

# מתמטיקה למחצית ב



## תוכן העניינים

1	מבוא לתורת הקבוצות
11	תורת הקבוצות
25	לוגיקה
39	קומבינטוריקה
(ללא ספר)	5. סטטיסטיקה בסיסית - מבוא לסטטיסטיקה
(ללא ספר)	6. סטטיסטיקה בסיסית - מדדים מרכזיים - החציון
(ללא ספר)	7. סטטיסטיקה בסיסית - מדדים מרכזיים - הממוצע
(ללא ספר)	8. סטטיסטיקה בסיסית - מדדים מרכזיים - השכיח
(ללא ספר)	9. סטטיסטיקה מתקדמת
(ללא ספר)	10. התפלגות נורמלית
80	11. וקטורים גיאומטריים - רמת 5 יחידות
94	12. וקטורים אלגבריים - רמת 5 יחידות
136	13. אלגברה ליניארית - מטריצות
156	14. אלגברה ליניארית - דטרמיננטות
169	15. טריגונומטריה - טריגונומטריה במשולש ישר זווית
174	16. טריגונומטריה - זהויות טריגונומטריות

# מתמטיקה למחצית ב

פרק 1 - מבוא לתורת הקבוצות

תוכן העניינים

1. כללי ..... 1

## כללי:

### סיכום כללי:

#### הגדרות יסודיות:

- גרירה חד כיוונית  $A \Rightarrow B$ : פירושו: אם  $A$  מתקיים אז גם  $B$  מתקיים.
- גרירה דו-כיוונית  $A \Leftrightarrow B$  (אם ורק אם): פירושו:  $A \Rightarrow B$  וגם  $B \Rightarrow A$ .
- הסימן 'או':  $\vee$ .
- הסימן 'וגם':  $\wedge$ .

#### קבוצה, איבר של קבוצה ושייכות לקבוצה:

- קבוצה היא אוסף של עצמים.
- כל עצם בקבוצה נקרא איבר של הקבוצה.
- שייכות לקבוצה:
  - על מנת לציין שהאיבר  $a$  שייך לקבוצה  $A$  נרשום  $a \in A$ .
  - על מנת לציין שהאיבר  $a$  אינו שייך לקבוצה  $A$  נרשום  $a \notin A$ .

#### שוויון בין קבוצות:

- שתי קבוצות הן שוות אם יש להן בדיוק את אותם איברים.
- פורמלית שוויון בין קבוצות מוגדר באופן הבא:  $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ .

#### הקבוצה ריקה:

קבוצה שאין בה כלל איברים נקראת הקבוצה הריקה ומסומנת ב-  $\emptyset$ , כלומר  $\emptyset = \{ \}$ .

#### קבוצה סופית ואינסופית:

- קבוצה תקרא סופית אם מספר האיברים בה סופי.
- קבוצה תקרא אינסופית אם מספר האיברים בה אינסופי.

### עוצמה של קבוצה:

מספר האיברים של קבוצה  $A$  נקרא גם העוצמה של הקבוצה ומסומן  $|A|$ .

### תת-קבוצה:

אם קבוצה  $A$  מוכלת בקבוצה  $B$ , נסמן זאת:  $A \subseteq B$ .

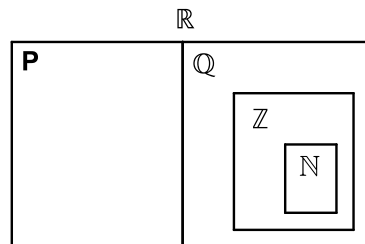
תמיד מתקיים:

- $A \subseteq A$
- $\emptyset \subseteq A$

עבור שוויון קבוצות נדרוש:  $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$  או  $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ .

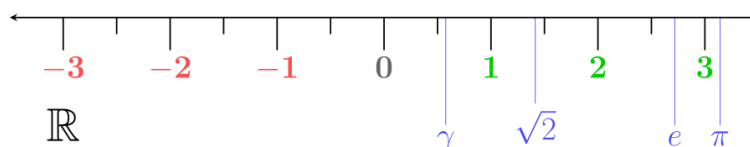
### קבוצות מספרים מיוחדות:

- קבוצת המספרים הטבעיים:  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- קבוצת המספרים השלמים:  $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$
- קבוצת המספרים הרציונאליים:  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$
- קבוצת המספרים האי-רציונאליים (אין סימון ספציפי לקבוצה זו, למעט  $P$ ).
- קבוצת המספרים הממשיים:  $\mathbb{R}$  (כוללת את  $\mathbb{Q}$  ואת  $P$ ).



### ציר המספרים:

את קבוצת כל המספרים הממשיים ניתן לתאר על ידי הישר הממשי שהוא הישר שנקודותיו הן המספרים הממשיים:



## קטעים על ציר המספרים:

סימון קטעים	סימון קבוצות	תיאור מילולי
$(a, b)$	$\{x \mid a < x < b\}$	הקטע הפתוח מ- $a$ ל- $b$ לא כולל נקודות הקצה
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	הקטע הסגור מ- $a$ ל- $b$ וכולל נקודות קצה
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	קטע חצי סגור וחצי פתוח, מכיל את $a$ ולא את $b$
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	קטע חצי סגור וחצי פתוח, מכיל את $b$ ולא את $a$
$(a, \infty)$	$\{x \mid a < x < \infty\}$	הקרן הפתוחה מ- $a$ עד $\infty$ ללא $a$
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \leq x < \infty\}$	הקרן הסגורה מ- $a$ עד $\infty$ כולל $a$
$(-\infty, b)$	$\{x \mid -\infty < x < b\}$	הקרן הפתוחה מ- $-\infty$ עד $b$ ללא $b$
$(-\infty, b]$	$\{x \mid -\infty < x \leq b\}$	הקרן הסגורה מ- $-\infty$ עד $b$ כולל $b$

## קבוצת החזקה של קבוצה נתונה:

קבוצת כל התת-קבוצות של קבוצה נתונה נקראת קבוצת החזקה של  $A$  ומסומנת  $P(A)$ .

## איחוד וחיתוך קבוצות:

- איחוד קבוצות  $A$  ו- $B$  פירושו הגדרת קבוצה חדשה שמכילה את כל האיברים של הקבוצות עצמן ומסומנת:  $A \cup B$ .
- חיתוך קבוצות  $A$  ו- $B$  פירושו הגדרת קבוצה חדשה שמכילה את האיברים המשותפים של הקבוצות עצמן ומסומנת:  $A \cap B$ .

	תכונות החיתוך	תכונות האיחוד
	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$A \cup B$	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
	$A \cap \phi = \phi$	$A \cup \phi = A$
		$A \subseteq A \cup B$

הדיסטריביוטיביות של החיתוך מעל האיחוד ושל האיחוד מעל החיתוך:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

### הפרש קבוצות:

ההפרש של שתי קבוצות  $A$  ו- $B$  המסומן  $A - B$  הוא קבוצה שאיבריה הם

כל איברי  $A$  שאינם איברי  $B$ , כלומר:  $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ .

### משלים של קבוצה:

ההפרש  $U - A$  מסומן ב- $A^c$  או ב- $A'$  ונקרא **המשלים** של  $A$  כאשר  $U$  היא הקבוצה האוניברסלית.

### כללי דה-מורגן:

$$\bullet (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$\bullet (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

### דיאגרמת וון:

תיאור גרפי של קבוצות ויחסים ביניהם.

## שאלות:

1) רשום את הטענות הבאות במילים ובדוק האם הן נכונות:

א.  $\forall x \forall y : (x + y)^2 > 0$

ב.  $\forall x \exists y : (x + y)^2 > 0$

ג.  $\forall x \forall y \exists z : xz = \frac{y}{4}$

ד.  $\forall x > 0, \forall y > 0, \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

ה.  $\forall n \exists k, n^3 - n = 6k$  ( $k$  ו- $n$  טבעיים).

הערה: בסעיף זה הטבעיים כוללים את 0.

2) רשום כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון אי-השוויון  $x^2 > 4$ , הוא  $x > 2$  או  $x < -2$ .

ב. אי השוויון  $x^2 + 4 > 0$ , מתקיים לכל  $x$ .

ג. לכל מספר טבעי  $n$ , המספר  $n^3 - n$  מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר  $x$ ,  $|x| < 1$  אם ורק אם  $-1 < x < 1$ .

3) רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים,

ואת מספר איברי הקבוצה:

א.  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}$

ב.  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16\}$

ג.  $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16\}$

ד.  $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+4)(x-1) < 0\}$

ה.  $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 + x^2 - 2x = 0\}$

ו.  $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 4\}$

4) הגדר את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן בצורה:

$A = \{x \mid x \text{ מקיים תכונה מסוימת}\}$

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האיזוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 1, 2, 3, 4.

(5) ציין אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו:

א.  $A = \{11, 13, 17, 19\}$

ב.  $B = \{x \mid 10 < x < 20, x \text{ מספר ראשוני}\}$

ג.  $C = \{11, 11, 17, 13, 19\}$

ד.  $D = \{x \mid x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$

ה.  $E = \{x \mid x = 2m, m \text{ שלם זוגי}\}$

(6) נתונה הקבוצה הבאה:  $A = \{1, 2, \{2\}, \{2, 5\}, 4, \{2, 4\}\}$

מי מבין הטענות הבאות נכונה:

ג.  $\{2\} \in A$

ב.  $2 \in A$

א.  $5 \in A$

ו.  $\emptyset \in A$

ה.  $\{\{2\}\} \subseteq A$

ד.  $\{2\} \subseteq A$

ט.  $\{2, 4\} \subseteq A$

ח.  $\{2, \{2\}\} \subseteq A$

ז.  $\emptyset \subseteq A$

יב.  $\{2, 5\} \subseteq A$

יא.  $\{\{2, 4\}\} \in A$

י.  $\{2, 4\} \in A$

יד.  $\{1, 4\} \in A$

יג.  $\{2, 5\} \in A$

(7) מצא שתי קבוצות,  $A$  ו- $B$ , המקיימות:

א.  $A \in B$

ב.  $A \subseteq B$

(8) נתונות הקבוצות הבאות:

$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ,  $B = \{4, 6, 8, 10\}$ ,  $C = \{3, 5, 7, 9\}$ ,  $D = \{6, 7, 8\}$ ,  $E = \{7, 8\}$

קבע איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה  $X$ :

א.  $X \subseteq A$  וגם  $X \not\subseteq D$

ב.  $X \subseteq D$  וגם  $X \not\subseteq C$

ג.  $X \subseteq E$  וגם  $X \not\subseteq A$

(9) הוכח:  $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

**10** נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{4, 6, 8, 10\}, C = \{3, 5, 7, 9\}, D = \{6, 7, 8\}$$

רשום את :

א.  $A \cup B$       ב.  $A \cap B$       ג.  $(A \cup B) \cap C$

ד.  $(B \cup C) \cap (B \cup D)$       ה.  $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

**11** נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = [1, 4), B = (-2, 1), C = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}, D = \{x \mid 2^x = 0\}$$

רשום את :

א.  $A \cup B$       ב.  $A \cap B$       ג.  $(A \cup B) \cap C$

ד.  $(B \cup C) \cap (B \cup D)$       ה.  $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

**12** נתונות 3 קבוצות :  $A = \{4, 5, 6, 7, 8\}, B = \{5, 6, 7, 8, 9\}, C = \{4, 5, 6, 10\}$

א. חשב את  $(A - B) - C$ .

ב. חשב את  $A - (B - C)$ .

**13** נתון :  $U = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}, A = \{12, 15, 18\}, B = \{13, 15, 17\}$

הדגם את כלל דה מורגן  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ .

**14** הוכח את כלל דה מורגן הראשון  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ .

**15** מצא את הקבוצה המשלימה, ביחס ל- $\mathbb{R}$ , של הקבוצות הבאות :

א.  $A = [1, \infty)$

ב.  $B = (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$

ג.  $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 > 0\}$

ד.  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 2 \vee x > 4\}$

**(16)** הצג באמצעות דיאגרמת וון את הקבוצות הבאות:

ב.  $A \cup B$

א.  $A \cap B$

ד.  $A \cap B^c$

ג.  $A^c$

ו.  $A \cup B^c$

ה.  $A^c \cap B$

ח.  $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$

ז.  $A^c \cup B$

ט.  $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$

**(17)** נתונה הקבוצה:  $A = \{\phi, 4, \{4\}\}$

רשמו את  $P(A)$ .

**(18)** הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

א. לכל קבוצה  $A$  מתקיים  $A \subseteq P(A)$ .

ב. לכל קבוצה  $A$  מתקיים  $A \notin P(A)$ .

**(19)** הוכיחו כי:  $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$ .

## תשובות סופיות:

- (1) א. לכל  $x$  ולכל  $y$  מתקיים  $(x+y)^2 > 0$ . הטענה אינה נכונה.  
 ב. לכל  $x$  קיים  $y$ , כך ש- $(x+y)^2 > 0$ . הטענה אינה נכונה.  
 ג. לכל  $x$  ולכל  $y$  קיים  $z$  כך ש- $xz = \frac{y}{4}$ . הטענה אינה נכונה.  
 ד. לכל  $x$  חיובי ולכל  $y$  חיובי מתקיים  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ . הטענה נכונה.  
 ה. לכל  $n$  טבעי המספר  $n^3 - n$  מתחלק ב-6. הטענה נכונה.
- (2) א.  $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2 \vee x < -2$  ב.  $\forall x: x^2 + 4 > 0$   
 ג.  $\forall n \exists k: n^3 - n = 6k$  ד.  $\forall x: |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$
- (3) א.  $A = (-4, 4)$ , בקבוצה אינסוף איברים.  
 ב.  $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ , בקבוצה 7 איברים.  
 ג.  $C = \{1, 2, 3\}$ , בקבוצה 3 איברים.  
 ד.  $D = \{-3, -2, -1, 0\}$ , בקבוצה 4 איברים.  
 ה.  $E = \{0, 1\}$ , בקבוצה 2 איברים.  
 ו.  $F = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ , בקבוצה 9 איברים.
- (4) א.  $A = \{x \mid x = 2n - 1, n \in \mathbb{N}\}$  ב.  $B = \{11, 13, 17, 19\}$   
 ג.  $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4^2, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$  ד.  $D = \{1, 4, 9, 16\}$
- (5) הקבוצות  $A, B$  ו- $C$  שוות זו לזו, והקבוצות  $D$  ו- $E$  שוות זו לזו.
- (6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.  
 ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.  
 יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.
- (7)  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{\{1, 2\}, 1, 2\}$
- (8) א.  $A, C$  ב.  $E, D$  ג. לא קיימת קבוצה כזאת.
- (9) הוכחה.

$$A \cap B = \{4, 6, 8\} \quad \text{ב.}$$

$$(B \cup C) \cap (B \cup D) = \{4, 6, 7, 8, 10\} \quad \text{ד.}$$

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{ב.}$$

$$(B \cup C) \cap (B \cup D) = (-2, 1) \quad \text{ד.}$$

$$A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \quad \text{א. (10)}$$

$$(A \cup B) \cap C = \{3, 5, 7, 9\} \quad \text{ג.}$$

$$(B \cap C) \cup (B \cap D) = \{6, 8\} \quad \text{ה.}$$

$$A \cup B = (-2, 4) \quad \text{א. (11)}$$

$$(A \cup B) \cap C = (0, 4) \quad \text{ג.}$$

$$(B \cap C) \cup (B \cap D) = [0, 1) \quad \text{ה.}$$

$$\emptyset \quad \text{א. (12)} \quad \text{ב. } \{4, 5, 6\}$$

(13) ללא פתרון.

(14) הוכחה.

$$A^c = (-\infty, 1) \quad \text{א. (15)} \quad B^c = [1, 4] \quad \text{ב.} \quad C^c = [1, 4] \quad \text{ג.} \quad D^c = (-\infty, 1] \cup [3, 4] \quad \text{ד.}$$

(16) ראו סרטון.

$$P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{4\}, \{\{4\}\}, \{\emptyset, 4\}, \{4, \{4\}\}, \{\emptyset, \{4\}\}, \{\emptyset, 4, \{4\}\}\} \quad \text{(17)}$$

(18) הוכחה.

(19) הוכחה.

# מתמטיקה למחצית ב

פרק 2 - תורת הקבוצות

תוכן העניינים

11	1. מבוא לתורת הקבוצות
12	2. דיאגרמת ון
14	3. פעולות על קבוצות
16	4. שאלות הוכחה
18	5. דרך השלילה
19	6. קבוצת חזקה
21	7. קריאת קבוצות
23	8. מכפלה קרטזית

## מבוא לתורת הקבוצות

## שאלות

1) לגבי כל אחד מהממדים הבאים רשמו ב-□ את הסימן המתאים,  $\in, \notin, \subseteq, \subset, \supseteq, \supset, \neq$ . שימו לב שתיתכן יותר מתשובה אחת. אם התשובה היא  $\neq$ , נמקו.

א.  $1 \square \{1, \{1\}\}$       ב.  $\{1\} \square \{1, \{1\}\}$       ג.  $\{8, \emptyset\} \square \{1, 2, 8\}$

ד.  $\emptyset \square \{1, 2\}$       ה.  $\emptyset \square \{\emptyset, 1, 2\}$

ו.  $\{2\} \square \{\{1, \{2\}\}\}$       ז.  $\{2\} \square \{2, \{2, \{2\}\}\}$

ח.  $\{2\} \square \{2, \{2\}, \{\{2\}\}\}$       ט.  $\{2\} \square \{2, \{2, \{2\}\}, \{2\}\}$

י.  $\{\{2\}, \emptyset\} \square \{2, \{2\}, \{\{2\}\}\}$       יא.  $\emptyset \square \{1, \{\emptyset\}\}$

יב.  $\{\emptyset\} \square \{1, \{\emptyset\}\}$       יג.  $\{1, 2\} \square \{1, \{2\}\}$

יד.  $1 \square \mathbb{N}$       טו.  $\{1\} \square \mathbb{N}$

טז.  $1 \square \{\mathbb{N}\}$       יז.  $\{1\} \square \{\mathbb{N}\}$

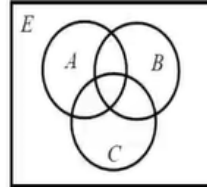
## תשובות סופיות

1) א.  $\in$       ב.  $\in, \subseteq, \subset$       ג.  $\notin, \supseteq$       ד.  $\in, \subseteq, \subset$       ה.  $\in, \subseteq, \subset$   
 ו.  $\notin, \supseteq$       ז.  $\in, \subseteq, \subset$       ח.  $\in, \subseteq, \subset$       ט.  $\in, \subseteq, \subset$       י.  $\notin, \supseteq$   
 יא.  $\in, \subseteq, \subset$       יב.  $\in, \supseteq$       יג.  $\notin, \supseteq$       יד.  $\in, \notin$       טו.  $\in, \subseteq, \subset$   
 טז.  $\notin$       יז.  $\notin, \supseteq$

## דיאגרמת ון

## שאלות

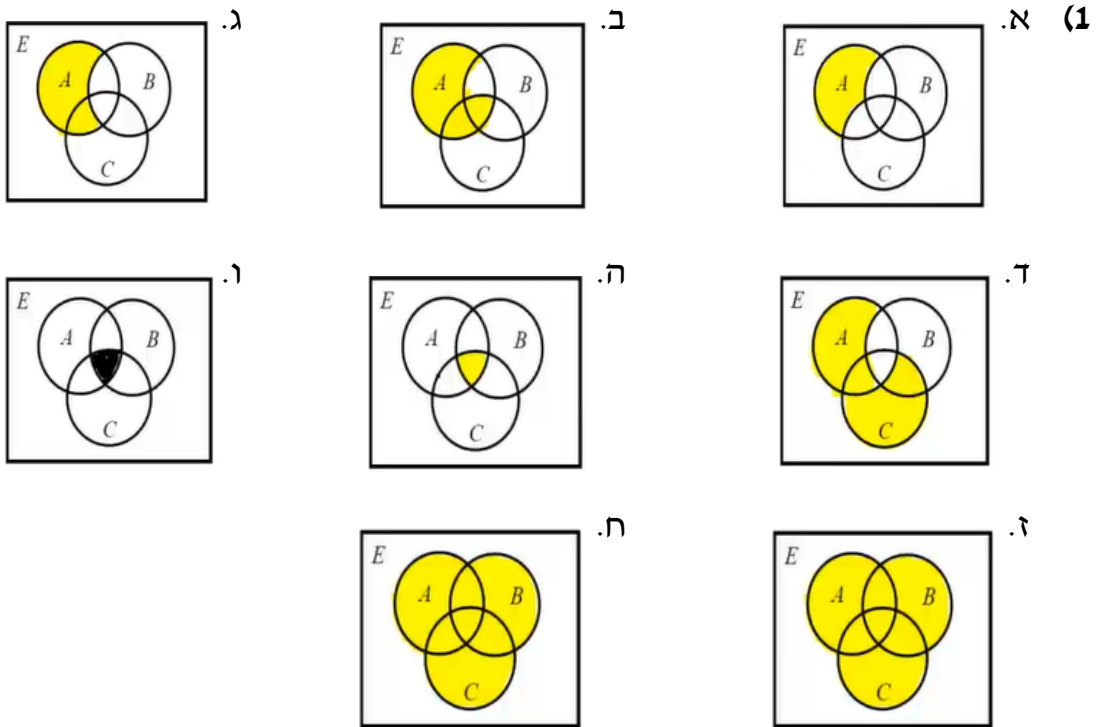
1) באיור שלהלן דיאגרמת ון.



קווקוו את השטח המתאר את הקבוצות הבאות:

- |                        |                                     |
|------------------------|-------------------------------------|
| א. $(A - B) - C$       | ב. $A - (B - C)$                    |
| ג. $A \cap B^c$        | ד. $(A \cap B^c) \cup (C \cap A^c)$ |
| ה. $(A \cap B) \cap C$ | ו. $A \cap (B \cap C)$              |
| ז. $(A \cup B) \cup C$ | ח. $A \cup (B \cup C)$              |

## תשובות סופיות



## פעולות על קבוצות

## שאלות

(1) עבור  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{3, 4, 5\}$ ,  $C = \{1, 4, 6\}$  חשבו את הקבוצות הבאות:

א.  $(A \cup C) \setminus B$

ב.  $(A \cap B) \cup C$

ג.  $A \cap (B \cup C)$

ד.  $P(A)$

ה.  $C \setminus A$

(2) עבור  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{3, 4, 5\}$ ,  $C = \{1, 4, 6\}$ :

א. האם  $B \subseteq C$ ?

ב. האם  $\{1\} \subseteq B$ ?

ג. האם  $\{1\} \subseteq A$ ?

ד. האם  $\{1\} \in P(A)$ ?

ה. האם  $\{1\} \subseteq P(A)$ ?

ו. האם  $\{\{1\}\} \subseteq P(A)$ ?

ז. האם  $\{\{1\}, \emptyset\} \subseteq P(A)$ ?

(3) עבור  $A = \{1, \{3, *\}, \emptyset\}$ ,  $B = \{4, \emptyset\}$  חשבו:

א.  $A \cup B$

ב.  $A \cap B$

ג.  $A - B$

ד.  $B - A$

ה.  $A \oplus B$

**תשובות סופיות**

- (1) א.  $\{1, 2, 6\}$     ב.  $\{1, 3, 4, 6\}$     ג.  $\{1, 3\}$     ד.  $2 \notin P(A)$
- (2) א. לא.    ב. לא.    ג. כן.    ד. כן.
- ה. לא.    ו. כן.    ז. כן.
- (3) א.  $\{1, \{3, *\}, \emptyset, 4\}$     ב.  $\{\emptyset\}$     ג.  $\{1, \{3, *\}\}$     ד.  $\{4\}$
- ה.  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

## שאלות הוכחה

## שאלות

בכל אחת משאלות הפרק יש לפעול כפי שמתואר בשאלה 1.

(1) תהיינה  $A, B$  קבוצות.

אם הטענה נכונה, ציינו זאת ותנו נימוק קצר מדוע.  
אם הטענה אינה נכונה, ציינו זאת, ותנו דוגמה נגדית.  
יש ערך רב יותר לדוגמה מינימלית; בדקו האם בדוגמה הנגדית יש פרטים מיותרים והסירו אותם.  
אם טענות יב-כא נכונות, נסו להוכיחן, ובמיוחד את טענה יב, שבה נשתמש יותר מאוחר להוכחת תכונות של קבוצת חזקה.

א. אם  $x \notin A$ , אז  $x \notin A \cup B$ .

ב. אם  $x \notin A \cup B$ , אז  $x \notin A$ .

ג. אם  $x \notin A$ , אז  $x \notin A \cap B$ .

ד. אם  $x \notin A \cap B$ , אז  $x \notin A$ .

ה. אם  $x \notin A$ , אז  $x \notin A - B$ .

ו. אם  $x \notin A - B$ , אז  $x \notin A$ .

ז. אם  $x \in B$ , אז  $x \notin A - B$ .

ח. אם  $x \notin A - B$ , אז  $x \in B$ .

ט.  $x \notin A \Leftrightarrow x \notin A - B$

י.  $x \in B \Leftrightarrow x \notin A - B$

יא. השלימו:  $x \notin A - B \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}}$ .

יב.  $(A \subseteq B \wedge A \subseteq C) \Leftrightarrow A \subseteq B \cap C$

יג.  $(A \subseteq B \vee A \subseteq C) \Leftrightarrow A \subseteq B \cup C$

יד. אם  $A = A \cup B$ , אז  $A \subseteq B$ .

טו. אם  $A = A \cup B$ , אז  $B \subseteq A$ .

טז. אם  $A = A \cap B$ , אז  $A \subseteq B$ .

יז. אם  $A = A \cap B$ , אז  $B \subseteq A$ .

יח. אם  $A \subseteq B$ , אז  $A = A \cup B$ .

יט. אם  $B \subseteq A$ , אז  $A = A \cup B$ .

כ. אם  $A \subseteq B$ , אז  $A = A \cap B$ .

כא. אם  $B \subseteq A$ , אז  $A = A \cap B$ .

(2) תהיינה  $A, B, C$  קבוצות.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם  $A = A - B$ , אז  $B = \emptyset$ .

ב. אם  $A = A - B$ , אז  $A \cap B = \emptyset$ .

ג. אם  $A = A \cup B$ , אז  $A \cap B = B$ .

ד. אם  $B = A \cup B$ , אז  $A \cap B = B$ .

ה. אם  $A \cap B = A$ , אז  $A = A \cup B$ .

ו. אם  $A \cap B = B$ , אז  $A = A \cup B$ .

ז. אם  $A \cup B = A \cup C$  וגם  $A \cap B = A \cap C$  אז  $B = C$ .

ח.  $A \cup (B - C) = (A \cup B) - C$

ט.  $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cap C)$

י.  $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$

יא.  $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

יב.  $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

יג.  $(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$

יד. להלן שתי טענות. הוכיחו את הנכונה והפריכו את השגויה:

1.  $A \cap B \cap C \subseteq A \oplus B \oplus C$

2.  $A \oplus B \oplus C \subseteq A \cap B \cap C$

## תשובות סופיות

- (1) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. נכונה.  
ו. לא נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.  
יא.  $x \in B \vee x \notin A$  יב. נכונה. יג. לא נכונה. יד. לא נכונה.  
טו. נכונה. טז. נכונה. יז. לא נכונה. יח. לא נכונה. יט. נכונה.  
כ. נכונה. כא. לא נכונה.
- (2) א. לא נכונה. ב. לא נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.  
ו. נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.  
יא. נכונה. יב. נכונה. יג. נכונה. יד. 1. נכונה. 2. לא נכונה.

## דרך השלילה

### שאלות

הוכיחו כל אחת מהטענות הבאות בדרך השלילה. במקום הטענה אם  $\alpha$ , אז  $\beta$ , נוכיח אם  $\neg\beta$ , אז  $\neg\alpha$ .

יש לזכור תמיד שלהנחת השלילה  $\neg\beta$  ולכל הנובע ממנה מתייחסים כנתון.

$$(1) \text{ אם } A \cap C = \emptyset, \text{ אז } A - (B - C) \subseteq (A - B) - C$$

$$(2) \text{ אם } A \subseteq B, \text{ אז } (A - C) \cup (C - B) \subseteq A \cap B$$

$$(3) \text{ אם } (A - C) \cap B = \emptyset, \text{ אז } (A \cup B) - C \subseteq A - B$$

$$(4) \text{ אם } B \subseteq A, \text{ אז } (C - A) \cup (B - C) \subseteq A - B$$

$$(5) \text{ אם } A \subseteq A \Delta B \text{ וגם } B - C = B \Delta C, \text{ אז } A \cap C = \emptyset$$

$$(6) \text{ אם } A \subseteq A \oplus B \text{ וגם } B - C = B \oplus C, \text{ אז } A \cap C = \emptyset$$

### תשובות סופיות

(1) הוכחה.

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

(4) הוכחה.

(5) הוכחה.

(6) הוכחה.

## קבוצת חזקה

### שאלות

(1) עבור  $A = \{3, \{\emptyset\}\}$ ,  $B = \{\{3\}, \{4, \emptyset\}\}$ ,  $C = \{3, \{3\}, \{\emptyset, 3\}\}$

רשמו את הקבוצות הבאות:

א. את  $P(C)$ ,  $P(B)$  ואת  $P(A)$ .

ב.  $P(A) \cap B$ ,  $P(A) \cap A$ ,  $P(C) \cap C$  ואת  $C - P(C)$ .

(2) עבור הקבוצות  $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ,  $B = \{1, \emptyset\}$

א. רשמו את  $P(A)$  ואת  $P(B)$ .

ב. רשמו את  $P(A) - P(B)$  ואת  $P(B) - P(A)$ .

ג.  $P(A) - A$  ואת  $P(A) - \{A\}$ .

(3) רשמו את  $P(\emptyset)$ , את  $P(P(\emptyset))$  ואת  $P(P(P(\emptyset)))$ .

(4) תהיינה  $A, B$  שתי קבוצות. הוכיחו או הפריכו:

א.  $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$

ב.  $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

ג.  $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

ד.  $P(A) \cap A \neq \emptyset$

ה.  $P(A) \cap A = \emptyset$

ו. תנו דוגמה לקבוצה  $A$  שמקיימת  $A \cap P(A) \cap P(P(A)) \neq \emptyset$ .

ז. אם  $\{A\} \subseteq P(B)$ , אז  $P(A) \subseteq P(B)$ .

את שתי הטענות הבאות הוכיחו בדרך השלילה:

ח. אם  $P(A) \subseteq P(A - B)$ , אז  $A \cap B = \emptyset$ .

ט. אם  $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ , אז  $(A \subseteq B) \vee (B \subseteq A)$  (שאלה קשה).

(5) תהיינה  $A, B, C$  קבוצות כלשהן, ונתון  $P(B) - P(A) = P(B) - \{\emptyset\}$ .

הוכיחו כי  $B - A = B$ .

## תשובות סופיות

- (1) א.  $P(B) = \{\emptyset, \{\{3\}\}, \{\{4, \emptyset\}\}, \{\{3, \{4, \emptyset\}\}\}$  ,  $P(A) = \{\emptyset, \{3\}, \{\{\emptyset\}\}, \{3, \{\emptyset\}\}$   
 .  $P(C) = \{\emptyset, \{3\}, \{\{3\}\}, \{\{\emptyset, 3\}\}, \{3, \{3\}\}, \{3, \{\emptyset, 3\}\}, \{\{3\}, \{\emptyset, 3\}\}, \{3, \{3\}, \{\emptyset, 3\}\}$   
 ב.  $C - P(C) = \{3, \{\emptyset, 3\}\}$  ,  $P(C) \cap C = \{\{3\}\}$  ,  $P(A) \cap A = \emptyset$  ,  $P(A) \cap B = \{\{3\}\}$
- (2) א.  $P(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{\emptyset\}, \{1, \emptyset\}\}$  ,  $P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$   
 ב.  $P(B) - P(A) = \{\{1\}, \{1, \emptyset\}\}$  ,  $P(A) - P(B) = \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$   
 ג.  $P(A) - \{A\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$  ,  $P(A) - A = \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
- (3) .  $P(P(P(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$  ,  $P(P(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$  ,  $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- (4) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.  
 ו. ראו סרטון. ז. נכונה. ח. הוכחה. ט. הוכחה.
- (5) הוכחה.

## קריאת קבוצות

### שאלות

(1) עבור  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ , רשמו בשתי דרכים את הקבוצות הבאות:

א. קבוצת המספרים טבעיים האי זוגיים,  $\mathbb{N}_{odd} = \{1, 3, 5, \dots\}$ .

ב. קבוצת כל הטבעיים שיש להם שורש ריבועי,  $A = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots\}$ .

ג. קבוצת כל הטבעיים שאין להם שורש ריבועי,

$B = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, \dots\}$ .

ד. קבוצת כל השורשים של מספרים טבעיים,

$C = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \dots\}$ .

ה. קבוצת כל החזקות של 2,

$D = \{2^1, 2^2, 2^3, \dots\} = \{2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$ .

(2) עבור  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ , חשבו את הקבוצות הבאות:

א.  $C = \{3n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

ב.  $K = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \geq 2 \rightarrow x^2 > 41\}$ .

ג.  $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \geq 7 \rightarrow x < 20\}$ .

ד.  $C = \{3n - 1 \mid n \in \mathbb{N} \wedge \sqrt{n} \in \mathbb{N}\} = \{3n - 1 \mid \sqrt{n} \in \mathbb{N}\}$ .

ה.  $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 8 \rightarrow x^2 < 67\}$ .

## תשובות סופיות

- (1) א. דרך 1:  $\left\{n \in \mathbb{N} \mid \frac{n+1}{2} \in \mathbb{N}\right\}$ , דרך 2:  $\{2n-1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ .
- ב. דרך 1:  $\{n \in \mathbb{N} \mid \sqrt{n} \in \mathbb{N}\}$ , דרך 2:  $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ .
- ג. דרך 1:  $\{n \in \mathbb{N} \mid \sqrt{n} \notin \mathbb{N}\}$ , דרך 2:  $\{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge \forall k \in \mathbb{N} n \neq k^2\}$ .
- ד. דרך 2:  $\{\sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ .
- ה. דרך 1:  $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} n = 2^k\}$ , דרך 2:  $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .
- (2) א.  $C = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, \dots\}$
- ב.  $\mathbb{Z} - \{\pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \dots\}$
- ג.  $\mathbb{Z} - \{20, 21, 22, 23, \dots\}$
- ד.  $\{2, 11, 26, 74, 107, 146, \dots\}$
- ה.  $\mathbb{Z} - \{9, 10, 11, 12, \dots\}$

## מכפלה קרטזית

### שאלות

(1) תהיינה  $A, B, C$  קבוצות. הוכיחו:

א.  $(A = B) \Leftrightarrow (A \times A = B \times B)$

ב.  $((B = \emptyset) \vee (A = \emptyset) \vee (A = B)) \Leftrightarrow (A \times B = B \times A)$

ג. הוכיחו כי לכל ארבע קבוצות  $A, B, C, D$  מתקיים

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

ד. אם  $((A \times A) \cup (B \times B) = (C \times C))$ , אז

$$(((B \subseteq A) \vee (A \subseteq B)) \wedge (A \cup B \subseteq C))$$

ה. הוכיחו כי לכל ארבע קבוצות  $A, B, C, D$  מתקיים

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$$

(2) הוכיחו או הפריכו:

תהיינה  $A, B$  שתי קבוצות כלשהן ותהי  $S \subseteq A \times B$ .

אז קיימות  $C \subseteq A$  ו- $D \subseteq B$ , כך ש- $S = C \times D$ .

(3) הוכיחו או הפריכו:

קיימות שתי קבוצות  $A, B$ , כך ש- $|A \times B| = 24$  וגם  $|A \cap B| = 5$  (סימן  $||$  על קבוצה מסמן את מספר אבריה).

(4) הוכיחו או הפריכו:

לכל שלוש קבוצות  $A, B, C$  מתקיים  $A \times (B \oplus C) = (A \times B) \oplus (A \times C)$ .

(5) הדגימו שלוש קבוצות  $A, B, C$ , כך ש- $(A \times (B \times C)) \cap ((A \times B) \times C) \neq \emptyset$ .

**תשובות סופיות**

- (1) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה. ה. הוכחה.
- (2) לא נכונה.
- (3) לא נכונה.
- (4) נכונה.
- (5) ראו סרטון.

# מתמטיקה למחצית ב

פרק 3 - לוגיקה

תוכן העניינים

25	1. מבוא
(ללא ספר)	2. הקשרים
26	3. טאוטולוגיה, סתירה ומושגים נוספים
31	4. צורות נורמליות
32	5. קבוצת קשרים שלמה
(ללא ספר)	6. חוקי דה מורגן
33	7. תחשיב הפרדיקטים
37	8. תרגול בשיטות ההוכחה השונות

## מבוא

## שאלות

- 1 קבעו בכל אחד מהסעיפים האם נכון או לא נכון:
- הביטוי "בני ישראל הלכו במדבר ארבעים שנה" הוא פסוק.
  - הביטוי "ארבעים שנה" הוא פסוק.
  - שלילת הפסוק "האריה טרף את הצבי" היא "הצבי טרף את האריה".
  - הפסוק "1+1=2 או 2=3" הוא פסוק אמת.
  - הפסוק "1+1=2 וגם 2=3" הוא פסוק אמת.
  - הפסוק "אם 1+1=2 אז 2=3" הוא פסוק אמת.
  - הפסוק "אם 2=3 אז 1+1=2" הוא פסוק אמת.
  - הפסוק "אם 2=3 אז 1+1≠2" הוא פסוק אמת.
  - שלילת הפסוק "a≠4 וגם b≠3" היא "a+b=7 או ab=12".
  - שלילת הפסוק "a≠4 או b≠3" היא "a+b=7 וגם ab=12".
  - שלילת הפסוק "a∈{3,4} או b∈{3,4}" היא "a+b=7 וגם ab=12".

- 2 רשמו את טבלאות האמת של הפסוקים הבאים:

א.  $(p \wedge q) \vee \neg r$

ב.  $\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg r)$

ג.  $(p \wedge \neg q) \vee r$

ד.  $(p \vee q) \rightarrow (q \rightarrow r)$

- 3 בטאו את שלילת הפסוקים הבאים (בלי קשר לנכונותם):

א. דוד יפה או ראובן מכוער.

ב. האוכל חם וטעים.

ג. לכל x קיים y, שהוא השורש הריבועי של x.

ד. כל תרנגולת כחולה עוזבת את הלול כדי להטיל ביצים.

ה. כל פנתר שהוא ורוד משחק בסרטים מצוירים.

ו. כל פנתר שהוא ורוד קוראים לו יוסי או שהוא משחק בסרטים מצוירים.

ז. כל פנתר שהוא ורוד קוראים לו יוסי וגם הוא משחק בסרטים מצוירים.

ח. לכל נגר קיים אדם שכל רהיטיו יוצרו בידי נגר זה.

ט. אם יהיה יום יפה וגם יהיה לי מצב רוח טוב אז אצא לטיול.

י. אם יהיה יום יפה אז אם יהיה לי מצב רוח טוב אז אצא לטיול.

