מתמטיקה למכינה באקדמיה

תוכן העניינים

מתמטיקה למכינה באקדמיה

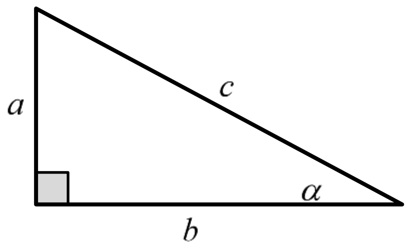
פרק 1 - טריגונומטריה במשולש ישר זווית

תוכן העניינים

משולש ישר זווית:

סיכום כללי:

הגדרות הפונקציות הטריגונומטריות:



$$\sin\alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{b}{c}$$

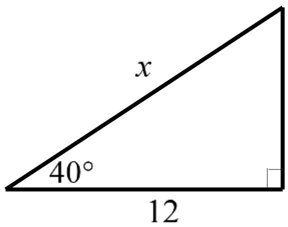
$$\tan\alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{הניצב שליד הזווית}} = \frac{a}{b}$$

משפט פיתגורס: $a^2 + b^2 = c^2$

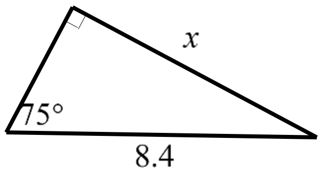
שאלות:

1) מצא את ערכו של $\alpha\,/\,x$ במשולשים ישרי הזווית הבאים:

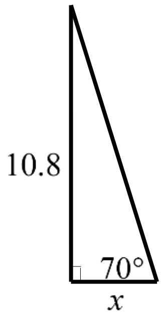
א.



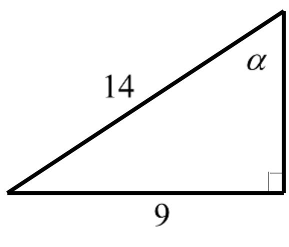
ב.



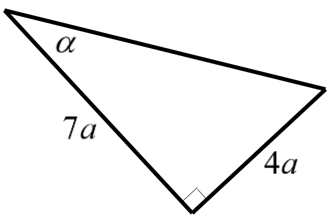
ג.



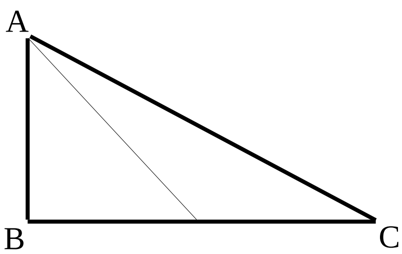
ד.



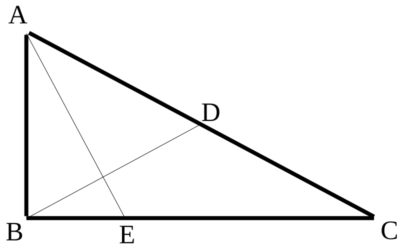
ה.



2) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle B = 90°)$.
AD הוא התיכון לניצב BC.
נתון: $\sphericalangle C = 28°$, 6 ס"מ = AB.
מצא את AD ואת $\sphericalangle BAD$.

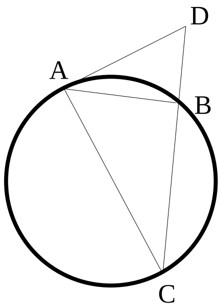


3) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle B = 90^\circ)$. BD הוא התיכון ליתר ו-AE הוא חוצה הזווית $\sphericalangle A$.
נתון: BD = 5.6 ס״מ , BC = 8 ס״מ.
מצא את BE ואת $\sphericalangle BAE$.



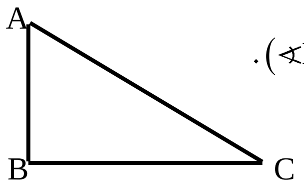
4) מצא את זוויותיו של מעוין שאורכי אלכסוניו 24 ס״מ ו-18 ס״מ.

5) המשולש ABC חסום במעגל כך שהצלע AC היא קוטר המעגל.
המשיק למעגל בנקודה A והמשך הצלע CB נפגשים בנקודה D.
נתון: BD=4 ס״מ , $\sphericalangle DAB = 32^\circ$.
מצא את אורכו של רדיוס המעגל.

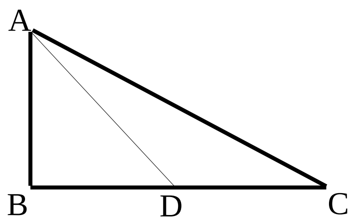


6) במשולש שווה שוקיים שבו השוק ארוכה ב-4 ס״מ מהבסיס נתון כי זווית הראש היא 34.92°. מצא את שטח המשולש.

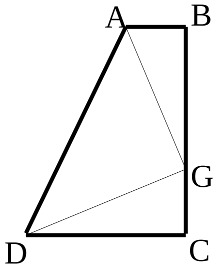
7) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle B = 90^\circ)$.
נתון: $\sphericalangle A = \alpha$, $AB = a$.
הבע באמצעות α ו-a את היקף המשולש.



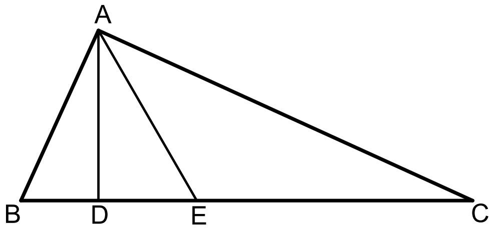
8) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle B = 90^\circ)$.
AD הוא התיכון לניצב BC.
נתון: $\sphericalangle C = \alpha$, $AB = b$.
הבע באמצעות α ו-b את אורכי הקטעים BD ו-AD.



9) במשולש ישר זווית אחת הזוויות החדות היא α ואורך חוצה זווית זו הוא k.
הבע באמצעות α ו-k את שטח המשולש ואת אורך היתר.



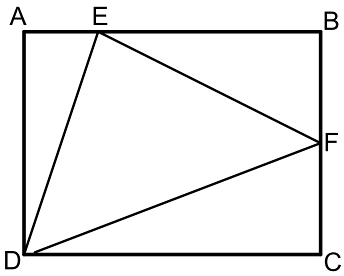
10) טרפז ABCD הוא טרפז ישר זווית $(\sphericalangle B = \sphericalangle C = 90^\circ)$.
הנקודה G נמצאת על השוק BC כך ש- $AG \perp DG$.
נתון: $AG = DG = m$, $\sphericalangle BAG = \beta$.
הבע באמצעות β ו- m את שטח הטרפז.



11) המשולש ABC הוא ישר זווית $(\sphericalangle A = 90^\circ)$.
הקטעים AD ו-AE הם בהתאמה גובה ליתר וחוצה זווית.
מסמנים: $DE = k$, $\sphericalangle DAE = \alpha$.

א. הבע באמצעות k ו- α את שטח המשולש ABC.

ב. חשב את שטח המשולש ABC אם ידוע כי: $\alpha = 30$ ו- $k = 2$.



12) במלבן ABCD מסמנים את הנקודות E ו-F הנמצאות על הצלעות AB ו-BC בהתאמה כך ש-E מקיימת: $3AE = BE$ ו-F היא אמצע הצלע BC.
אורך הצלע AD שווה לאורך הקטע BE.
מעבירים את הקטעים EF , DF ו-DE כך שנוצר במשולש DEF.

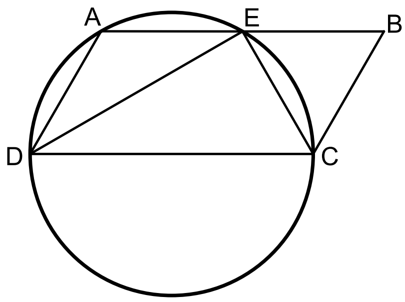
א. סמן ב- t את אורך הקטע AE והבע באמצעות t את אורכי צלעות המשולש DEF.

ב. חשב את זוויות המשולש EDF.

13) משולש שווה שוקיים שאורך שוקו k וזווית הבסיס שלו היא β חוסם מעגל.
הבע באמצעות β ו- k את רדיוס המעגל.

14) בטרפז ישר זווית חסום מעגל. אורך השוק הארוכה בטרפז היא b והזווית שהיא יוצרת עם הבסיס הגדול היא α.
הבע באמצעות α ו- b את אורכו של הבסיס הגדול בטרפז ואת שטחו.

הערה: השאלות הבאות משלבות ידע בגיאומטריה ובטריגונומטריה יחד:

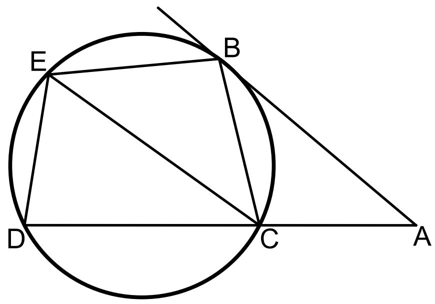


15) דרך הקודקודים A , C ו-D של המקבילית ABCD מעבירים מעגל. היקף המעגל חוצה את הצלע AB בנקודה E, $\left(AE = BE\right)$.
נתון כי DC הוא קוטר במעגל וכי המיתר DE חוצה את זווית D.

א. הוכח כי המיתר CE חוצה את זוויות C.

ב. רדיוס המעגל יסומן ב- R.
הבע באמצעות R את היקף המקבילית.

ג. מצא את רדיוס המעגל אם ידוע כי שטח המקבילית הוא $16\sqrt{3}$ סמ"ר.



16) מהנקודה A שמחוץ למעגל מעבירים משיק AB וישר חותך ACD.
מעבירים את המיתרים BC ו-BE אשר זהים באורכם.
כמו כן מעבירים את המיתר DE.
אורך המיתר CE שונה מאורך המשיק AB.

א. הוכח כי המרובע ABEC הוא טרפז.

ב. הוכח כי: $2\cdot\sphericalangle BEC = \sphericalangle EDC$.

ג. נתונים: $\sphericalangle A = 40^\circ$, AC = 6 ס"מ, AB = 9 ס"מ , CE = 8 ס"מ.
חשב את שטח המרובע ABEC.

תשובות סופיות:

1) א. $x=15.665$ ב. $x=8.114$ ג. $x=3.931$ ד. $\alpha=40.005^\circ$ ה. $\alpha=29.745^\circ$.

2) $\angle BAD=43.24^\circ$, AD = 8.236 ס"מ.

3) $\angle BAE=22.792^\circ$, BE = 3.294 ס"מ.

4) 106.26° , 106.26° , 73.74° , 73.74°.

5) $R =$ 6.04 ס"מ.

6) $S =$ 28.618 סמ"ר.

7) $P=a\left(1+\tan\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}\right)$.

8) $\text{BD}=\frac{b}{2\tan\alpha}$, $\text{AD}=\sqrt{b^2+\frac{b^2}{4\tan^2\alpha}}$.

9) $S=\frac{k^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\tan\alpha}{2}$, $\text{AC}=\frac{k\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.

10) $\frac{(m\sin\beta+m\cos\beta)^2}{2}$.

11) א. $S=\frac{k^2}{\cos 2\alpha\tan^2\alpha}$ ב. 24 סמ"ר.

12) א. $\text{DF}=t\sqrt{18.25}$, $\text{EF}=t\sqrt{11.25}$, $\text{DE}=t\sqrt{10}$ ב. 47.14° , 51° , 81.86°.

13) $R=k\cos\beta\tan\frac{\beta}{2}$.

14) $S=\frac{1}{2}b^2\sin\alpha(1+\sin\alpha)$, $\frac{1}{2}b\sin\alpha+\frac{\frac{1}{2}b\sin\alpha}{\tan\frac{\alpha}{2}}$.

15) א. שאלת הוכחה. ב. $6R$ ג. 4 ס"מ.

16) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. 32.78 סמ"ר.

מתמטיקה למכינה באקדמיה

פרק 2 - זהויות טריגונומטריות

תוכן העניינים

זהויות יסוד:

סיכום כללי:

קשרים בין פונקציות	$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$
זוויות משלימות ל- $90°$	$\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)$	$\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$
	$\cot\alpha=\tan(90°-\alpha)$	$\tan\alpha=\cot(90°-\alpha)$
קשרים בין פונקציות	$\cot^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}$	$\tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

שאלות:

הוכחת זהויות יסודיות:

הוכח את הזהויות הבאות תוך שימוש בזהויות היסוד:

1) $\tan\alpha\cdot\cos\alpha=\sin\alpha$

2) $\frac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=1$

3) $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\tan\alpha$

4) $\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha=1+\cos^2\alpha$

5) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}=2$

6) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$

7) $\frac{\cos(90°-\alpha)}{\cos\alpha}=\tan\alpha$

8) $\sin^2(\alpha+45°)+\sin^2(45°-\alpha)=1$

9) $\sqrt{1+\tan^2\alpha}\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\tan\alpha$

10) $\frac{\sin\alpha(1-\cos^2\alpha)}{\cos^3\alpha}=\tan^3\alpha$

11) $\frac{\sin(90°-\alpha)-\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha}=\cot\alpha$

12) $\cos^2\alpha(1+\tan^2\alpha)=1$

13) $\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\cot\alpha$

14) $\frac{\sin^3\alpha}{\sin(90°-\alpha)-\cos^3\alpha}=\tan\alpha$

15) $\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\tan^2\alpha\sin^2\alpha$

16) $\frac{1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha+\cot^2\alpha$

הוכחות מתקדמות:

17) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}+\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=2+4\cot^2\alpha$.

18) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}+\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{2}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$.

19) הוכח את הזהות הבאה: $(\cot\alpha-\tan\alpha)(\cot\alpha+\tan\alpha)=(1+\cot^2\alpha)(1+\tan\alpha)(1-\tan\alpha)$.

20) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{\sin^4\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\cot^4\alpha$.

21) הוכח את הזהות הבאה: $1-\sin^2\alpha\left(1+\cos^2\alpha\right)=\cos^4\alpha$.

22) הוכח את הזהות הבאה: $\left(\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\right)^2=4+4\cot^2\alpha$.

23) הוכח את הזהות הבאה: $\sin^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\beta\cos^2\alpha=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

24) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}=\tan\alpha\tan\beta$.

הבעת ביטויים וחישובים באמצעות זהויות יסוד:

25) נתון כי: $\sin\alpha+\cos\alpha=k$.
הבע באמצעות k את ערכי הביטויים הבאים:
א. $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.
ב. $\sin\alpha-\cos\alpha$.
ג. $\tan\alpha+\cot\alpha$.
ד. $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$.

26) נתון כי: $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$.
מבלי למצוא את α חשב את: $\tan^2\alpha-2\cot^2\alpha$.

27) נתון כי: $\tan\alpha=\sqrt{7}$.

מבלי למצוא את α חשב את: $\dfrac{\sqrt{7}\sin\alpha+6\cos\alpha}{\sqrt{28}\sin\alpha-\cos\alpha}$.

28) חשב את ערך המכפלה הבאה: $\tan1^\circ\cdot\tan2^\circ\cdot\tan3^\circ\cdot\ldots\cdot\tan88^\circ\cdot\tan89^\circ$.

תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.
11) שאלת הוכחה.
12) שאלת הוכחה.
13) שאלת הוכחה.
14) שאלת הוכחה.
15) שאלת הוכחה.
16) שאלת הוכחה.
17) שאלת הוכחה.
18) שאלת הוכחה.
19) שאלת הוכחה.
20) שאלת הוכחה.
21) שאלת הוכחה.
22) שאלת הוכחה.
23) שאלת הוכחה.
24) שאלת הוכחה.
25) א. $\frac{k^2-1}{2}$ ב. $\pm\sqrt{2-k^2}$ ג. $\frac{2}{k^2-1}$ ד. $\frac{k}{2}\left(3-k^2\right)$
26) -7.75
27) 1
28) 1

ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות:

סיכום כללי:

	$\alpha=0°$	$\alpha=30°$	$\alpha=45°$	$\alpha=60°$	$\alpha=90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ϕ
$\cot\alpha$	ϕ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

הערות:

- ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות של $0°$ ו- $90°$ תִלמדנה בהמשך אך ניתנו כעת כדי להשלים את תמונת ערכי הזוויות.
- ניתן לזכור את הטבלה ע"י כתיבה של שורת הסינוס לפי: $\frac{\sqrt{0}}{2},\frac{\sqrt{1}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{4}}{2}$ אשר נותנים את הערכים של השורה הראשונה לאחר פישוט קל.
עבור שורת ה- $\cos\alpha$ יש להפוך את הערכים ולבסוף יש לחלק כל זוג ביטויים כדי לכתוב את ערכי $\tan\alpha$ ולסובב עבור ערכי $\cot\alpha$.

שאלות:

חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בערכי הפונקציות הטריגונומטריות של זוויות מיוחדות:

1) $\sin 30° + \cos 30°$.

2) $\frac{\sin 30° \cdot \cos 30°}{\sin 60°}$.

3) $\frac{\sin 45°}{\cos 45°} + \tan 45°$.

4) $\frac{1+\cos 60°}{2\sin 60°}$.

5) $\cos^2 45° + \sin^2 30°$.

6) $\frac{\tan^2 60° \cdot \cos^2 30°}{\cos^2 60°}$.

7) $\frac{\tan 30° \cdot \cot 60° - \cot 45° \cdot \tan 45°}{4\left(\sin^2 60° - \frac{1}{4}\right)}$.

8) $\frac{27\cot^4 60°}{\sin 30° \cdot \cos 45° \cdot \tan 60°}$.

תשובות סופיות:

1) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

2) $\frac{1}{2}$

3) 2

4) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$

5) $\frac{3}{4}$

6) 9

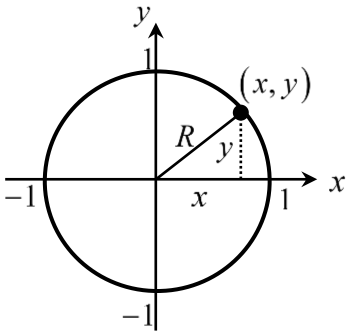
7) $-\frac{1}{3}$

8) $2\sqrt{6}$

מעגל היחידה – הגדרה וזהויות:

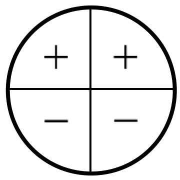
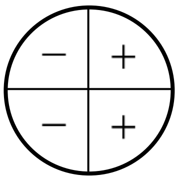
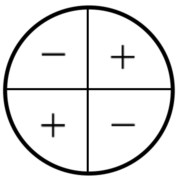
סיכום כללי:

הגדרת מעגל היחידה:



- מעגל קנוני שרדיוסו 1 מוגדר להיות המעגל הטריגונומטרי.
- הנקודות $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ מתאימות לזוויות של $0°$, $90°$, $180°$, $270°$.

הזהויות של המעגל הטריגונומטרי:

רביע	סינוס	קוסינוס	טנגנס
II	$\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$	$\cos(180^o-\alpha)=-\cos\alpha$	$\tan(180^o-\alpha)=-\tan\alpha$
III	$\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(180^o+\alpha)=-\cos\alpha$	$\tan(180^o+\alpha)=\tan\alpha$
VI	$\sin(-a)=-\sin\alpha$	$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$	$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$
סימנים			

זהויות עבור זווית הגדולות מ-360 מעלות:

ניתן להוסיף או להוריד 'סיבובים' שלמים לזווית לפי:

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin(\alpha+360°k)=\sin\alpha\\ \cos(\alpha+360°k)=\cos\alpha\end{array}} \quad , \quad \boxed{\begin{array}{l}\tan(\alpha+180°k)=\tan\alpha\\ \cot(\alpha+180°k)=\cot\alpha\end{array}}$$

כאשר k הוא מספר שלם מציין את מספר הסיבובים.

שאלות:

1) העבר את הביטויים הבאים לביטויים עם זווית ברביע הראשון.
אין צורך לחשב את ערך הביטוי:

א. $\sin 120^\circ$
ב. $\cos 150^\circ$
ג. $\tan 160^\circ$
ד. $\cot 130^\circ$
ה. $\sin 215^\circ$
ו. $\cos 245^\circ$
ז. $\tan 230^\circ$
ח. $\cot 200^\circ$
ט. $\sin 300^\circ$
י. $\cos 310^\circ$

2) חשב את ערכי הביטויים הבאים ע"י שימוש בזהויות המעגל הטריגונומטרי:

א. $\sin 150^\circ$
ב. $\cos 210^\circ$
ג. $\tan 120^\circ$
ד. $\sin 330^\circ$
ה. $\tan 225^\circ$
ו. $\sin 315^\circ$
ז. $\cos 120^\circ$
ח. $\tan(-30^\circ)$
ט. $\cos(-45^\circ)$
י. $\sin 510^\circ$
יא. $\cos 930^\circ$
יב. $\tan(-225^\circ)$

3) חשב את ערכי הביטויים הבאים ללא שימוש במחשבון:

א. $\left(\sin 240^\circ \cdot \tan 150^\circ + \cos(-60^\circ)\right)^2$.
ב. $8\sin^2 150^\circ \cdot \tan 135^\circ - 2\cdot \sin 135^\circ \cdot \cos(-135^\circ)$.
ג. $\dfrac{\cot 225^\circ}{\sin(-225^\circ) - \cos 135^\circ} + \tan^2 210^\circ$.

4) הוכח כי אם α, β ו- γ הן זוויות במשולש, אז מתקיים:

א. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma$.
ב. $\sin\left(\dfrac{\gamma+\beta}{2}\right) = \cos\dfrac{\alpha}{2}$.

תשובות סופיות:

1) א. $\sin 60°$ ב. $-\cos 30°$ ג. $-\tan 20°$ ד. $-\cot 50°$
ה. $-\sin 35°$ ו. $-\cos 65°$ ז. $\tan 50°$ ח. $\cot 20°$
ט. $-\sin 60°$ י. $\cos 50°$

2) א. $\frac{1}{2}$ ב. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ג. $-\sqrt{3}$ ד. $-\frac{1}{2}$
ה. 1 ו. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ז. $-\frac{1}{2}$ ח. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
ט. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ י. $\frac{1}{2}$ יא. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ יב. -1

3) א. 1 ב. -1 ג. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3}$.

4) שאלת הוכחה.

סכום והפרש זוויות:

סיכום כללי:

סכום והפרש עבור $\sin(\alpha\pm\beta)$ ו- $\cos(\alpha\pm\beta)$ יחושב לפי:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha\pm\beta)&=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha\\ \cos(\alpha\pm\beta)&=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}}.$$

סכום והפרש עבור $\tan(\alpha\pm\beta)$ ו- $\cot(\alpha\pm\beta)$

$$\boxed{\begin{aligned}\tan(\alpha\pm\beta)&=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}\\ \cot(\alpha\pm\beta)&=\frac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}\end{aligned}}.$$

הערה:

בסרטון התיאוריה אין התייחסות מיוחדת לזהויות עבור $\tan(\alpha\pm\beta)$ ו- $\cot(\alpha\pm\beta)$.

שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בזהויות של סכום והפרש זוויות וללא שימוש במחשבון:

א. $\sin 75^\circ$ ב. $\sin 15^\circ$ ג. $\sin 105^\circ$

ד. $\sin(-15^\circ)$ ה. $\cos 75^\circ$ ו. $\cos 15^\circ$

ז. $\cos(-105^\circ)$ ח. $\cos 165^\circ$ ט. $\cos(-195^\circ)$

2) חשב ללא שימוש במחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sin 65^\circ\cos 25^\circ+\sin 25^\circ\cos 65^\circ$.

ב. $5\cos 50^\circ\cos 20^\circ+5\sin 50^\circ\sin 20^\circ$.

3) הוכח את הזהויות הבאות:

א. $\sin(60^\circ+\alpha)+\sin(60^\circ-\alpha)=\sqrt{3}\cos\alpha$.

ב. $\cos(45^\circ-\alpha)-\cos(45^\circ+\alpha)=\sqrt{2}\sin\alpha$.

ג. $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

ד. $\tan\alpha-\tan\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

4) נתון: $\cos\beta=\dfrac{8}{17}$, $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$ ו- α,β זוויות חדות.

מבלי למצוא את הערכים של α ו- β חשב:

א. $\sin(\alpha+\beta)$.

ב. $\cos(\alpha+\beta)$.

ג. $\tan(\alpha+\beta)$.

5) הוכח את הזהות: $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\sin\beta\cos\alpha$.

6) הוכח את הזהות: $(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin2\alpha+\cos2\alpha)=\sin3\alpha+\cos\alpha$.

7) הוכח את הזהות: $\tan7\alpha-\tan5\alpha-\tan2\alpha=\tan7\alpha\tan5\alpha\tan2\alpha$.

8) הוכח את הזהות: $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$.

9) הוכח את הזהות: $\cot\alpha-\cot\beta=\dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

10) הוכח את הזהות הבאה:

$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta+\gamma)$.

11) הוכח כי מתקיים: $\sin 65^\circ \cos 25^\circ + \sin 25^\circ \cos 65^\circ = 1$.

12) הוכח כי מתקיים: $\tan 18^\circ \tan 27^\circ + \tan 18^\circ + \tan 27^\circ = 1$.

13) נתון כי: $\sin 76^\circ = m$. הבע את $\sin 31^\circ$ באמצעות m.

14) הזוויות α ו- β הן זוויות חדות.
נתון כי: $\tan\alpha = \frac{(2-k)\sqrt{3}}{3k}$ ו- $\tan\beta = \frac{(2k-1)\sqrt{3}}{3}$.
הראה כי מתקיים: $\alpha + \beta = 60^\circ$.

15) היעזר בנוסחה: $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \tan\beta}$ ומצא את $\tan x$ ו- $\tan y$
אם ידוע כי: $\tan(x+y) = -3$ ו- $\tan(x-y) = \frac{1}{3}$. הבחן בין שני מקרים.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ב. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ג. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ד. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ ה. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

ו. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ז. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ ח. $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ט. $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2) א. 1 ב. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

3) שאלת הוכחה.

4) א. $\frac{84}{85}$ ב. $-\frac{13}{85}$ ג. $-6\frac{6}{13}$

5) שאלת הוכחה.

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(m-\sqrt{1-m^2}\right)$.

15) שאלת הוכחה.

16) 1 ו-2 או $-\frac{1}{2}$ ו- 1-.

זווית כפולה:

סיכום כללי:

נפתח זווית כפולה לפי הצורות הבאות:

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\\&\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha\end{aligned}}$$

שאלות:

1) הוכח את הזהויות הבאות:

א. $4\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha = \sin 4\alpha$

ב. $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$

ג. $(\sin 3\alpha - \cos 3\alpha)^2 = 1 - \sin 6\alpha$

ד. $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$

ה. $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2\cot 2\alpha$

ו. $\frac{\cos 2\alpha - 2\sin^2\alpha\cos 2\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{1}{2}\cot 2\alpha$

ז. $\cos^2 2\alpha = 4\sin^4\alpha - 4\sin^2\alpha + 1$

ח. $\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$

2) הוכח את הזהות: $\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}$ ע"י כתיבה של $\sin 3\alpha$ לפי: $\sin(\alpha + 2\alpha)$ ושימוש בזהויות שנלמדו.

3) הוכח את הזהות: $\cos^3\alpha = \frac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4}$ ע"י כתיבה של $\cos 3\alpha$ לפי: $\cos(\alpha + 2\alpha)$ ושימוש בזהויות שנלמדו.

4) נתונה זווית חדה α המקיימת: $\sin\alpha = \frac{40}{41}$. מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א. $\cos\alpha$.

ב. $\tan\alpha$.

ג. $\sin 2\alpha$.

ד. $\cos 2\alpha$.

ה. $\tan 2\alpha$.

5) נתונה זווית חדה α המקיימת: $\tan\alpha=\frac{5}{12}$. מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א. $\sin\alpha$.
ב. $\cos\alpha$.
ג. $\sin 2\alpha$.
ד. $\cos 2\alpha$.

6) נתונה זווית α ברביע הראשון וזווית β ברביע השני המקיימות: $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ ו- $\cos\beta=-0.8$. מבלי למצוא את α ו- β חשב את הביטויים הבאים:

א. $\sin(\alpha+\beta)$.
ב. $\cos(\alpha+\beta)$.
ג. $\sin(2\alpha+\beta)$.

7) נתון כי $\sin\alpha+\cos\alpha=1.2$ עבור $0°<\alpha<90°$. חשב את $\sin 2\alpha$.

8) פשט את הביטוי הבא: $\sqrt{\frac{1+\cos 8\alpha}{2}}$.

9) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sin 16°\cos 16°}{3-6\sin^2 29°}$.

10) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sin^2 78°-\cos^2 78°}{\sin 66°}$.

11) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא: $\frac{5\tan 15°\left(1-2\cos^2 15°\right)}{1-\tan^2 15°}$.

תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) א. $\frac{9}{41}$ ב. $4\frac{4}{9}$ ג. $\frac{720}{1681}$ ד. $-\frac{1519}{1681}$
ה. $-\frac{720}{1519}$
5) א. $\frac{5}{13}$ ב. $\frac{12}{13}$ ג. $\frac{120}{169}$ ד. $\frac{119}{169}$
6) א. $\frac{16}{65}$ ב. $-\frac{63}{65}$ ג. $-\frac{123}{845}$
7) 0.44.
8) $\cos 4\alpha$.
9) $\frac{1}{6}$.
10) 1.
11) -1.25.

סכום והפרש פונקציות טריגונומטריות:

סיכום כללי:

להלן נוסחאות הסכום וההפרש של פונקציות טריגונומטריות:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

הערה:

בסרטון התיאוריה אין התייחסות לזהויות הסכום וההפרש של טנגנס ושל קוטנגנס עקב חוסר השימוש בהן בפתרון שאלות.

שאלות:

1) הוכח את הזהות הבאה: $\sin 5\alpha+\sin 3\alpha=2\sin 4\alpha\cos\alpha$.

2) הוכח את הזהות הבאה: $\sin 7\alpha-\sin 2\alpha=2\sin 2.5\alpha\cos 4.5\alpha$.

3) הוכח את הזהות הבאה: $\cos\alpha+\cos 5\alpha=2\sin 2\alpha\cos 3\alpha$.

4) הוכח את הזהות הבאה: $\cos 5\alpha-\cos 2\alpha=-2\sin 3.5\alpha\cos 1.5\alpha$.

5) הוכח את הזהות הבאה: $\sin 3\alpha=2\sin 2\alpha\cos\alpha-\sin\alpha$.

6) הוכח את הזהות הבאה: $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

7) הוכח את הזהות הבאה: $\sin(2\alpha+\beta)-2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\sin\beta$.

8) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{\sin 5\alpha-\sin\alpha}{\sin 4\alpha-\sin 2\alpha}=2\cos\alpha$.

9) הוכח את הזהות הבאה: $2\sin\alpha = \frac{\sin 7\alpha - \sin 3\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 6\alpha}$.

10) הוכח את הזהות הבאה: $\tan 2\alpha = \frac{\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}$.

11) הוכח את הזהות הבאה: $\frac{2\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha} = \tan\alpha + \tan 3\alpha$.

12) פשט את הביטוי: $\frac{1+\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1}$ ומצא את ערכו מבלי להיעזר
במחשבון אם ידוע כי $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{6}$.

13) נתון כי α ו- β הן זוויות חדות המקיימות: $\sin\alpha = \frac{2mn}{m^2+n^2}$ ו- $\sin\beta = \frac{n^2-m^2}{m^2+n^2}$.
הראה כי: $\alpha + \beta = 90°$.

14) היעזר במעבר מכפל לסכום או הפרש
והוכח כי: $\cos 6\alpha \cos 2\alpha - \cos 5\alpha \cos\alpha = -\sin 7\alpha \sin\alpha$.

15) היעזר במעבר מכפל לסכום או הפרש
והוכח כי: $\sin 4\alpha \sin 2\alpha - \sin 5\alpha \sin\alpha + \cos 3\alpha \cos\alpha = \cos 2\alpha$.

16) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\sin 52.5° \cdot \sin 7.5°$.

17) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sin 35° \sin 55°}{\cos 40° \cos 20° - 0.25}$.

18) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\cos 20° \cos 40° \cos 80°$.

19) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\sin 5° \cdot \sin 25° \cdot \sin 35° \cdot \sin 55° \cdot \sin 65° \cdot \sin 85°$.

תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.
11) שאלת הוכחה.
12) $-\frac{7}{9}$.
13) שאלת הוכחה.
14) שאלת הוכחה.
15) שאלת הוכחה.
16) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$.
17) 1.
18) $\frac{1}{8}$.
19) $\frac{1}{64}$.

מכפלת פונקציות:

סיכום כללי:

להלן נוסחאות המעבר מסכום למכפלה וממכפלה לסכום :

$$\begin{cases} \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right] \\ \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right] \\ \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \sin\alpha-\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \end{cases}$$

שאלות:

1) הוכח את הזהות הבאה : $\sin 7\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}(\sin 8\alpha + \sin 6\alpha)$.

2) הוכח את הזהות הבאה : $\cos 11\alpha\sin 3\alpha = \frac{1}{2}(\sin 14\alpha - \sin 8\alpha)$.

3) הוכח את הזהות הבאה : $\cos 4\alpha\cos 10\alpha = \frac{1}{2}(\cos 6\alpha + \cos 14\alpha)$.

4) הוכח את הזהות הבאה : $\sin 3\alpha\sin 7\alpha = \frac{1}{2}(\cos 4\alpha - \cos 10\alpha)$.

5) הוכח את הזהות הבאה : $2\sin 7\alpha\sin 2\alpha + \cos 9\alpha = \cos 5\alpha$.

6) הוכח את הזהות הבאה : $\sin 7\alpha\cos 4\alpha - \sin 4\alpha\cos\alpha = \sin 3\alpha\cos 8\alpha$.

7) הוכח את הזהות הבאה : $\sin\alpha\sin 3\alpha = \cos 2\alpha - \cos 3\alpha\cos\alpha$.

8) הוכח את הזהות הבאה : $2\left(\sin^2\beta - \sin^2\alpha\right) = \cos 2\alpha - \cos 2\beta$.

9) הוכח את הזהות הבאה : $\frac{2}{\cot\beta - \tan\alpha} = \tan(\alpha+\beta) - \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.
7) הוכחה.
8) הוכחה.
9) הוכחה.

מתמטיקה למכינה באקדמיה

פרק 3 - משוואות טריגונומטריות

תוכן העניינים

משוואות טריגונומטריות כלליות:

סיכום כללי:

פתרון כללי של משוואות טריגונומטריות (במעלות):

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריגונומטריות היסודיות כאשר x הוא משתנה ו- α היא זווית נתונה/ידועה :

המשוואה	הפתרון
$\sin x = \sin\alpha$	$x_1 = \alpha + 360°k \;\;,\;\; x_2 = 180° - \alpha + 360°k$
$\cos x = \cos\alpha$	$x_{1,2} = \pm\alpha + 360°k$
$\tan x = \tan\alpha$	$x = \alpha + 180°k$
$\cot x = \cot\alpha$	$x = \alpha + 180°k$

כאשר k מספר שלם.

שאלות:

1) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הסינוס) :

א. $\sin x = \frac{1}{2}$ ב. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ג. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ד. $\sin x = -\frac{1}{2}$

2) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הקוסינוס) :

א. $\cos x = \frac{1}{2}$ ב. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הטנגנס) :

א. $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ב. $\tan x = -1$

4) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (זווית כללית):

א. $\sin x = 0.7$ ב. $\cos x = -0.6$ ג. $\tan x = 5$

5) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות לא מסודרות):

א. $\sin 3x = \frac{1}{2}$ ב. $2\cos 2x = -\sqrt{3}$

ג. $\tan 5x = -1$ ד. $3\sin 2x = 2$

ה. $3\cos 3x = 1$ ו. $2\tan 4x = 1$

6) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (ארגומנט מורכב):

א. $\sin(2x+30°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ב. $\cos(75°-3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ג. $\tan(50°-x) = 1.3$

7) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציות עם ארגומנטים שונים):

א. $\sin x = \sin 3x$ ב. $\sin 2x = \sin(x+30°)$

ג. $\sin x = \sin(120°-x)$ ד. $\cos x = \cos 3x$

ה. $\cos x = \cos(40°-x)$ ו. $\tan x = \tan 3x$

ז. $\tan 2x = \tan(60°-x)$

8) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות מיוחדות):

א. $\sin x = 0$ ב. $\sin x = 1$

ג. $\sin x = -1$ ד. $\cos x = 0$

ה. $\cos x = 1$ ו. $\cos x = -1$

ז. $\tan x = 0$ ח. $\tan x = 1$

תשובות סופיות:

1) א. $x_1=30°+360°k$, $x_2=150°+360°k$ ב. $x_1=45°+360°k$, $x_2=135°+360°k$
ג. $x_1=-60°+360°k$, $x_2=240°+360°k$ ד. $x_1=-30°+360°k$, $x_2=210°+360°k$.

2) א. $x_{1,2}=\pm 60°+360°k$ ב. $x_{1,2}=\pm 150°+360°k$.

3) א. $x=30°+180°k$ ב. $x=135°+180°k$.

4) א. $x_1=44.427°+360°k$, $x_2=135.573°+360°k$
ב. $x_{1,2}=126.87°+360°k$ ג. $x=78.69°+180°k$.

5) א. $x_1=10°+120°k$, $x_2=50°+120°k$ ב. $x_1=75°+180°k$, $x_2=-75°+180°k$
ג. $x=-9°+36°k$ ד. $x_1=20.9°+180°k$, $x_2=69.09°+180°k$
ה. $x_{1,2}=\pm 23.5°+120°k$ ו. $x=6.64°+45°k$.

6) א. $x_1=105°+180°k$, $x_2=-45°+180°k$
ב. $x_1=10°+120°k$, $x_2=40°+120°k$ ג. $x=-2.431°+180°k$.

7) א. $x_1=180°k$, $x_2=45°+90°k$ ב. $x_1=30°+360°k$, $x_2=50°+120°k$
ג. $x=60°+180°k$ ד. $x=90°k$
ה. $x=20°+180°k$ ו. $x=180°k$ ז. $x=20°+60°k$.

8) א. $x=180°k$ ב. $x=90°+360°k$ ג. $x=180°+360°k$
ד. $x=90°+180°k$ ה. $x=360°k$ ו. $x=180°+360°k$
ז. $x=180°k$ ח. $x=45°+180°k$.

משוואות הנפתרות ע"י טכניקה אלגברית:

סיכום כללי:

נעזר בטכניקה אלגברית בכדי להביא משוואה מורכבת לצורה של משוואה יסודית.

טכניקות שכיחות:

- הוצאת שורש ריבועי.
- פירוק לגורמים (ע"י הוצאת גורם משותף, ע"י נוסחאות הכפל המקוצר וע"י פירוק טרינום).
- פתרון משוואה ריבועית.

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (טכניקה אלגברית):

(1 $\cos^2 x = \frac{3}{4}$

(2 $\sin^2 x = \frac{1}{4}$

(3 $\tan^2 2x = 3$

(4 $\sin x \cos 3x = 0$

(5 $\sin 2x - 2\sin^2 2x = 0$

(6 $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x = 0$

(7 $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

(8 $3\sin^2 x - \sin x = 2$

(9 $6\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

(10 $\cos^2 x + 2\cos x = 3$

(11 $\tan^2 x - 3\tan x - 4 = 0$

(12 $\tan^2 x = 4\tan x - 1$

(13 $\cos x - \frac{2}{\cos x} + 1 = 0$

(14 $\frac{\sin x}{\cos x - 1} = 0$

(15 $\frac{\cos 2x}{\tan x + 1} = 0$

תשובות סופיות:

1) $x_{1,2}=\pm 30^\circ+360^\circ k\ ,\ x_{3,4}=\pm 150^\circ+360^\circ k$.

2) $x_1=30^\circ+360^\circ k\ ,\ x_2=150^\circ+360^\circ k\ ,\ x_3=330^\circ+360^\circ k\ ,\ x_4=210^\circ+360^\circ k$.

3) $x_1=30^\circ+90^\circ k\ ,\ x_2=-30^\circ+90^\circ k$.

4) $x_1=180^\circ k\ ,\ x_2=30^\circ+60^\circ k$.

5) $x_1=90^\circ k\ ,\ x_2=15^\circ+180^\circ k\ ,\ x_3=75^\circ+180^\circ k$.

6) $x_1=90^\circ+180^\circ k\ ,\ x_{2,3}=\pm 150^\circ+360^\circ k$.

7) $x_1=90^\circ+360^\circ k\ ,\ x_2=210^\circ+360^\circ k\ ,\ x_3=-30^\circ+360^\circ k$.

8) $x_1=90^\circ+360^\circ k\ ,\ x_2=-41.8^\circ+360^\circ k\ ,\ x_3=221.8^\circ+360^\circ k$.

9) $x_1=30^\circ+360^\circ k,\ x_2=150^\circ+360^\circ k,\ x_3=-19.4^\circ+360^\circ k,\ x_4=199.4^\circ+360^\circ k$.

10) $x=360^\circ k$.

11) $x_1=-45^\circ+180^\circ k\ ,\ x_2=75.964^\circ+180^\circ k$.

12) $x_1=75^\circ+180^\circ k\ ,\ x_2=15^\circ+180^\circ k$.

13) $x=360^\circ k$.

14) $x=180^\circ+360^\circ k$.

15) $x=45^\circ+90^\circ k\ ,\ x\neq -45^\circ+180^\circ k$.

משוואות הנפתרות ע"י זהויות יסוד:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת.
לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות היסוד הטריגונומטריות:

קשרים בין פונקציות	$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$
זוויות משלימות ל- $90°$	$\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)$	$\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$
	$\cot\alpha=\tan(90°-\alpha)$	$\tan\alpha=\cot(90°-\alpha)$
קשרים בין פונקציות	$\cot^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}$	$\tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

1) $\sin x=\cos x$

2) $\sin x=\cos(x+45°)$

3) $\cos x=\frac{2}{3}\sin^2 x$

4) $2\cos^2 x=3\sin x$

5) $\sin^2 x-\cos x=\frac{1}{4}$

6) $\cos^2 x-\sin^2 x=\sin x$

7) $\sin^2 x+2\cos^2 x=1.5$

8) $\sin x-\tan x=0$

תשובות סופיות:

1) $x=45°+180°k$.

2) $x=22.5°+180°k$.

3) $x_{1,2}=\pm60°+360°k$.

4) $x_1=30°+360°k$, $x_2=150°+360°k$.

5) $x_{1,2}=\pm60°+360°k$.

6) $x_1=30°+120°k$, $x_2=-90°+360°k$

7) $x_{1,2}=\pm45°+360°k$, $x_{3,4}=\pm135°+360°k$.

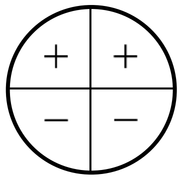
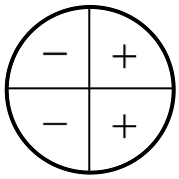
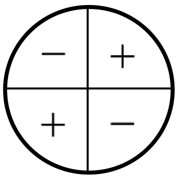
8) $x=180°k$.

משוואות הנפתרות ע"י זהויות של מעגל היחידה:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת.
לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של מעגל היחידה:

רביע	סינוס	קוסינוס	טנגנס
I II III	$\sin(180^o-\alpha)=\sin\alpha$ $\sin(180^o+\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(180^o-\alpha)=-\cos\alpha$ $\cos(180^o+\alpha)=-\cos\alpha$ $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$	$\tan(180^o-\alpha)=-\tan\alpha$ $\tan(180^o+\alpha)=\tan\alpha$ $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$
סימנים			

זהויות עבור זוויות הגדולות מ-360 מעלות:

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin(\alpha+360°k)=\sin\alpha\\ \cos(\alpha+360°k)=\cos\alpha\end{array}}\quad , \quad \boxed{\begin{array}{l}\tan(\alpha+180°k)=\tan\alpha\\ \cot(\alpha+180°k)=\cot\alpha\end{array}}$$

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

1) $\sin x=-\sin 3x$
2) $\cos 2x=-\cos 3x$
3) $\sin(x+30°)=-\cos x$
4) $\sin 3x=-\cos(180°-x)$

תשובות סופיות:

1) $x_1=90°k$, $x_2=-90°+180°k$
2) $x_1=180°+360°k$, $x_2=36°+72°k$
3) $x=120°+180°k$
4) $x_1=22.5°+90°k$, $x_2=45°+180°k$

משוואות הנפתרות על ידי חלוקה בקוסינוס:

סיכום כללי:

טכניקה יעילה כדי להעביר משוואה מהצורה: $\sin x = a\cos x$ לפונקציה טריגונומטרית אחת היא ע"י חלוקה ב- $\cos x$ (בתנאי ש- $\cos x \neq 0$).
כך מתקבלת המשוואה:

$$\sin x = a\cos x \quad / : \cos x \neq 0$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = a\frac{\cos x}{\cos x}$$

$$\tan x = a$$

$$x = \tanh^{-1}(a) + 180°k$$

הערה:

יש לבדוק האם ערכי x שמקיימים $\cos x = 0$ מהווים פתרון למשוואה.
אם כן אז יש להוסיף אותם לפתרון הסופי.

