של אלכסוני הטרפז. נתון: $BE = m$, $DC = BC$, $\sphericalangle CEB = \alpha$, $\sphericalangle CBD = \beta$ (ראה ציור). הבע את אורכי בסיס הטרפז: AB ו-CD באמצעות m , α ו- β .



26 במשולש RST נתון: QT הוא חוצה-הזווית $\angle RTS$

(ראה ציור), $RQ = \sqrt{2}$, $QS = m$,

$\angle TRQ = 45^\circ$, $\angle RST = \alpha$.

א. הבע את $\sin \alpha$ באמצעות m .

ב. נתון כי: $m = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

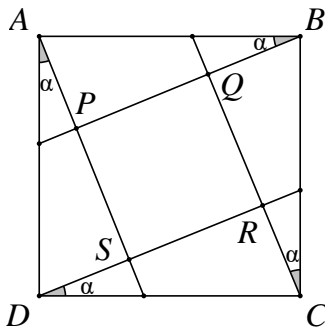
חשב את זוויות המשולש RST.

27 במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$) התיכון לשוק שווה באורכו לרדיוס המעגל החוסם את המשולש. חשב את זווית הבסיס של המשולש.

28 נתון משולש שצלעותיו t , $2t$, kt

א. לאיזה ערכים של הקבוע k המשולש הוא קהה זווית?

ב. נתון $k = \sqrt{7}$. הבע ע"י t את אורך חוצה הזווית הקהה.



29 בתוך הריבוע ABCD נתון, העבירו ארבעה

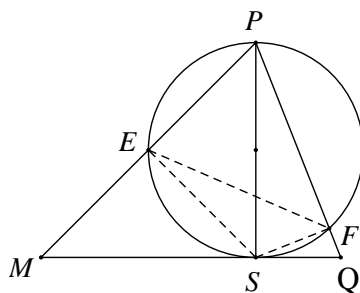
קטעים היוצרים את אותה זווית α

עם צלעות הריבוע כך שהתקבל ריבוע

פנימי PQRS.

א. הוכח כי: $\frac{PQ}{AB} = \cos \alpha - \sin \alpha$.

ב. לאיזו זווית α מתקיים: $PR = AB$?



30 PS הוא גובה במשולש PMQ (ראה ציור).

נתון $PS = h$, $\angle MPS = \alpha$, $\angle SPQ = \beta$.

א. הבע את שטח המשולש PMQ

באמצעות h , α ו- β .

ב. מעגל שקוטרו PS חותך את

הצלעות PM ו-PQ בנקודות E

ו-F בהתאמה (ראה ציור).

i. הבע באמצעות α ו- β את $\angle ESF$.

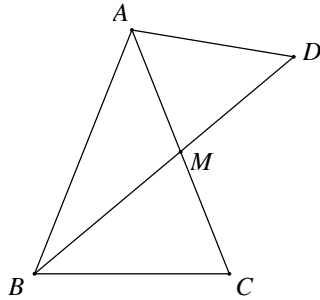
ii. הבע באמצעות α ו- β את היחס בין

שטח המשולש ESF לשטח המשולש PMQ.

31 במשולש ABC הצלעות הן a , b ו- c והזוויות שמונחות מולן הן: α , β ו- γ בהתאמה.

א. הבע את אורך התיכון m_a (התיכון לצלע a) באמצעות הצלעות b ו- c והזווית α .

ב. בדוק את הנוסחה שמצאת למקרה שבו המשולש ABC הוא שווה צלעות.



32 במשולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$),

BM הוא תיכון לשוק (ראה ציור).

נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא 10 ס"מ וכן נתון ש- $\angle BAC = 50^\circ$.

א. מצא את גודל הזווית $\angle BMC$.

ב. ממשיכים את BM עד לנקודה D,

כך שרדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא 14 ס"מ.

מצא את שטח המשולש AMD.

33 משולש שווה שוקיים BCE ($BC = BE$) חסום במעגל שרדיוסו R.

זווית הבסיס של המשולש BCE היא α .

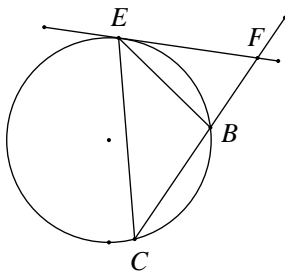
בנקודה E העבירו משיק למעגל החותך את

המשך השוק BC בנקודה F (ראה ציור).

א. בטא את שטח המשולש BEF באמצעות R ו- α .

ב. מצא את הערך של α שבעבורו שטח

המשולש BCE שווה לשטח המשולש BEF.



34 בטרפז BCDE ($BC \parallel ED$) אורך הבסיס BC הוא 12 ס"מ.

הזווית שבין הבסיס BC לשוק DC היא 80° .

אורך האלכסון BD הוא 16 ס"מ, והוא חוצה את הזווית $\angle CBE$.

חשב את היקף הטרפז.

35 במשולש ישר-זווית APD מחלקים את הזווית הישרה $\angle P$

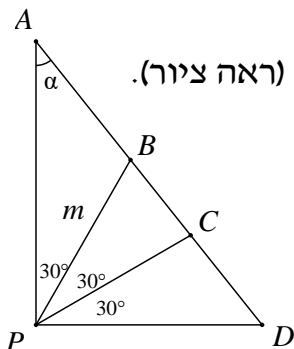
לשלוש זוויות שוות, כלומר $\angle APB = \angle BPC = \angle CPD = 30^\circ$ (ראה ציור).

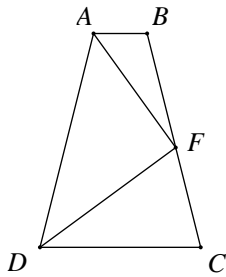
נתון כי: $PB = m$, $\angle PAD = \alpha$.

א. היעזר במשפט הסינוסים,

והבע את AB, AC, BD ו-CD באמצעות m ו- α .

ב. הוכח כי: $\frac{AC \cdot BD}{AB \cdot CD} = 3$



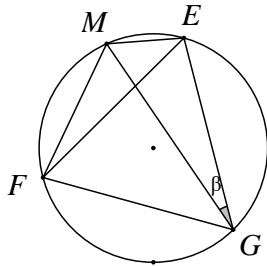


(36) בטרפז שווה שוקיים $ABCD$ ($AD = BC$, $AB \parallel DC$),

F היא נקודה על השוק BC , כך ש- DF חוצה את הזווית $\sphericalangle CDA$ ו- AF חוצה את הזווית $\sphericalangle DAB$ (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle FAB = \beta$, $AB = b$.

הבע באמצעות b ו- β את אורך הבסיס DC .

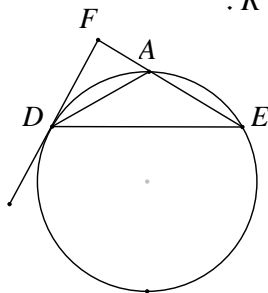


(37) משולש שווה צלעות EFG חסום במעגל שרדיוסו R .

M היא נקודה על המעגל. נתון: $\sphericalangle MGE = \beta$ (ראה ציור).

א. הוכח כי: $ME + MF = MG$.

ב. אם $ME = R$ מה תוכל לומר על $\sphericalangle MGE$?



(38) משולש שווה שוקיים ADE ($AD = AE$) חסום במעגל שרדיוסו R .

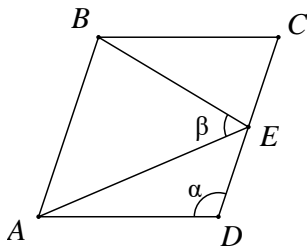
ישר המשיק למעגל בנקודה D חותך את המשך הצלע AE בנקודה F (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle AEF = \alpha$ ($60^\circ < \alpha < 180^\circ$).

א. הבע את שטח המשולש ADF באמצעות R ו- α .

ב. הבע באמצעות α את היחס שבין שטח המשולש ADE ובין שטח המשולש ADF .

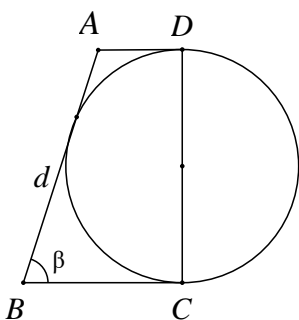
ג. חשב את α אם שטח המשולש ADE שווה לשטח המשולש ADF .



(39) במעוין $ABCD$ הנקודה E היא אמצע הצלע CD .

נתון: $\sphericalangle AEB = \beta$, $\sphericalangle ADC = \alpha$ (ראה ציור).

הוכח כי: $\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{25 - 16 \cos^2 \alpha}}$.



(40) נתון טרפז $ABCD$ ונתון מעגל. השוק DC הוא קוטר המעגל.

השוק AB משיקה למעגל, והבסיסים AD ו- BC משיקים גם הם למעגל בנקודות D ו- C בהתאמה (ראה ציור).

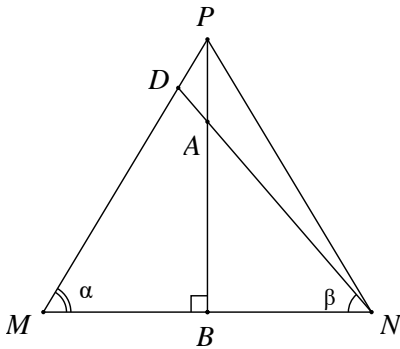
נתון כי: $AB = d$, $\sphericalangle B = \beta$.

א. הבע באמצעות d את סכום בסיסיו של הטרפז.

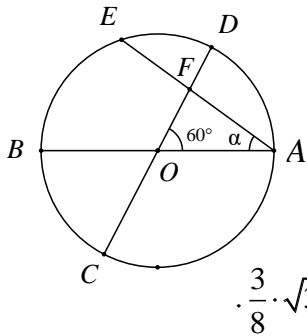
ב. הבע באמצעות d ו- β את היקף הטרפז ואת השטח של הטרפז.

ג. נתון שהיקף הטרפז 25 ס"מ ושטחו 25 סמ"ר.

חשב את הזווית החדה β .



- (41)** במשולש שווה שוקיים PMN ($PM = PN$),
 A היא נקודה על הגובה PB , כך ש- $PA = \frac{1}{5} \cdot PB$.
 הישר NA חותך את השוק PM בנקודה D (ראה ציור).
 נתון: $\angle DNB = \beta$, $\angle DNM = \alpha$, ו- $BN = \alpha$.
 א. חשב את היחס $\tan \beta : \tan \alpha$.
 ב. חשב את היחס $PM:DM$.



- (42)** במעגל שמרכזו O ורדיוסו R מעבירים שני קטרים AB ו- CD הנחתכים בזווית של 60° .
 מיתר AE , היוצר זווית α עם הקוטר AB ,
 חותך את הקוטר CD בנקודה F (ראה ציור).
 א. הבע את שטח המשולש ACF באמצעות R ו- α .
 ב. הוכח שכאשר $\alpha = 30^\circ$, שטח המשולש ACF הוא $\frac{3}{8} \cdot \sqrt{3} \cdot R^2$.

תשובות סופיות:

$$\frac{1}{2}R \quad \text{ב.} \quad r = \frac{2R \sin(\alpha + \beta) \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2}} = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$KN = 21.52 \text{ ס"מ} \quad , \quad MF = 11.28 \text{ ס"מ} \quad (2)$$

$$EF = 5.975 \text{ ס"מ} \quad \text{ב.} \quad NA = 18.385 \text{ ס"מ} \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$\frac{a}{2 \sin \beta} \cdot \left[1 + \tan \beta + \frac{1}{\cos \beta} \right] \quad \text{ב.} \quad OK = \frac{a}{2 \cos \beta} \quad \text{א.} \quad (4)$$

$$24 \cdot \left(1 + \tan \frac{\alpha}{2} \right)^2 \quad \text{ב.} \quad 12 \cdot \tan \frac{\alpha}{2} \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$AE = 8 \sin \beta \cdot \left[\tan \beta - \tan \left(\frac{1}{2} \beta \right) \right] = 8 \tan \beta \cdot \tan \left(\frac{1}{2} \beta \right) \quad (6)$$

$$2 \cdot \frac{\tan 20^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{1}{\cos^2 20^\circ} \approx 1.132 \quad (7)$$

$$-2 \cdot \frac{\tan \alpha}{\tan 2\alpha} = -\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha - 1 \quad \text{א.} \quad (8)$$

ב. מתקיים: $AO = 2 \cdot DO$ (מפגש הגבהים הוא גם מפגש התיכונים).

$$r = \frac{16}{\tan 59^\circ + \tan 67^\circ} \approx 3.98 \quad \text{ב.} \quad BC = r \cdot (\tan 59^\circ + \tan 67^\circ) \approx 4.02 \cdot r \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$S = 147.86 \text{ סמ"ר} \quad (10)$$

$$S \approx 0.0495 \cdot R^2 \quad \text{ב.} \quad \sphericalangle C = 73.3^\circ, \quad \sphericalangle D = 90^\circ, \quad \sphericalangle A = 16.7^\circ \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$S_1 = 100 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 50 \cdot \sin 2\alpha \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$S_2 = 50 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin(180^\circ - 2\alpha) = 50 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin 2\alpha \quad \text{ב.}$$

$$\text{ב. 27 יח"ש.} \quad S = \frac{1}{2} k^2 \cdot (1 + 2 \sin \beta \cos \beta) \quad \text{א.} \quad (13)$$

$$S \approx 90.45 \text{ סמ"ר} \quad \text{ב.} \quad r \approx 5.548 \text{ ס"מ} \quad \text{א.} \quad (14)$$

$$\frac{CO}{CE} = \frac{1}{2 \sin^2 \beta} \quad \text{ב.} \quad CE = 2a \cdot \sin \beta, \quad CO = \frac{a}{\sin \beta} \quad \text{א.} \quad (15)$$

ג. היחס הוא: $\frac{2}{3}$ (בדומה למפגש התיכונים במשולש)

$$S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2} m^2 \cdot \sin \alpha \cdot \tan^2 \frac{\alpha}{2} \quad \text{ב.} \quad S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} m^2 \cdot \sin \alpha \quad \text{א. (16)}$$

$$\text{ג. יחס השטחים: } \tan^2 \frac{\alpha}{2}$$

ד. במקרה זה ABOC הוא ריבוע, ויחס השטחים שווה ל-1 ($\tan^2 45^\circ = 1$).

$$AC = x = d \cdot \frac{\tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta} \quad (17)$$

$$\sphericalangle ODB \approx 44.7^\circ \quad (18)$$

$$S_{\Delta PAN} = 8.2 \text{ סמ"ר} \quad \text{ב.} \quad NP = 10.38 \text{ ס"מ} \quad \text{א. (19)}$$

$$S = 800 \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin 2\beta \quad \text{א. (20)} \quad \text{ב. 400 סמ"ר}$$

$$S_{\Delta ABC} = 3 \cdot \sqrt{3} \approx 5.196 \text{ סמ"ר} \quad (21)$$

$$(22) \quad \text{יחס השטחים הוא: } 1 - 4 \cos^2 \beta = \left(-\frac{\sin 3\beta}{\sin \beta} \right) \text{ או כל תשובה שקולה.}$$

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta \cdot \cos \alpha} \quad \text{ב.} \quad S_{\Delta ABD} = 288 \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad \text{א. (23)}$$

$$MQ \approx 15.43 \text{ ס"מ} \quad (24)$$

$$DC = m \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad AB = m \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)} \quad (25)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{m} \quad \text{א. (26)} \quad \text{ב. } 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ \text{ או } 45^\circ, 120^\circ, 15^\circ$$

$$\alpha \approx 20.7 \quad (27)$$

$$\frac{2}{3} \cdot t \approx 0.667t \quad \text{ב.} \quad 1 < k < \sqrt{3} \text{ או } \sqrt{5} < k < 3 \quad \text{א. (28)}$$

$$\alpha = 15^\circ \quad (29)$$

$$\sphericalangle ESF = 180^\circ - (\alpha + \beta) \quad \text{ב. i.} \quad S_{\Delta MPQ} = \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot (\tan \alpha + \tan \beta) \quad \text{א. (30)}$$

$$S_{\Delta EFS} : S_{\Delta MPQ} = \frac{1}{4} \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta \quad \text{ב. ii.}$$

$$m_a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b \quad \text{ב.} \quad m_a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{b^2 + c^2 + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha} \quad \text{א. (31)}$$

$$S_{\Delta AMD} = 54.1 \text{ סמ"ר} \quad \text{ב.} \quad \sphericalangle BMC = 79.5^\circ \quad \text{א. (32)}$$

$$\alpha = 45^\circ \quad \text{ב.} \quad S_{\triangle BEF} = \frac{2R^2 \cdot \sin^3 \alpha \cdot \sin 2\alpha}{\sin 3\alpha} \quad \text{א. (33)}$$

$$P_{BCDE} = 51.09 \quad \text{(34)}$$

$$, BD = \frac{\sqrt{3} \cdot m}{2 \cdot \cos \alpha}, AB = \frac{m}{2 \cdot \sin \alpha}, AC = \frac{\sqrt{3} \cdot m \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{2 \cdot \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \sin \alpha} \quad \text{א. (35)}$$

$$\text{ב. הוכחה.} \quad CD = \frac{m \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{2 \cdot \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \cos \alpha}$$

$$DC = \frac{-b \cdot \tan \beta}{\tan 3\beta} \quad \text{(36)}$$

$$\text{ב. MG הוא קוטר במעגל. (37)}$$

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ADF}} = -\frac{\cos(1.5\alpha)}{\cos(0.5\alpha)} \quad \text{ב.} \quad S_{\triangle ADF} = \frac{-2R^2 \cdot \cos^3 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha}{\cos(1.5\alpha)} \quad \text{א. (38)}$$

$$\alpha = 90^\circ \quad \text{ג.}$$

$$S = \frac{1}{2} d^2 \cdot \sin \beta, P = 2d + d \sin \beta \quad \text{ב.} \quad AD + BC = d \quad \text{א. (40)}$$

$$\beta = 30^\circ \quad \text{ג.}$$

$$PM : DM = \frac{9}{8} = 1.125 \quad \text{ב.} \quad \tan \beta : \tan \alpha = \frac{4}{5} = 0.8 \quad \text{א. (41)}$$

$$.S = \frac{3R^2 \cdot \sin(30^\circ + \alpha)}{4 \cdot \sin(60^\circ + \alpha)} \quad \text{א. (42)}$$

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 24 - מבוא לסטטיסטיקה

תוכן העניינים

1. איסוף נתונים והצגת נתונים (ללא ספר)
2. טבלת שכיחויות ושכיחות יחסית (ללא ספר)

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 25 - מדדים מרכזיים - החציון

תוכן העניינים

1. החציון (ללא ספר)

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 26 - מדדים מרכזיים - הממוצע

תוכן העניינים

1. סיכום כללי (ללא ספר)
2. שאלות יסודיות (ללא ספר)

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 27 - מדדים מרכזיים - השכיח

תוכן העניינים

1. השכיח (ללא ספר)

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 28 - הסתברות קלאסית

תוכן העניינים

| | |
|-----|--|
| 389 | 1. שאלות יסודיות |
| 392 | 2. שאלות עם שני ניסויים |
| 394 | 3. שאלות עם הסתברות מותנית |
| 396 | 4. שאלות עם נעלמים |
| 398 | 5. שאלות הנפתרות באמצעות טבלה דו-מימדית |
| 400 | 6. התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות יסודיות |
| 401 | 7. התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות עם הסתברות מותנית |
| 402 | 8. התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות עם נעלמים |
| 405 | 9. שאלות מסכמות |

שאלות יסודיות:

סיכום כללי:

1. ההסתברות להתרחשות מאורע A : מספר האפשרויות הכולל = $P(A) = \frac{\text{מספר האפשרויות הרצוי}}{\text{מספר האפשרויות הכולל}}$
2. המאורע המשלים למאורע A : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
3. חיתוך ואיחוד מאורעות A ו-B : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
4. מאורעות זרים הם מאורעות שלא יכולים להתקיים בו זמנית.
5. עבור מאורעות זרים A ו-B מתקיים : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, $P(A \cap B) = 0$.
6. מאורעות נקראים בלתי תלויים אם קיום האחד מהם לא משפיע על ההסתברות לקיומו של השני.
7. עבור מאורעות בלתי תלויים A ו-B מתקיים : $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
8. אם מתקיים : $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ המאורעות תלויים.
9. הסתברות מותנית של מאורע A בהינתן מאורע B מוגדרת : $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
10. צורה כללית של טבלת הסתברויות עבור מאורעות A ו-B :

| | \bar{A} | A | |
|--------------|---------------------------|---------------------|-----------|
| $P(B)$ | $P(\bar{A} \cap B)$ | $P(A \cap B)$ | B |
| $P(\bar{B})$ | $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ | $P(A \cap \bar{B})$ | \bar{B} |
| 1 | $P(\bar{A})$ | $P(A)$ | |

קשרים מידיים מהטבלה :

- $P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(B)$
- $P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{B})$
- $P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A)$
- $P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})$

9. התפלגות בינומית : חישוב k הצלחות מתוך n ניסיונות בלתי תלויים כאשר

ההסתברות להצלחה בניסיון בודד היא p נתונה ע"י : $P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

שאלות:

- (1) בכד 3 כדורים כחולים ו-7 כדורים לבנים.
מה ההסתברות להוצאת כדור כחול בהוצאה אקראית של כדור מהכד?
- (2) בכד 2 כדורים כחולים, 3 כדורים אדומים ו-7 כדורים לבנים.
מה ההסתברות שבהוצאה אקראית של כדור מהכד לא ייצא כדור אדום?
- (3) מהי ההסתברות שבסיבוב סביבון לא יתקבל "נס"?
- (4) עבור שני מאורעות, A ו-B נתון: $P(A) = 0.6$, $P(\bar{B}) = 0.3$, $P(A \cap B) = 0.4$.
מצא את $P(A \cup B)$.
- (5) עבור שני מאורעות, A ו-B נתון: $P(\bar{A}) = 0.2$, $P(\bar{B}) = 0.5$, $P(A \cup B) = 0.95$.
מצא את $P(A \cap B)$.
- (6) עבור שני מאורעות, A ו-B נתון: $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.25$, $P(A \cup B) = 0.65$.
קבע האם המאורעות זרים והאם הם תלויים.
- (7) נתון כי שני מאורעות, A ו-B בלתי תלויים.
בנוסף נתון: $P(A) = 0.75$, $P(B) = 0.4$. מצא את $P(A \cup B)$.

תשובות סופיות:

$$\frac{3}{10} \quad (1)$$

$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$P(A \cup B) = 0.9 \quad (4)$$

$$P(A \cap B) = 0.35 \quad (5)$$

(6) לא זרים ותלויים.

$$P(A \cup B) = 0.85 \quad (7)$$

שאלות עם שני ניסויים:

שאלות:

- (8) בכד 3 כדורים כחולים ו-7 כדורים אדומים. אדם מוציא באקראי כדור מהכד, ולאחריו מוציא עוד כדור (ללא החזרה של הכדור הראשון).
 א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?
 ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?
 ג. מה ההסתברות ששני הכדורים אינם באותו צבע?
- (9) בכד 3 כדורים כחולים, 2 כדורים אדומים ו-5 כדורים ירוקים. אדם מוציא באקראי כדור מהכד, מחזיר אותו לכד ואז מוציא עוד כדור.
 א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?
 ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?
 ג. מה ההסתברות ששני הכדורים אינם באותו צבע?
- (10) בחדר 4 גברים ו-5 נשים. מוציאים באקראי שלושה אנשים מהחדר (בלי החזרה).
 מה ההסתברות שמתוך השלושה יש יותר גברים מנשים?
- (11) נתונים שני כדים: בכד א' שלושה כדורים כחולים ואחד לבן ובכד ב' שני כדורים כחולים ושלושה לבנים. לואיזה מטילה מטבע לא הוגנת שבה הסיכוי לקבלת "עץ" כפול מהסיכוי לקבלת "פלי". אם יוצא "עץ" היא מוציאה כדור מכד א' ואם יוצא "פלי" היא מוציאה שני כדורים מכד ב'.
 מה ההסתברות שלא ייצא ללואיזה אף כדור לבן?
- (12) ליואב יש בכיסו הימני 3 גולות כחולות ו-5 שחורות ובכיסו השמאלי 4 גולות כחולות ו-4 שחורות. יואב מוציא גולה מכיסו הימני.
 אם היא כחולה הוא מחזיר אותה לכיס הימני ואם היא שחורה הוא מעביר אותה לכיס השמאלי. אחר כך הוא מוציא גולה מכיסו השמאלי.
 מה ההסתברות ששתי הגולות שהוציא באותו צבע?

תשובות סופיות:

$$\frac{7}{15} \text{ ג.} \quad \frac{8}{15} \text{ ב.} \quad \frac{1}{15} \text{ א.} \quad (8)$$

$$\frac{31}{50} \text{ ג.} \quad \frac{19}{50} \text{ ב.} \quad \frac{9}{100} \text{ א.} \quad (9)$$

$$\frac{17}{42} \quad (10)$$

$$\frac{8}{15} \quad (11)$$

$$\frac{77}{144} \quad (12)$$

שאלות עם הסתברות מותנית:

שאלות:

- 13** בכד 3 כדורים כחולים ו-7 כדורים אדומים. אדם מוציא באקראי כדור מהכד, ולאחריו מוציא עוד כדור.
- מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?
 - מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?
 - ידוע ששני הכדורים באותו צבע. מה ההסתברות ששניהם כחולים?
- 14** בכד 3 כדורים כחולים, 2 כדורים אדומים ו-5 כדורים ירוקים. אדם מוציא באקראי כדור מהכד, מחזיר אותו לכד ואז מוציא עוד כדור.
- מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?
 - מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?
 - ידוע ששני הכדורים באותו צבע. מה ההסתברות ששניהם כחולים?
- 15** בחדר 4 גברים ו-5 נשים. מוציאים באקראי שלושה אנשים מהחדר (בלי החזרה). ידוע שמתוך השלושה יש יותר גברים מנשים. מה ההסתברות שכולם גברים?
- 16** נתונים שני כדים: בכד א' שלושה כדורים כחולים ואחד לבן ובכד ב' שני כדורים כחולים ושלושה לבנים. לואיזה מטילה מטבע לא הוגנת שבה הסיכוי לקבלת "עץ" כפול מהסיכוי לקבלת "פלי". אם יוצא "עץ" היא מוציאה כדור מכד א' ואם יוצא "פלי" היא מוציאה שני כדורים מכד ב'.
- מה ההסתברות שלא ייצא ללואיזה אף כדור לבן?
 - ידוע שללואיזה לא ייצא אף כדור לבן, מה ההסתברות שבהטלת המטבע ייצא "עץ"?
- 17** במשחק מזל הסיכוי להרוויח 10 ₪ הוא 0.3 והסיכוי להרוויח 20 ₪ הוא 0.2. ישנו סיכוי של 0.5 לא להרוויח כלל. אדם שיחק במשחק פעמיים וידוע שהרוויח יותר מ-20 ₪. מה הסיכוי שהרוויח 40 ₪?