## טאוטולוגיה, סתירה ומושגים נוספים

### שאלות

1) בדקו אילו מזוגות הפסוקים הבאים שקולים לוגית. במקרה שהתשובה חיובית, הראו זאת הן בעזרת טבלת אמת והן בעזרת עץ שקר.

$$\text{א. } \neg(p \rightarrow q) \quad p \wedge (\neg q)$$

$$\text{ב. } (\neg p) \rightarrow q \quad p \vee (\neg q)$$

$$\text{ג. } p \rightarrow (\neg q) \quad \neg(p \wedge q)$$

$$\text{ד. } (p \vee q) \wedge (\neg q) \quad p \wedge (\neg q)$$

$$\text{ה. } p \leftrightarrow q \quad (p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))$$

$$\text{ו. } p \vee u \quad (s \rightarrow (p \wedge (\neg r))) \wedge ((p \rightarrow (r \vee q)) \wedge s)$$

ז. הראו כי  $\neg(r \wedge (p \vee q)) \equiv ((\neg p) \wedge (\neg q)) \vee \neg r$ , בעזרת זהויות יסוד.

2) יהיו  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$  הפסוקים:

$$\alpha_1 : (A \vee B) \rightarrow (D \rightarrow C)$$

$$\alpha_2 : B \rightarrow \neg(C \wedge A)$$

$$\alpha_3 : C \leftrightarrow (A \wedge D)$$

$$\beta : D \vee (B \wedge C)$$

בדקו אלו מהטענות הבאות נכונות והוכיחו:

$$\text{א. } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \Rightarrow \beta$$

ב.  $\beta$  אינה נובעת טאוטולוגית מהפסוקים  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , אך מתיישבת אתם.

ג.  $\beta$  אינה מתיישבת עם הפסוקים  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , כלומר סותרת אתם.

3 הוכיחו כי הפסוקים הבאים הינם טאוטולוגיות, ללא שימוש בטבלת אמת:

א.  $p \vee (\neg p)$

ב.  $p \vee (p \rightarrow q)$

ג.  $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)$

ד.  $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$

ה.  $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

ו.  $((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$

ז.  $(q \vee p \vee r) \rightarrow ((\neg p) \rightarrow ((q \vee r) \wedge (\neg p)))$

ח.  $((B \rightarrow (C \wedge (\sim A))) \wedge ((\sim B) \vee C) \rightarrow D) \wedge (E \rightarrow (\sim D)) \rightarrow (A \rightarrow \sim E)$

ט. הוכיחו בעזרת טבלת אמת ש- $(u \rightarrow v) \leftrightarrow ((\neg v) \rightarrow (\neg u))$  טאוטולוגיה.

י. הוכיחו כי הפסוק הבא הוא טאוטולוגיה (מותר להסתמך על סעיף ט):

$$((u \rightarrow v) \leftrightarrow ((\neg v) \rightarrow (\neg u))) \rightarrow (((p \rightarrow r) \wedge ((\neg q) \rightarrow p) \wedge (\neg r)) \rightarrow q)$$

4 בארץ חלם מתקיימת שביתת רופאים במטרה להגדיל את תקציב הבריאות. להלן ניתוח המצב:

\* אם הרופאים לא יסיימו את השביתה אז הנהלות בתי החולים יתערבו.

\* אם לא תיפגע בריאותם של החולים אז הממשלה לא תגדיל את הקציב.

\* אם הנהלות בתי החולים יתערבו אז לא תפגע בריאותם של החולים או שבית המשפט יתערב.

\* בית המשפט לא יתערב וגם הממשלה לא תגדיל את התקציב.

מסקנה: הרופאים יסיימו את השביתה.

נסמן:  $D$  – הרופאים יסיימו את השביתה,  $H$  – הנהלות בתי החולים יתערבו,

$P$  – בית המשפט יתערב,  $C$  – לא תפגע בריאותם של החולים,  $M$  – הממשלה

תגדיל את התקציב.

א. הצרינו את הטיעון לשפת תחשיב הפסוקים בעזרת המשתנים המוצעים.

ב. בדקו, ללא שימוש בטבלת אמת, אם הטיעון תקף.

- 5) בארץ חלם מתקיימות בחירות. זרובבל, כתבנו לענייני מפלגות, מנתח את המצב:
- \* אם אבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב את דני יפרוש.
  - \* אם שמעון יציע לדני תפקיד אז דני יפרוש.
  - \* אם בני ייבחר לראשות מפלגת פיתה אז שמעון יציע לדני תפקיד או שאבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב.
  - \* בני יבחר לראשות מפלגת פיתה.
  - לכן, כתבנו מסיק שדני יפרוש.
- נסמן:  $A$  – אבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב,  $B$  – בני יבחר לראשות מפלגת פיתה,  $C$  – שמעון יציע לדני תפקיד,  $D$  – דני יפרוש. הצרינו את הטענה לשפת תחשיב הפסוקים והוכיחו כי המסקנה תקפה.
- 6) בפרס העתיקה מחליט היזם וייזתא לבנות תיאטרון. אם נרצה שהתיאטרון נגיש לתושבים אז נצטרך להקימו בלב העיר. אם נרצה שהתיאטרון יהיה רווחי, אז הוא יצטרך להיות גדול ומרווח כדי שיכיל הרבה אנשים. אבל אם התיאטרון יהיה גדול ומרווח ויבנה בלב העיר, אז הוא יעלה 10 מיליון זוזים פרסיים. אבל לויזתא היזם אין 10 מיליון זוזים פרסיים. לכן, וייזתא היזם מסיק כי התיאטרון יוקם במקום לא נגיש לתושבים או שלא יהיה גדול ומרווח.
- א. תרגמו את ניתוח המצב לשפת הפסוקים, תוך שימוש בסימונים הבאים:
- $N$  – נגיש לתושבים,  $L$  – בלב העיר,  $Y$  – יכיל הרבה אנשים,  $G$  – גדול ומרווח,  $M$  – מחירו יעלה על...,  $R$  – רווחי.
- ב. הצרינו את ההנחות והמסקנה לשפת הפסוקים ובדקו האם המסקנה תקפה, ללא שימוש בטבלת אמת.
- 7) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות (כאשר  $p, q, r$  פסוקים אטומים):
- א.  $(p \vee q) \Rightarrow p$
  - ב.  $(p \vee q) \Rightarrow q$
  - ג.  $(p \rightarrow q) \Rightarrow q$
  - ד.  $p, p \rightarrow q \Rightarrow q$
  - ה.  $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge p \Rightarrow r$
  - ו.  $r \Rightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge p$
  - ז.  $A \rightarrow B, C \rightarrow B, D \rightarrow (A \vee C), D \Rightarrow B$
  - ח.  $(A \vee B \rightarrow D), D \rightarrow (C \vee P), P \rightarrow Q, (\neg C) \wedge (\neg Q) \Rightarrow \neg A$
  - ט.  $(B \rightarrow (C \wedge (\sim A))), (((\sim B) \vee C) \rightarrow D), (E \rightarrow (\sim D)) \models (A \rightarrow \sim E)$

8 נתון כי  $\alpha, \beta, \gamma$  פסוקים לאו דווקא אטומים.

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם  $\alpha$  סתירה וגם  $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$ , אז  $\beta \Rightarrow \neg \gamma$ .

ב. אם  $\alpha$  טאוטולוגיה וגם  $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$ , אז  $\neg \beta \Rightarrow \gamma$ .

ג. אם  $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$ , אז  $((\alpha \Rightarrow \beta) \vee (\alpha \Rightarrow \gamma))$ .

ד. אם  $((\alpha \Rightarrow \beta) \vee (\alpha \Rightarrow \gamma))$ , אז  $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$ .

ה. אם  $\alpha \Rightarrow \beta \wedge \gamma$ , אז  $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma))$ .

ו. אם  $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma))$ , אז  $\alpha \Rightarrow \beta \wedge \gamma$ .

ז. אם  $\alpha \Rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ , אז  $(\alpha \rightarrow \beta) \Rightarrow \gamma$ .

ח. אם  $(\alpha \rightarrow \beta) \Rightarrow \gamma$ , אז  $\alpha \Rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ .

ט. אם  $\alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma$ , אז  $(\alpha \Rightarrow \gamma) \vee (\beta \Rightarrow \gamma)$ .

י. אם  $(\alpha \Rightarrow \gamma) \vee (\beta \Rightarrow \gamma)$ , אז  $\alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma$ .

יא. אם  $\alpha \models \beta \rightarrow \gamma$ , אז  $\alpha, \beta \models \gamma$ .

יב. אם  $\alpha \models \beta \rightarrow \gamma$ , אז  $\alpha \vee \beta \models \gamma$ .

9 עבור  $\alpha$ , פסוק אטומי או מורכב, נגדיר את הקבוצה  $F_\alpha = \{\gamma \mid \alpha \Rightarrow \gamma\}$ .

כלומר,  $F_\alpha$  היא קבוצת כל הפסוקים שנובעים טאוטולוגית מהפסוק  $\alpha$ .

הוכיחו כי  $\alpha \equiv \beta$  אם ורק אם  $F_\alpha = F_\beta$ .

10 הוכיחו כי ההנחה  $A$  גוררת טאוטולוגית את המסקנה  $\neg(\neg A)$ ,

בעזרת כללי ההיסק הבאים:

$$1. \Rightarrow p \rightarrow p$$

$$2. p \Rightarrow q \rightarrow p$$

$$3. p \rightarrow q, p \rightarrow (\neg q) \Rightarrow \neg p$$

11) הוכיחו שההנחות הבאות גוררות טאוטולוגית את המסקנה  $A$

$$B \vee D$$

$$C \rightarrow B$$

$$D \rightarrow (A \vee C)$$

$$\neg B$$

מותר להשתמש רק בכללי ההיסק הבאים:

$$P \Rightarrow Q \vee P$$

$$P \wedge Q \Rightarrow P$$

$$P \wedge Q \Rightarrow Q$$

$$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$$

$$P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$$

$$\neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$$

$$P \Rightarrow \neg \neg P$$

$$P \rightarrow Q \Rightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$$

## צורות נורמליות

### שאלות

1) בסעיפים הבאים רשמו צורה דיסיונקטיבית-נורמלית (DNF) וצורה קוניונקטיבית-נורמלית (CNF) של הפסוקים:

א.  $p \rightarrow q$

ב.  $(p \vee q) \wedge \neg r$

ג.  $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow \neg q)$

## קבוצת קשרים שלמה

## שאלות

1) הביעו את הקשרים הבאים:

- א. קשר הגרירה בעזרת קבוצת הקשרים  $\{\wedge, \neg\}$ .
- ב. קשר ה- $\vee$  בעזרת קבוצת הקשרים  $\{\wedge, \neg\}$ .
- ג. קשר ה- $\oplus$  (XOR) בעזרת קבוצת הקשרים  $\{\wedge, \neg\}$ .
- ד. קשר ה- $\leftrightarrow$  בעזרת קבוצת הקשרים  $\{\wedge, \neg\}$ .
- ה. קשר הגרירה בעזרת קבוצת הקשרים  $\{\vee, \neg\}$ .
- ו. הקשר  $\wedge$  בעזרת קבוצת הקשרים  $\{\vee, \neg\}$ .
- ז. קשר ה- $\oplus$  (XOR) בעזרת קבוצת הקשרים  $\{\vee, \neg\}$ .
- ח. קשר ה- $\leftrightarrow$  בעזרת קבוצת הקשרים  $\{\vee, \neg\}$ .
- ט. הוכיחו כי הקבוצה  $\{\downarrow\}$  היא קבוצת קשרים שלמה.
- י. נתון  $f$  קשר טרינארי המוגדר כך:  $f(x, y, z) = x \rightarrow \neg(y \rightarrow z)$ . הוכיחו כי  $\{f\}$  היא קבוצת קשרים שלמה.
- יא. הביעו את הקשר  $f(x, y, z) = x \rightarrow \neg(y \rightarrow z)$  באמצעות  $\downarrow$  בלבד.
- יב. הביעו את הקשר  $f(x, y, z) = x \rightarrow \neg(y \rightarrow z)$  באמצעות  $\downarrow$  בלבד.

## תחשיב הפרדיקטים

### שאלות

1) לכל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה ורשמו את שלילתה ללא שימוש בקשר השלילה. במקרה שהטענה נכונה נמקו זאת, ובמקרה שהטענה אינה נכונה הביאו דוגמה נגדית.

א.  $\forall x \in \mathbb{N} (\exists y \in \mathbb{N} (x < y))$

ב.  $\forall x \in \mathbb{N} (\exists y \in \mathbb{N} (x > y))$

ג.  $\forall x, y \in \mathbb{R} (x > y) \rightarrow \exists z \in \mathbb{R} (x > y + z)$

ד.  $\forall x \in \mathbb{R} (x > 0) \rightarrow (\exists n \in \mathbb{N} (x > \frac{1}{n}))$

ה.  $\forall x \in \mathbb{R} (x \neq 0 \rightarrow \forall y \in \mathbb{Z} \exists z \in \mathbb{R} (xz = y))$

ו.  $\forall x \in \mathbb{N} (x \geq 1 \rightarrow \forall y \in \mathbb{N} \exists z \in \mathbb{N} (xz = y))$

ז.  $\forall x \in \mathbb{R} (x > 0 \rightarrow \exists y \in \mathbb{N} (xy > 1))$

ח.  $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} (xy = x \wedge x + y < 5) \rightarrow y < 4\frac{1}{2}$

ט.  $\forall x \in \mathbb{R} ((x > 0) \rightarrow \forall y \in \mathbb{R} (\exists n \in \mathbb{N} (nx > y)))$

2) הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות, ורשמו את השלילה של כל טענה, כאשר הקשר  $\neg$  מופיע רק לצד פרדיקטים. במקרה של הפרכה הדגימו עולם דיון מתאים עבורו הטענה לא מתקיימת, והסבירו מדוע הטענה לא מתקיימת.

א.  $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$

ב.  $\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$

ג.  $(\forall x (P(x) \wedge Q(x))) \rightarrow (\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x))$

ד.  $(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \rightarrow (\forall x (P(x) \wedge Q(x)))$

ה.  $(\forall x (P(x) \vee Q(x))) \rightarrow (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$

ו.  $(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \rightarrow (\forall x (P(x) \vee Q(x)))$

ז.  $(\exists x (P(x) \wedge Q(x))) \rightarrow (\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x))$

ח.  $(\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)) \rightarrow (\exists x (P(x) \wedge Q(x)))$

ט.  $(\exists x (P(x) \vee Q(x))) \rightarrow (\exists x P(x) \vee \exists x Q(x))$

י.  $(\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)) \rightarrow (\exists x (P(x) \vee Q(x)))$

$$P(x): x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$Q(x): x \text{ is odd}$$

$$R(x): x > 0$$

$$L(x): x^2 + 2x + 2 = 0$$

(3) בעולם הדין  $\mathbb{Z}$ , נסמן

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א.  $\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)]$

ב.  $\forall x [Q(x) \rightarrow P(x)]$

ג.  $\exists x [P(x) \rightarrow Q(x)]$

ד.  $\exists x [Q(x) \rightarrow P(x)]$

ה.  $\forall x [L(x) \rightarrow Q(x)]$

ו.  $\exists x [L(x) \rightarrow Q(x)]$

ז.  $\exists x [R(x) \rightarrow P(x)]$

ח.  $\forall x (\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x))$

ט.  $\forall x [(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow R(x)]$

י.  $\exists x [P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x))]$

יא.  $\forall x [P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x))]$

נפנה עתה למספר שאלות בהצרנות. מותר להשתמש בסימני המשתנים  $x, y, z$ , סימני הקבוצה  $A, B, C, \dots, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ , סוגריים, קשרים, כמתים, הפרדיקטים  $(, \exists, \forall, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, <, >$ , וכן סימנים נוספים הנתונים בגף השאלה.

**שימו לב: אסור להשתמש בקשר השלילה ואין להשתמש בסימן  $\notin$ .**

4) הצרינו כל אחת מהטענות הבאות:

- א. לכל מספר ממשי אין עוקב מידי (כלומר, שאין מספר ראשון מיד אחריו).
- ב. אין קבוצה שמכילה את כל הקבוצות (מותר להשתמש בסימן  $\notin$ ).
- ג. לכל מספר שאינו ראשוני יש לפחות שני מחלקים שונים.  
(מותר להשתמש ב- $P$  עבור קבוצת המספרים הראשוניים וב- $\notin$ )
- ד. למספר הטבעי הכי גדול אין מחלקים (ברור שאין, אבל צריך להצריך).
- ה. לא כל מספר טבעי הוא ראשוני.
- ו. כל קבוצה אינה שקולה לקבוצת החזקה שלה.
- ז. לכל שני מספרים טבעיים שונים יש מחלק משותף.
- ח. בכל קבוצה בת לפחות שלושה איברים שונים אין איבר מקסימלי.
- ט. לא בכל תת קבוצה של ממשיים יש איבר מינימלי.
- י. תהי פונקציה  $f: X \rightarrow Y$ .

נגדיר את הפונקציה  $G: P(X) \rightarrow P(Y)$  כך:  $G(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ .

הצרינו את הטענה: אם  $f$  על אז  $G$  ח.ח.ע.

השתמשו רק בסימנים הבאים:

סימני המשתנים  $x, y, B, C$ , סימני הקבוצות  $X, Y$ , סימן הפונקציה  $f$ , סוגריים, קשרים, כמתים ופרדיקטים.  
שימו לב: אסור להשתמש בסימנים  $G$  ו- $P$ . יש להשתמש בהגדרותיהם כדי להחליפם בסימנים אחרים.

יא. לכל מספר ממשי יש לכל היותר שני מספרים ממשיים שונים זה מזה שריבועם שווה לו.

יב. הצרינו את הטענה: לכל פונקציה  $f: A \rightarrow B$  ולכל פונקציה  $g: B \rightarrow A$ , אם  $g \circ f = Id_A$ , אז  $f$  היא על.

מותר להשתמש בסימנים הבאים ורק בהם: סימני המשתנים  $x_1, x_2, \dots$ ,

קשרים  $\rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee$ , והסימנים  $\exists, \forall, (, ), \in, A^B, B^A, f, g$ .

למען הסר ספק: אסור להשתמש ב- $d_A$  וב- $\circ$ .

יג. מספר ראשוני הוא מספר טבעי גדול מאחד שמחלקיו היחידים הם הוא עצמו ו-1. הצרינו את הטענה הבאה:

לכל מספר טבעי, בתחום שבין המספר עצמו לפעמיים המספר (כולל קצוות) יש לפחות מספר ראשוני אחד.

מותר להשתמש אך ורק בסימנים הבאים: סימני המשתנים  $x_1, x_2, \dots$ ,

הקשרים  $\leftrightarrow, \Leftrightarrow, \wedge, \vee$  והסימנים  $\exists, \forall, (, \in, \mathbb{N}, \leq, 1, 2, 3, \dots, =, |$  פירושו מחלק.

יז. הצרינו את הטענה הבאה: בקבוצה  $A$  יש לכל היותר שני מספרים טבעיים.

השתמשו רק בסימנים הבאים: סימני המשתנים  $x, y, z$ , סימני הקבוצות  $A, \mathbb{N}$  וכן סוגריים, קשרים, כמתים, ופרדיקטים.

טו. הצרינו את הטענה: לא תמיד נכון שאם  $A \subseteq B$  אז  $A \sim B$ . מותר להשתמש רק בסימנים הבאים: סימני הקבוצות  $A, B$  (מותר לצרף אותם לקבוצה בחזקת קבוצה), סוגריים, קשרים, כמתים, ופרדיקטים. אין להשתמש בקשר השלילה.

טז. הצרינו את הטענה הבאה: קבוצת הפונקציות החח"ע מהממשיים לטבעיים אינה ריקה.

השתמשו רק בסימנים הבאים: סימני המשתנים  $x, y$ , סימני הקבוצות  $\mathbb{R}, \mathbb{N}$  (וצירופי חזקות שלהן), סימני הפונקציות  $f, g$ , סוגריים, קשרים, וכמתים:  $\exists, \forall, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (, \{, \}, \in, \neq, =$ .

יז. הצרינו את כלל הכפל של אי-שוויון ממשי (קטן או שווה) במספר ממשי שונה מאפס.

מותר להשתמש אך ורק בסימנים הבאים: סימני המשתנים  $x_1, x_2, \dots$ , הקשרים  $\leftrightarrow, \Leftrightarrow, \wedge, \vee$  והסימנים  $\forall, (, \in, \mathbb{R}, \leq, 0$ .

דוגמה לכלל הזה היא: מאי השוויון  $3.14 \leq \pi$  (על ידי כפל במינוס חצי) לקבל את אי השוויון  $-0.5\pi \leq -1.57$ .

$$(5) \quad \{x \in \mathbb{R} \mid \forall y \left[ (y \in \{t \in \mathbb{N} \mid t > 3\} \rightarrow (y > x)) \right]\}$$

כתבו אותה בצורה  $\{x \in \mathbb{R} \mid \dots\}$ , כך שבאגף ימין לא יופיע אף משתנה חוץ מ- $x$ .

(6) תארו במדויק את הקבוצה:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{N} (x = y^2) \rightarrow (x > 2)\} - \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1\}$$

## תרגול בשיטות ההוכחה השונות

### שאלות

#### (1) הוכיחו:

- אם  $m, n \in \mathbb{Z}$  מספרים עוקבים, אז  $m+n$  אי-זוגי.
  - אם  $m, n \in \mathbb{Z}$  מספרים עוקבים, אז  $mn$  זוגי.
  - אם  $m, n \in \mathbb{Z}$  מספרים אי-זוגיים, אז  $m+n$  זוגי.
  - אם  $n \in \mathbb{N}$  אי-זוגי, אז קיימים  $m, k \in \mathbb{N}$  כך ש- $m^2 - k^2 = n$ .
- רמז: חפשו  $m, k \in \mathbb{N}$  עוקבים.
- אם  $a, b, c \in \mathbb{N}$  וגם  $a|b$  וגם  $a|c$  אז  $a|b+c$ .

#### (2) הוכיחו:

- קיימים אינסוף מספרים ראשוניים (נסו בצורה ישירה ועל דרך השלילה).
  - קיימים  $x, y \notin \mathbb{Q}$  כך ש- $x^y \in \mathbb{Q}$ .
  - יש אינסוף שלשות פיתגוריות.
- כלומר, יש אינסוף פתרונות בשלמים למשוואה  $x^2 + y^2 = z^2$ .
- לכל  $n \in \mathbb{N}$  קיים רצף של  $n$  מספרים טבעיים עוקבים, שאף אחד מהם אינו ראשוני.

#### (3) הוכיחו בדרך השלילה:

- שלא קיים טבעי הכי גדול.
- שלכל מספר טבעי קיים מספר טבעי גדול ממנו.
- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .
- שלא קיימים  $p, t \in \mathbb{Q}$  כך ש- $p-t \notin \mathbb{Q}$ .
- שלא קיימים  $p \in \mathbb{Q}, r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  כך ש- $p+r \in \mathbb{Q}$ .
- שלא קיים  $q \in \{x | 0 < x \in \mathbb{Q}\}$  כך ש- $q = \min \{x | 0 < x \in \mathbb{Q}\}$ .
- שלכל  $q \in \{x | 0 < x \in \mathbb{Q}\}$  מתקיים  $q \neq \min \{x | 0 < x \in \mathbb{Q}\}$ .

4 הוכיחו בקונטרה-פוזיציה :

- א. אם  $n \in \mathbb{N}$ , כך ש- $n^2$  זוגי, אז  $n$  זוגי.  
 ב. אם  $m, n \in \mathbb{Z}$  מספרים, כך ש- $m$  זוגי, אז  $n$  זוגי או  $m$  זוגי.  
 ג. אם  $m, n \in \mathbb{Z}$  מספרים, כך ש- $m$  אי-זוגי, אז  $n$  אי-זוגי וגם  $m$  אי-זוגי.  
 ד. אם  $x, y \in \mathbb{R}$ , כך ש- $x+y$  אי-רציונלי, אז לפחות אחד מהמספרים  $x, y$  הוא אי-רציונלי.  
 ה. אם  $A, B$  קבוצות ו- $x$  איבר, כך שמתקיים  $x \notin A \cap B$ , אז  $x \notin A$  או  $x \notin B$ .  
 ו. אם  $A, B$  קבוצות ו- $x$  איבר, כך שמתקיים  $x \notin A \cup B$ , אז  $x \notin A$  וגם  $x \notin B$ .  
 ז. אם  $A, B$  קבוצות ו- $x$  איבר, כך שמתקיים  $x \notin A$ , אז  $x \notin A \cap B$ .  
 ח. אם  $A - (B - C) \subseteq (A - B) - C$ , אז  $A \cap C = \emptyset$ .  
 ט. אם  $(A \cup B) - C \subseteq A - B$ , אז  $A(-C) \cap B = \emptyset$ .  
 י. אם  $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ , אז  $(A \subseteq B) \vee (B \subseteq A)$ .

5 ענו על הסעיפים הבאים :

- א. הוכיחו, תוך הפרדה למקרים, שאם  $z \in \mathbb{Z}$ , כך ש- $z$  לא מתחלק ב-3, אז  $z^2 = 1 \pmod{3}$ .  
 ב. הוכיחו או הפריכו:  
 אם  $z \in \mathbb{Z}$ , כך ש- $z$  לא מתחלק ב-4, אז  $z^2$  לא מתחלק ב-4.

6 הוכיחו בדרך השלילה :

- א. אם  $n \in \mathbb{N}$ , כך ש- $n \pmod{3} = 2$ , אז  $n$  הוא לא ריבוע של אף מספר טבעי.  
 ב. אם  $(A - C) \cup (C - B) \subseteq A \cap B$ , אז  $A \subseteq B$ .  
 ג. אם  $(C - A) \cup (B - C) \subseteq A - B$ , אז  $B \subseteq A$ .

# מתמטיקה למחצית ב

## פרק 4 - קומבינטוריקה

### תוכן העניינים

39	1. בעיות בסיסיות בהסתברות.
43	2. פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד) מאורעות זרים ומכילים.
52	3. כלל המכפלה.
56	4. תמורה - סידור עצמים בשורה.
59	5. תמורה עם עצמים זהים.
61	6. דגימה ללא סדר וללא החזרה.
64	7. דגימה ללא סדר ועם החזרה.
68	8. דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה.
70	9. סידור עצמים במעגל.
73	10. שאלות מסכמות.

## הגדרות יסודיות:

### רקע:

**ניסוי מקרי:** תהליך לו כמה תוצאות אפשריות. התוצאה המתקבלת נודעת רק לאחר ביצוע התהליך. למשל: תוצאה בהטלת קובייה, מזג האוויר בעוד שבועיים.

**מרחב מדגם:** כלל התוצאות האפשריות בניסוי המקרי. לדוגמה, בהטלת קובייה:  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , או: מזג האוויר בעוד שבועיים:  $\{\text{נאה, שרבי, מושלג, גשום, מעונן חלקית, אביד}\}$ .

**מאורע:** תת קבוצה מתוך מרחב במדגם. מסומן באותיות:  $A, B, C$ . בהטלת קובייה למשל, המאורע 'לקבל לפחות 5' יסומן:  $A = \{5, 6\}$ . המאורע 'לקבל תוצאה זוגית' יסומן:  $B = \{2, 4, 6\}$ .

**גודל מרחב המדגם:** מספר התוצאות האפשריות במרחב המדגם. בהטלת קובייה למשל נקבל:  $|\Omega| = 6$ .

**גודל המאורע:** מספר התוצאות האפשריות במאורע עצמו. למשל, בהטלת הקובייה האירועים הקודמים יסומנו:  $|A| = 2, |B| = 3$ .

**מאורע משלים:** מאורע המכיל את כל התוצאות האפשריות במרחב המדגם פרט לתוצאות במאורע אותו הוא משלים. למשל, בהטלת הקובייה:  $\bar{A} = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\bar{B} = \{1, 3, 5\}$ .

**מרחב מדגם אחיד (סימטרי):** מרחב מדגם בו לכל התוצאות במרחב המדגם יש את אותה עדיפות, אותה סבירות למשל, קובייה הוגנת, אך לא כמו מזג האוויר בשבוע הבא.

**הסתברות במרחב מדגם אחיד:** במרחב מדגם אחיד הסיכוי למאורע יהיה:  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ .

דוגמה: מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל לפחות 5?  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{6}$

דוגמה: מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל תוצאה זוגית?  $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{6}$

**הסתברות במרחב לא אחיד:** תחושב לפי השכיחות היחסית:  $\frac{f}{n}$ .

**דוגמה:**

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת:

מספר התלמידים – השכיחות – $f$	הציון – $x$
2	5
4	6
8	7
5	8
4	9
2	10

מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה קיבל את הציון 8?  $\frac{f}{n} = \frac{5}{25} = 0.2$

מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה יכשל?  $\frac{f}{n} = \frac{2}{25} = 0.08$

**הסתברות למאורע משלים:** הסתברות לקבוצת המשלים של המאורע ביחס למרחב המדגם:  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ . למשל, בדוגמה הקודמת הסיכוי לעבור את הבחינה יכול

להיות מחושב לפי הסיכוי להיכשל:  $P(\bar{A}) = 1 - \frac{2}{25} = \frac{23}{25}$ .

## שאלות:

- (1) מהאותיות  $E, F$  ו- $G$  יש ליצור מילה בת 2 אותיות, לא בהכרח בת משמעות.  
 א. הרכיבו את כל המילים האפשריות.  
 ב. רשמו את המקרים למאורע:  
 i. במילה נמצאת האות  $E$ .  
 ii. במילה האותיות שונות.  
 ג. רשמו את המקרים למאורע  $\bar{A}$ .

- (2) מטילים זוג קוביות.  
 א. רשמו את מרחב המדגם של הניסוי. האם מרחב המדגם אחיד?  
 ב. רשמו את כל האפשרויות לאירועים הבאים:  
 i. סכום התוצאות 7.  
 ii. מכפלת התוצאות 12.  
 ג. חשבו את הסיכויים לאירועים שהוגדרו בסעיף ב'.

- (3) נבחר באקראי ספרה מבין הספרות 0-9.  
 א. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה גדולה מ-5?  
 ב. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא לכל היותר 3?  
 ג. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא אי זוגית?

- (4) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה עבור כל משפחה בישוב מסוים:

10	22	18	28	22	מספר משפחות
4	3	2	1	0	מספר מקלטים

- נבחרה משפחה באקראי מהישוב.  
 א. מה ההסתברות שאין מקלטים למשפחה?  
 ב. מה ההסתברות שיש מקלטים למשפחה?  
 ג. מה ההסתברות שיש לפחות 3 מקלטים למשפחה?

- (5) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה ביישוב "עדן":

10	30	100	40	20	מספר משפחות
4	3	2	1	0	מספר מכוניות

- נבחרה משפחה אקראית מן הישוב.  
 א. מה ההסתברות שאין לה מכוניות?  
 ב. מה ההסתברות שבבעלות המשפחה לפחות 3 מכוניות?  
 ג. מה הסיכוי שבבעלותה פחות מ-3 מכוניות?

- 6) נטיל מטבע רגיל 3 פעמים. בצד אחד של המטבע מוטבע עץ ובצד השני פלי.
- א. רשמו את מרחב המדגם של הניסוי. האם מרחב המדגם הוא אחיד?
- ב. רשמו את כל האפשרויות לאירועים הבאים:
- i. התקבל פעם אחת עץ.
- ii. התקבל לפחות פלי אחד.
- ג. מהו המאורע המשלים ל-D?
- ד. חשבו את הסיכויים לאירועים שהוגדרו בסעיפים ב-ג.

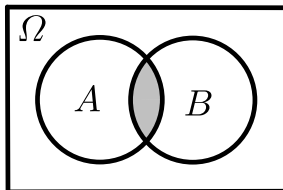
## תשובות סופיות:

- 1) א.  $\Omega = \{EE, EF, EG, FE, FF, FG, GE, GF, GG\}$
- ב.  $A = \{EE, EF, EG, FE, GE\}$ ,  $B = \{EF, EG, FE, FG, GE, GF\}$
- ג.  $\bar{A} = \{FF, FG, GF, GG\}$
- 2) א.  $\Omega = \left\{ \begin{matrix} (1,1) & (2,1) & (3,1) & (5,1) & (4,1) & (6,1) \\ (1,2) & (2,2) & (3,2) & (4,2) & (5,2) & (6,2) \\ (1,3) & (2,3) & (3,3) & (4,3) & (5,3) & (6,3) \\ (1,4) & (2,4) & (3,4) & (4,4) & (5,4) & (6,4) \\ (1,5) & (2,5) & (3,5) & (4,5) & (5,5) & (6,5) \\ (1,6) & (2,6) & (3,6) & (4,6) & (5,6) & (6,6) \end{matrix} \right\}$
- ב.  $A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$ ,  $C = \{(2,6), (3,4), (4,3), (6,2)\}$
- ג. הסיכוי ל-A:  $\frac{1}{6}$
- הסיכוי ל-B:  $\frac{1}{9}$
- 3) א. 0.4    ב. 0.4    ג. 0.5
- 4) א. 0.22    ב. 0.78    ג. 0.32
- 5) א. 0.1    ב. 0.2    ג. 0.8
- 6) א.  $\Omega = \{PPP, PPE, PEP, EPP, PEE, EPE, EEP, EEE\}$
- ב.  $A = \{PPE, PEP, EPP\}$ ,  $D = \{PPP, PPE, PEP, EPP, PEE, EPE, EEP\}$
- ג.  $\bar{D} = \{EEE\}$
- ד.  $\frac{1}{8}$

## פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד) – מאורעות זרים ומכילים:

**רקע:**

**פעולת חיתוך:**

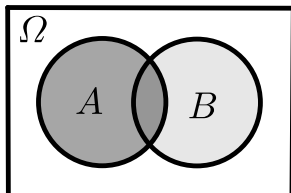


נותנת את המשותף בין המאורעות הנחתכים.  
 חיתוך בין המאורע  $A$  למאורע  $B$  יסומן כך:  $A \cap B$ .  
 מדובר בתוצאות שנמצאות ב- $A$  וגם ב- $B$ .

דוגמה:

בהטלת קובייה, למשל, האפשרויות לקבל לפחות 5 הן:  $A = \{5, 6\}$ .  
 האפשרויות לקבל תוצאה זוגית הן:  $B = \{2, 4, 6\}$ .  
 החיתוך שביניהם הוא:  $A \cap B = \{6\}$ .

**פעולת איחוד:**



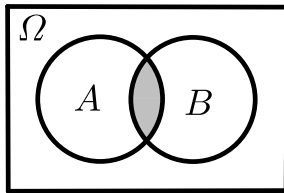
נותנת את כל האפשרויות שנמצאות לפחות באחת מהמאורעות, ומסומנת:  $A \cup B$ .  
 הפעולה נותנת את אשר נמצא ב- $A$  או ב- $B$ .  
 כלומר, לפחות אחד מהמאורעות קורה.

דוגמה:

בהטלת קובייה האפשרויות לקבל לפחות 5 הן:  $A = \{5, 6\}$ .  
 האפשרויות לקבל תוצאה זוגית:  $B = \{2, 4, 6\}$ .  
 האפשרויות לקבל לפחות 5 וגם תוצאה זוגית:  $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$ .

דוגמה (הפתרון נמצא בהקלטה):

סטודנט ניגש בסמסטר לשני מבחנים. מבחן בסטטיסטיקה ומבחן בכלכלה. ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הוא 0.9, ההסתברות שלו לעבור את המבחן בכלכלה הוא 0.8 וההסתברות לעבור את המבחן בסטטיסטיקה ובכלכלה היא 0.75. מה ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה בלבד? מה ההסתברות שלו להיכשל בשני המבחנים? מה ההסתברות לעבור לפחות מבחן אחד?

**נוסחת החיבור לשני מאורעות:**


ההסתברות של איחוד מאורעות תחושב ע"י הקשר הבא:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

**חוקי דה מורגן לשני מאורעות:**

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

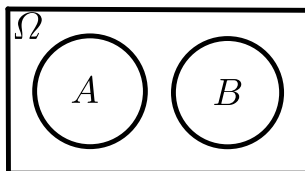
$$P(A \cap B) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B})$$

$$P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

**שיטת ריבוע הקסם:**

השיטה רלבנטית רק אם יש שני מאורעות במקביל בדומה לתרגיל הקודם:

	$\bar{A}$	$A$	
$B$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(A \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(\bar{A})$	$P(A)$	1

**מאורעות זרים:**


מאורעות זרים הם כאשר אין להם אף איבר משותף:  $A \cap B = \{ \}$ . כלומר, הם לא יכולים להתרחש בו זמנית.

ההסתברות של חיתוך המאורעות היא אפס:  $P(A \cap B) = 0$ .

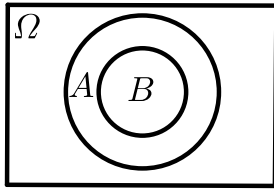
ההסתברות של איחוד המאורעות תחושב:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

דוגמה:

בהטלת קובייה, האפשרויות לקבל לפחות 5 הן:  $A = \{5, 6\}$  והאפשרות לקבל 3

היא:  $B = \{3\}$ , ולכן החיתוך ביניהם הוא אפס, כלומר:  $A \cap B = \{ \}$ .

### מאורעות מוכלים:



נתונים שני מאורעות  $A$  ו- $B$ , השונים מאפס. נאמר שהמאורע  $B$  מוכל במאורע  $A$  אם כל איברי המאורע  $B$  כלולים במאורע  $A$  ונרשום:  $B \subset A$ .

מאורע  $A$  מכיל את מאורע  $B$  כל התוצאות שנמצאות ב- $B$  מוכלות בתוך מאורע  $A$ .

קשר זה מסומן באופן הבא:  $B \subset A$ .

$$A \cap B = B \quad P(A \cap B) = P(B)$$

$$A \cup B = A \quad P(A \cup B) = P(A)$$

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{2, 4\}$$

למשל:

## שאלות:

- (1) מהאותיות  $E, F$  ו- $G$  יוצרים מילה בת 2 אותיות – לא בהכרח בת משמעות. נגדיר את המאורעות הבאים:  
 $A$  - במילה נמצאת האות  $E$ .  
 $B$  - במילה אותיות שונות.  
 א. רשמו את כל האפשרויות לחיתוך  $A$  עם  $B$ .  
 ב. רשמו את כל האפשרויות לאיחוד של  $A$  עם  $B$ .
- (2) תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. נגדיר את המאורעות הבאים:  
 $A$  - לעבור את המבחן בסטטיסטיקה.  
 $B$  - לעבור את המבחן בכלכלה.  
 היעזרו בפעולות חיתוך, איחוד ומשלים בלבד כדי להגדיר את המאורעות הבאים וסמנו בדיאגרמת וון את השטח המתאים:  
 א. התלמיד עבר רק את המבחן בכלכלה.  
 ב. התלמיד עבר רק את המבחן בסטטיסטיקה.  
 ג. התלמיד עבר את שני המבחנים.  
 ד. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד.  
 ה. התלמיד נכשל בשני המבחנים.  
 ו. התלמיד נכשל בכלכלה.
- (3) נתבקשתם לבחור ספרה באקראי. נגדיר את  $A$  להיות הספרה שנבחרה היא זוגית. נגדיר את  $B$  להיות הספרה שנבחרה קטנה מ-5.  
 א. רשמו את כל התוצאות למאורעות הבאים:  
 $A \cup B, A \cap B, \bar{B}, B, A$ .  
 ב. חשבו את ההסתברויות לכל המאורעות מהסעיף הקודם.
- (4) נסמן ב- $\Omega$  את מרחב המדגם וב- $\phi$  קבוצה ריקה.  
 נתון כי  $A$  הינו מאורע בתוך מרחב המדגם.  
 להלן מוגדרים מאורעות שפתרונם הוא  $\Omega$  או  $\phi$  או  $A$ .  
 קבעו עבור כל מאורע מה הפתרון שלו:  
 $A \cup \bar{A}, \bar{\phi}, A \cap \bar{A}, A \cup \Omega, A \cap \Omega, A \cup \phi, A \cap \phi, \bar{A}$

(5) הוגדרו המאורעות הבאים :

$A$  - אדם שגובהו מעל 1.7 מטר

$B$  - אדם שגובהו מתחת ל-1.8 מטר.