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

1) $\sin x = 2\cos x$ **2)** $3\sin x = \cos x$

3) $4\sin x = 7\cos x$ **4)** $2\sin x = -5\cos x$

5) $\sin^2 x = 8\cos^2 x$ **6)** $3\sin^2 x = \cos^2 x$

תשובות סופיות:

1) $x = 63.43° + 180°k$.

2) $x = 18.43° + 180°k$.

3) $x = 60.25° + 180°k$.

4) $x = -68.19° + 180°k$.

5) $x_1 = 70.52° + 180°k$, $x_2 = -70.52° + 180°k$.

6) $x_1 = 30° + 180°k$, $x_2 = -30° + 180°k$.

משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש זוויות:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת.
לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של סכום והפרש זוויות:

סכום והפרש עבור סינוס וקוסינוס	$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha$ $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$
סכום והפרש עבור טנגנס וקוטנגנס	$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$ $\cot(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}$

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

1) $2\sin x=\sin(60°-x)$

2) $\sin(x+45°)\sin(x-45°)=\dfrac{1}{2}$

3) $\dfrac{\cos 3x}{\sin x}-\dfrac{\sin 3x}{\cos x}=2$

4) $3\cos^2 x-\sin^2 x=\sin 3x$

תשובות סופיות:

1) $x=19.11°+180°k$.

2) $x=90°+180°k$.

3) $x=15°+60°k$.

4) $x_{1,2}=\pm60°+180°k$, $x_3=90°+360°k$.

משוואות הנפתרות ע"י זהויות של זווית כפולה:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת.
לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של זווית כפולה:

סינוס זווית כפולה	$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
קוסינוס זווית כפולה	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

1) $\sin x - \sin 2x = 0$

2) $\sqrt{2}\sin x + \sin 2x = 0$

3) $4\cos x = \sin 2x$

4) $2\cos 2x + \sin 4x = 0$

5) $3\cos x - \cos 2x = 0$

6) $\cos 2x = 2\sin x$

7) $\sin x + \cos 2x = 1$

8) $2\sin^2 x = \cos 2x + 2$

תשובות סופיות:

1) $x_1 = 360°k\ ,\ x_2 = 60° + 120°k$

2) $x_1 = 180°k\ ,\ x_{2,3} = \pm 135° + 360°k$

3) $x = 90° + 180°k$

4) $x_1 = 45° + 90°k\ ,\ x_2 = 135° + 180°k$

5) $x_{1,2} = \pm 106.307° + 360°k$

6) $x_1 = 21.1° + 360°k\ ,\ x_2 = 158.9° + 360°k$

7) $x_1 = 180°k\ ,\ x_2 = 30° + 360°k\ ,\ x_3 = 150° + 360°k$.

8) $x_1 = -60 + 360°k\ ,\ x_2 = 60° + 360°k\ ,\ x_3 = 120° + 360°k\ ,\ x_4 = 240° + 360°k$.

משוואות מהצורה: a sin(x) + b cos(x) = c :

סיכום כללי:

ניתן להביא משוואה מהצורה: $a\sin x+b\cos x=c$ לצורה: $\sin x+\frac{b}{a}\cos x=\frac{c}{a}$.

מציאת זווית α המקיימת: $\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ תאפשר לכתוב: $\sin x+\tan\alpha\cdot\cos x=\frac{c}{a}$.

שימוש בזהות: $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ובזהות: $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$ יובילו:

$$\sin x+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos x=\frac{c}{a}\quad /\cdot\cos\alpha$$

$$\sin x\cos\alpha+\sin\alpha\cos x=\frac{c}{a}\cos\alpha$$

$$\sin(x+\alpha)=\frac{c}{a}\cos\alpha$$

אם נסמן: $\frac{c}{a}\cos\alpha=k$ נקבל את המשוואה: $\sin(x+\alpha)=k$ כאשר α ו- k ידועים.
מכאן הפתרון הוא ישיר לפי משוואת סינוס.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

1) $10\sin x+3\cos x=5$

2) $5\cos x-6\sin x=1$

3) $\sqrt{3}\sin 2x+3\cos 2x=\sqrt{12}$

4) $\frac{1}{2}\sin x+\sqrt{3}\cos^2\frac{x}{2}=\cos\frac{x}{2}$

5) $\cos x+\cos(60°+x)=\sqrt{2}+\cos(60°-x)$

תשובות סופיות:

1) $x_1=11.91°+360°k\ ,\ x_2=134.69°+360°k$

2) $x_1=227.156°+360°k\ ,\ x_2=32.44°+360°k$

3) $x=15°+180°k$

4) $x_1=-60°+720°k\ ,\ x_2=180°+360°k$

5) $x_1=-105°+360°k\ ,\ x_2=15°+360°k$

משוואות הנפתרות ע"י זהויות של סכום והפרש פונקציות:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת.
לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של סכום והפרש פונקציות:

סכום והפרש פונקציות עבור סינוס	$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$
סכום והפרש פונקציות עבור קוסינוס	$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

1) $\sin x+\sin 3x=\sin 2x$.

2) $\cos 2x-\cos 6x=\sin 2x$.

3) $\sin x+\sin 3x=4\sin^3 x$.

4) $\sin 6x-\sin 4x=1-\cos 2x$.

5) $(\sin 5x+\sin 7x)^2=(\cos 5x+\cos 7x)^2$.

6) $2\cos^2\frac{x}{2}+\cos 3x+\cos 5x=1$.

7) $1+\sin x+\sin 7x=\cos 8x$.

8) $2\sin 3x(\cos 2x+\cos x)=\sin x+\sin 2x$.

9) $\sin(x+60°)-\sin x=\sin(2x+60°)-\sin 2x$.

10) $\cos^2 3x-\cos^2 x=\sin x\cos x$.

11) $\sin 8x\sin 2x+\cos 10x=0$.

12) $\cos x+3\sin x=1+2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

13) $4\sin 2x\sin 5x\sin 7x-\sin 4x=0$.

14) $4\cos x\cos 2x\cos 3x=1$.

תשובות סופיות:

1) $x_{1,2}=\pm 60°+360°k\ ,\ x_3=90°k$.

2) $x_1=45°+90°k\ ,\ x_2=180°k$.

3) $x_1=37.5°+90°k\ ,\ x_2=7.5°+90°k\ ,\ x_3=90°k$.

4) $x_1=15°+60°k\ ,\ x_2=180°k\ ,\ x_3=-22.5°+90°k$.

5) $x_1=36°k\ ,\ x_2=\left(\frac{180}{7}\right)°+\left(\frac{180}{7}\right)°k$.

6) $x_{1,2}=\pm 30°+90°k\ ,\ x_3=90°+180°k$.

7) $x_1=-\left(12\frac{6}{7}\right)°k+\left(51\frac{3}{7}\right)°k\ ,\ x_2=45°k$.

8) $x_1=40°k\ ,\ x_2=180°+360°k$.

9) $x_1=-20°+120°k\ ,\ x_2=360°k$.

10) $x_1=52.5°+90°k\ ,\ x_2=-7.5°+90°k\ ,\ x_3=90°k$.

11) $x_1=45°+90°k\ ,\ x_2=11.25°+22.5°k$.

12) $x_1=30°+360°k\ ,\ x_2=150°+360°k$.

13) $x_1=7.5°+15°k\ ,\ x_2=90°k$.

14) $x_1=60°+180°k\ ,\ x_2=22.5+45°k$.

משוואות עם תחום נתון:

סיכום כללי:

כדי למצוא את הפתרונות של משוואה טריגונומטרית בתחום נתון, נמצא תחילה את הפתרון הכללי שלה ולאחר מכן נציב ערכים ב- k ונבחר את הערכים שנמצאים בתחום הנתון.

שאלות:

מצא את כל הפתרונות של המשוואות הבאות בתחום הנתון לידן:

1) $8\sin x-4=0$, $[0°:180°]$.

2) $\sin 2x=\sin(x+60°)$, $[-90°:90°]$.

3) $3\cos(2x+30°)+1=0$, $[-90°:90°]$.

4) $\cos(50°-x)=-\cos x$, $[0°:360°]$.

5) $2\sin 3x-5\cos 3x=0$, $[-30°:30°]$.

6) $2\cos^2 3x=\sin 6x+1$, $[0°:180°]$.

7) $\cos 4x+1=3\sin 2x$, $[-180°:180°]$.

8) $\cos 2x+\cos^2 x+\sin x=0$, $[-180°:180°]$.

תשובות סופיות:

1) $x=30°\ ,\ 150°$.

2) $x=-80°\ ,\ 40°\ ,\ 60°$.

3) $x=39.736°\ ,\ -69.736°$.

4) $x=115°\ ,\ 295°$.

5) $x=22.733°$.

6) $x=7.5°\ ,\ 37.5°\ ,\ 67.5°\ ,\ 97.5°\ ,\ 127.5°\ ,\ 157.5°$.

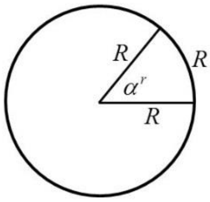
7) $x=-165°\ ,\ -105°\ ,\ 15°\ ,\ 75°$.

8) $x=-138.19°\ ,\ -41.81°\ ,\ 90°$.

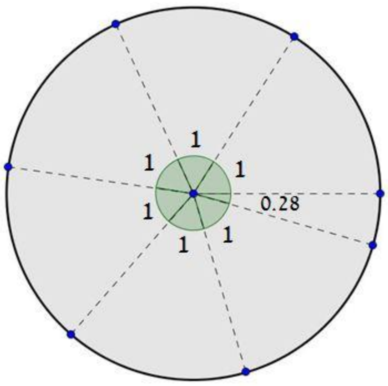
משוואות עם זוויות ברדיאנים:

סיכום כללי:

הגדרת הרדיאן:



זווית של רדיאן אחד מוגדרת להיות הזווית המרכזית
המתאימה לקשת שאורכה שווה לרדיוס המעגל.
עבור מעגל שרדיוסו R, תימצאנה 2π רדיאנים על היקפו, שכן היקף מעגל הוא $P=2\pi\cdot R$.



באיור שלפניך ניתן לראות חלוקה של מעגל ל-$2\pi=6.28$
קשתות אשר שווה לרדיוס המעגל.
הזווית של כל קשת כזאת שווה לרדיאן אחד,
כאשר הזווית האחרונה שווה ל-0.28 מרדיאן.
מקבלים 2π רדיאנים.

קשר בין רדיאנים למעלות:

- נוסחת מעבר מזווית α° (במעלות) לזווית α^r (ברדיאנים): $\alpha^r=\frac{\pi}{180}\alpha^\circ$.
- נוסחת מעבר מזווית α^r (ברדיאנים) לזווית α° (במעלות): $\alpha^\circ=\frac{180}{\pi}\alpha^r$.

פתרונות משוואות טריגונומטריות ברדיאנים:

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריגונומטריות היסודיות
כאשר x הוא משתנה ו-α היא זווית ידועה הנתונה ברדיאנים:

המשוואה	הפתרון
$\sin x=\sin\alpha$	$x_1=\alpha+2\pi k \ , \ x_2=\pi-\alpha+2\pi k$
$\cos x=\cos\alpha$	$x_{1,2}=\pm\alpha+2\pi k$
$\tan x=\tan\alpha$	$x=\alpha+\pi k$
$\cot x=\cot\alpha$	$x=\alpha+\pi k$

כאשר k מספר שלם.

שאלות:

1) המר את הזוויות הבאות ממעלות לרדיאנים:

א. 30° ב. 90° ג. 75° ד. 120°

ה. 210° ו. 315° ז. 18° ח. 285°

ט. -15° י. -80° יא. 510° יב. -390°

2) המר את הזוויות הבאות מרדיאנים למעלות:

א. π ב. 2π ג. 4π ד. 1.5π

ה. $\frac{1}{2}\pi$ ו. $\frac{\pi}{4}$ ז. $\frac{\pi}{6}$ ח. $\frac{1}{18}\pi$

ט. $\frac{13}{18}\pi$ י. $\frac{19}{12}\pi$ יא. $1\frac{1}{6}\pi$ יב. $2\frac{1}{4}\pi$

3) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (משוואות יסודיות שונות):

א. $2\sin 3x = 1 \ , \ \left[0 : \frac{1}{3}\pi\right]$

ב. $\sqrt{3} + 2\cos x = 0 \ , \ [0 : \pi]$

ג. $3 - 3\tan\frac{x}{2} = 0 \ , \ [0 : 2\pi]$

ד. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \ , \ [0 : \pi]$

ה. $4\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2 = 0 \ , \ \left[0 : \frac{1}{2}\pi\right]$

ו. $\sin x = \sin\left(\frac{2}{3}\pi - 2x\right) \ , \ \left[-\frac{5\pi}{18} : \frac{5\pi}{18}\right]$

ז. $5 - 5\tan(4x - 0.1\pi) = 0 \ , \ \left[0 : \frac{\pi}{3}\right]$

ח. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 0.7 \ , \ \left[-\frac{\pi}{4} : \frac{\pi}{4}\right]$

4) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (טכניקה אלגברית):

א. $\sin^2 x = \frac{3}{4} \ , \ \left[0 : \frac{\pi}{2}\right]$

ב. $16\cos^2 2x - 1 = 0 \ , \ \left[-\frac{\pi}{8} : \frac{\pi}{8}\right]$

ג. $2\tan^2 x - 18 = 0 \ , \ [0 : \pi]$

ד. $3\sin x\cos x + 3\cos x = 0 \ , \ \left[-\frac{\pi}{3} : \frac{\pi}{3}\right]$

ה. $\sin^2 x - 5\sin x\cos x = 0 \ , \ \left[-\frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2}\right]$

ו. $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0 \ , \ [-\pi : \pi]$

ז. $4\cos^2 x - \sqrt{2}\cos x - 1 = 0 \ , \ [-\pi : 0]$

ח. $\tan^2 x - 7\tan x + 10 = 0 \ , \ [0 : 2\pi]$

5) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות יסוד):

א. $0 \le x \le \pi\ ,\ \sin x = \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

ב. $0 \le x \le \pi\ ,\ \tan x = 4\sin x$

ג. $0 \le x \le 2\pi\ ,\ 2\sin^2 x = 3\cos x$

6) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות ממעגל היחידה):

א. $[-\pi : \pi]\ ,\ \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin x$

ב. $[0 : \pi]\ ,\ \sin\left(2x+\frac{2}{9}\pi\right) = -\cos 2x$

ג. $[0 : \pi]\ ,\ \sin 4x = -\cos(\pi - x)$

ד. $\left[-\frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2}\right]\ ,\ \tan x = -\tan 2x$

7) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (זהויות של זווית כפולה):

א. $-\pi \le x \le \pi\ ,\ \sin 2x + \cos^2 x = 0$

ב. $[-\pi : \pi]\ ,\ \cos 4x + 1 = 3\sin 2x$

ג. $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\ ,\ 2\sin^2 x = \cos 2x + 2$

ד. $0 \le x \le \pi\ ,\ \cos 4x + \sin^2 x = 1$

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{\pi}{6}$ ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. $\frac{5\pi}{12}$ ד. $\frac{2\pi}{3}$ ה. $\frac{7\pi}{6}$

ו. $\frac{7\pi}{4}$ ז. $\frac{\pi}{10}$ ח. $\frac{19\pi}{12}$ ט. $-\frac{\pi}{12}$ י. $-\frac{4\pi}{9}$

יא. $\frac{17\pi}{6}$ יב. $-\frac{13\pi}{6}$.

2) א. $180°$ ב. $360°$ ג. $720°$ ד. $270°$ ה. $90°$

ו. $45°$ ז. $30°$ ח. $10°$ ט. $130°$ י. $285°$

יא. $210°$ יב. $405°$.

3) א. $x=\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}$ ב. $x=\frac{5\pi}{6}$ ג. $x=\frac{\pi}{2}$ ד. $x=\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$

ה. $x=0$ ו. $x=\frac{2\pi}{9}$ ז. $x=0.0875\pi$ ח. $x=0.224\pi$.

4) א. $x=\frac{\pi}{3}$ ב. ϕ ג. $x=0.398\pi, 0.602\pi$ ד. ϕ

ה. $x=0, 0.437\pi$ ו. $x=\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

ז. $x=-\frac{\pi}{4}, -0.615\pi$ ח. $x=0.352\pi, 0.437\pi, 1.352\pi, 1.437\pi$.

5) א. $x=\frac{\pi}{8}$ ב. $x=0, 0.42\pi, \pi$ ג. $x=\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

6) א. $x=\frac{\pi}{12}, -\frac{11\pi}{12}$ ב. $x=\frac{23\pi}{72}, \frac{59\pi}{72}$

ג. $x=\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{9\pi}{10}$ ד. $x=\pm\frac{\pi}{3}, 0$.

7) א. $x=\pm\frac{\pi}{2}, -0.148\pi, 0.852\pi$ ב. $x=-\frac{7\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}$

ג. $x=\pm\frac{\pi}{3}$ ד. $x=0, 0.38\pi, 0.61\pi, \pi$.

אי שוויונים טריגונומטריים:

סיכום כללי:

כדי לפתור אי-שוויון טריגונומטרי בתחום מסוים נבצע את השלבים הבאים:

1. נהפוך את סימן אי השוויון לסימן שוויון ונפתור את המשוואה המתקבלת.
2. נסדר את כל הפתרונות על ציר מספרים ונבחר ערך בכל תחום.
3. נציב את הערכים באי השוויון המקורי ונאמר כי:
   - אם מתקבל פסוק אמת אז תחום זה מהווה פתרון של אי השוויון.
   - אם מתקבל פסוק שקר אז תחום זה אינו פתרון של אי השוויון.
4. נרכז את כל התחומים ונכתוב את הפתרון המלא.

הערה:

במידה והמשוואה אינה מוגדרת עבור ערך מסוים הערך הזה מוכנס גם לציר המספרים.

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

1) $[0,180^\circ]\ \ \sin x<\frac{1}{2}$

2) $[0,1.5\pi]\ \ 2\cos x-\sqrt{3}\ge 0$

3) $(-90^\circ,90^\circ)\ \ 2\cos^2 x+\sin x\ge 1$

4) $[0,\pi]\ \ \sin x+\sin 2x+\sin 3x<0$

5) $[0^\circ,180^\circ]\ \ 1<2\sin(x+10^\circ)<\sqrt{3}$

6) $(0<x<\pi)\ \ \sin x+\sqrt{3}\cos x\ge 1$

7) $[0,2\pi]\ \ \tan x+\cot x>0$

8) $(-\pi<x<\pi)\ \ |\tan(x)|>\frac{1}{\sqrt{3}}$

תשובות סופיות:

1) $0° \le x < 30°$, $150° \le x \le 180°$.

2) $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$.

3) $-30° \le x < 90°$.

4) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3}$.

5) $20° < x < 50°$, $110° < x < 140°$.

6) $0 < x \le \frac{\pi}{2}$.

7) $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$.

8) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$, $x \ne \frac{\pi}{2}$ או: $-\frac{5\pi}{6} < x < -\frac{\pi}{6}$, $x \ne -\frac{\pi}{2}$.

מתמטיקה למכינה באקדמיה

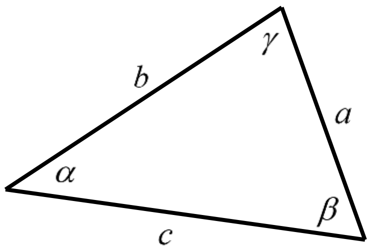
פרק 4 - טריגונומטריה במישור

תוכן העניינים

שאלות יסודיות עם משפט הסינוסים והקוסינוסים:

סיכום כללי:

משפט הסינוסים:



במשולש, צלע חלקי סינוס הזווית שמולה הוא גודל קבוע והוא שווה לפעמיים רדיוס המעגל החוסם.

בצורה מתמטית: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$.

משפט הקוסינוסים:

במשולש, ריבוע צלע אחת שווה לסכום ריבועי שתי הצלעות האחרות פחות מכפלתן בקוסינוס הזווית שביניהן: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ או $\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

מתי נשתמש בכל משפט:

- נשתמש במשפט הסינוסים כאשר:
  א. נתונות שתי זוויות וצלע.
  ב. נתונות שתי צלעות והזווית מול אחת מהן.
  ג. נתון רדיוס המעגל החוסם וצלע/זווית נוספת.

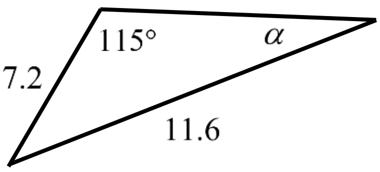
- נשתמש במשפט הקוסינוסים כאשר:
  א. נתונות שתי צלעות והזווית ביניהן.
  ב. נתונות שלוש צלעות.

- כאשר ישנם יותר נתונים מאשר בסעיפים שלהלן ייתכן שנוכל להשתמש בשני המשפטים. בבחירת המשפט שבו נשתמש כדאי לזכור שבמשפט הסינוסים ייתכנו שתי תשובות לזווית, גם אם בפועל רק אחת נכונה, ובמשפט הקוסינוסים תתקבל בוודאות הזווית הנכונה.

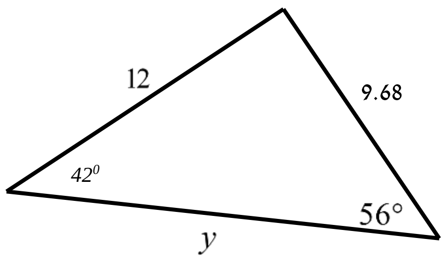
שאלות:

1) מצא את ערכו של $a\,/\,x\,/\,y$ במשולשים הבאים
(R הוא רדיוס המעגל החוסם, נתוני הצלעות בס"מ):

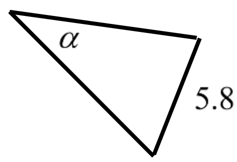
א.



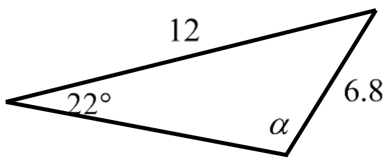
ב.



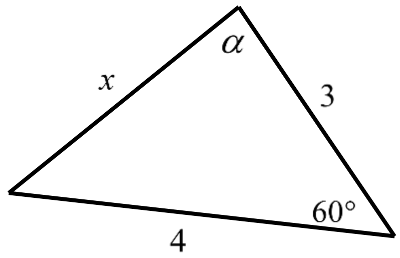
ג. רדיוס המעגל: $R=7$.



ד.

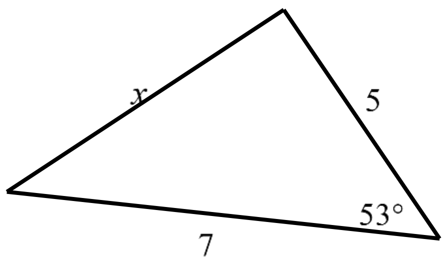


ה.

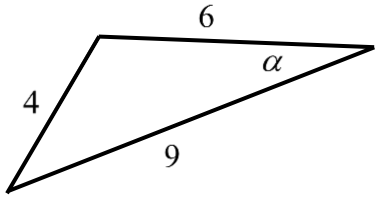


2) מצא את ערכו של $\alpha\,/\,x$ במשולשים הבאים:

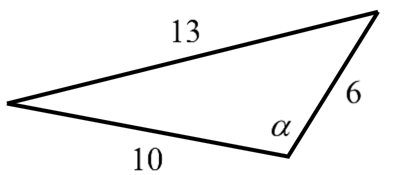
א.



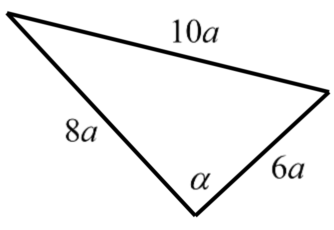
ב.



ג.

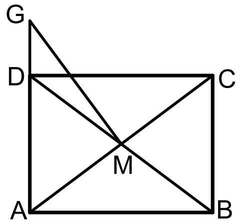


ד.



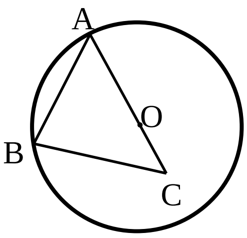
3) נתון משולש שווה שוקיים ABC (AB=AC) שאורך השוק שלו הוא 22 ס"מ וגודלה של זווית הבסיס בו הוא $70°$. CD הוא חוצה זווית הבסיס $\sphericalangle C$.
מצא את אורכו של הקטע AD.

4) אלכסוני המלבן ABCD נפגשים בנקודה M.
הנקודה G נמצאת על המשך הצלע AD.
נתון: 3 ס"מ = AD , 4 ס"מ = AB , 1.2 ס"מ = DG.
מצא את גודלו של הקטע GM.



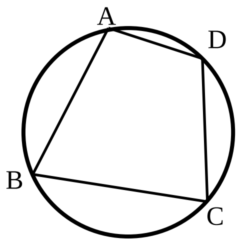
5) מרובע שאורכי אלכסוניו 8 ס"מ ו-11 ס"מ חסום במעגל שאורך רדיוסו הוא 6 ס"מ.
חשב את זוויות המרובע.

6) הצלע AB במשולש ABC היא מיתר במעגל שמרכזו O.
הצלע AC עוברת במרכז המעגל כמתואר בשרטוט.
נתון: 9 ס"מ = BC , 3 ס"מ = OC , $\sphericalangle BAC = 38°$.
מצא את אורכם של רדיוס המעגל ושל הצלע AB.



7) אחד האלכסונים במקבילית יוצר זווית של $30°$ עם צלע אחת של המקבילית וזווית של $61.05°$ עם הצלע הסמוכה לה.
אחת מצלעות המקבילית גדולה ב-3 ס"מ מהצלע הסמוכה לה.
חשב את היקף המקבילית.

8) המרובע ABCD חסום במעגל.
נתון: 6 ס"מ = AB , 9 ס"מ = BC , 10 ס"מ = CD ו-4 ס"מ = AD.
מצא את אורכם של האלכסון AC ושל רדיוס המעגל.

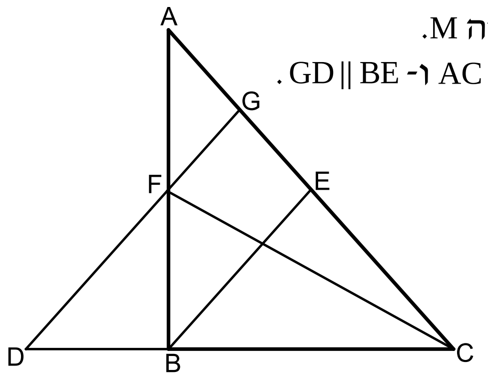


9) BE ו-CF הם תיכונים במשולש ABC הנפגשים בנקודה M.
מהנקודה F מעבירים קטע GD כך שמתקיים: AC = DC ו- BE || GD.

א. הוכח: $\frac{AG}{BD}=\frac{3}{4}$.

ב. נתון כי: ME = 4 ס"מ.
חשב את אורך הקטע DG.

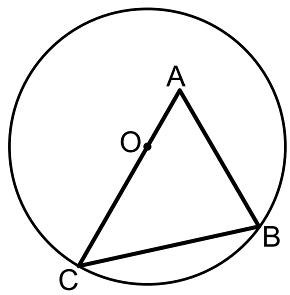
ג. נתון כי: $\sphericalangle ACD = 48.189°$
הוכח כי המשולש DGC הוא שווה-שוקיים.



10) נתון משולש ABC. הקודקודים B ו-C של המשולש ABC
נמצאים על מעגל שמרכזו O. מרכז המעגל O מונח על
הצלע AC. אורך הצלע AB הוא 12 ס"מ ואורך
הקטע AO הוא 4.5 ס"מ. זווית BAC היא 60°.

א. חשב את רדיוס המעגל.

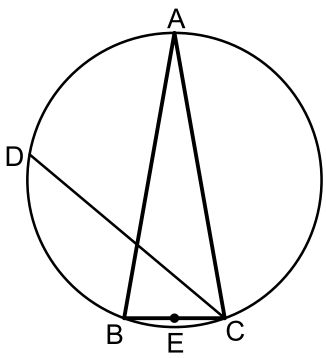
ב. מעבירים את הקוטר BD ואת הקטע AD
כך שנוצר המשולש ADB.
חשב את זווית ADB.



11) המשולש ABC הוא שווה שוקיים (AB = AC)
החסום במעגל שרדיוסו R.
הנקודה E היא אמצע הבסיס BC והנקודה D
היא אמצע הקשת $\overset{\frown}{AB}$.
ידוע כי זווית הבסיס של המשולש היא 80°.

א. הבע באמצעות R את הקטעים CD ו-DE.

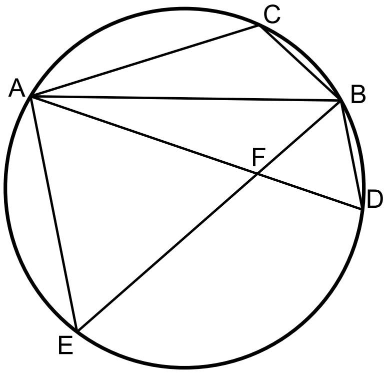
ב. r הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש CED.
הבע באמצעות R את r.



12) AB, AC ו-AD הם מיתרים במעגל המקיימים: $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD}$.
מהנקודה E שעל המעגל מעבירים את
המיתרים AE ו-BE.
המיתרים BE ו-AD נחתכים בנקודה F.
נתון כי: AC = AF = EF.

א. הוכח: $\Delta ABF \cong \Delta ABC$.

ב. נתון גם: $\sphericalangle DAE = 3\cdot\sphericalangle CAB$.
הוכח כי המשולש AFE הוא שווה צלעות.



13) המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים $(AB \parallel CD\ ,\ AD = BC)$.

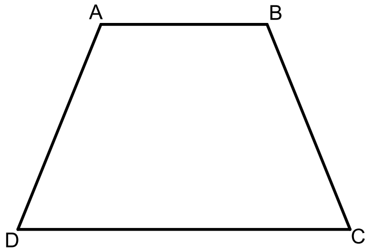
מידות הטרפז הן:

12 ס״מ = CD , 8 ס״מ= BC , 6 ס״מ = AB.

א. מצא את זווית C (עגל למספר שלם).

ב. מצא את אורך אלכסון הטרפז.

ג. חשב את רדיוס המעגל החוסם את הטרפז.



14) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית $(AB \parallel CD\ ,\ \sphericalangle B = 90°)$.

מסמנים את הבסיס: $AB = t$ וידוע כי: $DC = 1.6t$, $AD = 3t$.

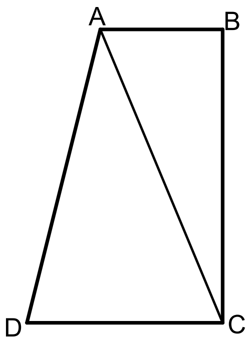
היקף הטרפז הוא: 40 ס״מ.

א. הבע באמצעות t את אורך האלכסון AC.

ב. ידוע גם כי: $\sphericalangle D = 60°$.

i. חשב את אורך הקטע AC.

ii. חשב את שטח הטרפז.



15) המשולש ABC הוא שווה שוקיים (AB = AC) בעל זווית ראש $36°$ החסום במעגל שקוטרו 16 ס״מ. מעבירים תיכון לשוק BD.

א. מצא את אורך הבסיס BC במשולש.

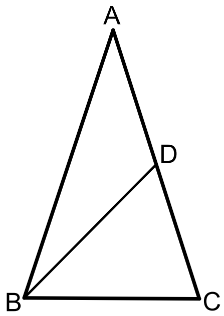
ב. חשב את אורך התיכון BD.

ג. מסמנים:

r_1 - רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD.

r_2 - רדיוס המעגל החוסם את המשולש BCD.

הוכח את היחס הבא: $\frac{r_1}{r_2} = 2\cos 36$.



16) המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.

מעבירים את האלכסון BD המקיים: $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ADB$.

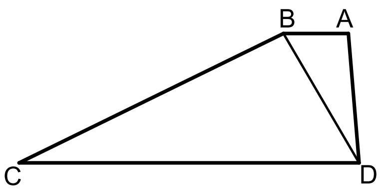
נתון כי: 20 ס״מ = CD , 10 ס״מ = AD , 5 ס״מ = AB.

כמו כן ידוע כי השוק BC גדולה פי 2 מהאלכסון BD.

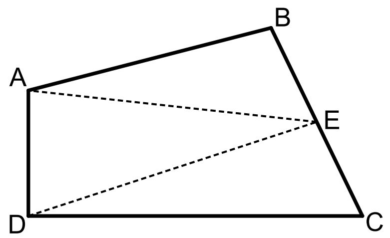
א. הראה כי השוק BC שווה לבסיס CD.

ב. חשב את זווית C.

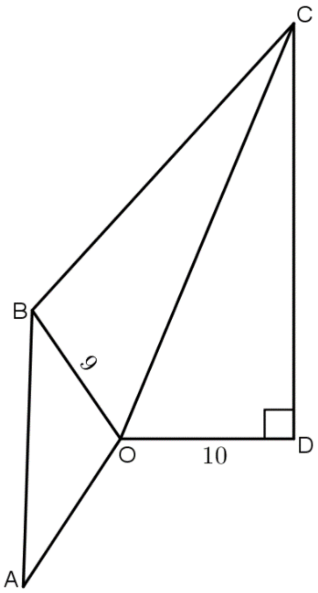
ג. ממשיכים את שוקי הטרפז AD ו-BC עד לנקודה E שמחוץ לטרפז. חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש CDE.



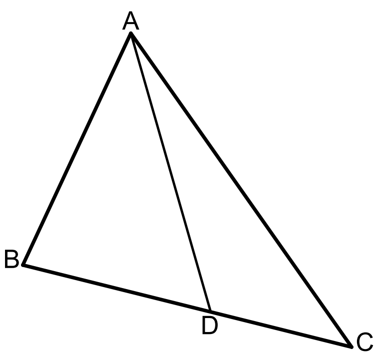
17) באיור שלפניך נתון המרובע ABCD.
ידוע כי: $\sphericalangle D=90°$.
נסמן את הצלעות באופן הבא: $AD=3x$, $CD=8x$, $BC=5x$, $AB=6x$.
א. חשב את זווית BCD.
ב. E היא נקודה הנמצאת על אמצע הצלע BC.
מעבירים את הקטעים AE ו-DE כך
ש-DE מקביל ל-AB.
חשב את היחס הבא: $\frac{S_{ABE}}{S_{BCD}}$.



18) מהנקודה O מעבירים את הקטעים OA , OB , OC ו-OD.
ידוע כי זווית AOB שווה לזווית COD והיא מסומנת ב- α.
המשולש COD הוא ישר זווית $\sphericalangle CDO=90°$.
נתונים האורכים: $DO=10$, $BO=9$.
מסמנים: $CD=1.5m$, $BC=1.4m$.
א. הבע באמצעות m את $\sin\alpha$.
(העזר במשולש COD ובטא תחילה את CO).
ב. נתון גם כי: $AB=m$.
מצא את m אם ידוע כי רדיוס המעגל החוסם
את המשולש AOB הוא $8\frac{2}{3}$.
ג. חשב את זווית BOC.



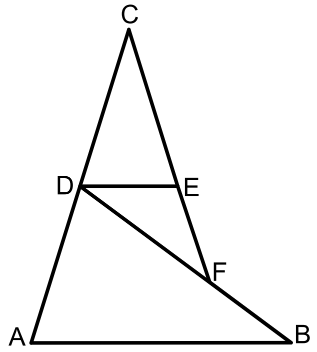
19) במשולש ABC הזווית A היא בת $60°$.
מעבירים את הקטע AD כך שנוצרת זווית: $\sphericalangle ADB=60°$.
ידוע כי $AB=\sqrt{28}$ וכי הצלע AD במשולש ABD
גדולה פי 1.5 מהצלע BD.
א. מצא את אורך הצלע BD.
ב. היקף המשולש ABC הוא: $P=5\sqrt{7}+7$.
i. סמן: $DC=t$ והבע באמצעות t
את אורך הצלע AC.
ii. מצא את t.
ג. חשב את שטח המשולש ABC.



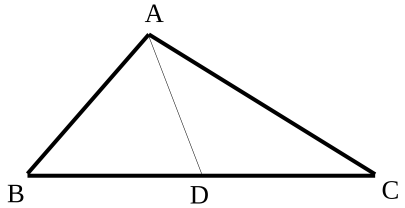
20) מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB ו-AC.
הנקודה D היא אמצע AC וממנה מעבירים את DE המקביל ל-AB.
הנקודות C , E ו-F נמצאות על אותו הישר.
ידוע כי המשולשים ABD , DEF ו-DCE הם
שווי שוקיים (AB = BD , DC = CE , EF = DE).
נתון כי: AD = 8.

א. חשב את אורך הקטע BF.

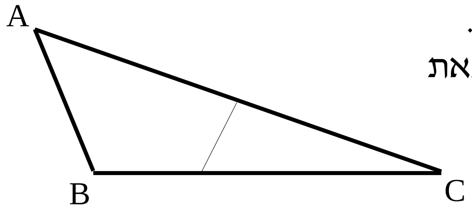
ב. מחברים את הנקודות B ו-C.
חשב את אורך הצלע BC.



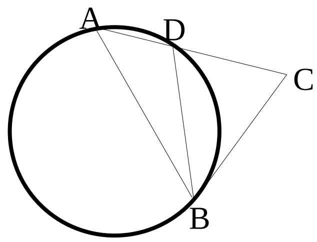
21) בשרטוט נתון: AB = 6 ס"מ , AC = 8 ס"מ ,
AD = 5 ס"מ. הנקודה D היא אמצע הצלע BC.
חשב את אורך הקטע BC.



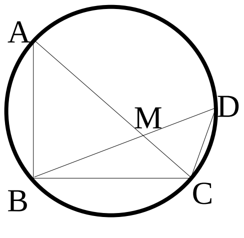
22) הצלע AC במשולש ABC גדולה פי 4 מהצלע AB.
הנקודה E היא אמצע הצלע AC והנקודה D נמצאת
על הצלע BC כך שמתקיים $DC = 2BD$.
נתון: $AB = a$, $BC = b$.
הבע באמצעות a ו-b את אורך הקטע DE.



23) המשולש ABD חסום במעגל שרדיוסו R.
המשך הצלע AD והמשיק למעגל בנקודה B
נפגשים בנקודה C. נתון: $\sphericalangle C = \alpha$, $\sphericalangle ADB = \beta$.
הבע באמצעות R, α ו-β את אורך הקטע BC.



24) AC ו-BD הם מיתרים במעגל שרדיוסו R,
שנפגשים בנקודה M. זווית $\sphericalangle B$ היא זווית ישרה.
נתון: $AB = k$, $DM = p$, $DC = q$.
הבע באמצעות R, k, p ו-q את אורך הקטע MC.



תשובות סופיות:

(1 א. $\alpha = 34.231°$ ב. $y =$ 14.33 ס"מ   ג. $\alpha = 155.526°$ או $\alpha = 24.474°$

ד. $\alpha = 41.382°$ או $\alpha = 138.618°$ ה. $x =$ 3.606 ס"מ , $\alpha = 73.898°$

(2 א. $x =$ 5.646 ס"מ   ב. $\alpha = 20.742°$ ג. $\alpha = 105.962°$ ד. $\alpha = 90°$

(3 AD = 13.064 ס"מ

(4 GM = 3.360 ס"מ

(5 $138.190°$, $41.810°$, $113.556°$, $66.444°$

(6 AB = 14.56 ס"מ , $R =$ 9.242 ס"מ

(7 $P =$ 22 ס"מ

(8 AC = 10.790 ס"מ , $R =$ 5.395 ס"מ

(9 DG = 18

(10 $R =$ 10.5 ס"מ   ב. $24.32°$

(11 א. $\mathrm{CD} = R\sqrt{3}$, $\mathrm{DE} = 1.48R$ ב. $r = 1.15R$

(13 א. $68°$ ב. 11.66 ס"מ   ג. $R =$ 6.29 ס"מ

(14 א. $\mathrm{AC} = \sqrt{32.36t^2 - 448t + 1600}$ ב.i. 13 ס"מ   ב.ii. 78 סמ"ר

(15 א. 9.4 ס"מ   ב.i. 10 ס"מ

(16 ב. $\sphericalangle C = 28.9°$ ג. $R = 13.77$

(17 א. $64.04°$ ב. $\frac{S_{ABE}}{S_{ECD}} = 0.817$

(18 א. $\sin\alpha = \frac{1.5m}{\sqrt{100 + 2.25m^2}}$ ב. $m = 16$ ג. $56.94°$

(19 א. 4   ב.i. $1.5\sqrt{28} + 3 - t$ ב.ii. 3   ג. $S = 18.18$

(20 א. 4.94 ס"מ   ב. 17.19 ס"מ

(21 BC = 10 ס"מ

(22 $\mathrm{DE} = \sqrt{\frac{1}{9}b^2 - a^2}$

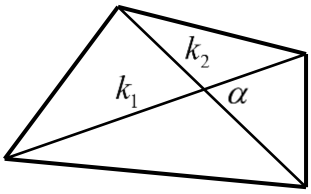
(23 $\mathrm{BC} = \frac{2R\sin\beta\sin(\beta - \alpha)}{\sin\alpha}$

(24 $\mathrm{MC} = \sqrt{p^2 + q^2 - \frac{pqk}{R}}$

שאלות העוסקות בנוסחת שטח משולש:

סיכום כללי:

שטחים של משולשים ומרובעים:

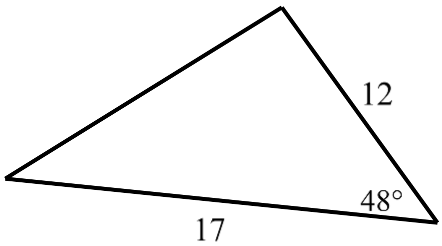


- שטח משולש ניתן לחישוב ע״י: $S=\frac{a\cdot h}{2}=\frac{ab\sin\gamma}{2}=\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}$.
- שטח מרובע ניתן לחישוב ע״י אלכסוניו: $S=\frac{k_1k_2\sin\alpha}{2}$.

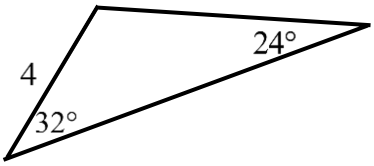
שאלות:

25) חשב את שטחי המשולשים הבאים:

א.



ב.

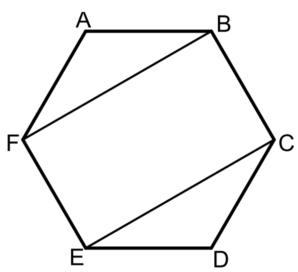


26) חשב את שטחו של טרפז שווה שוקיים שאורך האלכסון שלו 8 ס״מ והוא יוצר זווית של $15°$ עם הבסיסים.

27) אורכו של מלבן הוא m ורוחבו n. הזווית שבין אלכסוני המלבן היא θ.
הוכח כי מתקיים: $\sin\theta=\frac{2mn}{m^2+n^2}$.

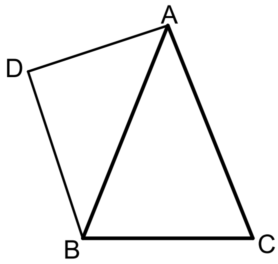
28) במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle B=90°$), BD חוצה את הזווית $\sphericalangle B$.
נתון: $AB=m$, $\sphericalangle A=\alpha$.
הבע באמצעות α ו- m את שטח המשולש BCD.

29) באיור שלפניך נתון משושה משוכלל ששטחו הכולל הוא S.



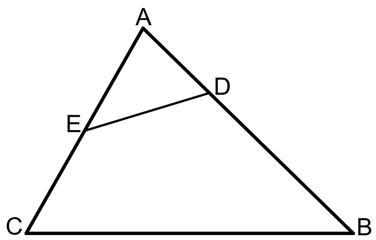
א. הבע באמצעות S את אורך צלע המשושה.
ב. מעבירים אלכסונים במשושה כך שנוצר המלבן BFEC.
הבע באמצעות S את שטח המלבן.

30) המשולש ABC הוא שווה שוקיים בעל זווית ראש α, (AB = AC).
אורך הבסיס BC הוא k.
על השוק AB בונים משולש ישר זווית ABD ובו $\sphericalangle D = 90°$.