- 18** כדי להתקבל לעבודה בחברת משקאות יש לעבור שלושה ראיונות על ידי שלושה בעלי תפקידים בסדר הבא: אחראי משמרת, מנהל ראשי ומנכ"ל החברה. כל בעל מקצוע נותן חוות דעת חיובית או שלילית בלבד. כדי שמועמד יקבל עבודה בחברה עליו לעבור בהצלחה לפחות את אחד מהראיונות עם אחראי המשמרת והמנהל הראשי, אך הראיון עם המנכ"ל חייב לעבור בהצלחה (כדי שמועמד יקבל עבודה המנכ"ל צריך לתת לו חוות דעת חיובית).
- ידוע כי אחראי המשמרת נותן חוות דעת חיובית ל- $\frac{1}{6}$ מהמועמדים.
- המנהל הראשי קורא את חוות הדעת של אחראי המשמרת וב- $\frac{2}{3}$ מהמקרים נותן חוות דעת הפוכה מזו של אחראי המשמרת. מנכ"ל החברה נותן חוות דעת חיובית ל-80% מהמועמדים בלי קשר לחוות הדעת הקודמות.
- א. מה ההסתברות לקבל חוות דעת חיובית מהמנהל הראשי?
 ב. ידוע כי המנהל הראשי נתן חוות דעת חיובית, מה ההסתברות שגם אחראי המשמרת נתן חוות דעת חיובית?
 ג. מה ההסתברות להתקבל לחברה?

תשובות סופיות:

- 13** א. $\frac{1}{15}$ ב. $\frac{8}{15}$ ג. $\frac{1}{8}$
- 14** א. $\frac{9}{100}$ ב. $\frac{38}{100}$ ג. $\frac{9}{38}$
- 15** $\frac{2}{17}$
- 16** א. $\frac{8}{15}$ ב. $\frac{15}{16}$
- 17** $\frac{1}{4}$
- 18** א. $\frac{11}{18}$ ב. $\frac{1}{11}$ ג. $\frac{26}{45}$

שאלות עם נעלמים:

שאלות:

- 19) בכד מספר מסוים של כדורים. 3 כחולים והשאר אדומים. הסיכוי להוציא שני כדורים אדומים מהכד (בלי החזרה) הוא $\frac{5}{14}$. כמה כדורים בכד?
- 20) ההסתברות של צלף לפגוע במטרה בירייה הראשונה היא p והיא גדולה מההסתברות שלו להחטיא. אם הוא פוגע, עולה ההסתברות שלו לפגוע בירייה הבאה ב-0.1 ואם הוא מחטיא היא יורדת ב-0.1. הצלף ירה למטרה פעמיים. ההסתברות שפגע במטרה בדיוק בירייה אחת היא 0.38.
- א. מצא את p .
- ב. מה ההסתברות שהצלף פגע פעמיים במטרה אם ידוע שהוא פגע בה לפחות פעם אחת?
- 21) רפי קנה במכולת חבילה של מסטיק "מנטוס". בכל חבילה יש 10 סוכריות, חלקן ורודות וחלקן צהובות. רפי מוציא באקראי (ללא החזרה) שתי סוכריות מהחבילה שקנה. ידוע כי ההסתברות ששתי הסוכריות תהיינה ורודות קטנה פי 4 מההסתברות להוציא סוכריות בצבעים שונים.
- א. כמה סוכריות מכל צבע יש בכל חבילה?
- רפי מחזיר את הסוכריות בחזרה לחבילה ולאחר מכן מוציא באקראי 3 סוכריות (ללא החזרה).
- ב. מה ההסתברות שכל הסוכריות שהוציא רפי הן צהובות? שלומי, חברו הטוב של רפי, קנה 3 חבילות "מנטוס".
- ג. שלומי מוציא באקראי סוכרייה מכל חבילה. האם ההסתברות של שלומי להוציא 3 סוכריות צהובות גבוהה או נמוכה מזו של רפי?
- ד. שלומי מוציא מכל חבילה שתי סוכריות. מה ההסתברות שלו להוציא מכל חבילה סוכרייה ורודה ואחר כך צהובה?

- (22)** בתוך כד ישנם 8 כדורים, חלקם אדומים וחלקם לבנים. מוציאים באקראי כדור, מניחים אותו בצד ומוציאים כדור נוסף. א. מצא כמה כדורים יש בכד מכל צבע אם ידוע כי ההסתברות שהכדור השני שהוצא הוא לבן היא $\frac{3}{8}$. ב. ידוע כי הכדור השני שהוצא הוא לבן, מה ההסתברות שהכדור הראשון שיצא הוא אדום?

- (23)** בכד ישנם 12 כדורים, חלקם לבנים וחלקם שחורים. אם מוציאים עם החזרה שני כדורים מהכד ההסתברות ששניהם יהיו בעלי אותו הצבע היא $\frac{13}{18}$. א. מה ההסתברות להוציא כדור שחור מהכד אם ידוע כי יש יותר כדורים שחורים? ב. מה ההסתברות להוציא מהכד כדור שחור שרשום עליו מספר? ג. איזה חלק מבין הכדורים שרשום עליהם מספר מהווים הכדורים הלבנים? על 40% מהכדורים השחורים רשום מספר ועל מחצית הכדורים הלבנים לא רשום כלום.

תשובות סופיות:

- (19)** 8 כדורים.
- (20)** א. $p = 0.6$ ב. $\frac{21}{40}$
- (21)** א. 4 ורודות ו-6 צהובות. ב. $\frac{1}{6}$ ג. גבוהה $\left(\frac{27}{125} > \frac{1}{6}\right)$ ד. $P = 0.0189$
- (22)** א. 5 אדומים ו-3 לבנים. ב. $\frac{5}{7}$
- (23)** א. $\frac{5}{6}$ ב. $P = \frac{1}{3}$ ג. $\frac{1}{5}$

שאלות הנפתרות באמצעות טבלה דו-מימדית:

שאלות:

- 24** 70% מאוהדי מכבי ת"א הם גברים והשאר נשים. 40% מהאוהדים מעשנים. נתון כי 45% מהאוהדים הם גברים שאינם מעשנים.
- א. מהו אחוז הנשים המעשנות מבין אוהדי מכבי?
 ב. בוחרים באקראי אוהד מכבי. מה ההסתברות שהוא גבר או שהוא מעשן?
 ג. בוחרים באקראי אישה שאוהדת מכבי. מה ההסתברות שהיא מעשנת?
 ד. האם מין האוהד והעובדה שהוא מעשן הם מאורעות תלויים?
- 25** 65% מהפחיות המיוצרות במפעל משקאות הן רגילות והשאר דיאט. 80% מהפחיות המיוצרות תקינות והשאר פגומות. נתון כי 7% מהפחיות הן פחיות דיאט פגומות.
- א. בוחרים באקראי פחית. מה ההסתברות שהיא פחית רגילה ותקינה?
 ב. בוחרים באקראי פחית דיאט. מה ההסתברות שהיא פגומה?
 ג. בוחרים באקראי פחית פגומה. מה ההסתברות שהיא דיאט?
 ד. האם סוג הפחית ותקינותה הם מאורעות תלויים?
- 26** 80% מהתלמידים בכיתה עברו את המבחן בתנ"ך ו-70% עברו את המבחן בהיסטוריה. 75% מבין התלמידים שעברו את המבחן בתנ"ך עברו גם את המבחן בהיסטוריה.
- א. בוחרים באקראי תלמיד. מה ההסתברות שהוא נכשל בשתי הבחינות?
 ב. תלמיד נכשל במבחן בהיסטוריה. מה ההסתברות שהוא עבר את המבחן בתנ"ך?
 ג. ידוע שתלמיד עבר בדיוק מבחן אחד. מה ההסתברות שזה המבחן בתנ"ך?
- 27** בעיר גדולה ל-80% מהתושבים יש רישיון נהיגה. מבין בעלי רישיון נהיגה 30% הם גברים. 60% מהגברים הם בעלי רישיון נהיגה. בחרו באקראי שתי נשים מהעיר. מה ההסתברות שלשתיהן אין רישיון נהיגה?
- 28** 10% מהאנשים באוכלוסייה עיוורי צבעים. קיימת בדיקה הבוחנת אם אדם הוא עיוור צבעים. אם עיוור צבעים ניגש לבדיקה ישנו סיכוי של 80% שהבדיקה תקבע שהוא עיוור צבעים. אם אדם שאינו עיוור צבעים ניגש לבדיקה ישנו סיכוי של 5% שהבדיקה תקבע שהוא עיוור צבעים. מהם אחוזי האמינות של הבדיקה (אחוז המקרים בהם הבדיקה מאבחנת נכונה את הנבדק)?

(29) בסניף "תנו לחיות לחיות" בירושלים יש כלבים וחתולים בלבד, בעלי פרווה כהה או פרווה בהירה. 55% מהחיות בסניף הם כלבים. אחוז החתולים בעלי הפרווה הכהה גדול פי 3 מאחוז הכלבים בעלי הפרווה הבהירה. מבין בעלי הפרווה הכהה 60% הם כלבים. בוחרים באקראי חתול מהסניף. מה ההסתברות שהוא בהיר פרווה?

(30) בית ספר תיכון מציע לתלמידיו 3 מגמות ריאליות לבחירה: פיזיקה, כימיה ומחשבים. 40% מתלמידי מגמות אלה הם בנים. הבנים מהווים $\frac{2}{5}$ מתלמידי הפיזיקה, $\frac{5}{12}$ מתלמידי הכימיה ו- $\frac{1}{3}$ מתלמידי המחשבים. $\frac{1}{4}$ מהבנים הם תלמידי פיזיקה.

- א. האם יש תלות בין העובדה שתלמיד לומד פיזיקה למין התלמיד?
 ב. מהו אחוז לומדי המחשבים מקרב הבנים?

תשובות סופיות:

- (24)** א. 15% ב. 0.85 ג. 0.5 ד. כן.
- (25)** א. 0.52 ב. 0.2 ג. 0.35 ד. בלתי תלויים.
- (26)** א. 0.1 ב. $\frac{2}{3}$ ג. $\frac{2}{3}$
- (27)** $\frac{1}{225}$
- (28)** 93.5%
- (29)** $\frac{1}{3}$
- (30)** א. בלתי תלויים. ב. 12.5%

התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות יסודיות:

שאלות:

- (31) אדם מסובב חמש פעמים סביבון. מה ההסתברות שיקבל פעמיים "נס"?
- (32) מה ההסתברות לקבלת 5 פעמים "נס" בשמונה סיבובי סביבון?
- (33) הסיכוי לעבור את מבחן התיאוריה הוא 0.7. עשרה אנשים ניגשים למבחן התיאוריה. מהי ההסתברות שבדיוק שישה מהם יעברו?
- (34) בכד 6 כדורים כחולים ו-4 לבנים. אדם מוציא מהכד כדור, מסתכל על צבעו ומחזיר אותו לכד. הוא חוזר על הפעולה 4 פעמים נוספות.
מה ההסתברות שמתוך חמשת הכדורים הוציא:
- בדיוק ארבע יהיו כחולים?
 - חמישה יהיו כחולים?
 - לפחות ארבעה יהיו כחולים?
 - הרוב יהיו כחולים?
 - לפחות אחד יהיה כחול?
 - הראשון והאחרון בלבד יהיו כחולים?

תשובות סופיות:

- (31) 0.264
- (32) 0.023
- (33) 0.2001
- (34) א. 0.259 ב. 0.078 ג. 0.337 ד. 0.683 ה. 0.98976 ו. 0.023

התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות עם הסתברות מותנית:

שאלות:

35 בכד 6 כדורים כחולים ו-4 לבנים. אדם מוציא מהכד כדור, מסתכל על צבעו ומחזיר אותו לכד. הוא חוזר על הפעולה 4 פעמים נוספות. ידוע שרוב הכדורים שהוציא כחולים. מה ההסתברות שכולם כחולים?

36 יערה מצליחה לקלוע לסל בשלושה מכל ארבעה ניסיונות. כדי להתקבל לנבחרת הכדורסל של בית הספר עליה להצליח לקלוע ברוב הפעמים מתוך 6 ניסיונות קליעה לסל. ידוע שיערה התקבלה לנבחרת הכדורסל. מה ההסתברות שהצליחה לקלוע את כל הקליעות?

תשובות סופיות:

35 0.114

36 0.214

התפלגות בינומית ונוסחת ברנולי – שאלות עם נעלמים:

שאלות:

(37) בכד יש 9 כדורים, חלקם כחולים והשאר לבנים. מוציאים כדור מהכד. אם הוא כחול אז מחזירים אותו לכד ומוסיפים 4 כדורים לבנים ואם הוא לבן אז מחזירים אותו לכד ומוסיפים 4 כדורים כחולים. לאחר מכן מוציאים כדור נוסף. נתון שההסתברות שהכדור הראשון שיצא הוא כחול אם ידוע כי הכדור השני

$$\text{כחול היא } \frac{6}{11}.$$

- א. מצא כמה כדורים כחולים יש בכד.
 ב. חוזרים על התהליך 6 פעמים, כלומר בכל פעם מחזירים את המצב לקדמותו, מוציאים באקראי כדור ופועלים בהתאם לחוקים. מצא את ההסתברות שלפחות פעם אחת יבחרו שני כדורים כחולים בזה אחר זה.

(38) בסיטונאות מזון ידוע כי 40% מבין הסכו"ם החד-פעמי הוא תוצרת חו"ל והשאר תוצרת הארץ. 40% מבין הסכו"ם המיובא מחו"ל הם צבעוניים והשאר שקופים.

- א. מה ההסתברות לבחור בסיטונאות המזון סכו"ם שקוף המיובא מחו"ל?
 ב. i. בוחרים 5 כלים בחנות באופן אקראי. מה ההסתברות שלכל היותר כלי אחד הוא כלי שקוף תוצרת חו"ל?
 ii. מה ההסתברות שבדיוק אחד מחמשת הכלים הוא כלי שקוף תוצרת חו"ל אם ידוע כי לכל היותר כלי אחד הוא שקוף תוצרת חו"ל?
 ג. בוחרים שני כלים באופן אקראי וידוע כי ההסתברות ששניהם שקופים היא 0.4096. איזה חלק מהווים כלי הסכו"ם השקופים מבין כלי הסכו"ם תוצרת הארץ?

(39) בחדר יש x גברים ו- $3x$ נשים. משחקים את המשחק הבא: בוחרים באקראי שני אנשים מהחדר בזה אחר זה (בלי החזרה).

ידוע כי ההסתברות לבחור שני אנשים מאותו המין היא $\frac{13}{22}$.

- א. מצא כמה נשים יש בחדר.
 ב. ידוע כי האדם השני שנבחר הוא גבר. מה ההסתברות שגם הראשון שנבחר הוא גבר?
 ג. משחקים את המשחק 4 פעמים. ידוע כי בכל הפעמים נבחר גבר בפעם השנייה. מה ההסתברות שבדיוק ב-3 פעמים יבחר גבר גם בפעם הראשונה?

- (40)** בוחרים שלושה גברים באקראי מעיר גדולה. ההסתברות שכולם מעשנים היא 0.027. מה ההסתברות שרובם מעשנים?
- (41)** בוחרים שלוש נשים מעיר גדולה. ההסתברות ששתיים מהן מעשנות קטנה פי 4 מההסתברות ששתיים מהן לא מעשנות. מה ההסתברות שכולן מעשנות?
- (42)** בכד 10 כדורים, חלקם לבנים והשאר שחורים. נמרוד מוציא 9 פעמים כדור מהכד (עם החזרה). הסיכוי שיצאו פי 2 כדורים שחורים מלבנים גדול פי $3\frac{3}{8}$ מהסיכוי שיצאו פי 2 כדורים לבנים משחורים. מצא כמה כדורים מכל צבע בכד.
- (43)** מפעל מייצר שולחנות וכיסאות. בוחרים 4 רהיטים. ידוע כי ההסתברות שכולם יהיו כיסאות זהה להסתברות שיהיה שולחן אחד בדיוק בניהם.
- א. מצא את ההסתברות לבחור כיסא.
 במפעל צובעים את הרהיטים בשחור או לבן.
 רבע מהשולחנות נצבעים בשחור ורבע מהכיסאות נצבעים בלבן.
- ב. מה ההסתברות לבחור כיסא שחור?
 ג. איזה חלק מבין הרהיטים הלבנים מהווים השולחנות?
- (44)** בחדר x גברים ו- $3x$ נשים. מוציאים באקראי שני אנשים מהחדר. ההסתברות שהם יהיו מאותו מין היא 0.6.
- א. מצא את גודלו של x .
 ב. חוזרים על התהליך 4 פעמים.
 מה הסיכוי שבשלוש מתוך 4 הפעמים ייצאו מהחדר שתי נשים?
- (45)** במבחן רב ברירה עם 5 שאלות שוות ניקוד, לכל שאלה יש n תשובות מהן רק אחת נכונה. ישנו סיכוי של 50% ששי ידע את התשובה הנכונה לשאלה במבחן. אם שי לא יודע את התשובה לשאלה הוא מנחש.
- ההסתברות ששי יקבל במבחן 60 גדולה פי $1\frac{1}{3}$ מההסתברות שיקבל 80.
 מצא את ערכו של n .

- (46) כדי להתקבל לקורס טיס יש לעבור גיבוש וראיון. כל המועמדים ניגשים גם לראיון וגם לגיבוש. 40% מהניגשים לגיבוש עוברים אותו ו-35% מהניגשים לראיון עוברים אותו. $\frac{5}{17}$ מאלה שלא התקבלו לקורס טיס לא התקבלו בגלל הריאיון בלבד. שלושה חברים ניסו להתקבל לקורס טיס. ידוע שרובם התקבלו. מה ההסתברות שכולם התקבלו?

תשובות סופיות:

- (37) א. 6 כדורים כחולים. ב. 0.88989
- (38) א. 0.24 ב. i. 0.65389 ב. ii. $\frac{30}{49} \sim 0.61224$ ג. $\frac{2}{3}$
- (39) א. 9 נשים ב. $\frac{2}{11}$ ג. 0.0196
- (40) 0.216
- (41) 0.008
- (42) 4 לבנים, 6 שחורים.
- (43) א. $P = 0.8$ ב. $P = 0.6$ ג. $\frac{3}{7}$
- (44) א. $x = 4$ ב. 0.299
- (45) $n = 5$
- (46) $\frac{5}{90}$

שאלות מסכמות:

שאלות:

47) כדי להתקבל לחברת היי-טק יש לעבור ראיונות משלושה בעלי תפקידים בסדר הבא: מהנדס ראשי, אחראי משמרת ומנכ"ל החברה. כל אחד מבעלי התפקידים נותן חוות דעת חיובית או שלילית על המועמד לעבודה. מועמד שמתקבל לחברה חייב לקבל חוות דעת חיובית משלושת בעלי התפקידים.

ידוע כי המהנדס הראשי נותן חוות דעת חיובית ל- $\frac{3}{5}$ מהמועמדים.

אחראי המשמרת קורא את חוות הדעת של המהנדס הראשי וב- $\frac{1}{6}$ מהמקרים נותן חוות דעת הפוכה מזו של המהנדס הראשי. מנכ"ל החברה קורא את חוות הדעת של אחראי המשמרת וב- $\frac{7}{10}$ נותן חוות דעת זהה לשלו.

א. ענה על השאלות הבאות:

- i. מה ההסתברות שמועמד יקבל חוות דעת חיובית מאחראי המשמרת?
- ii. ידוע כי אחראי המשמרת נתן חוות חיובית. מה ההסתברות שהמהנדס הראשי ייתן חוות דעת שלילית?
- ב. מה ההסתברות שמועמד יקבל עבודה בחברה?
- ג. מה ההסתברות שמועמד יקבל חוות דעת שלילית מהמנכ"ל?
- ד. לאחר היעדר עובדים שינתה החברה את מדיניותה וקבעה כי כדי להתקבל לעבודה יש לעבור לפחות שני ראיונות בהצלחה, אך חוות הדעת של המנכ"ל חייבת להיות חיובית. מה ההסתברות כעת לקבל עבודה בחברה?

48) במדינה מסוימת $\frac{19}{60}$ מהאזרחים הם גברים ו- $\frac{41}{60}$ הן נשים.

30% מבין מרכיבי המשקפיים במדינה זו הם גברים ו-40% מבין אלו שלא מרכיבים משקפיים הם גברים.

- א. מה ההסתברות למצוא אישה במדינה זו שאינה מרכיבה משקפיים?
- ב. בוחרים 4 אנשים. מה ההסתברות שבדיוק שניים מהם הם נשים שאינן מרכיבות משקפיים?
- ג. בוחרים אזרח. ידוע כי הוא גבר. מה ההסתברות שהוא מרכיב משקפיים?

49) בעיר מסוימת ההסתברות לבחור אדם מעשן גדולה פי 3 מההסתברות לבחור אדם המרכיב משקפיים. ידוע כי החלק של התושבים שמרכיבים משקפיים מבין

$$\frac{1}{12}.$$

- א. מצא מהי ההסתברות לבחור מעשן מתוך כל מרכיבי המשקפיים.
 ב. ידוע כי 15% מהתושבים הם מרכיבים משקפיים בלבד. מצא את ההסתברות לבחור תושב שלא מרכיב משקפיים.
 ג. בוחרים 6 תושבים באופן אקראי. מה ההסתברות שמחצית מהם אינם מרכיבים משקפיים ואינם מעשנים?

50) בבית ספר מסוים ישנם תלמידים המרכיבים משקפיים. ידוע כי אם בוחרים 3 תלמידים אז ההסתברות ששלושתם מרכיבים משקפיים היא 0.027.

- א. מצא את אחוז מרכיבי המשקפיים בבית הספר. בבית הספר ההסתברות להיתקל בתלמיד גדולה ב-0.1 מההסתברות להיתקל בתלמידה ומספר הבנים שמרכיבים משקפיים זהה למספר הבנות שמרכיבות משקפיים.
 ב. מה ההסתברות להיתקל בחצר בית הספר בתלמיד שאינו מרכיב משקפיים?
 ג. איזה חלק מכלל הבנות בבית הספר מהוות הבנות שמרכיבות משקפיים?
 ד. בוחרים 4 תלמידים. ידוע כי כולן בנות. מה ההסתברות כי אחת מהן תרכיב משקפיים?

51) כדי להתקבל לעבוד בחברת ההיי-טק Techno יש לעבור שני ראיונות משני בעלי מקצוע, תחילה על ידי המהנדס הראשי ואחריו על ידי מנכ"ל החברה. כל בעל מקצוע נותן חוות דעת חיובית, שלילית או שנמנע מלקבוע. כדי שמועמד יתקבל לחברה עליו לעבור לפחות ראיון אחד עם חוות דעת חיובית. ידוע כי המהנדס

$$\frac{1}{5} \text{ ל-} \frac{2}{7} \text{ מהמועמדים ו-} \frac{2}{7} \text{ מהם הוא משאיר בלי}$$

קביעה. המנכ"ל קורא את חוות הדעת של המהנדס הראשי וקובע את חוות הדעת שלו בצורה הבאה:

- אם המהנדס נתן חוות דעת חיובית, אז המנכ"ל ייתן גם חוות דעת חיובית ב-60% מהמקרים. אם המהנדס נתן חוות דעת שלילית, אז המנכ"ל נמנע מלקבוע ב-60% מהמקרים ובשאר המקרים הוא נותן חוות דעת חיובית. אם המהנדס נמנע מלקבוע אז המנכ"ל ייתן חוות דעת חיובית או שלילית בלבד. הסיכוי שהמנכ"ל ייתן במקרה זה חוות דעת חיובית גדול פי 3 מהסיכוי שייתן חוות דעת שלילית.

- א. מה ההסתברות לקבל חוות דעת חיובית מהמנכ"ל?
 ב. ידוע כי המנכ"ל נתן חוות דעת חיובית.
 מה ההסתברות שגם המהנדס נתן חוות דעת חיובית?
 ג. מה ההסתברות להתקבל לחברה?
 ד. ביום מסוים הגיעו 5 מועמדים.
 מה ההסתברות שבדיוק 3 מהם קיבלו עבודה באותו היום?

(52) בכד יש 12 כדורים, חלקם אדומים וחלקם שחורים. מוציאים עם החזרה שני כדורים מהכד.

- א. מצא את מספר הכדורים האדומים שבכד אם ידוע כי ההסתברות ששני הכדורים שהוצאו הם שחורים היא $\frac{4}{9}$.
 ב. חלק מהכדורים עשויים מעץ והשאר עשויים מפלסטיק. ידוע כי 25% מהכדורים האדומים עשויים מעץ וכי 50% מהכדורים העשויים מעץ הם אדומים.
 מצא את ההסתברות לבחור כדור שחור עשוי מפלסטיק.
 ג. מוציאים מהכד 5 כדורים בזה אחר זה עם החזרה.
 מה ההסתברות להוציא 4 כדורים אדומים העשויים מפלסטיק?
 ד. מוציאים מהכד 5 כדורים בזה אחר זה עם החזרה.
 ידוע כי כולם עשויים מפלסטיק, מה ההסתברות ש-3 מהם בצבע אדום?

(53) בבית ספר בעיר נערכו שני מבחנים. 80% מתלמידי העיר עברו את המבחן

הראשון. $\frac{1}{4}$ מבין התלמידים שעברו את המבחן הראשון עברו גם את השני ו- $\frac{1}{2}$

מהתלמידים שנכשלו במבחן הראשון נכשלו גם בשני.

- א. בוחרים באקראי תלמיד. מה ההסתברות שהוא עבר את אחד המבחנים?
 ב. בוחרים באקראי 4 תלמידים.
 מה ההסתברות שבדיוק אחד מהם עבר את אחד המבחנים?
 ג. איזה חלק מבין התלמידים שנכשלו במבחן השני מהווה קבוצת התלמידים שנכשלו גם במבחן הראשון?