קבעו את גובהם של האנשים הבאים :

א.  $A \cap B$

ב.  $A \cup B$

ג.  $\bar{A} \cap B$

ד.  $\bar{A} \cup \bar{B}$

ה.  $\bar{\bar{A}}$

(6) נגדיר את המאורעות הבאים :

$A$  - אדם דובר עברית.

$B$  - אדם דובר ערבית.

$C$  - אדם דובר אנגלית.

השתמשו בפעולות איחוד, חיתוך והשלמה לתיאור המאורעות הבאים :

א. אדם דובר את כל שלוש השפות.

ב. אדם דובר רק עברית.

ג. אדם דובר לפחות שפה אחת מתוך השפות הללו.

ד. אדם אינו דובר אנגלית.

ה. קבוצת התלמידים שדוברים שתי שפות בדיוק (מהשפות הנ"ל).

(7) שתי מפלגות רצות לכנסת הבאה. מפלגת "גדר" תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.08 ומפלגת "עתידי" תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.20. בהסתברות של 76% שתי המפלגות לא תעבורנה את אחוז החסימה.

א. מה ההסתברות שלפחות אחת מהמפלגות תעבור את אחוז החסימה?

ב. מה ההסתברות ששתי המפלגות תעבורנה את אחוז החסימה?

ג. מה ההסתברות שרק מפלגות "עתידי" תעבור את אחוז החסימה?

(8) במקום עבודה מסוים 40% מהעובדים הם גברים. כמו כן, 20% מהעובדים הם אקדמאים. 10% מהעובדים הינן נשים אקדמאיות.

א. איזה אחוז מהעובדים הם גברים אקדמאיים?

ב. איזה אחוז מהעובדים הם גברים או אקדמאיים?

ג. איזה אחוז מהעובדים הם נשים לא אקדמאיות?

9) הסיכוי של מניה A לעלות הנו 0.5 ביום מסוים והסיכוי של מניה B לעלות ביום מסוים הנו 0.4. בסיכוי של 0.7 לפחות אחת מהמניות תעלה ביום מסוים. חשבו את ההסתברויות הבאות לגבי שתי המניות הללו ביום מסוים:

א. ששתי המניות תעלנה.

ב. שאף אחת מהמניות לא תעלנה.

ג. שמניה A בלבד תעלה.

10) מטילים זוג קוביות, אדומה ושחורה. נגדיר את המאורעות הבאים:

A - בקובייה האדומה התקבלה התוצאה 4 ובשחורה 2.

B - סכום התוצאות משתי הקוביות הוא 6.

C - מכפלת התוצאות בשתי הקוביות היא 10.

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

ב. האם המאורע B מכיל את המאורע A?

ג. האם A ו-C מאורעות זרים?

ד. האם A ו-C מאורעות משלימים?

11) עבור המאורעות A ו-B ידועות ההסתברויות הבאות:  $P(A) = 0.6$ ,

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.1, P(B) = 0.3$$

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

ב. חשבו את  $P(\bar{A} \cap B)$ .

12) מטבע הוטל פעמיים. נגדיר את המאורעות הבאים:

A - קיבלנו עץ בהטלה הראשונה.

B - קיבלנו לפחות עץ אחד בשתי ההטלות.

איזו טענה נכונה?

א. A ו-B מאורעות זרים.

ב. A ו-B מאורעות משלימים.

ג. B מכיל את A.

ד. A מכיל את B.

13) בהגרלה חולקו 100 כרטיסים. על 3 מהם רשום חופשה ועל 2 מהם רשום מחשב

שאר הכרטיסים ריקים. אדם קיבל כרטיס אקראי.

א. מה הסיכוי לזכות בחופשה או במחשב? האם המאורעות הללו זרים?

ב. מה ההסתברות לא לזכות בפרס?

14 נתון כי:  $P(A) = 0.3$ ,  $P(B) = 0.25$ ,  $P(A \cup B) = 0.49$

- א. חשבו את הסיכוי ל- $P(A \cap B)$ .  
 ב. האם  $A$  ו- $B$  מאורעות זרים?  
 ג. מה ההסתברות שרק  $A$  יקרה או שרק  $B$  יקרה?

15  $A$  ו- $B$  מאורעות זרים. נתון ש:  $2 \cdot P(B \cap \bar{A}) = P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$ .

מה הסיכוי למאורע  $A$  ומה ההסתברות למאורע  $B$ ?

16 קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות:

- א.  $A \cap B = B \cap A$ .  
 ב.  $\overline{A \cup B} = A \cap B$ .  
 ג.  $A \cap B \cap C = A \cap B \cap (C \cup B)$ .  
 ד.  $\overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$ .

17 נתון ש- $A$  ו- $B$  מאורעות במרחב מדגם. נתון ש- $P(A) = 0.3$ ,  $P(B) = 0.2$ .

- א. האם יתכן ש- $P(A \cup B) = 0.4$ ?  
 ב. האם יתכן ש- $P(A \cup B) = 0.6$ ?  
 ג. אם  $A$  ו- $B$  זרים מה הסיכוי  $P(A \cup B)$ ?  
 ד. אם  $A$  מכיל את  $B$  מה הסיכוי  $P(A \cup B)$ ?

18 מתוך אזרחי המדינה הבוגרים ל-30% חשבון בבנק הפועלים. ל-28% חשבון בבנק לאומי ול-15% חשבון בבנק מזרחי. כמו כן נתון כי 6% מחזיקים חשבון בבנק לאומי ובבנק הפועלים. ל-5% חשבון בבנק פועלים ומזרחי. ול-4% חשבון בבנק לאומי ומזרחי. כמו כן ל-1% מהאוכלוסייה הבוגרת חשבון בנק בשלושת הבנקים יחד.

- א. מה אחוז האזרחים להם חשבון בבנק לאומי בלבד?  
 ב. מה ההסתברות שאזרח כלשהו יחזיק חשבון בבנק פועלים ולאומי אבל לא בבנק מזרחי?  
 ג. מה ההסתברות שלאזרח יהיה חשבון בפועלים או במזרחי אבל לא בבנק לאומי?  
 ד. מה אחוז האזרחים שיש להם חשבון בנק אחד בלבד?  
 ה. מה אחוז האזרחים שיש להם חשבון בשני בנקים בלבד?  
 ו. מה ההסתברות שלאזרח בוגר אין חשבון בנק באף אחד מהבנקים הללו?  
 ז. לאיזה אחוז מהאזרחים יש חשבון בנק בלפחות אחד מהבנקים הללו?

- (19)** חברה מסוימת פרסמה את הנתונים הבאים לגבי האזרחים מעל גיל 21. הנתונים שהתקבלו היו: 40% מהאנשים מחזיקים כרטיס "ויזה", 52% מחזיקים כרטיס "ישראלכרט", 20% מחזיקים כרטיס "אמריקן אקספרס", 15% מחזיקים כרטיס ויזה וגם ישראלכרט, 8% מחזיקים כרטיס ישראלכרט וגם אמריקן אקספרס ו-7% מחזיקים כרטיס ויזה וגם אמריקן אקספרס. כמו כן, 13% לא מחזיקים באף אחד משלושת הכרטיסים הנ"ל.
- א. מה אחוז מחזיקי שלושת כרטיס האשראי גם יחד?
- ב. מה אחוז מחזיקי ישראלכרט וויזה אך לא את אמריקן אקספרס?
- ג. מה אחוז מחזיקי כרטיס אחד בלבד?

**(20)** הוכיחו:  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$ .

- (21)**  $A$  ו- $B$  מאורעות במרחב המדגם. האם נכון לומר שהסיכוי שיתרחש בדיוק מאורע אחד הוא:  $P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$ ?

## תשובות סופיות:

- 1 א.  $A \cap B = \{EG, EF, FE, GE\}$   
 ב.  $A \cup B = \{EG, EF, EE, FE, GE, EG, GF\}$
- 2 א.  $B \cap \bar{A}$  ב.  $A \cap \bar{B}$  ג.  $A \cap B$  ד.  $A \cup B$  ה.  $\bar{A} \cap \bar{B}$  ו.  $\bar{B}$
- 3 א.  $A = 0, 2, 4, 6, 8, B = 0, 1, 2, 3, 4, \bar{B} = 5, 6, 7, 8, 9$   
 $A \cap B = 0, 2, 4, A \cup B = 0, 2, 4, 6, 8, 1, 3$
- ב.  $P(A \cup B) = 0.7, P(A \cap B) = 0.3, P(\bar{B}) = 0.5, P(B) = 0.5, P(A) = 0.5$
- 4 א.  $\bar{\bar{A}} = A, A \cap \phi = \phi, A \cup \phi = A, A \cap \Omega = A, A \cup \Omega = \Omega$   
 $A \cap \bar{A} = \phi, \bar{\phi} = \Omega, A \cup \bar{A} = \Omega$
- 5 א.  $A \cap B$ : גובה בין 1.7 ל-1.8.  
 ב.  $A \cup B$ : כל גובה אפשרי.  
 ג.  $\bar{A} = \bar{A} \cap B$ : גובה לכל היותר 1.7.  
 ד.  $\bar{A} \cup \bar{B}$ : לכל היותר 1.7 או לפחות 1.8.  
 ה.  $A = \bar{\bar{A}}$ : גובה מעל 1.7.
- 6 א.  $A \cap B \cap C$  ב.  $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$  ג.  $A \cup B \cup C$   
 ד.  $\bar{C}$  ה.  $(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (B \cap C \cap \bar{A}) \cup (A \cap C \cap \bar{B})$
- 7 א.  $P(A \cup B) = 0.24$  ב.  $P(A \cap B) = 0.04$  ג.  $P(B \cap \bar{A}) = 0.16$
- 8 א.  $P(A \cap B) = 10\%$  ב.  $P(A \cup B) = 50\%$  ג.  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 50\%$
- 9 א.  $P(A \cap B) = 0.2$  ב.  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.3$  ג.  $P(A \cup \bar{B}) = 0.3$
- 10 א. לא. ב. כן. ג. כן. ד. לא.
- 11 א. כן. ב.  $P(\bar{A} \cap B) = 0.3$
- 12 הטענה הנכונה היא ג'.
- 13 א. 0.05. ב. 0.95.
- 14 א.  $P(A \cap B) = 0.06$  ב. לא. ג.  $P((A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})) = 0.43$
- 15  $P(B) = \frac{1}{5}, P(A) = \frac{2}{5}$
- 16 א. נכון. ב. לא נכון. ג. לא נכון. ד. נכון.
- 17 א. כן. ב. לא. ג.  $P(A \cup B) = 0.5$  ד.  $P(A \cup B) = 0.3$
- 18 א. 19%. ב. 0.05. ג. 0.31. ד. 46%. ה. 12%. ו. 0.41.
- 19 א. 5%. ב. 10%. ג. 67%.
- 20 שאלת הוכחה.
- 21 נכון.

## קומבינטוריקה – כלל המכפלה:

**רקע:**

**כלל המכפלה:**

כלל המכפלה הוא כלל שבאמצעותו אפשר לחשב את גודל המאורע או גודל מרחב המדגם.

אם לתהליך יש  $k$  שלבים:  $n_1$  אפשרויות לשלב הראשון,  $n_2$  אפשרויות לשלב השני...  $n_k$

אפשרויות לשלב  $k$ :

מספר האפשרויות לתהליך כולו יהיה:  $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$

למשל, כמה אפשרויות יש למשחק בו מטיילים קובייה וגם מטבע? (הסבר בהקלטה)

$$n_1 = 6, n_2 = 2$$

$$n_1 \cdot n_2 = 6 \cdot 2 = 12$$

למשל, כמה לוחיות רישוי בני 5 תווים ניתן ליצור כאשר התו הראשון הוא אות אנגלית והיתר ספרות? (הסבר בהקלטה)

$$n_1 = 26, n_2 = 10, n_3 = 10, n_4 = 10, n_5 = 10$$

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5 = 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 260,000$$

## שאלות:

- (1) חשבו את מספר האפשרויות לתהליכים הבאים:
- הטלת קובייה פעמים.
  - מספר תלת ספרתי.
  - בחירת בן ובת מכתה שיש בה שבעה בנים ועשר בנות.
  - חלוקת שני פרסים שונים לעשרה אנשים שונים כאשר אדם לא יכול לקבל יותר מפרס אחד.
- (2) במסעדה מציעים ארוחה עסקית.
- בארוחה עסקית יש לבחור מנה ראשונה, מנה עיקרית ושתייה. האופציות למנה ראשונה הן: סלט ירקות, סלט אנטיפסטי ומרק היום. האופציות למנה עיקרית הן: סטייק אנטריקוט, חזה עוף בגריל, לזניה בשרית ולזניה צמחונית. האופציות לשתייה הן: קפה, תה ולימונדה.
- כמה ארוחות שונות ניתן להרכיב בעזרת התפריט הזה?
  - אדם מזמין ארוחה אקראית. חשב את ההסתברויות הבאות:
    - בארוחה סלט ירקות, לזניה בשרית ולימונדה.
    - בארוחה סלט, לזניה ותה.
- (3) בוחרים באקראי מספר בין חמש ספרות. חשבו את ההסתברויות הבאות:
- המספר הוא זוגי.
  - במספר כל הספרות שונות.
  - במספר כל הספרות זהות.
  - במספר לפחות שתי ספרות שונות.
  - במספר לפחות שתי ספות זהות.
  - המספר הוא פלינדרום (מספר הנקרא מימין ומשמאל באות הצורה).
- (4) חישה אנשים אקראיים נכנסו למעלית בבניין בן 8 קומות. חשבו את ההסתברויות הבאות:
- כולם ירו בקומה החמישית.
  - כולם ירדו באותה קומה.
  - כולם ירדו בקומה אחרת.
  - ערך ודני ירדו בקומה השישית והיתר בשאר הקומות.

- (5) במפלגה חמישה עשר חברי כנסת. יש לבחור שלושה חברי כנסת לשלושה תפקידים שונים. בכמה דרכים ניתן לחלק את התפקידים הבאים אם:
- חבר כנסת יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
  - חבר כנסת לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
- (6) מטילים קובייה 4 פעמים.
- מה ההסתברות שכל התוצאות תהינה זהות?
  - מה ההסתברות שכל התוצאות תהינה שונות?
  - מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהינה זהות?
  - מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהינה שונות?
- (7) יש ליצור מילה בת חמש אותיות, לא בהכרח עם משמעות מאותיות ה-ABC (26 אותיות).
- מה ההסתברות שבמילה שנוצרה אין האותיות A, D ו-L?
  - מה ההסתברות שבמילה שנוצרה כל האותיות זהות?
  - מה ההסתברות שבמילה שנוצרה לפחות שתי אותיות שונות זו מזו?
  - מה ההסתברות שהמילה היא פלינדרום? (מילה אשר משמאל לימין, ומימין לשמאל נקראת אותו הדבר).
- (8) יוצרים קוד עם a ספרות (מותר לחזור על אותה ספרה בקוד). חשבו את ההסתברויות הבאות: (בטאו את תשובותיכם באמצעות a).
- בקוד אין את הספרה 5.
  - בקוד מופיעה הספרה 3.
  - בקוד לא מופיעות ספרות אי זוגיות.
- (9) במשחק מזל יש למלא טופס בו n משבצות. כל משבצת מסומנת בסימן V או X. בכמה דרכים שונות ניתן למלא את טופס משחק המזל?

## תשובות סופיות:

- (1) א. 36    ב. 900    ג. 70    ד. 90
- (2) א. 36    ב. i.  $\frac{1}{36}$     ב. ii.  $\frac{1}{9}$
- (3) א. 0.5    ב. 0.3024    ג. 0.0001    ד. 0.9999    ה. 0.6976    ו. 0.01
- (4) א.  $\frac{1}{8^5}$     ב.  $\frac{1}{8^4}$     ג. 0.205    ד.  $\frac{1 \cdot 1 \cdot 7^3}{8^5}$
- (5) א. 3375    ב. 2730
- (6) א.  $\frac{1}{216}$     ב.  $\frac{5}{18}$     ג.  $\frac{13}{18}$     ד.  $\frac{215}{216}$
- (7) א.  $\frac{23^5}{26^5}$     ב.  $\frac{1}{26^4}$     ג.  $1 - \frac{1}{26^4}$     ד.  $\frac{1}{26^2}$
- (8) א.  $0.9^a$     ב.  $1 - 0.9^a$     ג. 0.5
- (9)  $2^n$

## קומבינטוריקה – תמורה – סידור עצמים בשורה:

**רקע:**

**תמורה:**

מספר האפשרויות לסדר  $n$  עצמים שונים בשורה:  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ .

הערה:  $0! = 1$ .

דוגמאות (הפתרונות בהקלטה):

- בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות:  $a, b, c, d$ ?
- בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות:  $a, b, c, d$ , כך שהאותיות:  $a, b$  יהיו ברצף?
- בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות:  $a, b, c, d$ , כך שהאותיות:  $a, b$  יופיעו בתור הרצף  $ba$ ?

## שאלות:

- (1) חשבו : בכמה אופנים  
 א. אפשר לסדר 4 ספרים שונים על מדף?  
 ב. אפשר לסדר חמישה חיילים בטור?
- (2) סידרו באקראי 10 דיסקים שונים על מדף שמתוכם שניים בשפה העברית.  
 א. מה ההסתברות שהדיסקים בעברית יהיו צמודים זה לזה?  
 ב. מה ההסתברות שהדיסקים בעברית לא יהיו צמודים זה לזה?  
 ג. מה ההסתברות ששני הדיסקים בעברית יהיו כל אחד בקצה השני של המדף?
- (3) בוחנים 5 בנים ו-4 בנות בכיתה ומדרגים אותם לפי הציון שלהם בבחינה. נניח שאין תלמידים בעלי אותו ציון.  
 א. מהו מספר הדירוגים האפשריים?  
 ב. מהו מספר הדירוגים האפשריים אם מדרגים בנים ובנות בנפרד?
- (4) מסדרים 10 ספרים שונים על מדף.  
 א. בכמה אופנים ניתן לסדר את הספרים על המדף?  
 ב. שני ספרים מתוך ה-10 הם בסטיסטיקה.  
 א. מה ההסתברות שאם נסדר את הספרים באקראי, הספרים בסטיסטיקה יהיו צמודים זה לזה?  
 ב. מה ההסתברות שהספרים בסטיסטיקה לא יהיו צמודים זה לזה?  
 ג. מה ההסתברות שהספרים בסטיסטיקה יהיו בקצות המדף (כל ספר בקצה אחר)?
- (5) אדם יצר בנגן שלו פלייליסט (רשימת השמעה) של 12 שירים שונים. 4 בשפה העברית, 5 באנגלית ו-3 בצרפתית. האדם הריץ את הפלייליסט באקראי.  
 א. מה ההסתברות שכל השירים באנגלית יופיעו כשירים הראשונים כמקשה אחת?  
 ב. מה ההסתברות שכל השירים באנגלית יופיעו ברצף (לא חובה ראשונים)?  
 ג. מה ההסתברות ששירים באותה השפה יופיעו ברצף (כלומר כל השירים באנגלית ברצף, כל השירים בעברית ברצף וכך גם השירים בצרפתית)?

- 6) 4 בניים ו-4 בנות התיישבו באקראי בשורת כיסאות 1-8 בקולנוע.
- א. מה ההסתברות שיוסי ומיכל לא ישבו זה לצד זה?
- ב. מה ההסתברות שהבנים יתיישבו במקומות האי-זוגיים?
- ג. מה ההסתברות שכל הבנים ישבו זה לצד זה?
- ד. מה ההסתברות שהבנים ישבו זה לצד זה והבנות תשבנה זו לצד זו?

### תשובות סופיות:

- (1) א. 0.24      ב. 0.120
- (2) א. 0.2      ב. 0.8      ג. 0.022
- (3) א. 0.362880      ב. 0.2880
- (4) א. 0.3628800      ב. 0.2      ג. 0.8      ד.  $\frac{1}{45}$
- (5) א.  $\frac{1}{792}$       ב.  $\frac{1}{99}$       ג.  $\frac{1}{4620}$
- (6) א. 0.75      ב. 0.014      ג.  $\frac{1}{14}$       ד.  $\frac{1}{35}$

## קומבינטוריקה – תמורה עם עצמים זהים:

רקע:

תמורה עם חזרות:

אם יש בין העצמים שיש לסדר עצמים זהים, יש לבטל את הסידור הפנימי שלהם על ידי חלוקה בסידורים הפנימיים שלהם.

מספר האופנים לסדר  $n$  עצמים בשורה, ש- $n_1$  מהם זהים מסוג 1,  $n_2$  זהים מסוג 2

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_r!} \quad \text{ו-} n_r \text{ זהים מסוג } r$$

דוגמה (תשובה בהקלטה):

כמה מילים ניתן ליצור מכל האותיות הבאות: W, W, T, T, K, K

## שאלות:

1) במשחק יש לצבוע שתי משבצות מתוך המשבצות הבאות:

--	--	--	--	--

בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את הצביעה?

2) בכמה אופנים שונים אפשר לסדר בשורה את האותיות: ב, ע, ב, ע, ג?

3) בבית נורות מקום ל-6 נורות. בחרו שתי נורות אדומות, שתי נורות צהובות ושתי נורות כחולות. כמה דרכים שונות יש לסדר את הנורות?

4) נרצה ליצור מספר מכל הספרות הבאות: 1, 2, 2, 2, 6. כמה מספרים כאלה אפשר ליצור?

5) במשחק בול פגיעה יש 10 משבצות, אדם צובע 4 משבצות מתוך ה-10. המשתתף השני צריך לנחש אילו 4 משבצות נצבעו. מה ההסתברות שבניחוש אחד יהיה בול פגיעה?

6) כמה אותות שונים, שכל אחד מורכב מ-10 דגלים שונים, ניתן ליצור, אם 4 דגלים הם לבנים, 3 כחולים, 2 אדומים ואחד שחור. דגלים שווי צבע זהים זה לזה לחלוטין.

## תשובות סופיות:

1) 10.

2) 60.

3) 90.

4) 20.

5)  $\frac{1}{210}$ .

6) 12600.

## קומבינטוריקה – דגימה ללא סדר וללא החזרה:

רקע:

מדגם לא סדור בדגימה ללא החזרה:

מספר האפשרויות לדגום  $k$  עצמים שונים מתוך  $n$  עצמים שונים כאשר אין

משמעות לסדר העצמים הנדגמים ואין החזרה:  $\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$

דוגמה:

מתוך 10 תלמידים יש לבחור שלושה נציגים לוועד ללא תפקידים מוגדרים:

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{7!3!} = 120$$

הערות:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (1)$$

$$\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n \quad (2)$$

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1 \quad (3)$$

## שאלות:

- (1) בכיתה 15 בנות ו-10 בנים. יש לבחור 5 תלמידים שונים מהכיתה לנציגות הכיתה. בכמה דרכים אפשר להרכיב את הנציגות, אם:
- אין שום הגבלה לבחירה.
  - מעוניינים ש-3 בנות ו-2 בנים ירכיבו את המשלחת.
  - לא יהיו בנים במשלחת.
- (2) סטודנט מעוניין לבחור 5 קורסי בחירה בסמסטר זה. לפניו רשימה של 10 קורסים לבחירה: 5 במדעי הרוח, 3 במדעי החברה, 2 במתמטיקה.
- כמה בחירות שונות הוא יכול ליצור לעצמו?
  - כמה בחירות יש לו בהן 3 קורסים הם ממדעי הרוח?
  - כמה בחירות יש לו אם 2 מהן לא ממדעי הרוח?
  - כמה בחירות יש לו אם 2 ממדעי הרוח, 2 ממדעי החברה ו-1 ממתמטיקה?
- (3) בכיתה 30 תלמידים מתוכם 12 תלמידים ו-18 תלמידות. יש לבחור למשלחת 4 תלמידים מהכיתה. התלמידים נבחרים באקראי.
- מה ההסתברות שהמשלחת תורכב רק מבנות?
  - מה ההסתברות שבמשלחת תהיה רק בת אחת?
  - מה ההסתברות שבמשלחת תהיה לפחות בת אחת?
- (4) במשחק הלוטו יש לבחור 5 מספרים מתוך 45. המספרים הם 1-45.
- מה ההסתברות שבמשחק הזוכה כל המספרים הם זוגיים?
  - מה ההסתברות שבמספר הזוכה יש לכל היותר מספר זוגי אחד?
  - מה ההסתברות שבמספר הזוכה לפחות פעם אחת יש מספר זוגי?
  - מה ההסתברות שבמספר הזוכה כל המספרים גדולים מ-30?
- (5) בחפיסת קלפים ישנם 52 קלפים: 13 בצבע שחור בצורת עלה, 13 בצבע אדום בצורת לב, 13 בצבע אדום בצורת יהלום ו-13 בצבע שחור בצורת תלתן. מכל צורה (מתוך ה-4) יש 9 קלפים שמספרם 10-2, שאר הקלפים הם; נסיך, מלכה, מלך ואס (בעצם מדובר בקופסת קלפים רגילה ללא ג'וקר). שני אנשים משחקים פוקר. כל אחד מקבל באקראי 5 קלפים (ללא החזרה).
- מה ההסתברות שעודד יקבל את כל המלכים וערן את כל המלכות?
  - מה ההסתברות שאחד השחקנים יקבל את הקלף אס-לב?
  - מה ההסתברות שערן יקבל קלפים שחורים בלבד ועודד יקבל שני קלפים שחורים בדיוק?
  - מה ההסתברות שערן יקבל לפחות 3 קלפים שהם מספר (אס אינו מספר)?

- 6) במכללה 4 מסלולי לימוד. בכל מסלול לימוד 5 מזכירות. יש ליצור וועד של 5 מזכירות מתוך כלל המזכירות במכללה. יוצרים וועד באופן אקראי. חשבו את ההסתברויות הבאות:
- א. כל המזכירות בוועד יהיו ממסלול "מדעי ההתנהגות".  
 ב. כל המזכירות בוועד יהיו מאותו המסלול.  
 ג. מכל מסלול תבחר לפחות מזכירה אחת.

7) הוכיחו כי: 
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

- 8)  $2n$  בנים ו- $2n$  בנות מתחלקים ל-2 קבוצות.
- א. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את החלוקה אם שתי הקבוצות צריכות להיות שוות בגודלן ויש בכל קבוצה מספר שווה של בנים ובנות?  
 ב. בכמה דרכים ניתן לבצע את החלוקה אם יש מספר שווה של בנים ובנות בכל קבוצה אבל הקבוצות לא בהכרח בגודל שווה.

### תשובות סופיות:

- 1) א. 53130      ב. 20475      ג. 3003
- 2) א. 252      ב. 100      ג. 100      ד. 100
- 3) א. 0.1117      ב. 0.1445      ג. 0.9819
- 4) א. 0.02      ב. 0.187      ג. 0.972      ד. 0.00246
- 5) א. 0      ב. 0.1923      ג. 0.009      ד. 0.837
- 6) א.  $6.45 \cdot 10^{-5}$       ב.  $2.58 \cdot 10^{-4}$       ג. 0.3225
- 7) שאלת הוכחה.

8) א.  $\binom{2n}{n}$       ב.  $\sum_{i=1}^n \binom{2n}{i}^2$

## קומבינטוריקה – דגימה ללא סדר ועם החזרה:

### רקע:

מספר האפשרויות לבחור  $k$  עצמים (לא בהכרח שונים) מתוך  $n$  עצמים שונים, ללא חשיבות לסדר העצמים הנדגמים, ועצם יכול להיבחר יותר מפעם אחת:

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

### דוגמה:

בכמה דרכים שונות ניתן לחלק 4 כדורים זהים לשלושה תאים שבכל תא יש מקום ליותר מכדור אחד? (פתרון והסבר הרעיון בהקלטה)

### סיכום כללי של המצבים האפשריים לדגימה:

מספר האפשרויות לבחירת $k$ עצמים מתוך אוכלוסייה של $n$ עצמים שונים		
ללא התחשבות בסדר הבחירה	עם התחשבות בסדר הבחירה	ביצוע הדגימה
$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$	$n^k$	עם החזרה
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$	ללא החזרה

## שאלות:

- (1) בכמה דרכים יש להכניס 8 כדורים זהים לחמישה תאים כאשר תא יכול להכיל יותר מכדור אחד?
- (2) בכמה אופנים ניתן להכניס 5 מחברות זהות ל-3 תיקים שונים?
- (3) בכמה אופנים ניתן להכניס 8 כדורים לתוך 3 תאים שונים כאשר:  
 א. הכדורים זהים.  
 ב. הכדורים שונים זה מזה.
- (4) בכמה דרכים יש לסדר 10 משחקים ב-4 מגירות כאשר:  
 א. המשחקים שונים זה מזה.  
 ב. במשחקים זהים זה לזה.
- (5) מהו מספר הפתרונות השלמים האי שליליים למשוואה הבאה:  $X_1 + X_2 = 3$ .
- (6) מהו מספר הפתרונות השלמים האי-שליליים למשוואה הבאה:  
 $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 20$ .
- (7) במכירה פומבית הוצגו 4 פמוטי זהב זהים לחלוטין. על קניית היצירות התחרו 3 אספנים. אספן יכול היה לרכוש יותר מפמוט אחד. בהנחה וכל הפמוטים נמכרו, כמה אפשרויות מכירה לאספנים השונים ישנן?
- (8) נתונות האותיות: A, B, C ו-D. נרצה לבחור שתי אותיות מתוך קבוצת האותיות הללו כאשר מותר לבחור אותה אות יותר מפעם אחת אבל אין חשיבות לסדר האותיות שנבחרו. כמה דרכים ישנן לבחירה?
- (9) במשחק הלוטו החדש יש לבחור ארבעה מספרים מתוך המספרים 1-20. אין חשיבות לסדר הפנימי של המספרים, אלא רק לגלות אילו מספרים עלו בגורל. מה הסיכוי לגלות את המספרים שעלו בגורל אם:  
 א. אסור לבחור את אותו מספר יותר מפעם אחת.  
 ב. מותר לחזור על אותו מספר יותר מפעם אחת.

- (10)** ישנם 5 כדורים להכניס ל-6 תאים.  
חשבו את מספר האפשרויות להכנסת הכדורים כאשר:
- א. הכדורים שונים ותא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
  - ב. הכדורים זהים ותא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
  - ג. הכדורים שונים ותא לא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
  - ד. הכדורים זהים ותא לא יכול להכיל יותר מכדור אחד.

- (11)** ישנם  $k$  כדורים להכניס ל- $n$  תאים ( $n > k$ ).  
חשבו את מספר האפשרויות להכנסת הכדורים כאשר:
- א. הכדורים שונים ותא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
  - ב. הכדורים זהים ותא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
  - ג. הכדורים שונים ותא לא יכול להכיל יותר מכדור אחד.
  - ד. הכדורים זהים ותא לא יכול להכיל יותר מכדור אחד.

## תשובות סופיות:

(1) 495.

(2) 21.

(3) א. 45 ב. 6561.

(4) א.  $4^{10}$  ב. 286.

(5) 4.

(6) 1771.

(7) 15.

(8) 10.

(9) א.  $\frac{1}{4845}$  ב.  $\frac{1}{8855}$ .

(10) א. 7776 ב. 252 ג. 720 ד. 6.

(11) א.  $n^k$  ב.  $\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$  ג.  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$  ד. 6.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{ד.}$$

## קומבינטוריקה – דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה:

**רקע:**

**מדגם סידור בדגימה עם החזרה:**

מספר האפשרויות בדגימת  $k$  עצמים מתוך  $n$  עצמים שונים כאשר הדגימה היא עם החזרה והמדגם סדור הוא:  $n^k$ .

**דוגמה:**

בוחרים שלושה תלמידים מתוך עשרה לייצג ועד בו תפקידים שונים, תלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

כמה ועדים שונים ניתן להרכיב?  $10^3 = 1,000$ ,  $k = 3$ ,  $n = 10$ .

**מדגם סידור ללא החזרה:**

מספר האפשרויות בדגימת  $k$  עצמים שונים מתוך  $n$  עצמים שונים ( $n \geq k$ ) כאשר המדגם סדור ואין החזרה של עצמים נדגמים הינו:

$$\cdot (n)_k = n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

**דוגמה:**

שלושה תלמידים נבחרים מתוך 10 לייצג וועד בו תפקידים שונים.

תלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד:  $\frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ .

## שאלות:

- (1) במפלגה 20 חברי כנסת, מעוניינים לבחור שלושה חברי כנסת לשלושה תפקידים שונים.
- א. חבר כנסת יכול למלא יותר מתפקיד אחד.  
 כמה קומבינציות ישנן לחלוקת התפקידים?
- ב. חבר כנסת לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.  
 כמה קומבינציות יש לחלוקת התפקידים?
- (2) במשחק מזל יש 4 משבצות ממוספרות מ-A-D (A עד D). בכל משבצת יש למלא סיפרה (0-9). הזוכה הוא זה שניחש נכונה את כל הספרות בכל המשבצות בהתאמה.
- א. מה ההסתברות לזכות במשחק?  
 ב. מה ההסתברות שבאף משבצת לא תהיה את הספרה 3 במספר הזוכה?  
 ג. מה ההסתברות שהתוצאה 4 תופיע לפחות פעם אחת במספר הזוכה?
- (3) קבוצה מונה 22 אנשים, מה ההסתברות שלפחות לשניים מהם יהיה יום הולדת באותו התאריך?
- (4) שלושה אנשים קבעו להיפגש במלון הילטון בסינגפור. הבעיה היא שבסינגפור ישנם 5 מלונות הילטון.
- א. מה ההסתברות שכל השלושה ייפגשו?  
 ב. מה ההסתברות שכל אחד יגיע לבית מלון אחר?
- (5) בכיתה 40 תלמידים. מעוניינים לבחור חמישה מהם לוועד כיתה. בכמה דרכים ניתן להרכיב את הוועד אם:
- א. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.  
 ב. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

## תשובות סופיות:

- (1) א. 8000      ב. 6840
- (2) א. 0.0001      ב. 0.6561      ג. 0.3439
- (3) 0.476
- (4) א. 0.04      ב. 0.48
- (5) א.  $40^5$       ב. 78,960,960

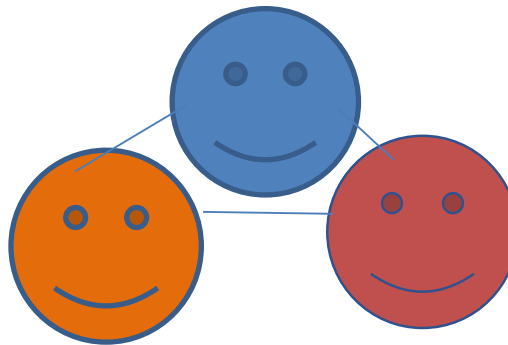
## קומבינטוריקה – סידור עצמים במעגל:

רקע:

מספר האפשרויות לסדר  $n$  עצמים שונים במעגל בו אין מקומות מסומנים הוא:  $(n-1)!$ .

דוגמה (פתרון בהקלטה):

דנה, רמה ושדה רוצות ליצור מעגל ריקוד. בכמה דרכים שונות הן יכולות להחזיק אחת לשנייה את הידיים, כדי ליצור את המעגל?



## שאלות:

- (1) מעצב פנים יצר ללקחותיו מניפת צבעים המוצגת במעגל. במניפה 12 צבעים שונים מתוכם 3 בגווני אפור, 3 בגווני לבן, 3 בגווני ירוק ו-3 בגווני צהוב. כמה מניפות שונות ניתן ליצור כאשר:
- גווני האפור צמודים זה לזה.
  - צבעים באותו גוון צמודים זה לזה.



- (2) דני יוצר שרשרת חרוזים הבנויה מעשרה חרוזים בצבעים שונים. הוא משחיל את עשרת החרוזים באקראי. חשבו את ההסתברויות הבאות:
- הסידור יהיה בדיוק כמוראה בציר.
  - החרוז הלבן והכתום יהיו בסמוך זה לזה.

- (3) אבא הכין עוגת יומולדת עגולה. הוא סידר 7 נרות כמוראה בשרטוט. הנרות זהים ונבדלים זה בזה בצבע: 2 כחולים זהים, 2 אדומים זהים, 2 צהובים זהים ו-1 כתום. סידור הנרות נעשה באקראי. חשבו את ההסתברויות הבאות:



- הנרות הצהובים סמוכים זה לזה.
- נרות באותו צבע סמוכים זה לזה.

- (4)  $n$  בנים ו- $n$  בנות הסתדרו במעגל באקראי.



- מה הסיכוי שכל הבנים יסתדרו זה לצד זה בלי להתפצל?
- מה הסיכוי שכל הבנים יסתדרו זה לצד זה בלי להתפצל וגם כל הבנות יסתדרו זו לצד זו בלי להתפצל?
- מה הסיכוי שהסידור יהיה שמימין ומשמאל לכל בן תהיה בת?