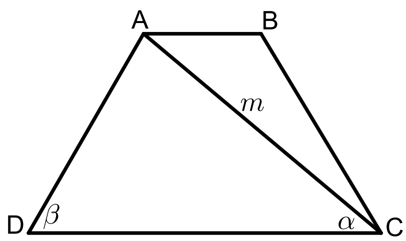
א. הבע באמצעות k ו- α את אורך שוק המשולש ABC.
ב. הניצב AD במשולש ABD שווה ל- $0.85k$
וכי: $\sphericalangle ABD = 40°$. מצא את זוויות המשולש ABC.
ג. חשב את שטח המרובע ACBD אם ידוע כי $k = 6$.

31) במשולש ABC אורך הצלע AC הוא 8 ס"מ ואורך הצלע AB הוא 10 ס"מ.
הנקודה E היא אמצע הצלע AC
והנקודה D מקיימת: 3 ס"מ = AD.
ידוע כי: $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{5}$.



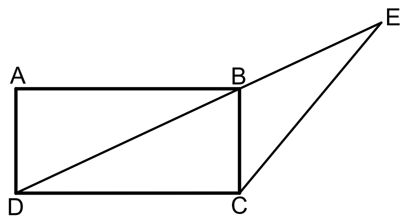
א. מצא את אורך הקטע DE.
ב. חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ADE.
ג. חשב את שטח המרובע BCED.

32) המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$. הקטע AC הוא אלכסון בטרפז.
מסמנים: $\sphericalangle ADC = \beta$, $\sphericalangle ACD = \alpha$, $AC = m$.



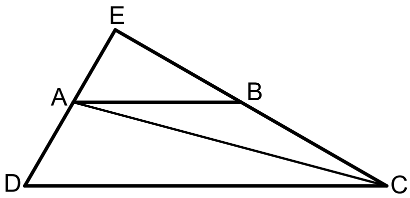
א. הבע באמצעות α , β ו- m את אורך
הבסיס הגדול DC.
ב. נתון כי האלכסון AC מקיים: $\frac{S_{ADC}}{S_{ABC}} = 3$.
הבע באמצעות α, β ו- m את הבסיס AB.
ג. חשב את שטח הטרפז אם ידוע כי: $\beta = 60°$, $\alpha = 40°$ ו- $m = 8$.

33) המרובע ABCD הוא מלבן. מעבירים את האלכסון BD וממשיכים
אותו עד לנקודה E שמחוץ למלבן.
מחברים את הנקודה E עם הקודקוד C.
ידוע כי אורך הצלע AD של המלבן הוא 6 ס"מ וכי
אורך הקטע BE הוא 9 ס"מ. הזווית CBE היא $115°$.



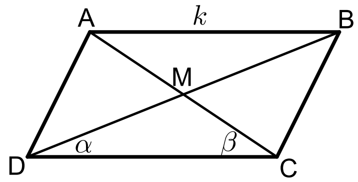
א. מצא את אורך הקטע CE.
ב. מצא את אורך האלכסון BD.
ג. חשב את שטח המשולש DCE.

34) המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.
ממשיכים את השוקיים AD ו-BC עד לפגישתם
בנקודה E. ידוע כי: $DE \perp CE$.
מעבירים את האלכסון AC אשר חוצה את זווית C.
מסמנים את הבסיס הגדול DC ב-k ואת: $\sphericalangle ACD = \alpha$.



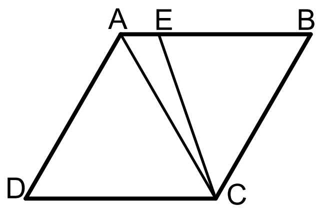
א. הבע באמצעות k ו-α את הבסיס הקטן AB.
ב. הבע באמצעות k ו-α את שטח המשולש ABC.
ג. חשב את שטח המשולש ABC כאשר: $\alpha = 15°$, $k =$ 12 ס"מ.

35) נתונה מקבילית ABCD ובה מעבירים
את האלכסונים AC ו-BD אשר נחתכים
בנקודה M כמתואר באיור.
מסמנים: $\sphericalangle ACD = \beta$, $\sphericalangle BDC = \alpha$, $AB = k$.



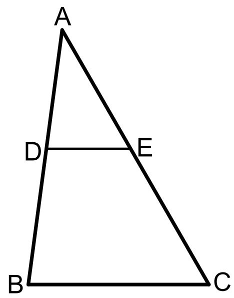
א. הוכח כי אלכסוני המקבילית מקיימים: $\frac{AC}{BD} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.
ב. ענה על השאלות הבאות:
i. הבע באמצעות α , β ו-k את שטח המשולש DMC.
ii. הבע באמצעות α , β ו-k את שטח המקבילית ABCD.
ג. נתון כי: $\frac{AC}{BD} = 2$. הראה כי שטח המקבילית הוא: $\frac{4k^2\sin^2\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

36) המרובע ABCD הוא מעוין ובו $\sphericalangle D = 60°$.
מעבירים את האלכסון AC ואת הקטע CE
כך שהנקודה E נמצאת על הצלע AB ומחלקת
אותה ביחס: $\frac{BE}{AE} = 4$.



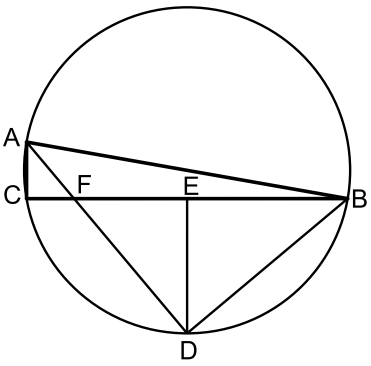
א. חשב את זווית AEC.
ב. נתון כי שטח המשולש AEC הוא 8.66 סמ"ר. חשב את שטח המעוין.

37) הקטע DE מקביל לצלע BC במשולש ABC כמתואר באיור.
נתון כי: $CE = 13$, $BC = 15$, $BD = \sqrt{129}$.
ידוע כי זווית AED היא $60°$.

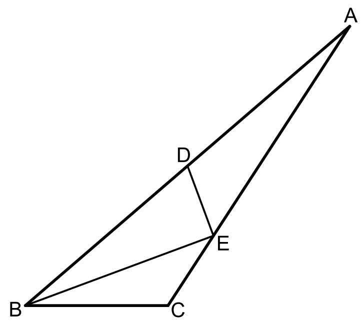


א. חשב את אורך הקטע DE אם ידוע
ב. כי הוא קטן מ-10 ס"מ.
ג. חשב את שטח המשולש ADE.

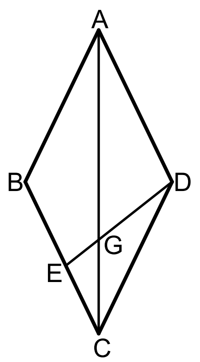
38) המשולש ABC חסום במעגל כך ש-AB הוא קוטר.
הנקודה D היא אמצע הקשת BC וממנה
מעבירים את המיתרים AD ו-BD ומעלים
גובה DE לצלע BC.
מסמנים: $DE = k$ ונתון כי: $\sphericalangle ABC = 10^\circ$.
א. הבע באמצעות k את רדיוס המעגל.
ב. הבע באמצעות k את שטח המשולש ABF.
ג. מצא את k אם ידוע כי שטח המשולש ABF הוא 15.363 סמ"ר.



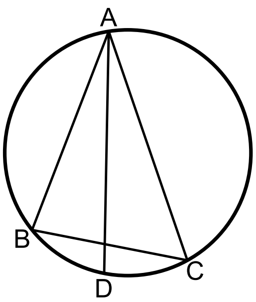
39) במשולש ABC הקטע BE חוצה את זווית B.
הנקודה D היא אמצע הצלע AB ומקיימת: DE = CE.
ידוע כי: BC = 6 , BE = 8 , BD = 9.
א. מצא את זווית B.
ב. חשב את שטח המשולש ADE.



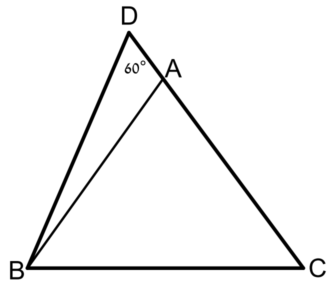
40) נתון המעוין ABCD. אורך האלכסון הגדול במעוין AC גדול פי 1.8 מצלע המעוין.
א. חשב את זוויות המעוין.
ב. מהקודקוד D מעבירים את הקטע DE שאורכו הוא m.
הקטע DE חותך את האלכסון AC בנקודה G.
הזווית EDC תסומן ב- α.
i. הבע באמצעות m ו- α את אורך הקטע CE.
ii. הבע באמצעות m ו- α את שטח המשולש EGC.



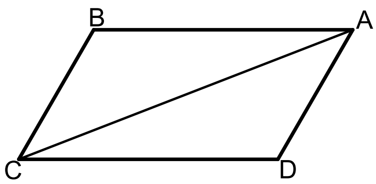
41) המשולש ABC חסום במעגל כמתואר באיור.
מעבירים את המיתר AD החוצה את זווית BAC.
ידוע כי: $\sphericalangle BAC = 40^\circ$, $\sphericalangle ACB = 60^\circ$.
מסמנים: $AD = k$.
א. הבע באמצעות k את אורך המיתר BD.
ב. ידוע כי שטח המשולש ABD הוא 7.368 סמ"ר.
מצא את k (עגל למספר שלם).



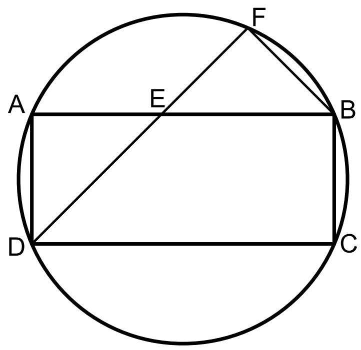
42) המשולש ABC הוא שווה שוקיים $(AB = AC)$.
ממשיכים את הצלע AC עד לנקודה D כך
שאורך שוק המשולש גדולה פי 3.8 מהקטע AD.
ידוע כי: $\sphericalangle D = 60^\circ$.
אורך הקטע BD הוא 21 ס"מ.
א. מצא את אורך הקטע AD.
ב. חשב את שטח המשולש ABC.



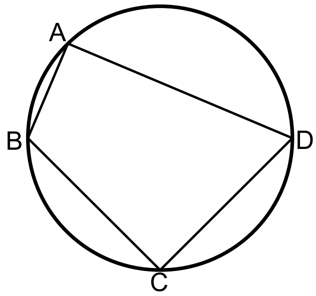
43) במקבילית ABCD אורך האלכסון AC הוא $\sqrt{79}$ ס"מ.
היקף המקבילית הוא 20 ס"מ וידוע כי: $\sphericalangle B = 120^\circ$.
א. מצא את אורכי צלעות המקבילית.
ב. חשב את שטח המקבילית.
ג. מסמנים נקודה E על האלכסון AC כך שהמרובע CBED הוא בר חסימה.
חשב את רדיוס המעגל החוסם את המרובע CBED.



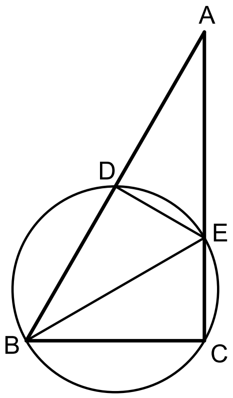
44) המרובע ABCD הוא מלבן החסום במעגל.
מהקודקוד D מעבירים את המיתר DF
החותך את הצלע AB בנקודה E.
ידוע כי: $\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{CF}$.
הצלע AD של המלבן תסומן ב- a.
א. הוכח כי המשולש DAE הוא שווה שוקיים.
ב. נתון גם כי: $BC = BF$.
i. הבע באמצעות a את רדיוס המעגל.
ii. חשב את הזוויות המרכזיות של הקשתות: $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{AB}$
(אין צורך לסרטט אותן).



45) המרובע ABCD חסום במעגל כמתואר באיור.
ידוע כי: $AB = b$, $BC = a$, $CD = a$, $AD = 3b$.
א. הבע באמצעות a ו- b את $\cos\sphericalangle BCD$.
ב. הוכח כי אם BD קוטר אז מתקיים: $a = b\sqrt{5}$.
ג. נתון כי רדיוס המעגל הוא 3 ס"מ.
הסתמך על סעיף ב' וחשב את שטח המרובע ABCD.



46) המשולש ABC הוא ישר זווית $\sphericalangle C = 90^\circ$ ובו: $\sphericalangle B = 2\alpha$.
מעבירים מעגל שרדיוסו R דרך הקודקודים B ו-C
אשר חותך את צלעות המשולש בנקודות D ו-E.
המיתר BE חוצה את זווית B.

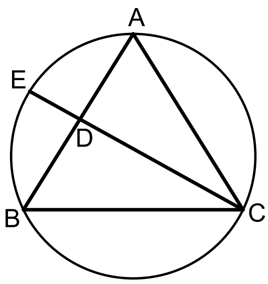


א. הבע באמצעות R ו- α את שטח המשולש ABE.
ב. ידוע כי המשולש ABE הוא שווה שוקיים
וכי אורך המיתר CE הוא 6 ס"מ.
חשב את שטח המשולש ABE.

47) במשולש שווה שוקיים ABC (AB = AC) שאורך השוק בו הוא k וזווית הבסיס שלו היא β, BE חוצה את זווית $\sphericalangle B$ ו- CD הוא הגובה לשוק AB.

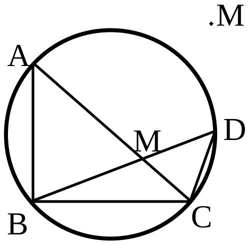
הוכח כי שטח המשולש ADE הוא: $S_{ADE} = -\dfrac{k^2 \sin\frac{\beta}{2} \sin 4\beta}{4\sin\frac{3\beta}{2}}$.

48) נתון משולש שווה שוקיים ABC (AB = AC) החסום במעגל.
מהקודקוד C מעבירים את המיתר CE החותך את השוק AB בנקודה D.
ידוע כי E היא אמצע הקשת $\overset{\frown}{AB}$ והיחס בין
הקטעים BD ו-CD הוא $4:7$.
מסמנים: $\sphericalangle ACD = \alpha$.



א. מצא את זוויות המשולש ABC
(עגל למספרים שלמים).
ב. חשב את אורך המיתר BE אם ידוע כי
רדיוס המעגל החוסם שווה ל-8 ס"מ.

49) AC ו-BD הם מיתרים במעגל שרדיוסו R, שנפגשים בנקודה M.
זווית $\sphericalangle B$ היא זווית ישרה.
נתון: $\sphericalangle MBC = \alpha$, $\sphericalangle MCB = \beta$.

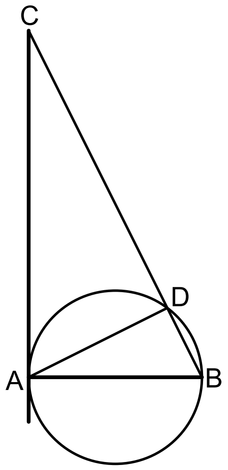


א. הבע באמצעות R, α ו- β את שטח המשולש BDC.
ב. נתון: $\beta = 2\alpha$, $S_{BDC} = \frac{1}{2}R^2$.
חשב את α.

50) בטרפז שווה שוקיים, שאורך השוק שבו הוא b והזווית שליד הבסיס הגדול היא γ נתון שהאלכסונים מאונכים זה לזה.

א. הבע באמצעות γ ו- b את אורכי בסיסי הטרפז.

ב. חשב את γ אם ידוע שהבסיס הגדול ארוך פי $\sqrt{3}$ מהבסיס הקטן.

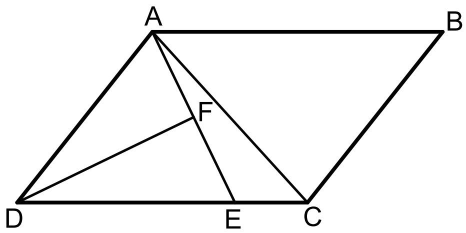


51) המיתר AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R ו-AD הוא מיתר.
ממשיכים את המיתר BD ומעבירים משיק מהנקודה A.
המשיק והמשך המיתר נפגשים בנקודה C.
מסמנים: $\sphericalangle BAD = \alpha$.

א. הבע באמצעות α ו- R את שטח המשולש ABD.

ב. הבע באמצעות α ו- R את שטח המשולש ACD.

ג. מצא את α אם ידוע כי שטח המשולש ABD קטן פי 4 משטח המשולש ACD.



52) המרובע ABCD הוא מקבילית.
הקטע AE מקצה על הצלע DC קטעים המקיימים: $3CE = DE$.
מעבירים תיכון DF לצלע AE במשולש ADE.
ידוע כי: $\sphericalangle ADF = \sphericalangle CDF = \alpha$.
מסמנים: $CE = k$.

א. הבע באמצעות k ו- α את אורך הקטע AE.

ב. מעבירים את האלכסון AC.
הבע באמצעות k ו- α את היקף המשולש ACE.

ג. היקף המשולש ACE הוא $4.5k$. מצא את α.

תשובות סופיות:

25) א. $S=$ 75.801 סמ"ר ב. $S=$ 8.641 סמ"ר

26) $S=$ 16 סמ"ר

27) $S_{\Delta BCD}=\dfrac{m^2\tan^2\alpha\sin45^\circ\cos\alpha}{2\sin(\alpha+45^\circ)}$

28) א. $\sqrt{\dfrac{2S}{\sqrt{27}}}\approx0.62S$ ב. $\dfrac{2}{3}S$

29) א. $\dfrac{k}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ ב. 44.4° , 67.78° , 67.78° ג. $S=37.18$

30) א. $DE=\sqrt{1.6}=1.26$ ב. $R=2$ ג. $S=21.48$

31) א. $DC=\dfrac{m\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$ ב. $AB=\dfrac{m\sin(\alpha+\beta)}{3\sin\beta}$ ג. $S_{ABCD}=31.2$

32) א. 12.75 ס"מ ב. 14.19 ס"מ ג. 63.05 ס"מ

33) א. $\dfrac{k\tan\alpha}{\tan2\alpha}$ ב. $\dfrac{k^2\tan\alpha\sin2\alpha}{2\tan^2 2\alpha}$ ג. $S=$ 7.754 ס"מ

34) ב.i. $\dfrac{k^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$ ב.ii. $\dfrac{2k^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

35) א. 109.1° ב. $S=86.6$

36) א. 7 ס"מ ב. 34.48 סמ"ר

37) א. $R=\dfrac{k}{2\sin^2 40}=1.21k$ ב. $S=\dfrac{k^2\sin10}{2\sin50\sin^3 40}$ ג. $k=6$

38) א. 40.72° ב. $S=12.52$

39) א. 128.32° ; 51.68° ב. $1.27m\sin\alpha$ ג. $\dfrac{0.35m^2\sin^2\alpha\sin(128.32-\alpha)}{\sin(25.84+\alpha)}$

40) א. $BD=\dfrac{k\sin20}{\sin100}$ ב. $k=7$

41) א. 5 ס"מ ב. $S=172.77$

42) א. $BC=$ 3 ס"מ ו- $AB=$ 7 ס"מ ב. $S=$ 18.18 סמ"ר ג. $R=\sqrt{\dfrac{37}{3}}$

43) ב. i. $R=a\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\approx 1.3a$ ב. ii. $45^\circ\ ,\ 135^\circ$

44) א. $\cos\sphericalangle BCD=\frac{a^2-5b^2}{a^2+3b^2}$ ג. $S=$ 14.4 סמ"ר.

45) א. $S=R^2\tan 2\alpha$ ב. $S=$ סמ"ר $36\sqrt{3}$.

48) א. $58^\circ\ ,\ 58^\circ\ ,\ 64^\circ$ ב. $BE=7.75$.

49) א. $S=2R^2\sin\alpha\cos\beta\sin(90^\circ-\alpha+\beta)$ ב. $\alpha=22.5^\circ$.

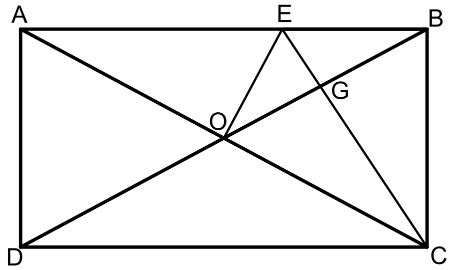
50) א. $\frac{b\sin(\gamma-45^\circ)}{\sin 45^\circ}\ ,\ \frac{b\sin(135^\circ-\gamma)}{\sin 45^\circ}$ ב. $\gamma=75^\circ$.

51) א. $S=R^2\sin 2\alpha$ ב. $S=\frac{2R^2\cos^3\alpha}{\sin\alpha}$ ג. $\alpha=26.56^\circ$.

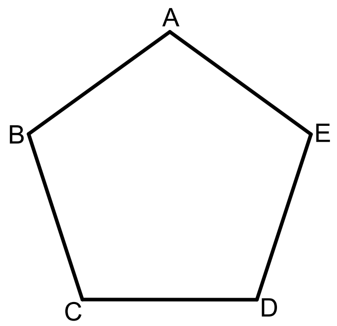
52) א. $AE=6k\sin\alpha$ ב. $P_{ACE}=k+6k\sin\alpha+k\sqrt{25-24\cos 2\alpha}$
ג. $\alpha=14.47^\circ$.

שאלות המשלבות ידע בגיאומטריה:

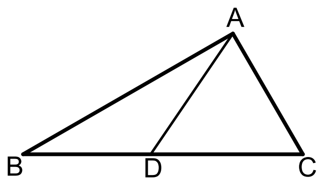
שאלות:



53) המרובע ABCD הוא מלבן.
מעבירים את האלכסונים AC ו-BD .
הנקודה E נמצאת על הצלע AB של המלבן
ומחלקת אותה כך ש- 2BE = AE .
ידוע כי הקטע OE מאונך לאלכסון AC
ושווה ל-BE.
הקטע CE חותך את האלכסון BD בנקודה G.
א. הוכח כי הקטע CE מאונך לאלכסון BD.
ב. הוכח כי מתקיים : 4GE = AE .
ג. נתון כי שטח המשולש BEG הוא 5 סמ"ר.
חשב את שטח המלבן ABCD.



54) באיור שלפניך נתון מחומש משוכלל ACBDE
(כל זוויותיו הן 108°) בעל אורך צלע α .
א. הבע באמצעות α את אלכסון המחומש AD.
ב. הבע באמצעות α את רדיוס המעגל
החוסם את המחומש.
ג. הבע באמצעות α את שטח המחומש.
ד. אורך רדיוס המעגל החוסם את המחומש הוא 6 ס"מ.
חשב את שטח המחומש.



55) במשולש ABC הזווית C היא 60° .
מעבירים את הקטע AD כך שנוצרים
המשולשים ACD ו-ABD.
ידוע כי רדיוס המעגל החוסם את
המשולש ACD הוא : $R_1 = \sqrt{3}$ ס"מ .
כמו כן רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא : $R_2 = 3$ ס"מ .
א. הוכח כי המשולש ABC הוא ישר זווית.
ב. היקף המשולש ABC הוא : $P = 12+4\sqrt{3}$ ס"מ .
חשב את שטח המשולש.

56) המשולש ABC הוא שווה צלעות.
הקטע DE עובר דרך הקודקוד A כך שנוצרים
שני משולשים ABD ו-ACE .
ידוע כי AC חוצה את זווית DCE במשולש DCE.

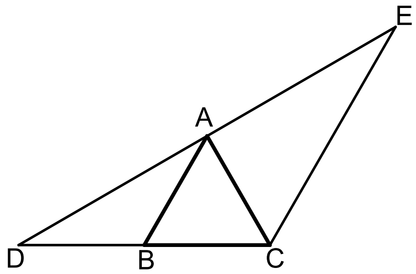
א. הוכח: $AB \parallel CE$.

ב. הוכח: $BC \cdot DE = DC \cdot AE$.

ג. נתון: $DC = 8$ ס"מ
וכי: $AC \perp DE$.

i. חשב את שטח המשולש DCE .

ii. חשב את שטח המשולש ABD.



57) מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB , AC , AD ו-AE
כך שמתקיים: $\measuredangle BAC = \measuredangle CAD = \alpha$ ו- $AB = AE$.
מעבירים את האלכסון BE במחומש ABCDE.
מתקיים: $BE \parallel CD$.
ידוע כי המרובע BCDE הוא בר חסימה.

א. הוכח כי המרובע BCDE הוא טרפז שווה שוקיים.

ב. נתון כי המשולש ACD הוא ש"ש (AC = AD).
הוכח כי: $\Delta ABD \cong \Delta ACE$.

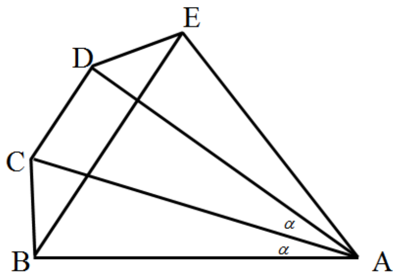
ג. ידוע כי: $\measuredangle ADC = 3\alpha + 2.5$ ו- $\measuredangle ADE = 3\alpha - 10$.
הוכח כי משולש ADE הוא ישר זווית.

ד. נסמן: $AB = m$.

i. הבע באמצעות m את צלעות הטרפז BCDE.

ii. הבע באמצעות m את שטח המחומש ABCDE.

iii. מצא את m אם ידוע כי שטח המחומש ABCDE
הוא 46.284 סמ"ר. (עגל למספר שלם).

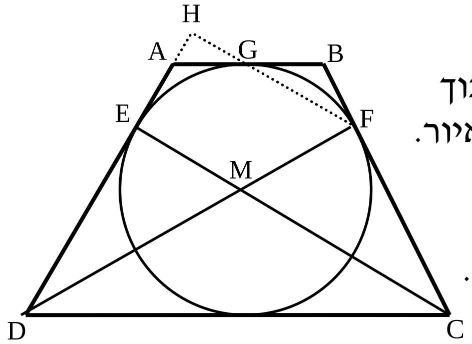


58) הטרפז ABCD הוא שווה שוקיים. חוסמים מעגל בתוך
הטרפז אשר משיק לו בנקודות E, F ו-G כמתואר באיור.
הקטעים DF ו-CE חוצים את זוויות הטרפז
ונחתכים בנקודה M.

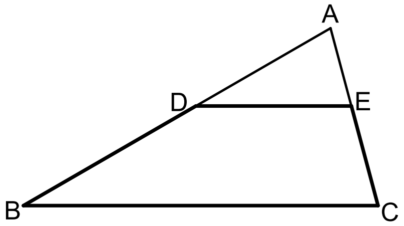
א. הוכח כי הנקודה M היא מרכז המעגל החסום.

ב. חשב את זוויות הטרפז.

ג. ממשיכים את GF ואת AD כך שהם נפגשים בנקודה H.
חשב את היחס $\frac{EM}{FH}$.



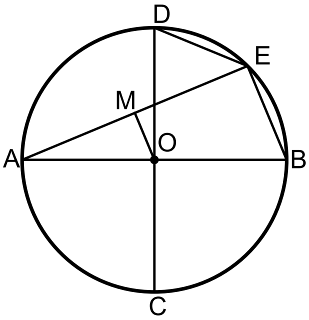
59) המרובע BDEC הוא טרפז $BC \parallel DE$.
המשכי השוקיים BD ו-CE נפגשים בנקודה A
כך שהמשולש ABC הוא שווה שוקיים (AB = BC).
נתון: 18 ס״מ = AB, $\sphericalangle ADE = 30°$.



א. סמן את אורך הבסיס DE ב-x
ואת שטח הטרפז BDEC ב-S.
הבע את S באמצעות x.

ב. על הקטע AD בונים ריבוע.
ידוע כי שטחו קטן ב-1 סמ״ר משטח הטרפז BDEC.
חשב את היחס: $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}$.

60) במעגל שמרכזו O מעבירים את הקטרים AB ו- CD
המאונכים זה לזה. E היא נקודה על היקף
המעגל המקיימת: 15 ס״מ = BE + DE.
מעבירים את המיתר AE.
הקטע OM מאונך למיתר AE ושווה למיתר DE.



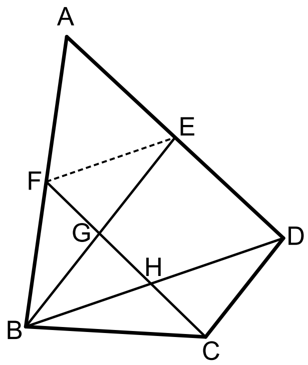
א. הוכח כי המרובע OMEB הוא טרפז ישר זווית.

ב. מצא את אורך המיתר BE.
נתון כי שטח הטרפז הוא 90 סמ״ר.

ג. מצא את רדיוס המעגל.

ד. חשב את זווית B.

61) BD הוא אלכסון במרובע הבר-חסימה ABCD.
הנקודות E ו- F הן בהתאמה אמצעי
הצלעות AD ו- AB במרובע.
מעבירים את הקטעים BE ו-CF כך ש- $BE \parallel CD$.
נתון כי הזוויות $\sphericalangle A$ ו- $\sphericalangle BFE$ משלימות ל- $180°$.



א. הוכח: $\Delta BFE \sim \Delta BCD$.

ב. נתון כי: BE = 7.5 וכי: $GE - HD = 17\frac{1}{15}$.
חשב את אורך הקטע FE.

ג. נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש BED
הוא: 4.001 ס״מ = R. מצא את זווית $\sphericalangle EBD$.

תשובות סופיות:

53) ג. 120 סמ"ר

54) א. 1.618α ב. 0.85α ג. $1.72\alpha^2$ ד. $S=85.57$

55) ב. $S=8\sqrt{3}$

56) ג.i. $S_{\text{CDE}}=16\sqrt{3}$ ג.ii. $S_{\text{ABD}}=4\sqrt{3}$

57) ד.i. $\text{BE}=1.2175m$, $\text{CD}=0.4776m$, $\text{DE}=0.4663m$, $\text{BC}=0.4663m$

62) ד.ii. $0.7232m^2$ ד.iii. $m=$ 8 סמ" מ

58) ב. $60°$, $120°$ ג. $\frac{2}{3}$

59) א. $S=81-0.25x^2$ ב. $\frac{S_{\text{ADE}}}{S_{\text{ABC}}}=\frac{16}{81}$

60) ב. BE = 10 ג. R = 13 ד. $\sphericalangle B=67.38°$

61) ב. FE = 4 ג. $16.73°$

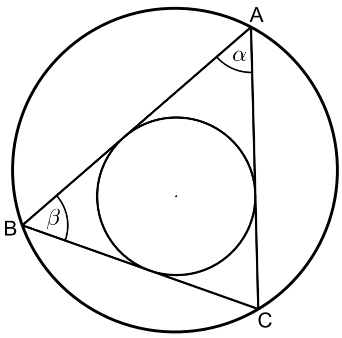
שאלות מסכמות:

שאלות:

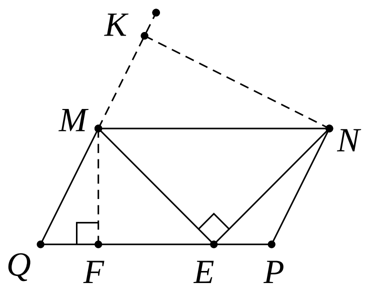
1) המשולש ABC חסום מעגל שרדיוסו R.
נתון כי $\sphericalangle B=\beta$, $\sphericalangle A=\alpha$.

א. הבע את רדיוס המעגל החסום במשולש בעזרת R , β , α.

ב. נתון כי: $\alpha=\beta=60^\circ$.
חשב את רדיוס המעגל החסום במשולש בעזרת R.



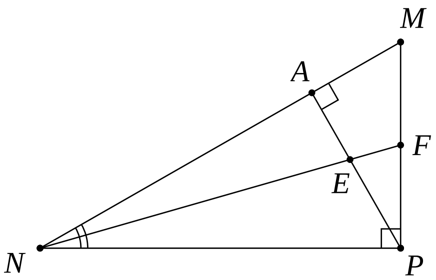
2) במקבילית MNQP נקודה E נמצאת על הצלע PQ כך ש- $\sphericalangle MEN=90^\circ$ (ראה ציור).
נתון: MQ = 12 ס"מ , $\triangleleft MQP=70^\circ$, $\triangleleft MNE=40^\circ$.
מצא את הגובה MF, ואת הגובה NK.



3) במשולש ישר-זווית MNP, $(\sphericalangle P=90^\circ)$
PA הוא גובה ליתר ו-NF חוצה את הזווית $\sphericalangle MNP$.
PA ו-NF נחתכים בנקודה E (ראה ציור).
נתון: NP = 24 ס"מ , $\triangleleft MNP=40^\circ$.

א. מצא את אורך הקטע NA.

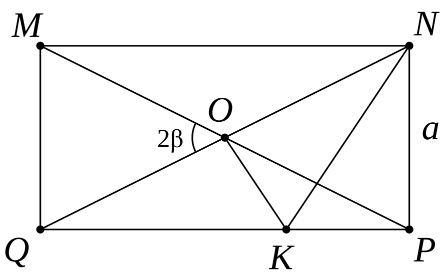
ב. מצא את אורך הקטע EF.



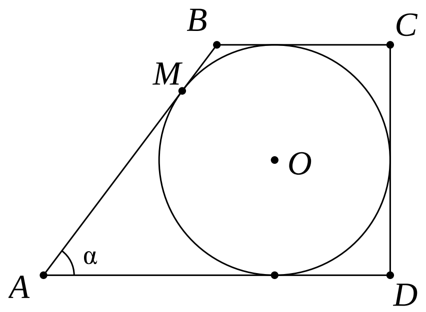
4) אלכסוני המלבן MNPQ נחתכים בנקודה O.
מנקודה O מעלים אנך ל-QN החותך את QP בנקודה K (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle MOQ=2\beta$, $NP=a$.

א. הבע את אורך הקטע OK באמצעות β ו-a.

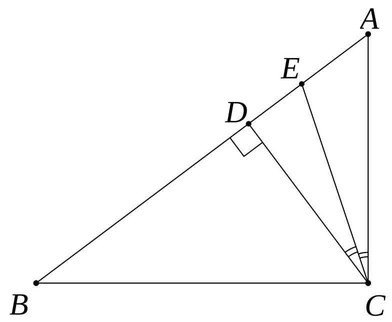
ב. הבע את היקף המשולש NOK באמצעות β ו-a.



5) בטרפז ישר-זווית ABCD חסום מעגל שמרכזו O.
הנקודה M היא נקודת ההשקה של המעגל עם השוק AB.
נתון: AM = 12 ס"מ , $\sphericalangle BAD=\alpha$.
א. הבע את רדיוס המעגל בעזרת α .
ב. הבע את היקף הטרפז בעזרת α .

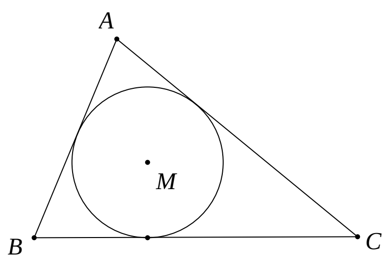


6) במשולש ישר-זווית ABC (ראה ציור) נתון:
8 ס"מ = BC , $\sphericalangle ACB=90°$, $\sphericalangle ABC=\beta$.
CD הוא הגובה ליתר.
CE הוא חוצה-הזווית $\sphericalangle ACD$.
הבע את אורך הקטע AE באמצעות β .

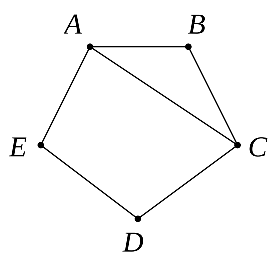


7) נתון מעגל שרדיוסו R . מצולע משוכלל בעל 9 צלעות חוסם את המעגל הזה.
מצולע משוכלל אחר בעל 9 צלעות חסום בתוך מעגל זה.
חשב את היחס בין שטח המצולע החוסם את המעגל לשטח המצולע החסום במעגל זה.

8) ΔABC הוא משולש שווה-שוקיים (AB = AC) שאורך בסיסו 12 ס"מ.
AD הוא הגובה לבסיס BC ו-CE הוא הגובה לשוק AB.
שני הגבהים נחתכים בנקודה O. נתון: $\sphericalangle ABC=\alpha$ $(\alpha>45°)$.
א. הבע את היחס $AO:DO$ באמצעות α .
ב. הראה כי בעבור $\alpha=60°$ הביטוי שמצאת בסעיף א' מתאים לתכונות הגאומטריות של משולש שווה-צלעות.

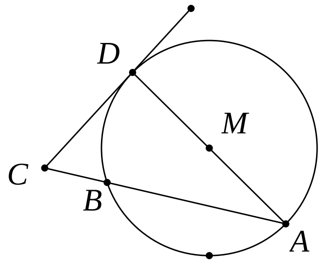


9) במשולש ABC חסום מעגל שמרכזו M ורדיוסו r (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle C=46°$, $\sphericalangle B=62°$.
א. הבע באמצעות r את אורך הצלע BC .
ב. נתון: 16 ס"מ = BC. מצא את r .



10) במחומש משוכלל ABCDE (ראה ציור)
אורך האלכסון AC הוא 15 ס"מ.
חשב את שטח המחומש.

11) מנקודה C הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו M ורדיוסו R מעבירים משיק CD וחותך CBA למעגל (ראה ציור).

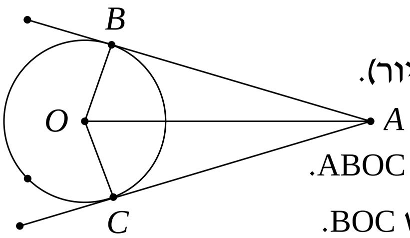


נתון: $CD=\frac{3}{5}R$.

א. מצא את זוויות המשולש CAD.

ב. הבע באמצעות R את שטח המשולש BCD.

12) מנקודה A, הנמצאת מחוץ למעגל שמרכזו O, יוצאים שני משיקים למעגל, AB ו-AC (ראה ציור).



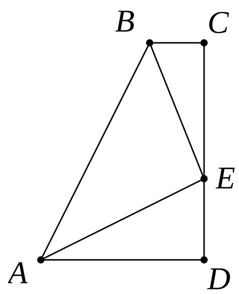
נתון: $\sphericalangle BAC=2\alpha$, AO = 10 ס"מ.

א. הבע באמצעות α את S_1, שטח המרובע ABOC.

ב. הבע באמצעות α את S_2, שטח המשולש BOC.

ג. הראה שאם $\alpha=30°$, אזי: $S_1=4\cdot S_2$.

13) ABCD הוא טרפז ישר-זווית $(\sphericalangle C=\sphericalangle D=90°)$.



נקודה E נמצאת על הצלע DC (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle AEB=90°$, $AE=BE=k$ ו- $\sphericalangle CBE=\beta$.

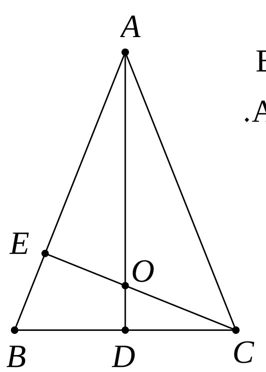
הבע באמצעות k ו- β את שטח הטרפז.

14) ענה על השאלות הבאות:

א. במעושר משוכלל, ששטחו 100 סמ"ר, חוסמים מעגל. מצא את רדיוס המעגל החסום במעושר.

ב. מעושר משוכלל חסום במעגל, שאת רדיוסו מצאת בסעיף א'. מצא את שטח המעושר המשוכלל הזה.

15) ABC הוא משולש שווה-שוקיים (AB = AC) שבו זווית הראש היא זווית חדה. נתון כי זווית הבסיס היא β ואורך הבסיס BC הוא 2α. AD הוא הגובה לבסיס BC ו-CE הוא הגובה לשוק AB. הגבהים AD ו-CE נפגשים בנקודה O (ראה ציור).

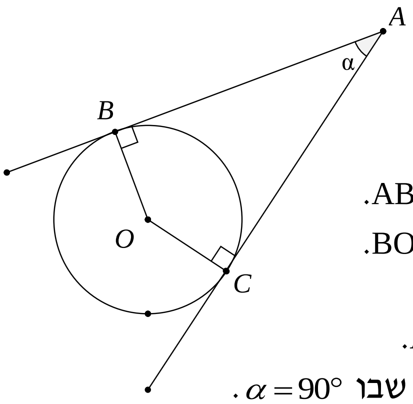


א. הבע באמצעות α ו- β את אורכי הקטעים CO ו-CE.

ב. הבע באמצעות β את היחס $\frac{CO}{CE}$.

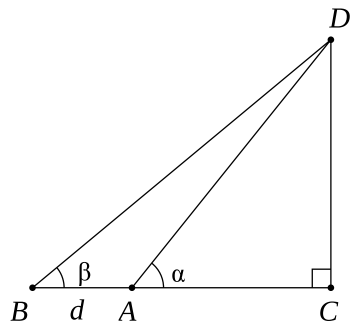
ג. חשב את היחס שמצאת בסעיף ב' כאשר $\beta=60°$, והסבר מהי המשמעות הגאומטרית של התוצאה שקיבלת.

16) מנקודה A יוצאים שני משיקים למעגל שמרכזו O, שאורכם m (כלומר: $AB=AC=m$).
נקודות ההשקה הן B ו-C, והזווית שבין המשיקים היא $\sphericalangle BAC=\alpha$ (ראה ציור).

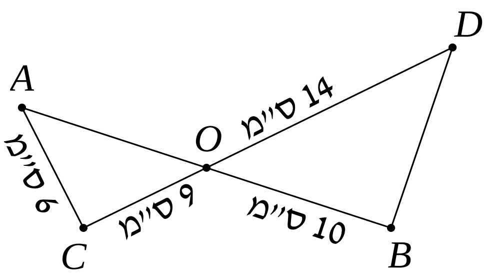


א. הבע באמצעות m ו- α את שטח המשולש ABC.
ב. הבע באמצעות m ו- α את שטח המשולש BOC.
ג. הבע באמצעות α את היחס שבין שטחו של המשולש BOC לבין שטחו של המשולש ABC.
ד. בדוק את תשובתך לסעיף ג' למקרה המיוחד שבו $\alpha=90^\circ$.

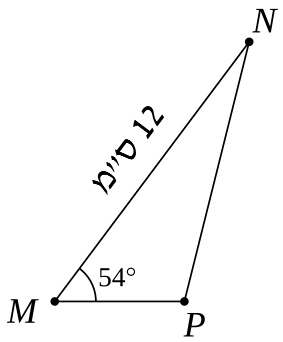
17) במשולש ישר-זווית DAC נתון $\sphericalangle DAC=\alpha$.
מאריכים את הניצב AC כך ש- $AB=d$.
נתון כי: $\sphericalangle DBA=\beta$ (ראה ציור).
סמן: $AC=x$.
הבע את x באמצעות d, α ו- β.



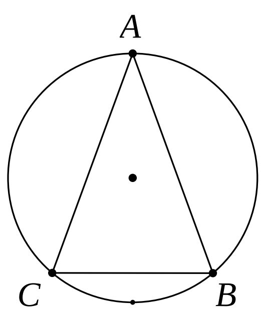
18) הקטעים AB ו-CD נחתכים בנקודה O.
נתון כי: $\sphericalangle OAC=60^\circ$,
$CO=$ 9 ס"מ, $AC=$ 6 ס"מ,
$OD=$ 14 ס"מ, $OB=$ 10 ס"מ.
חשב את $\sphericalangle ODB$.



19) במשולש MNP גודל הזווית M הוא 54°.
נתון כי אורך הצלע MN הוא 12 ס"מ
(ראה ציור), והצלע NP ארוכה ב-7 ס"מ מהצלע MP.
א. חשב את אורך הצלע NP.
ב. PA הוא תיכון לצלע MN.
חשב את שטח המשולש PAN.

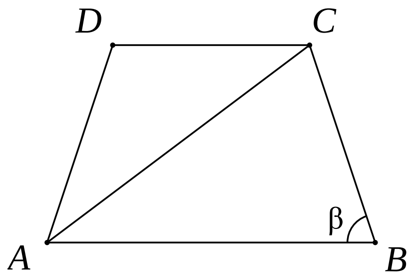


20) המשולש השווה-שוקיים ABC (AB = AC)
חסום במעגל (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle ABC=\beta$.
כמו כן ידוע שאורך רדיוס המעגל הוא 20 ס"מ.
א. הבע בעזרת β את שטח המשולש ABC.
ב. חשב את שטח המשולש ABC בעבור $\beta=45^\circ$.