- 54) במפעל גדול ההסתברות שמתוך 4 עובדים לפחות אחד ירכיב משקפיים היא 0.5904.
- א. מה ההסתברות לבחור עובד שלא מרכיב משקפיים?
 ידוע כי 40% מהפועלים שמרכיבים משקפיים הם מעשנים ו-20% מבין העובדים המעשנים הם מרכיבים משקפיים.
- ב. מה ההסתברות לבחור עובד שמרכיב משקפיים בלבד או מעשן בלבד?
- ג. בוחרים באקראי 5 עובדים. מה ההסתברות שרוב העובדים שנבחרו מעשנים?

- 55) במפעל לייצור ברגים פועלים שני פסי ייצור – פס ייצור א' ופס ייצור ב'. ידוע כי אם בוחרים 5 ברגים אז ההסתברות ששלושה מהם מיוצרים על ידי פס הייצור השני גדולה פי 4.5 מההסתברות שאחד מהם מיוצר על ידי פס הייצור הנ"ל.
- א. מצא את ההסתברות לבחור בורג המיוצר על ידי פס הייצור הראשון. מתוך כל 100 ברגים שהמפעל מייצר 7 פגומים. ומתוך כל 10 ברגים היוצאים מפס הייצור הראשון אחד הוא פגום.
- ב. מהו אחוז הברגים התקינים שמיוצרים על ידי פס הייצור השני?
- ג. איזה חלק מבין הברגים הפגומים מהווים אלו שיוצאים מפס הייצור הראשון?

- 56) בכד יש פי 5 כדורים כחולים מאדומים. מוציאים מהכד כדור. אם הוא כחול אז משאירים אותו בחוף ואם הוא אדום אז מחזירים אותו לכד. לאחר מכן מוציאים כדור נוסף מהכד. ידוע כי ההסתברות להוציא שני כדורים בצבעים שונים היא: $\frac{175}{612}$.

- א. כמה כדורים מכל צבע יש בכד?
- ב. ידוע כי הכדור השני שנבחר הוא כחול, מה ההסתברות שהכדור הראשון שנבחר היה אדום?
- ג. חוזרים על התהליך 5 פעמים. ידוע כי בכל חמשת הפעמים הכדור השני שהוצא הוא כחול, מה ההסתברות שברוב הפעמים הכדור הראשון שיצא הוא אדום?

- 57) בחדר יש פי 4 נשים מגברים. משחקים את המשחק הבא: בוחרים באקראי אדם מהחדר. אם נבחר גבר אז הוא יוצר מהחדר ואם נבחרה אישה אז היא נשארת. לאחר מכן בוחרים אדם נוסף.
- א. מצא כמה גברים יש בחדר אם ידוע כי ההסתברות שייבחרו שני אנשים שונים היא $\frac{236}{725}$.

- ב. ידוע כי בפעם השנייה נבחר גבר, מה ההסתברות שגם בפעם הראשונה ייבחר גבר?
- ג. משחקים את המשחק 4 פעמים. ידוע כי בכל הפעמים נבחר גבר בפעם השנייה. מה ההסתברות שברוב המקרים יצא גבר גם בפעם הראשונה?

58) בעיר מסוימת נערכות בחירות. ידוע כי אם בוחרים 4 תושבים אז ההסתברות

שלפחות אחד מהם יצביע למועמד ב' היא: $\frac{65}{81}$.

א. איזה חלק מהתושבים הצביעו למועמד א'?

בעיר זו יש תושבים מבוגרים וצעירים. ידוע כי $\frac{2}{3}$ מהצעירים הצביעו למועמד א'

וכי ההסתברות לבחור מבוגר שהצביע למועמד ב' היא $\frac{2}{15}$.

ב. מהו אחוז התושבים הצעירים שהצביעו למועמד ב'?

ג. איזה אחוז מהווים התושבים הצעירים מבין אלו שהצביעו למועמד א'?

59) לכבוד חנוכה קנתה סבתא תקווה לשתי נכדותיה, שני ושרון, סביבונים עם

סוכריות בתוכם. בכל סביבון יש 7 סוכריות שוקולד ו-4 סוכריות מנטה.

שרון לקחה את סביבון אחד והוציאה ממנו באקראי (בלי החזרה) 4 סוכריות.

א. מה ההסתברות שכל הסוכריות שהוציאה שרון הן סוכריות מנטה?

ב. שני לקחה 4 סביבונים והוציאה באקראי מכל סביבון סוכרייה אחת.

האם ההסתברות ששני תוציא 4 סוכריות מנטה גבוהה יותר או נמוכה

יותר מההסתברות שחשבת בסעיף א'? נמק.

ג. שני הוציאה באקראי סוכרייה אחת מכל סביבון מתוך ארבעת הסביבונים

שברשותה. ידוע שבין הסוכריות שבידה יש יותר סוכריות מנטה.

מה ההסתברות שכל הסוכריות שיש לשני ביד יהיו בטעם מנטה?

60) כדי לקבל עבודה בחברת Makido יש לעבור ראיונות משני בעלי מקצוע: מהנדס

ראשי ומנכ"ל החברה. המהנדס הראשי נותן חוות דעת חיובית ברבע מהמקרים,

בשליש מהמקרים הוא נמנע מלתת חוות דעת ובשאר המקרים הוא נותן חוות

דעת שלילית. מנכ"ל החברה קורא את חוות הדעת של המהנדס וקובע את חוות

דעתו באופן הבא:

אם המהנדס נתן חוות דעת חיובית אז הוא נותן חוות דעת חיובית ב-90%

מהמקרים וב-10% מהמקרים הוא נמנע מלתת חוות דעת. אם המהנדס נמנע

מלקבוע אז המנכ"ל נותן חוות דעת שלילית במחצית מהמקרים או חיובית

במחצית מהמקרים. אם המהנדס נתן חוות דעת שלילית אז ההסתברות

שהמנכ"ל יתן חוות דעת חיובית גדולה פי 2 מההסתברות שימנע מלתת חוות

דעת וההסתברות שימנע מלתת חוות דעת גדולה פי 2 מההסתברות שייתן חוות

דעת שלילית.

א. מה ההסתברות שמועמד יקבל חוות דעת חיובית לפחות באחד הראיונות?

ב. אם ידוע כי מועמד קיבל חוות דעת חיובית אחת לפחות, מה ההסתברות

שהמהנדס נמנע מלתת חוות דעת?

ג. ענה על השאלות הבאות:

- i. מה ההסתברות שמתוך 5 מועמדים, לפחות אחד יקבל עבודה אם ידוע כי כדי להתקבל לעבודה בחברה יש לקבל שתי חוות דעת חיוביות?
- ii. כיצד תשתנה התוצאה של חלק i אם כדי לקבל עבודה יש לקבל לפחות חוות דעת חיובית אחת ואף לא חוות דעת שלילית אחת?

61 בעיר מסוימת נערכו בחירות מקומיות.

ידוע כי אם בוחרים באקראי 4 אזרחים מההסתברות שתמצא אישה אחת בניהם קטנה פי 16 מההסתברות להיתקל באישה באופן אקראי.

א. מה הוא אחוז הגברים בעיר?

בעיר שלושה מועמדים. $\frac{1}{11}$ מהמצביעים למועמד א' הם גברים,

60% מהמצביעים למועמד ב' הם גברים ו-25% מהמצביעים למועמד ג' הם גברים. אחוז המצביעים למועמד ג' הוא 20%.

ב. איזה מועמד קיבל את רוב הקולות?

ג. בוחרים באקראי 4 נשים.

מה ההסתברות ששלושה מהן הצביעו למועמד המנצח?

62 בחדר x גברים ו- $x+2$ נשים. זורקים קוביית משחק מאוזנת.

אם מתקבל מספר הגדול מ-4 אז מוסיפים לחדר x גברים ואם מתקבל מספר הקטן או שווה ל-4 אז מוסיפים לחדר x נשים. לאחר מכן מוציאים אדם מהחדר.

א. מצא כמה נשים יש בחדר אם ידוע כי ההסתברות לבחור אישה היא $\frac{21}{33}$.

ב. ידוע כי יצאה אישה מהחדר.

מה ההסתברות שהמספר בקובייה היה קטן או שווה ל-4?

אנשי החדר הנמצאים בו במקור (לפני זריקת הקובייה) לובשים חולצות אדומות או לבנות בלבד. ידוע כי החלק היחסי של האנשים הלובשים חולצות לבנות בחדר גדול פי 16 מהחלק היחסי של הגברים הלובשים חולצות אדומות. כמו כן פרופורציית הגברים מבין כל אלו שלובשים חולצות אדומות היא 0.25.

ג. מצא מה ההסתברות לבחור גבר הלובש חולצה אדומה בחדר.

ד. בוחרים 5 אנשים מהחדר (עם החזרה) וידוע כי כולם לובשים חולצות אדומות. מה ההסתברות שרובם נשים?

63 באוניברסיטה מסוימת ידוע כי חלק מהסטודנטים נעזרים בספרי לימוד חיצוניים להעשרת הידע שלהם, וכי ההסתברות לבחור 2 סטודנטים הנעזרים בספרי לימוד חיצוניים קטנה ב-0.1 מההסתברות לבחור שני סטודנטים שאינם נעזרים בספרי לימוד חיצוניים.

א. מהו אחוז הסטודנטים שנעזרים בספרי לימוד חיצוניים?
 האוניברסיטה מוכרת ספרי לימוד ב-3 מקצועות לכלל הסטודנטים: ספר א', ספר ב' וספר ג'. כל סטודנט יכול לקנות רק ספר אחד.
 ידוע כי כמות הסטודנטים שקנו את ספר א' וכמות הסטודנטים שקנו את ספר ג' זהות. כמו כן, $\frac{6}{7}$ מאלו שקנו את ספר ג' נעזרים גם בספרים חיצוניים. $\frac{1}{3}$ מהסטודנטים שקנו את ספר ב' נעזרים בספרי לימוד חיצוניים וכמות הסטודנטים שקנו את ספר א' ונעזרים בספרי לימוד חיצוניים מהווים $\frac{1}{9}$ מכלל הסטודנטים שנעזרים בספרי לימוד חיצוניים.

- ב. מהו אחוז הסטודנטים שקנו את ספר ב' ואינם נעזרים בספרי לימוד חיצוניים?
 ג. איזה חלק מהווים הסטודנטים שקנו את ספר ג' מכלל הסטודנטים שאינם נעזרים בספרי לימוד חיצוניים?
 ד. בוחרים 4 סטודנטים שאינם נעזרים בספרי לימוד חיצוניים. מה ההסתברות שאחד מהם קנה את ספר ג'?

תשובות סופיות:

- (47) א.i. $\frac{17}{30}$ א.ii. $\frac{2}{17}$ ב. $\frac{7}{20}$ ג. $\frac{71}{150}$ ד. $\frac{32}{75}$
- (48) א. $P=0.1$ ב. $P=0.0486$ ג. $\frac{15}{19}$
- (49) א. $P\left(\frac{B}{A}\right)=\frac{1}{4}$ ב. $P(\bar{A})=0.8$ ג. $P_6(3)=0.1318$
- (50) א. 30% ב. $P=0.4$ ג. $\frac{1}{3}$ ד. $P=\frac{32}{81}$
- (51) א. $\frac{27}{50}$ ב. $\frac{2}{9}$ ג. $\frac{31}{50}$ ד. $P=0.34414$
- (52) א. 4 כדורים. ב. $\frac{7}{12}$ ג. $\frac{15}{1024}=0.0146$ ד. 0.1323
- (53) א. $P=0.7$ ב. $P=\frac{189}{2500}$ ג. $\frac{1}{7}$
- (54) א. $P=0.8$ ב. $P=0.44$ ג. $P=0.31744$
- (55) א. $P=0.4$ ב. 95% ג. $\frac{4}{7}$
- (56) א. 15 כחולים ו-3 אדומים. ב. $\frac{17}{101}$ ג. 0.03645
- (57) א. 6 גברים ו-24 נשים. ב. הסתברות לגבר בפעם הראשונה: $P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{25}{141}$ ג. 0.0193
- (58) א. $\frac{2}{3}$ ב. 20% ג. 60%
- (59) א. $\frac{1}{330}$ ב. גבוהה יותר $\left(\frac{256}{14641} > \frac{1}{330}\right)$ ג. $\frac{1}{8}$
- (60) א. $\frac{55}{84}$ ב. $\frac{14}{55}$ ג.i. 0.7204 ג.ii. 0.9324
- (61) א. 25% ב. מועמד א'. ג. $\frac{2}{3}$
- (62) א. 5 נשים. ב. $\frac{16}{21}$ ג. 0.05 ד. $\frac{459}{512}$
- (63) א. 45% ב. 20% ג. $\frac{1}{11}$ ד. $P=0.2732$

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 29 - חשבון דיפרנציאלי - הפונקציה הממשית - תכונות בסיסיות
ופונקציות נפוצות

תוכן העניינים

1. פונקציה - הגדרה ותכונות בסיסיות (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית (ללא ספר)
3. הפונקציה הריבועית (ללא ספר)
4. הפונקציה המעריכית (ללא ספר)
5. הפונקציה הלוגריתמית (ללא ספר)
6. פונקציות מפורסמות נוספות (ללא ספר)
7. הזזות שיקופים מתיחות וכיווצים של פונקציה (ללא ספר)
8. הפונקציות הטריגונומטריות (ללא ספר)
9. הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות (ללא ספר)
10. הפונקציות ההיפרבוליות (ללא ספר)
11. הצגה פרמטרית של פונקציה (ללא ספר)
12. הצגה פולרית של עקום (ללא ספר)

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 30 - חשבון דיפרנציאלי - גבול של פונקציה

תוכן העניינים

1. הסבר כללי (ללא ספר)
2. הצבה 413
3. צמצום 414
4. הכפלה בצמוד 415
5. גבולות טריגונומטריים 416
6. פונקציה שואפת לאינסוף 419
7. איקס שואף לאינסוף 420
8. הגבול של אוילר 422
9. כלל הסנדויץ' 423

הצבה

שאלה

חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1$

ב. $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2}$

ג. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3}$

ד. $\lim_{x \rightarrow 100} 20$

תשובה

א. 21 ב. $\frac{11}{12}$ ג. 2 ד. 20

צמצום

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (4) \qquad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x - 1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} \quad (6) \qquad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \quad (8) \qquad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[5]{x} + 1}{x + 1} \quad (10) \qquad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad (9)$$

תשובות סופיות

| | | | | |
|--------------------|--------------------|--------|----------------------|-------------------|
| -3 (5) | $n-1$ (4) | 6 (3) | $\frac{10}{8.5}$ (2) | $\frac{5}{6}$ (1) |
| $\frac{1}{5}$ (10) | $\frac{8}{17}$ (9) | 27 (8) | 3 (7) | 32 (6) |

הכפלה בצמוד

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-\sqrt{x+6}}{2x-6} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt{3x+1}}{1-\sqrt{2x-1}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+x}-1}{\sqrt[3]{x}} \quad (9)$$

תשובות סופיות

$$\frac{3}{8} \quad (4) \qquad -\frac{1}{12} \quad (3) \qquad 4 \quad (2) \qquad \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$-\frac{8}{3} \quad (8) \qquad \frac{1}{3} \quad (7) \qquad \frac{3}{4} \quad (6) \qquad \frac{1}{6} \quad (5)$$

$$\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \frac{1}{2} \quad (9)$$

גבולות טריגונומטריים

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול הטריגונומטרי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$):

- | | |
|---|---|
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)}$ (2) | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{4x}$ (1) |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ (4) | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin 2x}$ (3) |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x}$ (6) | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ (5) |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{x^3}$ (8) | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4}$ (7) |
| $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{x^2 - 1}$ (10) | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$ (9) |
| $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$ (12) | $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$ (11) |
| $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 4x}{\sin 10x}$ (14) | $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a}$ (13) |
| $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}$ (16) | $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$ (15) |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ (18) | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \cos x}{\sin^2 x}$ (17) |

תשובות סופיות

| | | | | |
|---------------------------|----------------------|--------------------|---------------------|----------------------|
| $\frac{1}{2}$ (5) | $\frac{1}{2}$ (4) | $\frac{1}{2}$ (3) | $\frac{3}{4}$ (2) | $\frac{3}{4}$ (1) |
| | $\frac{1}{4}$ (9) | 4 (8) | $\frac{1}{8}$ (7) | $\frac{1}{2}$ (6) |
| $\frac{1}{\cos^2 a}$ (13) | $-\sin a$ (12) | $\cos a$ (11) | $-\frac{1}{2}$ (10) | |
| 1 (17) | $\frac{2}{\pi}$ (16) | $\frac{1}{2}$ (15) | $\frac{4}{10}$ (14) | $-\frac{1}{12}$ (18) |

זהויות טריגונומטריות שכדאי להכיר

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2} \\ \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a-b}{2} \sin \frac{a+b}{2} \\ \tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b} \\ \tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \pi n = 0 \\ \cos \pi n = (-1)^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos a \\ \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin a \end{cases}$$

פונקציה שואפת לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3 \right) \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \cot x \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[4]{x-1}}{\sqrt{x-1}} \quad (13)$$

תשובות סופיות

| | | | |
|----------------|---------------|--------------|----------------|
| ϕ (4) | $-\infty$ (3) | ϕ (2) | ϕ (1) |
| ϕ (8) | ∞ (7) | ∞ (6) | $-\infty$ (5) |
| $-\infty$ (12) | ϕ (11) | 1 (10) | 0 (9) |
| | | | $-\infty$ (13) |

x שואף לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

- | | |
|--|---|
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x + e^x \quad (2)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$ |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (4)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (3)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (6)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (5)$ |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (8)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (10)$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (9)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (11)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{\frac{x+1}{2}}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (13)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (16)$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (15)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (18)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (17)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad (20)$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \left(\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \right) \quad (19)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx} - x) \quad (22)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad (21)$ |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad (24)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad (23)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad (26)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad (25)$ |

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^5}{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^4} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-4)^{10} (3x^2-1)^4}{x^2 (2x-5)^{10} (x^3+1)^2} \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(5 \cdot 2^{x+2} + 6 \cdot e^{x+1}) - x] \quad (29)$$

תשובות סופיות

| | | | |
|--|--------------------------------------|------------------------|--------------------|
| $-\infty$ (4) | 4 (3) | $-\frac{\pi}{2}$ (2) | 0 (1) |
| -1 (8) | 1 (7) | -5 (6) | 0 (5) |
| $\frac{1}{4}$ (12) | $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (11) | 1.5 (10) | -3 (9) |
| 2 (16) | $\frac{1}{9}$ (15) | 4 (14) | 0 (13) |
| | 0 (19) | $e^{\frac{1}{3}}$ (18) | $\ln 3$ (17) |
| $-\infty: b=0, a < 0$: א . $\infty: b=0, a > 0$ א . $\lim = \sqrt[5]{\frac{a}{b}}: b \neq 0$ א (20) | | | |
| $-\frac{1}{2}$ (24) | $\frac{1}{2}$ (23) | $\frac{k}{2}$ (22) | 2.5 (21) |
| $\frac{5}{4}$ (28) | $\frac{3^4}{2^{10}}$ (27) | $\frac{a-b}{2}$ (26) | $\frac{1}{2}$ (25) |
| | | | $\ln(6e)$ (29) |

הגבול של אוילר

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול של אוילר: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1} \quad (4) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \quad (6) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + x + 2}\right)^{10x} \quad (8) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 4}\right)^{4x^2} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{x}\right)^x \quad (9)$$

תשובות סופיות

$$e^3 \quad (5) \qquad e^{-1} \quad (4) \qquad e^2 \quad (3) \qquad 1 \quad (2) \qquad e^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$e \quad (9) \qquad e^{30} \quad (8) \qquad e^{-12} \quad (7) \qquad e \quad (6)$$

כלל הסנדוויץ'

שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-10:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(2x+1)}{x} \quad (2) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + \sin 2x}{x^2 + \cos 3x} \quad (4) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \cos(\ln x^2) \quad (6) \qquad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{2^x + 3^x + 4^x} \quad (8) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \arctan(2x-3)}{4x + \arctan(x - \ln x)} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} [x] \quad (10) \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [x] \quad (9)$$

(11) נתונה פונקציה $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, המקיימת $\lim_{x \rightarrow 2} z(x) = 4$,

ונתונה פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, המקיימת $4z(x) \leq f(x) \leq (z(x))^2$ לכל x .

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 2} \tan(z(x)), \quad \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(z(x))}{x}$$

(12) חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$.

(13) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכח: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$.

ב. האם נכונה גם הטענה: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 1$?

תשובות סופיות

- 0 (5) 3 (4) $\frac{3}{4}$ (3) 0 (2) 0 (1)
- 0 (10) 1 (9) 4 (8) $\frac{3}{4}$ (7) 0 (6)
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(z(x))}{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 16$ (11)
- $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (z(x^2) - x^2) = 2$ $\lim_{x \rightarrow 2} \tan(z(x)) = \tan 4$
- 0 (12)
- (13) א. שאלת הוכחה. ב. לא.

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 31 - חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים

תוכן העניינים

1. הקדמה כללית (ללא ספר)
2. כללי הגזירה (ללא ספר)
3. שימושי הנגזרת (ללא ספר)

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 32 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקציות

תוכן העניינים

1. חקירת פולינום (ללא ספר)
2. פונקציה זוגית ואי-זוגית (ללא ספר)
3. תחום הגדרה של פונקצית מנה ושורש (ללא ספר)
4. אסימפטוטות של פונקצית מנה ושורש (ללא ספר)
5. חקירת פונקציות מנה ופונקציות שורש (ללא ספר)
6. חקירת פונקציה עם פרמטר (ללא ספר)

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 33 - חשבון דיפרנציאלי של פונקציות טריגונומטריות

תוכן העניינים

1. הגדרות כלליות (ללא ספר)
2. גזירה של פונקציות טריגונומטריות (ללא ספר)
3. שאלות עם משיקים (ללא ספר)
4. מציאת תחום הגדרה של פונקציות טריגונומטריות (ללא ספר)
5. מציאת נקודות קיצון (ללא ספר)
6. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים (ללא ספר)
7. חקירת פונקציות טריגונומטריות (ללא ספר)
8. הזזות ומתיחות של פונקציות טריגונומטריות (ללא ספר)
9. שאלות שונות מבחינות (ללא ספר)

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 34 - חשבון דיפרנציאלי - הזזות ומתיחות של פונקציות

תוכן העניינים

1. הוספת קבוע לפונקציה (ללא ספר)
2. הכפלת פונקציה בקבוע (ללא ספר)
3. הזזת פונקציה ימינה ושמאלה (ללא ספר)
4. מתיחה וכיווץ של פונקציה (ללא ספר)
5. היפוך גרף פונקציה ביחס לציר y (ללא ספר)
6. ערך מוחלט של פונקציה (ללא ספר)

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 35 - חשבון דיפרנציאלי - פונקצית הערך המוחלט

תוכן העניינים

- 425 1. כתיבה וסרטוט של פונקציות ערך מוחלט
- 430 2. תחום הגדרה של פונקציות עם ערך מוחלט
- 431 3. גזירה של פונקציות עם ערך מוחלט
- 434 4. חקירה של פונקציות עם ערכים מוחלטים
- 438 5. פתרון וחקירה של משוואות עם ערך מוחלט

כתיבה וסרטוט של פונקציות ערך מוחלט:

סיכום כללי:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \text{ : פונקציה הערך המוחלט מוגדרת:}$$

כדי לסרטוט פונקציות עם ערך מוחלט, או שמכילות ביטויים עם ערכים מוחלטים, יש לעקוב אחר השלבים הבאים:

- יש למצוא את הנקודות שמאפסות את כל אחד מהערכים המוחלטים.
- יש לחלק את הפונקציה לתחומים עבור כל האפשרויות הקיימות.
- עבור כל תחום יש לכתוב את הפונקציה המתקבלת ללא סימן הערך המוחלט ולסרטוט אותה במערכת צירים.

הערה:

ניתן להיעזר בטכניקה אלגברית בסיסית על מנת לפשט פונקציות בטרם הניתוח והסרטוט שלהן כגון: $f(x) = x^2|x| - 3|x| = |x|(x^2 - 3)$.

שאלות:

1) לפי הפונקציה הבאה: $f(x) = |x+4| - |4x| + 1$. כתוב את הפונקציה ללא סימן הערך המוחלט, כפונקציה מוגדרת למקוטעין.

2) לפי הפונקציה הבאה: $f(x) = 3x - |x+3-x|$. כתוב את הפונקציה ללא סימן הערך המוחלט, כפונקציה מוגדרת למקוטעין.

סרטט את הפונקציות הבאות במערכת צירים:

$$f(x) = |x+2| \quad (4) \qquad f(x) = |x| - 1 \quad (3)$$

$$f(x) = |x-1| + |2-x| - 3 \cdot |x+1| + x \quad (6) \qquad f(x) = |2x+1| + |x-3| \quad (5)$$

$$f(x) = x|x| \quad (8) \qquad f(x) = 2|x| + x \quad (7)$$

$$f(x) = |x^2 + 6x - 8| \quad (10) \qquad f(x) = x^2 + 2|x| - 3 \quad (9)$$



$$f(x) = (x-3)|x+1| \quad (12)$$

$$f(x) = -2x|x| + |7x| - 5 \quad (11)$$

$$f(x) = x^3 - |x| \quad (14)$$

$$f(x) = |9x - x^3| \quad (13)$$

$$f(x) = 2x^2|x| - 7x|x| + 3|x| \quad (16)$$

$$f(x) = |x|^3 - 4x^2 \quad (15)$$

$$(17) \text{ לפי הפונקציה: } f(x) = 6x - 2x^2.$$

א. סרטט את $f(x)$ במערכת צירים.

ב. סרטט באותה מערכת הצירים את $g(x) = 6|x| - 2x^2$.

ג. הוסף למערכת הצירים את גרף הפונקציה: $h(x) = |6|x| - 2x^2|$.

$$(18) \text{ לפי הפונקציה: } f(x) = 9x^2 - 8x - 1.$$

מגדירים: $g(x) = 9x|x| - 8x - 1$ ו- $h(x) = 9x^2 - 8|x| - 1$.

א. סרטט במערכת צירים אחת את הפונקציות $g(x)$ ו- $h(x)$.

ב. סרטט במערכת צירים חדשה את הפונקציה $|h(x)|$.

$$(19) \text{ נתונות הפונקציות הבאות: } f(x) = \frac{|x|}{x} \text{ ו- } g(x) = \frac{x}{|x|}.$$

האם המשוואות הנ"ל מייצגות את אותה הפונקציה?