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } .2177280 \quad \text{ב. } .7776$$

$$(2) \quad \text{א. } \frac{1}{9!} \quad \text{ב. } \frac{2}{9}$$

$$(3) \quad \text{א. } \frac{1}{3} \quad \text{ב. } \frac{1}{15}$$

$$(4) \quad \text{א. } \frac{(n!)^2}{(2n-1)!} \quad \text{ב. } \frac{(n!)^2}{(2n-1)!} \quad \text{ג. } \frac{(n-1)!(n!)}{(2n-1)!}$$

## קומבינטוריקה – שאלות מסכמות:

### שאלות:

- (1) בכיתה 40 תלמידים. מעוניינים לבחור חמישה מהם לוועד כיתה. בכמה דרכים ניתן להרכיב את הוועד אם:
- בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
  - בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
  - אין תפקידים שונים בוועד.
- (2) במשרד 30 עובדים, יש לבחור ארבעה עובדים למשלחת לחו"ל. בכמה דרכים ניתן להרכיב את המשלחת?
- במשלחת ארבע משימות שונות שיש למלא וכל עובד יכול למלא יותר ממשימה אחת.
  - כמו בסעיף א' רק הפעם עובד לא יכול למלא יותר ממשימה אחת.
  - מעוניינים לבחור ארבעה עובדים שונים למשלחת שבה לכולם אותו התפקיד.
- (3) מעוניינים להרכיב קוד סודי. הקוד מורכב מ-2 ספרות שונות ו-3 אותיות שונות באנגלית (26 אותיות אפשריות).
- כמה קודים שונים ניתן להרכיב?
  - כמה קודים שונים ניתן להרכיב אם הקוד מתחיל בספרה ונגמר בספרה?
  - כמה קודים ניתן להרכיב אם הספרות חייבות להיות צמודות זו לזו?
  - בכמה קודים הספרות לא מופיעות ברצף?
- (4) בארונית 4 מגירות. ילד התבקש על ידי אמו לסדר 6 משחקים בארונית. הילד מכניס את המשחקים באקראי למגירות השונות. כל מגירה יכולה להכיל את כל המשחקים יחד.
- מה ההסתברות שהילד יכניס את כל המשחקים למגירה העליונה?
  - מה ההסתברות שהילד יכניס את כל המשחקים לאותה מגירה?
  - מה ההסתברות ש"דומינו" יוכנס למגירה העליונה ויתר המשחקים לשאר המגירות.
  - מה ההסתברות ש"דומינו" לא יוכנס למגירה העליונה?

- (5) בעיר מסוימת מתמודדות למועצת העיר 4 מפלגות שונות: "הירוקים", "קדימה", "העבודה" ו"הליכוד". 6 אנשים אינם יודעים למי להצביע, ולכן בוחרים באקראי מפלגה כלשהי.
- מה ההסתברות שכל ה-6 יבחרו באותה מפלגה?
  - מה ההסתברות שמפלגת ה"ירוקים" לא תקבל קולות?
  - מה ההסתברות שמפלגת ה"ירוקים" תקבל בדיוק 3 קולות וכל מפלגה אחרת תקבל קול 1 בלבד?
  - מה ההסתברות שמפלגת "הירוקים" תקבל 2 קולות, מפלגת "העבודה" תקבל 2 קולות ומפלגת "הליכוד" תקבל 2 קולות?
- (6) 5 חברים נפגשו ורצו לראות סרט. לרשותם ספריה המונה 8 סרטים שונים. כל אחד התבקש לבחור סרט באקראי.
- מה ההסתברות שכולם יבחרו את אותו הסרט?
  - מה ההסתברות שכולם יבחרו את "הנוסע השמיני"?
  - מה ההסתברות שכל אחד יבחר סרט אחר?
  - מה הסיכוי שלפחות שניים יבחרו את אותו הסרט?
  - מה ההסתברות שיוסי וערן ייבחרו את "הנוסע השמיני" וכל השאר סרטים אחרים?
  - מה ההסתברות שהנוסע השמיני לא ייבחר על ידי אף אחד מהחברים?
  - לקחו את 8 הסרטים ויצרו מהם רשימה. נתון שברשימה 3 סרטי אימה, מה ההסתברות שברשימה שנוצרה יופיעו 3 סרטי האימה ברצף?
- (7) בקבוצה 10 אנשים. יש ליצור שתי וועדות שונות מתוך הקבוצה: אחת בת 4 אנשים והשנייה בת 3 אנשים. כל אדם יכול להיבחר רק לוועדה אחת. חשבו את מס' הדרכים השונות ליצירת הוועדות הללו כאשר:
- אין בוועדות תפקידים.
  - בכל וועדה יש תפקיד אחד של אחראי הוועדה.
  - בכל וועדה כל התפקידים שונים.
- (8) 4 גברים ו-3 נשים מתיישבים על כסאות בשורה של כסאות תיאטרון. בכל שורה 10 כסאות. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את ההושבה:
- ללא הגבלה.
  - כל הגברים ישבו זה ליד זה וגם כל הנשים תשבנה זו ליד זו.
  - שני גברים בקצה אחד ושני הגברים האחרים בקצה שני.
- (9) בהגרלה ישנם 10 מספרים מ-1 עד 10. נבחרו באקראי 5 מספרים. מה ההסתברות שהמספר 7 הוא השני בגודלו מבין המספרים שנבחרו?

- 10** 6 אנשים עלו לאוטובוס שעוצר ב-10 תחנות.  
 כל אדם בוחר באופן עצמאי ואקראי באיזו תחנה לרדת.  
 א. מה ההסתברות שכל אחד יורד בתחנה אחרת?  
 ב. מה ההסתברות שבדיוק 3 ירדו בתחנה החמישית?  
 ג. מה ההסתברות שרונית תרד בתחנה השנייה והשאר לא?  
 ד. מה ההסתברות שכולם ירדו בתחנות 5,6 ולפחות אחד בכל אחת מהתחנות הללו?

- 11** ברכבת 4 מקומות ישיבה עם כיוון הנסיעה 41 מקומות ישיבה נגד כיוון הנסיעה.



- 4 זוגות התיישבו במקומות אלו באקראי.  
 א. בכמה דרכים שונות ניתן להתיישב?  
 ב. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו זה לצד זה עם כיוון הנסיעה?  
 ג. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו זה לצד זה?  
 ד. מה ההסתברות שהזוג כהן ישבו כל אחד ליד החלון? (בכל שורה יש חלון).  
 ה. מה ההסתברות שהזוג כהן יישבו כך שכל אחד בכיוון נסיעה מנוגד?  
 ו. מה ההסתברות שהזוג כהן יישבו אחד מול השני פנים מול פנים.  
 ז. מה ההסתברות שכל הגברים ייסעו עם כיוון הנסיעה וכל הנשים תשבנה נגד כיוון הנסיעה?  
 ח. מה ההסתברות שכל זוג ישב אחד מול השני?

- 12** סיסמא מורכבת מ-5 תווים, תווים אלו יכולים להיות ספרה (0-9) ואותיות ה-ABC (26 אותיות). כל תו יכול לחזור על עצמו יותר מפעם אחת.  
 א. כמה סיסמאות שונות יש?  
 ב. כמה סיסמאות שונות יש שבהן כל התווים שונים?  
 ג. כמה סיסמאות שונות יש שבהן לפחות ספרה אחת ולפחות אות אחת?

- 13** מתוך קבוצה בת  $n$  אנשים רוצים לבחור 3 אנשים לוועדה. בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את הבחירה? בטא את תשובתך באמצעות  $n$ .  
 א. בוועדה אין תפקידים ויש לבחור 3 אנשים שונים לוועדה.  
 ב. בוועדה תפקידים שונים. וכל אדם לא יכול למלא יותר מתפקיד אחת.  
 ג. בוועדה תפקידים שונים ואדם יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

- 14** שני אנשים מטילים כל אחד מטבע  $n$  פעמים. בטאו באמצעות  $n$  את הסיכוי שלכל אחד מהם אותו מספר פעמים של התוצאה "ראש".

- 15** יוצרים קוד עם  $a$  ספרות (מותר לחזור על אותה ספרה בקוד).  
 חשבו את ההסתברויות הבאות (בטאו את תשובותיכם באמצעות  $a$ ):
- בקוד אין את הספרה 5.
  - בקוד מופיעה הספרה 3.
  - בקוד לא מופיעות ספרות אי זוגיות.
- 16** זוג קוביות הוטלו מספר פעמים. כמה פעמים יש להטיל את זוג הקוביות בכדי שבהסתברות של לפחות 0.5 תתקבל לפחות הטלה אחת (של הזוג) עם סכום תוצאות 12?
- 17** בוחרים באופן מקרי מספר בין 6 ספרות.
- מה הסיכוי שהספרה 5 תופיע בדיוק פעם אחת במספר?
  - מה הסיכוי שהספרה 4 תופיע לפחות פעם אחת וגם הספרה 0 תופיע לפחות פעם אחת במספר?
- 18** במשרד של דנה 5 תיקיות אותן היא מסדרת באקראי בטור. 3 תיקיות הן אדומות ו-2 תיקיות הן כחולות. דנה רשמה שני פתקים ושמה כל פתק במקום אקראי בין התיקיות (לכל פתק יש 4 אפשרויות למיקום).
- מה הסיכוי ששני הפתקים יהיו במקומות שונים?
  - מה הסיכוי שבין שני הפתקים יש שתי תיקיות אדומות ואין תיקיות כחולות?
  - מה הסיכוי שבין שני הפתקים יש בדיוק תיקיה אחת?
  - מה הסיכוי שבין שני הפתקים יש שתי תיקיות ואחת מהן כחולה?
- 19** לירון 6 עטים אותם הוא מכניס באקראי ל-3 קלמרים שונים. לכל עט הוא בוחר באופן מקרי קלמר.
- מה הסיכוי שיש בדיוק 2 קלמרים שבכל קלמר בדיוק 2 עטים?
  - מה הסיכוי שיש בדיוק קלמר אחד שבו בדיוק 2 עטים?
  - מה הסיכוי שיש בדיוק 3 קלמרים שבכל אחד בדיוק 2 עטים?
- 20** מסדרים  $n$  כדורים שונים ב  $n$  תאים שונים (תא יכול להכיל יותר מכדור אחד). מה הסיכוי שבתא  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) יהיו בדיוק  $k$  כדורים?
- 21** בתחרות ריצה עלו לגמר 6 מתמודדים. רק בשלושת המקומות הראשונים זוכים במדליות. נניח שכל המתמודדים מסיימים את התחרות.
- כמה אפשרויות יש לסיים את התחרות?
  - כמה אפשרויות יש לכך שמתמודד מספר 6 יקבל מדליה?
  - כמה אפשרויות יש לכך שמתמודד מספר 6 יקבל מדליה או שמתמודד מספר 2 יקבל מדליית זהב?

- (22)** מטילים קובייה הוגנת  $k$  פעמים.
- מה הסיכוי שהתוצאה הכי גדולה שהתקבלה היא  $j$  ?
  - מה הסיכוי שהתוצאה הכי קטנה שהתקבלה היא  $i$  ?
  - עבור  $i \leq j$ , מה הסיכוי שהתוצאה הכי גדולה היא  $j$  וגם התוצאה הכי קטנה היא  $i$  ?

## תשובות סופיות:

- (1) א. 102,400,000    ב. 78,960,960    ג. 658008
- (2) א. 810,000    ב. 657,720    ג. 27,405
- (3) א. 14,040,000    ב. 1,404,000    ג. 5,616,000    ד. 8,424,000
- (4) א. 0.00024    ב. 0.00098    ג. 0.05933    ד. 0.75000
- (5) א. 0.00098    ב. 0.17798    ג. 0.02929    ד. 0.02197
- (6) א.  $\frac{1}{4096}$     ב.  $\frac{1}{32,768}$     ג. 0.205    ד. 0.795
- ה. 0.0105    ו. 0.5129    ז. 0.1071
- (7) א. 4,200    ב. 50,400    ג. 604,800
- (8) א. 604,800    ב. 2,880    ג. 2,880
- (9) 0.238
- (10) א. 0.1512    ב. 0.014    ג. 0.059    ד.  $\frac{62}{10^6}$
- (11) א. 40,320    ב. 0.1071    ג. 0.2142    ד. 0.0357  
ה. 0.5714    ו. 0.1429    ז. 0.0143    ח. 0.0095
- (12) א. 60,466,176    ב. 45,239,040    ג. 48,484,800
- (13) א.  $\frac{n!}{3!(n-3)}$     ב.  $n \cdot (n-1)(n-2)$     ג.  $n^3$
- (14)  $\frac{1}{4^n} \cdot \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2$
- (15) א.  $0.9^a$     ב.  $1-0.9^a$     ג.  $0.5^a$
- (16) לפחות 25 פעמים.
- (17) א. 0.35721    ב. 0.1759
- (18) א. 0.75    ב. 0.075    ג. 0.375    ד. 0.15
- (19) א. 0    ב.  $\frac{450}{729}$     ג.  $\frac{90}{729}$
- (20)  $\frac{\binom{n}{k} (n-1)^{n-k}}{n^n}$
- (21) א. 720    ב. 360    ג. 432

$$(22) \quad \text{א. } \frac{j^k - (j-1)^k}{6^k} \quad \text{ב. } \frac{(7-i)^k - (6-i)^k}{6^k} \quad \text{ג. } \frac{(j-i+1)^k - 2 \cdot (j-i)^k + (j-i-1)^k}{6^k}$$

# מתמטיקה למחצית ב

פרק 5 - סטטיסטיקה בסיסית - מבוא לסטטיסטיקה

תוכן העניינים

1. איסוף נתונים והצגת נתונים ..... (ללא ספר)
2. טבלת שכיחויות ושכיחות יחסית ..... (ללא ספר)

# מתמטיקה למחצית ב

פרק 6 - סטטיסטיקה בסיסית - מדדים מרכזיים - החציון

תוכן העניינים

1. החציון ..... (ללא ספר)

# מתמטיקה למחצית ב

פרק 7 - סטטיסטיקה בסיסית - מדדים מרכזיים - הממוצע

תוכן העניינים

1. סיכום כללי ..... (ללא ספר)
2. שאלות יסודיות ..... (ללא ספר)
3. שאלות כלליות ..... (ללא ספר)

# מתמטיקה למחצית ב

פרק 8 - סטטיסטיקה בסיסית - מדדים מרכזיים - השכיח

תוכן העניינים

1. השכיח ..... (ללא ספר)

# מתמטיקה למחצית ב

## פרק 9 - סטטיסטיקה מתקדמת

### תוכן העניינים

1. הממוצע - חזרה כללית ..... (ללא ספר)
2. מציאת השכיחות בעזרת הממוצע ..... (ללא ספר)
3. ממוצעים של קבוצות ..... (ללא ספר)
4. הוספת נתונים וחישוב ממוצע חדש ..... (ללא ספר)
5. ממוצע גדל, קטן או לא משתנה ..... (ללא ספר)
6. שאלות עם שני נעלמים בממוצע ..... (ללא ספר)
7. סטיית תקן ..... (ללא ספר)
8. המשמעות של סטיית התקן ..... (ללא ספר)
9. השכיח והחציון - חזרה כללית ..... (ללא ספר)
10. שאלות שבהן סטיית התקן נתונה ..... (ללא ספר)
11. שאלות כוללות עם סטיית תקן, ממוצע, שכיח וחציון ..... (ללא ספר)

# מתמטיקה למחצית ב

פרק 10 - התפלגות נורמלית

תוכן העניינים

1. מבוא להתפלגות נורמלית ..... (ללא ספר)
2. השכיח והחציון בגרף ההתפלגות הנורמלית ..... (ללא ספר)
3. חישובי הסתברויות בגרף ההתפלגות הנורמלית ..... (ללא ספר)
4. חישובי כמויות ..... (ללא ספר)
5. סרטוט גרף התפלגות וחישובי סימטריה ..... (ללא ספר)
6. מציאת הממוצע וסטיית התקן ..... (ללא ספר)
7. חצאי סטיית תקן בגרף ההתפלגות ..... (ללא ספר)
8. שאלות מסכמות כדוגמת המאגר ..... (ללא ספר)

# מתמטיקה למחצית ב

פרק 11 - וקטורים גיאומטריים - רמת 5 יחידות

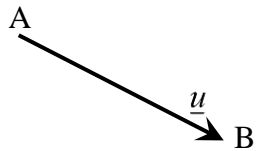
תוכן העניינים

- 80 ..... 1. הגדרות וכללים יסודיים
- 85 ..... 2. וקטורים הפורשים מישור
- 89 ..... 3. מכפלה סקלרית וחישוב גודל של וקטור

## הגדרות וכללים יסודיים:

### סיכום כללי:

#### הגדרה כללית:

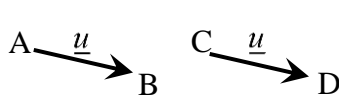


להלן תיאור של ווקטור גיאומטרי: ווקטור שמוצאו בנקודה A ומסתיים בנקודה B יסומן באופן הבא:  $\overline{AB}$ .

ניתן לסמן ווקטור באות קטנה באופן הבא:  $\underline{u}$  (אותיות מקובלות לסימון הן:  $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ ).  
מהאיור לעיל מתקיים:  $\overline{AB} = \underline{u}$ .

#### קשרים בין ווקטורים:

- ווקטורים שווים: שני ווקטורים נקראים שווים אם הם זהים בגודלם ובכיוונם.



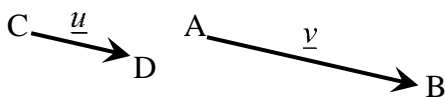
דוגמא לווקטורים שווים: מתקיים:  $\overline{AB} = \overline{CD}$ .

- ווקטורים מקבילים: שני ווקטורים שכיוונם זהה נקראים מקבילים.

ניתן להביע את האחד באמצעות השני ע"י כפל בסקלר.

ווקטורים מקבילים נקראים גם "ווקטורים תלויים ליניארית".

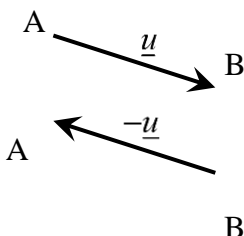
דוגמא לתלות בין ווקטורים מקבילים:



עבור  $\alpha > 1$  מתקיים:  $\underline{v} = \alpha \underline{u}$ , או:  $\overline{AB} = \alpha \cdot \overline{CD}$ .

- אם זוג ווקטורים במרחב:  $\overline{AB} = \alpha \underline{u} + \beta \underline{v} + \gamma \underline{w}$  ו-  $\overline{CD} = a \underline{u} + b \underline{v} + c \underline{w}$  מקבילים

אז מתקיים:  $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}$ .



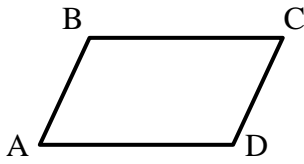
- ווקטור המסומן  $\overline{BA}$  הוא בעל גודל זהה לווקטור  $\overline{AB}$

וכיוון הפוך לו. במקרה זה מתקיים:  $\overline{BA} = -\underline{u}$ .

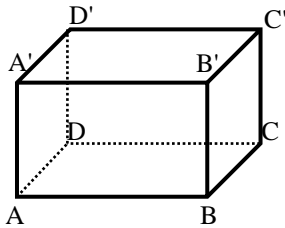
#### הערה:

שני ווקטורים  $\underline{u}$  ו-  $\underline{v}$  יקראו מקבילים אם מתקיים:  $\underline{v} = \alpha \underline{u}$  כאשר הגודל  $\alpha$  יכול לקבל כל ערך מספרי בתחום  $\alpha \neq 0$ . בפרט עבור  $\alpha < 0$  כיוונם הפוך ב-  $180^\circ$ .

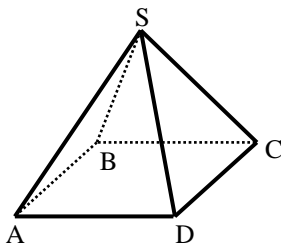
**שאלות:**



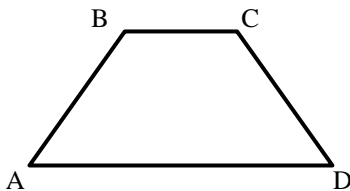
(1) במקבילית ABCD נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$   
מצא את כל הווקטורים במקבילית ששווים ל-  $\underline{u}$  או  $\underline{v}$ .



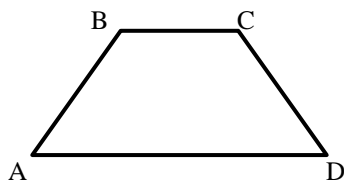
(2) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $\overline{AA'} = \underline{w}$   
מצא את כל הווקטורים בתיבה ששווים ל-  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  או  $\underline{w}$ .



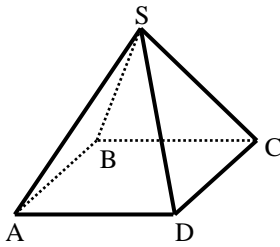
(3) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $\overline{AS} = \underline{w}$   
מצא את כל הווקטורים שבפירמידה השווים ל-  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  או  $\underline{w}$ .



(4) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $AD = 3BC$   
מצא את כל הווקטורים בטרפז שניתן להביע באמצעות  $\underline{u}$  או  $\underline{v}$ .



(5) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $AD = 3BC$   
א. הבע באמצעות  $\underline{u}$  ו-  $\underline{v}$  את הווקטורים  $\overline{AC}$  ו-  $\overline{DC}$ .  
ב. הנקודה E היא אמצע הצלע AD. הבע באמצעות  $\underline{u}$  ו-  $\underline{v}$  את הווקטור  $\overline{BE}$ .  
ג. הנקודה F היא אמצע הצלע CD. הבע באמצעות  $\underline{u}$  ו-  $\underline{v}$  את הווקטור  $\overline{AF}$ .



6) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע

נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $\overline{AS} = \underline{w}$ .

א. הבע באמצעות  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  ו- $\underline{w}$  את

הווקטורים  $\overline{AC}$  ו- $\overline{SC}$ .

ב. הנקודה N היא אמצע המקצוע SD.

הבע באמצעות  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  ו- $\underline{w}$  את הווקטור  $\overline{BN}$ .

7) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש:  $AP:PB = 2:3$ . נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ .

הבע באמצעות  $\underline{u}$  את הווקטורים  $\overline{AP}$  ו- $\overline{PB}$ .

8) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש:  $AP:PB = 3:5$ . נתון:  $\overline{AP} = \underline{u}$ .

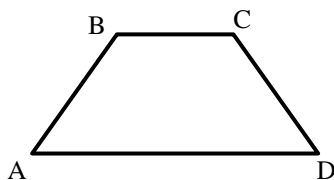
הבע באמצעות  $\underline{u}$  את הווקטורים  $\overline{PB}$  ו- $\overline{AB}$ .

9) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש:  $\frac{AP}{AB} = \alpha$ . נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ .

הבע באמצעות  $\underline{u}$  את הווקטורים  $\overline{AP}$  ו- $\overline{PB}$ .

10) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש:  $\frac{AP}{PB} = \alpha$ . נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ .

הבע באמצעות  $\underline{u}$  את הווקטורים  $\overline{AP}$  ו- $\overline{PB}$ .



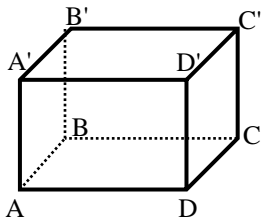
11) בטרפז ABCD שבשרטוט

נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $AD = 3BC$ .

הנקודה F נמצאת על הצלע CD

ומקיימת:  $\frac{DF}{FC} = \beta$ .

הבע באמצעות  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  ו- $\beta$  את הווקטור  $\overline{AF}$ .

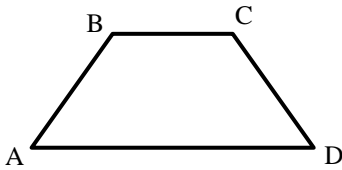


**(12)** בתיבה  $ABCD A'B'C'D'$  נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $\overline{AA'} = \underline{w}$

הנקודה P נמצאת על המקצוע  $A'B'$  ומקיימת:  $\frac{AP}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע  $CC'$  ומקיימת:  $\frac{CQ}{QC'} = \beta$

הבע באמצעות  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ ,  $\underline{w}$  ו- $\alpha$  ו- $\beta$  את הווקטור:  $\overline{PQ}$ .

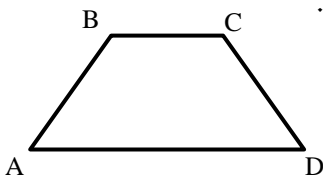


**(13)** בטרפז ABCD שבשרטוט נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $AD = 3BC$

הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת:  $\frac{AF}{FD} = \alpha$

מצא את ערכו של  $\alpha$  שבעבורו מתקיים  $\overline{FE} \parallel \overline{AB}$ .

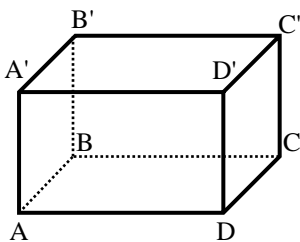


**(14)** בטרפז ABCD שבשרטוט נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $AD = 3BC$

הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת:  $\frac{AF}{FD} = \alpha$

מצא את ערכו של  $\alpha$  שבעבורו מתקיים:  $\overline{FE} \parallel \overline{AC}$ .



**(15)** בתיבה  $ABCD A'B'C'D'$  נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $\overline{AA'} = \underline{w}$

הנקודה P נמצאת על המקצוע  $A'B'$  ומקיימת:  $\frac{AP}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע  $CC'$  ומקיימת:  $\frac{CQ}{QC'} = \beta$

א. הבע באמצעות  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ ,  $\underline{w}$  ו- $\alpha$  ו- $\beta$  את הווקטור  $\overline{PQ}$ .

ב. האם קיימים ערכי  $\alpha$  ו- $\beta$  שבעבורם  $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$ ? נמק.

ג. הנקודה E היא מפגש אלכסוני הפאה  $ABB'A'$ .

מצא את ערכי  $\alpha$  ו- $\beta$  אם נתון כי  $\overline{PQ} \parallel \overline{EC}$ .

## תשובות סופיות:

$$\underline{u} = \overline{DC}, \underline{v} = \overline{BC} \quad (1)$$

$$\underline{w} = \overline{AA'} = \overline{DD'} = \overline{CC'} = \overline{BB'}, \underline{u} = \overline{DC} = \overline{D'C'} = \overline{A'B'} = \overline{AB}, \underline{v} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{A'D'} = \overline{B'C'} \quad (2)$$

$$\underline{u} = \overline{AB} = \overline{DC}, \underline{v} = \overline{AD} = \overline{BC}, \underline{w} = \overline{AS} \quad (3)$$

$$\overline{BC} = \frac{1}{3}\underline{v} \quad (4)$$

$$\overline{AF} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{2}{3}\underline{v} \quad \text{ג.} \quad \overline{BE} = -\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} \quad \text{ב.} \quad \overline{AC} = \underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v}, \overline{DC} = \underline{u} - \frac{2}{3}\underline{v} \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\overline{BN} = -\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w} \quad \text{ב.} \quad \overline{AC} = \underline{u} + \underline{v}, \overline{SC} = \underline{u} + \underline{v} - \underline{w} \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$\overline{AP} = \frac{2}{5}\underline{u}, \overline{BP} = \frac{3}{5}\underline{u} \quad (7)$$

$$\overline{AB} = \frac{8}{3}\underline{u}, \overline{PB} = \frac{5}{3}\underline{u} \quad (8)$$

$$\overline{AP} = \alpha\underline{u}, \overline{PB} = (1-\alpha)\underline{u} \quad (9)$$

$$\overline{AP} = \frac{\alpha}{1+\alpha}\underline{u}, \overline{PB} = \frac{1}{1+\alpha}\underline{u} \quad (10)$$

$$\overline{AF} = \frac{\beta}{1+\beta}\underline{u} + \frac{3+\beta}{3+3\beta}\underline{v} \quad (11)$$

$$\overline{PQ} = (1-\alpha)\underline{u} + \underline{v} - \frac{1}{1+\beta}\underline{w} \quad (12)$$

$$\alpha = 2 \quad (13)$$

$$\alpha = 1 \quad (14)$$

$$\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1 \quad \text{ג.} \quad \overline{PQ} = (1-\alpha)\underline{u} + \underline{v} - \frac{1}{1+\beta}\underline{w} \quad \text{א.} \quad (15)$$

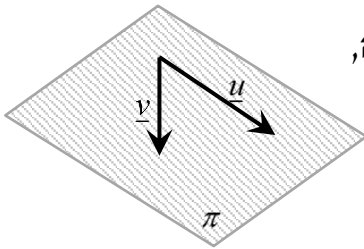
## ווקטורים הפורשים מישור:

### סיכום כללי:

#### ווקטורים הפורשים מישור:

כל שני ווקטורים שאינם מקבילים, כלומר, בלתי תלויים זה בזה, פורשים מישור.

דוגמא:



הווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  בעלי כוונים שונים ולכן פורשים את המישור  $\pi$ .

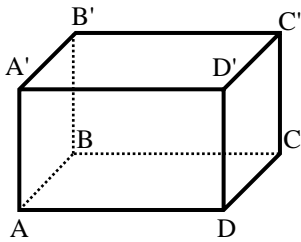
#### קומבינציה ליניארית של ווקטורים:

- כל ווקטור שנמצא במישור (או מקביל למישור זה) ניתן להצגה ע"י קומבינציה ליניארית של שני ווקטורים הפורשים את המישור.
- כל ווקטור שהוא קומבינציה ליניארית של שני ווקטורים הפורשים את המישור, מקביל למישור.
- אם ניתן להביע ווקטור שקומבינציה ליניארית של שני ווקטורים אחרים (או יותר) אז שלושת הווקטורים נקראים תלויים ליניארית (ניתן לבטא כל ווקטור באמצעות האחרים).

#### דוגמא:

עבור המישור הנפרש לעיל, ניתן להציג כל ווקטור  $\underline{w}$  המוכל, או מקביל למישור  $\pi$  באופן הבא:  $\underline{w} = \alpha \cdot \underline{u} + \beta \cdot \underline{v}$  כאשר:  $\alpha, \beta$  מספרים ממשיים כלשהם. במקרה זה שלושת הווקטורים  $\underline{u}, \underline{v}$  ו- $\underline{w}$  נקראים תלויים ליניארית.

**שאלות:**



16) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $\overline{AA'} = \underline{w}$ .

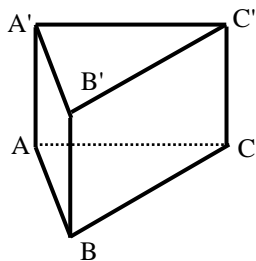
הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת:  $\frac{AP}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת:  $\frac{CQ}{QC'} = \beta$

א. הבע באמצעות  $\alpha$ ,  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ ,  $\underline{w}$  ו- $\beta$  את הווקטור  $\overline{PQ}$ .

ב. מהו ערכו של  $\alpha$  שבעבורו הווקטור  $\overline{PQ}$  מקביל לפאה ADD'A'?

ג. האם קיים ערך של  $\beta$  שבעבורו הווקטור  $\overline{PQ}$  מקביל לבסיס ABCD?



17) נתונה מנסרה משולשת ABCA'B'C' ובה נתון:

$\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AC} = \underline{v}$ ,  $\overline{AA'} = \underline{w}$ .

הנקודה M נמצאת על המקצוע A'C' ומקיימת:  $\frac{AM}{MC'} = \alpha$

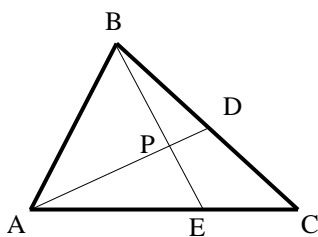
והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת:  $\frac{BN}{BC} = \beta$

א. הבע באמצעות  $\alpha$ ,  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ ,  $\underline{w}$  ו- $\beta$  את הווקטור  $\overline{NM}$ .

ב. מהו ערכו של  $\beta$  שבעבורו הווקטור  $\overline{NM}$  מקביל לפאה ACC'A'?

ג. נתון כי הווקטור  $\overline{NM}$  מקביל לפאה ABB'A'.

הבע את  $\alpha$  באמצעות  $\beta$ .



18) במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע BC

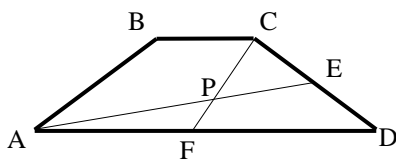
והנקודה E נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים:  $\frac{AE}{CE} = 2$ .

הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.

נגדיר:  $\overline{BP} = s \cdot \overline{BE}$ ,  $\overline{AP} = t \cdot \overline{AD}$ ; וכן,  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AC} = \underline{v}$ .

א. הבע באמצעות  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ ,  $t$  ו- $s$  את הווקטור  $\overline{AP}$  בשתי דרכים שונות.

ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AD ואת הקטע BE.



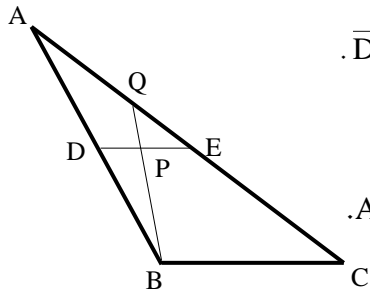
19) בטרפז  $ABCD$ ,  $(AD \parallel BC)$ , שבשרטוט נתון:  $AD = 3BC$ .

הנקודה  $E$  נמצאת באמצע הצלע  $CD$

והנקודה  $F$  נמצאת באמצע הצלע  $AD$ .

הנקודה  $P$  היא מפגש הקטעים  $AE$  ו- $CF$ .

מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה  $P$  את הקטע  $AE$  ואת הקטע  $CF$ .



20) במשולש  $ABC$  הנקודה  $D$  היא אמצע הצלע  $AB$

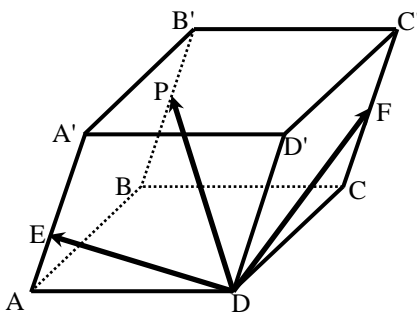
והנקודה  $E$  נמצאת על הצלע  $AC$  כך שמתקיים:  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ .

הנקודה  $P$  היא אמצע הקטע  $DE$  והמשך הקטע  $BP$

חותך את הצלע  $AC$  בנקודה  $Q$ .

א. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה  $Q$  את הצלע  $AC$ .

ב. חשב את היחס:  $\frac{S_{\Delta QPE}}{S_{\Delta DPB}}$ .



21) במקבילון  $ABCD A'B'C'D'$

נתון:  $\overline{DA} = \underline{u}$ ,  $\overline{DC} = \underline{v}$ ,  $\overline{DD'} = \underline{w}$ .

הנקודה  $F$  נמצאת באמצע המקצוע  $CC'$ ,

הנקודה  $E$  נמצאת על המקצוע  $AA'$

ומקיימת:  $A'E = 2AE$  והנקודה  $P$  נמצאת על

המקצוע  $BB'$  ומקיימת:  $\overline{B'P} = k \cdot \overline{B'B}$ .

נתון:  $\overline{DP} = t \cdot \overline{DE} + s \cdot \overline{DF}$ .

א. הבע באמצעות  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ ,  $\underline{w}$  ו- $k$  את הווקטור  $\overline{DP}$ .

ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה  $P$  את המקצוע  $BB'$ .

ג. האם הנקודות  $D$ ,  $E$ ,  $F$  ו- $P$  נמצאות על אותו מישור? נמק.

## תשובות סופיות:

$$\overline{PQ} = (1-\alpha)\underline{u} + \underline{v} - \frac{1}{1+\beta}\underline{w} \quad \text{א. (16)}$$

ג. לא.                      ב.  $\alpha = 1$

$$\overline{NM} = (\beta-1)\underline{u} + \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} - \beta\right)\underline{v} + \underline{w} \quad \text{א. (17)}$$

ג.  $\alpha = \frac{\beta}{1-\beta}$                       ב.  $\beta = 1$

$$\overline{AP} = \frac{1}{2}t\underline{u} + \frac{1}{2}t\underline{v}, \quad \overline{AP} = (1-s)\underline{u} + \frac{2}{3}s\underline{v} \quad \text{א. (18)}$$

ב.  $BP:PE = 3:2, AP:PD = 4:1$

$$AP:PE = 2:1, CP:PF = 2:1 \quad \text{(19)}$$

$$\frac{S_{QPE}}{S_{DPB}} = \frac{1}{3} \quad \text{ב.}$$

א.  $AQ:QC = 1:2$                       (20)

$$\overline{DP} = \underline{u} + \underline{v} + (1-k)\underline{w} \quad \text{א. (21)}$$

ב.  $BP:PB = 1:5$                       ג. כן.

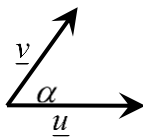
## מכפלה סקלרית וחישוב גודל של וקטור:

### סיכום כללי:

מכפלה סקלרית של שני ווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  תסומן:  $\underline{u} \cdot \underline{v}$  ותחושב ע"י הנוסחה הבאה:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$$

כאשר  $\alpha$  היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים כמתואר באיור.



ניתן למצוא את הזווית שבין שני ווקטורים ע"י:  $\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$

גודל של ווקטור נתון ע"י:  $|\underline{u}| = \sqrt{u^2}$ , או:  $|\underline{u}|^2 = u^2$

### הערה:

המכפלה הסקלרית  $\underline{u} \cdot \underline{v}$  בין שני ווקטורים מקבלת ערך מספרי בלבד! היא יכולה להיות חיובית, שלילית או אפס כפי שנראה בהמשך.

### שאלות:

22) חשב את המכפלה הסקלרית של הווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  על פי הנתונים על גודלם והזווית שביניהם:

ב.  $\alpha = 120^\circ$ ,  $|\underline{v}| = 5$ ,  $|\underline{u}| = 4$

א.  $\alpha = 60^\circ$ ,  $|\underline{v}| = 2$ ,  $|\underline{u}| = 3$

ד.  $\alpha = 180^\circ$ ,  $|\underline{v}| = 3$ ,  $|\underline{u}| = 8$

ג.  $\alpha = 30^\circ$ ,  $|\underline{v}| = 6$ ,  $|\underline{u}| = 2$

ו.  $\alpha = 90^\circ$ ,  $|\underline{v}| = 4$ ,  $|\underline{u}| = 7$

ה.  $\alpha = 0^\circ$ ,  $|\underline{v}| = 5$ ,  $|\underline{u}| = 3$

23) חשב את הזווית בין הווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  על פי הנתונים על גודלם והמכפלה הסקלרית שלהם:

ב.  $\underline{u} \cdot \underline{v} = -4\sqrt{3}$ ,  $|\underline{v}| = 2$ ,  $|\underline{u}| = 4$

א.  $\underline{u} \cdot \underline{v} = 6$ ,  $|\underline{v}| = 4$ ,  $|\underline{u}| = 3$

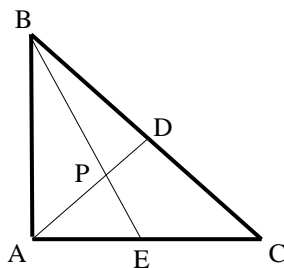
ד.  $\underline{u} \cdot \underline{v} = 12$ ,  $|\underline{v}| = 6$ ,  $|\underline{u}| = 2$

ג.  $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ ,  $|\underline{v}| = 5$ ,  $|\underline{u}| = 9$

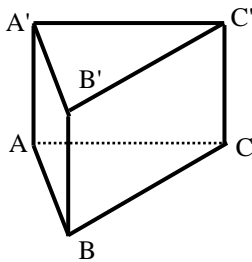
**(24)** נתונים שני וקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  שאורכם:  $|\underline{u}|=6$ ,  $|\underline{v}|=3$ . הזווית ביניהם היא  $120^\circ$ .  
חשב את גודלו של הווקטור  $\overline{PQ}$  שמוגדר:  $\overline{PQ} = 2\underline{u} - 3\underline{v}$ .