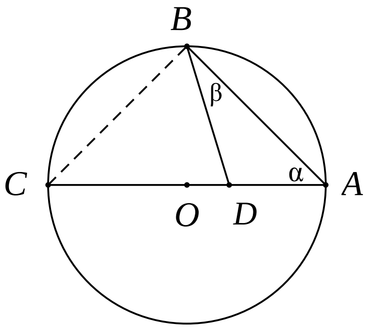


21) במשולש ABC הזווית $\sphericalangle C$ היא בת $60°$, אורך הצלע AB הוא $\sqrt{13}$ ס"מ, והיקף המשולש הוא $7+\sqrt{13}$ ס"מ. חשב את שטח המשולש.

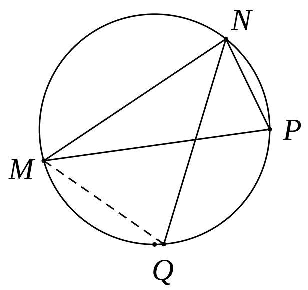
22) בטרפז שווה-שוקיים ABCD (AD = BC)
אורך הבסיס הגדול AB שווה לאורך האלכסון.
זווית הבסיס היא β $(\beta > 60°)$, (ראה ציור).
הבע באמצעות β את היחס שבין שטח המשולש ACD לשטח המשולש ABC.



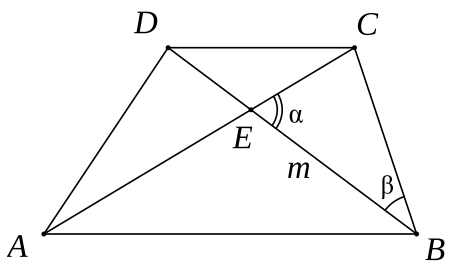
23) הקודקודים A ו- B של המשולש ABD נמצאים על היקף מעגל שאורך רדיוסו 12 ס"מ ומרכזו O.
הקודקוד D של המשולש ABD נמצא על הרדיוס OA.
א. הבע בעזרת α ו- β את שטח המשולש ABD.
ב. הבע בעזרת α ו- β את היחס שבין שטח המשולש ABC לשטח המשולש ABD.



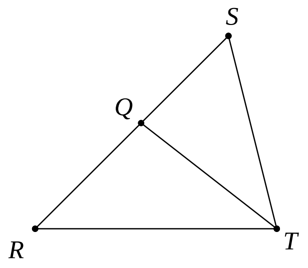
24) משולש MNP חסום במעגל.
המיתר NQ חוצה את הזווית $\sphericalangle MNP$.
נתון: $\sphericalangle MNP = 80°$, $\sphericalangle MPN = 70°$,
NP = 12 ס"מ.
חשב את אורך המיתר MQ.



25) נתון טרפז ABCD $(AB \| CD)$.
הנקודה E היא נקודת המפגש של אלכסוני הטרפז.
נתון: $DC = BC$, $BE = m$,
$\sphericalangle CEB = \alpha$, $\sphericalangle CBD = \beta$ (ראה ציור).
הבע את אורכי בסיס הטרפז:
AB ו- CD באמצעות m, α ו- β.



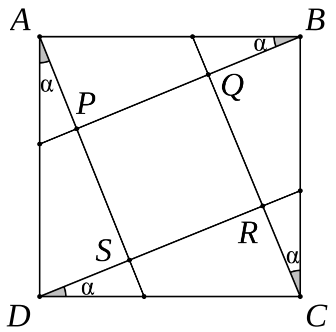
26) במשולש RST נתון: QT הוא חוצה-הזווית $\sphericalangle RTS$
(ראה ציור), $QS = m$, $RQ = \sqrt{2}$,
$\sphericalangle RST = \alpha$, $\sphericalangle TRQ = 45°$.
א. הבע את $\sin\alpha$ באמצעות m.
ב. נתון כי: $m = \frac{2}{\sqrt{3}}$.
חשב את זוויות המשולש RST.



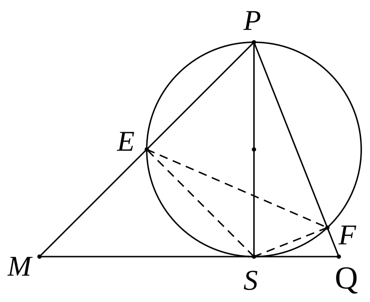
27) במשולש שווה שוקיים ABC (AB = AC) התיכון לשוק שווה באורכו לרדיוס המעגל החוסם את המשולש. חשב את זווית הבסיס של המשולש.

28) נתון משולש שצלעותיו kt , $2t$, t.
א. לאיזה ערכים של הקבוע k המשולש הוא קהה זווית?
ב. נתון $k = \sqrt{7}$. הבע ע״י t את אורך חוצה הזווית הקהה.

29) בתוך הריבוע ABCD נתון, העבירו ארבעה קטעים היוצרים את אותה זווית α עם צלעות הריבוע כך שהתקבל ריבוע פנימי PQRS.
א. הוכח כי: $\frac{PQ}{AB} = \cos\alpha - \sin\alpha$.
ב. לאיזו זווית α מתקיים: $PR = AB$?



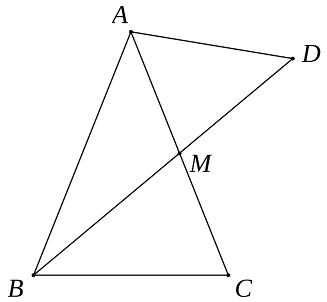
30) PS הוא גובה במשולש PMQ (ראה ציור).
נתון $\sphericalangle SPQ = \beta$, $\sphericalangle MPS = \alpha$, $PS = h$.
א. הבע את שטח המשולש PMQ באמצעות h , α ו- β.
ב. מעגל שקוטרו PS חותך את הצלעות PM ו-PQ בנקודות E ו-F בהתאמה (ראה ציור).
i. הבע באמצעות α ו- β את $\sphericalangle ESF$.
ii. הבע באמצעות α ו- β את היחס בין שטח המשולש ESF לשטח המשולש PMQ.



31) במשולש ABC הצלעות הן a, b ו-c והזוויות שמונחות מולן הן: α, β ו-γ בהתאמה.

א. הבע את אורך התיכון m_a (התיכון לצלע a) באמצעות הצלעות b ו-c והזווית α.

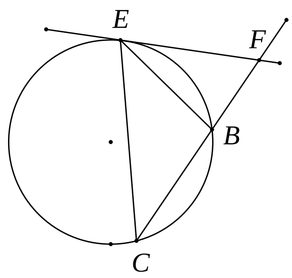
ב. בדוק את הנוסחה שמצאת למקרה שבו המשולש ABC הוא שווה צלעות.



32) במשולש שווה שוקיים ABC ‏(AB = AC),
BM הוא תיכון לשוק (ראה ציור).
נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא 10 ס"מ וכן נתון ש-$\sphericalangle BAC = 50°$.

א. מצא את גודל הזווית $\sphericalangle BMC$.

ב. ממשיכים את BM עד לנקודה D,
כך שרדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא 14 ס"מ.
מצא את שטח המשולש AMD.

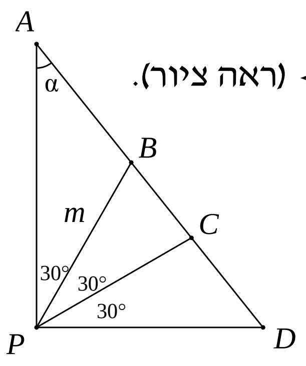


33) משולש שווה שוקיים BCE ‏(BC = BE) חסום במעגל שרדיוסו R.
זווית הבסיס של המשולש BCE היא α.
בנקודה E העבירו משיק למעגל החותך את המשך השוק BC בנקודה F (ראה ציור).

א. בטא את שטח המשולש BEF באמצעות R ו-α.

ב. מצא את הערך של α שבעבורו שטח המשולש BCE שווה לשטח המשולש BEF.

34) בטרפז BCDE ‏$(BC \| ED)$ אורך הבסיס BC הוא 12 ס"מ.
הזווית שבין הבסיס BC לשוק DC היא $80°$.
אורך האלכסון BD הוא 16 ס"מ, והוא חוצה את הזווית $\sphericalangle CBE$.
חשב את היקף הטרפז.

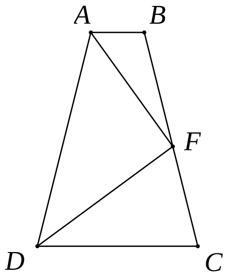


35) במשולש ישר-זווית APD מחלקים את הזווית הישרה $\sphericalangle P$ לשלוש זוויות שוות, כלומר $\sphericalangle APB = \sphericalangle BPC = \sphericalangle CPD = 30°$ (ראה ציור).
נתון כי: $PB = m$, $\sphericalangle PAD = \alpha$.

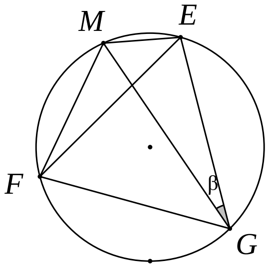
א. היעזר במשפט הסינוסים,
והבע את AB, AC, BD ו-CD באמצעות m ו-α.

ב. הוכח כי: $\dfrac{AC \cdot BD}{AB \cdot CD} = 3$.

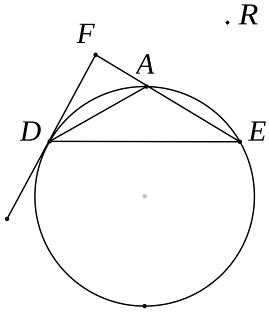
36) בטרפז שווה שוקיים ABCD $(AD = BC\ ,\ AB \| DC)$,
F היא נקודה על השוק BC, כך ש-DF חוצה את
הזווית $\sphericalangle CDA$ ו-AF חוצה את הזווית $\sphericalangle DAB$ (ראה ציור).
נתון: $AB = \beta\ ,\ \sphericalangle FAB = \beta$.
הבע באמצעות b ו- β את אורך הבסיס DC.



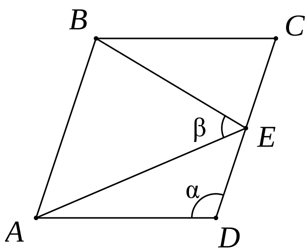
37) משולש שווה צלעות EFG חסום במעגל שרדיוסו R.
M היא נקודה על המעגל. נתון: $\sphericalangle MGE = \beta$ (ראה ציור).
א. הוכח כי: $ME + MF = MG$.
ב. אם $ME = R$ מה תוכל לומר על MG?



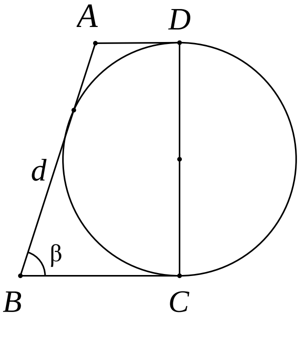
38) משולש שווה שוקיים ADE (AD = AE) חסום במעגל שרדיוסו R.
ישר המשיק למעגל בנקודה D חותך את המשך
הצלע AE בנקודה F (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle AE = \alpha$ $(60° < \alpha < 180°)$.
א. הבע את שטח המשולש ADF באמצעות R ו- α.
ב. הבע באמצעות α את היחס שבין שטח
המשולש ADE ובין שטח המשולש ADF.
ג. חשב את α אם שטח המשולש ADE שווה לשטח המשולש ADF.

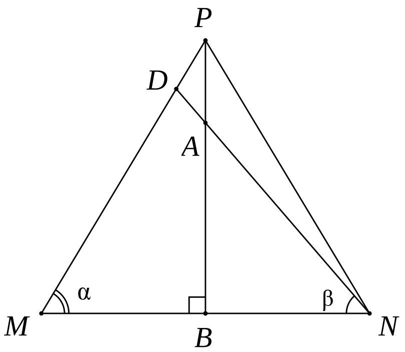


39) במעוין ABCD הנקודה E היא אמצע הצלע CD.
נתון: $\sphericalangle ADC = \alpha\ ,\ \sphericalangle AEB = \beta$ (ראה ציור).
הוכח כי: $\cos\beta = \dfrac{3}{\sqrt{25 - 16\cos^2\alpha}}$.



40) נתון טרפז ABCD ונתון מעגל. השוק DC הוא קוטר המעגל.
השוק AB משיקה למעגל, והבסיסים AD ו- BC
משיקים גם הם למעגל בנקודות D ו- C בהתאמה (ראה ציור).
נתון כי: $\sphericalangle B = \beta\ ,\ AB = d$.
א. הבע באמצעות d את סכום בסיסיו של הטרפז.
ב. הבע באמצעות d ו- β את היקף הטרפז ואת השטח
של הטרפז.
ג. נתון שהיקף הטרפז 25 ס"מ ושטחו 25 סמ"ר.
חשב את הזווית החדה β.





41) במשולש שווה שוקיים PMN $(PM = PN)$,

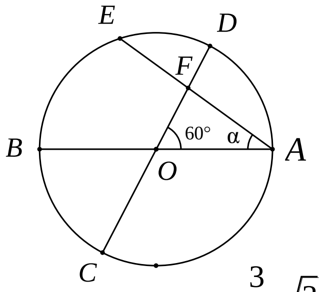
A היא נקודה על הגובה PB, כך ש- $PA = \frac{1}{5} \cdot PB$.

הישר NA חותך את השוק PM בנקודה D (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle DNM = \alpha$, $\sphericalangle DNB = \beta$ ו- $BN = \alpha$.

א. חשב את היחס $\tan\beta : \tan\alpha$.

ב. חשב את היחס $PM:DM$.



42) במעגל שמרכזו O ורדיוסו R מעבירים שני קטרים AB ו- CD הנחתכים בזווית של $60°$.

מיתר AE, היוצר זווית α עם הקוטר AB, חותך את הקוטר CD בנקודה F (ראה ציור).

א. הבע את שטח המשולש ACF באמצעות R ו- α.

ב. הוכח שכאשר $\alpha = 30°$, שטח המשולש ACF הוא $\frac{3}{8} \cdot \sqrt{3} \cdot R^2$.

תשובות סופיות:

1) א. $r=\dfrac{2R\sin(\alpha+\beta)\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\alpha}{2}}{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}=4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ ב. $\frac{1}{2}R$

2) MF = 11.28 ס"מ , KN = 21.52 ס"מ

3) א. NA = 18.385 ס"מ ב. EF = 5.975 ס"מ

4) א. $OK=\dfrac{a}{2\cos\beta}$ ב. $\dfrac{a}{2\sin\beta}\cdot\left[1+\tan\beta+\dfrac{1}{\cos\beta}\right]$

5) א. $12\cdot\tan\dfrac{\alpha}{2}$ ב. $24\cdot\left(1+\tan\dfrac{\alpha}{2}\right)^2$

6) $AE=8\sin\beta\cdot\left[\tan\beta-\tan\left(\frac{1}{2}\beta\right)\right]=8\tan\beta\cdot\tan\left(\frac{1}{2}\beta\right)$

7) $2\cdot\dfrac{\tan 20^\circ}{\sin 40^\circ}=\dfrac{1}{\cos^2 20^\circ}\approx 1.132$

8) א. $-2\cdot\dfrac{\tan\alpha}{\tan 2\alpha}=-\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha-1$

ב. מתקיים: $AO=2\cdot DO$ (מפגש הגבהים הוא גם מפגש התיכונים).

9) א. $BC=r\cdot(\tan 59^\circ+\tan 67^\circ)\approx 4.02\cdot r$ ב. $r=\dfrac{16}{\tan 59^\circ+\tan 67^\circ}\approx 3.98$

10) $S=$ 147.86 סמ"ר

11) א. $\sphericalangle A=16.7^\circ$, $\sphericalangle D=90^\circ$, $\sphericalangle C=73.3^\circ$ ב. $S\approx 0.0495\cdot R^2$

12) א. $S_1=100\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=50\cdot\sin 2\alpha$

ב. $S_2=50\cdot\sin^2\alpha\cdot\sin(180^\circ-2\alpha)=50\cdot\sin^2\alpha\cdot\sin 2\alpha$

13) א. $S=\dfrac{1}{2}k^2\cdot(1+2\sin\beta\cos\beta)$ (או כל תשובה שקולה). ב. 27 יח"ש.

14) א. $r\approx$ 5.548 ס"מ ב. $S\approx$ 90.45 סמ"ר

15) א. $CO=\dfrac{a}{\sin\beta}$, $CE=2a\cdot\sin\beta$ ב. $\dfrac{CO}{CE}=\dfrac{1}{2\sin^2\beta}$

ג. היחס הוא: $\dfrac{2}{3}$ (בדומה למפגש התיכונים במשולש)

16) א. $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}m^2\cdot\sin\alpha$ ב. $S_{\Delta BOC}=\frac{1}{2}m^2\cdot\sin\alpha\cdot\tan^2\frac{\alpha}{2}$

ג. יחס השטחים: $\tan^2\frac{\alpha}{2}$

ד. במקרה זה ABOC הוא ריבוע, ויחס השטחים שווה ל-1 $(\tan^2 45°=1)$.

17) $AC=x=d\cdot\frac{\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$

18) $\sphericalangle ODB\approx 44.7°$

19) א. $NP=$ 10.38 ס"מ ב. $S_{\Delta PAN}=$ 8.2 סמ"ר

20) א. $S=800\cdot\sin^2\beta\cdot\sin 2\beta$ ב. 400 סמ"ר

21) $S_{\Delta ABC}=3\cdot\sqrt{3}\approx$ 5.196 סמ"ר

22) יחס השטחים הוא: $1-4\cos^2\beta=\left(-\frac{\sin 3\beta}{\sin\beta}\right)$ או כל תשובה שקולה.

23) א. $S_{\Delta ABD}=288\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ ב. $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta\cdot\cos\alpha}$

24) $MQ\approx$ 15.43 ס"מ

25) $AB=m\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$, $DC=m\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

26) א. $\sin\alpha=\frac{1}{m}$ ב. $15°$, $120°$, $45°$ או $75°$, $60°$, $45°$

27) $\alpha\approx 20.7$

28) א. $\sqrt{5}<k<3$ או $1<k<\sqrt{3}$ ב. $\frac{2}{3}\cdot t\approx 0.667t$

29) $\alpha=15°$

30) א. $S_{\Delta MPQ}=\frac{1}{2}\cdot h^2\cdot(\tan\alpha+\tan\beta)$ ב. i. $\sphericalangle ESF=180°-(\alpha+\beta)$

ב. ii. $S_{\Delta EFS}:S_{\Delta MPQ}=\frac{1}{4}\cdot\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta$

31) א. $m_a=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{b^2+c^2+2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha}$ ב. $m_a=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot b$

32) א. $\sphericalangle BMC=79.5°$ ב. $S_{\Delta AMD}=$ 54.1 סמ"ר

33) א. $S_{\Delta BEF} = \dfrac{2R^2 \cdot \sin^3 \alpha \cdot \sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}$ ב. $\alpha = 45°$

34) $P_{BCDE} = 51.09$

35) א. $AC = \dfrac{\sqrt{3} \cdot m \cdot \sin(30° + \alpha)}{2 \cdot \sin(60° + \alpha) \cdot \sin\alpha}$, $AB = \dfrac{m}{2 \cdot \sin\alpha}$, $BD = \dfrac{\sqrt{3} \cdot m}{2 \cdot \cos\alpha}$,

$CD = \dfrac{m \cdot \sin(30° + \alpha)}{2 \cdot \sin(60° + \alpha) \cdot \cos\alpha}$ ב. הוכחה.

36) $DC = \dfrac{-b \cdot \tan\beta}{\tan 3\beta}$

37) ב. MG הוא קוטר במעגל.

38) א. $S_{\Delta ADF} = \dfrac{-2R^2 \cdot \cos^3 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin\alpha}{\cos(1.5\alpha)}$ ב. $\dfrac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ADF}} = -\dfrac{\cos(1.5\alpha)}{\cos(0.5\alpha)}$

ג. $\alpha = 90°$

40) א. $AD + BC = d$ ב. $P = 2d + d\sin\beta$, $S = \dfrac{1}{2}d^2 \cdot \sin\beta$

ג. $\beta = 30°$

41) א. $\tan\beta : \tan\alpha = \dfrac{4}{5} = 0.8$ ב. $PM : DM = \dfrac{9}{8} = 1.125$

42) א. $S = \dfrac{3R^2 \cdot \sin(30° + \alpha)}{4 \cdot \sin(60° + \alpha)}$.

מתמטיקה למכינה באקדמיה

פרק 5 - זיהוי משולשים על פי קשר בין זוויות וצלעות

תוכן העניינים

זיהוי על פי זוויות בלבד:

סיכום כללי:

סגנון השאלות:

- הוכח: אם זויות המשולש α,β,γ מקיימות את התנאי XXX הרי המשולש ישר זוית.
- הוכח: אם זויות המשולש α,β,γ מקיימות את התנאי XXX הרי המשולש שווה שוקיים.
- הוכח: אם זויות המשולש α,β,γ מקיימות את התנאי XXX הרי המשולש ישר זוית או שווה שוקיים.

זהויות חשובות שחוזרות על עצמן:

במשולש מתקיים תמיד: $\alpha+\beta+\gamma=180$.

- $\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\gamma\ ,\ \sin(\beta+\gamma)=\sin\alpha\ ,\ \sin(\alpha+\gamma)=\sin\beta}$
- $\boxed{\cos(\alpha+\beta)=-\cos\gamma\ ,\ \cos(\beta+\gamma)=-\cos\alpha\ ,\ \cos(\alpha+\gamma)=-\cos\beta}$

מחצית מהזוויות תמיד מקיימות: $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=90$.

- $\boxed{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\cos\frac{\gamma}{2}\ ,\ \sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)=\cos\frac{\alpha}{2}\ ,\ \sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)=\cos\frac{\beta}{2}}$.
- $\boxed{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\sin\frac{\gamma}{2}\ ,\ \cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)=\sin\frac{\alpha}{2}\ ,\ \cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)=\sin\frac{\beta}{2}}$.
- חשוב לזכור את הזהויות של זווית כפולה ושל סכום והפרש זוויות ופונקציות לפתיחת הביטויים המתקבלים.

אסטרטגית פתרון:

- מביאים את המשוואה לאחת מהתבניות הבאות:

$$\sin\square=\sin\triangle \;\Rightarrow\; \square=\triangle \,,\, \square=180-\triangle$$
$$\cos\square=\cos\triangle \;\Rightarrow\; \square=\triangle \,,\, \square=-\triangle$$
$$\tan\square=\tan\triangle \;\Rightarrow\; \square=\triangle$$

- מביאים את המשוואה לתבנית $A\cdot B=0$ ואז או $A=0$ או $B=0$.
כעת, לפי הדרישה בתרגיל יש לוודא שכל אחד מהמסלולים ($A=0$ או $B=0$) מוביל למה שצריך להוכיח או לסתירה.

- בתרגילים מורכבים יותר מביאים לתבנית $A\cdot B\cdot C=0$
ואז: או $A=0$ או $B=0$ או $C=0$.
ושוב, לפי הדרישה בתרגיל יש לוודא שכל אחד מהמסלולים מוביל למה שצריך להוכיח או לסתירה.

הערה:

יש להימנע מצמצום בתהליך הפתרון.

שאלות:

1) הוכח: אם זויות המשולש β , α מקיימות את התנאי $\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}=\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}$
הרי המשולש ישר זווית או שווה שוקיים.

2) הוכח: אם זויות המשולש γ , β , α מקיימות את התנאי $\cos\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$
הרי המשולש שווה שוקיים.

3) הוכח: אם זויות המשולש γ , β , α מקיימות את התנאי $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos^2\gamma=0$
הרי המשולש ישר זוית.

4) הוכח: אם זויות המשולש γ , β , α מקיימות את התנאי $\sin\gamma-\sin\beta+\sin(\gamma-\beta)=0$
הרי המשולש שווה שוקיים.

5) הוכח: אם זויות המשולש γ , β , α מקיימות את התנאי $\cos\alpha+\cos\beta=\sin\gamma$
הרי המשולש ישר זוית.

6) הוכח: אם זויות המשולש γ , β , α מקיימות את התנאי $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\sin\gamma$
הרי המשולש ישר זוית.

7) הוכח: אם זויות המשולש γ , β , α מקיימות את התנאי $\frac{\sin(\alpha+\gamma)\cos\gamma}{\sin(\alpha+\beta)\cos\beta}=\frac{1-\cos 2\beta}{1-\cos 2\gamma}$
הרי המשולש ישר זוית או שווה שוקיים.

8) הוכח: אם זויות המשולש γ , β , α מקיימות את התנאי $\sin\alpha=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$
הרי המשולש שווה שוקיים.

9) הוכח: אם זויות המשולש γ , β , α מקיימות את התנאי $\sin\alpha(\cos\gamma-\cos\beta)=\sin\beta-\sin\gamma$
הרי המשולש ישר זוית או שווה שוקיים.

10) הוכח: אם זויות המשולש β , α מקיימות $\sin(\alpha-\beta)\left[\cos(\alpha+\beta)-1\right]=\cos^2\alpha-\cos^2\beta$
הרי המשולש ישר זוית או שווה שוקיים.

11) הוכח: אם זויות המשולש γ , β , α מקיימות את התנאי $\sin^2\gamma=\sin^2\alpha+\sin^2\beta$
הרי המשולש ישר זוית.

12) הוכח: אם זויות המשולש β , α מקיימות את התנאי $\sin\alpha-\sin\beta=\cos\alpha+\cos\beta$
הרי המשולש קהה זווית.
הדרכה: זה רק נראה מפחיד - נסו להוכיח כי אחת הזויות גדולה מ- $90°$.

זיהוי על פי זוויות וצלעות יחדיו:

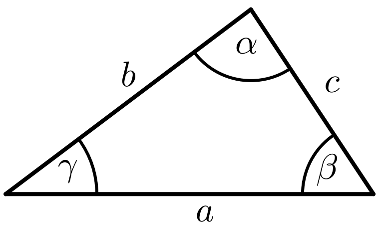
סיכום כללי:

סגנון השאלות:

הוכח: אם זויות המשולש γ , β , α והצלעות מולן c , b , a בהתאמה מקיימות את התנאי XXX הרי המשולש YYY.

משפטים חשובים:

נתון משולש עם צלעות c , b , a וזוויות γ , β , α ממולן בהתאמה כמתואר באיור.
(R הוא רדיוס המעגל החוסם של המשולש).



- משפט הסינוסים: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$.
- משפט הקוסינוסים: $c^2=a^2+b^2-2ab\sin\gamma$.

שאלות:

1) הוכח: אם זויות המשולש γ , β , α והצלעות מולן c , b , a בהתאמה מקיימות את התנאי $a\cos\alpha=b\cos\beta$ אז המשולש הוא ישר זוית או שווה שוקיים.

2) הוכח: אם זויות המשולש γ , β , α והצלעות מולן c , b , a בהתאמה מקיימות את התנאי $\frac{a}{\cos\alpha}\cdot\frac{b}{\cos\beta}=4R^2$ אז המשולש הוא ישר זוית
(R רדיוס המעגל החוסם את המשולש).

3) הוכח: אם זויות המשולש γ , β , α והצלעות מולן c , b , a בהתאמה מקיימות את התנאי $\tan\frac{\beta}{2}=\frac{b}{a+c}$ אז המשולש הוא ישר זוית.

4) הוכח: אם זויות המשולש γ , β , α והצלעות מולן c , b , a בהתאמה מקיימות את התנאי $\frac{a-b}{a}=1-2\cos\gamma$ אז המשולש הוא שווה שוקיים.

מתמטיקה למכינה באקדמיה

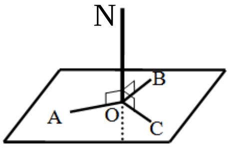
פרק 6 - טריגונומטריה במרחב - התיבה והקובייה

תוכן העניינים

הגדרות יסודיות:

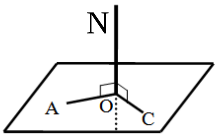
סיכום כללי:

הגדרה:



ישר המאונך לכל הישרים במישור העוברים דרך עקבו נקרא אנך למישור.
באיור הסמוך הישר ON מאונך לישרים AO , BO , CO שעל המישור.

משפט:



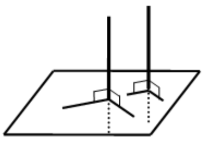
אם ישר מאונך לשני ישרים במישור העוברים דרך עקבו אזי הוא מאונך למישור כולו.
באיור הסמוך הישר ON מאונך לישרים AO , CO שעל המישור ולכן מאונך למישור כולו.

משפט:

בכל נקודה במישור אפשר להעלות אנך אחד בלבד.

משפט:

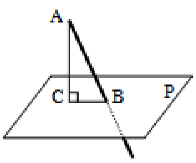
מנקודה שמחוץ למישור אפשר להוריד אנך אחד בלבד למישור זה.



משפט:

שני אנכים למישור אחד הם מקבילים.
באיור הסמוך ניתן לראות כי שני אנכים הם מקבילים.

הגדרה:

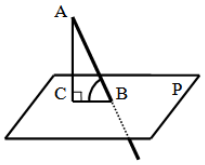


ישר החותך מישור ואינו מאונך למישור זה נקרא משופע למישור.
הקטע המחבר את עקב האנך עם עקב המשופע נקרא היטל המשופע על המישור.
באיור הסמוך הקטע AC הוא אנך למישור P , AB הוא משופע למישור ו-BC הוא היטל המשופע.

הגדרה:

אורך אנך המורד מנקודה שמחוץ למישור אל המישור נקרא מרחק הנקודה מהמישור.

הגדרה:



זווית בין ישר ומישור היא הזווית שבין הישר (המשופע) ובין היטלו של הישר על המישור.
באיור הסמוך הזווית שבין הישר המשופע AB לבין המישור P היא: $\sphericalangle ABC$.

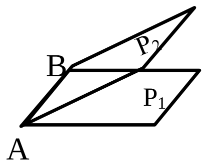
הגדרה:

שני מישורים שאינם נחתכים נקראים מישורים מקבילים.

הגדרה:

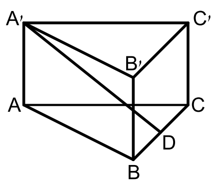
אורך האנך המורד מנקודה שעל פני מישור אחד אל מישור המקביל לו נקרא המרחק בין המישורים.

הגדרה:

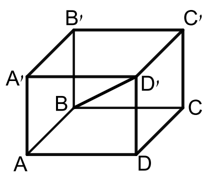


שני מישורים נחתכים יוצרים צורה גיאומטרית הנקראת פינה.
ישר החיתוך של שני המישורים נקרא מקצוע, והמישורים היוצרים את הפינה נקראים פאות.
באיור הסמוך הקטע AB הוא ישר החיתוך של שני המישורים P_1 ו-P_2 הנקרא מקצוע.
הצורות הסגורות של המישורים נקראות פאות וכל הצורה נקראת פינה.

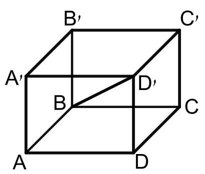
שאלות:



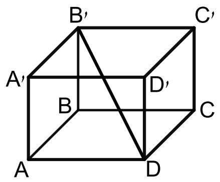
1) במנסרה ABCA'B'C' שבסיסה משולש שווה שוקיים $(AB = AC)$ הנקודה D היא אמצע המקצוע BC.
סמן את הזווית בין הישר A'D לבין הבסיס ABC.



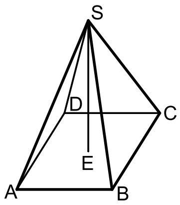
2) נתונה תיבה ABCDA'B'C'D'.
סמן את הזווית בין האלכסון BD' לבין הבסיס ABCD.



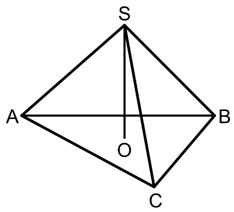
3) נתונה תיבה ABCDA'B'C'D' (ראה איור).
סמן את הזווית בין האלכסון AC' לבין הפאה D'C'CD.



4) נתונה תיבה 'ABCDA'B'C'D. סמן את הזוויות בין :
א. האלכסון B'D לבין הפאה B'C'CB.
ב. האלכסון B'D לבין הפאה D'C'CD.



5) SABCD היא פירמידה ישרה שבסיסה מלבן (ראה איור).
סמן את הזווית בין המקצוע SB לבין הבסיס ABCD.



6) SABC היא פירמידה ישרה שבסיסה
משולש שווה שוקיים $(AB = AC)$.
סמן את הזווית בין המקצוע SA לבין הבסיס ABC.

תשובות סופיות:

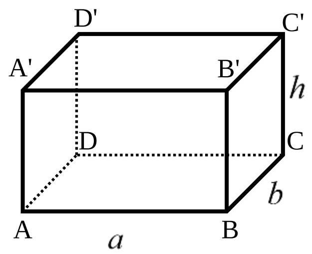
1) $\sphericalangle A'DA$
2) $\sphericalangle D'BD$
3) $\sphericalangle AC'D$
4) א. $\sphericalangle DB'C$ ב. $\sphericalangle B'DC'$
5) $\sphericalangle SBE$
6) $\sphericalangle SAO$

תיבה שבסיסה ריבוע:

סיכום כללי:

הגדרה:

גוף מרחבי הבנוי משני מלבנים זהים מקבילים במרחב (ABCD ו-A'B'C'D')
הקרויים בסיסי התיבה. כל מקצוע צדדי (AA' , BB' , CC' , DD') נקרא גובה התיבה.
המקצועות הצדדיים שווים זה לזה ומאונכים למישורי הבסיס של התיבה.

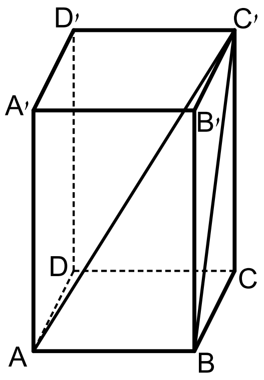


נוסחאות:

תיאור מילולי	הנוסחה
שטח בסיס התיבה	$S=a\cdot b$
נפח התיבה	$V=a\cdot b\cdot h$
שטח מעטפת התיבה	$M=2h(a+b)$
שטח פנים	$P=2h(a+b)+2ab$

- תיבה שבסיסה ריבוע: תיבה שבסיסיה הם ריבועים.
  מתקיים: $a=b$ בכל הנוסחאות.
- קובייה: אם בסיסי התיבה הם ריבועים וגובה התיבה שווה לאורך מקצוע הבסיס, דהיינו: $a=b=h$ אזי התיבה נקראת קובייה.

שאלות:



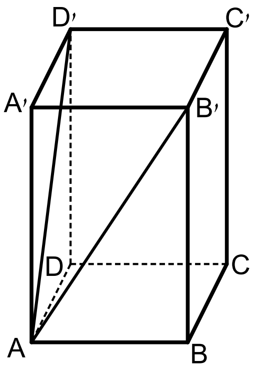
1) בתיבה ABCDA'B'C'D' שבסיסה ריבוע,
אורך אלכסון הבסיס AC הוא 15.2 ס"מ.
אורך המקצוע הצדדי AA' הוא 10 ס"מ.

א. חשב אורך מקצוע הבסיס.

ב. חשב נפח התיבה ושטח הפנים.

ג. חשב את BC', אלכסון הפאה BB'C'C, ואת אלכסון התיבה AC'.

ד. חשב את זווית $\sphericalangle AC'B$, שבין האלכסון BC' בפאה BB'C'C לבין אלכסון התיבה AC'.



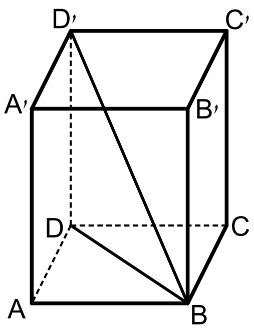
2) נתונה תיבה ABCDA'BC'D' שבסיסה ריבוע. אורך האלכסון AD' של הפאה הצדדית ADD'A' הוא 16.8 ס"מ. הזווית שנוצרת בין שני האלכסונים AD' ו- AB' היא בת $58°$.

א. חשב את אורך אלכסון הבסיס, B'D'.

ב. חשב את אורך מקצוע הבסיס AB.

ג. חשב את גובה התיבה AA'.

ד. חשב את נפח התיבה.

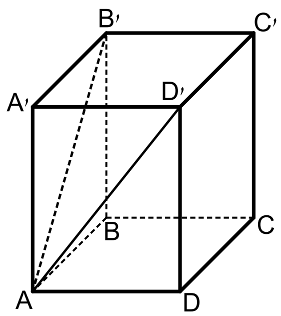


3) נתונה תיבה ABCDA'BC'D' שבסיסה ריבוע.
אורך אלכסון הבסיס BD הוא 16 ס"מ ונפח התיבה הוא 1408 סמ"ק. חשב:

א. גובה התיבה DD'.

ב. הזווית שבין אלכסון התיבה BD' לבסיס ABCD.

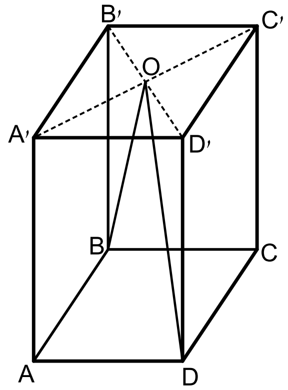
ג. אורך מקצוע הבסיס AB.



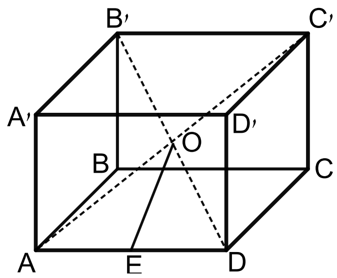
4) בתיבה ABCDA'B'C'D', שבסיסה ABCD הוא ריבוע. אורך האלכסון של הפאה הצדדית הוא 10 ס"מ. הזווית שבין אלכסוני הפאות הצדדיות היא בת $48°$.

א. חשב את אורך האלכסון של הבסיס העליון B'D'.

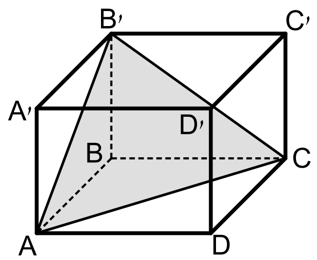
ב. חשב את שטח הבסיס של התיבה.



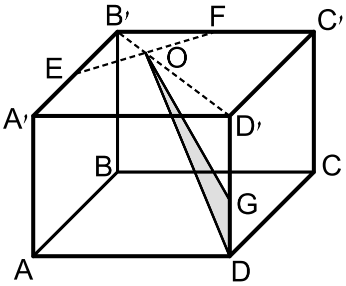
5) בתיבה ריבועית 'ABCDA'B'C'D מעבירים את האלכסונים 'B'D ו-'A'C במישור הבסיס העליון. האלכסונים נפגשים בנקודה O כך שנוצר המשולש BOD.
נתון כי: $\sphericalangle BOD = 23^\circ$ וכי אורך מקצוע הבסיס של התיבה הוא 6 ס״מ.
א. חשב את היקף המשולש BOD.
ב. חשב את הזווית שנוצרת בין הצלע OD של המשולש BOD ומישור הפאה 'AA'D'D.



6) בתיבה 'ABCDA'B'C'D שבסיסה ריבוע מעבירים את האלכסונים 'AC ו-'B'D.
האלכסונים נחתכים בנקודה O שבתוך התיבה.
מהנקודה O מעבירים את הקטע OE
כך ש-E היא אמצע המקצוע AD.
ידוע כי אורך מקצוע הבסיס של התיבה הוא 8 ס״מ ואורך אלכסון התיבה הוא 12 ס״מ.
א. מצא את אורך גובה התיבה.
ב. מצא את אורך הקטע OE.



7) בתיבה ריבועית וישרה 'ABCDA'B'C'D
מסמנים את אורך הגובה ב-h.
מעבירים את הקטעים 'AB , AC ו-'B'C
כך שנוצר המשולש 'AB'C כמתואר באיור.
הזווית הנוצרת בין אנך לצלע AC במשולש 'AB'C ומישור הבסיס ABCD היא α.
א. הבע באמצעות h ו-α את אורך מקצוע הבסיס של התיבה.
ב. הבע באמצעות h ו-α את נפח התיבה.



8) בתיבה הריבועית 'ABCDA'B'C'D שלפניך מעבירים את אלכסון הבסיס העליון 'B'D.
הנקודות E ו-F נמצאות על אמצעי המקצועות 'A'B ו-'B'C כך שהקטע EF חותך את האלכסון 'B'D בנקודה O.
מקצים נקודה נוספת - G הנמצאת על הגובה 'DD כך ש: $DG = a$. מעבירים את הקטעים GO ו-DO כך שנוצר המשולש DOG. אורך מקצוע הבסיס הוא k וגובה התיבה הוא h.
א. הבע באמצעות k ו-a את שטח המשולש DOG.
ב. מצא את היחס: $\frac{a}{h}$ עבורו מתקיים: $S_{DOG} = S_{D'OG}$.

9) בתיבה 'ABCDA'B'C'D הבסיס ABCD הוא ריבוע. גובה התיבה הוא h.
נתון: $\sphericalangle A'DC' = \beta$.

א. הראה כי אורך הצלע בבסיס התיבה הוא: $\frac{\sqrt{2}h \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\beta\right)}{\sqrt{\cos\beta}}$.

ב. לאלו ערכים של β יש פתרון לבעיה?

תשובות סופיות:

1) א. 10.748 ס"מ. ב. $V =$ 1155.2 סמ"ק, $S =$ 660.959 סמ"ר.
ג. 14.68 ס"מ, 18.19 ס"מ. ד. $\sphericalangle AC'B = 36.21°$.

2) א. 16.29 ס"מ. ב. 11.518 ס"מ. ג. 12.23 ס"מ.
ד. $V =$ 1622.485 סמ"ק.

3) א. 11 ס"מ. ב. $34.51°$ ג. 11.313 ס"מ.

4) א. 8.13 ס"מ. ב. 33.09 סמ"ר.

5) א. 51 ס"מ. ב. $8.1°$.

6) א. 4 ס"מ. ב. 4.47 ס"מ.

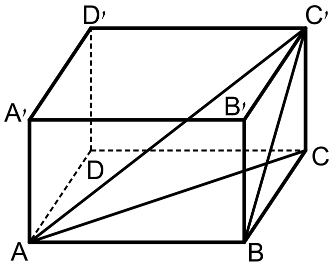
7) א. $\frac{h\sqrt{2}}{\tan\alpha}$. ב. $\frac{2h^3}{\tan^2\alpha}$.

8) א. $S_{DOG} = \frac{3ka}{4\sqrt{2}}$. ב. $\frac{a}{h} = \frac{1}{2}$.

9) ב. $0° < \beta < 90°$.

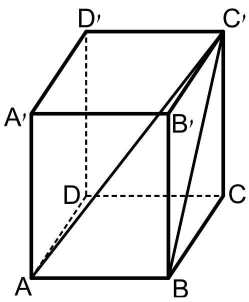
תיבה שבבסיסה מלבן:

שאלות:

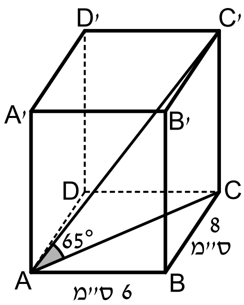


10) בתיבה שלפניך אורכי צלעות הבסיס הם:
12 ס"מ = AB , 5 ס"מ = BC. הזווית בין 'BC
אלכסון הפאה, BB'C'C, לבסיס ABCD היא 40°.

א. חשב את גובה התיבה 'CC.
ב. חשב את אורך אלכסון הבסיס, AC.
ג. חשב את הזווית בין אלכסון התיבה 'AC לבסיס ABCD.
ד. חשב את אורך אלכסון התיבה 'AC.
ה. חשב את נפח התיבה.
ו. חשב את שטח מעטפת התיבה.

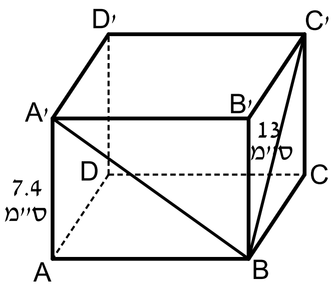


11) נתונה תיבה ABCDA'B'C'D'.
אורך צלע הבסיס: 9 ס"מ = AB.
אלכסון הפאה BB'C'C הוא: 15 ס"מ = 'BC.
חשב את הזווית בין 'BC, אלכסון הפאה BB'C'C,
לאלכסון התיבה 'AC.



12) נתונה תיבה ABCDA'B'C'D', בה מתקיים:
8 ס"מ = AD , 6 ס"מ = AB. הזווית בין אלכסון
התיבה 'AC לבסיס ABCD היא בת 65°.