אם כן – הסבר וסרטט את גרף הפונקציה, אם לא – נמק.

$$(20) \text{ מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות: } f(x) = |x^2 - 4|, g(x) = |x+1| + |x-2|.$$

$$(21) \text{ לפי הפונקציות הבאות: } f(x) = |(x-2)(x+4)|, g(x) = |(x-5)(x+4)|.$$

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות.

ב. כיצד תשתנה התוצאה אם במקום $g(x)$ ניקח: $h(x) = |(x-5)(x-4)|$?

$$(22) \text{ נתונות הפונקציות: } f(x) = |x|x + 3 \text{ ו- } g(x) = ax^2, (a \neq 0).$$

מצא עבור אלו ערכים של a הגרפים נחתכים בשתי נקודות, נקודה אחת ולא נחתכים כלל.

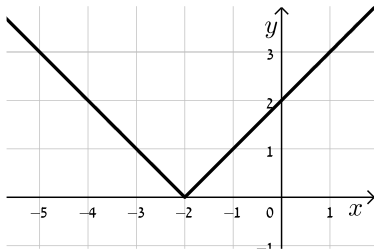
תשובות סופיות:

$$f(x) = |x+4| - |4x| + 1 = \begin{cases} -3x+5 & x \geq 0 \\ 5x+5 & -4 \leq x < 0 \\ 3x-3 & x < -4 \end{cases} \quad (1)$$

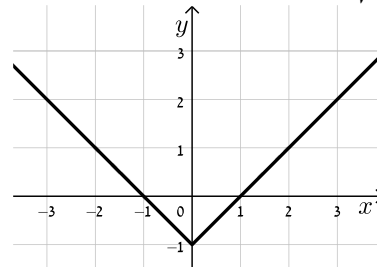
$$f(x) = 3x - |x+|3-x|| = \begin{cases} x+3 & x \geq 3 \\ 3x-3 & x < 3 \end{cases} \quad (2)$$

להלן סקיצות של הפונקציות:

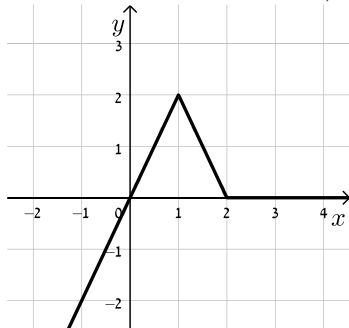
(4) סקיצה:



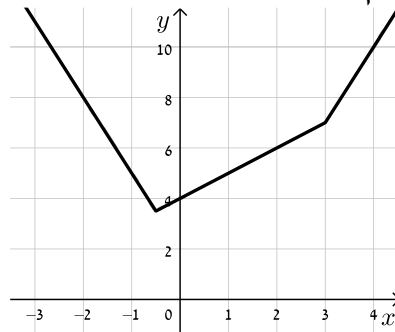
(3) סקיצה:



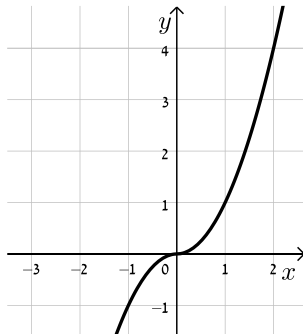
(6) סקיצה:



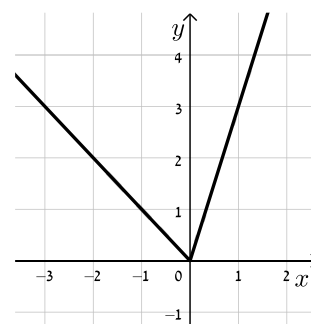
(5) סקיצה:



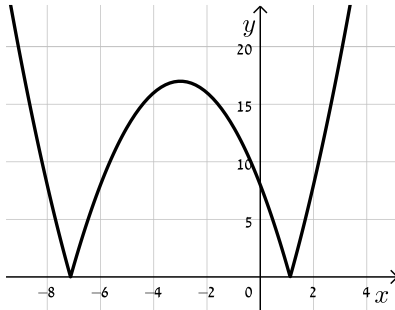
(8) סקיצה:



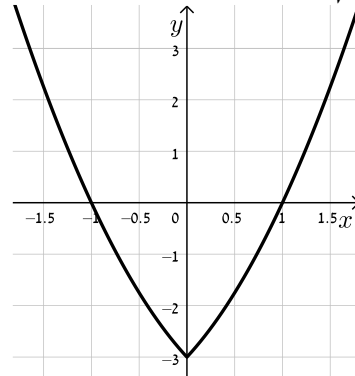
(7) סקיצה:



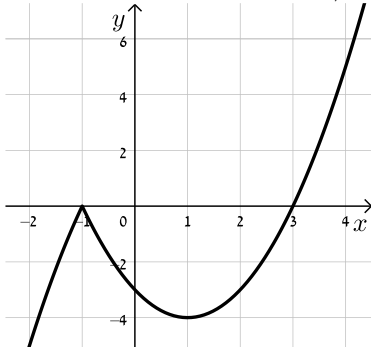
10) סקיצה:



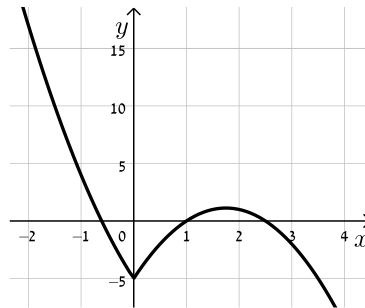
9) סקיצה:



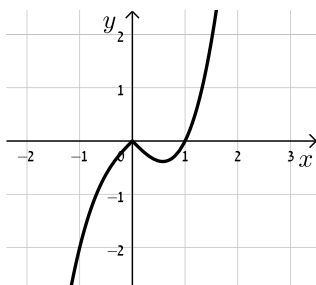
12) סקיצה:



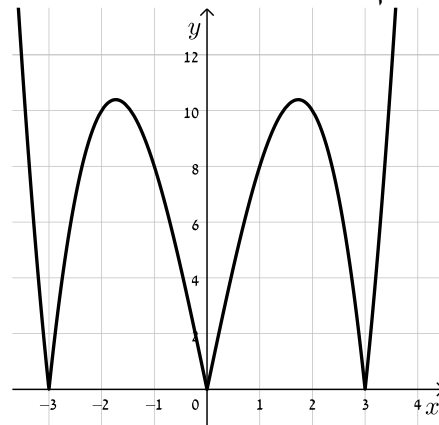
11) סקיצה:



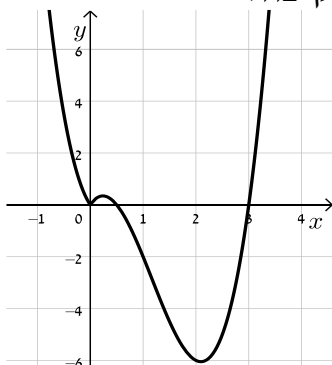
14) סקיצה:



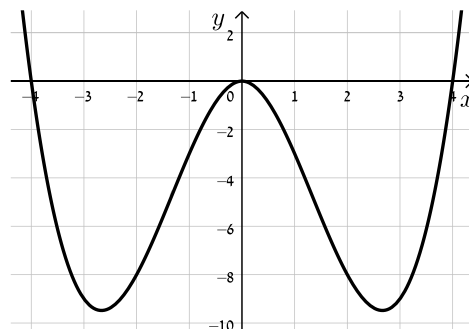
13) סקיצה:



16) סקיצה:



15) סקיצה:





- (17) פתרון מלא בסרטון הוידאו.
- (18) פתרון מלא בסרטון הוידאו.
- (19) כן, מדובר באותה הפונקציה.
- (20) $(-3.45, 7.9)$, $(3, 5)$, $(-1, 3)$, $(1, 3)$.
- (21) א. $(-4, 0)$, $(3.5, 11.25)$. ב. יהיה רק פתרון אחד והוא: $(2.55, 3.57)$.
- (22) שני פתרונות: $a > 1$, פתרון יחיד: $-1 < a < 1$ וגם $a \neq 0$ מת.ה., אף פתרון: $a \leq -1$.

תחום הגדרה של פונקציות עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

כדי למצוא תחום הגדרה של פונקציה עם ערך מוחלט יש לוודא כי הערכים של המשתנה לא יוצרים ביטויים חסרי משמעות (כגון חלוקה באפס, או ערך שלילי בתוך שורש ממעלה זוגית).

שאלות:

מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{|3-x|}{x-1} \quad (2)$$

$$f(x) = \sqrt{|x|-2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{3}{2|\sin x|-1} \quad (6)$$

$$f(x) = |x^2 - 1| + x + 3 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{3}{x} + \frac{4}{|x|-4} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{|2x+1|-3}{\sqrt{4-|x|}} \quad (5)$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{כל } x$$

$$(2) \quad x \neq 1$$

$$(3) \quad x \neq 0, \pm 4$$

$$(4) \quad x \geq 2, x \leq -2$$

$$(5) \quad -4 < x < 4$$

$$(6) \quad x \neq \frac{\pi}{6} + \pi k, x \neq \frac{5\pi}{6} + \pi k$$

גזירה של פונקציות עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

נגזרת של פונקציות הערך המוחלט: $f(x) = |x|$ היא: $f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$.

עבור פונקציה פנימית $f(x) = |g(x)|$ נעזר בכלל השרשרת: $f'(x) = \begin{cases} g(x) & g(x) > 0 \\ -g(x) & g(x) < 0 \end{cases}$.

הערה:

נסמן נקודת אפס של ביטוי עם ערך מוחלט ב- x_0 ונאמר כי אם ערך הנגזרת מימין ומשלא לנקודה זהה אז הפונקציה גזירה בנקודה x_0 , אחרת היא אינה גזירה בנקודה זו.

דוגמא:

לפונקציה: $f(x) = |x|$ יש נקודת אפס $x_0 = 0$ והנגזרת: $f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$.

ערך הנגזרת הימני הוא $f'(x=0^+) = 1$ והשמאלי הוא $f'(x=0^-) = -1$.

היות ו- $f'(x=0^+) \neq f'(x=0^-)$ נאמר כי הפונקציה אינה גזירה ב- $(0,0)$.

שאלות:

גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = x^3 + \frac{2}{3}|x| + 1 \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{|x| + 2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{5-x}{\sqrt{|x|+6}} \quad (6)$$

$$f(x) = \sqrt{3|x|} - \cos x + 1 \quad (8)$$

$$f(x) = |x^2 - 3x + 2| \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{|x|}{x-1} \quad (3)$$

$$f(x) = \sqrt{3x - |3-x|} \quad (5)$$

$$f(x) = \sin|x| \quad (7)$$



9 מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = x \cdot |x+2| + 3$ בנקודות:

א. $x = -3$

ב. $y = 3$

10 לפניך הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x+|x|}{x+1}$.

א. הוכח כי הפונקציה מקיימת: $0 \leq f(x) < 2$ לכל x בתחום הגדרתה.

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 3$.

11 לפניך הפונקציה: $f(x) = \frac{3}{\sqrt{|2x+1|+x^2}}$.

א. הראה כי הפונקציה מוגדרת לכל x .

ב. מצא את הערך המירבי של הפונקציה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר בנקודת החיתוך

של הישר $y = \frac{3}{\sqrt{2}}$ וגרף הפונקציה ברביע השני.

תשובות סופיות:

1 $f'(x) = \begin{cases} 2x-3 & x < 1, x > 2 \\ -2x+3 & 1 < x < 2 \end{cases}$, בנקודות $(1,0)$, $(2,0)$ הנגזרת לא קיימת.

2 $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + \frac{2}{3} & x > 0 \\ 3x^2 - \frac{2}{3} & x < 0 \end{cases}$, בנקודה $(0,1)$ הנגזרת לא קיימת.

3 $f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x-1)^2} & x > 0, x \neq 1 \\ \frac{1}{(x-1)^2} & x < 0 \end{cases}$, בנקודה $(0,0)$ הנגזרת לא קיימת.

4 $f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2+4x-1}{(x+2)^2} & x > 0 \\ -\frac{x^2+4x+1}{(-x+2)^2} & x < 0 \end{cases}$, בנקודה $(0, \frac{1}{2})$ הנגזרת לא קיימת.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4x-3}} & \frac{3}{4} < x < 3 \\ \frac{1}{\sqrt{2x+3}} & x > 3 \end{cases} \quad (5)$$

בנקודה (3,3) הנגזרת לא קיימת.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-x-17}{2(\sqrt{x+6})^3} & x > 0 \\ \frac{-x-7}{2(\sqrt{-x+6})^3} & x < 0 \end{cases} \quad (6)$$

בנקודה $(0, \frac{5}{\sqrt{6}})$ הנגזרת לא קיימת.

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & x > 0 \\ -\cos x & x < 0 \end{cases} \quad (7)$$

בנקודה (0,0) הנגזרת לא קיימת.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3+\sin x}{2\sqrt{3x-\cos x+1}} & x > 0 \\ \frac{-3+\sin x}{2\sqrt{-3x-\cos x+1}} & x < 0 \end{cases} \quad (8)$$

בנקודה (0,0) הנגזרת לא קיימת.

(9) א. $y = 4x + 12$ ב. הפונקציה גזירה רק בנקודה (0,3) ולכן נמצא את

משוואת המשיק רק שם ונקבל: $y = 2x + 3$.

(10) א. הוכחה. ב. $y = \frac{1}{8}x + 1\frac{1}{8}$.

(11) א. הוכחה. ב. 6. ג. $y = \frac{3}{\sqrt{2}}x + 3\sqrt{2}$.

חקירה של פונקציות עם ערכים מוחלטים:

סיכום כללי:

כדי לחקור פונקציה שמכילה ביטויים עם ערכים מוחלטים נבצע את פעולות החקירה הרגילות תוך תשומת לב לחלוקת הפונקציה למקטעים לפי ערכי המשתנה המאפסים את הערכים המוחלטים.

- מציאת תחום הגדרה של פונקציה.
- גזירה של פונקציה, מציאת נקודות אי-גזירות, וקביעת סוג הקיצון.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת אסימפטוטות של גרף הפונקציה (במידה וישנן).
- מציאת נקודות פיתול ותחומי קמירות כלפי מעלה ומטה (במידה ונשאלים).
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה תוך הקפדה על נקודות אי רציפות, נקודות אי-גזירות וסימון מקטעים שונים על הגרף לפי המתבקש.

שאלות:

(1) לפניך הפונקציה: $f(x) = x^3 - \frac{3}{4}|x| + 2$.

- א. מה הן נקודות הקיצון של הפונקציה?
- ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ג. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(2) נתונה הפונקציה: $f(x) = |x^2 - 4| + |x^2 + x|$.

- א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ב. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ג. נתון הישר $y = x + k$, פרמטר k . מצא לאלו ערכים של k :
 - i. הישר יחתוך את גרף הפונקציה ב-4 נקודות שונות.
 - ii. הישר יחתוך את גרף הפונקציה ב-3 נקודות שונות.
 - iii. הישר יחתוך את גרף הפונקציה ב-2 נקודות שונות.
 - iv. הישר יחתוך את גרף הפונקציה באינסוף נקודות.
 - v. הישר לא יחתוך את גרף הפונקציה כלל.



$$(3) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \frac{x}{|x-2|}$$

- א. כתוב את הנגזרת של הפונקציה והוכח כי אין לפונקציה נקודות קיצון.
 ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$(4) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \sqrt{|x|+a}, \text{ פרמטר } a$$

- ידוע כי הפונקציה אינה מוגדרת בתחום: $-1 < x < 1$.
 א. מצא את a .
 ב. הוכח כי הפונקציה היא זוגית.
 ג. הראה כי הפונקציה עולה בתחום: $x > 1$.
 ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום $0 < x < 9$.
 ה. היעזר בממציאך מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שצירת את גרף הפונקציה בתחום: $-9 < x < 0$.

$$(5) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = |\cos x| + \cos 2x$$

- א. הוכח כי הפונקציה היא זוגית.
 ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום $[0: \pi]$ וקבע את סוגן.
 ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום: $[0: \pi]$.
 ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום: $[-\pi: 0]$.

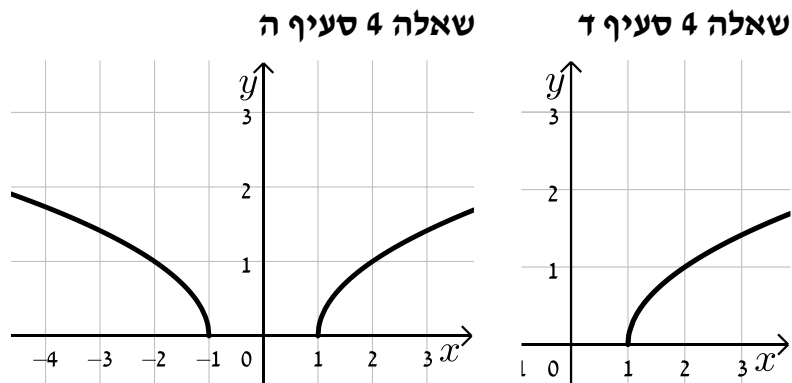
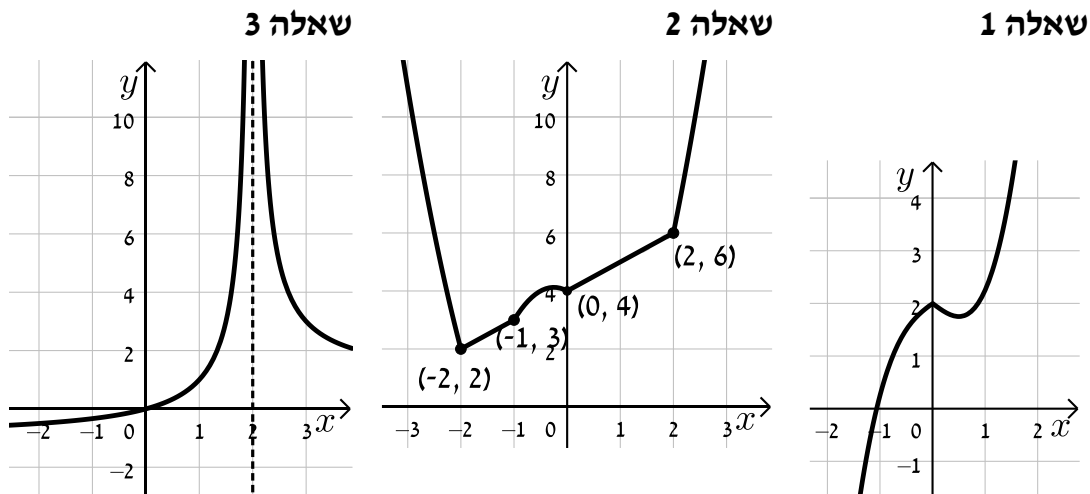
$$(6) \text{ נתונות שתי פונקציות: } f(x) = \sqrt{\cos x}, g(x) = \frac{x}{|x|}$$

- א. הוכח כי $f(x)$ הינה פונקציה זוגית וכי $g(x)$ הינה פונקציה אי-זוגית.
 ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.
 ג. הסתמך על ממציאך מהסעיפים הקודמים וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה: $f(x) \cdot g(x)$ בתחום: $-\pi \leq x \leq \pi$.

תשובות סופיות:

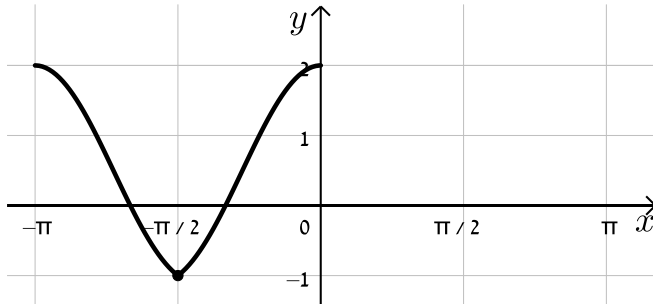
- (1) א. $\max(0, 2), \min\left(\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}\right)$ ב. עולה: $x > \frac{1}{2}, x < 0$, יורדת: $0 < x < \frac{1}{2}$. ג. עיין סקיצה.
- (2) א. $\min(-2, 2), \max\left(-\frac{1}{4}, 4\frac{1}{8}\right), \min(0, 4)$ ב. עיין סקיצה.
- ג. $4 < k < 4.5$ ii $k = 4.5$ iii $k > 4.5$ iv $k = 4$ v $k < 4$.
- (3) א. הוכחה. ב. עולה: $x < 2$, יורדת: $x > 2$. ג. עיין סקיצה.
- (4) א. $a = -1$ ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. עיין סקיצה. ה. עיין סקיצה.
- (5) א. הוכחה. ב. $\max(0, 2), \min\left(\frac{\pi}{2}, -1\right), \max(\pi, 2)$ ג. עיין סקיצה. ד. עיין סקיצה.
- (6) א. הוכחה. ב. עיין סקיצה. ג. עיין סקיצה.

סקיצות לשאלות החקירה:

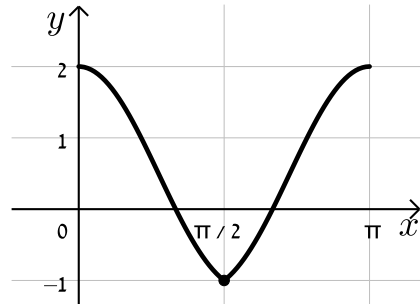




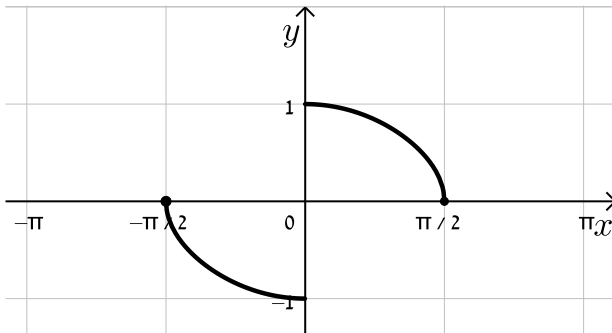
שאלה 5 סעיף ד



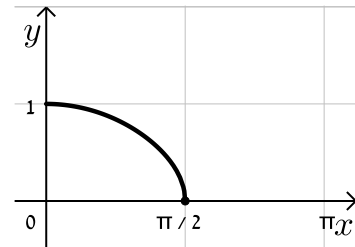
שאלה 5 סעיף ג



שאלה 6 סעיף ג



שאלה 6 סעיף ב



פתרון וחקירה של משוואות עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

כדי לחקור משוואות המכילות פרמטר וביטויים עם ערך מוחלט, יש להפריד את המשוואה לתתי-משוואות, לפי כל תחום של המשתנה עבורו סימן הערך המוחלט הוא חיובי או שלילי. לאחר מכן יש לפתור כל משוואה בנפרד ולאחד את הפתרונות.

שאלות:

(1) עבור אילו ערכים של m יש למשוואה $|x^2 - 2x - 3| = m - 1$ שלושה פתרונות?

(2) לפניך הפונקציה הבאה: $f(x) = |x^2 - x - 2| + x|x|$

א. צייר את גרף הפונקציה במערכת צירים.

ב. מצא עבור אלו ערכי k יש למשוואה $|x^2 - 2x - 3| + k = x - x|x| - 1$ פתרון אחד בלבד.

(3) לפניך הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{|x-3|}{x^2-9} + \frac{x-3}{|x-3|}$

א. סרטט את הפונקציה במערכת צירים (זכור לפשט תחילה).

ב. מצא לאלו ערכים של a יהיה למשוואה $f(x) = a$ פתרון אחד בלבד.

(4) לפניך הפונקציה: $f(x) = |x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5|$ והישר: $y = m$.

א. סרטט גרף של $f(x)$ במערכת צירים.

ב. מצא את התחומים של m עבורם לישר $y = m$ יהיו יותר משתי נקודות

חיתוך שונות עם גרף הפונקציה $f(x)$.