**(25)** נתונים שני וקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  המאונכים זה לזה שאורכם:  $|\underline{u}|=4$ ,  $|\underline{v}|=5$ .  
חשב את גודלו של הווקטור  $\overline{MN}$  שמוגדר:  $\overline{MN} = 0.5\underline{u} - \underline{v}$ .

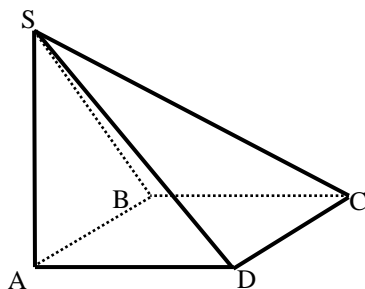
**(26)** נתונים שני וקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  שאורכם:  $|\underline{u}|=6$ ,  $|\underline{v}|=3$ . הזווית ביניהם היא  $120^\circ$ .  
חשב את גודל הזווית  $\sphericalangle QPM$  אם נתון:  $\overline{PM} = 4\underline{u} + \underline{v}$ ,  $\overline{PQ} = 2\underline{u} - 3\underline{v}$ .



**(27)** המשולש ABC הוא משולש ישר זווית ( $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ ).  
הנקודה D היא אמצע היתר BC והנקודה E נמצאת על הניצב AC.  
הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.  
נתון:  $AC = 12$ ,  $AB = 8$ ,  $\frac{AP}{PD} = 3$ .  
חשב את גודל הזווית  $\sphericalangle DPC$ .

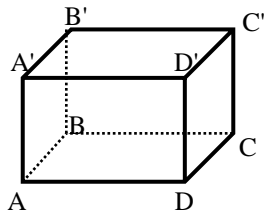


**(28)** נתונה מנסרה משולשת וישרה ABCA'B'C' שבסיסה משולש שווה צלעות שאורך כל אחת מצלעותיו הוא 6. גובה המנסרה הוא 8.  
הנקודה M היא אמצע המקצוע A'C' והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת:  $BN = 2CN$ .  
נסמן:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AC} = \underline{v}$ ,  $\overline{AA'} = \underline{w}$ .  
חשב את גודל הזווית:  $\sphericalangle MAN$ .



**(29)** בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע המקצוע SA הוא גובה הפירמידה.  
נתון:  $AB = AD = \frac{1}{2} AS = k$ .  
נסמן:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $\overline{AS} = \underline{w}$ .  
הנקודה Q היא אמצע המקצוע SC והנקודה P היא אמצע המקצוע SB.  
חשב את גודל הזווית:  $\sphericalangle PAQ$ .

**(30)** בתיבה  $ABCD A'B'C'D'$  נתון:  $\overline{AA'} = \underline{w}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $AB = \frac{1}{\sqrt{2}} AD = AA'$ .



הנקודה P נמצאת על המקצוע  $A'B'$  ומקיימת:  $\frac{AP}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q היא אמצע המקצוע  $DD'$ .

א. מהו ערכו של  $\alpha$  שבעבורו מתקיים:  $|\overline{AP}| = \frac{5}{6} |\overline{AQ}|$ ?

ב. הבע באמצעות  $\alpha$  את  $\cos \angle PAQ$

והראה כי לכל ערך של  $\alpha$  הזווית  $\angle PAQ$  חדה.

ג. מהו ערכו של  $\alpha$  שבעבורו הזווית  $\angle PAQ$  מקיימת:  $\cos \angle PAQ = \frac{2}{3\sqrt{5}}$ ?

**(31)** הוכח כי בכל מרובע ABCD מתקיים:  $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$

**(32)** נתון מלבן ABCD. הוכח כי לכל נקודה כלשהי P מתקיים:  $\overline{PA} \cdot \overline{PC} = \overline{PB} \cdot \overline{PD}$

**(33)** נתון ריבוע ABCD. הנקודה P היא אמצע הצלע BC והנקודה Q היא אמצע הצלע CD.

הוכח כי מתקיים:  $S_{ABCD} = \overline{AP} \cdot \overline{AQ}$

**(34)** נתון מרובע ABCD. הנקודה P היא אמצע הצלע AB והנקודה Q היא אמצע הצלע CD.

הוכח כי מתקיים:  $\overline{PQ} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}$

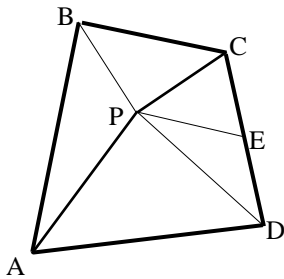
**(35)** נתונה פירמידה משולשת SABC שבה  $\overline{AS} \perp \overline{BC}$  ו-  $\overline{BS} \perp \overline{AC}$

הוכח:  $\overline{CS} \perp \overline{AB}$

**(36)** הוכח: וקטור המאונך לשני וקטורים בלתי תלויים במישור מאונך לכל הווקטורים שבמישור.

37) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. הנקודה M היא מפגש התיכונים במשולש ABC. הוכח:  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 0$ .
- ב. נתונה פירמידה משולשת SABC. הנקודה P היא מפגש התיכונים בפאה SBC. הוכח:  $\vec{AP} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AS})$ .
- ג. נתון בנוסף כי  $\vec{AS}$  ו- $\vec{AP}$  מאונכים ל- $\vec{BC}$ . הוכח כי  $AB = AC$ . (הדרכה: סמן  $\vec{AB} = \underline{u}$ ,  $\vec{AC} = \underline{v}$ ,  $\vec{AS} = \underline{w}$ ).



38) הנקודה P נמצאת בתוך מרובע כלשהו ABCD

כך שהמשולשים APD ו-BPC הם משולשים ישרי זווית וש"ש ( $AP = PD$ ,  $BP = PC$ ).

הנקודה E היא אמצע הצלע CD. הוכח:  $\vec{PE} \perp \vec{AB}$ . (הדרכה: סמן  $\vec{PB} = \underline{a}$ ,  $\vec{PC} = \underline{b}$ ,  $\vec{PA} = \underline{c}$ ,  $\vec{PD} = \underline{d}$ ).

39) בטראדר SABC נתון:  $\vec{AB} = \underline{u}$ ,  $\vec{AC} = \underline{v}$ ,  $\vec{AS} = \underline{w}$ .

הנקודה P נמצאת על המקצוע AS ומקיימת:  $\vec{AP} = \alpha \cdot \vec{AS}$ .

הנקודה Q נמצאת על הפאה SBC ומקיימת:  $\vec{SQ} = \beta(\vec{SB} + \vec{SC})$ .

א. מצא את הקשר בין  $\alpha$  ו- $\beta$  שבעבורו  $\vec{PQ}$  מקביל למישור ABC.

ב. נתון:  $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$ . הוכח:  $\vec{PQ} \perp \vec{BC}$ .  $AB = AC$ .

40) נתונה פירמידה שבסיסה מלבן. הוכח כי אם שלושה המקצועות הצדדיים שבה שווים, אז גם המקצוע הצדדי הרביעי שווה להם.

**תשובות סופיות:**

- (22) א. 3    ב. -10    ג.  $6\sqrt{3}$     ד. -24    ה. 15    ו. 0.
- (23) א.  $60^\circ$     ב.  $150^\circ$     ג.  $90^\circ$     ד.  $0^\circ$
- (24)  $|\overline{PQ}| = 18.248$
- (25)  $|\overline{MN}| = \sqrt{29}$
- (26)  $31.87^\circ$
- (27)  $55.49^\circ$
- (28)  $70.623^\circ$
- (29)  $24.095^\circ$
- (30) א.  $\alpha = \frac{3}{4}$     ב.  $\cos(\sphericalangle PAQ) = \frac{1}{3\sqrt{1+\alpha^2}}$     ג.  $\alpha = \frac{1}{2}$
- (31) שאלת הוכחה.
- (32) שאלת הוכחה.
- (33) שאלת הוכחה.
- (34) שאלת הוכחה.
- (35) שאלת הוכחה.
- (36) שאלת הוכחה.
- (37) שאלת הוכחה.
- (38) שאלת הוכחה.
- (39) א.  $\alpha + 2\beta = 1$     ב. שאלת הוכחה.
- (40) שאלת הוכחה.

# מתמטיקה למחצית ב

## פרק 12 - וקטורים אלגבריים - רמת 5 יחידות

### תוכן העניינים

94	1. שאלות יסודיות עם וקטורים אלגבריים
98	2. פעולות אלגבריות בין וקטורים
100	3. גודל של וקטור
101	4. וקטורים מקבילים ושווים
102	5. זווית בין וקטורים
103	6. הצגה פרמטרית של ישר
106	7. מצב הדדי בין ישרים
109	8. הצגה פרמטרית של מישור
111	9. משוואת מישור
112	10. מעברים בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור
113	11. מישורים המקבילים לצירים
114	12. מצב הדדי בין ישר ומישור
116	13. מצב הדדי בין מישורים
117	14. ישר חיתוך בין מישורים
(ללא ספר)	15. חישובי זוויות שונות
118	16. זווית בין שני ישרים
120	17. זווית בין ישר ומישור
121	18. זווית בין שני מישורים
(ללא ספר)	19. חישובי מרחקים
122	20. מרחק בין שתי נקודות במרחב
123	21. מרחק בין נקודה לישר
124	22. מרחק בין נקודה למישור
125	23. מרחק בין ישרים מקבילים
126	24. מרחק בין ישר למישור
127	25. מרחק בין מישורים מקבילים
128	26. מרחק בין ישרים מצטלבים

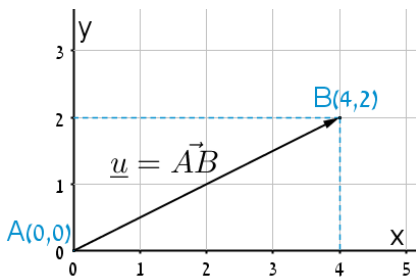
(ללא ספר)	27. סיכום מרחקים
129	28. שאלות מסכמות בוקטורים
132	29. שאלות הנפתרות עם מכפלה וקטורית

## שאלות יסודיות עם וקטורים אלגבריים:

סיכום כללי:

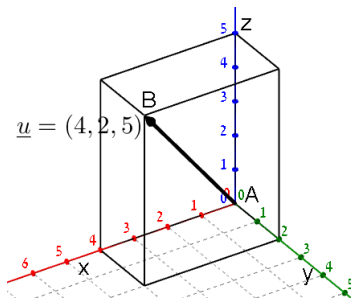
הגדרה כללית:

וקטור שמוצאו בראשית הצירים  $(0,0)$  וסופו בנקודה  $(x, y)$  במישור ייכתב בצורתו האלגברית באופן הבא:  $\underline{u} = (x, y)$ .



דוגמאות:

- הווקטור  $\underline{u} = (4, 2)$  נמצא במישור  $[xy]$ , מוצאו בנקודה  $A(0,0)$  וסופו בנקודה  $B(4,2)$ .



- הווקטור:  $\underline{u} = (4, 2, 5)$  נמצא במרחב הקרטזי. מוצאו בראשית הצירים  $A(0,0,0)$  וסופו בנקודה:  $B(4,2,5)$ .

וקטור שמוצאו אינו בראשית הצירים:

וקטור שמוצאו בנקודה  $A(x_1, y_1, z_1)$  וסופו בנקודה  $B(x_2, y_2, z_2)$  ייכתב ע"י חישוב הפרש נקודת סופו ממוצאו באופן הבא:  $\underline{u} = \overline{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ .

אמצע קטע וחלוקת קטע ביחס נתון:

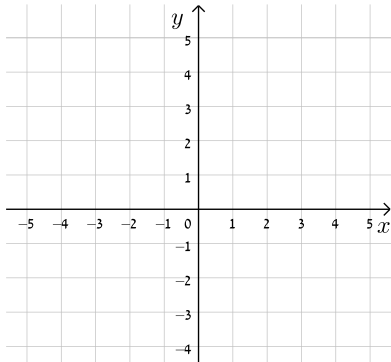
- אמצע הקטע M שקצותיו הם:  $A(x_1, y_1, z_1)$  ו-  $B(x_2, y_2, z_2)$

$$\text{הוא: } x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}, z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו  $A(x_1, y_1, z_1)$  ו-  $B(x_2, y_2, z_2)$  ביחס

$$\text{של } k:l \text{ הם: } x_P = \frac{k \cdot x_1 + l \cdot x_2}{k+l}; y_P = \frac{k \cdot y_1 + l \cdot y_2}{k+l}; z_P = \frac{k \cdot z_1 + l \cdot z_2}{k+l}$$

## שאלות:



1) שרטט את הווקטורים הבאים:

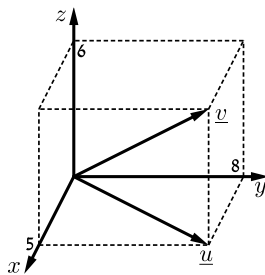
א.  $\underline{u} = (4, 2)$

ב.  $\underline{v} = (-5, 1)$

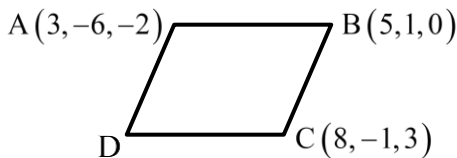
ג.  $\underline{w} = (3, -4)$

ד.  $\underline{a} = (0, 3)$

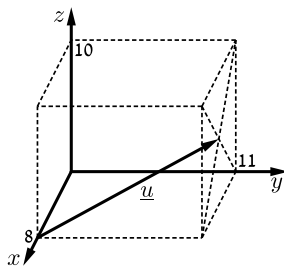
ה.  $\underline{b} = (-5, 0)$



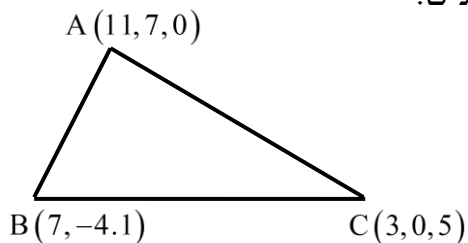
2) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך. מצא מהו הווקטור  $\underline{u}$  ומהו הווקטור  $\underline{v}$  על פי השרטוט.



3) בשרטוט נתונה מקבילית ששיעורי שלושה מקודקודיה נתונים (ראה איור). מצא את שיעורי הקודקוד D.



4) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך. מצא מהו הווקטור  $\underline{u}$  על פי השרטוט.



5) בשרטוט נתון משולש ששיעורי קודקודיו נתונים. מצא את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

6) מצא את  $x, y, z$  אם נתון ש-  $\underline{u} = \underline{v}$  כאשר:

$$\underline{u} = (4, -1, 2), \quad \underline{v} = (z-2, y+1, x-3)$$

7) ענה על הסעיפים הבאים :

א. מצא את הווקטור  $\overline{AB}$  אם נתונות הנקודות  $A(-3,5)$  ו-  $B(6,1)$ .

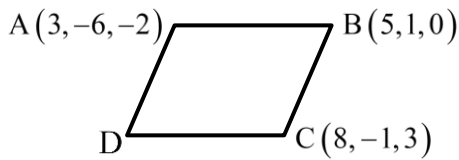
ב. מצא את שיעורי הנקודה  $Q$  אם נתונה הנקודה  $P(8,11)$  והווקטור  $\overline{PQ} = (4,-3)$ .

8) ענה על הסעיפים הבאים :

א. מצא את הווקטור  $\overline{EF}$  אם נתונות הנקודות  $E(2,0,-3)$  ו-  $F(7,-1,-3)$ .

ב. מצא את שיעורי הנקודה  $N$  אם נתונה הנקודה  $M(0,-4,1)$

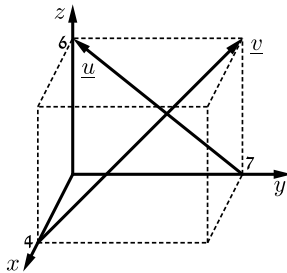
והווקטור  $\overline{MN} = (-1,-1,9)$ .



9) בשרטוט נתונה מקבילית ששיעורי שלושה

מקודקודיה נתונים.

מצא את שיעורי הקודקוד  $D$ .



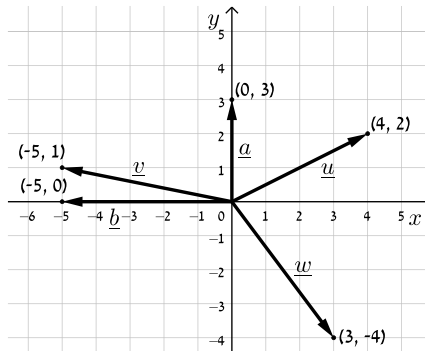
10) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת

הצירים שלפניך.

מצא מהו הווקטור  $\underline{u}$  ומהו הווקטור  $\underline{v}$ .

## תשובות סופיות:

1) להלן סרטוט:



2)  $\underline{u} = (5, 8, 0)$  ,  $\underline{v} = (5, 8, 6)$

3)  $D(6, -8, 1)$

4)  $\underline{u} = (4, 11, 5)$

5)  $(7, 1, 2)$

6)  $x = 5$  ,  $y = -2$  ,  $z = 6$

7) א.  $\overrightarrow{AB} = (9, -4)$  ב.  $Q(12, 8)$

8) א.  $\overrightarrow{EF} = (5, -1, 0)$  ב.  $N(-1, -5, 10)$

9)  $D(6, -8, 1)$

10)  $\underline{u} = (0, -7, 6)$  ,  $\underline{v} = (-4, 7, 6)$

## פעולות אלגבריות בין וקטורים:

### סיכום כללי:

#### מכפלה סקלרית בהצגה אלגברית:

מכפלה סקלרית של שני ווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  תסומן:  $\underline{u} \cdot \underline{v}$  ותחושב ע"י הנוסחה הבאה:  $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$  כאשר  $\alpha$  היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים.

מכפלה סקלרית של ווקטורים:  $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\underline{v} = (x_2, y_2, z_2)$  תחושב באופן הבא:  $\underline{u} \cdot \underline{v} = (x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

### שאלות:

**11** נתונים הווקטורים הבאים:  $\underline{u} = (4, 0, 9)$ ,  $\underline{v} = (-1, 3, -5)$   
 חשב את ערכי הווקטורים הבאים:  $\underline{u} + \underline{v}$ ,  $\underline{u} - \underline{v}$ ,  $\underline{u} - 2\underline{v}$ ,  $3\underline{u} + 2\underline{v}$

**12** נתונים הווקטורים:  $\underline{u} = (-3, 1, 4)$ ,  $\underline{v} = (4, -2, -6)$ ,  $\underline{w} = (2, 6, -5)$   
 חשב את:

א. $2\underline{u}$	ב. $-0.5\underline{v}$	ג. $3\underline{u} - 2\underline{v}$
ד. $0.25\underline{v} - 0.5\underline{u}$	ה. $\underline{v} - 0.5\underline{u} + 2\underline{w}$	ו. $2\underline{v} - \underline{u} + 4\underline{w}$

**13** נתונות הנקודות הבאות:  $A(1, -3, 0)$ ,  $B(4, 2, -1)$ ,  $C(3, -1, 2)$   
 מצא את הווקטורים הבאים:

א. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$	ב. $2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AB}$	ג. $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$
--	--	---

**14** נתונים שלושה ווקטורים:  $\underline{u} = (6, -1, z)$ ,  $\underline{v} = (0, y, 4)$ ,  $\underline{w} = (x, 5, -10)$

א. מצא את ערכם של  $x, y, z$  המקיימים:  $\underline{u} + 2\underline{v} = \underline{w}$

ב. מצא את ערכם של  $x, y, z$  המקיימים:  $2\underline{v} - 3\underline{w} = \frac{1}{2}(\underline{u} + \underline{v})$

ג. כיצד תשתנה התוצאה של סעיף א' אם:  $\underline{u} = (6, y, z)$ ,  $\underline{v} = (y-1, 2, x)$ ,  $\underline{w} = (x, 2z, -10)$ ?

15) נתונים הווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$ .

א. חשב את תוצאת המכפלה הסקלרית עבור:  $\underline{u} = (-6, 2, 3)$ ,  $\underline{v} = (4, 0, 1)$ .

ב. מצא את  $y$  עבורו תוצאת המכפלה הסקלרית של הווקטורים:

$$\underline{u} = (1, 7, -6), \underline{v} = (2, y, 4) \text{ תהיה } -1.$$

ג. מצא את  $y$  עבורו הווקטורים מהסעיף הקודם יהיו מאונכים זה לזה.

### תשובות סופיות:

$$11) \underline{u} + \underline{v} = (3, 3, 4); \underline{u} - \underline{v} = (5, -3, 14); \underline{u} - 2\underline{v} = (6, -6, 19); 3\underline{u} + 2\underline{v} = (10, 6, 17)$$

$$12) \text{ א. } (6, -2, 8) \quad \text{ב. } (-2, 1, 3) \quad \text{ג. } (-17, 7, 24)$$

$$\text{ד. } (2.5, -1, -3.5) \quad \text{ה. } (9.5, 9.5, -18) \quad \text{ו. } (19, 19, -36)$$

$$13) \text{ א. } (5, 7, 1) \quad \text{ב. } (-8, -16, 8) \quad \text{ג. } (8, 12, 0)$$

$$14) \text{ א. } x = 6, y = 3, z = -18 \quad \text{ב. } x = -1, y = 9\frac{2}{3}, z = 72$$

$$\text{ג. } x = -4\frac{8}{9}, y = -4\frac{4}{9}, z = -\frac{2}{9}$$

$$15) \text{ א. } \underline{u} \cdot \underline{v} = -21 \quad \text{ב. } y = 3 \quad \text{ג. } y = 3\frac{1}{7}$$

## גודל של וקטור:

### סיכום כללי:

גודלו של ווקטור  $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$  נתון ע"י:  $|\underline{u}| = \sqrt{\underline{u}^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

### שאלות:

**16** נתונים הווקטורים הבאים:  $\underline{u} = (1, -3, 2)$ ,  $\underline{v} = (5, -1, 0)$   
 חשב את הגדלים של הווקטורים הבאים:  $2\underline{v} + \underline{u}$ ,  $4\underline{u} - 3\underline{v}$ ,  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ .

**17** נתונים ארבעת קודקודי המרובע ABCD:  
 $A(-4, 2, 1)$ ,  $B(0, 2, -1)$ ,  $C(-3, -5, 0)$ ,  $D(-7, -5, 2)$   
 הוכח כי המרובע הוא מקבילית.

### תשובות סופיות:

**16**  $|\underline{u}| = \sqrt{14}$ ;  $|\underline{v}| = \sqrt{26}$ ;  $|2\underline{v} + \underline{u}| = \sqrt{150}$ ;  $|4\underline{u} - 3\underline{v}| = \sqrt{266}$

**17** הוכחה.

## וקטורים מקבילים ושווים:

### שאלות:

18 נתונים ארבעת קודקודי המרובע ABCD :

$$A(1,2,0), B(-2,5,3), C(-1,8,4), D(4,3,-1)$$

א. הוכח כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

19 נתונות הנקודות הבאות:  $A(1,0,2), B(3,7,-4), C(6,9,0), D(7,4,10), E(9,11,4)$ .

א. הראה כי:  $\overline{AB} = \overline{DE}$ .

ב. האם ניתן לומר כי גם  $\overline{AD} = \overline{BC}$ ? נמק.

### תשובות סופיות:

18 א. הוכחה. ב. כן.

19 א. הוכחה. ב. לא.

## זווית בין וקטורים:

### סיכום כללי:

• זווית  $\alpha$  בין שני וקטורים  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  תחושב ע"י:  $\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$ .

### שאלות:

(20) חשב את הזווית שבין הווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$ :

א.  $\underline{u} = (-2, 2, 5)$ ,  $\underline{v} = (4, 0, 1)$

ב.  $\underline{u} = (6, -3, 1)$ ,  $\underline{v} = (2, 5, 3)$

ג.  $\underline{u} = (-2, 1, 3)$ ,  $\underline{v} = (4, -2, -6)$

(21) מצא את שטחו של משולש ABC שקודקודיו הם:  $A(-3, 2, 1)$ ,  $B(0, 3, 2)$ ,  $C(5, -1, 0)$ .

(22) נתונים הווקטורים:  $\underline{u} = (2, -1, 0)$ ,  $\underline{v} = (5, 0, 3)$ .

מצא וקטור  $\underline{w}$  שמכפלתו ב- $\underline{u}$  היא 0 ומכפלתו ב- $\underline{v}$  היא 0 אם ידוע שגודלו הוא  $\sqrt{70}$ .

### תשובות סופיות:

(20) א.  $92.277^\circ$  ב.  $90^\circ$  ג.  $180^\circ$ .

(21) 10.173 יח"ש.

(22)  $\underline{w} = (3, 6, -5)$  או  $\underline{w} = (-3, -6, 5)$ .

## הצגה פרמטרית של ישר:

### סיכום כללי:

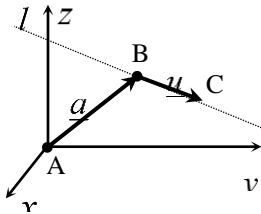
ישר כללי במרחב ניתן להצגה ע"י שני ווקטורים.

הווקטור  $\underline{a}$  נקרא ווקטור ההעתקה.

מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו על נקודה כלשהי על הישר הנתון.

הווקטור  $\underline{u}$  נקרא ווקטור הכיוון של הישר.

זה הוא ווקטור שנמצא על הישר עצמו מוצאו בנקודה אחת וסופו בנקודה אחרת לאורך הישר.



הקשר בין שני הווקטורים נתון ע"י:  $\underline{\ell} : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$

כאשר  $t$  הוא מספר ממשי כלשהו ו- $\underline{x}$  הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירה של  $t$  שמוצאו בראשית הצירים וסופו על נקודה על הישר  $\underline{\ell}$ .

**דוגמא:** עבור הנקודות:  $A(0,0,0)$ ,  $B(5,3,1)$  ו- $C(7,0,10)$  נקבל את הווקטורים

הבאים:  $\underline{a} = \overline{AB} = B - A = (5,3,1)$ ;  $\underline{u} = \overline{BC} = C - B = (7,0,10) - (5,3,1) = (2,-3,9)$

לכן הצגה פרמטרית של הישר היא:  $\underline{\ell} : \underline{x} = (5,3,1) + t(2,-3,9)$

### הערות:

- לישר יש אינסוף הצגות פרמטריות הנבדלות זו מזו בבחירת ווקטור ההעתקה ווקטור הכיוון.
- ההצגה הבאה גם מתאימה לישר שבדוגמא:  $\underline{\ell} : \underline{x} = (7,0,10) + t(-6,9,-27)$
- הווקטור  $\underline{x}$  המתקבל ע"י הצבת  $t_0$  בהצגה פרמטרית אחת של הישר, יתקבל ע"י הצבת  $t_1$  בהצגה פרמטרית אחרת של אותו הישר.
- הנקודה B באיור לעיל אינה בהכרח סופו של הווקטור  $\underline{a}$  ומוצאו של הווקטור  $\underline{u}$ .
- כדי לכתוב הצגה פרמטרית של ישר מספיק לקחת שתי נקודות כלשהן למציאת הווקטור  $\underline{u}$  (למשל הנקודה C יחד עם נקודה D הנמצאת על המשך הישר) ונקודה נוספת למציאת הווקטור  $\underline{a}$ .
- הצגה פרמטרית של ישר היא למעשה חיבור של שני ווקטורים גיאומטריים במרחב הנותנים ווקטור שמוצאו בראשית הצירים וסופו על הישר הנתון.

## שאלות:

(23) האם הנקודה  $A(7,0,3)$  נמצאת על הישר  $\ell : \underline{x} = (4,3,0) + t(1,-1,1)$  ?

(24) האם הנקודה  $B(4,-2,-10)$  נמצאת על הישר  $\ell : \underline{x} = t(2,-1,5)$  ?

(25) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במישור שעובר בנקודות  $A(-5,-2)$  ו-  $B(1,6)$ .

(26) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודות  $C(3,0,-2)$  ו-  $D(4,1,1)$ .

(27) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה  $G(2,-7,1)$

ומקביל לישר  $\ell : \underline{x} = (0,3,-1) + t(-4,2,1)$ .

(28) מצא במרחב הצגה פרמטרית של ישר העובר דרך הנקודה  $(1,2,3)$

ומאונך לישר:  $\ell : \underline{x} = (1,2,0) + s(1,-2,4)$ .

(29) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הצגה פרמטרית של ישר:  $\ell : \underline{x} = (1,2,3) + t(4,5,6)$ .

כתוב את ההצגה בעזרת הקואורדינאטות  $x, y, z$ .

ב. נתונה הצגה של ישר בעזרת קואורדינאטות:  $x = 1 + 2t, y = 10, z = 4 - t$ .

כתוב את ההצגה הפרמטרית שלו.

(30) מצא את הצגתו הפרמטרית של ציר ה- $y$  במרחב.

(31) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה  $M(3,-1,4)$

ומקביל לציר ה- $z$ .

(32) מצא את נקודת החיתוך של הישר  $\ell : \underline{x} = (1,-2,6) + t(-2,1,2)$  עם המישור  $[xy]$ .

**תשובות סופיות:**

(23) כן.

(24) לא.

(25)  $\ell : \underline{x} = (-5, -2) + t(6, 8)$

(26)  $\ell : \underline{x} = (4, 1, 1) + t(1, 1, 3)$

(27)  $\ell : \underline{x} = (2, -7, 1) + s(-4, 2, 1)$

(28)  $\ell : \underline{x} = (1, 2, 3) + t(2, 1, 0)$

(29) א.  $x = 1 + 4t, y = 2 + 5t, z = 3 + 6t$  ב.  $\ell : \underline{x} = (1, 10, 4) + t(2, 0, -1)$

(30)  $\ell : \underline{x} = t(0, 1, 0)$

(31)  $\ell : \underline{x} = (3, -1, 4) + t(0, 0, 1)$

(32)  $(7, -5, 0)$

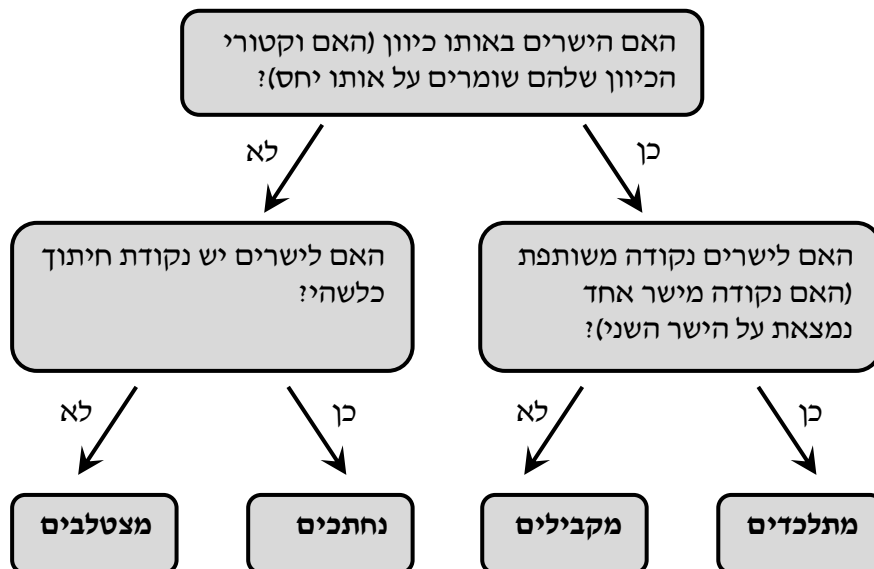
## מצב הדדי בין ישרים:

### סיכום כללי:

ישנם 4 מצבים הדדים בין זוג ישרים במרחב:

- ישרים מתלכדים: שני הישרים הם למעשה ישר אחד.
- ישרים מקבילים: שני הישרים בעלי אותו כיוון ולעולם אינם נפגשים במרחב.
- ישרים נחתכים: שני ישרים במרחב עם כיוונים שונים הנחתכים בנקודה כלשהי.
- ישרים מצטלבים: שני ישרים עם כיוונים שונים שאינם נפגשים במרחב.

כדי לקבוע את המצב ההדדי בין שני ישרים נבצע את הבדיקה הדו-שלבית הבאה:



## שאלות:

**(33)** מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.  
 אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.  
 $\ell_1 : \underline{x} = (2, -3, 0) + t(5, -1, 2)$  ,  $\ell_2 : \underline{x} = (12, -5, 4) + s(-10, 2, -4)$

**(34)** מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.  
 אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.  
 $\ell_3 : \underline{x} = (0, 1, -7) + t(-2, 1, 1)$  ,  $\ell_4 : \underline{x} = (2, 0, -6) + s(6, -3, -3)$

**(35)** מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.  
 אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.  
 $\ell_5 : \underline{x} = (-3, 5, 1) + t(4, 0, -1)$  ,  $\ell_6 : \underline{x} = (-1, 7, 4) + s(-1, 1, 2)$

**(36)** מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.  
 אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.  
 $\ell_7 : \underline{x} = (3, 0, 0) + t(2, -2, 5)$  ,  $\ell_8 : \underline{x} = (0, 1, -5) + s(3, 1, -2)$

**(37)** מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.  
 אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.  
 $\ell_9 : \underline{x} = (-4, 1, -1) + t(3, 0, -1)$  ,  $\ell_{10} : \underline{x} = s(6, 0, -2)$

**(38)** מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.  
 אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.  
 $\ell_{11} : \underline{x} = (2, 8, -1) + t(1, 0, 0)$  ,  $\ell_{12} : \underline{x} = (-5, 8, 2) + s(2, 0, -1)$

**(39)** מצא את ערכו של הפרמטר  $k$  שבעבורו הישרים הבאים :  
 $\ell_1 : \underline{x} = (k+1, 1-k, 6) + t(1, -2, 2)$  ,  $\ell_2 : \underline{x} = (k-1, 7, -k) + s(1-k^2, k^2+2, -6)$   
 א. מקבילים.  
 ב. מתלכדים.

**(40)** נתונות הנקודות :  $A(3, -1, 5)$  ,  $B(k, -1, 3)$  ,  $C(-6, 3, -1)$  ,  $D(-2, 3, k)$   
 הראה כי לכל ערך של  $k$  הישרים  $\ell_{AB}$  ו- $\ell_{CD}$  מצטלבים.

**תשובות סופיות:**

33) מתלכדים.

34) מקבילים.

35) נחתכים,  $(1, 5, 0)$ .

36) מצטלבים.

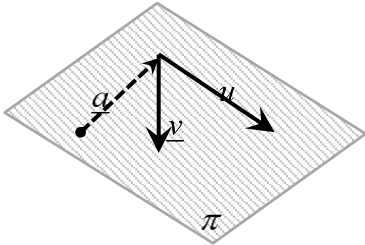
37) מקבילים.

38) נחתכים,  $(1, 8, -1)$ .39) א.  $k = 2$ . ב.  $k = -2$ .

40) הוכחה.

## הצגה פרמטרית של מישור:

### סיכום כללי:



מישור כלשהו במרחב ניתן להצגה ע"י שלושה ווקטורים. הווקטור  $\underline{a}$  הוא ווקטור ההעתקה.

מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו בנקודה כלשהי על המישור.

הווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  הם וקטורי הכיוון של המישור. אלו הווקטורים הפורשים את המישור.

הקשר בין שלושת הווקטורים נתון ע"י:  $\pi : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u} + s\underline{v}$

כאשר  $t, s$  הם מספרים ממשיים כלשהם ו- $\underline{x}$  הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירתם אשר מוצאו בראשית הצירים וסופו בנקודה על המישור  $\pi$ .

### שאלות:

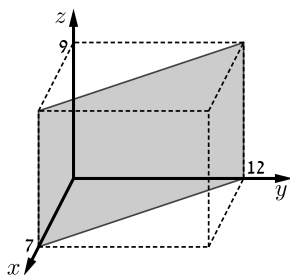
**(41)** מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודות הבא:  
 $A(1, -4, 0)$ ,  $B(3, 6, 2)$ ,  $C(0, -3, 1)$

**(42)** מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה  $Q(6, 7, -1)$ , ומכיל את הישר  $\ell : \underline{x} = (-2, -2, 5) + t(1, 0, -4)$

**(43)** נתונים שני ישרים:  $\ell_1 : \underline{x} = (0, 1, -1) + t(1, 9, -3)$ ,  $\ell_2 : \underline{x} = (2, 16, 11) + s(0, 1, -6)$   
 הראה שהישרים נחתכים ומצא הצגה פרמטרית של המישור המכיל אותם.

**(44)** מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה  $D(5, -2, -1)$  ומכיל את ציר ה- $x$ .

**(45)** מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור  $[xz]$ .



**(46)** נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך. מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור המסומן.

**תשובות סופיות:**

$$\cdot \pi : \underline{x} = (1, -4, 0) + t(2, 10, 2) + s(-1, 1, 1) \quad \mathbf{(41)}$$

$$\cdot \pi : \underline{x} = (-2, -2, 5) + t(1, 0, -4) + s(8, 9, -6) \quad \mathbf{(42)}$$

$$\cdot \pi : \underline{x} = (0, 1, -1) + t(1, 9, -3) + s(0, 1, -6) \quad \mathbf{(43)}$$

$$\cdot \pi : \underline{x} = t(1, 0, 0) + s(5, -2, -1) \quad \mathbf{(44)}$$

$$\cdot \pi : \underline{x} = t(1, 0, 0) + s(0, 0, 1) \quad \mathbf{(45)}$$

$$\cdot \pi : \underline{x} = (7, 0, 0) + t(0, 0, 1) + s(-7, 12, 0) \quad \mathbf{(46)}$$

## משוואת מישור:

### סיכום כללי:

ניתן להציג מישור ע"י משוואה באופן הבא:  $\pi: ax+by+cz+d=0$ ,  
 כאשר:  $(x, y, z)$  היא נקודה על המישור והמקדמים  $a, b, c$  הם שיעורי ווקטור הנורמל  
 של המישור המסומן:  $\underline{h}=(a, b, c)$ .

### שאלות:

(47) קבע האם הנקודות הבאות נמצאות על המישור  $\pi: 2x-y+3z-6=0$   
 א.  $D(5, 7, 1)$       ב.  $E(2, -1, 1)$

(48) מצא את ערכו של  $k$  שבעבורו הנקודה  $A(1, k, -1)$  נמצאת על  
 המישור:  $\pi: kx-2y+(1+k)z+7=0$ .

(49) נתונה משוואת מישור:  $\pi: 3x+2y-z-9=0$ .  
 מצא את נקודות החיתוך של המישור עם שלושת הצירים.

(50) נתונה משוואת מישור:  $\pi: 4x+y-2z+8=0$ .  
 מצא הצגה פרמטרית של הישר שהמישור חותך מהמישור  $[yz]$ .

### תשובות סופיות:

(47) א. על המישור. ב. לא על המישור.

(48)  $k=3$ .

(49)  $(3, 0, 0)$ ,  $(0, 4\frac{1}{2}, 0)$ ,  $(0, 0, -9)$ .

(50)  $\ell: \underline{x}=(0, -8, 0)+t(0, 2, 1)$ .

## מעברים בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור:

### שאלות:

51 נתונה משוואת מישור:  $2x + 3z - 12 = 0$ . כתוב הצגה פרמטרית של המישור.