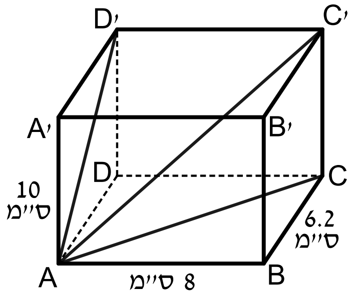
א. חשב את גובה התיבה 'CC.
ב. חשב את נפח התיבה ושטח הפנים שלה.



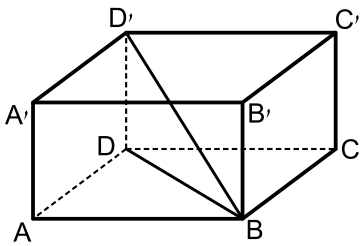
13) נתונה תיבה ABCDA'B'C'D' שבבסיסה
מלבן. גובה התיבה 'AA הוא 7.4 ס"מ.
אורך אלכסון הפאה 13 ס"מ = 'BC.
הזווית בין אלכסון הפאה A'B לבסיס ABCD
היא בת 37°.

א. חשב את אורכי צלעות הבסיס.
ב. חשב את שטח המעטפת ושטח הפנים של התיבה.

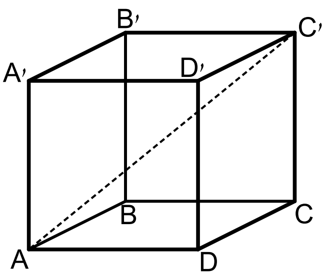
14) בתיבה 'ABCDA'B'C'D נתון:
$BC = 6.2$ ס"מ, $AB = 8$ ס"מ, $AA' = 10$ ס"מ.
חשב את:
א. אלכסון הבסיס, AC, אלכסון הפאה, 'AD ואלכסון התיבה, 'AC.
ב. הזווית בין 'AD, אלכסון הפאה 'ADD'A, לאלכסון התיבה 'AC: $\sphericalangle D'AC'$.
ג. נפח התיבה ושטח המעטפת.



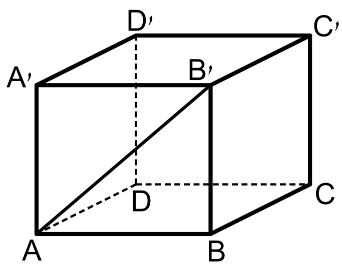
15) נתונה תיבה 'ABCDA'B'C'D. $AB = 12$ ס"מ.
אורך אלכסון הבסיס BD הוא 15 ס"מ.
נפח התיבה הוא 864 סמ"ק.
חשב את:
א. רוחב הבסיס של התיבה, BC.
ב. גובה התיבה, 'AA.
ג. הזווית בין אלכסון התיבה 'BD לבסיסה ABCD.



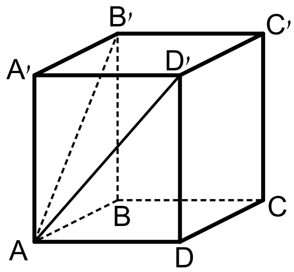
16) בתיבה 'ABCDA'B'C'D (ראה ציור), נתון:
$AD = 12$ ס"מ, $DC = 8$ ס"מ, $CC' = 14$ ס"מ.
א. חשב את האורך של אלכסון הבסיס, AC.
ב. חשב את הזווית שבין אלכסון התיבה 'AC לבין הבסיס ABCD.
ג. חשב את שטח המעטפת של התיבה.
ד. חשב את שטח הפנים של התיבה.



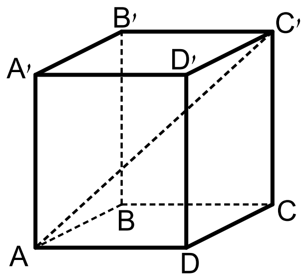
17) בתיבה 'ABCDA'B'C'D (ראה ציור) נתון:
$AB = 12$ ס"מ, $AD = 10$ ס"מ.
הזווית שבין אלכסון הפאה 'AB לבין הבסיס ABCD היא בת $35°$.
א. חשב את גובה התיבה 'BB.
ב. חשב את 'AD, אלכסון הפאה 'ADD'A.
ג. חשב את הזווית שבין 'AD לבין הבסיס ABCD.



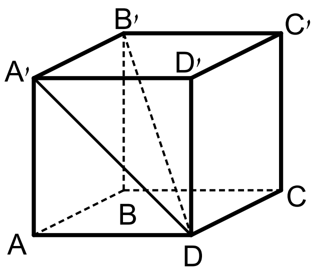
18) נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבסיסה מלבן (ראה ציור).
אורך גובה התיבה AA' הוא 10 ס"מ.
אורך AB', אלכסון הפאה $ABB'A'$ הוא 14 ס"מ.
א. חשב את אורך המקצוע AB.
הזווית שבין AD', אלכסון הפאה $ADD'A'$,
לבין הבסיס $ABCD$ היא בת $40°$.
ב. חשב את נפח התיבה.
ג. חשב את שטח מעטפת התיבה.



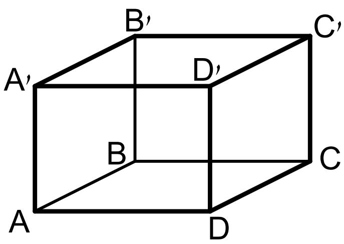
19) נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבה
$AB =$ 10 ס"מ, $AD =$ 12 ס"מ (ראה ציור).
הזווית שבין אלכסון התיבה, AC'
לבין הבסיס $ABCD$ היא בת $38°$.
א. חשב את אלכסון הבסיס.
ב. חשב את גובה התיבה.
ג. חשב את שטח פני התיבה.



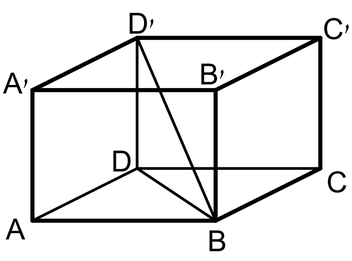
20) נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ (ראו סרטוט)
שבה: $AB =$ 10 ס"מ, $AD =$ 12 ס"מ, $AA' =$ 8 ס"מ.
א. חשב את אורך $A'D$, אלכסון הפאה $ADD'A'$.
ב. חשב את אורך האלכסון של התיבה $B'D$.

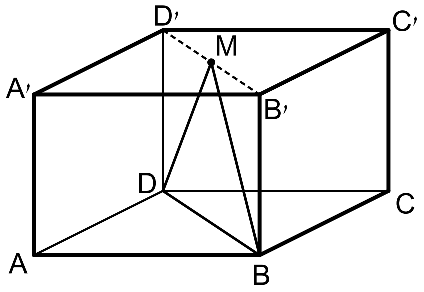


21) בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתון:
$AA' =$ 7 ס"מ, $AD =$ 12 ס"מ, $AB =$ 8 ס"מ.
חשב את אורך האלכסון BD' ואת הזווית
בינו לבין בסיס התיבה.



22) נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבסיסה מלבן.
מעבירים את האלכסונים BD ו-BD' כך
שמתקיים: $\sphericalangle DBD' = \sphericalangle ABD = \alpha$.
אורך האלכסון BD יסומן ב-a.
א. הבע באמצעות a ו-α את:
i. אורך התיבה – AB.
ii. רוחב התיבה – AD.
iii. גובה התיבה – AA'.
ב. מצא את α אם ידוע כי נפח התיבה הוא $0.64a^3$.





23) בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבסיסה מלבן מעבירים את האלכסון $B'D'$ בבסיס העליון.
מאמצע האלכסון M מעבירים את הקטעים DM ו-BM כך שנוצר המשולש ישר הזווית BMD $(\sphericalangle BMD = 90°)$.
אורך מקצוע הבסיס AB הוא $5a$ ואורך הקטע DM הוא $4a$.

א. הבע באמצעות a את אורך המקצוע AD.

ב. מעבירים את הקטע AM. חשב את זווית MAD.

ג. מצא את a אם ידוע כי שטח המשולש MAD הוא 125 סמ״ר (עגל למספר שלם).

24) בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתון: $BD' = m$. הזווית שבין האלכסון BD' לבסיס ABCD היא α והזווית שבין האלכסון BD' לפאה צדדית $ABB'A'$ היא γ.
הבע באמצעות m, α ו-γ את נפח התיבה.

תשובות סופיות:

10) א. $CC' = 4.195$ ס"מ ב. $AC = 13$ ס"מ ג. 17.886°
ד. $AC' = 13.66$ ס"מ ה. $V = 251.7$ סמ"ק ו. $M = 142.63$ סמ"ר.

11) $\sphericalangle AC'B = 30.96^\circ$.

12) א. $CC' = 21.44$ ס"מ ב. $V = 1029.6$ סמ"ק, $P = 696.96$ סמ"ר.

13) א. $AB = 9.82$ ס"מ, $BC = 10.688$ ס"מ ב. $M = 303.5184$ סמ"ר, $P = 513.43$ סמ"ר.

14) א. $AC = 10.121$ ס"מ, $AD' = 11.766$ ס"מ, $AC' = 14.227$ ס"מ
ב. 34.22°. ג. $V = 496$ סמ"ק, $M = 284$ סמ"ר.

15) א. $BC = 9$ ס"מ ב. $h = 8$ ס"מ ג. 28.072°.

16) א. $AC = 14.42$ ס"מ ב. 44.15° ג. 560 סמ"ר ד. 752 סמ"ר.

17) א. $BB' = 8.4$ ס"מ ב. $AD' = 13.06$ ס"מ ג. 40.03°

18) א. $AB = 9.8$ ס"מ ב. $V = 1{,}167.9$ סמ"ק ג. 434.4 סמ"ר.

19) א. 15.62 ס"מ ב. $h = 12.2$ ס"מ ג. $P = 776.8$ סמ"ר.

20) א. $A'D = 14.42$ ס"מ ב. $B'D = 17.55$ ס"מ.

21) $BD' = 16.031$ ס"מ, $\sphericalangle D'BD = 25.89^\circ$.

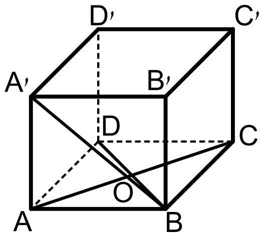
22) א. i. $a\cos\alpha$ ii. $a\sin\alpha$ iii. $a\tan\alpha$ ב. 53.13°.

23) א. $a\sqrt{7}$ ב. 70.6° ג. $a = 5$.

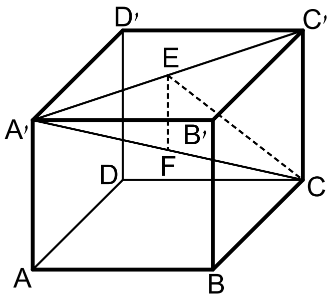
24) $V = m^3 \sin\alpha \cdot \sin\gamma \cdot \sqrt{\cos^2\gamma - \sin^2\alpha}$.

הקובייה:

שאלות:



25) בקובייה ABCDA'B'C'D' אורך המקצוע הוא 8 ס"מ.
הנקודה O היא מפגש אלכסוני הבסיס התחתון.
מצא את הזווית שבין OA' לפאה ABB'A'.



26) נתונה קובייה ABCDA'B'C'D' מעבירים את
האלכסון A'C' בבסיס העליון. מהנקודה E שעל
האלכסון A'C' מותחים את הקטע CE השווה
באורכו לקטע A'E. כמו כן מורידים
גובה EF ממישור הבסיס העליון A'B'C'D'.
(EF מאונך ל-A'C').
הנקודה F נמצאת על האלכסון הראשי A'C.
נסמן: $\sphericalangle A'CE = \alpha$, $A'F = m$.
הבע באמצעות α ו-m את נפח הקובייה.

תשובות סופיות:

25) $24.095°$.

26) $(m \sin 2\alpha \cos\alpha)^3$.

מתמטיקה למכינה באקדמיה

פרק 7 - טריגונומטריה במרחב - המנסרה

תוכן העניינים

מנסרה שבסיסה משולש שווה צלעות:

סיכום כללי:

גוף מרחבי הבנוי משני מצולעים זהים המקבילים זה לזה במרחב.
המקצועות הצדדיים המחברים את קדקודי הבסיסים המתאימים נקראים גובהי המנסרה.
כל גובה במנסרה ישרה מאונך למישורי הבסיס העליון והתחתון.

נעסוק במנסרות הבאות:

- מנסרה שבסיסה משולש שווה צלעות.
- מנסרה שבסיסה משולש שווה שוקיים.
- מנסרה שבסיסה משולש ישר זווית.

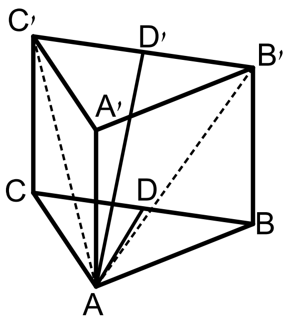
הערה:
התיבה וקובייה הן מקרים פרטיים של מנסרות ישרות שבסיסן מלבן וריבוע בהתאמה.

שאלות:

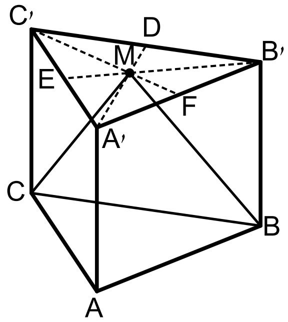
1) במנסרה משולשת וישרה 'ABCA'B'C שבסיסה משולש שווה צלעות מעבירים את האלכסונים 'AB ו-'AC כך שנוצר המשולש 'AB'C.
הזווית שבין האנך לצלע BC במשולש ABC והאנך לצלע 'B'C במשולש 'AB'C היא 40°.
אורך גובה המנסרה הוא 14 ס״מ.

א. חשב את שטח המשולש 'A'B'C.

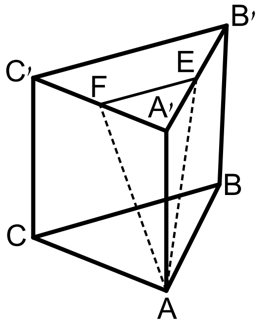
ב. חשב את נפח המנסרה.



2) במנסרה משולשת וישרה 'ABCA'B'C שבסיסה משולש שווה צלעות מעבירים בבסיס העליון 'A'B'C את התיכונים A'D , B'E ו-C'F אשר נחתכים בנקודה M. מהנקודה M מעבירים את הקטעים MC ו-MB כך שנוצר המשולש MCB.
גובה המנסרה שווה באורכו למקצוע בסיס המנסרה.
חשב את הזווית שבין האנך לצלע BC במשולש MCB למישור הבסיס ABC.

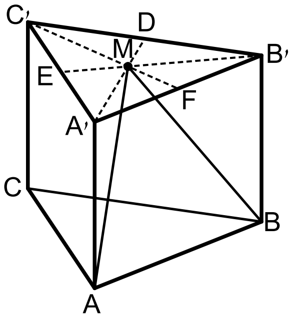


3) במנסרה משולשת וישרה 'ABCA'B'C שבסיסה משולש שווה צלעות הנקודות E ו-F הן בהתאמה אמצעי המקצועות 'A'B ו-'A'C. מעבירים את הקטעים AE ו-AF, כך שנוצר המשולש AEF.
אורך מקצוע הבסיס של המנסרה הוא 10 ס״מ וגובה המנסרה הוא 12 ס״מ.



א. חשב את אורכי הצלעות של המשולש AEF.
ב. חשב את הזווית שבין גובה המנסרה 'AA למישור המשולש AEF.

4) במנסרה משולשת וישרה 'ABCA'B'C שבסיסה משולש שווה צלעות מעבירים בבסיס העליון 'A'B'C את התיכונים 'A'D , B'E ו-C'F אשר נחתכים ב-M.
מהנקודה M מעבירים את הקטעים MA ו-MB כך שנוצר המשולש MAB.
גובה המנסרה שווה באורכו למקצוע בסיס המנסרה ויסומן ב- $2a$.



א. הבע באמצעות a את אורך הקטע MA.
ב. חשב את הזווית שבין הקטע MA ומישור הבסיס ABC.
ג. חשב את הזווית שבין הגובה למקצוע AB במישור MAB לבין מישור הבסיס ABC.
ד. חשב את הזווית שבין MA והפאה AA'B'B.
ה. הבע באמצעות a את שטח הפנים של המנסרה.

תשובות סופיות:

1) א. 160.68 סמ״ר. ב. 2250 סמ״ק.

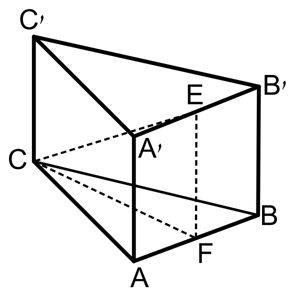
2) 73.89°.

3) א. 13 ס״מ, 13 ס״מ, 5 ס״מ. ב. 19.84°.

4) א. $MA = 2.3a$ ב. 60° ג. 73.9° ד. 14.47° ה. $P = 15.46a^2$.

מנסרה שבסיסה משולש שווה שוקיים:

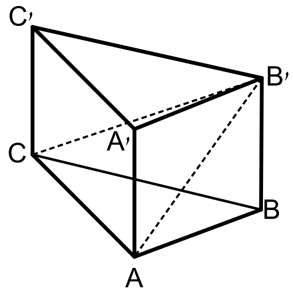
שאלות:



5) נתונה מנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים $(AC = BC)$. מאמצעי המקצועות $A'B'$ ו-AB מעבירים את הקטע EF. ידוע כי אורך מקצוע הבסיס AB הוא k ס"מ והוא קטן פי 2 מאורך שוק הבסיס AC. נסמן: $\sphericalangle FCE = \alpha$.

א. הבע באמצעות k ו-α את נפח המנסרה.

ב. חשב את נפח המנסרה אם ידוע כי: $2EF = CE$, וכי שטח הבסיס ABC הוא $\sqrt{15}$ סמ"ר.



6) במנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים $(AC = BC)$ מעבירים את האלכסונים AB' ו-CB' כך שנוצר המשולש $AB'C$. ידוע כי הזווית שבין אנך למקצוע AC במשולש ABC ואנך למקצוע AC במשולש $AB'C$ היא $45°$ (האנכים נפגשים על המקצוע AC בנקודה E). זוויות הבסיס ABC הן $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CAB = 75°$, $\sphericalangle ACB = 30°$ גובה המנסרה הוא 5 ס"מ.

א. מצא את אורך המקצוע AC.

ב. חשב את הזווית שבין האלכסון CB' למישור הבסיס.

7) נתונה מנסרה $ABCA'B'C'$ שבה הבסיס הוא משולש שווה שוקיים $(AC = BC)$, אורך השוק היא k וזווית הראש היא γ. הזווית שבין המישור ABC למישור ABC' היא β. הבע באמצעות k, γ ו-β את נפח המנסרה.

תשובות סופיות:

5) א. $V = \frac{15k^3 \tan\alpha}{8}$ ב. $\frac{15}{\sqrt{3}}$ סמ"ק.

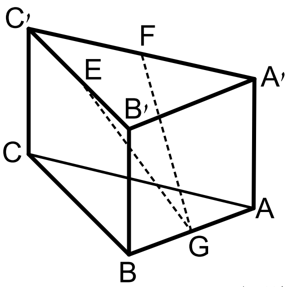
6) א. 10 ס"מ.   ב. $26.56°$.

7) $V = \frac{1}{2}k^3 \sin\gamma \cos\frac{\gamma}{2} \tan\beta$.

מנסרה שבסיסה משולש ישר זווית:

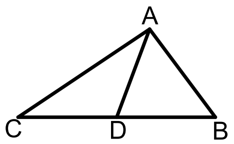
שאלות:

8) במנסרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה הוא משולש ישר זווית $(\measuredangle ABC = 90°)$,
הנקודות E, F ו-G הן בהתאמה אמצעי המקצועות $B'C'$, $A'C'$ ו-AB
כמתואר באיור.

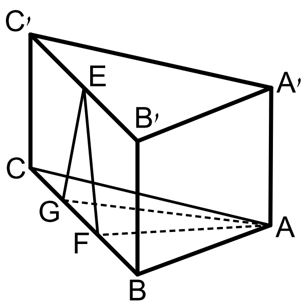


מסמנים את מידות הבסיס ABC: $AB = 5t$, $BC = 12t$.
הזווית שבין הקטע GE למישור הבסיס ABC היא $36.86°$.
א. הבע באמצעות t את גובה המנסרה.
ב. חשב את הזווית שבין הקטע GF ולמישור הבסיס ABC.
ג. מצא את t אם ידוע כי אורך הקטע GF הוא: $\sqrt{3825}$ ס"מ.

9) ענה על הסעיפים הבאים:

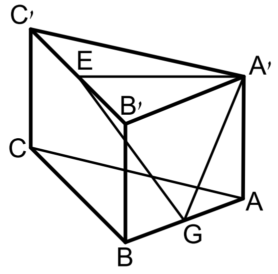


א. הוכח את הטענה: תיכון במשולש חוצה אותו לשני משולשים שווי שטח. כלומר, הקטע AD הוא תיכון במשולש ABC. הראה כי: $S_{ABD} = S_{ACD}$.



במנסרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה הוא משולש ישר זווית $(\measuredangle ABC = 90°)$ הנקודות F ו- G מחלקות את מקצוע הבסיס BC לשלושה חלקים שווים.
הנקודה E היא אמצע המקצוע $B'C'$.
ידוע כי אורך הקטע EF הוא 10 ס"מ ואורך המקצוע BC הוא 24 ס"מ.
שטח המשולש AFG הוא 40 סמ"ר.
ב. איזה משולש הוא המשולש EFG? מצא את זוויותיו.
ג. מצא את גובה המנסרה.
ד. היעזר בטענה שהוכחת בסעיף א' ומצא את אורך המקצוע AB.
(רמז: התבונן במשולש ABF ומצא את הצלע AB באמצעות שטחו).
ה. חשב את שטח המעטפת של המנסרה.

10) לפניך מנסרה ישרה שבסיסה משולש ישר זווית $\left(\sphericalangle ABC = 90^\circ\right)$.
ידוע כי הפאה הצדדית AA'B'B היא ריבוע וכי אורך המקצוע BC גדול פי 3 מ-AB.
הנקודות E ו-G נמצאות על אמצעי
המקצועות B'C' ו-AB בהתאמה.
מעבירים את הקטעים A'G, A'E ו-GE.



א. חשב את הזווית הנוצרת בין הקטע GE ומישור הבסיס.

ב. חשב את הזווית הנוצרת בין הקטע GE ומישור הפאה AA'B'B.

ג. חשב את זווית EA'G.

תשובות סופיות:

8) א. $4.875t$ ב. 39.1° ג. $t = 8$.

9) ב. משולש שווה שוקיים. $66.42^\circ, 47.15^\circ$ ג. $\sqrt{84}$ ס"מ. ד. 10 ס"מ.

ה. $60\sqrt{84}$ סמ"ר.

10) א. $\sphericalangle EGH = 32.31^\circ$ ב. $\sphericalangle B'GE = 53.3^\circ$

ג. $\sphericalangle GA'E = 71.93^\circ \sim 72^\circ$.

מתמטיקה למכינה באקדמיה

פרק 8 - טריגונומטריה במרחב - הפירמידה

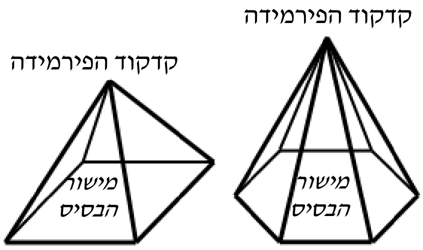
תוכן העניינים

פירמידה שבסיסה ריבוע:

סיכום כללי:

הגדרה:

גוף מרחבי הבנוי ממצולע כלשהו, המהווה את בסיס הפירמידה, ומקצועות היוצאים מכל קדקודי המצולע ונפגשים בנקודה אחת הנקראת קדקוד הפירמידה.
בפירמידה ישרה כל המקצועות שווים.



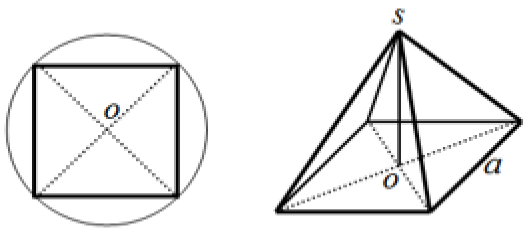
הגדרה:

גובה הפירמידה הוא קטע היוצא מקדקוד הראש של הפירמידה ומאונך למישור הבסיס.

משפט:

בפירמידה ישרה, גובה הפירמידה תמיד נופל בנקודת מרכז המעגל החוסם את מצולע הבסיס.

באיור הבא מופיע חתך מישורי של בסיס הפירמידה ובו מסומנת נקודת מרכז המעגל החוסם את המצולעים.



תיאור פירמידה שבסיסה ריבוע. ניתן לראות כי גובה הפירמידה נופל בנקודת פגישת האלכסונים שכן היא נקודת מרכז המעגל החוסם את הריבוע.

נפח פירמידה:

נפח פירמידה ששטח בסיסה הוא S וגובהה הוא h הוא: $V=\frac{S\cdot h}{3}$.

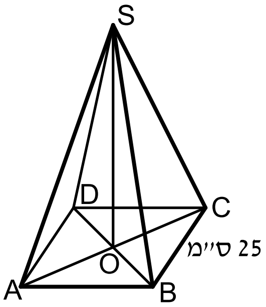
שאלות:

1) נתונה פירמידה מרובעת משוכללת (הבסיס הוא ריבוע) SABCD.
אורך מקצוע הבסיס הוא 25 ס"מ.
הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס היא זווית בת $35°$.

א. חשב את אלכסון הבסיס.

ב. חשב את גובה הפירמידה.

ג. סמן נקודה E כאמצע BC וחשב את הזווית שבין SE לבסיס הפירמידה.

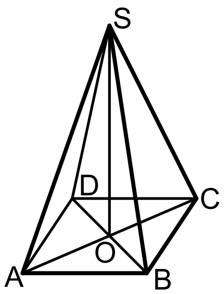


2) נתונה פירמידה מרובעת משוכללת SABCD.
אורך מקצוע הבסיס הוא 12 ס"מ.
אורך מקצוע צדדי הוא 20 ס"מ.

א. חשב אורך גובה של פאה צדדית.

ב. חשב את שטח הפנים של הפירמידה.

ג. חשב זווית בין מקצוע צדדי לבסיס.

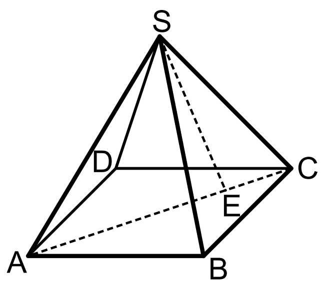


3) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה ריבוע בעל אורך צלע a.
אורך מקצועות הפירמידה הוא $3a$.
מעבירים את האלכסון AC ועליו מסמנים את הנקודה E
המחלקת אותו ביחס של $1:3$ $\left(\frac{CE}{AE}=\frac{1}{3}\right)$.
מהקדקוד S מעבירים את הקטע SE.

א. הבע באמצעות a את גובה הפירמידה.

ב. חשב את הזווית הנוצרת בין הקטע SE לגובה הפירמידה.

ג. מצא את a אם ידוע כי שטח המעטפת של הפירמידה הוא: $\sqrt{560}$ סמ"ר.

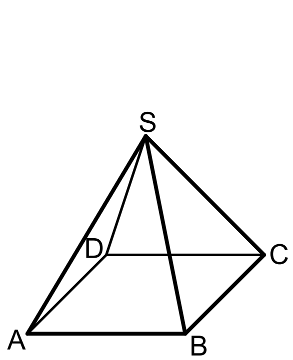


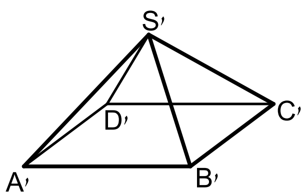
4) נתונות שתי פירמידות ריבועיות ישרות: SABCD ו-S'A'B'C'D'.
אורך מקצוע הבסיס בפירמידה הראשונה הוא a וגובהה הוא $2a$.
אורך מקצוע הבסיס בפירמידה השנייה הוא $2a$ וגובהה הוא a.

א. קבע לאיזו פירמידה יש נפח גדול יותר.

ב. כעת משנים את הגובה של כל פירמידה כך שנפחן יהיה זהה והוא: a^3.
מצא את יחס בין המקצוע הצדדי של הפירמידה SABCD למקצוע הצדדי של הפירמידה S'A'B'C'D'.

ג. דנה טוענת כי מאחר שנפח שתי הפירמידות זהה, הרי גם שטח הפנים שלהן זהה. האם דנה צודקת? הוכח את טענתך באמצעות חישוב מתאים.





5) נתונה פירמידה מרובעת משוכללת וישרה.
אורכו של מקצוע הבסיס הוא 10 ס"מ ואורכו של המקצוע הצדדי הוא 16 ס"מ.
חשב את:
א. הזווית שבין המקצוע הצדדי והבסיס.
ב. גובה הפירמידה.
ג. הזווית שבין הפאה הצדדית והבסיס.
ד. נפח הפירמידה.
ה. שטח הפנים של הפירמידה.

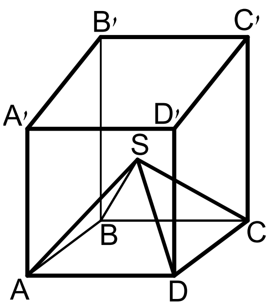
6) נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה.
אורך מקצוע הבסיס הוא b והזווית שבין המקצוע הצדדי לבסיס היא α.
הבע באמצעות b ו- α את נפח הפירמידה ואת שטח המעטפת שלה.

7) נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה.
אורכו של מקצוע הבסיס הוא a והזווית שבין שתי פאות צדדיות סמוכות היא β.
זווית הבסיס של פאה צדדית היא γ. הבע באמצעות β את $\sin\gamma$.

8) נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה.
הזווית שבין שני מקצועות צדדיים סמוכים היא 2α והזווית שבין שני
מקצועות צדדיים נגדיים היא 2β. הוכח: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

9) נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה.
גובה הפירמידה הוא h והזווית שבין שתי פאות צדדיות היא β.
הראה כי מקצוע הבסיס של הפירמידה הוא: $\sqrt{-2\cos\beta}\cdot\frac{h}{\cos\frac{\beta}{2}}$.

10) בקובייה ABCDA'B'C'D' חסומה פירמידה SABCD שבה כל המקצועות שווים.
בסיס הפירמידה מונח על בסיס הקובייה.
מצא את גודל הזווית שבין המקצוע הצדדי של הפירמידה לפאה צדדית של הקובייה, שלהם קדקוד משותף.



תשובות סופיות:

1) א. 35.36 ס"מ ב. 12.378 ס"מ $=h$ ג. $44.72°$.

2) א. 19.079 ס"מ ב. 601.89 ס"מ $=P$ ג. $64.896°$.

3) א. $a\sqrt{8.5}$ ב. $6.9°$ ג. $a=2$.

4) א. $V_{SABCD}=\frac{2}{3}a^3 > V_{S'A'B'C'D'}=\frac{4}{3}a^3$ ב. פי $4\sqrt{\frac{19}{82}}$

ג. דנה טועה - $P_{SABCD}\approx 7a^2 \neq P_{S'A'B'C'D'}=9a^2$.

5) א. $63.77°$ ב. $\sqrt{206}$ ס"מ ג. $70.79°$ ד. 478.42 סמ"ק

ה. 403.97 סמ"ר.

6) $M=2b^2\sqrt{\frac{1}{2}\tan^2\alpha+\frac{1}{4}}$, $V=\frac{b^3\tan\alpha}{3\sqrt{2}}$.

7) $\sin\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\cos\beta}}$.

8) הוכחה.

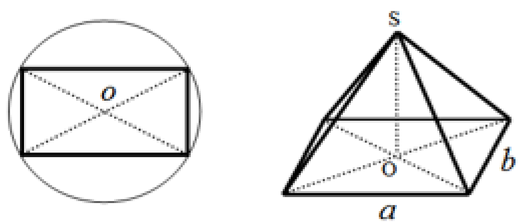
9) הוכחה.

10) $30°$.

פירמידה שבסיסה מלבן:

סיכום כללי:

באיור הבא מופיע חתך מישורי של בסיס הפירמידה ובו מסומנת נקודת מרכז המעגל החוסם את המצולעים.



תיאור פירמידה שבסיסה מלבן. ניתן לראות כי גובה הפירמידה נופל בנקודת פגישת האלכסונים שכן היא נקודת מרכז המעגל החוסם את המלבן.

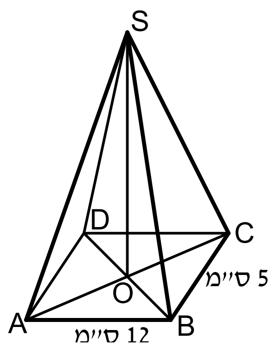
שאלות:

11) נתונה פירמידה מרובעת וישרה SABCD שבסיסה מלבן. אורכי צלעות הבסיס הם: 12 ס"מ = AB , 5 ס"מ = BC.
אורך גובה הפירמידה הוא: 15 ס"מ = SO.

א. חשב את נפח הפירמידה.

ב. חשב את אורך אלכסון הבסיס.

ג. חשב את הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס.



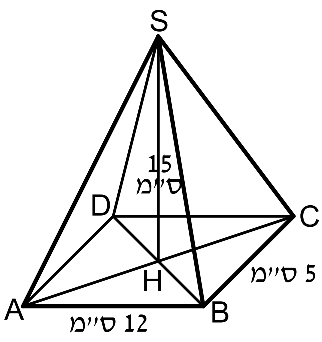
12) נתונה פירמידה מרובעת ישרה SABCD שבסיסה מלבן. אורכי צלעות הבסיס הם: 12 ס"מ = AB , 5 ס"מ = BC.
אורך גובה הפירמידה הוא: 15 ס"מ = SH.

א. חשב את גובה הפאה הצדדית SBC.

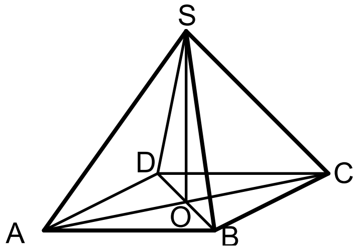
ב. חשב את גובה הפאה הצדדית ABS.

ג. חשב את שטח המעטפת של הפירמידה.

ד. הנקודה E היא אמצע BC.
חשב את הזווית שבין SE לבסיס ABCD.

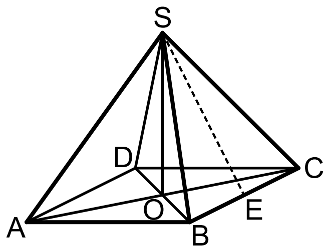


13) נתונה פירמידה ישרה ומרובעת שבסיסה ABCD הוא מלבן.
נתון: אורך אלכסון הבסיס AC הוא 10 ס"מ.
גובה הפירמידה SO הוא 12 ס"מ.



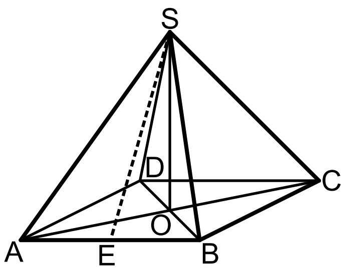
א. חשב את אורך המקצוע הצדדי.
ב. חשב את הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס.
ג. נתון כי זווית הראש של הפאה הצדדית SBC היא $40°$.
חשב את אורך מקצוע הבסיס BC.
חשב את אורך המקצוע AB ואת נפח הפירמידה.

14) נתונה פירמידה SABCD, מרובעת וישרה שבסיסה מלבן.
E אמצע BC. 16 ס"מ = AB. גובה הפירמידה: 10 ס"מ = SO.



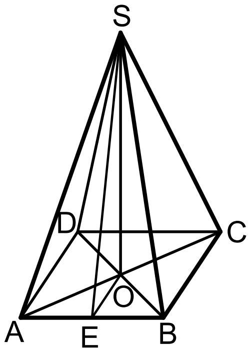
א. חשב את הזווית שבין הקטע SE לבסיס הפירמידה ABCD.
ב. חשב את מקצוע BC אם נתון כי נפח הפירמידה הוא 480 סמ"ק.
ג. סמן ב-F את אמצע המקצוע AB.
חשב את הזווית שבין SF לבסיס הפירמידה.

15) נתונה פירמידה SABCD שבסיסה מלבן.
זווית הראש של פאה צדדית SAB היא $56°$.
אורך מקצוע הבסיס AB שווה ל-12 ס"מ.



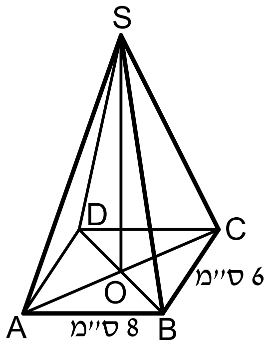
א. חשב את אורך הגובה SE של הפאה SAB.
ב. חשב את אורך המקצוע הצדדי SA.
ג. נתון כי אורך המקצוע AD הוא 8 ס"מ.
חשב את גובה הפירמידה.
ד. חשב את נפח הפירמידה.
ה. חשב את הזווית בין הקטע SE לבסיס הפירמידה.
ו. חשב זווית בין מקצוע צדדי לבסיס.

16) נתונה פירמידה SABCD מרובעת וישרה שבסיסה מלבן. אורך המקצוע AB הוא 15 ס"מ.
הגובה SE של הפאה הצדדית SAB הוא 20 ס"מ.
גובה הפירמידה SO הוא 18 ס"מ.

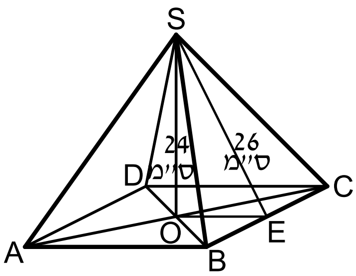


א. חשב את אורך מקצוע הבסיס AD.
ב. חשב את גובה הפאה הצדדית SBC.
ג. חשב את שטח המעטפת של הפירמידה.

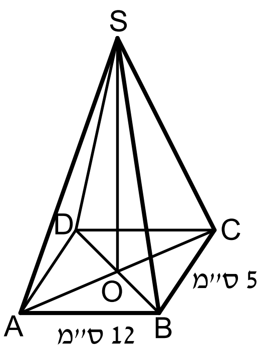
17) נתונה פירמידה ישרה SABCD.
הבסיס ABCD הוא מלבן שבו : 8 ס"מ = AB , 6 ס"מ = BC.
אורך מקצוע צדדי הוא 17 ס"מ.
א. חשב את הזווית $\sphericalangle CSA$.
ב. חשב את הזווית $\sphericalangle CSB$.
ג. חשב את נפח הפירמידה.



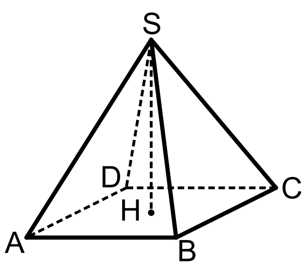
18) נתונה פירמידה SABCD מרובעת וישרה שבסיסה מלבן.
גובה הפירמידה שווה ל-24 ס"מ.
הגובה SE בפאה הצדדית SBC שווה ל-26 ס"מ.
חשב את :
א. אורך המקצוע AB.
ב. הזווית בין הקטע SE לבסיס ABCD.
ג. נפח הפירמידה הוא 2400 סמ"ק.
ד. חשב את אורך המקצוע BC.



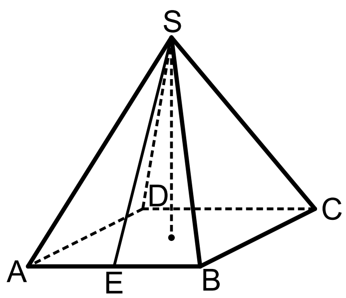
19) נתונה פירמידה מרובעת וישרה SABCD.
בסיס הפירמידה הוא מלבן.
אורכי צלעות הבסיס הם : 5 ס"מ = BC , 12 ס"מ = AB.
זווית הראש של הפאה הצדדית SBC היא $42°$.
א. חשב אורך מקצוע צדדי.
ב. חשב את שטח הפאה SBC.
ג. חשב את גובה הפירמידה, SO.



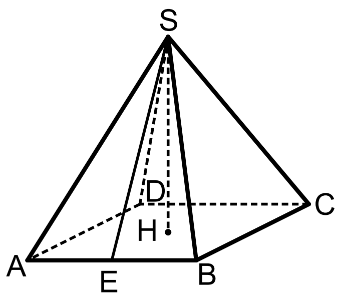
20) הבסיס ABCD של פירמידה ישרה
ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).
נתון : 17 ס"מ = AD , 25 ס"מ = AB , 12 ס"מ = SH.
א. חשב את אלכסון הבסיס של הפירמידה.
ב. חשב את המקצוע הצדדי של הפירמידה.
ג. חשב את הזווית שבין מקצוע צדדי לבין
בסיס הפירמידה.



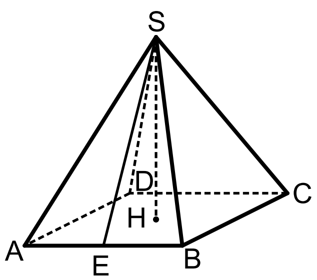
21) הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).
נתון: $AD = 15$ ס"מ , $AB = 20$ ס"מ.
הגובה של הפאה הצדדית SAB הוא $SE = 22$ ס"מ.
א. חשב את גובה הפירמידה.
ב. חשב את נפח הפירמידה.
ג. חשב את הזווית שבין הישר SE לבין בסיס הפירמידה.



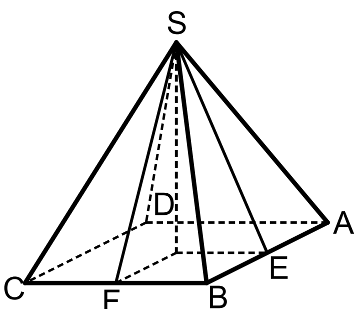
22) הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).
נתון: $AD = 16$ ס"מ , $AB = 17$ ס"מ.
הגובה של הפאה הצדדית SAB הוא $SE = 12$ ס"מ.
א. חשב את גובה הפירמידה.
ב. חשב את אורך המקצוע הצדדי של הפירמידה.
ג. חשב את הזווית שבין המקצוע הצדדי לבין בסיס הפירמידה.



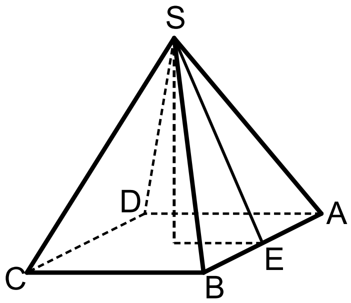
23) הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).
נתון: $AB = 20$ ס"מ , $SH = 8$ ס"מ.
הגובה של הפאה הצדדית SAB הוא $SE = 12$ ס"מ.
א. חשב את האורך AD.
ב. חשב את אורך DH.
ג. חשב את נפח הפירמידה.



24) הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).
נתון: $AB = 15$ ס"מ , $BC = 20$ ס"מ. E היא האמצע של AB.
הזווית שבין הישר SE לבסיס היא בת $55°$.
א. חשב את גובה הפירמידה.
ב. F היא האמצע של BC. חשב את זווית שבין הישר SF לבין בסיס הפירמידה.
ג. חשב את גובה הפאה הצדדית SAB.
ד. חשב את שטח הפאה SAB.

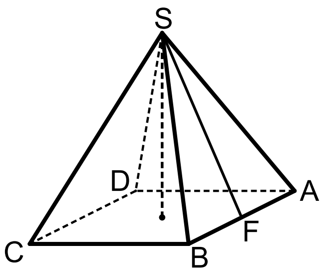


25) הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).
גובה הפירמידה הוא 17 ס"מ.
הגובה של הפאה הצדדית SAB הוא 22 ס"מ $= SE$.



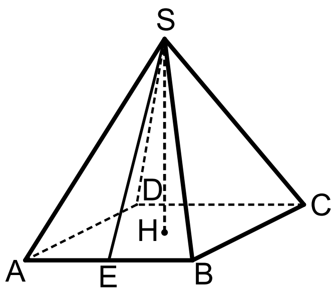
א. חשב את הזווית שבין הישר SE לבין בסיס הפירמידה.
ב. חשב את מקצוע הבסיס, BC.
ג. חשב את מקצוע הבסיס, AB, אם נפח הפירמידה הוא 1000 סמ"ק.

26) הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).
נתון: $AD =$ 15 ס"מ , $AB =$ 20 ס"מ.
זווית הראש של הפאה הצדדית SAB היא בת $38°$.



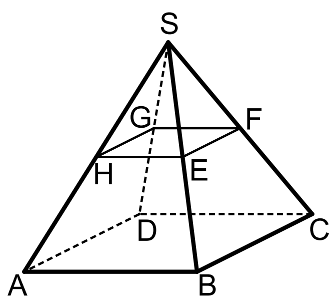
א. חשב את הגובה של הפאה הצדדית SAB.
ב. חשב את הזווית שבין SF לבין בסיס הפירמידה.
ג. חשב את גובה הפירמידה.

27) הבסיס ABCD של פירמידה ישרה ומרובעת SABCD הוא מלבן (ראה ציור).
נתון: $AD =$ 15 ס"מ , $AB =$ 20 ס"מ.
זווית הראש של הפאה הצדדית SAB היא בת $38°$.



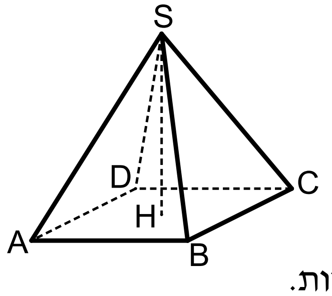
א. חשב את גובה הפאה SAB.
ב. חשב את גובה הפירמידה.
ג. חשב את זווית הראש של הפאה SAD.

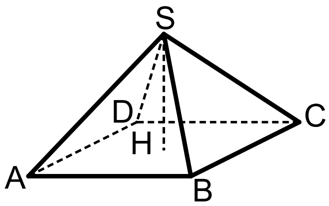
28) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה מלבן.
מאמצעי המקצועות הצדדיים מעבירים קטעים כך שנוצר המלבן EFGH.
ידוע כי שטח מלבן זה הוא 48 סמ"ר וכי אורך האלכסון שלו הוא 10 ס"מ.
הזווית HSF היא בת $50°$.



א. מצא את מידות הבסיס ABCD.
ב. מצא את גובה הפירמידה.
ג. חשב את שטח הפנים של הפירמידה.

29) נתונות שתי פירמידות ישרות שבסיסן מלבן:
האחת- SABCD והשנייה- S'A'B'C'D'.
הקטעים SH ו-S'H' הם בהתאמה הגבהים של שתי הפירמידות.
ידוע כי: $AB = 2k$, $BC = k$, $HS = 3k$
וכי: $A'B' = 3k$, $B'C' = k$, $H'S' = 2k$.

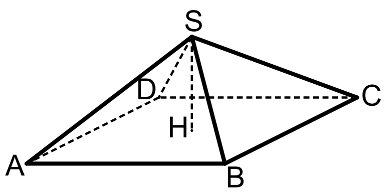




א. לפניך מספר טענות - קבע אלו נכונות ואלו שגויות. נמק.
i. לשתי הפירמידות אותו שטח פנים.
ii. לשתי הפירמידות אותו הנפח.
iii. בשתי הפירמידות הזווית שבין מקצוע צדדי לבסיס הפירמידה שווה.
iv. אורך מקצוע צדדי בפירמידה SABCD גדול יותר מאורך מקצוע צדדי בפירמידה S'A'B'C'D'.

ב. מצא את הערך של k בעבורו סכום הנפחים של שתי הפירמידות יהיה שווה לנפח של קובייה בעלת אורך מקצוע של 4 ס"מ.

30) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה מלבן.
ידוע כי מקצוע הבסיס BC שווה באורכו לגובה הפירמידה ויסומן ב- t.
כמו כן נתון כי אלכסון הבסיס AC גדול פי 4 מהמקצוע BC.



א. הבע באמצעות t את אורך המקצוע AB.
ב. הורד גובה SH למקצוע BC במישור הפאה SBC וחשב את הזווית הנוצרת בינו לבין מישור הבסיס ABCD.
ג. חשב את הזויות שבין שני מקצועות צדדיים שאינם סמוכים.
ד. מסמנים את פגישת התיכונים בפאה SBC ב-N.
מעבירים קטע היוצא מנקודת פגישת האלכסונים במישור הבסיס ABCD לנקודה N.
חשב את הזווית שהוא יוצר עם הבסיס.

תשובות סופיות:

11) א. $V =$ 300 סמ"ק ב. 13 ס"מ ג. $66.57°$.

12) א. 16.115 ס"מ ב. 15.207 ס"מ ג. $M =$ 263.26 סמ"ר ד. $68.2°$.

13) א. 13 ס"מ ב. $67.38°$ ג. $BC =$ 8.89 ס"מ
ד. $AB =$ 4.579 ס"מ , $V =$ 162.32 סמ"ק

14) א. $51.34°$ ב. $BC =$ 9 ס"מ ג. $65.77°$.

15) א. $SE =$ 11.284 ס"מ ב. $SA =$ 12.78 ס"מ ג. $h =$ 10.551 ס"מ
ד. $V =$ 337.632 סמ"ק ה. $69.24°$ ו. $55.65°$.

16) א. $AD =$ 17.435 ס"מ ב. $SF =$ 19.5 ס"מ ג. $M =$ 640 סמ"ר.

17) א. $34.21°$ ב. $20.328°$ ג. $V =$ 260 סמ"ק.

18) א. $AB =$ 20 ס"מ ב. $67.38°$ ג. $BC =$ 15 ס"מ.

19) א. 6.796 ס"מ ב. $S_{\Delta SBC} =$ 16.282 סמ"ר ג. $h =$ 2.533 ס"מ.

20) א. 30.23 ס"מ ב. 19.3 ס"מ ג. $38.44°$.

21) א. $h =$ 20.68 ס"מ ב. $V =$ 2068.2 סמ"ק ג. $70.07°$.

22) א. $h =$ 8.94 ס"מ ב. 14.7 ס"מ ג. $37.45°$.

23) א. $AD =$ 17.89 ב. $DH =$ 13.42 ס"מ ג. $V =$ 954.1 סמ"ק.

24) א. $h =$ 14.28 ס"מ ב. $62.29°$ ג. 17.43 ס"מ ד. 130.7 סמ"ר.

25) א. $50.6°$ ב. $BC =$ 27.93 ס"מ ג. $AB =$ 6.32 ס"מ.

26) א. 29.04 ס"מ ב. $75.03°$ ג. $h =$ 28.05 ס"מ.

27) א. 29.04 ס"מ ב. $h =$ 28.05 ס"מ ג. $28.27°$.

28) א. 12 ס"מ ו-16 ס"מ. ב. 21.44 ס"מ. ג. 823 סמ"ר.

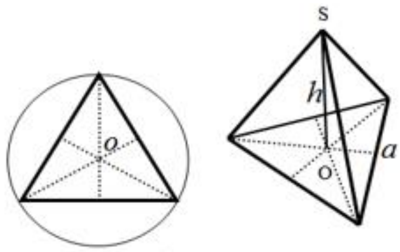
29) א. i. לא נכון. שטח הפנים הוא שונה: $P_{S'A'B'C'D'} \approx 11.68k^2$, $P_{SABCD} \approx 11.245k^2$.
ii. נכון. הנפח הוא: $V = 2k^3$.
iii. לא נכון. הזוויות המתקבלות הן: $51.67°$, $69.56°$.
vi. נכון. מתקבל: $k\sqrt{10.25} > k\sqrt{6.5}$. ב. $k = \sqrt[3]{16}$.

30) א. $AB = t\sqrt{15}$ ב. $\sphericalangle SHM = 27.31°$ ג. $\sphericalangle ASC = 126.86°$
ד. $\sphericalangle NMH = 14.47°$.

פירמידה שבסיסה משולש שווה צלעות:

סיכום כללי:

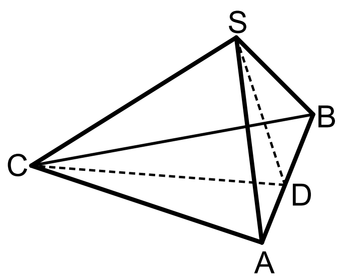
באיור הבא מופיע חתך מישורי של בסיס הפירמידה ובו מסומנת נקודת מרכז המעגל החוסם את המצולעים.



תיאור פירמידה שבסיסה משולש שווה צלעות.
ניתן לראות כי גובה הפירמידה נופל בנקודת פגישת התיכונים (נקודת מרכז המעגל החוסם את המשולש).

שאלות:

31) נתונה פירמידה ישרה SABC שבסיסה הוא משולש שווה צלעות. מעבירים את הגובה SD בפאה הצדדית ASB וכן את הגובה CD בבסיס ABC.
זווית הבסיס של פאה צדדית במנסרה היא $50°$
ושטח המעטפת הוא 89.38 סמ"ר.



א. מצא את אורך מקצוע הבסיס של המנסרה.
ב. מצא את גובה המנסרה.
ג. חשב את הזווית SDC.
ד. חשב את הזווית שבין המקצוע SC לבסיס הפירמידה.

32) נתונה פירמידה משולשת, משוכללת וישרה.
אורכו של מקצוע הבסיס הוא 12 ס"מ ואורכו של המקצוע הצדדי הוא 14 ס"מ.
א. חשב את הזווית שבין המקצוע הצדדי ובסיס הפירמידה.
ב. חשב את גובה פירמידה.
ג. חשב את הזווית שבין הפאה הצדדית ובסיס הפירמידה.
ד. חשב את הזווית שבין שתי פאות צדדיות סמוכות בפירמידה.

33) נתונה פירמידה משולשת, משוכללת וישרה. הזווית שבין שתי פאות צדדיות סמוכות היא β. זווית הבסיס של פאה צדדית היא γ.
הוכח: $\sin\gamma\cdot\sin\frac{\beta}{2}=\frac{1}{2}$.

תשובות סופיות:

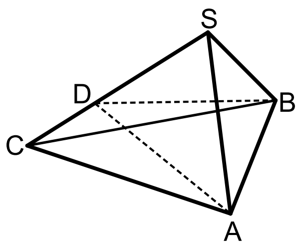
31) א. 10 ס"מ. ב. 5.21 ס"מ. ג. $61°$ ד. $42°$.

32) א. $60.339°$ ב. $\sqrt{148}$ ס"מ. ג. $74.106°$ ד. $67.2°$.

33) הוכחה.

פירמידה שבבסיסה משולש שווה שוקיים:

שאלות:



34) נתונה פירמידה ישרה SABC שבבסיסה הוא משולש שווה שוקיים $(AC = BC)$. מעבירים גבהים למקצוע SC במישורי הפאות SAC ו-SBC כך שהזווית הנוצרת בין מישורים אלו היא $\sphericalangle ADB = 42°$. ידוע כי אורך המקצוע AB הוא 8 ס"מ. הגובה AD בפאה SAC מחלק את המקצוע SC ביחס: $\frac{DC}{SD} = \frac{2}{3}$.

א. חשב את אורך הגובה AD.
ב. חשב את זווית הראש בפאה SAC.
ג. חשב את שטח משולש הבסיס ABC.

35) נתונה פירמידה משוכללת וישרה SABC.
הבסיס הוא משולש שווה שוקיים $(AC = BC)$, אורך שוקו k וזווית הראש שלו היא 2γ. אורך כל מקצוע צדדי בפירמידה גם הוא k.
הבע באמצעות k ו- γ את נפח הפירמידה.

תשובות סופיות:

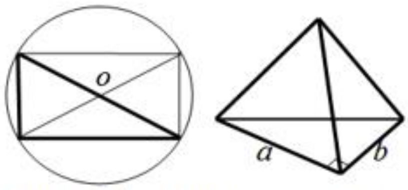
34) א. 11.16 ס"מ. ב. $53.13°$ ג. 47.27 סמ"ר.

35) $V = \frac{k^3 \sin 2\gamma \cdot \sqrt{4\cos^2\gamma - 1}}{12\cos\gamma}$.

פירמידה שבסיסה הוא משולש ישר זווית:

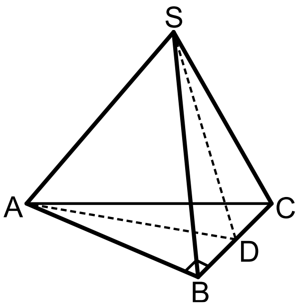
סיכום כללי:

באיור הבא מופיע חתך מישורי של בסיס הפירמידה ובו מסומנת נקודת מרכז המעגל החוסם את המצולעים.



תיאור פירמידה שבסיסה משולש ישר זווית.
ניתן לראות כי משולש הבסיס מתקבל ממלבן
ע"י העברת אלכסון, לכן נקודת המרכז היא מפגש
האלכסונים (בדומה לבסיס מלבני).

שאלות:



36) נתונה פירמידה ישרה SABC שבסיסה הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle ABC = 90^\circ)$.
בפירמידה זו מעבירים גובה SD בפאה הצדדית SBC כך שנוצר המשולש SAD.
ידוע כי משולש זה הוא שווה שוקיים ובו נסמן: $SA = AD = 2m$.
הזווית הנוצרת בין הגובה SD והקטע AD תסומן ב- $\sphericalangle SDA = \alpha$.

א. הראה כי הגובה SD בפאה SBC שווה באורכו למקצוע הבסיס AB.
ב. מה ניתן לומר על המשולשים SAB ו-SAD במקרה זה?
ג. הבע באמצעות α , m את גובה הפירמידה.

37) נתונה פירמידה משולשת וישרה שבסיסה משולש ישר זווית.
אחד מהניצבים במשולש הוא c והזווית שמולו היא α.
הזווית שבין המקצוע הצדדי לבסיס היא β.
הבע באמצעות c, α ו- β את נפח הפירמידה.

תשובות סופיות:

36) א. $SD = AB = 4m\cos\alpha$ ב. המשולשים חופפים. ג. $2\sqrt{3}m\cos\alpha$.

37) $V = \frac{c^3 \tan\beta}{12\tan\alpha\sin\alpha}$.

מתמטיקה למכינה באקדמיה

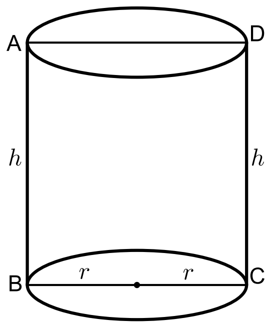
פרק 9 - טריגונומטריה במרחב - גליל חרוט וכדור

תוכן העניינים

הגליל:

סיכום כללי:

הגדרות:

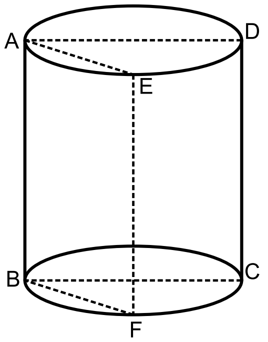


- נתון מעגל במישור α. אם דרך כל הנקודות שעל המעגל נעלה אנכים למישור α ונחתוך אותם ע״י מישור נוסף β המקביל ל- α נקבל גוף הנקרא גליל.
- לכל גליל יש שני בסיסים השווים זה לזה.
- המרחק בין שני בסיסי הגליל נקרא **גובה הגליל**.
- הישר AB נקרא **הקו היוצר** של הגליל (והוא גובה הגליל).
- כאשר חותכים את הגליל ע״י מישור שמאונך לבסיסי הגליל ועובר דרך המרכזים של שני הבסיסים, מתקבל מלבן הנקרא **החתך הצירי של הגליל**.
- אם נפרוש את מעטפת הגליל נקבל מלבן שאורכו $2\pi r$ וגובהו h.

נוסחאות:

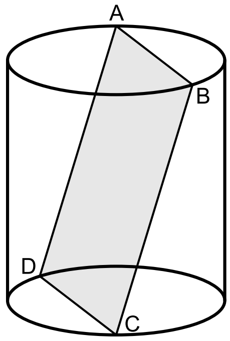
- נפח גליל: $V = \pi r^2 h$.
- שטח מעטפת של גליל: $M = 2\pi rh$.
- שטח פנים של גליל: $P = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.

שאלות:

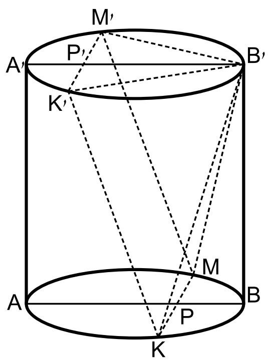


1) בגליל ישר חתכו מישור AEFB, היוצר עם מישור החתך הצירי ABCD של הגליל זווית α. האלכסון $AF = \ell$ של המרובע AEFB יוצר עם מישור בסיס הגליל זווית β.
הבע את נפח הגליל באמצעות α, β ו- ℓ.

2) האלכסון העובר במעטפת של גליל ישר כאשר היא פרושה יוצר זווית α עם גובה הגליל. אורך האלכסון בחתך הצירי של הגליל הוא d.
הבע באמצעות d ו- α את שטח המעטפת של הגליל והוכח שהוא שווה: $\frac{\pi^2 d^2 \tan\alpha}{\pi^2+\tan^2\alpha}$.



3) ABCD הוא חתך מלבני מישורי, בתוך גליל ישר, שהזווית בינו לבין מישור בסיס הגליל היא α.
הזווית בין האלכסון AC של המלבן ABCD למישור בסיס הגליל היא β.
הצלע BC שווה ל- a.
הוכח שנפח הגליל הוא: $\frac{\pi a^3 \sin^3\alpha}{4\tan^2\beta}$.



4) נתון גליל ישר שגובהו 16 ס"מ ורדיוס בסיסיו הוא 12 ס"מ.
מעבירים את הקטרים AB ואת A'B' אשר מקבילים זה לזה בשני הבסיסים בהתאמה.
הנקודות P ו-P' נמצאות על הקטרים כך ש: $A'P'=\frac{1}{4}A'B'$
ו- $BP=\frac{1}{4}AB$. דרך הנקודה P מעבירים KM מאונך ל-AB
ודרך הנקודה P' מעבירים את K'M' המאונך ל-A'B'.
מצא את נפח הפירמידה המרובעת שבסיסה הוא KMM'K' וקדקודה בנקודה B'.

תשובות סופיות:

1) $V=\frac{\pi\ell^3\cos^2\beta\sin\beta}{4\cos^2\alpha}$.

2) שאלת הוכחה.

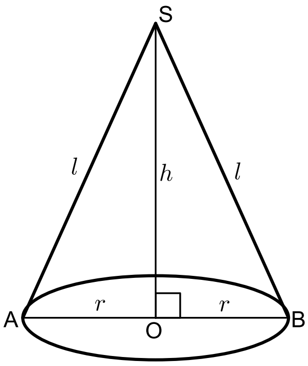
3) שאלת הוכחה.

4) צריך לחשב.

החרוט:

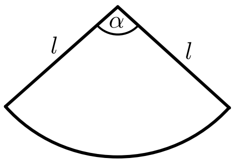
סיכום כללי:

הגדרות:



- כאשר מחברים את נקודה S הנמצאת מחוץ למישור שבו נמצא מעגל ברדיוס r, עם כל הנקודות שעל מעגל זה, יתקבל חרוט.
- הנקודה S נקראת קדקוד החרוט.
- אם העקב של הגובה היורד מ-S נמצא במרכז המעגל, החרוט הוא **חרוט ישר**.
- לישר AS קוראים **הקו היוצר** (והוא מסומן ב-l).

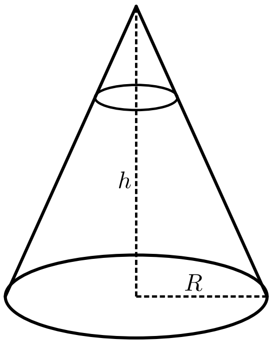
- אם נחתוך חרוט ישר במישור העובר דרך הגובה, נקבל משולש שווה שוקיים שבסיסו הוא קוטר המעגל. למשולש זה קוראים בשם **החתך הצירי של החרוט**.
- אם נחתוך חרוט לאורך הקו היוצר שלו ונפרוש את מעטפת החרוט, נקבל גזרת עיגול עם זווית מרכזית α המקיימת: $\frac{\alpha}{360}=\frac{r}{l}$.



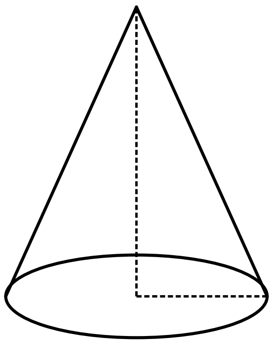
נוסחאות:

- נפח חרוט: $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$.
- שטח מעטפת של חרוט: $M=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$.
- שטח פנים של חרוט: $P=\pi r^2+\pi r\sqrt{r^2+h^2}$.

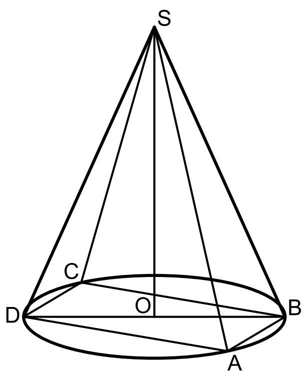
שאלות:



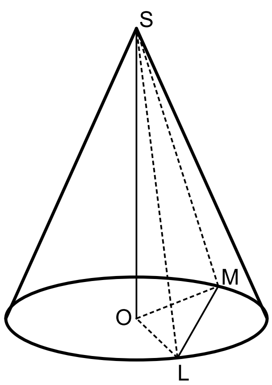
1) נתון חרוט ישר, שרדיוס בסיסו R , וגובהו h .
מישור מקביל לבסיס חותך את החרוט.
החתך הוא מעגל, ששטחו שווה לרבע משטחו של בסיס החרוט.
מצא את היחס בין נפח החרוט, שנוצר ע״י החיתוך, לבין נפח החרוט המקורי.



2) שטח פני חרוט ישר שווה ל- 245π סמ״ר.
אם נפרוש את המעטפת הנ״ל במישור,
נקבל גזרת עיגול בת זווית מרכזית השווה ל- $60°$.
מצא את נפח החרוט הנ״ל.

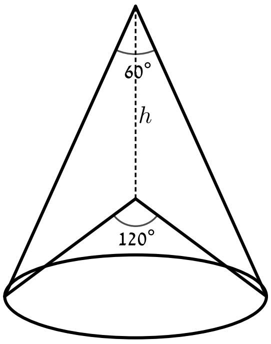


3) בבסיס חרוט ישר חסום ריבוע ABCD שצלעו a.
מחברים את הקדקודים A ו-B של הריבוע עם ראש החרוט S, ומתקבל משולש שווה שוקיים SAB עם זווית הראש $\sphericalangle ASB=\alpha$.
הבע את נפח החרוט באמצעות a ו- α .



4) נתון חרוט ישר שקדקודו S ומרכז בסיסו הוא O.
מעבירים מיתר LM כך ש- $\sphericalangle LOM=\alpha$.
הזווית שבין המישור LSM לבין בסיס החרוט היא β .
מרחק המישור LSM ממרכז הבסיס הוא d .
הבע את נפח החרוט באמצעות α , β ו- d .

5) נתונים שני חרוטים ישרים בעלי בסיס משותף.
בחרוט אחד זווית הראש של החתך הצירי היא בת $60°$
ובחרוט השני זווית הראש של החתך הצירי היא בת $120°$.
הקדקודים של שני החרוטים נמצאים במרחק h זה מזה.
הוכח כי ההפרש בין הנפחים של שני החרוטים הוא $\frac{\pi h^3}{4}$.



תשובות סופיות:

1) $\frac{1}{8}$.

2) $\frac{1225\pi}{3}$.

3) $\frac{\pi a^3\sqrt{\cos\alpha}}{12\sin\frac{\alpha}{2}}$.

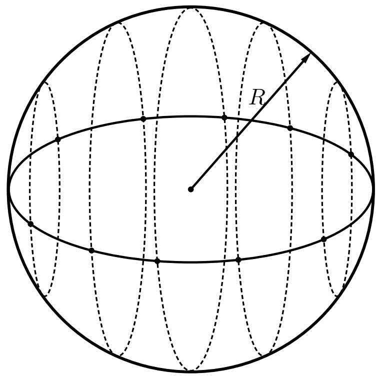
4) $\frac{\pi d^3}{3\sin^2\beta\cos\beta\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

5) הוכחה.

הכדור:

סיכום כללי:

הגדרות:



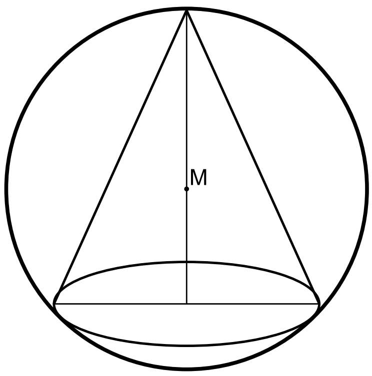
כדור הוא גוף הנוצר מסיבובו של חצי מעגל סביב קוטרו.
קוטר זה הוא קוטר הכדור ושווה לפעמיים רדיוס הכדור.
כל הנקודות שעל הכדור נמצאות במרחקים שווים ממרכז הכדור (רדיוס הכדור).

נוסחאות:

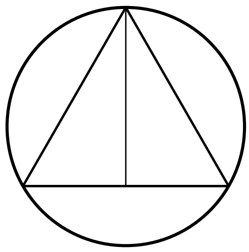
- נפח כדור: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.
- שטח פני הכדור: $P=4\pi R^2$.

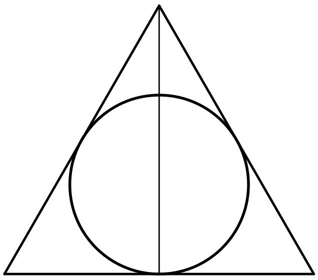
שאלות:

1) חרוט ישר חסום בכדור, באופן שמרכז הכדור M נמצא על גובה החרוט.
קוטר בסיס החרוט שווה לרדיוס הכדור.
מצא את גודל הזווית בין הקו היוצר של החרוט לבין בסיסו.



2) בכדור בעל רדיוס R חסום חרוט ישר, שבו זווית הראש של החתך הצירי שווה ל- 2α.
הבע את שטח מעטפת החרוט הנ"ל באמצעות R ו- α.





3) בחרוט ישר שבו זווית הראש של החתך הצירי היא α,
והקו היוצר הוא ℓ, חסום כדור.
הבע את נפח הכדור באמצעות α ו- ℓ.

4) חרוט שגובהו גדול פי 4 מרדיוס בסיסו חסום בתוך כדור.
שטח הפנים של הכדור הוא P. הבע את נפח החרוט באמצעות P.

5) בפירמידה ישרה שבסיסה ריבועי חסום כדור שרדיוסו R.
כל אחת מהפאות הצדדיות יוצרת עם בסיס הפירמידה זווית β.
הבע את נפח הפירמידה באמצעות R ו- β.

תשובות סופיות:

1) 75°.

2) $2\pi R^2 \sin 2\alpha \cos\alpha$.

3) $\frac{4}{3}\pi\ell^3 \sin^3\frac{\alpha}{2}\tan^3\left(45-\frac{\alpha}{4}\right)$.

4) $\frac{256P\sqrt{P}}{14739\sqrt{\pi}}$.

5) $\frac{4R^3}{3}\tan\beta\cot^3\frac{\beta}{2}$.

מתמטיקה למכינה באקדמיה

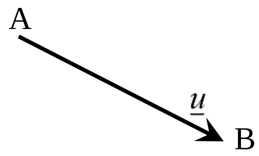
פרק 10 - וקטורים גיאומטריים

תוכן העניינים

הגדרות וכללים יסודיים:

סיכום כללי:

הגדרה כללית:



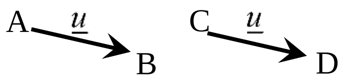
להלן תיאור של וקטור גיאומטרי: וקטור שמוצאו בנקודה A ומסתיים בנקודה B יסומן באופן הבא: $\overrightarrow{AB}$.

ניתן לסמן וקטור באות קטנה באופן הבא: $\underline{u}$ (אותיות מקובלות לסימון הן: $\underline{u},\ \underline{v},\ \underline{w}$).

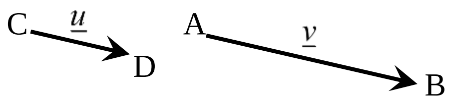
מהאיור לעיל מתקיים: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.

קשרים בין וקטורים:

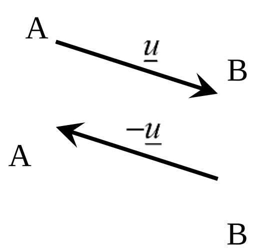
- וקטורים שווים: שני וקטורים נקראים שווים אם הם זהים בגודלם ובכיוונם.
  דוגמא לווקטורים שווים: מתקיים: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.



- וקטורים מקבילים: שני וקטורים שכיוונם זהה נקראים מקבילים.
  ניתן להביע את האחד באמצעות השני ע"י כפל בסקלר.
  וקטורים מקבילים נקראים גם "וקטורים תלויים ליניארית".
  דוגמא לתלות בין וקטורים מקבילים:
  עבור $\alpha>1$ מתקיים: $\underline{v}=\alpha\underline{u}$, או: $\overrightarrow{AB}=\alpha\cdot\overrightarrow{CD}$.



- אם זוג וקטורים במרחב: $\overrightarrow{AB}=\alpha\underline{u}+\beta\underline{v}+\gamma\underline{w}$ ו- $\overrightarrow{CD}=a\underline{u}+b\underline{v}+c\underline{w}$ מקבילים
  אז מתקיים: $\frac{\alpha}{a}=\frac{\beta}{b}=\frac{\gamma}{c}$.



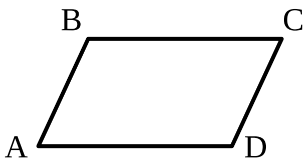
- וקטור המסומן $\overrightarrow{BA}$ הוא בעל גודל זהה לווקטור $\overrightarrow{AB}$
  וכיוון הפוך לו. במקרה זה מתקיים: $\overrightarrow{BA}=-\underline{u}$.

הערה:

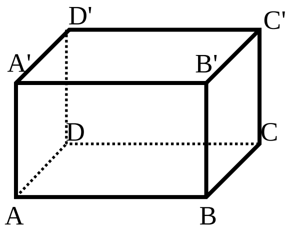
שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ יקראו מקבילים אם מתקיים: $\underline{v}=\alpha\underline{u}$ כאשר הגודל α יכול לקבל כל ערך מספרי בתחום $\alpha\neq 0$. בפרט עבור $\alpha<0$ כיוונם הפוך ב- $180°$.

שאלות:

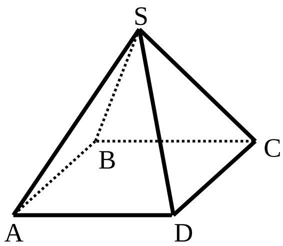
1) במקבילית ABCD נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$
מצא את כל הווקטורים במקבילית ששווים
ל- $\underline{u}$ או $\underline{v}$.



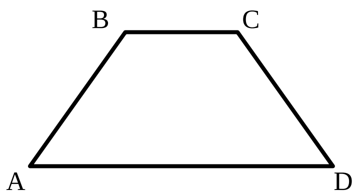
2) בתיבה ABCDA'B'C'D'
נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$.
מצא את כל הווקטורים בתיבה ששווים
ל- $\underline{u}$, $\underline{v}$ או $\underline{w}$.



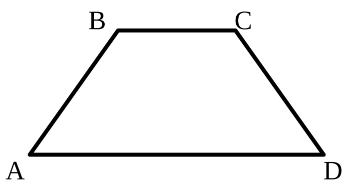
3) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע
נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$.
מצא את כל הווקטורים שבפירמידה השווים
ל- $\underline{u}$, $\underline{v}$ או $\underline{w}$.



4) בטרפז ABCD שבשרטוט
נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $AD=3BC$.
מצא את כל הווקטורים בטרפז שניתן להביע
באמצעות $\underline{u}$ או $\underline{v}$.



5) בטרפז ABCD שבשרטוט
נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $AD=3BC$

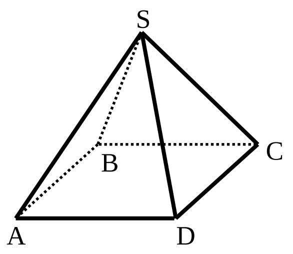


א. הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{DC}$.

ב. הנקודה E היא אמצע הצלע AD.
הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטור $\overrightarrow{BE}$.

ג. הנקודה F היא אמצע הצלע CD.
הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטור $\overrightarrow{AF}$.

6) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע



נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}\ ,\ \overrightarrow{AD}=\underline{v}\ ,\ \overrightarrow{AS}=\underline{w}$.

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{SC}$.

ב. הנקודה N היא אמצע המקצוע SD.
הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הווקטור $\overrightarrow{BN}$.

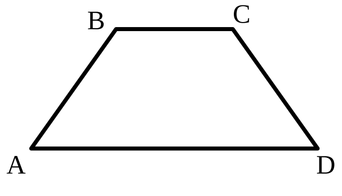
7) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $AP:PB=2:3$. נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

8) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $AP:PB=3:5$. נתון: $\overrightarrow{AP}=\underline{u}$.
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{PB}$ ו- $\overrightarrow{AB}$.

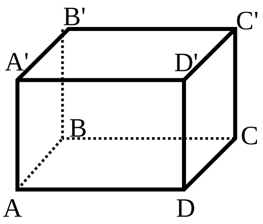
9) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $\frac{AP}{AB}=\alpha$. נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

10) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $\frac{AP}{PB}=\alpha$. נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

11) בטרפז ABCD שבשרטוט



נתון: $AD=3BC\ ,\ \overrightarrow{AD}=\underline{v}\ ,\ \overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הנקודה F נמצאת על הצלע CD
ומקיימת: $\frac{DF}{FC}=\beta$.
הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- β את הווקטור $\overrightarrow{AF}$.

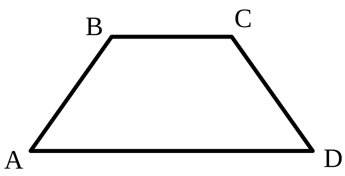


12) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$

הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'}=\alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'}=\beta$

הבע באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$, α ו- β את הווקטור: $\overrightarrow{PQ}$.

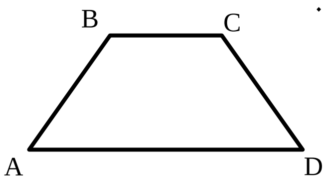


13) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $AD=3BC$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.

הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת: $\frac{AF}{FD}=\alpha$

מצא את ערכו של α שעבורו מתקיים $\overrightarrow{FE}\parallel\overrightarrow{AB}$.

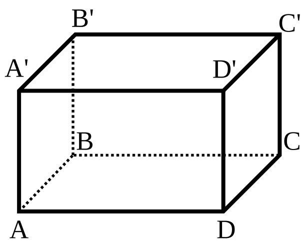


14) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $AD=3BC$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.

הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת: $\frac{AF}{FD}=\alpha$

מצא את ערכו של α שעבורו מתקיים: $\overrightarrow{FE}\parallel\overrightarrow{AC}$.



15) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$.

הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'}=\alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'}=\beta$.

א. הבע באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$, α ו- β את הווקטור $\overrightarrow{PQ}$.

ב. האם קיימים ערכי α ו- β שבעבורם $\overrightarrow{PQ}\parallel\overrightarrow{AC}$? נמק.

ג. הנקודה E היא מפגש אלכסוני הפאה ABB'A'.

מצא את ערכי α ו- β אם נתון כי $\overrightarrow{PQ}\parallel\overrightarrow{EC}$.

תשובות סופיות:

1) $\underline{u}=\overrightarrow{DC}$, $\underline{v}=\overrightarrow{BC}$.

2) $\underline{v}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{B'C'}$, $\underline{u}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{D'C'}=\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}$, $\underline{w}=\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{BB'}$.

3) $\underline{w}=\overrightarrow{AS}$, $\underline{v}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, $\underline{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

4) $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\underline{v}$.

5) א. $\overrightarrow{AC}=\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}$, $\overrightarrow{DC}=\underline{u}-\frac{2}{3}\underline{v}$ ב. $\overrightarrow{BE}=-\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}$ ג. $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{2}{3}\underline{v}$.

6) א. $\overrightarrow{AC}=\underline{u}+\underline{v}$, $\overrightarrow{SC}=\underline{u}+\underline{v}-\underline{w}$ ב. $\overrightarrow{BN}=-\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w}$.

7) $\overrightarrow{BP}=\frac{3}{5}\underline{u}$, $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\underline{u}$.

8) $\overrightarrow{PB}=\frac{5}{3}\underline{u}$, $\overrightarrow{AB}=\frac{8}{3}\underline{u}$.

9) $\overrightarrow{PB}=(1-\alpha)\underline{u}$, $\overrightarrow{AP}=\alpha\underline{u}$.

10) $\overrightarrow{PB}=\frac{1}{1+\alpha}\underline{u}$, $\overrightarrow{AP}=\frac{\alpha}{1+\alpha}\underline{u}$.

11) $\overrightarrow{AF}=\frac{\beta}{1+\beta}\underline{u}+\frac{3+\beta}{3+3\beta}\underline{v}$.

12) $\overrightarrow{PQ}=(1-\alpha)\underline{u}+\underline{v}-\frac{1}{1+\beta}\underline{w}$.

13) $\alpha=2$.

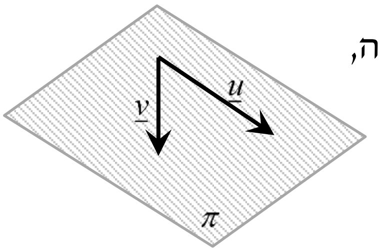
14) $\alpha=1$.

15) א. $\overrightarrow{PQ}=(1-\alpha)\underline{u}+\underline{v}-\frac{1}{1+\beta}\underline{w}$ ב. לא ג. $\beta=1$, $\alpha=\frac{1}{2}$.

ווקטורים הפורשים מישור:

סיכום כללי:

ווקטורים הפורשים מישור:



כל שני ווקטורים שאינם מקבילים, כלומר, בלתי תלויים זה בזה, פורשים מישור.

דוגמא:

הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ בעלי כוונים שונים ולכן פורשים את המישור π.

קומבינציה לינארית של ווקטורים:

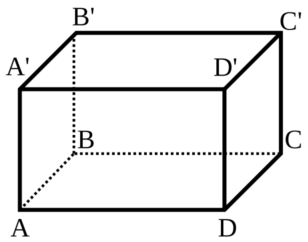
- כל ווקטור שנמצא במישור (או מקביל למישור זה) ניתן להצגה ע"י קומבינציה ליניארית של שני ווקטורים הפורשים את המישור.
- כל ווקטור שהוא קומבינציה ליניארית של שני ווקטורים הפורשים את המישור, מקביל למישור.
- אם ניתן להביע ווקטור שקומבינציה לינארית של שני ווקטורים אחרים (או יותר) אז שלושת הווקטורים נקראים תלויים ליניארית (ניתן לבטא כל ווקטור באמצעות האחרים).

דוגמא:

עבור המישור הנפרש לעיל, ניתן להציג כל ווקטור $\underline{w}$ המוכל, או מקביל למישור π באופן הבא: $\underline{w} = \alpha \cdot \underline{u} + \beta \cdot \underline{v}$ כאשר: α, β מספרים ממשיים כלשהם.

במקרה זה שלושת הווקטורים $\underline{v}$, $\underline{u}$ ו- $\underline{w}$ נקראים תלויים ליניארית.

שאלות:



16) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$.

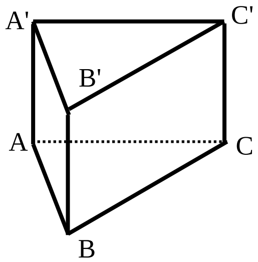
הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'}=\alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'}=\beta$

א. הבע באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$, α ו- β את הווקטור $\overrightarrow{PQ}$.

ב. מהו ערכו של α שבעבורו הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ מקביל לפאה ADD'A'?

ג. האם קיים ערך של β שבעבורו הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ מקביל לבסיס ABCD?



17) נתונה מנסרה משולשת ABCA'B'C'

ובה נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$.

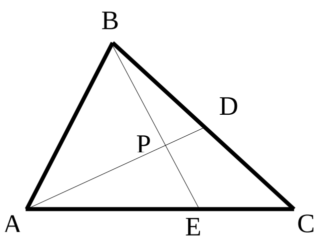
הנקודה M נמצאת על המקצוע A'C' ומקיימת: $\frac{A'M}{MC'}=\alpha$

והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת: $\frac{BN}{BC}=\beta$.

א. הבע באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$, α ו- β את הווקטור $\overrightarrow{NM}$.

ב. מהו ערכו של β שבעבורו הווקטור $\overrightarrow{NM}$ מקביל לפאה ACC'A'?

ג. נתון כי הווקטור $\overrightarrow{NM}$ מקביל לפאה ABB'A'.
הבע את α באמצעות β .



18) במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע BC

והנקודה E נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים: $\frac{AE}{CE}=2$.

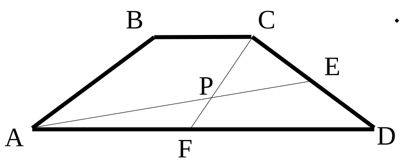
הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.

נגדיר: $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, וכן: $\overrightarrow{AP}=t\cdot\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BP}=s\cdot\overrightarrow{BE}$.

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, t ו- s את הווקטור $\overrightarrow{AP}$ בשתי דרכים שונות.

ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AD ואת הקטע BE.

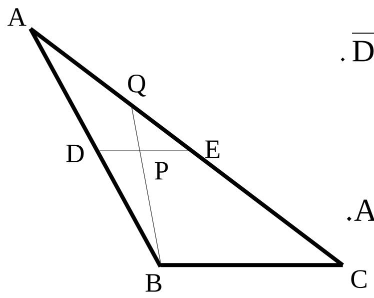
19) בטרפז ABCD, ($AD \parallel BC$) שבשרטוט נתון: $AD = 3BC$.
הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD
והנקודה F נמצאת באמצע הצלע AD.
הנקודה P היא מפגש הקטעים AE ו-CF.
מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AE ואת הקטע CF.



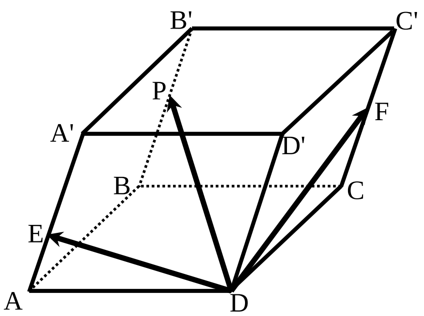
20) במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע AB
והנקודה E נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים: $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BC}$.
הנקודה P היא אמצע הקטע DE והמשך הקטע BP
חותך את הצלע AC בנקודה Q.

א. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה Q את הצלע AC.

ב. חשב את היחס: $\frac{S_{\Delta QPE}}{S_{\Delta DPB}}$.



21) במקבילון ABCDA'B'C'D'
נתון: $\overrightarrow{DA} = \underline{u}$, $\overrightarrow{DC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{DD'} = \underline{w}$.
הנקודה F נמצאת באמצע המקצוע 'CC,
הנקודה E נמצאת על המקצוע 'AA
ומקיימת: $A'E = 2AE$ והנקודה P נמצאת על
המקצוע 'BB ומקיימת: $\overrightarrow{B'P} = k \cdot \overrightarrow{B'B}$.
נתון: $\overrightarrow{DP} = t \cdot \overrightarrow{DE} + s \cdot \overrightarrow{DF}$.



א. הבע באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$ ו- k את הווקטור $\overrightarrow{DP}$.

ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את המקצוע 'BB.

ג. האם הנקודות D , E, F ו- P נמצאות על אותו מישור? נמק.

תשובות סופיות:

16) א. $\overrightarrow{PQ}=(1-\alpha)\underline{u}+\underline{v}-\frac{1}{1+\beta}\underline{w}$ ב. $\alpha=1$ ג. לא.

17) א. $\overrightarrow{NM}=(\beta-1)\underline{u}+\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}-\beta\right)\underline{v}+\underline{w}$ ב. $\beta=1$ ג. $\alpha=\frac{\beta}{1-\beta}$

18) א. $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}t\underline{u}+\frac{1}{2}t\underline{v}$, $\overrightarrow{AP}=(1-s)\underline{u}+\frac{2}{3}s\underline{v}$ ב. $BP:PE=3:2\,,\,AP:PD=4:1$

19) $AP:PE=2:1\,,\;CP:PF=2:1$

20) א. $AQ:QC=1:2$ ב. $\frac{S_{QPE}}{S_{DPB}}=\frac{1}{3}$

21) א. $\overrightarrow{DP}=\underline{u}+\underline{v}+(1-k)\underline{w}$ ב. $B'P:PB=1:5$ ג. כן.