תשובות סופיות:

(1) $m = 5$

(2) א. ראה סרטוט בסרטון הוידאו. ב. $k = -1$

(3) א. ראה סרטוט בסרטון הוידאו. ב. $a < -\frac{7}{6}$, $-1 < a \leq 1$, $a \geq \frac{7}{6}$

(4) $3 \leq m \leq 5$

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 36 - חשבון דיפרנציאלי של פונקציות לוגריתמיות

תוכן העניינים

1. גזירה של פונקציות לוגריתמיות (ללא ספר)
2. שאלות עם משיקים (ללא ספר)
3. חקירת פונקציות לוגריתמיות (ללא ספר)
4. שאלות שונות מבחינות (ללא ספר)

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 37 - חשבון דיפרנציאלי של פונקציות מעריכיות

תוכן העניינים

1. גזירה של פונקציות מעריכיות (ללא ספר)
2. שאלות עם משיקים (ללא ספר)
3. חקירת פונקציות מעריכיות (ללא ספר)
4. שאלות שונות מבחינות (ללא ספר)

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 38 - חשבון אינטגרלי - האינטגרל הכללי

תוכן העניינים

- 439 1. חישובי אינטגרלים
- 444 2. מציאת פונקציה קדומה

חישובי אינטגרלים:

סיכום כללי:

הגדרה וכללי האינטגרציה:

- כלל האינטגרציה של פונקציה פולינומית: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$
- עבור מקדם קבוע a נקבל: $\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$
- כללי האינטגרציה של פונקציות טריגונומטריות:

$$\int \sin x dx = -\cos x + c, \int \cos x dx = \sin x + c, \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c, \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

שאלות:

1) מצא את האינטגרלים הבאים:

| | |
|--|---|
| א. $\int x^3 dx$ | ב. $\int 12x^5 dx$ |
| ג. $\int x^4 dx$ | ד. $\int 2x^3 dx$ |
| ה. $\int \frac{2}{3} x^5 dx$ | ו. $\int 7 dx$ |
| ז. $\int \left(\frac{5}{6} x^4 + 16x^3 - \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{1}{3} \right) dx$ | ח. $\int \left(\frac{4x^3}{5} - ax^2 - \frac{2ax}{b} + b \right) dx$ |

2) מצא את האינטגרלים הבאים:

| | |
|---|---------------------------------------|
| א. $\int x^{-3} dx$ | ב. $\int \frac{1}{x^3} dx$ |
| ג. $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \frac{a}{x^3} + \frac{x}{a} \right) dx$ | ד. $\int \frac{2x^3 + x - 2}{x^3} dx$ |

3 מצא את האינטגרלים הבאים :

$$\begin{array}{ll} \int \sqrt{x} dx & \text{ב.} \\ \int \left(\frac{4}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x} \right) dx & \text{ד.} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \int x^{\frac{1}{2}} dx & \text{א.} \\ \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx & \text{ג.} \end{array}$$

4 מצא את האינטגרלים הבאים :

$$\begin{array}{lll} \int \frac{18}{(6x+5)^2} dx & \text{ג.} & \int 3(2-7x)^4 dx & \text{ב.} & \int (5x-1)^3 dx & \text{א.} \\ \int \sqrt{ax+bdx} & \text{ה.} & \int \frac{1}{\sqrt{6x-3}} dx & \text{ד.} \end{array}$$

5 מצא את תוצאת החילוק :

$$\begin{array}{ll} \frac{x^3+x^2+3x-5}{x-1} = & \text{ב.} \\ \frac{x^3-4x^2+9}{x-3} = & \text{ד.} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \frac{x^2-5x-14}{x+2} = & \text{א.} \\ \frac{x^4+x^3-x^2+14x-3}{x+3} = & \text{ג.} \\ \frac{x^3+5x^2-4x-20}{x+5} = & \text{ה.} \end{array}$$

6 מצא את האינטגרלים הבאים :

$$\begin{array}{ll} \int \frac{x^3+x^2+3x-5}{x-1} dx & \text{ב.} \\ \int \frac{x^3-4x^2+9}{x-3} dx & \text{ד.} \\ \int \frac{2x^5+x^4-4x^2+1}{2x+1} dx & \text{ו.} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \int \frac{x^2-5x-14}{x+2} dx & \text{א.} \\ \int \frac{x^4+x^3-x^2+14x-3}{x+3} dx & \text{ג.} \\ \int \frac{x^3+5x^2-4x-20}{x+5} dx & \text{ה.} \end{array}$$

7 מצא את האינטגרלים הבאים :

$$\begin{array}{ll} \int \frac{x^2}{(x^3+6)^2} dx & \text{ב.} \\ \int \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} dx & \text{ד.} \\ \int 8x(x^2+1)^3 dx & \text{ו.} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \int -\frac{2x}{(x^2-1)^2} dx & \text{א.} \\ \int \frac{x-2}{(x^2-4x+1)^2} dx & \text{ג.} \\ \int \frac{6x-3}{\sqrt{x-x^2}} dx & \text{ה.} \\ \int (2-x^2)(6x-x^3)^2 dx & \text{ז.} \end{array}$$

8) חשב את האינטגרלים הבאים :

א. $\int \left(\sin x - 3 \cos x + \frac{4}{\cos^2 x} + 5 \right) dx$

ב. $\int \left(\cos 3x - 2 \sin 4x + \frac{4}{\cos^2 3x} \right) dx$

ג. $\int \left(\sin(\pi - x) + \frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x} \right) dx$

9) חשב את האינטגרלים הבאים (שימוש בזהויות) :

א. $\int (2 \sin x \cos x) dx$

ב. $\int (\sin 3x \cos 3x) dx$

ג. $\int (\sin^4 x - \cos^4 x) dx$

ד. $\int (\sin^2 x) dx$

10) חשב את האינטגרלים הבאים :

א. $\int \left(\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \right) dx$

ב. $\int \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} \right) dx$

ג. $\int (\cos x \sin^2 x) dx$

11) חשב את האינטגרלים הבאים :

א. $\int \left(\sin 2x - 4 \cos \frac{x}{3} \right) dx$

ב. $\int \frac{1}{\cos^2 4x} dx$

ג. $\int \frac{1}{\sin^2 10x} dx$

ד. $\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$

ה. $\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx$

ו. $\int (\cos x + \sin x)^2 dx$

ז. $\int (\sin x \cos x \cos(2x)) dx$

ח. $\int \tan^2 x dx$

ט. $\int \frac{1}{(\sin x \cos x)^2} dx$

י. $\int \cos^2 x dx$

יא. $\int \sin^2 4x dx$

12) חשב את ערכי האינטגרלים הבאים (שאלות אתגר):

$$\int (\cos^4 x + \sin^4 x) dx \quad \text{א.} \quad \int \cos^4 x dx \quad \text{ב.}$$

$$\int \sin^4 4x dx \quad \text{ג.} \quad \int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx \quad \text{ד.}$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx \quad \text{ה.}$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א.} \frac{x^4}{4} + c \quad \text{ב.} 2x^6 + c \quad \text{ג.} \frac{x^5}{5} + c \quad \text{ד.} \frac{x^4}{2} + c \quad \text{ה.} \frac{x^6}{9} + c \quad \text{ו.} 7x + c$$

$$\text{ז.} \frac{x^5}{6} + 4x^4 - \frac{x^3}{6} + 2x^2 - \frac{1}{3}x + c \quad \text{ח.} \frac{x^4}{5} - \frac{ax^3}{3} - \frac{ax^2}{b} + bx + c$$

$$(2) \quad \text{א.} -\frac{x^{-2}}{2} + c \quad \text{ב.} -\frac{1}{2x^2} + c \quad \text{ג.} -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{a}{2x^2} + \frac{x^2}{2a} + c \quad \text{ד.} 2x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + c$$

$$(3) \quad \text{א.} \frac{x^{1.5}}{1.5} + c \quad \text{ב.} \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c \quad \text{ג.} 2\sqrt{x} + c \quad \text{ד.} 8\sqrt{x} + 2\sqrt{x^3} + c$$

$$(4) \quad \text{א.} \frac{(5x-1)^4}{20} + c \quad \text{ב.} -\frac{3(2-7x)^5}{35} + c \quad \text{ג.} -\frac{3}{6x+5} + c$$

$$\text{ד.} \frac{\sqrt{6x-3}}{3} + c \quad \text{ה.} \frac{2\sqrt{(ax+b)^3}}{3a} + c$$

$$(5) \quad \text{א.} x-7 \quad \text{ב.} x^2+2x+5 \quad \text{ג.} x^3-2x^2+5x-1$$

$$\text{ד.} x^2-x-3 \quad \text{ה.} x^2-4$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - x + c \quad \lambda \quad \frac{x^3}{3} + x^2 + 5x + c \quad \text{ב} \quad \frac{x^2}{2} - 7x + c \quad \text{א} \quad (6)$$

$$\cdot \frac{x^5}{5} - x^2 + x + c \quad \text{ו} \quad \frac{x^3}{3} - 4x + c \quad \text{ה} \quad \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 3x + c \quad \text{ז}$$

$$-\frac{1}{2(x^2 - 4x + 1)} + c \quad \lambda \quad -\frac{1}{3(x^3 + 6)} + c \quad \text{ב} \quad \frac{1}{x^2 - 1} + c \quad \text{א} \quad (7)$$

$$(x^2 + 1)^4 + c \quad \text{ו} \quad -6\sqrt{x - x^2} + c \quad \text{ה} \quad \sqrt{x^2 + 2} + c \quad \text{ז}$$

$$\cdot \frac{(6x - x^3)^3}{9} + c \quad \text{ט}$$

$$\frac{\sin 3x}{3} + \frac{\cos 4x}{2} + \frac{4 \tan 3x}{3} + c \quad \text{ב} \quad -\cos x - 3 \sin x + 4 \tan x + 5x + c \quad \text{א} \quad (8)$$

$$\cdot \cos(\pi - x) + \tan x + x + c \quad \text{ג}$$

$$-\frac{\sin 2x}{2} + c \quad \lambda \quad -\frac{\cos 6x}{12} + c \quad \text{ב} \quad -\frac{1}{2} \cos 2x + c \quad \text{א} \quad (9)$$

$$\cdot \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + c \quad \text{ז}$$

$$\cdot \frac{1}{3} \sin^3 x + c \quad \lambda \quad \frac{1}{\cos x} + c \quad \text{ב} \quad 2\sqrt{\sin x} + c \quad \text{א} \quad (10)$$

$$-\frac{1}{10} \cot 10x + c \quad \lambda \quad \frac{1}{4} \tan 4x + c \quad \text{ב} \quad -\frac{1}{2} \cos 2x - 12 \sin \frac{x}{3} + c \quad \text{א} \quad (11)$$

$$x - \frac{1}{2} \cos 2x + c \quad \text{ו} \quad \frac{1}{2} \sin 2x + c \quad \text{ה} \quad \frac{1}{2} \sin 2x + c \quad \text{ז}$$

$$\tan x - \cot x + c \quad \text{ט} \quad \tan x - x + c \quad \text{ח} \quad -\frac{1}{16} \cos 4x + c \quad \text{ט}$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{16} \sin 8x + c \quad \text{א} \quad \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + c \quad \text{ז}$$

$$\frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \quad \text{ב} \quad \frac{3}{4}x + \frac{1}{16} \sin 4x + c \quad \text{א} \quad (12)$$

$$-\cot x - x + c \quad \text{ז} \quad \frac{3}{8}x - \frac{1}{16} \sin 8x + \frac{1}{128} \sin 16x + c \quad \text{ג}$$

$$-\cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + c \quad \text{ה}$$

מציאת פונקציה קדומה:

שאלות:

- (1) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 3x^2 - 7$. מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(-1, 2)$.
- (2) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 2x - 6$. ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5. מצא את הפונקציה.
- (3) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = x^2 - 8x + 2$. נתון: $f(-2) = 1$.
 א. מצא את $f(x)$.
 ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$.
- (4) נתונה הנגזרת של פונקציה $f(x)$: $f'(x) = 9x^2 - 4$. ערך הפונקציה בנקודה $x = 1$ הוא 3.
 א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$.
 ב. מצא את $f(x)$.
 ג. מצא את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.
- (5) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = 2x - 3$. לפונקציה משיק ששיפועו הוא -3.
 א. מצא את שיעור ה- x של נקודת ההשקה.
 ב. מצא את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא 7.
- (6) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = -6x - 5$. המשיק לפונקציה בנקודה A יוצר זווית של 45° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .
 א. מצא את שיעור ה- x של הנקודה A.
 ב. מצא את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא -6.
 ג. מצא את משוואת המשיק.

- (7) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = 3x - 4$.
 הישר $y = 2x + 5$ משיק לגרף הפונקציה. מצא את $f(x)$.

תשובות סופיות:

- (1) $f(x) = x^3 - 7x + 5$
- (2) $f(x) = x^2 - 6x + 14$
- (3) א. $f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 2x + 23\frac{2}{3}$ ב. $y = -5x + 27$
- (4) א. $y = 5x - 2$ ב. $f(x) = 3x^3 - 4x + 4$ ג. $(0, -2), (0.4, 0)$
- (5) א. $x = 0$ ב. $f(x) = x^2 - 3x + 7$
- (6) א. $x = -1$ ב. $f(x) = -3x^2 - 5x - 8$ ג. $y = x - 5$
- (7) $f(x) = \frac{3x^2}{2} - 4x + 11$

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 39 - חשבון אינטגרלי - האינטגרל המסוים וחישובי שטחים

תוכן העניינים

| | |
|-----|---|
| 446 | 1. האינטגרל המסוים |
| 448 | 2. חישובי שטחים יסודיים |
| 454 | 3. חישובי שטחים יסודיים עם פרמטרים |
| 456 | 4. חישובי שטחים כאשר נתונה נגזרת הפונקציה |
| 459 | 5. חישובי שטחים עם פונקציה רציונאלית |
| 461 | 6. חישובי שטחים עם פונקצית שורש |
| 465 | 7. חישובי שטחים עם פונקציות טריגונומטריות |
| 468 | 8. חישובי שטחים בין גרף הנגזרת והצירים |

האינטגרל המסוים:

סיכום כללי:

תהא פונקציה $f(x)$ שנגזרתה היא $f'(x)$ ($f(x)$ מוגדרת בתחום $a \leq x \leq b$).
 הקשר שבין האינטגרל המסוים לפונקציה קדומה הוא: $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$.

הערה:

יש להשתמש בכל כללי האינטגרציה המיידיים של הפונקציות השונות אשר נלמדו.

שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

| | |
|---|--|
| א. $\int_2^5 (x^2 + 5x) dx$ | ב. $\int_{-4}^{-1} x^2 (x-3) dx$ |
| ג. $\int_{-3}^3 (x^3 + 4x) dx$ | ד. $\int_{-1}^1 3(2x-1)^5 dx$ |
| ה. $\int_1^2 \frac{2}{(x-3)^2} dx$ | ו. $\int_1^4 \frac{x-1}{x^3} dx$ |
| ז. $\int_{-3}^0 \frac{2x^2 + 7x - 4}{x+4} dx$ | ח. $\int_3^4 \frac{3x^2 - 7x + 2}{x-2} dx$ |
| ט. $\int_1^2 \sqrt{3x-1} dx$ | י. $\int_{-5}^0 \frac{3}{\sqrt{4-x}} dx$ |

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

| | |
|--|--|
| א. $\int_0^\pi (\cos x) dx$ | ב. $\int_0^\pi (\sin 2x + 1) dx$ |
| ג. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x - 3 \cos 2x) dx$ | ד. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{3}{\cos^2 x} + 2 \right) dx$ |

$$(3) \quad \int_1^a (4x-7) dx \quad \text{לפניך האינטגרל הבא:}$$

מצא עבור אלו ערכים של a ערך האינטגרל יהיה שווה ל-1.

$$(4) \quad \int_a^2 (x-3x^2) dx \quad \text{לפניך האינטגרל הבא:}$$

א. כתוב ביטוי לערך האינטגרל כתלות ב- a .

ב. מצא עבור אלו ערכים של a ערך האינטגרל יהיה שווה ל- $\frac{a-12}{2}$.

$$(5) \quad \int_a^{a+4} \left(\frac{1}{\sqrt{x-a}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) dx \quad \text{לפניך האינטגרל הבא:}$$

א. כתוב את ערך האינטגרל כתלות ב- a .

ב. מצא את ערכו של a עבורו ערך האינטגרל יהיה שווה ל-2.

$$(6) \quad \int_0^a (\sin x + 2 \cos 2x) dx \quad \text{לפניך האינטגרל הבא:} \quad 0 < a < 3$$

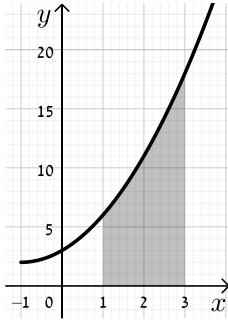
מצא עבור אלו ערכים של a ערך האינטגרל יהיה שווה ל-1.

תשובות סופיות:

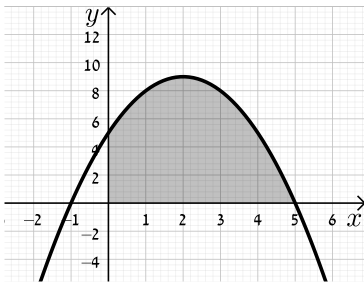
- (1) א. 91.5 ב. -126.75 ג. 0 ד. -182 ה. 1
 ו. $\frac{9}{32}$ ז. -12 ח. 9.5 ט. 1.856 י. 6.
- (2) א. 0 ב. π ג. 0 ד. $3\sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi \approx 7.29$
- (3) $a = 2, 1.5$
- (4) א. $a^3 - \frac{1}{2}a^2 - 6$ ב. $a = 0, 1, -\frac{1}{2}$
- (5) א. $4 + 2(\sqrt{a+1} - \sqrt{a+5})$ ב. $a = 1\frac{1}{4}$
- (6) $a = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$

חישובי שטחים יסודיים:

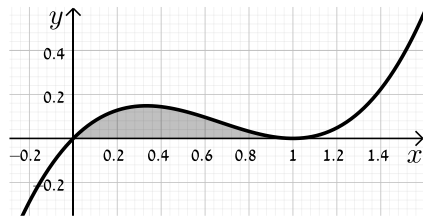
שאלות:



- (1) חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x) = x^2 + 2x + 3$, ציר ה- x והישרים $x=1$ ו- $x=3$.

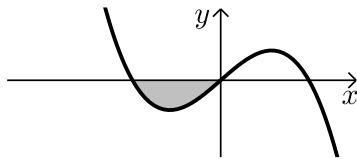


- (2) נתונה הפונקציה $y = -x^2 + 4x + 5$.
 א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 ב. מצא את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- x וציר ה- y .

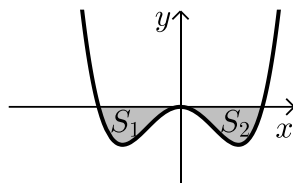


- (3) מצא את השטח המוגבל תחת הפונקציה $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ וציר ה- x כמתואר באיור.

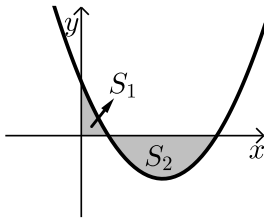
שאלות עם שטח מתחת לציר ה- x :



- (4) נתונה הפונקציה $f(x) = x(4 - x^2)$. חשב את השטח המוגבל שמתחת הפונקציה וציר ה- x שברביע השלישי.



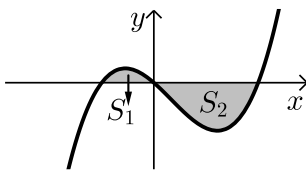
- (5) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2$. חשב את השטח המוגבל שבין הפונקציה לציר ה- x .



- 6) חשב את האינטגרל המסוים של הפונקציה $y = x^2 - 6x + 5$ בין 0 ל-5. האם התוצאה מייצגת את סכום השטחים: $S_1 + S_2$? אם כן, הסבר. אם לא, נמק וחשב את סכום זה.

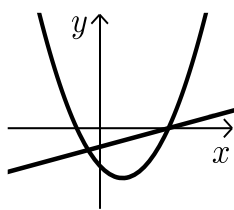
- 7) נתונה הפונקציה $y = x^3 - x^2 - 2x$.

יוצרים את השטחים S_1 ו- S_2 בין גרף הפונקציה וציר ה- x כמתואר באיור.

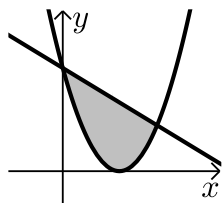


- א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x .

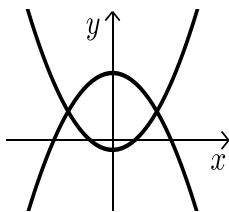
שאלות עם שטחים בין שתי פונקציות:



- 8) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = x^2 - 4x - 12$ ו- $g(x) = x - 6$. חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות הנ"ל.



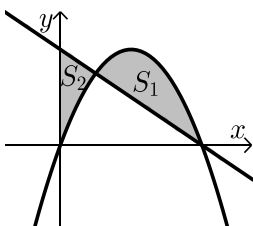
- 9) נתונות הפונקציות: $y = (x-3)^2$, $y = -x + 9$. חשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות.



- 10) נתונות הפונקציות: $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 7 - x^2$. חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות הנ"ל.

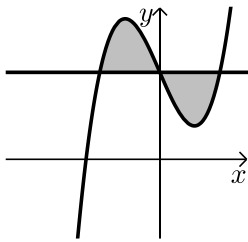
- 11) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = -x^2 + 4x$ ו- $g(x) = -x + 4$.

מסמנים את השטח הכלוא בין שני הגרפים ב- S_1 ואת השטח הכלוא בין הגרפים וציר ה- y ב- S_2 כמתואר באיור.

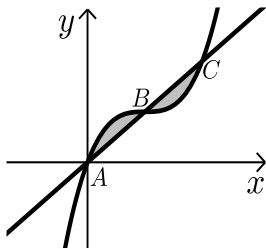


א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות.

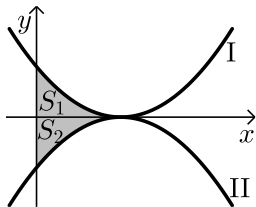
- ב. חשב את היחס שבין השטחים: $\frac{S_1}{S_2}$.



- 12** נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 - 4x + 5$ והישר $y = 5$.
 א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה והישר.
 ב. חשב את השטח המוגבל ביניהן.

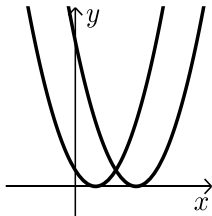


- 13** נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.
 הישר AC חותך את גרף הפונקציה בנקודות
 הבאות: $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(2,2)$.
 חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה לישר AC.

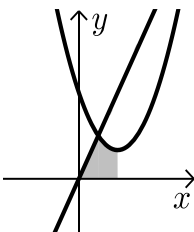


- 14** נתונות הפונקציות $f(x) = (x-2)^2$ ו- $g(x) = -(x-2)^2 - 1$ כמתואר באיור.
 א. התאם בין הפונקציות לגרפים I ו-II.
 ב. מסמנים את השטחים שבין כל פונקציה והצירים ב- S_1 ו- S_2 כמתואר באיור.
 הראה כי השטחים S_1 ו- S_2 שווים זה לזה.

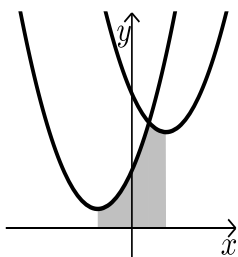
שאלות עם שטחים מורכבים:



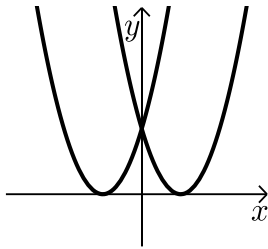
- 15** נתונות הפונקציות: $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 6x + 9$.
 חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות
 ובין ציר ה- x .



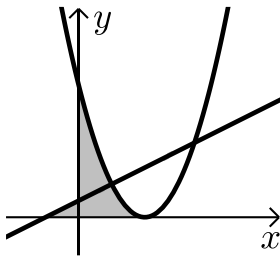
- 16** נתונות הפונקציות: $y = 3x$, $y = x^2 - 4x + 6$.
 א. מצא את קדקוד הפרבולה.
 ב. מצא נקודת חיתוך של הפרבולה עם הישר
 שמשמאל לקדקוד הפרבולה.
 ג. חשב את השטח המסומן שבשרטוט.



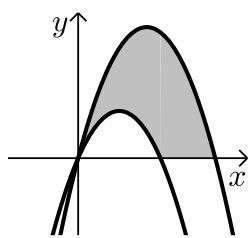
- 17** נתונות הפונקציות: $y = x^2 - 4x + 14$, $y = x^2 + 4x + 6$.
 א. מצא את שיעורי ה- x של קודקודי הפרבולות.
 ב. חשב את נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות.
 ג. חשב את השטח המסומן בשרטוט.



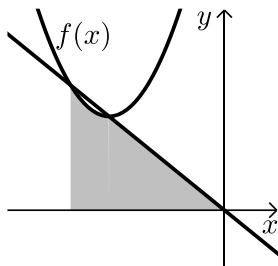
(18) נתונות הפונקציות: $f(x) = (x-3)^2$, $g(x) = (x+3)^2$.
חשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות וציר ה- x .



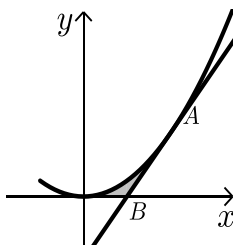
(19) נתונות שתי הפונקציות: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, $y = (x-2)^2$.
א. מצא את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות לציר ה- x .
ב. מצא את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות לציר ה- y .



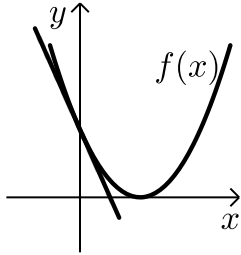
(20) נתונות הפרבולות הבאות: $f(x) = -x^2 + 5x$ ו- $g(x) = -x^2 + 3x$.
חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של הפרבולות וציר ה- x .



(21) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^2 + 6x + 12$.
ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -4$ כמתואר באיור.
א. מצא את משוואת הישר.
ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.
ג. מצא את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר $x = -4$.



(22) נתונה הפונקציה: $y = 2x^2$.
מעבירים משיק לגרף הפונקציה מהנקודה: $A(1,2)$.
המשיק חותך את ציר ה- x בנקודה B .
חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x .



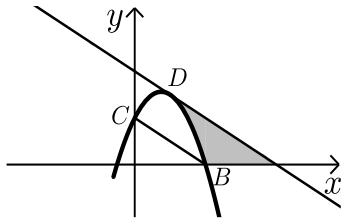
(23) נתונה הפונקציה: $f(x) = (x-2)^2$.

מנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y מעבירים משיק.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .

ג. חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- x .



(24) משוואת הפרבולה היא: $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$.

הנקודות $B(2,0)$, $C(0,2)$ הן נקודות חיתוך

של הפרבולה עם הצירים.

המשיק לפרבולה בנקודה D מקביל לישר BC .

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את השטח המוגבל בין הפרבולה, המשיק וציר ה- x .

ג. מצא את השטח המוגבל בין הפרבולה, המשיק וציר ה- y .

תשובות סופיות:

(1) $22\frac{2}{3}$ יח"ש.

(2) א. $(-1,0)$, $(5,0)$. ב. $33\frac{1}{3}$ יח"ש.

(3) $\frac{1}{12}$ יח"ש.

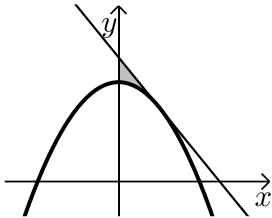
(4) 4 יח"ש.

(5) $4\frac{4}{15}$ יח"ש.

- (6) לא. השטח הוא: 13 יח"ש.
- (7) א. $(-1,0)$, $(0,0)$, $(2,0)$ ב. $3\frac{1}{12}$ יח"ש.
- (8) $57\frac{1}{6}$ יח"ש.
- (9) $20\frac{5}{6}$ יח"ש.
- (10) $21\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (11) א. $(1,3)$, $(4,0)$ ב. $2\frac{5}{11}$.
- (12) א. $(-2,5)$, $(0,5)$, $(2,5)$ ב. 8 יח"ש.
- (13) 0.5 יח"ש.
- (14) א. $f(x)=I$, $g(x)=II$ ב. הוכחה.
- (15) $\frac{2}{3}$ יח"ש.
- (16) א. $(2,2)$ ב. $(1,3)$ ג. $3\frac{5}{6}$ יח"ש.
- (17) א. $x=2$, $x=-2$ ב. $(1,11)$ ג. $25\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (18) 18 יח"ש.
- (19) א. $\frac{4}{3}$ יח"ש ב. $1\frac{7}{12}$ יח"ש.
- (20) $16\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (21) א. $y=-x$ ב. $(-3,3)$ ג. $7\frac{5}{6}$ יח"ש.
- (22) $\frac{1}{6}$ יח"ש.
- (23) א. $y=-4x+4$ ב. $(1,0)$ ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.
- (24) א. $y=-x+4$ ב. $2\frac{2}{3}$ יח"ש. ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.