52 נתונה הצגה פרמטרית של מישור:  $\underline{x} = (2, -5, 0) + t(1, 0, 2) + s(0, -1, 3)$ . מצא את משוואת המישור.

53 נתונה הצגה פרמטרית של מישור:  $\underline{x} = t(-2, 2, 1) + s(3, 1, 0)$ . מצא את משוואת המישור.

54 המישור  $\pi$  עובר בנקודות:  $A(1, 0, -3)$ ,  $B(2, 0, 0)$ ,  $C(4, -1, 0)$ . מצא את משוואת המישור.

55 ענה על הסעיפים הבאים:

א. לפניך הנקודות הבאות:  $(2, 0, 5)$ ,  $(0, 1, -2)$ ,  $(1, 1, 0)$ .

i. הראה ששלוש הנקודות אינן נמצאות על ישר אחד ומצא הצגה פרמטרית של המישור הנקבע על ידן.

ii. מצא את משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנ"ל.

ב. מצא שתי נקודות נוספות הנמצאות על המישור שמצאת בסעיף א'.

ג. האם הנקודה  $(4, 2, 1)$  נמצאת על המישור שמצאת בסעיף א'?

### תשובות סופיות:

51  $\underline{x} = (0, 0, 4) + t(0, 1, 0) + s(6, 0, -4)$

52  $\pi: -2x + 3y + z + 19 = 0$

53  $\pi: x - 3y + 8z = 0$

54  $\pi: 3x + 6y - z - 6 = 0$

55 i.  $\underline{x} = (1, 1, 0) + t(-1, 0, -2) + s(1, -1, 5)$ . ii.  $-2x + 3y + z - 1 = 0$

ב. למשל:  $(-0.5, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ . ג. לא.

## מישורים המקבילים לצירים:

שאלות:

56 נתונה משוואת מישור:  $(k+2)x + (k^2 - 2k - 3)y - 3z + k^2 - 1 = 0$ .  
 לאיזה ערך של  $k$  המישור מקביל לציר ה- $y$  (ולא מכיל אותו)?

57 פאותיו של טטראדר נמצאות על המישורים  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=0$   
 ו- $x+3y+2z-6=0$ . מצא את נפח הטטראדר.

תשובות סופיות:

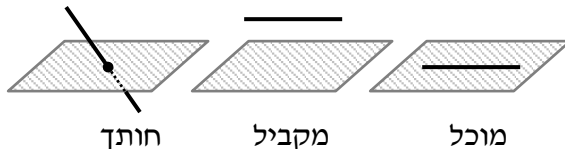
56  $k=3$ .

57 6 יח"נ.

## מצב ההדדי בין ישר ומישור:

### סיכום כללי:

ישנם 3 מצבים הדדיים בין ישר ומישור במרחב:



- הישר חותך את המישור.
- הישר מקביל למישור.
- הישר מוכל במישור.

כדי לדעת מהו המצב ההדדי בין ישר ומישור יש להציב נקודה כללית של הישר במשוואת המישור ולבדוק:

- אם למשוואה המתקבלת יש פתרון יחיד אז הישר חותך את המישור.
- אם למשוואה אין אף פתרון אז הישר מקביל למישור.
- אם למשוואה יש אינסוף פתרונות אז הישר מוכל במישור.

### שאלות:

(58) נתונים הישר והמישור הבאים:  $\ell : \underline{x} = (5, 0, 1) + t(4, 1, -2)$ ,  $\pi : 2x - y - 3z + 6 = 0$ . קבע את המצב ההדדי שביניהם. אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

(59) נתונים הישר והמישור הבאים:  $\ell : \underline{x} = (2, -1, 6) + t(-1, 1, 2)$ ,  $\pi : x - 3y + 2z - 11 = 0$ . קבע את המצב ההדדי שביניהם. אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

(60) נתונים הישר והמישור הבאים:  $\ell : \underline{x} = (-6, 1, 0) + t(3, 0, -1)$ ,  $\pi : 2x + y + 6z + 11 = 0$ . קבע את המצב ההדדי שביניהם. אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

(61) נתונים הישר והמישור הבאים:  $\ell : \underline{x} = (1, a, 3) + t(4, 1 - b, 0)$ ,  $\pi : 2x - y + z - 4 = 0$ . מצא את ערכי  $a$  ו- $b$  בעבורם הישר מוכל במישור.

**תשובות סופיות:**

58) הישר חותך,  $(1, -1, 3)$ .

59) מקבילים.

60) הישר מוכל.

61)  $a = 1, b = -7$ .

## מצב הדדי בין מישורים:

### סיכום כללי:

בין שני מישורים ישנם 3 מצבים הדדיים:

- המישורים נחתכים - במקרה זה יש להם ישר משותף הנקרא ישר החיתוך.
- המישורים מקבילים – לשני המישורים וקטורים פורשים זהים אך ווקטור העתקה שונה.
- המישור מתלכדים - במקרה זה שני המישורים מייצגים את אותו המישור.

עבור שני מישורים כלליים:  $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$  ו-  $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

נקבע את המצב ההדדי ביניהם באופן הבא:

נחתכים	מקבילים	מתלכדים
כל מצב אחר	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$

### שאלות:

62 נתונים שני מישורים. קבע את המצב ההדדי ביניהם:

א.  $\pi_1: 2x - y + 4z - 5 = 0$ ,  $\pi_2: 4x - 2y + 8z - 10 = 0$

ב.  $\pi_3: x + 3y - z + 1 = 0$ ,  $\pi_4: 3x + 9y - 3z - 8 = 0$

ג.  $\pi_5: 5x - 2y - 2z + 3 = 0$ ,  $\pi_6: 2x + 3y + z - 5 = 0$

63 נתונים שני המישורים הבאים:

$\pi_1: 2x + (k^2 + k)y - 2z + 1 = 0$ ,  $\pi_2: 4x + 12y - 4z + k^2 - 2 = 0$

מצא את ערכי  $k$  עבורם המישורים:

א. נחתכים      ב. מקבילים      ג. מתלכדים.

### תשובות סופיות:

62 א. מתלכדים.      ב. מקבילים.      ג. נחתכים.

63 א.  $k \neq 2, -3$ .      ב.  $k = -3$ .      ג.  $k = 2$ .

## ישר חיתוך בין מישורים:

### שאלות:

64 נתונים שני מישורים נחתכים:  $\pi_1 : 4x + y - 2z + 2 = 0$ ,  $\pi_2 : 2x - y + z + 10 = 0$ . מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

65 נתונים שני מישורים נחתכים:  $\pi_3 : 8x + 2y - 3z + 2 = 0$ ,  $\pi_4 : 2x - 3y + z + 4 = 0$ . מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

66 נתונים שני מישורים נחתכים:  $\pi_5 : 3x - 3y + z + 2 = 0$ ,  $\pi_6 : 5x - 2z + 20 = 0$ . מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

67 נתונים שני מישורים נחתכים:  $\pi_7 : x - 2y - z + 6 = 0$ ,  $\pi_8 : z - 2 = 0$ . מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

68 מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישור  $\pi : 6x - 5y + z + 18 = 0$  עם המישור  $[xz]$ .

69 נתונים שני מישורים:  $\pi_1 : x - 3y + 2z - 1 = 0$ ,  $\pi_2 : 4x + y - z - 6 = 0$ . מצא הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

### תשובות סופיות:

$$.l : \underline{x} = (-2, 6, 0) + t(2, 16, 12) \quad 64$$

$$.l : \underline{x} = (0, 2, 2) + t(1, 2, 4) \quad 65$$

$$.l : \underline{x} = (0, 4, 10) + t\left(4, 7\frac{1}{3}, 10\right) \quad 66$$

$$.l : \underline{x} = (0, 2, 2) + t(4, 2, 0) \quad 67$$

$$.l : \underline{x} = (-3, 0, 0) + t(3, 0, -18) \quad 68$$

$$.l : \underline{x} = t(1, 9, 13) \quad 69$$

## זווית בין שני ישרים:

### סיכום כללי:

- זווית חדה  $\alpha$  בין שני ישרים  $l_1 = \underline{a}_1 + t\underline{u}_1$  ו-  $l_2 = \underline{a}_2 + s\underline{u}_2$  תחושב:  $\cos \alpha = \frac{|\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2|}{|\underline{u}_1| \cdot |\underline{u}_2|}$ .

### שאלות:

70 מצא את הזווית שבין זוגות הישרים הבאים:

א.  $l_1 : \underline{x} = (4, 0, 0) + t(6, 8, 1)$ ,  $l_2 : \underline{x} = s(-4, 2, -4)$ .

ב.  $l_1 : \underline{x} = (10, 17, -18) + t(3, 0, -6)$ ,  $l_2 : \underline{x} = (6, 5, 4) + s(0, 4, 0)$ .

71 מצא את הזווית שבין ישר העובר דרך הנקודות  $A(3, 4, 6)$ ,  $B(6, 0, -2)$  וישר העובר דרך הנקודות:  $C(6, 5, 1)$ ,  $D(-1, 4, 2)$  וקבע מה המצב ההדדי ביניהם.

72 נתונות הנקודות  $A(1, -3, 0)$ ,  $B(4, 2, -1)$ ,  $C(3, -1, 2)$ .

א. מצא הצגה פרמטרית של ישר במרחב העובר דרך הנקודות:

i. A ו-B.

ii. B ו-C.

iii. A ו-C.

ב. מי מבין הנקודות  $D(4, 2, -1)$  ו-  $E(7, 7, -3)$  נמצאת על הישר AB שמצאת בסעיף הקודם?

ג. חשב את הזווית שבין הישר AB והישר BC.

73 נתון מישור שמשוואתו:  $3x - 4y + 6 = 0$ . הנקודות  $A(x, 6, 1)$ ,  $B(-2, y, -1)$ .

נמצאות על המישור והנקודה C נמצאת על מישור  $[yz]$  ומקיימת:  $z_C = 11$ .

מצא את שיעורי הנקודה C אם ידוע כי קוסינוס הזווית שבין הישרים AB ו-AC

הוא:  $\sqrt{\frac{13}{76}}$ .

**תשובות סופיות:**

 ב.  $90^\circ$ .

 א.  $78.521^\circ$  (70)

 א.  $68.21^\circ$ . הישרים מצטלבים. (71)

 א. ii.  $\ell : \underline{x} = (4, 2, -1) + t(-1, -3, 3)$ 

 א. i.  $\ell : \underline{x} = (1, -3, 0) + t(3, 5, -1)$  (72)

 ב. הנקודה D. ג.  $35.477^\circ$ .

 א. iii.  $\ell : \underline{x} = (1, -3, 0) + t(2, 2, 2)$ 

C(0, 2, 11) או C(0, 28.45, 11) (73)

## זווית בין ישר ומישור:

### סיכום כללי:

• זווית חדה  $\alpha$  בין ישר  $l = \underline{a} + t\underline{u}$  ומישור  $\pi : ax + by + cz + d = 0$

$$\sin \alpha = \frac{|\underline{u} \cdot \underline{h}|}{|\underline{u}| \cdot |\underline{h}|}$$

תחושב ע"י הנוסחה הבאה:

### שאלות:

(74) מצא את הזווית שבין הישר והמישור הבאים:

$$\ell : \underline{x} = (-2, 0, 5) + t(-2, 1, 2), \quad \pi : 3x - 2y + 2z + 9 = 0$$

(75) נתונות הנקודות  $A(1, -1, 2)$ ,  $B(0, 2, -1)$ ,  $C(1, 2, 5)$ ,  $D(-7, 3, -1)$

מצא את הזווית בין הישר העובר בנקודות A ו-D ובין המישור ABC.

(76) נתונה פירמידה משולשת SABC, שמשוואת הבסיס ABC שלה

$$\text{היא: } 2x + y - 2z - 6 = 0. \text{ קדקוד הפירמידה הוא } S(3, 1, -2).$$

מצא את הזווית בין המקצוע הצדדי SB לבסיס הפירמידה,

$$\text{אם נתון כי שיעורי הקודקוד B מקיימים: } x_B = z_B = -1.$$

### תשובות סופיות:

(74)  $18.87^\circ$

(75)  $44.83^\circ$

(76)  $14.9^\circ$

## זווית בין שני מישורים:

### סיכום כללי:

• זווית חדה  $\alpha$  בין שני מישורים:  $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$  ו-  $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

• תחושב ע"י:  $\cos \alpha = \frac{|h_1 \cdot h_2|}{|h_1| \cdot |h_2|}$

### שאלות:

(77) מצא את הזווית שבין המישורים הבאים:  $\pi_1: 4x + 3y + z - 12 = 0$   
 ו-  $\pi_2: 4x - 7y + 5z + 3 = 0$

(78) נתונה פירמידה משולשת ABCD, שקודקודה הם:  
 $A(0, 2, -5)$ ,  $B(3, -1, 1)$ ,  $C(7, -1, -5)$ ,  $D(3, 2, 0)$   
 מצא את הזווית בין הפאה הצדדית ABD לבסיס הפירמידה ABC.

(79) מצא את הזווית בין מישור שמשוואתו  $3x + 5y - z + 4 = 0$  למישור  $[xz]$ .

### תשובות סופיות:

(77)  $90^\circ$

(78)  $87.539^\circ$

(79)  $32.312^\circ$

## מרחק בין שתי נקודות במרחב:

**סיכום כללי:**

מרחק בין שתי נקודות  $A(x_1, y_1, z_1)$  ו-  $B(x_2, y_2, z_2)$  במרחב יחושב באופן

$$\text{הבא: } d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

**שאלות:**

**(80)** נתונות הנקודות:  $A(2, 4, -5)$ ,  $B(0, -2, 6)$  ו-  $C(k, -1, 13 - k)$ .

מצא ערכי  $k$  עבורם המשולש  $ABC$  יהיה שווה-שוקיים:  $AB = AC$ .

**תשובות סופיות:**

**(80)**  $k = 12$  או  $k = 8$ .

## מרחק בין נקודה לישר:

### סיכום כללי:

מרחק בין נקודה  $A(x_1, y_1, z_1)$  לישר הנתון בהצגה פרמטרית:  $l: \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$  יחושב ע"י העברת אנך מהנקודה לישר וחישוב אורכו. כדי למצוא את נקודת החיתוך יש להשוות את מכפלת הווקטור האנך בווקטור הכיוון של הישר לאפס.

### שאלות:

81 מצא את המרחק שבין הנקודה  $A(13, -1, -19)$  לישר  $l: \underline{x} = t(2, 0, -7)$ .

82 נתונות הנקודות  $A(1, 6, -1)$ ,  $B(2, -1, 0)$ ,  $C(6, -4, 0)$ .  
חשב את שטח המשולש ABC.

83 על הישר  $l: \underline{x} = (5, -2, 0) + t(0, 1, -1)$  מונחת הצלע AB של ריבוע ABCD.  
אחד מקודקודי הריבוע הוא  $D(5, 4, 2)$ .  
מצא את שיעורי הקודקוד B (שתי אפשרויות).

### תשובות סופיות:

81  $\sqrt{54}$

82 12.75 יח"ש.

83  $B(5, 4, -6)$  או  $B(5, -4, 2)$ .

## מרחק בין נקודה למישור:

### סיכום כללי:

מרחק בין נקודה  $A(x_1, y_1, z_1)$  למישור  $\pi: ax + by + cz + d = 0$  יחושב

$$.d = \left| \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right| \text{ עיני:}$$

### שאלות:

(84) מצא את מרחקו של המישור  $4x - 2y - 4z + 15 = 0$  מראשית הצירים.

(85) מצא משוואת מישור המאונך לישר  $\ell: \underline{x} = (1, -8, 3) + t(3, -2, 1)$

ונמצא במרחק  $\sqrt{14}$  מהנקודה  $A(4, 5, -9)$ .

(86) נתונים ישר ומישור:  $\pi: 2x + 4y - 4z + 15 = 0$ ,  $\ell: \underline{x} = (7, 19, -3) + t(3, 14, -4)$ .

מצא את הנקודות שעל הישר שמרחקן מהמישור הוא 6.5.

### תשובות סופיות:

$$.2 \frac{1}{2} \quad (84)$$

$$. \pi: 3x - 2y + z - 7 = 0 \text{ או } \pi: 3x - 2y + z + 21 = 0 \quad (85)$$

$$.(1, -9, 5) \text{ או } (4, 5, 1) \quad (86)$$

## מרחק בין ישרים מקבילים:

### סיכום כללי:

מרחק בין שני ישרים מקבילים יחושב ע"י שימוש בנקודה מאחד הישרים ומציאת מרחקה מהישר השני ע"י העברת אנך מהנקודה לישר וחישוב אורכו.

### שאלות:

87 נתונות הנקודות  $A(15,0,-4)$  ,  $B(12,-5,2)$  ,  $C(6,1,4)$  ,  $D(12,11,-8)$

א. מצא את המצב ההדדי בין הישר העובר בנקודות A ו-B

ובין הישר העובר בנקודות C ו-D.

ב. מצא את המרחק בין הישרים מסעיף א'.

88 4 צלעות של מרובע מונחות על הישרים:

$$l_1: \underline{x} = (2, 0, -1) + t(1, -2, 1) \quad , \quad l_2: \underline{x} = (-8, -1, 19) + s(-4, 1, 6)$$

$$l_3: \underline{x} = (-2, 7, -11) + r(-2, 4, -2) \quad , \quad l_4: \underline{x} = (-2, 1, 5) + q(4, -1, -6)$$

א. הוכח כי המרובע הוא מלבן.

ב. מצא את שטח המלבן.

### תשובות סופיות:

87 א. מקבילים. ב.  $\sqrt{76}$  יח"א.

88 א. הוכחה. ב.  $\sqrt{824}$  יח"ש.

## מרחק בין ישר למישור:

### סיכום כללי:

מרחק בין ישר ומישור (המקביל לו) יחושב ע"י שימוש בנקודה שעל הישר ומציאת מרחקה מהמישור.

### שאלות:

89 נתונה משוואת מישור:  $4x - z + 6 = 0$ .

א. מצא את המצב ההדדי בין ציר ה- $y$  ובין המישור הנתון.

ב. מצא את המרחק בין ציר ה- $y$  ובין המישור הנתון.

90 נתונים ישר ומישור:  $\pi: 3x + 12y - 4z + k - 10 = 0$ ,  $l: \underline{x} = (1, k - 1, 5) + t(4, -2, -3)$ .

א. הוכח שהישר מקביל למישור או מוכל בו.

ב. מצא את ערכו של הפרמטר  $k$  שעבורו המרחק בין הישר למישור הוא 1.

### תשובות סופיות:

89 א. הישר מקביל למישור. ב.  $\frac{6}{\sqrt{17}}$ .

90 א. הוכחה. ב.  $k = 2, 4$ .

## מרחק בין מישורים מקבילים:

### סיכום כללי:

מרחק בין שני מישורים מקבילים יחושב לפי אחת מהאפשרויות הבאות:  
 1. שימוש בנקודה שעל מישור אחד ומציאת מרחקה מהמישור השני.

$$2. \text{ שימוש בנוסחה: } d = \left| \frac{d_1 - d_2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

### שאלות:

91 נתונה משוואת מישור:  $\pi: 3x - 4y + 5z - 10 = 0$ .

מצא משוואת מישור המקביל למישור הנתון והנמצא במרחק  $\sqrt{8}$  ממנו.

92 נתונים שני מישורים מקבילים:  $\pi_1: x - 2y - 2z + 6 = 0$ ,  $\pi_2: x - 2y - 2z - 12 = 0$ .

מצא את משוואת המישור המקביל לשני המישורים הנתונים והנמצא במרחק שווה משניהם.

93 נתונים שישה מישורים:

$$\pi_1: 2x + y - 2z - 11 = 0, \quad \pi_2: x + 2y + 2z + 5 = 0, \quad \pi_3: 2x - 2y + z + 3 = 0$$

$$\pi_4: 2x + y - 2z + 7 = 0, \quad \pi_5: x + 2y + 2z - 1 = 0, \quad \pi_6: kx + qy + z + p = 0$$

מצא את ערכי הפרמטרים  $k, q, p$  שעבורם ששת המישורים יוצרים תיבה שנפחה 60 יחידות נפח.

94 כדור שמרכזו בנקודה  $O(3, 8, -1)$  חסום בקובייה שבסיסה התחתון

$$\text{מונח על מישור שמשוואתו } 12x + 4y - 3z - 6 = 0$$

מצא את משוואת המישור עליו מונח הבסיס העליון של הקובייה.

### תשובות סופיות:

91  $\pi_1: 3x - 4y + 5z + 10 = 0$ ,  $\pi_2: 3x - 4y + 5z - 30 = 0$

92  $\pi_3: x - 2y - 2z - 3 = 0$

93  $k = 2, q = -2, p = 18, -12$

94  $12x + 4y - 3z - 136 = 0$

## מרחק בין ישרים מצטלבים:

### סיכום כללי:

מרחק בין ישרים מצטלבים יחושב ע"י כתיבת משוואת מישור של אחד הישרים ומציאת מרחקו מהישר השני.

### שאלות:

95 נתונים שני הישרים הבאים:  $\ell_1 : \underline{x} = (-3, 2, 6) + t(-4, 1, 2)$

ו-  $\ell_2 : \underline{x} = (0, 2, -7) + s(1, 0, -1)$ .

הראה שהישרים מצטלבים ומצא את המרחק שביניהם.

96 נתונים שני הישרים המצטלבים הבאים:  $\ell_1 : \underline{x} = (-1, 0, 5) + t(1, 1, -2)$

ו-  $\ell_4 : \underline{x} = (2, -1, 9) + s(6, -1, 0)$ .

מצא את המרחק שביניהם.

97 מצא את מרחק הישר  $\ell : \underline{x} = (4, -2, -1) + t(-1, 1, 6)$  מציר ה- $z$ .

### תשובות סופיות:

95  $\frac{10}{\sqrt{6}}$  יח"א.

96 1.567 יח"א.

97  $\sqrt{2}$  יח"א.

## שאלות מסכמות בוקטורים:

### שאלות:

- 1** נתונות הנקודות  $A(1,1,3)$ ,  $B(1,2,0)$ ,  $C(1,1,1)$ .
- מצא הצגה פרמטרית של הישר המחבר את B עם C. הראה כי הנקודה A לא נמצאת על הישר הזה.
  - חשב את המרחק בין הנקודה A לבין הישר המחבר את B עם C.
  - מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה A והמאונך לישר המחבר את B עם C.
- 2** מצא את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים וקבע אם הם נחתכים, מקבילים, מתלכדים או מצטלבים.
- במקרה בו הישרים נחתכים מצא גם את נקודות החיתוך ואת הזווית בין הישרים. במקרה בו הישרים מקבילים או מצטלבים מצא גם את המרחק ביניהם.
- $\underline{x} = (1,0,1) + t(1,2,0)$ ,  $\underline{x} = (1,1,0) + s(2,4,0)$
  - $\underline{x} = (-2,2,4) + u(6,6,1)$ ,  $\underline{x} = (1,-1,0) + s(12,-3,1)$
  - $\underline{x} = (1,1,2) + t(1,2,-1)$ ,  $\underline{x} = (2,3,1) + s(2,4,-2)$
  - $\underline{x} = (1,-1,0) + t(0,2,-4)$ ,  $\underline{x} = (2,0,3) + s(-1,-3,1)$
- 3** מצא את המצב ההדדי של המישור והישר וקבע אם הישר חותך את המישור, מקביל למישור או מוכל במישור.
- במקרה שהישר חותך את המישור, מצא גם את נקודת החיתוך וגם את הזווית בין הישר למישור. במקרה בו הישר מקביל למישור מצא את מרחק הישר מהמישור.
- $2x - 3y + 4z - 5 = 0$ ,  $\underline{x} = (1,0,2) + t(-1,2,2)$
  - $2x - 5y + 3z - 6 = 0$ ,  $\underline{x} = (-3,0,4) + t(4,-2,-6)$
  - $2x - 14y + 10z = -6$ ,  $\underline{x} = (2,1,-2) + t(-2,2,0)$
- 4** מצא את המצב ההדדי של המישורים וקבע אם הם מקבילים, מתלכדים או נחתכים. במקרה בו המישורים מקבילים מצא את המרחק ביניהם. במקרה בו הם נחתכים מצא את הזווית ביניהם ואת ישר החיתוך ביניהם.
- $x - 2y + 2z - 10 = 0$ ,  $2x + y + 2z - 4 = 0$
  - $2x - 5y + 3z - 6 = 0$ ,  $4x - 10y + 6z - 8 = 0$
  - $2x - 14y + 10z = -6$ ,  $x - 7y + 5z = -3$

- (5) נתונה קובייה ABCDA'B'C'D' שנפחה הוא 8.  
 משוואת המישור שעליו מונח הבסיס ABCD היא:  $\pi_1 : 4x + y + 3z - 28 = 0$ .  
 משוואת המישור שעליו מונחת הפאה ABB'A' היא:  $\pi_2 : x + 2y - 2z + 6 = 0$ .  
 מצא הצגה פרמטרית של הישר שעליו מונח המקצוע CD (2 אפשרויות).
- (6) הנקודה A(4,0,-1) נמצאת על כדור שמרכזו O(1,1,2).  
 מצא את משוואת המישור המשיק לכדור בנקודה A.
- (7) נתונים מישור וישר:  $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$ ,  $\ell : \underline{x} = (1,5,5) + t(1,1,0)$ .  
 מצא נקודה על חלקו החיובי של ציר ה-z הנמצאת במרחקים שווים מהמישור ומהישר.
- (8) נתונים שני מישורים:  $\pi_1 : 2x - 4y + 4z - 5 = 0$ ,  $\pi_2 : 4x - 2y + 4z - 1 = 0$ .  
 מצא הצגה פרמטרית של ישר, שנמצא במרחק 2 ממישור  $\pi_1$  ובמרחק 6 ממישור  $\pi_2$  (מצא הצגה של ישר אחד מתוך 4 אפשריים).
- (9) נתונים ישר ומישור:  $\pi : 6x + 2y - z + 5 = 0$ ,  $\ell_1 : \underline{x} = (0,-3,0) + t(1,1,-8)$ .  
 ישר נוסף,  $\ell_2$ , המקביל למישור  $\pi$ , עובר בנקודה P(1,0,-4) וחותר את הישר  $\ell_1$  בנקודה Q. מבין הנקודות שבמישור  $\pi$ , הנקודה P' היא הקרובה ביותר לנקודה P והנקודה Q' היא הקרובה ביותר לנקודה Q. מצא את שטח המלבן P'Q'QP. (הדרכה: הבע באמצעות t את וקטור הכיוון של  $\ell_2$ ).
- (10) נתונים שני מישורים:  $\pi_1 : 2x + y + z - 5 = 0$ ,  $\pi_2 : 3x + y + 2z + 11 = 0$ .  
 $\ell_1$  הוא ישר החיתוך בין שני המישורים.  
 המישור  $\pi_3$  מכיל את הישר  $\ell_1$  ויוצר זווית של  $60^\circ$  עם הישר  $\ell_2 : \underline{x} = (1,3,-4) + t(1,1,0)$ .  
 מצא את משוואת המישור  $\pi_3$ .

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $\underline{x} = (1, 2, 0) + t(0, -1, 1)$  ב.  $\sqrt{2}$  ג.  $y - z + 2 = 0$
- (2) א. מקבילים, 1.095 ב. מצטלבים, 4.07 ג. מתלכדים  
 ד. נחתכים בנקודה  $(1, -3, 4)$ , הזווית היא:  $47.6^\circ$
- (3) א. מקביל, 0.9284 ב. מוכל  
 ג. חותך בנקודה  $(3.5, -0.5, -2)$ , הזווית היא:  $40.78^\circ$
- (4) א. נחתכים. ישר חיתוך:  $\underline{x} = (0, -2, 3) + t(3, -1, -2.5)$ , זווית:  $63.6^\circ$ .  
 ב. מקבילים. המרחק: 0.324 ג. מתלכדים.
- (5)  $\ell: \underline{x} = (0, 2.5, 8.5) + t(2, -2.75, -1.75)$ ,  $\ell: \underline{x} = (0, 7, 7) + t(8, -11, -7)$
- (6)  $\pi: -3x + y + 3z + 15 = 0$
- (7)  $(0, 0, 4)$  או  $(0, 0, 14\frac{4}{5})$
- (8)  $\ell: \underline{x} = (0, -14, -15\frac{3}{4}) + t(-14, 14, 21)$
- (9) 10.467 יח"ש.
- (10)  $\pi_3: x + 2y - z - 58 = 0$  או  $\pi_3: 2x + y + z - 5 = 0$

## שאלות הנפתרות עם מכפלה וקטורית:

### שאלות:

#### מציאת משוואת מישור:

(1) נתונה הצגה פרמטרית של מישור:  $\pi : \underline{x} = t(-2, 2, 1) + s(3, 1, 0)$   
מצא את משוואת המישור.

(2) המישור  $\pi$  עובר בנקודות:  $A(1, 0, -3)$ ,  $B(2, 0, 0)$ ,  $C(4, -1, 0)$   
מצא את משוואת המישור.

(3) נתונים שני ישרים:  $\ell_1 : \underline{x} = (5, -4, 1) + t(0, 2, -1)$ ,  $\ell_2 : \underline{x} = (0, -6, 2) + s(0, -2, 1)$   
הראה שהישרים מקבילים ומצא את משוואת המישור המכיל אותם.

(4) נתונים שני ישרים:  $\ell_1 : \underline{x} = (-1, 1, 3) + t(3, -2, 4)$ ,  $\ell_2 : \underline{x} = (-7, 1, 0) + s(4, -3, 0)$   
הראה שהישרים מצטלבים ומצא את משוואת המישור המכיל את הישר  $\ell_1$   
ומקביל לישר  $\ell_2$ .

(5) מצא משוואת מישור שעובר בנקודה  $A(6, 0, -1)$  ומכיל את ציר ה- $z$ .

#### מצב הדדי בין ישר ומישור:

(6) נתונים הישר והמישור הבאים:  
 $\pi : \underline{x} = (-1, 0, 2) + s(1, 0, -2) + r(3, 0, -1)$ ,  $\ell : \underline{x} = (0, 3, -2) + t(1, -1, 2)$   
קבע את המצב ההדדי שביניהם.  
אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

(7) נתונים שני המישורים הבאים:  $\pi_1 : x - 3y + 2z - 1 = 0$ ,  $\pi_2 : 4x + y - z - 6 = 0$   
מצא הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

## מצב הדדי בין מישורים:

(8) במקבילון ABCDA'B'C'D' נתונים שלוש הקודקודים הבאים:

$$A(1, -1, 4), B(9, 0, 2), C(5, 2, -2)$$

מצא את משוואת המישור עליו מונחת הפאה A'B'C'D' אם ידוע שהנקודה  $(2, -1, 0)$  נמצאת עליו.

## מציאת ישר חיתוך בין שני מישורים:

(9) המישורים  $\pi_1$  ו- $\pi_2$  מאונכים זה לזה.

הישר  $\ell: \underline{x} = (4, 1, -1) + t(2, -1, 1)$  הוא ישר החיתוך שבין המישורים.

מצא את משוואות המישורים אם ידוע שהמישור  $\pi_1$  עובר בראשית.

(10) נתונים ישר ומישור:  $\pi: 4x - 2y - 3z - 6 = 0$ ,  $\ell: \underline{x} = (-2, 0, 5) + t(3, 1, -1)$ .

מצא הצגה פרמטרית של הישר שהוא היטלו של הישר  $\ell$  על המישור.

## חישובי מרחקים שונים:

(11) חשב את נפחה של פירמידה משולשת SABC שקודקודה הם:

$$A(1, 6, -1), B(2, -1, 0), C(6, -4, 0), S(11, -2, 4)$$

(12) בפירמידה משולשת SABC המקצועות SA, SB ו-SC מאונכים זה לזה.

$$\text{נתון: } SA = 6, SB = 8, SC = 12.$$

חשב את אורכו של גובה הפירמידה היורד מהקודקוד S לבסיס ABC.

(13) נתונים שני הישרים הבאים:  $\ell_1: \underline{x} = (-3, 2, 6) + t(-4, 1, 2)$

$$\text{ו- } \ell_2: \underline{x} = (0, 2, -7) + s(1, 0, -1)$$

הראה שהישרים מצטלבים ומצא את המרחק שביניהם.

(14) נתונים שני הישרים המצטלבים הבאים:  $\ell_1: \underline{x} = (-1, 0, 5) + t(1, 1, -2)$

$$\text{ו- } \ell_4: \underline{x} = (2, -1, 9) + s(6, -1, 0)$$

מצא את המרחק שביניהם.

(15) מצא את מרחק הישר  $\ell: \underline{x} = (4, -2, -1) + t(-1, 1, 6)$  מציר ה- $z$ .

## שאלות שונות:

(16) נתונים שני ישרים:  $\ell_1 : \underline{x} = (-2, 1, 5) + t(5, -4, 2)$ ,  $\ell_2 : \underline{x} = (-7, 3, -1) + s(-5, 4, -2)$ .

א. מצא את המצב ההדדי שבין הישרים.

ב. המישור  $\pi_1$  מכיל את שני הישרים והמישור  $\pi_2$  נמצא בין שני הישרים במרחק שווה מכל אחד מהם, מקביל לשני הישרים ומאונך למישור  $\pi_1$ . מצא את משוואות המישורים  $\pi_1$  ו- $\pi_2$ .

(17) נתונים שני מישורים:  $\pi_1 : 2x - y + 4z - 8 = 0$ ,  $\pi_2 : x - y + 2z - 4 = 0$ .

המישור  $\pi_3$  מכיל את ישר החיתוך של שני המישורים וחותך את ציר ה- $y$  בנקודה A כך שמתקיים  $OA = m$  (O ראשית הצירים).

הזווית שבין המישור  $\pi_2$  למישור  $\pi_3$  היא  $\alpha$  ונתון כי:  $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ .

מצא את הערכים האפשריים של הפרמטר  $m$ .

(18) נתונות שלוש נקודות:  $A(3, -1, 1)$ ,  $B(2, -1, 0)$ ,  $O(3, 1, 0)$ .

הנקודות A ו-B נמצאות על היקפו של מעגל שהנקודה O היא מרכזו. מצא הצגה פרמטרית של הישר המשיק למעגל בנקודה A (הישר נמצא במישור המעגל).

**תשובות סופיות:**

(1)  $\pi: x - 3y + 8z = 0$

(2)  $\pi: 3x + 6y - z - 6 = 0$

(3)  $\pi: y + 2z + 2 = 0$

(4)  $\pi: 12x + 16y - z - 1 = 0$

(5)  $\pi: y = 0$

(6) נחתכים בנקודה:  $(3, 0, 4)$

(7)  $l: \underline{x} = t(1, 9, 13)$

(8)  $\pi_{ABCD}: 2y + z + 2 = 0$

(9)  $\pi_1: y + z = 0$  ,  $\pi_2: x + y - z - 6 = 0$

(10)  $l: \underline{x} = (-5, -13, 0) + t(7, 11, 2)$

(11) יח"נ 20.5

(12) יח"א 4.46

(13) יח"א  $\frac{4}{\sqrt{6}}$

(14) יח"א 1.567

(15) יח"א  $\sqrt{2}$

(16) א. הישרים מקבילים. ב.  $\pi_2: y + 2z - 6 = 0$  ,  $\pi_1: 2x + 2y - z + 7 = 0$

(17)  $m = -\frac{4}{7}$  או  $m = 4$

(18)  $l: \underline{x} = (3, -1, 1) + k(-5, -2, -4)$

# מתמטיקה למחצית ב

פרק 13 - אלגברה ליניארית - מטריצות

תוכן העניינים

136	1. מטריצות
141	2. מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות
142	3. המטריצה ההופכית
149	4. בחזרה למערכת משוואות ליניארית

## מטריצות

### שאלות

1 נתונות המטריצות הבאות:  $A_{4 \times 6}$ ,  $B_{4 \times 6}$ ,  $C_{6 \times 2}$ ,  $D_{4 \times 2}$ ,  $E_{6 \times 4}$ .  
 קבעו אילו מבין המטריצות הבאות מוגדרות.  
 במידה והמטריצה מוגדרת, רשמו את סדר המטריצה:

- א.  $A+B$     ב.  $AB$     ג.  $AC-D$     ד.  $AE-B$
- ה.  $B+AB$     ו.  $E(B+A)$     ז.  $(E+A^T)D$     ח.  $E^T B$
- ט.  $E(AC)$     י.  $E(B-A)$

2 מצאו את  $x, y, z$ , אם ידוע כי:

$$\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$$

בשאלות 3-8 נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשבו (במידה וניתן):

3 א.  $E+D$     ב.  $E-D+I_3$

ג.  $5C$     ד.  $2D+4EI_3$

4  $2tr(D^2 - 2E)$

5 א.  $4C^T + A$     ב.  $\frac{1}{2}A^T + \frac{1}{4}C$

6  $I_2 BC$

7  $tr(C^T C)$

8  $DABC$

- 9** נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר  $n$ .  
 נתון כי  $(A-I)(A+I) = 0$ .  
 הוכיחו או הפריכו:  $A = -I$  או  $A = I$ .

**10** אפיינו את כל המטריצות  $A_{2 \times 2}$  שמקיימות  $A^2 = -4I$ .

**11** הוכיחו כי לכל  $n$  טבעי מתקיים  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 1-2^n & 1 \end{pmatrix}$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שנדרש לדעת הוכחות באינדוקציה.

- 12** שתי מטריצות  $A$  ו- $B$  יקראו מתחלפות אם  $AB = BA$ .  
 הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

א. אם המטריצות  $A$  ו- $B$  מתחלפות עם המטריצה  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , אז המטריצות

$A$  ו- $B$  מתחלפות.

ב. אם המטריצה  $A$  מתחלפת עם המטריצה  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , אז  $A^T = -A$ .

- 13** תהי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר  $n$ .

נתון כי  $AA^T = 0$ . הוכיחו כי  $A = 0$ .

האם הטענה נשארת נכונה אם איברי  $A$  מרוכבים?  
 אם כן, הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

- 14** יהיו  $A$  ו- $B$  מטריצות ריבועיות המקיימות  $AB = BA$  (מטריצות מתחלפות).

א. הוכיחו כי לכל  $k$  טבעי מתקיים  $AB^k = B^k A$ .

ב. הוכיחו כי לכל  $k$  טבעי מתקיים  $(AB)^k = A^k B^k$ .

**15** לפי נוסחת הבינום של ניוטון  $(A+B)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$ , כאשר

$$A, B \in \mathbb{R}, n, k \in \mathbb{N}$$

א. האם נוסחת הבינום נשארת נכונה גם אם  $A$  ו- $B$  מטריצות ריבועיות מסדר  $\ell$ ?

ב. מצאו תנאי מספיק על המטריצות  $A$  ו- $B$ , על מנת שנוסחת הבינום תהיה נכונה עבורן.

ג. מצאו את הפיתוח של  $(A+I)^n$  ו- $(A-I)^n$ , כאשר  $A$  ו- $I$  ריבועיות מסדר

$\ell$ .