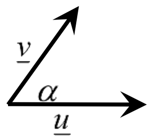
מכפלה סקלרית וחישוב גודל של וקטור:

סיכום כללי:

מכפלה סקלרית של שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ תסומן: $\underline{u}\cdot\underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה:

$$\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha$$

כאשר α היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים כמתואר באיור.



ניתן למצוא את הזווית שבין שני וקטורים ע"י: $\cos\alpha=\dfrac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}$.

גודל של וקטור נתון ע"י: $|\underline{u}|=\sqrt{\underline{u}^2}$, או: $|\underline{u}|^2=\underline{u}^2$.

הערה:

המכפלה הסקלרית $\underline{u}\cdot\underline{v}$ בין שני וקטורים מקבלת ערך מספרי בלבד! היא יכולה להיות חיובית, שלילית או אפס כפי שנראה בהמשך.

שאלות:

22) חשב את המכפלה הסקלרית של הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ על פי הנתונים על גודלם והזווית שביניהם:

א. $|\underline{u}|=3$, $|\underline{v}|=2$, $\alpha=60°$

ב. $|\underline{u}|=4$, $|\underline{v}|=5$, $\alpha=120°$

ג. $|\underline{u}|=2$, $|\underline{v}|=6$, $\alpha=30°$

ד. $|\underline{u}|=8$, $|\underline{v}|=3$, $\alpha=180°$

ה. $|\underline{u}|=3$, $|\underline{v}|=5$, $\alpha=0°$

ו. $|\underline{u}|=7$, $|\underline{v}|=4$, $\alpha=90°$

23) חשב את הזווית בין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ על פי הנתונים על גודלם והמכפלה הסקלרית שלהם:

א. $|\underline{u}|=3$, $|\underline{v}|=4$, $\underline{u}\cdot\underline{v}=6$

ב. $|\underline{u}|=4$, $|\underline{v}|=2$, $\underline{u}\cdot\underline{v}=-4\sqrt{3}$

ג. $|\underline{u}|=9$, $|\underline{v}|=5$, $\underline{u}\cdot\underline{v}=0$

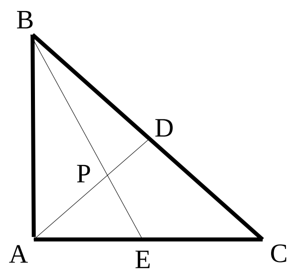
ד. $|\underline{u}|=2$, $|\underline{v}|=6$, $\underline{u}\cdot\underline{v}=12$

24) נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ שאורכם: $|\underline{u}|=6$, $|\underline{v}|=3$. הזווית ביניהם היא $120°$.
חשב את גודלו של הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ שמוגדר: $\overrightarrow{PQ}=2\underline{u}-3\underline{v}$.

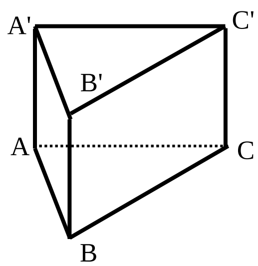
25) נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ המאונכים זה לזה שאורכם: $|\underline{u}|=4$, $|\underline{v}|=5$.
חשב את גודלו של הווקטור $\overrightarrow{MN}$ שמוגדר: $\overrightarrow{MN}=0.5\underline{u}-\underline{v}$.

26) נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ שאורכם: $|\underline{u}|=6$, $|\underline{v}|=3$. הזווית ביניהם היא $120°$.
חשב את גודל הזווית $\sphericalangle QPM$ אם נתון: $\overrightarrow{PM}=4\underline{u}+\underline{v}$, $\overrightarrow{PQ}=2\underline{u}-3\underline{v}$.

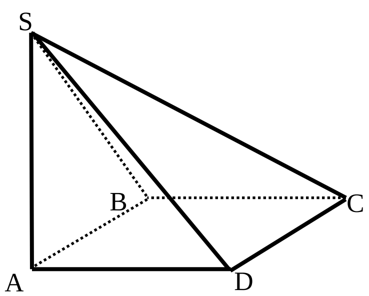
27) המשולש ABC הוא משולש ישר זווית ($\sphericalangle BAC=90°$).
הנקודה D היא אמצע היתר BC והנקודה E נמצאת על הניצב AC.
הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.
נתון: $\frac{AP}{PD}=3$, $AB=8$, $AC=12$.
חשב את גודל הזווית $\sphericalangle DPC$.



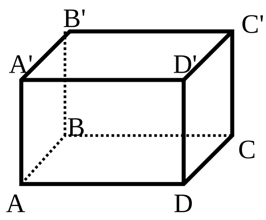
28) נתונה מנסרה משולשת וישרה ABCA'B'C' שבסיסה משולש שווה צלעות שאורך כל אחת מצלעותיו הוא 6. גובה המנסרה הוא 8.
הנקודה M היא אמצע המקצוע A'C' והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת: $BN=2CN$.
נסמן: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$.
חשב את גודל הזווית: $\sphericalangle MAN$.



29) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע המקצוע SA הוא גובה הפירמידה.
נתון: $AB=AD=\frac{1}{2}AS=k$.
נסמן: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$.
הנקודה Q היא אמצע המקצוע SC והנקודה P היא אמצע המקצוע SB.
חשב את גודל הזווית: $\sphericalangle PAQ$.



30) בתיבה 'ABCDA'B'C'D נתון: $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $AB=\frac{1}{\sqrt{2}}AD=AA'$.



הנקודה P נמצאת על המקצוע 'A'B ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'}=\alpha$

והנקודה Q היא אמצע המקצוע 'DD.

א. מהו ערכו של α שבעבורו מתקיים: $|\overrightarrow{AP}|=\frac{5}{6}|\overrightarrow{AQ}|$?

ב. הבע באמצעות α את $\cos\sphericalangle PAQ$
והראה כי לכל ערך של α הזווית $\sphericalangle PAQ$ חדה.

ג. מהו ערכו של α שבעבורו הזווית $\sphericalangle PAQ$ מקיימת: $\cos\sphericalangle PAQ=\frac{2}{3\sqrt{5}}$?

31) הוכח כי בכל מרובע ABCD מתקיים: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$.

32) נתון מלבן ABCD. הוכח כי לכל נקודה כלשהי P מתקיים: $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}$.

33) נתון ריבוע ABCD. הנקודה P היא אמצע הצלע BC והנקודה Q היא אמצע הצלע CD.
הוכח כי מתקיים: $S_{ABCD}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$.

34) נתון מרובע ABCD. הנקודה P היא אמצע הצלע AB והנקודה Q היא אמצע הצלע CD.
הוכח כי מתקיים: $\overrightarrow{PQ}=\frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}}{2}$.

35) נתונה פירמידה משולשת SABC שבה $\overrightarrow{AS}\perp\overrightarrow{BC}$ ו- $\overrightarrow{BS}\perp\overrightarrow{AC}$.
הוכח: $\overrightarrow{CS}\perp\overrightarrow{AB}$.

36) הוכח: וקטור המאונך לשני וקטורים בלתי תלויים במישור מאונך לכל הווקטורים שבמישור.

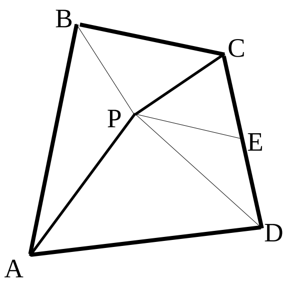
37) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הנקודה M היא מפגש התיכונים במשולש ABC.
הוכח: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=0$.

ב. נתונה פירמידה משולשת SABC. הנקודה P היא מפגש התיכונים בפאה SBC.
הוכח: $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AS}\right)$.

ג. נתון בנוסף כי $\overrightarrow{AS}$ ו- $\overrightarrow{AP}$ מאונכים ל- $\overrightarrow{BC}$.
הוכח כי $AB=AC$. (הדרכה: סמן $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$).

38) הנקודה P נמצאת בתוך מרובע כלשהו ABCD
כך שהמשולשים APD ו-BPC הם משולשים
ישרי זווית ושו"ש ($AP=PD$, $BP=PC$).
הנקודה E היא אמצע הצלע CD. הוכח: $\overrightarrow{PE}\perp\overrightarrow{AB}$.
(הדרכה: סמן $\overrightarrow{PB}=\underline{a}$, $\overrightarrow{PC}=\underline{b}$, $\overrightarrow{PA}=\underline{c}$, $\overrightarrow{PD}=\underline{d}$).



39) בטטראדר SABC נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$.
הנקודה P נמצאת על המקצוע AS ומקיימת: $\overrightarrow{AP}=\alpha\cdot\overrightarrow{AS}$.
הנקודה Q נמצאת על הפאה SBC ומקיימת: $\overrightarrow{SQ}=\beta\left(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)$.

א. מצא את הקשר בין α ו- β שבעבורו $\overrightarrow{PQ}$ מקביל למישור ABC.

ב. נתון: $\alpha=\beta=\frac{1}{3}$, $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{BC}$. הוכח: $AB=AC$.

40) נתונה פירמידה שבסיסה מלבן. הוכח כי אם שלושה המקצועות הצדדיים שבה שווים, אז גם המקצוע הצדדי הרביעי שווה להם.

תשובות סופיות:

22) א. 3 ב. -10 ג. $6\sqrt{3}$ ד. -24 ה. 15 ו. 0.

23) א. $60°$ ב. $150°$ ג. $90°$ ד. $0°$.

24) $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = 18.248$

25) $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{29}$

26) $31.87°$

27) $55.49°$

28) $70.623°$

29) $24.095°$

30) א. $\alpha = \frac{3}{4}$ ב. $\cos(\sphericalangle PAQ) = \frac{1}{3\sqrt{1+\alpha^2}}$ ג. $\alpha = \frac{1}{2}$

31) שאלת הוכחה.

32) שאלת הוכחה.

33) שאלת הוכחה.

34) שאלת הוכחה.

35) שאלת הוכחה.

36) שאלת הוכחה.

37) שאלת הוכחה.

38) שאלת הוכחה.

39) א. $\alpha + 2\beta = 1$ ב. שאלת הוכחה.

40) שאלת הוכחה.

מתמטיקה למכינה באקדמיה

פרק 11 - וקטורים אלגבריים

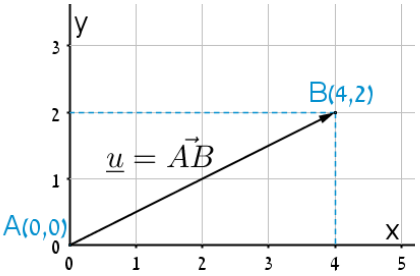
תוכן העניינים

שאלות יסודיות עם וקטורים אלגבריים:

סיכום כללי:

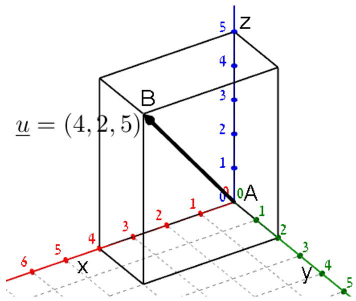
הגדרה כללית:

וקטור שמוצאו בראשית הצירים $(0,0)$ וסופו בנקודה: (x,y) במישור ייכתב בצורתו האלגברית באופן הבא: $\underline{u}=(x,y)$.



דוגמאות:

- הווקטור $\underline{u}=(4,2)$ נמצא במישור $[xy]$, מוצאו בנקודה $A(0,0)$ וסופו בנקודה $B(4,2)$.



- הווקטור: $\underline{u}=(4,2,5)$ נמצא במרחב הקרטזי. מוצאו בראשית הצירים $A(0,0,0)$ וסופו בנקודה: $B(2,4,5)$.

ווקטור שמוצאו אינו בראשית הצירים:

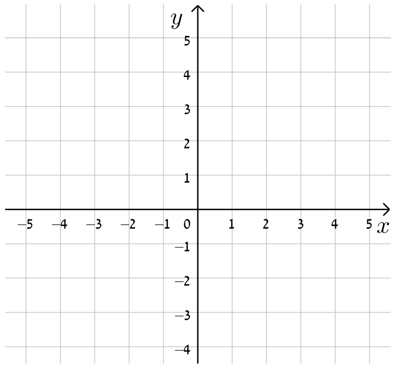
ווקטור שמוצאו בנקודה $A(x_1,y_1,z_1)$ וסופו בנקודה: $B(x_2,y_2,z_2)$ ייכתב ע"י חישוב הפרש נקודת סופו ממוצאו באופן הבא: $\underline{u}=\overline{AB}=B-A=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

אמצע קטע וחלוקת קטע ביחס נתון:

- אמצע הקטע M שקצוותיו הם: $A(x_1,y_1,z_1)$ ו- $B(x_2,y_2,z_2)$ הוא: $z_M=\dfrac{z_1+z_2}{2}$, $y_M=\dfrac{y_1+y_2}{2}$, $x_M=\dfrac{x_1+x_2}{2}$.
- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $A(x_1,y_1,z_1)$ ו-$B(x_2,y_2,z_2)$ ביחס של $k:l$ הם: $z_P=\dfrac{k\cdot z_1+l\cdot z_2}{k+l}$; $y_P=\dfrac{k\cdot y_1+l\cdot y_2}{k+l}$; $x_P=\dfrac{k\cdot x_1+l\cdot x_2}{k+l}$.

שאלות:

1) שרטט את הווקטורים הבאים:



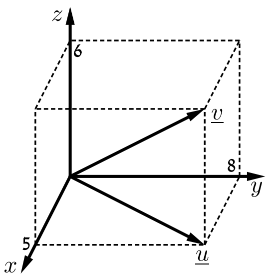
א. $\underline{u}=(4,2)$

ב. $\underline{v}=(-5,1)$

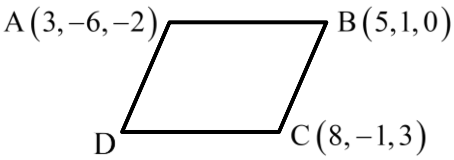
ג. $\underline{w}=(3,-4)$

ד. $\underline{a}=(0,3)$

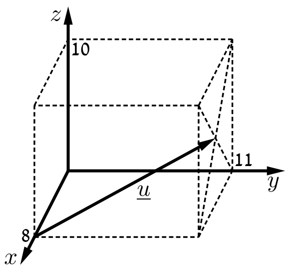
ה. $\underline{b}=(-5,0)$



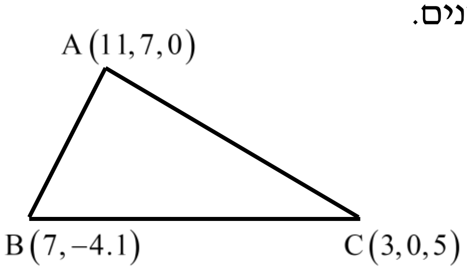
2) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$ על פי השרטוט.



3) בשרטוט נתונה מקבילית ששיעורי שלושה מקודקודיה נתונים (ראה איור).
מצא את שיעורי הקודקוד D.



4) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט.



5) בשרטוט נתון משולש ששיעורי קודקודיו נתונים.
מצא את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

6) מצא את x, y ו- z אם נתון ש- $\underline{u}=\underline{v}$ כאשר:

$\underline{u}=(4,-1,2)$, $\underline{v}=(z-2,y+1,x-3)$

7) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את הווקטור $\overrightarrow{AB}$ אם נתונות הנקודות $A(-3,5)$ ו- $B(6,1)$.

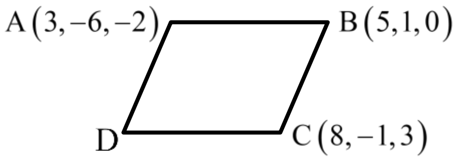
ב. מצא את שיעורי הנקודה Q אם נתונה הנקודה $P(8,11)$ והווקטור $\overrightarrow{PQ}=(4,-3)$.

8) ענה על הסעיפים הבאים:

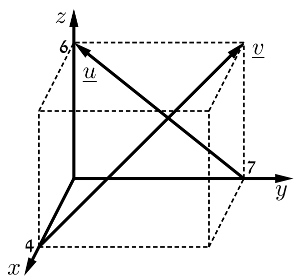
א. מצא את הווקטור $\overrightarrow{EF}$ אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו- $F(7,-1,-3)$.

ב. מצא את שיעורי הנקודה N אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$ והווקטור $\overrightarrow{MN}=(-1,-1,9)$.

9) בשרטוט נתונה מקבילית ששיעורי שלושה מקודקודיה נתונים.
מצא את שיעורי הקודקוד D.

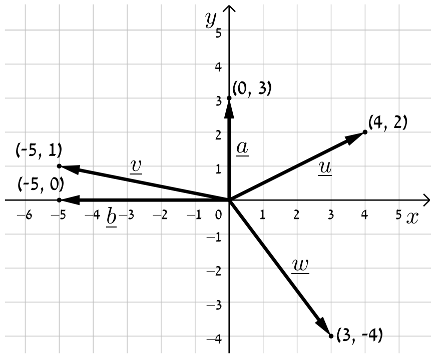


10) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$.



תשובות סופיות:

1) להלן סרטוט:



2) $\underline{v}=(5,8,6)$, $\underline{u}=(5,8,0)$.

3) $D(6,-8,1)$.

4) $\underline{u}=(4,11,5)$.

5) $(7,1,2)$.

6) $z=6$, $y=-2$, $x=5$.

7) א. $\overrightarrow{AB}=(9,-4)$ ב. $Q(12,8)$.

8) א. $\overrightarrow{EF}=(5,-1,0)$ ב. $N(-1,-5,10)$.

9) $D(6,-8,1)$.

10) $\underline{v}=(-4,7,6)$, $\underline{u}=(0,-7,6)$.

פעולות אלגבריות בין וקטורים:

סיכום כללי:

מכפלה סקלרית בהצגה אלגברית:

מכפלה סקלרית של שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ תסומן: $\underline{u}\cdot\underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha$ כאשר α היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים.

מכפלה סקלרית של וקטורים: $\underline{u}=(x_1,y_1,z_1)$, $\underline{v}=(x_2,y_2,z_2)$ תחושב באופן הבא: $\underline{u}\cdot\underline{v}=(x_1,y_1,z_1)(x_2,y_2,z_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

שאלות:

11) נתונים הווקטורים הבאים: $\underline{u}=(4,0,9)$, $\underline{v}=(-1,3,-5)$.
חשב את ערכי הווקטורים הבאים: $\underline{u}+\underline{v}$, $\underline{u}-\underline{v}$, $\underline{u}-2\underline{v}$, $3\underline{u}+2\underline{v}$.

12) נתונים הווקטורים: $\underline{u}=(-3,1,4)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$, $\underline{w}=(2,6,-5)$.
חשב את:

א. $2\underline{u}$
ב. $-0.5\underline{v}$
ג. $3\underline{u}-2\underline{v}$
ד. $0.25\underline{v}-0.5\underline{u}$
ה. $\underline{v}-0.5\underline{u}+2\underline{w}$
ו. $2\underline{v}-\underline{u}+4\underline{w}$

13) נתונות הנקודות הבאות: $A(1,-3,0)$, $B(4,2,-1)$, $C(3,-1,2)$.
מצא את הווקטורים הבאים:

א. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$
ב. $2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$
ג. $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

14) נתונים שלושה וקטורים: $\underline{u}=(6,-1,z)$, $\underline{v}=(0,y,4)$, $\underline{w}=(x,5,-10)$.
א. מצא את ערכם של x,y,z המקיימים: $\underline{u}+2\underline{v}=\underline{w}$.
ב. מצא את ערכם של x,y,z המקיימים: $2\underline{v}-3\underline{w}=\frac{1}{2}(\underline{u}+\underline{v})$.
ג. כיצד תשתנה התוצאה של סעיף א' אם: $\underline{u}=(6,y,z),\ \underline{v}=(y\text{-}1,2,x),\ \underline{w}=(x,2z,\text{-}10)$?

15) נתונים הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

א. חשב את תוצאת המכפלה הסקלרית עבור: $\underline{v}=(4,0,1)$, $\underline{u}=(-6,2,3)$.

ב. מצא את y עבורו תוצאת המכפלה הסקלרית של הווקטורים: $\underline{v}=(2,y,4)$, $\underline{u}=(1,7,-6)$ תהיה 1-.

ג. מצא את y עבורו הוקטורים מהסעיף הקודם יהיו מאונכים זה לזה.

תשובות סופיות:

11) $3\underline{u}+2\underline{v}=(10,6,17)$; $\underline{u}-2\underline{v}=(6,-6,19)$; $\underline{u}-\underline{v}=(5,-3,14)$; $\underline{u}+\underline{v}=(3,3,4)$.

12) א. $(6,-2,8)$ ב. $(-2,1,3)$ ג. $(-17,7,24)$
ד. $(2.5,-1,-3.5)$ ה. $(9.5,9.5,-18)$ ו. $(19,19,-36)$

13) א. $(5,7,1)$ ב. $(-8,-16,8)$ ג. $(8,12,0)$

14) א. $x=6\ ,\ y=3\ ,\ z=-18$ ב. $x=-1\ ,\ y=9\frac{2}{3}\ ,\ z=72$
ג. $x=-4\frac{8}{9}\ ,\ y=-4\frac{4}{9}\ ,\ z=-\frac{2}{9}$.

15) א. $\underline{u}\cdot\underline{v}=-21$ ב. $y=3$ ג. $y=3\frac{1}{7}$.

גודל של וקטור:

סיכום כללי:

גודלו של ווקטור $\underline{u}=(x_1,y_1,z_1)$ נתון ע"י: $|\underline{u}|=\sqrt{\underline{u}^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$.

שאלות:

16) נתונים הווקטורים הבאים: $\underline{v}=(5,-1,0)$, $\underline{u}=(1,-3,2)$.
חשב את הגדלים של הוקטורים הבאים: $4\underline{u}-3\underline{v}$, $2\underline{v}+\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$.

17) נתונים ארבעת קודקודי המרובע ABCD:
$A(-4,2,1)$, $B(0,2,-1)$, $C(-3,-5,0)$, $D(-7,-5,2)$
הוכח כי המרובע הוא מקבילית.

תשובות סופיות:

16) $|\underline{u}|=\sqrt{14}$; $|\underline{v}|=\sqrt{26}$; $|2\underline{v}+\underline{u}|=\sqrt{150}$; $|4\underline{u}-3\underline{v}|=\sqrt{266}$.

17) הוכחה.

וקטורים מקבילים ושווים:

שאלות:

18) נתונים ארבעת קודקודי המרובע ABCD :

$A(1,2,0)$, $B(-2,5,3)$, $C(-1,8,4)$, $D(4,3,-1)$

א. הוכח כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

19) נתונות הנקודות הבאות : $E(9,11,4)$, $D(7,4,10)$, $C(6,9,0)$, $B(3,7,-4)$, $A(1,0,2)$.

א. הראה כי : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DE}$.

ב. האם ניתן לומר כי גם $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$? נמק.

תשובות סופיות:

18) א. הוכחה. ב. כן.

19) א. הוכחה. ב. לא.

זווית בין וקטורים:

סיכום כללי:

- זווית α בין שני וקטורים $\underline{v}$, $\underline{u}$ תחושב ע״י: $\cos\alpha = \frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}$.

שאלות:

20) חשב את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$:

א. $\underline{u}=(-2,2,5)$, $\underline{v}=(4,0,1)$

ב. $\underline{u}=(6,-3,1)$, $\underline{v}=(2,5,3)$

ג. $\underline{u}=(-2,1,3)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$

21) מצא את שטחו של משולש ABC שקודקודיו הם: $A(-3,2,1)$, $B(0,3,2)$, $C(5,-1,0)$.

22) נתונים הווקטורים: $\underline{u}=(2,-1,0)$, $\underline{v}=(5,0,3)$.
מצא וקטור $\underline{w}$ שמכפלתו ב- $\underline{u}$ היא 0 ומכפלתו ב- $\underline{v}$ היא 0 אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

תשובות סופיות:

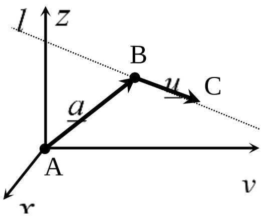
20) א. 92.277° ב. 90° ג. 180°.

21) 10.173 יח״ש.

22) $\underline{w}=(3,6,-5)$ או $\underline{w}=(-3,-6,5)$.

הצגה פרמטרית של ישר:

סיכום כללי:



ישר כללי במרחב ניתן להצגה ע"י שני וקטורים.
הווקטור $\underline{a}$ נקרא וקטור ההעתקה.
מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו על נקודה כלשהי על הישר הנתון.
הווקטור $\underline{u}$ נקרא וקטור הכיוון של הישר.
זה הוא וקטור שנמצא על הישר עצמו מוצאו בנקודה אחת וסופו בנקודה אחרת לאורך הישר.
הקשר בין שני הווקטורים נתון ע"י: $\ell : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$
כאשר t הוא מספר ממשי כלשהו ו- $\underline{x}$ הוא וקטור המתקבל ע"י בחירה של t שמוצאו בראשית הצירים וסופו על נקודה על הישר l.

<u>דוגמא</u>: עבור הנקודות: $A(0,0,0)$, $B(5,3,1)$ ו- $C(7,0,10)$ נקבל את הווקטורים הבאים: $\underline{u} = \overrightarrow{BC} = C - B = (7,0,10) - (5,3,1) = (2,-3,9)$; $\underline{a} = \overrightarrow{AB} = B - A = (5,3,1)$

לכן הצגה פרמטרית של הישר היא: $l : \underline{x} = (5,3,1) + t(2,-3,9)$.

הערות:

- לישר יש אינסוף הצגות פרמטריות הנבדלות זו מזו בבחירת ווקטור ההעתקה ווקטור הכיוון.
  ההצגה הבאה גם מתאימה לישר שבדוגמא: $l : \underline{x} = (7,0,10) + t(-6,9,-27)$
- הווקטור $\underline{x}$ המתקבל ע"י הצבת t_0 בהצגה פרמטרית אחת של הישר, יתקבל ע"י הצבת t_1 בהצגה פרמטרית אחרת של אותו הישר.
- הנקודה B באיור לעיל אינה בהכרח סופו של הווקטור $\underline{a}$ ומוצאו של הווקטור $\underline{u}$.
- כדי לכתוב הצגה פרמטרית של ישר מספיק לקחת שתי נקודות כלשהן למציאת הווקטור $\underline{u}$ (למשל הנקודה C יחד עם נקודה D הנמצאת על המשך הישר) ונקודה נוספת למציאת הווקטור $\underline{a}$.
- הצגה פרמטרית של ישר היא למעשה חיבור של שני ווקטורים גיאומטריים במרחב הנותנים ווקטור שמוצאו בראשית הצירים וסופו על הישר הנתון.

שאלות:

23) האם הנקודה $A(7,0,3)$ נמצאת על הישר $\ell: \underline{x}=(4,3,0)+t(1,-1,1)$?

24) האם הנקודה $B(4,-2,-10)$ נמצאת על הישר $\ell: \underline{x}=t(2,-1,5)$?

25) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במישור שעובר בנקודות $A(-5,-2)$ ו- $B(1,6)$.

26) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודות $C(3,0,-2)$ ו- $D(4,1,1)$.

27) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $G(2,-7,1)$
ומקביל לישר $\ell: \underline{x}=(0,3,-1)+t(-4,2,1)$.

28) מצא במרחב הצגה פרמטרית של ישר העובר דרך הנקודה $(1,2,3)$
ומאונך לישר: $\ell: \underline{x}=(1,2,0)+s(1,-2,4)$.

29) ענה על הסעיפים הבאים:
א. נתונה הצגה פרמטרית של ישר: $\ell: \underline{x}=(1,2,3)+t(4,5,6)$.
כתוב את ההצגה בעזרת הקואורדינאטות x, y ו- z.
ב. נתונה הצגה של ישר בעזרת קואורדינאטות: $x=1+2t$, $y=10$, $z=4-t$.
כתוב את ההצגה הפרמטרית שלו.

30) מצא את הצגתו הפרמטרית של ציר ה- y במרחב.

31) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $M(3,-1,4)$
ומקביל לציר ה- z.

32) מצא את נקודת החיתוך של הישר $\ell: \underline{x}=(1,-2,6)+t(-2,1,2)$ עם המישור $[xy]$.

תשובות סופיות:

23) כן.

24) לא.

25) $\ell : \underline{x}=(-5,-2)+t(6,8)$.

26) $\ell : \underline{x}=(4,1,1)+t(1,1,3)$.

27) $\ell : \underline{x}=(2,-7,1)+s(-4,2,1)$.

28) $\ell : \underline{x}=(1,2,3)+t(2,1,0)$.

29) א. $x=1+4t\ ,\ y=2+5t\ ,\ z=3+6t$ ב. $\ell : \underline{x}=(1,10,4)+t(2,0,-1)$

30) $\ell : \underline{x}=t(0,1,0)$.

31) $\ell : \underline{x}=(3,-1,4)+t(0,0,1)$.

32) $(7,-5,0)$.

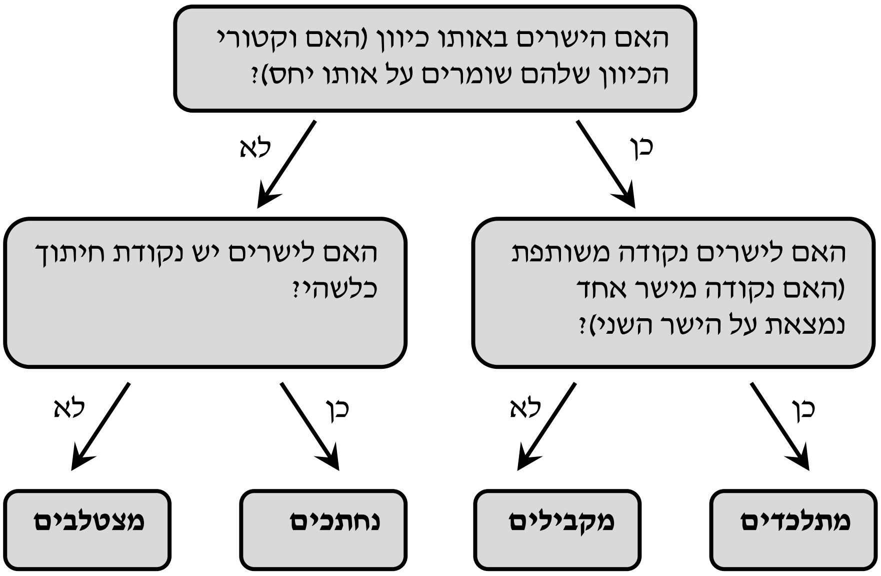
מצב הדדי בין ישרים:

סיכום כללי:

ישנם 4 מצבים הדדים בין זוג ישרים במרחב:

- ישרים מתלכדים: שני הישרים הם למעשה ישר אחד.
- ישרים מקבילים: שני הישרים בעלי אותו כיוון ולעולם אינם נפגשים במרחב.
- ישרים נחתכים: שני ישרים במרחב עם כיוונים שונים הנחתכים בנקודה כלשהי.
- ישרים מצטלבים: שני ישרים עם כיוונים שונים שאינם נפגשים במרחב.

כדי לקבוע את המצב ההדדי בין שני ישרים נבצע את הבדיקה הדו-שלבית הבאה:



שאלות:

33) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_1 : \underline{x}=(2,-3,0)+t(5,-1,2)$, $\ell_2 : \underline{x}=(12,-5,4)+s(-10,2,-4)$.

34) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_3 : \underline{x}=(0,1,-7)+t(-2,1,1)$, $\ell_4 : \underline{x}=(2,0,-6)+s(6,-3,-3)$.

35) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_5 : \underline{x}=(-3,5,1)+t(4,0,-1)$, $\ell_6 : \underline{x}=(-1,7,4)+s(-1,1,2)$.

36) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_7 : \underline{x}=(3,0,0)+t(2,-2,5)$, $\ell_8 : \underline{x}=(0,1,-5)+s(3,1,-2)$.

37) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_9 : \underline{x}=(-4,1,-1)+t(3,0,-1)$, $\ell_{10} : \underline{x}=s(6,0,-2)$.

38) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_{11} : \underline{x}=(2,8,-1)+t(1,0,0)$, $\ell_{12} : \underline{x}=(-5,8,2)+s(2,0,-1)$.

39) מצא את ערכו של הפרמטר k שבעבורו הישרים הבאים:
$\ell_1 : \underline{x}=(k+1,1-k,6)+t(1,-2,2)$, $\ell_2 : \underline{x}=(k-1,7,-k)+s(1-k^2,k^2+2,-6)$
א. מקבילים.
ב. מתלכדים.

40) נתונות הנקודות: $D(-2,3,k)$, $C(-6,3,-1)$, $B(k,-1,3)$, $A(3,-1,5)$.
הראה כי לכל ערך של k הישרים ℓ_{AB} ו- ℓ_{CD} מצטלבים.

תשובות סופיות:

33) מתלכדים.

34) מקבילים.

35) נחתכים, $(1,5,0)$.

36) מצטלבים.

37) מקבילים.

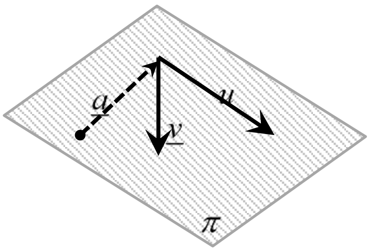
38) נחתכים, $(1,8,-1)$.

39) א. $k=2$. ב. $k=-2$.

40) הוכחה.

הצגה פרמטרית של מישור:

סיכום כללי:



מישור כלשהו במרחב ניתן להצגה ע"י שלושה וקטורים.
הווקטור $\underline{a}$ הוא ווקטור ההעתקה.
מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו בנקודה כלשהי על המישור.

הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ הם וקטורי הכיוון של המישור.
אלו הווקטורים הפורשים את המישור.

הקשר בין שלושת הווקטורים נתון ע"י: $\pi : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u} + s\underline{v}$
כאשר t, s הם מספרים ממשיים כלשהם ו- $\underline{x}$ הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירתם
אשר מוצאו בראשית הצירים וסופו בנקודה על המישור π.

שאלות:

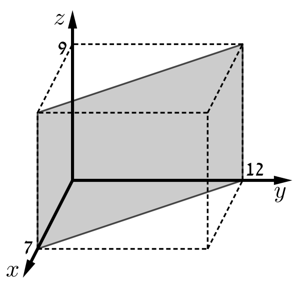
41) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודות הבא:
$C(0,-3,1)$, $B(3,6,2)$, $A(1,-4,0)$.

42) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $Q(6,7,-1)$,
ומכיל את הישר $\ell : \underline{x} = (-2,-2,5) + t(1,0,-4)$.

43) נתונים שני ישרים: $\ell_2 : \underline{x} = (2,16,11) + s(0,1,-6)$, $\ell_1 : \underline{x} = (0,1,-1) + t(1,9,-3)$.
הראה שהישרים נחתכים ומצא הצגה פרמטרית של המישור המכיל אותם.

44) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $D(5,-2,-1)$ ומכיל
את ציר ה- x.

45) מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור $[xz]$.



46) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור המסומן.

תשובות סופיות:

41) $\pi:\ \underline{x}=(1,-4,0)+t(2,10,2)+s(-1,1,1)$.

42) $\pi:\ \underline{x}=(-2,-2,5)+t(1,0,-4)+s(8,9,-6)$.

43) $\pi:\ \underline{x}=(0,1,-1)+t(1,9,-3)+s(0,1,-6)$.

44) $\pi:\ \underline{x}=t(1,0,0)+s(5,-2,-1)$.

45) $\pi:\ \underline{x}=t(1,0,0)+s(0,0,1)$.

46) $\pi:\ \underline{x}=(7,0,0)+t(0,0,1)+s(-7,12,0)$.

משוואת מישור:

סיכום כללי:

ניתן להציג מישור ע"י משוואה באופן הבא: $\pi:\ ax+by+cz+d=0$,

כאשר: (x,y,z) היא נקודה על המישור והמקדמים a,b,c הם שיעורי וקטור הנורמל של המישור המסומן: $\underline{h}=(a,b,c)$.

שאלות:

47) קבע האם הנקודות הבאות נמצאות על המישור $\pi:\ 2x-y+3z-6=0$:

א. $D(5,7,1)$ ב. $E(2,-1,1)$

48) מצא את ערכו של k שבעבורו הנקודה $A(1,k,-1)$ נמצאת על המישור: $\pi:\ kx-2y+(1+k)z+7=0$.

49) נתונה משוואת מישור: $\pi:\ 3x+2y-z-9=0$.
מצא את נקודות החיתוך של המישור עם שלושת הצירים.

50) נתונה משוואת מישור: $\pi:\ 4x+y-2z+8=0$.
מצא הצגה פרמטרית של הישר שהמישור חותך מהמישור $[yz]$.

תשובות סופיות:

47) א. על המישור. ב. לא על המישור.

48) $k=3$.

49) $(0,0,-9)$, $\left(0,4\frac{1}{2},0\right)$, $(3,0,0)$.

50) $\ell:\ \underline{x}=(0,-8,0)+t(0,2,1)$.

מעברים בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור:

שאלות:

51) נתונה משוואת מישור: $\pi : 2x+3z-12=0$. כתוב הצגה פרמטרית של המישור.

52) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi : \underline{x}=(2,-5,0)+t(1,0,2)+s(0,-1,3)$.
מצא את משוואת המישור.

53) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi : \underline{x}=t(-2,2,1)+s(3,1,0)$.
מצא את משוואת המישור.

54) המישור π עובר בנקודות: $C(4,-1,0)$, $B(2,0,0)$, $A(1,0,-3)$.
מצא את משוואת המישור.

55) ענה על הסעיפים הבאים:

א. לפניך הנקודות הבאות: $(1,1,0)$, $(0,1,-2)$, $(2,0,5)$.

i. הראה ששלוש הנקודות אינן נמצאות על ישר אחד ומצא הצגה פרמטרית של המישור הנקבע על ידן.

ii. מצא את משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנ"ל.

ב. מצא שתי נקודות נוספות הנמצאות על המישור שמצאת בסעיף א'.

ג. האם הנקודה $(4,2,1)$ נמצאת על המישור שמצאת בסעיף א'?

תשובות סופיות:

51) $\pi : \underline{x}=(0,0,4)+t(0,1,0)+s(6,0,-4)$.

52) $\pi : -2x+3y+z+19=0$.

53) $\pi : x-3y+8z=0$.

54) $\pi : 3x+6y-z-6=0$.

55) א. i. $\pi : \underline{x}=(1,1,0)+t(-1,0,-2)+s(1,-1,5)$ ii. $-2x+3y+z-1=0$

ב. למשל: $(0,0,1)$, $(-0.5,0,0)$ ג. לא.

מישורים המקבילים לצירים:

שאלות:

56) נתונה משוואת מישור: $\pi : (k+2)x+(k^2-2k-3)y-3z+k^2-1=0$.
לאיזה ערך של k המישור מקביל לציר ה- y (ולא מכיל אותו)?

57) פאותיו של טטראדר נמצאות על המישורים $x=0$, $y=0$, $z=0$
ו- $x+3y+2z-6=0$. מצא את נפח הטטראדר.

תשובות סופיות:

56) $k=3$.

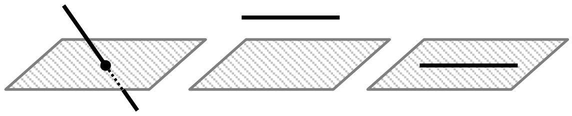
57) 6 יח"נ.

מצב הדדי בין ישר ומישור:

סיכום כללי:

ישנם 3 מצבים הדדיים בין ישר ומישור במרחב:

- הישר חותך את המישור.
- הישר מקביל למישור.
- הישר מוכל במישור.



כדי לדעת מהו המצב ההדדי בין ישר ומישור יש להציב נקודה כללית של הישר במשוואת המישור ולבדוק:

- אם למשוואה המתקבלת יש פתרון יחיד אז הישר חותך את המישור.
- אם למשוואה אין אף פתרון אז הישר מקביל למישור.
- אם למשוואה יש אינסוף פתרונות אז הישר מוכל במישור.

שאלות:

58) נתונים הישר והמישור הבאים: $\ell : \underline{x}=(5,0,1)+t(4,1,-2)$, $\pi : 2x-y-3z+6=0$.
קבע את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

59) נתונים הישר והמישור הבאים:
$\ell : \underline{x}=(2,-1,6)+t(-1,1,2)$, $\pi : x-3y+2z-11=0$.
קבע את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

60) נתונים הישר והמישור הבאים: $\ell : \underline{x}=(-6,1,0)+t(3,0,-1)$, $\pi : 2x+y+6z+11=0$.
קבע את המצב ההדדי שביניהם. אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

61) נתונים הישר והמישור הבאים: $\ell : \underline{x}=(1,a,3)+t(4,1-b,0)$, $\pi : 2x-y+z-4=0$.
מצא את ערכי a ו- b בעבורם הישר מוכל במישור.

תשובות סופיות:

58) הישר חותך, $(1,-1,3)$.

59) מקבילים.

60) הישר מוכל.

61) $a=1$, $b=-7$.

מצב הדדי בין מישורים:

סיכום כללי:

בין שני מישורים ישנם 3 מצבים הדדיים:

- המישורים נחתכים - במקרה זה יש להם ישר משותף הנקרא ישר החיתוך.
- המישורים מקבילים – לשני המישורים וקטורים פורשים זהים אך ווקטור העתקה שונה.
- המישור מתלכדים - במקרה זה שני המישורים מייצגים את אותו המישור.

עבור שני מישורים כלליים: $\pi_1: \ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ ו- $\pi_2: \ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

נקבע את המצב ההדדי ביניהם באופן הבא:

מתלכדים	מקבילים	נחתכים
$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2}$	כל מצב אחר

שאלות:

62) נתונים שני מישורים. קבע את המצב ההדדי ביניהם:

א. $\pi_1: 2x-y+4z-5=0\ ,\ \pi_2: 4x-2y+8z-10=0$.

ב. $\pi_3: x+3y-z+1=0\ ,\ \pi_4: 3x+9y-3z-8=0$.

ג. $\pi_5: 5x-2y-2z+3=0\ ,\ \pi_6: 2x+3y+z-5=0$.

63) נתונים שני המישורים הבאים:

$\pi_1: 2x+\left(k^2+k\right)y-2z+1=0\ ,\ \pi_2: 4x+12y-4z+k^2-2=0$.

מצא את ערכי k עבור המישורים:

א. נחתכים   ב. מקבילים   ג. מתלכדים.

תשובות סופיות:

62) א. מתלכדים.   ב. מקבילים.   ג. נחתכים.

63) א. $k\neq 2,-3$.   ב. $k=-3$.   ג. $k=2$.

ישר חיתוך בין מישורים:

שאלות:

64) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_1 : 4x+y-2z+2=0$, $\pi_2 : 2x-y+z+10=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

65) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_3 : 8x+2y-3z+2=0$, $\pi_4 : 2x-3y+z+4=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

66) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_5 : 3x-3y+z+2=0$, $\pi_6 : 5x-2z+20=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

67) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_7 : x-2y-z+6=0$, $\pi_8 : z-2=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

68) מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישור $\pi : 6x-5y+z+18=0$
עם המישור $[xz]$.

69) נתונים שני מישורים: $\pi_1 : x-3y+2z-1=0$, $\pi_2 : 4x+y-z-6=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

תשובות סופיות:

64) $\ell : \underline{x}=(-2,6,0)+t(2,16,12)$.

65) $\ell : \underline{x}=(0,2,2)+t(1,2,4)$.

66) $\ell : \underline{x}=(0,4,10)+t\left(4,7\frac{1}{3},10\right)$.

67) $\ell : \underline{x}=(0,2,2)+t(4,2,0)$.

68) $\ell : \underline{x}=(-3,0,0)+t(3,0,-18)$.

69) $\ell : \underline{x}=t(1,9,13)$.

זווית בין שני ישרים:

סיכום כללי:

- זווית חדה α בין שני ישרים $l_1 = \underline{a}_1 + t\underline{u}_1$ ו- $l_2 = \underline{a}_2 + s\underline{u}_2$ תחושב: $\cos\alpha = \left|\frac{\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2}{|\underline{u}_1| \cdot |\underline{u}_2|}\right|$.

שאלות:

70) מצא את הזווית שבין זוגות הישרים הבאים:

א. $\ell_1 : \underline{x} = (4,0,0) + t(6,8,1)$, $\ell_2 : \underline{x} = s(-4,2,-4)$.

ב. $\ell_1 : \underline{x} = (10,17,-18) + t(3,0,-6)$, $\ell_2 : \underline{x} = (6,5,4) + s(0,4,0)$.