חישובי שטחים יסודיים עם פרמטרים:

שאלות:

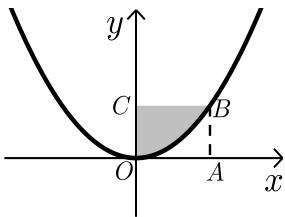


(25) נתונה הפרבולה: $y = ax^2 + 8$.

שיפוע המשיק לגרף הפרבולה בנקודה שבה $x = 2$ הוא -2 .

א. חשב את a .

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי המשיק, הפרבולה וציר y .



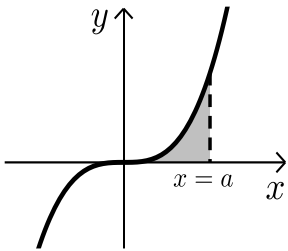
(26) הפונקציה המתוארת בשרטוט היא: $y = ax^2$ (a פרמטר).

המרובע ABCO הוא ריבוע.

הקדקוד B נמצא על גרף הפונקציה.

ידוע כי אורך צלע הריבוע היא 2 יחידות.

מצא את ערך הפרמטר a ואת השטח המסומן בשרטוט.



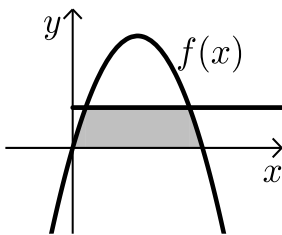
(27) נתונה הפונקציה $y = x^3$.

מעבירים אנך לציר ה- x : $x = a$ (a פרמטר חיובי)

כך שנוצר שטח הכלוא בין האנך, גרף הפונקציה וציר ה- x .

א. הבע באמצעות a את השטח המקווקו בציור.

ב. חשב את a אם ידוע כי שטח זה שווה ל- a^2 .



(28) נתונה הפונקציה: $f(x) = kx - x^2$.

הישר $y = 9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.

ידוע כי שיעור ה- x של אחת מנקודות החיתוך

הוא $x = 9$.

א. מצא את ערך הפרמטר k .

ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,

הישר וציר ה- x (השטח המסומן).

תשובות סופיות:

$$\text{(25) א. } a = -\frac{1}{2} \quad \text{ב. } \frac{4}{3} \text{ יח"ש.}$$

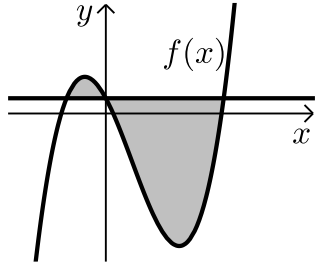
$$\text{(26) } a = \frac{1}{2}, \quad 2\frac{2}{3} \text{ יח"ש.}$$

$$\text{(27) א. } \frac{a^4}{4} \quad \text{ב. } a = 2$$

$$\text{(28) א. } k = 10 \quad \text{ב. } (1, 9) \quad \text{ג. } 81\frac{1}{3} \text{ יח"ש.}$$

חישובי שטחים כאשר נתונה נגזרת הפונקציה:

שאלות:



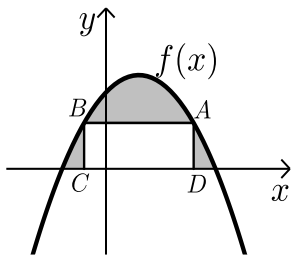
29 נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = 3x^2 - 8x - 12$.

הישר $y = 5$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ על ציר ה- y .

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את השטח המוגבל בין הישר והפונקציה.

30 הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ המתוארת באיור שלפניך היא: $f'(x) = 3 - 2x$.



ישר AB שמשוואתו: $y = 6$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו-B.

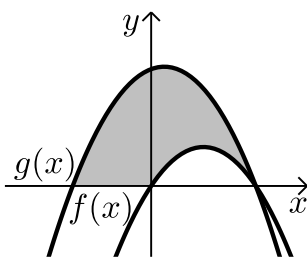
מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- x כך שנוצר מלבן ABCD.

ידוע ששיעור ה- x של הנקודה A הוא 4.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- x .

31 באיור שלפניך מתוארות הפונקציות שנגזרותיהן: $f'(x) = 4 - 2x$, $g'(x) = -2x + 1$.



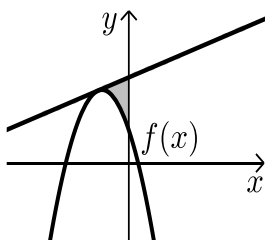
ידוע ששתי הפונקציות חותכות את ציר ה- x כאשר: $x = 4$.

א. מצא את הפונקציות.

ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות וציר ה- x (המסומן).

32 נתונה פונקציה $f(x)$.

משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x = -2$ היא: $y = x + 13$.



הנגזרת של הפונקציה היא: $f'(x) = -4x - 7$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- y .

גרף הפונקציה וציר ה- y .

33 נתונה פונקציה $f(x)$ שנגזרתה היא: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.

ישר ששיפועו 15 משיק לפונקציה ברביע הרביעי בנקודה שבה: $y = -20$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש עוד משיקים לגרף הפונקציה בעלי שיפוע 15? אם כן- מצא אותם.

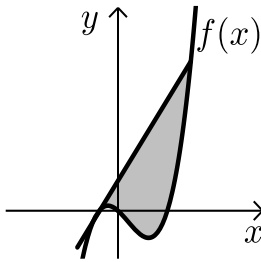
ג. ענה על הסעיפים הבאים:

i. הראה כי הנקודה שבה $x = 7$ משותפת למשיק

שמצאת בסעיף הקודם ולפונקציה $f(x)$.

ii. מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה

והמשיק שמצאת בסעיף הקודם (ראה איור).



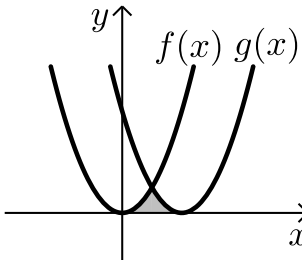
34 באיור שלפניך חותך גרף הפונקציה: $f(x) = x^2$

את גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = 2$.

הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ היא: $g'(x) = 2x - 8$.

א. מצא את הפונקציה $g(x)$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- x (המסומן).



35 באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y = 2x$.

נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = 2x - 6$

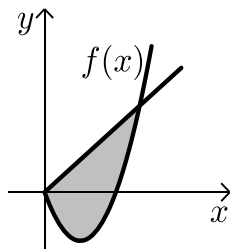
וידוע כי הישר חותך את הפונקציה בנקודה שבה ערך

ה- y הוא 16.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן מצא אותן.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.



תשובות סופיות:

א. (29) $f(x) = x^3 - 4x^2 - 12x + 5$ ב. $189\frac{1}{3}$ יח"ש.

א. (30) $f(x) = -x^2 + 3x + 10$ ב. $27\frac{1}{6}$ יח"ש.

א. (31) $f(x) = 4x - x^2$, $g(x) = -x^2 + x + 12$ ב. 46.5 יח"ש.

א. (32) $f(x) = -2x^2 - 7x + 5$ ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.

א. (33) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ ב. $y = 15x + 28$

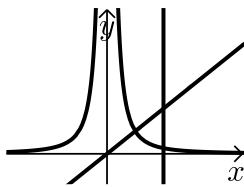
א. (34) $g(x) = (x - 4)^2$ ג. i. (7,133) ג. ii. 546.75 יח"ש.

א. (35) $f(x) = x^2 - 6x$ ב. (0,0) ב. $5\frac{1}{3}$ יח"ש.

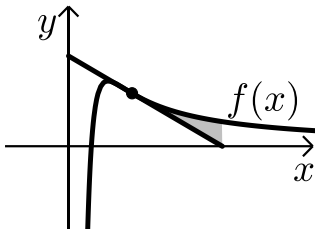
א. (36) $f(x) = x^2 - 6x$ ג. $85\frac{1}{3}$ יח"ש.

חישובי שטחים עם פונקציה רציונאלית:

שאלות:

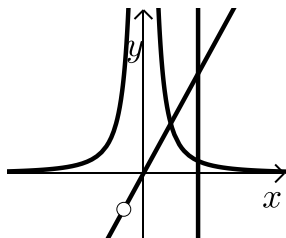


- (1) נתונות שתי פונקציות: $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = x$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,
הישר $x=2$ וציר ה- x .



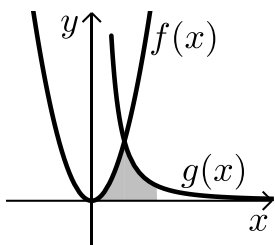
- (2) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$, מצא את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.
ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה והמשיק שמצאת בסעיף א'.
חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק ואנך לציר ה- x היוצא מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .



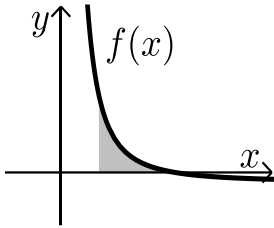
- (3) נתונות שתי פונקציות: $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + 2}$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,
הישר $x=2$ וציר ה- x .

- (4) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = 2x^2$ ו- $g(x) = \frac{a}{x^2}$



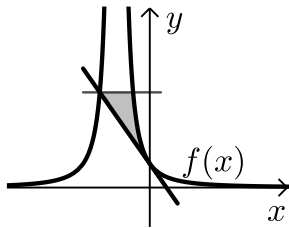
- (a קבוע) בתחום: $x > 0$.
ידוע כי הגרפים נחתכים ברביע הראשון בנקודה הנמצאת על הישר: $y = 4x$.
א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים ואת a .
ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר: $x = 4$.

5) גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{a-x^2}{x^2}$ (קבוע a) חותך את ציר ה- x בנקודה $(6,0)$.



- א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.
 ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר: $x=2$.

6) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{A}{(2x+A)^2}$ (A פרמטר חיובי).



ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y הוא: $-\frac{1}{9}$.

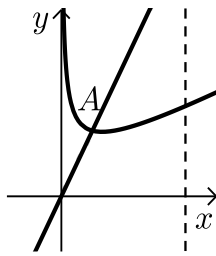
- א. מצא את ערך הפרמטר A .
 ב. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך עם ציר ה- y .
 ג. הראה כי המשיק חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = -4.5$.
 ד. העבר ישר אופקי מנקודת החיתוך של המשיק וגרף הפונקציה מהסעיף הקודם. מצא את נקודת החיתוך הנוספת של ישר זה עם גרף הפונקציה.
 ה. חשב את השטח כלוא בין המשיק, הישר וגרף הפונקציה (היעזר באיור).

תשובות סופיות:

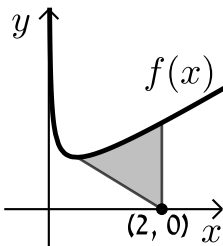
- (1) 1 יח"ש.
 (2) א. $y = -x + 2$.
 (3) 1 יח"ש.
 (4) א. $a = 32$, $(2,8)$.
 (5) א. $a = 36$, $f(x) = \frac{36-x^2}{x^2}$.
 (6) א. $A = 6$.
 ב. $\frac{1}{8}$ יח"ש.
 ב. $13\frac{1}{3}$ יח"ש.
 ב. 8 יח"ש.
 ג. הוכחה.
 ב. $y = -\frac{1}{9}x + \frac{1}{6}$.
 ד. $(-1.5, \frac{2}{3})$.
 ה. $\frac{5}{8}$ יח"ש.

חישובי שטחים עם פונקציות שורש:

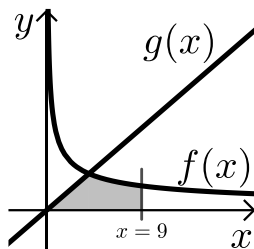
שאלות:



- (1) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} + x$.
 מעבירים ישר: $y = 4x$ החותך את גרף הפונקציה
 בנקודה A המסומנת באיור.
 א. מצא את שיעורי הנקודה A.
 ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$,
 הישר $y = 4x$, ציר ה- x ואנך לציר ה- x : $x = 4$.

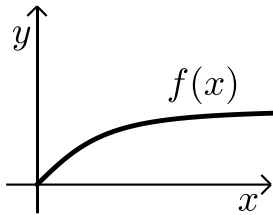


- (2) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + x$.
 א. מצא את נקודת המינימום שלה.
 ב. מנקודת המינימום של הפונקציה מעבירים
 ישר לנקודה $(2, 0)$ שעל ציר ה- x .
 מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר ואנך לציר ה- x
 היוצא מהנקודה $(2, 0)$ עד לנקודת החיתוך עם גרף הפונקציה.

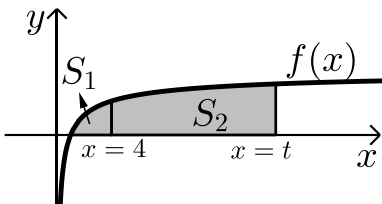


- (3) באיור הבא מתוארים הגרפים של
 הפונקציות: $f(x) = \frac{16}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x) = 2x - 1$.
 א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.
 ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים,
 ציר ה- x והישר $x = 9$.

- (4) נתונה הפונקציה: $f(x) = (x - 6)\sqrt{x}$.
 חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודת
 המינימום שלה וציר ה- y .



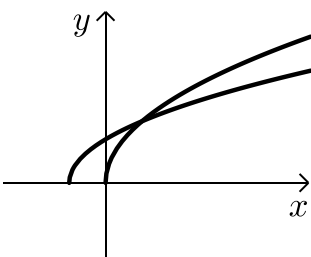
- (5) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ברביע הראשון. לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק והישר $x = \sqrt{3}$.



- (6) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$. מעבירים שני אנכים לציר ה- x והם: $x = 4$ ו- $x = t$ ($t > 4$). נסמן:
 S_1 - השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x .
 S_2 - השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והאנכים. ידוע כי: $8S_1 = S_2$. מצא את t .

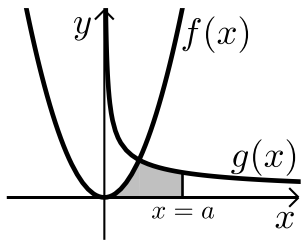
(7) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$

- א. ענה על הסעיפים הבאים:
 i. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ii. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 iii. הראה כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
 ב. מעבירים משיק לגרף הפונקציה ששיפועו הוא: $m = \frac{17}{16}$. מצא את נקודת ההשקה.
 ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x ואנך לציר ה- x מנקודת ההשקה שמצאת בסעיף הקודם.



- (8) נתונות שתי פונקציות: $f(x) = \sqrt{x+b}$, $g(x) = \sqrt{2x}$ ($b > 0$). גודל השטח הכלוא בין הפונקציות וציר ה- x הוא $2\frac{2}{3}$ יח"ש. מצא את ערכו של הפרמטר b .

9) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = x^2$



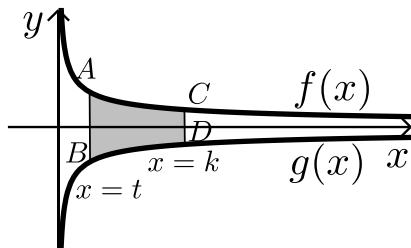
ו- $g(x) = \frac{32}{\sqrt{x}}$ ברביע הראשון.

מעבירים ישר $x=a$ החותך את גרף הפונקציה $g(x)$ ויוצר את השטח הכלוא בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר.

ידוע כי שטח זה שווה ל- $S = 85\frac{1}{3}$.

מצא את a .

10) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x) = -\frac{3}{\sqrt{x}}$



מעבירים שני ישרים: $x=k$ ו- $x=t$ אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.

ידוע כי: $2CD=AB$.

א. הראה כי: $k=4t$.

ב. השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות

והישרים: $x=t$ ו- $x=k$ הוא: $S=12$.

מצא את t .

11) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא עבור איזה ערך של a , $(a > 1)$ יתקיים: $\int_1^a \left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1 \right) dx = 0$.

ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1$

מעבירים שני אנכים לציר ה- x והם: $x=1$ ו- $x=13$

כך שנוצרים השטחים S_1 ו- S_2 .

מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x

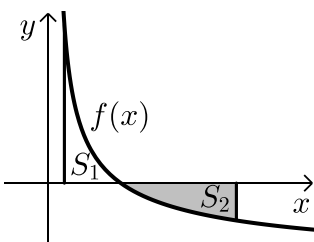
ג. ענה על הסעיפים הבאים:

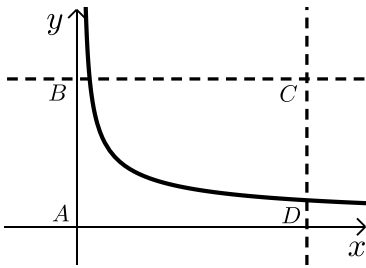
i. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,

ציר ה- x והאנך $x=1$, (S_1) .

ii. היעזר בתוצאה שקיבלת ובסעיף א' וקבע לכמה שווה השטח S_2 .

נמק את טענתך.





(12) באיור שלפניך מתוארת הפונקציה: $f(x) = \frac{9}{\sqrt{2x-1}}$

מעבירים את הישרים המקבילים לצירים: $x = 13$

ו- $y = 3$ כך שנוצר המלבן ABCD כמתואר באיור.

הישר $y = 3$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה M.

א. מצא את שיעורי הנקודה M.

ב. מסמנים את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה

והישרים ב- S_1 ואת שטח המלבן ב- S_2 .

$$\text{הראה כי: } \frac{S_1}{S_2} = \frac{2}{13}$$

תשובות סופיות:

(1) א. $A(1,4)$ ב. 15.5 יח"ש.

(2) א. $\min(0.5,1.5)$ ב. 1.75 יח"ש.

(3) א. $(4,8)$ ב. 48 יח"ש.

(4) 2.26 יח"ש.

(5) 0.5 יח"ש

(6) $t = 16$

(7) א. i. $x > 0$ ii. $(4,0)$ iii. $f'(x) = 1 + \frac{4}{x\sqrt{x}} > 0$

ב. $(16,14)$ ג. 88 יח"ש.

(8) $b = 2$

(9) $a = 9$

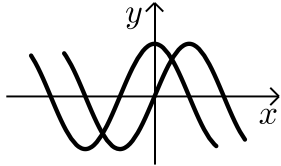
(10) א. הוכחה ב. $t = 1$

(11) א. $a = 13$ ב. $(5,0)$ ג. i. $S_1 = 2$ ii. $S_2 = |-S_1| = 2$

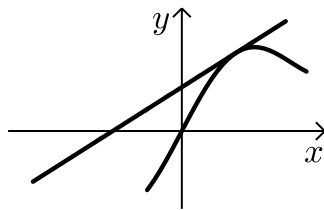
(12) א. $M(5,3)$

חישובי שטחים עם פונקציות טריגונומטריות:

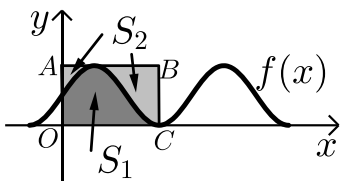
שאלות:



- (1) נתונות הפונקציות: $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות לציר ה- y ברביע הראשון.

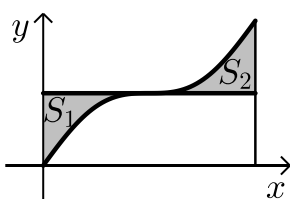


- (2) נתונה הפונקציה: $f(x) = x + 2 \sin x$.
בתחום שבין ראשית הצירים לנקודת המקסימום הראשונה מימינה העבירו לפונקציה משיק ששיפועו 1.
א. מצא את משוואת המשיק.
ב. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x ברביעים הראשון והשני.

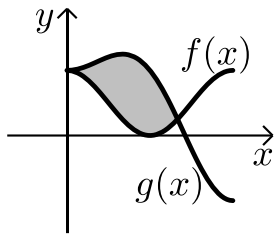


- (3) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{\sin 2x + 1}{2}$.
בתחום: $-0.25\pi \leq x \leq 1.75\pi$ מעבירים משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה ומעלים אנך לציר ה- x מנקודת החיתוך הראשונה של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון המסומנת ב- C כך שנוצר המלבן $ABCO$.
השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים יסומן ב- S_1 (ראה סימון בציור).
השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה- y יסומן ב- S_2 .
א. מצא את משוואת הצלע AB של המלבן.
ב. חשב את היחס: $\frac{S_1}{S_2}$.

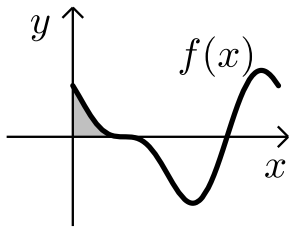
- (4) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $y = \sin x + x$ בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.



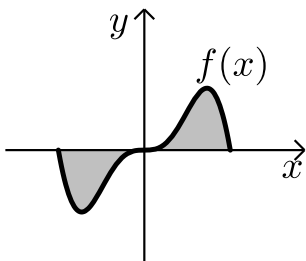
- א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות בתחום הנתון?
ב. מורידים אנך מגרף הפונקציה לציר ה- x בנקודה שבה: $x = 2\pi$.
מעבירים ישר המקביל לציר ה- x מהנקודה שמאפסת את הנגזרת.
הראה כי השטחים S_1 ו- S_2 המסומנים בסרטוט שווים.



- (5) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה
 הבאות: $f(x) = \cos^2 x$ ו- $g(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$
 בתחום: $0 \leq x \leq \pi$.
 א. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.
 ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים.
 השתמש בזהות: $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.



- (6) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = -\cos 2x - \sin x$.
 א. מצא את שיעורי ה- x של הנקודות
 המקיימות: $f'(x) = 0$ בתחום: $0 < x < 2\pi$.
 ידוע כי הנקודה המקיימת $f'(x) = 0$ אשר אינה
 קיצון נמצאת על ציר ה- x .
 ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.
 ג. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה בתחום הנתון.
 חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.



- (7) ענה על הסעיפים הבאים:
 א. נתונה הפונקציה: $y = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$
 הוכח כי הנגזרת של הפונקציה היא: $y' = x^2 \sin x$
 באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x) = x^2 \sin x$
 בתחום: $-\pi \leq x \leq \pi$.
 ב. הראה כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.
 ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה
 וציר ה- x בתחום הנתון.

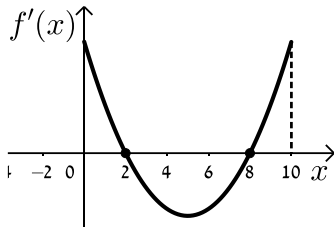
- (8) נתונה הפונקציה: $f(x) = a \cos x + b \sin x$, a, b פרמטרים.
 הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{4}$ והיא חיובית בתחום $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.
 גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה בתחום $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ הוא $2\sqrt{2} - 2$.
 מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

תשובות סופיות:

- (1) א. 0.41 יח"ש.
- (2) א. $y = x + 2$. ב. π יח"ש.
- (3) א. $y = 1$. ב. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 2}{3\pi - 2} = 1.538$.
- (4) א. אין נקודת קיצון, הנקודה (π, π) היא נקודת פיתול.
 ב. $S = 0.5\pi^2 - 2 = 2.934$.
- (5) א. $(0, 1)$, $(\frac{2\pi}{3}, \frac{1}{4})$. ב. $S = 1.5 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.299$.
- (6) א. $x = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$. ב. $f(x) = -\frac{1}{2} \sin 2x + \cos x$. ג. $\frac{1}{2}$ יח"ש.
- (7) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. $S = 2(\pi^2 - 4) \approx 11.74$.
- (8) $b = -2, a = 2$.

חישובי שטחים בין גרף הנגזרת והצירים:

שאלות:



1 הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 10$.

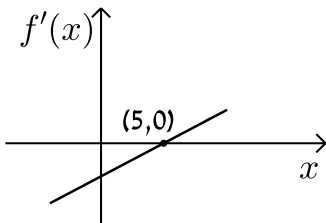
בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.

א. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$

אם: $f(2) = 6$, $f(0) = -4$, $f(5) = 0$ וכך: $f(10) > 0$.

ב. חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הנגזרת והצירים ברביע הראשון

עד לנקודה שבה $x = 2$.



2 לפי גרף של הפונקציה $f'(x)$.

הגרף המתואר חותך את ציר ה- x בנקודה

אחת בלבד והיא $(5, 0)$.

א. מצא את התחומים שבהם $f'(x)$ היא חיובית

ואת התחומים שבהם היא שלילית.

ב. קבע מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

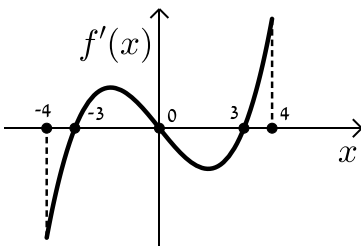
ג. כתוב את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ אם ידוע כי

שיעור ה- y שלה הוא -2 .

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ אם ידוע כי גרף הפונקציה

חותך את ציר ה- y כאשר $y = 8$.

ה. חשב את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים.



3 בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$.

א. רשום את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

ב. מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון

של $f(x)$ וקבע את סוגן.

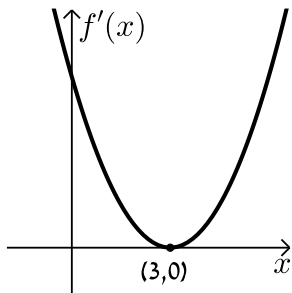
ג. נתון כי הפונקציה $f(x)$ עוברת בראשית הצירים וגם מקיימת: $f(-3) = f(3) = m$.

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנ"ל (הבע באמצעות m).

ד. השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ וציר ה- x ברביעים

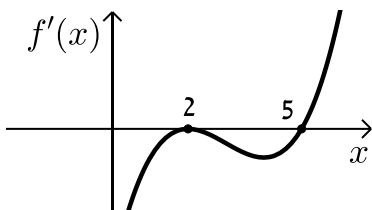
השני והרביעי הוא 16 יח"ש. מצא את m .

4 הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$ מתוארת באיור הבא.



- א. האם ל- $f(x)$ יש נקודות קיצון? נמק.
- ב. סרטט סקיזה של גרף הפונקציה $f(x)$ אם ידוע כי $f(3) = 4$ וכי היא חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -5$.
- ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים ברביע הראשון.

5 באיור שלפניך מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$.