- 16** א. הגדירו והדגימו את המונח מטריצה נילפוטנטית.  
 ב. נניח ש- $A$  ו- $B$  מטריצות מתחלפות ונילפוטנטיות.  
 הוכיחו שגם המטריצות  $AB$  ו- $A+B$  נילפוטנטיות.

**17** תהי  $A_{n \times n}$  מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי:  $a_{ij} = \min\{i, j\}$ .  
 תהי  $B_{n \times n}$  מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי:  $b_{ij} = \begin{cases} 1 & i + j = n + 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ .

- א. כתבו את המטריצות  $A$  ו- $B$  בצורה מפורשת.  
 ב. המטריצה  $C$  מקיימת  $C = A \cdot B$ .  
 חשבו את  $C$  ומצאו נוסחה עבור  $c_{ij}$  לכל  $1 \leq i, j \leq n$ .

**18** מצאו מטריצה ממשית  $A$ , כך שיתקיים  $A - \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A \right)^T = A - A^T$ .

## תשובות סופיות

(1) א.  $4 \times 6$     ב. לא.    ג.  $4 \times 2$     ד. לא.    ה. לא. ו.  $6 \times 6$

ז.  $6 \times 2$     ח. לא

(2)  $(x, y, z) = (2, 1, -1)$

(3) א.  $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$     ב.  $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$     ג.  $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}$

ד.  $\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

(4) 230

(5) א.  $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$     ב.  $\begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}$

(6)  $\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}$

(7) 63

(8)  $\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}$

(9) שאלת הוכחה.

(10)  $A = \begin{pmatrix} a & -\frac{a^2+4}{c} \\ c & -a \end{pmatrix}$

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) א+ב. שאלת הוכחה.

$$(A+I)^n = \binom{n}{0}A^n + \binom{n}{1}A^{n-1} + \binom{n}{2}A^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1}A^1 + \binom{n}{n}I$$

$$(A-I)^n = \binom{n}{0}A^n - \binom{n}{1}A^{n-1} + \binom{n}{2}A^{n-2} - \dots + (-1)^{n+1} \binom{n}{n-1}A^1 + (-1)^n \binom{n}{n}I$$

(16) שאלת הוכחה.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & \dots & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{א. (17)}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \dots & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & \dots & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & \dots & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & \dots & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & \dots & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } c_{ij} = \min\{i, n+1-j\}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(18)}$$

## מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות

### שאלות

מטריצה ריבועית  $A$  תיקרא סימטרית אם  $A^T = A$ , ואנטי-סימטרית אם  $A^T = -A$ .

(1) ידוע ש- $A$  מטריצה ריבועית.  
מי מבין הבאים נכון (אחד או יותר):

1.  $AA^T$  סימטרית.
2.  $A + A^T$  סימטרית.
3.  $A - A^T$  אנטי-סימטרית.

(2) ידוע ש- $A$  ו- $B$  אנטי-סימטריות מאותו סדר.  
מי מבין הבאים נכון:

1.  $BABABA$  אנטי-סימטרית.
2.  $A^2 - B^2$  סימטרית.
3.  $A^2 + B$  סימטרית.

(3) ידוע ש- $A$  ו- $B$  סימטריות מאותו סדר ונתון כי  $AB = -BA$ .  
מי מבין הבאים נכון:

1.  $AB^3$  אנטי-סימטרית.
2.  $AB^2$  סימטרית.
3.  $(A - B)^2$  סימטרית.

(4) ידוע ש- $A$  סימטרית ו- $B$  אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי  $AB = BA$ .  
הוכיחו:

1.  $AB$  אנטי-סימטרית.
2.  $AB + B$  אנטי-סימטרית.

(5) נתון:  $A, B, AB$  סימטריות מאותו סדר.

הוכיחו כי  $A^4 B^4 = B^4 A^4$ .

### תשובות סופיות

- (1) 1,2,3
- (2) 2
- (3) 1,2,3
- (4) שאלת הוכחה.
- (5) שאלת הוכחה.

## המטריצה ההופכית

### שאלות

בשאלות 1-9 מצאו את ההפוכה של כל מטריצה. בדקו את התשובות על ידי כפל מטריצות מתאים.

$$\begin{array}{lll}
 \begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \text{(3)} & \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} & \text{(2)} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(1)} \\
 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(6)} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \text{(5)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \text{(4)} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} & \text{(9)} & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} & \text{(8)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(7)}
 \end{array}$$

(10) עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$  המטריצה  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 \\ 3 & -1 & k+3 \end{pmatrix}$  הפיכה?

(11) עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$  המטריצה  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  איננה הפיכה?

הניחו שהמטריצות בשאלות 12-14 הן הפיכות מסדר  $n$ , וחלצו את  $X$ :

(12) א.  $AXC = D$     ב.  $A^{-1}XC = A^{-1}DC$     ג.  $P^{-1}X^T P = A$

(13) א.  $C^{-1}(A+X)D^{-2} = I$     ב.  $(A-AX)^{-1} = X^{-1}C$

(14)  $ABC^T X^{-1} BA^T C = AB^T$

(15) נתון  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ .

חשבו את  $X$ , אם ידוע כי  $B^2 X (2B)^{-1} = B + I$ .

$$(16) \text{ נתון } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} . \text{ חשבו את } Y, \text{ אם ידוע כי } BYB^T = B^{-1} + B .$$

$$(17) \text{ נתון } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} .$$

$$\text{חשבו את } B, \text{ אם נתון בנוסף כי: } 5A^T B(I+2A)^{-2} = (7A)^{-2} .$$

(18) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתון:  $A$  מטריצה ריבועית המקיימת  $A^2 - 5A - 2I = 0$ .

הוכיחו כי  $A$  הפיכה ובטאו את  $A^{-1}$  במונחי  $A$  ו- $I$ .

ב. נתון:  $A$  מטריצה ריבועית המקיימת  $(A-3I)(A+2I) = 0$ .

הוכיחו כי  $A$  הפיכה ובטאו את  $A^{-1}$  במונחי  $A$  ו- $I$ .

$$(19) \text{ נתון כי } p(x) = x^3 - 4x^2 - 20x + 48, \text{ } A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} .$$

א. חשבו את  $p(A)$ .

ב. בעזרת תוצאת סעיף א (ולא בדרך אחרת), הוכיחו ש- $A$  הפיכה, ובטאו את  $A^{-1}$  בעזרת  $A$  ו- $I$  בלבד.

(20) נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית המקיימת  $A^4 = 0$ .

א. הוכיחו כי  $A$  לא הפיכה.

ב. הוכיחו כי המטריצה  $I - A$  הפיכה, ומצאו את ההופכית שלה.

$$(21) \text{ נתון כי } \begin{cases} P^{-1}AP = B \\ Q^{-1}BQ = C \end{cases} .$$

הוכיחו כי קיימת מטריצה הפיכה  $D$ , כך ש- $D^{-1}AD = C$ .

\* הניחו שכל המטריצות הנתונות ריבועיות, מאותו סדר והפיכות.  
 \*\* לסטודנטים המכירים את המושג **דמיון מטריצות**, ניתן לנסח את השאלה כך:  
 הוכיחו: אם  $A$  דומה ל- $B$  ו- $B$  דומה ל- $C$ , אז  $A$  דומה ל- $C$ .  
 (כלומר יחס הדמיון הוא יחס טרנזיטיבי)

הערה: בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

**(22)** תהיינה  $A, B$  מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר  $n \geq 2$ . הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- א.  $AB = BA$ .  
 ב. אם  $A^2 - AB = I_n$ , אז בהכרח  $B$  הפיכה.  
 ג. אם  $A^2 - AB = I_n$ , אז בהכרח  $A$  הפיכה.  
 ד. אם  $(AB)^{100} = I$ , אז בהכרח  $(BA)^{100} = I$ .  
 ה. אם  $(AB)^{100} = 0$ , אז בהכרח  $(BA)^{101} = 0$ .

**(23)** תהיינה  $A, B$  מטריצות מסדר  $n \times n$ , עבורן  $A^2 + AB = I$ .

- א. הוכיחו ש- $AB = BA$ .  
 ב. אם נתון בנוסף ש- $B^2 + BA$  היא מטריצת האפס, הוכיחו שגם  $B$  היא מטריצת האפס.

**(24)** תהיינה  $A, B$  מטריצות כלשהן.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

- א. אם  $AB = I$  אז  $B = A^{-1}$ .  
 ב. אם המכפלה  $AB$  היא מטריצה ריבועית, אזי  $A, B$  מטריצות ריבועיות.  
 ג. אם המכפלה  $AB$  היא מטריצה הפיכה, אזי  $A, B$  מטריצות ריבועיות.  
 ד. המכפלה  $AB$  לא הפיכה.  
 ה. אם  $A$  מטריצה ריבועית והמכפלה  $AB$  מוגדרת, אזי  $B$  מטריצה ריבועית.

**(25)** מטריצה ריבועית  $A$  תיקרא אידמפוטנטית אם  $A^2 = A$ . הוכיחו:

- א. למעט המקרה בו  $A = I$ , מטריצה אידמפוטנטית היא לא הפיכה.  
 ב. אם נחסר מטריצה אידמפוטנטית ממטריצת היחידה נקבל מטריצה אידמפוטנטית.  
 ג. אם  $A$  מטריצה אידמפוטנטית ריבועית מסדר 2, אז  $\text{tr}(A) = 1$  או ש- $A$  מטריצה אלכסונית.  
 ד.  $A$  אידמפוטנטית  $\Leftrightarrow A^n = A$ , לכל  $n$  טבעי.

$$(26) \text{ נתונה } M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

מצאו תנאי על הקבועים  $a, b, c, d$  כך ש- $M$  תהיה הפיכה ומצאו את  $M^{-1}$  במקרה זה.

$$(27) \text{ נתון כי } A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \text{ הפיכה.}$$

לגבי כל אחת מהמערכות הבאות קבע את מספר הפתרונות של המערכת.

$$\alpha_{11}x + \alpha_{12}y = \alpha_{13}$$

$$\alpha_{21}x + \alpha_{22}y = \alpha_{23} \quad \text{א.}$$

$$\alpha_{31}x + \alpha_{32}y = \alpha_{33}$$

$$\alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + w = 0$$

$$\alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z - 4w = 1 \quad \text{ב.}$$

$$\alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + 3w = -4$$

$$\alpha_{11}x + \alpha_{21}y + \alpha_{31}z = 3$$

$$\alpha_{12}x + \alpha_{22}y + \alpha_{32}z = 1 \quad \text{ג.}$$

$$\alpha_{13}x + \alpha_{23}y + \alpha_{33}z = 1$$

(28) תהינה  $A, B$  מטריצות מסדר  $n \times n$ .

הוכיחו:

א. אם  $BA = I - A^2$  וגם  $B^2 = -AB$ , אז  $B = 0$ .

ב. אם  $A^2 = 2I$ , אז  $A + I$  ו- $A - I$  הפיכות.

(29) תהינה  $A, B$  מטריצות מסדר  $n \times n$ , כך ש- $B^2A = -2B^3$  וגם

$$(2) \quad B^3 + AB^2 = 3I$$

הוכיחו ש- $A$  ו- $B$  הפיכות, ובטאו את  $A^{-1}$  ו- $B^{-1}$  באמצעות  $B$ .

(30) תהינה  $A, B$  מטריצות מסדר  $n \times n$ , כך ש- $BA + 2I = B$ .

א. הוכיחו ש- $B$  הפיכה.

ב. ידוע ש- $B$  סימטרית.

הוכיחו כי  $A$  סימטרית.

(31) תהי  $A$  מטריצה נילפוטנטית (כלומר, קיים  $n$  טבעי כך ש- $A^n = 0$ ).

א. הוכיחו כי  $A$  לא הפיכה.

ב. הוכיחו כי  $I - A$  ו- $I + A$  הפיכות.

ג. נגדיר:  $e^A = I + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots + \frac{1}{n!}A^n + \dots$

הוכיחו: אם  $e^A = I$  אז  $A = 0$ .

**(32)** נתונות שתי מטריצות,  $A$  ו- $B$ , מסדר  $n$ .

סמנו את הטענה שנכונה בהכרח:

- א. ל- $A$  ול- $A^T$  יש אותה צורה מדורגת קנונית.
- ב. אם  $A, B$  מדורגות קנונית, אז  $A+B$  מדורגת קנונית.
- ג. אם  $A, B$  מדורגות קנונית, אז  $A-B$  מדורגת קנונית.
- ד. אם בצורה המדורגת קנונית של  $B$  יש שורת אפסים, אז גם בצורה המדורגת קנונית של  $AB$  יש שורת אפסים.

## תשובות סופיות

$$\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$k=1, k=-4 \quad (11)$$

$$k \neq 1, k \neq -2 \quad (10)$$

$$(P^{-1})^T A^T P^T \quad \text{ג.} \quad D \quad \text{ב.} \quad A^{-1}DC^{-1} \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$(A+C^{-1})^{-1}A \quad \text{ב.} \quad CD^2 - A \quad \text{א.} \quad (13)$$

$$X = 4 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$BA^T C(B^{-1})^T BC^T \quad (14)$$

$$B = \frac{1}{245} \begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}A - \frac{1}{6}I \quad \text{ב.}$$

$$A^{-1} = 0.5A - 2.5I \quad \text{א.} \quad (18)$$

$$B^{-1} = -\frac{1}{48}B^2 + \frac{1}{12}B + \frac{5}{12}I \quad \text{ב.}$$

$$f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{א.} \quad (19)$$

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 \quad \text{ב.}$$

(20) א. שאלת הוכחה.

(21) שאלת הוכחה.

(22) שאלת הוכחה.

(23) שאלת הוכחה.

(24) שאלת הוכחה.

(25) שאלת הוכחה.

$$((a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)) \quad M^{-1} = \frac{1}{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)} M^T \quad (26)$$

- 27) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות. ג. פתרון יחיד.  
28) שאלת הוכחה.  
29) שאלת הוכחה.  
30) שאלת הוכחה.  
31) שאלת הוכחה.  
32) ד

## בחזרה למערכת משוואות ליניארית

### שאלות

1) בסעיפים הבאים מצאו מטריצות  $A$ ,  $\underline{x}$  ו- $\underline{b}$ , המבטאות את מערכת המשוואות הנתונה ע"י המשוואה היחידה  $A\underline{x} = \underline{b}$ :

$$2x - 3y + z + t = 1$$

$$4x + y + 2z = 4$$

$$y + z + t = 1$$

$$x - 4z - 2y = 10$$

$$2x + y - z = 3$$

$$x + 2y - 4z = 5 \quad \text{א.}$$

$$6x + 4y + z = 2$$

בשאלות 2-6 נתון כי  $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$   $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$   $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ .

בטאו כל אחת מהמשוואות בשאלות אלה כמערכת משוואות ליניאריות:

$$A\underline{x} = -k\underline{x} + \underline{b} \quad (4)$$

$$A\underline{x} = 4\underline{x} + \underline{b} \quad (3)$$

$$A\underline{x} = \underline{b} \quad (2)$$

$$A^T \underline{x} = 2\underline{x} + 3\underline{b} \quad (6)$$

$$A\underline{x} = \underline{x} \quad (5)$$

$$2x - y + z = 3$$

7) פתרו את מערכת המשוואות  $3x - 2y + 2z = 5$ ,

$$5x - 3y + 4z = 11$$

בעזרת המטריצה ההפוכה.

$$x + 4y + 2z + 4t = 1$$

$$x + 2y - z = 0$$

$$y + z + t = 1$$

$$x + 3y - z - 2t = 0$$

8) פתרו את מערכת המשוואות

בעזרת המטריצה ההפוכה.

9) למערכת משוואות מסוימת יש את שני הפתרונות הבאים:

$$(x, y, z) = (2, -8, 4) \quad , \quad (x, y, z) = (-1, 4, -2)$$

הוכיחו שהמערכת חייבת להיות הומוגנית.

**10** למערכת משוואות לא הומוגנית יש את שני הפתרונות הבאים :  
 $(x, y, z) = (2, 3, 4)$  ,  $(x, y, z) = (-1, 4, -2)$   
 מצאו פתרון לא טריוויאלי כלשהו של המערכת ההומוגנית המתאימה.

$$(11) \text{ נתונה המערכת } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 7y + (k^2 + 1)z = k^2 - 1 \\ 4x - 6y + (k + 2)z = 4 \end{cases}$$

מצאו עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$ , למערכת :  
 א. פתרון יחיד. ב. אין פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

\* השתמשו בפתרון במושג 'דרגה של מטריצה'.

$$(12) \text{ נתון } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & k \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}$$

ידוע כי  $rank(A) = 3$ , וידוע כי למערכת  $Ax = b$  יש פתרון.  
 מצאו את הקבועים  $k, m$ .

**13** נתונה מטריצה ריבועית  $A$ , המקיימת את התכונה הבאה :  
 סכום האיברים בכל שורה של המטריצה  $A$  שווה 0.  
 הוכיחו ש- $A$  מטריצה לא הפיכה.

**14** נתונה מטריצה ריבועית הפיכה  $A$ , המקיימת את התכונה הבאה :  
 סכום האיברים בכל שורה של המטריצה  $A$  שווה  $k$ .  
 הוכיחו שסכום האיברים בכל שורה של המטריצה הוא קבוע.  
 בטאו קבוע זה בעזרת  $k$ .

$$(15) \text{ מטריצה } A \text{ מקיימת } A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 0$$

הוכיחו כי הווקטור  $\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$  הוא פתרון של המערכת ההומוגנית  $Ax = 0$ .

- 16** יהיו  $A, B$  מטריצות ממשיות מסדר  $n \times n$ .
- עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או לא.
- א. אם למערכת  $(AB)x = 0$  קיימים שני פתרונות שונים, אז בהכרח  $A$  לא הפיכה.
- ב. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת  $(AB)x = 0$ , אז למערכת  $(BA)x = 0$  קיים פתרון שונה מ-0.
- ג. אם למערכת  $Ax = 0$  קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2 = 0$ .
- ד. אם למערכת  $(A^t A)x = 0$  קיים פתרון יחיד, אז  $A$  לא הפיכה.
- ה. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת ההומוגנית  $(AB)x = 0$ , אז למערכת ההומוגנית  $Ax = 0$  קיים פתרון שונה מ-0.

- 17** נתונה מערכת משוואות מעל  $\mathbb{R}$ :  $Ax = d$  ( $d \neq 0$ ).
- נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר 4, המקיימת  $\text{rank}(A) = 2$ .
- ידוע כי הווקטורים הבאים פותרים את המערכת הנתונה:
- $$u = (x_1, x_2, 6, 7), \quad v = (y_1, y_2, 1, 2), \quad w = (z_1, z_2, 4, 3)$$
- מי מבין הבאים הוא הפתרון הכללי של המערכת הנתונה:
- א.  $x = au + bv + cw$
- ב.  $x = (a + b + 1)u - av - bw$
- ג.  $x = au + bv + w$
- ד.  $x = (a - b)u + (b - c)v + (c - a)w$
- ה.  $x = (a + b)u - (av + bw + u)$ , כאשר  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

- הערה:** בחלקו האחרון של פתרון תרגיל זה נדרש הידע הבא מהפרק מרחבים וקטורים:
- בהינתן מערכת הומוגנית  $Ax = 0$ :
- אוסף כל הפתרונות של המערכת נקרא מרחב הפתרונות של המערכת.
  - מספר המשתנים החופשיים במערכת לאחר דירוג נקרא המימד של מרחב הפתרונות.
- בכל אופן, מומלץ לחזור לתרגיל זה אחרי שתעברו על הפרק מרחבים וקטורים.

- 18** נתונה מערכת  $A_{m \times n} \cdot x = b$ .
- הוכיחו או הפריכו:
- א. אם  $u$  וגם  $\lambda u$  ( $\lambda \neq 1$ ) פתרונות של המערכת אז המערכת הומוגנית.
- ב. אם  $u$  ו- $v$  וגם  $\alpha u + \beta v$  ( $\alpha, \beta \neq 0$ ) פתרונות של המערכת אז היא הומוגנית.
- ג. אם הווקטורים  $(1, 2, \dots, n)$ ,  $(n, \dots, 2, 1)$  פותרים את המערכת והווקטור  $(n+1, \dots, n+1)$  לא פותר את המערכת, אז המערכת לא הומוגנית.

**19** תהי  $A$  מטריצה כך שלמערכת  $Ax=0$  פתרון יחיד. הוכיחו או הפריכו:

- א.  $A$  הפיכה.  
 ב. למערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים  $A^T$  פתרון יחיד.  
 ג. לכל מערכת לא הומוגנית עם מטריצת מקדמים  $A$  פתרון יחיד.

**20** תהי  $A_{m \times n}$  מטריצה ממשית כך ש- $m < n$ . הוכיחו או הפריכו:

- א. ממד מרחב הפתרונות של המערכת  $Ax=0$  הוא  $n-m$ .  
 ב. למערכת  $(A^T A)x=0$  יש אינסוף פתרונות.  
 ג. ייתכן מצב בו למערכת  $(A^T A)x=0$  יש פתרון יחיד.  
 ד. ייתכן מצב בו למערכת  $(AA^T)x=0$  יש פתרון יחיד.

**21** תהי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר  $n$ , כך שלכל מטריצה ריבועית  $B \neq 0$  מסדר  $n$ , מתקיים  $AB \neq 0$ . הוכיחו ש- $\text{rank}(A) = n$ .

**22** תהי  $A$  מטריצה ממשית מסדר  $m \times n$ .

לגבי כל אחת מהטענות הבאות, קבעו אם היא נכונה או לא. נמקו.

- א. אם למערכת  $Ax=b$  יש פתרון לכל  $b \in \mathbb{R}^m$ , אז בהכרח למערכת  $A^T x=b$  יש פתרון לכל  $b \in \mathbb{R}^m$ .  
 ב. עבור  $m=n$ , אם למערכת  $Ax=b$  יש פתרון לכל  $b \in \mathbb{R}^m$ , אז בהכרח למערכת  $A^T x=b$  יש פתרון לכל  $b \in \mathbb{R}^m$ .  
 ג. אם למערכת ההומוגנית  $Ax=0$  יש אינסוף פתרונות, אז בהכרח  $m < n$ .  
 ד. ייתכן ש- $A^T A = I_n$  וגם  $AA^T = I_m$ .  
 ה. אם  $m \neq n$  ואם למערכת  $Ax=0$  יש פתרון יחיד, אז יש מערכת לא הומוגנית  $Ax=b$  עם יותר מפתרון אחד.

**23** תהא  $A \in M_{4 \times 4}(R)$  ויהי  $b \in R^4$ .

ידוע כי  $u$  ו- $v$  פתרונות של המערכת הלא הומוגנית  $Ax=b$ .

- א. נגדיר  $w = \alpha u + \beta v$ . הוכיחו כי אם גם  $w$  פתרון של המערכת  $Ax=b$ , אז  $\alpha + \beta = 1$ .  
 ב. נניח בנוסף כי  $w = -u + 2v$  הוא פתרון של המערכת  $A^2 x = b$ . הוכיחו כי  $A-I$  לא הפיכה.

$$(24) \text{ נתון } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 \\ -3 & -6 & 3 & -8 & -8 \end{pmatrix}, \text{ ויהי } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

א. הראו כי  $v = (2, -1, 1, -1, 1)^T$  הוא פתרון של המערכת  $Ax = b$ .

ב. מצאו את קבוצת הפתרונות של המערכת ההומוגנית  $Ax = 0$ .

ג. מצאו  $C, D \in M_{5 \times 2}(\mathbb{R})$ , כך ש- $C \neq D$  ו- $AC = AD = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ .

## תשובות סופיות

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{א. (1)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{ב.}$$

$$4x - 2y + 4z = 1$$

$$x - y + z = 2 \quad \text{(2)}$$

$$x - 6y + 3z = 3$$

$$-2y + 4z = 1$$

$$x - 5y + z = 2 \quad \text{(3)}$$

$$x - 6y - z = 3$$

$$(4+k)x - 2y + 4z = 1$$

$$x + (k-1)y + z = 2 \quad \text{(4)}$$

$$x - 6y + (3+k)z = 3$$

$$3x - 2y + 4z = 0$$

$$x - 2y + z = 0 \quad \text{(5)}$$

$$x - 6y + 2z = 0$$

$$2x + y + z = 3$$

$$-2x - 3y - 6z = 6 \quad \text{(6)}$$

$$4x + y + z = 9$$

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) \quad \text{(7)}$$

$$(x, y, z, t) = (-13, 4, -5, 2) \quad \text{(8)}$$

(9) שאלת הוכחה.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{(10)}$$

(11) אם  $k \neq 2$  או  $k \neq -1$ , אז יש פתרון אחד.

אם  $k = 2$ , אז יש אינסוף פתרונות.

אם  $k = -1$ , אז אין פתרונות.

$$m = 5, k = 9 \quad \text{(12)}$$

(13) שאלת הוכחה.

14) סכום האיברים בכל שורה של  $A^{-1}$  הוא קבוע השווה ל- $\frac{1}{k}$ .

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

18) שאלת הוכחה.

19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

23) שאלת הוכחה.

24) א. שאלת הוכחה. ב.  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-t, -2s, s, -t, -t, t)$ .

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} (t=s=0) \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} (t=s=1) \text{ ג.}$$

# מתמטיקה למחצית ב

פרק 14 - אלגברה ליניארית - דטרמיננטות

תוכן העניינים

- 156 ..... 1. חישוב דטרמיננטה לפי הגדרה ולפי דירוג.
- 161 ..... 2. חישוב דטרמיננטה כללית מסדר n.
- 166 ..... 3. חישוב דטרמיננטה לפי חוקי דטרמיננטות.
- 168 ..... 4. כלל קרמר ופתרון מערכת משוואות.

## חישוב דטרמיננטה לפי הגדרה ולפי דירוג

### שאלות

בשאלות 1-5 חשבו את הדטרמיננטה על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

$$(1) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(2) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(3) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(4) \quad \begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(5) \quad \begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

בשאלות 6-7 חשבו את הדטרמיננטה של המטריצות על ידי דירוג.

$$(6) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{array} \right| \text{ ב.} \\ \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{array} \right| \text{ א. (7)} \\ \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{array} \right| \text{ ג.} \end{array}$$

בשאלות 8-10 חשבו את הדטרמיננטה על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

$$\left| \begin{array}{cccc} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{array} \right| \quad (8)$$

$$\left| \begin{array}{cccc} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{array} \right| \quad (9)$$

$$\left| \begin{array}{cccc} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{array} \right| \quad (10)$$

בשאלות 11-12 הראו, ללא חישוב, שהדטרמיננטה של המטריצות שווה אפס:

$$\left| \begin{array}{ccc} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{array} \right| \text{ ג.} \quad \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{array} \right| \text{ ב.} \quad \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{array} \right| \text{ א. (11)}$$

$$\begin{vmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{vmatrix} \cdot \text{ב.} \quad \begin{vmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \text{א. (12)}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \text{ד.} \quad \begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \text{ג.}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4 \quad \text{בשאלות 13-15 נתון כי:}$$

חשבו:

$$\begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \quad \text{(16) הוכיחו כי:}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z) \quad \text{(17) הוכיחו כי:}$$

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{(18) חשבו:}$$

(19) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. נתונות שתי מטריצות ריבועיות  $A$  ו- $B$  מסדר  $n$  הנבדלות ביניהן רק בשורה ה- $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ).
- תהי  $C$  מטריצה הזוהה למטריצות  $A$  ו- $B$  אך נבדלת מהן בשורה ה- $k$ , שם היא שווה לסכום השורה ה- $k$  של  $A$  והשורה ה- $k$  של  $B$ .
- הוכיחו כי  $|A| + |B| = |C|$ .

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y \end{vmatrix} \quad \text{ב. חשבו:}$$

## תשובות סופיות

- (1) א.  $ad - bc$     ב. 29    ג. -1
- (2) א. -1    ב. -3    ג. -14
- (3) א. 24    ב. 234    ג. -300
- (4) 9
- (5) 6
- (6) א. 0    ב. 0    ג. 3
- (7) א. 24    ב. 44    ג. 104
- (8) 120
- (9) 114
- (10) 6
- (11) פתרונות באתר: [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)
- (12) פתרונות באתר.
- (13) -8
- (14) 16
- (15) 9
- (16) שאלת הוכחה.
- (17) שאלת הוכחה.
- (18)  $(k-1)^4 (k+4)$
- (19) א. שאלת הוכחה.    ב. 0

## חישוב דטרמיננטה כללית מסדר $n$

### שאלות

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה  $A_{n \times n} = (a_{ij})$  הנתונה ע"י:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j < n \\ a & 1 \leq i \leq n, j = n \\ a & 1 \leq j \leq n, i = n \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ב. עבור אילו ערכים של המספרים הממשיים  $a_0, \dots, a_{n-1}$ , המטריצה הבאה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{הפיכה:}$$

(2) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה  $A_{n \times n} = (a_{ij})$  הנתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} j & i = j + 1 \\ n & i = 1, j = n \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

האם קיים ערך של  $n$  עבורו דרגת המטריצה קטנה מ- $n$ ?

(3) חשבו את  $|A|$  כאשר המטריצה  $A = (a_{ij})$  נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j = 1 \\ 0 & i = j \neq 1 \\ j & i < j \\ -j & i > j \end{cases}$$

(4) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה  $A_{n \times n} = (a_{ij})$  הנתונה ע"י:  $a_{ij} = |i - j|$

(5) חשבו את  $|A|$  כאשר המטריצה  $A = (a_{ij})$  נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} a & i = j \\ b & i \neq j \end{cases}$$

(6) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר  $n$ , כאשר  $n \geq 1$ :

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 6 & 6 & -3 & 6 & \cdots & 6 \\ 8 & 8 & 8 & -4 & \cdots & 8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 2n & 2n & 2n & 2n & \cdots & -n \end{vmatrix}$$

(7) חשבו את  $|A|$  כאשר המטריצה  $A = (a_{ij})$  נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \min\{i, j\} \quad \text{א.}$$

$$a_{ij} = \max\{i, j\} \quad \text{ב.}$$

(8) המטריצה  $A = (a_{ij})$  נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} \min\{3(i-1), 3(j-1)\} & 1 < i, j \leq n \\ 1 & i=1 \text{ or } j=1 \end{cases}$$

חשבו את  $|A|$ .

(9) המטריצה  $A = (a_{ij})$  נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} \min\{k(i-1), k(j-1)\} & 1 < i, j \leq n \\ 1 & i=1 \text{ or } j=1 \end{cases}$$

חשבו את  $|A|$  ומצאו עבור אילו ערכים של  $k$  המטריצה הפיכה.

(10) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר  $n$ , כאשר  $n \geq 3$ :

$$\left( a_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ 1 & 2 \leq i \leq n, j = 1 \\ 1 & 2 \leq j \leq n, i = 1 \\ x & \text{else} \end{cases} \right) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & x & x & \cdots & x \\ 1 & x & 0 & x & \cdots & x \\ 1 & x & x & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & x & \ddots & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}$$

(11) תהי  $A = (a_{ij})$  מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} ij & i \neq j \\ 1+ij & i = j \end{cases}$$

חשבו את  $D_n = |A_{n \times n}|$ .

הערה: נפתור תרגיל זה בדרך אחרת בפרק על ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

$$(12) \text{ המטריצה } A = (a_{ij}) \text{ נתונה על ידי: } a_{ij} = \begin{cases} a & i = j \\ b & i = j+1 \\ c & j = i+1 \end{cases}$$

א. מצאו נוסחת נסיגה לחישוב  $D_n = |A_{n \times n}|$ .

ב. הניחו כי  $a=3, b=1, c=2$  וחשבו:

1. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה.

2. את הדטרמיננטה עבור  $n=20$ .

(13) נתונה מטריצה  $A_{n \times n}$ .

במטריצה זו מבצעים את פעולות השורה הבאות:  
 מחליפים בין השורה הראשונה לשורה האחרונה, בין השורה השנייה לשורה  
 הלפני אחרונה וכך הלאה, עד שלא ניתן יותר להחליף שורות.

בסוף התהליך מקבלים מטריצה  $B$ .

חשבו את  $|B|$  במונחי  $|A|$ .

$$(14) \text{ חשבו את } D_n = \begin{vmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{vmatrix}_{n \times n} \text{ כאשר } n \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & i+j = n+1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ הערה:}$$

$$(15) \text{ חשבו את } D_n = \det \begin{pmatrix} 2 & & 1 \\ & \ddots & 2 \\ n & & 2 \end{pmatrix}_{n \times n} \text{ כאשר } n \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} i & i+j = n+1 \\ 2 & \text{else} \end{cases} \text{ הערה:}$$

$$(16) \text{ חשבו את } D_n = \det \begin{pmatrix} a & & b \\ & \ddots & b \\ b & & a \end{pmatrix}_{n \times n} \text{ כאשר } n \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} b & i+j = n+1 \\ a & \text{else} \end{cases} \text{ הערה:}$$

(17) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה של  $A_{n \times n} = (a_{ij})$  הנתונה ע"י:

$$a_{ij} = \min \{i, n-j+1\}$$

$$\begin{vmatrix}
 a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & x \\
 a_n & a_{n-1} & \cdots & x & a_1 \\
 a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 a_n & x & \cdots & a_2 & a_1 \\
 a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1
 \end{vmatrix}$$

(18) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר  $n$ , כאשר  $n \geq 2$

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } |A| = a - (n-1)a^2 \quad \text{ב. } A \text{ הפיכה אם ורק אם } a_0 \neq 0$$

$$(2) \quad \text{א. } (-1)^{n+1} n! \quad \text{ב. לא.}$$

$$(3) \quad |A| = n!$$

$$(4) \quad |A| = (-1)^{n+1} (n-1) 2^{n-2}$$

$$(5) \quad |A| = (a-b)^{n-2} [a + (n-1)b]$$

$$(6) \quad (-3)^{n-1} (2n-3)n!$$

$$(7) \quad \text{א. } |A| = 1 \quad \text{ב. } |A| = (-1)^{n+1} n$$

$$(8) \quad |A| = 2 \cdot 3^{n-2}$$

$$(9) \quad |A| = (k-1) \cdot k^{n-2} \text{ והמטריצה הפיכה אם ורק אם } k \neq 1 \text{ וגם } k = 0$$

$$(10) \quad |A| = (-1)^{n-1} x^{n-2} (n-1)$$

$$(11) \quad D_n = 1 + \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$(12) \quad \text{א. } D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-1}, D_2 = a^2 - bc, D_3 = a^3 - 2abc$$

$$\text{ב.1. } D_n = 2^{n+1} - 1 \quad \text{ב.2. } D_{20} = 2^{21} - 1$$

$$|B| = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} |A| & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} |A| & n \text{ odd} \end{cases} \quad (13)$$

$$D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ odd} \end{cases} \quad (14)$$

$$D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n+2}{2}} 2(n-2)! & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} 2(n-2)! & n \text{ odd} \end{cases} \quad (15)$$

$$D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} (b-a)^{n-1} [b + (n-1)a] & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} (b-a)^{n-1} [b + (n-1)a] & n \text{ odd} \end{cases} \quad (16)$$

$$D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ odd} \\ (-1)^{\frac{n-2}{2} + n-1} & n \text{ even} \end{cases} \quad (17)$$

$$D_n = \begin{cases} a_n (-1)^{\frac{n}{2}} (x-a_1)(x-a_2) \cdots (x-a_{n-1}) & n \text{ even} \\ a_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} (x-a_1)(x-a_2) \cdots (x-a_{n-1}) & n \text{ odd} \end{cases} \quad (18)$$

## חישוב דטרמיננטה לפי משפטי דטרמיננטות

### שאלות

בשאלות 1-2 נתון כי  $A$  ו- $B$  מטריצות מסדר 3,  $|B|=2$ ,  $|A|=4$ .  
 חשבו:

$$(1) \quad \text{א. } |ABA^{-1}B^T| \quad \text{ב. } |4A^2B^3|$$

$$(2) \quad \text{א. } |-A^{-2}B^T A^3| \quad \text{ב. } |-2A^2 A^T \text{adj}B|$$

$$(3) \quad \text{נתון: } (PQ)^{-1}APQ = B. \text{ הוכיחו: } |A|=|B|.$$

$$(4) \quad \text{נתון: } A \text{ ו-} B \text{ מטריצות הפיכות מסדר 4, כך ש-} 2AB+3I=0, |A|=2. \text{ חשבו את } |B|.$$

$$(5) \quad \text{נתון: } A \text{ ו-} B \text{ מטריצות הפיכות מסדר 3, כך ש-} B^2-2A^{-1}=0, A+3B=0. \text{ חשבו את } |A|, |B|.$$

$$(6) \quad \text{הוכיחו: 1. } |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad \text{2. } |\text{adj}(A_{n \times n})| = |A|^{n-1}.$$

$$(7) \quad \text{נתון כי } A \text{ מטריצה אנטי-סימטרית מסדר אי-זוגי. הוכיחו ש-} |A|=0.$$

$$(8) \quad \text{נתון: } A \text{ מטריצה מסדר } n, |A|=128, 2AB=B^T A^2, \text{ ו-} B \text{ הפיכה. מצאו את } n.$$

$$(9) \quad \text{נתון: } \det(A_{n \times n}) = 2, \det(B_{n \times n}) = \frac{1}{3}.$$

$$\text{חשבו: } \det\left|\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right|.$$

$$(10) \text{ נתון } M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

הוכיחו כי  $\det(M) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$ .

### תשובות סופיות

(1) א. 4      ב.  $2^{13}$

(2) א. -8      ב.  $-2^{11}$

(3) שאלת הוכחה.

(4)  $\frac{81}{32}$

(5)  $|A|=18, |B|=-2/3$

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) 7

(9)  $4^n$

(10) שאלת הוכחה.

## כלל קרמר

### שאלות

בשאלות 1-3 פתרו את מערכות המשוואות בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{array}{l}
 x+2z+5t=8 \\
 -2x-6y=-8 \\
 5x+3y-7z+4t=5 \\
 2x+5y+44z=51
 \end{array}
 \quad (3)
 \quad
 \begin{array}{l}
 x+z=3 \\
 4x+y+8z=21 \\
 2x+3z=8
 \end{array}
 \quad (2)
 \quad
 \begin{array}{l}
 x+2y=5 \\
 3x+4y=11
 \end{array}
 \quad (1)$$

$$kx+y+z+t+r=1$$

$$x+ky+z+t+r=1$$

(4) נתונה מערכת המשוואות:  $x+y+kz+t+r=1$ .

$$x+y+z+kt+r=1$$

$$,x+y+z+t+kr=1$$

א. עבור איזה ערך של  $k$  למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של  $k$  למערכת פתרון יחיד שבו  $x = \frac{1}{2}$ ?

ג. האם קיים  $k$  עבורו למערכת פתרון יחיד שבו  $x = \frac{1}{5}$ ?

ד. הוכיחו שאם למערכת פתרון יחיד, אז בהכרח מתקיים ש-

$$.x=y=z=t=r$$

(5) יהיו  $A, B$  מטריצות ממשיות מסדר  $n \times n$ .

עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או לא.

א. אם למערכת ההומוגנית  $Ax=0$  קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש-  $A^2=0$ .

ב. אם למערכת ההומוגנית  $(A^t A)x=0$  קיים פתרון יחיד, אז  $|A|=0$ .