71) מצא את הזווית שבין ישר העובר דרך הנקודות $B(6,0,-2)$, $A(3,4,6)$ וישר העובר דרך הנקודות: $D(-1,4,2)$, $C(6,5,1)$ וקבע מה המצב ההדדי ביניהם.

72) נתונות הנקודות $C(3,-1,2)$, $B(4,2,-1)$, $A(1,-3,0)$.

א. מצא הצגה פרמטרית של ישר במרחב העובר דרך הנקודות:

i. A ו-B.

ii. B ו-C.

iii. A ו-C.

ב. מי מבין הנקודות $D(4,2,-1)$ ו- $E(7,7,-3)$ נמצאת על הישר AB שמצאת בסעיף הקודם?

ג. חשב את הזווית שבין הישר AB והישר BC.

73) נתון מישור שמשוואתו: $3x - 4y + 6 = 0$. הנקודות $B(-2,y,-1)$, $A(x,6,1)$ נמצאות על המישור והנקודה C נמצאת על מישור $[yz]$ ומקיימת: $z_C = 11$.
מצא את שיעורי הנקודה C אם ידוע כי קוסינוס הזווית שבין הישרים AB ו-AC הוא: $\sqrt{\frac{13}{76}}$.

תשובות סופיות:

70) א. 78.521° ב. 90°.

71) 68.21°. הישרים מצטלבים.

72) א. i. $\ell : \underline{x} = (1,-3,0) + t(3,5,-1)$ א. ii. $\ell : \underline{x} = (4,2,-1) + t(-1,-3,3)$

א. iii. $\ell : \underline{x} = (1,-3,0) + t(2,2,2)$ ב. הנקודה D. ג. 35.477°.

73) $C(0,2,11)$ או $C(0,28.45,11)$

זווית בין ישר ומישור:

סיכום כללי:

- זווית חדה α בין ישר $l=\underline{a}+t\underline{u}$ ומישור: $\pi:\ ax+by+cz+d=0$
תחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\sin\alpha=\left|\frac{\underline{u}\cdot\underline{h}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{h}|}\right|$.

שאלות:

74) מצא את הזווית שבין הישר והמישור הבאים:
$\ell:\ \underline{x}=(-2,0,5)+t(-2,1,2)$, $\pi:\ 3x-2y+2z+9=0$.

75) נתונות הנקודות $D(-7,3,-1)$, $C(1,2,5)$, $B(0,2,-1)$, $A(1,-1,2)$.
מצא את הזווית בין הישר העובר בנקודות A ו-D ובין המישור ABC.

76) נתונה פירמידה משולשת SABC, שמשוואת הבסיס ABC שלה
היא: $2x+y-2z-6=0$. קדקוד הפירמידה הוא $S(3,1,-2)$.
מצא את הזווית בין המקצוע הצדדי SB לבסיס הפירמידה,
אם נתון כי שיעורי הקודקוד B מקיימים: $x_B=z_B=-1$.

תשובות סופיות:

74) 18.87°.

75) 44.83°.

76) 14.9°.

זווית בין שני מישורים:

סיכום כללי:

- זווית חדה α בין שני מישורים: $\pi_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ ו- $\pi_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$
- תחושב ע"י: $\cos\alpha=\left|\frac{\underline{h}_1\cdot\underline{h}_2}{|\underline{h}_1|\cdot|\underline{h}_2|}\right|$.

שאלות:

77) מצא את הזווית שבין המישורים הבאים: $\pi_1: 4x+3y+z-12=0$
ו- $\pi_2: 4x-7y+5z+3=0$.

78) נתונה פירמידה משולשת ABCD, שקודקודיה הם:
$A(0,2,-5)$, $B(3,-1,1)$, $C(7,-1,-5)$, $D(3,2,0)$.
מצא את הזווית בין הפאה הצדדית ABD לבסיס הפירמידה ABC.

79) מצא את הזווית בין מישור שמשוואתו $3x+5y-z+4=0$ למישור $[xz]$.

תשובות סופיות:

77) 90°.
78) 87.539°.
79) 32.312°.

מרחק בין שתי נקודות במרחב:

סיכום כללי:

מרחק בין שתי נקודות $A(x_1,y_1,z_1)$ ו- $B(x_2,y_2,z_2)$ במרחב יחושב באופן הבא: $d_{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

שאלות:

80) נתונות הנקודות: $A(2,4,-5)$, $B(0,-2,6)$ ו- $C(k,-1,13-k)$.
מצא ערכי k עבור המשולש ABC יהיה שווה-שוקיים: $AB=AC$.

תשובות סופיות:

80) $k=8$ או $k=12$.

מרחק בין נקודה לישר:

סיכום כללי:

מרחק בין נקודה $A(x_1, y_1, z_1)$ לישר הנתון בהצגה פרמטרית: $l: \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$ יחושב ע"י העברת אנך מהנקודה לישר וחישוב אורכו. כדי למצוא את נקודת החיתוך יש להשוות את מכפלת הווקטור האנך בווקטור הכיוון של הישר לאפס.

שאלות:

81) מצא את המרחק שבין הנקודה $A(13,-1,-19)$ לישר $\ell : \underline{x} = t(2,0,-7)$.

82) נתונות הנקודות $C(6,-4,0)$, $B(2,-1,0)$, $A(1,6,-1)$.
חשב את שטח המשולש ABC.

83) על הישר $\ell : \underline{x} = (5,-2,0) + t(0,1,-1)$ מונחת הצלע AB של ריבוע ABCD.
אחד מקודקודי הריבוע הוא $D(5,4,2)$.
מצא את שיעורי הקודקוד B (שתי אפשרויות).

תשובות סופיות:

81) $\sqrt{54}$.

82) 12.75 יח"ש.

83) $B(5,4,-6)$ או $B(5,-4,2)$.

מרחק בין נקודה למישור:

סיכום כללי:

מרחק בין נקודה $A(x_1, y_1, z_1)$ למישור: $\pi: \ ax+by+cz+d=0$ יחושב ע"י: $d=\left|\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$.

שאלות:

84) מצא את מרחקו של המישור $4x-2y-4z+15=0$ מראשית הצירים.

85) מצא משוואת מישור המאונך לישר $\ell: \underline{x}=(1,-8,3)+t(3,-2,1)$
ונמצא במרחק $\sqrt{14}$ מהנקודה $A(4,5,-9)$.

86) נתונים ישר ומישור: $\pi: 2x+4y-4z+15=0$, $\ell: \underline{x}=(7,19,-3)+t(3,14,-4)$.
מצא את הנקודות שעל הישר שמרחקן מהמישור הוא 6.5.

תשובות סופיות:

84) $2\frac{1}{2}$.

85) $\pi: 3x-2y+z+21=0$ או $\pi: 3x-2y+z-7=0$.

86) $(4,5,1)$ או $(1,-9,5)$.

מרחק בין ישרים מקבילים:

סיכום כללי:

מרחק בין שני ישרים מקבילים יחושב ע״י שימוש בנקודה מאחד הישרים ומציאת מרחקה מהישר השני ע״י העברת אנך מהנקודה לישר וחישוב אורכו.

שאלות:

87) נתונות הנקודות $A(15,0,-4)$, $B(12,-5,2)$, $C(6,1,4)$, $D(12,11,-8)$.

א. מצא את המצב ההדדי בין הישר העובר בנקודות A ו-B ובין הישר העובר בנקודות C ו-D.

ב. מצא את המרחק בין הישרים מסעיף א'.

88) 4 צלעות של מרובע מונחות על הישרים:

$$l_1: \underline{x}=(2,0,-1)+t(1,-2,1) \quad , \quad l_2: \underline{x}=(-8,-1,19)+s(-4,1,6)$$
$$l_3: \underline{x}=(-2,7,-11)+r(-2,4,-2) \quad , \quad l_4: \underline{x}=(-2,1,5)+q(4,-1,-6)$$

א. הוכח כי המרובע הוא מלבן.

ב. מצא את שטח המלבן.

תשובות סופיות:

87) א. מקבילים. ב. $\sqrt{76}$ יח״א.

88) א. הוכחה. ב. $\sqrt{824}$ יח״ש.

מרחק בין ישר למישור:

סיכום כללי:

מרחק בין ישר ומישור (המקביל לו) יחושב ע"י שימוש בנקודה שעל הישר ומציאת מרחקה מהמישור.

שאלות:

89) נתונה משוואת מישור: $4x-z+6=0$.

א. מצא את המצב ההדדי בין ציר ה- y ובין המישור הנתון.

ב. מצא את המרחק בין ציר ה- y ובין המישור הנתון.

90) נתונים ישר ומישור: $\pi:3x+12y-4z+k-10=0$, $l:\underline{x}=(1,k-1,5)+t(4,-2,-3)$.

א. הוכח שהישר מקביל למישור או מוכל בו.

ב. מצא את ערכו של הפרמטר k שעבורו המרחק בין הישר למישור הוא 1.

תשובות סופיות:

89) א. הישר מקביל למישור. ב. $\frac{6}{\sqrt{17}}$.

90) א. הוכחה. ב. $k=2,4$.

מרחק בין מישורים מקבילים:

סיכום כללי:

מרחק בין שני מישורים מקבילים יחושב לפי אחת מהאפשרויות הבאות:
1. שימוש בנקודה שעל מישור אחד ומציאת מרחקה מהמישור השני.
2. שימוש בנוסחה: $d=\left|\frac{d_1-d_2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$.

שאלות:

(91 נתונה משוואת מישור: $\pi : 3x-4y+5z-10=0$.
מצא משוואת מישור המקביל למישור הנתון והנמצא במרחק $\sqrt{8}$ ממנו.

(92 נתונים שני מישורים מקבילים: $\pi_1 : x-2y-2z+6=0$, $\pi_2 : x-2y-2z-12=0$.
מצא את משוואת המישור המקביל לשני המישורים הנתונים והנמצא במרחק שווה משניהם.

(93 נתונים שישה מישורים:
$\pi_1 : 2x+y-2z-11=0$, $\pi_2 : x+2y+2z+5=0$, $\pi_3 : 2x-2y+z+3=0$
$\pi_4 : 2x+y-2z+7=0$, $\pi_5 : x+2y+2z-1=0$, $\pi_6 : kx+qy+z+p=0$
מצא את ערכי הפרמטרים k, q ו- p שעבורם ששת המישורים יוצרים תיבה שנפחה 60 יחידות נפח.

(94 כדור שמרכזו בנקודה $O(3,8,-1)$ חסום בקובייה שבסיסה התחתון מונח על מישור שמשוואתו $12x+4y-3z-6=0$.
מצא את משוואת המישור עליו מונח הבסיס העליון של הקובייה.

תשובות סופיות:

(91 $\pi_1 : 3x-4y+5z+10=0$, $\pi_2 : 3x-4y+5z-30=0$.

(92 $\pi_3 : x-2y-2z-3=0$.

(93 $k=2$, $q=-2$, $p=18,-12$.

(94 $12x+4y-3z-136=0$.

מרחק בין ישרים מצטלבים:

סיכום כללי:

מרחק בין ישרים מצטלבים יחושב ע"י כתיבת משוואת מישור של אחד הישרים ומציאת מרחקו מהישר השני.

שאלות:

95) נתונים שני הישרים הבאים: $\ell_1 : \underline{x}=(-3,2,6)+t(-4,1,2)$
ו- $\ell_2 : \underline{x}=(0,2,-7)+s(1,0,-1)$.
הראה שהישרים מצטלבים ומצא את המרחק שביניהם.

96) נתונים שני הישרים המצטלבים הבאים: $\ell_1 : \underline{x}=(-1,0,5)+t(1,1,-2)$
ו- $\ell_4 : \underline{x}=(2,-1,9)+s(6,-1,0)$.
מצא את המרחק שביניהם.

97) מצא את מרחק הישר $\ell : \underline{x}=(4,-2,-1)+t(-1,1,6)$ מציר ה- z.

תשובות סופיות:

95) $\frac{10}{\sqrt{6}}$ יח"א.

96) 1.567 יח"א.

97) $\sqrt{2}$ יח"א.

שאלות מסכמות בוקטורים:

שאלות:

1) נתונות הנקודות $C(1,1,1)$, $B(1,2,0)$, $A(1,1,3)$.

א. מצא הצגה פרמטרית של הישר המחבר את B עם C.
הראה כי הנקודה A לא נמצאת על הישר הזה.

ב. חשב את המרחק בין הנקודה A לבין הישר המחבר את B עם C.

ג. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה A והמאונך לישר המחבר את B עם C.

2) מצא את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים וקבע אם הם נחתכים, מקבילים, מתלכדים או מצטלבים.
במקרה בו הישרים נחתכים מצא גם את נקודות החיתוך ואת הזווית בין הישרים.
במקרה בו הישרים מקבילים או מצטלבים מצא גם את המרחק ביניהם.

א. $\underline{x}=(1,1,0)+s(2,4,0)$, $\underline{x}=(1,0,1)+t(1,2,0)$.

ב. $\underline{x}=(1,-1,0)+s(12,-3,1)$, $\underline{x}=(-2,2,4)+u(6,6,1)$.

ג. $\underline{x}=(2,3,1)+s(2,4,-2)$, $\underline{x}=(1,1,2)+t(1,2,-1)$.

ד. $\underline{x}=(2,0,3)+s(-1,-3,1)$, $\underline{x}=(1,-1,0)+t(0,2,-4)$.

3) מצא את המצב ההדדי של המישור והישר וקבע אם הישר חותך את המישור, מקביל למישור או מוכל במישור.
במקרה שהישר חותך את המישור, מצא גם את נקודת החיתוך וגם את הזווית בין הישר למישור. במקרה בו הישר מקביל למישור מצא את מרחק הישר מהמישור.

א. $\underline{x}=(1,0,2)+t(-1,2,2)$, $2x-3y+4z-5=0$.

ב. $\underline{x}=(-3,0,4)+t(4,-2,-6)$, $2x-5y+3z-6=0$.

ג. $\underline{x}=(2,1,-2)+t(-2,2,0)$, $2x-14y+10z=-6$.

4) מצא את המצב ההדדי של המישורים וקבע אם הם מקבילים, מתלכדים או נחתכים. במקרה בו המישורים מקבילים מצא את המרחק בינים.
במקרה בו הם נחתכים מצא את הזווית ביניהם ואת ישר החיתוך ביניהם.

א. $2x+y+2z-4=0$, $x-2y+2z-10=0$.

ב. $4x-10y+6z-8=0$, $2x-5y+3z-6=0$.

ג. $x-7y+5z=-3$, $2x-14y+10z=-6$.

5) נתונה קובייה 'ABCDA'B'C'D שנפחה הוא 8.
משוואת המישור שעליו מונח הבסיס ABCD היא: $\pi_1 : 4x+y+3z-28=0$.
משוואת המישור שעליו מונחת הפאה 'ABB'A היא: $\pi_2 : x+2y-2z+6=0$.
מצא הצגה פרמטרית של הישר שעליו מונח המקצוע CD (2 אפשרויות).

6) הנקודה $A(4,0,-1)$ נמצאת על כדור שמרכזו $O(1,1,2)$.
מצא את משוואת המישור המשיק לכדור בנקודה A.

7) נתונים מישור וישר: $\pi : 2x-y+2z+1=0$, $\ell : \underline{x}=(1,5,5)+t(1,1,0)$.
מצא נקודה על חלקו החיובי של ציר ה- z הנמצאת במרחקים שווים מהמישור ומהישר.

8) נתונים שני מישורים: $\pi_2 : 4x-2y+4z-1=0$, $\pi_1 : 2x-4y+4z-5=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר, שנמצא במרחק 2 ממישור π_1 ובמרחק 6 ממישור π_2 (מצא הצגה של ישר אחד מתוך 4 אפשריים).

9) נתונים ישר ומישור: $\pi : 6x+2y-z+5=0$, $\ell_1 : \underline{x}=(0,-3,0)+t(1,1,-8)$.
ישר נוסף, ℓ_2, המקביל למישור π, עובר בנקודה $P(1,0,-4)$ וחותך את הישר ℓ_1 בנקודה Q. מבין הנקודות שבמישור π, הנקודה 'P היא הקרובה ביותר לנקודה P והנקודה 'Q היא הקרובה ביותר לנקודה Q. מצא את שטח המלבן 'PQQ'P. (הדרכה: הבע באמצעות t את וקטור הכיוון של ℓ_2).

10) נתונים שני מישורים: $\pi_2 : 3x+y+2z+11=0$, $\pi_1 : 2x+y+z-5=0$.
ℓ_1 הוא ישר החיתוך בין שני המישורים.
המישור π_3 מכיל את הישר ℓ_1 ויוצר זווית של $60°$ עם הישר $\ell_2 : \underline{x}=(1,3,-4)+t(1,1,0)$.
מצא את משוואת המישור π_3.

תשובות סופיות:

1) א. $\underline{x}=(1,2,0)+t(0,-1,1)$ ב. $\sqrt{2}$ ג. $y-z+2=0$

2) א. מקבילים, 1.095. ב. מצטלבים, 4.07 ג. מתלכדים
ד. נחתכים בנקודה $(1,-3,4)$, הזווית היא: 47.6°.

3) א. מקביל, 0.9284 ב. מוכל
ג. חותך בנקודה $(3.5,-0.5,-2)$, הזווית היא: 40.78°.

4) א. נחתכים. ישר חיתוך: $\underline{x}=(0,-2,3)+t(3,-1,-2.5)$, זווית: 63.6°.
ב. מקבילים. המרחק: 0.324. ג. מתלכדים.

5) $\ell:\underline{x}=(0,7,7)+t(8,-11,-7)$, $\ell:\underline{x}=(0,2.5,8.5)+t(2,-2.75,-1.75)$.

6) $\pi: -3x+y+3z+15=0$.

7) $(0,0,4)$ או $\left(0,0,14\frac{4}{5}\right)$.

8) $\ell:\underline{x}=\left(0,-14,-15\frac{3}{4}\right)+t(-14,14,21)$.

9) 10.467 יח"ש.

10) $\pi_3: x+2y-z-58=0$ או $\pi_3: 2x+y+z-5=0$.

שאלות הנפתרות עם מכפלה וקטורית:

שאלות:

מציאת משוואת מישור:

1) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi : \underline{x}=t(-2,2,1)+s(3,1,0)$.
מצא את משוואת המישור.

2) המישור π עובר בנקודות: $A(1,0,-3)$, $B(2,0,0)$, $C(4,-1,0)$.
מצא את משוואת המישור.

3) נתונים שני ישרים: $\ell_1 : \underline{x}=(5,-4,1)+t(0,2,-1)$, $\ell_2 : \underline{x}=(0,-6,2)+s(0,-2,1)$.
הראה שהישרים מקבילים ומצא את משוואת המישור המכיל אותם.

4) נתונים שני ישרים: $\ell_1 : \underline{x}=(-1,1,3)+t(3,-2,4)$, $\ell_2 : \underline{x}=(-7,1,0)+s(4,-3,0)$.
הראה שהישרים מצטלבים ומצא את משוואת המישור המכיל את הישר ℓ_1 ומקביל לישר ℓ_2.

5) מצא משוואת מישור שעובר בנקודה $A(6,0,-1)$ ומכיל את ציר ה- z.

מצב הדדי בין ישר ומישור:

6) נתונים הישר והמישור הבאים:
$\pi : \underline{x}=(-1,0,2)+s(1,0,-2)+r(3,0,-1)$, $\ell : \underline{x}=(0,3,-2)+t(1,-1,2)$.
קבע את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

7) נתונים שני המישורים הבאים: $\pi_1 : x-3y+2z-1=0$, $\pi_2 : 4x+y-z-6=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

מצב הדדי בין מישורים:

8) במקבילון ABCDA'B'C'D' נתונים שלוש הקודקודים הבאים:
$A(1,-1,4)$, $B(9,0,2)$, $C(5,2,-2)$.
מצא את משוואת המישור עליו מונחת הפאה A'B'C'D' אם ידוע שהנקודה $(2,-1,0)$ נמצאת עליו.

מציאת ישר חיתוך בין שני מישורים:

9) המישורים π_1 ו-π_2 מאונכים זה לזה.
הישר $\ell: \underline{x}=(4,1,-1)+t(2,-1,1)$ הוא ישר החיתוך שבין המישורים.
מצא את משוואות המישורים אם ידוע שהמישור π_1 עובר בראשית.

10) נתונים ישר ומישור: $\pi: 4x-2y-3z-6=0$, $\ell: \underline{x}=(-2,0,5)+t(3,1,-1)$.
מצא הצגה פרמטרית של הישר שהוא היטלו של הישר ℓ על המישור.

חישובי מרחקים שונים:

11) חשב את נפחה של פירמידה משולשת SABC שקודקודיה הם:
$A(1,6,-1)$, $B(2,-1,0)$, $C(6,-4,0)$, $S(11,-2,4)$.

12) בפירמידה משולשת SABC המקצועות SA, SB ו-SC מאונכים זה לזה.
נתון: $SA=6$, $SB=8$, $SC=12$.
חשב את אורכו של גובה הפירמידה היורד מהקודקוד S לבסיס ABC.

13) נתונים שני הישרים הבאים: $\ell_1: \underline{x}=(-3,2,6)+t(-4,1,2)$
ו-$\ell_2: \underline{x}=(0,2,-7)+s(1,0,-1)$.
הראה שהישרים מצטלבים ומצא את המרחק שביניהם.

14) נתונים שני הישרים המצטלבים הבאים: $\ell_1: \underline{x}=(-1,0,5)+t(1,1,-2)$
ו-$\ell_4: \underline{x}=(2,-1,9)+s(6,-1,0)$. מצא את המרחק שביניהם.

15) מצא את מרחק הישר $\ell: \underline{x}=(4,-2,-1)+t(-1,1,6)$ מציר ה-z.

שאלות שונות:

16) נתונים שני ישרים: $\ell_2 : \underline{x} = (-7,3,-1) + s(-5,4,-2)$, $\ell_1 : \underline{x} = (-2,1,5) + t(5,-4,2)$.

א. מצא את המצב ההדדי שבין הישרים.

ב. המישור π_1 מכיל את שני הישרים והמישור π_2 נמצא בין שני הישרים במרחק שווה מכל אחד מהם, מקביל לשני הישרים ומאונך למישור π_1.
מצא את משוואות המישורים π_1 ו-π_2.

17) נתונים שני מישורים: $\pi_2 : x - y + 2z - 4 = 0$, $\pi_1 : 2x - y + 4z - 8 = 0$.
המישור π_3 מכיל את ישר החיתוך של שני המישורים וחותך את ציר ה-y בנקודה A כך שמתקיים $OA = m$ (O ראשית הצירים).
הזווית שבין המישור π_2 למישור π_3 היא α ונתון כי: $\cos\alpha = \frac{2}{3}$.
מצא את הערכים האפשריים של הפרמטר m.

18) נתונות שלוש נקודות: $O(3,1,0)$, $B(2,-1,0)$, $A(3,-1,1)$.
הנקודות A ו-B נמצאות על היקפו של מעגל שהנקודה O היא מרכזו.
מצא הצגה פרמטרית של הישר המשיק למעגל בנקודה A
(הישר נמצא במישור המעגל).

תשובות סופיות:

1) $\pi: \; x-3y+8z=0$.
2) $\pi: \; 3x+6y-z-6=0$.
3) $\pi: \; y+2z+2=0$.
4) $\pi: \; 12x+16y-z-1=0$.
5) $\pi: \; y=0$.
6) נחתכים בנקודה: $(3,0,4)$.
7) $l: \underline{x}=t(1,9,13)$.
8) $\pi_{A'B'C'D'}: \; 2y+z+2=0$.
9) $\pi_1: \; y+z=0$, $\pi_2: \; x+y-z-6=0$.
10) $l: \underline{x}=(-5,-13,0)+t(7,11,2)$.
11) 20.5 יח"נ.
12) 4.46 יח"א.
13) $\frac{4}{\sqrt{6}}$ יח"א.
14) 1.567 יח"א.
15) $\sqrt{2}$ יח"א.
16) א. הישרים מקבילים. ב. $\pi_1: 2x+2y-z+7=0$, $\pi_2: y+2z-6=0$.
17) $m=4$ או $m=-\frac{4}{7}$.
18) $l: \underline{x}=(3,-1,1)+k(-5,-2,-4)$.

מתמטיקה למכינה באקדמיה

פרק 12 - מספרים מרוכבים

תוכן העניינים

הגדרת המספר המרוכב:

סיכום כללי:

הגדרות כלליות:

ע"י הסימון: $i=\sqrt{-1}$ מגדירים את המספר מהצורה: $z=a+bi$ כמספר מרוכב בעל חלק ממשי a וחלק מדומה b. המספרים a ו- b הם ממשיים.

a נקרא הרכיב הממשי של z ומסומן גם $\mathrm{Re}(z)$ (מלשון: Real).

b נקרא הרכיב המדומה של z ומסומן גם $\mathrm{Im}(z)$ (מלשון: Imaginary).

שאלות:

1) רשום עם i:

א. $\sqrt{-1}=$ ב. $\sqrt{-4}=$ ג. $\sqrt{-25}=$

ד. $\sqrt{-3}=$ ה. $\sqrt{-5}=$

2) חשב:

א. $i=$ ב. $i^2=$ ג. $i^3=$

ד. $i^4=$ ה. $i^5=$ ו. $i^{17}=$

3) רשום את ערכם של a ו- b בעבור המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2+5i$ ב. $3-i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

ד. $7i$ ה. -4 ו. 0

4) כתוב מספר מרוכב z לפי הדרישות הבאות:

א. $\mathrm{Re}(z)=-3,\ \mathrm{Im}(z)=2$.

ב. $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5) מספר מרוכב מסוים z מקיים: $\text{Re}(z)+\text{Im}(z)=4$ ו-$\text{Re}(z)-\text{Im}(z)=-1$.
מצא את z.

6) פתור את המשוואות הבאות:
א. $x^2=-1$
ב. $x^2+36=0$
ג. $x^2-2x+5=0$

7) פתור את המשוואה הבאה: $x^2+x+1=0$.

8) פתור את המשוואה הבאה: $z^2+iz+6=0$.

9) נתון: $z_2=5-2i$, $z_1=2+3i$. חשב את ערכי הביטויים המרוכבים הבאים:
א. $z_1+z_2=$
ב. $z_1-z_2=$
ג. $z_1\cdot z_2=$

10) חשב את ערכי הביטויים הבאים:
א. $(-2+6i)+(1-i)$
ב. $(4+4i)-\left(3+\frac{1}{2}i\right)$
ג. $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
ד. $5-(3-2i)$
ה. $(i-3)+6i$
ו. $(i+2)-(3i-2)+(7-5i)$

11) חשב את ערכי הביטויים הבאים:
א. $(1+4i)\cdot(8-2i)$
ב. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
ג. $(4i-3)\cdot(4i+3)$
ד. $i\cdot(i-1)$
ה. $(2i+3)\cdot i$
ו. $(5i-1)^2$

12) נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1=a_1+b_1i$ ו- $z_2=a_2+b_2i$.
ידוע כי z_1+z_2 הוא ממשי וכי z_1-z_2 הוא מדומה.

א. מצא קשר בין a_1 ל- a_2 וקשר בין b_1 ו- b_2.

ב. הראה כי המכפלה $z_1\cdot z_2$ היא ממשית.

תשובות סופיות:

1) א. i ב. $2i$ ג. $5i$ ד. $\sqrt{3}i$ ה. $\sqrt{5}i$.

2) א. i ב. -1 ג. $-i$ ד. 1 ה. i ו. i.

3) א. $a=2\ ,\ b=5$ ב. $a=3\ ,\ b=-1$ ג. $a=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ b=-\frac{1}{2}$
ד. $a=0\ ,\ b=7$ ה. $a=-4\ ,\ b=0$ ו. $a=0\ ,\ b=0$.

4) א. $z=-3+2i$ ב. $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

5) $z=1.5+2.5i$.

6) א. $x=\pm i$ ב. $x=\pm 6i$ ג. $x=1+2i\ ,\ 1-2i$.

7) $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

8) $z=2i\ ,\ -3i$.

9) א. $7+i$ ב. $-3+5i$ ג. $16+11i$.

10) א. $-1+5i$ ב. $1+3\frac{1}{2}i$ ג. $-\sqrt{3}i$ ד. $2+2i$ ה. $-3+7i$ ו. $11-7i$

11) א. $16+30i$ ב. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$ ג. -25 ד. $-1-i$
ה. $-2+3i$ ו. $-24-10i$.

12) א. $a_1=a_2\ ,\ b_1=-b_2$ ב. הוכחה.

המספר הצמוד:

סיכום כללי:

צמוד קומפלקסי (מרוכב):

לכל מספר מרוכב $z=a+bi$ קיים מספר צמוד המסומן ב- $\bar{z}$ וערכו: $\bar{z}=a-bi$.

שאלות:

13) רשום את המספר הצמוד של המספרים המרוכבים הבאים:

א. $2+5i$ ב. $3-i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

ד. $7i$ ה. -4 ו. 0

14) חשב:

א. $\frac{11+2i}{2-i}$ ב. $\frac{3+7i}{2-5i}$ ג. $\frac{19-9i}{2-3i}$

15) נתון מספר $z=5-2i$. חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{z}$ ב. $\frac{z}{z+3}$ ג. $\frac{z+i}{z-i}$

16) המספר $\frac{3+4i}{a-i}$ הוא ממשי טהור. מצא את a.

17) נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1=a_1+b_1i$ ו- $z_2=a_2+b_2i$.
הראה כי כדי שתוצאת החילוק $\frac{z_1}{z_2}$ תהיה ממשית טהורה, צריך להתקיים: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$.

18) פתור את המשוואה הבאה: $3z-11=iz-7i$.

19) פתור את המשוואה הבאה: $iz+5=4i$.

20) פתור את מערכת המשוואות הבאה (z ו- w משתנים מרוכבים): $\begin{cases}3z+iw=5-4i\\5iz-2w=5+8i\end{cases}$.

21) פתור את המשוואות הבאות שבהן a ו- b ממשיים:

א. $2a-3i=10+bi$

ב. $3a-8+5bi=2b-ai-3i$

22) פתור את המשוואה הבאה: $2z+7i=iz+\bar{z}-3$.

23) חשב את ערכי המספרים המרוכבים הבאים:

א. $\sqrt{5-12i}$

ב. $\sqrt{8+6i}$

24) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

א. $(1-i)z^2-2z+i+1=0$.

ב. $(-2+i)z^2-(6+12i)z+10-25i=0$.

25) פתור את המשוואה הבאה: $iz^2-2(1-i)z+6+15i=0$.

26) פתור את המשוואה הבאה: $z^2-i\bar{z}+6=0$.

תשובות סופיות:

13) א. $2-5i$ ב. $3+i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ד. $-7i$ ה. -4 ו. 0.

14) א. $4+3i$ ב. $-1+i$ ג. $5+3i$.

15) א. $\frac{5}{29}+\frac{2}{29}i$ ב. $\frac{11}{17}-\frac{3}{34}i$ ג. $\frac{14}{17}+\frac{5}{17}i$.

16) $a=-\frac{3}{4}$.

17) שאלת הוכחה.

18) $z=4-i$.

19) $z=4+5i$.

20) $z=2-3i\ ,\ w=5+i$.

21) א. $a=5\ ,\ b=-3$ ב. $a=2\ ,\ b=-1$.

22) $z=-\frac{1}{2}-2\frac{1}{2}i$.

23) א. $z=\pm(3-2i)$ ב. $z=\pm(3+i)$.

24) א. $z_{1,2}=i\ ,\ 1$ ב. $z_{1,2}=-2-i\ ,\ 2-5i$.

25) $z_1=-2-5i\ ,\ z_2=3i$.

26) $z_1=-3i\ ,\ z_2=2i$.

חקירת משוואה ריבועית מרוכבת:

שאלות:

27) נתונה המשוואה הבאה: $(mi-2)z^2-2(m+2i)z+1=0$
מצא לאלו ערכים של הפרמטר המרוכב m למשוואה:

א. יש פתרון יחיד.

ב. אין פתרון.

תשובות סופיות:

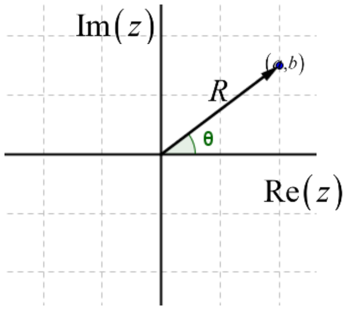
27) א. $m=-i$ ב. $m=-2i$.

מישור גאוס והצגה קוטבית של מספר מרוכב:

סיכום כללי:

ניתן לאפיין מספר מרוכב z ע״י הצגתו במישור שבו ציר ה-x מייצג את a, גודל הערך הממשי של z, וציר ה-y מייצג את b, גודל הערך המדומה של z.

מישור זה נקרא מישור גאוס ומופיע באיור הסמוך.



במישור גאוס ניתן לאפיין כל נקודה ע״י הזוג: (a,b)

או ע״י הערך המוחלט של המספר (מרחקו מ-$(0,0)$)

והזווית שלו בין הקרן החיובית של הציר הממשי לרדיוס.

הצמד הנ״ל מוגדר כהצגה קוטבית של מספר מרוכב

ויסומן: (R,θ). מספר מרוכב בהצגה קוטבית:

$z = R\cos\theta + i\cdot R\sin\theta = R(\cos\theta + i\sin\theta) = R\text{cis}\theta$.

נוסחאות ומעברים:

- מעבר מהצגה קוטבית לקרטזית (אלגברית): $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$, $R = \sqrt{a^2+b^2}$.
- מעבר מהצגה קרטזית לקוטבית: $a = R\cos\theta$, $b = R\sin\theta$.
- גודל של מספר מרוכב z יסומן: $|z|$ ויחושב: $|z| = R = \sqrt{a^2+b^2}$.

פעולות חשבון בהצגה קוטבית:

- כפל מספרים מרוכבים: $z_1\cdot z_2 = (R_1\text{cis}\theta_1)\cdot(R_2\text{cis}\theta_2) = R_1R_2\text{cis}(\theta_1+\theta_2)$.
- חילוק מספרים מרוכבים: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{R_1\text{cis}\theta_1}{R_2\text{cis}\theta_2} = \dfrac{R_1}{R_2}\text{cis}(\theta_1-\theta_2)$.

שאלות:

28) כתוב את המספרים המרוכבים הבאים בהצגה אלגברית:

א. $2\text{cis}60°$ ב. $6\text{cis}135°$ ג. $4\text{cis}330°$

ד. $4\text{cis}(-30°)$ ה. $4\text{cis}690°$ ו. $8\text{cis}90°$

ז. $3\text{cis}270°$ ח. $\text{cis}180°$ ט. $\text{cis}0°$

29) הפוך להצגה קוטבית:

א. $1+i$ ב. $\sqrt{3}-i$ ג. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

ד. $3+4i$ ה. $6i$ ו. $-i$

ז. 4 ח. -1 ט. 1

י. 0

30) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2\text{cis}120°\cdot 3\text{cis}60°$ ב. $\text{cis}210°\cdot 5\text{cis}(-40°)$

ג. $\frac{12\text{cis}315°}{3\text{cis}90°}$ ד. $\frac{1}{2\text{cis}40°}$

ה. $6\text{cis}30°+2\text{cis}210°$

31) נתון המספר המרוכב $z=R\text{cis}\theta$. הבע באמצעות R ו-θ את המספרים:

א. $\bar{z}$ ב. $1/z$ ג. $-z$

ד. $-\frac{1}{z}$ ה. iz ו. $z\cdot\bar{z}$

32) הראה כי המספרים הבאים הם ממשיים טהורים:

א. $z+\bar{z}$ ב. $z\cdot\bar{z}$ ג. $\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}$

33) הראה כי המספרים הבאים הם מדומים טהורים:

א. $z^2-\bar{z}^2$ ב. $\frac{1}{\bar{z}}-\frac{1}{z}$

34) הוכח את הטענות הבאות:

א. $z-i\bar{z}=\overline{\bar{z}+iz}$		ב. $z\cdot\bar{z}=|z|^2$

35) מצא את קדקודיו של ריבוע החסום במעגל קנוני שרדיוסו $\sqrt{2}$ במישור גאוס אם ידוע שצלעותיו מקבילות לצירים.

36) ריבוע חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד מקודקודי הריבוע הוא $1+\sqrt{3}i$.
מצא את קדקודיו האחרים.

37) משולש שווה צלעות חסום במעגל קנוני במישור גאוס.
אחד מקודקודי המשולש הוא $1+\sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

38) משולש שווה שוקיים, שזווית הבסיס שלו היא $30°$ חסום במעגל קנוני במישור גאוס. קדקוד הראש של המשולש הוא $1+\sqrt{3}i$. מצא את קדקודיו האחרים.

39) z הוא מספר מרוכב במישור גאוס הנמצא מחוץ למעגל היחידה.
קבע אם המספרים הבאים נמצאים בתוך מעגל היחידה, עליו או מחוץ לו:

א. $\bar{z}$		ב. $\frac{1}{z}$		ג. $\frac{z}{\bar{z}}$		ד. $z\cdot\bar{z}$

תשובות סופיות:

28) א. $1+\sqrt{3}i$ ב. $-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$ ג. $2\sqrt{3}-2i$ ד. $2\sqrt{3}-2i$
ה. $2\sqrt{3}-2i$ ו. $8i$ ז. $-3i$ ח. -1 ט. 1.

29) א. $\sqrt{2}\text{cis}45^\circ$ ב. $2\text{cis}330^\circ$ ג. $\text{cis}240^\circ$ ד. $5\text{cis}53.13^\circ$
ה. $6\text{cis}90^\circ$ ו. $\text{cis}270^\circ$ ז. $4\text{cis}0^\circ$ ח. $\text{cis}180^\circ$
ט. $\text{cis}0^\circ$ י. 0.

30) א. -6 ב. $5\text{cis}170^\circ$ ג. $4\text{cis}225^\circ$ ד. $\frac{1}{2}\text{cis}\left(-40^\circ\right)$
ה. $4\text{cis}30^\circ$.

31) א. $R\text{cis}\left(-\theta\right)$ ב. $\frac{1}{R}\text{cis}\left(-\theta\right)$ ג. $R\text{cis}\left(180^\circ+\theta\right)$
ד. $\frac{1}{R}\text{cis}\left(180^\circ+\theta\right)$ ה. $R\text{cis}\left(90^\circ+\theta\right)$ ו. R^2.

32) שאלת הוכחה.

33) שאלת הוכחה.

34) שאלת הוכחה.

35) $1-i$, $-1-i$, $-1+i$, $1+i$.

36) $\sqrt{3}-i$, $-1-\sqrt{3}i$, $-\sqrt{3}+i$.

37) -2 , $1-\sqrt{3}i$, $1+\sqrt{3}i$.

38) 2 , $-1+\sqrt{3}i$, $1+\sqrt{3}i$.

39) א. מחוץ למעגל. ב. בתוך המעגל ג. על המעגל
ד. מחוץ למעגל.

נוסחת דה-מואבר למציאת שורשים של מספר מרוכב:

סיכום כללי:

משפט דה-מואבר:

כדי להעלות מספר מרוכב z בחזקת n נעזר בקשר: $\left(R\text{cis}\theta\right)^n = R^n\text{cis}\left(n\theta\right)$.

שורשים של מספר מרוכב:

כדי להוציא שורש n-י של מספר מרוכב z השווה למספר מרוכב אחר $z_0 = R_0\text{cis}\theta_0$

נבצע: $1 \le k \le n$: $z^n = z_0 = R_0\text{cis}\theta_0 \,/\, \sqrt[n]{\ } \;\Rightarrow\; z_k = \sqrt[n]{R_0}\cdot\text{cis}\left(\frac{\theta_0}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)$.

שאלות:

40) חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בנוסחת דה-מואבר:

א. $\left(2\text{cis}30°\right)^3$ ב. $\left(2\text{cis}14°\right)^5$ ג. $\left(1+i\right)^4$

ד. $\left(\sqrt{3}-i\right)^3$ ה. $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12}$

41) פתור את המשוואות הבאות:

א. $z^2 = 36\text{cis}120°$ ב. $z^4 = \left(9\text{cis}80°\right)^2$ ג. $z^5 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

42) מצא את סכום ומכפלת שורשי היחידה מסדר 4.

43) נתון המספר המרוכב $z = x+iy$.

מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה: $|z| = 2$.

44) נתון המספר המרוכב $z=x+iy$.
מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה: $|z-3i|=5$.

45) נתון המספר המרוכב $z=x+iy$. מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה: $|z+i|+|\bar{z}+i|=|1+3i|$.

תשובות סופיות:

40) א. $8i$ ב. $32\text{cis}70^\circ$ ג. 4- ד. $-8i$ ה. 1.

41) א. $z_0=6\text{cis}60^\circ$, $z_1=6\text{cis}240^\circ$.
ב. $z_0=3\text{cis}40^\circ$, $z_1=3\text{cis}130^\circ$, $z_2=3\text{cis}220^\circ$, $z_3=3\text{cis}310^\circ$.
ג. $z_0=\text{cis}12^\circ$, $z_1=\text{cis}84^\circ$, $z_2=\text{cis}156^\circ$, $z_3=\text{cis}228^\circ$, $z_4=\text{cis}300^\circ$.

42) סכום: 0 , מכפלה: 1- .

43) $x^2+y^2=4$.

44) $x^2+(y-3)^2=25$.

45) $\frac{2x^2}{3}+\frac{2y^2}{5}=1$.

שאלות בסדרות עם מספרים מרוכבים:

שאלות:

46) בסדרה חשבונית האיבר השביעי הוא $a_7 = 13+3i$ והאיבר השלישי הוא $a_3 = 5-9i$. מצא את סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה.

47) בסדרה הנדסית האיבר החמישי הוא $a_5 = 32+16i$ והאיבר השני הוא $a_2 = 2-4i$.

א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת מנת הסדרה, אם נתון שמנת הסדרה היא מספר מרוכב הנמצא על הציר המדומה במישור גאוס.

ב. מצא את סכום חמשת האיברים הראשונים בסדרה.

48) נתונים שלושה איברים סמוכים בסדרה הנדסית. האיבר הראשון ביניהם הוא 2. נתון כי אם מוסיפים לאיבר השלישי $4i$ מתקבלים שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית. מצא את שלושת איברי הסדרה ההנדסית (שתי אפשרויות).

תשובות סופיות:

46) $S_{10} = 100-15i$.

47) א. $a_1 = 2+i$, $q = -2i$ ב. $S_5 = 20+25i$.

48) $2 , 2i , -2$ או $2 , 4-2i , 6-8i$.

שאלות שונות עם מספרים מרוכבים:

שאלות:

49) פתור את המשוואה: $z-\bar{z}+|z|=|2-i|^2-4i+\operatorname{Im}(z)$.

50) פתור את המשוואה: $\left|2-3^{x^2-x-1}i\right|=\sqrt{13}$.

51) פתור את המשוואה: $z^3=\bar{z}$.

52) הוכח: אם מקדמי משוואה ריבועית הם מספרים ממשיים ואין למשוואה פתרונות ממשיים אז פתרונות המשוואה הם שני מספרים צמודים.

53) נתונים שני מספרים מרוכבים שאינם ממשיים טהורים.
הוכח: אם סכום המספרים ממשי ומכפלתם ממשית אז המספרים צמודים.

54) נתון מספר מרוכב z, שאינו ממשי טהור ואינו מדומה טהור.
הוכח כי אם $z-\frac{1}{\bar{z}}$ ממשי אז z על מעגל היחידה.

55) הוכח את הנוסחה הבאה: $R_1\operatorname{cis}\theta_1\cdot R_2\operatorname{cis}\theta_2=R_1R_2\operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2)$.

56) z הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה ברביע הראשון.
נתון: $\left|z^4-z^3\right|=\sqrt{2-\sqrt{3}}$. מצא את $\arg(z)$.

57) z הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה.
מצא את ערך הביטוי $z+iz$, אם ידוע שהוא ממשי.

58) z_1 ו- z_2 הם פתרונות המשוואה הבאה: $z^2-2\cos\theta\cdot z+1=0$.
הבע באמצעות θ את גודל הזווית $\sphericalangle z_1Oz_2$ (O ראשית הצירים).

תשובות סופיות:

49) $z_1=3-4i$, $z_2=-3-4i$.

50) $x=2$, -1.

51) $z_1=0$, $z_2=i$, $z_3=-i$, $z_4=1$, $z_5=-1$.

52) שאלת הוכחה.

53) שאלת הוכחה.

54) שאלת הוכחה.

55) שאלת הוכחה.

56) $\arg(z)=30^\circ$.

57) $z+iz=\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$.

58) 2θ.