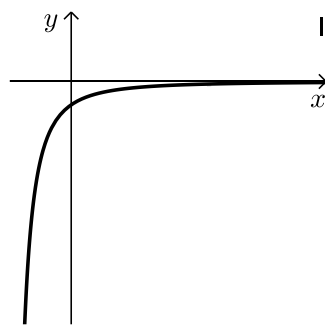
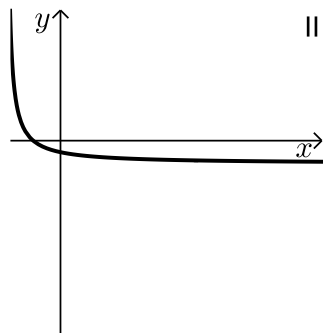


ידוע כי הנקודות $A(5, -4.75)$, $B(2, 2)$

ו- $C(0, 14)$ נמצאות על $f(x)$.

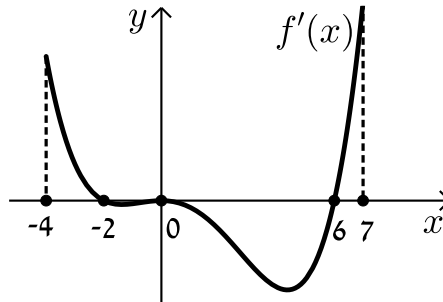
- א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$.
- ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.
- ג. סרטט סקיזה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ד. חשב את השטח מוגבל בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים בתחום $0 \leq x \leq 5$.

6 באיורים שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$:



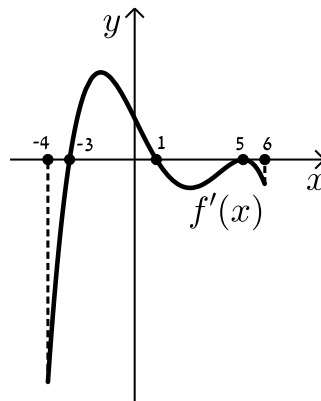
- א. זהה איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמק.
- ב. נתון כי $f(10) = -3$ וכי $f(x)$ חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -2$. מהו השטח המוגבל בין גרף הנגזרת $f'(x)$, הצירים והישר $x = 10$?

7 נתון גרף הנגזרת $f'(x)$ הבא:



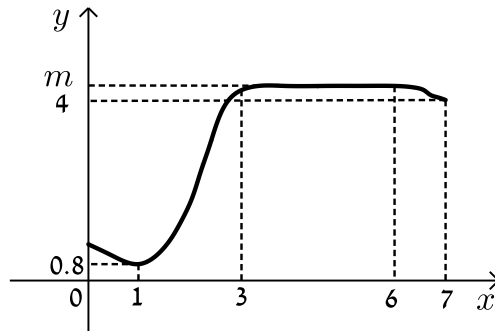
- א. סרטט את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \leq x \leq 7$ לפי הנתונים: $f(0) = -2$, $f(-2) = 7.6$ ו- $f(6) = -606.8$.
- ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- x ברביע השלישי.
- ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- x ברביע הרביעי.

8 נתון גרף הנגזרת $f'(x)$ הבא:



- א. סרטט את גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \leq x \leq 6$ עבור הנתונים: $f(5) = -83\frac{1}{3}$, $f(1) = 36\frac{2}{15}$, $f(-3) = -356\frac{2}{5}$.
- ב. חשב את כלל השטח הכלוא בין גרף הנגזרת וציר ה- x בתחום: $-3 \leq x \leq 5$.

9) בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $0 < x < 7$:



הסתמך על הגרף של $f(x)$ ועל הערכים הרשומים על הצירים וענה על השאלות הבאות:

א. מצא עבור אילו ערכים של x השונים מ-6 מתקיים:

i. $f'(x) > 0$

ii. $f'(x) = 0$

iii. $f'(x) < 0$

ב. נתון כי: $\int_3^6 m dx = 15$, כאשר m הוא פרמטר המסומן על ציר ה- y .

מצא את $f(5)$.

ג. סרטט סקיצה של גרף פונקציה הנגזרת $f'(x)$ בתחום $0 < x < 3$.

ד. מצא את השטח המוגבל בין הגרף של פונקציה הנגזרת $f'(x)$

וציר ה- x בתחום $1 < x < 3$.

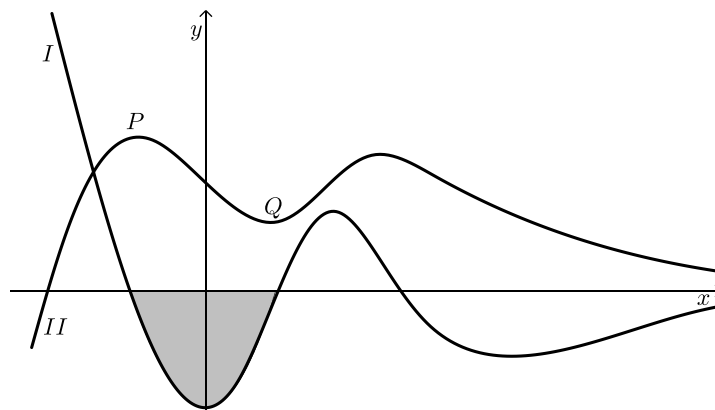
10) בסרטוט נתונים הגרפים של פונקציה ושל נגזרתה.

א. קבע איזה מהגרפים, I או II, שייך לפונקציה ואיזה שייך לנגזרת. נמק.

ב. כמה נקודות פיתול יש לפונקציה? נמק וסמן אותן על הסרטוט.

ג. נתון: $P(-2, 4)$, $Q(2, 1)$. מצא את גודלו של השטח הכלוא בין גרף I

לציר ה- x (השטח המסומן בסרטוט).

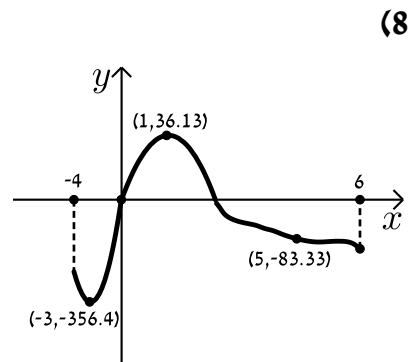
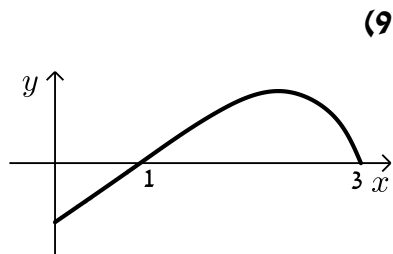
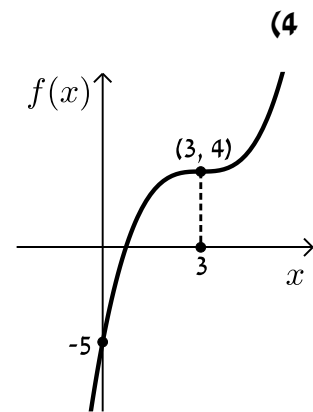
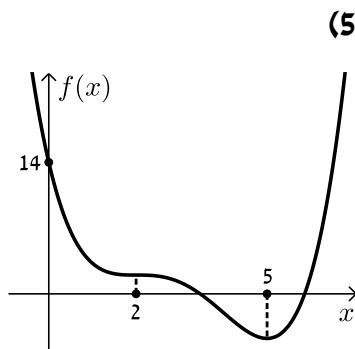
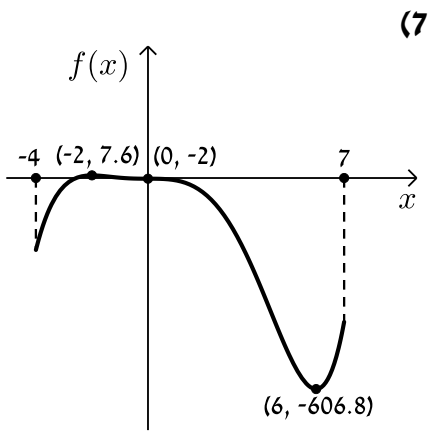
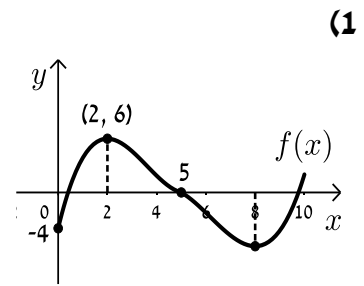
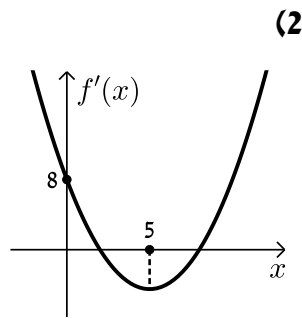
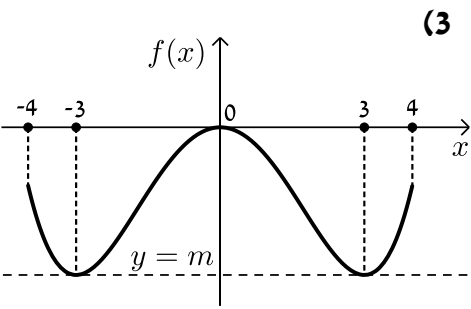


תשובות סופיות:

הערה: סרטוטי הסקיצות מופיעות במרוכז בעמוד הבא.

- (1) ב. 10 יח"ש.
- (2) א. חיובית: $x > 5$, שלילית: $x < 5$. ב. עולה: $x > 5$, יורדת: $x < 5$.
 ג. $\min(5, -2)$. ד. הוכחה. ה. 10 יח"ש.
- (3) א. עולה: $3 < x \leq 4$, $-3 < x < 0$, יורדת: $0 < x < 3$, $-4 \leq x < -3$.
 ב. $x_{\min} = -3$, $x_{\max} = 0$, $x_{\min} = 3$. ג. הוכחה. ד. $m = -8$.
- (4) א. לא. הנקודה $(3, 0)$ היא פיתול מכיוון שהפונקציה עולה לפניה ואחריה.
 ב. הוכחה. ג. 9 יח"ש.
- (5) א. $\min(5, -4.75)$. ב. עולה: $x > 5$, יורדת: $x < 5$.
 ג. הוכחה. ד. 18.75 יח"ש.
- (6) א. $f(x): \text{II}$, $f'(x): \text{I}$. ב. 1 יח"ש.
- (7) א. הוכחה. ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.
- (8) א. הוכחה. ב. 512 יח"ש.
- (9) א. i. $f'(x) > 0: 1 < x < 3$. א. ii. $f'(x) = 0: x = 1, 3 \leq x < 6$.
 א. iii. $f'(x) < 0: 6 < x < 7, 0 < x < 1$. ב. $f(5) = 5, m = 5$. ד. 4.2 יח"ש.
- (10) א. גרף I - $f'(x)$ וגרף II - $f(x)$. ב. 3 נקודות פיתול.
 ג. 3 יח"ש.

סרטוטי גרפים לפי מספרי שאלות:



מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

פרק 40 - חשבון אינטגרלי - פונקציה מעריכית, לוגריתמית וחזקה

תוכן העניינים

| | | |
|-----|-------|------------------------------------|
| 474 | | 1. פונקציה מעריכית. |
| 480 | | 2. פונקציה לוגריתמית. |
| 486 | | 3. פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי. |

פונקציה מעריכית:

סיכום כללי:

אינטגרלים מיידיים של פונקציות מעריכיות:

| אינטגרלים יסודיים | אינטגרלים של פונקציות מורכבות |
|---------------------------------------|---|
| $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ | $\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$ |
| $\int e^x dx = e^x + c$ | $\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$ |

שאלות:

אינטגרל כללי:

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int (5e^x - e^{3x} + e^{-x} + 1) dx$

ג. $\int (6\sqrt{e^{4x-1}}) dx$

ב. $\int (3^x + 5^{2x}) dx$

ד. $\int (e^x + e^{-x})^2 dx$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} dx$

ב. $\int \frac{3e^{3x} - 5e^{2x} + 4e^x - 2}{e^x - 1} dx$

(3) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int (e^{4x} + e^{-x}) dx$

ג. $\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx$

ב. $\int (e^{x+1})^2 dx$

ד. $\int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx$

4) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \left(\frac{e^x}{\sqrt{e^x+3}} \right) dx$ ב. $\int \left(\frac{3-e^x}{(e^x-3x)^2} \right) dx$ ג. $\int (xe^{x^2}) dx$

אינטגרל מסוים:

5) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 2e^x - \frac{1}{e^x}$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(\ln 2, 3\frac{1}{4})$.

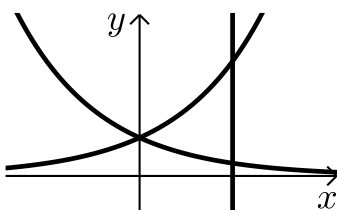
6) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = e^{2x} + e^x - 2$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שערך הפונקציה בנקודת המינימום שלה הוא $\frac{1}{2}$.

7) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 6x^2e^{x^3} - \frac{1}{x^2}$.

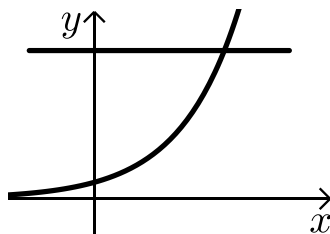
מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(-1, \frac{2}{e})$.

חישובי שטחים:



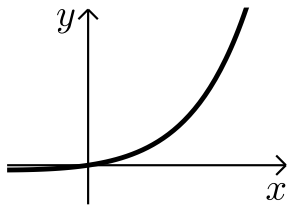
8) נתונות הפונקציות: $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$.

מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות לישר $x = \ln 3$.

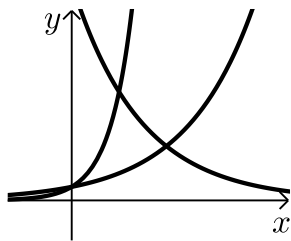


9) נתונה הפונקציה: $f(x) = 3^x$.

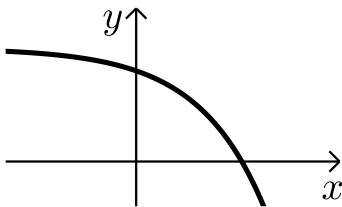
מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישר $y = 9$ וציר ה- y .



- 10** נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{2x} - e^x$.
 לפונקציה העבירו משיק בראשית הצירים.
 מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,
 המשיק והישר $x = 2$.



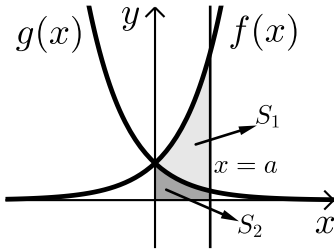
- 11** נתונות הפונקציות:
 $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{3x}$, $h(x) = 16e^{-x}$.
 חשב את גודל השטח הכלוא שבין שלוש הפונקציות.



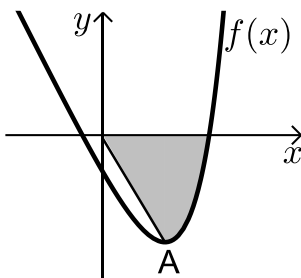
- 12** נתונה הפונקציה: $f(x) = 5 - e^x$.
 העבירו לפונקציה משיק ששיפועו $-e$.
 חשב את גודל השטח הכלוא בין
 הפונקציה, המשיק וציר ה- x .
 ניתן להשאיר e ו- \ln בתשובה.

- 13** נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{bx}$, $(0 < b)$.
 גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר
 בראשית הצירים וציר ה- y הוא $\frac{e-2}{4}$.
 מצא את ערכו של הפרמטר b .

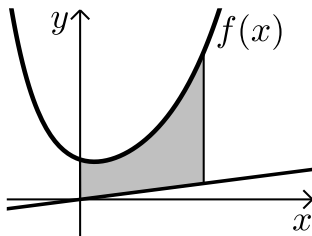
- 14** נתונות הפונקציות: $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$, $g(x) = e^{-x}$.
 מנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ ברביע הראשון הורידו אנך לשני
 הצירים. המשך האנך לציר ה- y חותך את הפונקציה $f(x)$ ומנקודת החיתוך
 יורד אנך נוסף לציר ה- x כך שנוצר מלבן.
 הוכח כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא $\frac{3}{e}$.



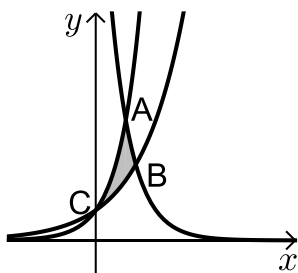
- 15** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = e^{2x}$ ו- $g(x) = e^{-2x} - 1$. מעבירים אנך לציר ה- x את הישר $x = a$, $a > 0$, כמתואר באיור. אנך זה יוצר את השטחים S_1 ו- S_2 . ידוע כי השטח S_1 גדול פי 3 מהשטח S_2 . מצא את a .



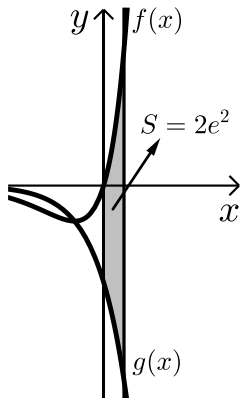
- 16** נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{2x-1} - 2ex - 2$. הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה. א. מצא את שיעורי הנקודה A. מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים. ב. כתוב את משוואת הישר המחבר את הנקודה A עם הראשית. ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x , אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 1.7$.



- 17** נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^x + e^{ax}}{4}$. ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה: $(1, \frac{e^3 + 1}{4e^2})$. א. מצא את a וכתוב את הפונקציה. ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והישר: $y = 0.1x$. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר y והאנך: $x = 2$.



- 18** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של שלוש פונקציות: I. $f(x) = 2^x$. II. $g(x) = 4^x$. III. $h(x) = 2^{4-2x}$. א. קבע איזה גרף מתאר כל פונקציה. ב. מצא את שיעורי הנקודות A, B ו-C (נקודות החיתוך שבין הגרפים). ג. חשב את השטח המסומן באיור.



19 ענה על הסעיפים הבאים:

א. גזור את הפונקציה הבאה: $y = e^x(x-1)$.

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

הפונקציות: $f(x) = xe^x$, $g(x) = -e^x$.

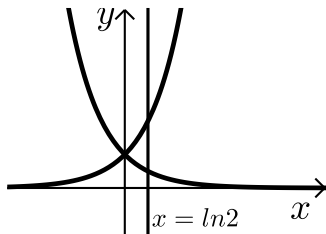
מעבירים ישר $x = a$ ($a > 0$), החותך את הגרפים

של שתי הפונקציות ויוצר את השטח המתואר

הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- y והישר.

ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$. מצא את a .

חישובי נפחים:



20 נתונות הפונקציות: $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$.

השטח הכלוא בין הפונקציות והישר: $x = \ln 2$

מסתובב סביב ציר ה- x .

חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

תשובות סופיות:

- (1) א. $5e^x - \frac{e^{3x}}{3} - e^{-x} + x + c$ ב. $\frac{3^x}{\ln 3} + \frac{5^{2x}}{2\ln 5} + c$
- ג. $3e^{2x-\frac{1}{2}} + c$ ד. $\frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + c$
- (2) א. $e^x + x + c$ ב. $\frac{3e^{2x}}{2} - 2e^x + 2x + c$
- (3) א. $\frac{1}{4}e^{4x} - e^{-x} + c$ ב. $\frac{1}{2}e^{2x+2} + c$
- ג. $\frac{0.4^x}{\ln 0.4} + \frac{3.2^x}{\ln 3.2} + \frac{200^x}{\ln 200} + c$ ד. $8\sqrt{e^x} - \frac{3}{4}e^{-\frac{4x}{3}} + c$
- (4) א. $2\sqrt{e^x+3} + c$ ב. $\frac{1}{e^x-3x} + c$ ג. $\frac{1}{2}e^{x^2} + c$
- (5) $f(x) = 2e^x + e^{-x} - 1.25$
- (6) $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + e^x - 2x - 1$
- (7) $f(x) = 2e^{x^3} + \frac{1}{x} + 1$
- (8) $S = 1\frac{1}{3}$ יח"ש
- (9) $S = 10.72$ יח"ש
- (10) $S = 18.41$ יח"ש
- (11) $S = 3\frac{1}{3}$ יח"ש
- (12) $S = 0.192$ יח"ש
- (13) $b = 2$
- (15) $a = \ln 2$
- (16) א. $A(1, -e-2)$ ב. $y = -(e+2)x$ ג. $S = 4.744$ יח"ש
- (17) א. $a = -2$ ב. $f(x) = \frac{e^x + e^{-2x}}{4}$ ג. 1.52
- (18) א. $A(1, 4)$, $B\left(1\frac{1}{3}, 2.52\right)$, $C(0, 1)$ ב. 1.03 יח"ש
- (19) א. $y' = xe^x$ ב. $a = 2$
- (20) $1\frac{1}{8}$ יח"ש

פונקציה לוגריתמית:

סיכום כללי:

אינטגרלים מיידיים של פונקציות לוגריתמיות:

| אינטגרל יסודי | אינטגרל של פונקציה מורכבת |
|------------------------------------|--|
| $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$ | $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + c$ |

שאלות:

אינטגרל כללי:

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{4}{3x-1} \right) dx \quad \text{א.} \quad \int \frac{x^2+3x-4}{x} dx \quad \text{ב.} \quad \int \frac{x+3}{x^2-9} dx \quad \text{ג.}$$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{x^2+3x+5}{x+1} dx \quad \text{א.} \quad \int \frac{x^3-x^2+5x-6}{x-2} dx \quad \text{ב.} \quad \int \frac{x^4+3}{x+1} dx \quad \text{ג.}$$

(3) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{2x}{x^2-3} dx \quad \text{א.} \quad \int \frac{x-1}{x^2-2x} dx \quad \text{ב.} \quad \int \frac{e^x}{e^x+5} dx \quad \text{ג.} \\ \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx \quad \text{ד.} \quad \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \quad \text{ה.}$$

אינטגרל מסוים:

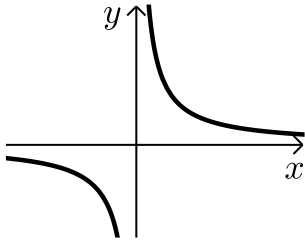
(4) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 2x - \frac{1}{x-4}$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה (5, 28).

5) נתונה נגזרת שנייה של פונקציה: $f''(x) = 6x - \frac{1}{x^2}$. מצא את הפונקציה אם

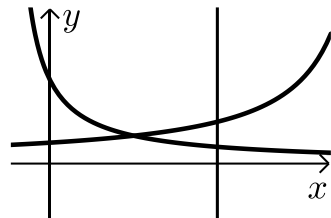
ידוע שהיא עוברת בנקודה $(1, -2)$ וששיפועה בנקודה זו הוא 3.

חישובי שטחים:



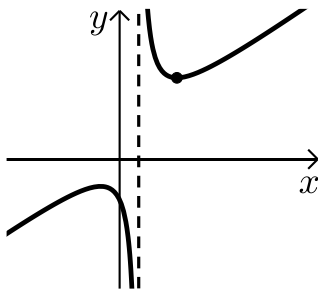
6) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x}$.

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x = -1$ ו- $x = -4$ וציר ה- x . ניתן להשאיר \ln בתשובה.



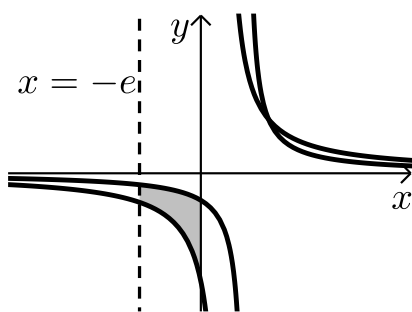
7) נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{2}{x+1}$, $f(x) = \frac{4}{8-x}$.

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות, הישר $x = 4$ והצירים.



8) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$.

חשב את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = 2$ ואנך לציר ה- x העובר בנקודת המינימום של הפונקציה. אפשר להשאיר ביטוי עם \ln בתשובה.



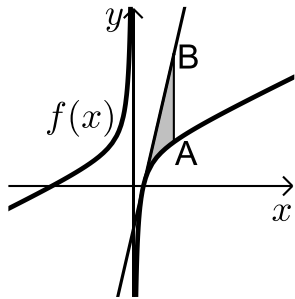
9) באיור שלפניך נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{a}{x-1}$

ו- $g(x) = \frac{a-1}{x-2}$ בתחום: $x < 0$.

ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x = 3$.

א. מצא את a וכתוב את שתי הפונקציות.

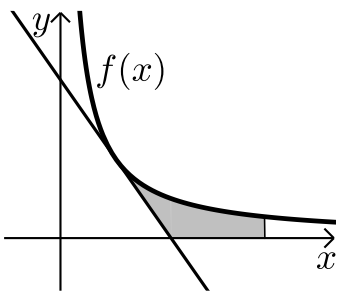
ב. חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- y והישר $x = -e$.



10 נתונה הפונקציה: $f(x) = 7 + ax + \frac{b}{x}$.

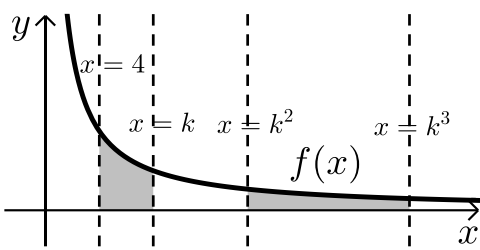
ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה
בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x היא: $y = 18x - 9$.
א. מצא את a ו- b וכתוב את הפונקציה.
מעבירים ישר המקביל לציר ה- y שחותך את גרף
הפונקציה בנקודה A ואת משוואת המשיק בנקודה B.
אורך הקטע AB הוא 18.

- ב. מצא את משוואת הישר הנ"ל אם ידוע כי הנקודה A
נמצאת מימין לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.



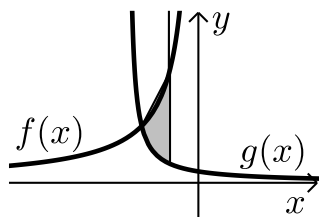
11 הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$.

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה
שבה: $x = 2$ היא: $y = 4 - x$.
א. מצא את הפונקציה $f(x)$.
ב. באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$
והמשיק בתחום: $x > 0$.
חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק,
ציר ה- x והישר $x = e^2$.



12 באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2}{x}$.