ג. אם למערכת ההומוגנית  $(AB)x=0$  קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש-  $|A|=0$ .

### תשובות סופיות

$$x=1, y=2 \quad (1)$$

$$x=1, y=1, z=2 \quad (2)$$

$$x=y=z=t=1 \quad (3)$$

$$k \neq 1, k \neq -4 \quad (4)$$

$$\begin{array}{llll}
 \text{ד. הוכחה.} & \text{ב. } k=-2 & \text{ג. לא.} & \text{א. לא נכונה.} \\
 \text{ג. לא נכונה.} & \text{ב. לא נכונה.} & & 
 \end{array}$$

# מתמטיקה למחצית ב

פרק 15 - טריגונומטריה - טריגונומטריה במשולש ישר זווית

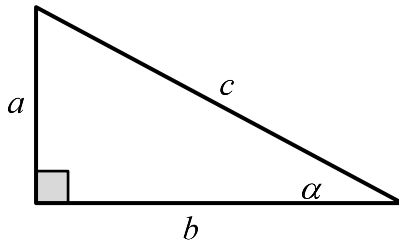
תוכן העניינים

1. משולש ישר זווית.....169

## משולש ישר זווית:

### סיכום כללי:

### הגדרות הפונקציות הטריגונומטריות:



$$\sin \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{a}{c}$$

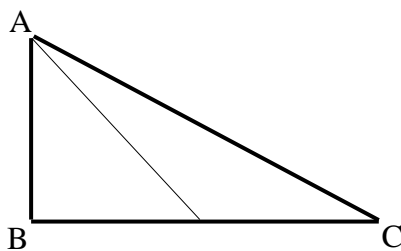
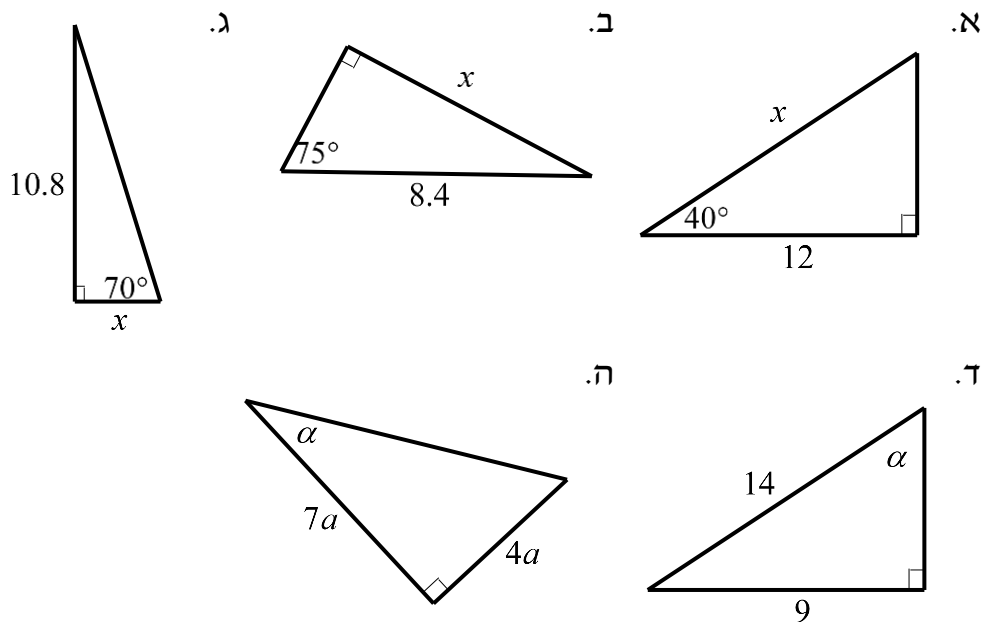
$$\cos \alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{הניצב שליד הזווית}} = \frac{a}{b}$$

$$a^2 + b^2 = c^2: \text{משפט פיתגורס}$$

### שאלות:

1) מצא את ערכו של  $\alpha/x$  במשולשים ישרי הזווית הבאים:



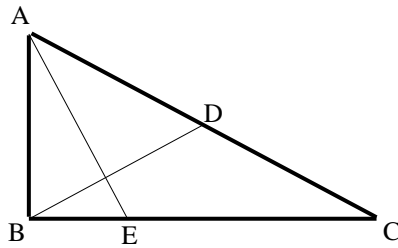
2) המשולש ABC שבציור הוא משולש

ישר זווית ( $\sphericalangle B = 90^\circ$ ).

AD הוא התיכון לניצב BC.

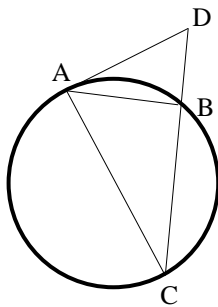
נתון:  $\sphericalangle C = 28^\circ$ ,  $AB = 6$  ס"מ.

מצא את AD ואת  $\sphericalangle BAD$ .



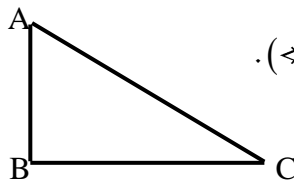
- (3) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ( $\angle B = 90^\circ$ ). BD הוא התיכון ליתר ו-AE הוא חוצה הזווית  $\angle A$ . נתון:  $BC = 8$  ס"מ,  $BD = 5.6$  ס"מ. מצא את BE ואת  $\angle BAE$ .

- (4) מצא את זוויותיו של מעוין שאורכי אלכסונו 24 ס"מ ו-18 ס"מ.

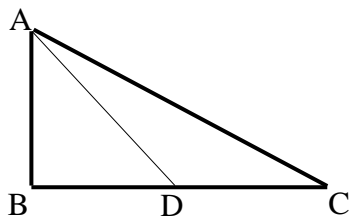


- (5) המשולש ABC חסום במעגל כך שהצלע AC היא קוטר המעגל. המשיק למעגל בנקודה A והמשך הצלע CB נפגשים בנקודה D. נתון:  $\angle DAB = 32^\circ$ ,  $BD = 4$  ס"מ. מצא את אורכו של רדיוס המעגל.

- (6) במשולש שווה שוקיים שבו השוק ארוכה ב-4 ס"מ מהבסיס נתון כי זווית הראש היא  $34.92^\circ$ . מצא את שטח המשולש.

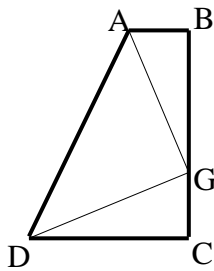


- (7) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ( $\angle B = 90^\circ$ ). נתון:  $AB = a$ ,  $\angle A = \alpha$ . הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $a$  את היקף המשולש.

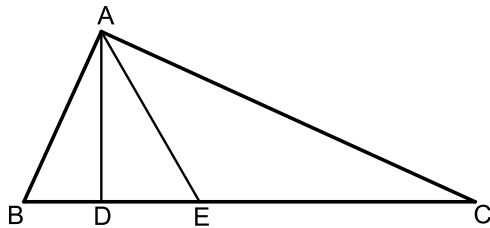


- (8) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ( $\angle B = 90^\circ$ ). AD הוא התיכון לניצב BC. נתון:  $AB = b$ ,  $\angle C = \alpha$ . הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $b$  את אורכי הקטעים AD ו-BD.

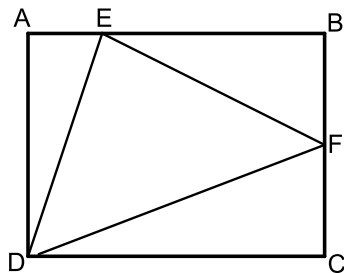
- (9) במשולש ישר זווית אחת הזוויות החדות היא  $\alpha$  ואורך חוצה הזווית זו הוא  $k$ . הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $k$  את שטח המשולש ואת אורך היתר.



- 10** טרפז ABCD הוא טרפז ישר זווית ( $\angle B = \angle C = 90^\circ$ ). הנקודה G נמצאת על השוק BC כך ש-  $AG \perp DG$ . נתון:  $\angle BAG = \beta$ ,  $AG = DG = m$ . הבע באמצעות  $\beta$  ו-  $m$  את שטח הטרפז.



- 11** המשולש ABC הוא ישר זווית ( $\angle A = 90^\circ$ ). הקטעים AD ו- AE הם בהתאמה גובה ליתר וחוצה זווית. מסמנים:  $\angle DAE = \alpha$ ,  $DE = k$ .  
א. הבע באמצעות  $k$  ו-  $\alpha$  את שטח המשולש ABC.  
ב. חשב את שטח המשולש ABC אם ידוע כי:  $\alpha = 30^\circ$  ו-  $k = 2$ .

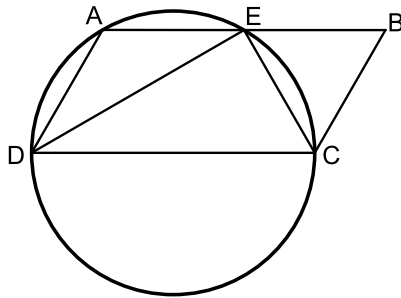


- 12** במלבן ABCD מסמנים את הנקודות E ו- F הנמצאות על הצלעות AB ו- BC בהתאמה כך ש- E מקיימת:  $3AE = BE$  ו- F היא אמצע הצלע BC. אורך הצלע AD שווה לאורך הקטע BE. מעבירים את הקטעים EF, DF ו- DE כך שנוצר במשולש DEF.  
א. סמן ב-  $t$  את אורך הקטע AE והבע באמצעות  $t$  את אורכי צלעות המשולש DEF.  
ב. חשב את זוויות המשולש EDF.

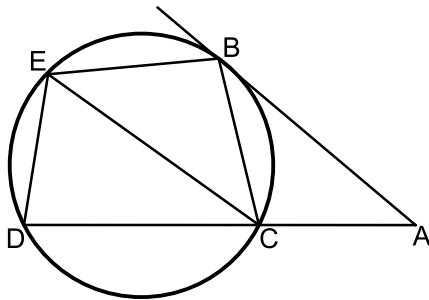
- 13** משולש שווה שוקיים שאורך שוקו  $k$  וזווית הבסיס שלו היא  $\beta$  חוסם מעגל. הבע באמצעות  $\beta$  ו-  $k$  את רדיוס המעגל.

- 14** בטרפז ישר זווית חסום מעגל. אורך השוק הארוכה בטרפז היא  $b$  והזווית שהיא יוצרת עם הבסיס הגדול היא  $\alpha$ . הבע באמצעות  $\alpha$  ו-  $b$  את אורכו של הבסיס הגדול בטרפז ואת שטחו.

הערה: השאלות הבאות משלבות ידע בגיאומטריה ובטריגונומטריה יחד:



- 15** דרך הקודקודים  $A, C$  ו- $D$  של המקבילית  $ABCD$  מעבירים מעגל. היקף המעגל חוצה את הצלע  $AB$  בנקודה  $E$ ,  $(AE = BE)$ . נתון כי  $DC$  הוא קוטר במעגל וכי המיתר  $DE$  חוצה את זווית  $D$ .
- הוכח כי המיתר  $CE$  חוצה את זווית  $C$ .
  - רדיוס המעגל יסומן ב- $R$ .
  - הבע באמצעות  $R$  את היקף המקבילית.
  - מצא את רדיוס המעגל אם ידוע כי שטח המקבילית הוא  $16\sqrt{3}$  סמ"ר.



- 16** מהנקודה  $A$  שמחוץ למעגל מעבירים משיק  $AB$  וישר חותך  $ACD$ . מעבירים את המיתרים  $BC$  ו- $BE$  אשר זהים באורכם. כמו כן מעבירים את המיתר  $DE$ . אורך המיתר  $CE$  שונה מאורך המשיק  $AB$ .
- הוכח כי המרובע  $ABEC$  הוא טרפז.
  - הוכח כי:  $\angle BEC = 2 \cdot \angle EDC$ .
  - נתונים:  $\angle A = 40^\circ$ ,  $AC = 6$  ס"מ,  $AB = 9$  ס"מ,  $CE = 8$  ס"מ. חשב את שטח המרובע  $ABEC$ .

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x = 15.665 \quad \text{ב. } x = 8.114 \quad \text{ג. } x = 3.931 \quad \text{ד. } \alpha = 40.005^\circ \quad \text{ה. } \alpha = 29.745^\circ$$

$$(2) \quad AD = 8.236 \text{ ס"מ}, \quad \angle BAD = 43.24^\circ$$

$$(3) \quad BE = 3.294 \text{ ס"מ}, \quad \angle BAE = 22.792^\circ$$

$$(4) \quad 73.74^\circ, 73.74^\circ, 106.26^\circ, 106.26^\circ$$

$$(5) \quad R = 6.04 \text{ ס"מ}$$

$$(6) \quad S = 28.618 \text{ סמ"ר}$$

$$(7) \quad P = a \left( 1 + \tan \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right)$$

$$(8) \quad AD = \sqrt{b^2 + \frac{b^2}{4 \tan^2 \alpha}}, \quad BD = \frac{b}{2 \tan \alpha}$$

$$(9) \quad AC = \frac{k \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}, \quad S = \frac{k^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \tan \alpha}{2}$$

$$(10) \quad \frac{(m \sin \beta + m \cos \beta)^2}{2}$$

$$(11) \quad \text{א. } S = \frac{k^2}{\cos 2\alpha \tan^2 \alpha} \quad \text{ב. } 24 \text{ סמ"ר}$$

$$(12) \quad \text{א. } DE = t\sqrt{10}, EF = t\sqrt{11.25}, DF = t\sqrt{18.25} \quad \text{ב. } 81.86^\circ, 51^\circ, 47.14^\circ$$

$$(13) \quad R = k \cos \beta \tan \frac{\beta}{2}$$

$$(14) \quad \frac{1}{2} b \sin \alpha + \frac{\frac{1}{2} b \sin \alpha}{\tan \frac{\alpha}{2}}, \quad S = \frac{1}{2} b^2 \sin \alpha (1 + \sin \alpha)$$

$$(15) \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. } 6R \quad \text{ג. } 4 \text{ ס"מ}$$

$$(16) \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. שאלת הוכחה.} \quad \text{ג. } 32.78 \text{ סמ"ר}$$

# מתמטיקה למחצית ב

פרק 16 - טריגונומטריה - זהויות טריגונומטריות

תוכן העניינים

174	1. זהויות יסוד
178	2. ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות
180	3. מעגל היחידה
183	4. סכום והפרש זוויות
187	5. זווית כפולה
190	6. סכום והפרש פונקציות
193	7. מכפלת פונקציות

## זהויות יסוד:

### סיכום כללי:

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$	$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ , $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$	קשרים בין פונקציות
$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$	$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$	זוויות משלימות ל- $90^\circ$
$\tan \alpha = \cot(90^\circ - \alpha)$	$\cot \alpha = \tan(90^\circ - \alpha)$	
$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$	$\cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$	קשרים בין פונקציות

### שאלות:

#### הוכחת זהויות יסודיות:

הוכח את הזהויות הבאות תוך שימוש בזהויות היסוד:

$$\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1 \quad (2)$$

$$\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos^2 \alpha \quad (4)$$

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2 \quad (6)$$

$$\sin^2(\alpha + 45^\circ) + \sin^2(45^\circ - \alpha) = 1 \quad (8)$$

$$\frac{\sin \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^3 \alpha} = \tan^3 \alpha \quad (10)$$

$$\cos^2 \alpha (1 + \tan^2 \alpha) = 1 \quad (12)$$

$$\frac{\sin^3 \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha) - \cos^3 \alpha} = \tan \alpha \quad (14)$$

$$\frac{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha \quad (16)$$

$$\tan \alpha \cdot \cos \alpha = \sin \alpha \quad (1)$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \tan \alpha \quad (3)$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} = 2 \quad (5)$$

$$\frac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\cos \alpha} = \tan \alpha \quad (7)$$

$$\sqrt{1 + \tan^2 \alpha} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \tan \alpha \quad (9)$$

$$\frac{\sin(90^\circ - \alpha) - \cos^3 \alpha}{\sin^3 \alpha} = \cot \alpha \quad (11)$$

$$\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \cot \alpha \quad (13)$$

$$\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha \sin^2 \alpha \quad (15)$$

**הוכחות מתקדמות:**

$$(17) \quad \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} + \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = 2 + 4 \cot^2 \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(18) \quad \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} + \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{2}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(19) \quad (\cot \alpha - \tan \alpha)(\cot \alpha + \tan \alpha) = (1 + \cot^2 \alpha)(1 + \tan^2 \alpha) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(20) \quad \frac{\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \cot^4 \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(21) \quad 1 - \sin^2 \alpha (1 + \cos^2 \alpha) = \cos^4 \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(22) \quad \left( \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} + \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \right)^2 = 4 + 4 \cot^2 \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(23) \quad \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(24) \quad \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\cot \alpha + \cot \beta} = \tan \alpha \tan \beta \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

**הבעת ביטויים וחישובים באמצעות זהויות יסוד:**

$$(25) \quad \text{נתון כי: } \sin \alpha + \cos \alpha = k$$

הבע באמצעות  $k$  את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$

ב.  $\sin \alpha - \cos \alpha$

ג.  $\tan \alpha + \cot \alpha$

ד.  $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$

$$(26) \quad \text{נתון כי: } \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

מבלי למצוא את  $\alpha$  חשב את:  $\tan^2 \alpha - 2 \cot^2 \alpha$

(27) נתון כי:  $\tan \alpha = \sqrt{7}$ .

מבלי למצוא את  $\alpha$  חשב את:  $\frac{\sqrt{7} \sin \alpha + 6 \cos \alpha}{\sqrt{28} \sin \alpha - \cos \alpha}$ .

(28) חשב את ערך המכפלה הבאה:  $\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \cdot \dots \cdot \tan 88^\circ \cdot \tan 89^\circ$ .

### תשובות סופיות:

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) שאלת הוכחה.
- (3) שאלת הוכחה.
- (4) שאלת הוכחה.
- (5) שאלת הוכחה.
- (6) שאלת הוכחה.
- (7) שאלת הוכחה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) שאלת הוכחה.
- (12) שאלת הוכחה.
- (13) שאלת הוכחה.
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.
- (16) שאלת הוכחה.
- (17) שאלת הוכחה.
- (18) שאלת הוכחה.
- (19) שאלת הוכחה.
- (20) שאלת הוכחה.
- (21) שאלת הוכחה.
- (22) שאלת הוכחה.
- (23) שאלת הוכחה.
- (24) שאלת הוכחה.

$$(25) \quad \text{א. } \frac{k^2 - 1}{2} \quad \text{ב. } \pm\sqrt{2 - k^2} \quad \text{ג. } \frac{2}{k^2 - 1} \quad \text{ד. } \frac{k}{2}(3 - k^2)$$

$$(26) \quad -7.75$$

$$(27) \quad 1$$

$$(28) \quad 1$$

## ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות:

סיכום כללי:

$\alpha = 90^\circ$	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 0^\circ$	
1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\sin \alpha$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\cos \alpha$
$\phi$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\tan \alpha$
0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\phi$	$\cot \alpha$

הערות:

- ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות של  $0^\circ$  ו- $90^\circ$  תלמדנה בהמשך אך ניתנו כעת כדי להשלים את תמונת ערכי הזוויות.
- ניתן לזכור את הטבלה ע"י כתיבה של שורת הסינוס לפי:  $\frac{\sqrt{4}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{0}}{2}$  אשר נותנים את הערכים של השורה הראשונה לאחר פישוט קל. עבור שורת ה- $\cos \alpha$  יש להפוך את הערכים ולבסוף יש לחלק כל זוג ביטויים כדי לכתוב את ערכי  $\tan \alpha$  ולסובב עבור ערכי  $\cot \alpha$ .

שאלות:

חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בערכי הפונקציות הטריגונומטריות של זוויות מיוחדות:

$$1) \sin 30^\circ + \cos 30^\circ$$

$$2) \frac{\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ}{\sin 60^\circ}$$

$$3) \tan 45^\circ + \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ}$$

$$\cdot \frac{1 + \cos 60^\circ}{2 \sin 60^\circ} \quad (4)$$

$$\cdot \cos^2 45^\circ + \sin^2 30^\circ \quad (5)$$

$$\cdot \frac{\tan^2 60^\circ \cdot \cos^2 30^\circ}{\cos^2 60^\circ} \quad (6)$$

$$\cdot \frac{\tan 30^\circ \cdot \cot 60^\circ - \cot 45^\circ \cdot \tan 45^\circ}{4 \left( \sin^2 60^\circ - \frac{1}{4} \right)} \quad (7)$$

$$\cdot \frac{27 \cot^4 60^\circ}{\sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot \tan 60^\circ} \quad (8)$$

### תשובות סופיות:

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 \quad (3)$$

$$\frac{3}{2\sqrt{3}} \quad (4)$$

$$\frac{3}{4} \quad (5)$$

$$9 \quad (6)$$

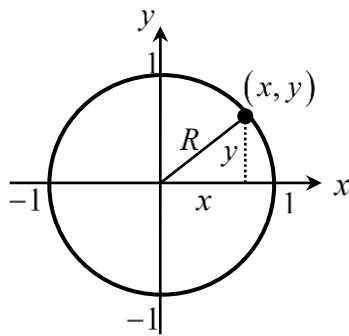
$$-\frac{1}{3} \quad (7)$$

$$2\sqrt{6} \quad (8)$$

## מעגל היחידה - הגדרה וזהויות:

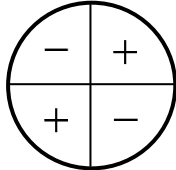
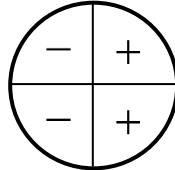
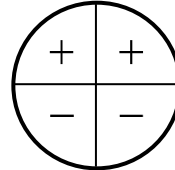
### סיכום כללי:

#### הגדרת מעגל היחידה:



- מעגל קנוני שרדיוסו 1 מוגדר להיות המעגל הטריגונומטרי.
- הנקודות  $(0, -1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  מתאימות לזוויות של  $270^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $0^\circ$ .

#### הזהויות של המעגל הטריגונומטרי:

טנגנס	קוסינוס	סינוס	רביע
$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$	$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$	$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	II
$\tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$	$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$	$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$	III
$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	VI
			סימנים

#### זהויות עבור זווית הגדולות מ-360 מעלות:

ניתן להוסיף או להוריד 'סיבובים' שלמים לזווית לפי:

$$\boxed{\sin(\alpha + 360^\circ k) = \sin \alpha} \quad \boxed{\tan(\alpha + 180^\circ k) = \tan \alpha}$$

$$\boxed{\cos(\alpha + 360^\circ k) = \cos \alpha} \quad \boxed{\cot(\alpha + 180^\circ k) = \cot \alpha}$$

כאשר  $k$  הוא מספר שלם מציין את מספר הסיבובים.

## שאלות:

(1) העבר את הביטויים הבאים לביטויים עם זווית ברביע הראשון. אין צורך לחשב את ערך הביטוי:

א. $\sin 120^\circ$	ב. $\cos 150^\circ$
ג. $\tan 160^\circ$	ד. $\cot 130^\circ$
ה. $\sin 215^\circ$	ו. $\cos 245^\circ$
ז. $\tan 230^\circ$	ח. $\cot 200^\circ$
ט. $\sin 300^\circ$	י. $\cos 310^\circ$

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים ע"י שימוש בזהויות המעגל הטריגונומטרי:

א. $\sin 150^\circ$	ב. $\cos 210^\circ$	ג. $\tan 120^\circ$
ד. $\sin 330^\circ$	ה. $\tan 225^\circ$	ו. $\sin 315^\circ$
ז. $\cos 120^\circ$	ח. $\tan(-30^\circ)$	ט. $\cos(-45^\circ)$
י. $\sin 510^\circ$	יא. $\cos 930^\circ$	יב. $\tan(-225^\circ)$

(3) חשב את ערכי הביטויים הבאים ללא שימוש במחשבון:

$$\begin{aligned} \text{א. } & (\sin 240^\circ \cdot \tan 150^\circ + \cos(-60^\circ))^2 \\ \text{ב. } & 8\sin^2 150^\circ \cdot \tan 135^\circ - 2 \cdot \sin 135^\circ \cdot \cos(-135^\circ) \\ \text{ג. } & \frac{\cot 225^\circ}{\sin(-225^\circ) - \cos 135^\circ} + \tan^2 210^\circ \end{aligned}$$

(4) הוכח כי אם  $\alpha, \beta$  ו- $\gamma$  הן זוויות במשולש, אז מתקיים:

$$\begin{aligned} \text{א. } & \sin(\alpha + \beta) = \sin \gamma \\ \text{ב. } & \sin\left(\frac{\gamma + \beta}{2}\right) = \cos \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $\sin 60^\circ$     ב.  $-\cos 30^\circ$     ג.  $-\tan 20^\circ$     ד.  $-\cot 50^\circ$   
 ה.  $-\sin 35^\circ$     ו.  $-\cos 65^\circ$     ז.  $\tan 50^\circ$     ח.  $\cot 20^\circ$   
 ט.  $-\sin 60^\circ$     י.  $\cos 50^\circ$
- (2) א.  $\frac{1}{2}$     ב.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$     ג.  $-\sqrt{3}$     ד.  $-\frac{1}{2}$   
 ה. 1    ו.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$     ז.  $-\frac{1}{2}$     ח.  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$   
 ט.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$     י.  $\frac{1}{2}$     יא.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$     יב. -1
- (3) א. 1    ב. -1    ג.  $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}$
- (4) שאלת הוכחה.

## סכום והפרש זוויות:

### סיכום כללי:

סכום והפרש עבור  $\sin(\alpha \pm \beta)$  ו- $\cos(\alpha \pm \beta)$  יחושב לפי:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

סכום והפרש עבור  $\tan(\alpha \pm \beta)$  ו- $\cot(\alpha \pm \beta)$

$$\begin{aligned} \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \\ \cot(\alpha \pm \beta) &= \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha} \end{aligned}$$

### הערה:

בסרטון התיאוריה אין התייחסות מיוחדת לזהויות עבור  $\tan(\alpha \pm \beta)$  ו- $\cot(\alpha \pm \beta)$ .

### שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בזהויות של סכום והפרש זוויות וללא שימוש במחשבון:

א. $\sin 75^\circ$	ב. $\sin 15^\circ$	ג. $\sin 105^\circ$
ד. $\sin(-15^\circ)$	ה. $\cos 75^\circ$	ו. $\cos 15^\circ$
ז. $\cos(-105^\circ)$	ח. $\cos 165^\circ$	ט. $\cos(-195^\circ)$

2) חשב ללא שימוש במחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

א.  $\sin 65^\circ \cos 25^\circ + \sin 25^\circ \cos 65^\circ$   
 ב.  $5 \cos 50^\circ \cos 20^\circ + 5 \sin 50^\circ \sin 20^\circ$

(3) הוכח את הזהויות הבאות :

א.  $\sin(60^\circ + \alpha) + \sin(60^\circ - \alpha) = \sqrt{3} \cos \alpha$

ב.  $\cos(45^\circ - \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha) = \sqrt{2} \sin \alpha$

ג.  $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$

ד.  $\tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$

(4) נתון:  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\cos \beta = \frac{8}{17}$  ו- $\alpha, \beta$  זוויות חדות.מבלי למצוא את הערכים של  $\alpha$  ו- $\beta$  חשב :

א.  $\sin(\alpha + \beta)$

ב.  $\cos(\alpha + \beta)$

ג.  $\tan(\alpha + \beta)$

(5) הוכח את הזהות:  $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \beta \cos \alpha$ (6) הוכח את הזהות:  $(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha) = \sin 3\alpha + \cos \alpha$ (7) הוכח את הזהות:  $\tan 7\alpha - \tan 5\alpha - \tan 2\alpha = \tan 7\alpha \tan 5\alpha \tan 2\alpha$ (8) הוכח את הזהות:  $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$ (9) הוכח את הזהות:  $\cot \alpha - \cot \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$ 

(10) הוכח את הזהות הבאה :

$$\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \sin(\alpha + \beta + \gamma)$$

**(11)** הוכח כי מתקיים:  $\sin 65^\circ \cos 25^\circ + \sin 25^\circ \cos 65^\circ = 1$ .

**(12)** הוכח כי מתקיים:  $\tan 18^\circ \tan 27^\circ + \tan 18^\circ + \tan 27^\circ = 1$ .

**(13)** נתון כי:  $\sin 76^\circ = m$ . הבע את  $\sin 31^\circ$  באמצעות  $m$ .

**(14)** הזוויות  $\alpha$  ו- $\beta$  הן זוויות חדות.

נתון כי:  $\tan \alpha = \frac{(2-k)\sqrt{3}}{3k}$  ו-  $\tan \beta = \frac{(2k-1)\sqrt{3}}{3}$ .

הראה כי מתקיים:  $\alpha + \beta = 60^\circ$ .

**(15)** היעזר בנוסחה:  $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$  ומצא את  $\tan x$  ו-  $\tan y$ .

אם ידוע כי:  $\tan(x+y) = -3$  ו-  $\tan(x-y) = \frac{1}{3}$ . הבחן בין שני מקרים.

**תשובות סופיות:**

$$(1) \quad \begin{array}{l} \text{א. } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{ב. } \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{ג. } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{ד. } \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \quad \text{ה. } \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \text{ו. } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{ז. } \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \quad \text{ח. } -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{ט. } -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{l} \text{א. } 1 \\ \text{ב. } \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

(3) שאלת הוכחה.

$$(4) \quad \begin{array}{l} \text{א. } \frac{84}{85} \\ \text{ב. } -\frac{13}{85} \\ \text{ג. } -6\frac{6}{13} \end{array}$$

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

$$(14) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} (m - \sqrt{1-m^2})$$

(15) שאלת הוכחה.

$$(16) \quad 1 \text{ ו-} 2 \text{ או } -\frac{1}{2} \text{ ו-} -1$$

## זווית כפולה:

### סיכום כללי:

נפתח זווית כפולה לפי הצורות הבאות:

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2\sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha \end{aligned}$$

### שאלות:

(1) הוכח את הזהויות הבאות:

$$\begin{aligned} \text{א. } 4\sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha &= \sin 4\alpha \\ \text{ב. } (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 &= 1 - \sin 2\alpha \\ \text{ג. } (\sin 3\alpha - \cos 3\alpha)^2 &= 1 - \sin 6\alpha \\ \text{ד. } \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha &= \cos 2\alpha \\ \text{ה. } \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} &= 2 \cot 2\alpha \\ \text{ו. } \frac{\cos 2\alpha - 2\sin^2 \alpha \cos 2\alpha}{\sin 4\alpha} &= \frac{1}{2} \cot 2\alpha \\ \text{ז. } \cos^2 2\alpha &= 4\sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha + 1 \\ \text{ח. } \cos 4\alpha &= 8\cos^4 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 1 \end{aligned}$$

(2) הוכח את הזהות:  $\sin^3 \alpha = \frac{3\sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$  ע"י כתיבה של  $\sin 3\alpha$

לפי:  $\sin(\alpha + 2\alpha)$  ושימוש בזהויות שנלמדו.

(3) הוכח את הזהות:  $\cos^3 \alpha = \frac{3\cos \alpha + \cos 3\alpha}{4}$  ע"י כתיבה של  $\cos 3\alpha$

לפי:  $\cos(\alpha + 2\alpha)$  ושימוש בזהויות שנלמדו.

(4) נתונה זווית חדה  $\alpha$  המקיימת:  $\sin \alpha = \frac{40}{41}$ . מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א.  $\cos \alpha$

ב.  $\tan \alpha$

ג.  $\sin 2\alpha$

ד.  $\cos 2\alpha$

ה.  $\tan 2\alpha$

(5) נתונה זווית חדה  $\alpha$  המקיימת:  $\tan \alpha = \frac{5}{12}$ . מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א.  $\sin \alpha$

ב.  $\cos \alpha$

ג.  $\sin 2\alpha$

ד.  $\cos 2\alpha$

(6) נתונה זווית  $\alpha$  ברביע הראשון וזווית  $\beta$  ברביע השני המקיימות:  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$

ו- $\cos \beta = -0.8$ . מבלי למצוא את  $\alpha$  ו- $\beta$  חשב את הביטויים הבאים:

א.  $\sin(\alpha + \beta)$

ב.  $\cos(\alpha + \beta)$

ג.  $\sin(2\alpha + \beta)$

(7) נתון כי  $\sin \alpha + \cos \alpha = 1.2$  עבור  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . חשב את  $\sin 2\alpha$ .

(8) פשט את הביטוי הבא:  $\sqrt{\frac{1 + \cos 8\alpha}{2}}$

(9) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא:  $\frac{\sin 16^\circ \cos 16^\circ}{3 - 6 \sin^2 29^\circ}$

(10) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא:  $\frac{\sin^2 78^\circ - \cos^2 78^\circ}{\sin 66^\circ}$

(11) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא:  $\frac{5 \tan 15^\circ (1 - 2 \cos^2 15^\circ)}{1 - \tan^2 15^\circ}$

**תשובות סופיות:**

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

$$(4) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } \frac{9}{41} & \text{ב. } 4\frac{4}{9} \\ \text{ג. } \frac{720}{1681} & \text{ד. } -\frac{1519}{1681} \end{array}$$

$$\text{ה. } -\frac{720}{1519}$$

$$(5) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } \frac{5}{13} & \text{ב. } \frac{12}{13} \\ \text{ג. } \frac{120}{169} & \text{ד. } \frac{119}{169} \end{array}$$

$$(6) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } \frac{16}{65} & \text{ב. } -\frac{63}{65} \\ \text{ג. } -\frac{123}{845} & \end{array}$$

(7) .0.44

(8)  $\cos 4\alpha$ 

$$(9) \quad \frac{1}{6}$$

(10) .1

(11) .-1.25

## סכום והפרש פונקציות טריגונומטריות:

### סיכום כללי:

להלן נוסחאות הסכום וההפרש של פונקציות טריגונומטריות:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

### הערה:

בסרטון התיאוריה אין התייחסות לזהויות הסכום וההפרש של טנגנס ושל קוטנגנס עקב חוסר השימוש בהן בפתרון שאלות.

### שאלות:

- (1) הוכח את הזהות הבאה:  $\sin 5\alpha + \sin 3\alpha = 2 \sin 4\alpha \cos \alpha$
- (2) הוכח את הזהות הבאה:  $\sin 7\alpha - \sin 2\alpha = 2 \sin 2.5\alpha \cos 4.5\alpha$
- (3) הוכח את הזהות הבאה:  $\cos \alpha + \cos 5\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 3\alpha$
- (4) הוכח את הזהות הבאה:  $\cos 5\alpha - \cos 2\alpha = -2 \sin 3.5\alpha \cos 1.5\alpha$
- (5) הוכח את הזהות הבאה:  $\sin 3\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha$
- (6) הוכח את הזהות הבאה:  $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$
- (7) הוכח את הזהות הבאה:  $\sin(2\alpha + \beta) - 2 \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha = \sin \beta$
- (8) הוכח את הזהות הבאה:  $\frac{\sin 5\alpha - \sin \alpha}{\sin 4\alpha - \sin 2\alpha} = 2 \cos \alpha$

$$(9) \quad \frac{\sin 7\alpha - \sin 3\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 6\alpha} = 2 \sin \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה :}$$

$$(10) \quad \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \tan 2\alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה :}$$

$$(11) \quad \tan \alpha + \tan 3\alpha = \frac{2 \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha} \quad \text{הוכח את הזהות הבאה :}$$

$$(12) \quad \text{פשט את הביטוי : } \frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1} \quad \text{ומצא את ערכו מבלי להיעזר}$$

$$\text{במחשבון אם ידוע כי } \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{6}$$

$$(13) \quad \text{נתון כי } \alpha \text{ ו- } \beta \text{ הן זוויות חדות המקיימות : } \sin \alpha = \frac{2mn}{m^2 + n^2} \text{ ו- } \sin \beta = \frac{n^2 - m^2}{m^2 + n^2}$$

$$\text{הראה כי : } \alpha + \beta = 90^\circ$$

$$(14) \quad \text{היעזר במעבר מכפל לסכום או הפרש}$$

$$\text{והוכח כי : } \cos 6\alpha \cos 2\alpha - \cos 5\alpha \cos \alpha = -\sin 7\alpha \sin \alpha$$

$$(15) \quad \text{היעזר במעבר מכפל לסכום או הפרש}$$

$$\text{והוכח כי : } \sin 4\alpha \sin 2\alpha - \sin 5\alpha \sin \alpha + \cos 3\alpha \cos \alpha = \cos 2\alpha$$

$$(16) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא : } \sin 52.5^\circ \cdot \sin 7.5^\circ$$

$$(17) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא : } \frac{\sin 35^\circ \sin 55^\circ}{\cos 40^\circ \cos 20^\circ} - 0.25$$

$$(18) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא : } \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$$

$$(19) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא : } \sin 5^\circ \cdot \sin 25^\circ \cdot \sin 35^\circ \cdot \sin 55^\circ \cdot \sin 65^\circ \cdot \sin 85^\circ$$

### תשובות סופיות:

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) שאלת הוכחה.

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12)  $-\frac{7}{9}$ .

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16)  $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$ .

(17) .1

(18)  $\frac{1}{8}$ .(19)  $\frac{1}{64}$ .

## מכפלת פונקציות:

### סיכום כללי:

להלן נוסחאות המעבר מסכום למכפלה וממכפלה לסכום:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \end{array} \right.$$

### שאלות:

- (1) הוכח את הזהות הבאה:  $\sin 7\alpha \cos \alpha = \frac{1}{2}(\sin 8\alpha + \sin 6\alpha)$
- (2) הוכח את הזהות הבאה:  $\cos 11\alpha \sin 3\alpha = \frac{1}{2}(\sin 14\alpha - \sin 8\alpha)$
- (3) הוכח את הזהות הבאה:  $\cos 4\alpha \cos 10\alpha = \frac{1}{2}(\cos 6\alpha + \cos 14\alpha)$
- (4) הוכח את הזהות הבאה:  $\sin 3\alpha \sin 7\alpha = \frac{1}{2}(\cos 4\alpha - \cos 10\alpha)$
- (5) הוכח את הזהות הבאה:  $2 \sin 7\alpha \sin 2\alpha + \cos 9\alpha = \cos 5\alpha$
- (6) הוכח את הזהות הבאה:  $\sin 7\alpha \cos 4\alpha - \sin 4\alpha \cos \alpha = \sin 3\alpha \cos 8\alpha$
- (7) הוכח את הזהות הבאה:  $\sin \alpha \sin 3\alpha = \cos 2\alpha - \cos 3\alpha \cos \alpha$
- (8) הוכח את הזהות הבאה:  $2(\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha) = \cos 2\alpha - \cos 2\beta$
- (9) הוכח את הזהות הבאה:  $\frac{2}{\cot \beta - \tan \alpha} = \tan(\alpha + \beta) - \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$

### תשובות סופיות:

- 1) הוכחה.
- 2) הוכחה.
- 3) הוכחה.
- 4) הוכחה.
- 5) הוכחה.
- 6) הוכחה.
- 7) הוכחה.
- 8) הוכחה.
- 9) הוכחה.