בתחום: $x > 0$. מעבירים את הישרים:
 $x = 4$, $x = k$, $x = k^2$, $x = k^3$
כמתואר $x > 4$.
א. הבע באמצעות k את השטחים S_1 ו- S_2 .
ב. הראה כי ההפרש: $S_2 - S_1$ אינו תלוי ב- k וחשב את ערכו.
ג. נתון כי השטח S_2 גדול פי 3 מהשטח S_1 . מצא את k .



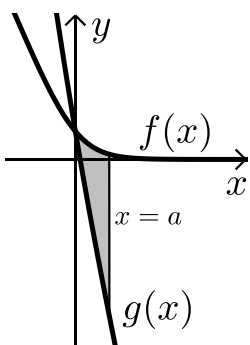
13 נתונות הפונקציות: $f(x) = -\frac{4}{x}$ ו- $g(x) = \frac{k}{2x+5}$.

גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y = 0.4$.

א. מצא את הפונקציה $g(x)$.

ב. מצא את נקודת החיתוך של שני הגרפים.

ג. חשב את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר $x = -1$.



14 באיור מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$ ו- $g(x) = \ln(e^{-2x} + e^{-3x})$

בתחום: $(x \geq 0)$.

א. הראה כי הגרפים נחתכים על ציר ה- y .

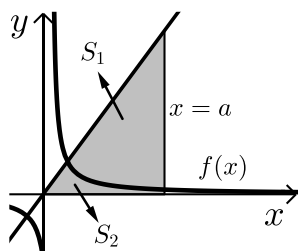
ב. מעבירים ישר $x = a$, $(a > 1)$ המאונך

לציר ה- x אשר חותך את הגרפים של שתי

הפונקציות ויוצר את השטח S (ראה איור).

מצא את ערכו של a עבורו מתקיים: $S = 4$.

15 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה: $f(x) = \frac{2}{3x-1}$ והישר: $y = x$.



א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציות הנמצאת ברביע הראשון.

מעבירים אנך לציר ה- x $x = a$ הנמצא מימין לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.

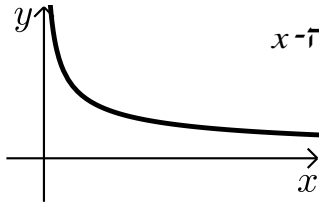
האנך חותך את הגרפים ויוצר את השטחים S_1 ו- S_2 המתוארים האיור.

ב. מצא את הערך של a עבורו השטח S_2 יהיה שווה ל- $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \ln 7$.

ג. עבור ערך ה- a שמצאת בסעיף הקודם חשב את יחס השטחים: $\frac{S_1}{S_2}$.

חישובי נפחים:

$$(16) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$



השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x=1$ ו- $x=3$ וציר ה- x מסתובב סביב ציר ה- x . מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר באופן זה. אפשר להשאיר \ln בתשובה.

$$(17) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}$$

השטח הכלוא בין הפונקציה, הצירים והישר $x = \ln \sqrt{3}$ מסתובב סביב ציר ה- x . חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

$$(18) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x=a$ ו- $x=a+3$ ($a > 0$), וציר ה- x מסתובב סביב ציר ה- x . חשב את נפח גוף הסיבוב המינימלי שנוצר באופן זה.

תשובות סופיות:

$$\ln|x-3|+c \quad \lambda \quad \frac{x^2}{2}+3x-4\ln|x|+c \quad \text{ב.} \quad 3\ln|x|+2\ln|x+1|-\frac{4\ln|3x-1|}{3}+c \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+7x+8\ln|x-2|+c \quad \text{ב.} \quad \frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x+1|+c \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+4\ln|x+1|+c \quad \lambda$$

$$\ln|e^x+5|+c \quad \lambda \quad \frac{1}{2}\ln|x^2-2x|+c \quad \text{ב.} \quad \ln|x^2-3|+c \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$\ln|\sin x|+c \quad \text{ה.} \quad \ln|e^x+e^{-x}|+c \quad \text{ז.}$$

$$f(x)=x^2-\ln|x-4|+3 \quad (4)$$

$$f(x)=x^3+\ln|x|-x-2 \quad (5)$$

$$S = \text{יח"ש} \ln 4 \quad (6)$$

$$S = \text{יח"ש} 2.17 \quad (7)$$

$$S = \text{יח"ש} 4\ln 2 - 2 \quad (8)$$

$$S = \text{יח"ש} 1.76 \quad \text{ב.} \quad f(x) = \frac{2}{x-1}, \quad g(x) = \frac{1}{x-2}, \quad a=2 \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$x=2 \quad \text{ב.} \quad f(x) = 7+2x-\frac{4}{x}, \quad a=2, \quad b=-4 \quad \text{א.} \quad (10)$$

$$S = 6 + \ln 256 \approx \text{יח"ש} 11.54 \quad \lambda$$

$$S = \text{יח"ש} 6 - 4\ln 2 \quad \text{ב.} \quad f(x) = \frac{4}{x} \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$k=8 \quad \lambda \quad S_2 - S_1 = \ln 16 \quad \text{ב.} \quad S_1 = 2\ln k - \ln 16, \quad S_2 = 2\ln k \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$S = \text{יח"ש} \ln 5 \frac{1}{3} \approx 1.674 \quad \lambda \quad (-2, 2) \quad \text{ב.} \quad g(x) = \frac{2}{2x+5} \quad \text{א.} \quad (13)$$

$$a=2 \quad \text{ב.} \quad (14)$$

$$\frac{S_1}{S_2} = 5.955 \quad \lambda \quad a=5 \quad \text{ב.} \quad (1, 1) \quad \text{א.} \quad (15)$$

$$V = \text{יח"נ} \pi \ln 3 \quad (16)$$

$$V = \text{יח"נ} \frac{\pi}{2} \ln 2 \quad (17)$$

$$V = \text{יח"נ} \pi \left(19 \frac{1}{2} + 4\ln 4 \right) \quad (18)$$

פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי:

סיכום כללי:

אינטגרלים מיידיים של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי:

| אינטגרל יסודי | אינטגרל של פונקציה מורכבת |
|---|---|
| $\int \sqrt[n]{x^m} dx = \int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + c$ | $\int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx = \int (ax+b)^{\frac{m}{n}} dx = \frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a \cdot \left(\frac{m}{n}+1\right)} + c$ |

תנאי לקיום האינטגרציה: $\frac{m}{n} \neq -1$.

שאלות:

אינטגרל של פונקצית חזקה:

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\begin{array}{lll} \int (x \cdot \sqrt[5]{x}) dx & \text{ג.} & \int (4x - 2\sqrt[4]{x}) dx & \text{ב.} & \int \sqrt[3]{x} dx & \text{א.} \\ \int \frac{x^3 - 3x + 5}{\sqrt{x}} dx & \text{ו.} & \int \frac{x+4}{\sqrt[4]{x}} dx & \text{ה.} & \int \frac{3}{\sqrt[3]{x}} dx & \text{ד.} \\ \int \frac{3}{\sqrt[8]{7x+12}} dx & \text{ט.} & \int \sqrt[4]{5-x} dx & \text{ח.} & \int \sqrt[3]{2x-3} dx & \text{ז.} \\ & & & & \int \frac{7}{\sqrt[5]{14-2x}} dx & \text{י.} \end{array}$$

(2) חשב את ערכי האינטגרלים הבאים:

$$\begin{array}{lll} \int_{-10}^5 \frac{2}{\sqrt[4]{6-x}} dx & \text{ג.} & \int_3^{16} (\sqrt[4]{5x+1}) dx & \text{ב.} & \int_0^8 (x + \sqrt[5]{4x}) dx & \text{א.} \end{array}$$

אינטגרל מסוים:

(3) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x) = 2x - \sqrt[3]{4x}$.

ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(2, 3)$.
מצא את הפונקציה.

(4) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x) = \sqrt[3]{5x+7}$.

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 4$.
מצא את הפונקציה.

(5) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x) = \frac{10}{\sqrt[3]{x+1}} + (x-1)^2$.

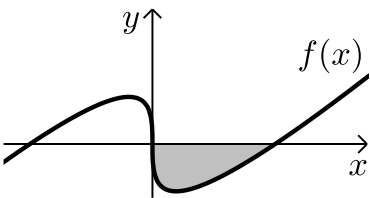
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -6$.
מצא את הפונקציה.

חישובי שטחים:

(6) באיור שלפניך מופיע גרף הפונקציה: $f(x) = x - 4\sqrt[3]{x}$.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

ב. חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.



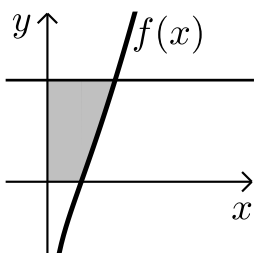
(7) באיור שלפניך מצויר גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}$.

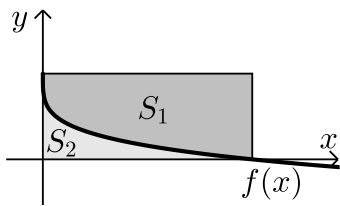
א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

ג. מעבירים אנך לציר ה- y מהנקודה $(4, 6)$.

חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והצירים.





8) באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = 2 - \sqrt[4]{x}$.

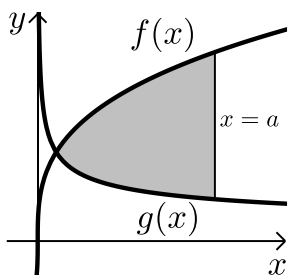
מעבירים אנכים לצירים מנקודות החיתוך של

גרף הפונקציה עם הצירים כך שנוצר מלבן.

מסמנים את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים:

ב- S_1 ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב- S_2 .

מצא את היחס: $\frac{S_1}{S_2}$.



9) באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות

$$\text{הבאות: } f(x) = 4\sqrt[3]{x}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים בתחום: $x > 0$.

ב. מעבירים אנך לציר ה- x , $x = a$, (a פרמטר).

ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים מנקודת

החיתוך שלהם ועד לאנך הוא: $42 \frac{3}{16}$ סמ"ר.

מצא את a .

10) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - ax$, (a פרמטר).

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 2$.

א. מצא את הפרמטר a וכתוב את הפונקציה.

ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. מצא את נקודת קיצון הקצה של הפונקציה.

ד. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר

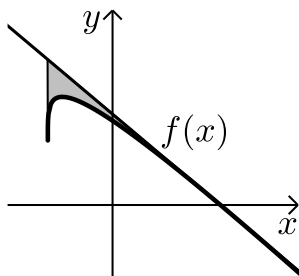
דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x .

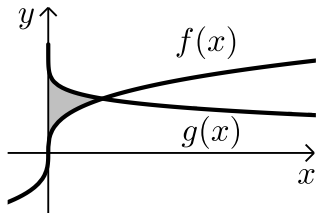
ה. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$

והמשיק שמצאת בסעיף הקודם. מורידים אנך

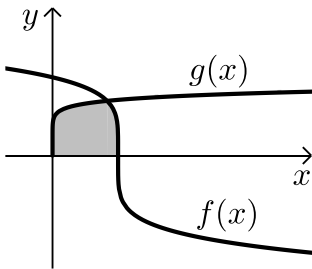
מהמשיק אל נקודת קיצון הקצה של הפונקציה שמצאת בסעיף ג'.

חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק.

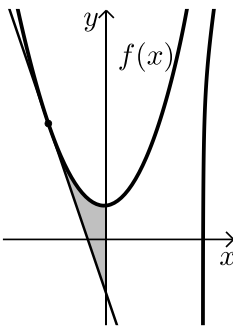




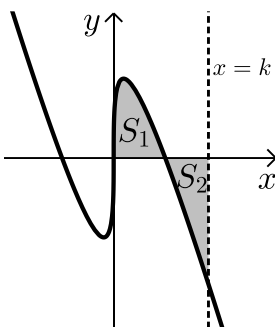
- 11** באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = 2 - \sqrt{x}$.
 א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.
 ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- y .



- 12** הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$.
 ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה: $x = 1.2$.
 א. מצא את הפונקציה $f(x)$.
 ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, גרף הפונקציה $g(x) = \sqrt[10]{x}$ וציר ה- x .



- 13** נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{5-x}} + \frac{1}{2}x^2$.
 א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -3$.
 ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, המשיק וציר ה- y .



- 14** נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt[3]{x} - 4x$.
 א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
 ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 ג. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה ברביע הראשון. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x יסומן ב- S_1 .
 מעבירים ישר $x = k$ אשר יוצר את השטח S_2 כמתואר. מצא את k אם ידוע כי: $S_1 = S_2$.

תשובות סופיות:

- (1) א. $0.75\sqrt[3]{x^4} + c$ ב. $2x^2 - 1.6\sqrt[4]{x^5} + c$ ג. $\frac{5}{11}\sqrt[5]{x^{11}} + c$
- ד. $4.5\sqrt[3]{x^2} + c$ ה. $\frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7} + \frac{16}{3}\sqrt[4]{x^3} + c$ ו. $\frac{2}{7}\sqrt{x^7} - 2\sqrt{x^3} + 10\sqrt{x} + c$
- ז. $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(2x-3)^4} + c$ ח. $-0.8\sqrt[4]{(5-x)^5} + c$ ט. $\frac{24}{49}\sqrt[8]{(7x+12)^7} + c$
- י. $-\frac{35}{8}\sqrt[5]{(14-2x)^4} + c$
- (2) א. $45\frac{1}{3}$ ב. 33.76 ג. $18\frac{2}{3}$
- (3) $f(x) = x^2 - \frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x)^4} + 2$
- (4) $f(x) = \frac{3}{20}\sqrt[3]{(5x+7)^4} - 12.15$
- (5) $f(x) = 12.5\sqrt[5]{(x+1)^4} + \frac{1}{3}(x-1)^3 - 18\frac{1}{6}$
- (6) א. $(0,0)$; $(8,0)$ ב. 16 יח"ש = S
- (7) א. $x > 0$ ב. $(2,0)$ ג. 18.149 יח"ש = S
- (8) $\frac{S_1}{S_2} = 4$
- (9) א. $\left(\frac{1}{8}, 2\right)$ ב. $a = 8$
- (10) א. $f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - x$, $a = 1$ ב. $x \geq -1.2$ ג. $(-1.2, 1.2)$
- ד. $y = -\frac{27}{32}x + \frac{27}{16}$ ה. 0.48 יח"ש = S
- (11) א. $(1,1)$ ב. $\frac{11}{28}$ יח"ש = S
- (12) א. $f(x) = (6-5x)^{\frac{1}{5}}$ ב. $1\frac{5}{66}$ יח"ש = S

$$y = -2\frac{15}{16}x - \frac{45}{16} \quad \text{א. (13)} \quad \text{ב. 4.56 יח"ש"ש" } S =$$

$$k = \left(\frac{3}{8}\right)^{1.5} = 0.2296.. \quad \text{ג. } (0,0), \left(\frac{1}{8}, 0\right), \left(-\frac{1}{8}, 0\right) \quad \text{ב.} \quad \text{א. כל } x \quad \text{(14)}$$

מתמטיקה למכינה רמת 4 יחידות לימוד

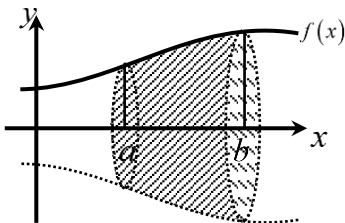
פרק 41 - חשבון אינטגרלי - חישובי נפחים של גופים ובעיות קיצון עם אינטגרלים

תוכן העניינים

- 4921. חישוב נפחים באמצעות האינטגרל.
- 4972. בעיות קיצון עם אינטגרלים.

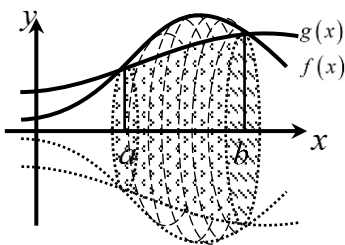
חישוב נפחים באמצעות האינטגרל:

סיכום כללי:



- נפח הגוף שנוצר עקב סיבוב הפונקציה $f(x)$ סביב ציר ה- x בגבולות $x=a$ ו- $x=b$ נתון ע"י האינטגרל

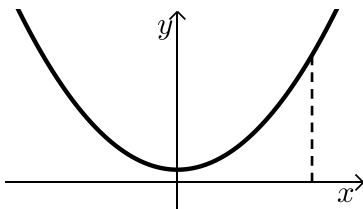
$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx \quad \text{הבא:}$$



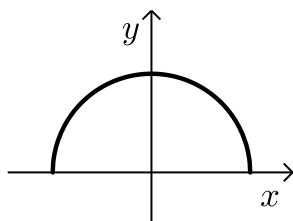
- בפרט עבור גוף הנוצר ע"י בסיס שטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ נקבל את

$$V = \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx \quad \text{הנוסחה הבאה:}$$

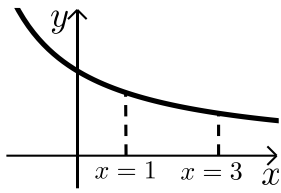
שאלות:



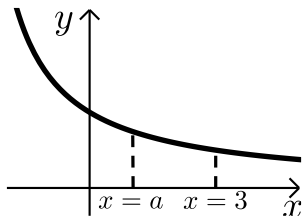
- (1) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^2 + 1$.
 השטח הכלוא בין הפונקציה, הישר $x=3$ והצירים מסתובב סביב ציר ה- x .
 חשב את נפח גוף הסיבוב המתקבל באופן זה.



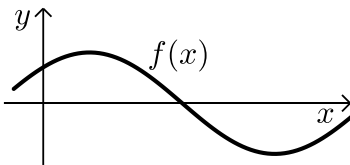
- (2) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{4-x^2}$.
 א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 ב. חשב את נפח הגוף שנוצר ע"י סיבוב גרף הפונקציה סביב ציר ה- x .



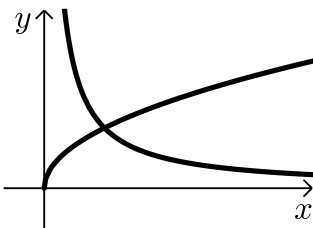
- (3) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{12}{x+3}$ בתחום: $x \geq 0$.
 גרף הפונקציה מסתובב סביב ציר ה- x .
 מסמנים את נפח הגוף שנוצר בין הגבולות $0 \leq x \leq 1$
 ב- V_1 ואת נפח הגוף שנוצר בתחום: $1 \leq x \leq 3$ ב- V_2 .
 חשב את היחס: $\frac{V_1}{V_2}$.



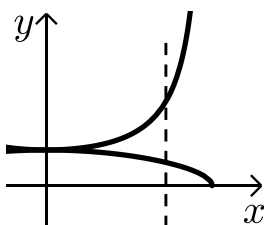
- (4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{12}{x+3}$ בתחום: $x \geq 0$.
 גרף הפונקציה מסתובב סביב ציר ה- x .
 מסמנים את נפח הגוף הנוצר בין הגבולות $0 \leq x \leq a$
 ב- V_1 ואת נפח הגוף שנוצר בתחום: $a \leq x \leq 3$ ב- V_2 .
 מתקיים: $V_1 = V_2$. מצא את a .



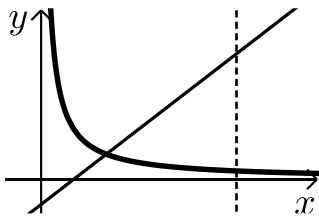
- (5) נתונה הפונקציה $f(x) = \sin x + \cos x$ בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.
 השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים ברביע הראשון
 מסתובב סביב ציר ה- x .
 מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר.



- (6) בשרטוט נתונות הפונקציות ברביע
 הראשון: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$.
 מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר, כאשר השטח הכלוא
 בין הפונקציות והישר $x=2$ מסתובב סביב ציר ה- x .



- (7) נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{1}{\cos x}$, $g(x) = \sqrt{\cos x}$.
 השטח הכלוא בין הפונקציות לישר $x = \frac{\pi}{6}$
 מסתובב סביב ציר ה- x .
 חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

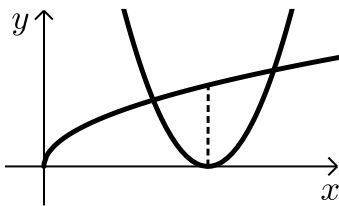


8) חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר כאשר השטח המוגבל

בין הגרפים של פונקציות: $g(x) = 2x - 1$, $f(x) = \frac{1}{x}$

ציר ה- x והישר $x = 3$ מסתובב סביב ציר ה- x .

9) נתונים הגרפים של הפונקציות: $g(x) = (2x - 3)^2 - 1$ ו- $f(x) = \sqrt{x}$



א. הראה כי הפונקציות נפגשות בנקודה שבה $x = 1$.

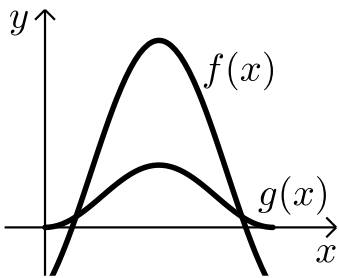
ב. השטח הכלוא בין הפונקציות ונמצא משמאל

לאורך לציר ה- x , היוצא מקודקוד הפרבולה $g(x)$

מסתובב סביב ציר ה- x .

מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

10) ענה על השאלות הבאות:



א. הוכח את הזהות: $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$.

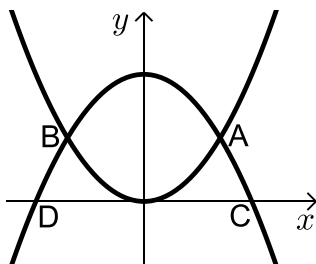
ב. נתונות הפונקציות: $f(x) = 2\sin x - \cos 2x$

ו- $g(x) = 2\sin^2 x$ בתחום $[0; \pi]$.

השטח הכלוא בין גרפים של שתי הפונקציות

בתחום הנתון מסתובב סביב ציר ה- x .

חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.



11) הפונקציות: $g(x) = 8 - x^2$ ו- $f(x) = x^2$

נחתכות בנקודות A ו-B כמתואר באיור.

נסמן את נקודות החיתוך של גרף

הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x ב-C ו-D.

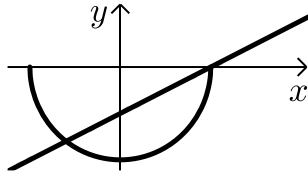
א. מצא את שיעורי הנקודות A, B, C ו-D.

ב. השטח הנוצר בין הגרפים של שתי הפונקציות מסתובב סביב ציר ה- x .

מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

ג. השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות וציר ה- x מסתובב סביב ציר ה- x .

מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר באופן זה.

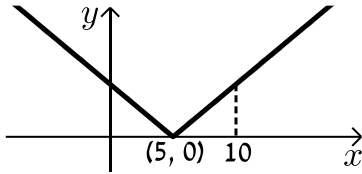


12 חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר ע"י סיבוב

השטח הכלוא בין הגרפים של

$$g(x) = -2\sqrt{25-x^2} \text{ ו- } f(x) = x-5$$

וציר ה- x סביב ציר ה- x .



13 לפניך גרף הפונקציה: $f(x) = |x-5|$.

א. חשב את נפח הגוף שנוצר כאשר השטח בין גרף

הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq 10$ ובין ציר ה- x

מסתובב סביב ציר ה- x .

ב. האם תוצאת החישוב של הסעיף הקודם

תשתנה אם במקום $f(x) = |x-5|$ נשתמש

בפונקציה $g(x) = x-5$? נמק.

תשובות סופיות:

$$V = 69\frac{3}{5}\pi \text{ יח"נ } \quad (1)$$

$$V = 10\frac{2}{3}\pi \text{ יח"נ } \quad (2) \quad \text{א. } (2,0), (-2,0) \quad \text{ב.}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = 1 \quad (3)$$

$$a = 1 \quad (4)$$

$$V = \frac{1}{2}\pi + \frac{3\pi^2}{4} \approx 8.97 \text{ יח"נ } \quad (5)$$

$$V = \pi \text{ יח"נ } \quad (6)$$

$$V = 0.243 \text{ יח"נ } \quad (7)$$

$$V = \frac{5}{6}\pi \text{ יח"נ } \quad (8)$$

$$V = \frac{21}{40}\pi \text{ יח"נ } \quad (9)$$

$$\text{א. שימוש בזהות של } \sin(\alpha + \beta) \text{ ייתן את המבוקש.} \quad (10)$$

$$V = 17.46 \text{ יח"נ } \quad (11) \quad \text{ב.}$$

$$A(2,4), B(-2,4), C(\sqrt{8},0), D(-8,0) \quad (11) \quad \text{א.}$$

$$V = 170\frac{2}{3}\pi \text{ יח"נ } \quad (12) \quad \text{ב.} \quad \text{ג. } V = 22.42\pi \text{ יח"נ}$$

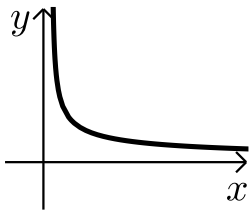
$$V = 240\pi \text{ יח"נ } \quad (12)$$

$$V = 83\frac{1}{3}\pi \text{ יח"נ } \quad (13) \quad \text{א.} \quad \text{ב. לא.}$$

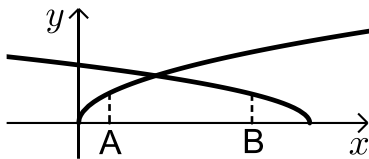
בעיות קיצון עם אינטגרלים:

שאלות:

(1) מצא את ערכו של a שבעבורו ערך האינטגרל $\int_a^{2a+1} (2x-1) dx$ מינימלי.



(2) בשרטוט נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{b-1}{\sqrt{x-1}}$, $(1 < b < 2)$.
לאיזה ערך של b השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x=b$ ו- $x=2$ וציר ה- x מקסימלי?



(3) בשרטוט נתונות הפונקציות: $f(x) = \sqrt{2x}$, $g(x) = \sqrt{6-x}$.
מהנקודות A ו-B, הנמצאות על ציר ה- x והמרחק ביניהן הוא 2, העלו אנכים לציר ה- x .
השטח הכלוא בין האנכים, שתי הפונקציות וציר ה- x מסתובב סביב ציר ה- x .
מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שנפח גוף הסיבוב המתקבל באופן זה יהיה מקסימלי.

תשובות סופיות:

$$a = -\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$b = 1\frac{4}{9} \quad (2)$$

$$A\left(1\frac{1}{3}, 0\right) \quad (3)$$